

**Sistemas de seções transversais
próximos a níveis críticos de
sistemas Hamiltonianos em \mathbb{R}^4**

Naiara Vergian de Paulo

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro
da FAPESP – Número do processo: 2009/18586-6

São Paulo, junho de 2014

Sistemas de seções transversais próximos a níveis críticos de sistemas Hamiltonianos em \mathbb{R}^4

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 10/06/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo - IME-USP
- Prof. Dr. Leonardo de Magalhães Macarini - UFRJ
- Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewicz - UFRJ
- Prof. Dr. Joachin Weber - UNICAMP

Dedico esta tese aos meus pais Silméia
e Leônidas e ao meu noivo Bruno.

Agradecimentos

À minha família, especialmente aos meus pais Silméia e Leônidas e ao meu irmão Arthur pela compreensão e pelas palavras de apoio e incentivo.

Ao meu noivo Bruno pelo companheirismo, pela paciência e por me trazer alegria e otimismo até mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador Pedro A. S. Salomão pela competência, pela dedicação, pela disponibilidade e por me apresentar uma área tão próspera e fascinante da Matemática.

Aos membros da comissão julgadora pelas sugestões, pelos elogios e pelo encorajamento.

Aos meus professores da UNESP de Rio Claro, da UNICAMP e da USP que me conduziram até aqui com tanta estima.

À minha amiga Moara que, mesmo a distância, me conforta com seus conselhos e seu carinho.

Aos meus amigos da UNESP e da USP: Adriano, Luciano, Danillo, Diego, Danilo, Edson, Tatiane, Pricila, Gustavo e Dylene, Bruno, André, Anderson, Marcelo, Hector e Susana, Débora e Humberto, Oscar e Eliane, Juliano e Graciele, e todos aqueles que estiveram ao meu lado durante estes anos de estudo.

À FAPESP pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível desenvolver esta pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram a alcançar mais este grande objetivo.

Resumo

DE PAULO, N. V. **Sistemas de seções transversais próximos a níveis críticos de sistemas Hamiltonianos em \mathbb{R}^4** . Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Neste trabalho estudamos dinâmica Hamiltoniana em \mathbb{R}^4 restrita a níveis de energia próximos a níveis críticos. Mais precisamente, consideramos uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ que possui um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c \in H^{-1}(0)$ e assumimos que p_c pertence a um conjunto singular estritamente convexo $S_0 \subset H^{-1}(0)$. Então, mostramos que os níveis de energia $H^{-1}(E)$, com $E > 0$ suficientemente pequeno, contêm uma 3-bola fechada S_E próxima a S_0 que admite um sistema de seções transversais \mathcal{F}_E , chamado folheação 2 – 3. \mathcal{F}_E é uma folheação singular de S_E com conjunto singular formado por duas órbitas periódicas $P_{2,E} \subset \partial S_E$ e $P_{3,E} \subset S_E \setminus \partial S_E$. A órbita $P_{2,E}$ é hiperbólica dentro do nível de energia $H^{-1}(E)$, pertence à variedade central do sela-centro p_c , tem índice de Conley-Zehnder 2 e é o limite assintótico de dois planos rígidos de \mathcal{F}_E que, unidos com $P_{2,E}$, constituem a 2-esfera ∂S_E . A órbita $P_{3,E}$ tem índice de Conley-Zehnder 3 e é o limite assintótico de uma família a um parâmetro de planos de \mathcal{F}_E contida em $S_E \setminus \partial S_E$. Um cilindro rígido conectando as órbitas $P_{3,E}$ e $P_{2,E}$ completa a folheação \mathcal{F}_E . Uma vez que \mathcal{F}_E é um sistema de seções transversais, todas as suas folhas regulares são transversais ao fluxo Hamiltoniano de H . Como consequência da existência de uma tal folheação em S_E , concluimos que a órbita hiperbólica $P_{2,E}$ admite pelo menos uma órbita homoclínica contida em $S_E \setminus \partial S_E$.

Palavras-chave: Fluxos Hamiltonianos, conjuntos singulares estritamente convexos, pontos de equilíbrio do tipo sela-centro, curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, sistema de seções transversais.

Abstract

DE PAULO, N. V. **Systems of transverse sections near critical levels of Hamiltonian systems in \mathbb{R}^4** . Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

In this work we study Hamiltonian dynamics in \mathbb{R}^4 restricted to energy levels close to critical levels. More precisely, we consider a Hamiltonian function $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ containing a saddle-center equilibrium point $p_c \in H^{-1}(0)$ and we assume that p_c lies on a strictly convex singular set $S_0 \subset H^{-1}(0)$. Then we prove that the energy levels $H^{-1}(E)$, with $E > 0$ sufficiently small, contain a closed 3-ball S_E near S_0 admitting a system of transverse sections \mathcal{F}_E , called a 2 – 3 foliation. \mathcal{F}_E is a singular foliation of S_E and its singular set consists of two periodic orbits $P_{2,E} \subset \partial S_E$ and $P_{3,E} \subset S_E \setminus \partial S_E$. The orbit $P_{2,E}$ is hyperbolic inside the energy level $H^{-1}(E)$, lies on the center manifold of the saddle-center p_c , has Conley-Zehnder index 2 and is the asymptotic limit of two rigid planes of \mathcal{F}_E , which compose the 2-sphere S_E together with $P_{2,E}$. The orbit $P_{3,E}$ has Conley-Zehnder index 3 and is the asymptotic limit of a one parameter family of planes of \mathcal{F}_E contained in $S_E \setminus \partial S_E$. A rigid cylinder connecting the orbits $P_{3,E}$ and $P_{2,E}$ completes the foliation \mathcal{F}_E . Since \mathcal{F}_E is a system of transverse sections, all its regular leaves are transverse to the Hamiltonian flow of H . As a consequence of the existence of such foliation in S_E , we conclude that the hyperbolic orbit $P_{2,E}$ admits at least one homoclinic orbit contained in $S_E \setminus \partial S_E$.

Keywords: Hamiltonian flows, strictly convex singular sets, saddle-center equilibrium points, pseudo-holomorphic curves in symplectizations, systems of transverse sections.

Sumário

Introdução	1
1 Noções básicas	7
1.1 Geometria simplética e fluxos Hamiltonianos	7
1.2 Geometria de contato e fluxos de Reeb	14
1.3 Dinâmica próxima a uma órbita periódica	25
1.3.1 Número de auto-enlaçamento	27
1.3.2 Índice de Conley-Zehnder	28
1.4 Curvas pseudo-holomorfas	43
2 Resultado principal	51
2.1 Sistemas globais de seções transversais	51
2.2 Conjuntos singulares estritamente convexos	61
2.3 Demonstração do resultado principal	74
3 Resultados intermediários	89
3.1 Demonstração da Proposição 2.3.6	89
3.2 Demonstração da Proposição 2.3.7	101
3.3 Demonstração da Proposição 2.3.8	116
3.4 Demonstração da Proposição 2.3.9	121
3.5 Demonstração da Proposição 2.3.10	126
3.5.1 Demonstração da Proposição 2.3.10-i)	129
3.5.2 Demonstração da Proposição 2.3.10-ii)	136
3.5.3 Demonstração da Proposição 2.3.10-iii)	150
A Propriedades de ação e enlaçamento	169
B Unicidade e interseção de curvas pseudo-holomorfas	177
Referências Bibliográficas	184

Introdução

Uma abordagem clássica para estudar um sistema Hamiltoniano autônomo em uma variedade simplética (W, ω) é analisar o fluxo restrito a determinados níveis de energia $H^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, da função Hamiltoniana $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ que define este sistema. Quando lidamos com um nível de energia de contato, ou seja, uma hipersuperfície S transversal a um campo de Liouville Y definido em uma vizinhança de S em W , o fluxo Hamiltoniano restrito a S é equivalente ao fluxo de Reeb gerado pela forma de contato $\lambda = (i_Y \omega)|_S$ em S . Neste caso, os resultados da geometria de contato e da teoria de curvas pseudo-holomorfas se tornam poderosas ferramentas para entender o comportamento da dinâmica Hamiltoniana sobre um tal nível de energia.

O conceito de curvas pseudo-holomorfas em Geometria Simplética, introduzido inicialmente por Gromov [20] em 1985, foi inserido no contexto da dinâmica de Reeb em 1993 por H. Hofer com a finalidade de demonstrar a famosa conjectura de Weinstein em casos bem gerais em dimensão 3. Para isso, H. Hofer [24] definiu a noção de curvas pseudo-holomorfas de energia finita em simplectizações de variedades de contato e mostrou que a existência de tais curvas está intimamente relacionada com a existência de órbitas periódicas do fluxo de Reeb. Posteriormente, Hofer, Wysocki e Zehnder desenvolveram o alicerce da teoria de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, explorando suas principais propriedades em [25, 26, 28, 29, 30].

As aplicações desta nova teoria na área de dinâmica Hamiltoniana são vastas. Em [33], Hofer, Wysocki e Zehnder provam que qualquer nível de energia estritamente convexo $S \subset \mathbb{R}^4$ difeomorfo a S^3 admite uma órbita periódica P , com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 , que é bordo de uma seção global do tipo disco D , ou seja, D é um disco mergulhado em S , cujo interior $\dot{D} = D \setminus \partial D$ é transversal ao fluxo Hamiltoniano e satisfaz a seguinte propriedade: toda órbita em S , exceto aquelas que recobrem P , intersecta \dot{D} infinitas vezes em tempos positivos e negativos. A seção global D , obtida em [33] como a projeção em S de um plano pseudo-holomorfo de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times S$, faz parte de uma família parametrizada em S^1 de seções globais do tipo disco, conhecida como decomposição em livro aberto, que folheia o complementar de P em S . Assim, o estudo da dinâmica Hamiltoniana restrita ao nível de energia convexo S se reduz à compreensão da dinâmica da aplicação de retorno do disco aberto \dot{D} e, devido a um resultado de J. Franks [16], chega-se à surpreendente conclusão de que o fluxo possui duas ou infinitas órbitas periódicas em S .

Outra referência que ressalta a grande importância das curvas pseudo-holomorfas no es-

tudo de dinâmica conservativa é [27], na qual Hofer, Wysocki e Zehnder garantem a existência de sistemas de seções transversais em níveis de energia estrelados e não-degenerados de \mathbb{R}^4 . Um tal sistema é construído em [27] como a projeção de uma folheação estável de energia finita na simplectização do nível de energia e , em particular, cada uma de suas folhas é obtida como a projeção de uma curva pseudo-holomorfa. No caso fracamente convexo, isto é, quando o fluxo Hamiltoniano restrito ao nível de energia não possui órbitas periódicas com índice de Conley-Zehnder menor que 2, um sistema de seções transversais é uma folheação singular \mathcal{F} para o nível de energia, com conjunto singular \mathcal{P} formado por um número finito de órbitas periódicas do fluxo Hamiltoniano, todas com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder em $\{2, 3\}$, de modo que cada folha regular $F \in \mathcal{F}$ é transversal ao fluxo e tem como componentes de bordo elementos distintos de \mathcal{P} , chamados limites assintóticos de F , e uma das seguintes possibilidades ocorre: F é um plano rígido com limite assintótico dado por uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 2, ou F é um cilindro rígido tendo como limites assintóticos uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 3 e outra com índice de Conley-Zehnder 2, ou F é um plano com limite assintótico dado por uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 3 que aparece em uma família a 1-parâmetro de planos com o mesmo limite assintótico. Se o conjunto singular \mathcal{P} do sistema de seções transversais \mathcal{F} é constituído por uma única órbita periódica P , então P deve ter índice de Conley-Zehnder 3 e $\mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$ é uma decomposição em livro aberto para o nível de energia, como no caso convexo.

A existência de singularidades em um nível de energia cria muitas dificuldades para a análise global da dinâmica. C. Grotta-Ragazzo e P. A. S. Salomão estudaram fluxos Hamiltonianos em \mathbb{R}^4 restritos a níveis de energia homeomorfos a S^3 que admitem uma única singularidade, dada por um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro do sistema, e têm a propriedade geométrica de ser estritamente convexo no complementar deste ponto crítico. Em [22], mostraram que estes níveis de energia singulares contêm uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 e, mais ainda, no caso particular em que o fluxo Hamiltoniano é integrável e o sela-centro admite uma órbita homoclínica do fluxo, os mesmos autores provaram, em [23], que estes níveis críticos estritamente convexos possuem uma seção global do tipo disco. Salomão introduziu os conjuntos singulares estritamente convexos em [52], onde apresentou exemplos concretos da existência destes conjuntos no caso especial em que a função Hamiltoniana é da forma “energia cinética mais energia potencial”.

Em [12], a autora desta tese N. V. de Paulo e seu orientador P. A. S. Salomão estudam sistemas Hamiltonianos em \mathbb{R}^4 restritos a níveis de energia imediatamente acima de um conjunto singular estritamente convexo. Mais precisamente, consideramos uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ admitindo um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c \in H^{-1}(0)$ que satisfaz duas propriedades essenciais: a primeira delas é uma condição local que garante a integrabilidade do fluxo Hamiltoniano em torno do sela-centro p_c e a segunda é a hipótese de que p_c pertence a um conjunto singular estritamente convexo $S_0 \subset H^{-1}(0)$. O principal resultado deste trabalho mostra que os níveis de energia $H^{-1}(E)$, com $E > 0$ suficientemente pequeno, contêm uma 3-bola fechada S_E próxima a S_0 que admite um sistema de

seções transversais \mathcal{F}_E , chamado folheação 2 – 3, com as seguintes características particulares, veja Figura 2.20. O conjunto singular de \mathcal{F}_E é formado por duas órbitas periódicas $P_{2,E} \subset \partial S_E$ e $P_{3,E} \subset S_E \setminus \partial S_E$ com índices de Conley-Zehnder 2 e 3, respectivamente. A órbita $P_{2,E}$ é hiperbólica dentro do nível de energia $H^{-1}(E)$, pertence à variedade central do sela-centro p_c e é o limite assintótico de dois planos rígidos $U_{1,E}, U_{2,E} \in \mathcal{F}_E$ que, unidos com $P_{2,E}$, constituem a 2-esfera ∂S_E . A folheação \mathcal{F}_E contém um cilindro rígido V_E conectando $P_{3,E}$ e $P_{2,E}$ e, além disso, contém uma família de planos $D_{\tau,E}$, com $\tau \in (0, 1)$, todos assintóticos à órbita $P_{3,E}$, que folheia $S_E \setminus (\partial S_E \cup V_E \cup P_{3,E})$. Uma vez que \mathcal{F}_E é um sistema de seções transversais, todas as suas folhas regulares são transversais ao fluxo Hamiltoniano de H . Como consequência da existência desta folheação 2 – 3 em S_E , podemos concluir que a órbita hiperbólica $P_{2,E}$ admite pelo menos uma órbita homoclínica contida em $S_E \setminus \partial S_E$. Este resultado se aplica aos exemplos tratados em [52].

O objetivo desta tese é discutir detalhadamente o trabalho desenvolvido em [12]. Para isso, organizamos a exposição em três capítulos e dois apêndices.

No primeiro capítulo, recordamos definições e resultados necessários para um bom entendimento do restante do texto. Nas duas primeiras seções deste capítulo preliminar, abordamos pré-requisitos da geometria simplética e da geometria de contato, bem como discutimos algumas propriedades dinâmicas de fluxos Hamiltonianos em variedades simpléticas e de fluxos de Reeb em variedades de contato, explorando especialmente o caso em que estes fluxos são equivalentes sobre níveis de energia da função Hamiltoniana. Na terceira seção, apresentamos conceitos relacionados às órbitas periódicas de um fluxo de Reeb, entre eles, o número de auto-enlaçamento, um invariante topológico de nós transversais à estrutura de contato, e o índice de Conley-Zehnder, um invariante dinâmico que descreve o comportamento de órbitas próximas a uma dada solução periódica do fluxo. Na quarta seção, introduzimos a noção de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações de variedades de contato, enfatizando sua relevância para o estudo da dinâmica de Reeb.

O capítulo mais importante deste trabalho é o segundo, no qual apresentamos nosso resultado principal. Em sua primeira seção, definimos as folheações estáveis de energia finita e os sistemas de seções transversais, como em [27], e abordamos alguns casos particulares. Na segunda seção, elaboramos as hipóteses do resultado principal utilizando ferramentas desenvolvidas em [22, 52]. Com este intuito, falamos sobre propriedades geométricas e dinâmicas dos conjuntos singulares estritamente convexos em \mathbb{R}^4 e fornecemos uma descrição local de um fluxo Hamiltoniano em torno de um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro. Finalmente, na terceira seção enunciamos e demonstramos o resultado principal da tese, além de discutirmos algumas de suas aplicações. Por tratar-se de uma longa demonstração, dividimos sua apresentação em passos intermediários, que são enunciados no decorrer da demonstração do resultado principal, porém são provados nas seções do terceiro capítulo.

Para descrevermos brevemente estes passos intermediários, precisamos dar uma ideia sucinta da demonstração do resultado principal. Como comentamos anteriormente, consideramos uma função Hamiltoniana H definida em \mathbb{R}^4 admitindo um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro p_c que pertence a um conjunto singular estritamente convexo $S_0 \subset H^{-1}(0)$. Para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, encontramos uma 3-bola fechada $S_E \subset H^{-1}(E)$

próxima ao conjunto S_0 , cujo bordo ∂S_E é uma 2-esfera contendo $P_{2,E}$ como equador, onde $P_{2,E} \subset H^{-1}(E)$ é uma órbita periódica que pertence à variedade central do sela-centro p_c . Os hemisférios da esfera ∂S_E são denotados por $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$. Assumimos a existência de coordenadas locais especiais (q_1, q_2, p_1, p_2) em torno do sela-centro p_c , nas quais S_E se projeta no plano $q_1 p_1$ em $\{q_1 + p_1 \geq 0\}$ e p_c corresponde à origem $0 \in \mathbb{R}^4$. Utilizando estas novas coordenadas, construímos um conjunto $W_E = S'_E \sqcup S_E$ difeomorfo a esfera S^3 , onde S'_E é uma cópia de S_E que se projeta no plano $q_1 p_1$ em $\{q_1 + p_1 \leq 0\}$ e satisfaz $\partial S_E = \partial S'_E$, veja Figura 2.23. A estratégia da demonstração é construir um sistema de seções transversais \mathcal{F}_E em W_E que se restringe a uma folheação 2 – 3 em S_E para todo $E > 0$ pequeno.

O primeiro passo, provado na primeira seção do terceiro capítulo, é demonstrar que, para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, a 3-esfera W_E admite uma forma de contato *tight* $\lambda_E = (i_{X_E} \omega_0)|_{W_E}$, cujo fluxo de Reeb associado é equivalente ao fluxo Hamiltoniano de H restrito a W_E . Aqui ω_0 é a forma simplética canônica de \mathbb{R}^4 . Para a construção do campo de Liouville X_E , transversal a W_E , usamos a técnica de interpolação de campos de Liouville.

Na segunda seção do terceiro capítulo, mostramos que a órbita periódica $P_{2,E}$ é hiperbólica em seu nível de energia e tem índice de Conley-Zehnder igual a 2. Além disso, obtemos uma estimativa para o fluxo linearizado ao longo de órbitas que passam próximas ao sela-centro p_c e, com isso, demonstramos que a forma de contato λ_E é fracamente convexa e que $P_{2,E}$ é a única órbita periódica de λ_E com índice de Conley-Zehnder 2, para cada $E > 0$ suficientemente pequeno. Mais ainda, provamos uma propriedade de enlaçamento afirmando que $P_{2,E}$ não está enlaçada com nenhuma órbita periódica de λ_E que tenha índice de Conley-Zehnder igual a 3.

Na terceira seção do terceiro capítulo, construímos uma estrutura complexa J_E compatível com $d\lambda_E|_\xi$ na estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_E$, para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, de modo que a estrutura quase-complexa \tilde{J}_E , induzida por λ_E e J_E na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, admite dois planos pseudo-holomorfos de energia finita assintóticos a $P_{2,E}$, cujas imagens são projetadas em W_E sobre os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E . Este par de planos é obtido explicitamente em termos de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Prova-se em [27] que dada uma forma de contato λ não-degenerada na 3-esfera *tight*, existe um conjunto denso $\mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ de estruturas complexas compatíveis com $d\lambda|_{\ker \lambda}$ tal que, para qualquer $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, a estrutura quase-complexa \tilde{J} induzida por λ e J na simplectização admite uma folheação estável de energia finita, cuja projeção na 3-esfera produz um sistema de seções transversais. Este resultado é essencial para obtermos o sistema de seções transversais \mathcal{F}_E desejado sobre a 3-esfera (W_E, λ_E) . Entretanto, é possível que tenhamos que perturbar a forma de contato λ_E e a estrutura complexa J_E para alcançarmos as hipóteses genéricas assumidas em [27]. Por esta razão, consideramos uma sequência de formas de contato não-degeneradas λ_n em W_E e uma sequência de estruturas complexas J_n compatível com $d\lambda_n|_\xi$ na estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_E = \ker \lambda_n$, com $\lambda_n \rightarrow \lambda_E$ e $J_n \rightarrow J_E$ quando $n \rightarrow \infty$, tais que a estrutura quase-complexa \tilde{J}_n induzida por λ_n e J_n na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ que se projeta em W_E sobre um sistema de seções transversais \mathcal{F}_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelas estimativas obtidas na segunda

seção, concluímos que o sistema \mathcal{F}_n possui propriedades muito particulares para n suficientemente grande. O conjunto singular de \mathcal{F}_n é formado por três órbitas periódicas $P_{3,n}, P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$, com índices de Conley-Zehnder 3, 2 e 3 respectivamente, e \mathcal{F}_n admite como folhas regulares um par de planos rígidos assintóticos a $P_{2,n}$, um par de cilindros rígidos, um deles conectando $P_{3,n}$ e $P_{2,n}$ e o outro conectando $P'_{3,n}$ e $P_{2,n}$, e um par de $(0, 1)$ -famílias de planos, a primeira formada por planos assintóticos a $P_{3,n}$ e a segunda por planos assintóticos a $P'_{3,n}$, que folheiam o complementar das folhas rígidas e das órbitas $P_{3,n}, P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$ em W_E . Um sistema de seções transversais com estas características é chamado de folheação 3 – 2 – 3, veja Figura 2.6.

Nas duas últimas seções do terceiro capítulo, demonstramos enfim que a folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ associada a \tilde{J}_n converge, quando $n \rightarrow \infty$, para uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_E$ associada a \tilde{J}_E , para todo $E > 0$ suficientemente pequeno. Mais ainda, a projeção de $\tilde{\mathcal{F}}_E$ em W_E é uma folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_E que contém a órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$ em seu conjunto singular e contém os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ de ∂S_E como folhas rígidas. De modo mais preciso, na quarta seção obtemos órbitas periódicas $P_{3,E}$ e $P'_{3,E}$, ambas com índice de Conley-Zehnder 3, que compõem, juntamente com $P_{2,E}$, o conjunto singular da folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_E . As órbitas $P_{3,E}, P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$ são, respectivamente, os limites de $P_{3,n}, P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$ quando $n \rightarrow \infty$. Na quinta seção estudamos a convergência das curvas pseudo-holomorfas de $\tilde{\mathcal{F}}_n$ que se projetam sobre folhas regulares de \mathcal{F}_n , utilizando para isso técnicas modernas e avançadas de topologia simplética. Devido as suas propriedades, vemos que a folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_E em $W_E = S'_E \sqcup S_E$ se restringe a uma folheação 2 – 3 em S_E .

Nos apêndices deste texto, apresentamos alguns resultados fundamentais para a demonstração da compacidade das curvas pseudo-holomorfas da folheação $\tilde{\mathcal{F}}_n$. No Apêndice A, analisamos primeiramente a ação das órbitas periódicas de λ_E , provando que $P_{2,E}$ é a órbita periódica com ação mínima em W_E para todo $E > 0$ pequeno. Em seguida, obtemos a seguinte propriedade de enlaçamento de órbitas periódicas em S_E , para $E > 0$ pequeno: se Q é uma órbita periódica de λ_E contida em $S_E \setminus (\partial S_E \cup P_{3,E})$, cuja ação não excede a ação de $P_{3,E}$, então Q deve estar enlaçada com $P_{3,E}$. No Apêndice B, usamos a teoria de interseção de curvas pseudo-holomorfas, desenvolvida por R. Siefring em [54], para obtermos resultados de unicidade para planos e cilindros rígidos assintóticos à órbita hiperbólica $P_{2,E}$. Além disso, provamos algumas propriedades de interseção para semi-cilindros \tilde{J}_E -holomorfos que são assintóticos a algum recobrimento de $P_{2,E}$ e se projetam em W_E dentro da 3-bola aberta $S_E \setminus \partial S_E$. Para isso, utilizamos a fórmula de Siefring [53] que descreve o comportamento assintótico da diferença de dois semi-cilindros pseudo-holomorfos distintos convergindo exponencialmente para uma mesma órbita periódica do fluxo de Reeb.

Capítulo 1

Noções básicas

Neste primeiro capítulo apresentamos conceitos e resultados preliminares essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, introduzimos noções de geometria simplética e de geometria de contato, explorando a relação existente entre estas geometrias. Discutimos ainda algumas propriedades da dinâmica de fluxos Hamiltonianos e de fluxos de Reeb, além de definir dois consideráveis invariantes associados às órbitas periódicas: o índice de Conley-Zehnder e o número de auto-enlaçamento. E, para finalizar, apresentamos a teoria de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, ressaltando sua grande importância para o estudo da dinâmica de Reeb. Para uma exposição mais detalhada destes tópicos, diversas referências podem ser consultadas como, por exemplo, [1, 8, 10, 17, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 41, 43, 44, 46]. O leitor familiarizado com as noções aqui tratadas, pode optar por omitir este capítulo introdutório, caso julgue conveniente.

1.1 Geometria simplética e fluxos Hamiltonianos

As equações de Hamilton aparecem naturalmente em vários ramos da ciência como, por exemplo, na mecânica celeste, em sistemas ópticos, no estudo de reações químicas clássicas e quânticas, etc. Como simples motivação para o estudo da dinâmica Hamiltoniana, vamos considerar o movimento de uma partícula de massa m no espaço \mathbb{R}^n submetida a uma força conservativa F . Neste caso, F é um campo vetorial definido em \mathbb{R}^n que independe do tempo t e, além disso, pode ser escrito como $F = -\nabla V$ para alguma função escalar V , chamada de energia potencial, que depende apenas da posição $q = (q_1, \dots, q_n)$ da partícula.

A energia cinética T é definida por

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m\dot{q}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m},$$

onde $p = m\dot{q}$ é o momento linear da partícula. Então, a partir da equação de Newton

$$F = m\ddot{q} = \dot{p}$$

e do fato de F ser um campo conservativo, vemos que a energia total do sistema, dada pela

soma da energia cinética T com a energia potencial V , é de fato conservada ao longo da trajetória da partícula, pois

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i p_i}{m} + \sum_{i=1}^n \partial_{q_i} V \dot{q}_i = \langle F, \dot{q} \rangle + \langle \nabla V, \dot{q} \rangle = 0.$$

Além disso, obtemos o seguinte sistema de n equações diferenciais de segunda ordem descrevendo a trajetória $q(t)$

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)),$$

que pode ser reescrito na forma de um sistema com $2n$ equações de primeira ordem como

$$\begin{cases} \dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -\nabla V(q(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

O espaço $\mathbb{R}^n = \{q = (q_1, \dots, q_n)\}$ de posições da partícula é conhecido como *espaço de configurações*, enquanto o espaço $\mathbb{R}^{2n} = \{(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}$ consistindo de posições e momentos, é chamado de *espaço de fases*.

Considere $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ a energia total deste sistema conservativo dada por

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + V(q_1, \dots, q_n). \quad (1.2)$$

Pelo que vimos anteriormente, H é constante ao longo das soluções $(q(t), p(t))$ de (1.1).

Com o auxílio da função H , (1.1) pode ser visto do seguinte modo

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \partial_{p_i} H \\ \dot{p}_i &= -\partial_{q_i} H \end{cases} \quad (1.3)$$

Um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem do tipo (1.3), obtido a partir de alguma função suave $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, é chamado de *sistema Hamiltoniano* e suas equações são conhecidas como *equações de Hamilton*.

A noção de sistema Hamiltoniano se estende para espaços de fases mais gerais que o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{2n} , a saber as variedades simpléticas.

Definição 1.1.1. *Sejam W uma variedade diferenciável e ω uma 2-forma definida sobre W . Dizemos que ω é uma forma simplética se:*

- ω é não-degenerada, isto é, $\ker \omega_x = \{0\}$ para todo $x \in W$;
- ω é fechada, ou seja, $d\omega = 0$.

Quando munida de uma forma simplética ω , W é chamada de *variedade simplética*. Neste caso, costumamos usar a notação (W, ω) .

Como exemplos de variedade simplética podemos citar:

Exemplo 1.1.2. \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ munido da forma simplética canônica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Exemplo 1.1.3. A esfera S^2 munida da 2-forma

$$\omega_x(u, v) = \langle x, u \times v \rangle, \quad \forall x \in S^2, u, v \in T_x S^2.$$

Exemplo 1.1.4. O produto $W = W_1 \times W_2$ de variedades simpléticas (W_1, ω_1) e (W_2, ω_2) munido da forma produto

$$\omega = \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2,$$

onde $\pi_i^* \omega_i$ é o pull-back da forma simplética ω_i pela i -ésima projeção $\pi_i : W \rightarrow W_i$, $i = 1, 2$.

Exemplo 1.1.5. O fibrado cotangente T^*M de qualquer variedade diferenciável M^n munido da 2-forma dada localmente, em coordenadas cotangentes $(T^*U, (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n))$, por

$$\omega_{can} = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i,$$

onde $U \subset M$ é um aberto com coordenadas (x_1, \dots, x_n) .

Note que a forma simplética ω_{can} é primitiva da 1-forma tautológica definida localmente em T^*M por

$$\alpha_{taut} = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i.$$

Vejamos que as definições de ω_{can} e α_{taut} independem da escolha de coordenadas e, sendo assim, ω_{can} e α_{taut} estão globalmente definidas em T^*M . Para isso considere coordenadas cotangentes $(T^*U, (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n))$ e $(T^*U', (x'_1, \dots, x'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n))$ com $U \cap U' \neq \emptyset$ e sejam $\alpha_{taut} = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$ e $\alpha'_{taut} = \sum_{i=1}^n \xi'_i dx'_i$ as 1-formas tautológicas associadas a cada uma destas coordenadas. Sabemos que para todo $x \in U \cap U'$ vale a relação

$$(dx_j)_x = \sum_{i=1}^n \partial_{x'_i} x_j(x) (dx'_i)_x,$$

onde $\{(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x\}$ e $\{(dx'_1)_x, \dots, (dx'_n)_x\}$ são bases de $T^*_x M$. Então, dado $\xi \in T^*_x M$, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^n \xi'_i (dx'_i)_x = \xi = \sum_{j=1}^n \xi_j (dx_j)_x = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{x'_i} x_j(x) \right) (dx'_i)_x,$$

donde segue que

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{x'_i} x_j(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Concluimos deste modo que em $T^*U \cap T^*U'$ vale

$$\alpha'_{taut} = \sum_{i=1}^n \xi'_i dx'_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{x'_i} x_j \right) dx'_i = \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x'_i} x_j dx'_i \right) = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j = \alpha_{taut}$$

e, portanto, α'_{taut} e α_{taut} coincidem nas interseções dos domínios das cartas cotangentes. Como $\omega_{can} = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i$ e $\omega'_{can} = \sum_{i=1}^n d\xi'_i \wedge dx'_i$, associadas respectivamente às coordenadas $(T^*U, (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n))$ e $(T^*U', (x'_1, \dots, x'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n))$, satisfazem $\omega_{can} = d\alpha_{taut}$ e $\omega'_{can} = d\alpha'_{taut}$, obtemos também que $\omega_{can} = \omega'_{can}$ em $T^*U \cap T^*U'$.

A dimensão de uma variedade simplética é sempre par. De fato, seja (W, ω) uma variedade simplética de dimensão n e fixe $x \in W$. Considere A a matriz que representa a aplicação bilinear $\omega_x : T_x W \times T_x W \rightarrow \mathbb{R}$. Como ω_x é não-degenerada e anti-simétrica, o determinante da matriz A satisfaz $\det A \neq 0$ e $\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A$, donde segue que n deve ser par.

Além disso, toda variedade simplética (W^{2n}, ω) é orientável, pois o fato de ω ser uma 2-forma não-degenerada em W implica que a $2n$ -forma ω^n é uma forma de volume em W .

Definição 1.1.6. *Duas variedades simpléticas (M, ω) e (N, η) são ditas simplectomorfas se existe um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ tal que $\varphi^* \eta = \omega$. Neste caso, φ é chamado de simplectomorfismo.*

O teorema de Darboux abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [41, Teorema 2.12], nos garante que quaisquer duas variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente equivalentes no sentido simplético.

Teorema 1.1.7 (Darboux-Variedades simpléticas). *Sejam (W^{2n}, ω) uma variedade simplética e $x \in W$. Então existem vizinhanças $0 \in U \subset \mathbb{R}^{2n}$ e $x \in V \subset W$ e um simplectomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ centrado em x tal que $\varphi^* \omega = \omega_0$, onde ω_0 é a forma simplética canônica de \mathbb{R}^{2n} apresentada no Exemplo 1.1.2.*

Esta propriedade de inexistência de invariantes locais é algo particular da geometria simplética. No contexto de geometria Riemanniana, por exemplo, duas variedades Riemannianas de mesma dimensão não são necessariamente localmente isométricas.

Outro fato contrastante entre a geometria simplética e a geometria Riemanniana é que toda variedade admite uma estrutura Riemanniana, porém nem toda variedade admite uma estrutura simplética, mesmo as de dimensão par. Entre as esferas S^{2n} , por exemplo, a única que admite uma forma simplética é S^2 . De fato, se $n > 1$ então $H_{DR}^2(S^{2n}) = 0$, onde H_{DR}^k denota a k -ésima cohomologia de De Rham. Por esta razão, se ω for uma forma simplética em S^{2n} , ω deve ser uma 2-forma exata, ou seja, $\omega = d\alpha$ para alguma 1-forma α definida em S^{2n} . Sendo assim, $\omega^n = d(\omega^{n-1} \wedge \alpha)$ e então, pelo Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_{S^{2n}} \omega^n = \int_{\partial S^{2n}} \omega^{n-1} \wedge \alpha = 0,$$

contradizendo o fato de ω^n ser uma forma de volume em S^{2n} . Note que este mesmo argumento vale para qualquer variedade fechada W^{2n} satisfazendo $H_{\text{DR}}^{2i}(W) = 0$ para algum $1 \leq i \leq n - 1$.

Agora estamos em condições de definir um sistema Hamiltoniano no contexto mais geral de variedades simpléticas.

Definição 1.1.8. *Um sistema Hamiltoniano é uma tripla (W, ω, H) , onde (W, ω) é uma variedade simplética e $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, chamada de função Hamiltoniana.*

Neste trabalho, nos restringimos ao caso autônomo em que a função Hamiltoniana H independe do tempo. A cada sistema Hamiltoniano (W, ω, H) podemos associar um campo vetorial em W , denotado por X_H , que é definido unicamente pela equação

$$i_{X_H}\omega = -dH. \quad (1.4)$$

Este campo recebe o nome de *campo Hamiltoniano*. Observe que a existência e a unicidade do campo Hamiltoniano X_H se deve à não-degenerescência da forma simplética ω .

E associado a um campo Hamiltoniano X_H , temos o seguinte sistema autônomo

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)), \quad (1.5)$$

também chamado de *sistema Hamiltoniano*. Vamos sempre assumir que o fluxo de (1.5), conhecido como *fluxo Hamiltoniano*, é completo.

É simples verificar que o campo Hamiltoniano associado a um sistema $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H)$, onde ω_0 é a forma canônica de \mathbb{R}^{2n} , é dado por

$$X_H = J_0 \nabla H, \quad \text{com } J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Aqui I representa a matriz identidade e 0 a matriz nula, ambas de ordem n .

Portanto, o sistema Hamiltoniano (1.5) se reduz às equações de Hamilton (1.3) no caso da variedade simplética padrão $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Vejamos alguns exemplos de sistema Hamiltoniano.

Exemplo 1.1.9. *Considere a variedade simplética $(\mathbb{R}^2, \omega_0 = dp \wedge dq)$ munida da função Hamiltoniana:*

1. $H(q, p) = -qp$

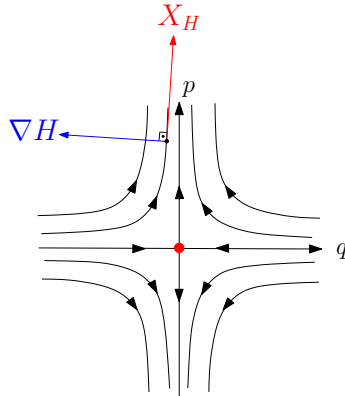
Neste caso o campo Hamiltoniano é dado por $X_H(q, p) = (-q, p)$ e então o sistema Hamiltoniano fica da forma

$$\begin{cases} \dot{q} = -q \\ \dot{p} = p \end{cases} \quad (1.7)$$

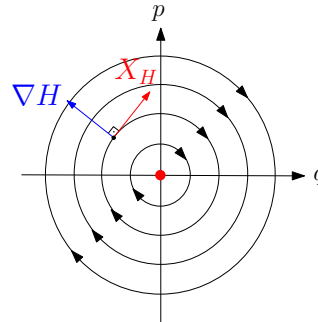
2. $H(q, p) = \frac{q^2 + p^2}{2}$

Aqui o campo Hamiltoniano é dado por $X_H(q, p) = (p, -q)$ e assim o sistema Hamiltoniano é o seguinte

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} \quad (1.8)$$



(a) Espaço de fase do sistema Hamiltoniano (1.7)



(b) Espaço de fase do sistema Hamiltoniano (1.8)

Exemplo 1.1.10. Considere a esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com coordenadas (θ, h) , onde, para cada $p = (x, y, h) \in S^2$, $\theta \in (0, 2\pi)$ representa o ângulo formado pela projeção (x, y) com o eixo x e $h \in (-1, 1)$ representa a altura do ponto p . Vamos munir S^2 com a forma simplética dada, nestas coordenadas, por $\omega = dh \wedge d\theta$.

Seja $X = \partial_\theta$ campo vetorial definido sobre S^2 . Temos que

$$i_X \omega = i_{\partial_\theta} (dh \wedge d\theta) = dh(\partial_\theta) d\theta - d\theta(\partial_\theta) dh = -dh$$

e, portanto, o campo X satisfaz a equação $i_X \omega = -dH$ para $H : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela função altura $H(\theta, h) = h$. Por unicidade, concluímos que o campo Hamiltoniano X_H associado à função altura H é dado por $X_H = \partial_\theta$. Os polos sul e norte da esfera S^2 são singularidades de X_H e o restante de suas órbitas são todas periódicas não-constantes. Veja Figura 1.1.

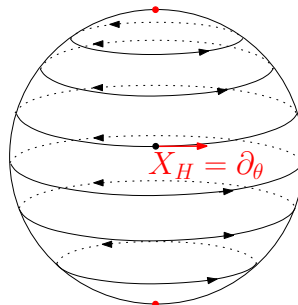


Figura 1.1: Fluxo Hamiltoniano da função altura em S^2

Podemos obter diretamente da equação (1.4) que os pontos de equilíbrio de um fluxo Hamiltoniano são justamente os pontos críticos da função Hamiltoniana que o define. Mais precisamente, sejam (W, ω, H) um sistema Hamiltoniano e $\{\psi_t, t \in \mathbb{R}\}$ o fluxo Hamiltoniano

associado ao campo Hamiltoniano X_H . Um *ponto de equilíbrio* de ψ_t é um ponto $x \in W$ tal que

$$\psi_t(x) = x, \forall t \Leftrightarrow X_H(x) = 0 \Leftrightarrow dH(x) = 0.$$

A forma simplética ω é invariante pelo fluxo Hamiltoniano ψ_t , isto é, $\psi_t^*\omega = \omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = di_{X_H}\omega + i_{X_H}d\omega = -ddH = 0.$$

Aqui \mathcal{L}_{X_H} representa a derivada de Lie com relação ao campo X_H . Consequentemente, o fluxo Hamiltoniano preserva volume (Teorema de Liouville), já que a forma de volume ω^n na variedade simplética W^{2n} também é invariante pelo fluxo ψ_t .

Temos ainda que o fluxo Hamiltoniano ψ_t preserva os níveis de energia $H^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, da função Hamiltoniana H , pois

$$\mathcal{L}_{X_H}H = dH(X_H) = -i_{X_H}\omega(X_H) = -\omega(X_H, X_H) = 0.$$

Em outras palavras, a função Hamiltoniana é constante ao longo das soluções do fluxo Hamiltoniano. Por esta razão, o estudo de um sistema Hamiltoniano sobre uma variedade simplética se reduz à análise do fluxo restrito aos níveis de energia da função Hamiltoniana que o define.

Muitas vezes, a partir de condições geométricas sobre um dado nível de energia, é possível obter conclusões sobre o comportamento dinâmico do fluxo Hamiltoniano. Em 1978, A. Weinstein mostrou em [57] que todo nível de energia convexo de \mathbb{R}^{2n} admite pelo menos uma órbita periódica do fluxo Hamiltoniano. Este resultado foi generalizado em 1979 por P. Rabinowitz [50] para níveis de energia estrelados de \mathbb{R}^{2n} , sobre os quais vamos discutir posteriormente. Ainda em 1979, Weinstein [58] notou que os níveis de energia convexos e estrelados de \mathbb{R}^{2n} têm a propriedade de serem transversais a um campo de Liouville, e isto é exatamente o que caracteriza as hipersuperfícies de contato que definiremos na próxima seção. Weinstein então conjecturou que toda variedade de contato compacta, cujo primeiro grupo de cohomologia H^1 é trivial, sempre admite uma órbita periódica. A hipótese sobre H^1 foi futuramente abandonada e esta conjectura ficou conhecida como a *conjectura de Weinstein*. Em 1987, C. Viterbo mostrou em [56] que a conjectura de Weinstein é válida para qualquer hipersuperfície de contato de \mathbb{R}^{2n} e, no ano de 1993, H. Hofer verificou a validade desta conjectura para situações bem gerais de dimensão 3, mais especificamente, Hofer provou em [24] que uma variedade de contato compacta M de dimensão 3 admite uma órbita periódica contrátil nos casos em que M coincide com a esfera S^3 , ou seu segundo grupo fundamental $\pi_2(M)$ é não trivial, ou então a estrutura de contato em M é *overtwisted*. Na seção que vem a seguir, definiremos todos estes conceitos. E finalmente, em 2007, C. Taubes generalizou o resultado obtido por Hofer, provando em [55] que a conjectura de Weinstein é válida para qualquer variedade de contato compacta de dimensão 3.

Quando nos restringimos a um nível de energia da função Hamiltoniana que é uma hipersuperfície de contato da variedade simplética, todos os resultados da geometria de contato e da teoria de curvas pseudo-holomorfas, tratados respectivamente nas Seções 1.2

e 1.4, podem ser utilizados como ferramentas para entender o comportamento da dinâmica Hamiltoniana.

1.2 Geometria de contato e fluxos de Reeb

A geometria de contato é o análogo da geometria simplética para variedades de dimensão ímpar. A relação entre estas duas geometrias surge quando falamos em hipersuperfície de contato.

Definição 1.2.1. Dizemos que uma hipersuperfície S de uma variedade simplética (W, ω) é de contato se existe um campo vetorial Y , definido numa vizinhança aberta $U \subset W$ de S , que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Y é um campo de Liouville, ou seja, $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$.
2. Y é transversal à S .

Considere os seguintes exemplos de hipersuperfície de contato:

Exemplo 1.2.2. Seja \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ munido da forma simplética canônica ω_0 e seja Y o campo radial em \mathbb{R}^{2n} definido por

$$Y(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \partial_{q_i} + p_i \partial_{p_i}.$$

É simples checar que

$$i_Y \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - q_i dp_i$$

e, portanto, $\mathcal{L}_Y \omega_0 = di_Y \omega_0 = \omega_0$, ou seja, Y é um campo de Liouville em \mathbb{R}^{2n} .

Observe ainda que Y , por ser radial, é transversal à esfera S^{2n-1} . Logo S^{2n-1} é uma hipersuperfície de contato de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Exemplo 1.2.3. Considere M^n uma variedade diferenciável e T^*M seu fibrado cotangente munido da forma simplética canônica ω_{can} definida no Exemplo 1.1.5. Seja Y o campo radial ao longo das fibras de T^*M dado por

$$Y(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{\xi_i},$$

onde $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x \in T_x^*M$. Podemos verificar que $i_Y \omega_{can} = \alpha_{taut}$, onde α_{taut} é a 1-forma tautológica em T^*M , definida também no Exemplo 1.1.5, que satisfaz $d\alpha_{taut} = \omega_{can}$. Logo $\mathcal{L}_Y \omega_{can} = \omega_{can}$ e assim Y é um campo de Liouville em T^*M .

Fixe uma métrica Riemanniana g em M e defina o fibrado unitário cotangente

$$U^*M = \{(x, \xi) \in T^*M / g_x(\xi, \xi) = 1\}.$$

Em cada fibra T_x^*M do cotangente, temos que $Y(x, \cdot)$ é transversal à fibra U_x^*M , por ser radial. Portanto, o fibrado unitário cotangente U^*M é uma hipersuperfície de contato de (T^*M, ω_{can}) .

Vimos na seção anterior que uma forma simplética é uma 2-forma definida sobre uma variedade de dimensão par que gera uma forma de volume sobre esta variedade. O análogo para variedades de dimensão ímpar é dado pela seguinte definição.

Definição 1.2.4. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão ímpar $2n - 1$ e λ uma 1-forma definida em M . Dizemos que λ é uma forma de contato em M se $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ é uma forma de volume em M . Quando munida de uma forma de contato λ , M é chamada de variedade de contato e pode ser denotada por (M, λ) .*

Uma consequência imediata desta definição é que as variedades de contato, assim como as variedades simpléticas, são orientáveis.

Como simples exemplo de variedade de contato, temos:

Exemplo 1.2.5. *O espaço Euclidiano \mathbb{R}^{2n+1} com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ munido da forma de contato*

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i dy_i + dz.$$

Podemos obter vários outros exemplos utilizando a proposição a seguir. Segundo este resultado, qualquer hipersuperfície de contato de uma variedade simplética (W, ω) é um caso particular de variedade de contato, cuja forma de contato está intimamente relacionada com a forma simplética ω .

Proposição 1.2.6. *Sejam S uma hipersuperfície de contato de uma variedade simplética (W, ω) e Y um campo de Liouville, definido numa vizinhança aberta $U \subset W$ de S , que é transversal à S . Então a 1-forma definida por $\lambda = (i_Y \omega)|_S$ é uma forma de contato em S que satisfaz*

$$d\lambda = \omega|_S.$$

Para uma demonstração deste fato, consulte [41, Proposição 1.6]. Entendemos a restrição $\omega|_S$ como o mapa que, a cada $x \in S$, associa a aplicação bilinear $\omega_x : T_x S \times T_x S \rightarrow \mathbb{R}$.

Pela Proposição 1.2.6, toda esfera de dimensão ímpar S^{2n-1} é uma variedade de contato quando munida da forma de contato λ_0 dada pela contração da forma simplética canônica ω_0 de \mathbb{R}^{2n} na direção do campo radial Y definido no Exemplo 1.2.2, ou seja,

$$\lambda_0 = i_Y \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - q_i dp_i.$$

Da mesma forma, o fibrado unitário cotangente U^*M de qualquer variedade diferenciável M torna-se uma variedade de contato ao ser munido da 1-forma tautológica α_{taut} definida no Exemplo 1.1.5.

Assim como na geometria simplética toda variedade simplética de dimensão $2n$ é localmente equivalente à variedade simplética padrão $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, na geometria de contato a variedade de contato $(\mathbb{R}^{2n+1}, \lambda)$, definida no Exemplo 1.2.5, descreve localmente qualquer variedade de contato de dimensão $2n + 1$. Consequentemente, variedades de contato de mesma dimensão são localmente iguais.

Teorema 1.2.7 (Darboux-Variedades de contato). *Sejam (M^{2n+1}, α) uma variedade simplética e $x \in M$. Então existem vizinhanças $0 \in U \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ e $x \in V \subset M$ e um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ centrado em x tal que $\varphi^*\alpha = \lambda$, onde λ é a forma de contato em \mathbb{R}^{2n+1} dada no Exemplo 1.2.5.*

Uma demonstração do Teorema 1.2.7 pode ser encontrada em [41, Teorema 2.14].

Cada variedade de contato (M^{2n-1}, λ) carrega consigo uma distribuição de hiperplanos tangentes ξ , conhecida como *estrutura de contato*, definida por

$$\xi = \ker \lambda \subset TM.$$

Dizemos que λ é uma forma de contato que define ξ e podemos denotar a variedade de contato (M, λ) também por (M, ξ) ou por $(M, \xi = \ker \lambda)$.

Observe que a 1-forma λ definindo ξ não é única, visto que $\ker \lambda = \ker(f\lambda)$ para qualquer função $f : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Todavia, se α é uma outra 1-forma que define $\xi = \ker \lambda$, isto é, $\xi = \ker \alpha$, então $\alpha = f\lambda$ para alguma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definição 1.2.8. *Duas variedades de contato $(M_1, \xi_1 = \ker \lambda_1)$ e $(M_2, \xi_2 = \ker \lambda_2)$ são ditas contactomorfas se existe um difeomorfismo $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $\varphi_*\xi_1 = \xi_2$ e, neste caso, φ é chamado de contactomorfismo. Se o contactomorfismo φ satisfaz $\varphi_*\lambda_1 = \lambda_2$, então φ recebe o nome de contactomorfismo estrito.*

Se $\alpha = f\lambda$ é uma forma de contato em M^{2n-1} que define $\xi = \ker \lambda$, então

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = f^n (\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}).$$

Logo, no caso em que n é par, o sinal da forma de volume $f\lambda \wedge (d(f\lambda))^{n-1}$ não depende de f , ou seja, não depende da escolha da forma de contato que define a estrutura de contato ξ . Nesta situação, a própria estrutura de contato induz uma orientação natural na variedade M que é dada pela orientação positiva induzida por alguma e , portanto, por todas as formas de contato que definem ξ . Se M já tem uma orientação pré-fixada, dizemos que ξ é uma *estrutura de contato positiva* ou *negativa* conforme esta orientação coincide ou não com a orientação induzida por ξ em M . Neste trabalho vamos lidar com variedades de contato de dimensão 3, ou seja, $n = 2$, e sempre consideraremos a orientação induzida pela estrutura de contato sobre a variedade.

A condição de λ ser uma forma de contato em M é equivalente a dizer que

$$d\lambda|_{\ker \lambda} \text{ é não-degenerada.}$$

Sendo assim, a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ admite uma estrutura de fibrado vetorial simplético sobre M , no sentido de que cada fibra $(\xi_x, d\lambda_x|_{\xi_x})$ é um espaço vetorial simplético.

Vejamos um exemplo de estrutura de contato.

Exemplo 1.2.9. *Considere a variedade de contato (\mathbb{R}^3, λ) , onde λ é a forma de contato definida no Exemplo 1.2.5 para $n = 1$, isto é, $\lambda = xdy + dz$. A estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é dada, em cada ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pelo plano*

$$\xi_{(x,y,z)} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / xv + w = 0\} = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, -x)\},$$

cujo vetor normal $(0, x, 1)$ depende apenas da coordenada x . Veja Figura 1.2, obtida em [17].

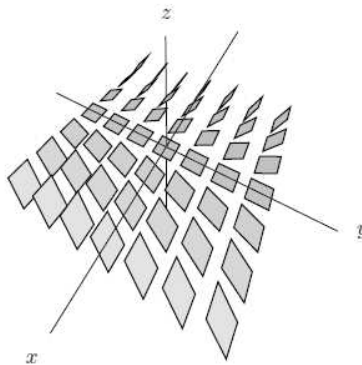


Figura 1.2: Estrutura de contato $\xi = \ker(xdy + dz)$ em \mathbb{R}^3 .

Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato de dimensão $2n - 1$. O fato de $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ nunca se anular nos garante que $\ker d\lambda \subset TM$ é um fibrado de linhas transversal à estrutura de contato ξ . Veja Figura 1.3. Assim, podemos definir:

Definição 1.2.10. *O campo de Reeb associado à forma de contato λ em M é o campo de vetores X_λ unicamente determinado pelas seguintes equações*

$$\begin{cases} i_{X_\lambda} d\lambda \equiv 0 \\ i_{X_\lambda} \lambda \equiv 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Note que as equações em (1.9) dizem simplesmente que o campo de Reeb X_λ é uma seção do fibrado de linhas $\ker d\lambda$ que satisfaz a condição de normalização $\lambda_x(X_\lambda(x)) = 1$ para cada $x \in M$.

É usual decompor o espaço tangente de M como soma direta da estrutura de contato ξ com a direção do campo de Reeb X_λ , isto é,

$$T_x M = \xi_x \oplus \mathbb{R}X_\lambda(x) \quad \forall x \in M.$$

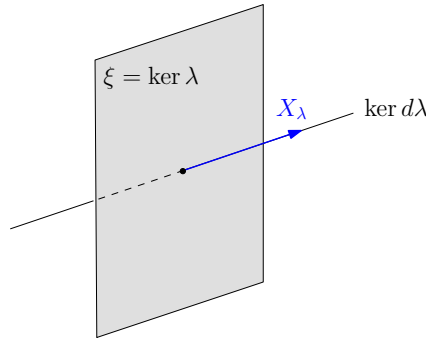


Figura 1.3: Representação da estrutura de contato ξ e do campo de Reeb X_λ .

Sendo assim, ao considerarmos a projeção $\pi : TM \rightarrow \xi$ ao longo do campo de Reeb X_λ , podemos escrever cada vetor tangente à M como

$$v = \pi_x(v) + \lambda_x(v)X_\lambda(x) \quad \forall v \in T_xM.$$

Um campo de Reeb X_λ em uma variedade de contato (M, λ) gera um fluxo $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ sobre M , conhecido como *fluxo de Reeb*, que vem da seguinte equação

$$\dot{x}(t) = X_\lambda(x(t)).$$

Vamos sempre assumir que o fluxo de Reeb é completo.

Assim como o fluxo Hamiltoniano em uma variedade simplética (W, ω) preserva a forma simplética ω , o fluxo de Reeb em uma variedade de contato (M, λ) possui a propriedade de preservar a forma de contato λ , pois

$$\mathcal{L}_{X_\lambda} \lambda = di_{X_\lambda} \lambda + i_{X_\lambda} d\lambda = 0.$$

Conseqüentemente, a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ também é preservada pelo fluxo de Reeb, isto é, $\varphi_t^* \xi = \xi \forall t$. Além disso, assim como o fluxo Hamiltoniano, o fluxo de Reeb também preserva volume, já que a forma de volume $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ na variedade de contato M^{2n-1} é invariante pelo fluxo de Reeb.

Apresentamos a seguir dois exemplos de campos de Reeb, um deles definido no espaço Euclidiano e o outro na esfera.

Exemplo 1.2.11. Seja \mathbb{R}^{2n-1} com coordenadas $(x, y, z) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ munido da forma de contato λ definida no Exemplo 1.2.5.

O campo de Reeb

$$X_\lambda(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i(x, y, z) \partial_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x, y, z) \partial_{y_i} + c(x, y, z) \partial_z$$

associado à λ deve satisfazer $i_{X_\lambda}d\lambda = 0$, donde segue que

$$0 = i_{X_\lambda} \left(\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i dy_i - b_i dx_i$$

e, portanto, $a_i = b_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Além disso, X_λ satisfaz $i_{X_\lambda}\lambda = 1$, logo

$$1 = \lambda(X_\lambda) = dz(c\partial_z) = c.$$

Concluimos assim que o campo de Reeb X_λ associado à forma de contato λ em \mathbb{R}^{2n-1} é o campo constante dado por

$$X_\lambda = \partial_z.$$

Veja Figura 1.4.

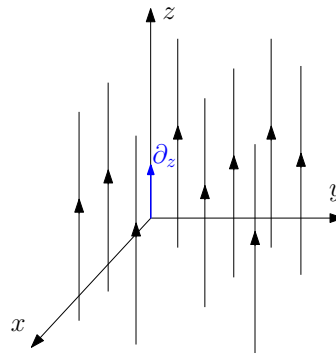


Figura 1.4: Fluxo de Reeb associado à $\lambda = xdy + dz$ em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1.2.12. Considere a esfera $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ munida da forma de contato

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - q_i dp_i.$$

O campo de Reeb

$$X_{\lambda_0} = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{q_i} + b_i \partial_{p_i}$$

satisfaz $0 = i_{X_{\lambda_0}}d\lambda_0 = \sum_{i=1}^n b_i dq_i - a_i dp_i$. Logo, para todo $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in S^{2n-1}$ e $(u, v) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \in T_{(q,p)}S^{2n-1}$ temos que

$$\sum_{i=1}^n q_i u_i + p_i v_i = 0 \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^n b_i u_i - a_i v_i = 0 \tag{1.11}$$

Dado $(q, p) \in S^{2n-1}$, temos que algum q_i ou algum p_i , $i = 1, \dots, n$, deve ser não-nulo.

Suponha, sem perda de generalidade, que $p_1 \neq 0$. Então de (1.10) obtemos

$$v_1 = -\frac{1}{p_1} \left(\sum_{i=1}^n q_i u_i + \sum_{i=2}^n p_i v_i \right). \quad (1.12)$$

Substituindo (1.12) em (1.11) e reagrupando os termos, ficamos com

$$\sum_{i=1}^n \left(b_i + \frac{a_1}{p_1} q_i \right) u_i + \sum_{i=2}^n \left(-a_i + \frac{a_1}{p_1} p_i \right) v_i = 0, \quad \forall (u, v) \in T_{(q,p)} S^{2n-1},$$

donde segue que

$$a_i = \frac{a_1}{p_1} p_i \quad e \quad b_i = -\frac{a_1}{p_1} q_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Temos ainda que o campo de Reeb X_{λ_0} satisfaz $1 = i_{X_{\lambda_0}} \lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i a_i - q_i b_i$. Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{a_1}{p_1} p_i \right) + q_i \left(\frac{a_1}{p_1} q_i \right) = 2$$

e, portanto, obtemos $a_1 = 2p_1$, visto que $(q, p) \in S^{2n-1}$.

Com isso concluímos que o campo de Reeb X_{λ_0} associado à forma de contato λ_0 na esfera S^{2n-1} é dado por

$$X_{\lambda_0} = 2 \sum_{i=1}^n p_i \partial_{q_i} - q_i \partial_{p_i},$$

ou seja,

$$X_{\lambda_0}(q, p) = 2(p, -q), \quad \forall (q, p) \in S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Veja Figura 1.5.

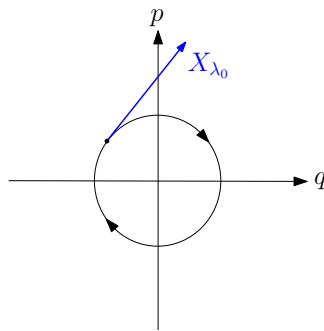


Figura 1.5: Fluxo de Reeb associado à $\lambda_0 = \frac{1}{2}(pdq - qdp)$ em S^1 .

Observe que o campo de Reeb X_{λ_0} em $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, obtido no Exemplo 1.2.12, é um múltiplo do campo Hamiltoniano X_H restrito à $S^1 = H^{-1}(\frac{1}{2})$, com X_H sendo o campo associado à função Hamiltoniana $H(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ definida em \mathbb{R}^2 como no Exemplo 1.1.9. Veremos agora que este fato não se trata de uma simples coincidência. De fato, sempre que um nível de energia regular $H^{-1}(c)$ de uma função Hamiltoniana H é uma hipersuperfície de contato

da variedade simplética em questão, é possível reduzir o estudo do sistema Hamiltoniano em $H^{-1}(c)$ à análise do fluxo de Reeb neste nível de energia.

Seja (W, ω, H) um sistema Hamiltoniano e suponha que S , contido num nível de energia regular $H^{-1}(c)$, seja uma hipersuperfície de contato de (W, ω) . Neste caso, pela Proposição 1.2.6, o par $(S, \lambda = (i_Y \omega)|_S)$ é uma variedade de contato, onde Y é um campo de Liouville transversal à S , e λ é uma forma de contato que satisfaz $d\lambda = \omega|_S$.

Sendo assim, temos definidos sobre S dois campos de vetores: o campo Hamiltoniano X_H restrito à S e o campo de Reeb X_λ associado à forma de contato λ . O campo Hamiltoniano X_H satisfaz a equação $i_{X_H} \omega = -dH$ e, como $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de H , obtemos

$$\omega_x(X_H(x), v) = (i_{X_H} \omega)_x(v) = -d_x H(v) = 0$$

para quaisquer $x \in S$ e $v \in T_x S$. Disto segue que $X_H|_S$ é uma seção do fibrado de linhas $\ker(\omega|_S) = \ker d\lambda$. Por outro lado, o campo de Reeb X_λ satisfaz $i_{X_\lambda} d\lambda = 0$ por definição, logo X_λ também é uma seção do fibrado de linhas $\ker d\lambda$.

Concluimos então que os campos $X_H|_S$ e X_λ diferem apenas por um fator multiplicativo não-nulo e, sendo assim, suas órbitas são as mesmas a menos da velocidade com que são percorridas. Em outras palavras, o fluxo Hamiltoniano restrito a uma hipersuperfície de contato $S \subset H^{-1}(c)$, com c valor regular de H , coincide com o fluxo de Reeb em S a menos de uma reparametrização no tempo.

Vimos no Exemplo 1.2.2 que o campo radial em $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n); q_i, p_i \in \mathbb{R}\}$ definido por

$$Y(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \partial_{q_i} + p_i \partial_{p_i}$$

é um campo de Liouville, pois $\mathcal{L}_Y \omega_0 = \omega_0$, onde ω_0 é a forma simplética canônica de \mathbb{R}^{2n} . Então, como a esfera $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ é transversal ao campo radial, pudemos concluir que $(S^{2n-1}, \lambda_0|_{S^{2n-1}})$ é uma hipersuperfície de contato de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, com

$$\lambda_0 = i_Y \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - q_i dp_i. \tag{1.13}$$

Porém, S^{2n-1} não é a única hipersuperfície de \mathbb{R}^{2n} que é transversal ao campo radial. Existem muitas outras hipersuperfícies de \mathbb{R}^{2n} com esta propriedade como, por exemplo, os conjuntos estrelados que apresentamos a seguir.

Definição 1.2.13. Dizemos que uma hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ difeomorfa à S^{2n-1} é estrelada (ou star-shaped) em relação ao ponto $x \in \mathbb{R}^{2n} \setminus S$ se toda semi-reta partindo de x intersecta S em um único ponto e essa interseção é transversal. Veja Figura 1.6.

Sendo assim, todo conjunto estrelado S em relação a um ponto $x = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ é uma hipersuperfície de contato de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ e a 1-forma

$$\lambda_0 = i_Y \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i - b_i) dq_i - (q_i - a_i) dp_i,$$

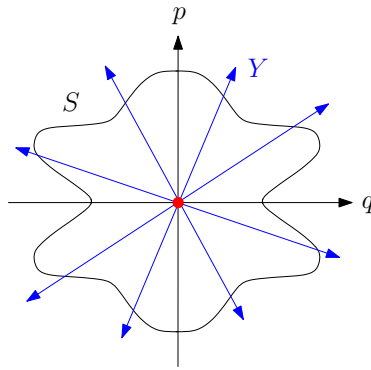


Figura 1.6: Conjunto estrelado em relação à origem em \mathbb{R}^2 .

restringe-se em S a uma forma de contato, chamada de *forma de contato padrão*, onde o campo de Liouville Y é dado pelo campo radial centrado no ponto x :

$$Y(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (q_i - a_i) \partial_{q_i} + (p_i - b_i) \partial_{p_i}.$$

Portanto, pelo que acabamos de comentar, se $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Hamiltoniana que tem um conjunto estrelado S como nível de energia regular, então para entender o comportamento das órbitas do fluxo Hamiltoniano de H restrito à S basta analisar a dinâmica do fluxo de Reeb em S gerado pela forma de contato padrão $\lambda_0|_S$.

Mais que isso, veremos no resultado a seguir que o fluxo de Reeb em um conjunto estrelado S associado ao campo de Reeb $X_{\lambda_0|_S}$ é conjugado a um fluxo de Reeb sobre a esfera S^{2n-1} gerado por uma forma de contato λ que é múltipla da forma padrão $\lambda_0|_{S^{2n-1}}$. Este múltiplo vai depender da “proximidade” da esfera S^{2n-1} com o conjunto estrelado S .

Seja S uma hipersuperfície estrelada em relação a um ponto $p \in \mathbb{R}^{2n}$, que suporemos sem perda de generalidade ser a origem. Pela Definição 1.2.13, para cada $x \in \mathbb{R}^{2n-1} \setminus \{0\}$ é possível associar um único valor real $h(x) > 0$ de modo que $h(x)x \in S$. Sendo assim, podemos definir o seguinte difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : S^{2n-1} &\rightarrow S \\ x &\mapsto h(x)x \end{aligned} \tag{1.14}$$

Veja Figura 1.7 abaixo.

Proposição 1.2.14. *Sejam $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana e S uma hipersuperfície estrelada de \mathbb{R}^{2n} contida em um nível de energia regular de H . Então o fluxo Hamiltoniano de H restrito à S é equivalente ao fluxo do campo de Reeb X_λ em S^{2n-1} associado à forma de contato $\lambda = (h^2\lambda_0)|_{S^{2n-1}}$, onde λ_0 é a forma de contato padrão dada por (1.13) e h é como acabamos de definir.*

Demonstração. Observe primeiramente que $h^2\lambda_0$ restringe-se de fato a uma forma de contato em S^{2n-1} , pois sabemos que $\lambda_0|_{S^{2n-1}}$ é uma forma de contato, h nunca se anula e

$$h^2\lambda_0 \wedge (d(h^2\lambda_0))^{n-1} = h^{2n} (\lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^{n-1}).$$

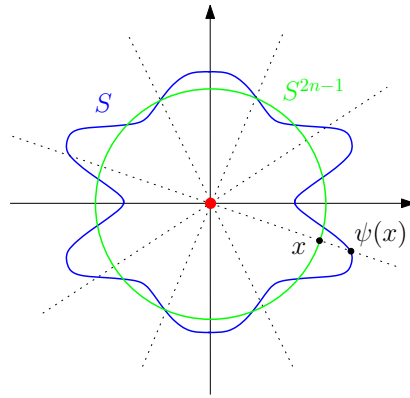


Figura 1.7: Representação da aplicação ψ definida em (1.14).

Como $\lambda_0 = i_Y \omega_0$, onde ω_0 é a forma simplética canônica e Y o campo radial de \mathbb{R}^{2n} , obtemos que

$$\lambda_0(x) \cdot v = i_Y \omega_0(x) \cdot v = \omega_0(Y(x), v) = \frac{1}{2} \omega_0(x, v) \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Com isso, temos para todo $x \in S^{2n-1}$ e $v \in T_x S^{2n-1}$

$$\begin{aligned} (\psi^* \lambda_0)(x) \cdot v &= \lambda_0(\psi(x)) \cdot d\psi_x(v) = \frac{1}{2} \omega_0(\psi(x), d\psi_x(v)) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0(h(x)x, dh_x(v)x + h(x)v) = \frac{1}{2} h(x)^2 \omega_0(x, v) = h(x)^2 \lambda_0(x) \cdot v = \lambda(x) \cdot v. \end{aligned}$$

Sendo assim, $\psi^*(\lambda_0|_S) = \lambda$ e, conseqüentemente, o campo $\psi^*(X_{\lambda_0|_S})$ satisfaz as equações

$$\begin{aligned} i_{\psi^*(X_{\lambda_0|_S})} d\lambda &\equiv 0 \\ i_{\psi^*(X_{\lambda_0|_S})} \lambda &\equiv 1 \end{aligned}$$

que definem o campo de Reeb X_λ em S^{2n-1} . Da unicidade, segue que

$$\psi^*(X_{\lambda_0|_S}) = X_\lambda,$$

ou seja, $X_{\lambda_0|_S}$ e X_λ são campos de vetores conjugados.

Mas já sabemos que o fluxo Hamiltoniano de H restrito à S é equivalente ao fluxo de Reeb gerado por $X_{\lambda_0|_S}$ em S , visto que S é uma hipersuperfície de contato transversal ao campo radial Y de \mathbb{R}^{2n} . Portanto, o campo Hamiltoniano $X_H|_S$ em S é equivalente ao campo de Reeb X_λ em S^{2n-1} , como queríamos. \square

A demonstração deste resultado segue as linhas de [41, Proposição 1.11].

