**Relações entre graus
de morfismos irredutíveis e
partição pós-projetiva**

Danilo Dias da Silva

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio
financeiro da CAPES e do CNPQ

São Paulo, maio de 2013

Relações entre graus de morfismos irredutíveis e partição pós-projetiva

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/07/2013. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos - IME-USP
- Dr. Heily Wagner - IME-USP
- Prof. Dr. Sonia Trepode - Universidad Nacional Mar del Plata
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a possibilidade de escrever esta tese primeiramente aos meus pais que investiram na minha educação desde a primeira infância e principalmente pelo tempo e atenção dispensados. Isto foi importante para que eu pudesse obter uma educação básica de qualidade que me proporcionou a opção de seguir o caminho da carreira acadêmica na minha vida adulta. Também gostaria de agradecer o fato de sempre me darem liberdade e autonomia para tomar minhas decisões e de terem me apoiado durante todo o tempo.

Gostaria de agradecer aos meus amigos Fabrício, Bráulio e Mago que dividiram apartamento comigo durante o doutorado e que fizeram minha rotina menos estressante e mais prazerosa. Também gostaria de agradecer todos os amigos do IME-USP com quem dividi momentos de desconcentração em conversas pelos corredores, no café etc. e também momentos difíceis ao tentarmos juntos vencer os obstáculos que encontrávamos no decorrer do doutorado. Muito do meu êxito devo ao suporte que recebi deles em vários momentos.

Também gostaria de agradecer aos amigos do grupo de Representações de Álgebras do IME-USP, em especial a Heily e Tanise e aos amigos do grupo de Representações de Álgebras da Universidade Nacional de Mar del Plata, em especial a Sonia Trepode e a Claudia Chaio por terem dispensado seu tempo e trabalho mais proximamente comigo na parte final do meu doutorado. Gostaria muito de agradecer a todo o grupo de Mar del Plata pela calorosa receptividade com a qual fui recebido durante o mês que passei na Argentina em visita científica.

Por fim, agradeço ao meu orientador Flávio Coelho por ter aceitado me orientar e por toda a ajuda que dele recebi durante o desenvolvimento da pesquisa e durante a fase de redação da tese que muito evoluiu com as suas sugestões.

On ne reçoit pas la sagesse,
il faut la découvrir soi-même après un trajet
que personne ne peut faire pour nous,
ne peut nous épargner, car elle est un
point de vue sur les choses.

Marcel Proust

Resumo

SILVA, D. D. **Relação entre grau de morfismos irredutíveis e partição pós-projetiva.** 2013. 68 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Nesta tese estudamos o conceito de grau de um morfismo irredutível em $\text{mod}A$ relacionado ao conceito de teoria de partições pós-projetiva e pré-injetiva de uma álgebra de artin A . Introduzimos o conceito de grau de um morfismo irredutível em relação a uma categoria $\mathfrak{D}$ de $\text{ind}A$ e estudamos o caso em que $\mathfrak{D}$ é um elemento da partição $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_\infty$. Dentro do contexto de grau de um irredutível em relação a uma subcategoria resolvemos um problema proposto por Chaio, Le meur e Trepode em [9]. Utilizando as partições pós-projetiva e pré-injetiva obtemos outra demonstração para a caracterização de álgebras de tipo finito obtida em [12] e obtemos uma caracterização semelhante para subcategorias de módulos Δ -bons de tipo finito de $\text{mod}A$ tal que A é uma álgebra quasi-hereditária. Também utilizamos a teoria de partições para provar que, dada uma álgebra quasi-hereditária A e $\mathcal{F}(\Delta) \subseteq \text{mod}A$, se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito.

Palavras-chave: Grau de irredutíveis, Partição pós-projetiva, Álgebra quasi-hereditária.

Abstract

SILVA, D. D. **Connections between the degree of irreducible morphisms and the postprojective partition.** 2013. 68 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

In this thesis we analyse the concept of the degree of an irreducible morphism associated to the theory of postprojective and preinjective partitions. We introduce the idea of the degree of an irreducible morphism related to a subcategory $\mathfrak{D}$ and we study the case in which $\mathfrak{D}$ is an element of the postprojective partition $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_\infty$. By using the concept of the degree of an irreducible morphism related to a subcategory $\mathfrak{D}$ we present a solution to a problem recently proposed by Chaio, Le Meur and Trepode in [9]. We also use the theory of postprojective and preprojective partitions to give another proof to the characterization of finite type algebras obtained by Chaio and Liu in [12] and we apply similar techniques to obtain a characterization of finite type $\mathcal{F}(\Delta)$ subcategories where $\mathcal{F}(\Delta)$ is the subcategory of Δ -good modules of the category of finitely generated modules over a quasi-hereditary algebra. We also prove that given a quasi-hereditary algebra A and $\mathcal{F}(\Delta) \subseteq \text{mod} A$, if $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ then $\mathcal{F}(\Delta)$ is of finite type.

Keywords: Degree of irreducible morphisms, Postprojective partition, Quasi-hereditary algebra.

Sumário

1	Introdução	1
2	Resumo da Teoria de Auslander Reiten	6
3	Ferramentas Básicas	19
3.1	Partições pós-projetiva e pré-injetiva de uma álgebra de artin	19
3.2	Grau de morfismos irredutíveis	23
3.3	O recobrimento genérico de aljavas com translação	26
4	Sobre o grau de morfismos irredutíveis	31
4.1	Grau de um morfismo irredutível em relação a uma subcategoria $\mathfrak{D}$	31
4.2	Resolução de um problema proposto por Chaio, Le Meur e Trepode	33
4.3	Relação entre os graus à esquerda e à direita de irredutíveis	38
5	Relações entre partições e o radical de modA	41
5.1	Uma caracterização de álgebras de artin de tipo finito	41
5.2	Grau de morfismos irredutíveis e partições pós-projetivas	44
5.2.1	Grau de um irredutível em relação a $\mathbf{P}_0$	45
5.2.2	Grau à direita de morfismos irredutíveis em π -componentes	49
5.3	Componentes $\mathbf{P}$ -discretas	52
5.4	Caminhos de irredutíveis entre módulos em $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_\infty$	55
6	Partições de uma categoria de módulos Δ-bons	57
6.1	Resumo da teoria básica de álgebras quasi-hereditárias	58
6.2	Se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito	61
6.3	Subcategorias de módulos Δ -bons de tipo finito	64

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho lidamos com um certo tipo de álgebra associativa A chamada de álgebra de artin e com a categoria de A -módulos à direita finitamente gerados denominada $\text{mod}A$. Uma álgebra de artin A é um anel finitamente gerado sobre um anel comutativo artiniano k e são exemplos de álgebras de artin as k -álgebras de dimensão finita sobre um corpo k . O objetivo da teoria de representações é estudar $\text{mod}A$, isto é, os A -módulos finitamente gerados, suas relações e os morfismos entre eles.

As noções em $\text{mod}A$ de morfismos irredutíveis e sequências quase cindidas - ou sequências de Auslander-Reiten como ficaram mais comumente conhecidas depois, foram introduzidas por Auslander e Reiten em 1972. Estes conceitos tiveram um papel fundamental dentro do desenvolvimento da teoria de representações de álgebras nas décadas seguintes. A partir deles obtemos, por exemplo, uma aljava de translação Γ_A (um tipo de grafo orientado acompanhado de uma função translação definida em um subconjunto de seus vértices) em que cada vértice nesta aljava representa uma classe de A -módulos indecomponíveis isomorfos entre si e que existe uma flecha começando em um vértice $[M]$ e terminando em um vértice $[N]$ se, e somente se, existe morfismo irredutível entre os A -módulos indecomponíveis M e N . Desta forma, poderemos obter informações sobre $\text{ind}A$, a categoria dos indecomponíveis sobre A , através da aljava Γ_A que pode ser vista como uma maneira de organizar $\text{ind}A$ em um grafo (possivelmente desconexo).

Existe uma importante conexão entre os morfismos irredutíveis e o radical rad_A da categoria $\text{mod}A$: um morfismo entre dois módulos indecomponíveis M e N é irredutível se, e somente se, está em $\text{rad}_A(M, N)$ mas não está em $\text{rad}_A^2(M, N)$. Desta forma, a composição de n morfismos irredutíveis $f_i : X_{i-1} \rightarrow X_i$, $i = 1, \dots, n$, tais que X_i é indecomponível $\forall i$, está em rad^n . Em [19], Igusa e Todorov deram uma resposta parcial à questão de quando a composição desses irredutíveis poderá estar em rad^{n+1} provando que se o caminho formado pelos irredutíveis acima é seccional (ver definição no Capítulo 2) então a composição destes irredutíveis não está em rad^{n+1} .

Com o propósito de avançar nesta questão, Liu em [20] definiu as noções de grau de um morfismo irredutível à esquerda e à direita. Estas definições foram usadas depois pelo próprio Liu para classificar

as possíveis componentes conexas semi-estáveis de Γ_A . Lembrando que o grau à esquerda de um morfismo irreduzível $f : X \rightarrow Y$ tal que $X \in \text{ind}A$ é o menor inteiro positivo $m \geq 1$ tal que existem $Z \in \text{mod}A$ e $h : Z \rightarrow X$ tais que $h \in \text{rad}_A^m(Z, X) \setminus \text{rad}_A^{m+1}(Z, X)$ e $fh \in \text{rad}_A^{m+2}(Z, Y)$ e denotaremos $d_l(f) = m$. Se o tal inteiro m não existe então dizemos que o grau de f é infinito e denotaremos $d_l(f) = \infty$. Dualmente estará definido $d_r(f)$, o grau à direita de f .

Com o objetivo de facilitar a notação, usaremos também o conceito de profundidade de um morfismo introduzidos por Chaio e Liu em [12]. Seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo em $\text{mod}A$. Definimos a *profundidade* de f , denotada por $\text{dp}(f)$, como sendo o inteiro positivo n tal que $f \in \text{rad}^n(M, N) \setminus \text{rad}^{n+1}(M, N)$. Caso não exista tal inteiro, ou seja, se $f \in \text{rad}^\infty(M, N)$ então dizemos que a profundidade de f é infinita.

Chaio, Le Meur e Trepode em [9] introduziram um tipo de recobrimento de aljavas que aplicado a uma componente conexa de Γ_A nos diz algo interessante sobre o fenômeno descrito acima: se existe $h \in \text{Hom}_A(Z, X)$ tal que $\text{dp}(h) = m$ e irreduzível $f : X \rightarrow Y$ em Γ_A tais que $fh \in \text{rad}_A^{m+2}(Z, Y)$ então existe $h' \in \text{Hom}_A(Z, X)$ tal que $\text{dp}(h') = m$ e $fh' = 0$. Este resultado os levou a obter consequências interessantes que haviam sido obtidas anteriormente somente em componentes de Γ_A com certas propriedades particulares. No mesmo artigo os autores deixaram em aberto a questão: podemos substituir h' acima por um caminho de irreduzíveis entre módulos indecomponíveis que começa em Z e termina em X ? Nesta tese responderemos em afirmativo a essa questão. Na verdade obteremos um pouco mais, que o caminho obtido neste caso será formado necessariamente por m irreduzíveis.

Antes da resolução do problema no Capítulo 4 optamos por introduzir o conceito de grau à esquerda (e à direita) de um morfismo irreduzível f em relação a uma subcategoria $\mathfrak{D}$ qualquer de $\text{ind}A$. Assim, o grau à esquerda de $f : X \rightarrow Y$ em relação a $\mathfrak{D}$ é o menor inteiro positivo $m \geq 1$ tal que existem $Z \in \mathfrak{D}$ e $h : Z \rightarrow X$ tais que $\text{dp}(h) = m$ e $fh \in \text{rad}_A^{m+2}(Z, Y)$. Se não existe tal inteiro teremos que o grau de f em relação a $\mathfrak{D}$ é infinito, $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = \infty$. Dessa forma, podemos reformular o problema da seguinte maneira: seja $\mathfrak{D}$ uma subcategoria de $\text{mod}A$ e $f : X \rightarrow Y$ irreduzível tal que $X \in \text{ind}A$. Se $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = n < \infty$, existe caminho λ começando em $M \in \mathfrak{D}$ e terminando em X de comprimento e profundidade iguais a n tal que a composição de f com a composição do caminho λ seja nula?

Voltando à teoria básica de Representações de Álgebras, dissemos anteriormente que a aljava Γ_A poderia ser vista como uma forma de organizar a categoria $\text{ind}A$. Outra forma de organizar essa categoria é através das partições pós-projetivas e pré-injetivas introduzidas por Auslander e Smalø em [4]. Na Seção 3.1, fazemos um resumo da teoria. Assim, temos que a classe de indecomponíveis em $\text{ind}A$ pode ser particionada em subclasses disjuntas $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, \dots, \mathbf{P}_\infty$ de tal maneira que a classe $\mathbf{P}_0$ é formada pelos projetivos indecomponíveis.

Intuitivamente, o nível i de um elemento $\mathbf{P}_i$ da partição pós-projetiva nos diz a distância que os indecomponíveis em $\mathbf{P}_i$ estão de serem projetivos de forma que os módulos em $\mathbf{P}_\infty$ - subcategoria que é

sempre não-vazia em álgebras de tipo infinito, podem ser vistos como os módulos que não possuem nenhuma propriedade análoga às que caracterizam os projetivos. Os módulos em $\bigcup_{0 \leq i < \infty} \mathbf{P}_i$ por outro lado satisfazem propriedades análogas às dos projetivos em certas subcategorias de $\text{mod}A$ e serão chamados de módulos pós-projetivos.

Nesta tese, procuramos estabelecer algumas relações entre o problema de determinar se o grau à esquerda (ou à direita) de um morfismo irredutível é finito e a teoria de partições. Também estudamos o grau de um morfismo irredutível $f : X \rightarrow Y$ em relação a uma subcategoria $\mathfrak{D}$ tal que $\mathfrak{D}$ é um elemento da partição $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, \dots\}$. De particular interesse é o estudo do grau à esquerda de um irredutível $f : X \rightarrow Y$ em relação a $\mathbf{P}_0$. Quando este é finito, provamos que X é pós-projetivo e que $\text{Ker} f$ é módulo pós-projetivo em $\mathbf{P}_i$ tal que $i \leq d_l^{\mathbf{P}_0}(f) - d_l(f)$.

Na gênese dos resultados do parágrafo anterior está o Lema 5.1 que diz que dado $i > 0$, temos $\text{Hom}(M, N) = \text{rad}^i(M, N) \forall M \in \mathbf{P}_0, \forall N \in \mathbf{P}_i$ e $\text{Hom}(M, N) = \text{rad}^\infty(M, N) \forall M \in \mathbf{P}_0, \forall N \in \mathbf{P}_\infty$. Este lema (e o seu dual) ao relacionar a partição pós-projetiva (respectivamente pré-injetiva) de $\text{ind}A$ com o radical rad_A de $\text{mod}A$ nos fornece uma ferramenta que pode simplificar a resolução de alguns problemas que até então estavam sendo abordados somente dentro da teoria de partições ou através do estudo do radical de $\text{mod}A$. Um exemplo interessante consiste em uma caracterização das álgebras de tipo finito relacionada a profundidade de um número finito de morfismos em $\text{mod}A$ obtida por Chaio e Liu em [12]. Mais precisamente, dado um módulo simples S fixando uma cobertura projetiva $\pi_S : P_S \rightarrow S$ e um envelope injetivo $\iota_S : S \rightarrow I_S$ e denotando $\theta_S = \iota_S \pi_S$, Chaio e Liu demonstraram que são equivalentes:

- a) A é de tipo finito.
- b) A profundidade de π_S é finita para todo módulo simples S .
- c) A profundidade de ι_S é finita para todo módulo simples S .
- d) $\theta_S \notin (\text{rad}^\infty)^2$ para todo módulo simples S .

Nesta tese fomos capazes de obter a mesma caracterização através da teoria de partições e do Lema 5.1 e também de acrescentar um item a essa caracterização: se $(\text{rad}^\infty)^2 = 0$ então A é de tipo finito. Dessa forma apresentamos também uma nova demonstração para um resultado conhecido (ver [15]). Esta nova abordagem apresenta algumas vantagens já que toda subcategoria funtorialmente finita de $\text{mod}A$ possui partições pós-projetiva e pré-injetiva e na sua demonstração não utilizamos os conceitos de submódulos ou imagens de morfismos. Assim, subcategorias funtorialmente finitas que não fossem necessariamente fechadas para submódulos ou fatores mas que contivessem os projetivos indecomponíveis e/ou os injetivos indecomponíveis de $\text{mod}A$ seriam exemplos oportunos para testar se nossa abordagem levaria a uma caracterização semelhante.

Obtivemos sucesso em encontrar uma caracterização equivalente a $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$ para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ de módulos Δ -bons (ou subcategoria de módulos com boa filtração) de $\text{mod}A$ tal que A é uma álgebra quasi-hereditária. Este resultado segue uma tendência na literatura de encontrar afirmações equivalentes para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ à afirmações demonstradas para $\text{mod}A$ tal que A é uma álgebra de artin.

Um dos exemplos deste tipo de abordagem foi o trabalho de Deng e Zhu em [16]. Trata-se de uma afirmação equivalente à demonstrada por Happel e Liu em [18] para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$, isto é, se a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ não possui ciclos curtos então é de tipo finito. Recentemente Zeng em [25] foi capaz de demonstrar que se $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\infty$ e $\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_\infty$ são respectivamente partições pós-projetiva e pré-injetiva da subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ e se $\mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty = \emptyset$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito, obtendo portanto uma afirmação equivalente à demonstrada por Bautista e Coelho em [8].

Nesta tese obteremos também um resultado equivalente ao demonstrado por Coelho, Marcos, Merklen e Skowronski em [15]. Demonstraremos que se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito, sob a condição de que A seja uma álgebra quasi-hereditária sobre um corpo k perfeito e infinito. Para tanto, utilizaremos novamente o fato de que $\mathcal{F}(\Delta)$ é funtorialmente finita e, portanto, possui partições pós-projetiva e pré-injetiva e o resultado de Zeng citado no parágrafo anterior.

Esta tese está organizada como se segue:

No Capítulo 2 faremos um resumo da teoria de Auslander-Reiten introduzindo conceitos como morfismos irreduzíveis, sequências de Auslander-Reiten, Aljavas de Auslander-Reiten, caminhos de irreduzíveis, entre outros.

No Capítulo 3 relembremos alguns resultados importantes na literatura sobre o conceito de grau de morfismos irreduzíveis. Faremos no mesmo capítulo um resumo sobre teoria de partições pós-projetiva e pré-injetiva de uma subcategoria $\mathcal{C}$ funtorialmente finita de $\text{mod}A$. Relembremos alguns resultados na literatura sobre relações entre a teoria de partições e a aljava de Auslander-Reiten Γ_A obtidas no caso particular $\mathcal{C} = \text{mod}A$. Na última seção, introduziremos o conceito de recobrimento genérico de uma aljava com translação como definido em [9] e enunciaremos os resultados obtidos no mesmo artigo necessários para a demonstração do Lema 4.2.

No Capítulo 4 começa o nosso estudo sobre a noção de grau de um morfismo irreduzível em relação a uma subcategoria de $\text{mod}A$ e apresentamos uma solução para o problema proposto por Chaio, Le Meur e Trepode em [9]. Analisaremos algumas consequências desse resultado e ao fim do capítulo provaremos que o grau à esquerda de um morfismo irreduzível $f : X \rightarrow Y$ tal que $X \in \text{ind}A$ está relacionado com o grau à direita dos morfismos irreduzíveis $g : \text{Ker} f \rightarrow E$ tais que $E \in \text{ind}A$.

O Capítulo 5 contém uma aplicação da teoria de partições para obter uma caracterização de álgebras de tipo finito que melhora a caracterização obtida por Chaio e Liu mencionada acima. Em seguida tentamos estabelecer conexões entre o problema de saber se o grau de um morfismo irreduzível é finito e

a teoria de partições. Continuaremos o estudo da noção de grau de um morfismo irredutível em relação a uma subcategoria $\mathfrak{D}$ de $\text{mod}A$ tal que $\mathfrak{D}$ é elemento da partição pós-projetiva. Classificaremos como pós-projetivos ou $\mathbf{P}_\infty$ -simples os cokernels de irredutíveis de uma π -componente em relação ao grau à direita desses irredutíveis. Provaremos que se Γ é uma componente de Γ_A tal que para todo irredutível $M \rightarrow N$ em Γ tal que M, N são módulos pós-projetivos o nível pós-projetivo de M não é maior que o nível de N então não haverá "salto" no níveis de módulos pós-projetivos indecomponíveis unidos por irredutível nesta componente, ou seja, se $M \rightarrow N$ é irredutível em Γ tal que $M \in \mathbf{P}_i$, $0 \leq i < \infty$, então $N \in \mathbf{P}_i$ ou $N \in \mathbf{P}_{i+1}$.

No Capítulo 6 faremos o estudo da subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ inspirados pelas ideias desenvolvidas no Capítulo 5. Demonstraremos que se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito, sob a condição de que A seja uma álgebra quasi-hereditária sobre um corpo k perfeito e infinito. Terminaremos o capítulo exibindo uma cota superior para o número de níveis da partição pós-projetiva (respectivamente partição pré-injetiva) de uma subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ de tipo finito.

Capítulo 2

Resumo da Teoria de Auslander Reiten

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e alguns resultados básicos dentro da Teoria de Auslander-Reiten que serão utilizados no decorrer do texto. Assumiremos conhecimento do leitor sobre conceitos bem estabelecidos na literatura dentro da teoria de anéis e módulos bem como conceitos geralmente utilizados da teoria de categoria e funtores. Fazemos referência a [1] para um estudo mais detalhado destes conceitos.

Álgebras de artin

Seja k um anel comutativo artiniano. Uma k -álgebra A é uma álgebra de artin quando é finitamente gerada como um k -módulo. Álgebras de dimensão finita sobre um corpo k são álgebras de artin. Assim, dado um corpo k , são exemplos de álgebras de dimensão finita sobre k o próprio corpo k e anéis de grupo kG em que G é grupo finito, além das álgebras das matrizes $M_n(k)$ com entradas em k . Um exemplo de álgebra de artin que não é sobre um corpo é $\mathbb{Z}_4$, o anel dos inteiros módulo 4. Neste texto todas as álgebras A terão unidade.

Uma álgebra é dita *hereditária* se todo submódulo de um A -módulo projetivo é projetivo. No Capítulo 6 trabalharemos com as álgebras chamadas *quasi-hereditárias*. Optamos por introduzir os conceitos básicos relativos às álgebras quasi-hereditárias no próprio Capítulo 6.

Categoria de módulos

Seja A uma álgebra de artin. Denotaremos por $\text{mod}A$ a categoria de A -módulos finitamente gerados à direita. Nesta tese, todos os módulos e morfismos considerados estarão em $\text{mod}A$. Em alguns resultados consideraremos o caso mais geral em que A é uma álgebra de artin qualquer. Em outros, exigiremos que k seja um corpo algebricamente fechado ou mais geralmente um corpo perfeito e infinito. Denotaremos por $\text{ind}A$ a categoria formada pelos representantes de cada classe de isomorfismo de A -módulos

indecomponíveis finitamente gerados à direita. Se $\mathfrak{C}$ é uma subcategoria de $\text{mod}A$ denotaremos por $\text{add}\mathfrak{C}$ a subcategoria plena de $\text{mod}A$ cujos objetos são somas diretas de somandos indecomponíveis de módulos em $\mathfrak{C}$.

Dados dois A -módulos M e N o grupo abeliano de A -homomorfismos de M em N será denotado por $\text{Hom}_A(M, N)$ ou simplesmente por $\text{Hom}(M, N)$ quando não houver possibilidade de confusão sobre a álgebra A considerada. Dado um A -módulo M , denotamos por $\text{Aut}(M)$ o subgrupo de $\text{Hom}(M, M)$ formado pelos automorfismos $f : M \rightarrow M$, ou seja, os homomorfismos f de M em M que são bijeções.

Dizemos que um morfismo $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ é um *epimorfismo que cinde* (respectivamente, *monomorfismo que cinde*) se existe um morfismo $g \in \text{Hom}_A(N, M)$ tal que $fg = 1_N$ (respectivamente, $gf = 1_M$). Dizemos que um morfismo f *cinde* se é epimorfismo que cinde ou monomorfismo que cinde.

Seja A uma álgebra de artin e sejam M e N em $\text{mod}A$. Definimos o *radical* $\text{rad}_A(M, N)$ de $\text{Hom}_A(M, N)$ por

$$\text{rad}_A(M, N) = \{f \in \text{Hom}(M, N) \mid hf g \text{ não é isomorfismo para todo } g : X \rightarrow M \text{ e } h : N \rightarrow X \text{ tal que } X \in \text{ind}A\}.$$

A partir desta definição, pode-se demonstrar (como feito em [6]) que rad_A - a classe formada por todos os morfismos em $\text{rad}_A(M, N)$ para todos os módulos M, N em $\text{mod}A$, é um *ideal da categoria* $\text{mod}A$, ou seja, $\text{rad}_A(M, N)$ é grupo abeliano para todo M, N em $\text{mod}A$ e se $f \in \text{rad}_A(M, N)$ e $g : X \rightarrow M$ e $h : N \rightarrow Y$ são morfismos quaisquer em $\text{mod}A$ então $fg \in \text{rad}_A(X, N)$ e $hf \in \text{rad}_A(M, Y)$.

Dados $n \geq 1$ e $M, N \in \text{mod}A$, definiremos os subgrupos $\text{rad}^n(M, N)$ de $\text{Hom}(M, N)$ por indução: para $n = 1$, fazemos $\text{rad}^1(M, N) = \text{rad}(M, N)$; e definimos $\text{rad}^n(M, N) = \{f \in \text{Hom}(M, N) \mid \text{existem } X \in \text{mod}A, \text{ morfismos } g \in \text{rad}(M, X) \text{ e } h \in \text{rad}^{n-1}(X, N) \text{ tais que } f = hg\}$. Finalmente, definimos $\text{rad}^\infty(M, N) = \bigcap_{n \geq 1} \text{rad}^n(M, N)$.

Se M, N estão em $\text{mod}A$ e $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$, $N = \bigoplus_{j=1}^n N_j$ são decomposições de M e N em módulos M_i e N_j tais que $\alpha_i : M_i \rightarrow M$ e $\beta_j : N \rightarrow N_j$ são as inclusões e projeções induzidas temos que um morfismo $f \in \text{rad}^n(M, N)$ se, e somente se, $\beta_j f \alpha_i$ está em $\text{rad}^n(M_i, N_j)$ para todo $i = 1, \dots, m$ e para todo $j = 1, \dots, n$.

Usaremos em algumas demonstrações no decorrer do texto o seguinte resultado:

Lema 2.1. [6] *Seja A uma álgebra de artin sobre k anel comutativo artiniano. Fixados M, N em $\text{mod}A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{rad}^n(M, N) = \text{rad}^\infty(M, N)$.*

Demonstração. Para M, N quaisquer em $\text{mod}A$ sabemos que $\text{Hom}_A(M, N)$ é k -módulo finitamente ge-

rado e, portanto, de comprimento finito. Assim, a cadeia decrescente

$$\text{Hom}(M, N) \supset \text{rad}(M, N) \supset \cdots \supset \text{rad}^n(M, N) \supset \cdots$$

estaciona para algum $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\text{rad}^\infty(M, N) = \bigcap_{m \geq 1} \text{rad}^m(M, N) = \text{rad}^n(M, N)$.

□

Dizemos que uma álgebra A é de *tipo (de representação) finito* se a categoria $\text{ind}A$ é formada por um número finito de A -módulos indecomponíveis a menos de isomorfismos.