As formas de contato na esfera S^3 do tipo $f\lambda_0|_{S^3}$, para alguma função suave $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, são amplamente estudadas em dinâmica de Reeb. Estas 1-formas geram uma estrutura de contato ξ_0 em S^3 , chamada de *estrutura de contato padrão*, que, a menos de isotopia, é a única estrutura de contato *tight* em S^3 , segundo o Teorema de Classificação de Eliashberg [13, Teorema 2.1.1]. Lembre-se que estamos considerando apenas estruturas de

contato positivas * em S^3 . Para que o enunciado deste teorema de classificação fique mais claro, precisamos discutir alguns conceitos.

De modo geral, dizemos que uma estrutura de contato ξ numa variedade de contato M de dimensão 3 é *tight* se ξ não admite um *disco overtwisted*, isto é, um disco mergulhado $D \subset M$ tal que ∂D é uma curva Legendriana de (M, ξ) (ou seja, $T(\partial D) \subset \xi$) e $T_z D \neq \xi_z$ para qualquer $z \in \partial D$. Veja Figura 1.8. No caso em que ξ admite um tal disco, ξ recebe o nome de *estrutura de contato overtwisted*. Se λ é uma forma de contato que define uma estrutura de contato ξ *tight* (ou *overtwisted*), então λ também é chamada de *tight* (ou *overtwisted*).

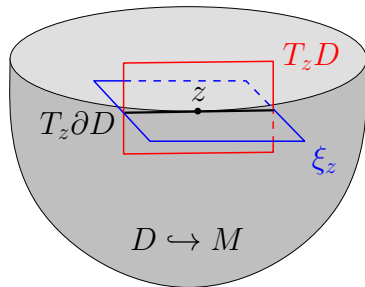


Figura 1.8: Disco *overtwisted* D em uma variedade de contato (M^3, ξ) .

Em [9], Bennequin mostra que a estrutura de contato em \mathbb{R}^3 definida pela forma de contato $\lambda = xdy + dz$ é *tight*, veja também [2, 41]. Mas, dado $p \in S^3$, existe um difeomorfismo $\varphi : S^3 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi^* \lambda = \lambda_0|_{S^3}$, onde λ_0 é a forma de contato padrão em S^3 dada por (1.13) para $n = 2$. Portanto, a estrutura de contato padrão $\xi_0 = \ker \lambda_0|_{S^3}$ na esfera 3-dimensional também é *tight*.

Agora vamos relembrar o que significa duas estruturas de contato serem isotópicas.

Definição 1.2.15. *Sejam (M, ξ_0) e (M, ξ_1) variedades de contato, M fechada de dimensão 3. As estruturas de contato ξ_0 e ξ_1 são isotópicas se existe uma família suave de difeomorfismos $\varphi_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, tal que $\varphi_0 = Id$, $\xi_t = (\varphi_t)_* \xi_0$ é uma estrutura de contato em M para todo $t \in [0, 1]$ e $(\varphi_1)_* \xi_0 = \xi_1$.*

Podemos concluir do Teorema de Classificação de Eliashberg que, a menos de um difeomorfismo, uma forma de contato em S^3 é *tight* se, e somente se, é da forma $f \lambda_0|_{S^3}$ para alguma função suave $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com λ_0 sendo a forma de contato padrão.

A principal fonte de exemplos de estruturas de contato *tight* são as estruturas de variedades de contato preenchíveis (ou *fillable*).

Definição 1.2.16. *Uma variedade de contato (M, ξ) de dimensão 3 é chamada (simplecticamente) preenchível se existe uma variedade simplética (W, ω) , com bordo $\partial W = M$, tal que:*

- $\omega|_{\xi} \neq 0$, ou seja, para todo $x \in M$ a aplicação restrita $\omega_x : \xi_x \times \xi_x \rightarrow \mathbb{R}$ é não-nula;
- a orientação de M induzida pela estrutura de contato ξ coincide com a orientação de M como bordo da variedade simplética (W, ω) .

*o caso negativo é tratado analogamente

Eliashberg mostra em [14] que a única estrutura de contato que faz de S^3 uma variedade de contato preenchível é a própria estrutura padrão $\xi_0 = \ker \lambda_0|_{S^3}$, que já sabemos ser a única estrutura de contato *tight* em S^3 .

Ainda não se sabe se as noções de preenchibilidade (*fillableness*) e *tightness* são equivalentes. Todavia, devido a Eliashberg [15, Teorema 3.2.1] e a Gromov [20, 2.4.D'_2.b], já sabemos que

Teorema 1.2.17. *Se (M^3, ξ) é uma variedade de contato preenchível, então ξ é *tight*.*

Seja M^3 uma hipersuperfície de contato da variedade simplética canônica (\mathbb{R}^4, ω_0) difeomorfa à esfera S^3 e considere Y um campo de Liouville definido numa vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^4$ de M que é transversal à M . Afirmamos que a estrutura de contato ξ definida pela forma de contato $\lambda = (i_Y \omega_0)|_M$ é *tight*. De fato, como λ é uma primitiva de $\omega_0|_M$ e ξ é um fibrado vetorial simplético sobre M , a restrição $\omega_0|_\xi = d\lambda|_\xi$ é não-degenerada e, portanto, nunca se anula. Sendo assim, com uma escolha conveniente de orientação, (M, ξ) é uma variedade de contato preenchível e, conseqüentemente, ξ é *tight* pelo Teorema 1.2.17.

1.3 Dinâmica próxima a uma órbita periódica

A existência de órbitas periódicas é uma questão frequentemente abordada em dinâmica Hamiltoniana e pode ser encontrada em abundância na literatura. Além da conjectura de Weinstein que, como comentamos, afirma que toda variedade de contato compacta possui pelo menos uma órbita periódica do fluxo de Reeb, temos uma conjectura devida a Hofer, Wysocki e Zehnder [27, Conjectura 1.13] que diz que qualquer fluxo de Reeb associado a uma forma de contato *tight* na esfera S^3 tem precisamente duas ou infinitas órbitas periódicas geometricamente distintas. Esta última conjectura foi provada para um conjunto denso de formas de contato *tight* em [27]. Além destas, muitas outras referências que tratam de órbitas periódicas poderiam ser citadas, desde os trabalhos de Poincaré e Birkhoff até os tempos atuais.

Nesta seção, vamos definir alguns conceitos relacionados às órbitas periódicas de um fluxo de Reeb. Entre eles, destacamos o número de auto-enlaçamento, um invariante topológico de nós transversais à estrutura de contato, e o índice de Conley-Zehnder, um invariante dinâmico que descreve o comportamento de órbitas próximas a uma dada solução periódica do fluxo de Reeb.

Seja $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de Reeb associado ao campo de Reeb X_λ sobre uma variedade de contato (M, λ) . Uma *órbita periódica do fluxo de Reeb* é uma solução $w(t) = \varphi_t(w(0))$ da equação $\dot{w} = X_\lambda(w)$ que, para algum $T \in \mathbb{R}^*$, satisfaz $w(t + T) = w(t) \forall t \in \mathbb{R}$. Representamos uma órbita periódica como um par $P = (w, T)$ e o número T , que assumiremos sempre ser positivo, recebe o nome de *período da órbita periódica* P . Note que o período T coincide com a *ação* de P que, por sua vez, é definida por

$$\mathcal{A}(P) := \int_P \lambda = \int_0^T w^* \lambda.$$

Dizemos que uma órbita periódica $P = (w, T)$ do fluxo de Reeb é *simples* se T é o menor período positivo de P . Se, além de ser simples, P pode ser vista como o bordo de um disco mergulhado $D \subset M$, então P é chamada de *não-nó* ou de *nó trivial*.

Vamos identificar duas órbitas periódicas $P = (w, T)$ e $Q = (x, R)$ do fluxo de Reeb quando seus períodos T e R coincidem e, para algum $c \in \mathbb{R}$, $w(t) = x(t + c) \forall t \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{P}(\lambda)$ o conjunto das órbitas periódicas do campo de Reeb X_λ módulo esta identificação.

Vimos na seção anterior que o fluxo de Reeb φ_t tem a propriedade de preservar a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$, isto é, $\varphi_t^* \xi = \xi \forall t$. Em particular, se $P = (w, T)$ é uma órbita periódica do fluxo de Reeb, então

$$d\varphi_T(w(0))(\xi_{w(0)}) = \xi_{\varphi_T(w(0))} = \xi_{w(T)} = \xi_{w(0)}.$$

Assim, uma órbita periódica $P = (w, T)$ é dita *não-degenerada* se a aplicação linear restrita

$$d\varphi_T(w(0)) : \xi_{w(0)} \rightarrow \xi_{w(0)}$$

não admite 1 como autovalor. Caso contrário dizemos que P é *degenerada*. A forma de contato λ é dita não-degenerada se qualquer órbita periódica do campo de Reeb X_λ é não-degenerada.

De agora em diante, vamos supor que (M, λ) é uma variedade de contato de dimensão 3.

Neste caso, Hofer, Wysocki e Zehnder mostraram que a forma de contato λ em M pode sempre ser aproximada por formas de contato não-degeneradas em M . Este fato segue como consequência da seguinte proposição.

Proposição 1.3.1 ([33], Proposição 6.1). *Seja (M, λ) uma variedade de contato fechada de dimensão 3. O conjunto \mathcal{O}_λ formado pelas funções suaves $f : M \rightarrow (0, \infty)$ tais que $f\lambda$ é uma forma de contato não-degenerada em M é denso em $C^\infty(M, (0, \infty))$ na topologia C^∞ .*

Seja P uma órbita periódica do fluxo de Reeb associado à X_λ . O próximo resultado nos diz que é possível introduzir novas coordenadas numa vizinhança tubular de P de modo que P possa ser vista dentro de $S^1 \times \mathbb{R}^2$ como $S^1 \times \{0\}$ e a forma de contato λ passa a ser um múltiplo positivo da forma de contato $x dy + d\vartheta$ nas novas coordenadas $(\vartheta, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$. É usual considerar o recobrimento \mathbb{R} de S^1 e trabalhar com coordenadas $(\vartheta, x, y) \in \mathbb{R}^3, \vartheta \text{ mod } 1$.

Lema 1.3.2 ([28], Lema 2.3). *Sejam (M, λ) uma variedade de contato de dimensão 3, $P = (w, T)$ uma órbita periódica do fluxo de Reeb e τ o menor período de P . Então existem vizinhanças $\mathcal{U} \subset M$ e $\mathcal{V} \subset S^1 \times \mathbb{R}^2$ de P e de $S^1 \times \{0\}$ respectivamente e existe um difeomorfismo $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de modo que:*

- $\Phi(w_\tau(t)) = (t, 0, 0) \in S^1 \times \{0\}$, onde $w_\tau : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow M$ é dada por $w_\tau(t) = w(\tau t)$;
- existe uma função suave $g : \mathcal{V} \rightarrow (0, +\infty)$ tal que

$$\lambda = \Phi^*(g \cdot (x dy + d\vartheta)), \quad \vartheta \in S^1, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

e, além disso, $g(\vartheta, 0, 0) = \tau$ e $dg(\vartheta, 0, 0) = 0$ para todo $\vartheta \in S^1$.

As coordenadas (ϑ, x, y) obtidas no Lema 1.3.2 são conhecidas como *coordenadas de Martinet* e a vizinhança \mathcal{U} da órbita periódica P , ou até mesmo o difeomorfismo $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, é chamado de *tubo de Martinet*. Note que nas coordenadas de Martinet, a estrutura de contato ξ é a distribuição de planos gerada pelos campos vetoriais ∂_x e $\partial_y - x\partial_\vartheta$.

1.3.1 Número de auto-enlaçamento

Suponha que $(M, \xi = \ker \lambda)$ seja uma variedade de contato fechada de dimensão 3 com segundo grupo de homologia $H_2(M)$ trivial. Lembre-se que estamos considerando em M a orientação induzida pela estrutura de contato ξ .

Seja $\gamma : S^1 \rightarrow M$ um nó transversal à estrutura de contato ξ , isto é, γ é um mergulho tal que $\gamma'(t) \notin \xi_{\gamma(t)} \forall t$. Suponha também que γ é um nó orientado e homologicamente trivial em M , ou seja, $[\gamma] = 0 \in H_1(M)$. Nestas condições, existe uma *superfície de Seifert* Σ para γ que, por definição, é uma superfície mergulhada em M , compacta, conexa e orientada satisfazendo $\partial\Sigma = \gamma(S^1)$ (como variedades orientadas). Este resultado independe do fato de γ ser transversal à estrutura de contato e sua demonstração pode ser encontrada em [17, Proposição 3.48].

Outro fato topológico importante é que Σ , por ser uma superfície compacta com uma componente de bordo, tem como retrato de deformação um buquê de $2g$ cópias de S^1 , no caso em que o genus g de Σ é diferente de zero. E como o único 2-fibrado orientável sobre S^1 é o fibrado trivial $S^1 \times \mathbb{R}^2$, concluímos que $\xi|_\Sigma$ é um fibrado trivial sobre Σ . Se $g = 0$, então Σ é um disco mergulhado e, neste caso, também é possível encontrar uma trivialização de $\xi|_\Sigma$. Confira referência [17].

Podemos então considerar $X : \Sigma \rightarrow \xi|_\Sigma$ uma seção não-nula. Deslocando o nó γ na direção de $X|_{\partial\Sigma=\gamma(S^1)}$, obtemos um novo nó $\bar{\gamma}$ disjunto de γ que, a menos de uma pequena perturbação, pode ser assumido transversal à superfície de Seifert Σ . A orientação em γ induz uma orientação em $\bar{\gamma}$. Veja Figura 1.9.

O *número de enlaçamento (linking number)* entre os nós γ e $\bar{\gamma}$, denotado por $\gamma \bullet \bar{\gamma}$, é definido como o número de interseção orientada entre $\bar{\gamma}$ e a superfície de Seifert Σ para γ . Mais especificamente, para cada ponto de interseção $x = \bar{\gamma}(t) \in \bar{\gamma}(S^1) \cap \Sigma$, associamos um sinal $\text{sgn}(x) \in \{-1, +1\}$ do seguinte modo: para qualquer base positiva $\{v_1, v_2\}$ de $T_x\Sigma$, se $\{\bar{\gamma}'(t), v_1, v_2\}$ é uma base positiva de T_xM então $\text{sgn}(x) = +1$ e se $\{\bar{\gamma}'(t), v_1, v_2\}$ é uma base negativa de T_xM então $\text{sgn}(x) = -1$. O número de enlaçamento $\gamma \bullet \bar{\gamma}$ realiza a contagem das interseções entre $\bar{\gamma}$ e Σ considerando seus sinais, isto é,

$$\gamma \bullet \bar{\gamma} := \sum_{x \in \bar{\gamma}(S^1) \cap \Sigma} \text{sgn}(x).$$

Assim podemos definir o número de auto-enlaçamento de γ .

Definição 1.3.3. O número de auto-enlaçamento (*self-linking number*) do nó transversal γ

é dado por

$$sl(\gamma) := \gamma \bullet \bar{\gamma},$$

onde $\bar{\gamma}$ é o nó obtido pelo deslocamento de γ na direção de uma seção não-nula $X|_{\gamma(S^1)}$ da estrutura de contato ξ , como acabamos de definir.

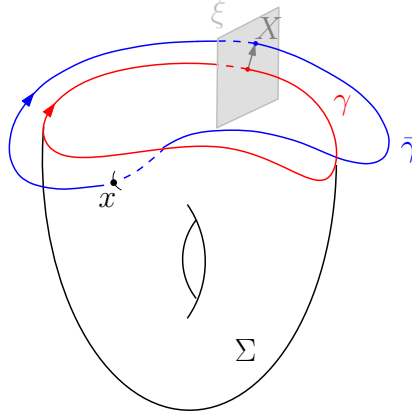


Figura 1.9: Construção do número de auto-enlaçamento de um nó transversal γ

O número de auto-enlaçamento $sl(\gamma)$ independe da escolha da seção não-nula $X : \Sigma \rightarrow \xi|_{\Sigma}$ e é invariante por isotopias de nós transversais. Além disso, como estamos supondo $H_2(M) = 0$, $sl(\gamma)$ independe também da superfície de Seifert escolhida para γ . Essas afirmações estão demonstradas em [17].

Seja $P = (w, T)$ uma órbita periódica não-nó do fluxo de Reeb sobre uma variedade de contato fechada (M, ξ) de dimensão 3 cujo $H_2(M)$ é trivial. Considerando a identificação $S^1 \sim \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, seja $w_T : S^1 \rightarrow M$ dado por $w_T(t) = w(Tt)$. Definimos o *número de auto-enlaçamento de P* , denotado por $sl(P)$, como sendo o número de auto-enlaçamento do nó w_T , orientado pelo fluxo de Reeb, que é transversal à ξ .

Observe que se M é uma variedade de contato difeomorfa à esfera S^3 , então o número de auto-enlaçamento está bem definido para qualquer órbita periódica do fluxo de Reeb, visto que neste caso M é fechada, $H_2(M) = 0$ e toda órbita fechada é homologicamente trivial.

1.3.2 Índice de Conley-Zehnder

Existem diversos modos equivalentes de definir o índice de Conley-Zehnder de uma órbita periódica do fluxo de Reeb. Vamos apresentar aqui duas formas: a primeira, um pouco mais abstrata, que caracteriza o índice a partir do espectro de um determinado operador auto-adjunto e a segunda, mais geométrica, que analisa o comportamento do fluxo linearizado ao longo da órbita periódica.

De um modo geral e intuitivo, o índice de Conley-Zehnder de uma solução periódica P nos diz o quanto órbitas próximas a P giram em torno de P , com relação a um referencial.

Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato compacta de dimensão 3 com segundo grupo fundamental $\pi_2(M)$ trivial e seja $P = (w, T)$ uma órbita periódica contrátil do fluxo de Reeb φ_t associado ao campo de Reeb X_λ .

Considere então uma aplicação v do disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$ em M satisfazendo $v(e^{2\pi it}) = w(Tt) \forall t \in [0, 1]$. O fibrado simplético $(v^*\xi, v^*(d\lambda|_\xi))$ sobre \mathbb{D} é trivial, ou seja, existe um isomorfismo de fibrados

$$\Psi : v^*\xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{R}^2 \quad (1.15)$$

tal que, para cada $z \in \mathbb{D}$, $\Psi(z) : \xi_{v(z)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um simplectomorfismo.

Construímos um caminho de aplicações simpléticas $\{\Phi(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{t \in [0, T]}$ do seguinte modo:

$$\Phi(t) := \Psi \left(e^{2\pi i \frac{t}{T}} \right) \circ d\varphi_t(w(0))|_{\xi|_{w(0)}} \circ \Psi(1)^{-1}. \quad (1.16)$$

Note que este caminho é dado essencialmente pelo fluxo linearizado $d\varphi_t$ ao longo da órbita periódica P restrito à estrutura de contato ξ e, além disso,

$$\Phi(0) = \Psi(1) \circ d\varphi_0(w(0))|_{\xi|_{w(0)}} \circ \Psi(1)^{-1} = \Psi(1) \circ \Psi(1)^{-1} = \text{Id}. \quad (1.17)$$

Sendo simplética, a aplicação $\Phi(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser representada por uma matriz de ordem 2, denotada novamente por $\Phi(t)$, que satisfaz

$$\Phi(t)^T J_0 \Phi(t) = J_0, \quad (1.18)$$

onde $\Phi(t)^T$ é a transposta da matriz $\Phi(t)$ e

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A um caminho de matrizes simpléticas $\{\Phi(t)\}_{t \in [0, T]}$, podemos sempre associar um arco de matrizes simétricas $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ da seguinte forma

$$S(t) := -J_0 \dot{\Phi}(t) \Phi(t)^{-1}. \quad (1.19)$$

A matriz $S(t)$ é de fato simétrica para cada $t \in [0, T]$, pois a partir de (1.18) obtemos

$$S(t)^T = (\Phi(t)^{-1})^T \dot{\Phi}(t)^T J_0 = (\Phi(t)^T)^{-1} J_0 \dot{\Phi}(t)^{-1} = J_0 \Phi(t) \dot{\Phi}(t)^{-1} = -J_0 \dot{\Phi}(t) \Phi(t)^{-1} = S(t).$$

Observe que, pelo modo como $S(t)$ foi definida em (1.19) e também por (1.17), o caminho $\Phi(t)$ pode ser visto como solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) &= J_0 S(t) \Phi(t) \\ \Phi(0) &= \text{Id} \end{cases} \quad (1.20)$$

Finalmente, ao arco de matrizes simétricas $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$, associamos um operador $A_P : L^2(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{R}^2)$ que, sobre o domínio $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^2)$, é dado por

$$A_P \cdot \eta(t) = -J_0 \dot{\eta}(t) - S(t) \eta(t)$$

Aqui consideramos a identificação $S^1 \sim \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. A aplicação A_P que acabamos de definir a partir de uma dada órbita periódica P do fluxo de Reeb é chamada de *operador assintótico*.

Cada autovetor $\eta \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^2)$ do operador assintótico A_P correspondente a um autovalor μ realiza uma equação diferencial dada por

$$-J_0\dot{\eta}(t) - S(t)\eta(t) = \mu\eta(t)$$

e, portanto, $\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz $\eta(t) \neq 0$ para todo $t \in S^1$. Sendo assim, podemos associar ao μ -autovetor η de A_P um *winding number* $\text{wind}(\mu, \eta) \in \mathbb{Z}$ definido por

$$\text{wind}(\mu, \eta) = a(T) - a(0),$$

onde $a(t)$ é um argumento contínuo da curva $\eta(t) \in \mathbb{R}^2$, isto é, $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz $\eta(t) = |\eta(t)|e^{2\pi a(t)i} \forall t$.

Vejam algumas propriedades do operador assintótico A_P e do *winding number* associado aos seus autovetores. O resultado a seguir foi demonstrado em [29, Seção 3].

Teorema 1.3.4. *O operador assintótico A_P é fechado, ilimitado e auto-adjunto. Seu espectro, denotado por $\sigma(A_P)$, é um conjunto discreto de \mathbb{R} que se acumula apenas em $\pm\infty$. Além disso,*

1. *O winding number $\text{wind}(\mu, \eta)$ independe do autovetor η associado à $\mu \in \sigma(A_P)$ e, por esta razão, vamos denotá-lo simplesmente por $\text{wind}(\mu)$.*
2. *Para todo $k \in \mathbb{Z}$, existem exatamente dois autovalores $\tau, \mu \in \sigma(A_P)$ (contando com multiplicidades) de modo que*

$$\text{wind}(\tau) = k = \text{wind}(\mu).$$

3. *A aplicação sobrejetora que associa cada $\mu \in \sigma(A_P)$ ao winding number $\text{wind}(\mu) \in \mathbb{Z}$ é crescente, ou seja,*

$$\tau \leq \mu \Rightarrow \text{wind}(\tau) \leq \text{wind}(\mu) \quad \forall \tau, \mu \in \sigma(A_P).$$

4. *Se η e ϑ são autovetores de A_P respectivamente associados à autovalores τ e μ tais que*

$$\tau \neq \mu \quad e \quad \text{wind}(\tau) = \text{wind}(\mu),$$

então η e ϑ são ponto a ponto linearmente independentes.

5. *A órbita periódica P é não-degenerada se, e somente se, $0 \notin \sigma(A_P)$.*

Denote por $\text{wind}^{<0}(A_P)$ o *winding number* assumido pelo maior autovalor negativo $\lambda^{<0}$ do operador assintótico A_P e, similarmente, denote por $\text{wind}^{\geq 0}(A_P)$ o *winding number* associado

ao menor autovalor não-negativo $\lambda^{\geq 0}$ de A_P . Em outras palavras, visto que a função $\mu \mapsto \text{wind}(\mu)$ é crescente, definimos

$$\begin{aligned} \text{wind}^{<0}(A_P) &:= \max\{\text{wind}(\mu), \mu \in \sigma(A_P) \cap (-\infty, 0)\}, \\ \text{wind}^{\geq 0}(A_P) &:= \min\{\text{wind}(\mu), \mu \in \sigma(A_P) \cap [0, +\infty)\}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Sabemos que existem precisamente dois autovalores de A_P (contando multiplicidades) com *winding number* coincidindo com o valor $\text{wind}^{<0}(A_P) \in \mathbb{Z}$. Um deles é negativo, dado exatamente por $\lambda^{<0}$. O outro pode ser não-negativo, e neste caso coincide com $\lambda^{\geq 0}$, ou pode ser negativo. Definimos o número $p \in \{0, 1\}$ que basicamente nos diz qual é a situação deste outro autovalor:

$$p := \begin{cases} 0, & \text{se } \exists \mu \in \sigma(A_P) \cap [0, +\infty) \text{ tal que } \text{wind}(\mu) = \text{wind}^{<0}(A_P) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe que p pode ser visto, de modo mais simples, como a diferença

$$p := \text{wind}^{\geq 0}(A_P) - \text{wind}^{<0}(A_P).$$

Definição 1.3.5. *O índice de Conley-Zehnder da órbita periódica P é dado por*

$$\text{CZ}(P) = 2\text{wind}^{<0}(A_P) + p = \text{wind}^{\geq 0}(A_P) + \text{wind}^{<0}(A_P).$$

Este índice, definido em termos do operador assintótico A_P , é conhecido também como índice de Conley-Zehnder generalizado de P .

A exigência inicial de que o segundo grupo fundamental da variedade de contato M seja trivial nos permite afirmar que a definição do índice de Conley-Zehnder $\text{CZ}(P)$ independe da trivialização Ψ escolhida para a estrutura de contato e também independe da aplicação $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $v(\partial\mathbb{D}) = w([0, T])$. Observe que se M é uma variedade de contato difeomorfa à esfera S^3 , então $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, logo o índice de Conley-Zehnder está bem definido para qualquer órbita periódica do fluxo de Reeb.

A definição do índice de Conley-Zehnder generalizado, apesar de abstrata, é extremamente útil na análise do comportamento assintótico de curvas pseudo-holomorfas, como veremos posteriormente.

Agora vamos caracterizar o índice de Conley-Zehnder de um modo mais geométrico.

Considere novamente $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato compacta de dimensão 3 tal que $\pi_2(M) = 0$ e seja $P = (w, T)$ uma órbita periódica contrátil do fluxo de Reeb φ_t associado ao campo de Reeb X_λ .

Seja Ψ uma trivialização da estrutura de contato ξ ao longo de P que se estende a um disco cujo bordo é P , como em (1.15). Então defina o caminho de aplicações simpléticas $\{\Phi(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{t \in [0, T]}$ que, a menos da trivialização Ψ , é dado pelo fluxo linearizado restrito à ξ , exatamente como fizemos em (1.16).

Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, vamos observar como o arco de matrizes $\Phi(t)$ transforma o vetor

z conforme t varia no intervalo de tempo $[0, T]$, ou seja, vamos considerar o caminho de vetores em \mathbb{C} definido por

$$z(t) = \Phi(t)z.$$

Vimos anteriormente que o caminho de matrizes simpléticas $\Phi(t)$ satisfaz o problema de valor inicial (1.20). Sendo assim, $z(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = J_0 S(t) z(t) \\ z(0) = z \end{cases}$$

e, conseqüentemente, satisfaz $z(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$, já que $z = z(0) \neq 0$.

Seja $\rho(t)$ um argumento contínuo para $z(t)$, isto é, $\rho : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz $z(t) = |z(t)|e^{2\pi\rho(t)i} \forall t$. Estamos interessados na variação de argumento realizada por $z(t)$ quando t varia de 0 até o período T da órbita periódica P . Em outras palavras, nosso objetivo é analisar a variação angular sofrida pelos vetores da estrutura de contato ξ devido à ação do fluxo linearizado ao longo da órbita periódica P , usando para isso uma trivialização de ξ . Veja Figura 1.10.

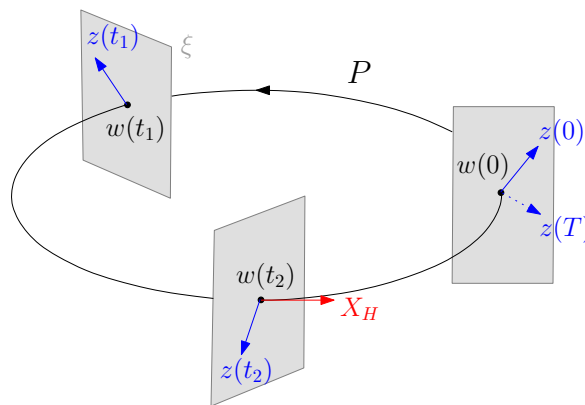


Figura 1.10: Fluxo linearizado ao longo de $P = (w, T)$ restrito à estrutura de contato ξ .

Com este propósito, definimos a função contínua dada pela variação de argumento

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta(z) &= \rho(T) - \rho(0) \end{aligned}$$

Note que se $u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são vetores linearmente dependentes, ou seja, $u = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então os caminhos $u(t) = \Phi(t)u$ e $v(t) = \Phi(t)v$ satisfazem

$$u(t) = \Phi(t)u = \Phi(t)\alpha v = \alpha\Phi(t)v = \alpha v(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Sendo assim, as variações de argumento de $u(t)$ e $v(t)$ no intervalo $[0, T]$, dadas respectivamente por $\Delta(u)$ e $\Delta(v)$, são as mesmas.

Podemos associar ao caminho de matrizes simpléticas $\{\Phi(t)\}_{t \in [0, T]}$ o seguinte conjunto

$$I^\Phi := \{\Delta(z); z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Como a variação Δ é a mesma para vetores linearmente dependentes de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, concluímos que

$$I^\Phi = \Delta(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \Delta(S^1)$$

e, portanto, I^Φ é um intervalo fechado da reta, por ser conexo e compacto.

Afirmamos que o comprimento deste intervalo é estritamente menor que $\frac{1}{2}$. Para provar esta afirmação, basta verificar que

$$\Delta(u) - \Delta(v) < \frac{1}{2} \quad \forall u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (1.22)$$

Sejam $\rho(t), \sigma(t)$ argumentos contínuos de $u(t) = \Phi(t)u$ e $v(t) = \Phi(t)v$ respectivamente, com $u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Considere os ângulos $\theta(t) = 2\pi\rho(t)$ e $\phi(t) = 2\pi\sigma(t)$ e a diferença entre eles dada por

$$\alpha(t) = \phi(t) - \theta(t), \quad t \in [0, T].$$

Uma vez que a variação Δ é igual para vetores linearmente dependentes, podemos assumir que $0 \leq \alpha(0) < \pi$.

Mostrar (1.22) é equivalente a provar a desigualdade $2\pi(\Delta(v) - \Delta(u)) < \pi$ que, por sua vez, ocorre se e somente se

$$\alpha(T) - \alpha(0) = (\phi(T) - \theta(T)) - (\phi(0) - \theta(0)) = 2\pi(\sigma(T) - \sigma(0)) - 2\pi(\rho(T) - \rho(0)) < \pi.$$

Suponha, por absurdo, que $\alpha(T) - \alpha(0) \geq \pi$. Então obtemos

$$\alpha(0) < \pi \leq \pi + \alpha(0) \leq \alpha(T),$$

donde segue que existe $\bar{t} \in (0, T]$ tal que $\phi(\bar{t}) - \theta(\bar{t}) = \alpha(\bar{t}) = \pi$. Neste caso, $v(\bar{t}) = \lambda u(\bar{t})$ para algum $\lambda < 0$ e, portanto, $\Phi(\bar{t})v = \lambda\Phi(\bar{t})u = \Phi(\bar{t})\lambda u$. Como $\Phi(\bar{t})$ é inversível, concluímos que $v = \lambda u$ com $\lambda < 0$, mas isto contradiz o fato de $0 \leq \alpha(0) < \pi$.

Logo, o intervalo I^Φ tem comprimento menor que $\frac{1}{2}$, como afirmamos.

Dado $\epsilon > 0$, defina o intervalo trasladado

$$I_\epsilon^\Phi = I^\Phi - \epsilon.$$

Como o comprimento de I_ϵ^Φ é menor que $\frac{1}{2}$, temos duas possibilidades: ou I_ϵ^Φ está contido entre dois números inteiros consecutivos para todo $\epsilon > 0$ pequeno, ou I_ϵ^Φ contém algum número inteiro em seu interior para qualquer $\epsilon > 0$ pequeno. Sendo assim, definimos:

Definição 1.3.6. *O índice de Conley-Zehnder da órbita periódica P é dado por*

$$CZ(P) = \begin{cases} 2k + 1 & , \quad \text{se } I_\epsilon^\Phi \subset (k, k + 1) \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ pequeno} \\ 2k & , \quad \text{se } k \in I_\epsilon^\Phi \setminus \partial I_\epsilon^\Phi \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ pequeno} \end{cases}$$

Este índice é conhecido também como índice de Conley-Zehnder geométrico de P .

Da mesma forma que o índice de Conley-Zehnder generalizado, o índice de Conley-

Zehnder geométrico não depende da escolha da trivialização Ψ para a estrutura de contato e não depende da aplicação $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $v(\partial\mathbb{D}) = w([0, T])$, já que estamos supondo $\pi_2(M) = 0$. Além disso, as Definições 1.3.5 e 1.3.6 do índice de Conley-Zehnder de uma órbita periódica são equivalentes, veja [36, Seção 2.1].

Para mais detalhes sobre a construção dos índices de Conley-Zehnder generalizado e geométrico, sugerimos as referências [29, 32, 36].

Já sabemos que o fluxo de Reeb φ_t sobre a variedade de contato $(M, \xi = \ker \lambda)$ tem a propriedade de preservar a estrutura de contato ξ , isto é, para qualquer solução $x(t) = \varphi_t(x_0)$ do campo X_λ temos

$$d\varphi_t(x_0)(\xi_{x_0}) = \xi_{\varphi_t(x_0)} = \xi_{x(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.23)$$

Além disso, uma vez que $\mathcal{L}_{X_\lambda} X_\lambda = [X_\lambda, X_\lambda] = 0$, o fluxo de Reeb também preserva o campo de Reeb, ou seja,

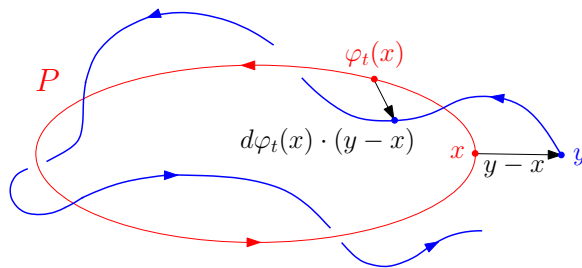
$$d\varphi_t(x_0) \cdot X_\lambda(x_0) = X_\lambda(\varphi_t(x_0)) = X_\lambda(x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Pela construção do índice de Conley-Zehnder geométrico, vemos que $\text{CZ}(P)$ estima a variação angular dos vetores não-nulos da estrutura de contato ξ sob à ação do fluxo linearizado ao longo da órbita periódica P , de acordo com um referencial de ξ . Logo, considerando (1.23), (1.24) e a decomposição $\text{TM} = \xi \oplus \text{span}\{X_\lambda\}$, podemos dizer, grosso modo, que o índice $\text{CZ}(P)$ nos fornece uma estimativa do saldo de voltas dos vetores de $\text{TM} \setminus \text{span}\{X_\lambda\}$, devido à ação do fluxo linearizado, em torno da órbita periódica P .

Sejam x um ponto da órbita periódica P e $y \in M$ um ponto próximo o suficiente de x de modo que, em coordenadas locais, possamos escrever

$$\varphi_t(y) = \varphi_t(x) + d\varphi_t(x) \cdot (y - x) + r(y - x).$$

Esta expressão nos diz que, localmente, órbitas do fluxo de Reeb passando por pontos próximos à órbita periódica P podem ser aproximadas por órbitas do fluxo linearizado ao longo de P .



Concluimos então que, de modo intuitivo, o índice de Conley-Zehnder $\text{CZ}(P)$ nos diz o quanto órbitas próximas à solução periódica P giram em torno de P , com relação a um referencial.

Para finalizar esta seção, vamos apresentar um modo prático de calcular o índice de Conley-Zehnder geométrico de uma órbita periódica contida em um nível de energia de contato de uma função Hamiltoniana definida em \mathbb{R}^4 .

Primeiramente veremos que o fibrado tangente de qualquer nível de energia regular de uma função Hamiltoniana de \mathbb{R}^4 é trivial, assim como qualquer estrutura de contato definida sobre um tal nível de energia.

Sejam $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana e $S = H^{-1}(c)$ um nível de energia regular de H . Considere as matrizes de ordem 4 definidas por

$$A_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes A_i , com $i = 0, 1, 2, 3$, são ortogonais e satisfazem as relações:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= A_3, & A_2 A_3 &= A_1, & A_3 A_1 &= A_2, \\ A_2 A_1 &= -A_3, & A_3 A_2 &= -A_1, & A_1 A_3 &= -A_2 \\ A_1^2 &= -\text{Id}, & A_2^2 &= -\text{Id}, & A_3^2 &= -\text{Id}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

É possível mostrar que o subgrupo $\{A_0, -A_0, A_1, -A_1, A_2, -A_2, A_3, -A_3\} \subset M_4(\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo dos quatérnios.

Uma vez que $S = H^{-1}(c)$ e c é um valor regular de H , temos que $\nabla H(x) \neq 0$ para todo $x \in S$. Sendo assim, podemos definir os seguintes campos vetoriais em \mathbb{R}^4 :

$$X_i(x) := A_i \frac{\nabla H(x)}{|\nabla H(x)|}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (1.27)$$

Para cada $x \in S$, $\{X_0(x), X_1(x), X_2(x), X_3(x)\}$ constitui uma base ortonormal para \mathbb{R}^4 tal que $X_0(x)$ é ortogonal à $T_x S = \text{span}\{X_1(x), X_2(x), X_3(x)\}$. Aqui estamos considerando o produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^4 e a norma induzida $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Usando o referencial $\{X_i\}_{i=1,2,3}$, podemos construir uma trivialização para o fibrado tangente TS do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \beta_{TS} : TS &\rightarrow S \times \mathbb{R}^3 \\ (x, v) &\mapsto (x, \alpha_1(x, v), \alpha_2(x, v), \alpha_3(x, v)), \end{aligned}$$

onde $v = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, v) X_i(x) \in T_x S$.

Suponha agora que o nível regular $S = H^{-1}(c)$ seja uma hipersuperfície de contato de (\mathbb{R}^4, ω_0) e considere $\xi \subset TS$ a estrutura de contato definida pela 1-forma $\lambda = (i_Y \omega_0)|_S$, onde Y é um campo de Liouville transversal à S . Nosso próximo objetivo é construir uma trivialização para o fibrado vetorial ξ sobre S , fazendo uso novamente do referencial $\{X_i\}$ que acabamos de definir.

Sabemos que o campo Hamiltoniano X_H , associado à função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, restrito ao nível de energia S é um múltiplo do campo de Reeb X_λ , obtido a partir da forma de contato λ , e X_λ , por sua vez, é transversal à estrutura de contato ξ . Além disso,

comentamos na primeira seção deste capítulo (equação (1.6)) que o campo Hamiltoniano em \mathbb{R}^4 assume a forma $X_H = J_0 \nabla H$, onde J_0 de ordem 4 coincide com A_3 . Logo,

$$X_H = A_3 \nabla H = |\nabla H| A_3 \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = |\nabla H| X_3$$

e, portanto, X_3 é transversal à estrutura de contato.

Assim, os fibrados vetoriais ξ e $\text{span}\{X_1, X_2\}$ definidos sobre S são ambos transversais ao mesmo campo vetorial X_3 que nunca se anula e daí, para cada $v \in \xi_x$ não-nulo, podemos escrever $v = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, v) X_i(x)$, com $\alpha_1(x, v)^2 + \alpha_2(x, v)^2 \neq 0$. Considere, para cada $x \in S$, o isomorfismo linear π_{ξ_x} que projeta os vetores de ξ_x sobre $\text{span}\{X_1(x), X_2(x)\}$ ao longo da direção $X_3(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} \pi_{\xi_x} : \xi_x &\rightarrow \text{span}\{X_1(x), X_2(x)\} \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^2 \alpha_i(x, v) X_i(x). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Agora defina a base $\{\tilde{X}_1(x), \tilde{X}_2(x)\}$ para ξ_x de modo que $\pi_{\xi_x}(\tilde{X}_i(x)) = X_i(x)$ para cada $i = 1, 2$ e $x \in S$. Este referencial de ξ nos permite construir a seguinte trivialização para ξ

$$\begin{aligned} \beta_\xi : \xi &\rightarrow S \times \mathbb{R}^2 \\ (x, v) &\mapsto (x, \alpha_1(x, v), \alpha_2(x, v)), \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde $v = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(x, v) \tilde{X}_i(x) \in \xi_x$.

Concluimos então, como havíamos afirmado, que TS e ξ são fibrados vetoriais triviais sobre S sempre que S for um nível de energia regular de contato de uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

Gostaríamos de utilizar a trivialização $\{X_i\}$ para descrever o fluxo linearizado restrito à estrutura de contato $\xi \subset TS$, como foi feito na referência [22].

Sejam ϕ_t o fluxo Hamiltoniano gerado por H em \mathbb{R}^4 . Como os níveis de energia de H são invariantes pelo fluxo ϕ_t , podemos considerar as restrições $\phi_t : S \rightarrow S$ e $X_H : S \rightarrow TS$. O fluxo ϕ_t em S induz o fluxo $d\phi_t$ no fibrado tangente TS , conhecido como *fluxo linearizado*, que satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}(d\phi_t) = d\left(\frac{d}{dt}\phi_t\right) = d(X_H \circ \phi_t) = dX_H(\phi_t) \cdot d\phi_t.$$

Em coordenadas locais temos que, para cada $(x_0, v_0) \in TS$, a solução $y(t)$ do fluxo linearizado satisfazendo $y(0) = (x_0, v_0)$ é dada pelo caminho

$$t \xrightarrow{y} (\phi_t(x_0), d\phi_t(x_0) \cdot v_0) \in T_{\phi_t(x_0)} S$$

que descreve como a diferencial do fluxo Hamiltoniano carrega os vetores de TS ao longo da órbita $x(t) = \phi_t(x_0)$ do campo Hamiltoniano X_H . Veja Figura 1.11.

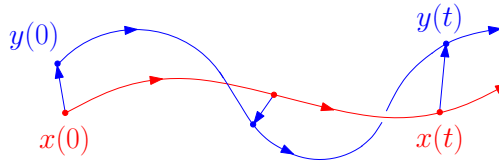


Figura 1.11: Fluxo linearizado ao longo de $x(t)$.

Se $x(t) = \phi_t(x_0) \subset S$ é uma solução do sistema Hamiltoniano

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)) = A_3 \nabla H(x(t)), \quad (1.30)$$

então o fluxo linearizado ao longo de $x(t)$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial

$$\dot{y}(t) = dX_H(x(t)) \cdot y(t) = A_3 \text{Hess}H(x(t))y(t), \quad (1.31)$$

onde $y(t) \in T_{x(t)}S$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Já que o fluxo preserva a direção do campo, vamos considerar apenas soluções $y(t)$ do fluxo linearizado tais que $y(0)$ não é um múltiplo de $X_H(x_0)$, ou seja, tais que a projeção de $y(0)$ sobre $\text{span}\{X_1(x_0), X_2(x_0)\}$ ao longo de $X_3(x_0)$ seja não-nula.

Usando o referencial $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ que trivializa TS , definido em (1.27), podemos escrever

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) X_i(x(t)).$$

E uma vez que $X_i = A_i X_0$, $i = 1, 2, 3$, obtemos

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_i(t) X_i(x(t)) + \alpha_i(t) A_i dX_0(x(t)) \cdot \dot{x}(t). \quad (1.32)$$

Mas como $X_0 = \frac{\nabla H}{|\nabla H|}$, temos que

$$dX_0(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \frac{\text{Hess}H(x(t))\dot{x}(t)}{|\nabla H(x(t))|} - \frac{\langle \nabla H(x(t)), \text{Hess}H(x(t))\dot{x}(t) \rangle}{|\nabla H(x(t))|^3} \nabla H(x(t)).$$

Além disso, de (1.30) segue que

$$\frac{\dot{x}(t)}{|\nabla H(x(t))|} = A_3 X_0(x(t)) = X_3(x(t))$$

e, portanto,

$$dX_0(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \text{Hess}H(x(t))X_3(x(t)) - \langle X_0(x(t)), \text{Hess}H(x(t))X_3(x(t)) \rangle X_0(x(t)). \quad (1.33)$$

Substituindo (1.33) em (1.32) ficamos com

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_i(t) X_i(x(t)) + \alpha_i(t) A_i \text{Hess}H(x(t)) X_3(x(t)) \\ & - \alpha_i(t) \langle X_0(x(t)), \text{Hess}H(x(t)) X_3(x(t)) \rangle X_i(x(t)). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Visto que $\{X_i(x)\}_{i=1,2,3}$ é uma base ortonormal de $T_x S$ para cada $x \in S$ e que as matrizes $A_i, i = 1, 2, 3$, são ortogonais e satisfazem as propriedades (1.26), a equação (1.34) implica que

$$\begin{aligned} \langle \dot{y}(t), X_1(x(t)) \rangle = & \dot{\alpha}_1(t) + \alpha_2(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_3(x(t)), X_3(x(t)) \rangle \\ & - \alpha_3(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_3(x(t)), X_2(x(t)) \rangle \end{aligned} \quad (1.35)$$

Por outro lado, a equação do fluxo linearizado (1.31) nos diz que

$$\begin{aligned} \langle \dot{y}(t), X_1(x(t)) \rangle = & \langle A_3 \text{Hess}H(x(t)) y(t), X_1(x(t)) \rangle \\ = & - \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_i(x(t)), X_2(x(t)) \rangle \end{aligned} \quad (1.36)$$

Portanto, (1.35) e (1.36) nos fornecem a equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1(t) = & - \alpha_1(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_1(x(t)), X_2(x(t)) \rangle - \alpha_2(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_2(x(t)), X_2(x(t)) \rangle \\ & - \alpha_2(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_3(x(t)), X_3(x(t)) \rangle \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ao analisar o produto $\langle \dot{y}(t), X_2(x(t)) \rangle$ obtemos, de modo análogo, que

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2(t) = & \alpha_1(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_1(x(t)), X_1(x(t)) \rangle + \alpha_1(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_3(x(t)), X_3(x(t)) \rangle \\ & + \alpha_2(t) \langle \text{Hess}H(x(t)) X_1(x(t)), X_2(x(t)) \rangle \end{aligned} \quad (1.38)$$

Concluimos então que os dois primeiros coeficientes $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ do fluxo linearizado $y(t)$, com relação à trivialização $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ de TS , devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix} = -J_0 M(x(t)) \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e M é a matriz simétrica

$$M(x) = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(x) & \kappa_{12}(x) \\ \kappa_{21}(x) & \kappa_{22}(x) \end{pmatrix} + \kappa_{33}(x) I, \quad (1.40)$$

com I sendo a matriz identidade de ordem 2 e

$$\kappa_{ij}(x) = \langle \text{Hess}H(x) X_i(x), X_j(x) \rangle, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.41)$$

Costumamos nos referir à $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ satisfazendo (1.39) como uma *solução do fluxo linearizado transversal*, visto que $\alpha(t)$ representa a projeção do fluxo linearizado $y(t)$ sobre a distribuição de planos $\text{span}\{X_1, X_2\}$ que é transversal à direção do campo Hamiltoniano $X_H \parallel X_3$.

Observe que, para qualquer solução $x(t) \subset S$ do fluxo Hamiltoniano, se a restrição $\text{Hess}H(x(t))|_{T_{x(t)}S}$ é positiva definida para todo t , então $M(x(t))$ é positiva definida para todo t . De fato, neste caso, os menores principais da matriz $M(x(t))$ são positivos:

$$\begin{aligned} \kappa_{11}(x) + \kappa_{33}(x) &> 0 \\ \det M(x) = \kappa_{11}(x)\kappa_{22}(x) - \kappa_{12}^2(x) + \kappa_{33}(x)(\kappa_{11}(x) + \kappa_{22}(x) + \kappa_{33}(x)) &> 0. \end{aligned}$$

Disto segue que, ao considerarmos uma solução não-nula $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ do fluxo linearizado transversal ao longo de $x(t)$, temos que

$$\alpha_1(t)\dot{\alpha}_2(t) - \alpha_2(t)\dot{\alpha}_1(t) = \alpha(t)^t M(x(t)) \alpha(t) > 0 \quad (1.42)$$

e, portanto, $\alpha(t) \subset \mathbb{R}^2$ gira em torno da origem no sentido anti-horário. Veja Figura 1.12. Escrevendo $\alpha(t)$ em notação complexa $\alpha_1(t) + i\alpha_2(t) = r(t)e^{i\eta(t)}$, para algum argumento

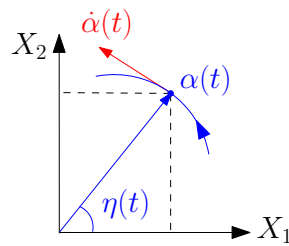


Figura 1.12: Se $\text{Hess}H(x(t))|_{T_{x(t)}S}$ é positiva definida para todo t , então uma solução não-nula $\alpha(t)$ do fluxo linearizado transversal ao longo de $x(t)$ gira no sentido anti-horário.

contínuo $\eta(t)$, e derivando em relação à t obtemos

$$\dot{\alpha}_1 + i\dot{\alpha}_2 = \frac{\dot{r}}{r}(\alpha_1 + i\alpha_2) + \dot{\eta}(-\alpha_2 + i\alpha_1),$$

donde segue

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 &= \frac{\dot{r}}{r}\alpha_1 - \dot{\eta}\alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\dot{r}}{r}\alpha_2 + \dot{\eta}\alpha_1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $-\alpha_2$, a segunda por α_1 e somando as equações obtidas, podemos concluir, juntamente com (1.42), que

$$\dot{\eta}(t) = \frac{\alpha_1(t)\dot{\alpha}_2(t) - \alpha_2(t)\dot{\alpha}_1(t)}{\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t)} > 0 \quad \forall t.$$

Com isso, deduzimos a seguinte proposição de [22] que será extremamente útil mais adiante.

Proposição 1.3.7. *Seja $W \subset \mathbb{R}^4$ um subconjunto compacto de um nível de energia de H . Suponha que, para todo $x \in W$, H é regular em x e $\text{Hess}H(x)$ é positiva definida quando restrita à $T_x H^{-1}(H(x))$. Então existe $\bar{\eta} > 0$ tal que se $x(t) \subset W$ é uma solução do fluxo Hamiltoniano associado à H , então*

$$\dot{\eta}(t) > \bar{\eta},$$

para qualquer solução não-nula $\alpha(t) = \alpha_1(t) + i\alpha_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{n(t)i}$ do fluxo linearizado transversal ao longo de $x(t)$. Em particular, $\alpha(t) \subset \mathbb{R}^2$ gira em torno da origem no sentido anti-horário.

Vejam agora de que forma o sistema (1.39) nos auxilia no cálculo do índice de Conley-Zehnder. Suponha que $P = (w, T)$ seja uma órbita periódica contrátil do fluxo de Reeb contida em um nível de energia regular de contato $S = H^{-1}(c)$ de uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

Comentamos anteriormente que o campo Hamiltoniano $X_H|_S$ difere do campo de Reeb X_λ por um fator multiplicativo $f : S \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, isto é, $X_H(x) = f(x)X_\lambda(x)$ para todo $x \in S$. Neste caso, as soluções do fluxo Hamiltoniano ϕ_t e do fluxo de Reeb φ_t em S diferem apenas por uma reparametrização no tempo e, conseqüentemente, o mesmo ocorre para os fluxos linearizados $d\phi_t$ e $d\varphi_t$. Em particular, a órbita periódica P do fluxo de Reeb pode ser vista como uma solução periódica $P = (x, \bar{T})$ do fluxo Hamiltoniano, onde $x(t) = w(k(t))$ para alguma reparametrização do tempo $k(t)$ satisfazendo $k(0) = 0$ e $k(\bar{T}) = T$. Quando projetados na estrutura de contato ξ ao longo da direção de X_λ , os fluxos linearizados associados à X_H e à X_λ possuem a mesma variação angular ao longo da órbita periódica P , com relação a uma dada trivialização de ξ .

Como vimos, o índice de Conley-Zehnder de P analisa justamente a variação de argumento dos vetores da estrutura de contato ξ devido à ação do fluxo linearizado ao longo de P , utilizando para isso uma trivialização Ψ de ξ . Uma vez que S é um nível de energia regular de contato de uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, a estrutura de contato ξ admite automaticamente uma trivialização global β_ξ sobre S , definida em (1.29), que foi obtida a partir do referencial $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ de ξ . Observe que, do modo como foi definida, β_ξ não é uma trivialização simplética considerando a forma simplética canônica $\omega_0 = dp \wedge dq$ de \mathbb{R}^2 , pois

$$\begin{aligned} \beta_\xi^* \omega_0(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) &= \omega_0((1, 0), (0, 1)) = -1 \\ d\lambda(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) &= \omega_0(X_1, X_2) = \langle A_3 X_1, X_2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Entretanto, para o cálculo do índice de Conley-Zehnder geométrico, este fato não é essencial.

Ao expressarmos o fluxo linearizado restrito à estrutura de contato ξ com relação ao referencial $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$, obtemos os mesmos coeficientes $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ que foram utilizados para escrever o fluxo linearizado projetado em $\text{span}\{X_1, X_2\}$, pois a projeção π_{ξ_x} definida em (1.28) é um isomorfismo entre ξ_x e $\text{span}\{X_1(x), X_2(x)\}$ satisfazendo $\pi_{\xi_x}(\tilde{X}_i(x)) = X_i(x)$, $i = 1, 2$, para cada $x \in S$. Portanto, para estimar a variação de argumento dos vetores não-nulos de ξ em virtude da ação do fluxo linearizado ao longo de P , basta analisar as soluções $\alpha(t)$ do fluxo linearizado transversal regidas por (1.39).

Vejamos um exemplo de cálculo do índice de Conley-Zehnder geométrico.

Exemplo 1.3.8. Considere o elipsóide $E = H^{-1}(1)$, onde $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função Hamiltoniana dada por

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1^2 + p_1^2 + \frac{q_2^2 + p_2^2}{r^2}$$

e r^2 é um número irracional maior que 1.

O sistema Hamiltoniano associado à H em \mathbb{R}^4 é o seguinte

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -2a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

onde, por conveniência, denotamos $a = \frac{1}{r^2}$.

Usando coordenadas polares $q_k + ip_k = r_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, os sistemas (1.43) e (1.44) se reduzem à

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -2 \\ \dot{r}_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta}_2 = -2a \\ \dot{r}_2 = 0 \end{cases}$$

Assim, todas as soluções de (1.43) são periódicas com raio r_1 constante e variação angular linear e decrescente, ou seja, $\theta_1(t) = -2t + c$ para algum $c \in \mathbb{R}$. O período T_1 destas órbitas periódicas é tal que $\theta_1(T_1) = \theta_1(0) - 2\pi$ e então $T_1 = \pi$. Analogamente, as soluções de (1.44) são todas periódicas com raio r_2 constante e período $T_2 = \frac{\pi}{a} = r^2\pi$.

Como r^2 é irracional, as órbitas periódicas do fluxo Hamiltoniano associado à H em \mathbb{R}^4 são somente aquelas com condição inicial da forma $(0, q_2, 0, p_2) \in \mathbb{R}^4$, com $q_2^2 + p_2^2 \neq 0$, ou da forma $(q_1, 0, p_1, 0) \in \mathbb{R}^4$, com $q_1^2 + p_1^2 \neq 0$. Porém, destas órbitas periódicas, apenas duas pertencem ao elipsóide E : aquela com condição inicial $(0, q_2, 0, p_2)$ satisfazendo $q_2^2 + p_2^2 = r^2$ e aquela com condição inicial $(q_1, 0, p_1, 0)$ tal que $q_1^2 + p_1^2 = 1$. Vamos denotar por

$$P_1 = (x_1, T_1) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 / q_1^2 + p_1^2 = 1 \text{ e } q_2 = p_2 = 0\}$$

$$P_2 = (x_2, T_2) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 / q_2^2 + p_2^2 = r^2 \text{ e } q_1 = p_1 = 0\}$$

as soluções periódicas do fluxo Hamiltoniano contidas em E .

Observe que E é uma hipersuperfície de contato de (\mathbb{R}^4, ω_0) por ser estrelada em relação à origem. Vamos utilizar o sistema (1.39) para entender o comportamento do fluxo linearizado restrito à estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ em E , onde $\lambda = (i_Y \omega_0)|_E$ e Y é o campo radial centrado na origem $0 \in \mathbb{R}^4$. Neste caso, a hessiana de H é a matriz diagonal constante $\text{Diag}(2, 2a, 2, 2a)$ e a trivialização $\{X_i\}_{i=0,1,2,3}$ ao longo das órbitas periódicas P_1 e P_2 é dada

por

$$\begin{aligned}
 X_0(x_1) &= (q_1, 0, p_1, 0) & X_0(x_2) &= \frac{1}{r}(0, q_2, 0, p_2) \\
 X_1(x_1) &= (0, -p_1, 0, -q_1) & X_1(x_2) &= \frac{1}{r}(p_2, 0, q_2, 0) \\
 X_2(x_1) &= (0, -q_1, 0, p_1) & X_2(x_2) &= \frac{1}{r}(q_2, 0, -p_2, 0) \\
 X_3(x_1) &= (p_1, 0, -q_1, 0) & X_3(x_2) &= \frac{1}{r}(0, p_2, 0, -q_2)
 \end{aligned}$$

Após alguns cálculos, vemos que a matriz M da equação diferencial (1.39) é a mesma sobre as órbitas $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$M(x_1(t)) = M(x_2(t)) = \begin{pmatrix} 2a + 2 & 0 \\ 0 & 2a + 2 \end{pmatrix}$$

e, portanto, com relação à trivialização $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$, a restrição do fluxo linearizado à estrutura de contato ξ ao longo de ambas as órbitas periódicas P_1 e P_2 satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(2a + 2) \\ 2a + 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Seja $\rho(t)$ um argumento contínuo para uma solução $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ de (1.45). A partir de (1.45), obtemos que o ângulo $\sigma(t) = 2\pi\rho(t)$ satisfaz a equação $\dot{\sigma}(t) = 2a + 2$ e, assim,

$$\sigma(t) = (2a + 2)t + \sigma(0).$$

Para calcular o índice de Conley-Zehnder geométrico de P_i , precisamos analisar a variação do argumento $\rho(t)$ de $\alpha(t)$ no intervalo de tempo $[0, T_i]$, com $i = 1, 2$. Estas variações são dadas por

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \rho(T_1) - \rho(0) = \frac{\sigma(T_1) - \sigma(0)}{2\pi} = \frac{2(a + 1)\pi}{2\pi} = a + 1 \\
 \Delta_2 &= \rho(T_2) - \rho(0) = \frac{\sigma(T_2) - \sigma(0)}{2\pi} = \frac{2(a + 1)\pi r^2}{2\pi} = (a + 1)r^2 = 1 + r^2
 \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, as variações Δ_1 e Δ_2 independem da condição inicial $\alpha(0)$ e então os intervalos $I(P_1) = \Delta_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ e $I(P_2) = \Delta_2(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ são ambos formados por um único ponto.

Como r^2 é um número irracional maior que 1 e $a = \frac{1}{r^2}$, temos que $1 < a + 1 < 2$ e $k < 1 + r^2 < k + 1$ para algum inteiro $k \geq 2$, logo

$$CZ(P_1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad e \quad CZ(P_2) = 2k + 1 \geq 5.$$

1.4 Curvas pseudo-holomorfas

A noção de curvas pseudo-holomorfas em Geometria Simplética foi introduzida por Gromov em [20] no ano de 1985. Em poucas palavras, estas curvas são aplicações diferenciáveis, definidas entre uma superfície de Riemann e uma variedade quase-complexa, satisfazendo uma equação diferencial parcial do tipo Cauchy-Riemann.

Com os trabalhos de Hofer, Wysocki e Zehnder, a teoria de curvas pseudo-holomorfas tornou-se uma poderosa ferramenta no estudo de propriedades globais de fluxos de Reeb. Em [24], Hofer introduziu as curvas pseudo-holomorfas de energia finita em simplectizações de variedades de contato e mostrou que a existência de tais curvas está intimamente relacionada com a existência de órbitas periódicas do fluxo de Reeb. Com isso, Hofer provou a conjectura de Weinstein em casos bem gerais de dimensão 3, como comentamos na primeira seção deste capítulo. Nas referências [25, 26, 28, 29, 30], Hofer, Wysocki e Zehnder desenvolveram o alicerce da teoria de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, explorando suas principais propriedades e algumas de suas relações com a dinâmica de Reeb.

Estes mesmos autores obtiveram resultados dinâmicos ainda mais profundos fazendo uso desta nova teoria. Em [33], construíram seções globais do tipo disco para determinados fluxos de Reeb sobre a 3-esfera *tight* e, em particular, garantiram a existência de uma seção global para qualquer fluxo Hamiltoniano sobre um nível de energia estritamente convexo S de \mathbb{R}^4 . Como veremos posteriormente, uma seção global do tipo disco trata-se de um disco mergulhado D , cujo bordo é uma órbita periódica do fluxo Reeb, cujo interior é transversal ao fluxo, e com a propriedade de que toda órbita de $S \setminus \partial D$ intersecta o interior de D infinitas vezes em tempos positivos e negativos. Neste caso, a análise do fluxo de Reeb em S pode ser reduzida ao estudo da dinâmica da aplicação de retorno do disco aberto $D \setminus \partial D$. Mais adiante definiremos precisamente os conjuntos estritamente convexos e explicaremos como a análise da aplicação de retorno nos leva à conclusão de que o fluxo de Reeb possui duas ou infinitas órbitas periódicas em S . Já no artigo [27], Hofer, Wysocki e Zehnder consideraram uma classe mais geral de fluxos de Reeb sobre a 3-esfera *tight*, que não necessariamente possuem uma seção global, mas admitem um sistema global de seções transversais ao fluxo. Discutiremos estes resultados com detalhes na Seção 2.1.

O objetivo da presente seção é apresentar o conceito de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, bem como alguns dos resultados que fazem de tais curvas ferramentas tão importantes para a dinâmica Hamiltoniana. Para isso, iniciamos com a definição de uma estrutura adicional que podemos associar a um fibrado simplético, a chamada estrutura complexa.

Definição 1.4.1. *Seja $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial de classe C^∞ .*

- *Uma estrutura simplética em E é uma 2-forma ω não-degenerada sobre E , isto é, para cada $x \in X$, $\omega_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação bilinear, anti-simétrica e não-degenerada. O par (E, ω) é chamado de fibrado vetorial simplético.*
- *Uma estrutura complexa em E é uma aplicação suave de fibrados $J : E \rightarrow E$ sobre a identidade de X satisfazendo $J^2 = -Id$. O par (E, J) é chamado de fibrado vetorial*

complexo.

- Uma estrutura complexa J é dita compatível com uma estrutura simplética ω em E se

$$g_J(x)(\cdot, \cdot) := \omega_x(\cdot, J\cdot)$$

define um produto interno na fibra E_x para cada $x \in X$ ou, equivalentemente, se

- i) $\omega_x(J_x(u), J_x(v)) = \omega_x(u, v)$, para todo $x \in X$ e para quaisquer $u, v \in E_x$,
- ii) $\omega_x(u, J_x(u)) > 0$, para todo $x \in X$ e para todo $u \in E_x$ não-nulo.

Neste caso, J é também chamada de estrutura complexa ω -compatível em E e o espaço de tais estruturas é denotado por $\mathcal{J}(E, \omega)$.

Quando o fibrado vetorial em questão é o fibrado tangente de uma variedade diferenciável W , uma estrutura complexa J em TW é conhecida como estrutura quase-complexa em W e o par (W, J) é chamado de variedade quase-complexa. No caso em que a variedade W está munida de uma forma simplética ω , uma estrutura complexa ω -compatível em TW recebe o nome de estrutura quase-complexa ω -compatível em W . O espaço das estruturas quase-complexas ω -compatíveis em W será denotado por $\mathcal{J}(W, \omega)$ ou simplesmente por $\mathcal{J}(\omega)$ ao invés de $\mathcal{J}(TW, \omega)$.

Sejam E um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável X e ω uma estrutura simplética em E . Para cada métrica em X , é possível associar uma estrutura complexa $J : E \rightarrow E$ compatível com ω e, portanto, $\mathcal{J}(E, \omega)$ é não-vazio. Além disso, podemos mostrar que o espaço $\mathcal{J}(E, \omega)$ é contrátil. Veja [41, Proposição 3.27].

Dada $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato, o par $(\xi, d\lambda|_\xi)$ é um fibrado vetorial simplético sobre M , já que $d\lambda|_\xi$ é não-degenerada. Costumamos denotar simplesmente por $\mathcal{J}(\lambda)$ o espaço não-vazio e contrátil $\mathcal{J}(\xi, d\lambda|_\xi)$ das estruturas complexas $J : \xi \rightarrow \xi$ compatíveis com $d\lambda|_\xi$.

Vejamos dois exemplos de variedade quase-complexa.

Exemplo 1.4.2. Considere o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{2n} munido da forma simplética canônica $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq_i$. A aplicação $J_0 : T\mathbb{R}^{2n} \rightarrow T\mathbb{R}^{2n}$ representada pela matriz constante

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

é uma estrutura quase-complexa ω_0 -compatível em \mathbb{R}^{2n} , pois $\omega_0(\cdot, J_0\cdot)$ coincide com o produto interno canônico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^{2n} .

Exemplo 1.4.3. Toda variedade complexa é uma variedade quase-complexa. De fato, seja W uma variedade complexa de dimensão complexa n . Para cada $p \in W$, podemos definir uma transformação linear $J_p : T_p W \rightarrow T_p W$ tal que $J_p^2 = -Id$, fazendo uso de coordenadas holomorfas $(z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n)$ em torno de p , do seguinte modo

$$J_p \cdot \partial_{x_k} = \partial_{y_k} \quad e \quad J_p \cdot \partial_{y_k} = -\partial_{x_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

A definição da estrutura quase-complexa J em TW independe da escolha de coordenadas.

Em particular, temos que as superfícies de Riemann (isto é, as variedades complexas de dimensão complexa 1) são variedades quase-complexas.

Apresentada a definição de estrutura quase-complexa, temos condições de introduzir a definição de curva pseudo-holomorfa.

Definição 1.4.4. *Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann e (W, J) uma variedade quase-complexa. Uma aplicação diferenciável $u : \Sigma \rightarrow W$ é chamada curva pseudo-holomorfa, ou curva J -holomorfa, quando satisfaz as equações (não-lineares) de Cauchy-Riemann*

$$\bar{\partial}_J(u) = \frac{1}{2}(du + J(u) \cdot du \cdot j) = 0. \quad (1.46)$$

Dito de outra forma, cada diferencial $du_z : T_z\Sigma \rightarrow T_{u(z)}W$ preserva multiplicações complexas, isto é, para todo $z \in \Sigma$,

$$du_z \cdot j_z = J_{u(z)} \cdot du_z.$$

Como simples exemplos de curvas pseudo-holomorfas, temos as funções holomorfas definidas entre superfícies de Riemann.

Estamos particularmente interessados em curvas pseudo-holomorfas cujos contradomínios são dados por simplectizações de variedades de contato.

Definição 1.4.5. *A simplectização de uma variedade de contato (M, λ) é a variedade $\mathbb{R} \times M$ munida da forma simplética exata $d(e^a\lambda)$, onde a denota a coordenada real e λ é vista como uma 1-forma em $\mathbb{R} \times M$ considerando o pull-back pela projeção canônica de $\mathbb{R} \times M$ em M .*

Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato. Dada $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ uma estrutura complexa $d\lambda|_\xi$ -compatível na estrutura de contato ξ , podemos definir de modo natural uma estrutura quase-complexa \tilde{J} na simplectização $\mathbb{R} \times M$ determinada por

$$\tilde{J}|_\xi = J \quad \text{e} \quad \tilde{J} \cdot \partial_a = X_\lambda \quad (1.47)$$

ou, equivalentemente,

$$\tilde{J}_{(a,w)}(h, k) = (-\lambda_w(k), J_w \cdot \pi_w(k) + hX_\lambda(w)),$$

onde $(a, w) \in \mathbb{R} \times M$, $(h, k) \in T_{(a,w)}(\mathbb{R} \times M)$ e $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo do campo de Reeb X_λ , isto é, $\pi_w(k) = k - \lambda_w(k)X_\lambda(w)$ para todo $w \in M$ e $k \in T_wM$. Observe que \tilde{J} é \mathbb{R} -invariante, ou seja, $T_c^*\tilde{J} = \tilde{J}$ para todo $c \in \mathbb{R}$, onde $T_c : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é a translação na coordenada real dada por $T_c(a, w) = (a + c, w)$. Muitas vezes denotamos $\tilde{J} = (\lambda, J)$.

Sendo assim, a simplectização de uma variedade de contato torna-se naturalmente uma variedade quase-complexa ao ser munida da estrutura quase-complexa \tilde{J} induzida por uma estrutura complexa J na estrutura de contato, como em (1.47).

Veremos que a existência de uma curva \tilde{J} -holomorfa na simplectização de uma variedade de contato com energia finita, como definimos a seguir, está intimamente relacionada com a existência de órbitas periódicas do fluxo de Reeb.

Definição 1.4.6. *Sejam $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ uma estrutura complexa em ξ . Considere (Σ, j) uma superfície de Riemann compacta e conexa, $\Gamma \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ um conjunto finito e denote $\dot{\Sigma} = \Sigma \setminus \Gamma$. Dizemos que uma aplicação suave $\tilde{u} = (a, u) : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma superfície de energia finita (ou uma curva pseudo-holomorfa de energia finita) na simplectização $\mathbb{R} \times M$ quando satisfaz:*

1. \tilde{u} é \tilde{J} -holomorfa, onde \tilde{J} é a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times M$ dada por (1.47)

2. a energia de \tilde{u} , definida por

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\psi \in \Lambda} \int_{\dot{\Sigma}} \tilde{u}^* d\lambda_\psi$$

onde $\Lambda = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \psi' \geq 0\}$ e $\lambda_\psi(a, w) = \psi(a)\lambda(w)$, $\forall (a, w) \in \mathbb{R} \times M$, é tal que $0 < E(\tilde{u}) < \infty$.

Note que, pelo Teorema de Stokes, se $\tilde{u} : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma superfície de energia finita com Σ sendo uma superfície de Riemann fechada, então $\Gamma \neq \emptyset$.

Neste texto, a superfície de Riemann Σ considerada será sempre a esfera $S^2 \sim \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. No caso em que $\#\Gamma = 1$, a curva \tilde{u} é chamada de *plano de energia finita* e costumamos identificar o domínio $\dot{S}^2 = S^2 \setminus \Gamma$ com \mathbb{C} . Já no caso em $\#\Gamma = 2$, \tilde{u} recebe o nome de *cilindro de energia finita* e identificamos seu domínio $\dot{S}^2 = S^2 \setminus \Gamma$ com $\mathbb{R} \times S^1$.

Quando lidamos com uma curva \tilde{J} -holomorfa $\tilde{u} = (a, u)$ na simplectização de uma variedade de contato (M, λ) , a equação de Cauchy-Riemann (1.46) se reduz à

$$\begin{cases} u^* \lambda \cdot j = da \\ J \cdot \pi \cdot du = \pi \cdot du \cdot j, \end{cases} \quad (1.48)$$

onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo do campo de Reeb X_λ .

Para cada $z \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, consideramos coordenadas holomorfas $\phi_z : (\mathbb{D}, i) \rightarrow (U, j)$ em torno de z , onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário centrado na origem e i é a estrutura complexa canônica em \mathbb{C} . Deste modo, as equações (1.48) assumem, em coordenadas $s + it \in \mathbb{D}$, o seguinte formato

$$\begin{cases} \lambda(u_t(s, t)) = a_s(s, t) \\ \lambda(u_s(s, t)) = -a_t(s, t) \\ \pi u_s(s, t) + J(u(s, t))\pi u_t(s, t) = 0. \end{cases} \quad (1.49)$$

Note que, por conveniência, denotamos a composição $\tilde{u} \circ \phi_z(s, t)$ simplesmente por $\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), u(s, t))$.

Em torno dos pontos $z \in \Gamma \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$, é conveniente considerar coordenadas cilíndricas positivas

$$[0, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni (s, t) \mapsto \phi_z(e^{-(s+it)})$$

ou coordenadas cilíndricas negativas

$$(-\infty, 0] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni (s, t) \mapsto \phi_z(e^{s+it}).$$

E, como anteriormente, ambas as composições $\tilde{u} \circ \phi_z(e^{-(s+it)})$ e $\tilde{u} \circ \phi_z(e^{s+it})$ são denotadas simplesmente por $\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), u(s, t))$.

Definição 1.4.7. *Os pontos de Γ são chamados furos da superfície de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Sejam (s, t) coordenadas cilíndricas positivas em torno de um furo $z \in \Gamma$. Definimos a massa de z por*

$$m(z) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{\{s\} \times S^1} u^* \lambda.$$

Um furo z é chamado positivo se $m(z) > 0$, negativo se $m(z) < 0$ e removível se $m(z) = 0$.

Próximo a cada furo $z \in \Gamma$ de uma superfície de energia finita $\tilde{u} = (a, u)$ na simplectização, temos as seguintes possibilidades para a componente real a :

- a é limitada se z é um furo removível
- a é ilimitada, porém limitada por baixo, se z é um furo positivo
- a é ilimitada, porém limitada por cima, se z é um furo negativo

O nome removível para os furos $z \in \Gamma$ satisfazendo $m(z) = 0$ se deve ao fato de que, neste caso, é possível utilizar o teorema de remoção de singularidades de Gromov [20] para estender suavemente a aplicação $\tilde{u} : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ ao domínio $\dot{\Sigma} \cup \{z\}$.

Para maiores detalhes, nos referimos à [29].

De agora em diante, vamos sempre assumir que todos os furos de uma superfície de energia finita na simplectização são não-removíveis, ou seja, possuem massa diferente de zero. Consideramos então a decomposição

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-,$$

onde $\Gamma_+ = \{z \in \Gamma : m(z) > 0\}$ e $\Gamma_- = \{z \in \Gamma : m(z) < 0\}$.

Vamos entender agora a relação existente entre as superfícies de energia finita na simplectização de uma variedade de contato e as órbitas periódicas do fluxo de Reeb.

Exemplo 1.4.8. *Seja $P = (w, T)$ uma órbita periódica do fluxo de Reeb sobre uma variedade de contato (M, λ) . A aplicação $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por*

$$a(s, t) = Ts \quad e \quad u(s, t) = w(Tt)$$

é um cilindro pseudo-holomorfo com energia finita igual a T . De fato, para mostrar que \tilde{u} é uma curva \tilde{J} -holomorfa basta utilizar as equações (1.49). Além disso, como $u^ \lambda = T \lambda(\dot{w}(Tt)) dt = T dt$, obtemos que*

$$\int_{\mathbb{R} \times S^1} \tilde{u}^* d\lambda_\psi = \int_{\mathbb{R} \times S^1} \psi'(a) da \wedge u^* \lambda + \psi(a) d(u^* \lambda) = T \int_{\mathbb{R}} \psi'(a) da$$

e, conseqüentemente,

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\psi \in \Lambda} \int_{\mathbb{R} \times S^1} \tilde{u}^* d\lambda_\psi = T \sup_{\psi \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}} \psi'(a) da = T.$$

O cilindro de energia finita \tilde{u} é conhecido como cilindro trivial ou cilindro sobre a órbita periódica P .

A partir do exemplo acima concluímos que a existência de uma órbita periódica do fluxo de Reeb implica a existência de uma superfície de energia finita na simplectização da variedade de contato. O próximo resultado, provado em [24], mostra que a recíproca desta afirmação também é verdadeira. Em outras palavras, o teorema a seguir nos diz que curvas pseudo-holomorfas de energia finita em simplectizações de variedades de contato são, grosso modo, superfícies que buscam órbitas periódicas do fluxo de Reeb em seus fins.

Teorema 1.4.9 (Hofer). *Sejam (M, λ) uma variedade de contato e $\tilde{u} = (a, u) : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície de energia finita. Fixe $z \in \Gamma$ um furo não-removível de \tilde{u} e considere coordenadas cilíndricas positivas $(s, t) \in [0, +\infty) \times S^1$ em torno de z . Então, dada uma sequência $s_n \rightarrow +\infty$, existem uma órbita periódica $P = (w, T)$ do fluxo de Reeb e uma subsequência s_{n_k} de s_n tais que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \{t \mapsto u(s_{n_k}, t)\} = \{t \mapsto w(mt)\}$$

na topologia $C^\infty(S^1, M)$, onde $m = m(z)$ é a massa de z e o período T é dado por $|m(z)| > 0$.

Nas condições do Teorema 1.4.9, nos referimos à órbita periódica P como *limite assintótico* de \tilde{u} no furo $z \in \Gamma$.

Se um limite assintótico P em um furo $z \in \Gamma$ da superfície de energia finita \tilde{u} é uma órbita periódica não-degenerada do fluxo de Reeb, então \tilde{u} se aproxima do cilindro trivial sobre P de um modo exponencial e, neste caso, o limite assintótico P em z é único. Esta afirmação se deve ao seguinte resultado de [28].

Teorema 1.4.10 (Hofer, Wysocki, Zehnder). *Seja $z \in \Gamma$ um furo positivo de uma superfície de energia finita $\tilde{u} = (a, u)$ na simplectização de uma variedade de contato (M, λ) e considere coordenadas cilíndricas positivas $(s, t) \in [0, +\infty) \times S^1$ em torno de z . Sejam $P = (w, T)$ um limite assintótico de \tilde{u} em z e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $T = kT_0$, onde T_0 é o menor período de P . Considere $(\vartheta, x, y) \subset S^1 \times \mathbb{R}^2$ coordenadas de Martinet definidas em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$ de $P_0 = (w, T_0)$ como no Lema 1.3.2. Se P é uma órbita periódica não-degenerada do campo de Reeb X_λ , então $u(s, t) \in \mathcal{U}$ para todo s suficientemente grande e, nas coordenadas de Martinet, a curva \tilde{u} é representada por funções*

$$(a(s, t), \vartheta(s, t), x(s, t), y(s, t)), \quad (s, t) \in \mathbb{R} \times S^1, s \gg 0,$$

para as quais temos duas possibilidades: ou $(x(s, t), y(s, t)) \equiv 0$ e, neste caso, \tilde{u} é um cilindro

sobre P , ou então existem constantes $s_0, A_\gamma, r_0 > 0, a_0 \in \mathbb{R}$, tais que

$$\begin{aligned} |D^\gamma(a(s, t) - (Ts + a_0))| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \\ |D^\gamma(\vartheta(s, t) - kt)| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \\ (x(s, t), y(s, t)) &= e^{\int_{s_0}^s \mu(r) dr} (e(t) + R(s, t)), \\ |D^\gamma R(s, t)|, |D^\gamma(\mu(s) - \mu)| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \end{aligned} \tag{1.50}$$

para todo s grande e $\gamma \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aqui $\mu(s) \rightarrow \mu < 0$ quando $s \rightarrow \infty$, onde μ é um autovalor do operador assintótico A_P , a aplicação $e : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ corresponde a um μ -autovetor de A_P representado em coordenadas induzidas pelo tubo de Martinet e $\vartheta(s, t)$ é vista como uma função sobre o recobrimento universal \mathbb{R} de S^1 .

Uma afirmação similar vale no caso em que $z \in \Gamma$ é um furo negativo. Neste caso, utilizamos coordenadas cilíndricas negativas em torno de z , $e^{-r_0 s}$ é substituída por $e^{r_0 s}$ em (1.50), $s \rightarrow -\infty$ e o autovalor μ de A_P é positivo.

Sempre que o comportamento assintótico de \tilde{u} próximo a um furo $z \in \Gamma$ é exponencial como em (1.50), dizemos que \tilde{u} tem *decaimento exponencial* próximo a z , até mesmo no caso em que o limite assintótico P de \tilde{u} em z é degenerado. Neste caso, é comum dizer também que \tilde{u} é *assintótica à P no furo z* .

Apresentamos na Figura 1.13 uma ilustração, encontrada em [27], de uma superfície de energia finita na simplectização da esfera S^3 com os respectivos limites assintóticos em cada um de seus furos.

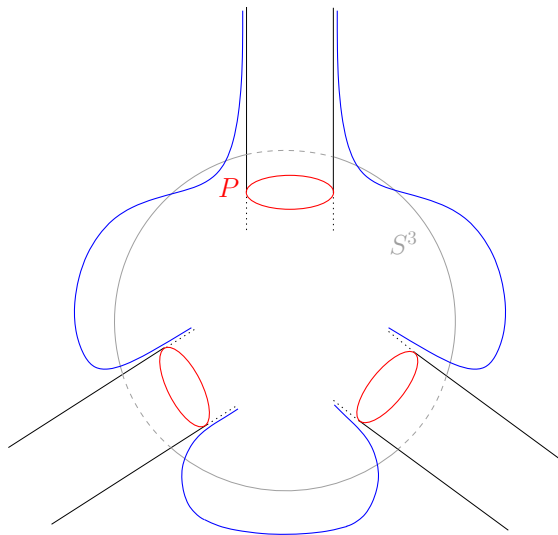


Figura 1.13: Superfície de energia finita em $\mathbb{R} \times S^3$ com um furo positivo e dois furos negativos.

Seja $\tilde{u} = (a, u) : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva \tilde{J} -holomorfa de energia finita na simplectização de uma variedade de contato $(M, \xi = \ker \lambda)$ e suponha que \tilde{u} tem decaimento exponencial próximo a todos os seus furos. Seguindo [29], definimos o *índice de Conley-Zehnder* de \tilde{u} por

$$\text{CZ}(\tilde{u}) = \sum_{z \in \Gamma_+} \text{CZ}(P_z) - \sum_{z \in \Gamma_-} \text{CZ}(P_z),$$

onde P_z é o limite assintótico de \tilde{u} no furo $z \in \Gamma$. Supondo ainda que \tilde{u} é um mergulho, definimos o *índice de Fredholm de \tilde{u}* por

$$\text{Fred}(\tilde{u}) = \text{CZ}(\tilde{u}) - \chi(\Sigma) + \#\Gamma,$$

onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler da superfície de Riemann Σ .

O decaimento exponencial de $\tilde{u} = (a, u)$ nos permite concluir que a aplicação $\pi \circ du$ não se anula próximo aos furos de \tilde{u} , onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo do campo de Reeb X_λ . Além disso, a partir da terceira equação de (1.49) deduzimos que $\pi \circ du$ satisfaz uma equação de Cauchy-Riemann perturbada na estrutura de contato. E então, fazendo uso do Princípio da Similaridade Generalizado [34, Apêndice A.6], mostramos que o conjunto formado pelos zeros de $\pi \circ du$ é finito e ainda associamos a cada um destes zeros uma ordem que é sempre positiva. Para mais detalhes sobre esta construção consulte [29, Proposição 4.1]. Denotamos por $\text{wind}_\pi(\tilde{u})$ a soma finita das ordens dos zeros de $\pi \circ du$.

Definimos também um *winding number* para cada furo $z \in \Gamma$ de \tilde{u} do seguinte modo: seja P o limite assintótico de \tilde{u} em z e considere o μ -autovetor $e : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do operador assintótico A_P , representado em coordenadas locais na descrição assintótica (1.50) do Teorema 1.4.10. O *winding number de \tilde{u} em z* é definido como o *winding number* do loop $e(t)$ em \mathbb{R}^2 :

$$\text{wind}_\infty(z) := \text{wind}(t \mapsto e(t), t \in S^1).$$

Esta definição independe da trivialização da estrutura de contato ξ . Observe que, no caso em que z é um furo positivo de \tilde{u} , o autovalor μ é negativo e, portanto, $\text{wind}_\infty(z) \leq \text{wind}^{<0}(A_P)$, onde $\text{wind}^{<0}(A_P)$ foi definido em (1.21). Analogamente, se z for um furo negativo de \tilde{u} , então o autovalor μ é positivo e, assim, $\text{wind}_\infty(z) \geq \text{wind}^{\geq 0}(A_P)$, com $\text{wind}^{\geq 0}(A_P)$ também definido em (1.21). O *winding number de \tilde{u}* é dado por

$$\text{wind}_\infty(\tilde{u}) = \sum_{z \in \Gamma_+} \text{wind}_\infty(z) - \sum_{z \in \Gamma_-} \text{wind}_\infty(z).$$

A relação existente entre $\text{wind}_\pi(\tilde{u})$ e $\text{wind}_\infty(\tilde{u})$, provada em [29], é a seguinte:

$$0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}) - \chi(\Sigma) + \#\Gamma. \quad (1.51)$$

Vamos fixar, de agora em diante, a superfície de Riemann Σ como sendo a esfera de Riemann S^2 . Neste caso, o índice de Fredholm de \tilde{u} e a relação (1.51) se reduzem a

$$\begin{aligned} \text{Fred}(\tilde{u}) &= \text{CZ}(\tilde{u}) - 2 + \#\Gamma, \\ 0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{u}) &= \text{wind}_\infty(\tilde{u}) - 2 + \#\Gamma. \end{aligned} \quad (1.52)$$

É importante dizer que o índice de Fredholm de uma superfície mergulhada de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ corresponde à dimensão do espaço de superfícies mergulhadas de energia finita (módulo parametrizações) próximas a \tilde{u} com mesma quantidade de furos e mesmos limites assintóticos. Os detalhes desta afirmação podem ser encontrados em [30].

Capítulo 2

Resultado principal

Neste capítulo, enunciamos e demonstramos o principal resultado deste trabalho. Na primeira seção, definimos os sistemas globais de seções transversais para fluxos de Reeb sobre a 3-esfera *tight*, lidando especialmente com os casos em que a forma de contato é dinamicamente ou fracamente convexa, como abordados nas referências [27, 33]. Na segunda seção, fornecemos uma descrição local de um fluxo Hamiltoniano em torno de um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro e apresentamos a definição de um conjunto singular estritamente convexo, discutindo resultados fundamentais obtidos em [22, 52]. Ainda nesta seção, elaboramos as duas hipóteses essenciais que são assumidas em nosso teorema principal. A primeira delas diz respeito à integrabilidade local do campo Hamiltoniano próximo ao equilíbrio do tipo sela-centro, enquanto a segunda trata-se de uma condição geométrica global sobre o nível de energia singular que contém este ponto de equilíbrio. Finalmente, na terceira seção analisamos o comportamento da dinâmica Hamiltoniana em níveis de energia próximos a um conjunto singular estritamente convexo, cumprindo o objetivo deste trabalho. Em poucas palavras, mostramos que os níveis de energia de uma função Hamiltoniana de \mathbb{R}^4 , que se encontram imediatamente acima de um conjunto singular estritamente convexo, contêm uma 3-bola admitindo um tipo particularmente especial de sistema de seções transversais, a chamada folheação $2 - 3$. Como consequência, garantimos a existência de pelo menos uma órbita homoclínica à variedade central do sela-centro.

2.1 Sistemas globais de seções transversais

O conceito de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações de variedades de contato vem sendo de grande importância no estudo da dinâmica de Reeb. Além dos Teoremas 1.4.9 e 1.4.10, que, como vimos, relacionam superfícies de energia finita na simplectização com soluções periódicas do campo de Reeb, as curvas pseudo-holomorfas foram usadas também para garantir a existência de sistemas globais de seções transversais para fluxos de Reeb associados a formas de contato não-degeneradas na 3-esfera *tight*. Como casos particulares destes sistemas, temos a decomposição em livro aberto, obtida no caso dinamicamente convexo, e a folheação $3 - 2 - 3$, obtida como uma das possibilidades do caso fracamente convexo. Nesta seção definiremos um sistema global de seções transversais, destacando as

consequências dinâmicas de sua existência, e veremos que um tal sistema folheando a esfera S^3 pode ser construído a partir de uma folheação estável de energia finita da simplectização $\mathbb{R} \times S^3$.

Vamos iniciar com a definição geral de seção global para um fluxo.

Definição 2.1.1. *Seja X um campo vetorial suave definido em uma variedade M de dimensão 3. Uma seção global para o fluxo de X é uma superfície compacta N mergulhada em M , cujas componentes de bordo são órbitas periódicas do fluxo, cujo interior $\dot{N} = N \setminus \partial N$ é transversal ao campo X e com a seguinte propriedade: toda órbita de X passando por um ponto $x_0 \in M \setminus \partial N$ intersecta \dot{N} em tempos positivos e negativos. Veja Figura 2.1. No caso particular em que N é um disco mergulhado em M , dizemos que N é uma seção global do tipo disco para o fluxo de X .*

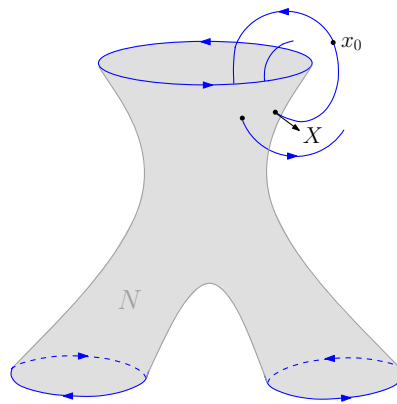


Figura 2.1: Seção global para o fluxo de X

Lembre-se (Proposição 1.2.14) que estudar a dinâmica de Reeb sobre a esfera S^3 munida de uma forma de contato *tight* $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$, onde $f : S^3 \rightarrow (0, \infty)$ é uma função suave e λ_0 é a forma de contato padrão definida em (1.13), equivale a analisar o fluxo de Reeb sobre o conjunto estrelado $S_f = \{\sqrt{f(x)}x; x \in S^3\}$ munido da forma de contato $\lambda_0|_{S_f}$ e, conseqüentemente, equivale a entender o fluxo Hamiltoniano de uma função Hamiltoniana de \mathbb{R}^4 que possui S_f como nível de energia regular.

Entre os conjuntos estrelados de \mathbb{R}^4 , chamamos a atenção para aqueles têm curvatura positiva. Tais conjuntos se enquadram na definição que apresentamos a seguir de conjunto estritamente convexo.

Definição 2.1.2. *Sejam $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana e S uma hipersuperfície contida em um nível de energia regular de H . Se*

1. $\langle \text{Hess}H(x)v, v \rangle > 0, \forall x \in S, v \in T_x S$
2. $T_x S \cap S = \{x\}, \forall x \in S$

então S é chamada de hipersuperfície estritamente convexa. No caso em que S é difeomorfa à esfera S^3 , S recebe o nome de ovalóide.

Note que, na condição 2. da Definição 2.1.2, estamos considerando uma identificação do espaço vetorial $T_x S$ com o espaço afim $\{x\} + T_x S$. Visto que $\nabla H(x) \neq 0$ para todo $x \in S$, a aplicação normal de Gauss N em S pode ser definida como $N(x) = \frac{\nabla H(x)}{|\nabla H(x)|}$. Assim, o operador de Weingarten satisfaz

$$\langle dN_x(v), v \rangle = \frac{1}{|\nabla H(x)|} \langle \text{Hess}H(x)v, v \rangle, \quad \forall x \in S, v \in T_x S,$$

donde segue que a condição local 1. da Definição 2.1.2 é equivalente a S ter curvatura positiva em todos os seus pontos. Veja Figura 2.2.

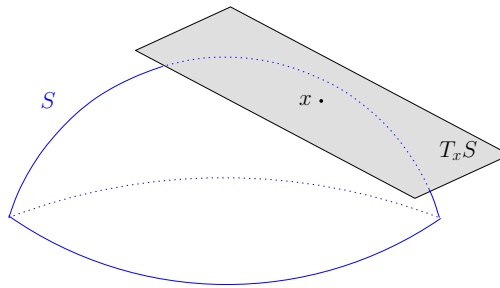


Figura 2.2: Representação de uma hipersuperfície estritamente convexa S .

Como exemplo de ovalóide, podemos citar o elipsóide $E = H^{-1}(1) \subset \mathbb{R}^4$, onde

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{q_1^2}{a_1^2} + \frac{q_2^2}{a_2^2} + \frac{p_1^2}{b_1^2} + \frac{p_2^2}{b_2^2}, \quad \text{com } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Todo ovalóide S é, em particular, um conjunto estrelado de \mathbb{R}^4 . De fato, para qualquer ponto w_0 pertencente à componente limitada de $\mathbb{R}^4 \setminus S$, temos que os raios partindo de w_0 intersectam S transversalmente em um único ponto, veja [22, 33, 52]. Consequentemente, o campo radial Y_0 centrado em w_0 induz uma forma de contato em S dada por $\lambda_0 = (i_{Y_0}\omega_0)|_S$, onde ω_0 é a forma simplética canônica de \mathbb{R}^4 .

Muitas propriedades dinâmicas de um fluxo Hamiltoniano definido sobre um ovalóide são conhecidas graças a Hofer, Wysocki e Zehnder. Um dos grandes resultados de [33] afirma que o índice de Conley-Zehnder de todas as órbitas periódicas contidas em um ovalóide deve ser no mínimo 3, como enunciamos a seguir.

Teorema 2.1.3. [33, Teorema 3.4] *Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ um ovalóide e considere $\lambda_0 = (i_{Y_0}\omega_0)|_S$ a forma de contato em S induzida pelo campo radial Y_0 centrado em um ponto w_0 que pertence à componente limitada de $\mathbb{R}^4 \setminus S$. Se $P = (w, T)$ é uma órbita periódica do fluxo de Reeb associado à λ_0 , então $CZ(P) \geq 3$. Mais ainda, se P não é simples, então $CZ(P) \geq 5$. De modo mais preciso, se $T = kT_0$, onde T_0 é o menor período de P e $k \geq 2$, então $CZ(P) = CZ(w, T) \geq 2k + 1$.*

Motivados pelo Teorema 2.1.3, Hofer, Wysocki e Zehnder introduziram o conceito sim-pleticamente invariante de convexidade dinâmica.

Definição 2.1.4. Uma forma de contato λ definida em S^3 é dita *dinamicamente convexa* se, para toda órbita periódica P do campo de Reeb X_λ , o índice de Conley-Zehnder $CZ(P)$ é maior ou igual a 3.

De agora em diante, vamos fixar nossa variedade de contato como sendo a 3-esfera *tight*, tendo em vista que assim estaremos indiretamente estudando fluxos Hamiltonianos em conjuntos estrelados de \mathbb{R}^4 .

Uma órbita periódica não-nó $P = (w, T)$ do fluxo de Reeb em S^3 é dita *geometricamente distinta* de uma curva fechada $Q \subset S^3$ se $w(\mathbb{R}) \cap Q = \emptyset$. Neste caso, Q determina uma classe de homologia $[Q] \subset H_1(S^3 \setminus P, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Dizemos que a órbita periódica P e o laço Q estão *enlaçados* quando a classe $[Q]$ é não-trivial em $H_1(S^3 \setminus P, \mathbb{Z})$.

Ainda em [33], os autores provaram que toda forma de contato dinamicamente convexa sobre a 3-esfera *tight* admite uma seção global do tipo disco. É o que afirma o próximo resultado.

Teorema 2.1.5. Se a forma de contato $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$ em S^3 é dinamicamente convexa, onde $f : S^3 \rightarrow (0, \infty)$ é uma função suave, então existe uma órbita periódica P_0 do campo de Reeb X_λ , com período mínimo T_0 e índice de Conley-Zehnder $CZ(P_0)$ igual a 3, satisfazendo as seguintes propriedades:

- P_0 é o bordo de um disco mergulhado compacto $D \subset S^3$, cujo interior $\dot{D} = D \setminus \partial D$ é transversal ao campo X_λ .
- D é uma seção global para o fluxo de Reeb.
- $d\lambda|_{\dot{D}}$ é não-degenerada, positiva e a área de \dot{D} é dada por

$$\int_{\dot{D}} d\lambda = T_0.$$

- A aplicação de Poincaré (aplicação de primeiro retorno) $\Psi : \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é simplética, ou seja, $\Psi^*d\lambda|_{\dot{D}} = d\lambda|_{\dot{D}}$.
- Toda órbita periódica de X_λ geometricamente distinta de P_0 está enlaçada com P_0 .

Na verdade, o disco D obtido no teorema acima faz parte de uma família parametrizada em S^1 de seções globais do tipo disco que folheam $S^3 \setminus P$. Esta família, representada na Figura 2.3, é conhecida como *decomposição em livro aberto* (*open book decomposition*) e a órbita P_0 , neste caso, é chamada de *binding* (ou *encadernação*) da decomposição.

A teoria de curvas pseudo-holomorfas é essencial na demonstração do Teorema 2.1.5. De fato, cada um dos discos \dot{D} da decomposição em livro aberto construída em [33] é a projeção em S^3 de um plano de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times S^3$.

Observe que, com a aplicação de retorno $\Psi : \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ do Teorema 2.1.5, o estudo do fluxo de Reeb associado à forma de contato dinamicamente convexa $\lambda = \lambda_0|_{S^3}$ em S^3 se reduz à compreensão da dinâmica de um difeomorfismo do disco aberto que preserva área. Em

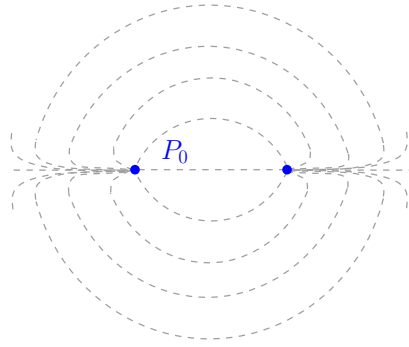


Figura 2.3: Corte de uma decomposição em livro aberto na esfera S^3 (vista como $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$). O par de pontos azuis representa a órbita periódica P_0 , enquanto cada linha tracejada representa uma folha da decomposição em livro aberto.

primeiro lugar, tais aplicações sempre admitem um ponto fixo. De fato, se Ψ não tivesse pontos fixos, então pelo Teorema da translação de Brouwer, existiria $U \subset \dot{D}$ aberto e não-vazio tal que os conjuntos $\Psi^k(U)$ seriam dois a dois disjuntos. Isto levaria a uma contradição pois, como a medida $m(U)$ do conjunto U é estritamente positiva e Ψ preserva área, teríamos que

$$\infty > m(D) \geq m\left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} \Psi^k(U)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Psi^k(U)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(U) = \infty.$$

Note que os pontos periódicos da aplicação de retorno Ψ , em particular seus pontos fixos, correspondem a órbitas periódicas do fluxo de Reeb. Portanto, como consequência do Teorema 2.1.5, temos que o fluxo de Reeb X_λ em S^3 possui pelo menos duas órbitas periódicas.

Porém, com um resultado de John Franks [16] para homeomorfismos do anel que preservam área, obtemos uma conclusão ainda mais surpreendente: se o fluxo de Reeb associado a uma forma de contato *tight* dinamicamente convexa em S^3 tiver mais que duas órbitas periódicas, então este fluxo admite infinitas órbitas periódicas. Com efeito, seja $z \in \dot{D}$ o ponto fixo de Ψ obtido a partir do Teorema da translação de Brouwer. Ao considerarmos o difeomorfismo restrito $\Psi : \dot{D} \setminus \{z\} \rightarrow \dot{D} \setminus \{z\}$ que preserva área, temos condições de utilizar o teorema de J. Franks que garante que se tal restrição admite um ponto periódico, então admite infinitos. Obtemos assim o seguinte resultado de [33].

Corolário 2.1.6. *Se a forma de contato $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$ em S^3 é dinamicamente convexa, onde $f : S^3 \rightarrow (0, \infty)$ é uma função suave, então o fluxo de Reeb X_λ admite exatamente duas ou infinitas órbitas periódicas.*

Ressaltamos que as conclusões do Teorema 2.1.5 e do Corolário 2.1.6 valem, em particular, para fluxos Hamiltonianos definidos em ovalóides de \mathbb{R}^4 , pois, nestes casos, o campo Hamiltoniano é equivalente a um campo de Reeb na 3-esfera *tight* associado a uma forma de contato dinamicamente convexa, de acordo com o Teorema 2.1.3.

Em geral, uma forma de contato *tight* na esfera S^3 não admite uma decomposição em livro aberto como no caso dinamicamente convexo tratado no Teorema 2.1.5. Entretanto, se a forma de contato λ em S^3 , além de *tight*, for não-degenerada, então λ admite um sistema global de seções transversais como definimos a seguir.

Definição 2.1.7. *Seja λ uma forma de contato tight em S^3 . Um sistema global de seções transversais para o fluxo de X_λ é uma folheação singular \mathcal{F} de S^3 com as seguintes propriedades:*

- *O conjunto singular de \mathcal{F} , denotado por \mathcal{P} , é formado por um número finito de órbitas periódicas não-nós de X_λ , com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder em $\{1, 2, 3\}$. Cada elemento de \mathcal{P} é chamado de binding da folheação \mathcal{F} .*
- *$\mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$ é uma folheação suave de $S^3 \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$. O fecho de cada folha $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$ é uma 2-esfera mergulhada em S^3 , com um número finito de discos abertos removidos, e suas componentes de bordo, chamadas de limites assintóticos de F , são elementos distintos de \mathcal{P} . Além disso, para cada $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$, temos as seguintes possibilidades (veja Figura 2.4):*
 1. *F possui precisamente um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 3 e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 1. Tais folhas aparecem em uma família a 1-parâmetro de folhas com os mesmos limites assintóticos.*
 2. *F possui precisamente um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 3, precisamente um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 2 e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 1.*
 3. *F possui precisamente um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 2 e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 1.*

Nos casos 2 e 3, dizemos que a folha F é rígida.

- *O campo de Reeb X_λ é transversal às folhas de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$.*

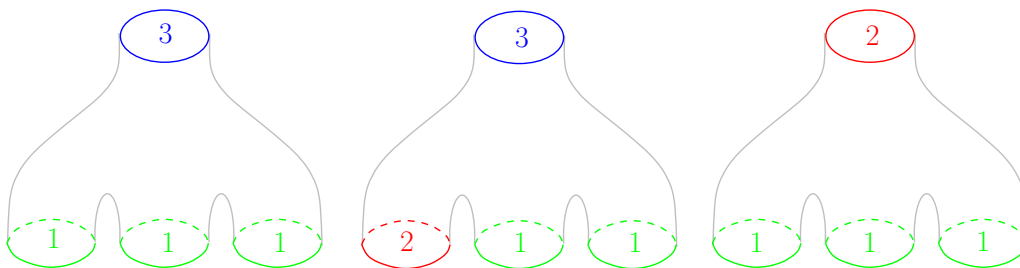


Figura 2.4: Possíveis configurações para as folhas regulares de um sistema global de seções transversais.

A Figura 2.5, obtida em [27], representa um possível sistema global de seções transversais na esfera S^3 .

O fato de que toda forma de contato *tight* e não-degenerada na esfera S^3 admite um sistema global de seções transversais, como na Definição 2.1.7, foi demonstrado por Hofer,

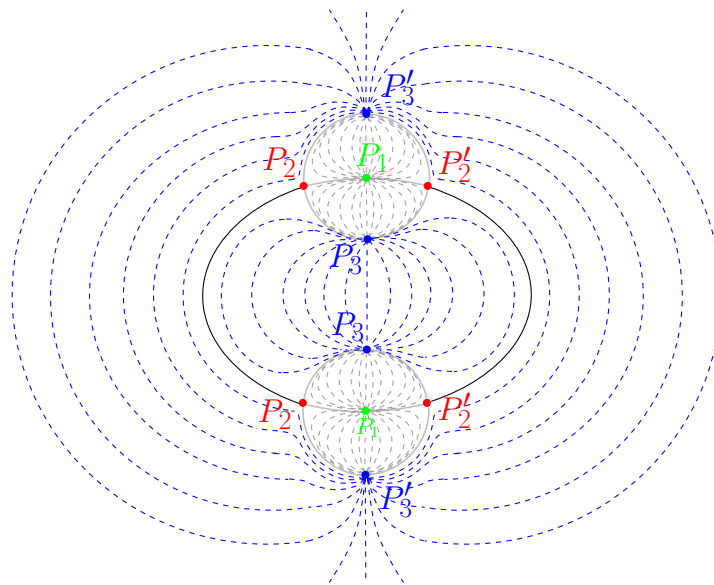


Figura 2.5: Corte de um sistema global de seções transversais na esfera S^3 (vista como $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$) contendo cinco órbitas de *binding*. Os pares correspondentes de pontos azuis, vermelhos e verdes representam *bindings* com índices de Conley-Zehnder 3, 2 e 1 respectivamente. Observe que, nesta figura, a notação adotada para os *bindings* tem como sub-índice o correspondente índice de Conley-Zehnder. As linhas tracejadas azuis representam folhas com um limite assintótico de índice 3, os pares correspondentes de linhas tracejadas cinzas representam folhas com limites assintóticos de índices 3 e 1, as linhas contínuas pretas representam folhas rígidas com um limite assintótico de índice 2 e, por fim, os pares correspondentes de linhas contínuas cinzas representam folhas rígidas com limites assintóticos de índices 3 e 2.

Wysocki e Zehnder, novamente fazendo uso da teoria de curvas pseudo-holomorfas em simplificações. De fato, um tal sistema é construído em [27] como a projeção sobre S^3 de uma folheação estável de energia finita na simplificação $\mathbb{R} \times S^3$, que será definida logo abaixo. Em particular, cada uma das folhas de um sistema global de seções transversais é obtida como a projeção em S^3 de uma superfície de energia finita em $\mathbb{R} \times S^3$.

Definição 2.1.8. *Sejam λ uma forma de contato tight em S^3 e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ uma estrutura complexa. Uma folheação estável de energia finita para $\tilde{J} = (\lambda, J)$ é uma folheação suave $\tilde{\mathcal{F}}$ da simplificação $\mathbb{R} \times S^3$ com as seguintes propriedades:*

- Cada folha $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ é a imagem de uma superfície mergulhada de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$. Chamamos de furos e limites assintóticos de \tilde{F} , respectivamente, os furos e os limites assintóticos de \tilde{u} tal que $\tilde{u}(S^2 \setminus \Gamma) = \tilde{F}$. Definimos o índice de Fredholm de \tilde{F} como $Fred(\tilde{F}) := Fred(\tilde{u})$.
- Existe uma constante uniforme $C > 0$ tal que $0 < E(\tilde{u}) < C$ para toda superfície mergulhada de energia finita $\tilde{u} : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ satisfazendo $\tilde{u}(S^2 \setminus \Gamma) = \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$.
- Para toda $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ e todo $c \in \mathbb{R}$, temos que $T_c(\tilde{F}) \in \tilde{\mathcal{F}}$, onde T_c é a translação na coordenada real dada por $T_c(a, z) = (a + c, z), \forall (a, z) \in \mathbb{R} \times S^3$. Além disso, para quaisquer $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \in \tilde{\mathcal{F}}$ e $c \in \mathbb{R}$, $T_c(\tilde{F}_1) \cap \tilde{F}_2 = \emptyset$ ou $T_c(\tilde{F}_1) = \tilde{F}_2$.

- Todos os limites assintóticos das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ são órbitas periódicas não-nós de X_λ com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder em $\{1, 2, 3\}$.
- Cada $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ tem precisamente um furo positivo e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de furos negativos. Se $T_c(\tilde{F}) \cap \tilde{F} = \emptyset, \forall c \neq 0$, então $\text{Fred}(\tilde{F}) \in \{1, 2\}$ e u é um mergulho transversal ao campo de Reeb X_λ . Se $T_c(\tilde{F}) = \tilde{F}, \forall c \in \mathbb{R}$, então \tilde{F} tem precisamente um furo negativo e ambos os furos de \tilde{F} , o positivo e o negativo, estão associados ao mesmo limite assintótico. Neste último caso, $\text{Fred}(\tilde{F}) = 0$ e \tilde{F} é um cilindro sobre seu limite assintótico.

Já mencionamos anteriormente que o índice de Fredholm de uma superfície mergulhada de energia finita \tilde{u} pode ser interpretado como a dimensão do espaço local \mathcal{M} de superfícies mergulhadas de energia finita (módulo parametrizações) próximas a \tilde{u} com mesma quantidade de furos e mesmos limites assintóticos. Sendo assim, as definições de furo, de limite assintótico e de índice de Fredholm de uma folha \tilde{F} da folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}$ não dependem da escolha da superfície mergulhada de energia finita $\tilde{u} : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ satisfazendo $\tilde{u}(S^2 \setminus \Gamma) = \tilde{F}$. Além disso, se $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ é tal que $T_c(\tilde{F}) \cap \tilde{F} = \emptyset, \forall c \neq 0$, então as translações $T_c(\tilde{F})$ produzem naturalmente uma dimensão de \mathcal{M} . Logo, se $\text{Fred}(\tilde{F}) = 1$, o espaço local \mathcal{M} é dado por $\{T_c(\tilde{F}); c \in \mathbb{R}\}$ e, conseqüentemente, sua projeção em S^3 é sempre a mesma. Por esta razão, dizemos que as folhas satisfazendo $\text{Fred}(\tilde{F}) = 1$ são *rígidas*. Já no caso em que $\text{Fred}(\tilde{F}) = 2$, além da família local dada pelas translações de \tilde{F} em \mathbb{R} , temos uma segunda direção dada pelo campo de Reeb X_λ e, portanto, \mathcal{M} se projeta em S^3 como uma família a 1-parâmetro de superfícies mergulhadas.

Usando a definição do índice de Fredholm, fornecida em (1.52), podemos obter algumas conclusões sobre os limites assintóticos de uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathbb{R} \times S^3$. Seja $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ tal que $T_c(\tilde{F}) \cap \tilde{F} = \emptyset, \forall c \neq 0$, e considere a decomposição do conjunto Γ dos furos de \tilde{F} como

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- = \Gamma_+ \cup \Gamma_-^1 \cup \Gamma_-^2 \cup \Gamma_-^3,$$

onde Γ_-^i denota o conjunto dos furos $z \in \Gamma_-$ para os quais o índice de Conley-Zehnder do limite assintótico de \tilde{F} em z é igual a $i \in \{1, 2, 3\}$. Seja CZ^+ o índice de Conley-Zehnder do limite assintótico associado ao único furo positivo de \tilde{F} . Como $\text{Fred}(\tilde{F}) \geq 1$ pela Definição 2.1.8, obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Fred}(\tilde{F}) &= \text{CZ}^+ - \#\Gamma_-^1 - 2\#\Gamma_-^2 - 3\#\Gamma_-^3 - 2 + 1 + \#\Gamma_-^1 + \#\Gamma_-^2 + \#\Gamma_-^3 \\ &= \text{CZ}^+ - \#\Gamma_-^2 - 2\#\Gamma_-^3 - 1 \geq 1, \end{aligned}$$

donde segue que

$$0 \leq \#\Gamma_-^2 + 2\#\Gamma_-^3 \leq \text{CZ}^+ - 2 \quad (2.1)$$

e, portanto, $\text{CZ}^+ \in \{2, 3\}$. Neste caso, (2.1) nos diz ainda que

$$\begin{aligned} \text{CZ}^+ = 3 &\Rightarrow \#\Gamma_-^2 + 2\#\Gamma_-^3 \in \{0, 1\} \Rightarrow \#\Gamma_-^3 = 0 \text{ e } \#\Gamma_-^2 \in \{0, 1\} \\ \text{CZ}^+ = 2 &\Rightarrow \#\Gamma_-^2 + 2\#\Gamma_-^3 = 0 \Rightarrow \#\Gamma_-^2 = \#\Gamma_-^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Observe que não há restrições quanto à cardinalidade do conjunto Γ_-^1 .

Considerando as possibilidades obtidas em (2.2), podemos dividir as folhas $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ satisfazendo $T_c(\tilde{F}) \cap \tilde{F} = \emptyset$, para todo $c \neq 0$, em três tipos:

Tipo	CZ^+	$\#\Gamma_-^1$	$\#\Gamma_-^2$	$\#\Gamma_-^3$	$\text{Fred}(\tilde{F})$
$(3, 1_1, \dots, 1_N)$	3	N	0	0	2
$(3, 2, 1_1, \dots, 1_{N-1})$	3	$N - 1$	1	0	1
$(2, 1_1, \dots, 1_N)$	2	N	0	0	1

Nesta tabela, N é o número de furos negativos de $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ e na notação $(CZ^+, CZ_1^-, \dots, CZ_N^-)$, usada para representar o tipo da folha \tilde{F} , a primeira entrada CZ^+ é o índice de Conley-Zehnder do limite assintótico associado ao único furo positivo de \tilde{F} e as outras entradas CZ_k^- , com $k \in \{1, \dots, N\}$, são os índices de Conley-Zehnder dos limites assintóticos associados aos furos negativos de \tilde{F} , ordenados de modo que $CZ_k^- \geq CZ_{k+1}^-$.

Em [27], Hofer, Wysocki e Zehnder garantem a existência de uma folheação estável de energia finita para estruturas quase-complexas genéricas na simplectização da 3-esfera *tight*. E mais ainda, provam que a projeção desta folheação em S^3 produz um sistema global de seções transversais para o fluxo de Reeb.

Teorema 2.1.9. [27, Teorema 1.6, Proposição 1.7 e Corolário 1.8] *Seja $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$ uma forma de contato não-degenerada em S^3 , onde $f : S^3 \rightarrow (0, \infty)$ é uma função suave. Então existe um subconjunto denso $\mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ na topologia C^∞ tal que, para qualquer $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, a estrutura quase-complexa $\tilde{J} = (\lambda, J)$ admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}$ na simplectização $\mathbb{R} \times S^3$. Além disso, a projeção de $\tilde{\mathcal{F}}$ em S^3 , via a projeção $p : \mathbb{R} \times S^3 \rightarrow S^3$ no segundo fator, é um sistema global de seções transversais para o fluxo de X_λ .*

Para finalizar, vamos comentar sobre o caso particular em que a forma de contato $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$ em S^3 é fracamente convexa, como na definição a seguir. Este é o caso que estaremos interessados ao longo deste trabalho.

Definição 2.1.10. *Uma forma de contato λ definida em S^3 é dita fracamente convexa se, para toda órbita periódica P do campo de Reeb X_λ , o índice de Conley-Zehnder $CZ(P)$ é maior ou igual a 2.*

Suponha que λ seja uma forma de contato não-degenerada e fracamente convexa sobre a 3-esfera *tight*. Assim, podemos descrever com mais detalhes a folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}$ e o sistema global de seções transversais $\mathcal{F} := p(\tilde{\mathcal{F}})$ obtidos no Teorema 2.1.9, uma vez que os limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 1 são excluídos. Neste caso, as folhas $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ podem ser:

Do tipo (3): \tilde{F} é um plano de energia finita em $\mathbb{R} \times S^3$, assintótico a uma órbita P de índice 3 em seu furo positivo, e sua projeção $F \in \mathcal{F}$ pertence a uma família a 1-parâmetro de planos em S^3 com o mesmo limite assintótico P .

Do tipo (3, 2): \tilde{F} é um cilindro de energia finita em $\mathbb{R} \times S^3$, assintótico a uma órbita P de índice 3 em seu furo positivo e a uma órbita Q de índice 2 em seu furo negativo, e sua projeção $F \in \mathcal{F}$ é um cilindro rígido em S^3 que conecta P e Q .

Do tipo (2): \tilde{F} é um plano de energia finita em $\mathbb{R} \times S^3$, assintótico a uma órbita P de índice 2 em seu furo positivo, e sua projeção $F \in \mathcal{F}$ é um plano rígido em S^3 cujo bordo é dado por P .

Cilindro sobre uma órbita periódica: \tilde{F} possui um furo positivo e um furo negativo, ambos associados ao mesmo limite assintótico P de índice 2 ou 3, e sua projeção $F \in \mathcal{F}$ em S^3 é dada exatamente por P .

Desta descrição segue, primeiramente, que o conjunto singular \mathcal{P} do sistema de seções transversais $\mathcal{F} = p(\tilde{\mathcal{F}})$ contém pelo menos uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 3, já que \mathcal{F} deve folhear toda a esfera S^3 . Se \mathcal{P} contém apenas uma órbita periódica, que denotaremos por P_3 para indicar seu índice de Conley-Zehnder, então $\mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$ é uma S^1 -família de planos assintóticos à P_3 que folheia $S^3 \setminus P_3$. Neste caso, cada folha de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$ é uma seção global do tipo disco para o fluxo de Reeb em S^3 e, portanto, P_3 é o *binding* de uma decomposição em livro aberto. Reveja Figura 2.3.

Agora vamos descrever um dos principais objetos deste trabalho, o qual chamamos, como em [12], de *folheação 3 – 2 – 3*. Nesta denominação, os números correspondem ao índice de Conley-Zehnder dos *bindings* da folheação. Acompanhe a construção tendo em vista a Figura 2.6. Suponha que o conjunto singular \mathcal{P} do sistema de seções transversais $\mathcal{F} = p(\tilde{\mathcal{F}})$ seja formado por mais de uma órbita periódica. Nesta situação \mathcal{P} , além de conter uma órbita de índice 3, certamente contém uma órbita periódica P_2 de índice 2 e, além disso, o sistema de seções transversais \mathcal{F} contém um par de planos rígidos U^1 e U^2 , ambos assintóticos à P_2 , tais que $U := U^1 \cup P_2 \cup U^2$ é uma 2-esfera topológica mergulhada que separa S^3 em duas componentes disjuntas M e M' , ou seja, $S^3 \setminus U = M \dot{\cup} M'$. Cada uma destas duas componentes contém um *binding* de \mathcal{F} , $P_3 \subset M$ e $P'_3 \subset M'$ ambas de índice 3, e contém ainda um cilindro rígido de \mathcal{F} , $V \subset M$ e $V' \subset M'$ conectando respectivamente P_3 com P_2 e P'_3 com P_2 . Suponha que P_2 seja a única órbita periódica em \mathcal{P} cujo índice de Conley-Zehnder é 2. Neste caso, P_3 é o único *binding* de \mathcal{F} contido em M , P'_3 é o único *binding* de \mathcal{F} contido em M' e, mais ainda, \mathcal{F} contém famílias de planos D_τ e D'_τ , $\tau \in (0, 1)$, assintóticos respectivamente à P_3 e à P'_3 , que folheiam respectivamente $M \setminus (P_3 \cup V)$ e $M' \setminus (P'_3 \cup V')$. Nos pontos extremos 0 e 1 do intervalo de parâmetros $(0, 1)$, a família D_τ se quebra respectivamente sobre $U^1 \cup P_2 \cup V$ e $U^2 \cup P_2 \cup V$ e a família D'_τ , por sua vez, se quebra respectivamente sobre $U^1 \cup P_2 \cup V'$ e $U^2 \cup P_2 \cup V'$. A noção de quebra de uma família a 1-parâmetro ficará mais precisa na Subseção 3.5.3. Para maiores detalhes sobre estas afirmações, veja a referência [27].

Definição 2.1.11. *O sistema global de seções transversais \mathcal{F} que acabamos de descrever é chamado de folheação 3 – 2 – 3 para o fluxo de X_λ em S^3 .*

Uma consequência dinâmica extremamente interessante que segue da existência de uma folheação 3 – 2 – 3 para o fluxo de X_λ na esfera S^3 é que o fluxo de Reeb admite pelo menos

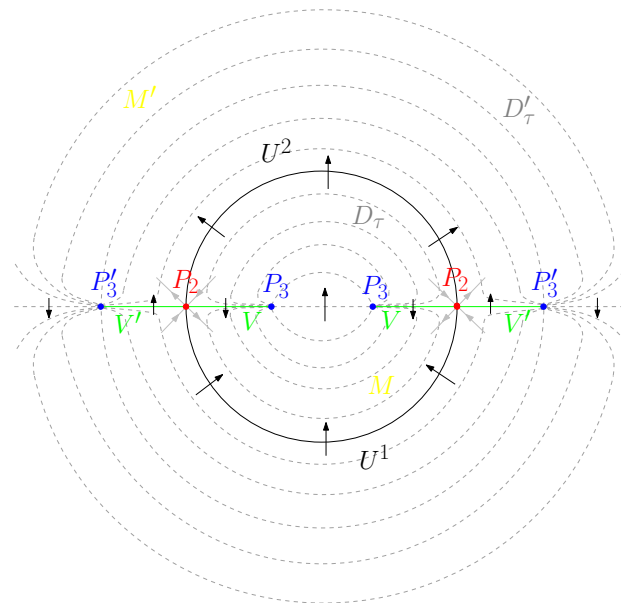


Figura 2.6: Corte de uma folheação 3 – 2 – 3 em S^3 . Nesta ilustração temos, mais uma vez, que pontos representam os *bindings* da folheação, linhas tracejadas correspondem às folhas que aparecem em famílias a 1-parâmetro e linhas contínuas representam as folhas rígidas. As setas pretas apontam na direção do campo de Reeb X_λ . As variedades estável e instável locais do *binding* P_2 também estão representadas nesta figura.

duas órbitas homoclínicas à P_2 , uma delas contida em M e a outra contida em M' , seguindo ainda as notações da Figura 2.6. Este fato, devido a Hofer, Wysocki e Zehnder, segue de [27, Proposição 7.5].

2.2 Conjuntos singulares estritamente convexos

Diversos trabalhos na área de dinâmica Hamiltoniana mostram que, a partir de condições geométricas sobre um dado nível de energia, é possível obter conclusões sobre o comportamento dinâmico do fluxo Hamiltoniano. Na Seção 2.1, vimos que níveis de energia regulares estritamente convexos difeomorfos à esfera S^3 , os chamados ovalóides, admitem uma decomposição em livro aberto, cujo *binding* é uma órbita periódica não-nó do fluxo, com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder 3 , e cujas folhas são seções globais do tipo disco para o fluxo. Este resultado, como comentamos, foi provado por H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder em [33] no ano de 1998 com o auxílio da teoria de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações. Alguns anos depois, C. Grotta-Ragazzo e P.A.S. Salomão passaram a analisar níveis de energia não-regulares homeomorfos à S^3 , que admitem um único ponto de equilíbrio do tipo sela-centro, com a propriedade geométrica de ser estritamente convexo no complementar desta singularidade. A existência de um ponto crítico, neste caso, cria muitas dificuldades para a análise global da dinâmica Hamiltoniana. Em 2006, Grotta-Ragazzo e Salomão [22] provaram que estes níveis singulares também possuem uma órbita periódica não-nó do fluxo com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder 3 . Mais ainda, no caso particular em que o fluxo Hamiltoniano é integrável e o sela-centro admite

uma órbita homoclínica do fluxo, os mesmos autores mostraram, em [23], que estes níveis críticos estritamente convexos também possuem uma seção global do tipo disco para o fluxo.

E, dando continuidade a este segmento, N.V. de Paulo e P.A.S. Salomão estudaram, em [12], a dinâmica Hamiltoniana em níveis de energia imediatamente acima de um conjunto singular estritamente convexo contendo um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro, como vamos detalhar no restante desta tese.

Na presente seção, descrevemos localmente o comportamento do fluxo Hamiltoniano em torno de um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro. Em particular, vemos que as variedades estável e instável de uma singularidade deste tipo são ambas 1-dimensionais, enquanto sua variedade central, de dimensão 2, é folheada por órbitas periódicas do fluxo, cada uma delas, por sua vez, tendo cilindros de dimensão 2 como variedades estável e instável. Questões envolvendo a existência de órbitas homoclínicas a um sela-centro, ou então homoclínicas a sua variedade central, são frequentemente investigadas na literatura. Entre inúmeras referências, podemos citar, por exemplo, [3, 5, 6, 21, 42, 47]. Apresentamos também a definição de conjunto singular estritamente convexo e discutimos brevemente algumas propriedades geométricas e dinâmicas que tais conjuntos satisfazem. O objetivo primordial desta seção é elaborar as hipóteses que serão assumidas em nosso resultado principal, cujo enunciado se encontra na Seção 2.3, fazendo uso das ferramentas desenvolvidas em [22, 52].

Iniciamos com a definição de um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro. Para isso, considere $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana e ω_0 a forma simplética canônica em \mathbb{R}^4 definida por $\sum_{i=1}^2 dy_i \wedge dx_i$, onde $w = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ são coordenadas de \mathbb{R}^4 . Já vimos que, neste caso, o campo Hamiltoniano associado à H é dado por

$$X_H = J_0 \nabla H, \quad \text{com } J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.2.1. Dizemos que um ponto de equilíbrio $p_c \in \mathbb{R}^4$ do sistema Hamiltoniano $\dot{w}(t) = X_H(w(t))$ é do tipo sela-centro se a matriz $J_0 \text{Hess}H(p_c)$, que representa $dX_H(p_c)$, possui dois autovalores reais α e $-\alpha$ e dois autovalores imaginários puros ωi e $-\omega i$, com $\alpha, \omega > 0$.

Uma boa fonte de exemplos para este tipo de ponto de equilíbrio pode ser encontrada na classe dos Hamiltonianos que têm a forma “energia cinética mais energia potencial”:

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + V(x_1, x_2). \quad (2.3)$$

Como vimos na Seção 1.1, estas funções Hamiltonianas representam a energia total de uma partícula em \mathbb{R}^2 , cuja massa é igual a 1, submetida a uma força conservativa $F = -\nabla V$. De modo geral, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.2.2. Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana dada por

$$H(x, y) = \frac{g(y, y)}{2} + V(x),$$

onde g é um produto interno de \mathbb{R}^2 , $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e V é uma função potencial suave em $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se $x_c = (x_c^1, x_c^2) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto crítico do tipo sela para V , então $p_c = (x_c^1, x_c^2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ é um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro para H .

Demonstração. Se $x_c = (x_c^1, x_c^2)$ um ponto crítico do tipo sela para V , então $\nabla V(x_c) = 0$ e $\det \text{Hess}V(x_c) < 0$. Partindo destes fatos, vamos analisar $\nabla H(p_c)$ e os autovalores da matriz $J_0 \text{Hess}H(p_c)$. Primeiramente observe que

$$\nabla H(x, y) = (\partial_{x_1} V(x), \partial_{x_2} V(x), g(y, (1, 0)), g(y, (0, 1)))$$

e, portanto, $\nabla H(p_c) = (\nabla V(x_c), g(0, (1, 0)), g(0, (0, 1))) = 0$, ou seja, p_c é um ponto crítico de H .

Além disso, a matriz hessiana de H é dada por

$$\text{Hess}H(x, y) = \begin{pmatrix} \text{Hess}V(x) & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix},$$

onde $G = (g^{ij})_{i,j=1,2}$ é a matrix que representa o produto interno g com relação à base canônica de \mathbb{R}^2 . Sendo assim, após alguns cálculos, vemos que o polinômio característico $q(\lambda)$ associado à matriz $J_0 \text{Hess}H(p_c)$ é o seguinte

$$q(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 (g^{11} \partial_{x_1 x_1} V(x_c) + 2g^{12} \partial_{x_1 x_2} V(x_c) + g^{22} \partial_{x_2 x_2} V(x_c)) + \det G \det \text{Hess}V(x_c).$$

Note que, se g fosse o produto Euclidiano de \mathbb{R}^2 , então o coeficiente de $q(\lambda)$ acompanhando λ^2 , que denotaremos por B , se reduziria ao traço da matriz $\text{Hess}V(x_c)$ e o seu termo constante, que chamaremos de C , seria dado pelo determinante de $\text{Hess}V(x_c)$.

Como g é uma aplicação bilinear positiva, temos que $\det G > 0$. Portanto, o termo constante C deste polinômio característico é negativo, visto que $\det \text{Hess}V(x_c) < 0$.

Seja $\beta = \lambda^2$. Assim o polinômio característico $q(\lambda)$ se reduz ao polinômio de grau 2 $p(\beta) = \beta^2 + \beta B + C$. Uma vez que $C < 0$ e, conseqüentemente, $B^2 - 4C > 0$, o polinômio $p(\beta)$ possui duas raízes reais com sinais opostos, digamos $\beta_1 = \alpha^2 > 0$ e $\beta_2 = -\omega^2 < 0$, onde α e ω são números reais positivos. Neste caso, as raízes de $q(\lambda)$ são dadas por

$$\lambda_1 = \sqrt{\beta_1} = \alpha, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\beta_1} = -\alpha, \quad \lambda_3 = \sqrt{\beta_2} = \omega i, \quad \lambda_4 = -\sqrt{\beta_2} = -\omega i.$$

Logo, p_c é um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro do sistema Hamiltoniano associado à H segundo a Definição 2.2.1. □

Considere $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana que admite um ponto de equilíbrio p_c do tipo sela-centro. Ao longo deste trabalho, assumiremos duas hipóteses essenciais sobre H : a primeira delas, enunciada logo abaixo, é uma condição local que garante a integrabilidade do campo Hamiltoniano X_H em torno do sela-centro p_c e a segunda, apresentada mais adiante, trata-se de uma condição geométrica relacionada com a curvatura do nível de energia singular de H que contém p_c . Em poucas palavras, a primeira hipótese admite a existência

de coordenadas canônicas em torno do sela-centro, nas quais a função Hamiltoniana H pode ser escrita de um modo especial, possivelmente após uma troca de sinal de H e/ou uma soma de constante.

Hipótese 1 (Coordenadas locais). *Existe uma mudança de coordenadas simplética $\varphi : V \rightarrow U$ centrada em p_c , onde $V, U \subset \mathbb{R}^4$ são vizinhanças respectivamente de 0 e p_c , tal que, nas novas coordenadas $(q_1, q_2, p_1, p_2) = \varphi^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2)$, a forma simplética em V é dada por $\omega_0 = \sum_{i=1}^2 dp_i \wedge dq_i$ e a função Hamiltoniana $K := H \circ \varphi$ assume a seguinte forma normal*

$$K(q_1, q_2, p_1, p_2) = K(I_1, I_2) = -\alpha I_1 + \omega I_2 + R(I_1, I_2), \quad (2.4)$$

sendo que

$$I_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1, \quad I_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2}, \quad R(I_1, I_2) = \mathcal{O}(I_1^2 + I_2^2)$$

e α e ω são os números reais apresentados na Definição 2.2.1.

A motivação para a Hipótese 1 vem da seguinte observação.

Observação 2.2.3. *J. Moser mostrou em [49] que se H for uma função real-analítica em torno do sela-centro p_c , então existe uma mudança de coordenadas real-analítica φ de modo que as soluções do sistema Hamiltoniano associado à H são dadas, nas novas coordenadas $(q_1, q_2, p_1, p_2) = \varphi^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2)$, pelas soluções do sistema Hamiltoniano associado à K . A princípio, a mudança de coordenadas φ pode não ser simplética. Entretanto, H. Rüssmann provou em [51] que a existência de uma mudança de coordenadas real-analítica φ tal como garantida por Moser, implica a existência de uma mudança de coordenadas real-analítica simplética $\bar{\varphi}$ que coloca H na forma normal (2.4) em torno de p_c . Esta questão foi abordada também nas referências [11, 19]. Concluímos desta observação que uma condição suficiente para que a Hipótese 1 seja satisfeita é que a função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ seja real-analítica próxima ao sela-centro p_c .*

Por ser uma aplicação simplética, a mudança de coordenadas φ da Hipótese 1 fornece uma conjugação entre os campos Hamiltonianos X_K e $X_H|_U$ associados respectivamente à K e à $H|_U$. De fato, pela definição de campo Hamiltoniano, temos que

$$i_{X_K} \omega_0 = -dK = -d(\varphi^* H) = -\varphi^* dH = \varphi^* i_{X_H} \omega_0 = i_{\varphi^* X_H} \varphi^* \omega_0 = i_{\varphi^* X_H} \omega_0,$$

donde segue que $\varphi^*(X_H|_U) = X_K$. Sendo assim, podemos usar a forma normal K , dada por (2.4), para analisar o comportamento do fluxo Hamiltoniano de H em torno do equilíbrio do tipo sela-centro p_c .

O sistema Hamiltoniano associado à K é dado por

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \partial_{p_1} K = \partial_{I_1} K q_1 = -(\alpha - \partial_{I_1} R) q_1 \\ \dot{q}_2 &= \partial_{p_2} K = \partial_{I_2} K p_2 = (\omega + \partial_{I_2} R) p_2 \\ \dot{p}_1 &= -\partial_{q_1} K = -\partial_{I_1} K p_1 = (\alpha - \partial_{I_1} R) p_1 \\ \dot{p}_2 &= -\partial_{q_2} K = -\partial_{I_2} K q_2 = -(\omega + \partial_{I_2} R) q_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Usando este sistema, mostramos facilmente que as funções I_1 e I_2 são integrais primeiras para o fluxo de X_K , isto é, I_1 e I_2 são constantes ao longo das soluções de (2.5). Além disso, uma solução $z(t) = (q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$ do sistema Hamiltoniano (2.5) satisfaz

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ p_1(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-\bar{\alpha}t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\alpha}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(0) \\ p_1(0) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q_2(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\bar{\omega}t) & \text{sen}(\bar{\omega}t) \\ -\text{sen}(\bar{\omega}t) & \cos(\bar{\omega}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $\bar{\alpha} = \alpha - \partial_{I_1} R(I_1, I_2)$ e $\bar{\omega} = \omega + \partial_{I_2} R(I_1, I_2)$ são constantes ao longo das trajetórias. Concluimos então que a projeção do fluxo sobre o plano $q_1 p_1$ tem um comportamento de sela, enquanto sua projeção sobre o plano $q_2 p_2$ se comporta como um centro, justificando assim a sua denominação. Veja Figura 2.7.

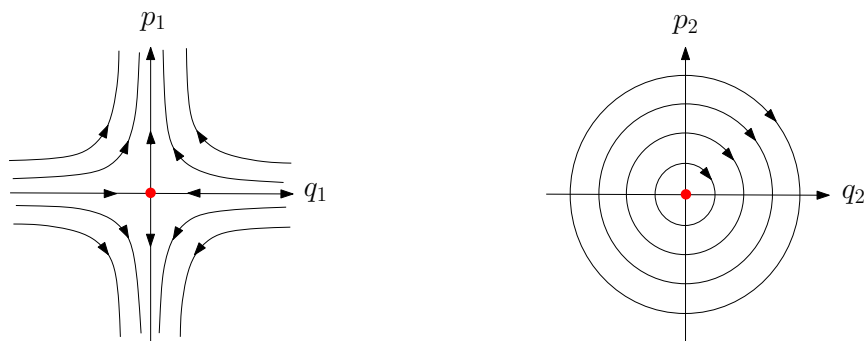


Figura 2.7: Projeções do fluxo Hamiltoniano em torno de um equilíbrio do tipo sela-centro.

O nível de energia $K^{-1}(0)$ contém o sela-centro $0 \in V$, bem como suas variedades estável e instável dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in V / p_1 = q_2 = p_2 = 0\} \\ W^u(0) &= \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in V / q_1 = q_2 = p_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Uma vez que $K(0, 0) = 0$ e $\partial_{I_1} K(0, 0) = -\alpha + \partial_{I_1} R(0, 0) = -\alpha \neq 0$, podemos usar o Teorema da Função Implícita para afirmar que, nos pontos do nível de energia $K^{-1}(0)$, I_1 pode ser vista como uma função de I_2 para valores de I_1 e I_2 próximos de zero. Além disso, $I_1(0) = 0$ e $\partial_{I_2} I_1(0) = -\frac{\partial_{I_2} K(0,0)}{\partial_{I_1} K(0,0)} = \frac{\omega}{\alpha}$ e, portanto, para valores pequenos de I_1 e I_2 , temos

$$I_1(I_2) = \frac{\omega}{\alpha} I_2 + r(I_2), \quad \text{com } |r(I_2)| \leq m I_2^2$$

para algum $m > 0$. Disto segue que, em $K^{-1}(0)$, vale a desigualdade

$$I_1(I_2) = \frac{\omega}{\alpha} I_2 + r(I_2) \geq \frac{\omega}{\alpha} I_2 - m I_2^2 \geq 0 \quad (2.7)$$

para valores de I_1 e $I_2 \geq 0$ próximos de zero. Como $I_2 = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2} \geq 0$ e $I_1 = q_1 p_1$, concluímos de (2.7) que a projeção do nível de energia $K^{-1}(0)$ sobre o plano $q_1 p_1$ se dá nos 1º e 3º quadrantes.

Da equação

$$-\alpha q_1 p_1 + \frac{\omega}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \mathcal{O}((q_1^2 p_1^2 + (q_2^2 + p_2^2)^2)) = E, \quad (2.8)$$

satisfeita pelos pontos $(q_1, q_2, p_1, p_2) \in K^{-1}(E)$ para alguma energia E , percebemos que o nível $K^{-1}(E)$ é invariante pela ação de S^1 sobre o plano $q_2 p_2$ e também é simétrico sob a involução $(q_1, p_1) \mapsto (-q_1, -p_1)$ no plano $q_1 p_1$.

Na Figura 2.9, representamos os níveis de energia $K^{-1}(E)$ numa vizinhança do sela-centro para valores pequenos de $|E|$ e, na Figura 2.8, apresentamos uma descrição local destes níveis de energia projetados no plano $q_1 p_1$. Vemos que, para $E < 0$, $K^{-1}(E)$ contém duas componentes que se projetam respectivamente no primeiro e no terceiro quadrantes de $q_1 p_1$ e, quando $E = 0$, estas componentes se encontram no sela-centro. Para $E > 0$, $K^{-1}(E)$ contém apenas uma componente que corresponde topologicamente a uma soma conexa das duas componentes do nível de energia para $E < 0$.