Morfismos irredutíveis

Como mencionado anteriormente existe uma classe especial de morfismos em $\text{mod}A$ que tem um papel importante na compreensão da categoria $\text{mod}A$ como um todo. Estes morfismos são chamados de morfismos *irredutíveis*. Dizemos que um morfismo $f \in \text{Hom}(M, N)$ tal que $M, N \in \text{mod}A$ é irredutível se valem:

- a) f não é epimorfismo que cinde nem monomorfismo que cinde; e
- b) se $f = gh$ então g é epimorfismo que cinde ou h é monomorfismo que cinde.

Segue-se diretamente desta definição que um morfismo irredutível é um monomorfismo ou um epimorfismo: de fato, dado um irredutível $f : X \rightarrow Y$ basta fatorá-lo pelo A -módulo $\text{Im}f$ com o morfismo inclusão e usar a definição. No Capítulo 6, daremos uma definição de irredutível relativo a uma subcategoria que não é necessariamente fechada para imagens e para a qual, portanto, não vale o argumento acima.

Enunciaremos a seguir algumas das principais propriedades dos morfismos irredutíveis a serem utilizadas nesta tese.

Teorema 2.1. [6] *Sejam X e Y módulos indecomponíveis em $\text{mod}A$. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}(X, Y) \setminus \text{rad}^2(X, Y)$.*

Teorema 2.2. [6]

- a) *Se $f : L \rightarrow M$ é um monomorfismo irredutível então $N = \text{Coker}f$ é um A -módulo indecomponível.*
- b) *Se $f : M \rightarrow N$ é um epimorfismo irredutível então $L = \text{Ker}f$ é um A -módulo indecomponível.*

Dizemos que uma cadeia de morfismos irredutíveis $h_i : Z_{i-1} \rightarrow Z_i$ entre módulos indecomponíveis $\lambda : Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n$ é um *caminho de irredutíveis* de comprimento n . Assim, dado um caminho de irredutíveis $\lambda : Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n$ diremos que o comprimento do caminho λ é igual a n e

representaremos por $l(\lambda) = n$, se o caminho λ for formado por n irredutíveis. Também representaremos um caminho que começa em Z_0 e termina em Z_n por $Z_0 \rightsquigarrow Z_n$. Dado um caminho λ como acima denotaremos a composição dos irredutíveis que formam este caminho por

$$\bar{\lambda} = h_n \cdots h_1.$$

Dados caminhos de irredutíveis $\lambda : Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n$ e $\gamma : W_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_{m-1}} W_{m-1} \xrightarrow{g_m} W_m$ tais que $W_0 = Z_n$ denotaremos a concatenação $\gamma\lambda$ pelo caminho $Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_{m-1}} W_{m-1} \xrightarrow{g_m} W_m$ de comprimento $l(\gamma\lambda) = n + m$. É claro que $\overline{\gamma\lambda} = \bar{\gamma}\bar{\lambda}$. Dado um caminho $\lambda : Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n$ e dados morfismos $g : X \rightarrow Z_0$, $f : Z_n \rightarrow Y$ denotaremos o morfismo $f h_n \cdots h_1 : Z_0 \rightarrow Y$ por $f\bar{\lambda}$ e o morfismo $h_n \cdots h_1 g : X \rightarrow Z_n$ por $\bar{\lambda}g$.

Morfismos fonte e poço

Outras classes importantes de morfismos em $\text{mod}A$ são os morfismos fonte e os morfismos poço. Depois das definições veremos como estes morfismos se relacionam com os morfismos irredutíveis.

Seja X um módulo indecomponível. Uma aplicação $g : E \rightarrow X$ tal que $E \in \text{mod}A$ é chamada de *morfismo poço* para X se:

- a) g não é epimorfismo que cinde;
- b) se h é um endomorfismo de E tal que $gh = g$ então h é automorfismo; e
- c) para todo morfismo $h : Y \rightarrow X$ que não é epimorfismo que cinde existe um levantamento $h' : Y \rightarrow E$ tal que $h = gh'$.

Dualmente definimos um *morfismo fonte* para X como uma aplicação $f : X \rightarrow E'$ que satisfaz:

- a) f não é monomorfismo que cinde;
- b) se h' é um endomorfismo de E' tal que $h'f = f$ então h' é automorfismo; e
- c) para todo morfismo $h : X \rightarrow Y$ que não é monomorfismo que cinde existe um levantamento $h' : E' \rightarrow Y$ tal que $h = h'f$.

Teorema 2.3. *Seja A uma álgebra de artin. Então para todo $X \in \text{ind}A$ existe um morfismo poço $g : E \rightarrow X$ e um morfismo fonte $f : X \rightarrow E'$ tais que E e E' estão em $\text{mod}A$. Estes são únicos a menos de isomorfismos.*

Um das importantes afirmações do Teorema acima é justamente o fato que os módulos E e E' são somas diretas de finitos indecomponíveis.

Os morfismos poço para módulos projetivos e os morfismos fonte para módulos injetivos são facilmente descritos a partir da álgebra A : dado um projetivo indecomponível P , um morfismo poço para P é isomorfo à inclusão natural $\text{rad}P \hookrightarrow P$. Dado um injetivo indecomponível I , um morfismo fonte de I é isomorfo à projeção natural $I \rightarrow I/\text{soc}I$.

O próximo resultado faz a conexão entre os conceitos de morfismos irredutíveis, morfismos fonte e morfismos poço.

Teorema 2.4. *Seja A uma álgebra de artin e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre módulos indecomponíveis. Então*

- a) *f é um morfismo irredutível se, e somente se, existe um morfismo fonte $[f, g]^T : X \rightarrow Y \oplus Y'$.*
- b) *f é um morfismo irredutível se, e somente se, existe um morfismo poço $[f, g] : X \oplus X' \rightarrow Y$.*

Sequências de Auslander-Reiten

Dada uma álgebra de artin A sobre um anel comutativo k , existe uma dualidade $D : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}A^{op}$ dada por $D = \text{Hom}_k(-, I(k/\text{rad}k))$ onde $I(k/\text{rad}k)$ é a envolvente injetiva de $k/\text{rad}k$. Em particular, se k é corpo então $D = \text{Hom}_k(-, k)$.

Denotamos por $\underline{\text{mod}}A$ a categoria cujos objetos são os A -módulos finitamente gerados e o conjunto de morfismos entre dois objetos fixados M e N ,

$$\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)/P(M, N)$$

em que $P(M, N)$ é o subgrupo de $\text{Hom}(M, N)$ formado pelos morfismos $f : M \rightarrow N$ que se fatoram por um A -módulo projetivo, isto é, os morfismos $f : M \rightarrow N$ tais que existem P projetivo e morfismos $g : M \rightarrow P$, $h : P \rightarrow N$ tais que $f = hg$.

De maneira similar, denotamos por $\overline{\text{mod}}A$ a categoria cujos objetos são os A -módulos finitamente gerados e o conjunto de morfismos entre dois objetos fixados M e N ,

$$\overline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)/I(M, N)$$

em que $I(M, N)$ é o subgrupo de $\text{Hom}(M, N)$ formado pelos morfismos que se fatoram por um A -módulo injetivo.

Não é difícil ver que a dualidade $D : \text{mod}A^{op} \rightarrow \text{mod}A$ induz uma dualidade $D : \underline{\text{mod}}A^{op} \rightarrow \overline{\text{mod}}A$.

Consideremos agora o funtor contravariante e exato à esquerda

$$(-)^t = \text{Hom}_A(-, A) : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}A^{op}$$

Tomemos para todo A -módulo M sua resolução projetiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0,$$

ou seja, uma sequência exata tal que $p_0 : P_0 \rightarrow M$ e $p_1 : P_1 \rightarrow P_0$ são coberturas projetivas de M e de $\text{Ker} p_0$ respectivamente. Aplicando o funtor $(-)^t$ à sequência obtemos uma sequência de A -módulos à esquerda:

$$0 \rightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Coker} p_1^t \rightarrow 0$$

Denotaremos $\text{Coker} p_1^t$ por $\text{Tr} M$, a *transposta* do A -módulo M .

Esta operação induz um funtor

$$\text{Tr} : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{op}.$$

De posse das dualidades D e Tr definidas acima estamos em condições de definir as *translações de Auslander-Reiten*.

Definição 2.1. *As translações de Auslander-Reiten são definidas pela composição de D e Tr , sendo*

$$\tau = D\text{Tr} \text{ e } \tau^- = \text{Tr}D.$$

Se M é um A -módulo indecomponível então τM é chamado de translado de M .

Morfismos poço para módulos indecomponíveis não-projetivos e morfismos fonte de módulos indecomponíveis não-injetivos determinam certas sequências exatas curtas que são chamadas de sequências de Auslander-Reiten (ou sequências quase cindidas ou que quase se partem). O próximo resultado apresenta uma conexão entre os morfismos fonte e poço e as sequências de Auslander-Reiten.

Teorema 2.5. *Seja A um álgebra de artin e seja X um A -módulo indecomponível.*

- a)** *Se X não é projetivo então um morfismo poço $g : E \rightarrow X$ é epimorfismo. Além disso, $\tau X \simeq \text{Ker} g$ é um A -módulo indecomponível e a aplicação $f : \tau X \rightarrow E$ a qual forma a sequência exata $0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$ é um morfismo fonte de τX .*
- b)** *Se X não é injetivo então um morfismo fonte $f : X \rightarrow E'$ é monomorfismo. Além disso, $\tau^- X \simeq \text{Coker} f$ é um A -módulo indecomponível e a aplicação $g : E' \rightarrow \tau^- X$ a qual forma a sequência exata $0 \rightarrow X \rightarrow E' \rightarrow \tau^- X \rightarrow 0$ é um morfismo poço para $\tau^- X$.*

Uma sequência exata isomorfa a uma das sequências do teorema acima será chamada sequência de Auslander-Reiten (ou sequências quase cindidas ou que quase se partem). Frequentemente usaremos a

notação $0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$ para uma sequência de Auslander-Reiten que termina em X e $0 \rightarrow X \rightarrow E' \rightarrow \tau^- X \rightarrow 0$ para uma sequência de Auslander-Reiten que começa em X .

Pedimos ao leitor atenção com o próximo teorema que será utilizado com frequência nesta tese. Sua demonstração pode ser vista em [6].

Teorema 2.6. *Sejam X e Y módulos indecomponíveis em $\text{mod} A$ e $f \in \text{rad}^n(X, Y)$, com $n \geq 2$. Então:*

- a) *Existem um número natural $s \geq 1$, módulos indecomponíveis $M_1, \dots, M_s$, morfismos $h_i \in \text{rad}(X, M_i)$ e morfismos $g_i : M_i \rightarrow Y$ tais que cada g_i é uma soma de compostas de $n - 1$ morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis tais que $f = \sum_{i=1}^s g_i h_i$.*
- b) *Se $f \in \text{rad}^n(X, Y) \setminus \text{rad}^{n+1}(X, Y)$ então ao menos um dos morfismos h_i é irredutível e obtemos uma decomposição $f = u + v$ em que $u = \sum \bar{\lambda}_j$ é uma soma finita não-nula de compostas $\bar{\lambda}_j$ de caminhos de irredutíveis entre módulos indecomponíveis λ_j tais que $l(\lambda_j) = n$ e $\text{dp}(\lambda_j) = n$ para todo j e v é um morfismo em $\text{rad}^{n+1}(X, Y)$.*

Em particular, vemos a partir do item b) que se existe morfismo $f \in \text{rad}^n(X, Y) \setminus \text{rad}^{n+1}(X, Y)$ entre módulos indecomponíveis X e Y então existe pelo menos um caminho λ de comprimento igual a n tal que $\text{dp}(\lambda) = n$. Este fato será bastante utilizado nesta tese.

Nosso próximo passo será mostrar como é possível representar as informações sobre sequências de Auslander-Reiten em $\text{ind} A$ em uma aljava, chamada aljava de Auslander-Reiten de A .

Aljava

Uma *aljava* Q é definida por um par de conjuntos Q_0 e Q_1 e duas aplicações $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ e $e : Q_1 \rightarrow Q_0$. Um elemento em Q_0 é chamado *vértice* de Q e um elemento de Q_1 é chamado *flecha* de Q . A aplicação s leva cada flecha α em $s(\alpha)$ o qual será chamado de ponto de início da flecha α e a aplicação e leva a flecha α em $e(\alpha)$, o ponto final da flecha α . Um *laço* é uma flecha cujo início da flecha coincide com o final. Um *caminho* na aljava Q é uma sequência de flechas $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t$ tais que para todo $i = 1, \dots, t - 1$ temos $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$.

Para um vértice $a \in Q_0$ definimos os conjuntos a^+ e a^- como se segue:

$$a^+ = \{b \in Q_0 \mid b = e(\alpha) \text{ para uma flecha } \alpha \text{ tal que } s(\alpha) = a\};$$

$$a^- = \{b \in Q_0 \mid b = s(\alpha) \text{ para uma flecha } \alpha \text{ tal que } e(\alpha) = a\}.$$

Uma aljava é chamada de *localmente finita* se para todo vértice a os conjuntos a^+ e a^- são finitos. Finalmente uma aljava é dita finita se os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos.

Dada uma aljava $Q = (Q_0, Q_1)$, consideremos a relação de equivalência no conjunto Q_0 gerada pelo subconjunto $\{(s(\alpha), e(\alpha)) \mid \alpha \in Q_1\}$ de $Q_0 \times Q_0$. As classes de equivalência dessa relação são chamadas *componentes conexas* de Q . Uma aljava é dita *conexa* se possui somente uma componente.

Uma *subaljava* de uma aljava Q é uma aljava $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', e')$ tal que $Q'_0 \subset Q_0$, $Q'_1 \subset Q_1$, $s' = s|_{Q'_1}$ e $e' = e|_{Q'_1}$. A subaljava será *plena* se, dados dois vértices a, b em Q'_0 e se existe flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q_1 , então $\alpha \in Q'_1$. Assim, Q'_1 é igual ao conjunto de todas as flechas em Q_1 com início e fim em Q'_0 .

Dados uma aljava Q e vértices $a, b \in Q_0$, um *caminho* u de comprimento $n \geq 0$ com início a e fim b (ou de a para b) em Q é uma sequência

$$u : a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} a_n = b$$

tal que $\{a_i | 0 \leq i \leq n\} \subset Q_0$, $\{\alpha_i | 1 \leq i \leq n\} \subset Q_1$.

A cada $a \in Q_0$ associaremos um caminho de comprimento $l = 0$ chamado *caminho estacionário* ou *trivial* que será denotado por 1_a . Um *ciclo* é um caminho como acima tal que $a = b$, ou seja, é um caminho de a para a . Um *laço* é um ciclo de comprimento 1.

Associamos a cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ uma inversa formal $\alpha^{-1} : b \rightarrow a$ de início $s(\alpha^{-1}) = b$ e fim $e(\alpha^{-1}) = a$. Um *passeio* de comprimento $l \geq 0$ entre a e b em Q é uma sequência

$$u : a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1^{m_1}} a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n^{m_n}} a_n = b$$

tal que $m_i \in \{-1, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq n$, e $\alpha^1 = \alpha$.

Existe um tipo de aljava que é muito importante dentro da teoria de representações. É a chamada *aljava de translação*. Uma aljava de translação é uma aljava localmente finita $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ a qual está associada uma aplicação injetora $\tau : R_0 \rightarrow Q_0$ onde R_0 é subconjunto de Q_0 e que atende as seguintes propriedades:

- a) Q não possui laços ou flechas múltiplas, isto é, se $\alpha \in Q_1$ então $s(\alpha) \neq e(\alpha)$ e se $\alpha' \in Q_1$ e $s(\alpha') = s(\alpha)$ então $e(\alpha') \neq e(\alpha)$;
- b) para todo $a \in R_0$, $(\tau a)^+ = a^-$

Dada uma aljava com translação Q , os vértices em Q_0 que não estão em R_0 serão chamados *projetivos*. Os vértices $y \in Q_0$ tais que não existe $x \in R_0$ tal que $\tau x = y$ serão chamados *injetivos*.

A subaljava plena de Q formada por um vértice não-projetivo x , pelo seu transladado τx e pelo conjunto $(\tau x)^+$ (que é igual ao conjunto x^-) é chamada de *malha* começando em τx e terminando em x .

Dada uma aljava com translação Q , seja $p : x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n$ um caminho em Q . Dizemos que p é um *caminho seccional* se $x_{i-1} \neq \tau x_{i+1}$, para todo $0 < i < n$.

Álgebra de caminhos

Estaremos interessados agora em caracterizar as álgebras que usaremos nos nossos exemplos no decorrer da tese. Ao leitor interessado em ter uma visão mais completa sobre o tema indicamos a referência [2].

Dados dois caminhos u e v de Q , se $s(v) = e(u)$ então a *concatenação* uv de u e v é o caminho de Q definido como se segue:

- a) Se u (respectivamente v) é trivial então $uv = v$ (respectivamente $uv = u$).
- b) Se $u = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ e $v = \beta_1 \cdots \beta_m$ ($\alpha_i, \beta_i \in Q_1$) então $uv = \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m$.

Definida a operação concatenação de caminhos podemos definir agora o que entendemos por uma *álgebra de caminhos*.

Definição 2.2. *Sejam Q uma aljava e k um corpo. A álgebra de caminhos kQ de Q é a k -álgebra cujo k -espaço vetorial subjacente tem como base a família de caminhos de Q e cujo produto uv entre dois caminhos é a concatenação desses caminhos se esta operação está definida e zero caso contrário.*

Seja Q uma aljava finita e conexa. O ideal bilateral da álgebra de caminhos kQ gerado pelas flechas de Q é chamado *ideal flecha* de kQ e será denotado por R_Q . Denotaremos por R_Q^l o ideal de kQ gerado pelo conjunto de caminhos de comprimento $\geq l$. Um ideal I de kQ é dito *ideal admissível* se existe $m \geq 2$ tal que

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$$

Se I é ideal admissível de kQ então a álgebra dada pelo quociente kQ/I é chamada *álgebra com relação* e o par (Q, I) é chamado aljava com relação. Nos exemplos que aparecerão no decorrer da tese apresentaremos algumas álgebras com relação a partir de aljavas com relação sobre um corpo k . Mas nestes exemplos em vez de darmos o ideal I apresentaremos a aljava com uma (ou mais) *relação* que será responsável por gerar esse ideal.

Definição 2.3. *Seja Q um aljava. Uma relação em Q com coeficientes em k é uma combinação k -linear (não-nula) de caminhos de comprimento ao menos 2 de Q que têm mesmo início e mesmo fim.*

O *suporte* de uma relação é o conjunto de caminhos de Q que têm coeficiente não-nulo na relação. Dada uma aljava Q uma relação r em kQ é dita uma *relação minimal* se $r = r_1 + r_2$ tais que r_1 e r_2 são relações com suportes disjuntos então $r = r_1$ ou $r = r_2$.

Teorema 2.7. [2] *Sejam Q uma aljava finita e I um ideal admissível de kQ . Então existe um conjunto finito de relações minimais $\{r_1, \dots, r_m\}$ tal que $I = \langle r_1, \dots, r_m \rangle$.*

Aljavas de Auslander-Reiten

Seja A uma álgebra de artin. Dados M e N dois A -módulos indecomponíveis sabemos que um morfismo f é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad} \setminus \text{rad}^2$. Usaremos da seguinte notação

$$\text{Irr}(M, N) = \text{rad}(M, N) / \text{rad}^2(M, N).$$

Assim, $\text{Irr}(M, N)$ é um $\text{End}(N)/\text{rad}(N, N)$ -($\text{End}(M)/\text{rad}(M, M)$)^{op} bimódulo e no caso particular em que M e N são indecomponíveis, temos que $\text{End}(N)/\text{rad}(N, N)$ e $\text{End}(M)/\text{rad}(M, M)$ são anéis com divisão. Dados M, N dois A -módulos indecomponíveis, diremos que dois morfismos f, g em $\text{Hom}(M, N)$ são *linearmente independentes módulo* $\text{rad}^n(M, N)$ se suas classes $\bar{f}$ e $\bar{g}$ são linearmente independentes em $\text{Hom}(M, N)/\text{rad}^n(M, N)$.

Valem os seguintes resultados:

Teorema 2.8. [6]

Sejam M e N dois A -módulos indecomponíveis não isomorfos e $f_1, \dots, f_n \in \text{rad}(M, N)$.

- a) *Se o morfismo $M^n \xrightarrow{[f_1 \dots f_n]} N$ é irredutível então $\{f_1, \dots, f_n\}$ é um conjunto linearmente independente no $(\text{End}(M)/\text{rad}(M, M))^{\text{op}}$ -espaço vetorial $\text{rad}(M, N)/\text{rad}^2(M, N)$.*
- b) *Se o morfismo $M \xrightarrow{[f_1 \dots f_n]^T} N^n$ é irredutível então $\{f_1, \dots, f_n\}$ é um conjunto linearmente independente no $(\text{End}(N)/\text{rad}(N, N))^{\text{op}}$ -espaço vetorial $\text{rad}(M, N)/\text{rad}^2(M, N)$.*

Para o próximo teorema, sejam $g : X \rightarrow N$ morfismo poço que termina em um A -módulo indecomponível N onde $X = X' \oplus M^n$ e $M^n \xrightarrow{[g_1 \dots g_n]} N$ é a decomposição de g restrita a M^n e $h : M \rightarrow Y$ um morfismo fonte que começa em M onde $Y = Y' \oplus N^n$ e $M \xrightarrow{[h_1 \dots h_n]^T} N^n$ é a decomposição de h restrita aos somandos de Y isomorfos a N .

Teorema 2.9. [6] *Seguindo a notação do parágrafo anterior temos o seguinte.*

- a) *O conjunto $\{g_1 \dots g_n\}$ gera o $(\text{End}(M)/\text{rad}(M, M))^{\text{op}}$ espaço vetorial $\text{Irr}(M, N)$.*
- b) *O conjunto $\{h_1 \dots h_n\}$ gera o $(\text{End}(N)/\text{rad}(N, N))$ espaço vetorial $\text{Irr}(M, N)$.*

Teorema 2.10. [6] *Sejam M e N A -módulos indecomponíveis e assumamos que existe um morfismo irredutível entre M e N .*

- a) Sendo $f : X \rightarrow N$ um morfismo poço, a multiplicidade de M como somando de X é igual a dimensão do $(\text{End}(M)/\text{rad}(M, M))^{op}$ espaço vetorial $\text{Irr}(M, N)$.
- b) Sendo $g : M \rightarrow Y$ um morfismo fonte, a multiplicidade de N como somando de Y é igual a dimensão do $(\text{End}(N)/\text{rad}(N, N))$ espaço vetorial $\text{Irr}(M, N)$.

No caso particular em que k é algebricamente fechado temos que

$$(\text{End}(M)/\text{rad}(M, M))^{op} \simeq (\text{End}(N)/\text{rad}(N, N)) \simeq k$$

e $\text{Irr}(M, N)$ é, portanto, k -espaço vetorial.

Estamos neste ponto em condições de apresentar a definição da aljava de Auslander-Reiten Γ_A de uma álgebra A . Os vértices de Γ_A serão os elementos do conjunto formado pelas classes de isomorfismos dos A -módulos indecomponíveis. Chamaremos o conjunto de vértices de Γ_A de $(\Gamma_A)_0$ e o conjunto de flechas de $(\Gamma_A)_1$. Muitas vezes representaremos por X o vértice associado à classe $[X]$, $X \in \text{ind}A$. Se $[X]$ e $[Y]$ são dois vértices, existe uma flecha começando em $[X]$ e terminando em $[Y]$ em $(\Gamma_A)_1$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível entre X e Y em $\text{ind}A$. Uma flecha tem *valoração* (a, b) se existe um morfismo poço $aX \oplus M \rightarrow Y$ tal que X não é somando de M e um morfismo fonte $X \rightarrow bY \oplus N$ tal que Y não é somando de N . Os vértices correspondentes aos módulos projetivos serão chamados *vértices projetivos* e os correspondentes aos módulos injetivos serão chamados *vértices injetivos*.

No caso de A ser uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k , dados M e N módulos indecomponíveis as flechas $M \rightarrow N$ estarão em correspondência biunívoca com os vetores da base do k -espaço vetorial $\text{Irr}(M, N)$.

Notemos que por definição Γ_A não possui laços. Além disso, o Teorema 2.4 diz que a aljava Γ_A é localmente finita. De fato, dado $X \in \text{ind}A$ segue-se do teorema que existem um número finito de módulos indecomponíveis Y tais que existe irredutível $X \rightarrow Y$ ou existe irredutível $Y \rightarrow X$. Assim, $[X]^+$ e $[X]^-$ são conjuntos finitos.

A aljava Γ_A também é uma aljava com translação. Seja Γ' o conjunto de vértices de Γ_A que correspondem a módulos indecomponíveis não-projetivos. Definimos $\tau : \Gamma' \rightarrow (\Gamma_A)_0$, usando a translação de Auslander-Reiten, por $\tau[X] = [\tau X]$. Os resultados referentes às sequências de Auslander-Reiten garantem que $(\tau X)^+ = [X]^-$ e, portanto, temos que Γ_A junto com a translação τ e as valorações é *aljava valorada com translação*.

Em uma aljava de Auslander-Reiten definimos uma aplicação parcialmente definida nas flechas de Γ_A chamada *semitranslação* de Γ_A e denotada por σ da seguinte maneira: se $\alpha : [M] \rightarrow [N]$ é flecha em Γ_A tal que N não é projetivo então sabemos que existe irredutível $M \rightarrow N$. Então existe pelos Teoremas 2.4 e 2.5 um morfismo irredutível $\tau N \rightarrow M$. Definimos então $\sigma(\alpha)$ pela flecha correspondente $[\tau N] \rightarrow [M]$.

Dizemos que uma componente conexa Γ da aljava Γ_A possui *valoração trivial* se $X \rightarrow Y$ é flecha em Γ com valoração (a, b) então $a = b = 1$.

Dizemos que uma componente conexa Γ da aljava Γ_A é *componente regular* se Γ não possui módulos projetivos nem módulos injetivos. Um módulo M em uma componente regular será chamado *módulo regular*.

Dizemos que uma componente conexa Γ da aljava Γ_A é *estândard generalizada* se dados X e Y em Γ temos $\text{rad}^\infty(X, Y) = 0$.

Subcategorias funtorialmente finitas de $\text{mod}A$

Sejam $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ subcategorias de $\text{mod}A$. Dizemos que um módulo $C \in \mathcal{C}$ é *contravariantemente finito* sobre $\mathcal{D}$ se existe um morfismo $f : D \rightarrow C$ com $D \in \text{add}\mathcal{D}$ tal que $\text{Hom}(X, f) : \text{Hom}(X, D) \rightarrow \text{Hom}(X, C)$ é sobrejetivo para todo $X \in \text{add}\mathcal{D}$. Dualmente, dizemos que um módulo $C \in \mathcal{C}$ é *covariantemente finito* sobre $\mathcal{D}$ se existe um morfismo $g : C \rightarrow D$ com $D \in \text{add}\mathcal{D}$ tal que $\text{Hom}(g, X) : \text{Hom}(D, X) \rightarrow \text{Hom}(C, X)$ é sobrejetivo para todo $X \in \text{add}\mathcal{D}$.

Sejam $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ subcategorias de $\text{mod}A$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é *contravariantemente* (covariantemente) *finito* sobre $\mathcal{D}$ se todo módulo C em $\mathcal{C}$ é contravariantemente (covariantemente) finito sobre $\mathcal{D}$. Finalmente, dizemos que a subcategoria $\mathcal{C}$ é *funtorialmente finita* sobre $\mathcal{D}$ se é contravariantemente e covariantemente finita sobre $\mathcal{D}$.