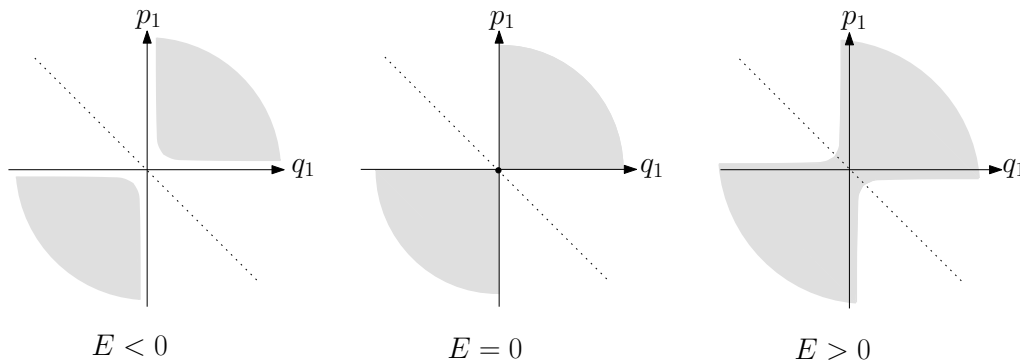


Figura 2.8: Projeções dos níveis de energia $K^{-1}(E)$ no plano $q_1 p_1$.

A variedade central do sela-centro $0 \in V$, dada por

$$W^c(0) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in V / q_1 = p_1 = 0\},$$

é folheada por uma família a um parâmetro de órbitas periódicas P_E do fluxo Hamiltoniano, cada uma delas contida num nível de energia $K^{-1}(E)$, com $E > 0$ suficientemente pequeno.

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, podemos usar o Teorema da Função Implícita para escrever I_2 como uma função do par (I_1, E) no nível de energia $K^{-1}(E)$, para valores pequenos de E , I_1 e I_2 . De fato, definindo a função $C(I_1, I_2, E) = K(I_1, I_2) - E$, temos que $C(0, 0, 0) = 0$ e $\partial_{I_2} C(0, 0, 0) = \partial_{I_2} K(0, 0) = \omega \neq 0$. Logo, encontramos uma função $I_2 = I_2(I_1, E)$ satisfazendo $I_2(0, 0) = 0$, $\partial_{I_1} I_2(0, 0) = -\frac{\partial_{I_1} C(0, 0, 0)}{\partial_{I_2} C(0, 0, 0)} = \frac{\alpha}{\omega}$ e $\partial_E I_2(0, 0) =$

$-\frac{\partial_E C(0,0,0)}{\partial_{I_2} C(0,0,0)} = \frac{1}{\omega}$, donde segue que

$$I_2(I_1, E) = \frac{\alpha}{\omega} I_1 + \frac{1}{\omega} E + \mathcal{O}(I_1^2 + E^2) \quad (2.9)$$

para valores de E , I_1 e I_2 próximos de zero. Sendo assim, para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, podemos descrever a órbita periódica P_E , contida na variedade central do sela-centro, da seguinte forma:

$$P_E = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \tilde{V} / q_1 = p_1 = 0 \text{ e } q_2^2 + p_2^2 = 2I_2(0, E)\} \subset \{K = E, E > 0\}, \quad (2.10)$$

onde $\tilde{V} \subset V$ é uma vizinhança pequena da origem. Observe, por (2.9), que $I_2(0, E) \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow 0$ e, portanto, P_E se aproxima do sela-centro 0 quando a energia $E > 0$ tende à zero. Costumamos dizer que P_E está situada na “região de pescoço” do nível de energia $K^{-1}(E)$, $E > 0$. Veja Figura 2.9.

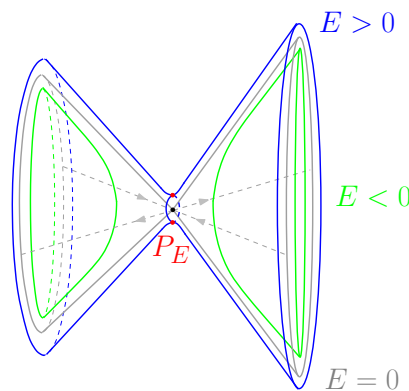


Figura 2.9: Descrição local dos níveis de energia $K^{-1}(E)$.

Localmente, as variedades estável e instável de cada órbita periódica P_E , representadas na Figura 2.10, são cilindros de dimensão 2 dados respectivamente por

$$\begin{aligned} W_E^s(P_E) &= \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \tilde{V} / p_1 = 0 \text{ e } q_2^2 + p_2^2 = 2I_2(0, E)\} \subset \{K = E, E > 0\} \\ W_E^u(P_E) &= \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \tilde{V} / q_1 = 0 \text{ e } q_2^2 + p_2^2 = 2I_2(0, E)\} \subset \{K = E, E > 0\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

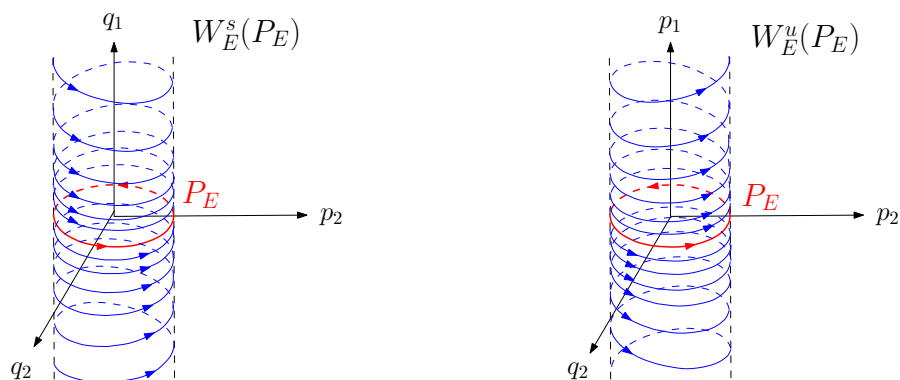


Figura 2.10: Representação local das variedades estável e instável da órbita periódica P_E .

Para cada $E > 0$ pequeno, P_E pode ser vista como o equador da 2-esfera definida por $N_E^0 := \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$. Para compreender esta afirmação, vamos primeiramente mostrar que, de modo geral, os cortes de um nível de energia $K^{-1}(E)$ ao longo de planos da forma $\{q_1 + p_1 = \delta\}$, para $E, |\delta| \geq 0$ suficientemente pequenos, são de fato esferas de dimensão 2 contidas em $K^{-1}(E)$ quando E e δ não se anulam simultaneamente.

Lema 2.2.4. *Para quaisquer $E, |\delta| \geq 0$ suficientemente pequenos satisfazendo $E^2 + \delta^2 \neq 0$,*

$$N_E^\delta := \{q_1 + p_1 = \delta\} \cap K^{-1}(E)$$

é uma 2-esfera mergulhada em $K^{-1}(E)$.

Demonstração. Substituindo $p_1 = \delta - q_1$ em $K(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$, dada por (2.8), obtemos

$$-\alpha q_1(\delta - q_1) + \frac{\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \mathcal{O}(q_1^2(\delta - q_1)^2 + (q_2^2 + p_2^2)^2) = E.$$

Completando quadrados, vemos que $-q_1(\delta - q_1) = (q_1 - \frac{\delta}{2})^2 - \frac{\delta^2}{4}$ e, portanto, a equação anterior se reduz à

$$\alpha \left(q_1 - \frac{\delta}{2} \right)^2 + \frac{\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \mathcal{O}(q_1^2(\delta - q_1)^2 + (q_2^2 + p_2^2)^2) = E + \frac{\alpha\delta^2}{4}. \quad (2.12)$$

Seja $k = \sqrt{E + \frac{\alpha\delta^2}{4}}$. Devido às hipóteses feitas sobre os valores E e δ , temos que k é um número estritamente positivo. Considerando novas variáveis definidas por

$$\bar{q}_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \left(q_1 - \frac{\delta}{2} \right) \quad \bar{q}_2 = \frac{\sqrt{\omega}}{k\sqrt{2}} q_2 \quad \bar{p}_2 = \frac{\sqrt{\omega}}{k\sqrt{2}} p_2$$

a equação (2.12) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \bar{p}_2^2 + \mathcal{O}(k^2(\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \bar{p}_2^2 + 1)) = 1.$$

Se fixarmos qualquer domínio limitado para as coordenadas $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{p}_2)$, esta última equação assume a forma

$$\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \bar{p}_2^2 + \mathcal{O}(k^2) = 1,$$

que descreve uma 2-esfera mergulhada nas coordenadas $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{p}_2)$, quando $E, |\delta| \geq 0$ são suficientemente pequenos. \square

Vamos descrever a 2-esfera N_E^δ do Lema 2.2.4 de um modo mais intuitivo. Acompanhe a construção a seguir tendo em vista a Figura 2.11, que ilustra o caso em que $E > 0$ e $\delta = 0$.

Vimos em (2.9) que, no nível de energia $K^{-1}(E)$, é possível escrever I_2 como uma função de (I_1, E) , para valores pequenos de E, I_1 e I_2 , da seguinte forma

$$I_2(I_1, E) = \frac{\alpha}{\omega} I_1 + \frac{1}{\omega} E + \mathcal{O}(I_1^2 + E^2).$$

Então, fixado $E \geq 0$ suficientemente pequeno, vemos que existe $I_1^-(E) \leq 0$ tal que $I_2(I_1^-(E), E) = 0$ e $I_1 \geq I_1^-(E)$ para valores pequenos de I_1 e $I_2 \geq 0$. Fixe agora $|\delta| \geq 0$ suficientemente pequeno de modo que E e δ não se anulem simultaneamente. O conjunto $\{q_1 + p_1 = \delta\} \cap K^{-1}(E)$, que denotamos por N_E^δ , se projeta no plano $q_1 p_1$ sobre um segmento $I_{\delta, E}$, cujo ponto médio corresponde ao círculo determinado em $K^{-1}(E)$ por $q_1 = p_1 = \frac{\delta}{2}$ e $q_2^2 + p_2^2 = 2I_2^+(\delta, E)$, onde $I_2^+(\delta, E) := I_2\left(\frac{\delta^2}{4}, E\right)$. Cada ponto (q_1, p_1) no interior do segmento $I_{\delta, E}$ corresponde ao círculo determinado em $K^{-1}(E)$ por $I_1 = q_1 p_1 = q_1(\delta - q_1)$ e $I_2 = I_2(I_1, E) \leq I_2^+(\delta, E)$. Tais círculos se colapsam nos extremos de $I_{\delta, E}$ em pontos de $K^{-1}(E)$ que correspondem a $I_1 = I_1^-(E)$ e $I_2 = 0$. Obtemos assim a 2-esfera N_E^δ .

Observe que, no caso descrito pela Figura 2.11, o equador da esfera N_E^0 , com $E > 0$ suficientemente pequeno, é dado exatamente pela órbita periódica P_E que está contida na variedade central do ponto de equilíbrio do tipo sela-centro. Denotamos por $U_{1, E}$ e $U_{2, E}$ os hemisférios da 2-esfera $N_E^0 = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$ dados por

$$\begin{aligned} U_{1, E} &:= \{q_1 + p_1 = 0, q_1 < 0\} \cap K^{-1}(E) \\ U_{2, E} &:= \{q_1 + p_1 = 0, q_1 > 0\} \cap K^{-1}(E). \end{aligned} \tag{2.13}$$

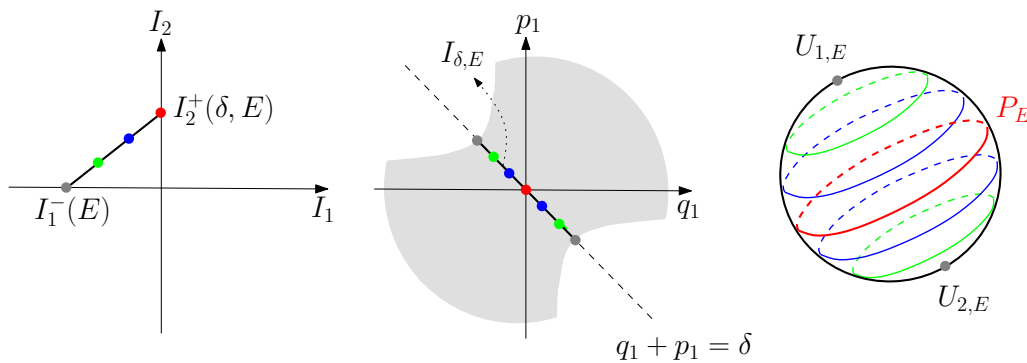


Figura 2.11: Na terceira figura representamos a 2-esfera $N_E^0 \subset K^{-1}(E)$, $E > 0$ pequeno, com seus hemisférios $U_{1, E}$ e $U_{2, E}$ e seu equador P_E . Na segunda figura temos a projeção $I_{0, E}$ de N_E^0 no plano $q_1 p_1$ e, na primeira figura, vemos a relação entre I_2 e I_1 sobre os pontos da esfera N_E^0 , para $E > 0$ fixado. Para um bom entendimento, é importante fazer a associação de cores correspondentes em cada uma das três figuras.

Discutiremos agora a segunda hipótese com relação à função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ que será assumida no decorrer deste trabalho. Para isso, continuamos supondo que o fluxo Hamiltoniano associado à H admite um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c \in \mathbb{R}^4$ e que a Hipótese 1 é satisfeita, de maneira que ainda possamos utilizar a forma normal (2.4) para estudar a dinâmica Hamiltoniana de X_H em torno de p_c .

Pelo Lema 2.2.4, temos que $N_0^\delta = \{q_1 + p_1 = \delta\} \cap K^{-1}(0)$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, é uma 2-esfera contida no nível de energia singular $K^{-1}(0)$ que é bordo da 3-bola topológica fechada dada por

$$B_0^\delta := \{0 \leq q_1 + p_1 \leq \delta\} \cap K^{-1}(0).$$

Note que B_0^δ contém uma singularidade em seu interior que corresponde ao ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $z = 0$.

Fixando $\delta > 0$ pequeno, assumamos que a 2-esfera $\varphi(N_0^\delta) \subset H^{-1}(0)$, onde φ é a mudança de coordenadas da Hipótese 1, seja bordo também de uma 3-bola mergulhada fechada $B_\delta \subset H^{-1}(0)$ que contém apenas pontos regulares da função Hamiltoniana H e tal que, em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) , B_δ se projeta em $\{q_1 + p_1 \geq \delta\}$ no plano $q_1 p_1$. Neste caso, $\varphi(B_0^\delta)$ e B_δ são 3-bolas fechadas que se intersectam ao longo da 2-esfera $\varphi(N_0^\delta)$ em $H^{-1}(0)$ e, portanto, $S_0 \subset \mathbb{R}^4$ definido por

$$S_0 := \varphi(B_0^\delta) \cup B_\delta \subset H^{-1}(0) \quad (2.14)$$

é homeomorfo à esfera S^3 e contém o sela-centro p_c como única singularidade. Veja Figura 2.12.

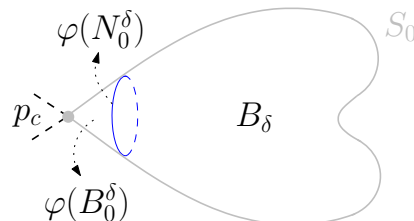


Figura 2.12: Ilustração do conjunto singular S_0 definido em (2.14).

Estamos particularmente interessados no caso em que o conjunto S_0 tem curvatura positiva em seus pontos regulares. Por esta razão definimos:

Definição 2.2.5. *Sejam $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana que satisfaz a Hipótese 1 e $S \subset H^{-1}(0)$ uma componente invariante do fluxo Hamiltoniano. Dizemos que S é um conjunto singular estritamente convexo se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *Existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $h(S) = S^3$.*
2. *H admite uma única singularidade p_c em S , a qual é um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro.*
3. *Para todo ponto regular $w \in \dot{S} := S \setminus \{p_c\}$, a restrição $\text{Hess}H(w)|_{T_w \dot{S}}$ é positiva definida.*

Veja Figura 2.13.

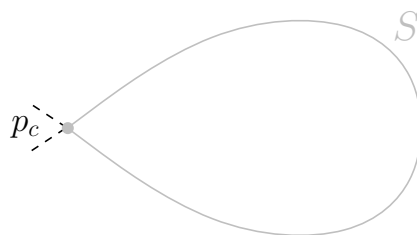


Figura 2.13: Representação de um conjunto singular estritamente convexo.

A segunda hipótese que assumiremos neste trabalho é que o subconjunto $S_0 \subset H^{-1}(0)$, definido em (2.14), é singular estritamente convexo.

Hipótese 2 (Convexidade global). *O ponto de equilíbrio do tipo sela-centro p_c pertence a um conjunto singular estritamente convexo do nível crítico de energia $H^{-1}(0)$.*

Salomão introduziu os conjuntos singulares estritamente convexos em [52] e analisou cuidadosamente suas características geométricas. Foi demonstrado no Lema 10 desta referência que todo conjunto singular estritamente convexo S é bordo de um subconjunto convexo de \mathbb{R}^4 e, além disso, para todo ponto regular $w \in \dot{S} = S \setminus \{p_c\}$, a interseção do espaço afim $\{w\} + T_w \dot{S}$ com S é dada apenas pelo ponto w . Sendo assim, a hipersuperfície \dot{S} é estritamente convexa no sentido regular dado pela Definição 2.1.2. Vimos, logo após a Definição 2.1.2, que a condição local de $\text{Hess}H(w)|_{T_w \dot{S}}$ ser positiva definida para todo $w \in \dot{S}$ equivale à hipótese de \dot{S} ter curvatura positiva em todos os seus pontos. Uma das consequências desta propriedade geométrica é que, para qualquer ponto w_0 pertencente à componente limitada de $\mathbb{R}^4 \setminus S$, os raios partindo de w_0 intersectam S em um único ponto e, nos pontos regulares de S , esta interseção é transversal.

Para os casos em que a função Hamiltoniana H é da forma “energia cinética mais energia potencial”, como em (2.3), o principal resultado de [52] fornece um modo prático e eficiente de decidir se um subconjunto de um nível de energia de H é estritamente convexo. Veja o teorema a seguir.

Teorema 2.2.6 ([52], Teorema 1). *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana dada por (2.3), onde $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^k , com $k \geq 2$. Suponha que $S \subset H^{-1}(E)$ é homeomorfo à S^3 , invariante pelo fluxo e tem no máximo uma singularidade p_c . Seja $B := \pi(S)$ o disco dado pela projeção canônica de S no plano x_1x_2 . Então S é (singular) estritamente convexo se, e somente se,*

$$2(E - V) \det \text{Hess}V + \partial_{x_1} \partial_{x_1} V (\partial_{x_2} V)^2 + \partial_{x_2} \partial_{x_2} V (\partial_{x_1} V)^2 - 2\partial_{x_1} V \partial_{x_2} V \partial_{x_1} \partial_{x_2} V > 0 \quad (2.15)$$

para todo ponto em $B \setminus \pi(p_c)$.

A desigualdade (2.15), deduzida por Salomão, é uma condição equivalente à S ter curvatura positiva em todos os seus pontos regulares. Note que um resultado análogo ao Teorema 2.2.6 no plano \mathbb{R}^2 seria falso. Como contra-exemplo, considere a Figura 2.14, obtida em [52].

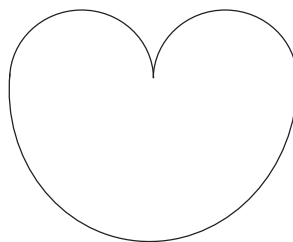


Figura 2.14: Curva fechada em \mathbb{R}^2 com curvatura positiva em todos os pontos, exceto em um ponto singular, que delimita um subconjunto não-convexo do plano.

Em [22], Grotta-Ragazzo e Salomão estudaram a dinâmica Hamiltoniana sobre um conjunto singular estritamente convexo S de \mathbb{R}^4 . Primeiramente, constataram que a curvatura positiva de \dot{S} garante que qualquer solução não-nula do fluxo linearizado transversal ao longo de uma trajetória Hamiltoniana contida em \dot{S} gira sempre no sentido anti-horário com relação ao referencial $\{X_1, X_2\}$ definido em (1.27). Reveja Figura 1.12 e a Proposição 1.3.7. E então, após uma análise minuciosa do fluxo linearizado transversal ao longo da variedade estável do sela-centro p_c , Grotta-Ragazzo e Salomão obtiveram uma estimativa do índice de Conley-Zehnder das órbitas periódicas de S que passam próximo ao sela-centro p_c . Em poucas palavras, mostraram que, quanto mais próximo uma órbita periódica $P \subset S$ passa do sela-centro p_c , maior é o seu índice de Conley-Zehnder.

Teorema 2.2.7 ([22], Teorema 2). *Sejam $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana e $S \subset H^{-1}(0)$ um conjunto singular estritamente convexo. Então, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe uma vizinhança W de p_c em S tal que se P é uma órbita periódica de X_H que intersecta W , então o índice de Conley-Zehnder de P é maior que N .*

Vimos anteriormente que, como consequência do Teorema 2.1.5, todo ovalóide admite uma órbita periódica não-nó, com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 , que é *binding* de uma decomposição em livro aberto. Deste fato, juntamente com a estimativa do Teorema 2.2.7 e com um resultado de Ghomi encontrado em [18] (que garante que toda hipersuperfície compacta estritamente convexa pode ser estendida a um ovalóide C^∞), Grotta-Ragazzo e Salomão puderam concluir que todo conjunto singular estritamente convexo admite uma órbita periódica não-nó do fluxo Hamiltoniano que, como no caso regular, possui índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 . É exatamente o que afirma o corolário a seguir.

Corolário 2.2.8 ([22], Corolário 3). *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana. Se S é um conjunto singular estritamente convexo de $H^{-1}(0)$, então S contém uma órbita periódica do fluxo Hamiltoniano associado à H que é não-nó, tem índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 .*

Para finalizar esta seção, vamos apresentar dois exemplos de funções Hamiltonianas de \mathbb{R}^4 que atendem as Hipóteses 1 e 2. Estes exemplos são discutidos com detalhes na referência [52]. Em ambos os casos, os Hamiltonianos são funções reais analíticas e, portanto, pela Observação 2.2.3, satisfazem a Hipótese 1. Uma vez que estas funções são da forma “energia cinética mais energia potencial”, como em (2.3), podemos usar a Proposição 2.2.2 para garantir que os pontos p_c sugeridos nestes exemplos são equilíbrios do tipo sela-centro e podemos utilizar o Teorema 2.2.6 para provar que os conjuntos S_0 apresentados são de fato singular estritamente convexos, de acordo com a Definição 2.2.5.

Exemplo 2.2.9. *A função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + kx_2^2}{2} + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad (2.16)$$

admite um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c = 0 \in H^{-1}(0)$ para qualquer $k < 0$. Neste caso, p_c pertence a um par de conjuntos singulares estritamente convexos $S_0, S'_0 \subset H^{-1}(0)$ que têm p_c como único ponto em comum. As projeções de S_0 e S'_0 no plano x_1x_2 são dadas por discos topológicos D_0 e D'_0 contidos, respectivamente, nos semi-planos $\{x_2 \geq 0\}$ e $\{x_2 \leq 0\}$. Veja Figura 2.15.

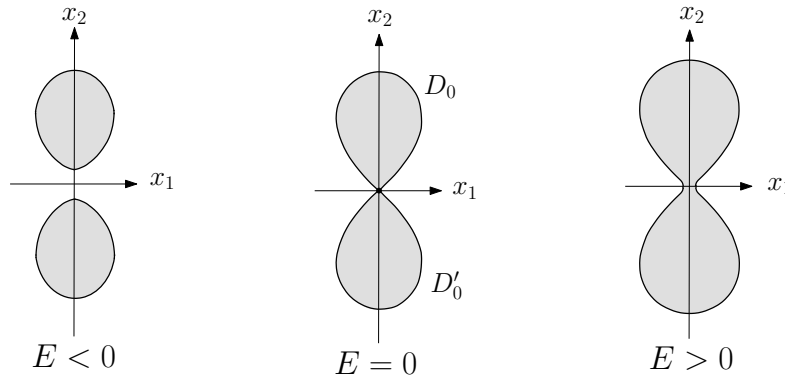


Figura 2.15: Projeção dos níveis de energia $H^{-1}(E)$ sobre o plano x_1x_2 , onde H é a função Hamiltoniana dada por (2.16).

Exemplo 2.2.10. Considere a função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + bx_1^2x_2 - \frac{x_2^3}{3}, \tag{2.17}$$

onde $0 < b < 1$. O caso $b = 1$ corresponde ao conhecido Hamiltoniano de Hénon-Heiles, cujos níveis de energia se projetam no plano x_1x_2 como na Figura 2.16. O Hamiltoniano

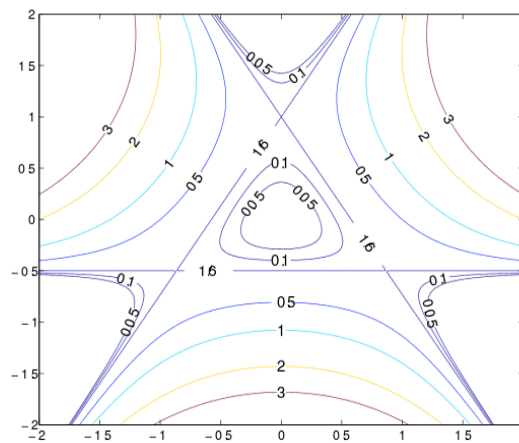


Figura 2.16: Curvas de nível do potencial de Hénon-Heiles.

H definido por (2.17), com $0 < b < 1$, possui um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro em $p_c = (0, 1, 0, 0) \in H^{-1}(\frac{1}{6})$. Este ponto de equilíbrio pertence a um conjunto singular estritamente convexo $S_0 \subset H^{-1}(\frac{1}{6})$ que se projeta no plano x_1x_2 sobre um disco topológico D_0 contido em $\{-\frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1\}$. Veja Figura 2.17.

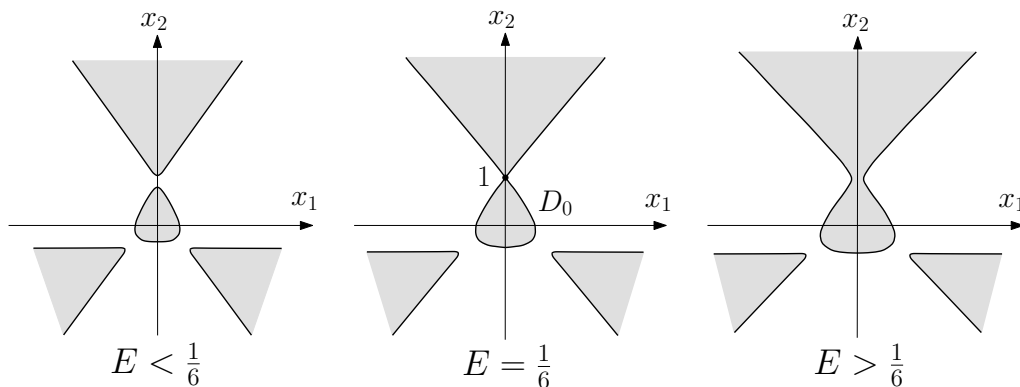


Figura 2.17: Projeção dos níveis de energia $H^{-1}(E)$ sobre o plano x_1x_2 , onde H é a função Hamiltoniana dada por (2.17).

2.3 Demonstração do resultado principal

O principal objetivo deste trabalho é analisar a dinâmica Hamiltoniana em níveis de energia imediatamente acima de um conjunto singular estritamente convexo que, como vimos na seção anterior, trata-se de um subconjunto $S_0 \subset \mathbb{R}^4$ homeomorfo à esfera S^3 , que admite um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro p_c como única singularidade e tem curvatura positiva em todos os seus pontos regulares. Assumindo que a função Hamiltoniana H de \mathbb{R}^4 satisfaz as Hipóteses 1 e 2 enunciadas na Seção 2.2, vamos mostrar que os níveis de energia $H^{-1}(E)$, com $E > 0$ suficientemente pequeno, contêm uma 3-bola fechada S_E próxima à $S_0 \subset H^{-1}(0)$ que admite um sistema de seções transversais \mathcal{F}_E , chamado folheação 2 – 3, com características muito especiais. O conjunto singular de \mathcal{F}_E é formado por duas órbitas periódicas $P_{2,E} \subset \partial S_E$ e $P_{3,E} \subset S_E \setminus \partial S_E$ com índices de Conley-Zehnder 2 e 3 respectivamente. A órbita $P_{2,E}$ é hiperbólica dentro do nível de energia $H^{-1}(E)$, pertence à variedade central do sela-centro p_c e é o limite assintótico de dois planos rígidos $U_{1,E}, U_{2,E} \in \mathcal{F}_E$ que, unidos com $P_{2,E}$, constituem a 2-esfera ∂S_E . A folheação \mathcal{F}_E contém um cilindro rígido V_E que conecta os *bindings* $P_{3,E}$ e $P_{2,E}$ e, além disso, contém uma família de planos $D_{\tau,E}$, com $\tau \in (0, 1)$, todos assintóticos à órbita $P_{3,E}$, que folheia $S_E \setminus (\partial S_E \cup V_E \cup P_{3,E})$. Como \mathcal{F}_E é um sistema de seções transversais, todas as suas folhas regulares são transversais ao campo Hamiltoniano de H . A partir da construção da folheação 2 – 3 em S_E , vamos obter a existência de pelo menos uma órbita homoclínica à $P_{2,E}$ contida em $S_E \setminus \partial S_E$. Nesta seção, enunciaremos e provaremos o principal resultado desta tese, assumindo como verdadeiros alguns resultados intermediários, cujas demonstrações serão deixadas para o próximo capítulo.

Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana que admite um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c \in H^{-1}(0)$. Suponha a existência de coordenadas canônicas (q_1, q_2, p_1, p_2) em torno de p_c de modo que H , nestas coordenadas, assuma a forma normal (2.4), como afirmado na Hipótese 1 da Seção 2.2. Suponha ainda que a Hipótese 2 da Seção 2.2 também seja satisfeita, isto é, o sela-centro p_c pertence a um conjunto singular estritamente convexo S_0 do nível crítico de energia $H^{-1}(0)$. Lembre-se que, nas coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) centradas em p_c , o nível de energia $H^{-1}(0)$ se projeta nos primeiro e terceiro quadrantes do

plano q_1p_1 , veja Figura 2.8. Daqui em diante vamos assumir que a projeção de $S_0 \subset H^{-1}(0)$ em q_1p_1 se dá no primeiro quadrante.

Considere uma pequena vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$ do conjunto singular estritamente convexo S_0 . Pela definição de S_0 , encontramos, para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, uma 3-bola fechada $S_E \subset \mathcal{U}$ mergulhada em $H^{-1}(E)$ tal que, em coordenadas locais, S_E se projeta no plano q_1p_1 em $\{q_1 + p_1 \geq 0\}$, veja Figuras 2.18 e 2.19. O bordo da 3-bola S_E dentro do nível de energia $H^{-1}(E)$ coincide, em coordenadas locais, com a 2-esfera N_E^0 definida no Lema 2.2.4, isto é,

$$\partial S_E = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E).$$

Vimos anteriormente que N_E^0 , e portanto ∂S_E , tem como equador a órbita periódica P_E da variedade central do sela-centro p_c , dada em coordenadas locais por

$$P_E = \{q_1 = p_1 = 0 \text{ e } q_2^2 + p_2^2 = 2I_2(0, E)\}.$$

Provaremos mais adiante que P_E é hiperbólica dentro do nível de energia $H^{-1}(E)$ e, além disso, seu índice de Conley-Zehnder é 2. Por esta razão, ao invés de denotar o equador da 2-esfera ∂S_E simplesmente por P_E , vamos denotá-lo, de agora em diante, por $P_{2,E}$. Vamos

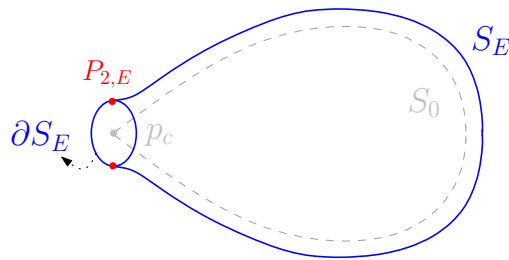


Figura 2.18: Representação da 3-bola fechada $S_E \subset H^{-1}(E)$, $E > 0$ pequeno.

continuar chamando de $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ os hemisférios da esfera $N_E^0 = \partial S_E$, definidos em coordenadas locais por

$$U_{1,E} = \{q_1 + p_1 = 0, q_1 < 0\} \cap K^{-1}(E)$$

$$U_{2,E} = \{q_1 + p_1 = 0, q_1 > 0\} \cap K^{-1}(E),$$

como vimos em (2.13).

A esfera ∂S_E é dada pela interseção $G^{-1}(0) \cap K^{-1}(E)$, onde $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $G(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 + p_1$ e, portanto, $\nabla G = (1, 0, 1, 0)$ é ortogonal ao plano tangente de ∂S_E em todos os pontos de ∂S_E . Uma vez que o produto $\langle \nabla G(z), X_K(z) \rangle$ é positivo se $z \in U_{1,E}$ e negativo se $z \in U_{2,E}$, podemos dizer que, dentro do nível de energia, o campo Hamiltoniano é transversal aos hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ de ∂S_E , apontando para dentro de S_E em $U_{1,E}$ e para fora de S_E em $U_{2,E}$. Veja Figura 2.19.

As variedades estável e instável do equador $P_{2,E}$ de ∂S_E , $E > 0$ pequeno, são cilindros de dimensão 2 contidos em $H^{-1}(E)$ dados, em coordenadas locais, respectivamente por

$$W_{E,\text{loc}}^s(P_{2,E}) = \{p_1 = 0 \text{ e } q_2^2 + p_2^2 = 2I_2(0, E)\}$$

$$W_{E,\text{loc}}^u(P_{2,E}) = \{q_1 = 0 \text{ e } q_2^2 + p_2^2 = 2I_2(0, E)\},$$

como em (2.11). Reveja Figura 2.10. As variedades $W_{E,\text{loc}}^s(P_{2,E})$ e $W_{E,\text{loc}}^u(P_{2,E})$ são transversais à esfera ∂S_E dentro de $H^{-1}(E)$ e ambas têm ramos dentro de $\dot{S}_E := S_E \setminus \partial S_E$. Veja Figura 2.19.

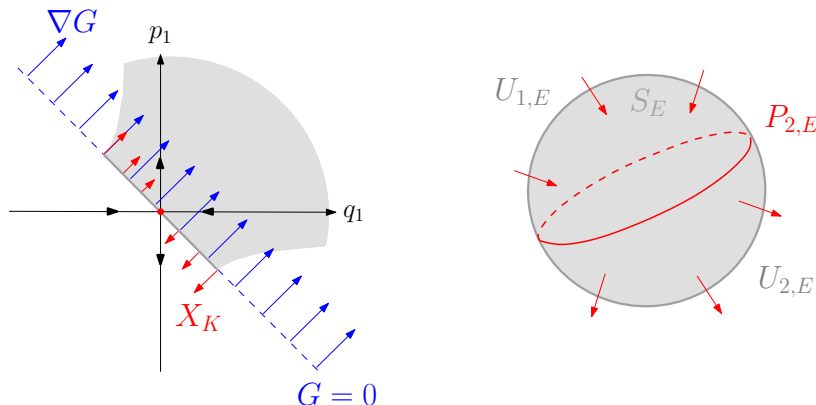


Figura 2.19: Representação da 2-esfera $\partial S_E = G^{-1}(0) \cap K^{-1}(E)$ e de sua projeção no plano $q_1 p_1$, com seus hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ e seu equador $P_{2,E}$. As setas vermelhas apontam na direção do campo Hamiltoniano e as setas azuis na direção do vetor gradiente ∇G . As projeções das variedades estável e instável locais de $P_{2,E}$ estão representadas na cor preta.

Como já comentamos, a finalidade deste trabalho é garantir a existência de um sistema de seções transversais muito particular para o fluxo Hamiltoniano restrito à 3-bola fechada S_E , com $E > 0$ pequeno. Este sistema que buscamos é chamado, como em [12], de folheação 2–3. Nesta denominação, os números correspondem ao índice de Conley-Zehnder dos *bindings* da folheação.

Definição 2.3.1. *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana que admite um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c \in H^{-1}(0)$ e satisfaz as Hipóteses 1 e 2 enunciadas na Seção 2.2. Seja $S_0 \subset H^{-1}(0)$ o conjunto singular estritamente convexo que contém o sela-centro p_c e, dado $E > 0$ pequeno, considere $S_E \subset H^{-1}(E)$ a 3-bola fechada mergulhada próxima à S_0 , como explicamos logo acima. Uma folheação 2–3 para o fluxo Hamiltoniano em S_E é uma folheação singular \mathcal{F}_E de S_E com as seguintes propriedades:*

- *o conjunto singular de \mathcal{F}_E é formado pela órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$, equador da 2-esfera ∂S_E , e por uma órbita periódica não-nó $P_{3,E} \subset \dot{S}_E := S_E \setminus \partial S_E$. Estas órbitas periódicas são chamadas de bindings da folheação \mathcal{F}_E e seus índices de Conley-Zehnder são $CZ(P_{2,E}) = 2$ e $CZ(P_{3,E}) = 3$.*
- *\mathcal{F}_E contém os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ de ∂S_E definidos, em coordenadas locais, por (2.13). Ambos os hemisférios são chamados de planos rígidos.*
- *\mathcal{F}_E contém um cilindro aberto mergulhado $V_E \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$, cujo bordo é dado por $\partial V_E = P_{2,E} \cup P_{3,E}$. Este cilindro é chamado de cilindro rígido.*
- *\mathcal{F}_E contém uma família suave a um parâmetro de discos abertos mergulhados $D_{\tau,E} \subset \dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$, com $\tau \in (0, 1)$, tal que o bordo de cada $D_{\tau,E}$ é dado por $\partial D_{\tau,E} = P_{3,E}$. Esta família folheia $\dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$ e $D_{\tau,E} \rightarrow V_E \cup P_{2,E} \cup U_{1,E}$ quando $\tau \rightarrow 0^+$ e $D_{\tau,E} \rightarrow V_E \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$ quando $\tau \rightarrow 1^-$.*

- o campo Hamiltoniano X_H é transversal a todas as folhas regulares $U_{1,E}$, $U_{2,E}$, V_E e $D_{\tau,E}$, $\tau \in (0, 1)$.

Posteriormente, vamos descrever melhor o comportamento assintótico das folhas $D_{\tau,E}$, $\tau \in (0, 1)$, e V_E próximo à componente de bordo $P_{3,E}$. Além disso, vamos explicar mais precisamente a convergência da $(0, 1)$ -família $D_{\tau,E}$ para $V_E \cup P_{2,E} \cup U_{1,E}$ e para $V_E \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$ quando $\tau \rightarrow 0^+$ e quando $\tau \rightarrow 1^-$, respectivamente. Veja Figura 2.20.

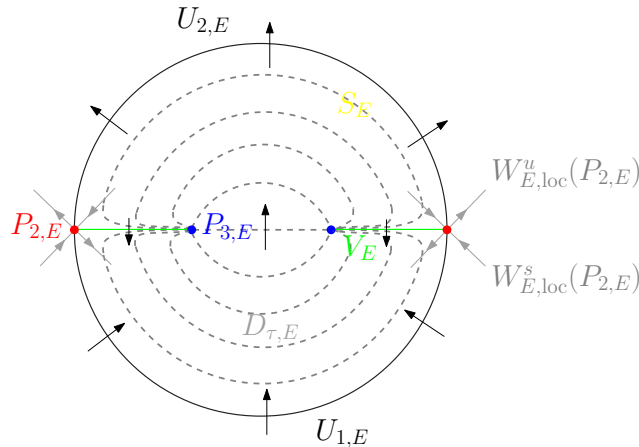


Figura 2.20: Corte de uma folheação 2 – 3 na 3-bola S_E . Os pares de pontos azuis e de pontos vermelhos representam os *bindings* da folheação com índices de Conley-Zehnder 3 e 2 respectivamente. As linhas contínuas em preto correspondem aos hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E , o par de linhas contínuas em verde representam o cilindro rígido V_E e as linhas tracejadas em cinza correspondem aos discos $D_{\tau,E}$, com $\tau \in (0, 1)$. As setas pretas apontam na direção do campo Hamiltoniano X_H . As variedades estável $W_{E,loc}^s$ e instável $W_{E,loc}^u$ do equador $P_{2,E}$ também estão representadas nesta figura.

Finalmente estamos em condições de enunciar o principal resultado desta tese.

Teorema 2.3.2. *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana que admite um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c \in H^{-1}(0)$. Suponha a existência de coordenadas canônicas (q_1, q_2, p_1, p_2) em torno de p_c de modo que H , nestas coordenadas, assuma a forma normal (2.4), como afirmado na Hipótese 1 da Seção 2.2. Suponha também que a Hipótese 2 da Seção 2.2 seja satisfeita, isto é, o sela-centro p_c pertence a um conjunto singular estritamente convexo S_0 do nível crítico de energia $H^{-1}(0)$. Considere $S_E \subset H^{-1}(E)$, com $E > 0$ pequeno, a 3-bola fechada mergulhada próxima à S_0 que definimos acima. Então, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, existe uma folheação 2 – 3 \mathcal{F}_E para o fluxo Hamiltoniano em S_E . Além disso, a órbita periódica $P_{2,E} \subset \partial S_E$, binding da folheação \mathcal{F}_E com índice de Conley-Zehnder 2 que pertence à variedade central do sela-centro p_c , admite pelo menos uma órbita homoclínica contida em $\dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$.*

Temos uma importante observação a fazer sobre o Teorema 2.3.2.

Observação 2.3.3. *É possível que a função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo as Hipóteses 1 e 2, admita um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro p_c pertencente a dois conjuntos singulares estritamente convexos S_0 e S'_0 do nível crítico de energia $H^{-1}(0)$, que*

se intersectam apenas em p_c . Neste caso, o nível de energia $H^{-1}(E)$, com $E > 0$ pequeno, contém duas 3-bolas fechadas mergulhadas S_E e S'_E , próximas respectivamente à S_0 e à S'_0 , tais que $\partial S_E = \partial S'_E$ em $H^{-1}(E)$. Em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) em torno do sela-centro p_c , S_E se projeta no plano $q_1 p_1$ em $\{q_1 + p_1 \geq 0\}$, S'_E em $\{q_1 + p_1 \leq 0\}$ e o bordo $\partial S_E = \partial S'_E$ em $\{q_1 + p_1 = 0\}$, como vemos na terceira ilustração da Figura 2.8. Fazendo uso do Teorema 2.3.2 e da simetria da função Hamiltoniana com relação à involução $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (-q_1, q_2, -p_1, p_2)$, obtemos duas folheações 2-3 para o fluxo Hamiltoniano: \mathcal{F}_E em S_E e \mathcal{F}'_E em S'_E , para $E > 0$ suficientemente pequeno. Deste modo, $S_E \cup S'_E \subset H^{-1}(E)$ é difeomorfo à esfera S^3 e admite uma folheação 3-2-3, como na Definição 2.1.11, dada por $\mathcal{F}_E \cup \mathcal{F}'_E$, cujos bindings são a órbita periódica hiperbólica $P_{2,E} \subset \partial S_E = \partial S'_E$, com índice de Conley-Zehnder 2, e duas órbitas periódicas não-nós $P_{3,E} \subset \dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$ e $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E = S'_E \setminus \partial S'_E$, ambas com índice de Conley-Zehnder 3. Reveja Figura 2.6. Mais ainda, concluímos que existem pelo menos duas órbitas homoclínicas ao binding $P_{2,E}$, uma delas contida em \dot{S}_E e a outra em \dot{S}'_E .

Como aplicação do Teorema 2.3.2, podemos considerar novamente as funções Hamiltonianas fornecidas nos Exemplos 2.2.9 e 2.2.10 da seção anterior.

Exemplo 2.3.4. Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ a função Hamiltoniana dada por (2.16) que admite $p_c = (0, 0, 0, 0) \in H^{-1}(0)$ como ponto de equilíbrio do tipo sela-centro para qualquer $k < 0$. Como comentamos no Exemplo 2.2.9, H satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3.2 e, além disso, encontra-se nas condições da Observação 2.3.3, isto é, o nível crítico $H^{-1}(0)$ contém dois conjuntos singulares estritamente convexos S_0 e S'_0 que se intersectam apenas em p_c . Sendo assim, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, existe um par de 3-bolas $S_E, S'_E \subset H^{-1}(E)$ próximas respectivamente de S_0 e S'_0 , com $\partial S_E = \partial S'_E$, tais que $W_E := S_E \cup S'_E$ é uma 3-esfera que admite uma folheação 3-2-3.

O sistema Hamiltoniano associado à H é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -x_1(1 + 2(x_1^2 + x_2^2)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -x_2(k + 2(x_1^2 + x_2^2)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

A simplicidade deste sistema nos permite realizar alguns cálculos de modo explícito. Considerando $x_1 = y_1 = 0$, solução nula de (2.18), as equações (2.19) se reduzem ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -kx_2 - 2x_2^3, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $k < 0$. Analogamente, se $x_2 = y_2 = 0$, então as equações (2.18) assumem a forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -x_1 - 2x_1^3, \end{aligned} \quad (2.21)$$

Os planos de fase dos sistemas (2.20) e (2.21) são dados na Figura 2.21.

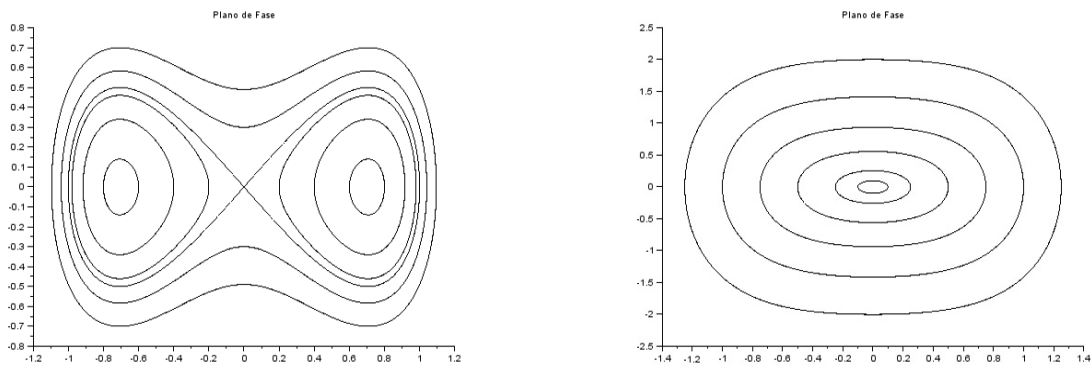


Figura 2.21: Planos de fase do sistema (2.20), à esquerda, e do sistema (2.21), à direita.

O binding $P_{2,E} \subset \partial S_E$ da folheação $3 - 2 - 3$ em W_E , que pertence à variedade central do sela-centro $p_c = 0$, é dado neste exemplo por

$$P_{2,E} = \{H(x_1, 0, y_1, 0) = E\} = \{y_1^2 + x_1^2 + x_1^4 = 2E, x_2 = y_2 = 0\}.$$

Pelo Teorema 2.3.2, para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, $P_{2,E}$ admite pelo menos duas órbitas homoclínicas do fluxo Hamiltoniano, uma delas contida em $\dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$ e a outra em $\dot{S}'_E = S'_E \setminus \partial S'_E$. Observe, pela Figura 2.21, que o próprio ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c = 0$ admite duas órbitas homoclínicas neste caso, uma contida em $\dot{S}_0 = S_0 \setminus \{p_c\}$ e a outra em $\dot{S}'_0 = S'_0 \setminus \{p_c\}$.

Ainda neste exemplo, podemos ver que o campo radial $Y(w) = \frac{w}{2}$ em \mathbb{R}^4 , que é de Liouville conforme o Exemplo 1.2.2, é transversal ao nível de energia $H^{-1}(E)$ para $E > 0$ pequeno. De fato, dado $w = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in H^{-1}(E)$, temos

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla H(w), Y(w) \rangle &= x_1^2 (1 + 2(x_1^2 + x_2^2)) + x_2^2 (k + 2(x_1^2 + x_2^2)) + y_1^2 + y_2^2 \\ &= x_1^2 + kx_2^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)^2 + y_1^2 + y_2^2 = 2E + (x_1^2 + x_2^2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Portanto, o fluxo Hamiltoniano na 3-esfera $W_E \subset H^{-1}(E)$, com $E > 0$ pequeno, é equivalente ao fluxo de Reeb associado à forma de contato $(i_Y \omega_0)|_{W_E}$ em W_E .

Exemplo 2.3.5. Considere $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ a função Hamiltoniana definida em (2.17), com $b \in (0, 1)$, que possui um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro em $p_c = (0, 1, 0, 0) \in H^{-1}(\frac{1}{6})$. Comentamos no Exemplo 2.2.10 que H satisfaz as Hipóteses 1 e 2 e, por esta razão, podemos concluir do Teorema 2.3.2 que o nível de energia $H^{-1}(E)$, com $E = \frac{1}{6} + \varepsilon$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, contém uma 3-bola S_E , próxima do conjunto singular estritamente convexo S_0 contendo p_c , que admite uma folheação $2 - 3$. Mais ainda, o binding $P_{2,E} \subset \partial S_E$, que pertence à variedade central do sela-centro p_c , admite uma órbita homoclínica do fluxo Hamiltoniano contida em $\dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$.

Em seguida, vamos demonstrar o Teorema 2.3.2, principal resultado deste trabalho. Por tratar-se de uma longa demonstração, optamos por dividir a sua apresentação em alguns

passos intermediários, que serão enunciados no decorrer desta demonstração e provados ao longo das seções do próximo capítulo.

Demonstração do Teorema 2.3.2. Seja $\varphi : V \rightarrow U$ a mudança de coordenadas simplética centrada no sela-centro p_c tal que, nas novas coordenadas $(q_1, q_2, p_1, p_2) = \varphi^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2)$, a função Hamiltoniana H assume a forma normal K dada por (2.4) na Hipótese 1.

Em coordenadas locais, a 2-esfera ∂S_E , dada por $N_E^0 = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E > 0$ pequeno, pode ser vista também como bordo da 3-bola topológica fechada definida por

$$B_0^E := \bigcup_{0 \leq c \leq E} \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(c) = \bigcup_{0 \leq c \leq E} N_c^0.$$

Vimos no Lema 2.2.4 que N_c^0 é uma 2-esfera mergulhada no nível de energia $K^{-1}(c)$ para todo $c > 0$ pequeno e, para $c = 0$, convencionamos que $N_0^0 = \{0\}$. Sendo assim, $\varphi(B_0^E)$ é uma 3-bola topológica fechada contendo o sela-centro p_c em seu interior e a união $S_E \cup \varphi(B_0^E)$ é uma 3-esfera topológica em \mathbb{R}^4 que é bordo de uma 4-bola topológica fechada U_E . Veja Figura 2.22. Em coordenadas locais, U_E se projeta no plano $q_1 p_1$ em $\{q_1 + p_1 \geq 0\}$.

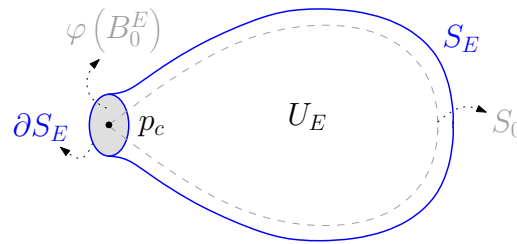


Figura 2.22: Representação da 4-bola U_E e de seu bordo, a 3-esfera $S_E \cup \varphi(B_0^E)$.

Considere U'_E uma cópia da 4-bola fechada U_E . Seu bordo é uma 3-esfera topológica $\partial U'_E = S'_E \cup \varphi(B_0^{E'})$, onde S'_E e $B_0^{E'}$ são cópias de S_E e B_0^E respectivamente. Por meio da involução $T : V \rightarrow V$, definida por

$$T(q_1, q_2, p_1, p_2) := (-q_1, q_2, -p_1, p_2), \quad (2.22)$$

podemos identificar os pontos de U'_E , em coordenadas locais, com pontos que se projetam no plano $q_1 p_1$ em $\{q_1 + p_1 \leq 0\}$. Assim, a 3-bola $B_0^{E'}$ é dada exatamente por B_0^E e, consequentemente, $\partial S'_E$ coincide com ∂S_E .

Agora, unindo as 4-bolas topológicas U_E e U'_E , considerando a identificação $B_0^E \sim B_0^{E'}$ via a aplicação identidade, obtemos uma variedade suave de dimensão 4

$$\mathcal{U}_E := U_E \bigsqcup_{B_0^E \sim B_0^{E'}} U'_E,$$

cujo bordo

$$W_E := S_E \bigsqcup_{\partial S_E \sim \partial S'_E} S'_E \quad (2.23)$$

é difeomorfo à esfera S^3 . Veja Figura 2.23.

A aplicação T definida em (2.22) pode ser naturalmente induzida sobre a variedade \mathcal{U}_E que acabamos de construir. E, uma vez que $T^*\omega_0 = \omega_0$ e $K \circ T = K$, a forma simplética canônica ω_0 e a função Hamiltoniana H também são induzidas de modo natural sobre \mathcal{U}_E . Por simplicidade, vamos continuar denotando T , ω_0 e H em \mathcal{U}_E pelas mesmas letras. Portanto, podemos dizer que $p_c \in \mathcal{U}_E$ para todo $E > 0$ pequeno e a forma normal K , dada na Hipótese 1, representa a função Hamiltoniana H numa vizinhança de p_c em \mathcal{U}_E . Observe ainda que se $0 < E' < E$, então temos uma inclusão natural de $\mathcal{U}_{E'}$ em \mathcal{U}_E .

Seja S'_0 a cópia correspondente de S_0 em U'_E , $E > 0$ pequeno, onde $S_0 \subset H^{-1}(0)$ é o conjunto singular estritamente convexo contendo p_c , fornecido pela Hipótese 2, que se projeta no primeiro quadrante do plano q_1p_1 nas coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) . O conjunto $S'_0 \subset H^{-1}(0)$ é singular estritamente convexo, intersecta S_0 apenas em p_c e se projeta, em coordenadas locais, no terceiro quadrante do plano q_1p_1 . Note que S_0 e S'_0 são bordos de subconjuntos fechados $U_0 \subset U_E$ e $U'_0 \subset U'_E$ respectivamente, ambos homeomorfos à 4-bola fechada. Definimos, por fim,

$$W_0 := S_0 \cup S'_0.$$

Veja Figura 2.23.

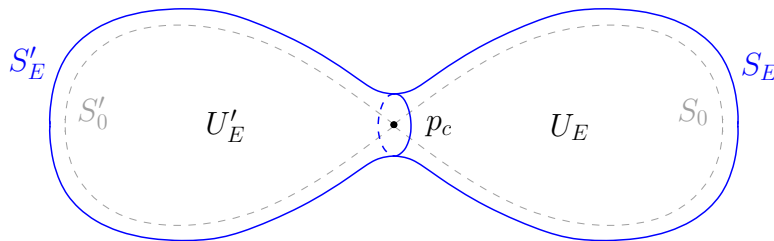


Figura 2.23: Representação da 4-bola $\mathcal{U}_E = U_E \sqcup_{\sim} U'_E$, de seu bordo $W_E = S_E \sqcup_{\sim} S'_E$, que é difeomorfo à esfera S^3 , e de $W_0 := S_0 \cup S'_0$.

Vamos fixar, de uma vez por todas, as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \dot{S}_0 &:= S_0 \setminus \{p_c\}, & \dot{S}'_0 &:= S'_0 \setminus \{p_c\}, & \dot{W}_0 &:= \dot{S}_0 \cup \dot{S}'_0 = W_0 \setminus \{p_c\}, \\ \dot{S}_E &:= S_E \setminus \partial S_E, & \dot{S}'_E &:= S'_E \setminus \partial S'_E, & \dot{W}_E &:= \dot{S}_E \cup \dot{S}'_E = W_E \setminus \partial S_E. \end{aligned}$$

O primeiro passo é mostrar que, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, a 3-esfera W_E definida em (2.23) admite uma estrutura de hipersuperfície de contato. Deste modo, todas as ferramentas da geometria de contato e da teoria de curvas pseudo-holomorfas na simplectização da 3-esfera *tight* podem ser utilizadas para estudar a dinâmica Hamiltoniana em W_E .

Proposição 2.3.6 (Demonstrada na Seção 3.1). *Existe $E^* > 0$ tal que, para todo $0 < E < E^*$, existe um campo de Liouville X_E definido em uma vizinhança de W_E em \mathcal{U}_{E^*} que é transversal à W_E . Mais ainda, X_E é invariante pela involução T definida em coordenadas locais por (2.22), ou seja, $T_*X_E = X_E$. Consequentemente, a 1-forma $i_{X_E}\omega_0$ se restringe a uma forma de contato *tight* λ_E em W_E e seu fluxo de Reeb é uma reparametrização do fluxo Hamiltoniano de H restrito à W_E . Em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) , λ_E coincide com*

a forma de contato padrão $\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p_i dq_i - q_i dp_i$ próximo à 2-esfera $\partial S_E = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$. Além disso, existe um campo de Liouville \bar{X}_0 definido em uma vizinhança de \dot{W}_0 em \mathcal{U}_{E^*} de modo que \bar{X}_0 é transversal à \dot{W}_0 e, para qualquer vizinhança pequena \tilde{U} do sela-centro p_c em \mathcal{U}_{E^*} , temos que $X_E = \bar{X}_0$ fora de \tilde{U} , para todo $E > 0$ suficientemente pequeno. Em particular, $\bar{\lambda}_0 := (i_{\bar{X}_0} \omega_0)|_{\dot{W}_0}$ é uma forma de contato em \dot{W}_0 .

Em segundo lugar, buscamos uma estimativa para o índice de Conley-Zehnder das órbitas periódicas contidas em W_E . Como consequência do resultado a seguir, temos que, para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, a forma de contato λ_E em W_E obtida na Proposição 2.3.6 é fracamente convexa e seu fluxo de Reeb possui uma única órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 2, dada pela órbita hiperbólica $P_{2,E} \subset \partial S_E = \partial S'_E$ que está contida na variedade central do sela-centro p_c . Além disso, obtemos uma propriedade de enlaçamento para $E > 0$ pequeno afirmando que $P_{2,E}$ não está enlaçada com nenhuma órbita periódica do fluxo de Reeb associado à λ_E que tenha índice de Conley-Zehnder igual a 3.

Proposição 2.3.7 (Demonstrada na Seção 3.2). *Se $E > 0$ é suficientemente pequeno, então o seguinte ocorre: seja λ_n uma sequência qualquer de formas de contato em W_E satisfazendo $\lambda_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Se n é suficientemente grande, então o fluxo de Reeb associado à λ_n em W_E admite uma única órbita periódica $P_{2,n}$ com índice de Conley-Zehnder 2, a qual é não-nó, hiperbólica e converge para $P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda, qualquer outra órbita periódica de λ_n tem índice de Conley-Zehnder maior ou igual a 3 e, além disso, as órbitas periódicas com índice de Conley-Zehnder igual a 3 não estão enlaçadas com $P_{2,n}$.*

Nossa meta é construir um sistema global de seções transversais \mathcal{F}_E em W_E com determinadas propriedades especiais. Entre elas, queremos que os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E , definidos em coordenadas locais por (2.13), sejam folhas regulares rígidas de \mathcal{F}_E . Uma tal folheação \mathcal{F}_E será obtida como a projeção em W_E de uma folheação estável de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$. Primeiramente, precisamos de uma estrutura complexa J_E em $\mathcal{J}(\lambda_E)$ de modo que a estrutura quase-complexa \tilde{J}_E induzida por J_E e λ_E na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, como em (1.47), admita dois planos de energia finita cujas imagens se projetam sobre os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ respectivamente. Enunciamos então nosso próximo passo.

Proposição 2.3.8 (Demonstrada na Seção 3.3). *Se $E > 0$ é suficientemente pequeno, então existe $J_E \in \mathcal{J}(\lambda_E)$ tal que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ admite um par de planos de energia finita*

$$\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E}), \tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$$

de tal modo que as imagens $u_{1,E}(\mathbb{C}), u_{2,E}(\mathbb{C}) \subset W_E$ são ambas assintóticas à $P_{2,E}$ e coincidem, respectivamente, com os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E , definidos em coordenadas locais por (2.13).

O principal resultado que vamos utilizar para obter o sistema de seções transversais desejado em W_E , $E > 0$ pequeno, é o Teorema 2.1.9 provado por Hofer, Wysocki e Zehnder

em [27]. No entanto, é possível que tenhamos que perturbar a forma de contato λ_E e a estrutura complexa J_E , obtidas nas Proposições 2.3.6 e 2.3.7, com o intuito de alcançar as hipóteses genéricas deste teorema.

Devido a Proposição 1.3.1, para cada $E > 0$ pequeno, existe uma sequência de funções suaves $f_n : W_E \rightarrow (0, \infty)$ tal que $f_n \rightarrow 1$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\lambda_n := f_n \lambda_E$$

é uma forma de contato não-degenerada em W_E . Observe que, assim como λ_E , λ_n é uma forma de contato *tight* sobre a 3-esfera W_E pois a noção de *tightness* depende apenas da estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_n = \ker \lambda_E$.

Como $d\lambda_n|_\xi = f_n d\lambda_E|_\xi$ e f_n é uma função positiva para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que o conjunto $\mathcal{J}(\lambda_n)$ das estruturas complexas $d\lambda_n|_\xi$ -compatíveis em ξ coincide com o conjunto $\mathcal{J}(\lambda_E)$ das estruturas complexas $d\lambda_E|_\xi$ -compatíveis em ξ . Logo, pela densidade do conjunto $\mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda_n) \subset \mathcal{J}(\lambda_n) = \mathcal{J}(\lambda_E)$ na topologia C^∞ , obtido no Teorema 2.1.9 para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar uma sequência de estruturas complexas $J_n \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda_n)$ satisfazendo $J_n \rightarrow J_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, o Teorema 2.1.9 garante que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$, definida por (1.47), admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ que se projeta em W_E , via a projeção $p : \mathbb{R} \times W_E \rightarrow W_E$ no segundo fator, sobre um sistema global de seções transversais \mathcal{F}_n para o fluxo de λ_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. Entretanto, a Proposição 2.3.7 afirma que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, a forma de contato λ_n é fracamente convexa e seu fluxo de Reeb em W_E admite uma única órbita periódica $P_{2,n}$ com índice de Conley-Zehnder 2, a qual não está enlaçada com nenhuma órbita periódica de λ_n que tenha índice de Conley-Zehnder igual a 3. Sendo assim, pela descrição dos sistemas globais de seções transversais, fornecida no fim da Seção 2.1, no caso particular em que a forma de contato é fracamente convexa, concluímos que \mathcal{F}_n é uma folheação 3 – 2 – 3 para o fluxo de λ_n em W_E , como na Definição 2.1.11, que admite $P_{2,n}$ como o *binding* de índice de Conley-Zehnder 2.

Nosso último passo, o mais árduo deles, é provar que $\tilde{\mathcal{F}}_n$ converge, quando $n \rightarrow \infty$, para uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_E$ associada à $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, com $E > 0$ pequeno, tal que a projeção $\mathcal{F}_E = p(\tilde{\mathcal{F}}_E)$ é uma folheação 3 – 2 – 3 para o fluxo de λ_E em W_E que contém a órbita hiperbólica $P_{2,E} \subset \partial S_E$ como o *binding* de índice de Conley-Zehnder 2 e os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ de ∂S_E como folhas regulares rígidas.

Na próxima proposição, obtemos bons candidatos para os *bindings* da folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_E que buscamos para o fluxo de Reeb associado à λ_E em W_E , $E > 0$ pequeno.

Proposição 2.3.9 (Demonstrada na Seção 3.4). *Para $E > 0$ suficientemente pequeno, ocorre o seguinte:*

- i) Existe uma sequência de formas de contato fracamente convexas e não-degeneradas λ_n em W_E satisfazendo $\ker \lambda_n = \ker \lambda_E$ para todo n e $\lambda_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e existe uma sequência de estruturas complexas $d\lambda_E$ -compatíveis $J_n \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda_n) \subset \mathcal{J}(\lambda_E)$*

satisfazendo $J_n \rightarrow J_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ tais que, para todo n suficientemente grande, a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$ admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ que se projeta em W_E sobre uma folheação 3–2–3 \mathcal{F}_n para o fluxo de Reeb associado à λ_n . Sejam $P_{3,n}, P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$ os bindings não-degenerados da folheação \mathcal{F}_n com índices de Conley-Zehnder 3, 2 e 3 respectivamente. Então $P_{2,n} \rightarrow P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$ e existem órbitas periódicas não-nós $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$ e $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$ do fluxo de Reeb associado à λ_E , ambas com índice de Conley-Zehnder 3, tais que $P_{3,n} \rightarrow P_{3,E}$ e $P'_{3,n} \rightarrow P'_{3,E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Veja Figura 2.24.

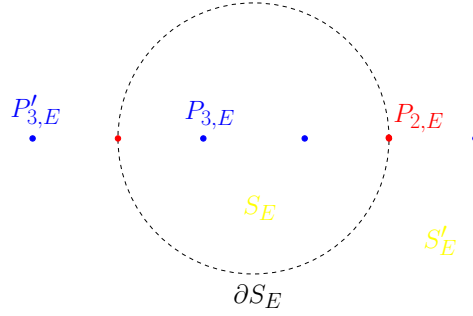


Figura 2.24: Os bindings $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$, $P_{2,E} \subset \partial S_E$ e $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$.

ii) Após uma conveniente mudança de coordenadas por contactomorfismos C^∞ -próximos da identidade, podemos assumir que, para todo n grande, $P_{3,n} = P_{3,E}, P_{2,n} = P_{2,E}$ e $P'_{3,n} = P'_{3,E}$ como conjuntos de pontos em W_E e, mais ainda, que existem seqüências de contantes $c_{3,n}, c_{2,n}, c'_{3,n} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ tais que

$$\begin{aligned}\lambda_n|_{P_{3,E}} &= c_{3,n} \lambda_E|_{P_{3,E}}, \\ \lambda_n|_{P_{2,E}} &= c_{2,n} \lambda_E|_{P_{2,E}}, \\ \lambda_n|_{P'_{3,E}} &= c'_{3,n} \lambda_E|_{P'_{3,E}}.\end{aligned}$$

Para $E > 0$ suficientemente pequeno, a folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ contém, para cada n , as seguintes superfícies de energia finita associadas à estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$:

- um par de planos rígidos

$$\tilde{u}_{1,n} = (a_{1,n}, u_{1,n}), \tilde{u}_{2,n} = (a_{2,n}, u_{2,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E, \quad (2.24)$$

ambos assintóticos à $P_{2,n}$. A 2-esfera topológica mergulhada $u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C})$ separa a 3-esfera W_E em duas componentes, denotadas por \dot{S}_n e \dot{S}'_n , que contêm $P_{3,n}$ e $P'_{3,n}$ respectivamente.

- um par de cilindros rígidos

$$\tilde{v}_n = (b_n, v_n), \tilde{v}'_n = (b'_n, v'_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E \quad (2.25)$$

tais que $v_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}_n$ e \tilde{v}_n é assintótico à $P_{3,n}$ e à $P_{2,n}$, enquanto $v'_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}'_n$ e \tilde{v}'_n é assintótico à $P'_{3,n}$ e à $P_{2,n}$.

- um par de famílias a um parâmetro de planos

$$\tilde{w}_{\tau,n} = (d_{\tau,n}, w_{\tau,n}), \tilde{w}'_{\tau,n} = (d'_{\tau,n}, w'_{\tau,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E, \tau \in (0, 1), \quad (2.26)$$

tais que $\tilde{w}_{\tau,n}$ é assintótico à $P_{3,n}$ para todo $\tau \in (0, 1)$ e a família de planos $D_{\tau,n} := w_{\tau,n}(\mathbb{C}), \tau \in (0, 1)$, folheia $\dot{S}_n \setminus (v_n(\mathbb{R} \times S^1) \cup P_{3,n})$, enquanto $\tilde{w}'_{\tau,n}$ é assintótico à $P'_{3,n}$ para todo $\tau \in (0, 1)$ e a família de planos $D'_{\tau,n} := w'_{\tau,n}(\mathbb{C}), \tau \in (0, 1)$, folheia $\dot{S}'_n \setminus (v'_n(\mathbb{R} \times S^1) \cup P'_{3,n})$.