Outra terminologia utilizada na literatura (ver [21]) para caracterizar subcategorias funtorialmente finitas é a de aproximações à esquerda e à direita: dados $M \in \text{mod}A$ e $\mathcal{X} \subset \text{mod}A$ temos que uma $\mathcal{X}$ -*aproximação à direita* de M é um morfismo $\gamma : X \rightarrow M$ tal que $X \in \mathcal{X}$ e para todo morfismo $\gamma' : X' \rightarrow M$ tal que $X' \in \mathcal{X}$ existe um morfismo $\xi : X' \rightarrow X$ que satisfaz $\gamma' = \gamma\xi$. Uma $\mathcal{X}$ -*aproximação à esquerda* de M é um morfismo $\gamma : M \rightarrow X$ tal que $X \in \mathcal{X}$ e para todo morfismo $\gamma' : M \rightarrow X'$ tal que $X' \in \mathcal{X}$ existe um morfismo $\xi : X \rightarrow X'$ que satisfaz $\gamma' = \xi\gamma$. A partir dessa terminologia, uma subcategoria plena $\mathcal{X}$ é funtorialmente finita em $\text{mod}A$ se todo A -módulo M possui uma $\mathcal{X}$ -aproximação à direita e uma $\mathcal{X}$ -aproximação à esquerda.

Uma subcategoria $\mathcal{X}$ é dita *fechada para somandos diretos* se para todo módulo $X \in \mathcal{X}$, todo somando direto de X pertence a $\mathcal{X}$ e é dita *fechada para extensões* se para toda sequência exata $0 \rightarrow X_1 \rightarrow M \rightarrow X_2 \rightarrow 0$ tal que $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ temos que $M \in \mathcal{X}$.

Como veremos nos próximos capítulos subcategorias funtorialmente finitas e fechadas para extensões de $\text{mod}A$ podem ser vistas como generalizações da própria categoria $\text{mod}A$ com relação a teoria de Auslander-Reiten. Por exemplo, estas subcategorias possuem sequências de Auslander-Reiten (relativas) e uma aljava de translação própria quando são também fechadas para somando diretos. No Capítulo 6 tornaremos mais precisas essas afirmações. Também é verdade que subcategorias funtorialmente

finitas possuem partições pós-projetivas e pré-injetivas. Este resultado está enunciado no Teorema 3.1 mais adiante.

Capítulo 3

Ferramentas Básicas

3.1 Partições pós-projetiva e pré-injetiva de uma álgebra de artin

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $\text{mod}A$. Nesta seção primeiramente estaremos ocupados em apresentar o teorema básico de existência de partições pós-projetivas e pré-injetivas em $\mathcal{C}$ sob certas condições. Posteriormente, apresentaremos a interpretação deste teorema e alguns resultados específicos para o caso $\mathcal{C} = \text{ind}A$. Antes, precisaremos introduzir um pouco de notação.

Suponhamos $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $\text{mod}A$ e $\mathcal{X}$ uma subcategoria de $\mathcal{C}$. Denotaremos $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ a subcategoria de $\mathcal{C}$ que consiste nos objetos de $\mathcal{C}$ que não possuem somandos diretos em $\mathcal{X}$. Observemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{X}} = \mathcal{C}_{\text{ind}\mathcal{X}}$ e se $\mathcal{C}$ é uma subcategoria de $\text{ind}A$ então $\mathcal{C}_{\mathcal{X}} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{X}$. Um módulo N em uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\text{mod}A$ é chamado $\mathcal{C}$ -projetivo se para todo $M \in \text{add}\mathcal{C}$ e para todo epimorfismo $f : M \rightarrow N$ temos que f cinde. Definiremos então $\mathbf{P}_0(\mathcal{C})$ a subcategoria de $\text{ind}\mathcal{C}$ formada pelos $\mathcal{C}$ -projetivos em $\text{ind}\mathcal{C}$. Em seguida, faremos $\mathbf{P}_1(\mathcal{C}) = \mathbf{P}_0(\mathcal{C}_{\mathbf{P}_0(\mathcal{C})})$ (ou seja, $\mathbf{P}_1(\mathcal{C})$ são os módulos indecomponíveis $\mathcal{C}_{\mathbf{P}_0(\mathcal{C})}$ -projetivos) e, por indução, $\mathbf{P}_k(\mathcal{C}) = \mathbf{P}_0(\mathcal{C}_{\mathbf{P}_0(\mathcal{C}) \cup \dots \cup \mathbf{P}_{k-1}(\mathcal{C})})$. Finalmente, denotaremos a subcategoria $\bigcup_{i < \infty} \mathbf{P}_i(\mathcal{C})$ de $\text{ind}\mathcal{C}$ por $\mathbf{P}(\mathcal{C})$ e $\text{ind}(\mathcal{C}_{\mathbf{P}(\mathcal{C})})$ por $\mathbf{P}_{\infty}(\mathcal{C})$.

São propriedades prontamente verificadas dessas subcategorias de $\mathcal{C}$:

- a) $\mathbf{P}_i(\mathcal{C}) \cap \mathbf{P}_j(\mathcal{C}) = \emptyset$ para todos $i, j \leq \infty$, se $i \neq j$.
- b) Se $\mathbf{P}_i(\mathcal{C}) = \emptyset$ então $\mathbf{P}_j(\mathcal{C}) = \emptyset$ para todos $i \leq j \leq \infty$.

Uma *cobertura* para uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\text{ind}A$ é uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ tal que para todo X em $\mathcal{C}$ existe um epimorfismo de Y em X tal que Y é módulo em $\text{add}\mathcal{D}$. É chamada minimal se nenhuma subcategoria própria de $\mathcal{D}$ assegura a mesma propriedade.

Assim, dizemos que uma coleção $\{\mathbf{P}_i(\mathcal{C})\}_{i=0, \dots, \infty}$ como definida acima é a *partição pós-projetiva* de $\mathcal{C}$ se $\mathbf{P}_i(\mathcal{C})$ é uma cobertura finita para $\mathcal{C}_{\mathbf{P}_0(\mathcal{C}) \cup \dots \cup \mathbf{P}_{i-1}(\mathcal{C})}$ para todo $i < \infty$. Dizemos que $\mathcal{C}$ tem uma partição pós-projetiva se $\{\mathbf{P}_i(\mathcal{C})\}_{i=0, \dots, \infty}$ é partição pós-projetiva de $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ possui uma partição pós-projetiva

dizemos que $M \in \mathcal{C}$ é *módulo pós-projetivo* se todo somando indecomponível de M está em $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = \bigcup_{i < \infty} \mathbf{P}_i(\mathcal{C})$.

Se um indecomponível $X \in \mathcal{C}$ está na subcategoria $\mathbf{P}_n(\mathcal{C})$, $0 \leq n < \infty$, então dizemos que X é pós-projetivo de *nível* n . Finalmente, denotaremos por $\mathbf{P}^m(\mathcal{C})$ a subcategoria dos A -módulos pós-projetivos indecomponíveis de nível menor que $m + 1$, ou seja $\mathbf{P}^m(\mathcal{C}) = \mathbf{P}_0(\mathcal{C}) \cup \dots \cup \mathbf{P}_m(\mathcal{C})$.

Lembremos que dada uma subcategoria $\mathcal{D}$ denotamos o subconjunto de $\mathcal{D}$ -projetivos indecomponíveis por $\mathbf{P}_0(\mathcal{D})$ e que para todo $n < \infty$ o subconjunto $\mathbf{P}_n(\mathcal{C})$ é igual a $\mathbf{P}_0(\mathcal{C} \setminus \mathbf{P}^{n-1}(\mathcal{C}))$. Assim, se existe epimorfismo que não cinde $M \rightarrow Y$ tal que Y é pós-projetivo de nível n então M possui um somando de nível pós-projetivo menor que n . Em particular, se Y está em $\mathbf{P}_n(\mathcal{C})$ tal que $1 < n < \infty$ então existe um irreduzível $X \rightarrow Y$ tal que X é módulo pós-projetivo de nível menor do que n : de fato, basta tomar o morfismo poço de Y , $E \rightarrow Y$ que por definição não cinde e, portanto, existe X somando indecomponível de E de nível menor que n .

Dualmente, definimos o conceito de módulo $\mathcal{C}$ -injetivo como sendo um módulo $M \in \mathcal{C}$ tal que todo morfismo injetivo $F : M \rightarrow N$ onde $N \in \mathcal{C}$ cinde. Definimos então $\mathbf{I}_0(\mathcal{C})$ como sendo a subcategoria de $\text{ind}\mathcal{C}$ formada pelos módulos $\mathcal{C}$ -injetivos. Por indução, definimos $\mathbf{I}_k(\mathcal{C}) = \mathbf{I}_0(\mathcal{C}_{\mathbf{I}_0(\mathcal{C}) \cup \dots \cup \mathbf{I}_{k-1}(\mathcal{C})})$. Finalmente, denotaremos a subcategoria $\bigcup_{i < \infty} \mathbf{I}_i(\mathcal{C})$ de $\text{ind}\mathcal{C}$ por $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ e denotaremos $\text{ind}(\mathcal{C}_{\mathbf{I}(\mathcal{C})})$ por $\mathbf{I}_\infty(\mathcal{C})$.

São propriedades prontamente verificadas dessas subcategorias de $\mathcal{C}$:

- a) $\mathbf{I}_i(\mathcal{C}) \cap \mathbf{I}_j(\mathcal{C}) = \emptyset$ para todos $i, j \leq \infty$, se $i \neq j$.
- b) Se $\mathbf{I}_i(\mathcal{C}) = \emptyset$ então $\mathbf{I}_j(\mathcal{C}) = \emptyset$ para todos $i \leq j \leq \infty$.

Um *envelope* para uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\text{ind}A$ é uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ tal que para todo X em $\mathcal{C}$ existe um monomorfismo de X em Y tal que Y é módulo em $\text{add}\mathcal{D}$. É chamado minimal se nenhuma subcategoria própria de $\mathcal{D}$ assegura a mesma propriedade.

Assim, dizemos que uma coleção $\{\mathbf{I}_i(\mathcal{C})\}_{i=0, \dots, \infty}$ como acima é a *partição pré-injetiva* de $\mathcal{C}$ se $\mathbf{I}_i(\mathcal{C})$ é um envelope finito para $\mathcal{C}_{\mathbf{I}_0(\mathcal{C}) \cup \dots \cup \mathbf{I}_{i-1}(\mathcal{C})}$ para todo $i < \infty$. Dizemos que $\mathcal{C}$ possui uma partição pré-injetiva se $\{\mathbf{I}_i(\mathcal{C})\}_{i=0, \dots, \infty}$ é partição pré-injetiva de $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ possui uma partição pré-injetiva dizemos que $M \in \mathcal{C}$ é *módulo pré-injetivo* se todo somando indecomponível de M está em $\mathbf{I}(\mathcal{C}) = \bigcup_{i < \infty} \mathbf{I}_i(\mathcal{C})$.

Lembrando que um módulo X em uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é chamado $\mathcal{D}$ -injetivo se para todos $M \in \text{add}\mathcal{D}$ e monomorfismo $f : X \rightarrow M$ temos que f cinde e que o subconjunto $\mathbf{I}_n(\mathcal{C})$ é igual a $\mathbf{I}_0(\mathcal{C} \setminus \mathbf{I}^{n-1}(\mathcal{C}))$, ou seja, é o conjunto dos $(\mathcal{C} \setminus \mathbf{I}^{n-1}(\mathcal{C}))$ -injetivos em $\mathcal{C} \setminus \mathbf{I}^{n-1}(\mathcal{C})$. Assim, se existe monomorfismo que não cinde $Y \rightarrow N$ tal que Y é pré-injetivo de nível n então N possui um somando de nível pré-injetivo menor que n . Em particular, se Y está em $\mathbf{I}_n(\mathcal{C})$ tal que $1 < n < \infty$ então existe um irreduzível $Y \rightarrow X$ tal que X é módulo pré-injetivo de nível menor do que n : de fato, basta tomar o morfismo fonte de Y , $Y \rightarrow E$, que por definição não cinde e, portanto, existe X somando indecomponível de E de nível menor que n .

Apresentaremos finalmente o teorema demonstrado por Auslander e Smalø em [4] que nos dá condições suficientes para que uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\text{mod}A$ possua partição pós-projetiva ou partição pré-injetiva.

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $\text{mod}A$:*

- a) *Se $\text{mod}A$ é contravariantemente finita sobre $\mathcal{C}$ então $\mathcal{C}$ possui partição pós-projetiva.*
- b) *Se $\text{mod}A$ é covariantemente finita sobre $\mathcal{C}$ então $\mathcal{C}$ possui partição pré-injetiva.*

Além disso, estas partições estão univocamente determinadas.

Observação: Em [4], esta partição foi chamada de pré-projetiva assim como toda a terminologia referente à partição (módulos pré-projetivos, fortemente pré-projetivos, etc.). Preferimos aqui utilizar a nomenclatura mais moderna de pós-projetiva com o intuito de buscar uma uniformização no texto.

Nesta tese estaremos interessados especialmente em dois casos: $\mathcal{C} = \text{ind}A$ e, portanto, valem a) e b) no teorema acima trivialmente, e $\mathcal{C} = \mathcal{F}(\Delta)$ onde $\mathcal{F}(\Delta)$ é uma subcategoria de módulos Δ -bons da categoria de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra quasi-hereditária A . Neste último caso sabemos por um resultado provado por Ringel em [21] que $\text{mod}A$ é funtorialmente finita sobre $\mathcal{F}(\Delta)$ e dessa forma valem a) e b) no teorema anterior. Todos estes conceitos relativos às álgebras quasi-hereditárias serão vistos no Capítulo 6.

A partir das definições acima temos que uma partição $\mathbf{P}_i$ de $\text{ind}A$ tal que $i \in \mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ será chamada pós-projetiva quando:

- a) $\text{ind}A$ é a união disjunta das subcategorias $\mathbf{P}_i$, $i \in \mathbb{N}_\infty$.
- b) para todo $j < \infty$, $\mathbf{P}_j$ é cobertura finita minimal da união das subcategorias $\mathbf{P}_i$ tais que $j \leq i \leq \infty$.

É claro que no caso $\mathcal{C} = \text{ind}A$ os módulos em $\mathbf{P}_0$ são os projetivos indecomponíveis. Lembramos que os módulos em $\mathbf{P}_j$ tal que $j < \infty$ são exatamente os módulos $(\text{mod}A \setminus \mathbf{P}^{j-1})$ -projetivos, tal que $\mathbf{P}^{j-1} = \bigcup_{i=0}^{j-1} \mathbf{P}_i$. Nesta tese, denotaremos $\mathbf{P}(\text{ind}A) = \bigcup_{0 \leq i < \infty} \mathbf{P}_i$ simplesmente por $\mathbf{P}$.

Ressaltamos que se X está em $\mathbf{P}_n$, $0 < n < \infty$, então não é válida necessariamente a propriedade de levantamento para epimorfismos em $\text{mod}A \setminus \mathbf{P}^{n-1}$ como acontece para o caso $n = 0$ em relação a epimorfismos em $\text{mod}A$.

Dados $i \in \mathbb{N}_\infty$ e um módulo M em $\text{mod}A$ denotaremos o traço de $\mathbf{P}_i$ em M por $\text{tr}_{\mathbf{P}_i}(M)$, ou seja, o submódulo de M gerado pelas imagens de todos os morfismos com domínio em $\mathbf{P}_i$. Assim, $\text{tr}_{\mathbf{P}_i}(M)$ é o submódulo de M gerado por $\{\text{Im} f \mid f \in \text{Hom}(N, M) \text{ e } N \in \mathbf{P}_i\}$. Foi demonstrado em [4] que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M) = \bigcap_{i \geq 0} \text{tr}_{\mathbf{P}_i}(M)$. Portanto, $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M) = \text{tr}_{\mathbf{P}_l}(M)$ para algum $l \in \mathbb{N}$ já que M é artiniano e $\text{tr}_{\mathbf{P}_{n+1}}(M) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_n}(M)$,

$\forall n \geq 0$. Também foi demonstrado em [4] que M é pós-projetivo se, e somente se, $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M) \neq M$ e que neste caso existe somente um número finito de módulos indecomponíveis, todos pós-projetivos, que são domínio de morfismos não nulos cujas imagens não estão contidas em $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M)$.

Dado um funtor F de $\text{mod}A$ em Ab , categoria dos grupos abelianos, definimos o comprimento $l(F)$ de F como sendo a soma $\sum l(F(X))$ tomando todos os X em $\text{ind}A$ tais que $F(X) \neq 0$ e sendo $l(F(X))$ o comprimento de $F(X)$ como $\text{End}X$ -módulo. Em particular, consideramos neste trabalho o comprimento do funtor $\text{Hom}(-, X)$, $X \in \text{ind}A$. O comprimento $l(\text{Hom}(-, X))$ é finito se, e somente se, o número de módulos indecomponíveis Y tais que $\text{Hom}(Y, X) \neq 0$ é finito.

Resumimos a discussão acima na seguinte proposição:

Proposição 3.1. [4] *Seja $X \in \text{ind}A$.*

1. $X \in \mathbf{P}$ se, e somente se, $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) \neq X$.
2. Se $X \in \mathbf{P}$ então existe $k \geq 0$ tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_k}(X) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$. Assim, se $n \geq k$, $M \in \mathbf{P}_n$ e existe $f : M \rightarrow X$ então $\text{Im}f \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$. Ou seja, somente um número finito de módulos indecomponíveis (todos em $\mathbf{P}^k$) são domínio de homomorfismos cujas imagens não estão contidas em $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$.
3. $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) = 0$ se, e somente se, $l(\text{Hom}(-, X)) < \infty$

O seguinte lema será bastante usado no Capítulo 5. Apesar de estar contido implicitamente no trabalho de Auslander e Smalø [4], a sua formulação seguida de demonstração pode ser encontrada de maneira mais explícita em [13].

Lema 3.1. [13] *Seja Y um módulo pós-projetivo e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo tal que $f(X) \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y)$. Então $f \notin \text{rad}^\infty$.*

Assim, no caso do lema anterior, sempre existe um caminho de irredutíveis λ entre indecomponíveis começando em X e terminando em Y tal que $\bar{\lambda} \notin \text{rad}^\infty$. Assim, se $X \in \text{ind}A$ é pós-projetivo então $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) \neq X$ e tomando uma cobertura projetiva $[p_1, \dots, p_t] : \bigoplus P_i \rightarrow X$ temos que existe i tal que $\text{Im}p_i$ não está contida em $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ e, portanto, existe um caminho de irredutíveis λ entre P_i e X tal que $\bar{\lambda} \notin \text{rad}^\infty$. Em particular, se uma componente conexa de Γ_A contém um pós-projetivo então também contém um projetivo.

Em [14] Coelho descreveu as componentes de Γ_A que contém somente módulos pós-projetivos através do teorema que aparecerá a seguir. Aqui entendamos $\text{Pr}(X)$ como o conjunto de todos os indecomponíveis que são antecessores de X por caminho de irredutíveis, ou seja, dos $M \in \text{ind}A$ tais que existe caminho $M \rightsquigarrow X$ formado por irredutíveis.

Teorema 3.2. [14] *Seja A uma álgebra de artin. Para uma componente Γ de Γ_A que contém um módulo pós-projetivo são equivalentes:*

- a) para todo módulo pós-projetivo X em Γ , $\text{Pr}(X)$ é finito.
- b) $\text{tr}_{P_\infty}(X) = 0$ para todo pós-projetivo em Γ .
- c) Γ contém somente módulos pós-projetivos.
- d) i) Somente um número finito de módulos em Γ não estão em τ -órbitas de projetivos.
 ii) Somente um número finito de módulos em Γ estão em ciclos orientados.
- e) Para todo módulo $X \in \Gamma$, o conjunto $\text{Pr}(X)$ é finito.

Seguiremos Coelho em [14] e chamaremos essas componentes de π -componentes. Observemos que o item d) acima generaliza a definição de componentes pós-projetivas. Mais adiante no Capítulo 5 provaremos que todo irredutível epi em uma componente deste tipo terá grau à esquerda em relação à $\mathbf{P}_0$ finito. O item b) será o mais utilizado em nossas aplicações.

Um lema útil para o estudo das relações entre a partição pós-projetiva e a aljava de Auslander-Reiten é o seguinte provado por Coelho em [13]. Utilizaremos esse lema no Capítulo 5 na seção sobre componentes $\mathbf{P}$ -discretas.

Lema 3.2. [13] *Sejam $f : X \rightarrow Y$ irredutível e $i > 0$ tal que $X \in \mathbf{P}_i$ e $Y \in \mathbf{P}_j$, onde $j > i + 1$ ou $j = \infty$. Então $\tau Y \in \mathbf{P}^{i-1}$.*

3.2 Grau de morfismos irredutíveis

Apresentaremos agora definição de grau à esquerda de um morfismo irredutível como introduzida por Liu em [20].

Definição 3.1. *Dizemos que o grau à esquerda de um irredutível $f : X \rightarrow Y$ é finito e denotamos $d_l(f) = n$ se n é o menor inteiro positivo para o qual existem $Z \in \text{mod} A$ e morfismo $h : Z \rightarrow X$ que satisfazem $h \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$ e $fh \in \text{rad}^{n+2}$. Caso não seja atendida a condição anterior para nenhum n dizemos que o grau à esquerda de f é infinito e denotamos $d_l(f) = \infty$. Definimos o grau à direita $d_r(f)$ de f de uma maneira dual.*

Nesta seção relembremos alguns resultados importantes na literatura sobre o tema e que foram muito utilizados no presente texto, como por exemplo o lema abaixo e o seu dual demonstrados em [20] que são cruciais no estudo do grau de morfismos irredutíveis. Para que o leitor possa aproveitar melhor o que vem a seguir, dada a importância do lema, descreveremos a sua demonstração como consta em [20].

Lema 3.3. [20] *Seja A um álgebra de artin e seja $p : M \rightarrow X$ um morfismo em $\text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$, $n \geq 1$. Seja $f : X \rightarrow Y$ um irredutível em $\text{mod} A$ tal que X é indecomponível. Se $fp \in \text{rad}^{n+2}$ então*

- a) Y não é projetivo, e
- b) para uma sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow \tau Y \xrightarrow{[g, g']^T} X \oplus X' \xrightarrow{[f, f']} Y \rightarrow 0$ em $\text{mod} A$ tal que $X' \neq 0$, existe um morfismo $q : M \rightarrow \tau Y \notin \text{rad}^n$ tal que $g'q \in \text{rad}^{n+1}$. Assim, $d_l(g') < d_l(f)$ e se $d_l(f) = 1$ então f é morfismo poço sobrejetor.

Demonstração. Sabemos que existe uma fatoração $fp = ts$ tal que $t \in \text{rad}(W, Y)$ e $s \in \text{rad}^{n+1}(M, W)$. Tomando um morfismo poço $[f, f'] : X \oplus X' \rightarrow Y$, obtemos um levantamento $[u, u']^T : W \rightarrow X \oplus X'$ tal que $t = [f, f'] [u, u']^T$, ou seja, $t = fu + f'u'$. Daí, temos $fp = ts = f u s + f' u' s$, donde $[f, f'] [p - u s, u' s]^T = 0$. Se por acaso Y fosse projetivo então $[f, f']$ seria monomorfismo, donde $p = u s \in \text{rad}^{n+1}$. Contradição. Logo, Y não é projetivo e segue-se a). Se

$$0 \rightarrow \tau Y \xrightarrow{[g, g']^T} X \oplus X' \xrightarrow{[f, f']} Y \rightarrow 0$$

é sequência de Auslander-Reiten como acima, uma vez que $[f, f'] [p - u s, u' s]^T = 0$ existe $q : M \rightarrow \tau Y$ tal que $[p - u s, u' s]^T = [g, g']^T q$. Assim, obtemos as expressões $p - gq = u s \in \text{rad}^{n+1}$ e $g'q = u' s \in \text{rad}^{n+1}$. Da primeira expressão temos que $q \notin \text{rad}^n$ (caso contrário teríamos $p \in \text{rad}^{n+1}$) e da segunda expressão temos que $g'q \in \text{rad}^{n+1}$. Logo, $d_l(g') < d_l(f)$. Uma vez que o conceito de grau zero de um irredutível leva a uma contradição, temos que se $d_l(f) = 1$ então f é morfismo poço sobrejetor. Assim, provamos a letra b).

□

Observação: Em [20] foi demonstrado um pouco mais sobre os morfismos irredutíveis de grau 1 do que o que foi dito no lema: se $X \in \text{ind} A$ e $f : X \rightarrow Y$ é irredutível então $d_l(f) = 1$ se, e somente se, Y é indecomponível não-projetivo e f é morfismo poço.

Relembrando que uma flecha $X \rightarrow Y$ em Γ_A é dita ter valoração $(\alpha_{XY}, \alpha'_{XY})$ se Y aparece α_{XY} vezes no codomínio do morfismo fonte de X e se X aparece α'_{XY} vezes no domínio do morfismo poço de Y , apresentaremos o seguinte lema também demonstrado em [20] que será de utilidade no próximo capítulo.

Lema 3.4. [20] *Seja $X \rightarrow Y$ uma flecha em Γ_A com valoração $(\alpha_{XY}, \alpha'_{XY})$. Se existe um morfismo irredutível $f : X \rightarrow Y$ que possui grau à esquerda finito ou grau à direita finito então ao menos um dos elementos da valoração α_{XY} ou α'_{XY} é igual a 1.*

Consideremos agora $Z_0 \xrightarrow{f_1} Z_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} Z_n \xrightarrow{f_{n+1}} Z_{n+1}$ caminho de irredutíveis entre módulos indecomponíveis tal que $f_n \dots f_1 \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$ e $f_{n+1} f_n \dots f_1 \in \text{rad}^{n+2}$. Pelo lema anterior, sabemos que $Y = Z_{n+1}$ não é projetivo e se $X = Z_n$ e $X' \neq 0$ como acima então existem irredutível $g' : \tau Y \rightarrow X'$ e morfismo $q : M \rightarrow \tau Y$ tais que $M = Z_0$, $q \notin \text{rad}^n$ e $g'q \in \text{rad}^{n+1}$. Observemos que não podemos garantir a partir destas informações que o morfismo q trata-se da composição de um caminho $Z_0 \rightarrow Z'_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z'_{n-1} = \tau Y$.

Um dos objetivos do próximo capítulo será relacionar o conceito de grau à esquerda (ou à direita) de um morfismo irredutível com a composição de caminhos de forma que sempre encontraremos um caminho λ cuja composição $\bar{\lambda}$ fará o papel do morfismo q acima.

Para facilitar um pouco a notação utilizaremos a definição de *profundidade* de um morfismo em $\text{mod}A$ como introduzida por Chaio e Liu em [12].

Definição 3.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo em $\text{mod}A$. Definimos a profundidade de f , denotada por $\text{dp}(f)$, como sendo o inteiro positivo n tal que $f \in \text{rad}^n(M, N) \setminus \text{rad}^{n+1}(M, N)$. Caso não exista tal inteiro, ou seja, se $f \in \text{rad}^\infty(M, N)$ então dizemos que a profundidade de f é infinita. Se λ é caminho de irredutíveis em $\text{ind}A$ definimos a profundidade de λ por $\text{dp}(\bar{\lambda})$.*

Os resultados seguintes demonstrados em [9] foram muito importantes ao relacionar o grau à esquerda de um morfismo irredutível $f : X \rightarrow Y$ à profundidade do morfismo inclusão $\ker(f) : \text{Ker } f \rightarrow X$. Vale lembrar que estes resultados foram obtidos para A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, pois utilizam os resultados referentes ao recobrimento genérico descritos na Seção 3.3. Assim, para o que vem a seguir nesta seção consideraremos A sempre como sendo uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado.