Finalmente, enunciamos nosso último resultado que analisa a convergência das curvas \tilde{J}_n -holomorfas de energia finita $\tilde{u}_{1,n}, \tilde{u}_{2,n}, \tilde{v}_n, \tilde{v}'_n, \tilde{w}_{\tau,n}$ e $\tilde{w}'_{\tau,n}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Proposição 2.3.10 (Demonstrada na Seção 3.5). *Se $E > 0$ é suficientemente pequeno, então ocorre o seguinte. Seja $\tilde{\mathcal{F}}_n$ a folheação estável de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ associada a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$, como na Proposição 2.3.9, que contém as superfícies de energia finita $\tilde{u}_{1,n}, \tilde{u}_{2,n}, \tilde{v}_n, \tilde{v}'_n, \tilde{w}_{\tau,n}, \tilde{w}'_{\tau,n}, \tau \in (0, 1)$, definidas em (2.24), (2.25) e (2.26), e que se projeta sobre uma folheação 3-2-3 \mathcal{F}_n para o fluxo de λ_n em W_E com bindings $P_{3,n}, P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$. Então, a menos de reparametrizações e \mathbb{R} -translações de tais curvas \tilde{J}_n -holomorfas, temos que:*

- i) Para cada $i \in \{1, 2\}$, $\tilde{u}_{i,n} \rightarrow \tilde{u}_{i,E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{u}_{i,E} = (a_{i,E}, u_{i,E})$ é o plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita, obtido na Proposição 2.3.8, tal que $u_{i,E}(\mathbb{C})$ coincide com o hemisfério $U_{i,E}$ de ∂S_E . Dada uma pequena vizinhança $\mathcal{U} \subset W_E$ da 2-esfera $\partial S_E = u_{1,E}(\mathbb{C}) \cup P_{2,E} \cup u_{2,E}(\mathbb{C})$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{U}$ se $n \geq n_0$. Veja Figura 2.25.

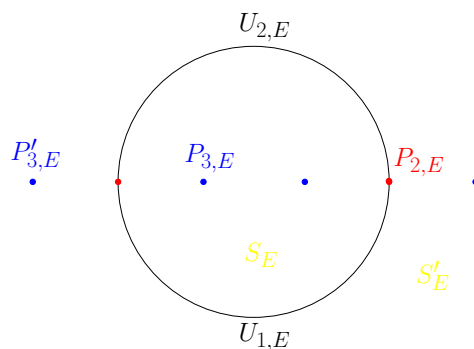


Figura 2.25: Os bindings $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$, $P_{2,E} \subset \partial S_E$, $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$ e o par de planos rígidos $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ assintóticos à $P_{2,E}$.

- ii) Existem cilindros mergulhados \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita

$$\tilde{v}_E = (b_E, v_E), \tilde{v}'_E = (b'_E, v'_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$$

tais que v_E e v'_E são mergulhos, \tilde{v}_E é assintótico à $P_{3,E}$ em $s = +\infty$ e à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$, \tilde{v}'_E é assintótico à $P'_{3,E}$ em $s = +\infty$ e à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$, $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$ e $\tilde{v}'_n \rightarrow \tilde{v}'_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Denotando $V_E := v_E(\mathbb{R} \times S^1)$ e $V'_E := v'_E(\mathbb{R} \times S^1)$, temos que $V_E \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$ e $V'_E \subset \dot{S}'_E \setminus P'_{3,E}$. Além disso, dadas pequenas vizinhanças $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subset W_E$ de $P_{3,E} \cup V_E \cup P_{2,E}$ e de $P'_{3,E} \cup V'_E \cup P_{2,E}$, respectivamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $v_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \mathcal{U}$ e $v'_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \mathcal{U}'$ se $n \geq n_0$. Veja Figura 2.26.

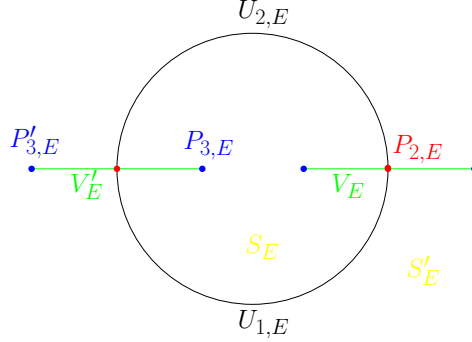


Figura 2.26: Os bindings $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$, $P_{2,E} \subset \partial S_E$, $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$, o par de planos rígidos $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ assintóticos à $P_{2,E}$ e o par de cilindros rígidos V_E e V'_E conectando, respectivamente, $P_{3,E}$ à $P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$ à $P_{2,E}$.

iii) Existem famílias suaves a um parâmetro de planos mergulhados \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita

$$\tilde{w}_{\tau,E} = (d_{\tau,E}, w_{\tau,E}), \tilde{w}'_{\tau,E} = (d'_{\tau,E}, w'_{\tau,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E, \tau \in (0, 1),$$

tais que $w_{\tau,E}$ e $w'_{\tau,E}$ são mergulhos, $\tilde{w}_{\tau,E}$ é assintótico à $P_{3,E}$ e $\tilde{w}'_{\tau,E}$ é assintótico à $P'_{3,E}$. A família de planos $D_{\tau,E} := w_{\tau,E}(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$, folheia $\dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$, enquanto a família de planos $D'_{\tau,E} = w'_{\tau,E}(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$, folheia $\dot{S}'_E \setminus (V'_E \cup P'_{3,E})$. Dadas pequenas vizinhanças $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset W_E$ de $P_{3,E} \cup V_E \cup P_{2,E} \cup U_{1,E}$ e de $P_{3,E} \cup V_E \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$, respectivamente, existem $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ tais que $D_{\tau,E} \subset \mathcal{U}_1$ se $\tau \in (0, \tau_1)$ e $D_{\tau,E} \subset \mathcal{U}_2$ se $\tau \in (\tau_2, 1)$. Uma afirmação análoga vale para a família de planos $D'_{\tau,E}$, $\tau \in (0, 1)$. Mais ainda, dado $p_0 \in \dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$, encontramos uma sequência $\tau_n \in (0, 1)$ e um $\bar{\tau} \in (0, 1)$ tais que $p_0 \in w_{\tau_n,n}(\mathbb{C})$ para todo n grande, $p_0 \in w_{\bar{\tau},E}(\mathbb{C})$ e $\tilde{w}_{\tau_n,n} \rightarrow \tilde{w}_{\bar{\tau},E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Uma afirmação análoga ocorre se $p_0 \in \dot{S}'_E \setminus (V'_E \cup P'_{3,E})$. Veja Figura 2.27.

As curvas \tilde{J}_E -holomorfas $\tilde{u}_{1,E}, \tilde{u}_{2,E}, \tilde{v}_E, \tilde{v}'_E, \tilde{w}_{\tau,E}, \tilde{w}'_{\tau,E}$, $\tau \in (0, 1)$, e os cilindros triviais sobre $P_{3,E}$, $P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$ determinam uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_E$ para $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$. A projeção de $\tilde{\mathcal{F}}_E$ sobre W_E , via a projeção $p : \mathbb{R} \times W_E \rightarrow W_E$ no segundo fator, é uma folheação 3–2–3 \mathcal{F}_E para o fluxo de λ_E em W_E , cujos bindings, com índices de Conley-Zehnder 3, 2 e 3, são dados respectivamente por $P_{3,E}, P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$. Em particular, a folheação 3–2–3 \mathcal{F}_E em W_E se restringe a uma folheação 2–3 em S_E , cujos bindings, com índices de Conley-Zehnder 3 e 2, são dados respectivamente por $P_{3,E}$ e $P_{2,E}$.

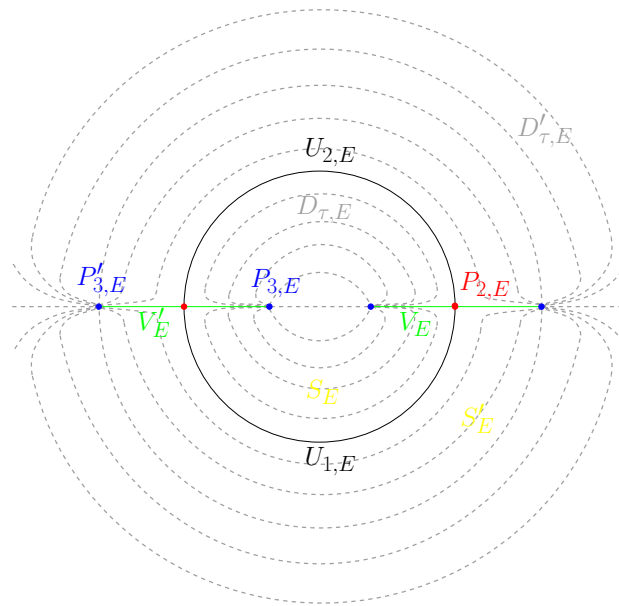


Figura 2.27: A folheação \mathcal{F}_E em $W_E = S_E \cup S'_E$ está agora completa, com os *bindings* $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$, $P_{2,E} \subset \partial S_E$, $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$, o par de planos rígidos $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ assintóticos à $P_{2,E}$, o par de cilindros rígidos V_E e V'_E conectando, respectivamente, $P_{3,E}$ à $P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$ à $P_{2,E}$ e o par de famílias a um parâmetro de planos $D_{\tau,E}$ e $D'_{\tau,E}$ assintóticos, respectivamente, à $P_{3,E}$ e à $P'_{3,E}$.

Com a descrição local das variedades estável $W_E^s(P_{2,E})$ e instável $W_E^u(P_{2,E})$ da órbita hiperbólica $P_{2,E}$, que fornecemos anteriormente, vimos que $W_E^s(P_{2,E})$ e $W_E^u(P_{2,E})$ possuem ramos dentro de \dot{S}_E e de \dot{S}'_E . A existência da folheação $3 - 2 - 3$ para o fluxo de λ_E na 3-esfera W_E , $E > 0$ pequeno, dada pela Proposição 2.3.10, força uma interseção entre os ramos de $W_E^s(P_{2,E})$ e de $W_E^u(P_{2,E})$ em \dot{S}_E e em \dot{S}'_E , produzindo assim no mínimo duas órbitas homoclínicas à $P_{2,E}$, uma delas contida em \dot{S}_E e a outra em \dot{S}'_E . A existência de tais órbitas homoclínicas segue, como havíamos comentado, de um argumento de preservação de área encontrado em [27, Proposição 7.5]. Em particular, obtemos pelo menos uma órbita homoclínica à $P_{2,E}$ em \dot{S}_E , como queríamos. Reveja a Figura 2.20 que representa a folheação $2 - 3$ em S_E , juntamente com os ramos das variedades estável e instável de $P_{2,E}$ contidos em \dot{S}_E . □

Capítulo 3

Resultados intermediários

Ao longo da demonstração do nosso resultado principal, o Teorema 2.3.2, enunciamos alguns resultados intermediários, cujas demonstrações foram postergadas. O último capítulo desta tese é dedicado à prova de tais resultados. Para isso, continuamos seguindo as notações estabelecidas na Seção 2.3.

3.1 Demonstração da Proposição 2.3.6

Nesta seção, vamos provar que a 3-esfera W_E admite uma forma de contato *tight*, para $E > 0$ suficientemente pequeno, cujo fluxo de Reeb associado é equivalente ao fluxo Hamiltoniano restrito à W_E . O objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 2.3.6. *Existe $E^* > 0$ tal que, para todo $0 < E < E^*$, existe um campo de Liouville X_E definido em uma vizinhança de W_E em \mathcal{U}_{E^*} que é transversal à W_E . Mais ainda, X_E é invariante pela involução T definida em coordenadas locais por (2.22), ou seja, $T_*X_E = X_E$. Consequentemente, a 1-forma $i_{X_E}\omega_0$ se restringe a uma forma de contato *tight* λ_E em W_E e seu fluxo de Reeb é uma reparametrização do fluxo Hamiltoniano de H restrito à W_E . Em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) , λ_E coincide com a forma de contato padrão $\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p_i dq_i - q_i dp_i$ próximo à 2-esfera $\partial S_E = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$. Além disso, existe um campo de Liouville \tilde{X}_0 definido em uma vizinhança de \dot{W}_0 em \mathcal{U}_{E^*} de modo que \tilde{X}_0 é transversal à \dot{W}_0 e, para qualquer vizinhança pequena \tilde{U} do sela-centro p_c em \mathcal{U}_{E^*} , temos que $X_E = \tilde{X}_0$ fora de \tilde{U} , para todo $E > 0$ suficientemente pequeno. Em particular, $\bar{\lambda}_0 := (i_{\tilde{X}_0}\omega_0)|_{\dot{W}_0}$ é uma forma de contato em \dot{W}_0 .*

Considere novamente a mudança de coordenadas simplética $\varphi : V \rightarrow U$ centrada no sela-centro $p_c \in U$ tal que, nas novas coordenadas $z = \varphi^{-1}(w)$, onde $z = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ e $w = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, a função Hamiltoniana H assume a forma normal

$$K(I_1, I_2) = -\alpha I_1 + \omega I_2 + R(I_1, I_2),$$

com $I_1 = q_1 p_1$, $I_2 = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2}$ e $R(I_1, I_2) = \mathcal{O}(I_1^2 + I_2^2)$.

Seja $U_0 \subset \mathcal{U}_E$, $E > 0$ pequeno, a 4-bola topológica fechada que tem como bordo o

conjunto singular estritamente convexo $S_0 \subset H^{-1}(0)$. Dado um ponto $w_0 \in U_0 \setminus S_0$, o campo radial centrado em w_0 , definido por

$$X_0(w) = \frac{w - w_0}{2}, \quad (3.1)$$

é um campo de Liouville, pois $\mathcal{L}_{X_0}\omega_0 = \omega_0$, e é transversal à $\dot{S}_0 = S_0 \setminus \{p_c\}$ devido às propriedades geométricas de S_0 , como comentamos na Seção 2.2. Consequentemente, X_0 é transversal à 3-bola $S_E \subset H^{-1}(E)$ no complementar de uma vizinhança fixada do sela-centro p_c , desde que $E > 0$ seja suficientemente pequeno.

Assuma que $w_0 \in U$ e denote $z_0 = \varphi^{-1}(w_0) \in V$. Vamos supor que z_0 é da forma

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_0, 0, \delta_0, 0), \quad (3.2)$$

onde $\delta_0 = |z_0| > 0$ será determinado posteriormente, de acordo com nossas necessidades.

Para garantir a transversalidade da 3-esfera $W_E = \partial\mathcal{U}_E$ com o campo de Liouville X_E que pretendemos construir, o termo $I_1\partial_{I_1}K + I_2\partial_{I_2}K$ assume um papel importante. Por esta razão, vamos obter a seguir algumas estimativas que o envolvem.

Vimos em (2.9) que podemos utilizar o Teorema da Função Implícita para escrever I_2 como uma função de (I_1, E) no nível de energia $K^{-1}(E)$, para valores pequenos de E, I_1 e I_2 , do seguinte modo

$$I_2(I_1, E) = \frac{\alpha}{\omega}I_1 + \frac{1}{\omega}E + \mathcal{O}(I_1^2 + E^2).$$

Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned} I_1\partial_{I_1}K + I_2\partial_{I_2}K &= I_1(-\alpha + \partial_{I_1}R) + I_2(\omega + \partial_{I_2}R) \\ &= E - R + I_1\partial_{I_1}R + I_2\partial_{I_2}R \\ &= E + \mathcal{O}(I_1^2 + I_2^2) \\ &= E + \mathcal{O}(I_1^2 + E^2) \\ &\geq \frac{E}{2} + \mathcal{O}(I_1^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

se $|I_1|$ e $E \geq 0$ são suficientemente pequenos.

No caso em que $I_1 \leq 0$ e $E > 0$, é possível garantir a positividade estrita de $I_1\partial_{I_1}K + I_2\partial_{I_2}K$ para $z \in B_{\delta_0}(0) \cap K^{-1}(E)$, com $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, como segue:

$$\begin{aligned} I_1\partial_{I_1}K + I_2\partial_{I_2}K &= -\alpha I_1 + \omega I_2 + I_1\partial_{I_1}R + I_2\partial_{I_2}R \\ &= -\alpha I_1 + \omega I_2 + \mathcal{O}(I_1^2 + I_2^2) \\ &> 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observe que, se a energia E é não-nula, então I_1 e I_2 não podem se anular simultaneamente. Aqui $B_{\delta_0}(0)$ denota a bola fechada centrada na origem dada por $B_{\delta_0}(0) = \{z \in \mathbb{R}^4 / |z| \leq \delta_0\}$.

Para finalizar, estimamos o termo $I_1\partial_{I_1}K + I_2\partial_{I_2}K$ no caso em que a energia E é estritamente negativa. Note que, se $E < 0$ e $z \in B_{\delta_0}(0) \cap K^{-1}(E)$, com $\delta_0 > 0$ suficientemente

pequeno, então

$$\begin{aligned} I_1 \partial_{I_1} K + I_2 \partial_{I_2} K &= -\alpha I_1 + \omega I_2 + \mathcal{O}(I_1^2 + I_2^2) \\ &> \frac{\omega}{2} I_2 + \mathcal{O}(I_1) \\ &\geq \mathcal{O}(I_1), \end{aligned} \tag{3.5}$$

A desigualdade estrita de (3.5) é obtida diretamente quando $I_2 > 0$. Se $I_2 = 0$, então $I_1 \neq 0$, já que $E < 0$. Neste caso, para obter a desigualdade estrita, basta substituir o termo $\mathcal{O}(I_1)$ por um termo estritamente menor, ainda da ordem de I_1 .

Fazendo uso novamente do Teorema da Função Implícita, expressamos I_1 como uma função de (I_2, E) no nível de energia $K^{-1}(E)$, para valores pequenos de E, I_1 e I_2 , da seguinte forma

$$I_1(I_2, E) = \frac{\omega}{\alpha} I_2 - \frac{1}{\alpha} E + \mathcal{O}(I_2^2 + E^2). \tag{3.6}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} (q_1 + p_1)^2 &= q_1^2 + p_1^2 + 2I_1 \\ &= q_1^2 + p_1^2 + 2 \left(\frac{\omega}{\alpha} I_2 - \frac{1}{\alpha} E \right) + \mathcal{O}(I_2^2 + E^2) \\ &\geq \min \left\{ \frac{\omega}{\alpha}, 1 \right\} |z|^2 - 2 \frac{E}{\alpha} + \mathcal{O}(|z|^4 + E^2) \\ &\geq \min \left\{ \frac{\omega}{\alpha}, 1 \right\} \frac{|z|^2}{2} - 4 \frac{E}{\alpha} \\ &\geq \min \left\{ \frac{\omega}{\alpha}, 1 \right\} \frac{|z|^2}{4}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

se $|z|$ é suficientemente pequeno e $0 \leq E < \hat{c}|z|^2$, onde $\hat{c} = \frac{\alpha}{16} \min \left\{ \frac{\omega}{\alpha}, 1 \right\}$ é uma constante positiva. Fixado $\delta_0 > 0$ pequeno, note que se a energia E é tal que $0 \leq E < \frac{\hat{c}\delta_0^2}{4}$, então todo ponto z que pertence ao anel $B_{\delta_0}(0) \setminus B_{\frac{\delta_0}{2}}(0) \subset V$ satisfaz a desigualdade $0 \leq E < \hat{c}|z|^2$. Portanto, se $\delta_0 > 0$ é fixado suficientemente pequeno, obtemos a seguinte implicação a partir da desigualdade (3.7):

$$\delta_0 \geq |z| > \frac{\delta_0}{2} \Rightarrow q_1 + p_1 > \frac{\delta_0}{c_2}, \tag{3.8}$$

para todo $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$ e $E \geq 0$ suficientemente pequeno, onde a constante c_2 é dada por

$$c_2 = \frac{4}{\sqrt{\min\{\frac{\omega}{\alpha}, 1\}}} \geq 4. \tag{3.9}$$

Defina agora o campo vetorial $Y_0 := \varphi^* X_0$ em V , onde X_0 é como em (3.1). Uma vez que X_0 é um campo de Liouville e $\varphi : V \rightarrow U$ é uma aplicação simplética, temos que Y_0 é um campo de Liouville. Embora o campo Y_0 não seja necessariamente radial como X_0 , para

cada $z = \varphi^{-1}(w) \in V$, vale que

$$\begin{aligned}
 Y_0(z) &= d\varphi^{-1}(\varphi(z)) \cdot X_0(\varphi(z)) \\
 &= \frac{d\varphi^{-1}(w) \cdot (w - w_0)}{2} \\
 &= \frac{\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_0) + R_{\varphi^{-1}(w_0)}(\varphi^{-1}(w))}{2} \\
 &= \frac{z - z_0}{2} + R_{z_0}(z),
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

com o resto satisfazendo

$$|R_{z_0}(z)| \leq c|z - z_0|^2 \tag{3.11}$$

para alguma constante $c > 0$ que não depende de z_0 , se ambos z e z_0 pertencem à bola $B_{\delta_0}(0)$, com $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno.

Seja Y_1 o campo de Liouville em $B_{\delta_0}(0)$ dado pelo campo radial centrado em z_0 , ou seja,

$$Y_1(z) = \frac{z - z_0}{2}.$$

Neste caso, (3.10) nos diz que $Y_0 = Y_1 + R_{z_0}$ e, assim,

$$\begin{aligned}
 d(i_{R_{z_0}}\omega_0) &= d(i_{Y_0}\omega_0 - i_{Y_1}\omega_0) \\
 &= \mathcal{L}_{Y_0}\omega_0 - \mathcal{L}_{Y_1}\omega_0 \\
 &= \omega_0 - \omega_0 \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Visto que a bola fechada $B_{\delta_0}(0)$ é simplesmente conexa, (3.12) implica que $i_{R_{z_0}}\omega_0$ é uma forma exata, isto é,

$$i_{R_{z_0}}\omega_0 = -dG_{z_0} \tag{3.13}$$

para alguma função suave $G_{z_0} : B_{\delta_0}(0) \rightarrow \mathbb{R}$. Observe que, pela equação (3.13), R_{z_0} é o campo Hamiltoniano associado à função G_{z_0} e, portanto, escrevendo $R_{z_0}(z) = \sum_{i=1}^2 m_i(z)\partial_{q_i} + n_i(z)\partial_{p_i}$, temos que

$$\frac{\partial G_{z_0}}{\partial q_i} = -n_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_{z_0}}{\partial p_i} = m_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.14}$$

As funções m_i e n_i , $i = 1, 2$, dependem de z_0 e, devido à (3.11), satisfazem

$$|m_i(z)|, |n_i(z)| \leq c|z - z_0|^2, \tag{3.15}$$

para quaisquer $z, z_0 \in B_{\delta_0}(0)$, onde $c > 0$ é uma constante que não depende de z_0 .

De (3.14) e (3.15), segue que

$$|\nabla G_{z_0}(z)| \leq 4c|z - z_0|^2$$

e então, assumindo $G_{z_0}(0) = 0$ e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo à curva

$\gamma(s) = G_{z_0}(z_0 + s(z - z_0))$, obtemos a seguinte estimativa para G_{z_0} :

$$\begin{aligned} |G_{z_0}(z)| &= \left| \int_0^1 \nabla G_{z_0}(z_0 + s(z - z_0)) \cdot (z - z_0) ds \right| \\ &\leq |z - z_0| \int_0^1 4cs^2 |z - z_0|^2 ds \\ &= \frac{4c}{3} |z - z_0|^3, \end{aligned} \tag{3.16}$$

para quaisquer $z, z_0 \in B_{\delta_0}(0)$, com $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno.

Seja $\delta_1 := \frac{\delta_0}{c_2} > 0$, onde $c_2 > 0$ é a constante definida em (3.9). Consideramos uma função de corte $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1, \text{ se } t \in \left[0, \frac{\delta_1}{3}\right] \\ f(t) &= 0, \text{ se } t \in \left[\frac{2\delta_1}{3}, \infty\right) \\ -\frac{6}{\delta_1} < f'(t) < 0, \text{ se } t \in \left(\frac{\delta_1}{3}, \frac{2\delta_1}{3}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Veja Figura 3.1.

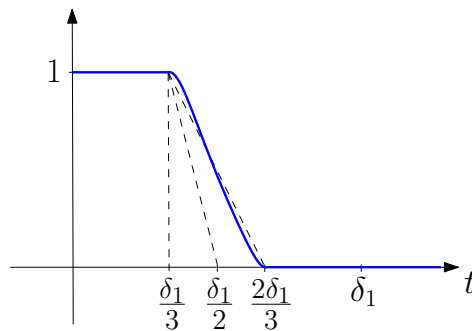


Figura 3.1: Função de corte $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo (3.17).

Note que as escolhas feitas em (3.17) implicam que f também satisfaz

$$0 \leq 1 - f(t) \leq \frac{6}{\delta_1} t, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.18}$$

$$|f'(t)| \leq \frac{18}{\delta_1^2} t, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.19}$$

Agora, utilizando a função $G_{z_0} : B_{\delta_0}(0) \rightarrow \mathbb{R}$, definida em (3.13), e uma função de corte $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo (3.17), vamos interpolar os campos de Liouville $Y_0 = \varphi^* X_0$ e Y_1 , sendo X_0 o campo radial centrado em $w_0 = \varphi(z_0)$ e Y_1 o campo radial centrado em z_0 . O objetivo desta interpolação é produzir um novo campo de Liouville Y , definido em $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ com $\delta_0 > 0$ pequeno, que coincida com Y_1 em $B_{\frac{\delta_1}{6}}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ e com Y_0 em $\left(B_{\delta_0}(0) \setminus B_{\frac{\delta_0}{2}}(0)\right) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ quando $E \geq 0$ é suficientemente pequeno. Veja Figura 3.2 abaixo. Em seguida, vamos mostrar, entre outras coisas, que Y é transversal

à $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$ para $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, ou seja, Y é transversal à S_E em coordenadas locais. A escolha do valor $\frac{\delta_1}{6}$ é devida ao fato de que se $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in B_{\frac{\delta_1}{6}}(0)$ então sua projeção no plano $q_1 p_1$ satisfaz $q_1 + p_1 \leq \frac{\delta_1}{3}$ e, portanto, $f(q_1 + p_1) = 1$. Observe também que se z pertence ao anel $B_{\delta_0}(0) \setminus B_{\frac{\delta_0}{2}}(0)$, então, por (3.8), a projeção de z no plano $q_1 p_1$ é tal que $q_1 + p_1 > \delta_1$, para todo $E \geq 0$ suficientemente pequeno, e assim $f(q_1 + p_1) = 0$.

Definimos então o campo vetorial Y em $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ por

$$Y := Y_0 - Y_{fG_{z_0}}, \quad (3.20)$$

onde $Y_{fG_{z_0}}$ é o campo Hamiltoniano em $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ associado à função $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto f(q_1 + p_1)G_{z_0}(z)$. Note que, se $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ é tal que $f(q_1 + p_1) = 1$, então $Y(z) = Y_0(z) - R_{z_0}(z) = Y_1(z)$, ao passo que se $f(q_1 + p_1) = 0$, então $Y(z) = Y_0(z)$. Além disso, por Y_0 ser um campo de Liouville e $Y_{fG_{z_0}}$ ser um campo Hamiltoniano, concluímos que

$$\mathcal{L}_Y \omega_0 = \mathcal{L}_{Y_0} \omega_0 - \mathcal{L}_{Y_{fG_{z_0}}} \omega_0 = \omega_0,$$

isto é, Y é um campo de Liouville.

Vamos analisar a interseção dos níveis de energia $K^{-1}(E)$ com a direção do campo interpolado Y . Uma vez que

$$i_{Y_{fG_{z_0}}} \omega_0 = -d(fG_{z_0}) = -G_{z_0} df - f dG_{z_0} = G_{z_0} i_{Y_f} \omega_0 + f i_{R_{z_0}} \omega_0 = i_{G_{z_0} Y_f + f R_{z_0}} \omega_0,$$

onde Y_f é o campo Hamiltoniano associado à função $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto f(q_1 + p_1)$, temos que

$$Y_{fG_{z_0}} = G_{z_0} Y_f + f R_{z_0}. \quad (3.21)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dK \cdot Y &= dK \cdot Y_0 - G_{z_0} dK \cdot Y_f - f dK \cdot R_{z_0} \\ &= (1 - f) dK \cdot R_{z_0} - G_{z_0} dK \cdot Y_f + dK \cdot Y_1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vamos estimar cada um dos termos da última linha de (3.22) nos três lemas a seguir.

Lema 3.1.1. *Existe uma constante $A_1 > 0$ tal que, para todo $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno e para todo $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$, temos*

$$|(1 - f) dK \cdot R_{z_0}(z)| \leq A_1 \delta_0^2 (q_1 + p_1).$$

Demonstração. Visto que $dK(0) = 0$, podemos escrever $|dK(z)| \leq c_0 |z|$ para alguma constante $c_0 > 0$ e $z \in B_{\delta_0}(0)$, com $\delta_0 > 0$ pequeno. Então, como $\delta_1 = \frac{\delta_0}{c_2}$, $|z_0| = \delta_0 > 0$ e

$|z - z_0|^2 \leq |z|^2 + 2|z|\delta_0 + \delta_0^2$, obtemos a partir de (3.11) e (3.18), que

$$\begin{aligned} |(1-f)dK(z) \cdot R_{z_0}(z)| &\leq \frac{6c_0c}{\delta_1}|z||z - z_0|^2(q_1 + p_1) \\ &\leq \frac{6c_0cc_2}{\delta_0}|z|(|z|^2 + 2|z|\delta_0 + \delta_0^2)(q_1 + p_1) \\ &\leq 24c_0cc_2\delta_0^2(q_1 + p_1) \end{aligned}$$

para todo $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$, com $\delta_0 > 0$ pequeno. Basta considerar $A_1 = 24c_0cc_2$. \square

Lema 3.1.2. *Existe uma constante $A_2 > 0$ tal que, para todo $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno e para todo $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$, temos*

$$|G_{z_0}dK \cdot Y_f(z)| \leq A_2\delta_0^2(q_1 + p_1).$$

Demonstração. O campo Hamiltoniano Y_f associado à função $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto f(q_1 + p_1)$ é dado por $Y_f(z) = (f'(q_1 + p_1), 0, -f'(q_1 + p_1), 0)$ e o gradiente da função Hamiltoniana K é dado por $\nabla K = (-\bar{\alpha}p_1, \bar{\omega}q_2, -\bar{\alpha}q_1, \bar{\omega}p_2)$, onde $\bar{\alpha} = -\partial_{I_1}K = \alpha - \partial_{I_1}R$ e $\bar{\omega} = \partial_{I_2}K = \omega + \partial_{I_2}R$. Logo,

$$dK \cdot Y_f(z) = \bar{\alpha}(q_1 - p_1)f'(q_1 + p_1). \quad (3.23)$$

Observe que, considerando $|z|$ suficientemente pequena, podemos assumir que $\frac{\alpha}{2} < \bar{\alpha} < 2\alpha$. Então, como $\delta_1 = \frac{\delta_0}{c_2}$, $|z_0| = \delta_0 > 0$, $|q_1 - p_1| \leq |q_1| + |p_1| \leq 2|z|$ e $|z - z_0|^3 \leq |z|^3 + 3|z|^2\delta_0 + 3|z|\delta_0^2 + \delta_0^3$, obtemos a partir de (3.16), (3.19) e (3.23), que

$$\begin{aligned} |G_{z_0}dK \cdot Y_f(z)| &\leq \frac{24c}{\delta_1^2}\bar{\alpha}|q_1 - p_1||z - z_0|^3(q_1 + p_1) \\ &\leq \frac{96c}{\delta_1^2}\alpha|z||z - z_0|^3(q_1 + p_1) \\ &\leq \frac{96cc_2^2}{\delta_0^2}\alpha|z|(|z|^3 + 3|z|^2\delta_0 + 3|z|\delta_0^2 + \delta_0^3)(q_1 + p_1) \\ &\leq 768cc_2^2\alpha\delta_0^2(q_1 + p_1) \end{aligned}$$

para todo $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$, com $\delta_0 > 0$ pequeno. Basta tomar $A_2 = 768cc_2^2\alpha$. \square

Lema 3.1.3. *Para cada $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, ocorre o seguinte:*

i) se $0 \neq z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E \geq 0$, então

$$dK \cdot Y_1(z) > (q_1 + p_1)\frac{\delta_0\alpha}{8\sqrt{2}}. \quad (3.24)$$

ii) existe $0 < \bar{\delta}_0 \ll \delta_0$ dependendo de δ_0 tal que, se $z \in B_{\bar{\delta}_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E < 0$, então

$$dK \cdot Y_1(z) > (q_1 + p_1)\frac{\delta_0\alpha}{8\sqrt{2}}. \quad (3.25)$$

Demonstração. Assumimos em (3.2) que o ponto z_0 é da forma $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_0, 0, \delta_0, 0)$. Então, como $\nabla K(z) = (-\bar{\alpha}p_1, \bar{\omega}q_2, -\bar{\alpha}q_1, \bar{\omega}p_2)$ e $Y_1(z) = \frac{z-z_0}{2}$, obtemos que

$$dK \cdot Y_1(z) = I_1 \partial_{I_1} K + I_2 \partial_{I_2} K + (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \bar{\alpha}}{2\sqrt{2}}. \quad (3.26)$$

Podemos supor que $\bar{\alpha} = \alpha - \partial_{I_1} R$ satisfaz $\frac{\alpha}{2} < \bar{\alpha} < 2\alpha$, se $|z|$ for suficientemente pequena.

Vamos considerar primeiramente o caso *i)* para energia E estritamente positiva. Se $I_1 > 0$ então, como $q_1 + p_1 \geq 0$, temos que $q_1, p_1 > 0$. Neste caso, de (3.3) e (3.26) segue que

$$dK \cdot Y_1(z) > (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \alpha}{4\sqrt{2}} + \mathcal{O}(I_1^2) > (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \alpha}{8\sqrt{2}},$$

se $\delta_0 > 0$ é suficientemente pequeno e $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E) \cap \{I_1 > 0\}$, com $E > 0$. Agora, se $I_1 \leq 0$ então, por (3.4) e (3.26), obtemos diretamente que

$$dK \cdot Y_1(z) > (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \alpha}{8\sqrt{2}},$$

para $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno e $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E) \cap \{I_1 \leq 0\}$, com $E > 0$.

Vejam os caso *i)* para energia $E = 0$. Como $q_1 + p_1 \geq 0$ e $z \neq 0$, temos que $q_1, p_1 \geq 0$ e $q_1 > 0$ ou $p_1 > 0$. Sendo assim, podemos concluir, novamente de (3.3) e (3.26), que

$$dK \cdot Y_1(z) > (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \alpha}{4\sqrt{2}} + \mathcal{O}(I_1^2) > (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \alpha}{8\sqrt{2}},$$

se $\delta_0 > 0$ é suficientemente pequeno e $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(0)$.

Só nos resta analisar o caso *ii)*, no qual a energia E é estritamente negativa. Nesta situação, $q_1 + p_1 \geq 0$ implica que $q_1, p_1 > 0$. Logo, a partir de (3.5) e (3.26), temos que

$$dK \cdot Y_1(z) > (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \alpha}{4\sqrt{2}} + \mathcal{O}(I_1) > (q_1 + p_1) \frac{\delta_0 \alpha}{8\sqrt{2}},$$

se $0 < \bar{\delta}_0 \ll \delta_0$ são escolhidos suficientemente pequenos e $z \in B_{\bar{\delta}_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E < 0$. Note que, neste caso, como a estimativa obtida para $I_1 \partial_{I_1} K + I_2 \partial_{I_2} K$ em (3.5) envolve um termo da ordem de I_1 , não mais da ordem de I_1^2 como em (3.3), foi necessário escolher $\bar{\delta}_0 > 0$, suficientemente pequeno com relação à $\delta_0 > 0$, para ser possível controlar o termo $\mathcal{O}(I_1)$ na última desigualdade. \square

A partir dos Lemas 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3, que fornecem estimativas para os termos que compõem $dK \cdot Y$ em (3.22), podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 3.1.4. *Seja Y o campo de Liouville definido em $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ por (3.20). Se $\delta_0 > 0$ é suficientemente pequeno, então ocorre o seguinte:*

- i) se $0 \neq z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E \geq 0$, então o vetor $Y(z)$ é positivamente transversal ao nível de energia $K^{-1}(E)$, isto é, $dK \cdot Y(z) > 0$.*

ii) existe $0 < \bar{\delta}_0 \ll \delta_0$ dependendo de δ_0 tal que, se $z \in B_{\bar{\delta}_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E < 0$, então o vetor $Y(z)$ é positivamente transversal ao nível de energia $K^{-1}(E)$.

Demonstração. Seja $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo os Lemas 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 e a desigualdade a seguir

$$\frac{\delta_0 \alpha}{8\sqrt{2}} > (A_1 + A_2)\delta_0^2.$$

Assim, pela equação (3.22) e pelos Lemas 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3-i), concluímos que

$$dK \cdot Y(z) > \left(\frac{\delta_0 \alpha}{8\sqrt{2}} - (A_1 + A_2)\delta_0^2 \right) (q_1 + p_1) \geq 0,$$

se $0 \neq z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E \geq 0$.

Seja $0 < \bar{\delta}_0 \ll \delta_0$ como no Lema 3.1.3-ii). Neste caso, também obtemos que

$$dK \cdot Y(z) > \left(\frac{\delta_0 \alpha}{8\sqrt{2}} - (A_1 + A_2)\delta_0^2 \right) (q_1 + p_1) \geq 0,$$

se $z \in B_{\bar{\delta}_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, com $E < 0$. □

Em suma, fixado $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, construímos um campo de Liouville Y definido em $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ que interpola os campos Y_0 e Y_1 , sendo que, para $E \geq 0$ suficientemente pequeno, Y coincide com $Y_0 = \varphi^* X_0$ em $(B_{\delta_0}(0) \setminus B_{\frac{\delta_0}{2}}(0)) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$, onde X_0 é o campo radial centrado em $w_0 = \varphi(z_0)$, e coincide com o campo radial Y_1 centrado em z_0 em $B_{\delta_2}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$, onde $\delta_2 := \frac{\delta_1}{6} = \frac{\delta_0}{6c_2}$. Mais ainda, o campo de Liouville Y é transversal à $(B_{\delta_0}(0) \setminus \{0\}) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, para $E \geq 0$, e existe $0 < \bar{\delta}_0 = \bar{\delta}_0(\delta_0) \ll \delta_0$ de modo que Y é transversal à $B_{\bar{\delta}_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, para $E < 0$.

Considere o campo de Liouville \bar{X}_0 definido numa vizinhança de $\dot{S}_0 = S_0 \setminus \{p_c\}$ pela concatenação dos campos de Liouville $\varphi_* Y$ e X_0 , isto é, $\bar{X}_0 = \varphi_* Y$ em $\varphi(B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\})$ e $\bar{X}_0 = X_0$ no complementar de $\varphi(B_{\delta_0}(0))$. Observe que, pela construção de Y , os campos $\varphi_* Y$ e X_0 coincidem em $\varphi\left(\left(B_{\delta_0}(0) \setminus B_{\frac{\delta_0}{2}}(0)\right) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}\right)$ para energia $E \geq 0$ pequena. Além disso, como Y é transversal à $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 > 0\} \cap K^{-1}(0)$ e X_0 é transversal à \dot{S}_0 , devido às propriedades geométricas do conjunto singular estritamente convexo S_0 , podemos concluir que o campo \bar{X}_0 é transversal à \dot{S}_0 .

A Figura 3.2 a seguir ilustra a interpolação que acabamos de realizar em coordenadas locais.

Agora vamos efetuar uma nova interpolação de campos de Liouville. Para isso, fixemos $0 < \delta_2 = \frac{\delta_0}{6c_2} < \delta_0$ suficientemente pequeno satisfazendo a Proposição 3.1.4 e fixemos uma energia $\bar{E} > 0$ suficientemente pequena, como considerada até então, de modo que a 2-esfera $\partial S_{\bar{E}}$, definida em coordenadas locais por $\partial S_{\bar{E}} = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(\bar{E})$, esteja contida na bola aberta $B_{\delta_2}(0) \setminus \partial B_{\delta_2}(0)$.

Seja Y_2 o campo de Liouville em $B_{\delta_2}(0)$ dado pelo campo radial centrado na origem $0 \in \mathbb{R}^4$, ou seja,

$$Y_2(z) = \frac{z}{2}.$$

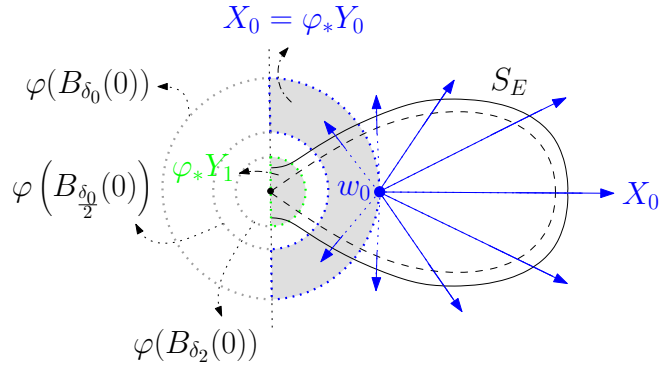


Figura 3.2: Interpolação entre os campos de Liouville $\varphi_* Y_0 = X_0$ e $\varphi_* Y_1$, onde $\delta_2 = \frac{\delta_1}{6} = \frac{\delta_0}{6c_2}$, $w_0 = \varphi(z_0)$, $X_0 = \frac{w - w_0}{2}$ e $Y_1 = \frac{z - z_0}{2}$.

Queremos interpolar os campos radiais de Liouville Y_1 e Y_2 em $B_{\delta_2}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$, para todo $E > 0$ próximo de \bar{E} , produzindo assim um campo de Liouville $Y_{\bar{E}}$, definido numa vizinhança $\mathcal{V}_{\bar{E}} \subset B_{\delta_2}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ de $\partial S_{\bar{E}}$, que coincide com Y_2 próximo de $\partial S_{\bar{E}}$ e com Y_1 fora de uma pequena vizinhança de $\partial S_{\bar{E}}$. Em seguida, mostraremos que o campo $Y_{\bar{E}}$ é transversal à $\mathcal{V}_{\bar{E}} \cap K^{-1}(E)$, para todo $E > 0$ próximo de \bar{E} , ou seja, em coordenadas locais, $Y_{\bar{E}}$ é transversal à S_E dentro da vizinhança $\mathcal{V}_{\bar{E}}$.

Em virtude da positividade estrita obtida na estimativa (3.4) para pontos $z \in B_{\delta_0}(0) \cap K^{-1}(E) \cap \{I_1 \leq 0\}$, com $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno e $E > 0$, podemos afirmar que existe $I_{1,\bar{E}}^* > 0$ pequeno tal que

$$I_1 \partial_{I_1} K + I_2 \partial_{I_2} K > 0 \quad (3.27)$$

para todo $z \in B_{\delta_2}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E) \cap \{I_1 \leq I_{1,\bar{E}}^*\}$ e todo $E > 0$ suficientemente próximo de \bar{E} . Observe que este conjunto de pontos contém uma vizinhança aberta $\mathcal{V}_{\bar{E}} \subset B_{\delta_2}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ da 2-esfera $\partial S_{\bar{E}}$. Então, podemos escolher $\epsilon_{\bar{E}} > 0$ de modo que $\{0 \leq q_1 + p_1 \leq \epsilon_{\bar{E}}\} \cap K^{-1}(E) \subset \mathcal{V}_{\bar{E}}$ para todo $E > 0$ próximo de \bar{E} e, além disso,

$$\epsilon_{\bar{E}} \rightarrow 0 \text{ quando } \bar{E} \rightarrow 0^+. \quad (3.28)$$

De modo análogo ao que fizemos na primeira interpolação, consideramos uma função de corte $f_{\bar{E}} : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo

$$\begin{aligned} f_{\bar{E}}(t) &= 1, \text{ se } t \in \left[0, \frac{\epsilon_{\bar{E}}}{4}\right] \\ f_{\bar{E}}(t) &= 0, \text{ se } t \in \left[\frac{\epsilon_{\bar{E}}}{2}, \infty\right) \\ f_{\bar{E}}'(t) &\leq 0, \text{ para todo } t \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (3.29)$$

e definimos o campo de Liouville em $\mathcal{V}_{\bar{E}} \subset B_{\delta_2}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$ por

$$Y_{\bar{E}} = Y_1 - Y_{f_{\bar{E}} G_{z_0}}, \quad (3.30)$$

onde a função $G_{z_0} : B_{\delta_2}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ é agora determinada por $i_{-\frac{z_0}{2}}\omega_0 = i_{Y_1 - Y_2}\omega_0 = -dG_{z_0}$ e $G_{z_0}(0) = 0$. Neste caso, sabendo que $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_0, 0, \delta_0, 0)$, obtemos que

$$G_{z_0}(z) = \frac{\delta_0}{2\sqrt{2}}(q_1 - p_1). \quad (3.31)$$

Assim como antes, $Y_{f_{\bar{E}}G_{z_0}}$ e $Y_{f_{\bar{E}}}$ são usados para denotar os campos Hamiltonianos associados, respectivamente, às funções $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto f_{\bar{E}}(q_1 + p_1)G_{z_0}(z)$ e $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto f_{\bar{E}}(q_1 + p_1)$. Note que, próximo à 2-esfera $\partial S_E = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E) \subset \mathcal{V}_{\bar{E}}$, o campo $Y_{\bar{E}}$ é dado por $Y_{\bar{E}} = Y_1 - \left(-\frac{z_0}{2}\right) = \frac{z}{2} = Y_2$, enquanto na região $\left\{\frac{\epsilon_{\bar{E}}}{2} \leq q_1 + p_1 \leq \epsilon_{\bar{E}}\right\} \cap K^{-1}(E) \subset \mathcal{V}_{\bar{E}}$, $E > 0$ próximo de \bar{E} , o campo $Y_{\bar{E}}$ coincide com Y_1 .

Vamos verificar a transversalidade de $Y_{\bar{E}}$ com o nível de energia $K^{-1}(E)$ nos pontos da vizinhança $\mathcal{V}_{\bar{E}}$, para energia $E > 0$ próxima de \bar{E} . Considerando as definições de $Y_{\bar{E}}$ e G_{z_0} dadas por (3.30) e (3.31), as equações (3.21) e (3.23), com f substituída por $f_{\bar{E}}$, as propriedades da função de corte $f_{\bar{E}}$ em (3.29) e a estimativa (3.27), obtemos

$$\begin{aligned} dK \cdot Y_{\bar{E}} &= dK \cdot \frac{z - z_0}{2} - G_{z_0} dK \cdot Y_{f_{\bar{E}}} - f_{\bar{E}} dK \cdot \left(-\frac{z_0}{2}\right) \\ &= (1 - f_{\bar{E}}) dK \cdot \left(-\frac{z_0}{2}\right) + dK \cdot \frac{z}{2} - G_{z_0} dK \cdot Y_{f_{\bar{E}}} \\ &= (1 - f_{\bar{E}}) \frac{\delta_0}{2\sqrt{2}} \bar{\alpha}(q_1 + p_1) + I_1 \partial_{I_1} K + I_2 \partial_{I_2} K \\ &\quad - (q_1 - p_1)^2 \frac{\delta_0}{2\sqrt{2}} \bar{\alpha}' f'_{\bar{E}}(q_1 + p_1) > 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

para todo $z \in \mathcal{V}_{\bar{E}} \subset B_{\delta_2}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\}$. Portanto, em coordenadas locais, o campo de Liouville $Y_{\bar{E}}$ é positivamente transversal à S_E dentro da vizinhança $\mathcal{V}_{\bar{E}}$, para $E > 0$ próximo de \bar{E} .

A Figura 3.3 ilustra nossa segunda interpolação de campos de Liouville.

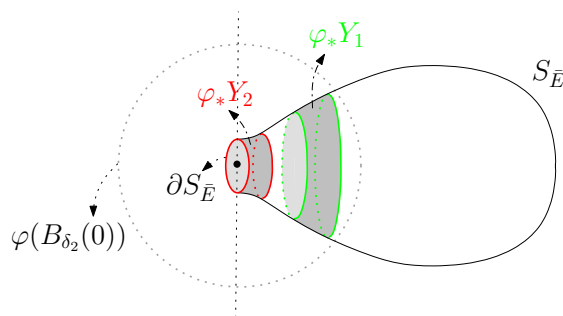


Figura 3.3: Interpolação entre os campos de Liouville $\varphi_* Y_1$ e $\varphi_* Y_2$, onde $Y_1 = \frac{z - z_0}{2}$ e $Y_2 = \frac{z}{2}$.

Tendo em vista as duas interpolações realizadas, construímos um campo de Liouville, que ainda denotaremos por $Y_{\bar{E}}$, definido numa vizinhança de $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(\bar{E})$ tal que $Y_{\bar{E}}$ é transversal à $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \geq 0\} \cap K^{-1}(E)$ para todo $E > 0$ próximo de \bar{E} . Considere então o campo de Liouville $X_{\bar{E}}$ definido numa vizinhança de $S_{\bar{E}}$ em U_E ,

com $E > \bar{E}$ suficientemente próximo de \bar{E} , que é dado pela concatenação dos campos de Liouville $\varphi_* Y_{\bar{E}}$ e $X_0 = \frac{w-w_0}{2}$. Neste caso, $X_{\bar{E}}$ coincide com $\varphi_* Y_2$ próximo de $\partial S_{\bar{E}}$, onde $Y_2 = \frac{z}{2}$, e coincide com $\varphi_* Y_0 = X_0$ no complementar de $\varphi \left(B_{\frac{\delta_0}{2}}(0) \right)$. Mais ainda, como X_0 é transversal à $S_{\bar{E}}$ no complementar de $\varphi \left(B_{\delta_0}(0) \right)$ para $\bar{E} > 0$ suficientemente pequeno, devido às propriedades geométricas do conjunto singular estritamente convexo S_0 , concluímos que $X_{\bar{E}}$ é transversal à $S_{\bar{E}}$.

Podemos estender o campo $Y_{\bar{E}}$ para uma vizinhança de $B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \leq 0\} \cap K^{-1}(\bar{E})$ definindo

$$Y_{\bar{E}}(z) = DT_{T(z)}^{-1} \cdot (Y_{\bar{E}} \circ T(z)),$$

para todo $z \in B_{\delta_0}(0) \cap \{q_1 + p_1 \leq 0\} \cap K^{-1}(E)$ e todo $E > 0$ suficientemente próximo de \bar{E} , onde T é a involução dada por $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (-q_1, q_2, -p_1, p_2)$. Obtemos assim um campo vetorial, novamente denotado por $Y_{\bar{E}}$, definido agora em uma vizinhança de $B_{\delta_0}(0) \cap K^{-1}(\bar{E})$ tal que $Y_{\bar{E}}$ é um campo de Liouville, pois T é uma aplicação simplética, e $Y_{\bar{E}}$ é transversal à $B_{\delta_0}(0) \cap K^{-1}(E)$ para todo $E > 0$ próximo de \bar{E} . Assim como antes, a extensão $Y_{\bar{E}}$ induz naturalmente um campo de Liouville, denotado ainda por $X_{\bar{E}}$, definido agora numa vizinhança de $W_{\bar{E}} = S_{\bar{E}} \cup S'_{\bar{E}}$ em $\mathcal{U}_E = U_E \cup U'_E$, com $E > \bar{E}$ suficientemente próximo de \bar{E} , tal que $X_{\bar{E}}$ é transversal à $W_{\bar{E}}$.

Portanto, $W_{\bar{E}}$ é uma hipersuperfície de contato e a 1-forma

$$\lambda_{\bar{E}} := (i_{X_{\bar{E}}} \omega_0)|_{W_{\bar{E}}}$$

define uma forma de contato em $W_{\bar{E}}$. Uma vez que $W_{\bar{E}}$ é bordo da variedade simplética $(\mathcal{U}_{\bar{E}}, \omega_0)$ e $d\lambda_{\bar{E}} = \omega_0$, a variedade de contato $(W_{\bar{E}}, \xi := \ker \lambda_{\bar{E}})$ é simplecticamente preenchível, segundo a Definição 1.2.16. Sendo assim, pelo Teorema 1.2.17 e pelo Teorema de Classificação de Eliashberg, a estrutura de contato ξ definida pela forma de contato $\lambda_{\bar{E}}$ em $W_{\bar{E}}$ é difeomorfa à estrutura de contato *tight* padrão $\xi_0 = \lambda_0|_{S^3}$ na esfera S^3 . Além disso, o campo Hamiltoniano de H restrito à $W_{\bar{E}} \subset H^{-1}(\bar{E})$ é um múltiplo positivo do campo de Reeb $X_{\lambda_{\bar{E}}}$ associado à $\lambda_{\bar{E}}$ em $W_{\bar{E}}$, pois em coordenadas locais,

$$\lambda_{\bar{E}} \cdot X_K = i_{Y_{\bar{E}}} \omega_0 \cdot X_K = i_{X_K} i_{Y_{\bar{E}}} \omega_0 = -i_{Y_{\bar{E}}} i_{X_K} \omega_0 = dK \cdot Y_{\bar{E}} > 0,$$

devido à Proposição 3.1.4 e à desigualdade (3.32). Note ainda que, como $X_{\bar{E}}$ coincide com $\varphi_* Y_2$ próximo à $\partial S_{\bar{E}}$, onde Y_2 é o campo radial centrado na origem, a forma de contato $\lambda_{\bar{E}}$ coincide, em coordenadas locais, com a forma de contato padrão $\lambda_0 = i_{Y_2} \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p_i dq_i - q_i dp_i$ próximo à 2-esfera $\partial S_{\bar{E}}$.

Concluímos assim que existe $E^* > 0$ tal que, para toda energia $0 < E < E^*$, é possível definir um campo de Liouville X_E próximo à 3-esfera $W_E \subset H^{-1}(E)$, invariante pela involução T e transversal à W_E , tal que a forma de contato λ_E induzida por X_E em W_E é *tight* e coincide com a forma de contato padrão próximo à ∂S_E .

Finalmente, podemos também refletir o campo de Liouville \bar{X}_0 , obtido logo após nossa primeira interpolação, que foi definido numa vizinhança de \dot{S}_0 e que é transversal à \dot{S}_0 . Deste modo, obtemos um campo de Liouville, ainda denotado por \bar{X}_0 , definido agora numa

vizinhança de $\dot{W}_0 = \dot{S}_0 \cup \dot{S}'_0$ que é transversal à \dot{W}_0 . Este campo induz uma forma de contato em \dot{W}_0 , dada por

$$\bar{\lambda}_0 := (i_{\bar{X}_0} \omega_0) |_{\dot{W}_0}.$$

Observe que a propriedade (3.28), assumida na construção da segunda interpolação de campos de Liouville que realizamos, nos permite afirmar que, para qualquer vizinhança pequena $\tilde{U} \subset \mathcal{U}_{E^*}$ do sela-centro p_c , o campo X_E coincide com o campo \bar{X}_0 fora de \tilde{U} , para todo $E > 0$ suficientemente pequeno. Com isso, completamos a demonstração da Proposição 2.3.6.

Vale observar que a técnica de interpolação de campos de Liouville utilizada nesta demonstração pode ser encontrada também na referência [4], na qual P. Albers, U. Frauenfelder, O. van Koert e G. P. Paternain constroem um campo de Liouville para o problema restrito circular e planar dos três corpos, que é transversal aos níveis de energia imediatamente acima do nível crítico contendo o primeiro ponto de Lagrange.

3.2 Demonstração da Proposição 2.3.7

Considere $E > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo a Proposição 2.3.6 e seja λ_E a forma de contato definida na 3-esfera W_E obtida nesta proposição. Nesta seção, vamos demonstrar o resultado a seguir que, em particular, garante que λ_E é uma forma de contato fracamente convexa em W_E que admite $P_{2,E} \subset \partial S_E$ como única órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 2, para $E > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, provaremos que $P_{2,E}$ não está enlaçada com nenhuma órbita periódica de λ_E cujo índice de Conley-Zehnder é igual a 3.

Proposição 2.3.7. *Se $E > 0$ é suficientemente pequeno, então o seguinte ocorre: seja λ_n uma sequência qualquer de formas de contato em W_E satisfazendo $\lambda_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Se n é suficientemente grande, então o fluxo de Reeb associado à λ_n em W_E admite uma única órbita periódica $P_{2,n}$ com índice de Conley-Zehnder 2, a qual é não-nó, hiperbólica e converge para $P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda, qualquer outra órbita periódica de λ_n tem índice de Conley-Zehnder maior ou igual a 3 e, além disso, as órbitas periódicas com índice de Conley-Zehnder igual a 3 não estão enlaçadas com $P_{2,n}$.*

Mais especificamente, provaremos o resultado a seguir que implica a Proposição 2.3.7.

Proposição 3.2.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- i) *existe $E^* > 0$ suficientemente pequeno tal que, se $0 < E < E^*$, então a órbita periódica $P_{2,E} \subset W_E$, além de ser não-nó e hiperbólica, é a única órbita periódica de λ_E com índice de Conley-Zehnder 2. Mais ainda, qualquer outra órbita periódica de λ_E tem índice de Conley-Zehnder maior ou igual a 3.*
- ii) *dado um número inteiro $M \geq 3$, existe $E_M > 0$ tal que, se $0 < E < E_M$ e $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ é uma órbita periódica de λ_E enlaçada com $P_{2,E}$, então $CZ(P) > M$. Em particular,*

se $0 < E < E_3$ e $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ é uma órbita periódica de λ_E com $CZ(P) = 3$, então P não está enlaçada com $P_{2,E}$.

iii) existe uma pequena vizinhança $U_{2\pi} \subset \mathcal{U}_{E^*}$ do sela-centro p_c tal que, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, o seguinte ocorre: seja λ_n uma sequência de formas de contato em W_E satisfazendo $\lambda_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Se n é suficientemente grande, então λ_n é fracamente convexa e o fluxo de Reeb associado à λ_n admite uma única órbita periódica $P_{2,n}$ com índice de Conley-Zehnder 2, a qual é não-nó, hiperbólica e converge para $P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, as órbitas periódicas de λ_n com índice de Conley-Zehnder igual a 3 não intersectam $U_{2\pi}$ e, conseqüentemente, não estão enlaçadas com $P_{2,n}$.

Seja ϕ_t o fluxo Hamiltoniano associado à função $K : V \rightarrow \mathbb{R}$, onde K é a forma normal dada na Hipótese 1 que representa a função Hamiltoniana $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ em torno do sela-centro $p_c \in U$ em novas coordenadas simpléticas $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in V$ em torno da origem $0 \in V$. De modo análogo ao que fizemos na Seção 1.3, consideramos o referencial ortonormal $\{Y_i\}_{i=0,1,2,3}$ definido em $V \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ por

$$Y_i = A_i \frac{\nabla K}{|\nabla K|}, i = 0, 1, 2, 3, \quad (3.33)$$

onde as matrizes A_i de ordem 4, $i = 0, 1, 2, 3$, são como em (1.25). Deste modo, para cada ponto regular $z \in V$ de K , temos que o vetor $Y_0(z)$ é ortogonal ao espaço tangente $T_z S_z = \text{span}\{Y_1(z), Y_2(z), Y_3(z)\}$, onde $S_z := K^{-1}(K(z))$ denota o nível de energia de K contendo z .

Seja $z(t) = \phi_t(z_0)$ uma trajetória não-constante do fluxo Hamiltoniano de K e considere $v(t) = d\phi_t(z_0) \cdot v_0$, com $v_0 \in T_{z_0} S_{z_0}$, uma solução do fluxo linearizado ao longo de $z(t)$, escrita em termos do referencial $\{Y_i\}_{i=1,2,3}$ em $T S_{z_0}$ como

$$v(t) = \sum_{i=1}^3 \beta_i(t) Y_i(z(t)) \in T_{z(t)} S_{z_0}. \quad (3.34)$$

Denotamos a projeção de $v(t)$ sobre $\text{span}\{Y_1(z(t)), Y_2(z(t))\}$ ao longo da direção $Y_3(z(t))$ por

$$\pi_{12}(v(t)) := \beta_1(t) Y_1(z(t)) + \beta_2(t) Y_2(z(t)).$$

Analisando a equação diferencial $\dot{v}(t) = A_3 \text{Hess}K(z(t))v(t)$ satisfeita por $v(t)$, concluímos, como na Seção 1.3, que os coeficientes $\beta_1(t)$ e $\beta_2(t)$ da projeção $\pi_{12}(v(t))$ devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(t) \\ \dot{\beta}_2(t) \end{pmatrix} = -J_0 M(z(t)) \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde M é a matriz simétrica definida como em (1.40) e (1.41), substituindo $\text{Hess}H$ por $\text{Hess}K$ e X_i por Y_i , $i = 1, 2, 3$.

Para cada solução $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ do fluxo linearizado transversal satisfazendo $\beta(0) \neq 0$, podemos escrever $\beta_1(t) + i\beta_2(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, para algum argumento contínuo $\theta(t)$, com $\rho(t) > 0$ para todo t . Sendo assim, dados $z_0 \in V \setminus \{0\}$, $v_0 \in T_{z_0}S_{z_0}$ tal que $\pi_{12}(v_0) \neq 0$ e números reais $a \leq b$, definimos por

$$\Delta\theta(z_0, v_0, [a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$$

a *variação de argumento no intervalo de tempo* $[a, b]$ da solução $\beta(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ de (3.35) que corresponde à projeção da solução $v(t) = d\phi_t(z_0)v_0$ do fluxo linearizado ao longo de $z(t) = \phi_t(z_0)$ em $\text{span}\{Y_1(z(t)), Y_2(z(t))\}$.

No lema a seguir, estimamos a variação de argumento $\Delta\theta$ das soluções do fluxo linearizado transversal ao longo de segmentos de órbitas do fluxo Hamiltoniano de K que passam próximos ao sela-centro $0 \in V$, mas não pertencem às variedades estável e instável do sela-centro p_c ou da órbita periódica $P_{2,E}$.

Lema 3.2.2. *Existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que o seguinte ocorre: seja $z_0 = (q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20}) \in B_\delta(0)$, com $q_{10}p_{10} \neq 0$, e considere o intervalo maximal $[t^-, t^+]$ contendo $t = 0$ tal que $z(t) = \phi_t(z_0) \in \overline{B_\delta(0)}$ para todo $t \in [t^-, t^+]$. Se $v_0 \in T_{z_0}S_{z_0}$ satisfaz $\pi_{12}(v_0) \neq 0$, então*

$$\Delta\theta(z_0, v_0, [t^-, t^+]) > \frac{\omega}{2}(t^+ - t^-) - \pi.$$

Mais ainda, dado $N \geq 0$, existe $0 < \delta_N < \delta$ tal que se $z_0 \in B_{\delta_N}(0) \subset B_\delta(0)$ e $v_0 \in T_{z_0}S_{z_0}$ são como acima, então

$$\Delta\theta(z_0, v_0, [t^-, t^+]) > N.$$

Demonstração. Pelo comportamento local do fluxo Hamiltoniano em torno do sela-centro, pela maximalidade do intervalo $[t^-, t^+]$ e pela hipótese de que $q_{10}p_{10} \neq 0$, temos que existe $t^* \in (t^-, t^+)$ tal que

$$q_1(t^*) = b = \pm p_1(t^*), \quad \text{com } b \neq 0,$$

onde $z(t) = \phi_t(z_0) = (q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$. Podemos supor que $t^* = 0$, já que a variação de argumento $\Delta\theta$ independe de reparametrizações no tempo de soluções linearizadas, isto é,

$$\Delta\theta(z_0, v_0, [t^-, t^+]) = \Delta\theta(z_1, v_1, [t_1^-, t_1^+]), \tag{3.36}$$

se $z_1 = \phi_{t^*}(z_0)$, $v_1 = d\phi_{t^*}(z_0) \cdot v_0$, $t_1^- = t^- - t^*$ e $t_1^+ = t^+ - t^*$. Observe que, por simetria, se $t^* = 0$ então $t^- = t^+$. Vamos assumir que

$$z_0 = (b, q_{20}, b, p_{20}) \in B_\delta(0), \quad \text{com } b > 0,$$

pois os outros casos são completamente análogos. Neste caso, a solução $z(t) = \phi_t(z_0)$ do fluxo Hamiltoniano de K é dada, como vimos em (2.6), por

$$z(t) = (be^{-\bar{\alpha}t}, r \text{ sen } (\bar{\omega}(t + \zeta_0)), be^{\bar{\alpha}t}, r \text{ cos } (\bar{\omega}(t + \zeta_0))), \tag{3.37}$$

onde $(q_{20}, p_{20}) = (r \operatorname{sen}(\bar{\omega}\zeta_0), r \operatorname{cos}(\bar{\omega}\zeta_0))$ e

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= -\partial_{I_1} K \left(b^2, \frac{r^2}{2} \right) = \alpha + \mathcal{O}(b^2 + r^2) \\ \bar{\omega} &= \partial_{I_2} K \left(b^2, \frac{r^2}{2} \right) = \omega + \mathcal{O}(b^2 + r^2)\end{aligned}\tag{3.38}$$

são constantes ao longo das trajetórias. Por simplicidade na notação, vamos assumir que $\zeta_0 = 0$.

Primeiramente, calculamos o referencial $\{Y_i\}_{i=0,1,2,3}$, definido em (3.33), ao longo de $z(t)$:

$$\begin{aligned}Y_0(z(t)) &= g(t) (-\bar{\alpha}be^{\bar{\alpha}t}, \bar{\omega}r \operatorname{sen} \bar{\omega}t, -\bar{\alpha}be^{-\bar{\alpha}t}, \bar{\omega}r \operatorname{cos} \bar{\omega}t), \\ Y_1(z(t)) &= g(t) (\bar{\omega}r \operatorname{cos} \bar{\omega}t, \bar{\alpha}be^{-\bar{\alpha}t}, \bar{\omega}r \operatorname{sen} \bar{\omega}t, \bar{\alpha}be^{\bar{\alpha}t}), \\ Y_2(z(t)) &= g(t) (\bar{\omega}r \operatorname{sen} \bar{\omega}t, \bar{\alpha}be^{\bar{\alpha}t}, -\bar{\omega}r \operatorname{cos} \bar{\omega}t, -\bar{\alpha}be^{-\bar{\alpha}t}), \\ Y_3(z(t)) &= g(t) (-\bar{\alpha}be^{-\bar{\alpha}t}, \bar{\omega}r \operatorname{cos} \bar{\omega}t, \bar{\alpha}be^{\bar{\alpha}t}, -\bar{\omega}r \operatorname{sen} \bar{\omega}t),\end{aligned}\tag{3.39}$$

onde

$$g(t) = \frac{1}{|\nabla K(z(t))|} = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\alpha}^2 b^2 \cosh(2\bar{\alpha}t) + \bar{\omega}^2 r^2}}.$$

A matriz hessiana de K ao longo da solução $z(t)$ é dada por:

$$\operatorname{Hess}K(z(t)) = \begin{pmatrix} r_{11}b^2e^{2\bar{\alpha}t} & r_{12}bre^{\bar{\alpha}t} \operatorname{sen} \bar{\omega}t & -\bar{\alpha} + r_{11}b^2 & r_{12}bre^{\bar{\alpha}t} \operatorname{cos} \bar{\omega}t \\ r_{12}bre^{\bar{\alpha}t} \operatorname{sen} \bar{\omega}t & \bar{\omega} + r_{22}r^2 \operatorname{sen}^2 \bar{\omega}t & r_{12}bre^{-\bar{\alpha}t} \operatorname{sen} \bar{\omega}t & r_{22}r^2 \operatorname{sen} \bar{\omega}t \operatorname{cos} \bar{\omega}t \\ -\bar{\alpha} + r_{11}b^2 & r_{12}bre^{-\bar{\alpha}t} \operatorname{sen} \bar{\omega}t & r_{11}b^2e^{-2\bar{\alpha}t} & r_{12}bre^{-\bar{\alpha}t} \operatorname{cos} \bar{\omega}t \\ r_{12}bre^{\bar{\alpha}t} \operatorname{cos} \bar{\omega}t & r_{22}r^2 \operatorname{sen} \bar{\omega}t \operatorname{cos} \bar{\omega}t & r_{12}bre^{-\bar{\alpha}t} \operatorname{cos} \bar{\omega}t & \bar{\omega} + r_{22}r^2 \operatorname{cos}^2 \bar{\omega}t \end{pmatrix},$$

onde as funções

$$r_{ij} = \partial_{I_i I_j} R \left(b^2, \frac{r^2}{2} \right), \quad i, j = 1, 2,$$

são termos de ordem zero, constantes ao longo das trajetórias. Podemos assumir que $|r_{ij}| \leq c_0$ em V para alguma constante uniforme $c_0 > 0$. Calculamos então os seguintes produtos:

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Hess}K(z(t))Y_1(z(t)), Y_1(z(t)) \rangle &= g(t)^2 (-\bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2 \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t + 2\omega\bar{\alpha}^2 b^2 \cosh 2\bar{\alpha}t + \\ &\quad b^2 r^2 \bar{r} (\cosh 2\bar{\alpha}t - \operatorname{senh} 2\bar{\alpha}t \operatorname{cos} 2\bar{\omega}t + \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t)), \\ \langle \operatorname{Hess}K(z(t))Y_1(z(t)), Y_2(z(t)) \rangle &= g(t)^2 (\bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2 \operatorname{cos} 2\bar{\omega}t + b^2 r^2 \bar{r} (-\operatorname{cos} 2\bar{\omega}t + \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t \operatorname{senh} 2\bar{\alpha}t)), \\ \langle \operatorname{Hess}K(z(t))Y_2(z(t)), Y_2(z(t)) \rangle &= g(t)^2 (\bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2 \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t + 2\omega\bar{\alpha}^2 b^2 \cosh 2\bar{\alpha}t + \\ &\quad b^2 r^2 \bar{r} (\cosh 2\bar{\alpha}t - \operatorname{senh} 2\bar{\alpha}t \operatorname{cos} 2\bar{\omega}t - \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t)), \\ \langle \operatorname{Hess}K(z(t))Y_3(z(t)), Y_3(z(t)) \rangle &= g(t)^2 (2\bar{\alpha}^3 b^2 + \bar{\omega}^3 r^2),\end{aligned}$$

onde $\bar{r}(b, r) = r_{11}\bar{\omega}^2 + 2r_{12}\bar{\alpha}\bar{\omega} + r_{22}\bar{\alpha}^2$ satisfaz

$$|\bar{r}(b, r)| \leq c_1\tag{3.40}$$

para alguma constante uniforme $c_1 > 0$.