Teorema 3.3. [9] *Sejam n inteiro positivo, $X \in \text{ind}A$ e $f : X \rightarrow Y$ morfismo irredutível.*

- a) *Se existem módulo $Z \in \text{ind}A$ e morfismo $h : Z \rightarrow X$ tais que $h \in \text{rad}^n(Z, X) \setminus \text{rad}^{n+1}(Z, X)$ e $fh \in \text{rad}^{n+2}(Z, Y)$ então existe $h' : Z \rightarrow X$, $h' \in \text{rad}^n(Z, X) \setminus \text{rad}^{n+1}(Z, X)$, tal que $fh' = 0$.*
- b) *Se existem módulo $Z \in \text{ind}A$ e morfismo $h : Y \rightarrow Z$ tais que $h \in \text{rad}^n(Y, Z) \setminus \text{rad}^{n+1}(Y, Z)$ e $hf \in \text{rad}^{n+2}(X, Z)$ então existe $h' : Y \rightarrow Z$, $h' \in \text{rad}^n(Y, Z) \setminus \text{rad}^{n+1}(Y, Z)$, tal que $h'f = 0$.*

Proposição 3.2. [9] *Sejam $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível em $\text{mod}A$ tal que X é indecomponível e n inteiro positivo. Então são equivalentes:*

- a) $d_l(f) = n$
- b) f não é mono e o morfismo $\ker(f) : \text{Ker } f \hookrightarrow X$ é tal que $\text{dp}(\ker(f)) = n$.

Segue-se como corolário da proposição acima:

Corolário 3.1. [9] *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível em $\text{mod}A$ tal que X é indecomponível. Se $d_l(f) = n$ e se existem $Z \in \text{ind}A$ e $h \in \text{rad}^n(Z, X) \setminus \text{rad}^{n+1}(Z, X)$ tais que $fh = 0$, então $h = \ker(f)$.*

Fazendo uso desses resultados, Chaio, Le Meur e Trepode foram capazes em [9] de melhorar o Lema 3.3 para o caso particular de uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado.

Proposição 3.3. [9] *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja Y um módulo indecomponível não-projetivo e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível com X indecomponível. Assuma que a sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod } A$*

é tal que $X' \neq 0$. Então $d_l(f) < \infty$ se, e somente se, $d_l(g') < \infty$. Neste caso, $d_l(f) = n \Leftrightarrow d_l(g') = n - 1$.

3.3 O recobrimento genérico de aljavas com translação

O objetivo desta seção é relembrar a noção de recobrimento genérico apresentada em [9]. Este tipo de recobrimento generaliza a definição de recobrimento universal dada por Bongartz e Gabriel em [7] preservando do recobrimento universal algumas propriedades importantes. Em [9], este tipo de recobrimento foi aplicado a componentes conexas Γ da aljava de Auslander-Reiten Γ_A onde A é álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k com a finalidade de obter os resultados que apresentaremos nesta seção. Assim, estes resultados serão aplicados também nesta tese sob este contexto mais particular. Necessitaremos deles para demonstrar o Lema 4.2 no Capítulo 4. O leitor que não estiver interessado na demonstração deste lema poderá pular esta seção que não prejudicará o entendimento do restante do texto.

Começaremos por relembrar o conceito de recobrimento de aljavas com translação.

Seja Γ uma aljava com translação conexa. Um *recobrimento de aljavas com translação* é um morfismo de aljavas $p : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ tal que:

- a) Γ' é aljava com translação.
- b) Um vértice $x \in \Gamma'$ é projetivo (injetivo) se, e somente se, px é projetivo (injetivo).
- c) p comuta com as translações em Γ e Γ' .
- d) Para todo vértice $x \in \Gamma'$, a aplicação $\alpha \rightarrow p(\alpha)$ induz uma bijeção entre o conjunto de flechas em Γ' que começam em x (ou terminam em x) e o conjunto de flechas em Γ que começam em $p(x)$ (ou terminam em $p(x)$, respectivamente).

Como já mencionado, estamos interessados em um tipo de recobrimento introduzido em [9] chamado de recobrimento genérico. Para a construção deste recobrimento precisamos definir uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto de passeios de Γ . Esta relação será gerada pelas seguintes propriedades:

- i) Se $\alpha : x \rightarrow y$ é uma flecha em Γ então $\alpha\alpha^{-1} \sim 1_y$ e $\alpha^{-1}\alpha \sim 1_x$ (aqui 1_x denota o caminho trivial estacionário em x , de comprimento zero).
- ii) Se x é vértice não-projetivo e a malha em Γ que termina em x tem a forma

então $\beta_i\alpha_i \sim \beta_j\alpha_j$ para todos $i, j \in \{1, \dots, r\}$.

- iii) Se α, β são flechas em Γ que começam no mesmo vértice x e terminam em um mesmo vértice y então $\alpha \sim \beta$.
- iv) Se $\gamma_1, \gamma, \gamma', \gamma_2$ são passeios tais que $\gamma \sim \gamma'$ e as composições $\gamma_1\gamma\gamma_2$, $\gamma_1\gamma'\gamma_2$ estão definidas então $\gamma_1\gamma\gamma_2 \sim \gamma_1\gamma'\gamma_2$.

Notemos que a relação de homotopia usual de uma aljava com translação é definida utilizando (i), (ii) e (iv) acima. O recobrimento universal de Γ foi definido usando aquela relação de homotopia. Aplicando aquela construção ao caso determinado pela relação de equivalência $\sim$ acima obtemos o recobrimento $\pi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ o qual chamaremos de *recobrimento genérico* de Γ . Notemos que se Γ não possui flechas múltiplas então o recobrimento genérico coincide com o recobrimento universal.

Nosso objetivo agora é definir uma categoria a partir de um corpo k e uma aljava com translação Γ , de acordo com a definição de aljava com translação. Os objetos desta categoria serão os vértices da aljava e os morfismos serão obtidos a partir das flechas.

- a) $\text{Obj } k\Gamma = \Gamma_0$;
- b) Dados $x, y \in \Gamma_0$, o conjunto dos morfismos de x para y que denotaremos neste caso por $k\Gamma(x, y)$ é o espaço vetorial gerado pelos caminhos de x para y .

Nesta seção, consideraremos k sempre um corpo algebricamente fechado e denotaremos a categoria definida pelos itens a) e b) acima por $k\Gamma$. Para compreender a definição seguinte lembremos que σ é a semitranslação definida nas flechas de Γ_A como explicado no capítulo anterior.

Definição 3.3. *Seja Γ uma aljava com translação. O ideal malha é o ideal I_Γ de $k\Gamma$ gerado pelos elementos da forma*

$$\sum_{\alpha: \rightarrow x} (\sigma\alpha)\alpha \in \text{Hom}_{k\Gamma}(\tau x, x)$$

tais que x é não-projetivo e α percorre todas as flechas que terminam em x .

Definição 3.4. Dada uma aljava com translação Γ , a categoria malha é a categoria quociente $k\Gamma/I_\Gamma$ que denotaremos por $k(\Gamma)$.

Definição 3.5. Dada uma aljava com translação Γ , denotaremos por $\mathcal{R}k(\Gamma)$ o ideal de $k(\Gamma)$ gerado pelas imagens das flechas $\alpha \in \Gamma_1$ em $k(\Gamma)$. A n -ésima potência de $\mathcal{R}k(\Gamma)$ é definida recursivamente por $\mathcal{R}^0k(\Gamma) = k(\Gamma)$, $\mathcal{R}^1k(\Gamma) = \mathcal{R}k(\Gamma)$ e $\mathcal{R}^{n+1}k(\Gamma) = \mathcal{R}k(\Gamma) \cdot \mathcal{R}^nk(\Gamma)$.

A imagem de uma flecha $\alpha \in \Gamma_1$ em $k(\Gamma)$ será denominada por $\tilde{\alpha}$. A proposição seguinte enunciará propriedades importantes satisfeitas pelo recobrimento genérico. Para entendê-la, precisaremos introduzir algumas definições.

Definição 3.6. Seja Γ uma aljava com translação. Dizemos que Γ é aljava com comprimento, se para quaisquer dois vértices x, y em Γ_0 , os caminhos começando em x e terminando em y possuem todos o mesmo comprimento.

Definição 3.7. Seja Γ uma aljava com translação. Uma função comprimento nos vértices de Γ é uma função

$$l : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{N}$$

tal que para toda flecha $\alpha : x \rightarrow y$ em Γ_1 , $l(y) = l(x) + 1$.

Podemos relacionar as definições anteriores da seguinte forma:

Lema 3.5. [9] Seja Γ uma aljava com translação. Se Γ possui uma função comprimento então Γ é uma aljava com comprimento.

Proposição 3.4. [9] Seja Γ uma aljava com translação e $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ seu recobrimento genérico.

- a) Existe uma função com comprimento em $\tilde{\Gamma}$. Em particular, $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento.
- b) Se $\alpha : x \rightarrow y$, $\beta : x \rightarrow z$ (ou $\alpha : y \rightarrow x$, $\beta : z \rightarrow x$) são flechas em $\tilde{\Gamma}$ tais que $py = pz$ então $y = z$.
- c) Para todos os vértices $x, y \in \tilde{\Gamma}$ o recobrimento p induz uma bijeção entre o conjunto de flechas de $\tilde{\Gamma}$ que começam em x e terminam em y e o conjunto de flechas em Γ que começam em px e terminam em py .
- d) Sejam x, y vértices em $\tilde{\Gamma}$. Se $u : x = x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_l = y$ e $v : x = x'_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x'_l = y$ são dois caminhos em $\tilde{\Gamma}$ de x a y e se u é seccional então $x_1 = x'_1, \dots, x_{l-1} = x'_{l-1}$. Em particular, todos os caminhos de x a y são seccionais.
- e) Sejam $x, y \in \tilde{\Gamma}$ vértices, $u_1, \dots, u_r$ caminhos seccionais dois a dois distintos de comprimento $n \geq 0$ em $\tilde{\Gamma}$ de x a y e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ escalares. Então vale a seguinte equivalência em $k(\tilde{\Gamma})$:

$$\lambda_1 \widetilde{u}_1 + \cdots + \lambda_r \widetilde{u}_r \in \mathcal{R}^{n+1} k(\widetilde{\Gamma}) \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0.$$

A propriedade b) na proposição acima não é satisfeita pelo recobrimento universal quando Γ tem flechas múltiplas. Por esta razão precisamos do recobrimento genérico. Pedimos a atenção do leitor para a letra a) acima e as definições anteriores pois serão de utilidade direta na demonstração do Lema 4.2. As letras c), d) e e) foram usadas em [9] para a obtenção do Teorema 3.4 abaixo.

Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k , Γ uma componente de Γ_A e $p: \widetilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ o recobrimento genérico. Um funtor k -linear $F: k(\widetilde{\Gamma}) \rightarrow \text{ind} \Gamma$ é chamado *bem comportado* se satisfaz as seguintes condições para todo vértice $x \in \widetilde{\Gamma}$:

- a) $Fx = px$;
- b) se $\alpha_1: x \rightarrow x_1, \dots, \alpha_r: x \rightarrow x_r$ são as flechas em $\widetilde{\Gamma}$ que começam em x então $[F(\widetilde{\alpha}_1), \dots, F(\widetilde{\alpha}_r)]^T: Fx \rightarrow Fx_1 \oplus \cdots \oplus Fx_r$ é morfismo fonte;
- c) se $\alpha_1: x_1 \rightarrow x, \dots, \alpha_r: x_r \rightarrow x$ são as flechas em $\widetilde{\Gamma}$ que terminam em x então $[F(\widetilde{\alpha}_1), \dots, F(\widetilde{\alpha}_r)]: Fx_1 \oplus \cdots \oplus Fx_r \rightarrow Fx$ é morfismo poço.

Notemos que as condições acima implicam que F leva malhas em $\widetilde{\Gamma}$ em sequências de Auslander-Reiten em $\text{mod} A$.

A proposição seguinte é a responsável por garantir que dado um morfismo irredutível $f: X \rightarrow Y$ tal que $X \in \text{ind} A$ em uma componente Γ existe um funtor bem-comportado como na definição acima que leva uma subaljava de $\widetilde{\Gamma}$ em $f: X \rightarrow Y$.

Proposição 3.5. [9] *Sejam $X, X_1, \dots, X_r$ indecomponíveis em uma componente Γ e $f = [f_1, \dots, f_r]^t: X \rightarrow X_1 \oplus \cdots \oplus X_r$ um morfismo irredutível em $\text{mod} A$. Sejam $x \in p^{-1}(X)$ e $x \xrightarrow{\alpha_i} x_i$ flechas em $\widetilde{\Gamma}$ tais que $px_i = X_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Então existe um funtor bem-comportado $F: k(\widetilde{\Gamma}) \rightarrow \text{ind} \Gamma$ tal que $F(\widetilde{\alpha}_i) = f_i$.*

Lema 3.6. [9] *Sejam $F: k(\widetilde{\Gamma}) \rightarrow \text{ind} \Gamma$ um funtor bem-comportado, x, y vértices em $\widetilde{\Gamma}$ e $n \geq 0$. Então F leva um morfismo em $\mathcal{R}^n k(\widetilde{\Gamma})(x, y)$ em um morfismo em $\text{rad}^n(Fx, Fy)$.*

O próximo teorema será bastante usado na demonstração do Lema 4.2, no Capítulo 4. Como na proposição acima optamos por apresentar uma versão menos completa do teorema para não introduzir conceitos que não seriam necessários para a demonstração do Lema 4.2.

Teorema 3.4. [9] *Sejam $F: k(\widetilde{\Gamma}) \rightarrow \text{ind} \Gamma$ um funtor bem-comportado, x, y vértices em $\widetilde{\Gamma}$ e $n \geq 0$. Então as aplicações seguintes induzidas por F são bijetoras:*

- a) $\bigoplus_{Fz=Fy} \mathcal{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x, z) / \mathcal{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(x, z) \rightarrow \text{rad}^n(Fx, Fy) / \text{rad}^{n+1}(Fx, Fy)$
- b) $\bigoplus_{Fz=Fy} \mathcal{R}^n k(\tilde{\Gamma})(z, x) / \mathcal{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(z, x) \rightarrow \text{rad}^n(Fy, Fx) / \text{rad}^{n+1}(Fy, Fx)$

Finalizamos com a seguinte proposição que será utilizada para analisar um problema sobre composição de caminhos de irreduzíveis que começam em um projetivo e terminam em um indecomponível em $\mathbf{P}_\infty$. Importante ressaltar que em [9] os autores afirmaram ter obtido uma outra demonstração para a mesma proposição que prescinde da hipótese da componente Γ ter valoração trivial e que será publicada em um futuro artigo.

Proposição 3.6. [9] *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Sejam Γ um componente de Γ_A , $n \geq 1$ um inteiro e $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ módulos em Γ . Consideremos as seguintes afirmações:*

- a) *Existem morfismos irreduzíveis $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ para todo i tais que $h_n \cdots h_1 \in \text{rad}^{n+1}(X_1, X_{n+1}) \setminus \{0\}$.*
- b) *Existem morfismos irreduzíveis $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ e morfismos $\varepsilon_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ tais que $f_n \cdots f_1 = 0$, $\varepsilon_n \cdots \varepsilon_1 \neq 0$ e $\varepsilon_i = f_i$ ou $\varepsilon_i \in \text{rad}^2(X_i, X_{i+1})$ para todo i .*

Então b) implica a). Além disso, se $h_1, \dots, h_n$ satisfazem a) e representam flechas com valoração trivial então b) é verdadeiro. Em particular, a) e b) são equivalentes em uma componente Γ com valoração trivial.

Capítulo 4

Sobre o grau de morfismos irreduzíveis

4.1 Grau de um morfismo irreduzível em relação a uma subcategoria $\mathcal{D}$

Nesta seção introduziremos a noção de grau de um morfismo irreduzível em relação a uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\text{ind}A$. Esta noção generaliza a de grau de morfismo irreduzível introduzida por Liu [20]. Esta abordagem mais geral será justificada no capítulo seguinte quando estudarmos o grau de um morfismo irreduzível $f : X \rightarrow Y$ em relação a uma subcategoria $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}$ é um elemento da partição pós-projetiva de $\text{ind}A$.

Lembrando que neste texto denotamos por rad o radical de Jacobson de $\text{mod}A$, a categoria dos módulos à direita finitamente gerados sobre uma álgebra A . Neste capítulo, exceto onde estiver explícito o contrário, esta álgebra será de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k .

Definição 4.1. *Seja $\mathcal{D}$ uma subcategoria de $\text{ind}A$. Dizemos que o grau à esquerda de um irreduzível $f : X \rightarrow Y$ em relação a $\mathcal{D}$ é finito e denotamos $d_l^{\mathcal{D}}(f) = n$ se n é o menor inteiro positivo para o qual existem $Z \in \mathcal{D}$ e morfismo $h : Z \rightarrow X$ que satisfazem $h \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$ e $fh \in \text{rad}^{n+2}$. Caso não seja atendida a condição anterior para nenhum n dizemos que o grau à esquerda de f em relação a $\mathcal{D}$ é infinito e denotamos por $d_l^{\mathcal{D}}(f) = \infty$. No caso particular de tomarmos $\mathcal{D}$ como sendo $\text{ind}A$ temos a noção tradicional de grau à esquerda de um morfismo irreduzível f o qual denotaremos por $d_l(f)$ simplesmente. Definimos o grau à direita $d_r^{\mathcal{D}}(f)$ de f em relação a $\mathcal{D}$ de uma maneira dual.*

Observação: É claro que dadas duas subcategorias $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ de $\text{ind}A$ tais que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ e dado um irreduzível $f : X \rightarrow Y$, $X \in \text{ind}A$, tal que $d_l^{\mathcal{D}}(f) < \infty$ teremos $d_l^{\mathcal{D}'}(f) \leq d_l^{\mathcal{D}}(f) < \infty$. Em particular, teremos $d_l(f) \leq d_l^{\mathcal{D}}(f) < \infty$.

Algumas vezes dados um módulo indecomponível N e um irreduzível f podemos simplificar a notação ao nos referirmos ao grau à esquerda de f em relação ao módulo indecomponível N , $d_l^N(f)$. Neste caso entende-se que estamos falando da subcategoria de $\text{ind}A$ formada somente pelo objeto N . Observemos pelo Corolário 3.1 que se $Z \neq \text{Ker}f$ e se $d_l^Z(f) < \infty$ então necessariamente teremos

$d_l^Z(f) > d_l(f)$. Ou seja, $d_l^Z(f) = d_l(f) < \infty$ implica em $Z \simeq \text{Ker} f$ ou mais geralmente $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = d_l(f)$ implica em $\text{Ker} f \in \mathfrak{D}$.

Em [20], Liu demonstrou que dada uma flecha $X \rightarrow Y$ os graus à esquerda (e à direita) de irredutíveis representados por $X \rightarrow Y$ na aljava Γ_A coincidem. Demonstraremos o mesmo resultado para a definição mais geral dada acima de forma similar ao que foi feito em [20].

Proposição 4.1. *Sejam $X \rightarrow Y$ uma flecha em Γ_A e $\mathfrak{D}$ uma subcategoria de $\text{ind}A$. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ são irredutíveis em $\text{mod}A$ então $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = d_l^{\mathfrak{D}}(g)$ e $d_r^{\mathfrak{D}}(f) = d_r^{\mathfrak{D}}(g)$.*

Demonstração. Seja $(\alpha_{XY}, \alpha'_{XY})$ a valoração da flecha $X \rightarrow Y$. Suponhamos primeiramente que $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = n$ é finito. Assim, existem $Z \in \mathfrak{D}$ e $h : Z \rightarrow X$ tais que $\text{dp}(h) = n$ e $fh \in \text{rad}^{n+2}$. Pelo Lema 3.4, temos $\alpha_{XY} = 1$ ou $\alpha'_{XY} = 1$. Assim, ou existe $r \in \text{Aut}(Y)$ tal que $f - rg \in \text{rad}^2$ ou existe $r' \in \text{Aut}(X)$ tal que $f - gr' \in \text{rad}^2$. No primeiro caso teríamos $rg h \in \text{rad}^{n+2}$ e no segundo caso, $gr' h \in \text{rad}^{n+2}$. Logo, uma vez que r e r' não estão no radical em todo caso teremos $d_l^{\mathfrak{D}}(g) \leq n = d_l^{\mathfrak{D}}(f)$. De forma análoga obtemos $d_l^{\mathfrak{D}}(f) \leq d_l^{\mathfrak{D}}(g)$, donde $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = d_l^{\mathfrak{D}}(g)$. Se nenhum dos graus $d_l^{\mathfrak{D}}(f)$ e $d_l^{\mathfrak{D}}(g)$ é finito então é claro que $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = d_l^{\mathfrak{D}}(g)$. Dualmente segue-se a afirmação $d_r^{\mathfrak{D}}(f) = d_r^{\mathfrak{D}}(g)$. □

A proposição acima justifica a seguinte definição:

Definição 4.2. *Sejam $\mathfrak{D}$ uma subcategoria de $\text{ind}A$, $X \rightarrow Y$ uma flecha em Γ_A e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível em $\text{mod}A$. Definimos o grau à esquerda da flecha $X \rightarrow Y$ em relação a $\mathfrak{D}$ como sendo $d_l^{\mathfrak{D}}(f)$ e o grau à direita da flecha $X \rightarrow Y$ em relação a $\mathfrak{D}$ como sendo $d_r^{\mathfrak{D}}(f)$.*

Ainda no espírito da definição mais geral de grau de morfismo irredutível obtemos a proposição seguinte que é uma generalização do Lema 3.3 e da Proposição 3.3. Também demonstramos que sob as hipóteses da Proposição 3.3 teremos $\text{Ker} f \simeq \text{Ker} g'$.

Proposição 4.2. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja $\mathfrak{D}$ uma subcategoria de $\text{ind}A$, Y um módulo indecomponível não-projetivo e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível com X indecomponível. Assuma que a sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod}A$*

é tal que $X' \neq 0$. Então $d_l^{\mathfrak{D}}(f) < \infty$ se, e somente se, $d_l^{\mathfrak{D}}(g') < \infty$. Neste caso, $\text{Ker} f \simeq \text{Ker} g'$ e $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = n \Leftrightarrow d_l^{\mathfrak{D}}(g') = n - 1$.

Demonstração. Suponhamos $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = n$. Então existem $Z \in \mathfrak{D}$ e $h \in \text{rad}^n(Z, X) \setminus \text{rad}^{n+1}(Z, X)$ tais que $fh \in \text{rad}^{n+2}$. Pelo Lema 3.3, sabemos que existe $h' \in \text{rad}^r(Z, \tau Y) \setminus \text{rad}^{r+1}(Z, \tau Y)$, $r \leq n-1$, tal que $g'h' \in \text{rad}^{r+2}$. Portanto, $d_l^{\mathfrak{D}}(g')$ é finito e $d_l^{\mathfrak{D}}(g') \leq n-1 = d_l^{\mathfrak{D}}(f) - 1$. Por outro lado, suponha $d_l^{\mathfrak{D}}(g')$ finito igual a j . Então existem $W \in \mathfrak{D}$ e $s \in \text{rad}^j(W, \tau Y) \setminus \text{rad}^{j+1}(W, \tau Y)$ tais que $g's \in \text{rad}^{j+2}$. Como $[g, g']^t$ é mono temos, pela Proposição 3.2, que seu grau à esquerda é infinito e, portanto, $gs \notin \text{rad}^{j+2}$. Usando a identidade $fg + f'g' = 0$ obtemos $f(gs) = -(f'g's) \in \text{rad}^{j+3}$, donde $d_l^{\mathfrak{D}}(f) \leq j+1$, ou seja, $d_l^{\mathfrak{D}}(f) \leq d_l^{\mathfrak{D}}(g') + 1$. Usando as duas desigualdades encontradas obtemos $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = d_l^{\mathfrak{D}}(g') + 1$. Para demonstrar que $\text{Ker } f \simeq \text{Ker } g'$ considere $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = n$, $d_l^{\mathfrak{D}}(g') = n-1$ e os morfismos $\iota_f = \ker(f) : \text{Ker } f \hookrightarrow X$ e $\iota_{g'} = \ker(g') : \text{Ker } g' \hookrightarrow \tau Y$ tais que $\text{dp}(\iota_f) = n$ e $\text{dp}(\iota_{g'}) = n-1$. Novamente como $[g, g']^t$ é mono temos $g\iota_{g'} \notin \text{rad}^{n+1}$. Mas $f(g\iota_{g'}) = -(f'g'\iota_{g'}) = 0$, donde obtemos o levantamento $h : \text{Ker } g' \rightarrow \text{Ker } f$ tal que $\iota_f h = g\iota_{g'} \notin \text{rad}^{n+1}$. Assim, $h \notin \text{rad}$ e $\text{Ker } f \simeq \text{Ker } g'$ uma vez que são módulos indecomponíveis.

□

4.2 Resolução de um problema proposto por Chaio, Le Meur e Trepode

Retornando ao Teorema 3.3, sabemos que dado um morfismo $f : X \rightarrow Y$ irredutível tal que $X \in \text{ind } A$ e dado $h : Z \rightarrow X$ tais que $Z \in \text{ind } A$, $h \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$ e $fh \in \text{rad}^{n+2}$ temos que existe $h' : Z \rightarrow X$ tal que $h' \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$ e $fh' = 0$. Em [9] (pg. 14), foi mencionado o seguinte problema em aberto:

Problema (Chaio/Le Meur/Trepode)[9]: Poderemos tomar h' no caso acima como um caminho de irredutíveis entre Z e X ?

Responderemos este problema em afirmativo como consequência da solução do seguinte problema proposto dentro do contexto de grau de um morfismo irredutível em relação a uma subcategoria. Também nos preocuparemos com o comprimento do caminho da pergunta acima já que poderíamos a princípio obter um caminho com comprimento estritamente menor que sua profundidade.

Problema: Seja $\mathfrak{D}$ uma subcategoria de $\text{ind } A$ e $f : X \rightarrow Y$ irredutível tal que $X \in \text{ind } A$. Se $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = m < \infty$, existe caminho de irredutíveis λ começando em $M \in \mathfrak{D}$ e terminando em X de comprimento e profundidade iguais a m tal que $f\bar{\lambda} = 0$?

Apresentaremos uma solução em afirmativo para este problema para o caso em que A é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado. Todos os resultados mais específicos utilizados na demonstração do resultado bem como a construção do recobrimento genérico usado na

demonstração do Lema 4.2 podem ser encontrados no artigo [9] ou em sua forma resumida no capítulo anterior.

Os dois lemas seguintes serão importantes para a resolução do problema e também para obter outros resultados no próximo capítulo.

Lema 4.1. *Seja $0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$ sequência exata tal que f é irredutível. Dado um homomorfismo $h : \text{Ker } f \rightarrow M$, ou existe $p : M \rightarrow X$ tal que $ph = g$ ou existe $q : X \rightarrow M$ tal que $qg = h$.*

Demonstração. Sejam $0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$ sequência exata tal que f é irredutível e $h : \text{Ker } f \rightarrow M$ homomorfismo. Então obtemos o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \downarrow 1_Y & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g'} & W & \xrightarrow{f'} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde W é o *push-out* de $M \xleftarrow{h} \text{Ker } f \xrightarrow{g} X$. Como f é irredutível temos que ou h' é mono que cinde ou f' é epi que cinde. Se h' cinde então existe $h_1 : W \rightarrow X$ tal que $h_1 h' = 1_X$ e, portanto, $g = h_1 h' g = h_1 g' h = ph$, fazendo $p = h_1 g'$. Por outro lado, se f' cinde então g' cinde e, portanto, existe $g_1 : W \rightarrow M$ tal que $g_1 g' = 1_M$. Daí, $h = g_1 g' h = g_1 h' g = qg$, fazendo $q = g_1 h'$.

□

Para a demonstração do próximo lema serão necessários os resultados referentes ao recobrimento genérico descritos nos resultados preliminares.

Lema 4.2. *Sejam A álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, $X \in \text{ind } A$ e $f : X \rightarrow Y$ irredutível tais que $d_l(f) = n$. Seja $h : M \rightarrow \text{Ker } f$ morfismo tal que $\text{dp}(h) = l$. Se $g = \text{ker}(f) : \text{Ker } f \hookrightarrow X$ é o morfismo inclusão então $gh \in \text{rad}^{n+l}(M, X) \setminus \text{rad}^{n+l+1}(M, X)$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que $gh \in \text{rad}^{n+l+1}(M, X)$.

Seja Γ a componente da aljava de Auslander-Reiten que contém f , $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ o recobrimento genérico e $F : k(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \text{ind } \tilde{\Gamma}$ funtor bem comportado em relação a $\tilde{\Gamma}$ que obteremos a partir de $f : X \rightarrow Y$ através da Proposição 3.5. Fixemos $z \in F^{-1}(\text{Ker } f)$. Uma vez que $h \in \text{rad}^l(M, \text{Ker } f) \setminus \text{rad}^{l+1}(M, \text{Ker } f)$ então pelo Teorema 3.4 existe

$$(\phi_m)_m \in \bigoplus_{Fm=M} \mathcal{R}^l k(\tilde{\Gamma})(m, z)$$

tal que $h = \sum_m F(\phi_m) + h'$, $h' \in \text{rad}^{l+1}(M, \text{Ker } f)$, e existe m' tal que $\phi_{m'} \notin \mathcal{R}^{l+1} k(\tilde{\Gamma})(m', z)$.

De forma análoga, uma vez que $g \in \text{rad}^n(\text{Ker } f, X) \setminus \text{rad}^{n+1}(\text{Ker } f, X)$ (Proposição 3.2), pela letra b) do Teorema 3.4 existe

$$(\psi_x)_x \in \bigoplus_{Fx=X} \mathcal{R}^n k(\tilde{\Gamma})(z, x)$$

tal que $g = \sum_x F(\psi_x) + g'$, $g' \in \text{rad}^{n+1}(\text{Ker } f, X)$, e existe x' tal que $\psi_{x'} \notin \mathcal{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(z, x')$. Assim, existe caminho $z \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \dots \xrightarrow{\tilde{\alpha}_n} x'$ que começa em z e termina em x' de comprimento n tal que $F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1) \in \text{rad}^n(\text{Ker } f, X) \setminus \text{rad}^{n+1}(\text{Ker } f, X)$.

Primeiramente, observemos pelo Lema 4.1 que ou existe $p : X \rightarrow X$ tal que $g = pF(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)$ ou existe $q : X \rightarrow X$ tal que $F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1) = qg$. Em ambos os casos, como as profundidades de $F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)$ e g coincidem e X é módulo indecomponível temos que $F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)$ é igual a g a menos de composição com isomorfismo. Em particular, $F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)$ é monomorfismo.

Além disso,

$$\begin{aligned} F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)h &= (F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1))(\sum_m F(\phi_m) + h') \\ &= \sum_m F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)F(\phi_m) + \xi', \end{aligned}$$

onde $\xi' = F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)h'$. É claro que $\xi' \in \text{rad}^{n+l+1}(M, X)$.

Uma vez que por hipótese $gh \in \text{rad}^{n+l+1}(M, \text{Ker } f)$ e g é igual a $F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)$ a menos de composição com isomorfismo, obtemos $\sum_m F(\tilde{\alpha}_n \cdots \tilde{\alpha}_1 \phi_m) \in \text{rad}^{n+l+1}(M, X)$ e considerando

$$(\lambda_m)_m = (\tilde{\alpha}_n \cdots \tilde{\alpha}_1 \phi_m)_m \in \bigoplus_{Fm=M} \mathcal{R}^l k(\tilde{\Gamma})(m, x'),$$

temos pelo Teorema 3.4 que $\sum_m F((\lambda_m)_m) \in \text{rad}^{n+l+1}(M, X)$ implica em $(\lambda_m)_m = \tilde{\alpha}_n \cdots \tilde{\alpha}_1 \phi_m \in \mathcal{R}^{n+l+1} k(\tilde{\Gamma})$ para todo m . Uma vez que $\tilde{\Gamma}$ é aljava com comprimento, $\phi_{m'} \notin \mathcal{R}^{l+1} k(\tilde{\Gamma})(m', z)$ implica que qualquer caminho partindo de m' e terminando em z tem comprimento no máximo igual a l . Portanto, qualquer caminho partindo de m' e terminando em x' tem comprimento no máximo igual a $l + n$. Logo, se temos $\tilde{\alpha}_n \cdots \tilde{\alpha}_1 \phi_m \in \mathcal{R}^{n+l+1} k(\tilde{\Gamma})$ para todo m - e em particular para m' , então temos $\tilde{\alpha}_n \cdots \tilde{\alpha}_1 \phi_{m'} = 0$. Assim, vale

$$F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)F(\phi_{m'}) = 0,$$

com $F(\phi_{m'}) \neq 0$.

Observemos que obtemos uma contradição com a afirmação acima uma vez que $F(\tilde{\alpha}_n) \cdots F(\tilde{\alpha}_1)$ é monomorfismo.

□

De posse das ferramentas principais que serão úteis para a resolução do problema, vamos a sua solução propriamente dita que aparecerá na forma do seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado e $\mathfrak{D}$ uma subcategoria de $\text{ind}A$. Seja $f : X \rightarrow Y$ irredutível em $\text{mod}A$ com $X \in \text{ind}A$ tal que $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = m$. Denotando $d_l(f) = n \leq m$, temos que existem $M \in \mathfrak{D}$ e θ caminho de irredutíveis entre M e X*

$$\theta : M \rightarrow \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Ker} f \rightarrow \cdots \rightarrow X}_{\lambda},$$

com $\text{dp}(\bar{\theta}) = l(\theta) = m$, onde λ é caminho de irredutíveis de comprimento $l(\lambda) = n$ tal que $\bar{\lambda} : \text{Ker} f \rightarrow X$ é o morfismo inclusão $\text{ker}(f) : \text{Ker} f \hookrightarrow X$.

Demonstração. Demonstraremos primeiramente que existe caminho de irredutíveis $\lambda : \text{Ker} f = Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n = X$ tal que $l(\lambda) = n$ e $\bar{\lambda} : Z_0 \rightarrow Z_n$ é o morfismo inclusão $\text{ker}(f) : \text{Ker} f \hookrightarrow X$. Assim, pelo Teorema 3.2, teremos em particular que a profundidade de $\bar{\lambda}$ será igual a n .

Se $n = 1$ então f é morfismo poço, Y é indecomponível não-projetivo, $\tau Y \simeq \text{Ker} f$ e a inclusão $\text{ker}(f) : \tau Y \hookrightarrow X$ é tal que $\text{ker}(f) \in \text{rad} \backslash \text{rad}^2$ (Proposição 3.2), sendo portanto morfismo irredutível. Neste caso λ será caminho de comprimento 1 como queríamos.

Se $n > 1$ então consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow \text{Ker} f \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$$

tal que $g = \text{ker}(f) \in \text{rad}^n \backslash \text{rad}^{n+1}$, pela Proposição 3.2. Sabemos por um resultado em [6] que existe caminho $\xi : Z_0 \xrightarrow{g_1} Z_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Z_{n-1} \xrightarrow{g_n} Z_n$ tal que $Z_0 = \text{Ker} f$, $Z_n = X$, $l(\xi) = n$ e $\bar{\xi} = g_n \cdots g_1 \in \text{rad}^n \backslash \text{rad}^{n+1}$. Pelo lema 4.1, ou existe $p : Z_n \rightarrow X$ tal que $p\bar{\xi} = g$ ou existe $q : X \rightarrow Z_n$ tal que $qg = \bar{\xi}$. Em ambos os casos, uma vez que $\bar{\xi}$ e g estão em $\text{rad}^n(\text{Ker} f, X) \backslash \text{rad}^{n+1}(\text{Ker} f, X)$ e X é indecomponível podemos escrever g como a composição de $\bar{\xi}$ com um isomorfismo $r : X \rightarrow X$, $g = r\bar{\xi}$. Assim, fazendo $h_n = r g_n$ e $h_i = g_i$, $1 \leq i \leq n-1$, obtemos $\lambda : \text{Ker} f = Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n = X$ caminho de irredutíveis tal que $l(\lambda) = n$ e $\bar{\lambda} = h_n \cdots h_1 : Z_0 \rightarrow Z_n$ é o morfismo inclusão $g = \text{ker}(f) : \text{Ker} f \hookrightarrow X$.

Se $\mathfrak{D}$ é uma subcategoria de $\text{ind}A$ tal que $d_l^{\mathfrak{D}}(f) = d_l(f)$ então pelo Corolário 3.1 temos que $\text{Ker} f \in \mathfrak{D}$ e fazemos $\theta = \lambda$. Caso contrário, sabemos que existe $M \in \mathfrak{D}$ e $h : M \rightarrow X$ tais que $h \in \text{rad}^m \backslash \text{rad}^{m+1}$ e $fh \in \text{rad}^{m+2}$. Logo, existe $h' \in \text{rad}^m(M, X) \backslash \text{rad}^{m+1}(M, X)$ tal que $fh' = 0$ e obtemos assim o levantamento:

$$\begin{array}{ccccc} M & & & & \\ p \downarrow & \searrow h' & & & \\ \text{Ker} f & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Como $r = m - n > 0$, temos $p \in \text{rad}^r \backslash \text{rad}^{r+1}$ já que se tivéssemos $p \in \text{rad}^s \backslash \text{rad}^{s+1}$ com $s < r$ então pelo Lema 4.2 teríamos $\bar{\lambda}p \notin \text{rad}^m$ o que seria contradição uma vez que $h' = \bar{\lambda}p \in \text{rad}^m$. Escrevemos então $p = \sum_{i=0}^t p_i + p'$ tal que $p' \in \text{rad}^{r+1}$, p_i é caminho de irredutíveis de comprimento $l(p_i) = r$ para

todo i e $\overline{p_i} \notin \text{rad}^{r+1}$ para todo i . Daí, $h' = \sum \overline{\lambda p_i} + \overline{\lambda} p'$ e sabemos que existe j tal que $\overline{\lambda p_j} \notin \text{rad}^{m+1}$ já que $h' \notin \text{rad}^{m+1}$ e $\overline{\lambda} p' \in \text{rad}^{m+1}$. Por outro lado, $f \overline{\lambda p_i} = 0$ para todo i . Consideramos então θ o caminho formado pela concatenação do caminho p_j com o caminho λ e obtemos o teorema. $\square$

Assim, a pergunta feita por Chaio, Le Meur e Trepode mencionada no início da seção foi respondida de forma afirmativa acrescentando o fato de que o caminho encontrado terá comprimento n .

Exemplo 4.1. Seja A a álgebra de caminhos obtida a partir da aljava:

com relações $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\delta\mu = 0$ e $\beta\lambda = 0$. Então a aljava de Auslander-Reiten da álgebra acima é da forma:

Uma vez que a álgebra é de tipo finito sabemos que $d_l(f) < \infty$, pois f é epimorfismo e, portanto, o morfismo inclusão $\ker(f)$ é não-nulo e não está no radical infinito. Pelo Teorema 4.1, existe um caminho de irredutíveis λ de comprimento igual a $d_l(f)$ que começa em $\text{Ker } f$ e termina no domínio de f tal que $\overline{\lambda} = \ker(f)$. Vemos pela figura então que $d_l(f) = 3$.

Observando a aljava, consideremos que h_1, h_2, h'_1 e h'_2 formam uma sequência de Auslander-Reiten que termina em $\text{Ker } f$ como na figura. Sabemos que os irredutíveis h_1 e h_2 são tais que $h_2 h_1 \in \text{rad}^2 \setminus \text{rad}^3$ (uma vez que $d_l(h_2) = 1$ implicaria que h_2 é morfismo poço). Podemos usar o Lema 4.2 para afirmar que $\overline{\lambda} h_2 h_1 \in \text{rad}^5 \setminus \text{rad}^6$. Assim, $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) = 5$ (lembremos que $\mathbf{P}_0$ é a subcategoria de $\text{ind } A$ formada pelos pro-

jetivos indecomponíveis) uma vez que $f\bar{\lambda}h_2h_1 = 0$ e o caminho de menor comprimento estritamente maior que 3 começando em um projetivo e terminando no domínio de f tem comprimento 5. De fato, se tivéssemos $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) < 5$, uma vez que $\text{Ker } f$ não é projetivo e $d_l(f) = 3$ deveríamos ter $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) = 4$ e, portanto, pelo Teorema 4.1 um caminho de irredutíveis de comprimento 4 unindo um projetivo ao domínio de f , o que não existe.

Pelo Teorema 4.1 sabemos que o fato do grau de um irredutível f ser finito igual a n está relacionado à existência de um caminho de comprimento e profundidade iguais a n tal que sua composição é igual ao morfismo inclusão $\ker(f)$. Na proposição seguinte veremos como esse fato se relaciona com sequências de Auslander-Reiten com mais de um termo médio indecomponível.

Proposição 4.3. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Sejam Y um módulo indecomponível não-projetivo e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível tal que X é indecomponível. Assuma que a sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod } A$*

é tal que $X' \neq 0$. Se existe $n \geq 1$ tal que $d_l(g') = n$ então existe um caminho $\lambda : \text{Ker } g' = Z_0 \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n = \tau Y$ tal que $\bar{\lambda} = \ker(g')$ e o caminho $\theta : \text{Ker } g' = Z_0 \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} Z_n = \tau Y \xrightarrow{g} X$ é tal que $\bar{\theta} = \ker(f)$.

Demonstração. Seja $d_l(g') = n$. Pelo Teorema 4.1 considerando o caso $\mathfrak{D} = \text{ind } A$, obtemos caminho de irredutíveis $\lambda : \text{Ker } g' = Z_0 \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{h_n} Z_n = \tau Y$ tal que $\bar{\lambda} \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$ e $\bar{\lambda} = \ker(g')$. Mas $[g, g']^t$ tem grau à esquerda infinito uma vez que é mono. Assim, obtemos $g\bar{\lambda} \in \text{rad}^{n+1} \setminus \text{rad}^{n+2}$ já que $g'\bar{\lambda} = 0$. Além disso, observando a malha da sequência de Auslander-Reiten do enunciado temos $f(g\bar{\lambda}) = f g(\bar{\lambda}) = -f'(g'\bar{\lambda}) = 0$. Assim, uma vez que $d_l(f) = n + 1$ obtemos $\bar{\theta} = g\bar{\lambda} = \ker(f)$, pelo Corolário 3.1. Observemos que esta última igualdade nos diz em particular que $\text{Ker } f \simeq \text{Ker } g'$.

□

4.3 Relação entre os graus à esquerda e à direita de irredutíveis

Nesta seção, como consequência do Lema 4.1 e da Proposição 4.2 apresentaremos uma conexão entre o grau à esquerda de um irredutível f e o grau à direita de um irredutível $g : \text{Ker } f \rightarrow E$ tal que $E \in \text{ind } A$.

Em componentes Γ de Γ_A que possuem a propriedade de que todas as sequências de Auslander-Reiten em Γ tem no máximo dois termos médios indecomponíveis vale que se $f : X \rightarrow Y$ é irredutível tal

que $X \in \text{ind}A$ e $d_l(f) < \infty$ então a sequência de Auslander-Reiten iniciada no módulo não-injetivo $\text{Ker}f$ tem apenas um termo médio indecomponível (Lema 5.1 em [10]). Assim, se $h : \text{ker}f \rightarrow E$ é irredutível então $d_r(h) = 1 < \infty$. Provaremos mais geralmente no seguinte teorema que se $f : X \rightarrow Y$ é irredutível em $\text{mod}A$ tal que $X \in \text{ind}A$, $d_l(f) < \infty$ e $h : \text{ker}f \rightarrow E$ é irredutível tal que $E \in \text{ind}A$ então $d_r(h) < \infty$.

Teorema 4.2. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja $f : X \rightarrow Y$ irredutível epi, $X \in \text{ind}A$, tal que $d_l(f) = n < \infty$. Se $E \in \text{ind}A$ e $h : \text{Ker}f \rightarrow E$ é irredutível então $d_r(h) \leq n$. Além disso, $d_r(h) = n$ se, e somente se, $n = 1$.*

Demonstração. Se $n = 1$ então f é morfismo poço sobrejetor e qualquer irredutível $h : \text{Ker}f \rightarrow E$ será morfismo fonte de uma sequência de Auslander-Reiten de termo médio indecomponível e, portanto, terá grau à direita igual a 1.

Suponhamos então que $n > 1$ e tomemos $E \in \text{ind}A$ e $h : \text{Ker}f \rightarrow E$ irredutível. Pela proposição 4.3 sabemos que existe irredutível $f' : \tau Y \rightarrow X'$ tal que $d_l(f') = n - 1$ e $\text{Ker}f' = \text{Ker}f$. Se $d_l(f') = 1$ então $X' \in \text{ind}A$ e f' é morfismo poço e, portanto, $d_r(h) = 1 < n$ como queríamos. Caso $d_l(f') = n - 1 > 1$ consideremos a sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker}f' \xrightarrow{g'} \tau Y \xrightarrow{f'} X' \rightarrow 0$ tal que $g' = \ker(f') \in \text{rad}^{n-1} \setminus \text{rad}^n$. Então pelo Lema 4.1 ou existe $p : E \rightarrow \tau Y$ tal que $g' = ph$ ou existe $q : \tau Y \rightarrow E$ tal que $h = qg'$. Uma vez que $h \in \text{rad} \setminus \text{rad}^2$ e $n - 1 > 1$ o último caso não será possível. Considere $p : E \rightarrow \tau Y$ tal que $g' = ph$. Então $g' \in \text{rad}^{n-1} \setminus \text{rad}^n \Rightarrow p \in \text{rad}^l \setminus \text{rad}^{l+1}$ tal que $1 \leq l < n - 1$. Uma vez que $d_l(f') = n - 1$ temos $f'p \in \text{rad}^{l+1} \setminus \text{rad}^{l+2}$. Assim, $(f'p)h = f'g = 0$ e $d_r(h) \leq l + 1 < n$.

□

Exemplo: Seja A álgebra de caminhos dada pela aljava:

com a relação $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Observando a aljava de Auslander-Reiten desta álgebra na figura a seguir podemos ver que o irredutível f tem grau à esquerda finito igual a 3 e que os irredutíveis h e h' definidos em $\text{Ker}f$ possuem grau à direita finito igual a 2.

Capítulo 5

Relações entre partições e o radical de $\text{mod}A$

Neste capítulo estaremos interessados em estudar algumas relações entre a teoria de partições pós-projetivas e a noção de radical da categoria de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de artin A . No próximo capítulo apresentaremos algumas destas relações no caso especial em que $\text{mod}A$ será substituída por uma subcategoria de módulos Δ -bons sobre uma álgebra quasi-hereditária.

Começaremos por melhorar uma caracterização das álgebras de artin de tipo finito apresentada por Chaio e Liu em [12]. Para este propósito utilizaremos a teoria de partições pós-projetiva e pré-injetiva. Na seção seguinte estudaremos o grau à esquerda de um morfismo irredutível f em relação a uma subcategoria $\mathcal{D}$ que será elemento da partição pós-projetiva $\{\mathbf{P}_i\}_{i \geq 0}$. De particular interesse é o caso $\mathcal{D} = \mathbf{P}_0$. Em seguida, obteremos algumas caracterizações de grau finito para morfismos irredutíveis mono em π -componentes em relação à teoria de partições. Terminaremos o capítulo introduzindo o conceito de componentes $\mathbf{P}$ -discretas de Γ_A e estudando o problema da composição de caminhos de irredutíveis que começam em um projetivo e terminam em um módulo em $\mathbf{P}_\infty$.

5.1 Uma caracterização de álgebras de artin de tipo finito

Como mencionado anteriormente, o objetivo desta seção é obter uma nova demonstração para uma recente caracterização de álgebras de artin de tipo finito obtida por Chaio e Liu em [12]. Para tanto, utilizamos uma nova abordagem dentro da teoria de partições que será base também para uma caracterização semelhante obtida no próximo capítulo para as subcategorias $\mathcal{F}(\Delta)$ de módulos Δ -bons da categoria de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra quasi-hereditária. Outra vantagem desta abordagem é que melhoramos um resultado obtido por Coelho, Marcos, Merklen e Skowronski em [15] sem usá-lo na demonstração, ao contrário do que foi feito por Chaio e Liu em [12].

Antes, precisaremos do seguinte lema que será utilizado também em outras ocasiões nesta tese.

Lema 5.1. *Dada uma álgebra de artin A , considere a partição pós-projetiva $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\infty$ de sua categoria de módulos $\text{mod} A$. Dado $0 < i \leq \infty$, temos $\text{Hom}(M, N) = \text{rad}^i(M, N) \forall M \in \mathbf{P}_0, \forall N \in \mathbf{P}_i$.*

Demonstração. Provaremos primeiramente por indução que dado $0 < i < \infty$, temos $\text{Hom}(M, N) = \text{rad}^i(M, N) \forall M \in \mathbf{P}_0, \forall N \in \mathbf{P}_i$. É claro que $\text{Hom}(M, N) = \text{rad}(M, N)$ para todo $M \in \mathbf{P}_0$ e $N \in \mathbf{P}_1$. Suponha a igualdade válida para $i-1$ e considere $f : M_0 \rightarrow M_i$ com $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e $M_i \in \mathbf{P}_i$. Obtemos para M_i uma cobertura $\bigoplus_{k=1}^n M_{i-1,k} \xrightarrow{[h_1, \dots, h_n]} M_i$ com $M_{i-1,k} \in \mathbf{P}_{i-1}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Como M_0 é projetivo obtemos o levantamento:

$$\begin{array}{ccc} & M_0 & \\ \swarrow [g_1, \dots, g_n]^t & \downarrow f & \\ \bigoplus_{k=1}^n M_{i-1,k} & \xrightarrow{[h_1, \dots, h_n]} & M_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

Sabemos que $h_k : M_{i-1,k} \rightarrow M_i$ está no radical para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ e que por hipótese $g_k \in \text{rad}^{i-1}(M_0, M_{i-1,k})$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Assim, $f = \sum_{k=1}^n h_k g_k \in \text{rad}^i(M_0, M_i)$ e $\text{Hom}(M, N) = \text{rad}^i(M, N) \forall M \in \mathbf{P}_0, N \in \mathbf{P}_i$.

Considere agora $f : M_0 \rightarrow M_\infty$ com $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e $M_\infty \in \mathbf{P}_\infty$. Dado $i > 0$, obtemos uma cobertura $\bigoplus_{k=1}^n M_{i,k} \xrightarrow{[h_1, \dots, h_n]} M_\infty$ com $M_{i,k} \in \mathbf{P}_i, \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Novamente obtemos o levantamento:

$$\begin{array}{ccc} & M_0 & \\ \swarrow [g_1, \dots, g_n]^t & \downarrow f & \\ \bigoplus_{k=1}^n M_{i,k} & \xrightarrow{[h_1, \dots, h_n]} & M_\infty \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pelo resultado já obtido temos $g_k \in \text{rad}^i(M_0, M_{i,k}) \forall k \in \{1, \dots, n\}$ e, por conseguinte, $f \in \text{rad}^{i+1}$. Como i foi tomado qualquer, temos $f \in \text{rad}^\infty$. □

Dualmente, ao considerarmos a partição pré-injetiva $\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n, \dots, \mathbf{I}_\infty$, dado $0 < j \leq \infty$ obtemos $\text{Hom}(M, N) = \text{rad}^j(M, N) \forall M \in \mathbf{I}_j, \forall N \in \mathbf{I}_0$.

Apresentaremos em seguida a caracterização mencionada anteriormente. Antes, precisaremos estabelecer a seguinte notação introduzida por Chaio e Liu em [12]: dado um módulo simples S fixaremos uma cobertura projetiva $\pi_S : P_S \rightarrow S$ e um envelope injetivo $\iota_S : S \rightarrow I_S$. Além disso, denotaremos $\theta_S = \iota_S \pi_S$. A caracterização mencionada é a seguinte:

Proposição 5.1. *Seja A uma álgebra de artin. São equivalentes:*

a) *A é de tipo finito.*

- b) A profundidade de π_S é finita para todo módulo simples S .
- c) A profundidade de ι_S é finita para todo módulo simples S .
- d) $\theta_S \notin (\text{rad}^\infty)^2$ para todo módulo simples S .
- e) $(\text{rad}_A^\infty)^2 = 0$.

A equivalência das letras a), b), c) e d) foram obtidas recentemente por Chaio e Liu em [12]. Aqui daremos uma demonstração alternativa para essa equivalência utilizando o lema anterior e o seu dual. Em [15], foi demonstrado que toda álgebra de artin A tal que o quadrado do radical infinito da categoria $\text{mod} A$ se anula é de tipo finito, ou seja, vale a implicação $e) \Rightarrow a)$. Utilizando este resultado, Chaio e Liu foram capazes de obter a implicação $d) \Rightarrow a)$ na caracterização mencionada. Observe-mos que esta última implicação melhora o resultado anterior obtido em [15] já que se $(\text{rad}^\infty)^2 = 0$ então $(\text{rad}^\infty(P_S, I_S))^2 = 0$ para todo simples S . Aqui obteremos a implicação $e) \Rightarrow a)$ (e toda a caracterização) de forma independente do resultado obtido em [15] utilizando o seguinte resultado de Skowronski e Smalø:

Teorema 5.1. [22] *Seja uma álgebra de artin A tal que $\mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty = \emptyset$. Então A é de tipo finito.*

Vamos à demonstração prometida da Proposição 5.1:

Primeiramente observemos que a letra a) implica em todos os itens posteriores já que se A é de tipo finito então $\text{rad}_A^\infty = 0$.

$b) \Rightarrow a)$ Primeiramente, sejam S módulo simples e $\pi_S : P_S \rightarrow S$ tais que $\text{dp}(\pi_S) < \infty$. Caso $S \in \mathbf{P}_\infty$ temos pelo lema anterior que $\pi_S \in \text{Hom}(P_S, S) = \text{rad}^\infty(P_S, S)$. Logo, assumindo b) válido temos que todo simples S é pós-projetivo. Suponhamos agora por contradição que A seja de tipo infinito. Então existe $M_\infty \in \mathbf{P}_\infty$. Tomando um somando simples qualquer S do módulo semissimples $\text{top} M_\infty$ temos que $S \in \mathbf{P}_\infty$, pois caso contrário teríamos um epimorfismo de M_∞ em um módulo pós-projetivo S que não cindiria. Contradição.

Dualizando os argumentos acima encontramos a implicação $c) \Rightarrow a)$.

Se vale e), ou seja, se $(\text{rad}^\infty)^2 = 0$ então $(\text{rad}^\infty(P_S, I_S))^2 = 0$ para todo simples S , donde vale d) já que $\theta_S \neq 0$ para todo simples S . Uma vez que $d) \Rightarrow e)$ é trivial temos $e) \Leftrightarrow d)$.

Finalmente basta provarmos $d) \Rightarrow a)$ para obter a equivalência da letra a) até a letra e).