Portanto, dado $v_0 \in T_{z_0}S_{z_0}$ tal que $\pi_{12}(v_0) \neq 0$, a projeção da solução linearizada $v(t) = d\phi_t(z_0)v_0$ ao longo da trajetória $z(t)$ sobre $\text{span}\{Y_1(z(t)), Y_2(z(t))\}$ é representada por uma curva $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ satisfazendo o sistema de equações diferenciais (3.35) que, neste caso, se reduz ao seguinte:

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(t) \\ \dot{\beta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m(t) & p(t) - n(t) \\ p(t) + n(t) & m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

onde

$$\begin{aligned} m(t) &= g(t)^2 (\bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2 \cos 2\bar{\omega}t + b^2 r^2 \bar{r} (\sin 2\bar{\omega}t \sinh 2\bar{\alpha}t - \cos 2\bar{\omega}t)), \\ p(t) &= g(t)^2 (b^2 r^2 \bar{r} - \bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2) \sin 2\bar{\omega}t, \\ n(t) &= g(t)^2 (b^2 r^2 \bar{r} (\cosh 2\bar{\alpha}t - \sinh 2\bar{\alpha}t \cos 2\bar{\omega}t) + 2\bar{\alpha}^2 \bar{\omega} b^2 \cosh 2\bar{\alpha}t + \bar{\omega}^3 r^2 + 2\bar{\alpha}^3 b^2) \\ &= \bar{\omega} + g(t)^2 (2\bar{\alpha}^3 b^2 + b^2 r^2 \bar{r} (\cosh 2\bar{\alpha}t - \sinh 2\bar{\alpha}t \cos 2\bar{\omega}t)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Denotando a curva $\beta(t)$ em notação complexa $\beta_1(t) + i\beta_2(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, para funções contínuas $\rho(t) > 0$ e $\theta(t)$, obtemos de (3.41) e (3.42) que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \frac{\beta_1(t)\dot{\beta}_2(t) - \beta_2(t)\dot{\beta}_1(t)}{\beta_1(t)^2 + \beta_2(t)^2} \\ &= n(t) + p(t) \cos 2\theta(t) + m(t) \sin 2\theta(t) \\ &= \bar{\omega} + g(t)^2 \{ 2\bar{\alpha}^3 b^2 + (b^2 r^2 \bar{r} - \bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2) \sin(2\bar{\omega}t - 2\theta(t)) + \\ &\quad b^2 r^2 \bar{r} (\sin 2\bar{\omega}t \sinh 2\bar{\alpha}t \sin 2\theta(t) + \cosh 2\bar{\alpha}t - \sinh 2\bar{\alpha}t \cos 2\bar{\omega}t) \}. \end{aligned}$$

Defina a função $G(t, \theta)$, π -periódica em θ , por

$$\begin{aligned} G(t, \theta) &= \bar{\omega} + g(t)^2 \{ 2\bar{\alpha}^3 b^2 + (b^2 r^2 \bar{r} - \bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2) \sin(2\bar{\omega}t - 2\theta) + \\ &\quad b^2 r^2 \bar{r} (\sin 2\bar{\omega}t \sinh 2\bar{\alpha}t \sin 2\theta + \cosh 2\bar{\alpha}t - \sinh 2\bar{\alpha}t \cos 2\bar{\omega}t) \} \end{aligned} \quad (3.43)$$

e, assim, $\dot{\theta}(t) = G(t, \theta(t))$.

O argumento inicial $\theta(0)$ da solução $\beta(t)$ pode ser expressado como $\theta(0) = k_0\pi + \frac{\pi}{4} + \mu_0$, para algum $k_0 \in \mathbb{Z}$ e algum $\mu_0 \in [0, \pi)$. Veja Figura 3.4. Definindo a função

$$\tilde{\theta}(t) = \bar{\omega}t + \frac{\pi}{4} + k_0\pi,$$

vemos, por (3.43), que

$$\begin{aligned} G\left(t, \tilde{\theta}(t)\right) &= G\left(t, \bar{\omega}t + \frac{\pi}{4}\right) = \bar{\omega} + g(t)^2 \{ 2\bar{\alpha}^3 b^2 + \bar{\alpha}\bar{\omega}^2 r^2 + \\ &\quad b^2 r^2 \bar{r} (\sin 2\bar{\omega}t \sinh 2\bar{\alpha}t \cos 2\bar{\omega}t + \cosh 2\bar{\alpha}t - \sinh 2\bar{\alpha}t \cos 2\bar{\omega}t - 1) \}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Visto que a solução $z(t)$, dada por (3.37), pertence à bola fechada $\overline{B_\delta(0)}$ para todo $t \in [t^-, t^+]$, temos que $0 < be^{-\bar{\alpha}t} \leq \delta$ e $0 < be^{\bar{\alpha}t} \leq \delta$ para qualquer $t \in [t^-, t^+]$. Disto segue

que

$$\begin{aligned} b^2 \cosh 2\bar{\alpha}t &\leq 2\delta^2, \\ b^2 \sinh 2\bar{\alpha}t &\leq 2\delta^2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

para todo $t \in [t^-, t^+]$.

Usando (3.40) e (3.45), obtemos de (3.44) que

$$G(t, \tilde{\theta}(t)) = \bar{\omega} + g(t)^2 \{2\bar{\alpha}^3 b^2 + r^2 (\bar{\alpha}\bar{\omega}^2 + \mathcal{O}(\delta^2))\}.$$

Sendo assim, basta escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno para concluir que

$$G(t, \tilde{\theta}(t)) > \bar{\omega} \text{ para todo } t \in [t^-, t^+]. \quad (3.46)$$

Seja $\Delta(t) := \theta(t) - \tilde{\theta}(t)$. Note que $\Delta(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\dot{\Delta}(t) = G(t, \theta(t)) - \bar{\omega} = G(t, \Delta(t) + \tilde{\theta}(t)) - \bar{\omega}.$$

Logo, se $\Delta(t) = k\pi$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, então, pela π -periodicidade de $G(t, \theta)$ na segunda variável e por (3.46), obtemos que $\dot{\Delta}(t) = G(t, k\pi + \tilde{\theta}(t)) - \bar{\omega} > 0$. E, uma vez que $\Delta(0) = \mu_0 \geq 0$, chegamos à conclusão de que

$$\Delta(t) > 0 \text{ para todo } t > 0, \quad (3.47)$$

ou seja, $\theta(t) > \tilde{\theta}(t)$ para todo $t > 0$. Veja Figura 3.4.

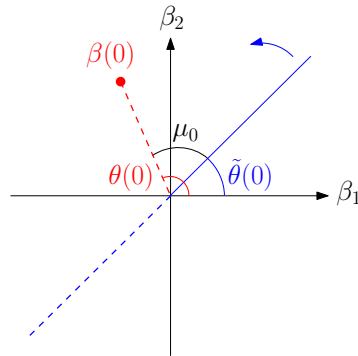


Figura 3.4: Representação da condição inicial $\beta(0) = \rho(0)e^{i\theta(0)}$, onde $\theta(0) = \tilde{\theta}(0) + \mu_0$ e $\mu_0 \in [0, \pi)$, e da semi-reta determinada pelo argumento $\tilde{\theta}(0)$ que gira no sentido anti-horário com velocidade $\dot{\tilde{\theta}}(t) = \bar{\omega} > \frac{\omega}{2} > 0$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Segue de (3.47) que

$$\theta(t) - \theta(0) = \Delta(t) + \bar{\omega}t - \mu_0 > \bar{\omega}t - \pi, \text{ para todo } t > 0, \quad (3.48)$$

e, já que a variação $\Delta\theta$ independe de reparametrizações no tempo, como afirmamos em

(3.36), a estimativa (3.48) nos fornece que

$$\begin{aligned} \Delta\theta(z_0, v_0, [t^-, t^+]) &= \Delta\theta(\phi_{t^-}(z_0), d\phi_{t^-}(z_0) \cdot v_0, [0, t^+ - t^-]) \\ &> \bar{\omega}(t^+ - t^-) - \pi \\ &> \frac{\omega}{2}(t^+ - t^-) - \pi, \end{aligned} \tag{3.49}$$

se $\delta > 0$ é fixado suficientemente pequeno.

A segunda afirmação do enunciado é uma consequência direta de (3.49). De fato, pelo comportamento de sela que observamos na projeção do fluxo Hamiltoniano de K sobre o plano $q_1 p_1$, vemos que o comprimento do intervalo de tempo maximal $[t^-, t^+]$ cresce ilimitadamente conforme $b \rightarrow 0$. Sendo assim, dado $N \geq 0$, podemos escolher $\delta_N \in (0, \delta)$ suficientemente pequeno de modo que, se $z_0 \in B_{\delta_N}(0)$ então $t^+ - t^- > \frac{2}{\omega}(N + \pi)$. Neste caso, (3.49) implica que

$$\Delta\theta(z_0, v_0, [t^-, t^+]) > N.$$

□

Considere agora o fluxo ψ_t associado à função Hamiltoniana H nas coordenadas originais $w = (x_1, x_2, y_1, y_2) = \varphi(q_1, q_2, p_1, p_2)$, onde $\varphi : V \rightarrow U$ é a mudança de coordenadas simplética centrada no sela-centro p_c dada na Hipótese 1. Seja $\{X_i\}_{i=0,1,2,3}$ o referencial ortonormal de \mathbb{R}^4 definido em (1.27) para pontos regulares de H e seja

$$u(t) = d\psi_t(w_0) \cdot u_0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) X_i(w(t)) \tag{3.50}$$

uma solução do fluxo linearizado ao longo de uma trajetória não-constante $w(t) = \psi_t(w_0)$, com $u_0 \in T_{w_0} S_{w_0}$, onde $S_{w_0} := H^{-1}(H(w_0))$ denota o nível de energia de H contendo w_0 . Vimos na Seção 1.3, que os coeficientes $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ da projeção $\pi_{12}(u(t)) := \alpha_1(t) X_1(w(t)) + \alpha_2(t) X_2(w(t))$ satisfazem o sistema de equações diferenciais (1.39). Assumindo que $\pi_{12}(u_0) \neq 0$, podemos escrever a curva $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ em notação complexa $\alpha_1(t) + i\alpha_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\eta(t)}$, para algum argumento contínuo $\eta(t)$. Assim, dados números reais $a \leq b$, denotamos por

$$\Delta\eta(w_0, u_0, [a, b]) = \eta(b) - \eta(a),$$

a variação de argumento no intervalo de tempo $[a, b]$ da solução $\alpha_1(t) + i\alpha_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\eta(t)}$ do fluxo linearizado transversal que corresponde à projeção da solução linearizada $u(t) = d\psi_t(w_0)u_0$ ao longo de $w(t) = \psi_t(w_0)$ em $\text{span}\{X_1(w(t)), X_2(w(t))\}$.

No próximo resultado, verificamos que estimativas similares às do Lema 3.2.2 podem ser obtidas quando consideramos a função Hamiltoniana H em suas coordenadas originais. Para isso, analisamos a variação de argumento $\Delta\eta$ das soluções do fluxo linearizado transversal ao longo de segmentos de órbitas do fluxo Hamiltoniano de H que passam próximos ao sela-centro $p_c \in U$.

Lema 3.2.3. *Dada uma vizinhança $\mathcal{W} \subset U$ do sela-centro p_c , existe uma vizinhança $U_* \subset \mathcal{W}$*

de p_c de modo que o seguinte ocorre: seja $w_0 = (x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) \in U_*$ tal que $\varphi^{-1}(w_0) = (q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20})$ satisfaz $q_{10}p_{10} \neq 0$. Considere o intervalo maximal $[t^-, t^+]$ contendo $t = 0$ tal que $w(t) = \psi_t(w_0) \in \overline{U}_*$ para todo $t \in [t^-, t^+]$. Se $u_0 \in T_{w_0}S_{w_0}$ satisfaz $\pi_{12}(u_0) \neq 0$, então

$$\Delta\eta(w_0, u_0, [t^-, t^+]) > \frac{\omega}{2}(t^+ - t^-) - C,$$

onde $C > 0$ é uma constante uniforme que depende apenas da vizinhança U_* . Mais ainda, dado $N \geq 0$, existe uma vizinhança $U_N \subset U_*$ de p_c tal que se $w_0 \in U_N$ e $u_0 \in T_{w_0}S_{w_0}$ são como acima, então

$$\Delta\eta(w_0, u_0, [t^-, t^+]) > N.$$

Demonstração. Seja $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(0)} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{W})$. Considere o referencial $\{\tilde{X}_i\}_{i=1,2,3}$ definido em $\overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\}$ por

$$\tilde{X}_i(z) = \varphi^* X_i(z) = d\varphi^{-1}(\varphi(z)) \cdot X_i(\varphi(z)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Denotamos por $\tilde{\pi}_{12}$ a projeção sobre $\text{span}\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ ao longo da direção \tilde{X}_3 . Como vimos, $X_3 \parallel X_H$, $\varphi^* X_H = X_K$ e $Y_3 \parallel X_K$, logo $\tilde{X}_3 \parallel Y_3$. Então, definindo

$$\tilde{Y}_i = \tilde{\pi}_{12}(Y_i), \quad i = 1, 2,$$

temos que $\omega_0(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = \omega_0(Y_1, Y_2) = \langle A_3 Y_1, Y_2 \rangle = |Y_2|^2 = 1$ e, portanto, $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\}$ é uma base simplética de $\text{span}\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$.

Escrevendo \tilde{Y}_1 como combinação linear de \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 , isto é, $\tilde{Y}_1(z) = a_1(z)\tilde{X}_1(z) + a_2(z)\tilde{X}_2(z)$, com $z \in \overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\}$, encontramos uma função contínua $\zeta : \overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ dada por $z \mapsto \frac{(a_1(z), a_2(z))}{|(a_1(z), a_2(z))|}$. Como $\overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\}$ é um domínio simplesmente conexo em \mathbb{R}^4 , existe um levantamento contínuo

$$\tilde{\zeta} : \overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

da função ζ , que mede o ângulo formado entre $\tilde{Y}_1(z)$ e $\tilde{X}_1(z)$ na trivialização induzida por $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$. Em notação complexa, temos $a_1(z) + ia_2(z) \in \mathbb{R}^+ e^{i\tilde{\zeta}(z)}$ para todo $z \in \overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\}$. Pela compacidade de $\partial B_\delta(0)$ e pela continuidade do levantamento $\tilde{\zeta}$, fica bem definida a constante

$$C_1 = \sup_{z_1, z_2 \in \partial B_\delta(0)} \left| \tilde{\zeta}(z_1) - \tilde{\zeta}(z_2) \right| < \infty. \quad (3.51)$$

Dados w_0 e u_0 como no enunciado, seja $u(t) = d\psi_t(w_0) \cdot u_0$ a solução do fluxo linearizado ao longo de $w(t) = \psi_t(w_0)$ escrita em termos do referencial $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ como em (3.50). Uma vez que a mudança de coordenadas simplética $\varphi : V \rightarrow U$ é uma conjugação entre os fluxos Hamiltonianos ϕ_t e ψ_t associados respectivamente às funções K e $H|_U$, ou seja, $\varphi \circ \phi_t = \psi_t \circ \varphi$, os fluxos linearizados satisfazem $d\varphi \cdot d\phi_t = d\psi_t \cdot d\varphi$. Sendo assim, $z(t) := \varphi^{-1}(w(t)) = \phi_t(\varphi^{-1}(w_0))$ é uma solução de X_K , com $z_0 := \varphi^{-1}(w_0) = (q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20})$ satisfazendo $q_{10}p_{10} \neq 0$, e $v(t) := d\varphi^{-1}(w(t)) \cdot u(t) = d\phi_t(z_0) \cdot d\varphi^{-1}(w_0) \cdot u_0$ é uma solução linearizada ao longo de $z(t)$, com $v_0 := d\varphi^{-1}(w_0) \cdot u_0$ satisfazendo $\pi_{12}(v_0) \neq 0$. A solução linearizada $v(t)$

pode ser escrita tanto em termos do referencial $\{Y_i\}_{i=1,2,3}$, como em (3.34) com coeficientes $\beta_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, quanto em termos do referencial $\{\tilde{X}_i\}_{i=1,2,3}$ com os mesmos coeficientes $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, que aparecem na representação de $u(t)$ em (3.50). Logo, a projeção de $v(t)$ sobre $\text{span}\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ se escreve como

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_{12}(v(t)) &= \beta_1(t)\tilde{Y}_1(z(t)) + \beta_2(t)\tilde{Y}_2(z(t)) \\ &= \alpha_1(t)\tilde{X}_1(z(t)) + \alpha_2(t)\tilde{X}_2(z(t)),\end{aligned}$$

onde $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ satisfaz o sistema (3.35) e $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ satisfaz o sistema (1.39).

Sejam $\theta(t)$ o ângulo formado entre $\pi_{12}(v(t))$ e $Y_1(z(t))$ na trivialização induzida por $\{Y_1, Y_2\}$ e $\eta(t)$ o ângulo formado entre $\pi_{12}(u(t))$ e $X_1(w(t))$ na trivialização induzida por $\{X_1, X_2\}$. Em notação complexa, $\beta_1(t) + i\beta_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t)}$ e $\alpha_1(t) + i\alpha_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\eta(t)}$. Considere

$$\tilde{\theta}(t) = \eta(t) - \tilde{\zeta}(z(t)), \quad (3.52)$$

que corresponde, por sua vez, ao ângulo formado entre $\tilde{\pi}_{12}(v(t))$ e $\tilde{Y}_1(z(t))$ na trivialização induzida por $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$. Veja Figura 3.5. Uma vez que $\tilde{\pi}_{12}$ leva a base simplética $\{Y_1, Y_2\}$

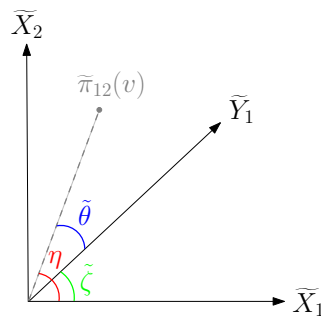


Figura 3.5: Representação dos ângulos $\tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{\theta}(t)$ e $\eta(t)$ com relação à trivialização induzida por $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$.

na base simplética $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\}$ de $\text{span}\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ e, portanto, é uma aplicação que preserva orientação, temos que $\tilde{\theta}(t) - \theta(t) \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\pi$. Podemos supor que

$$-\pi < \tilde{\theta}(0) - \theta(0) < \pi$$

e então, pela continuidade da função $\tilde{\theta}(t) - \theta(t)$, segue que

$$-\pi < \tilde{\theta}(t) - \theta(t) < \pi, \quad \forall t. \quad (3.53)$$

Considere $\delta > 0$ ainda menor de modo que o Lema 3.2.2 seja satisfeito e defina $U_* := \varphi(B_\delta(0))$. Desta forma, se $w_0 \in U_*$ então $z_0 = \varphi^{-1}(w_0) \in B_\delta(0)$ e daí, por (3.51), (3.52),

(3.53), pela maximalidade do intervalo $[t^-, t^+]$ e pelo Lema 3.2.2, concluímos que

$$\begin{aligned}
\Delta\eta(w_0, u_0, [t^-, t^+]) &= \eta(t^+) - \eta(t^-) \\
&= \left(\tilde{\theta}(t^+) - \tilde{\theta}(t^-)\right) + \left(\tilde{\zeta}(z(t^+)) - \tilde{\zeta}(z(t^-))\right) \\
&= \left(\tilde{\theta}(t^+) - \theta(t^+)\right) + \left(\theta(t^+) - \theta(t^-)\right) \\
&\quad + \left(\theta(t^-) - \tilde{\theta}(t^-)\right) + \left(\tilde{\zeta}(z(t^+)) - \tilde{\zeta}(z(t^-))\right) \\
&> \Delta\theta(z_0, v_0, [t^-, t^+]) - 2\pi - C_1 \\
&> \frac{\omega}{2}(t^+ - t^-) - C,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

onde $C = 3\pi + C_1 > 0$.

Para finalizar, dado $N \geq 0$, podemos escolher $\delta_N \in (0, \delta)$ suficientemente pequeno de modo que, se $z_0 \in B_{\delta_N}(0)$ então $t^+ - t^- > \frac{2}{\omega}(N + C)$. Seja $U_N := \varphi(B_{\delta_N}(0)) \subset U_*$. Assim, segue diretamente de (3.54), que se $w_0 \in U_N$, então

$$\Delta\eta(w_0, u_0, [t^-, t^+]) > N.$$

□

Considerando $E > 0$ suficientemente pequeno, vamos analisar o índice de Conley-Zehnder das órbitas periódicas do campo de Reeb X_{λ_E} na 3-esfera W_E que, como vimos, é um múltiplo positivo do campo Hamiltoniano X_H restrito à $W_E \subset H^{-1}(E)$.

Primeiramente, vamos averiguar as propriedades da órbita periódica $P_{2,E}$ da variedade central do sela-centro p_c , que está situada na “região de pescoço” de W_E , com $E > 0$ pequeno.

Proposição 3.2.4. *Para cada $E > 0$ pequeno, seja $P_{2,E} = (z_E, T_{2,E}^H) \subset K^{-1}(E)$ a órbita periódica contida na variedade central do sela-centro, dada em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) por $q_1 = p_1 = 0$ e $I_2 = I_2(0, E)$, como em (2.10). Então $P_{2,E}$ é não-nó, hiperbólica em seu nível de energia e $CZ(P_{2,E}) = 2$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $P_{2,E}$ é o bordo do disco mergulhado $\overline{U_{1,E}} = \{q_1 + p_1 = 0, q_1 \leq 0\} \cap K^{-1}(E) \subset V$, para $E > 0$ pequeno, logo $P_{2,E}$ é não-nó.

Assumindo, sem perda de generalidade, que $z_E(0) = (0, 0, 0, r_E)$, onde o raio r_E é dado por

$$r_E = \sqrt{2I_2(0, E)} = \sqrt{2\frac{E}{\omega} + \mathcal{O}(E^2)},$$

vide (2.9), temos que a solução do fluxo Hamiltoniano representando $P_{2,E}$ é da forma

$$z_E(t) = (0, r_E \sin \bar{\omega}t, 0, r_E \cos \bar{\omega}t),$$

onde $\bar{\omega} = \omega + \partial_{I_2}R\left(\frac{r_E^2}{2}\right) = \omega + \mathcal{O}(r_E^2)$ é constante em t . Neste caso, o período Hamiltoniano de $P_{2,E}$ é dado por $T_{2,E}^H = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$.

Calculando o referencial $\{Y_i\}_{i=0,1,2,3}$ ao longo de $z_E(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} Y_0(z_E(t)) &= (0, \operatorname{sen} \bar{\omega}t, 0, \operatorname{cos} \bar{\omega}t) \\ Y_1(z_E(t)) &= (\operatorname{cos} \bar{\omega}t, 0, \operatorname{sen} \bar{\omega}t, 0) \\ Y_2(z_E(t)) &= (\operatorname{sen} \bar{\omega}t, 0, -\operatorname{cos} \bar{\omega}t, 0) \\ Y_3(z_E(t)) &= (0, \operatorname{cos} \bar{\omega}t, 0, -\operatorname{sen} \bar{\omega}t), \end{aligned} \quad (3.55)$$

e, além disso, a matriz hessiana de K ao longo desta solução é dada por

$$\operatorname{Hess}K(z_E(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{\omega} + r_{22}r_E^2 \operatorname{sen}^2 \bar{\omega}t & 0 & r_{22}r_E^2 \operatorname{sen} \bar{\omega}t \operatorname{cos} \bar{\omega}t \\ -\bar{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}r_E^2 \operatorname{sen} \bar{\omega}t \operatorname{cos} \bar{\omega}t & 0 & \bar{\omega} + r_{22}r_E^2 \operatorname{cos}^2 \bar{\omega}t \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

onde $r_{22} = \partial_{I_2 I_2} R \left(\frac{r_E^2}{2} \right)$ é um termo de ordem zero e $\bar{\alpha} = \alpha - \partial_{I_1} R \left(\frac{r_E^2}{2} \right) = \alpha + \mathcal{O}(r_E^2)$, ambos constantes em t . Com (3.55) e (3.56), calculamos os seguintes produtos:

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Hess}K(z_E(t))Y_1(z_E(t)), Y_1(z_E(t)) \rangle &= -\bar{\alpha} \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t \\ \langle \operatorname{Hess}K(z_E(t))Y_1(z_E(t)), Y_2(z_E(t)) \rangle &= \bar{\alpha} \operatorname{cos} 2\bar{\omega}t \\ \langle \operatorname{Hess}K(z_E(t))Y_2(z_E(t)), Y_2(z_E(t)) \rangle &= \bar{\alpha} \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t \\ \langle \operatorname{Hess}K(z_E(t))Y_3(z_E(t)), Y_3(z_E(t)) \rangle &= \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Portanto, se $v(t)$ é uma solução linearizada ao longo de $z_E(t)$ tal que $\pi_{12}(v(0)) \neq 0$, então sua projeção sobre $\operatorname{span}\{Y_1, Y_2\}$ ao longo de $z_E(t)$ é representada por uma curva $\beta(t) = \beta_1(t) + i\beta_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t)}$ satisfazendo o sistema de equações diferenciais (3.35) que, neste caso, é da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(t) \\ \dot{\beta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\alpha} \operatorname{cos} 2\bar{\omega}t & -\bar{\alpha} \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t - \bar{\omega} \\ -\bar{\alpha} \operatorname{sen} 2\bar{\omega}t + \bar{\omega} & \bar{\alpha} \operatorname{cos} 2\bar{\omega}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Definimos novas coordenadas $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\beta}_1(t) + i\tilde{\beta}_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\tilde{\theta}(t)}$ de modo que

$$\tilde{\beta}(t) = e^{-i\bar{\omega}t} \beta(t),$$

ou seja, $\tilde{\beta}(t)$ é dado pela rotação de $\beta(t)$ pelo ângulo $-\bar{\omega}t$ e, portanto,

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \theta(t) - \bar{\omega}t. \quad (3.58)$$

Após alguns cálculos, vemos que o sistema (3.57) nestas novas coordenadas se reduz simplesmente à

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\beta}}_1(t) \\ \dot{\tilde{\beta}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1(t) \\ \tilde{\beta}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

cujo fluxo se comporta como uma sela.

Visto que $\beta(0) = e^{0i}\tilde{\beta}(0) = \tilde{\beta}(0)$ e $\beta(T_{2,E}^H) = e^{2\pi i}\tilde{\beta}(T_{2,E}^H) = \tilde{\beta}(T_{2,E}^H)$, podemos usar o sistema (3.59) para analisar a aplicação de primeiro retorno do fluxo Hamiltoniano definida na seção $\text{span}\{Y_1(z_E(0)), Y_2(z_E(0))\}$, transversal à direção do campo Hamiltoniano $X_K \parallel Y_3$ em $z_E(0)$, e assim concluir que $P_{2,E}$ é uma órbita periódica hiperbólica.

Além disso, o comportamento de sela do fluxo associado ao sistema (3.59) nos permite concluir também que existem condições iniciais $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$ para as quais os ângulos formados entre os vetores $\tilde{\beta}(0)$ e $\tilde{\beta}(T_{2,E}^H)$ têm sinais opostos. Sendo assim, o intervalo formado pelas variações de argumento $\Delta\tilde{\theta}(z_E(0), v(0), [0, T_{2,E}^H])$, com a condição inicial $v(0)$ satisfazendo $\pi_{12}(v(0)) \neq 0$, deve conter o valor 0 em seu interior. Consequentemente, já que, por (3.58),

$$\begin{aligned} \Delta\theta(z_E(0), v(0), [0, T_{2,E}^H]) &= \theta(T_{2,E}^H) - \theta(0) \\ &= \tilde{\theta}(T_{2,E}^H) + 2\pi - \tilde{\theta}(0) \\ &= 2\pi + \Delta\tilde{\theta}(z_E(0), v(0), [0, T_{2,E}^H]), \end{aligned}$$

o intervalo formado pelas variações de argumento $\Delta\theta(z_E(0), v(0), [0, T_{2,E}^H])$, com $v(0)$ satisfazendo $\pi_{12}(v(0)) \neq 0$, contém o valor 2π em seu interior. Disto segue que o intervalo transladado $I_\epsilon = I - \epsilon$, onde I é dado por

$$I = \bigcup_{\pi_{12}(v(0)) \neq 0} \frac{1}{2\pi} \{ \Delta\theta(z_E(0), v(0), [0, T_{2,E}^H]) \},$$

contém o número inteiro 1 em seu interior para todo $\epsilon > 0$ pequeno e, portanto, pela Definição 1.3.6 de índice de Conley-Zehnder geométrico, $CZ(P_{2,E}) = 2$. \square

Usando o Lema 3.2.3, podemos mostrar o resultado a seguir que estima o índice de Conley-Zehnder de órbitas periódicas distintas de $P_{2,E}$ em W_E passando próximas ao sela-centro p_c e, além disso, analisa a possibilidade de enlaçamento entre as órbitas periódicas de W_E com a órbita hiperbólica $P_{2,E}$, para energia $E > 0$ suficientemente pequena.

Proposição 3.2.5. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- i) *existe $E_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que, para cada inteiro $M > 0$, existe uma vizinhança \tilde{U}_M do sela-centro p_c de tal modo que, se $0 < E < E_0$ e $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ é uma órbita periódica intersectando \tilde{U}_M , então $CZ(P) > M$.*
- ii) *dado um inteiro $M > 0$, existe $0 < E_M < E_0$, onde $E_0 > 0$ é como no item i), tal que se $0 < E < E_M$ e $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ está enlaçada com $P_{2,E}$ então $CZ(P) > M$. Em particular, se $0 < E < E_3$ e $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ é uma órbita periódica com $CZ(P) = 3$, então P não está enlaçada com $P_{2,E}$.*

Demonstração. Sejam $U_0 \subset U_* \subset U$ vizinhanças de p_c como no Lema 3.2.3, onde U_0 é obtido a partir da escolha $N = 0$ na última afirmação deste lema.

O ponto de equilíbrio do tipo sela-centro p_c pertence à $W_0 = S_0 \cup S'_0 \subset H^{-1}(0)$, onde S_0 e S'_0 são conjuntos singulares estritamente convexos que se intersectam apenas em p_c . Por definição, temos que $\langle \text{Hess}H(w) \cdot u, u \rangle > 0$ para todo $w \in \dot{W}_0 = W_0 \setminus \{p_c\}$ e todo $u \in T_w \dot{W}_0$

não-nulo. Sendo assim, podemos encontrar $E_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma constante $k_0 > 0$ tais que, se $0 \leq E \leq E_0$, então $\langle \text{Hess}H(w) \cdot u, u \rangle > k_0$ para quaisquer $w \in W_E \setminus U_0$ e $u \in T_w S_w$ com $|u| = 1$. Neste caso, pela Proposição 1.3.7, existe $\bar{\eta} > 0$ de tal modo que, se uma solução $w(t)$ do fluxo Hamiltoniano de H está contida em $W_E \setminus U_0$ para $t \in [a, b]$ e $\alpha(t) = \alpha_1(t) + i\alpha_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\eta(t)}$ representa uma solução linearizada transversal $u(t)$ ao longo de $w(t)$, então

$$\dot{\eta}(t) > \bar{\eta} > 0, \forall t \in [a, b]. \quad (3.60)$$

Em particular, $\alpha(t) \subset \mathbb{R}^2$ gira em torno da origem no sentido anti-horário quando t varia no intervalo de tempo $[a, b]$.

Dado um inteiro $M > 0$, defina $\widetilde{M} = 2\pi(M + 1)$ e considere $U_{\widetilde{M}} \subset U_0$ a vizinhança de p_c obtida no Lema 3.2.3 que satisfaz o seguinte: se $w(0) \in U_{\widetilde{M}}$ é tal que $\varphi^{-1}(w(0)) = (q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20})$, com $q_{10}p_{10} \neq 0$, e $u(0) \in T_{w(0)}S_{w(0)}$ satisfaz $\pi_{12}(u(0)) \neq 0$, então

$$\Delta\eta(w(0), u(0), [t^-, t^+]) > \widetilde{M}, \quad (3.61)$$

onde $[t^-, t^+]$ é o intervalo maximal contendo $t = 0$ tal que $w(t) \in \overline{U}_*$ para todo $t \in [t^-, t^+]$.

Note que, pelo Lema 3.2.3, a vizinhança U_0 tem a propriedade de que qualquer segmento da órbita $w(t)$ intersectando U_0 e contido em U_* contribui positivamente para a variação de argumento $\Delta\eta$.

Agora, suponha que a trajetória $w(t)$ corresponde a uma órbita periódica $P = (w, T)$ em W_E distinta de $P_{2,E}$. Neste caso, temos que $\varphi^{-1}(w(0)) = (q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20})$ satisfaz $q_{10}p_{10} \neq 0$. Logo, se P intersecta $U_{\widetilde{M}}$ então, por (3.60), (3.61), pela propriedade da vizinhança U_0 obtida no Lema 3.2.3, pela definição do índice de Conley-Zehnder geométrico e pela escolha de \widetilde{M} , obtemos que

$$CZ(P) > 2 \left(\left\lfloor \frac{\Delta\eta(w(0), u(0), [t^-, t^+])}{2\pi} \right\rfloor - 1 \right) \geq 2 \left(\left\lfloor \frac{\widetilde{M}}{2\pi} \right\rfloor - 1 \right) = 2M > M.$$

Portanto, basta tomar a vizinhança $\widetilde{U}_M = U_{\widetilde{M}}$, com $\widetilde{M} = 2\pi(M + 1)$. Isto prova o item i).

Dado um inteiro $M > 0$, existe $0 < E_M < E_0$ tal que $\partial S_E \subset \widetilde{U}_M$ para toda energia $0 < E < E_M$, onde $E_0 > 0$ e \widetilde{U}_M são como no item i). Sendo assim, se $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ é uma órbita periódica enlaçada com $P_{2,E}$, com $0 < E < E_M$, então P deve intersectar $\partial S_E \setminus P_{2,E}$ e, conseqüentemente, deve intersectar \widetilde{U}_M . Veja Figura 3.6. Isto implica, pelo item i), que $CZ(P) > M$, provando ii). \square

Como vimos no Teorema 2.1.3, o índice de Conley-Zehnder das órbitas periódicas contidas em um ovalóide (hipersuperfície estritamente convexa difeomorfa à esfera S^3) é limitado inferiormente por 3. Temos um resultado semelhante para conjuntos singulares estritamente convexos, provado na proposição abaixo.

Proposição 3.2.6. *Dada uma órbita periódica $P \subset \dot{W}_0 = W_0 \setminus \{p_c\}$, temos que $CZ(P) \geq 3$.*

Demonstração. O conjunto W_0 é dado pela união dos conjuntos singulares estritamente

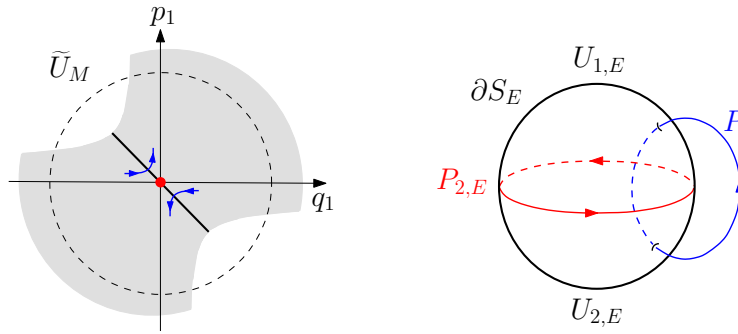


Figura 3.6: Uma órbita periódica $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ enlaçada com $P_{2,E}$ deve intersectar $\partial S_E \setminus P_{2,E} = U_{1,E} \cup U_{2,E} \subset \tilde{U}_M$ para energia $0 < E < E_M$.

convexos S_0 e S'_0 , que têm o sela-centro p_c como único ponto em comum. Podemos assumir então que $P \subset \dot{S}_0$, pois o caso em que $P \subset \dot{S}'_0$ é completamente análogo.

Seja $B_\delta(p_c)$ uma bola centrada em p_c com raio $\delta > 0$ pequeno o suficiente para que $\overline{B_\delta(p_c)} \cap P = \emptyset$. Por um teorema de M. Ghomi em [18] (afirmando que toda hipersuperfície compacta estritamente convexa pode ser estendida a um ovalóide C^∞), podemos estender a hipersuperfície estritamente convexa $S_0 \setminus B_\delta(p_c)$ a um ovalóide \tilde{S}_0 . Uma vez que $P \subset \dot{S}_0 \cap \tilde{S}_0$ e o índice de Conley-Zehnder de P independe do fato de P estar contida em \dot{S}_0 ou em \tilde{S}_0^* , concluímos que $CZ(P) \geq 3$ pelo Teorema 2.1.3. \square

A partir das Proposições 3.2.5 e 3.2.6, podemos mostrar que, se a energia $E > 0$ é suficientemente pequena, então toda órbita periódica de W_E , com exceção de $P_{2,E}$, tem índice de Conley-Zehnder maior ou igual a 3.

Proposição 3.2.7. *Existe $E^* > 0$ tal que, se $0 < E < E^*$, então $CZ(P) \geq 3$ para toda órbita periódica $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$.*

Demonstração. Sejam $E_0 > 0$ pequeno e \tilde{U}_3 vizinhança de p_c como na Proposição 3.2.5-i), ou seja, tais que se $0 < E < E_0$ e $P \subset W_E \setminus P_{2,E}$ é uma órbita periódica intersectando \tilde{U}_3 , então $CZ(P) > 3$. Assim como fizemos na demonstração da Proposição 3.2.5, podemos usar a convexidade estrita de \dot{W}_0 para encontrar $0 < E_1 < E_0$ de modo que, se $0 < E < E_1$, então $\langle \text{Hess}H(w) \cdot u, u \rangle > 0$ para todo $w \in W_E \setminus \tilde{U}_3$ e todo $u \in T_w S_w$ não-nulo. E então, pela Proposição 1.3.7, obtemos $\bar{\eta} > 0$ tal que

$$\dot{\eta}(t) > \bar{\eta} > 0 \tag{3.62}$$

para qualquer solução linearizada transversal $\alpha_1(t) + i\alpha_2(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\eta(t)}$ ao longo de um segmento de órbita contido em $W_E \setminus \tilde{U}_3$, se $0 < E < E_1$.

Suponha, por absurdo, que exista uma sequência $E_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, com $0 < E_n < E_1$, tal que $W_{E_n} \subset H^{-1}(E_n)$ admite uma órbita periódica $P_n = (w_n, T_n)$ do fluxo Hamiltoniano, distinta de P_{2,E_n} , satisfazendo $CZ(P_n) < 3$. Neste caso, pela propriedade da vizinhança \tilde{U}_3 de p_c , sabemos que $P_n \subset W_{E_n} \setminus \tilde{U}_3$ para todo n . Como em $W_{E_n} \setminus \tilde{U}_3$ vale a estimativa (3.62), a limitação superior dos índices de Conley-Zehnder $CZ(P_n)$ nos permite

*Para uma demonstração desta afirmação, consulte a quarta seção da referência [22].

concluir que a sequência de períodos Hamiltonianos T_n é uniformemente limitada. Sendo assim, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência de E_n , que continuaremos denotando por E_n , tal que $T_n \rightarrow T > 0$ e $w_n \rightarrow w$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $P = (w, T) \in \dot{W}_0 \subset H^{-1}(0)$ é uma órbita periódica. Observe que, de fato, $T \neq 0$, pois $P_n \subset W_{E_n} \setminus \tilde{U}_3$ para todo n e a única singularidade do fluxo Hamiltoniano contida em W_0 é o sela-centro $p_c \in \tilde{U}_3$. Entretanto, pela definição geométrica do índice de Conley-Zehnder, vemos que $CZ(P) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} CZ(P_n) < 3$, o que contradiz a Proposição 3.2.6.

Portanto, podemos afirmar que existe $0 < E^* < E_1$ tal que, se $0 < E < E^*$, então o índice de Conley-Zehnder é maior ou igual a 3 para toda órbita periódica em $W_E \setminus P_{2,E}$. \square

Note que as Proposições 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.7 implicam os itens i) e ii) da Proposição 3.2.1, restando-nos apenas o item iii), que vamos demonstrar logo em seguida.

Considere, para $E > 0$ suficientemente pequeno, a forma de contato λ_E em W_E obtida na Proposição 2.3.6 e a órbita periódica $P_{2,E} \subset W_E$ que, segundo as Proposições 3.2.4 e 3.2.7, é não-nó, hiperbólica em seu nível de energia e , além disso, é a única órbita periódica de λ_E com índice de Conley-Zehnder 2. Lembramos que as soluções do campo de Reeb X_{λ_E} coincidem com as soluções do campo Hamiltoniano X_H em $W_E \subset H^{-1}(E)$, a menos de uma reparametrização no tempo que também reparametriza as trajetórias do fluxo linearizado transversal.

Seja λ_n uma sequência de formas de contato em W_E satisfazendo $\lambda_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Como $P_{2,E}$ é não-nó e hiperbólica, temos que, para n suficientemente grande, λ_n admite uma única órbita periódica $P_{2,n} \subset W_E$, também não-nó e hiperbólica, satisfazendo $CZ(P_{2,n}) = 2$ e $P_{2,n} \rightarrow P_{2,E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Observe que, neste caso, o índice de Conley-Zehnder igual a 2 é uma informação que se preserva para pequenas perturbações de X_{λ_E} e $P_{2,E}$, pois o intervalo I formado pelas variações de argumento das soluções não-nulas do fluxo linearizado transversal ao longo de $P_{2,E}$, construído na demonstração da Proposição 3.2.4, contém o valor 1 em seu interior e, portanto, o mesmo deve ocorrer para X_{λ_n} e $P_{2,n}$ para n grande.

Da mesma forma que utilizamos o referencial $\{X_1, X_2\} \subset TW_E$, que é transversal à direção do campo de Reeb X_{λ_E} , para estudar o fluxo linearizado transversal ao longo de órbitas de λ_E em W_E , podemos usá-lo para analisar o fluxo linearizado transversal ao longo de trajetórias de λ_n em W_E , para n suficientemente grande, visto que $X_{\lambda_n} \rightarrow X_{\lambda_E}$ quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda, como o fluxo de Reeb associado à λ_n converge para o fluxo de Reeb associado à λ_E em C_{loc}^∞ , quando $n \rightarrow \infty$, obtemos estimativas semelhantes às do Lema 3.2.3 para o fluxo linearizado de λ_n , quando n é suficientemente grande. Portanto, podemos afirmar que existem vizinhanças $U_{2\pi} \subset U_* \subset \mathcal{U}_{E^*}$ de p_c tais que o argumento $\eta(t)$ de qualquer solução linearizada transversal não-nula, ao longo de um segmento maximal de órbita de λ_n contido em U_* e intersectando $U_{2\pi}$, satisfaz

$$\Delta\eta > 2\pi \tag{3.63}$$

para todo n grande.

Argumentando como na demonstração da Proposição 3.2.7, encontramos $\bar{\eta} > 0$ tal que

$$\dot{\eta}(t) > \bar{\eta} > 0 \quad (3.64)$$

para qualquer segmento de trajetória de λ_n contido em $W_E \setminus U_{2\pi}$, para $E > 0$ fixado suficientemente pequeno e n suficientemente grande. E assim, podemos mostrar que, para todo $E > 0$ fixado ainda menor, o fluxo de λ_n em W_E é fracamente convexo e $P_{2,n}$ é sua única órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 2, para todo n grande. De fato, suponha por absurdo que, para todo n grande, λ_n admite uma órbita periódica Q_n distinta de $P_{2,n}$ satisfazendo $CZ(Q_n) < 3$. Neste caso, por (3.63) e (3.64), temos que $Q_n \subset W_E \setminus U_{2\pi}$ e daí, pela estimativa (3.64), obtemos uma limitação uniforme para os períodos das órbitas Q_n . Daí segue, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, que $Q_n \rightarrow Q$ para alguma subsequência denotada novamente por Q_n , onde $Q \subset W_E \setminus P_{2,E}$ é uma órbita periódica de λ_E com índice de Conley-Zehnder $CZ(Q) < 3$, contradizendo assim a Proposição 3.2.7.

Para finalizar, como $P_{2,n} \rightarrow P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$, se P é uma órbita periódica de λ_n contida em $W_E \setminus P_{2,n}$ e enlaçada com $P_{2,n}$ e se a energia $E > 0$ é suficientemente pequena, então P deve intersectar a vizinhança $U_{2\pi}$ para n suficientemente grande, o que implica $CZ(P) > 3$.

Com isso, completamos a demonstração do item iii) da Proposição 3.2.1.

3.3 Demonstração da Proposição 2.3.8

Nesta seção, vamos escolher uma estrutura complexa conveniente $J_E \in \mathcal{J}(\lambda_E)$, para energia $E > 0$ suficientemente pequena, de modo que seja possível construir explicitamente um par de planos \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, ambos assintóticos à órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$, cujas imagens se projetam em W_E sobre os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E , respectivamente. Por construção explícita, queremos dizer que tais planos pseudo-holomorfos serão obtidos em termos de soluções de equações diferenciais ordinárias. Vamos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 2.3.8. *Se $E > 0$ é suficientemente pequeno, então existe $J_E \in \mathcal{J}(\lambda_E)$ tal que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ admite um par de planos de energia finita*

$$\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E}), \tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$$

de tal modo que as imagens $u_{1,E}(\mathbb{C}), u_{2,E}(\mathbb{C}) \subset W_E$ são ambas assintóticas à $P_{2,E}$ e coincidem, respectivamente, com os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E , definidos em coordenadas locais por (2.13).

Demonstração. Sejam $(q_1, q_2, p_1, p_2) \in V$ as coordenadas locais em torno do sela-centro dadas pela Hipótese 1. Nestas coordenadas, a forma de contato λ_E em W_E , construída na

Proposição 2.3.6 para $E > 0$ suficientemente pequeno, coincide com a forma de contato padrão $\lambda_0|_{W_E}$ próximo à 2-esfera $\partial S_E = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$, onde

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p_i dq_i - q_i dp_i.$$

Sendo assim, como o campo Hamiltoniano associado à função $K = -\alpha I_1 + \omega I_2 + R(I_1, I_2)$ é dado por $X_K = A_3 \nabla K = (-\bar{\alpha} q_1, \bar{\omega} p_2, \bar{\alpha} p_1, -\bar{\omega} q_2)$, com $\bar{\alpha} = \alpha - \partial_{I_1} R$ e $\bar{\omega} = \omega + \partial_{I_2} R$, temos que o campo de Reeb associado à λ_E próximo à ∂S_E é da forma

$$X_{\lambda_E} = \frac{1}{\lambda_E(X_K)} X_K = \frac{1}{-\bar{\alpha} I_1 + \bar{\omega} I_2} (-\bar{\alpha} q_1, \bar{\omega} p_2, \bar{\alpha} p_1, -\bar{\omega} q_2). \quad (3.65)$$

Considere o referencial $\{e_1, e_2, e_3\} \subset TW_E$ definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= A_1 \nabla K = (\bar{\omega} p_2, \bar{\alpha} q_1, \bar{\omega} q_2, \bar{\alpha} p_1), \\ e_2 &= A_2 \nabla K = (\bar{\omega} q_2, \bar{\alpha} p_1, -\bar{\omega} p_2, -\bar{\alpha} q_1), \\ e_3 &= A_3 \nabla K = (-\bar{\alpha} q_1, \bar{\omega} p_2, \bar{\alpha} p_1, -\bar{\omega} q_2), \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde as matrizes constantes A_i de ordem 4, $i = 1, 2, 3$, são como em (1.25). Observe que $e_i = |\nabla K| Y_i$, para cada $i = 1, 2, 3$, sendo que $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é o referencial utilizado para descrever o fluxo linearizado ao longo de órbitas de X_K , dado em (3.33). O campo $e_3 = X_K$ é paralelo ao campo de Reeb X_{λ_E} e a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_E$ é isomorfa à $\text{span}\{e_1, e_2\}$, como distribuições de planos tangentes, via a projeção $\pi_\xi : \xi \rightarrow \text{span}\{e_1, e_2\}$ ao longo da direção e_3 . Seja $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset \xi$ o referencial determinado por $\pi_\xi(\bar{e}_i) = e_i$ para cada $i = 1, 2$.

Definimos a estrutura complexa $J_E : \xi \rightarrow \xi$, em coordenadas locais, por

$$J_E \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_2. \quad (3.67)$$

De acordo com a Definição 1.4.1, J_E é compatível com a estrutura simplética $d\lambda_E|_\xi = \omega_0|_\xi$, pois

$$\begin{aligned} d\lambda_E(J_E \cdot \bar{e}_1, J_E \cdot \bar{e}_2) &= d\lambda_E(\bar{e}_2, -\bar{e}_1) = d\lambda_E(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \\ d\lambda_E(\bar{e}_i, J_E \cdot \bar{e}_i) &= d\lambda_E(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \omega_0(e_1, e_2) = \langle A_3 e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = |e_2|^2 > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Usando uma métrica Riemanianna auxiliar conveniente, podemos estender J_E suavemente em todo W_E .

Seja $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ a estrutura quase-complexa induzida naturalmente na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ por λ_E e J_E , como em (1.47). Queremos construir um par de planos \tilde{J}_E -holomorfos $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E}), \tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, ambos assintóticos à $P_{2,E} = (x_{2,E}, T_{2,E})$ em $+\infty$, que se aproximam de $P_{2,E}$ em direções opostas.

Assumindo, sem perda de generalidade, que $x_{2,E}(0) = (0, r_E, 0, 0)$, onde o raio $r_E > 0$, com $E > 0$ pequeno, é tal que $r_E^2 = 2I_2(0, E) = \frac{2E}{\omega} + \mathcal{O}(E^2)$, vide (2.9), temos que a solução

do fluxo de Reeb representando $P_{2,E}$ é dada, em coordenadas locais, por

$$x_{2,E}(t) = \left(0, r_E \cos 2\pi \frac{t}{T_{2,E}}, 0, -r_E \sin 2\pi \frac{t}{T_{2,E}} \right),$$

sendo que o período de $P_{2,E}$, com respeito ao fluxo de Reeb de λ_E , é igual a

$$T_{2,E} = \int_{P_{2,E}} \lambda_E = \int_0^{T_{2,E}} x_{2,E}^* \lambda_0 = \int_0^{T_{2,E}} \frac{\pi r_E^2}{T_{2,E}} dt = \pi r_E^2 = \frac{2\pi E}{\omega} + \mathcal{O}(E^2). \quad (3.68)$$

Note que $T_{2,E}$ difere do período Hamiltoniano $T_{2,E}^H = \frac{2\pi}{\omega} + \mathcal{O}(E)$ considerado na demonstração da Proposição 3.2.4.

Os planos de energia finita $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E})$ e $\tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E})$ devem ser tais que as imagens $u_{1,E}(\mathbb{C})$ e $u_{2,E}(\mathbb{C})$ coincidam, respectivamente, com os hemisférios $U_{1,E} = \{q_1 + p_1 = 0, q_1 < 0\} \cap K^{-1}(E)$ e $U_{2,E} = \{q_1 + p_1 = 0, q_1 > 0\} \cap K^{-1}(E)$ da 2-esfera ∂S_E . Vamos apresentar a construção de $\tilde{u}_{1,E}$, usando a notação $\tilde{u} = (a, u)$ ao invés de $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E})$, e o caso $\tilde{u}_{2,E}$ é completamente análogo devido à simetria de nossas coordenadas.

Por simplicidade, definimos \tilde{u} sobre o cilindro $\mathbb{R} \times S^1$, tendo em vista a mudança de coordenadas $\mathbb{R} \times S^1 \ni (s, t) \mapsto e^{2\pi(s+it)} \in \mathbb{C}$. Considerando as propriedades que desejamos que $\tilde{u} = (a, u)$ satisfaça, vamos assumir $\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), u(s, t)) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ com u da forma

$$\begin{aligned} u(s, t) &= (q_1(s, t), q_2(s, t), p_1(s, t), p_2(s, t)) \\ &= (-h(s), f(s) \cos 2\pi t, h(s), -f(s) \sin 2\pi t), \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são funções suaves a serem determinadas. Em (1.49) vimos que, para ser uma curva \tilde{J}_E -holomorfa na simplectização, $\tilde{u} = (a, u)$ deve ser tal que

$$\begin{cases} \pi u_s + J_E(u) \pi u_t = 0 \\ \lambda_E(u_t) = a_s \\ \lambda_E(u_s) = -a_t, \end{cases} \quad (3.70)$$

onde $\pi : TW_E \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo da direção do campo de Reeb X_{λ_E} . Vejamos quais condições as funções $h(s)$ e $f(s)$ têm que satisfazer para que a primeira equação de (3.70) seja válida.

Restringindo o referencial $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset \xi$ à esfera ∂S_E , onde $p_1 = -q_1$, obtemos a partir de (3.65) e (3.66) que

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= e_1 - \lambda_E(e_1) X_{\lambda_E} \\ &= (\bar{\omega} p_2, \bar{\alpha} q_1, \bar{\omega} q_2, -\bar{\alpha} q_1) - \frac{1}{2} \frac{q_1(q_2 + p_2)(\bar{\omega} - \bar{\alpha})}{\bar{\alpha} I_1 - \bar{\omega} I_2} (-\bar{\alpha} q_1, \bar{\omega} p_2, -\bar{\alpha} q_1, -\bar{\omega} q_2), \\ \bar{e}_2 &= e_2 - \lambda_E(e_2) X_{\lambda_E} \\ &= (\bar{\omega} q_2, -\bar{\alpha} q_1, -\bar{\omega} p_2, -\bar{\alpha} q_1) - \frac{1}{2} \frac{q_1(q_2 - p_2)(\bar{\omega} - \bar{\alpha})}{\bar{\alpha} I_1 - \bar{\omega} I_2} (-\bar{\alpha} q_1, \bar{\omega} p_2, -\bar{\alpha} q_1, -\bar{\omega} q_2). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Além disso, de (3.69), temos que

$$\begin{aligned} u_s &= (-h'(s), f'(s) \cos 2\pi t, h'(s), -f'(s) \sin 2\pi t), \\ u_t &= (0, -2\pi f(s) \sin 2\pi t, 0, -2\pi f(s) \cos 2\pi t), \end{aligned}$$

donde segue $\lambda_E(u_s) = 0$, $\lambda_E(u_t) = \pi f(s)^2$. Portanto, as projeções de u_s e u_t na estrutura de contato ξ são dadas por

$$\begin{aligned} \pi u_s &= u_s - \lambda_E(u_s)X_{\lambda_E}(u) = (-h'(s), f'(s) \cos 2\pi t, h'(s), -f'(s) \sin 2\pi t), \\ \pi u_t &= u_t - \lambda_E(u_t)X_{\lambda_E}(u) = (0, -2\pi f(s) \sin 2\pi t, 0, -2\pi f(s) \cos 2\pi t) \\ &+ \frac{\pi f(s)^2}{\bar{\alpha}h(s)^2 + \frac{\bar{\omega}}{2}f(s)^2}(-\bar{\alpha}h(s), \bar{\omega}f(s) \sin 2\pi t, -\bar{\alpha}h(s), \bar{\omega}f(s) \cos 2\pi t) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Após alguns cálculos usando as equações (3.71) e (3.72), escrevemos \bar{e}_1 e \bar{e}_2 como combinação linear de πu_s e πu_t em ξ como

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \frac{\bar{\omega}(q_2 - p_2)}{2h'(s)}\pi u_s - \left(\frac{\bar{\omega} - N(\bar{\omega} - \bar{\alpha})\bar{\alpha}h(s)^2}{2N\pi f(s)^2\bar{\alpha}h(s)}(q_2 + p_2) \right)\pi u_t, \\ \bar{e}_2 &= -\frac{\bar{\omega}(q_2 + p_2)}{2h'(s)}\pi u_s - \left(\frac{\bar{\omega} - N(\bar{\omega} - \bar{\alpha})\bar{\alpha}h(s)^2}{2N\pi f(s)^2\bar{\alpha}h(s)}(q_2 - p_2) \right)\pi u_t, \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde

$$\frac{1}{N} = \lambda_E(X_K) = -\bar{\alpha}I_1 + \bar{\omega}I_2 = \bar{\alpha}h(s)^2 + \frac{\bar{\omega}}{2}f(s)^2. \quad (3.74)$$

A primeira equação de (3.70) nos diz que

$$\begin{aligned} J_E(\pi u_s) &= \pi u_t \\ J_E(\pi u_t) &= -\pi u_s. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Sendo assim, de (3.67), (3.73) e (3.75), obtemos que

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{\omega}(q_2 - p_2)}{2h'(s)}\pi u_t + \left(\frac{\bar{\omega} - N(\bar{\omega} - \bar{\alpha})\bar{\alpha}h(s)^2}{2N\pi f(s)^2\bar{\alpha}h(s)}(q_2 + p_2) \right)\pi u_s \\ &= -\frac{\bar{\omega}(q_2 + p_2)}{2h'(s)}\pi u_s - \left(\frac{\bar{\omega} - N(\bar{\omega} - \bar{\alpha})\bar{\alpha}h(s)^2}{2N\pi f(s)^2\bar{\alpha}h(s)}(q_2 - p_2) \right)\pi u_t \end{aligned}$$

que, por sua vez, implica as equações

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}}{2h'(s)}(q_2 - p_2) &= \frac{-\bar{\omega} + N(\bar{\omega} - \bar{\alpha})\bar{\alpha}h(s)^2}{2N\pi f(s)^2\bar{\alpha}h(s)}(q_2 - p_2) \\ \frac{\bar{\omega}}{2h'(s)}(q_2 + p_2) &= \frac{-\bar{\omega} + N(\bar{\omega} - \bar{\alpha})\bar{\alpha}h(s)^2}{2N\pi f(s)^2\bar{\alpha}h(s)}(q_2 + p_2). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Note que, para todo $(s, t) \in \mathbb{R} \times S^1$, temos que $q_2(s, t) - p_2(s, t) \neq 0$ ou $q_2(s, t) + p_2(s, t) \neq 0$, pois, caso contrário, $q_2(s, t) = p_2(s, t) = 0$ para algum (s, t) e, conseqüentemente, $f(s) = 0$.

Deste modo, (3.74) e (3.76) nos levam à seguinte equação diferencial

$$h'(s) = -\frac{2\pi\bar{\alpha}\bar{\omega}h(s)f(s)^2}{\bar{\omega}^2f(s)^2 + 2\bar{\alpha}^2h(s)^2}. \quad (3.77)$$

Vimos em (2.9), que é possível escrever I_2 como uma função de (I_1, E) no nível de energia $K^{-1}(E)$, para valores pequenos de E, I_1 e I_2 , como

$$I_2 = I_2(I_1, E) = \frac{\alpha}{\omega}I_1 + \frac{1}{\omega}E + \mathcal{O}(I_1^2 + E^2). \quad (3.78)$$

Então, fixado $E > 0$ pequeno, encontramos $I_1^-(E) = -\frac{E}{\alpha} + \mathcal{O}(E^2) < 0$, vide (3.6), tal que $I_2(I_1^-(E), E) = 0$ e $I_1 \geq I_1^-(E)$ para valores pequenos de I_1 e $I_2 \geq 0$.

Uma vez que $u(s, t) \in W_E \subset K^{-1}(E)$ para todo $(s, t) \in \mathbb{R} \times S^1$, (3.69) e (3.78) nos fornecem uma relação entre as funções $f(s)$ e $h(s)$, dada por

$$f(s)^2 = -\frac{2\alpha}{\omega}h(s)^2 + \frac{2}{\omega}E + \mathcal{O}(h(s)^4 + E^2), \quad (3.79)$$

para cada $E > 0$ fixado pequeno e para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, a equação (3.77) pode ser vista como uma equação diferencial do tipo $h'(s) = G(h(s))$ para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, onde $G = G(h)$ é uma função suave definida no intervalo $[-h_E^*, h_E^*]$, sendo que

$$h_E^* = \sqrt{-I_1^-(E)} > 0$$

é o menor valor positivo de h para o qual f se anula em (3.79). Assim, a função $G(h)$ se anula nos valores $h = 0$ e $h = \pm h_E^*$, é positiva no intervalo $(-h_E^*, 0)$ e é negativa no intervalo $(0, h_E^*)$. Consequentemente, qualquer solução $h = h(s)$ de (3.77), com $h(0) \in (0, h_E^*)$, é estritamente decrescente e satisfaz

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} h(s) = h_E^* \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} h(s) = 0, \quad (3.80)$$

donde segue, por (3.79), que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = r_E > 0. \quad (3.81)$$

As equações (3.80) e (3.81) implicam que os loops $S^1 \ni t \mapsto u(s, t)$ convergem para $S^1 \ni t \mapsto x_{2,E}(T_{2,E}t)$ em C^∞ quando $s \rightarrow +\infty$ e que $u(s, t) \rightarrow (-h_E^*, 0, h_E^*, 0)$ uniformemente em t quando $s \rightarrow -\infty$.

Agora, quanto às duas últimas equações de (3.70), relacionadas com a coordenada real da curva $\tilde{u} = (a, u)$, basta definirmos

$$a(s, t) = \pi \int_0^s f(\tau)^2 d\tau, \quad (3.82)$$

dependendo apenas de $s \in \mathbb{R}$, e então

$$\begin{aligned} a_t(s, t) &= 0 = \lambda_E(u_s(s, t)) \\ a_s(s, t) &= \pi f(s)^2 = \lambda_E(u_t(s, t)) \end{aligned}$$

para todo $(s, t) \in \mathbb{R} \times S^1$. Observe que, por (3.81), $a_s(s, t) = \pi f(s)^2 \rightarrow \pi r_E^2 = T_{2,E}$ quando $s \rightarrow +\infty$ e $a_s(s, t) = \pi f(s)^2 \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$.

Seja $\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), u(s, t)) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, com $a(s, t)$ definida por (3.82) e $u(s, t)$ como em (3.69), onde $h(s)$ é uma solução da E.D.O. (3.77) satisfazendo $h(0) \in (0, h_E^*)$ e $f(s)$ é determinada, em termos de $h(s)$, por (3.79). Sendo assim, pela construção que realizamos, \tilde{u} satisfaz (3.70) e, portanto, é uma curva \tilde{J}_E -holomorfa. Considere a 1-forma $\lambda_\varphi(a, u) := \varphi(a)\lambda_E(u)$ definida na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, onde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é uma função suave satisfazendo $\varphi' \geq 0$. Como $u^*\lambda_E = \lambda_E(u_s)ds + \lambda_E(u_t)dt = \pi f(s)^2 dt$, obtemos, por (3.81) e pelo Teorema de Stokes, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times S^1} \tilde{u}^* d\lambda_\varphi &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R] \times S^1} \tilde{u}^* d(\varphi \lambda_E) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{\{R\} \times S^1} \tilde{u}^*(\varphi \lambda_E) - \int_{\{-R\} \times S^1} \tilde{u}^*(\varphi \lambda_E) \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\varphi(a(R)) \int_{S^1} \pi f(R)^2 dt - \varphi(a(-R)) \int_{S^1} \pi f(-R)^2 dt \right] \\ &= \varphi(+\infty) \pi r_E^2. \end{aligned}$$

Disto segue, pela Definição 1.4.6, que $E(\tilde{u}) = \pi r_E^2 = T_{2,E}$ e, portanto, $\tilde{u} = (a, u)$ é um cilindro pseudo-holomorfo de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$. Neste caso, pelo fato de $u(s, t) \rightarrow (-h_E^*, 0, h_E^*, 0)$ uniformemente em t quando $s \rightarrow -\infty$, podemos usar o Teorema 1.4.9 para concluir que a singularidade $s = -\infty$ é um furo removível de \tilde{u} . Então, depois de remover este furo, obtemos finalmente o plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ que é assintótico à $P_{2,E}$ em seu furo positivo $s = +\infty$ e, por construção, satisfaz $u_{1,E}(\mathbb{C}) = U_{1,E}$.

Escolhendo agora uma solução $h = h(s)$ de (3.77), com $h(0) \in (-h_E^*, 0)$, construímos de forma análoga um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, assintótico à $P_{2,E}$, cuja imagem projetada em W_E coincide com o hemisfério $U_{2,E}$. \square

3.4 Demonstração da Proposição 2.3.9

No decorrer da demonstração do nosso resultado principal, o Teorema 2.3.2, vimos que é possível perturbar a forma de contato λ_E em W_E e a estrutura complexa $J_E \subset \mathcal{J}(\lambda_E)$, obtidas respectivamente nas Proposições 2.3.6 e 2.3.8 para $E > 0$ pequeno, com o intuito de alcançar as hipóteses genéricas do Teorema 2.1.9. Mais precisamente, argumentamos que existe uma sequência de formas de contato *tight* e não-degeneradas $\lambda_n = f_n \lambda_E$ em W_E , com $f_n : W_E \rightarrow (0, \infty)$ suave satisfazendo $f_n \rightarrow 1$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, e existe uma sequência

de estruturas complexas $J_n \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda_n) \subset \mathcal{J}(\lambda_E)$ tal que $J_n \rightarrow J_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, de modo que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ que, por sua vez, se projeta em W_E sobre um sistema global de seções transversais \mathcal{F}_n para o fluxo de λ_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. E então, com o auxílio da Proposição 2.3.7, observamos que, para $E > 0$ suficientemente pequeno e n suficientemente grande, λ_n é uma forma de contato fracamente convexa e \mathcal{F}_n é uma folheação 3 – 2 – 3 para o fluxo de λ_n em W_E , cujo *binding* com índice de Conley-Zehnder 2 é dado por uma órbita periódica hiperbólica $P_{2,n}$ que satisfaz $P_{2,n} \rightarrow P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$.

O resultado a seguir, cuja demonstração é o enfoque desta seção, afirma a existência desta folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_n em W_E , para $E > 0$ suficientemente pequeno e n suficientemente grande, e, além disso, garante que, por um simples processo de limite aplicado aos *bindings* de \mathcal{F}_n , podemos encontrar candidatos para os *bindings* da folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_E que desejamos construir para o fluxo de Reeb de λ_E em W_E .