Suponhamos por contradição que A seja de tipo infinito. Então temos $\mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty \neq \emptyset$, pelo Teorema 5.1. Seja $M \in \mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty$. Consideremos a inclusão $g : S \hookrightarrow M$ tal que S é um simples somando do socle de M . Uma vez que $M \in \mathbf{I}_\infty$ temos $S \in \mathbf{I}_\infty$. Observemos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 P_S & \xrightarrow{\pi_S} & S & \xrightarrow{\iota_S} & I_S \\
 & & \downarrow g & \nearrow h & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

onde h é obtido pois I_S é injetivo e g um monomorfismo. Temos então $\theta_S = \iota_S \pi_S = h(g\pi_S)$ e, portanto, $\theta \in (\text{rad}^\infty)^2$ já que $h \in \text{Hom}(M, I_S) = \text{rad}^\infty(M, I_S)$ pelo dual do Lema 5.1 e $g\pi_S \in \text{Hom}(P_S, M) = \text{rad}^\infty(P_S, M)$ pelo próprio Lema 5.1. Se acaso $P_S = S$ então teremos $\pi_S = 1_S$, $\theta_S = \iota_S$ e $g \in \text{rad}^\infty$ já que S é projetivo e $M \in \mathbf{P}_\infty$. Obtemos novamente $\theta_S \in (\text{rad}^\infty)^2$. Logo, se $\theta_S \notin (\text{rad}^\infty)^2$ para todo módulo simples $S \in \mathbf{I}_\infty$ então A é de tipo finito.

Assim, observemos que em particular também apresentamos acima uma demonstração alternativa à obtida em [15] para o fato de que se $(\text{rad}_A^\infty)^2 = 0$ então A é de tipo finito.

5.2 Grau de morfismos irredutíveis e partições pós-projetivas

Nesta seção procuraremos estabelecer algumas conexões entre a teoria de partições pós-projetiva e pré-injetiva e a noção de grau de um morfismo irredutível $f : X \rightarrow Y$. Seremos capazes de dizer, por exemplo, quando certos morfismos irredutíveis terão grau à esquerda (ou à direita) finito a partir de propriedades dos módulos X , Y , $\text{Ker} f$ e $\text{Coker} f$ em relação à teoria de partições. Um exemplo dessa abordagem é a seguinte proposição que relaciona o fato do grau à direita de um irredutível $f_S : \text{rad} P_S \hookrightarrow P_S$ tal que P_S é indecomponível projetivo ser finito com o fato do simples correspondente S ser pós-projetivo. Para este resultado necessitaremos que a álgebra A seja de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k .

Proposição 5.2. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja S um simples em $\text{mod} A$ tal que $P_S \in \text{ind} A$ é cobertura projetiva de S e $f_S : \text{rad} P_S \hookrightarrow P_S$ é um morfismo irredutível. Então f_S tem grau à direita finito se, e somente se, S é pós-projetivo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que f_S tem grau à direita finito. Então a projeção $\pi_S = \text{coker}(f_S) : P_S \rightarrow S$ é tal que $\pi_S \notin \text{rad}^\infty$, pelo dual da Proposição 3.2. Assim, $S \notin \mathbf{P}_\infty$ pois, caso contrário, teríamos $\pi_S \in \text{Hom}(P_S, S) = \text{rad}^\infty(P_S, S)$ já que P_S é projetivo.

($\Leftarrow$) Se S é pós-projetivo então $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(S) \neq S$. Uma vez que π_S é epimorfismo temos que sua imagem não está contida em $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(S)$, logo $\pi_S \notin \text{rad}^\infty$ pelo Lema 3.1. Uma vez que $\pi_S f_S = 0$ segue-se que f_S tem grau à direita finito.

□

5.2.1 Grau de um irredutível em relação a $\mathbf{P}_0$

Começaremos o estudo do grau de um morfismo irredutível em relação a uma subcategoria $\mathfrak{D}$ de $\text{ind}A$ quando $\mathfrak{D}$ é um elemento da partição pós-projetiva $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\infty$. No teorema seguinte estabelecemos caracterizações de finitude independentes do conceito de radical para o grau de um morfismo irredutível f em relação à subcategoria $\mathbf{P}_0$ formada pelos projetivos. Nesta seção, precisaremos utilizar fatos que são consequência do recobrimento genérico e, portanto, teremos que restringir os resultados para o caso em que A é uma k -álgebra sobre um corpo algebricamente fechado k , exceto onde estiver explícito o contrário.

Teorema 5.2. *Seja A um álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja $f : X \rightarrow Y$ irredutível em $\text{mod}A$ tal que X é indecomponível. Então são equivalentes:*

- a) $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) < \infty$
- b) *Existem $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e $h : M_0 \rightarrow X$ tais que $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ e $\text{Im}(fh) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y)$*
- c) $\text{Ker}f \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$
- d) $\text{Ker}f \in \mathbf{P}$ e $d_l(f) < \infty$
- e) *Existe $0 \leq i < \infty$ tal que $\text{Ker}f \in \mathbf{P}_i$ e $d_l^{\mathbf{P}_i}(f) < \infty$ para todo $0 \leq j \leq i$*

Neste caso, se fazemos $r = d_l^{\mathbf{P}_0}(f) - d_l(f)$ então $\text{Ker}f \in \mathbf{P}_i$ tal que $0 \leq i \leq r$.

Demonstração. **a) $\Rightarrow$ b)** Se $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) < \infty$ então existem $M \in \mathbf{P}_0$ e $h : M \rightarrow X$ tais que $h \notin \text{rad}^\infty$ e $fh = 0$. Suponhamos por contradição que $\text{Im}h \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$. Se $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) = 0$ então a contradição é óbvia. Caso contrário, considere a fatoração de h por $r : M \rightarrow \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & X \\ & \searrow r & \nearrow \\ & \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) & \end{array}$$

Uma vez que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) \in \text{add}\mathbf{P}_\infty$ temos pelo Lema 5.1 que $\text{Hom}(M, \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)) = \text{rad}^\infty(M, \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X))$. Assim, $r \in \text{rad}^\infty$ e, portanto, $h \in \text{rad}^\infty$. Logo, $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ e $\{0\} = \text{Im}(fh) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y)$.

b) $\Rightarrow$ a) Suponhamos que existam $M \in \mathbf{P}_0$ e $h : M \rightarrow X$ tais que $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ e $\text{Im}(fh) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y)$. Como $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ temos que X é pós-projetivo e que $h \notin \text{rad}^\infty$, pelo Lema 3.1. Assim, existe $n \geq 1$ tal que $h \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$. Por outro lado, se $\text{Im}(fh) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y)$ então $fh : M \rightarrow Y$ fatora-se por $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y)$ e teremos $fh \in \text{rad}^\infty$ uma vez que $\text{Hom}(M, \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y)) = \text{rad}^\infty(M, \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y))$, pelo Lema 5.1. Logo, $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) < \infty$.

a) $\Rightarrow$ c) Se $d_l^{P_0}(f) = n$ então existem $M \in P_0$ e $h : M \rightarrow X$ tais que $\text{dp}(h) = n$ e $fh = 0$. Uma vez que $\text{Hom}(M, \text{tr}_{P_\infty}(X)) = \text{rad}^\infty(M, \text{tr}_{P_\infty}(X))$ temos $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$. Considere o levantamento:

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ h' \downarrow & \searrow h & \\ \text{Ker}f \xrightarrow{\iota} X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Se $\text{Ker}f \subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$ então $\text{Im}h = \text{Im}(\iota h') \subseteq \text{Ker}f \subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$, absurdo. Logo, $\text{Ker}f \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$.

c) $\Rightarrow$ d) Seja $f : X \rightarrow Y$ irredutível tal que $\text{Ker}f \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$. Assim, $\text{Ker}f \in P_i$ para algum $0 \leq i < \infty$, pela própria definição de $\text{tr}_{P_\infty}(X)$. Temos também que a inclusão $\iota : \text{Ker}f \rightarrow X$ é tal que $\iota \notin \text{rad}^\infty$ já que $\text{Ker}f \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$, pelo Lema 3.1. Logo, $d_l(f) < \infty$.

d) $\Rightarrow$ e) Se $\text{Ker}f \in P$ e $d_l(f) < \infty$ então existe $0 \leq i < \infty$ tal que $\text{Ker}f \in P_i$ e é claro que $d_l^{P_i}(f) < \infty$. Dado $0 \leq j < i$, sabemos que existe uma cobertura $\bigoplus_{k=1}^n M_{j,k} \xrightarrow{g} \text{Ker}f$, $g = [g_1, \dots, g_n]$ e $M_{j,k} \in P_j \forall k$, de tal forma que $\text{Im}(g) \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(\text{Ker}f)$. Uma vez que $\text{tr}_{P_\infty}(\text{Ker}f)$ é submódulo é claro que existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{Im}(g_k) \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(\text{Ker}f)$ e, portanto, $g_k \notin \text{rad}^\infty$. Pelo Lema 4.2 sabemos que $\text{dp}(\iota g_k) < \infty$ e como $f(\iota g_k) = 0$ temos $d_l^{P_i}(f) < \infty$. Assim, para todo j tal que $0 \leq j \leq i$ temos $d_l^{P_j}(f) < \infty$.

e) $\Rightarrow$ a) É trivial.

Para demonstrar a afirmação final sejam $d_l(f) = m$, $d_l^{P_0}(f) = n$ e $r = n - m$. Então existem $M \in \mathcal{D}$ e $h : M \rightarrow X$ tais que $\text{dp}(h) = n$ e $fh = 0$ e sabemos que a inclusão $\iota : \text{Ker}f \rightarrow X$ tem profundidade m . Daí, pelo Lema 4.2 temos que se $h = \iota h'$ então $h' \in \text{rad}^r \setminus \text{rad}^{r+1}$. Seja $i \geq 0$ tal que $\text{Ker}f \in P_i$. Então, $i \leq r$ já que $\text{Hom}(M, \text{Ker}f) = \text{rad}^i(M, \text{Ker}f)$ e $h' \notin \text{rad}^{r+1}$.

□

Corolário 5.1. *Seja A um álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja $f : X \rightarrow Y$ irredutível tal que X é pós-projetivo indecomponível e $Y \in \text{add}P_\infty$. Então $d_l^{P_0}(f) < \infty$.*

Demonstração. Tomando uma cobertura projetiva de X obtemos um morfismo $h : M \rightarrow X$ tal que $M \in P_0$ e $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$. Claro, se $\bigoplus_{k=1}^n M_k \xrightarrow{g} X$, $g = [g_1, \dots, g_n]$, é cobertura projetiva então existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{Im}(g_k) \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$, já que $\text{tr}_{P_\infty}(X) \neq X$ e g é epi. Uma vez que $\text{Im}(fh) \subseteq \text{tr}_{P_\infty}(Y) = Y$ então vale **b)** no teorema anterior.

□

Corolário 5.2. *Seja A um álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja $X \in \text{ind}A$, X pós-projetivo e não-injetivo. Então X tem sucessor por irredutível pós-projetivo.*

Demonstração. Consideremos o morfismo fonte $f : X \rightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$. Como X não é injetivo temos que f é mono e, portanto, tem grau à esquerda infinito. Sendo X pós-projetivo, sabemos que existe $h : M \rightarrow X$ tal que $M \in P_0$ e $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(X)$. Por **b)**, $\text{Im}(fh) \not\subseteq \text{tr}_{P_\infty}(Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n) = \text{tr}_{P_\infty}(Y_1) \oplus \dots \oplus \text{tr}_{P_\infty}(Y_n)$,

donde existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{Im}(f_k h) \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y_k)$. Logo, $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(Y_k) \neq Y_k$ e Y_k é sucessor pós-projetivo de X . $\square$

Corolário 5.3. *Seja A um álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja $X \in \text{ind}A$ tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) = 0$ e $f : X \rightarrow Y$ irredutível. Então $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) < \infty \Leftrightarrow f$ é epimorfismo.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) < \infty$ então f não pode ser mono.

$(\Leftarrow)$ Se f é epi então $\text{Ker} f \neq 0$, donde $\text{Ker} f \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$. Assim, $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) < \infty$ por c). $\square$

Dessa forma, em uma componente conexa Γ formada somente por módulos pós-projetivos (π -componentes, ver Teorema 3.2) teremos que todo epimorfismo irredutível $f : X \rightarrow Y$ em Γ possui grau à esquerda em relação a $\mathbf{P}_0$ finito já que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) = 0$ (letra c) acima). Em particular, vale a afirmação para componentes pós-projetivas e para as álgebras de tipo finito.

Na proposição seguinte analisaremos o que acontece em componentes que contém projetivos e que todo irredutível entre módulos indecomponíveis nestas componentes possui grau à esquerda infinito em relação a $\mathbf{P}_0$. Como exemplo podemos citar a componente pós-projetiva da aljava de Auslander-Reiten da álgebra de Kronecker já que esta componente não possui irredutíveis epi entre módulos indecomponíveis (para o caso k corpo algebricamente fechado, sabemos que se um irredutível tem grau à esquerda finito então ele é epimorfismo).

Proposição 5.3. *Seja A uma álgebra de artin de tipo infinito e Γ uma componente conexa de Γ_A tal que Γ possui projetivos e todo morfismo irredutível em Γ entre módulos indecomponíveis tem grau à esquerda em relação a $\mathbf{P}_0$ infinito. Então:*

- a) *Dado $M_i \in \mathbf{P}_1$, $1 < i < \infty$, $M_i \in \Gamma$, existem $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e $f : M_0 \rightarrow M_i$ tais que $\text{dp}(f) = i$*
- b) *Dados Se $M_j \rightarrow M_i$ é irredutível em Γ tal que $M_j \in \mathbf{P}_j$, $M_i \in \mathbf{P}_i$ e $j < i < \infty$ então $j = i - 1$*
- c) *Dado módulo pós-projetivo $M_i \in \mathbf{P}_i$ em Γ , existe caminho da forma $\gamma : M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+1} \rightarrow \dots \rightarrow M_i$, onde $M_l \in \mathbf{P}_1 \forall l \in \{0, \dots, i-1\}$, de comprimento i tal que $\text{dp}(\bar{\gamma}) = i$.*

Demonstração. Provaremos a) por indução em i . Se $i = 1$, então $M_1 \in \mathbf{P}_1$ donde existem $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e irredutível $f : M_0 \rightarrow M_1$, $f \in \text{rad} \setminus \text{rad}^2$. Considerando a afirmação válida para módulos em níveis menores que i tomemos $M_i \in \mathbf{P}_i$. Sabemos que existe irredutível $g : M_j \rightarrow M_i$ tal que $M_j \in \mathbf{P}_j$, $M_i \in \mathbf{P}_i$ e $j < i$. Por hipótese de indução, existe $h : M_0 \rightarrow M_j$ tal que $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e $h \in \text{rad}^j \setminus \text{rad}^{j+1}$. Temos $gh \in \text{Hom}(M_0, M_i) = \text{rad}^i(M_0, M_i)$ e $gh \notin \text{rad}^{j+2}$ já que $d_l^{\mathbf{P}_0}(g) = \infty$. Uma vez que $j < i$ isso nos dá $i = j + 1$ e daí $gh \in \text{rad}^i \setminus \text{rad}^{i+1}$. Tomando $f = gh$ obtemos o resultado desejado.

Para demonstrar b), dado $g : M_j \rightarrow M_i$ irredutível tal que $j < i$ tomamos $f : M_0 \rightarrow M_j$ tal que $f \in \text{rad}^j \setminus \text{rad}^{j+1}$ e $M_0 \in \mathbf{P}_0$. Daí, $d_l^{\mathbf{P}_0}(g) = \infty$ e $\text{Hom}(M_0, M_i) = R^i(M_0, M_i)$ implicam em $j = i - 1$.

De a) sabemos que existe caminho γ começando em um projetivo M_0 e terminando em M_i tal que $\bar{\gamma} \in \text{rad}^i \setminus \text{rad}^{i+1}$. Assim, γ é formado somente por pós-projetivos e tem comprimento $l(\gamma) > i - 1$ já que todo irredutível em Γ tem grau infinito em relação a $\mathbf{P}_0$. Por b), temos que ele é da forma descrita em c).

□

Apresentaremos na próxima proposição uma outra aplicação do Lema 5.1.

Proposição 5.4. *Seja A uma álgebra de artin. Se $f : M_1 \rightarrow M_j$ é irredutível em $\text{ind}A$ tal que $M_1 \in \mathbf{P}_1$, $M_j \in \mathbf{P}_j$ e $j > 2$, então f é morfismo poço.*

Demonstração. Se $f : M_1 \rightarrow M_j$ é irredutível tal que $M_1 \in \mathbf{P}_1$, $M_j \in \mathbf{P}_j$ e $j > 2$, então $\tau M_j \in \mathbf{P}_0$ (Lema 3.2) e existe irredutível $h : \tau M_j \rightarrow M_1$ tal que $fh \in \text{Hom}(\tau M_j, M_j) = \text{rad}^j(\tau M_j, M_j)$, $j > 2$. Assim, $d_l^{\mathbf{P}_0}(f) = d_l(f) = 1$ e f é morfismo poço pelo Lema 3.3.

□

Daremos um exemplo em seguida que está relacionado à proposição anterior e que também será visto sob outras perspectivas em outras oportunidades neste capítulo. Trata-se de uma componente da aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra estendida por um ponto. Indicamos ao leitor a referência [3] onde poderá encontrar este exemplo explicado com mais detalhes na página 15.

Exemplo 5.1. *Seja A uma k -álgebra de caminhos obtida a partir da aljava:*

O simples S associado ao vértice 3 é um módulo regular tal que $\tau S = E$

e E por sua vez é um módulo indecomponível tal que $\tau E = S$. Sabemos que S e E determinam um tubo de *rank* 2.

A aljava com relações da álgebra estendida por um ponto $A[S]$ é

com as relações $\epsilon\beta = 0$ e $\epsilon\delta = 0$.

O tubo raio que contém $S = S[1]$ será da forma:

Se $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\infty$ é a partição pós-projetiva da álgebra $A[S]$ então os módulos $E[i]$ e $S[j]$ tais que $i \geq 1$ e $j \geq 1$ estão em $\mathbf{P}_\infty$ e o raio enxertado $\overline{S[1]} \rightarrow \overline{S[2]} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{S[n]} \rightarrow \dots$ é tal que $\overline{S[n]} \in \mathbf{P}_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Vemos que o irredutível $\overline{S[2]} \rightarrow E[1]$ com $\overline{S[2]} \in \mathbf{P}_1$ e $E[1] \in \mathbf{P}_\infty$ é morfismo poço em acordo com o que diz a proposição anterior.

5.2.2 Grau à direita de morfismos irredutíveis em π -componentes

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Relembramos que se um irredutível f em $\text{mod} A$ tem grau à direita finito então f é irredutível mono e que pelo dual da Proposição 3.2 temos que $d_r(f) = n$ se, e somente se, $\text{dp}(\text{coker}(f)) = n$. Dado um irredutível mono $f : M \rightarrow N$ em uma π -componente estaremos nesta seção interessados em analisar a natureza de $\text{Coker} f$ em relação à teoria de partição pós-projetiva condicionada ao grau à direita de f ser finito ou infinito.

Em uma π -componente, sabemos que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$ para todo módulo N , pelo Teorema 3.2. O seguinte resultado relaciona o fato do grau à direita de um irredutível $f : M \rightarrow N$ tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$ ser finito com o fato de $\text{Coker} f$ ser pós-projetivo. Em particular, vale o resultado para irredutíveis mono em π -componentes.

Teorema 5.3. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja $f : M \rightarrow N$ irredutível mono tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$. Então $d_r(f) < \infty \Leftrightarrow \text{Coker} f \in \mathbf{P}$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Se $\text{Coker} f \in \mathbf{P}$, uma vez que a projeção $\text{coker}(f)$ é sobrejetora e $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(\text{Coker} f) \neq \text{Coker} f$ temos pelo Lema 3.1 que $\text{dp}(\text{coker}(f)) < \infty$.

($\Rightarrow$) Assumindo $d_r(f) = n$, $1 \leq n < \infty$, suponhamos por contradição que $\text{Coker} f \in \mathbf{P}_\infty$. Fazendo $g = \text{coker}(f)$, temos que $g \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$, pelo dual da Proposição 3.2. Sabemos que existe $l \geq 1$ tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_1}(N) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$. Além disso, somos capazes de obter um morfismo não-nulo $v : M_l \rightarrow M_\infty = \text{Coker} f$ tal que $M_l \in \text{add} \mathbf{P}_1$ e $v \in \text{rad}^{n+1}$: de fato, tomemos $r > l + n$. Então, existe cobertura $h_r : M_r \rightarrow M_\infty$ tal que $h_r \in \text{rad}$ e $M_r \in \text{add} \mathbf{P}_r$, uma vez que $M_\infty = \text{Coker} f \in \mathbf{P}_\infty$. Tomando sucessivas coberturas $h_s : M_s \rightarrow M_{s+1}$, $s \in \{l, l+1, \dots, r-1\}$ tais que $M_s \in \text{add} \mathbf{P}_s$, temos que $v = h_r h_{r-1} \dots h_l : M_l \rightarrow M_\infty$ é morfismo não-nulo (composição de epimorfismos) e $v \in \text{rad}^{n+1}$. Considere o diagrama com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f'} & W & \xrightarrow{g'} & M_k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1_M & & \downarrow v' & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & M_\infty & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde W é o *pull-back* de $N \xrightarrow{g} M_\infty \xleftarrow{v} M_l$. Pelo dual do Lema 4.1, ou existe $p : N \rightarrow M_l$ tal que $g = vp$ ou existe $q : M_l \rightarrow N$ tal que $v = gq$. No primeiro caso, teríamos $g \in \text{rad}^{n+1}$ uma vez que $v \in \text{rad}^{n+1}$, o que é absurdo. No segundo caso, como $\text{tr}_{\mathbf{P}_1}(N) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$ teríamos $q = 0$, donde $v = 0$, novamente absurdo. Logo, $\text{Coker} f$ é pós-projetivo. □

Observação: Apesar da sugestão que nos dão a Proposição 5.2 e a Proposição 5.3 alertamos que não é verdade que se $f : M \rightarrow N$ é irredutível mono tal que N é pós-projetivo então $d_r(f) < \infty \Leftrightarrow \text{Coker} f \in \mathbf{P}$. No Exemplo 5.1 temos um morfismo fonte mono $f : \overline{S[1]} \rightarrow \overline{S[2]}$ de grau à direita igual a 1 tal que $\overline{S[2]}$ é pós-projetivo mas $E[1] = \text{Coker} f \in \mathbf{P}_\infty$.

Caracterizado o $\text{Coker} f$ em relação a teoria de partição pós-projetiva no caso $d_r(f) < \infty$ nos dedicaremos em seguida a analisar o caso $d_r(f) = \infty$. Antes precisaremos de uma definição.

Definição 5.1. *Seja M um módulo em $\mathbf{P}_\infty$. Dizemos que M é $\mathbf{P}_\infty$ -simples se todo submódulo não-trivial de M é pós-projetivo.*

Observação: Uma vez que qualquer subconjunto infinito de pós-projetivos não possui cota superior para os comprimentos dos seus módulos (ver [4]) temos que um módulo M não pode conter infinitos submódulos pós-projetivos. Assim, se M é $\mathbf{P}_\infty$ -simples então existe $0 \leq k < \infty$ tal que todo submódulo não-trivial de M está em $\text{add} \mathbf{P}^k$.

Proposição 5.5. *Seja M um módulo indecomponível em uma componente regular de Γ_A . Se M é $\mathbf{P}_\infty$ -simples se então M é regular simples.*

Demonstração. Uma vez que todos os módulos regulares estão em $\mathbf{P}_\infty$ é claro que se M é $\mathbf{P}_\infty$ -simples então M não pode ter submódulo regular não-trivial. $\square$

Demonstraremos agora que se $f : M \rightarrow N$ é irredutível mono tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$ e $d_r(f) = \infty$ então $\text{Coker} f$ é $\mathbf{P}_\infty$ -simples. Pelo Teorema 3.2, temos que a afirmação é válida em particular para qualquer irredutível mono em uma π -componente.

Teorema 5.4. *Seja $f : M \rightarrow N$ irredutível mono tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$. Se $d_r(f) = \infty$ então $\text{Coker} f$ é $\mathbf{P}_\infty$ -simples.*

Demonstração. Sabemos pela Proposição 5.3 que $\text{Coker} f \in \mathbf{P}_\infty$. Suponhamos, por contradição, que $\text{Coker} f$ não seja $\mathbf{P}_\infty$ -simples. Pela definição anterior, existe X submódulo não-trivial de $\text{Coker} f$ tal que $X \in \mathbf{P}_\infty$. Assim, temos $\text{Hom}(X, N) = 0$ já que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(N) = 0$. Considerando a sequência exata $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \text{Coker} f \rightarrow 0$ e a inclusão $\nu : X \hookrightarrow \text{Coker} f$ temos pelo dual do Lema 4.1 que ou existe $q : X \rightarrow N$ tal que $\nu = gq$ ou existe $p : N \rightarrow X$ tal que $g = \nu p$. O primeiro caso não é possível, pois teríamos $q = 0$ e, portanto, $X = 0$. No segundo caso, como g é sobrejetora teríamos $X = \text{Coker} f$, também absurdo. Logo, $\text{Coker} f$ é $\mathbf{P}_\infty$ -simples $\square$

Corolário 5.4. *Se $f : M \rightarrow N$ é irredutível mono em uma π -componente tal que $\text{Coker} f$ está em uma componente regular então $\text{Coker} f$ será regular simples.*

Exemplo 5.2. Seja A álgebra de caminhos da seguinte aljava de tipo $\tilde{A}_2$:

Aqui daremos um exemplo que ilustra o corolário anterior. Para cada vértice x no quiver fazemos P_x o projetivo correspondente. Assim o irredutível mono $f : P_1 \rightarrow P_3$ tem grau à direita infinito pois o $\text{Coker} f$ não se encontra na componente pós-projetiva. $\text{Coker} f$ é como se segue:

Por outro lado, seja $\mu \in \text{rad}^2(P_1, P_3)$ a composição dos irredutíveis $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$. Então $f' = f + \mu$ também é irredutível e $\text{Coker} f'$ é como se segue:

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ \text{Id} \nearrow & & \searrow \text{Id} \\ k & \xrightarrow{\text{Id}} & k \end{array}$$

Uma vez que f tem grau à direita infinito temos que f' também tem grau à direita infinito. Verificamos então que $\text{Coker} f$ e $\text{Coker} f'$ estão em tubos homogêneos distintos. Pelo corolário, ambos deverão ser módulos regulares simples. E é isso que ocorre já que de fato $\text{Coker} f$ e $\text{Coker} f'$ estão nas bocas dos seus respectivos tubos.

5.3 Componentes P-discretas

Seja Γ uma componente conexa de Γ_A que contém projetivos. Suponhamos que para todo irredutível $M \rightarrow N$ em Γ tal que M, N são módulos pós-projetivos o nível pós-projetivo de M não é maior que o nível de N . Provaremos nesta seção que sob esta condição não haverá "salto" no níveis de módulos pós-projetivos indecomponíveis unidos por irredutível nesta componente, ou seja, se $M \rightarrow N$ é irredutível em Γ tal que $M \in \mathbf{P}_i$, $0 \leq i < \infty$, então $N \in \mathbf{P}_i$ ou $N \in \mathbf{P}_{i+1}$.

Primeiramente trataremos de caracterizar esse tipo de componente. Começaremos por uma definição.

Definição 5.2. *Seja A uma álgebra de artin de tipo infinito. Dizemos que uma componente Γ de Γ_A é uma componente P-discreta se para todo $i \geq 0$ e para todo A -módulo M pós-projetivo em Γ tais que $M \in \mathbf{P}_i$ temos $\text{tr}_{\mathbf{P}_{i+1}}(M) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M)$.*

Observação: Notemos que $\text{tr}_{\mathbf{P}_{i+1}}(M) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M)$ implica em $\text{tr}_{\mathbf{P}_j}(M) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M)$, $\forall j > i$.