Proposição 2.3.9. *Para $E > 0$ suficientemente pequeno, ocorre o seguinte:*

- i) *Existe uma sequência de formas de contato fracamente convexas e não-degeneradas λ_n em W_E satisfazendo $\ker \lambda_n = \ker \lambda_E$ para todo n e $\lambda_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e existe uma sequência de estruturas complexas $d\lambda_E$ -compatíveis $J_n \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda_n) \subset \mathcal{J}(\lambda_E)$ satisfazendo $J_n \rightarrow J_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ tais que, para todo n suficientemente grande, a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$ admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ que se projeta em W_E sobre uma folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_n para o fluxo de Reeb associado à λ_n . Sejam $P_{3,n}, P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$ os *bindings* não-degenerados da folheação \mathcal{F}_n com índices de Conley-Zehnder 3, 2 e 3 respectivamente. Então $P_{2,n} \rightarrow P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$ e existem órbitas periódicas não-nós $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$ e $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$ do fluxo de Reeb associado à λ_E , ambas com índice de Conley-Zehnder 3, tais que $P_{3,n} \rightarrow P_{3,E}$ e $P'_{3,n} \rightarrow P'_{3,E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$.*
- ii) *Após uma conveniente mudança de coordenadas por contactomorfismos C^∞ -próximos da identidade, podemos assumir que, para todo n grande, $P_{3,n} = P_{3,E}, P_{2,n} = P_{2,E}$ e $P'_{3,n} = P'_{3,E}$ como conjuntos de pontos em W_E e, mais ainda, que existem sequências de constantes $c_{3,n}, c_{2,n}, c'_{3,n} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ tais que*

$$\begin{aligned}\lambda_n|_{P_{3,E}} &= c_{3,n} \lambda_E|_{P_{3,E}}, \\ \lambda_n|_{P_{2,E}} &= c_{2,n} \lambda_E|_{P_{2,E}}, \\ \lambda_n|_{P'_{3,E}} &= c'_{3,n} \lambda_E|_{P'_{3,E}}.\end{aligned}$$

Demonstração. Para o item i), só nos resta mostrar a convergência dos *bindings* $P_{3,n}$ e $P'_{3,n}$ de \mathcal{F}_n quando $n \rightarrow \infty$. De acordo com a Proposição 3.2.1-iii), para todo $E > 0$ pequeno e todo n grande, as órbitas periódicas $P_{3,n} = (x_{3,n}, T_{3,n})$ e $P'_{3,n} = (x'_{3,n}, T'_{3,n})$ não intersectam uma certa vizinhança $U_{2\pi}$ do sela-centro p_c , sendo que cada uma destas órbitas está situada em uma componente distinta de $W_E \setminus U_{2\pi}$. Logo, $P_{3,n}$ e $P'_{3,n}$ estão contidas em componentes distintas de $W_E \setminus \partial S_E$, para $E > 0$ pequeno e n grande e, portanto,

podemos assumir que $P_{3,n} \subset \dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$ e $P'_{3,n} \subset \dot{S}'_E = S'_E \setminus \partial S'_E$. Mais ainda, pela convexidade estrita de $\dot{W}_0 = \dot{S}_0 \cup \dot{S}'_0$ e pela Proposição 1.3.7, existe $\bar{\eta} > 0$ tal que, se a energia $E > 0$ for suficientemente pequena, então o argumento $\eta(t)$ de qualquer solução linearizada transversal não-nula ao longo de $x_{3,n}$, ou ao longo de $x'_{3,n}$, satisfaz $\dot{\eta} > \bar{\eta}$ para n suficientemente grande. Disto segue, como já argumentamos outras vezes, que os períodos $T_{3,n}$ e $T'_{3,n}$ são uniformemente limitados em n , já que $CZ(P_{3,n}) = CZ(P'_{3,n}) = 3$ para todo n , e então, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli, encontramos órbitas periódicas $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$ e $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$ de λ_E tais que $P_{3,n} \rightarrow P_{3,E}$ e $P'_{3,n} \rightarrow P'_{3,E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos de extração de subsequências. Além disso, $CZ(P_{3,E}) = CZ(P'_{3,E}) = 3$, visto que λ_E é uma forma de contato fracamente convexa que admite $P_{2,E}$ como única órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 2. Pela mesma justificativa, temos que $P_{3,E}$ e $P'_{3,E}$ são órbitas periódicas simples, pois, caso contrário, seus índices de Conley-Zehnder seriam pelo menos 5. Consequentemente, como $P_{3,n}$ e $P'_{3,n}$ são não-nós para cada n , podemos concluir que $P_{3,E}$ e $P'_{3,E}$ são não-nós.

Agora, para demonstrar o item *ii*), denote por P qualquer uma das órbitas periódicas $P_{2,E}$, $P_{3,E}$ ou $P'_{3,E}$ de λ_E e seja P_n a sequência correspondente de órbitas periódicas de λ_n convergindo para P em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Considere $\mathcal{U} \subset W_E$ uma pequena vizinhança tubular de P . O fato de $P_n \rightarrow P$ em C^∞ nos permite concluir que existe uma sequência de difeomorfismos $\psi_{0,n} : W_E \rightarrow W_E$ suportados em \mathcal{U} satisfazendo $\psi_{0,n}(P) = P_n$ e $\psi_{0,n} \rightarrow \text{Id}_{W_E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, veja [39, Lema 4.2]. Para cada n , defina a forma de contato $\mu_n := \psi_{0,n}^* \lambda_n$ em W_E . Note que $\mu_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e, além disso, P é a imagem geométrica de uma órbita periódica do fluxo de Reeb associado à μ_n em W_E , para todo n .

Fazendo uso do Lema 1.3.2, podemos considerar coordenadas de Martinet $(\vartheta, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$ em \mathcal{U} em torno de $P \equiv S^1 \times \{0\}$, possivelmente trabalhando no recobrimento universal $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de $S^1 \times \mathbb{R}^2$ com $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\vartheta \bmod 1$. Nestas coordenadas, λ_E assume a forma $g(\vartheta, x, y) \cdot (xdy + d\vartheta)$, onde g é uma função suave e positiva. Nosso próximo passo é modificar a forma de contato μ_n , utilizando as coordenadas de Martinet, de modo que tenhamos o seguinte:

$$\ker \mu_n|_P = \ker \lambda_n|_P = \ker \lambda_E|_P = \text{span}\{\partial_x, \partial_y\}. \tag{3.83}$$

Uma vez que o campo de Reeb $X_{\mu_n}|_P$ é transversal à $\text{span}\{\partial_x, \partial_y\}$ para n suficientemente grande, pois $X_{\mu_n} \rightarrow X_{\lambda_E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a restrição de $\ker \mu_n$ à órbita periódica P pode ser escrita como

$$\ker \mu_n|_{(\vartheta,0,0)} = \text{span}\{a_n(\vartheta)\partial_\vartheta + \partial_x, b_n(\vartheta)\partial_\vartheta + \partial_y\}, \forall \vartheta \in \mathbb{R},$$

onde $a_n(\vartheta), b_n(\vartheta), \vartheta \in \mathbb{R}$, são funções suaves 1-periódicas. Observe que $a_n, b_n \rightarrow 0$ em C^∞ uniformemente em ϑ quando $n \rightarrow \infty$, pois $\mu_n \rightarrow \lambda_E$. Fixe uma função de corte $f : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ que seja independente da variável ϑ , seja constante igual a 1 próximo à P e seja constante igual à 0 no complementar de uma pequena vizinhança tubular de P . Definindo

o difeomorfismo $\psi_{1,n} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ por

$$\psi_{1,n}(\vartheta, x, y) = (\vartheta + f(\vartheta, x, y)(a_n(\vartheta)x + b_n(\vartheta)y), x, y),$$

vemos que $d\psi_{1,n}(\vartheta, 0, 0) \cdot \partial_x = a_n(\vartheta)\partial_\vartheta + \partial_x$ e $d\psi_{1,n}(\vartheta, 0, 0) \cdot \partial_y = b_n(\vartheta)\partial_\vartheta + \partial_y$ e, portanto, a forma de contato $\bar{\mu}_n := \psi_{1,n}^*\mu_n$ satisfaz $\ker \bar{\mu}_n|_P = \text{span}\{\partial_x, \partial_y\}$. Note que $\psi_{1,n} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{U}}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $\bar{\mu}_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda, a aplicação $\psi_{1,n}$ fixa a órbita periódica P . Por simplicidade, denotaremos $\bar{\mu}_n$ novamente por μ_n .

Vamos realizar mais uma modificação em μ_n . Desta vez queremos que μ_n , além de satisfazer (3.83), seja tal que

$$\mu_n(\vartheta, 0, 0) \cdot \partial_\vartheta = c_n \lambda_E(\vartheta, 0, 0) \cdot \partial_\vartheta, \quad \forall \vartheta \in S^1, \quad (3.84)$$

para alguma constante c_n que converge à 1 quando $n \rightarrow \infty$. Tendo em vista que $\ker \mu_n|_P = \ker \lambda_E|_P$, podemos definir uma função $h_n : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$\mu_n(\vartheta, 0, 0) = h_n(\vartheta) \lambda_E(\vartheta, 0, 0). \quad (3.85)$$

Para cada n , considere a solução $T_n(\vartheta)$ da equação diferencial ordinária separável

$$\frac{d}{d\vartheta} T_n(\vartheta) = \frac{c_n}{h_n(T_n(\vartheta))}, \quad (3.86)$$

satisfazendo a condição inicial $T_n(0) = 0$, onde $c_n := \int_0^1 h_n(\tau) d\tau$. Ou seja, a função $T_n(\vartheta)$ é determinada por

$$\int_0^{T_n(\vartheta)} h_n(\tau) d\tau = c_n \vartheta.$$

Observe, em (3.85), que $h_n \rightarrow 1$ em C^∞ uniformemente em ϑ quando $n \rightarrow \infty$, pois $\mu_n \rightarrow \lambda_E$. Disto segue que $c_n \rightarrow 1$ e, conseqüentemente, $T_n \rightarrow \text{Id}$ em C^∞ uniformemente em ϑ quando $n \rightarrow \infty$. Considerando novamente a função de corte $f : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ construída acima, definimos um novo difeomorfismo $\psi_{2,n} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ por

$$\psi_{2,n}(\vartheta, x, y) = (\vartheta + f(\vartheta, x, y)(T_n(\vartheta) - \vartheta), x, y).$$

Neste caso, a forma de contato $\bar{\mu}_n := \psi_{2,n}^*\mu_n$ satisfaz $\ker \bar{\mu}_n|_P = \ker \lambda_E|_P = \text{span}\{\partial_x, \partial_y\}$ e, mais ainda, usando a equação (3.86) vemos que $\bar{\mu}_n(\vartheta, 0, 0) \cdot \partial_\vartheta = c_n \lambda_E(\vartheta, 0, 0) \cdot \partial_\vartheta$. Além disso, $\psi_{2,n} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{U}}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $\bar{\mu}_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Note também que a aplicação $\psi_{2,n}$ fixa a órbita periódica P . Mais uma vez, vamos denotar $\bar{\mu}_n$ simplesmente por μ_n .

Concluimos de (3.83) e (3.84) que, após as modificações realizadas, a forma de contato μ_n é tal que $\mu_n(\vartheta, 0, 0) = c_n \lambda_E(\vartheta, 0, 0)$ para todo $\vartheta \in S^1$. Portanto, podemos substituir a

sequência inicial de formas de contato λ_n por uma nova sequência μ_n que, além de satisfazer

$$\mu_n|_P = c_n \lambda_E|_P, \text{ com } c_n \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

é tal que os campos de Reeb X_{μ_n} admitem P como imagem geométrica de uma órbita periódica, para todo n . Uma vez que os difeomorfismos $\psi_{i,n}$, $i = 0, 1, 2$, são suportados em uma pequena vizinhança de P , a troca de λ_n por μ_n pode ser realizada simultaneamente para as órbitas periódicas $P_{3,E}, P'_{3,E}$ e $P_{2,E}$, obtendo assim constantes $c_{3,n}, c'_{3,n}$ e $c_{2,n}$ que convergem para 1 quando $n \rightarrow \infty$.

Para finalizar, vamos utilizar o conhecido truque de Moser para efetuar uma última modificação na sequência μ_n com a finalidade de garantir que

$$\ker \mu_n = \ker \lambda_E, \forall n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a família de 1-formas $\mu_t^n := t\mu_n + (1-t)\lambda_E$, com $t \in [0, 1]$, que satisfaz $\mu_0^n = \lambda_E$ e $\mu_1^n = \mu_n$. Como $\mu_n \rightarrow \lambda_E$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que μ_t^n é uma forma de contato para todo $t \in [0, 1]$, se n for suficientemente grande. Fixado um tal n grande, vamos omitir a dependência das funções em n daqui em diante para simplificar a notação. Nosso objetivo é construir uma isotopia $\rho_t : W_E \rightarrow W_E$, com $t \in [0, 1]$, tal que

$$\rho_t^* \mu_t = g_t \lambda_E, \tag{3.87}$$

onde $g_t : W_E \rightarrow (0, \infty)$ é uma família de funções suaves, com $t \in [0, 1]$, satisfazendo $g_0 \equiv 1$. Para isso, vamos buscar um campo de vetores X_t em W_E , dependente do tempo, que gere a isotopia ρ_t procurada, no seguinte sentido

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho_t &= X_t \circ \rho_t \\ \rho_0 &= \text{Id}_{W_E} \end{cases}$$

Visto que $d\mu_t|_{\ker \mu_t}$ é não-degenerada, podemos escolher um campo de vetores $X_t \subset \ker \mu_t$ unicamente determinado pela equação

$$i_{X_t} d\mu_t|_{\ker \mu_t} = (\lambda_E - \mu_n)|_{\ker \mu_t}. \tag{3.88}$$

Desta forma, como $\mu_t = \lambda_E + t(\mu_n - \lambda_E)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_t^* \mu_t &= \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \mu_t + \frac{d}{dt} \mu_t \right) \\ &= \rho_t^* (i_{X_t} d\mu_t + di_{X_t} \mu_t + \mu_n - \lambda_E) \\ &= \rho_t^* (a_t \mu_t) \\ &= (a_t \circ \rho_t) \rho_t^* \mu_t, \end{aligned} \tag{3.89}$$

para alguma função suave $a_t : W_E \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A penúltima igualdade se deve à $X_t \subset \ker \mu_t$

e ao fato de que ambas as 1-formas $i_{X_t}d\mu_t + \mu_n - \lambda_E$ e μ_t definem a estrutura de contato $\ker \mu_t$, por (3.88). De (3.89), concluímos que

$$\rho_t^* \mu_t = e^{\int_0^t (a_s \circ \rho_s) ds} \rho_0^* \mu_0 = e^{\int_0^t (a_s \circ \rho_s) ds} \lambda_E.$$

Sendo assim, para cada $t \in [0, 1]$, basta considerar a função $g_t : W_E \rightarrow (0, \infty)$ dada por $g_t = e^{\int_0^t (a_s \circ \rho_s) ds}$ para obter (3.87) e $g_0 \equiv 1$.

Para cada n grande, definimos o difeomorfismo $\psi_{3,n} : W_E \rightarrow W_E$ por $\psi_{3,n} = \rho_1$ e a função suave $\bar{f}_n : W_E \rightarrow (0, \infty)$ por $\bar{f}_n = g_1$. Lembramos que, assim como a família de 1-formas μ_t , a isotopia ρ_t e a família de funções g_t dependem de n . Observe que, pela equação (3.88), o campo vetorial X_t converge para o campo nulo em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, pois $\mu_n \rightarrow \lambda_E$, e então $\psi_{3,n} \rightarrow \text{Id}_{W_E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, a forma de contato $\bar{\lambda}_n := \psi_{3,n}^* \mu_n$ satisfaz $\bar{\lambda}_n \rightarrow \lambda_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e, além disso, por (3.87), temos que $\bar{\lambda}_n = \bar{f}_n \lambda_E$, donde segue $\ker \bar{\lambda}_n = \ker \lambda_E$. Uma vez que $\ker \mu_t|_P = \ker \mu_n|_P = \ker \lambda_E|_P = \text{span}\{\partial_x, \partial_y\}$, onde P pode ser qualquer uma das órbitas periódicas $P_{3,E}, P'_{3,E}$ ou $P_{2,E}$, a equação (3.88) nos diz que $X_t|_P \equiv 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Por esta razão, P continua sendo a imagem geométrica de uma órbita periódica de $\bar{\lambda}_n$, para todo n , e ainda temos que $\bar{\lambda}_n|_P = c_n \lambda_E|_P$, com $c_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Note que, assim como a sequência inicial de formas de contato λ_n , a sequência $\bar{\lambda}_n = (\psi_{0,n} \circ \psi_{1,n} \circ \psi_{2,n} \circ \psi_{3,n})^* \lambda_n$ que acabamos de construir também é constituída por formas de contato fracamente convexas e não-degeneradas. Mais ainda, os períodos das órbitas periódicas de $\bar{\lambda}_n$, cujas imagens coincidem respectivamente com $P_{3,E}, P'_{3,E}$ e $P_{2,E}$, são dados por $c_{3,n}T_{3,E}, c'_{3,n}T'_{3,E}$ e $c_{2,n}T_{2,E}$. Isto se deve ao fato de que $\bar{\lambda}_n|_P = c_n \lambda_E|_P$, para cada $P = P_{3,E}, P'_{3,E}, P_{2,E}$ e cada $c_n = c_{3,n}, c'_{3,n}, c_{2,n}$ correspondente, e os períodos das órbitas periódicas $P_{3,E}, P'_{3,E}$ e $P_{2,E}$ com respeito ao fluxo de Reeb de λ_E em W_E são $T_{3,E}, T'_{3,E}$ e $T_{2,E}$ respectivamente.

Para finalizar, seja $\psi_n : W_E \rightarrow W_E$ o difeomorfismo $\psi_n := \psi_{0,n} \circ \psi_{1,n} \circ \psi_{2,n} \circ \psi_{3,n}$ suportado próximo à $P_{3,E} \cup P'_{3,E} \cup P_{2,E}$ e considere a aplicação $\bar{\psi}_n : \mathbb{R} \times W_E \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ definida por $\bar{\psi}_n(a, u) = (a, \psi_n(u))$. Podemos verificar que se $\tilde{u} = (a, u)$ é uma curva $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$ -holomorfa de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, onde a forma de contato λ_n e a estrutura complexa J_n são como no item *i*) desta proposição, então $\bar{\tilde{u}} = (\bar{a}, \bar{u}) := (\bar{\psi}_n)^{-1} \circ \tilde{u} = (a, \psi_n^{-1} \circ u)$ é uma curva $\tilde{\bar{J}}_n = (\bar{\lambda}_n, \bar{J}_n)$ -holomorfa de energia finita, onde $\bar{\lambda}_n = (\bar{\psi}_n)^* \lambda_n$ e $\bar{J}_n := (\bar{\psi}_n)^* J_n$. Portanto, $\tilde{\bar{\mathcal{F}}}_n := (\bar{\psi}_n)^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}_n)$ é uma folheação estável de energia finita para $\tilde{\bar{J}}_n$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ que possui as mesmas propriedades da folheação $\tilde{\mathcal{F}}_n$ obtida no item *i*) para a estrutura quase-complexa \tilde{J}_n . Ao invés de utilizar $\bar{\lambda}_n, \bar{J}_n, \tilde{\bar{J}}_n$ e $\tilde{\bar{\mathcal{F}}}_n$, vamos manter as notações $\lambda_n, J_n, \tilde{J}_n$ e $\tilde{\mathcal{F}}_n$. \square

3.5 Demonstração da Proposição 2.3.10

Antes de relembrar o enunciado da Proposição 2.3.10, apresentamos uma breve relação dos objetos construídos até o momento. Para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, temos:

- uma forma de contato λ_E em $W_E = S_E \cup S'_E$ que admite órbitas periódicas não-nós

$$\begin{aligned} P_{3,E} &= (x_{3,E}, T_{3,E}), \text{ com } x_{3,E}(\mathbb{R}) \subset \dot{S}_E, \\ P'_{3,E} &= (x'_{3,E}, T'_{3,E}), \text{ com } x'_{3,E}(\mathbb{R}) \subset \dot{S}'_E, \\ P_{2,E} &= (x_{2,E}, T_{2,E}), \text{ com } x_{2,E}(\mathbb{R}) \subset \partial S_E = \partial S'_E, \end{aligned}$$

com índices de Conley-Zehnder $CZ(P_{3,E}) = CZ(P'_{3,E}) = 3$ e $CZ(P_{2,E}) = 2$;

- uma estrutura complexa $J_E \in \mathcal{J}(\lambda_E)$ tal que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ admite um par de planos rígidos

$$\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E}), \tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E,$$

ambos assintóticos à $P_{2,E}$, de modo que $u_{1,E}(\mathbb{C}) = U_{1,E}$ e $u_{2,E}(\mathbb{C}) = U_{2,E}$, onde $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ são os hemisférios da 2-esfera ∂S_E ;

- uma sequência de formas de contato não-degeneradas $\lambda_n = f_n \lambda_E$ em W_E , com $f_n \in C^\infty(W_E, (0, \infty))$ satisfazendo $f_n \rightarrow 1$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, cujo fluxo de Reeb possui órbitas periódicas não-nós

$$P_{3,n} = (x_{3,n}, T_{3,n}), P'_{3,n} = (x'_{3,n}, T'_{3,n}) \text{ e } P_{2,n} = (x_{2,n}, T_{2,n})$$

com índices de Conley-Zehnder $CZ(P_{3,n}) = CZ(P'_{3,n}) = 3$ e $CZ(P_{2,n}) = 2$. Mais ainda, $P_{3,n} = P_{3,E}$, $P'_{3,n} = P'_{3,E}$ e $P_{2,n} = P_{2,E}$ como conjuntos de pontos em W_E e

$$\begin{aligned} f_n|_{P_{3,E}} &= c_{3,n}, f_n|_{P'_{3,E}} = c'_{3,n}, f_n|_{P_{2,E}} = c_{2,n} \\ df_n|_{P_{3,E}} &= df_n|_{P'_{3,E}} = df_n|_{P_{2,E}} = 0 \end{aligned}$$

para todo n , onde as constantes $c_{3,n}, c'_{3,n}, c_{2,n} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} T_{3,n} &= c_{3,n} T_{3,E} \rightarrow T_{3,E}, \\ T'_{3,n} &= c'_{3,n} T'_{3,E} \rightarrow T'_{3,E}, \\ T_{2,n} &= c_{2,n} T_{2,E} \rightarrow T_{2,E}, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$;

- uma sequência de estruturas complexas $J_n \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda_n) \subset \mathcal{J}(\lambda_E)$, satisfazendo $J_n \rightarrow J_E$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, de maneira que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ que se projeta sobre uma folheação $3 - 2 - 3$ \mathcal{F}_n para o fluxo de λ_n em W_E , cujos *bindings* são dados por $P_{3,n}$, $P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$. A folheação $\tilde{\mathcal{F}}_n$ em $\mathbb{R} \times W_E$ contém:

* um par de planos rígidos

$$\tilde{u}_{1,n} = (a_{1,n}, u_{1,n}), \tilde{u}_{2,n} = (a_{2,n}, u_{2,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E, \quad (3.90)$$

ambos assintóticos à $P_{2,n}$, tais que $U_n := u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C})$ é uma 2-esfera topológica mergulhada que separa W_E em duas componentes \dot{S}_n e \dot{S}'_n , contendo os *bindings* $P_{3,n}$ e $P'_{3,n}$ respectivamente, cujos fechos S_n e S'_n são 3-bolas topológicas fechadas satisfazendo $\partial S_n = \partial S'_n = U_n$. O campo de Reeb X_{λ_n} é transversal aos planos $u_{1,n}(\mathbb{C})$ e $u_{2,n}(\mathbb{C})$, apontando para dentro de \dot{S}_n em $u_{1,n}(\mathbb{C})$ e para dentro de \dot{S}'_n em $u_{2,n}(\mathbb{C})$.

* um par de cilindros rígidos

$$\tilde{v}_n = (b_n, v_n), \tilde{v}'_n = (b'_n, v'_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E \quad (3.91)$$

tais que $v_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}_n$ e \tilde{v}_n é assintótico à $P_{3,n}$ e à $P_{2,n}$, enquanto $v'_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}'_n$ e \tilde{v}'_n é assintótico à $P'_{3,n}$ e à $P_{2,n}$.

* um par de famílias a um parâmetro de planos

$$\tilde{w}_{\tau,n} = (d_{\tau,n}, w_{\tau,n}), \tilde{w}'_{\tau,n} = (d'_{\tau,n}, w'_{\tau,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E, \tau \in (0, 1), \quad (3.92)$$

tais que $\tilde{w}_{\tau,n}$ é assintótico à $P_{3,n}$ para todo $\tau \in (0, 1)$ e a família de planos $D_{\tau,n} := w_{\tau,n}(\mathbb{C}), \tau \in (0, 1)$, folheia $\mathcal{V}_n := \dot{S}_n \setminus (v_n(\mathbb{R} \times S^1) \cup P_{3,n})$, enquanto $\tilde{w}'_{\tau,n}$ é assintótico à $P'_{3,n}$ para todo $\tau \in (0, 1)$ e a família de planos $D'_{\tau,n} := w'_{\tau,n}(\mathbb{C}), \tau \in (0, 1)$, folheia $\mathcal{V}'_n := \dot{S}'_n \setminus (v'_n(\mathbb{R} \times S^1) \cup P'_{3,n})$.

Agora, vamos analisar a convergência das folhas (3.90), (3.91) e (3.92) de $\tilde{\mathcal{F}}_n$ quando $n \rightarrow \infty$ para, enfim, obter uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_E$ associada à $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ em $\mathbb{R} \times W_E$ que se projeta sobre uma folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_E para o fluxo de λ_E em W_E contendo os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ como folhas regulares e as órbitas periódicas $P_{3,E}, P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$ como *bindings*. Com este intuito, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 2.3.10. *Se $E > 0$ é suficientemente pequeno, então ocorre o seguinte. Seja $\tilde{\mathcal{F}}_n$ a folheação estável de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ associada a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$, como na Proposição 2.3.9, que contém as superfícies de energia finita $\tilde{u}_{1,n}, \tilde{u}_{2,n}, \tilde{v}_n, \tilde{v}'_n, \tilde{w}_{\tau,n}, \tilde{w}'_{\tau,n}, \tau \in (0, 1)$, definidas em (3.90), (3.91) e (3.92), e que se projeta sobre uma folheação 3 – 2 – 3 \mathcal{F}_n para o fluxo de λ_n em W_E com *bindings* $P_{3,n}, P_{2,n}$ e $P'_{3,n}$. Então, a menos de reparametrizações e \mathbb{R} -translações de tais curvas \tilde{J}_n -holomorfas, temos que:*

i) Para cada $i \in \{1, 2\}$, $\tilde{u}_{i,n} \rightarrow \tilde{u}_{i,E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{u}_{i,E} = (a_{i,E}, u_{i,E})$ é o plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita, obtido na Proposição 2.3.8, tal que $u_{i,E}(\mathbb{C})$ coincide com o hemisfério $U_{i,E}$ de ∂S_E . Dada uma pequena vizinhança $\mathcal{U} \subset W_E$ da 2-esfera $\partial S_E = u_{1,E}(\mathbb{C}) \cup P_{2,E} \cup u_{2,E}(\mathbb{C})$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{U}$ se $n \geq n_0$. Veja Figura 2.25.

ii) Existem cilindros mergulhados \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita

$$\tilde{v}_E = (b_E, v_E), \tilde{v}'_E = (b'_E, v'_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$$

tais que v_E e v'_E são mergulhos, \tilde{v}_E é assintótico à $P_{3,E}$ em $s = +\infty$ e à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$, \tilde{v}'_E é assintótico à $P'_{3,E}$ em $s = +\infty$ e à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$, $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$ e $\tilde{v}'_n \rightarrow \tilde{v}'_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Denotando $V_E := v_E(\mathbb{R} \times S^1)$ e $V'_E := v'_E(\mathbb{R} \times S^1)$, temos que $V_E \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$ e $V'_E \subset \dot{S}'_E \setminus P'_{3,E}$. Além disso, dadas pequenas vizinhanças $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subset W_E$ de $P_{3,E} \cup V_E \cup P_{2,E}$ e de $P'_{3,E} \cup V'_E \cup P_{2,E}$, respectivamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $v_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \mathcal{U}$ e $v'_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \mathcal{U}'$ se $n \geq n_0$. Veja Figura 2.26.

iii) Existem famílias suaves a um parâmetro de planos mergulhados \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita

$$\tilde{w}_{\tau,E} = (d_{\tau,E}, w_{\tau,E}), \tilde{w}'_{\tau,E} = (d'_{\tau,E}, w'_{\tau,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E, \tau \in (0, 1),$$

tais que $w_{\tau,E}$ e $w'_{\tau,E}$ são mergulhos, $\tilde{w}_{\tau,E}$ é assintótico à $P_{3,E}$ e $\tilde{w}'_{\tau,E}$ é assintótico à $P'_{3,E}$. A família de planos $D_{\tau,E} := w_{\tau,E}(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$, folheia $\dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$, enquanto a família de planos $D'_{\tau,E} = w'_{\tau,E}(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$, folheia $\dot{S}'_E \setminus (V'_E \cup P'_{3,E})$. Dadas pequenas vizinhanças $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset W_E$ de $P_{3,E} \cup V_E \cup P_{2,E} \cup U_{1,E}$ e de $P_{3,E} \cup V_E \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$, respectivamente, existem $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ tais que $D_{\tau,E} \subset \mathcal{U}_1$ se $\tau \in (0, \tau_1)$ e $D_{\tau,E} \subset \mathcal{U}_2$ se $\tau \in (\tau_2, 1)$. Uma afirmação análoga vale para a família de planos $D'_{\tau,E}$, $\tau \in (0, 1)$. Mais ainda, dado $p_0 \in \dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$, encontramos uma sequência $\tau_n \in (0, 1)$ e um $\bar{\tau} \in (0, 1)$ tais que $p_0 \in w_{\tau_n,n}(\mathbb{C})$ para todo n grande, $p_0 \in w_{\bar{\tau},E}(\mathbb{C})$ e $\tilde{w}_{\tau_n,n} \rightarrow \tilde{w}_{\bar{\tau},E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Uma afirmação análoga ocorre se $p_0 \in \dot{S}'_E \setminus (V'_E \cup P'_{3,E})$. Veja Figura 2.27.

As curvas \tilde{J}_E -holomorfas $\tilde{u}_{1,E}, \tilde{u}_{2,E}, \tilde{v}_E, \tilde{v}'_E, \tilde{w}_{\tau,E}, \tilde{w}'_{\tau,E}$, $\tau \in (0, 1)$, e os cilindros triviais sobre $P_{3,E}$, $P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$ determinam uma folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_E$ para $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$. A projeção de $\tilde{\mathcal{F}}_E$ sobre W_E , via a projeção $p : \mathbb{R} \times W_E \rightarrow W_E$ no segundo fator, é uma folheação 3–2–3 \mathcal{F}_E para o fluxo de λ_E em W_E , cujos bindings, com índices de Conley-Zehnder 3, 2 e 3, são dados respectivamente por $P_{3,E}, P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$. Em particular, a folheação 3–2–3 \mathcal{F}_E em W_E se restringe a uma folheação 2–3 em S_E , cujos bindings, com índices de Conley-Zehnder 3 e 2, são dados respectivamente por $P_{3,E}$ e $P_{2,E}$.

Apresentamos a demonstração de cada um dos itens da Proposição 2.3.10 nas Subseções 3.5.1, 3.5.2 e 3.5.3 abaixo, cada uma delas correspondendo aos itens *i*), *ii*) e *iii*) respectivamente. Nestas demonstrações, utilizaremos algumas propriedades de regularidade e compacidade de curvas pseudo-holomorfas que podem ser encontradas com detalhes nas referências [1, 7, 41, 45, 46].

3.5.1 Demonstração da Proposição 2.3.10-i)

Nesta subseção, vamos lidar com a convergência dos planos rígidos $\tilde{u}_{1,n} = (a_{1,n}, u_{1,n})$, $\tilde{u}_{2,n} = (a_{2,n}, u_{2,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ de $\tilde{\mathcal{F}}_n$. O objetivo é mostrar que, após reparametrização e translação na direção real, $\tilde{u}_{1,n} \rightarrow \tilde{u}_{1,E}$ e $\tilde{u}_{2,n} \rightarrow \tilde{u}_{2,E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Por simplicidade, denotaremos $\tilde{u}_{i,n} = (a_{i,n}, u_{i,n})$, $i = 1, 2$, por $\tilde{u}_n = (a_n, u_n)$.

Uma vez que \tilde{u}_n é um plano de energia finita assintótico à órbita periódica hiperbólica $P_{2,n}$, cuja ação $T_{2,n} \rightarrow T_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$E(\tilde{u}_n) = \int_{\mathbb{C}} u_n^* d\lambda_n = T_{2,n} \rightarrow T_{2,E} = \frac{2\pi E}{\omega} + \mathcal{O}(E^2) \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.93)$$

Este fato se deve ao Teorema 2.2 de [33], cuja demonstração foi apresentada em [24, 28]. Após uma reparametrização holomorfa do tipo $z \mapsto \beta z$, com $\beta > 0$, seguida de uma \mathbb{R} -translação de \tilde{u}_n , podemos assumir que

$$a_n(0) = 0 = \min_{z \in \mathbb{C}} a_n(z) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{D}} u_n^* d\lambda_n = T_{2,n} - \gamma_0 \quad (3.94)$$

para todo n , onde $0 < \gamma_0 \ll T_{2,E}$ é uma constante fixada e $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ é o disco unitário fechado em \mathbb{C} .

Para cada n , o par (λ_n, J_n) induz uma métrica Riemanniana na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ definida por

$$\langle u, v \rangle_n := da(u)da(v) + \lambda_n(u)\lambda_n(v) + d\lambda_n(u, J_n \cdot v),$$

onde λ_n é vista como uma 1-forma em $\mathbb{R} \times W_E$ considerando o seu pull-back pela projeção no segundo fator $p : \mathbb{R} \times W_E \rightarrow W_E$. A norma associada a esta métrica é dada por $|u|_n = \sqrt{\langle u, u \rangle_n}$. Então, denotamos

$$|\nabla \tilde{u}_n(z)|_n = \max \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{u}_n(z)}{\partial s} \right|_n, \left| \frac{\partial \tilde{u}_n(z)}{\partial t} \right|_n \right\}. \quad (3.95)$$

De modo análogo, o par (λ_E, J_E) também induz uma métrica Riemanniana em $\mathbb{R} \times W_E$, cuja norma associada será denotada por $|\cdot|_E$.

Para demonstrar a Proposição 2.3.10, vamos precisar do seguinte resultado topológico de [24], conhecido como Lema de Hofer.

Lema 3.5.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua. Dados $z \in X$ e $\epsilon > 0$, existem $z' \in X$ e $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ de modo que $d(z, z') \leq 2\epsilon'$, $\epsilon' f(z') \geq \epsilon f(z)$ e $f(y) \leq 2f(z')$ para todo $y \in X$ tal que $d(y, z') \leq \epsilon'$.*

Iniciamos com a convergência dos planos de energia finita \tilde{u}_n .

Proposição 3.5.2. *Para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, temos que $|\nabla \tilde{u}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in \mathbb{C}$ e em $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, existe um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ assintótico à $P_{2,E}$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. A demonstração desta proposição segue as mesmas ideias utilizadas por Hofer, Wysocki e Zehnder em [33, Lema 7.1]. Suponha, por absurdo, que existam uma subsequência de \tilde{u}_n , ainda denotada por \tilde{u}_n , e uma sequência de pontos $z_n \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\nabla \tilde{u}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty$. Seja ϵ_n uma sequência de números positivos tal que $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$ e, além disso,

$$\epsilon_n |\nabla \tilde{u}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty. \quad (3.96)$$

Aplicando o Lema 3.5.1 ao espaço métrico $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\mathbb{C}})$ e à função contínua $|\nabla\tilde{u}_n(\cdot)|_n$, para cada n , podemos assumir que

$$|\nabla\tilde{u}_n(z)|_n \leq 2|\nabla\tilde{u}_n(z_n)|_n \text{ para todo } |z - z_n| \leq \epsilon_n, \quad (3.97)$$

substituindo as sequências z_n e ϵ_n por novas sequências z'_n e ϵ'_n , se necessário.

Definimos então uma nova sequência de curvas \tilde{J}_n -holomorfas $\tilde{w}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ do seguinte modo

$$\tilde{w}_n(z) = (b_n(z), w_n(z)) = \left(a_n \left(z_n + \frac{z}{R_n} \right) - a_n(z_n), u_n \left(z_n + \frac{z}{R_n} \right) \right),$$

onde $R_n := |\nabla\tilde{u}_n(z_n)|_n$. Observe que

$$z \in B_{\epsilon_n R_n}(0) \Leftrightarrow z_n + \frac{z}{R_n} \in B_{\epsilon_n}(z_n) \quad (3.98)$$

para todo n , sendo que $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ e, por (3.96), $\epsilon_n R_n \rightarrow \infty$. Mais ainda,

$$\tilde{w}_n(0) \in \{0\} \times W_E \quad (3.99)$$

e, devido a (3.97) e (3.98),

$$|\nabla\tilde{w}_n(z)|_n = \frac{1}{R_n} \left| \nabla\tilde{u}_n \left(z_n + \frac{z}{R_n} \right) \right|_n \leq 2 \text{ para todo } |z| \leq \epsilon_n R_n. \quad (3.100)$$

Tendo em vista que cada \tilde{w}_n é uma curva pseudo-holomorfa e, portanto, satisfaz as equações (não-lineares) de Cauchy-Riemann, veja (1.46), as condições (3.99) e (3.100) são suficientes para garantir uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência \tilde{w}_n . Neste caso, já que $\mathbb{C} = \bigcup_n B_{\epsilon_n R_n}(0)$, encontramos um plano \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{w} = (b, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Note que, pelas propriedades de \tilde{w}_n , o plano \tilde{w} deve satisfazer $\tilde{w}(0) \in \{0\} \times W_E$ e $|\nabla\tilde{w}(0)|_E = 1$, donde segue que \tilde{w} é não-constante. Vale ressaltar que este procedimento que acabamos de realizar é padrão e ainda será utilizado várias vezes no restante deste trabalho.

Pelo Lema de Fatou e por (3.93), obtemos que

$$\int_{\mathbb{C}} w^* d\lambda_E \leq E(\tilde{w}) \leq T_{2,E}. \quad (3.101)$$

Como $P_{2,E} = (x_{2,E}, T_{2,E})$ é uma órbita hiperbólica e, além disso, para $E > 0$ pequeno, $P_{2,E}$ é a única órbita periódica do fluxo de λ_E com ação menor ou igual a $T_{2,E}$, segundo a Proposição A.0.1, podemos aplicar os Teoremas 1.4.9 e 1.4.10 para concluir de (3.101) que \tilde{w} é assintótico à $P_{2,E}$ em ∞ . Sendo assim,

$$E(\tilde{w}) = \int_{\mathbb{C}} w^* d\lambda_E = T_{2,E}. \quad (3.102)$$

Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$. De fato, caso contrário, para qualquer $\epsilon > 0$ existiria uma subsequência de z_n , ainda denotada por z_n , satisfazendo $|z_n| \geq 1 + \epsilon$ ou $|z_n| \leq 1 - \epsilon$ para todo n . Então, por (3.94), teríamos que, para qualquer $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} w^* d\lambda_E &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} w_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\epsilon_n R_n}(0)} w_n^* d\lambda_n \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\epsilon_n}(z_n)} u_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{\gamma_0, T_{2,n} - \gamma_0\} = \max\{\gamma_0, T_{2,E} - \gamma_0\} < T_{2,E}. \end{aligned}$$

Disto segue, pela arbitrariedade do raio $R > 0$, que $\int_{\mathbb{C}} w^* d\lambda_E < T_{2,E}$, contradizendo (3.102). Portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $z_n \rightarrow z_* \in \partial\mathbb{D}$. O ponto z_* é chamado de *ponto de bubbling-off* da sequência \tilde{u}_n . Devido a equação (3.102), dizemos que o ponto de *bubbling-off* z_* “rouba” $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$, no seguinte sentido: para qualquer $\epsilon > 0$ fixado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então

$$\int_{B_\epsilon(z_*)} u_n^* d\lambda_n \geq \int_{B_{\epsilon_n}(z_n)} u_n^* d\lambda_n = \int_{B_{\epsilon_n R_n}(0)} w_n^* d\lambda_n > T_{2,E} - \epsilon, \quad (3.103)$$

pois $z_n \rightarrow z_*$, $\epsilon_n \rightarrow 0$ e $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Aqui $B_\epsilon(z_*)$ está orientada no sentido anti-horário.

Uma vez que z_* já “rouba” $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$, não podem existir outros pontos de *bubbling-off* para a sequência \tilde{u}_n . Com efeito, para cada ponto de *bubbling-off* de \tilde{u}_n , podemos repetir o procedimento realizado acima e produzir um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita assintótico à $P_{2,E}$. Deste modo, vemos que cada ponto de *bubbling-off* deve acumular uma energia $d\lambda_E$ igual a $T_{2,E}$, no sentido de (3.103), e, portanto, a existência de mais de um ponto como este contradiria (3.93). Sendo assim, concluímos com (3.94) que a sequência \tilde{u}_n admite uma limitação C_{loc}^∞ em $\mathbb{C} \setminus \{z_*\}$ e, conseqüentemente, passando a uma subsequência de \tilde{u}_n , se necessário, obtemos que $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{v}$ em $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \{z_*\})$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{v} = (d, v) : \mathbb{C} \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo. Observe que, por (3.94), \tilde{v} é não-constante, pois

$$\int_{\{|z|=2\}} v^* \lambda_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|z|=2\}} u_n^* \lambda_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{D}} u_n^* \lambda_n = T_{2,E} - \gamma_0 > 0. \quad (3.104)$$

Além disso, pelo Lema de Fatou e por (3.93), temos que

$$E(\tilde{v}) \leq \limsup_n T_{2,n} = T_{2,E} \quad (3.105)$$

e, mais ainda, como z_* “rouba” $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \{z_*\}} v^* d\lambda_E = 0. \quad (3.106)$$

Usando (3.104) e (3.106), vemos que z_* é um furo negativo e, portanto, não-removível de \tilde{v} .

Em [29, Teorema 6.11], Hofer, Wysocki e Zehnder fornecem uma caracterização para superfícies de energia finita com energia $d\lambda_E$ igual a zero. Aplicando esta caracterização ao cilindro de energia finita \tilde{v} , encontramos uma órbita periódica $P \subset W_E$ de λ_E de modo que a imagem de \tilde{v} é dada por $\mathbb{R} \times P$. Em particular, devido a (3.105) e a Proposição A.0.1, temos que $P = P_{2,E}$. Entretanto, por (3.94), a coordenada real de \tilde{v} deveria ser limitada inferiormente por 0, já que $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{v}$ em $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \{z_*\})$ quando $n \rightarrow \infty$. Com esta contradição, concluímos que $|\nabla \tilde{u}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in \mathbb{C}$ e em $n \in \mathbb{N}$, como gostaríamos. Neste caso, com (3.94), obtemos que a sequência \tilde{u}_n possui uma limitação C_{loc}^∞ e, portanto, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um plano \tilde{J}_E -holomorfo. Por (3.93) e (3.94), temos que $0 < E(\tilde{u}) \leq T_{2,E}$ e então, pelos Teoremas 1.4.9 e 1.4.10 e pela Proposição A.0.1, \tilde{u} deve ser assintótico à órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$. Sendo assim,

$$E(\tilde{u}) = \int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda_E = T_{2,E}. \quad (3.107)$$

□

No próximo resultado, abordamos a segunda afirmação da Proposição 2.3.10-i), que diz respeito ao comportamento uniforme da sequência \tilde{u}_n próximo à órbita periódica $P_{2,E}$.

Lema 3.5.3. *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, como na Proposição 3.5.2, tal que $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Dada uma vizinhança S^1 -invariante \mathcal{W} da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{2,E}(T_{2,E}t)$ em $C^\infty(S^1, W_E)$, existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0$ e todo n grande, a curva fechada $t \mapsto u_n(Re^{2\pi it})$ está contida em \mathcal{W} . Consequentemente, dada qualquer vizinhança pequena \mathcal{U} de $u(\mathbb{C}) \cup P_{2,E}$ em W_E , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $u_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{U}$ se $n \geq n_0$.*

Demonstração. Esta demonstração segue os mesmos passos do [33, Lema 8.1]. Iniciamos provando a seguinte afirmação.

Afirmção I: *Para todo $\epsilon > 0$ e para qualquer sequência $R_n \rightarrow +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então*

$$\int_{\mathbb{C} \setminus B_{R_n}(0)} u_n^* d\lambda_n \leq \epsilon.$$

Suponha, por absurdo, que existam $\epsilon > 0$ e uma sequência $R_n \rightarrow +\infty$ que admite uma subsequência, ainda denotada por R_n , satisfazendo

$$\int_{\mathbb{C} \setminus B_{R_n}(0)} u_n^* d\lambda_n > \epsilon, \forall n.$$

Neste caso, como a energia $d\lambda_n$ de \tilde{u}_n é igual a $T_{2,n}$, por (3.93), concluímos que, para todo $R > 0$ e todo n grande,

$$\int_{B_R(0)} u_n^* d\lambda_n \leq T_{2,n} - \epsilon.$$

E, uma vez que $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, esta última desigualdade nos leva à seguinte

$$\int_{B_R(0)} u^* d\lambda_E \leq T_{2,E} - \epsilon.$$

Disto segue, devido a arbitrariedade de $R > 0$, que $\int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda_E \leq T_{2,E} - \epsilon$, contradizendo o fato de que a energia $d\lambda_E$ de \tilde{u} é igual a $T_{2,E}$, como vimos em (3.107). Com isso, a Afirmação I está demonstrada.

Agora, para provar o lema, assumamos por absurdo que existam uma sequência $R_j \rightarrow +\infty$ e uma subsequência \tilde{u}_{n_j} de \tilde{u}_n tais que as curvas fechadas $t \mapsto u_{n_j}(R_j e^{2\pi i t})$ não estão contidas na vizinhança \mathcal{W} . Vamos denotar as sequências R_j e \tilde{u}_{n_j} , com $j \in \mathbb{N}$, respectivamente por R_n e \tilde{u}_n , com $n \in \mathbb{N}$. Definimos então uma nova sequência de curvas \tilde{J}_n -holomorfas $\tilde{v}_n : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ do seguinte modo

$$\tilde{v}_n(s, t) = (b_n(s, t), v_n(s, t)) = (a_n(R_n e^{2\pi(s+it)}) - a_n(R_n), u_n(R_n e^{2\pi(s+it)})).$$

Observe que $b_n(0, 0) = 0$ e, para todo $t \in S^1$, $v_n(0, t) = u_n(R_n e^{2\pi i t}) \notin \mathcal{W}$. Além disso, para qualquer $R > 0$ temos que

$$(s, t) \in [-R, R] \times S^1 \Leftrightarrow R_n e^{2\pi(s+it)} \in B_{R_n e^{2\pi R}}(0) \setminus B_{R_n e^{-2\pi R}}(0). \quad (3.108)$$

Usando a afirmação provada no início desta demonstração, podemos garantir que a sequência \tilde{v}_n possui uma limitação C_{loc}^∞ . De fato, suponhamos que exista uma sequência limitada de pontos $(s_n, t_n) \in \mathbb{R} \times S^1$ satisfazendo $|\nabla \tilde{v}_n(s_n, t_n)|_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Aplicando o mesmo procedimento realizado na demonstração da Proposição 3.5.2, vemos que a sequência de pontos (s_n, t_n) “rouba” $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$. Mas isto contradiz a Afirmação I, pois a sequência limitada $(s_n, t_n) \in \mathbb{R} \times S^1$ corresponde, por (3.108), a uma sequência de pontos $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$. Sendo assim, a menos da extração de uma subsequência, temos que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{v} = (a, v) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo.

A Afirmação I e a equivalência (3.108) nos permitem concluir também que, para qualquer $R > 0$ fixado e todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{[-R, R] \times S^1} v^* d\lambda_E &\leq \limsup_n \int_{[-R, R] \times S^1} v_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_n \int_{B_{R_n e^{2\pi R}}(0) \setminus B_{R_n e^{-2\pi R}}(0)} u_n^* d\lambda_n \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Distos segue que $\int_{\mathbb{R} \times S^1} v^* d\lambda_E = 0$. Além disso, pelo Lema de Fatou e por (3.93), temos que $E(\tilde{v}) \leq \limsup_n T_{2,n} = T_{2,E}$ e, mais ainda, de (3.94), obtemos

que \tilde{v} é não-constante, pois

$$T_{2,E} \geq \int_{\{0\} \times S^1} v^* \lambda_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times S^1} v_n^* \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial B_{R_n}(0)} u_n^* \lambda_n \geq T_{2,E} - \gamma_0 > 0.$$

Nestas condições, podemos usar novamente a caracterização das superfícies de energia finita com energia $d\lambda_E$ igual a zero (Teorema 6.11 de [29]) e a Proposição A.0.1 para concluir que a imagem de \tilde{v} é dada por $\mathbb{R} \times P_{2,E}$. Entretanto, isto contradiz a suposição de que as curvas fechadas $t \mapsto v_n(0, t) = u_n(R_n e^{2\pi i t})$ não estão contidas na vizinhança \mathcal{W} para todo n . Com esta contradição, provamos a primeira afirmação do enunciado desta proposição.

Note que a segunda afirmação da proposição segue diretamente da primeira, visto que $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. \square

De acordo com a Proposição 3.5.2, a sequência de planos rígidos $\tilde{u}_{1,n} = (a_{1,n}, u_{1,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ converge, a menos da extração de uma subsequência, para um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ assintótico à $P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$. Pela unicidade de tais planos \tilde{J}_E -holomorfos, provada na Proposição B.0.2, podemos afirmar que \tilde{u} coincide com $\tilde{u}_{1,E}$ ou com $\tilde{u}_{2,E}$, possivelmente após reparametrização e translação na direção real, isto é, existe $j_1 \in \{1, 2\}$ tal que $\tilde{u} = \tilde{u}_{j_1,E}$. Pela mesma razão, encontramos $j_2 \in \{1, 2\}$ de modo que a sequência de planos rígidos $\tilde{u}_{2,n} = (a_{2,n}, u_{2,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ converge, a menos da extração de uma subsequência, para $\tilde{u}_{j_2,E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, possivelmente após reparametrização e translação na direção real. Queremos mostrar que $j_1 = 1$ e $j_2 = 2$.

Seja $\mathcal{U} \subset W_E$ uma pequena vizinhança da 2-esfera $\partial S_E = u_{1,E}(\mathbb{C}) \cup P_{2,E} \cup u_{2,E}(\mathbb{C})$ tal que \mathcal{U} não intersekte as órbitas periódicas $P_{3,E}$ e $P'_{3,E}$. Para cada n , denote respectivamente por $\bar{u}_{1,n}$ e $\bar{u}_{2,n}$ as extensões contínuas de $u_{1,n}$ e $u_{2,n}$ sobre o círculo S^1 em ∞ de modo que $\bar{u}_{1,n}(S^1) = \bar{u}_{2,n}(S^1) = P_{2,E}$. Pelo Lema 3.5.3, se n for suficientemente grande, então $\bar{u}_{1,n}(\mathbb{C}), \bar{u}_{2,n}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{U}$. Mais que isso, note que qualquer homotopia entre $\bar{u}_{1,n}$ e $\bar{u}_{2,n}$ em W_E que mantenha o bordo $P_{2,E}$ fixo não pode estar suportada dentro da vizinhança \mathcal{U} e deve intersectar $P_{3,E} \cup P'_{3,E}$, para todo n grande.

Agora, considere $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$ pequenas vizinhanças tubulares de $u_{1,E}(\mathbb{C}) \cup P_{2,E}$ e $u_{2,E}(\mathbb{C}) \cup P_{2,E}$, respectivamente. Se j_1 coincidissem com j_2 , então, pelo Lema 3.5.3, $\bar{u}_{1,n}(\mathbb{C}), \bar{u}_{2,n}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{U}_{j_1}$ para todo n suficientemente grande. Neste caso, como $\pi_2(\mathcal{U}_{j_1}) = 0$, seria possível encontrar uma homotopia entre $\bar{u}_{1,n}$ e $\bar{u}_{2,n}$ em \mathcal{U}_{j_1} que mantém o bordo $P_{2,E}$ fixo, para todo n grande. Esta homotopia, por estar suportada em \mathcal{U}_{j_1} , não intersectaria $P_{3,E} \cup P'_{3,E}$, chegando assim a uma contradição. Portanto $j_1 \neq j_2$.

Vamos relembrar alguns fatos. A 2-esfera $u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C})$ separa W_E em duas componentes \dot{S}_n e \dot{S}'_n , contendo os *bindings* $P_{3,n}$ e $P'_{3,n}$ respectivamente, cujos fechos S_n e S'_n são 3-bolas topológicas fechadas satisfazendo $\partial S_n = \partial S'_n = u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C})$. Como conjuntos de pontos em W_E , $P_{3,n} = P_{3,E}, P_{2,n} = P_{2,E}$ e $P'_{3,n} = P'_{3,E}$ para todo n grande. O campo de Reeb X_{λ_n} é transversal aos planos $u_{1,n}(\mathbb{C})$ e $u_{2,n}(\mathbb{C})$, apontando para dentro de \dot{S}_n em $u_{1,n}(\mathbb{C})$ e para dentro de \dot{S}'_n em $u_{2,n}(\mathbb{C})$. Analogamente, o campo de Reeb X_{λ_E} é transversal aos hemisférios $u_{1,E}(\mathbb{C}) = U_{1,E}$ e $u_{2,E}(\mathbb{C}) = U_{2,E}$ da 2-esfera $\partial S_E = U_{1,E} \cup P_{2,E} \cup U_{2,E} = \partial S'_E$, apontando para dentro de \dot{S}_E em $U_{1,E}$ e para dentro de \dot{S}'_E em

$U_{2,E}$, sendo que $\dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$ e $\dot{S}'_E = S'_E \setminus \partial S'_E$ são as componentes de $W_E \setminus \partial S_E$ contendo $P_{3,E}$ e $P'_{3,E}$ respectivamente. Sendo assim, como $X_{\lambda_n} \rightarrow X_{\lambda_E}$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, além disso, $\tilde{u}_{1,n} \rightarrow \tilde{u}_{j_1,E}$ e $\tilde{u}_{2,n} \rightarrow \tilde{u}_{j_2,E}$ em C^∞_{loc} quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de subsequências e após reparametrizações e translações na direção real, podemos afirmar que $j_1 = 1$ e $j_2 = 2$.

Concluimos deste modo que, a menos da extração de subsequências, $\tilde{u}_{1,n} \rightarrow \tilde{u}_{1,E}$ e $\tilde{u}_{2,n} \rightarrow \tilde{u}_{2,E}$ em C^∞_{loc} quando $n \rightarrow \infty$, possivelmente após reparametrizações e translações na direção real. Na verdade, temos mais que isso. Pela compacidade e pela unicidade obtidas nas Proposições 3.5.2 e B.0.2, respectivamente, podemos aplicar o mesmo procedimento anterior para deduzir, para cada $i \in \{1, 2\}$, que qualquer subsequência $(\tilde{u}_{i,n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\tilde{u}_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(\tilde{u}_{i,n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ convergindo para $\tilde{u}_{i,E}$ em C^∞_{loc} quando $j \rightarrow \infty$, a menos de reparametrização e translação na direção real. Disto segue que a própria sequência $(\tilde{u}_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ deve convergir para $\tilde{u}_{i,E}$ em C^∞_{loc} quando $n \rightarrow \infty$, possivelmente após reparametrização e translação na direção real.

3.5.2 Demonstração da Proposição 2.3.10-ii)

Nesta subseção, vamos lidar com a compacidade dos cilindros rígidos $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$, $\tilde{v}'_n = (b'_n, v'_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ da folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$. Na verdade, vamos abordar apenas o caso $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$, tendo em vista que o estudo da convergência de $\tilde{v}'_n = (b'_n, v'_n)$ quando $n \rightarrow \infty$ é completamente análoga.

Iniciamos reparametrizando e \mathbb{R} -transladando convenientemente o cilindro de energia finita \tilde{v}_n da seguinte forma. Fixe uma 2-esfera mergulhada em W_E que separa as órbitas periódicas $P_{3,n}$ e $P_{2,n}$ para todo n . Em coordenadas locais, podemos escolher, por exemplo, a 2-esfera N_E^δ definida por

$$N_E^\delta := \{q_1 + p_1 = \delta\} \cap K^{-1}(E),$$

onde $E, \delta > 0$ são suficientemente pequenos como no Lema 2.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $(s_n, t_n) \in \mathbb{R} \times S^1$ tal que $v_n(s_n, t_n) \in N_E^\delta$ e $v_n(s, \cdot) \cap N_E^\delta = \emptyset$ para todo $s > s_n$. A existência de um tal ponto (s_n, t_n) se deve à compacidade da esfera N_E^δ e ao fato de que \tilde{v}_n é assintótico à $P_{3,n}$ em $s = +\infty$ e à $P_{2,n}$ em $s = -\infty$. Definimos então uma nova sequência de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos $\tilde{w}_n = (d_n, w_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ por

$$\tilde{w}_n(s, t) = (b_n(s + s_n, t + t_n) - b_n(1 + s_n, t_n), v_n(s + s_n, t + t_n)), \forall (s, t) \in \mathbb{R} \times S^1,$$

a qual será denotada novamente por $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$. Sendo assim, podemos assumir que

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n(0, 0) &\in \mathbb{R} \times N_E^\delta \\ v_n(s, t) &\in U_E^\delta, \forall s > 0, t \in S^1 \\ \tilde{v}_n(1, 0) &\in \{0\} \times U_E^\delta \end{aligned} \tag{3.109}$$

para todo n , onde U_E^δ é a componente de $W_E \setminus N_E^\delta$ que contém $P_{3,E}$.

No resultado a seguir, analisamos a convergência dos cilindros rígidos \tilde{v}_n .

Proposição 3.5.4. *Para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, temos que $|\nabla\tilde{v}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in \mathbb{R} \times S^1$ e em $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, existe um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{v}_E = (b_E, v_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. O cilindro \tilde{v}_E é assintótico à $P_{3,E}$ em seu furo positivo $+\infty$, é assintótico à $P_{2,E}$ em seu furo negativo $-\infty$ e, além disso, a imagem $v_E(\mathbb{R} \times S^1)$ está contida em $\dot{S}_E \setminus P_{3,E}$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existam uma subsequência de \tilde{v}_n , ainda denotada por \tilde{v}_n , e uma sequência de pontos $z_n = (s_n, t_n) \in \mathbb{R} \times S^1$ tais que $|\nabla\tilde{v}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmamos, primeiramente, que $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 0$. Caso contrário, seria possível encontrar $\varepsilon > 0$ e uma subsequência, ainda denotada por s_n , de modo que $s_n > \varepsilon$ para todo n . Agora, aplicamos o mesmo procedimento de reescala realizado na Proposição 3.5.2 em torno dos pontos $z_n = (s_n, t_n)$. Considere $R_n := |\nabla\tilde{v}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty$ e escolha uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ tal que $\varepsilon_n R_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Usando o Lema 3.5.1, podemos modificar as sequências z_n e ε_n , se necessário, para que satisfaçam ainda a seguinte desigualdade

$$|\nabla\tilde{v}_n(z)|_n \leq 2|\nabla\tilde{v}_n(z_n)|_n \text{ para todo } |z - z_n| \leq \varepsilon_n.$$

Então, definimos uma nova sequência de curvas \tilde{J}_n -holomorfas $\tilde{w}_n : B_{\varepsilon_n R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ por

$$\tilde{w}_n(z) = (d_n(z), w_n(z)) = \left(b_n \left(z_n + \frac{z}{R_n} \right) - b_n(z_n), v_n \left(z_n + \frac{z}{R_n} \right) \right),$$

que satisfaz $\tilde{w}_n(0) \in \{0\} \times W_E$ e $|\nabla\tilde{w}_n(z)|_n \leq 2$ para todo $|z| \leq \varepsilon_n R_n$. Neste caso, temos uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência \tilde{w}_n e, como $\mathbb{C} = \bigcup_n B_{\varepsilon_n R_n}(0)$, encontramos um plano \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Por construção, o plano \tilde{w} é tal que $\tilde{w}(0) \in \{0\} \times W_E$ e, além disso, $|\nabla\tilde{w}(0)|_E = 1$, donde segue que \tilde{w} é não-constante. Pelas propriedades assintóticas dos cilindros \tilde{v}_n e pelo Lema de Fatou, obtemos que $E(\tilde{w}) \leq \limsup_n T_{3,n} = T_{3,E}$ e, mais ainda, para qualquer $R > 0$ fixado e todo n grande,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} w^* d\lambda_E &\leq \limsup_n \int_{B_{\varepsilon_n R_n}(0)} w_n^* d\lambda_n \\ &= \limsup_n \int_{B_{\varepsilon_n}(z_n)} v_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_n \int_{\mathbb{R} \times S^1} v_n^* d\lambda_n \\ &= \limsup_n (T_{3,n} - T_{2,n}) \\ &= T_{3,E} - T_{2,E}. \end{aligned}$$

A arbitrariedade do raio $R > 0$ nos permite concluir que

$$\int_{\mathbb{C}} w^* d\lambda_E \leq T_{3,E} - T_{2,E}. \quad (3.110)$$

Devido ao Teorema 1.4.9, para qualquer sequência $r_n \rightarrow +\infty$, existem uma órbita periódica $Q = (x, T)$ e uma subsequência de r_n , ainda denotada por r_n , tais que $w(e^{2\pi(r_n+it)}) \rightarrow x(Tt)$ quando $n \rightarrow \infty$. Por (3.110), vemos que $T = \int_{\mathbb{C}} w^* d\lambda_E < T_{3,E}$, logo Q é geometricamente distinta de $P_{3,E}$. Além disso, como estamos supondo que, a menos da extração de uma subsequência, $z_n = (s_n, t_n) \in (\varepsilon, +\infty) \times S^1$, para algum $\varepsilon > 0$ e para todo n , (3.109) nos garante que Q deve estar contida em U_E^δ , componente de $W_E \setminus N_E^\delta$ contendo $P_{3,E}$. Sendo assim, Q é geometricamente distinta de $P_{2,E}$. Temos ainda que v_n é um mergulho satisfazendo $v_n(\mathbb{R} \times S^1) \cap P_{3,E} = \emptyset$ para cada n . Em particular, a imagem de qualquer curva fechada contrátil em $\mathbb{R} \times S^1$ por v_n não está enlaçada com $P_{3,E}$ e disto segue que a imagem de qualquer curva fechada por w não está enlaçada com $P_{3,E}$. Portanto, Q não pode estar enlaçada com $P_{3,E}$, contradizendo assim a Proposição A.0.3, desde que $E > 0$ seja escolhido suficientemente pequeno. Concluímos então que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 0. \quad (3.111)$$

Agora vamos descartar a possibilidade da existência de pontos de *bubbling-off* da sequência \tilde{v}_n em $(-\infty, 0] \times S^1$. Seja Γ_0 o conjunto dos pontos $z = (s, t) \in \mathbb{R} \times S^1$ para os quais existem uma sequência de pontos $z_j \rightarrow z$ e uma subsequência \tilde{v}_{n_j} de \tilde{v}_n tais que $|\nabla \tilde{v}_{n_j}(z_j)|_{n_j} \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Por (3.111), sabemos que $\Gamma_0 \subset (-\infty, 0] \times S^1$ e nosso objetivo é mostrar que $\Gamma_0 = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que existe $z_0^* \in \Gamma_0$ e denote novamente por \tilde{v}_n a subsequência \tilde{v}_{n_j} satisfazendo $|\nabla \tilde{v}_{n_j}(z_j)|_{n_j} \rightarrow \infty$, onde $z_j \rightarrow z_0^*$, quando $j \rightarrow \infty$. Considere o conjunto Γ_1 formado pelos pontos $z = (s, t) \in \mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_0^*\}$ tais que, para uma subsequência \tilde{v}_{n_j} de \tilde{v}_n , existe uma sequência de pontos $z_j \rightarrow z$ satisfazendo $|\nabla \tilde{v}_{n_j}(z_j)|_{n_j} \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. No caso em que $\Gamma_1 = \emptyset$, segue de (3.109) que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} : \mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_0^*\} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência. Se $\Gamma_1 \neq \emptyset$, então procedemos da mesma forma: escolhemos $z_1^* \in \Gamma_1$ e denotamos outra vez por \tilde{v}_n a subsequência \tilde{v}_{n_j} satisfazendo $|\nabla \tilde{v}_{n_j}(z_j)|_{n_j} \rightarrow \infty$, com $z_j \rightarrow z_1^*$, quando $j \rightarrow \infty$. Indutivamente, definimos o conjunto Γ_{i+1} constituído pelos pontos $z = (s, t) \in \mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_0^*, \dots, z_i^*\}$ para os quais existem uma sequência de pontos $z_j \rightarrow z$ e uma subsequência \tilde{v}_{n_j} de \tilde{v}_n tais que $|\nabla \tilde{v}_{n_j}(z_j)|_{n_j} \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Se $\Gamma_{i+1} = \emptyset$, então, por (3.109), temos que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} : \mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_0^*, \dots, z_i^*\} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência. No caso em que $\Gamma_{i+1} \neq \emptyset$, repetimos mais uma vez o procedimento. Observe que cada um dos pontos de *bubbling-off* z_i^* está contido em $(-\infty, 0] \times S^1$ e acumula uma energia $d\lambda_E$ de pelo menos $T_{2,E}$, ou seja, para qualquer $\epsilon > 0$ pequeno fixado temos que

$$\int_{B_\epsilon(z_i^*)} v_n^* d\lambda_n > T_{2,E} - \epsilon \quad (3.112)$$

para todo n grande, onde $B_\epsilon(z_i^*)$ está orientada no sentido anti-horário. De fato, assim como

fizemos anteriormente, podemos reescalar a sequência \tilde{v}_n próximo ao ponto z_i^* para obter um plano de energia finita que é assintótico a uma órbita periódica, cuja ação é maior ou igual a $T_{2,E}$ devido a Proposição A.0.1, para $E > 0$ suficientemente pequeno. Tendo em vista que ocorre um tal acúmulo de energia em torno de cada dos pontos de *bubbling-off* de \tilde{v}_n e que $\limsup_n \int_{\mathbb{R} \times S^1} v_n^* d\lambda_n = T_{3,E} - T_{2,E} < \infty$, concluímos que o procedimento indutivo acima deve terminar após um número finito de passos, isto é, existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ de modo que $\Gamma_{i_0} \neq \emptyset$ e $\Gamma_{i_0+1} = \emptyset$. Com isso, encontramos uma curva \tilde{J}_E -holomorfa $\tilde{v} = (b, v) : (\mathbb{R} \times S^1) \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\Gamma := \{z_0^*, \dots, z_{i_0}^*\}$. Usando o Lema de Fatou, vemos que $E(\tilde{v}) \leq \limsup_n T_{3,n} = T_{3,E}$.

Como $T_{2,n} \leq \int_{\{s\} \times S^1} v_n^* \lambda_n \leq T_{3,n}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos que

$$T_{2,E} \leq \int_{\{s\} \times S^1} v^* \lambda_E \leq T_{3,E} \tag{3.113}$$

para todo valor de $s \in \mathbb{R}$ onde esta integral está definida, incluindo $s > 0$ e $s \ll 0$, já que \tilde{v} possui um número finito de furos, todos contidos em $(-\infty, 0] \times S^1$. Com (3.113), podemos analisar as massas dos furos $s = \pm\infty$ de \tilde{v} e concluir que $s = +\infty$ é um furo positivo e $s = -\infty$ é um furo negativo. Além disso, por (3.112), temos que cada um dos furos $z_i^* \in \Gamma$ é negativo. Portanto, todos os furos de \tilde{v} em $\Gamma \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ são não-removíveis, sendo que $+\infty$ é o único furo positivo.

Decorre de (3.109) que $v((0, +\infty) \times \mathbb{R}) \subset U_E^\delta$, logo nenhum recobrimento de $P_{2,E}$ pode ser limite assintótico de \tilde{v} em $s = +\infty$. Se \tilde{v} admitisse um limite assintótico geometricamente distinto de $P_{3,E}$ em $s = +\infty$, então (3.113) e a Proposição A.0.3 implicariam que, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, as curvas fechadas $t \mapsto v_n(s, t)$ estão enlaçadas com $P_{3,E}$ para todo s, n grandes, uma contradição. Sendo assim, $P_{3,E}$ é o único limite assintótico possível para \tilde{v} no furo $s = +\infty$ e, portanto, $v(s, \cdot) \rightarrow x_{3,E}(T_{3,E} \cdot)$ em C^∞ quando $s \rightarrow \infty$, onde $P_{3,E} = (x_{3,E}, T_{3,E})$. Mais ainda, temos que $b_s(s, t) \rightarrow T_{3,E}$ quando $s \rightarrow +\infty$, como provado em [29, Equação (6)]. Então, tendo em vista que $P_{3,E}$ é uma órbita periódica simples, concluímos que \tilde{v} é *somewhere injective*, de acordo com a Definição B.0.3.