Antes de caracterizar estas componentes em relação à aljava de Auslander-Reiten, precisaremos de um lema.

Lema 5.2. *Seja X um indecomponível em $\mathbf{P}_i$, $i > 0$. Seja j um inteiro não-negativo tal que $0 \leq j < i$. Então existe caminho de irredutíveis λ entre um módulo $M_j \in \mathbf{P}_j$ e X formado somente por módulos pós-projetivos tal que $\overline{\lambda} \notin \text{rad}^\infty$.*

Demonstração. Sabemos que existe uma cobertura $\bigoplus_{l=1}^n M_{j,l} \xrightarrow{g} X$, $g = [g_1, \dots, g_n]$, de tal forma que $\text{Im} g \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ já que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) \neq X$. Uma vez que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ é submódulo é claro que existe $l \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{Im} g_l \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ e, portanto, $g_l \notin \text{rad}^\infty$ pelo Lema 3.1. Chamando $M_{j,l} = M_j$ e $f = g_l$, podemos decompor $f = \sum_{i=1}^n f_i + f_\infty$ tal que $f_\infty \in \text{rad}^\infty$ e f_i é caminho de irredutíveis tal que $\overline{f_i} \notin \text{rad}^\infty$, $\forall i \in$

$\{1, \dots, n\}$. Uma vez que pelo Lema 3.1, $\text{Im} f_\infty \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X) \Rightarrow f_\infty \notin \text{rad}^\infty$, temos $\text{Im} f_\infty \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$. Assim, $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\overline{f_i}(M_j) \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$ já que $\text{Im} f \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$.

Suponhamos que o caminho f_i seja da forma:

$$f_i : M_j \rightarrow \dots \rightarrow \underbrace{M_\infty \rightarrow \dots \rightarrow X}_{f'_i}$$

tal que $M_\infty \in \mathbf{P}_\infty$. Mas daí, $\overline{f_i}(M_j) \subseteq \overline{f'_i}(M_\infty) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(X)$, contradição. Logo, existe um caminho $\lambda = f_i$ formado somente por pós-projetivos entre $M_j \in \mathbf{P}_j$ e X tal que $\overline{\lambda} \notin \text{rad}^\infty$.

□

Observação: Notemos que se existem $M_j \in \mathbf{P}_j$, $M_i \in \mathbf{P}_i$ e $f : M_j \rightarrow M_i$ tais que $\text{Im} f \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i)$ e $M_i \in \Gamma$ então $M_j \in \Gamma$.

Finalmente vamos à caracterização descrita no início da seção.

Proposição 5.6. *Seja A uma álgebra de artin de tipo infinito e Γ uma componente de Γ_A . São equivalentes:*

- a) Γ é componente $\mathbf{P}$ -discreta
- b) $\nexists$ irredutível $M_j \rightarrow M_i$ em Γ tal que $M_j \in \mathbf{P}_j$, $M_i \in \mathbf{P}_i$ e $i < j < \infty$
- c) $\nexists$ caminho de irredutíveis $M_k \rightsquigarrow M_l$ em Γ formado somente por módulos pós-projetivos tal que $l < k < \infty$

Demonstração. Uma vez que **b)** e **c)** são claramente equivalentes vamos mostrar que **a)** $\Rightarrow$ **b)** e **c)** $\Rightarrow$ **a)**.

a) $\Rightarrow$ **b)** Suponhamos que exista $f : M_j \rightarrow M_i$ irredutível em Γ tal que $M_j \in \mathbf{P}_j$, $M_i \in \mathbf{P}_i$ e $i < j < \infty$. Mas se Γ é componente $\mathbf{P}$ -discreta então $\text{Im} f \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_j}(M_i) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i)$. Assim, f se fatora por $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i)$:

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xrightarrow{f} & M_i \\ & \searrow f' & \nearrow \\ & \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) & \end{array}$$

Mas se f é irredutível e $M_i \neq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i)$ então $f' : M_j \rightarrow \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i)$ é mono que cinde e M_j é somando de $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i)$. Absurdo, já que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) \in \text{add} \mathbf{P}_\infty$.

c) $\Rightarrow$ **a)** Suponhamos por contradição que exista $M_i \in \Gamma$, $M_i \in \mathbf{P}_i$, tal que $\text{tr}_{\mathbf{P}_{i+1}}(M) \neq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M)$. Então existe $f : M_{i+1} \rightarrow M_i$, $M_{i+1} \in \mathbf{P}_{i+1}$, tal que $\text{Im} f \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M)$. Assim, como no Lema 5.2 obtemos um caminho formado somente por módulos pós-projetivos entre M_{i+1} e M_i , o que contraria **c)**. □

Assim, pelo que já foi demonstrado por Todorov [23] sabemos que todas as componentes pós-projetivas de álgebras hereditárias de tipo infinito são **P**-discretas. Outro exemplo de componente **P**-discreta é o tubo raio descrito no Exemplo 5.1.

Teorema 5.5. *Seja A uma álgebra de artin de tipo infinito. Se Γ é componente **P**-discreta de Γ_A então não existe irredutível $M_i \rightarrow M_j$ em Γ tal que $M_i \in \mathbf{P}_i$, $M_j \in \mathbf{P}_j$ e $i + 1 < j < \infty$.*

Demonstração. Faremos por indução em i :

[$i = 0$] Se $f : M_0 \rightarrow M_j$ é irredutível em Γ tal que $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e $M_j \in \mathbf{P}_j$, $j > 1$, então $f \in \text{rad}^2(M_0, M_j)$ pelo Lema 5.1 o que é contradição.

Suponha a afirmação válida para $< i$ e seja $f : M_i \rightarrow M_j$ em Γ tal que $M_i \in \mathbf{P}_i$, $M_j \in \mathbf{P}_j$ e $i + 1 < j < \infty$. Sabemos que neste caso $\tau M_j \in \mathbf{P}^{i-1}$ (Lema 3.2). Temos que f não é morfismo poço, pois do contrário, pelo Lema 5.2 existiria um caminho $M_{i+1} \rightsquigarrow M_i \rightarrow M_j$ formado por pós-projetivos, o que entraria em contradição com o fato de Γ ser componente **P**-discreta. Assim, existe $N \in \text{mod} A$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & M_i & \\ \nearrow & & \searrow f \\ \tau M_j & & M_j \\ \searrow & & \nearrow \\ & N & \end{array}$$

é a sequência de Auslander-Reiten que termina em M_j .

Afirmação: $N \notin \text{add} \mathbf{P}^{i-2}$.

Suponhamos por absurdo que $N \in \text{add} \mathbf{P}^{i-2}$ e, portanto, $M_i \oplus N \in \text{add} \mathbf{P}^{i-2}$. Sabemos que existe $h : M_{j-1} \rightarrow M_j$, $M_{j-1} \in \mathbf{P}_{j-1}$, tal que $\text{Im} h \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_j)$, $h \in \text{rad}$. Obtemos assim o levantamento:

$$\begin{array}{ccccc} & & M_{j-1} & & \\ & \swarrow g & \downarrow h & & \\ M_i \oplus N & \xrightarrow{f} & M_j & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sendo Γ componente **P**-discreta, temos por definição que $\text{tr}_{\mathbf{P}_{j-1}}(M_i \oplus N) = \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i \oplus N)$, donde $g(M_{j-1}) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i \oplus N)$ e, portanto, $fg(M_{j-1}) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_j)$ uma vez que $f(\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i \oplus N)) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_j)$. Assim, $\text{Im} h = \text{Im} fg \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_j)$, absurdo.

Logo, existem $N_1 \in \mathbf{P}_{j-1}$ somando de N e irredutível $\tau M_j \rightarrow N_1$ tais que $\tau M_j \in \mathbf{P}^{i-1}$ e $i - 1 < i < j - 1$, o que é absurdo por hipótese de indução. Segue-se o teorema. □

Corolário 5.5. *Sejam A uma álgebra de artin de tipo infinito e Γ uma componente **P**-discreta de Γ_A . Sejam $i > 0$ e $M_i \in \mathbf{P}_i$ módulo pós-projetivo de $\text{ind} A$ tal que $M_i \in \Gamma$. O menor caminho formado somente por*

módulos pós-projetivos ligando um módulo projetivo a M_i tem comprimento i e é da forma $M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_i$, onde $M_l \in \mathbf{P}_1 \forall l \in \{0, \dots, i-1\}$.

Demonstração. Dado $M_i \in \mathbf{P}_1$ módulo pós-projetivo em Γ , tomemos o morfismo poço que termina em M_i . Temos que este morfismo é sobrejetor já que estamos considerando $i > 0$. Daí, existe irredutível $N \rightarrow M_i$ tal que $N \in \mathbf{P}^{i-1}$. Pelo teorema anterior, $N \in \mathbf{P}_{i-1}$. Prosseguimos usando o mesmo argumento até obtermos um caminho $M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_i$ como no enunciado. Novamente pelo teorema anterior este é um caminho de menor comprimento possível começando em um projetivo e terminando em M_i . $\square$

5.4 Caminhos de irredutíveis entre módulos em $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_\infty$.

Um problema que se encontra ainda em aberto é saber se todo caminho de irredutíveis entre módulos indecomponíveis que começa em um projetivo e termina em um módulo em $\mathbf{P}_\infty$ tem composição nula. Pelo Lema 5.1, sabemos que a afirmação é verdadeira em componentes estandar generalizadas. Aqui mostraremos que se A é álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k , dado um caminho de irredutíveis $P = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n = M_\infty$ em $\text{ind}A$ entre um módulo projetivo P e um módulo $M_\infty \in \mathbf{P}_\infty$ somos capazes de obter utilizando o recobrimento genérico como definido em [9] e o Lema 5.1 um caminho formado por irredutíveis $h_1, \dots, h_n$ definidos nos mesmos módulos $h_j : X_{j-1} \rightarrow X_j$ tais que $h_n \cdots h_1 = 0$

Proposição 5.7. *Seja A álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Dado um caminho de irredutíveis $P = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n = M_\infty$ em $\text{ind}A$ entre um módulo projetivo P e um módulo $M_\infty \in \mathbf{P}_\infty$ existem irredutíveis $h_1, \dots, h_n$ definidos nos mesmos módulos $h_j : X_{j-1} \rightarrow X_j$ tais que $h_n \cdots h_1 = 0$.*

Demonstração. De fato, dado caminho $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n$ como acima temos que a composição $f_n \cdots f_1 \in \text{rad}^\infty(X_0, X_n)$, pelo Lema 5.1. Assim, se $f_n \cdots f_1 \neq 0$ obtemos, pela Proposição 3.6, irredutíveis $h_{i+1} : X_i \rightarrow X_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, tais que $h_n \cdots h_1 = 0$. $\square$

Observação: Lembramos aqui que a hipótese de que a componente Γ que contém os irredutíveis $f_{i+1} : X_i \rightarrow X_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, tenha valoração trivial na Proposição 3.6 não será mais necessária de acordo com uma observação feita pelos autores em [9].

Seja $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n = Y$ um caminho em Γ_A . Lembrando que um caminho é dito *seccional* se $X_{i-1} \neq \tau X_{i+1}$ para todo $0 < i < n$. É fato conhecido que não existe caminho seccional de comprimento n cuja composição esteja em uma potência do radical maior que n (ver [19]). Usaremos esse resultado para demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 5.8. *Seja A uma álgebra de artin. Então não existe caminho de irredutíveis seccional entre um módulo projetivo e um módulo em $\mathbf{P}_\infty$ ou caminho de irredutíveis entre um módulo projetivo e um módulo pós-projetivo $M_i \in \mathbf{P}_i$, $0 < i < \infty$, que seja de comprimento menor que i .*

Demonstração. Se λ é um caminho seccional de comprimento n então como dito acima temos que $\bar{\lambda} \in \text{rad}^n \setminus \text{rad}^{n+1}$. Se λ começa em um projetivo então uma vez que $\text{Hom}(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_i) = \text{rad}^i(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_\infty)$ para todo $1 \leq i \leq \infty$ temos que λ tem que terminar em um módulo em $\mathbf{P}^n$.

□

Em um caminho de irredutíveis que começa em um módulo em $\mathbf{P}_0$ e termina em um módulo em $\mathbf{P}_\infty$ obtemos sempre um morfismo irredutível entre um módulo pós-projetivo e um módulo em $\mathbf{P}_\infty$. Este irredutível terá grau à esquerda em relação a $\mathbf{P}_0$ finito pelo Corolário 5.1. Assim, temos que este irredutível será sempre um epimorfismo se A é álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k .

Seguindo Auslander e Smalø [4], dizemos que um módulo M é *fortemente pós-projetivo* se $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M) \subseteq \text{rad}M$.

Proposição 5.9. *Seja A uma álgebra de artin tal que todo caminho de irredutíveis em $\text{ind}A$ entre um módulo projetivo e um módulo em $\mathbf{P}_\infty$ tem composição nula. Seja $f : M_i \rightarrow M_\infty$ um irredutível em Φ tal que $M_i \in \mathbf{P}_i$ e $M_\infty \in \mathbf{P}_\infty$. Então:*

- a) $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) \not\subseteq \text{Ker}f$
- b) M_i não é fortemente pós-projetivo

Demonstração. Caso $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) \subseteq \text{Ker}f$ temos que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) + \text{Ker}f$ está contido propriamente em M_i . Por outro lado, se M_i é fortemente pós-projetivo então pelo Lema de Nakayama, se $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) + \text{Ker}(f) = M_i$ então $\text{Ker}f = M_i$, absurdo. Neste caso igualmente temos que $\text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) + \text{Ker}f$ está contido propriamente em M_i .

Tomemos $h : M_0 \rightarrow M_i$ tal que $M_0 \in \mathbf{P}_0$ e $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) + \text{Ker}f$. Considerando a expressão $h = \sum_{s=1}^n h_s + h_\infty$, onde h_s é caminho tal que $\bar{h}_s \notin \text{rad}^\infty$ entre M_0 e M_i e $h_\infty \in \text{rad}^\infty$, como $\text{Im}h \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) + \text{Ker}f$ temos que existe pelo menos um $s \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{Im}\bar{h}_s \not\subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) + \text{Ker}f$, já que $\text{Im}(h_\infty) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) \subseteq \text{tr}_{\mathbf{P}_\infty}(M_i) + \text{Ker}f$. Assim, se $h_s : M_0 = Z_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_2} Z_n = M_i$ é este caminho, então $Z_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} Z_n \xrightarrow{f} M_\infty$ é caminho não-nulo entre o projetivo M_0 e $M_\infty \in \mathbf{P}_\infty$, já que $\text{Im}\bar{h}_s \not\subseteq \text{Ker}f$. Contradição.

□

Capítulo 6

Partições de uma categoria de módulos

Δ -bons

Neste capítulo estudaremos alguns aspectos das álgebras quasi-hereditárias. Mais especificamente, dada uma álgebra quasi-hereditária A , estudaremos condições suficientes para que a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ de $\text{mod}A$ chamada de subcategoria de módulos com boa filtração seja de tipo finito, ou seja, $\mathcal{F}(\Delta)$ possua somente a menos de isomorfismos um número finito de módulos indecomponíveis.

Na literatura frequentemente encontramos afirmações feitas sobre $\text{mod}A$ ou sobre a aljava de Auslander-Reiten Γ_A que implicam que a álgebra A seja de tipo de representação finito (ver [8],[15],[18]). Estes resultados motivaram alguns pesquisadores a encontrarem afirmações equivalentes para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$.

Um dos exemplos deste tipo de abordagem foi o trabalho de Deng e Zhu em [16]. Trata-se de uma afirmação equivalente à demonstrada por Happel e Liu em [18] para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$, ou seja, se a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ não possui ciclos curtos então é de tipo finito. Recentemente Zeng em [25] foi capaz de demonstrar que se $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\infty$ e $\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_\infty$ são respectivamente partições pós-projetiva e pré-injetiva da subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ e se $\mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty = \emptyset$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito, obtendo portanto uma afirmação equivalente à demonstrada por Bautista e Coelho em [8] para $\text{mod}A$.

Aqui faremos uma afirmação equivalente à demonstrada por Coelho, Marcos, Merklen e Skowronski em [15]. Esta afirmação aparecerá da seguinte forma: se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito. Também tentaremos obter uma versão equivalente ao Teorema 5.1 para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ e analisaremos algumas consequências em relação às partições pós-projetiva e pré-injetiva da subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ no caso em que esta é de tipo finito.

6.1 Resumo da teoria básica de álgebras quasi-hereditárias

No estudo de um álgebra quasi-hereditária A , no lugar da categoria $\text{mod}A$, o objeto de maior interesse é a subcategoria de módulos Δ -bons $\mathcal{F}(\Delta)$, a qual é formada pelos A -módulos que possuem uma filtração por certos módulos chamados de *módulos estândar*. Foi demonstrado por Ringel em [21] que $\mathcal{F}(\Delta)$ é funtorialmente finita em $\text{mod}A$. Pelo teorema de existências de partições pós-projetiva e pré-injetiva (Teorema 3.1) segue-se que $\mathcal{F}(\Delta)$ possui ambas. Nesta seção, além das definições apresentaremos os resultados principais sobre $\mathcal{F}(\Delta)$ obtidos por Ringel em [21]. Mas primeiramente relembremos algumas definições de [5].

Auslander e Smalø ([5], Teorema 2.4) mostraram que toda subcategoria funtorialmente finita $\mathcal{X}$ fechada para extensões e para somandos diretos possui sequências (relativas) de Auslander-Reiten. Vamos agora tornar mais preciso o que entendemos por essa afirmação.

Seja $\mathcal{X}$ uma subcategoria plena de $\text{mod}A$ fechada para somando diretos. Seja $X \in \mathcal{X}$. Um morfismo $\gamma : Y \rightarrow X$, $Y \in \mathcal{X}$, é chamado de *morfismo poço de X em $\mathcal{X}$* (ou morfismo quase cindido à direita de X) se γ não é epimorfismo que cinde e se dado $\gamma' : Y' \rightarrow X$ tal que $Y' \in \mathcal{X}$ e γ' não é epimorfismo que cinde então existe $\xi : Y' \rightarrow Y$ tal que $\gamma' = \gamma\xi$. Um morfismo $\beta : X \rightarrow Y$ é chamado de *morfismo fonte de X em $\mathcal{X}$* (ou morfismo quase cindido à esquerda de X) se β não é monomorfismo que cinde e se dado morfismo $\beta' : X \rightarrow Y'$ tal que $Y' \in \mathcal{X}$ e não é monomorfismo que cinde então existe $\xi : Y \rightarrow Y'$ tal que $\beta' = \xi\beta$. Uma *sequência de Auslander-Reiten relativa em $\mathcal{X}$* é uma sequência exata $0 \rightarrow X \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\gamma} Z \rightarrow 0$ em $\text{mod}A$ com X, Y, Z em $\mathcal{X}$ tal que β é morfismo fonte em $\mathcal{X}$ e γ é morfismo poço em $\mathcal{X}$.

Um objeto $X \in \mathcal{X}$ é chamado de *Ext-injetivo em $\mathcal{X}$* se $\text{Ext}_A^1(M, X) = 0$ para todo $M \in \mathcal{X}$; um objeto $X \in \mathcal{X}$ é chamado de *Ext-projetivo em $\mathcal{X}$* se $\text{Ext}_A^1(X, M) = 0$ para todo $M \in \mathcal{X}$.

Dizemos que $\mathcal{X}$ *possui sequências (relativas) quase cindidas* (ou sequências de Auslander-Reiten) se as três condições seguintes são satisfeitas:

- a) todo indecomponível $X \in \mathcal{X}$ possui morfismo fonte e morfismo poço;
- b) se $X \in \mathcal{X}$ é indecomponível e não é Ext-injetivo em $\mathcal{X}$ então existe sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ em $\mathcal{X}$;
- b) se $Z \in \mathcal{X}$ é indecomponível e não é Ext-projetivo em $\mathcal{X}$ então existe sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ em $\mathcal{X}$.

Seguiremos de agora em diante a notação usada por Ringel em [21]. Seja $\Theta = \{\Theta(1), \dots, \Theta(n)\}$ um conjunto finito de A -módulos tais que $\text{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ para todo $j \geq i$. Denotaremos $\mathcal{F}(\Theta)$ a subcategoria plena de $\text{mod}A$ formada por somandos diretos de módulos que possuem uma filtração com fatores em Θ . Assim, M pertence a $\mathcal{F}(\Theta)$ se, e somente se, M possui submódulos

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_t = M$$

tais que M_s/M_{s-1} é isomorfo a um módulo em Θ .

Em um dos principais resultados de [21], Ringel demonstrou o seguinte teorema válido sob as condições acima.

Teorema 6.1. [21] *A subcategoria $\mathcal{F}(\Theta)$ é funtorialmente finita em $\text{mod} A$.*

Obtemos dois casos particulares de subcategorias $\mathcal{F}(\Theta)$ como acima da seguinte maneira: sejam $S(1), \dots, S(n)$ os A -módulos simples (notemos que fixamos uma ordem particular no conjunto dos simples). Para todo $1 \leq j \leq n$, seja $P(j)$ a cobertura projetiva de $S(j)$ e $I(j)$ o envelope injetivo de $S(j)$. Denotaremos por $U(i)$ a soma de todas as imagens de morfismos $P(j) \rightarrow P(i)$ tais que $j > i$ e faremos $\Delta(i) = P(i)/U(i)$. Por outro lado, seja $\nabla(j)$ a intersecção de todos os kernels de morfismos $I(j) \rightarrow I(r)$ tais que $r > j$. Então teremos

$$\text{Ext}_A^1(\Delta(j), \Delta(i)) = 0, \forall j \geq i$$

e

$$\text{Ext}_A^1(\nabla(j), \nabla(i)) = 0, \forall j \leq i.$$

Consideremos então os conjuntos $\Delta = \{\Delta(1), \dots, \Delta(n)\}$ e $\nabla = \{\nabla(1), \dots, \nabla(n)\}$. Tomando $\Theta = \Delta$ e $\Theta = \nabla$ e procedendo como acima obtemos duas subcategorias funtorialmente finitas $\mathcal{F}(\Delta)$ e $\mathcal{F}(\nabla)$, respectivamente.

Observação: Existe uma descrição alternativa de $\mathcal{F}(\Delta)$ e $\mathcal{F}(\nabla)$: seja J_i a imagem de todos os morfismos $P(j) \rightarrow A_A$ tal que $j \leq i$. Assim,

$$A = J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset J_{n+1} = 0$$

. Um módulo M pertence a $\mathcal{F}(\Delta)$ se, e somente se, $J_i M / J_{i+1} M$ é projetivo como um A/J_{i+1} -módulo para todo $1 \leq i \leq n$. Segue-se que $\mathcal{F}(\Delta)$ e $\mathcal{F}(\nabla)$ são ambas fechadas para somando diretos.

Ringel resumiu a discussão acima com o seguinte teorema:

Teorema 6.2. [21] *As subcategorias $\mathcal{F}(\Delta)$ e $\mathcal{F}(\nabla)$ são subcategorias funtorialmente finitas, fechadas para extensões e fechadas para somandos diretos. Em particular, ambas possuem sequências (relativas) de Auslander-Reiten.*

Observemos que diferentemente do caso mais geral quando consideramos $\mathcal{F}(\Theta)$, obtemos desta vez que $\mathcal{F}(\Delta)$ e $\mathcal{F}(\nabla)$ são subcategorias fechadas também para somandos diretos.

Seguindo o que foi discutido acima definiremos as álgebras quasi-hereditárias. Seja A uma álgebra de artin e suponhamos fixa uma ordem $S(1), S(2), \dots, S(n)$ dos A -módulos simples de forma que os módulos $\Delta(i)$ e $\nabla(i)$ estão definidos. A álgebra A é dita *quasi-hereditária* se:

- a) A_A está em $\mathcal{F}(\Delta)$,
- b) $\text{End}(\Delta(i))$ é um anel de divisão para todo i .

Se quisermos explicitar uma ordem qualquer $S(1), \dots, S(n)$ fixada denotaremos a álgebra quasi-hereditária A pelo par (A, E) onde $E = (S(1), \dots, S(n))$ é a ordem fixada.

A partir de agora toda álgebra A será uma álgebra quasi-hereditária com uma ordem fixa $S(1) \dots S(n)$ de seus módulos simples. Os módulos em Δ serão chamados de módulos *estândar* e os módulos em ∇ de *coestândar*. Os módulos em $\mathcal{F}(\Delta)$ serão chamados de Δ -bons (ou de terem uma boa Δ -filtração) e os módulos em $\mathcal{F}(\nabla)$ serão chamados de ∇ -bons.

Em [21], Ringel demonstrou que a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$ de módulos Δ -bons de uma álgebra quasi-hereditária A é *resolvente* no sentido dado por Auslander e Reiten, ou seja, é uma subcategoria fechada para extensões, fechada para kernels de epimorfismos e que contém os projetivos. Dessa forma os objetos Ext-projetivos em $\mathcal{F}(\Delta)$ serão os módulos projetivos. De forma dual, teremos que $\mathcal{F}(\nabla)$ será *coresolvente* e que os objetos Ext-injetivos em $\mathcal{F}(\nabla)$ serão os módulos injetivos.

Em [5], Auslander e Smalø ao estudar subcategorias que são funtorialmente finitas e fechadas para extensões observaram que elas eram similares a $\text{mod} A$ em vários aspectos. Motivados por isso, eles fizeram as seguintes perguntas sobre essas subcategorias: necessariamente existem a menos de isomorfismos somente um número finito de módulos indecomponíveis Ext-projetivos ou de módulos indecomponíveis Ext-injetivos? Em caso afirmativo, o número de módulos indecomponíveis Ext-projetivos coincide com o número de módulos indecomponíveis Ext-injetivos?

Ringel em [21] respondeu em afirmativo para o caso $\mathcal{F}(\Delta)$ (e cocomitantemente também para o caso $\mathcal{F}(\nabla)$) a essas duas questões. Para este propósito, primeiramente ele caracterizou $\mathcal{F}(\nabla)$ como a subcategoria $\mathcal{Y}(\Delta)$ definida como a subcategoria de $\text{mod} A$ formada por todos os módulos Y que satisfazem $\text{Ext}_A^1(\Delta(i), Y) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Teorema 6.3. [21] *Seja A uma álgebra quasi-hereditária. Então $\mathcal{Y}(\Delta) = \mathcal{F}(\nabla)$.*

Notemos que este teorema juntamente com a definição de $\mathcal{Y}(\Delta)$ nos diz que os módulos em $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$ são exatamente os módulos Ext-injetivos em $\mathcal{F}(\Delta)$. Foi demonstrado em [21] que existe um A -módulo univocamente determinado T tal que $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla) = \text{add} T$ e T é módulo inclinante e coinclinante. Dessa forma, existem precisamente n classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis em $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$ (para uma introdução sobre teoria inclinada e o porquê do resultado acima recomendamos ao leitor a referência [2]). Em [21], Ringel foi além e caracterizou os módulos em $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$ através da seguinte proposição que nos será muito útil adiante.

Proposição 6.1. [21] *OA-módulo básico T tal que $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla) = \text{add} T$ pode ser decomposto em módulos indecomponíveis $T = \bigoplus_{i=1}^n T(i)$ para os quais existem sequências exatas*

$$0 \rightarrow \Delta(i) \xrightarrow{\beta(i)} T(i) \rightarrow X(i) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow Y(i) \rightarrow T(i) \xrightarrow{\gamma(i)} \nabla(i) \rightarrow 0,$$

tais que $\beta(i)$ é uma $\mathcal{F}(\Delta)$ -aproximação à esquerda e $X(i)$ pertence a $\mathcal{F}(\{\Delta(j) : j < i\})$ e $\gamma(i)$ é uma $\mathcal{F}(\Delta)$ -aproximação à direita e $Y(i)$ pertence a $\mathcal{F}(\{\nabla(j) : j < i\})$.

Os módulos $T(1), \dots, T(n)$ da proposição acima serão chamados de *módulos característicos*.

6.2 Se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito

Sabemos pelo Teorema 6.2 que $\mathcal{F}(\Delta)$ é funtorialmente finita. Segue-se então do Teorema de existência de partições pós-projetiva e pré-injetiva (ver Teorema 3.1 nesta tese) obtido por Auslander e Smalø em [4] que $\mathcal{F}(\Delta)$ admite partição pós-projetiva $\mathbf{P}_0(\mathcal{F}(\Delta)), \mathbf{P}_1(\mathcal{F}(\Delta)), \dots, \mathbf{P}_n(\mathcal{F}(\Delta)), \dots, \mathbf{P}_\infty(\mathcal{F}(\Delta))$ e também partição pré-injetiva $\mathbf{I}_0(\mathcal{F}(\Delta)), \mathbf{I}_1(\mathcal{F}(\Delta)), \dots, \mathbf{I}_n(\mathcal{F}(\Delta)), \dots, \mathbf{I}_\infty(\mathcal{F}(\Delta))$. Estas partições serão denotadas de agora em diante por $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, \dots, \mathbf{P}_\infty$ e $\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n, \dots, \mathbf{I}_\infty$, respectivamente.

Segue-se das definições de partição pós-projetiva e de pré-injetiva a seguinte proposição (ver [25]).

Proposição 6.2. [25] *Em $\mathcal{F}(\Delta)$, a subcategoria $\mathbf{P}_0$ é formada por todos os projetivos indecomponíveis em A e $\mathbf{I}_0$ é formada pelos módulos Ext-injetivos indecomponíveis em $\mathcal{F}(\Delta)$, ou seja, os módulos característicos $T(1), \dots, T(n)$.*

Dados dois módulos M, N em $\mathcal{F}(\Delta)$, definimos $\text{Hom}_\Delta(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)$ e $\text{rad}_\Delta(M, N)$ como o conjunto dos morfismos $f \in \text{Hom}_\Delta(M, N)$ tais que para todo módulo $X \in \mathcal{F}(\Delta)$ e para todos homomorfismos $g : X \rightarrow M$ e $h : N \rightarrow X$, hfg não é isomorfismo. Definimos $\text{rad}_\Delta^n(M, N)$, $n \geq 1$, por indução: $f \in \text{rad}_\Delta^n(M, N)$ se, e somente se, existem $X \in \mathcal{F}(\Delta)$, $g \in \text{rad}_\Delta(M, X)$ e $h \in \text{rad}_\Delta^{n-1}(X, N)$ tais que $f = gh$.

Obtemos assim a cadeia:

$$\text{Hom}_\Delta(M, N) \supseteq \text{rad}_\Delta(M, N) \supseteq \text{rad}_\Delta^2(M, N) \supseteq \dots \supseteq \text{rad}_\Delta^n(M, N) \supseteq \dots$$

Dados módulos M, N em $\mathcal{F}(\Delta)$, um morfismo $f : M \rightarrow N$ é dito *irredutível relativo a $\mathcal{F}(\Delta)$* se f não é monomorfismo que cinde ou epimorfismo que cinde e se toda fatorização $f = f_2 f_1$ em $\mathcal{F}(\Delta)$ é tal que f_1 é monomorfismo que cinde ou f_2 é epimorfismo que cinde. No caso de M e N serem indecomponíveis obtemos um bimódulo $\text{Irr}_{\mathcal{F}(\Delta)}(M, N) = \text{rad}_\Delta(M, N) \setminus \text{rad}_\Delta^2(M, N)$ formado por irredutíveis relativos.

Ringel demonstrou em [21] que $\mathcal{F}(\Delta)$ é funtorialmente finita e, portanto, possui sequências de Auslander-Reiten. A aljava de Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{F}(\Delta)}$ de $\mathcal{F}(\Delta)$ é uma aljava de translação tal que seus vértices são as classes de isomorfismos $[N]$ de A -módulos indecomponíveis em $\mathcal{F}(\Delta)$ (frequentemente

usaremos N para o vértice correspondente). Existe uma flecha $[M] \rightarrow [N]$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível relativo $M \rightarrow N$ em $\mathcal{F}(\Delta)$, isto é, $\text{Irr}_{\mathcal{F}(\Delta)}(M, N) \neq 0$.

Lema 6.1. a) *Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{F}(\Delta)$ é irredutível se, e somente se, existe um morfismo $f' : X \rightarrow Y'$ em $\mathcal{F}(\Delta)$ tal que $(f, f')^t : X \rightarrow Y \oplus Y'$ é morfismo fonte em $\mathcal{F}(\Delta)$.*

b) *Dualmente, um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{F}(\Delta)$ é irredutível se, e somente se, existe um morfismo $f' : X' \rightarrow Y$ em $\mathcal{F}(\Delta)$ tal que $(f, f') : X \oplus X' \rightarrow Y$ é morfismo poço em $\mathcal{F}(\Delta)$.*

Demonstração. A demonstração do lema é completamente análoga à demonstração do Teorema 5.3 em [6]. □

Lema 6.2. *Sejam A uma álgebra quasi-hereditária e $\mathcal{F}(\Delta)$ uma subcategoria como acima. Consideremos a partição pós-projetiva $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\infty$ da subcategoria funtorialmente finita $\mathcal{F}(\Delta)$. Dado $i > 0$, temos $\text{Hom}_\Delta(M, N) = \text{rad}_\Delta^i(M, N) \forall M \in \mathbf{P}_0, \forall N \in \mathbf{P}_i$ e $\text{Hom}_\Delta(M, N) = \text{rad}_\Delta^\infty(M, N) \forall M \in \mathbf{P}_0, \forall N \in \mathbf{P}_\infty$.*

Demonstração. Uma vez que $\mathbf{P}_0$ é formado pelos projetivos indecomponíveis procedemos analogamente à demonstração do Lema 5.1. □

Observação: Desta vez não podemos afirmar que vale o dual do lema anterior para a partição pré-injetiva de $\mathcal{F}(\Delta)$. Isto porque não vale necessariamente a propriedade de levantamento para os módulos característicos $T(1), \dots, T(n)$ que neste caso formam $\mathbf{I}_0$.

O principal resultado desta seção será demonstrar que se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito. Antes precisamos de um resultado encontrado em [6] (Proposição 7.4) adaptado para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$.

Proposição 6.3. *Sejam M e N módulos indecomponíveis em $\mathcal{F}(\Delta)$ e seja $f \in \text{Hom}_\Delta(M, N)$. Se $f \in \text{rad}_\Delta^n(M, N) \setminus \text{rad}_\Delta^{n+1}(M, N)$ então existe caminho de irredutíveis $M \rightsquigarrow N$ em $\Gamma_{\mathcal{F}(\Delta)}$ de comprimento menor ou igual a n .*

Demonstração. Provaremos por indução em n . Se $n = 1$ então f é irredutível relativo a $\mathcal{F}(\Delta)$ e a proposição segue-se trivialmente. Suponhamos a afirmação válida para $n - 1$ e tomemos $f \in \text{rad}_\Delta^n(M, N) \setminus \text{rad}_\Delta^{n+1}(M, N)$. Seja $g : B \rightarrow N$ um morfismo que quase se cinde à direita relativo a $\mathcal{F}(\Delta)$. Então existe inteiro positivo $s \geq 1$ e módulos indecomponíveis $B_1, \dots, B_s$ em $\mathcal{F}(\Delta)$ tais que $B = \bigoplus_{i=1}^s B_i$. Sejam $g_i : B_i \rightarrow N$ os morfismos irredutíveis relativos a $\mathcal{F}(\Delta)$ induzidos. Uma vez que $f \in \text{rad}_\Delta(M, N)$, existe um morfismo $f' : M \rightarrow B$ tal que $f = g f'$. Sejam $f_i : M \rightarrow B_i$ os morfismos induzidos por f' e a decomposição $B = \bigoplus_{i=1}^s B_i$. Então existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que $f_i \in \text{rad}_\Delta^l(M, B_i) \setminus \text{rad}_\Delta^{l+1}(M, B_i)$ e $l \leq n - 1$,

pois caso contrário teríamos $f \in \text{rad}_\Delta^{n+1}(M, N)$. Aplicando a hipótese de indução a f_i obtemos um caminho de irreduzíveis $M \rightsquigarrow B_i$ em $\Gamma_{\mathcal{F}(\Delta)}$ de comprimento menor ou igual a $n - 1$, o qual compomos com g_i para obter o caminho de irreduzíveis $M \rightsquigarrow N$ em $\Gamma_{\mathcal{F}(\Delta)}$ de comprimento menor ou igual a n .

□

Seja A quasi-hereditária de dimensão finita sobre um corpo perfeito e infinito k . Em [25], Zeng foi capaz de adaptar os resultados obtidos por Bautista e Coelho em [8] para $\mathcal{F}(\Delta)$ e demonstrar que se $\mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty = \emptyset$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito.

Teorema 6.4. [25] *Seja A uma álgebra quasi-hereditária sobre um corpo k perfeito e infinito. Seja $\mathcal{F}(\Delta)$ uma subcategoria em A de módulos Δ -bons. Se $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo infinito então $\mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty \neq \emptyset$.*

Observação: Existe uma generalização do conceito de álgebra quasi-hereditária chamada de álgebra estandardmente estratificada cuja definição coincide com a de álgebra quasi-hereditária exceto por prescindir que o anel de endomorfismos de um módulo estandar seja semi-simples. Seria interessante adaptar o Teorema 6.4 e a Proposição 6.2 encontrados em [25] para o caso mais geral de uma álgebra estandardmente estratificada com o intuito de conseguir uma caracterização semelhante ao Teorema 5.1 para $\mathcal{F}(\Delta) \subset \text{mod} A$, onde A é uma álgebra estandardmente estratificada.

Usaremos o Teorema 6.4 então para obter finalmente o resultado prometido que é equivalente a uma afirmação feita por Coelho, Marcos, Menklen e Skowronski em [15] para $\text{mod} A$.

Teorema 6.5. *Seja A uma álgebra quasi-hereditária sobre um corpo k perfeito e infinito. Seja $\mathcal{F}(\Delta)$ uma subcategoria em $\text{mod} A$ de módulos Δ -bons. Se $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$ então $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito.*

Demonstração. A prova será por contradição. Suponhamos $\mathcal{F}(\Delta)$ de tipo infinito. Sabemos então que existem uma partição pós-projetiva $\mathbf{P}_0 \cdots \mathbf{P}_\infty$ e uma partição pré-injetiva $\mathbf{I}_0 \cdots \mathbf{I}_\infty$ de $\mathcal{F}(\Delta)$ tais que $\mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty \neq \emptyset$, pelo Teorema 6.4. Tomemos $M \in \mathbf{P}_\infty \cap \mathbf{I}_\infty$. Uma vez que $\mathcal{F}(\Delta)$ contém os projetivos tomamos uma cobertura $f : P \rightarrow M$ tal que P é projetivo e $f \in \text{rad}_\Delta^\infty(P, M)$ já que $M \in \mathbf{P}_\infty$, pelo Lema 6.2. Por outro lado, uma vez que $M \in \mathbf{I}_\infty$ temos $l(\text{Hom}_\Delta(M, -)) = \infty$: de fato, se $M \in \mathbf{I}_\infty$ então para todo inteiro positivo $j \geq 0$ sabemos que existe um envelope $M \hookrightarrow M_j$ tal que $M_j \in \text{add} I_j$. Uma vez que $j \neq j'$ implica em $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ temos que M_j e $M_{j'}$ não possuem somandos diretos em comum se $j \neq j'$. Logo, $l(\text{Hom}_\Delta(M, -)) = \infty$.

Afirmação: para cada $t \geq 0$ existem $m > t$ e $Q_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ tais que $\text{rad}_\Delta^m(M, Q_m) \neq 0$. Assumindo o contrário teríamos que todo morfismo não-nulo entre M e um indecomponível no suporte de $\text{Hom}_\Delta(M, -)$ resultaria em um caminho de irreduzíveis relativos a $\mathcal{F}(\Delta)$ de comprimento no máximo igual a t , pela Proposição 6.3. Contradição, pois existem infinitos módulos no suporte de $\text{Hom}_\Delta(M, -)$ e a aljava Γ_Δ é localmente finito. Segue-se a afirmação.

Sejam $T(1), \dots, T(n)$ os módulos característicos em $\mathcal{F}(\Delta)$, ou seja, os módulos indecomponíveis que compõem $\mathbf{I}_0$. Para todo $j \in 1, \dots, n$ tomemos $t_j > 0$ tal que $\text{rad}_\Delta^\infty(M, T(j)) = \text{rad}_\Delta^{t_j}(M, T(j))$ (Lema 2.1). Façamos t o valor máximo entre os t_j e a partir da afirmação acima tomemos $m > t$ e $Q_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ tais que $\text{rad}_\Delta^m(M, Q_m) \neq 0$. Tomemos $g \in \text{rad}_\Delta^m(M, Q_m)$ não-nulo e um envelope $h : Q_m \hookrightarrow I$, $I \in \text{add } \mathbf{I}_0$, de tal forma que $hg \neq 0$ e $hg \in \text{rad}_\Delta^n(M, I) = \text{rad}_\Delta^\infty(M, I)$ já que $m > t$.

Assim, uma vez que $hg \in \text{rad}_\Delta^\infty(M, I)$, $hg \neq 0$ e $f : P \rightarrow M$ é epimorfismo tal que $f \in \text{rad}_\Delta^\infty(P, M)$ temos $hgf \in (\text{rad}_\Delta^\infty)^2$ e $hgf \neq 0$, obtendo uma contradição.

□

6.3 Subcategorias de módulos Δ -bons de tipo finito

Nesta seção, usaremos os morfismos $\pi(i) : P(i) \rightarrow \Delta(i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ dados pela definição de $\mathcal{F}(\Delta)$ e os morfismos $\beta(i) : \Delta(i) \rightarrow T(i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ dados pelo Teorema 6.2 para obter uma caracterização análoga à demonstrada na Proposição 5.1 no Capítulo 5, mas desta vez para a subcategoria $\mathcal{F}(\Delta)$. Aqui os módulos estandar $\Delta(i)$ terão papel análogo aos simples e os morfismos definidos acima terão um papel análogo às coberturas projetivas e aos envelopes injetivos dos módulos simples naquela caracterização.

Definição 6.1. *Seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo entre módulos em $\mathcal{F}(\Delta)$. Definimos a profundidade de f em relação a $\mathcal{F}(\Delta)$, denotada por $\text{dp}_\Delta(f)$, como sendo o inteiro positivo n tal que $f \in \text{rad}_\Delta^n(M, N) \setminus \text{rad}_\Delta^{n+1}(M, N)$. Caso não exista tal inteiro, ou seja, se $f \in \text{rad}_\Delta^\infty(M, N)$ então dizemos que a profundidade de f em relação a $\mathcal{F}(\Delta)$ é infinita.*

Teorema 6.6. *Sejam A uma álgebra quasi-hereditária e $\mathcal{F}(\Delta)$ uma subcategoria de módulos Δ -bons. São equivalentes:*

- a) $\mathcal{F}(\Delta)$ é de tipo finito.
- b) A profundidade de $\pi(i)$ em relação a $\mathcal{F}(\Delta)$ é finita para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
- c) A profundidade de $\beta(i)$ em relação a $\mathcal{F}(\Delta)$ é finita para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Se A é álgebra quasi-hereditária sobre um corpo k perfeito e infinito então as afirmações anteriores são equivalentes à condição:

- d) $(\text{rad}_\Delta^\infty)^2 = 0$

Demonstração. Como b), c) e d) decorrem trivialmente de a) e vimos na seção anterior que d) implica a) nos preocuparemos somente com as implicações inversas.

b) $\Rightarrow$ a) Suponhamos, por contradição, que $\mathcal{F}(\Delta)$ seja de tipo infinito.

Podemos afirmar então que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\Delta(i) \in \mathbf{P}_\infty$. De fato, caso contrário poderíamos tomar $m > 0$ tal que $\Delta(i) \in \mathbf{P}^m$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Neste caso, tomando $M \in \mathbf{P}_{m+1}$ sabemos que existe filtração $0 = M_0 \subset \dots \subset M_s \subset M_{s+1} = M$ que nos dá uma projeção $M \rightarrow M_s/M_{s+1} = \Delta(j)$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ a qual cindiria já que $\Delta(j) \in \mathbf{P}^m$. Contradição.

Tomando $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\Delta(i) \in \mathbf{P}_\infty$ temos pelo Lema 6.2 que a projeção $\pi(i): P(i) \rightarrow \Delta(i)$ possui profundidade infinita em relação a $\mathcal{F}(\Delta)$. Segue-se a implicação.

$c) \Rightarrow a)$ Suponhamos, por contradição, que $\mathcal{F}(\Delta)$ seja de tipo infinito.

Em uma argumentação dual à anterior podemos afirmar que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\Delta(i) \in \mathbf{I}_\infty$. Tomemos $m > 0$ tal que $\text{rad}_\Delta^m(\Delta(i), T(i)) = \text{rad}_\Delta^\infty(\Delta(i), T(i))$. Pela Proposição 6.1, sabemos que existe sequência exata

$$0 \rightarrow \Delta(i) \xrightarrow{\beta(i)} T(i) \rightarrow X(i) \rightarrow 0$$

tal que $X(i) \in \mathcal{F}(\Delta)$. Além disso, uma vez que $\Delta(i) \in \mathbf{I}_\infty$, através da composição de envelopes $\Delta(i) \hookrightarrow Z_{m-1}$, $Z_k \hookrightarrow Z_{l-1}$ $l = m-1, m-2, \dots, 1$ tais que $Z_l \in \text{add } \mathbf{I}_1$ para todo $l = 0, \dots, m-1$, obtemos um monomorfismo $g: \Delta(i) \rightarrow Z$ tal que $g \in \text{rad}^m(\Delta(i), Z)$. Consideremos então o diagrama com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta(i) & \xrightarrow{\beta(i)} & T(i) & \longrightarrow & X(i) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow g' & & \downarrow 1_{X(i)} \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{h} & W & \longrightarrow & X(i) \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde W é o *push-out* de $Z \xleftarrow{g} \Delta(i) \xrightarrow{\beta(i)} T(i)$. Uma vez que $\mathcal{F}(\Delta)$ é fechado para extensões temos que $W \in \mathcal{F}(\Delta)$. Além disso, vemos pelo diagrama que g mono implica em g' mono. Assim, g' cinde já que $T(i) \in \mathbf{I}_0$ e $W \in \mathcal{F}(\Delta)$. Tomando $h': W \rightarrow T(i)$ tal que $h'g' = 1_{T(i)}$ temos $\beta(i) = h'hg$, donde $\beta(i) \in \text{rad}_\Delta^\infty(\Delta(i), T(i))$ já que $g \in \text{rad}_\Delta^m(\Delta(i), Z)$ e $\text{rad}_\Delta^m(\Delta(i), T(i)) = \text{rad}_\Delta^\infty(\Delta(i), T(i))$. Contradição com a hipótese da letra c).

□

Agora estamos interessados em obter uma cota superior para o maior nível não-vazio de uma partição pós-projetiva de uma categoria $\mathcal{F}(\Delta)$ de tipo finito. Veremos que esta cota está relacionada ao conceito de profundidade de um morfismo em relação a $\mathcal{F}(\Delta)$ aplicado aos morfismos $\pi(i): P(i) \rightarrow \Delta(i)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Dualmente obteremos uma cota para o maior nível não-vazio da partição pré-injetiva de $\mathcal{F}(\Delta)$ a partir das profundidades em relação a $\mathcal{F}(\Delta)$ dos morfismos $\beta(i): \Delta(i) \rightarrow T(i)$, $i = 1, \dots, n$.

Definição 6.2. *Sejam A uma álgebra quasi-hereditária e $\mathcal{F}(\Delta)$ uma subcategoria de tipo finito de $\text{mod } A$ formada por módulos Δ -bons. Seja $\{\mathbf{P}_i\}_{i \geq 0}$ partição pós-projetiva de $\mathcal{F}(\Delta)$. Tomando $n \geq 0$ tal que $\mathbf{P}_n \neq 0$*

e $\mathbf{P}_{n+1} = 0$, definimos então $p(\Delta) = n$ como o último nível não-vazio da partição pós-projetiva de $\mathcal{F}(\Delta)$. Analogamente, se $\{\mathbf{I}_l\}_{l \geq 0}$ é a partição pré-injetiva de $\mathcal{F}(\Delta)$ definimos $q(\Delta)$ como o último nível não-vazio de $\{\mathbf{I}_l\}_{l \geq 0}$.

Proposição 6.4. *Sejam A uma álgebra quasi-hereditária e $\mathcal{F}(\Delta)$ uma subcategoria de tipo finito de $\text{mod} A$ formada por módulos Δ -bons. Então $p(\Delta) \leq \max\{\text{dp}_\Delta(\pi(i)) : i = 1, \dots, n\}$.*

Demonstração. Sejam $p(\Delta) = m$ e $M \in \mathbf{P}_m$. Então $M = \Delta(j)$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Caso contrário, existiria um epimorfismo $M \rightarrow \Delta(j)$ e, portanto, $\Delta(j) \in \mathbf{P}_{m+1}$ o que é contradição. Consideremos a projeção $\pi(j) : P(j) \rightarrow \Delta(j)$, com $\Delta(j) \in \mathbf{P}_m$. Uma vez que $\Delta(j) \in \mathbf{P}_m$, pelo Lema 6.2 teremos $\pi(j) \in \text{rad}_\Delta^m(P(j), \Delta(j))$, donde $p(\Delta) = m \leq \text{dp}_\Delta(\pi(j))$. Segue-se a proposição. $\square$

Proposição 6.5. *Sejam A uma álgebra quasi-hereditária e $\mathcal{F}(\Delta)$ uma subcategoria de tipo finito de $\text{mod} A$ formada por módulos Δ -bons. Então $q(\Delta) \leq \max\{\text{dp}_\Delta(\beta(i)) : i = 1, \dots, n\}$.*

Demonstração. Sejam $q(\Delta) = m$ e $M \in \mathbf{I}_m$. Então $M = \Delta(j)$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Caso contrário, existiria um monomorfismo $\Delta(j) \rightarrow M$ e, portanto, $\Delta(j) \in \mathbf{I}_{m+1}$ o que é contradição. Consideremos o morfismo $\beta(j) : \Delta(j) \rightarrow T(j)$ tal que $\Delta(j) \in \mathbf{I}_m$. Uma vez que $\Delta(j) \in \mathbf{I}_m$, através da composição de envelopes $\Delta(i) \hookrightarrow Z_{m-1}, Z_l \hookrightarrow Z_{l-1}$ $l = 1, \dots, m-1$ tais que $Z_l \in \text{add} \mathbf{I}_1$ para todo $l = 0, \dots, m-1$, obtemos um monomorfismo $g : \Delta(j) \rightarrow Z$ tal que $g \in \text{rad}^m(\Delta(j), Z)$. Consideremos então o diagrama com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta(j) & \xrightarrow{\beta(j)} & T(j) & \longrightarrow & X(j) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow g' & & \downarrow 1_{X(j)} \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{h} & W & \longrightarrow & X(i) \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde W é o *push-out* de $Z \xleftarrow{g} \Delta(j) \xrightarrow{\beta(j)} T(j)$. Como acima obtemos $h' : W \rightarrow T(j)$ tal que $h'g' = 1_{T(j)}$, donde $\beta(j) = h'hg$ e, portanto, $\beta(j) \in \text{rad}_\Delta^m(\Delta(j), T(j))$. Assim, $q(\Delta) = m \leq \text{dp}_\Delta(\beta(j))$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] I. ASSEM *Algebres et Modules*. Masson, 1997.
- [2] I. ASSEM, A. SKOWRONSKI, D. SIMSON *Elements of representation of algebras I*. London Mathematical Society Student Texts, 2006.
- [3] I. ASSEM, A. SKOWRONSKI, D. SIMSON *Elements of representation of algebras III*. London Mathematical Society Student Texts, 2006.
- [4] M. AUSLANDER, S.O. SMALØ *Preprojective modules over artin algebras*, Journal of Algebra, v. 66, 1980.
- [5] M. AUSLANDER, S.O. SMALØ *Almost split sequences in subcategories*, Journal of Algebra, 1981.
- [6] M. AUSLANDER, I. REITEN, S.O. SMALØ *Representation theory of artin algebras*. Cambridge University Press, 1995.
- [7] K. BONGARTZ, P. GABRIEL *Covering spaces in representation theory*, Inventiones Mathematicae, v. 65, 1982.
- [8] R. BAUTISTA, F. U. COELHO *On the existence of modules which are neither preprojective nor preinjective*, Journal of Algebra, v. 168, p. 430-442, 1994.
- [9] C. CHAIO, P. LE MEUR, S. TREPODE *Degree of irreducible morphisms and finite representation type*, Journal of London Mathematical Society, v. 84, p. 35-57, 2011.
- [10] C. CHAIO, F. U. COELHO, S. TREPODE *On the composite of irreducible morphisms in almost sectional paths*, Journal of Pure and Applied Algebra, v. 212, p. 244-261, 2008.
- [11] C. CHAIO, M. I. PLATZECK, S. TREPODE *On the degree of irreducible morphisms*, J. Algebra, v. 281, no. 1, p. 200-224, 2004.
- [12] C. CHAIO, S. LIU *A note on the radical of a module category*, Communications in Algebra, 2012.
- [13] F. U. COELHO *A generalization of Todorov's Theorem on Preprojective Partitions*, Communications in Algebra, v. 18, p. 1401-1423, 1990.

- [14] F. U. COELHO *Components of Auslander Reiten quivers containing only preprojectives modules*, Journal of Algebra, v. 157, p. 472-488, 1993.
- [15] F. U. COELHO, E. N. MARCOS, H. MERKLEN, A. SKOWRONSKI *Module Categories With Infinite Radical Square Zero Are Of Finite Type*, Communications in Algebra, v. 22, n. 11, p. 4511-4517, 1994.
- [16] B. DENG, B. ZHU *On Δ -good module categories without short cycles* Proc. Amer. Math. Soc., 129, p. 69-77, 2001.
- [17] V. Dlab, C. M. RINGEL *The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras* Proceedings of Tsukuba Conference on Representation of Algebras and Related Topics, 1990.
- [18] D. HAPPEL, S. LIU *Categories without short cycles are of finite type* Proceedings of Mathematical Society, vol 120, 2004.
- [19] IGUSA, TODOROV *A characterization of finite Auslander-Reiten quivers* Journal of Algebra, 89, 1984.
- [20] S. LIU *The degree of irreducible morphisms and the shapes of Auslander Reiten quivers*, Journal of London Mathematical Society, v. 45, p. 32-54, 1992.
- [21] C. M. RINGEL *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences*, Mathematische Zeitschrift, v. 208, 1991.
- [22] A. SKOWRONSKI, S. SMALØ *artin algebras with only preprojective or preinjective modules are of finite type*, Arch. Math., v. 64, 8-10, 1995.
- [23] G. TODOROV *A note on preprojective partitions over hereditary artin algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, v. 85, 1982.
- [24] C. XI *Standardly stratified algebras and cellular algebras*, Mathematical Proceedings Cambridge Mathematical Society, v. 37, 2002.
- [25] Z. Zeng *On preprojective and preinjective partitions of a good module category*, Journal of Algebra, v. 285, 2005.