Vamos mostrar agora que \tilde{v} é assintótica a um p -recobrimento de $P_{2,E}$ em cada um de seus furos negativos. Observe primeiramente que, devido a (3.113), a ação dos limites assintóticos de \tilde{v} em seus furos negativos é limitada superiormente por $T_{3,E}$. Temos também que a imagem $v((\mathbb{R} \times S^1) \setminus \Gamma)$ não intersecta a 2-esfera $\partial S_E = U_{1,E} \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$. De fato, caso houvesse interseções, elas seriam isoladas pelo Princípio da Similaridade de Carleman. E então, por positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, teríamos que $v_n(\mathbb{R} \times S^1)$ intersecta a 2-esfera $u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C})$ para todo n grande, contradição. Seja $Q = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda_E)$ um limite assintótico de \tilde{v} em qualquer um de seus furos negativos pertencente a $\Gamma \cup \{-\infty\}$. Sabemos que, para $E > 0$ suficientemente pequeno, $T_{2,E} \leq T \leq T_{3,E}$. Mais ainda, pela Proposição A.0.3, $P_{2,E}$ é a única órbita periódica geometricamente distinta de $P_{3,E}$ em S_E , com ação menor ou igual a $T_{3,E}$, que não está enlaçada com $P_{3,E}$. Sendo assim, podemos concluir que Q coincide com $P_{3,E}$ ou com algum recobrimento de $P_{2,E}$, cuja ação não ultrapasse $T_{3,E}$. Se $Q = P_{3,E}$ para algum furo negativo de \tilde{v} em $\Gamma \cup \{-\infty\}$,

então

$$\int_{(\mathbb{R} \times S^1) \setminus \Gamma} v^* d\lambda_E \leq T_{3,E} - T_{3,E} - T_{2,E} < 0,$$

já que estamos supondo $\Gamma_0 \neq \emptyset$. Isto é uma contradição e, portanto, Q deve coincidir com algum recobrimento de $P_{2,E}$ para cada um dos furos negativos de \tilde{v} .

Com isso, obtemos que \tilde{v} é assintótica à $P_{3,E}$ em $+\infty$ e é assintótica a um p -recobrimento de $P_{2,E}$ em cada um de seus furos negativos, donde segue que $\int_{(\mathbb{R} \times S^1) \setminus \Gamma} v^* d\lambda_E > 0$. Consequentemente, a imagem de v não intersecta a órbita periódica $P_{3,E}$. De fato, se intersectasse, pelo Princípio da Similaridade de Carleman, estas interseções seriam isoladas e, então, por positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, teríamos que a imagem de v_n intersecta $P_{3,n}$ para todo n grande, contradição. Logo, a imagem de v está contida em $\dot{S}_E \setminus P_{3,E}$.

Baseados na suposição de que $\Gamma_0 \neq \emptyset$, temos que \tilde{v} possui pelo menos dois semi-cilindros contidos em \dot{S}_E assintóticos a recobrimentos de $P_{2,E}$. Assim, pela Proposição B.0.4-i)-ii), concluímos que v admite auto-interseções, isto é, existem $z_1, z_2 \in (\mathbb{R} \times S^1) \setminus \Gamma$ distintos satisfazendo $v(z_1) = v(z_2)$. Em particular, \tilde{v} intersecta a curva \tilde{J}_E -holomorfa $\tilde{v}_c := (b + c, v)$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Visto que \tilde{v} é *somewhere injective* e não é um cilindro sobre órbita periódica, as interseções entre as curvas pseudo-holomorfas \tilde{v} e \tilde{v}_c devem ser isoladas pelo Princípio da Similaridade de Carleman, implicando a existência de interseções entre \tilde{v}_n e $\tilde{v}_{n,c} := (b_n + c, v_n)$ para n grande, por positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas. Mas isto contradiz o fato de v_n ser um mergulho para cada $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\Gamma_0 = \Gamma = \emptyset$, ou seja, a sequência \tilde{v}_n não possui pontos de *bubbling-off* em $(-\infty, 0] \times S^1$. E, como mostramos no início desta demonstração, \tilde{v}_n também não possui pontos de *bubbling-off* em $(0, +\infty) \times S^1$. Sendo assim, por (3.109), encontramos uma curva \tilde{J}_E -holomorfa $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Argumentando como anteriormente, temos que \tilde{v} satisfaz (3.113) para todo $s \in \mathbb{R}$, donde segue que $s = +\infty$ é um furo positivo de \tilde{v} , enquanto $s = -\infty$ é um furo negativo. Além disso, usando (3.109), (3.113) e a Proposição A.0.3, vemos que \tilde{v} é assintótica a $P_{3,E}$ em $s = +\infty$ e então, como $P_{3,E}$ é simples e $b_s(s, t) \rightarrow T_{3,E}$ quando $s \rightarrow \infty$, concluímos que \tilde{v} deve ser *somewhere injective*. Novamente, pelo Princípio da Similaridade de Carleman e por positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, obtemos que $v(\mathbb{R} \times S^1)$ não intersecta a 2-esfera $\partial S_E = U_{1,E} \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$.

Vamos analisar o comportamento assintótico de \tilde{v} no furo $s = -\infty$. Seja $Q = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda_E)$ um limite assintótico de \tilde{v} em $s = -\infty$. Observe que a ação de Q satisfaz $T_{2,E} \leq T \leq T_{3,E}$. Mais que isso, de acordo com a Proposição A.0.3, $P_{2,E}$ é a única órbita periódica geometricamente distinta de $P_{3,E}$ em S_E , com ação menor ou igual a $T_{3,E}$, que não está enlaçada com $P_{3,E}$, para $E > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, Q certamente coincide com $P_{3,E}$ ou com algum recobrimento de $P_{2,E}$, uma vez que v_n é um mergulho satisfazendo $v_n(\mathbb{R} \times S^1) \cap P_{3,E} = \emptyset$ para todo n . Se $Q = P_{3,E}$, então

$$\int_{\mathbb{R} \times S^1} v^* d\lambda_E \leq T_{3,E} - T_{3,E} = 0$$

e, conseqüentemente, \tilde{v} é um cilindro sobre a órbita periódica $P_{3,E}$. Mas isto contradiz o fato de $\tilde{v}(0,0) \in \mathbb{R} \times N_E^\delta$, que segue de (3.109). Logo, Q deve coincidir com um p -recobrimento de $P_{2,E}$ e, em particular, obtemos que $\int_{\mathbb{R} \times S^1} v^* d\lambda_E > 0$. Afirmamos que $p = 1$. De fato, se $p \geq 2$, então, pela Proposição B.0.4-i), v admitiria auto-interseções, implicando assim que \tilde{v} intersecta a curva \tilde{J}_E -holomorfa $\tilde{v}_c := (b + c, v)$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Como \tilde{v} é *somewhere injective* e não é um cilindro sobre uma órbita periódica, as interseções entre \tilde{v} e \tilde{v}_c seriam isoladas, pelo Princípio da Similaridade de Carleman, e portanto, por positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, \tilde{v}_n intersectaria $\tilde{v}_{n,c} := (b_n + c, v_n)$ para n grande, contradizendo o fato de v_n ser um mergulho para cada $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, temos que \tilde{v} é assintótica à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$.

Assim como antes, já que $\int_{\mathbb{R} \times S^1} v^* d\lambda_E > 0$, a imagem de v não intersecta a órbita periódica $P_{3,E}$, pois, caso contrario, usando o Princípio da Similaridade de Carleman e positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, teríamos que a imagem de v_n intersecta $P_{3,n}$ para todo n grande, contradição. Segue que $v(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$.

Precisamos mostrar ainda que a seqüência \tilde{v}_n não possui pontos de *bubbling-off* convergindo para $-\infty$. Por absurdo, suponha que existam uma subsequência de \tilde{v}_n , ainda denotada por \tilde{v}_n , e uma seqüência de pontos $z_n = (s_n, t_n) \in \mathbb{R} \times S^1$ tais que $|\nabla \tilde{v}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty$ e $s_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Como vimos, $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde \tilde{v} é um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo assintótico à $P_{3,E}$ e à $P_{2,E}$ em $s = +\infty$ e em $s = -\infty$, respectivamente. Sendo assim, dado $0 < \epsilon < \frac{T_{2,E}}{2}$ pequeno, podemos escolher $R > 0$ grande o suficiente de modo que $\int_{[-R,R] \times S^1} v^* d\lambda_E > T_{3,E} - T_{2,E} - \epsilon$ e, conseqüentemente, $\int_{[-R,R] \times S^1} v_n^* d\lambda_n > T_{3,E} - T_{2,E} - \epsilon$ para todo n grande. Além disso, utilizando o mesmo procedimento de reescala em torno dos pontos z_n , como no início desta demonstração, vemos que, para qualquer $\epsilon_0 > 0$ pequeno fixado, $\int_{B_{\epsilon_0}(z_n)} v_n^* d\lambda_n > T_{2,E} - \epsilon$ para todo n grande. Como $s_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $B_{\epsilon_0}(z_n) \cap [-R, R] \times S^1 = \emptyset$ para todo n grande e, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} T_{3,E} - T_{2,E} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T_{3,n} - T_{2,n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \times S^1} v_n^* d\lambda_n \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{([-R,R] \times S^1) \cup B_{\epsilon_0}(z_n)} v_n^* d\lambda_n \\ &\geq T_{3,E} - T_{2,E} + T_{2,E} - 2\epsilon \\ &> T_{3,E} - T_{2,E} \end{aligned}$$

para todo n grande, uma contradição.

Com isso, concluímos finalmente que $|\nabla \tilde{v}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in \mathbb{R} \times S^1$ e em $n \in \mathbb{N}$, como queríamos. Mais ainda, provamos a existência de um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência. Mostramos também que o cilindro \tilde{v} é assintótico à $P_{3,E}$ em seu furo positivo $+\infty$, é assintótico à $P_{2,E}$ em seu furo negativo $-\infty$ e, além disso, a imagem $v(\mathbb{R} \times S^1)$ está contida em $\dot{S}_E \setminus P_{3,E}$. Como $P_{2,E}$ é uma órbita hiperbólica, temos

que o comportamento assintótico de \tilde{v} próximo ao furo $s = -\infty$ é exponencial, no sentido de (1.50) da Proposição 1.4.10. Nas Proposições 3.5.5 e 3.5.8 a seguir, provaremos que \tilde{v} também tem um decaimento exponencial próximo ao furo $s = +\infty$, que é descrito por um autovalor negativo do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$ com *winding number* 1. Neste caso, podemos utilizar a unicidade, obtida na Proposição B.0.2, e a limitação uniforme de $|\nabla \tilde{v}_n(z)|_n$ para concluir que, na verdade, qualquer subsequência de \tilde{v}_n admite uma subsequência convergindo sempre para um mesmo cilindro \tilde{J}_E -holomorfo, que vamos denotar por $\tilde{v}_E = (b_E, v_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$. Disto segue que a própria sequência \tilde{v}_n deve convergir para \tilde{v}_E em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. \square

No próximo resultado, vamos descrever de modo mais detalhado o comportamento assintótico no furo positivo de um cilindro de energia finita que, como na Proposição 3.5.4, é obtido como o limite C_{loc}^∞ de uma subsequência dos cilindros rígidos \tilde{v}_n satisfazendo (3.109).

Proposição 3.5.5. *Seja $\tilde{v}_E = (b_E, v_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo, como obtido na Proposição 3.5.4, que é assintótico a $P_{3,E} = (x_{3,E}, T_{3,E})$ em seu furo positivo $+\infty$, é assintótico a $P_{2,E}$ em seu furo negativo $-\infty$ e, além disso, é o limite C_{loc}^∞ da sequência $\tilde{v}_n = (a_n, v_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos satisfazendo (3.109), com $E > 0$ suficientemente pequeno. Considere coordenadas de Martinet $(\vartheta, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$, como no Lema 1.3.2, definidas em uma pequena vizinhança tubular $\mathcal{U} \subset W_E$ de $P_{3,E}$, nas quais a órbita periódica $P_{3,E}$ é vista como $S^1 \times \{0\}$ e a forma de contato λ_E assume a forma $g_E(d\vartheta + xdy)$. Então $v_E(s, t) \in \mathcal{U}$ para todo s suficientemente grande e, nas coordenadas de Martinet, o cilindro \tilde{v}_E é representado por funções*

$$(b_E(s, t), \vartheta(s, t), x(s, t), y(s, t)), (s, t) \in \mathbb{R} \times S^1, s \gg 0,$$

que satisfazem

$$\begin{aligned} |D^\gamma(b_E(s, t) - (T_{3,E}s + a_0))| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \\ |D^\gamma(\vartheta(s, t) - t - \vartheta_0)| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \\ z(s, t) := (x(s, t), y(s, t)) &= e^{\int_{s_0}^s \mu(r) dr} (e(t) + R(s, t)), \\ |D^\gamma R(s, t)|, |D^\gamma(\mu(s) - \delta)| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \end{aligned} \tag{3.114}$$

para todo s grande e todo $\gamma \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, onde $A_\gamma, r_0 > 0, \vartheta_0$ e a_0 são constantes reais. A função $\vartheta(s, t)$ é vista como uma aplicação em \mathbb{R} e satisfaz $\vartheta(s, t + 1) = \vartheta(s, t) + 1$. Aqui $\mu(s) \rightarrow \delta < 0$ quando $s \rightarrow +\infty$, onde δ é um autovalor do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$ e a aplicação $e : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ corresponde a um δ -autovetor de $A_{P_{3,E}}$, representado em coordenadas induzidas pelo tubo de Martinet.

A Proposição 3.5.5 é provada essencialmente como o Teorema 7.2 de [33]. Devido a pequenas diferenças, vamos apresentar aqui os principais passos de sua demonstração. Para isso, iniciamos com o seguinte resultado, análogo ao Lema 8.1 de [33].

Lema 3.5.6. *Seja $\tilde{v}_E = (b_E, v_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo, como na Proposição 3.5.4, obtido como limite C_{loc}^∞ da sequência $\tilde{v}_n = (a_n, v_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$*

de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos satisfazendo (3.109), com $E > 0$ suficientemente pequeno. Dada uma vizinhança S^1 -invariante \mathcal{W}_0 da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{3,E}(T_{3,E}t)$ em $C^\infty(S^1, W_E)$, existe $s_0 > 0$ tal que, para todo $s \geq s_0$ e todo n grande, a curva fechada $t \mapsto v_n(s, t)$ está contida em \mathcal{W}_0 .

Demonstração. Começamos provando a afirmação a seguir, que é similar à Afirmação I contida na demonstração do Lema 3.5.3.

Afirmação II: Para todo $\epsilon > 0$ e para qualquer sequência $s_n \rightarrow +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então

$$\int_{[s_n, \infty) \times S^1} v_n^* d\lambda_n \leq \epsilon.$$

Suponha, por absurdo, que possamos encontrar um $\epsilon > 0$ e uma sequência $s_n \rightarrow +\infty$ satisfazendo $\int_{[s_n, \infty) \times S^1} v_n^* d\lambda_n > \epsilon$ para todo n . Neste caso, como a energia $d\lambda_n$ de \tilde{v}_n é igual a $T_{3,n} - T_{2,n}$, obtemos que $\int_{(-\infty, S_0] \times S^1} v_n^* d\lambda_n \leq T_{3,n} - T_{2,n} - \epsilon$, para todo $S_0 > 0$ e todo n grande. Uma vez que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, esta última desigualdade nos permite concluir que $\int_{(-\infty, S_0] \times S^1} v_E^* d\lambda_E \leq T_{3,E} - T_{2,E} - \epsilon$, implicando assim que $\int_{\mathbb{R} \times S^1} v_E^* d\lambda_E \leq T_{3,E} - T_{2,E} - \epsilon$. Mas isto contradiz o fato de que o cilindro \tilde{v}_E tem energia $d\lambda_E$ igual a $T_{3,E} - T_{2,E}$, pois é assintótico a $P_{3,E}$ em $+\infty$ e a $P_{2,E}$ em $-\infty$. Com isso provamos a Afirmação II.

Agora, assumamos por absurdo que existam uma sequência $s_j \rightarrow +\infty$ e uma subsequência \tilde{v}_{n_j} de \tilde{v}_n tais que as curvas fechadas $t \mapsto v_{n_j}(s_j, t)$ não estão contidas na vizinhança \mathcal{W}_0 . Vamos denotar as sequências s_j e \tilde{v}_{n_j} , com $j \in \mathbb{N}$, respectivamente por s_n e \tilde{v}_n , com $n \in \mathbb{N}$. Defina uma nova sequência de curvas \tilde{J}_n -holomorfas \tilde{w}_n em $\mathbb{R} \times W_E$ por

$$\tilde{w}_n(s, t) = (d_n(s, t), w_n(s, t)) = (b_n(s + s_n, t) - b_n(s_n, 0), v_n(s + s_n, t)). \quad (3.115)$$

Observe que, por construção, $b_n(0, 0) = 0$ e, para todo $t \in S^1$, $w_n(0, t) = v_n(s_n, t) \notin \mathcal{W}_0$. Portanto, pela Proposição 3.5.4, a sequência \tilde{w}_n possui uma limitação C_{loc}^∞ e, a menos da extração de uma subsequência, temos que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo.

Devido a Afirmação II, para qualquer $S_0 > 0$ fixado e todo $\epsilon > 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{[-S_0, S_0] \times S^1} w^* d\lambda_E &\leq \limsup_n \int_{[-S_0, S_0] \times S^1} w_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_n \int_{[s_n - S_0, s_n + S_0] \times S^1} v_n^* d\lambda_n \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

para todo n grande e disto segue que $\int_{\mathbb{R} \times S^1} w^* d\lambda_E = 0$. Além disso, $E(\tilde{w}) \leq \limsup_n T_{3,n} = T_{3,E}$ e \tilde{w} é não-constante, pois

$$T_{3,E} \geq \int_{\{0\} \times S^1} w^* \lambda_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times S^1} w_n^* \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{s_n\} \times S^1} v_n^* \lambda_n \geq T_{2,E}. \quad (3.116)$$

Sendo assim, podemos utilizar a caracterização das superfícies de energia finita com energia

$d\lambda_E$ igual a zero (Teorema 6.11 de [29]) para concluir que \tilde{w} é um cilindro sobre uma órbita periódica $Q = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda_E)$. Por hipótese, temos que Q é geometricamente distinta de $P_{3,E}$. Mais ainda, por (3.109), as curvas fechadas $t \mapsto w_n(0, t) = v_n(s_n, t)$ estão contidas na componente U_E^δ de $W_E \setminus N_E^\delta$ que contém $P_{3,E}$, para n suficientemente grande, e, portanto, Q também é geometricamente distinta de $P_{2,E}$. Logo, $Q \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$ e sua ação satisfaz $T \leq T_{3,E}$ por (3.116). Neste caso, usando a Proposição A.0.3, concluímos que Q deve estar enlaçada com $P_{3,E}$ para $E > 0$ pequeno, contradizendo assim o fato de que a curva fechada $t \mapsto v_n(s_n, t)$ não está enlaçada com $P_{3,E}$ para todo n grande. \square

Ideia da demonstração da Proposição 3.5.5. Em decorrência dos Lemas 1.3.2 e 3.5.6, o estudo do comportamento assintótico dos cilindros \tilde{J}_n -holomorfos \tilde{v}_n próximo ao furo positivo $+\infty$ pode ser realizado dentro de uma vizinhança tubular $\mathcal{U} \subset W_E$ da órbita periódica $P_{3,E}$, onde temos coordenadas de Martinet $(\vartheta, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$ que transformam a forma de contato λ_E em $g_E(d\vartheta + xdy)$ e a órbita $P_{3,E}$ em $S^1 \times \{0\}$. Nestas coordenadas, as formas de contato $\lambda_n = f_n\lambda_E$ assumem o formato $g_n(d\vartheta + xdy)$, onde $g_n = f_n g_E \rightarrow g_E$ em $C^\infty(\mathcal{U}_0)$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\mathcal{U}_0 \subset S^1 \times \mathbb{R}^2$ é uma pequena vizinhança de $S^1 \times \{0\} \equiv P_{3,E}$.

Usando uma nova notação, vamos escrever os cilindros pseudo-holomorfos \tilde{v}_E e \tilde{v}_n , nas coordenadas de Martinet, como

$$\begin{aligned}\tilde{v}_E(s, t) &= (a(s, t), v_E(s, t)) = (a(s, t), \vartheta(s, t), x(s, t), y(s, t)) \\ \tilde{v}_n(s, t) &= (a^n(s, t), v_n(s, t)) = (a^n(s, t), \vartheta^n(s, t), x^n(s, t), y^n(s, t)),\end{aligned}$$

para todo n grande, onde $(s, t) \in [s_0, +\infty) \times S^1$, com $s_0 \gg 0$ dado pelo Lema 3.5.6. Por tratarem-se de curvas pseudo-holomorfas e, portanto, satisfazerem equações como (1.49), podemos ver que as coordenadas de \tilde{v}_E e \tilde{v}_n realizam as seguintes equações

$$\begin{aligned}a_s &= g_E(v_E)(\vartheta_t + xy_t) \\ a_t &= -g_E(v_E)(\vartheta_s + xy_s) \\ z_s + M(s, t)z_t + S(s, t)z &= 0\end{aligned}\tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}a_s^n &= g_n(v_n)(\vartheta_t^n + x^n y_t^n) \\ a_t^n &= -g_n(v_n)(\vartheta_s^n + x^n y_s^n) \\ z_s^n + M^n(s, t)z_t^n + S_n(s, t)z^n &= 0,\end{aligned}\tag{3.118}$$

onde $z = (x, y)$, $z^n = (x^n, y^n)$ e $S = S(\tilde{v}_E)$, $S_n = S_n(\tilde{v}_n)$, $M = M(v_E)$ e $M^n = M^n(v_n)$ são matrizes de ordem 2, suaves em (s, t) . As matrizes M e M^n correspondem, respectivamente, às estruturas complexas $J_E, J_n : \xi \rightarrow \xi$ na base $\{\partial_x, \partial_y - x\partial_\vartheta\}$ da estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_E = \ker \lambda_n$ e satisfazem $M^2 = -I$ e $(M^n)^2 = -I$.

Podemos assumir que M e M^n coincidem com a matriz

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De fato, assim como foi feito em [28], basta modificarmos as curvas \tilde{v}_n e \tilde{v}_E como segue: definimos novas variáveis ζ e ζ^n por

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{T}(m)\zeta \\ z^n &= \mathcal{T}^n(m)\zeta^n, \end{aligned}$$

onde $m \in \mathcal{U}_0$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(m) &= (-J_0 M(m))^{-1/2} \\ \mathcal{T}^n(m) &= (-J_0 M^n(m))^{-1/2} \end{aligned}$$

são matrizes simpléticas e simétricas satisfazendo $\mathcal{T}^{-1}M\mathcal{T} = J_0$ e $(\mathcal{T}^n)^{-1}M^n\mathcal{T}^n = J_0$. Assim, obtemos de (3.117) e (3.118), que

$$\begin{aligned} \zeta_s + J_0\zeta_t + S'(s, t)\zeta &= 0 \\ \zeta_s^n + J_0\zeta_t^n + S'_n(s, t)\zeta^n &= 0, \end{aligned} \tag{3.119}$$

onde $S' = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}_s + M\mathcal{T}_t + S\mathcal{T})$ e $S'_n = (\mathcal{T}^n)^{-1}(\mathcal{T}_s^n + M^n\mathcal{T}_t^n + S_n\mathcal{T}^n)$ satisfazem as mesmas propriedades de S e S_n .

Agora, defina $b^n(s, t) := \frac{T_{3,E}}{T_{3,n}}a^n(s, t)$. Devido ao estudo do comportamento assintótico desenvolvido por Hofer, Wysocki e Zehnder em [28] para o caso não-degenerado, sabemos que, para cada n fixado, existem constantes $\bar{c}_n \in S^1$ e $\bar{d}_n \in \mathbb{R}$ tais que $\partial^\alpha[\vartheta^n(s, t) - t - \bar{c}_n] \rightarrow 0$ e $\partial^\alpha[a^n(s, t) - T_{3,n}s - \bar{d}_n] \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sendo assim, para todo $\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \partial^\alpha[\vartheta^n(s, t) - t - \bar{c}_n] &\rightarrow 0 \\ \partial^\alpha[b^n(s, t) - T_{3,E}s - d_n] &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $s \rightarrow \infty$, com $d_n = \frac{T_{3,E}}{T_{3,n}}\bar{d}_n \in \mathbb{R}$. Considerando

$$\begin{aligned} \tilde{v}'(s, t) &= (a(s, t), \vartheta(s, t), \zeta(s, t)) \\ \tilde{v}'_n(s, t) &= (b^n(s, t), \vartheta^n(s, t), \zeta^n(s, t)), \end{aligned}$$

vemos que $\tilde{v}'_n \rightarrow \tilde{v}'$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, pois $\mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}$ em $C^\infty(\mathcal{U}_0)$, $T_{3,n} \rightarrow T_{3,E}$ e $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$.

Em [28] e [33], mostra-se que cada $S'_n(s, t)$ converge, quando $s \rightarrow \infty$, para uma matriz simétrica $S_n^\infty(t)$ que depende da dinâmica linearizada de λ_n ao longo da órbita periódica $P_{3,n}$. Do mesmo modo, $S'(s, t)$ converge, quando $s \rightarrow \infty$, para uma matriz simétrica $S^\infty(t)$ dependendo da dinâmica linearizada de λ_E ao longo da órbita periódica $P_{3,E}$. Como a sequência \bar{c}_n está contida em S^1 , podemos usar novamente que $\mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}$ em $C^\infty(\mathcal{U}_0)$ e $T_{3,n} \rightarrow T_{3,E}$ quando $n \rightarrow \infty$, para obter que

$$\begin{aligned} \bar{c}_n &\rightarrow \vartheta_0 \\ S_n^\infty(t) &\rightarrow S^\infty(t) \end{aligned} \tag{3.120}$$

quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de subsequência. Sejam A_n^∞ e A^∞ os operadores auto-adjuntos sobre $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^2) \subset L^2(S^1, \mathbb{R}^2)$, associados respectivamente à S_n^∞ e à S^∞ , definidos por

$$\begin{aligned} A_n^\infty \eta &= -J_0 \dot{\eta} - S_n^\infty \eta, \\ A^\infty \eta &= -J_0 \dot{\eta} - S^\infty \eta. \end{aligned}$$

Observe que, por (3.120), $A_n^\infty \rightarrow A^\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Uma vez que as imagens de v_E e de v_n não intersectam $P_{3,E} \equiv S^1 \times \{0\}$, podemos definir as funções

$$\xi(s, t) = \frac{\zeta(s, t)}{|\zeta(s)|} \quad \text{e} \quad \xi^n(s, t) = \frac{\zeta^n(s, t)}{|\zeta^n(s)|},$$

onde $|\zeta(s)|$ e $|\zeta^n(s)|$ denotam a norma L^2 das curvas fechadas $t \mapsto \zeta(s, t), \zeta^n(s, t)$, respectivamente. Derivando em relação à variável s , obtemos de (3.119) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \xi(s) &= -J_0 \xi_t - S' \xi - \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{ds} |\zeta|^2}{|\zeta|^2} \xi = -J_0 \xi_t - S' \xi - \langle -J_0 \xi_t - S' \xi, \xi \rangle \xi \\ \frac{d}{ds} \xi^n(s) &= -J_0 \xi_t^n - S'_n \xi^n - \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{ds} |\zeta^n|^2}{|\zeta^n|^2} \xi^n = -J_0 \xi_t^n - S'_n \xi^n - \langle -J_0 \xi_t^n - S'_n \xi^n, \xi^n \rangle \xi^n. \end{aligned}$$

Introduzimos então as seguinte funções

$$\begin{aligned} \mu(s) &:= \langle -J_0 \xi_t - S' \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{ds} |\zeta|^2}{|\zeta|^2}, \\ \mu_n(s) &:= \langle -J_0 \xi_t^n - S'_n \xi^n, \xi^n \rangle = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{ds} |\zeta^n|^2}{|\zeta^n|^2}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$|\zeta(s)| = e^{\int_{s_0}^s \mu(\tau) d\tau} |\zeta(s_0)| \quad \text{e} \quad |\zeta^n(s)| = e^{\int_{s_0}^s \mu_n(\tau) d\tau} |\zeta^n(s_0)|. \quad (3.121)$$

Como $P_{3,n}$ é não-degenerada para cada n , segue dos resultados de [28] que $\mu_n(s) \rightarrow \delta_n$ quando $s \rightarrow \infty$, onde δ_n é um autovalor negativo de A_n^∞ , isto é, $A_n^\infty e_n = \delta_n e_n$ para um autovetor e_n com $|e_n| = 1$. Em [33] encontramos uma demonstração para o seguinte resultado.

Proposição 3.5.7 ([33], Lemas 8.4 e 8.5). *Existe uma subsequência de δ_n , ainda denotada por δ_n , satisfazendo: $\delta_n \rightarrow \delta$ quando $n \rightarrow \infty$, onde δ é um autovalor negativo de A^∞ , e $e_n \rightarrow e'$ em $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^2)$ quando $n \rightarrow \infty$, onde e' é uma δ -autovetor de A^∞ com $|e'| = 1$, isto é, $A^\infty e' = \delta e'$. Além disso, para cada $\epsilon > 0$ tal que $\delta + \epsilon < 0$, existem $s_1 \geq s_0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\mu_n(s) \leq \delta + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ e $s \geq s_1$.*

Com este resultado, podemos obter uma estimativa exponencial uniforme para as normas $|\zeta^n(s)|$, como em [33]. Com efeito, seja $r := -(\delta + \epsilon) > 0$ como no Lema 3.5.7. Então existem $s_1 \geq s_0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, por (3.121),

$$|\zeta^n(s)| \leq e^{-r(s-s_0)} |\zeta^n(s_0)|$$

para todo $n \geq n_0$ e $s \geq s_1$. Portanto, como $\zeta^n \rightarrow \zeta$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$|\zeta(s)| \leq e^{-r(s-s_0)}|\zeta(s_0)|$$

para todo $s \geq s_1$. Tendo provado esta estimativa para a norma L^2 de $\zeta(s)$, podemos prosseguir como na demonstração da fórmula assintótica para o caso não-degenerado em [28] para, enfim, mostrar as propriedades assintóticas desejadas para \tilde{v}' . Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= e^{\int_{s_0}^s \mu(\tau) d\tau} |\zeta(s_0)|, \text{ onde } \mu(s) \rightarrow \delta < 0 \text{ quando } s \rightarrow \infty, \\ \xi(s, t) &= \frac{\zeta(s, t)}{|\zeta(s)|} \rightarrow e'(t) \text{ quando } s \rightarrow \infty, \text{ onde } A^\infty e' = \delta e'. \end{aligned}$$

Nas coordenadas $z = \mathcal{T}\zeta$, o autovetor e' é representado por $e(t) = \mathcal{T}(t + \vartheta_0, 0, 0)e'(t)$. \square

Para que o cilindro \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{v}_E = (b_E, v_E)$, obtido na Proposição 3.5.4, seja uma das curvas pseudo-holomorfas integrantes da folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_E$ que desejamos construir em $\mathbb{R} \times W_E$, conforme enunciamos na Proposição 2.3.10, é preciso verificar que \tilde{v}_E satisfaz mais algumas propriedades importantes, as quais listamos no resultado a seguir.

Proposição 3.5.8. *Para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, existe um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita*

$$\tilde{v}_E = (b_E, v_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E,$$

com um furo positivo em $+\infty$ e um furo negativo em $-\infty$, de modo que

(i) \tilde{v}_E é o limite C_{loc}^∞ da sequência de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos de energia finita $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, satisfazendo a normalização (3.109), sendo que cada \tilde{v}_n é parte integrante da folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ em $\mathbb{R} \times W_E$.

(ii) \tilde{v}_E é assintótico a $P_{3,E}$ em $+\infty$ e assintótico a $P_{2,E}$ em $-\infty$. Em particular,

$$\int_{\mathbb{R} \times S^1} v_E^* d\lambda_E > 0.$$

(iii) A imagem de v_E está contida em $\dot{S}_E \setminus P_{3,E}$.

(iv) Os winding numbers de \tilde{v}_E em $\pm\infty$ são ambos iguais a 1.

(v) v_E é transversal ao campo de Reeb X_{λ_E} .

(vi) \tilde{v}_E e v_E são mergulhos.

Demonstração. Os itens (i), (ii) e (iii) já foram demonstrados na Proposição 3.5.4.

Em virtude da Proposição 3.5.5, da hiperbolicidade da órbita $P_{2,E}$ e do Teorema 1.4.10, o cilindro \tilde{v}_E tem decaimento exponencial próximo aos seus furos $\pm\infty$ e, portanto, podemos considerar os winding numbers $\text{wind}_\infty(\tilde{v}_E)$ e $\text{wind}_\pi(\tilde{v}_E)$ definidos na Seção 1.4. Como

$CZ(P_{3,E}) = 3$ e $CZ(P_{2,E}) = 2$, temos que

$$\begin{aligned}\text{wind}_\infty(+\infty) &\leq \text{wind}^{<0}(A_{P_{3,E}}) = 1 \\ \text{wind}_\infty(-\infty) &\geq \text{wind}^{\geq 0}(A_{P_{2,E}}) = 1.\end{aligned}$$

Logo, pela segunda equação de (1.52), obtemos que

$$0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{v}_E) = \text{wind}_\infty(\tilde{v}_E) = \text{wind}_\infty(+\infty) - \text{wind}_\infty(-\infty) \leq 1 - 1 = 0,$$

donde segue que $\text{wind}_\infty(+\infty) = \text{wind}_\infty(-\infty) = 1$ e $\text{wind}_\pi(\tilde{v}_E) = 0$. Por definição, $\text{wind}_\pi(\tilde{v}_E)$ é dado pela soma das ordens dos zeros da aplicação $\pi \circ d\tilde{v}_E$, sendo que cada ordem é sempre um número positivo. Lembramos, mais uma vez, que $\pi : TW_E \rightarrow \xi = \ker \lambda_E$ é a projeção ao longo do campo de Reeb X_{λ_E} . Sendo assim, de $\text{wind}_\pi(\tilde{v}_E) = 0$ podemos concluir que \tilde{v}_E é uma imersão transversal ao campo de Reeb X_{λ_E} . Com isso, provamos os itens (iv) e (v).

Pelo comportamento assintótico de \tilde{v}_E próximo aos furos $\pm\infty$, vemos que \tilde{v}_E é um mergulho próximo ao bordo, no sentido de D. McDuff [43], isto é, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $\tilde{v}_E^{-1}(\tilde{v}_E(\{|s| > R\} \times S^1)) = \{|s| > R\} \times S^1$ e $\tilde{v}_E|_{\{|s| > R\} \times S^1}$ é um mergulho. E como \tilde{v}_E é o limite C_{loc}^∞ dos mergulhos \tilde{v}_n , segue dos resultados de D. McDuff em [43] que \tilde{v}_E também é um mergulho.

Agora, só nos resta mostrar que v_E é um mergulho. Para isso, vamos verificar primeiramente que $\tilde{v}_E(\mathbb{R} \times S^1) \neq \tilde{v}_{E,c}(\mathbb{R} \times S^1)$ para qualquer $c \neq 0$, onde $\tilde{v}_{E,c}(s, t) = (b_E(s, t) + c, v_E(s, t))$. Suponha, por absurdo, que exista $c \neq 0$ tal que as imagens $\tilde{v}_E(\mathbb{R} \times S^1)$ e $\tilde{v}_{E,c}(\mathbb{R} \times S^1)$ coincidam. Neste caso, dado $(b, z) = \tilde{v}_E(s_0, t_0) = (b_E(s_0, t_0), v_E(s_0, t_0))$, encontramos $(s_1, t_1) \neq (s_0, t_0)$ de modo que $\tilde{v}_{E,c}(s_1, t_1) = (b_E(s_1, t_1) + c, v_E(s_1, t_1)) = (b, z)$ e, conseqüentemente, $\tilde{v}_E(s_1, t_1) = (b - c, z)$. Iterando este argumento, obtemos uma sequência $(s_n, t_n) \in \mathbb{R} \times S^1$ satisfazendo $\tilde{v}_E(s_n, t_n) = (b - nc, z)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se $c > 0$, então $b_E(s_n, t_n) = b - nc \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e daí, pela descrição assintótica de \tilde{v}_E próximo ao furo $-\infty$, obtemos que $v_E(s_n, t_n)$ se aproxima de $P_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas isto é uma contradição, visto que $v_E(s_n, t_n) = z$ para todo n e $v_E(\mathbb{R} \times S^1) \cap P_{2,E} = \emptyset$. Analogamente, se $c < 0$, então $b_E(s_n, t_n) = b - nc \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e disto segue, pela descrição assintótica de \tilde{v}_E próximo ao furo $+\infty$, que $v_E(s_n, t_n)$ se aproxima de $P_{3,E}$ quando $n \rightarrow \infty$. Novamente uma contradição, pois $v_E(s_n, t_n) = z$ para todo n e $v_E(\mathbb{R} \times S^1) \cap P_{3,E} = \emptyset$. Sendo assim, as interseções entre as imagens $\tilde{v}_E(\mathbb{R} \times S^1)$ e $\tilde{v}_{E,c}(\mathbb{R} \times S^1)$, $c \neq 0$, devem ser isoladas pelo Princípio da Similaridade de Carleman. Entretanto, por positividade e estabilidade de interseções de curvas pseudo-holomorfas, a existência de uma tal interseção implicaria que $\tilde{v}_n(\mathbb{R} \times S^1) \cap \tilde{v}_{n,c}(\mathbb{R} \times S^1) \neq \emptyset$ para n grande, onde $\tilde{v}_{n,c}(s, t) = (b_n(s, t) + c, v_n(s, t))$. Já que isso não ocorre, pois cada v_n é um mergulho, concluímos que $\tilde{v}_E(\mathbb{R} \times S^1) \cap \tilde{v}_{E,c}(\mathbb{R} \times S^1) = \emptyset$ para qualquer $c \neq 0$. Por isso, e também pelo comportamento assintótico de v_E próximo aos furos $\pm\infty$, por \tilde{v}_E ser um mergulho e por v_E ser uma imersão, podemos inferir que v_E é um mergulho, finalizando assim o item (vi). \square

No Lema 3.5.6, vimos que a sequência de cilindros \tilde{v}_n possui um comportamento uniforme próximo à órbita periódica $P_{3,E}$. O lema a seguir garante que o mesmo ocorre próximo à

$P_{2,E}$.

Lema 3.5.9. *Seja $\tilde{v}_E = (b_E, v_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ o cilindro \tilde{J}_E -holomorfo obtido na Proposição 3.5.4 como limite C_{loc}^∞ da sequência $\tilde{v}_n = (a_n, v_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos satisfazendo (3.109), com $E > 0$ suficientemente pequeno. Dada uma vizinhança S^1 -invariante \mathcal{W}_1 da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{2,E}(T_{2,E}t)$ em $C^\infty(S^1, W_E)$, existe $s_1 < 0$ tal que, para todo $s \leq s_1$ e todo n grande, a curva fechada $t \mapsto v_n(s, t)$ está contida em \mathcal{W}_1 .*

Demonstração. Para demonstrar este lema, vamos utilizar a seguinte afirmação.

Afirmação III: *Para todo $\epsilon > 0$ e para qualquer sequência $s_n \rightarrow -\infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_1$, então*

$$\int_{(-\infty, s_n] \times S^1} v_n^* d\lambda_n \leq \epsilon.$$

Vamos omitir a demonstração desta afirmação, devido a sua grande semelhança com a prova da Afirmação II, contida na prova do Lema 3.5.6.

Suponha, por absurdo, que existam uma sequência $s_j \rightarrow -\infty$ e uma subsequência \tilde{v}_{n_j} de \tilde{v}_n de modo que as curvas fechadas $t \mapsto v_{n_j}(s_j, t)$ não estão contidas na vizinhança \mathcal{W}_1 . Vamos denotar as sequências s_j e \tilde{v}_{n_j} , com $j \in \mathbb{N}$, respectivamente por s_n e \tilde{v}_n , com $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $\tilde{w}_n : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ as curvas \tilde{J}_n -holomorfas definidas como em (3.115). Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $b_n(0, 0) = 0$ e $w_n(0, t) = v_n(s_n, t) \notin \mathcal{W}_1$, para todo $t \in S^1$. Pela Proposição 3.5.4, encontramos um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$.

Usando a Afirmação III, vemos que, para todo $r_0 > 0$ fixado e para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{[-r_0, r_0] \times S^1} w^* d\lambda_E &\leq \limsup_n \int_{[-r_0, r_0] \times S^1} w_n^* d\lambda_n \\ &= \limsup_n \int_{[s_n - r_0, s_n + r_0] \times S^1} v_n^* d\lambda_n \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande. Disto segue, pela arbitrariedade de $r_0 > 0$, que $\int_{\mathbb{R} \times S^1} w^* d\lambda_E = 0$. Além disso, com a Afirmação III, obtemos também que, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$T_{2,n} \leq \int_{\{0\} \times S^1} w_n^* \lambda_n = \int_{\{s_n\} \times S^1} v_n^* \lambda_n < T_{2,E} + \epsilon,$$

para todo n grande, pois $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, \tilde{v}_n é assintótico à $P_{2,n}$ em $-\infty$, \tilde{v}_E é assintótico à $P_{2,E}$ em $-\infty$ e $s_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. E como $T_{2,n} \rightarrow T_{2,E}$ quando $n \rightarrow \infty$, podemos concluir que

$$\int_{\{0\} \times S^1} w^* \lambda_E = T_{2,E}. \tag{3.122}$$

Mais uma vez, pela caracterização das superfícies de energia finita com energia $d\lambda_E$ igual a zero (Teorema 6.11 de [29]), temos que \tilde{w} é um cilindro sobre uma órbita periódica de λ_E , que, devido a (3.122) e a Proposição A.0.1, deve coincidir com $P_{2,E}$. Mas isto contradiz a

suposição de que as curvas fechadas $t \mapsto w_n(0, t) = v_n(s_n, t)$ não estão contidas na vizinhança \mathcal{W}_1 para todo n . \square

Considerando os Lemas 3.5.6 e 3.5.9 e o fato de que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, vemos que, dada uma pequena vizinhança $\mathcal{U} \subset W_E$ de $P_{3,E} \cup v_E(\mathbb{R} \times S^1) \cup P_{2,E}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $v_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset \mathcal{U}$, para todo $n \geq n_0$.

Como mencionamos anteriormente, o estudo da convergência dos cilindros $\tilde{v}'_n = (b'_n, v'_n)$ é completamente análogo à análise que acabamos de realizar para a sequência de cilindros $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$. Assim finalizamos a demonstração da Proposição 2.3.10-ii).

3.5.3 Demonstração da Proposição 2.3.10-iii)

No item i) da Proposição 2.3.10, construímos um par de planos rígidos $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E})$ e $\tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E})$, ambos assintóticos à órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$, de modo que as imagens $u_{1,E}(\mathbb{C})$ e $u_{2,E}(\mathbb{C})$ coincidem com os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera $\partial S_E = \partial S'_E$. Já no item ii) desta proposição, obtivemos um par de cilindros rígidos $\tilde{v}_E = (b_E, v_E)$ e $\tilde{v}'_E = (b'_E, v'_E)$ que são assintóticos em seus furos positivos a $P_{3,E}$ e a $P'_{3,E}$, respectivamente, e são ambos assintóticos a $P_{2,E}$ em seus furos negativos. Além disso, vimos que as imagens $V_E = v_E(\mathbb{R} \times S^1)$ e $V'_E = v'_E(\mathbb{R} \times S^1)$ estão contidas, respectivamente, em $\dot{S}_E \setminus P_{3,E}$ e $\dot{S}'_E \setminus P'_{3,E}$, onde $\dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$ e $\dot{S}'_E = S'_E \setminus \partial S'_E$. Considere os conjuntos $\mathcal{V}_E \subset S_E$ e $\mathcal{V}'_E \subset S'_E$, definidos por

$$\mathcal{V}_E = \dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E}) \quad \text{e} \quad \mathcal{V}'_E = \dot{S}'_E \setminus (V'_E \cup P'_{3,E}),$$

ambos homeomorfos a 3-bola aberta. Nesta subseção, vamos folhear cada uma destas bolas com uma família a um parâmetro de planos assintóticos a $P_{3,E}$, no caso de \mathcal{V}_E , ou assintóticos a $P'_{3,E}$, no caso de \mathcal{V}'_E . Lidaremos apenas com \mathcal{V}_E , pois a construção para \mathcal{V}'_E é completamente análoga.

Relembrando as notações necessárias, a folheação estável de energia finita $\tilde{\mathcal{F}}_n$ contém um par de planos rígidos $\tilde{u}_{1,n} = (a_{1,n}, u_{1,n})$ e $\tilde{u}_{2,n} = (a_{2,n}, u_{2,n})$, ambos assintóticos a $P_{2,n}$, e um cilindro rígido $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$, que é assintótico a $P_{3,n}$ em seu furo positivo e a $P_{2,n}$ em seu furo negativo. A 2-esfera $U_n = u_{1,n}(\mathbb{C}) \cup P_{2,n} \cup u_{2,n}(\mathbb{C})$ separa W_E em duas componentes \dot{S}_n e \dot{S}'_n , contendo as órbitas $P_{3,n}$ e $P'_{3,n}$ respectivamente, e a imagem $v_n(\mathbb{R} \times S^1)$ está contida em $\dot{S}_n \setminus P_{3,n}$. A folheação $\tilde{\mathcal{F}}_n$ contém também uma família suave de planos $\tilde{w}_{\tau,n} = (d_{\tau,n}, w_{\tau,n}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, com $\tau \in (0, 1)$, tal que $\tilde{w}_{\tau,n}$ é assintótico a $P_{3,n}$ para todo $\tau \in (0, 1)$ e a família de planos $D_{\tau,n} := w_{\tau,n}(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$, folheia a 3-bola aberta $\mathcal{V}_n := \dot{S}_n \setminus (v_n(\mathbb{R} \times S^1) \cup P_{3,n})$.

Fixe um ponto $p_0 \in \mathcal{V}_E$. Devido às convergências $\tilde{u}_{1,n} \rightarrow \tilde{u}_{1,E}$, $\tilde{u}_{2,n} \rightarrow \tilde{u}_{2,E}$ e $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_E$, obtidas na Proposição 2.3.10-i)-ii), temos que $p_0 \in \mathcal{V}_n$ para todo n grande. Portanto, pelas propriedades da folheação $\tilde{\mathcal{F}}_n$ que acabamos de comentar, para cada n grande, existe um único $\tau_n \in (0, 1)$ de maneira que o plano \tilde{J}_n -holomorfo $\tilde{w}_{\tau_n,n} = (d_{\tau_n,n}, w_{\tau_n,n}) \in \tilde{\mathcal{F}}_n$, assintótico a $P_{3,n}$, satisfaz $p_0 \in w_{\tau_n,n}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{V}_n$. Para simplificar a notação, denotamos cada plano $\tilde{w}_{\tau_n,n} = (d_{\tau_n,n}, w_{\tau_n,n})$ por $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$. No próximo resultado, analisamos a compacidade da sequência \tilde{w}_n .

Proposição 3.5.10. *Para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, ocorre o seguinte: seja $p_0 \in \mathcal{V}_E$ e considere, para cada n grande, o plano \tilde{J}_n -holomorfo de energia finita $\tilde{w}_n = (d_n, w_n) \in \tilde{\mathcal{F}}_n$ assintótico a $P_{3,n}$ tal que $p_0 \in w_n(\mathbb{C})$. Então, a menos de reparametrização e translação na direção real, $|\nabla \tilde{w}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in \mathbb{C}$ e em $n \in \mathbb{N}$ e existe um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{w}_E = (d_E, w_E) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ assintótico a $P_{3,E}$ tal que $p_0 \in w_E(\mathbb{C}) \subset \mathcal{V}_E$ e $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}_E$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda, \tilde{w}_E e w_E são mergulhos e w_E é transversal ao campo de Reeb X_{λ_E} .*

Demonstração. Para cada $E, \delta > 0$ pequenos, sabemos que a 2-esfera $N_E^\delta \subset \dot{S}_E$, definida em coordenadas locais por $N_E^\delta = \{q_1 + p_1 = \delta\} \cap K^{-1}(E)$, separa as órbitas periódicas $P_{3,n}$ e $P_{2,n}$ para todo n . Denotamos por $U_E^\delta \subset \dot{S}_E$ a componente de $W_E \setminus N_E^\delta$ contendo $P_{3,E}$.

Temos duas possibilidades para a sequência de planos $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$. A primeira delas é que existe $\delta > 0$ pequeno tal que, para todo n grande,

$$w_n(\mathbb{C}) \cap N_E^\delta = \emptyset. \quad (3.123)$$

Neste caso, reparametrizamos e \mathbb{R} -transladamos $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$ de modo que

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w_n^* d\lambda_n = \gamma_0 \quad \text{e} \quad d_n(0) = 0 = \min_{z \in \mathbb{C}} d_n(z) \quad (3.124)$$

para todo n , onde $0 < \gamma_0 \ll T_{3,E}$ é fixado e $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ é o disco unitário fechado.

Suponha, por absurdo, que existam uma sequência de pontos $z_n \in \mathbb{C}$ e uma subsequência de \tilde{w}_n , ainda denotada por \tilde{w}_n , tais que $|\nabla \tilde{w}_n(z_n)|_n \rightarrow +\infty$. Assim como fizemos na demonstração da Proposição 3.5.2, podemos reescalar a sequência \tilde{w}_n em torno dos pontos z_n para produzir um plano de energia finita assintótico a $P_{3,E}$ em $+\infty$. De fato, considere $R_n := |\nabla \tilde{w}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty$ e escolha uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ tal que $\epsilon_n R_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Usando o Lema 3.5.1, podemos modificar levemente as sequências z_n e ϵ_n , se necessário, para que a seguinte desigualdade seja satisfeita

$$|\nabla \tilde{w}_n(z)|_n \leq 2|\nabla \tilde{w}_n(z_n)|_n \quad \text{para todo} \quad |z - z_n| \leq \epsilon_n. \quad (3.125)$$

Consideramos então a sequência $\tilde{u}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ de curvas \tilde{J}_n -holomorfas, definidas por

$$\tilde{u}_n(z) = (b_n(z), u_n(z)) = \left(d_n \left(z_n + \frac{z}{R_n} \right) - d_n(z_n), w_n \left(z_n + \frac{z}{R_n} \right) \right), \quad (3.126)$$

que satisfazem $\tilde{u}_n(0) \in \{0\} \times W_E$ e, devido a (3.125), $|\nabla \tilde{u}_n(z)|_n \leq 2$ para todo $|z| \leq \epsilon_n R_n$ e para todo n . Assim, por regularidade elíptica usual, obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência de planos \tilde{u}_n e, portanto, encontramos um plano \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{u} = (b, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Por construção, o plano \tilde{u} é tal que $\tilde{u}(0) \in \{0\} \times W_E$ e, além disso, $|\nabla \tilde{u}(0)|_E = 1$, donde segue que \tilde{u} é não-constante. Lembramos que $|\cdot|_E$ é a norma induzida pela estrutura quase-complexa $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$, como em (3.95). E, visto que

$E(\tilde{u}_n) \leq E(\tilde{w}_n) = T_{3,n}$ para todo n , obtemos pelo Lema de Fatou que

$$0 < \int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda_E \leq E(\tilde{u}) \leq T_{3,E}.$$

Observe que a condição (3.123) e o comportamento assintótico dos planos de energia finita \tilde{w}_n implicam que a imagem $w_n(\mathbb{C})$ está contida em U_E^δ para todo n grande. E, segundo a Proposição A.0.3, não existem órbitas periódicas em $U_E^\delta \setminus P_{3,E}$ com ação menor ou igual a $T_{3,E}$ que não estejam enlaçadas com $P_{3,E}$. Sendo assim, como $w_n(\mathbb{C}) \cap P_{3,E} = \emptyset$ para todo n , podemos concluir que $P_{3,E}$ é o único limite assintótico de \tilde{u} em $+\infty$ e, em particular,

$$E(\tilde{u}) = \int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda_E = T_{3,E}. \quad (3.127)$$

Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$. De fato, caso contrário, para qualquer $\epsilon > 0$ existiria uma subsequência de z_n , ainda denotada por z_n , satisfazendo $|z_n| \geq 1 + \epsilon$ ou $|z_n| \leq 1 - \epsilon$ para todo n . Então, usando (3.124), obteríamos que, para qualquer $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} u^* d\lambda_E &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} u_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\epsilon_n R n}(0)} u_n^* d\lambda_n \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\epsilon_n}(z_n)} w_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{\gamma_0, T_{3,n} - \gamma_0\} = \max\{\gamma_0, T_{3,E} - \gamma_0\} < T_{3,E}. \end{aligned}$$

Isto implica que $\int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda_E < T_{3,E}$, contradizendo (3.127). Logo, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $z_n \rightarrow z_* \in \partial\mathbb{D}$. Por (3.127), temos que o ponto de *bubbling-off* z_* “rouba” $T_{3,E}$ da energia $d\lambda_E$ e, então, não podem existir outros pontos de *bubbling-off* para a sequência \tilde{w}_n além de z_* . Portanto, usando (3.124), obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência \tilde{w}_n em $\mathbb{C} \setminus \{z_*\}$ e, passando a uma subsequência de \tilde{w}_n , temos que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{v}$ em $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \{z_*\})$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{v} = (a, v) : \mathbb{C} \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo. Observe que \tilde{v} é não-constante, pois, por (3.124),

$$\int_{\{|z|=2\}} v^* \lambda_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|z|=2\}} w_n^* \lambda_n \geq T_{3,E} - \gamma_0 > 0. \quad (3.128)$$

Além disso, pelo Lema de Fatou, temos que $E(\tilde{v}) \leq \limsup_n T_{3,n} = T_{3,E}$ e, por (3.127), obtemos que

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \{z_*\}} v^* d\lambda_E = 0. \quad (3.129)$$

Usando (3.128) e (3.129), vemos que z_* é um furo não-removível de \tilde{v} . Logo, aplicando a caracterização de superfícies de energia finita com energia $d\lambda_E$ igual a zero [29, Teorema 6.11], encontramos uma órbita periódica $P \subset W_E$ de λ_E tal que a imagem de \tilde{v} coincide com o cilindro trivial $\mathbb{R} \times P$. Todavia, por (3.124), a coordenada real de \tilde{v} deveria ser limi-

tada inferiormente por 0. Com esta contradição, provamos que $|\nabla \tilde{w}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in \mathbb{C}$ e em $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, por (3.124) e regularidade elíptica usual, obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência \tilde{w}_n e, portanto, a menos da extração de uma subsequência, temos que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um plano \tilde{J}_E -holomorfo. Por (3.124) e pelo Lema de Fatou, temos que $0 < E(\tilde{w}) \leq T_{3,E}$ e então, devido a Proposição A.0.3 e ao fato de que $w_n(\mathbb{C}) \subset U_E^\delta \setminus P_{3,E}$ para todo n grande, concluímos que \tilde{w} é assintótico à órbita periódica $P_{3,E}$ em $+\infty$.

Agora, vamos considerar uma segunda possibilidade para a sequência de planos $\tilde{w}_n = (d_n, w_n) \in \tilde{\mathcal{F}}_n$ satisfazendo $p_0 \in w_n(\mathbb{C})$. Ao invés de (3.123), vamos assumir que, para todo n grande,

$$w_n(\mathbb{C}) \cap N_E^{\delta_0} \neq \emptyset \tag{3.130}$$

para algum $\delta_0 > 0$ pequeno.

Fixe $\delta_1 > \delta_0 > 0$ pequeno e seja $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ uma função suave satisfazendo $g(t) = 0$ para $t \in [0, \delta_0]$, g restrita a $[\delta_0, \delta_1]$ é estritamente crescente e $g(t) = 1$ para $t \geq \delta_1$. Observe que g induz uma função suave $G : S_E \rightarrow [0, 1]$ que, em coordenadas locais $x = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in V$, é dada por $G(x) = g(q_1 + p_1)$, onde V é a vizinhança do sela-centro dada na Hipótese 1, e $G \equiv 1$ no complementar de V . A função G se estende a uma função suave em $W_E = S_E \cup S'_E$, também denotada por G , declarando que $G|_{S'_E} \equiv 0$. Veja Figura 3.7. Para cada n , considere a função suave $\bar{G}_n : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ definida por $\bar{G}_n(z) = G(w_n(z))$.

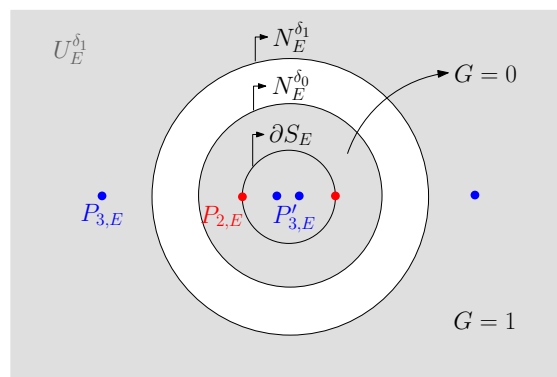


Figura 3.7: Ilustração da função suave $G : W_E \rightarrow [0, 1]$. Aqui representamos um corte da 3-esfera $W_E = S_E \cup S'_E$ (vista como $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$), com $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$, $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$ e $P_{2,E} \subset \partial S_E = \partial S'_E = N_E^0$. A função G , quando restrita à componente de $W_E \setminus N_E^{\delta_0}$ contendo $P_{2,E}$, é igual a 0 e, quando restrita à componente $U_E^{\delta_1}$ de $W_E \setminus N_E^{\delta_1}$ que contém $P_{3,E}$, é igual a 1.

Por (3.130) e por \tilde{w}_n ser assintótico a $P_{3,n}$ em $+\infty$, para cada n , temos que a imagem de \bar{G}_n coincide com $[0, 1]$ para todo n grande e, mais ainda, $\bar{G}_n(z) = 1$ se $|z|$ é grande. Pelo Teorema de Sard, encontramos uma sequência $(y_n)_n$ contida no intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ tal que, para cada n , y_n é um valor regular da função \bar{G}_n . Sendo assim, $K_n := \bar{G}_n^{-1}(y_n) \subset \mathbb{C}$ é um conjunto compacto de dimensão 1 formado, portanto, por um número finito de círculos mergulhados. Para cada n , seja

$$r_n = \inf\{r > 0 : \exists \text{ um disco fechado } D_r \subset \mathbb{C} \text{ com raio } r \text{ satisfazendo } K_n \subset D_r\}.$$

Como K_n contém pelo menos dois pontos, temos que $r_n > 0$ e, mais ainda, existe um disco fechado D_{r_n} com raio r_n tal que $K_n \subset D_{r_n}$. Após uma mudança de coordenadas do tipo $\mathbb{C} \ni z \mapsto az + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$, podemos assumir que D_{r_n} coincide com o disco unitário fechado $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ e que $-i \in K_n$, para todo n . Além disso, pelo modo como o raio r_n foi definido, podemos assumir também que, além de $-i$, a interseção $\partial\mathbb{D} \cap K_n$ contém um ponto z'_n tal que $\text{Im}(z'_n) \geq 0$.

Com as considerações acima, vemos que é possível reparametrizar e \mathbb{R} -transladar a sequência $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$ de modo que

$$\begin{aligned} \bar{G}_n|_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} > y_n &\Rightarrow w_n(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \subset U_E^{\delta_n}, \\ \bar{G}_n(-i) = y_n &\Rightarrow w_n(-i) \in N_E^{\delta_n}, \\ \bar{G}_n(z'_n) = y_n &\Rightarrow w_n(z'_n) \in N_E^{\delta_n}, \text{ com } z'_n \in \partial\mathbb{D} \text{ e } \text{Im}(z'_n) \geq 0, \\ d_n(2) &= 0, \end{aligned} \tag{3.131}$$

onde $\delta_n = g^{-1}(y_n)$ pertence ao intervalo (δ_0, δ_1) para cada n . Observe que, por (3.130) e (3.131), temos necessariamente que

$$\exists z''_n \in \mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D} \text{ tal que } w_n(z''_n) \in N_E^{\delta_0}. \tag{3.132}$$

A seguir, vamos mostrar que, com a renormalização (3.131), $|\nabla \tilde{w}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in \mathbb{C}$ e em $n \in \mathbb{N}$. Para isso, suponha por absurdo que existam uma sequência $z_n \in \mathbb{C}$ e uma subsequência de \tilde{w}_n , mais uma vez denotada por \tilde{w}_n , tais que $|\nabla \tilde{w}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty$.

Afirmamos, em primeiro lugar, que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |z_n| \leq 1$. De fato, caso contrário, encontramos $\varepsilon > 0$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $|z_n| > 1 + \varepsilon$ para todo n . Assim como fizemos na primeira parte desta demonstração, podemos reescalar a sequência \tilde{w}_n em torno dos pontos z_n para produzir um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita assintótico a $P_{3,E}$. Com efeito, usando o Lema 3.5.1, escolhemos uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ tal que (3.125) seja satisfeita e, deste modo, os planos \tilde{J}_n -holomorfos $\tilde{u}_n = (b_n, u_n)$, definidos como em (3.126), admitem uma limitação C_{loc}^∞ . Disto segue que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{u} = (b, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um plano \tilde{J}_E -holomorfo tal que $0 < \int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda_E \leq E(\tilde{u}) \leq T_{3,E}$. Por (3.131) e pela suposição de que $|z_n| > 1 + \varepsilon$, temos que $w_n(B_{\epsilon_n}(z_n)) \subset U_E^{\delta_n} \subset U_E^{\delta_0}$ para todo n grande. E, uma vez que qualquer órbita periódica contida em $U_E^{\delta_0} \setminus P_{3,E}$ com ação menor ou igual a $T_{3,E}$ está enlaçada com $P_{3,E}$ pela Proposição A.0.3, podemos concluir que $P_{3,E}$ é o único limite assintótico de \tilde{u} em $+\infty$ e

$$E(\tilde{u}) = \int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda_E = T_{3,E}. \tag{3.133}$$

Suponha que $|z_n|$ é limitado. Neste caso, podemos assumir que $z_n \rightarrow z_* \in \mathbb{C}$ quando $n \rightarrow \infty$, com $|z_*| \geq 1 + \varepsilon$. Por (3.133), vemos que o ponto de *bubbling-off* z_* “rouba” $T_{3,E}$ da energia $d\lambda_E$ e, portanto, não pode haver pontos de *bubbling-off* para a sequência \tilde{w}_n em $\mathbb{C} \setminus \{z_*\}$. Sendo assim, com (3.131), obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para $\tilde{w}_n|_{\mathbb{C} \setminus \{z_*\}}$, possivelmente após um translação apropriada da sequência \tilde{w}_n na direção real, caso ocorra $z_* = 2$. Logo,

encontramos uma curva \tilde{J}_E -holomorfa de energia finita $\tilde{v} = (a, v) : \mathbb{C} \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{v}$ em $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \{z_*\})$ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência. Pelo fato de z_* acumular uma energia $d\lambda_E$ igual a $T_{3,E}$, obtemos também que $\int_{\mathbb{C} \setminus \{z_*\}} v^* d\lambda_E = 0$ e que z_* é um furo negativo de \tilde{v} . Então, pela caracterização das superfícies de energia finita com energia $d\lambda_E = 0$ [29, Teorema 6.11], concluímos que a imagem de \tilde{v} coincide com um cilindro trivial $\mathbb{R} \times P$, onde P é uma órbita periódica de λ_E com ação menor ou igual a $T_{3,E}$. Considerando (3.131) e a Proposição A.0.3, que garante que qualquer órbita periódica de λ_E em $\dot{S}_E \setminus P_{3,E}$ com ação menor ou igual a $T_{3,E}$ deve estar enlaçada com $P_{3,E}$, concluímos que $P = P_{3,E}$ e, portanto, $v(\mathbb{C} \setminus \{z_*\}) = P_{3,E}$. Entretanto, por (3.132), deveria existir algum ponto em \mathbb{C} que é mapeado por v na 2-esfera $N_E^{\delta_0}$, contradizendo o fato de $N_E^{\delta_0} \cap P_{3,E} = \emptyset$.

Suponha agora que $|z_n| \rightarrow \infty$. Do mesmo modo que antes, temos que a sequência z_n “rouba” $T_{3,E}$ da energia $d\lambda_E$ por (3.133) e, conseqüentemente, não existem pontos de *bubbling-off* para a sequência \tilde{w}_n em \mathbb{C} . Com isso, obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para \tilde{w}_n , devido a (3.131), e encontramos um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita $\tilde{v} = (a, v) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência. Uma vez que $|z_n| \rightarrow \infty$ e a sequência z_n “rouba” $T_{3,E}$ da energia $d\lambda_E$, obtemos que $\int_{\mathbb{C}} v^* d\lambda_E = 0$ e disto segue que \tilde{v} é constante. Mas, por (3.131) e (3.132), deveriam existir pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ tais que $v(z_1) \in N_E^{\delta_0}$ e $v(z_2) \in N_E^{\bar{\delta}}$, onde $\bar{\delta}$ satisfaz $g(\bar{\delta}) \geq \frac{1}{2} > 0 = g(\delta_0) \Rightarrow \bar{\delta} > \delta_0$. Assim, $N_E^{\delta_0} \cap N_E^{\bar{\delta}} = \emptyset$ e, portanto, $v(z_1) \neq v(z_2)$, contradizendo o fato de \tilde{v} ser constante.

Com estas contradições, mostramos finalmente que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |z_n| \leq 1. \tag{3.134}$$

Seja Γ_0 o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ para os quais existem uma sequência de pontos $z_j \rightarrow z$ e uma subsequência \tilde{w}_{n_j} de \tilde{w}_n tais que $|\nabla \tilde{w}_{n_j}(z_j)|_{n_j} \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Por (3.134), sabemos que $\Gamma_0 \subset \mathbb{D}$. Após um procedimento indutivo, como aquele realizado na demonstração da Proposição 3.5.4, encontramos uma curva \tilde{J}_E -holomorfa $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que

$$\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w} \text{ em } C_{\text{loc}}^\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

a menos da extração de uma subsequência. Aqui, $\Gamma \subset \Gamma_0$ é um conjunto finito de pontos, pois $\limsup_n \int_{\mathbb{C}} w_n^* d\lambda_n = T_{3,E} < \infty$ e, devido ao Lema 3.5.1 e a Proposição A.0.1, cada ponto de *bubbling-off* pertencente a Γ acumula pelo menos $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$, para $E > 0$ pequeno. Por (3.131) e (3.132), temos que \tilde{w} é não-constante e, pelo Lema de Fatou, $E(\tilde{w}) \leq \limsup_n T_{3,n} = T_{3,E}$. Mais ainda, todos os furos em Γ são negativos e, em decorrência de (3.131) e do fato de que toda órbita periódica em $U_E^{\delta_0} \setminus P_{3,E}$ com ação menor ou igual a $T_{3,E}$ deve estar enlaçada com $P_{3,E}$, veja Proposição A.0.3, obtemos que $P_{3,E}$ é o único limite assintótico de \tilde{w} em seu furo positivo $+\infty$. Por $P_{3,E}$ ser uma órbita periódica simples, concluímos que \tilde{w} é *somewhere injective*, de acordo com a Definição B.0.3. Observe ainda que a imagem $w(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ está contida em \dot{S}_E . De fato, caso contrário, pelo Princípio da Similaridade de Carleman, as interseções entre $w(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ e ∂S_E seriam isoladas e assim,

por positividade e estabilidade de interseções de curvas pseudo-holomorfas, teríamos que $w_n(\mathbb{C}) \cap \partial S_n \neq \emptyset$ para todo n grande, uma contradição.

Nosso objetivo é mostrar que $\Gamma_0 = \Gamma = \emptyset$. Suponha então, por absurdo, que $\Gamma \neq \emptyset$. Afirmamos que, neste caso, Γ deve conter um único ponto $z^* \in \mathbb{D}$ e que \tilde{w} é assintótico a $P_{2,E}$ neste furo. De fato, como $w_n(\mathbb{C}) \cap P_{3,E} = \emptyset$ para todo n e $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ quando $n \rightarrow \infty$, a propriedade de enlaçamento dada pela Proposição A.0.3 nos permite concluir que os limites assintóticos de \tilde{w} em cada um de seus furos negativos coincidem com $P_{3,E}$ ou com algum recobrimento de $P_{2,E}$. Se \tilde{w} for assintótica a $P_{3,E}$ em algum furo $z_* \in \Gamma$ então, necessariamente, z_* é o único furo negativo de \tilde{w} , pois, caso contrário, $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma} w^* d\lambda_E < T_{3,E} - T_{3,E} = 0$, uma contradição. Sendo assim, devemos ter $\int_{\mathbb{C} \setminus \{z_*\}} w^* d\lambda_E = T_{3,E} - T_{3,E} = 0$ e, como \tilde{w} é não-constante, \tilde{w} é um cilindro sobre a órbita periódica $P_{3,E}$. Sejam z_n e δ_n como em (3.131), escolhidos de modo que $z_n \in S^1$, $\text{Im}(z_n) \geq 0$ e $g(\delta_n) = y_n \in (\frac{1}{2}, 1)$ para cada n . Podemos assumir que $z_n \rightarrow z'$ e $\delta_n \rightarrow \delta'$ quando $n \rightarrow \infty$, com $z' \in S^1$, $\text{Im}(z') \geq 0$ e $g(\delta') \in [\frac{1}{2}, 1]$. Deste modo, $z' \neq -i$ e, portanto, mesmo que o ponto de *bubbling-off* z_* coincida com $-i$ ou com z' , ainda podemos usar (3.131) para concluir que $w(\mathbb{C} \setminus \{z_*\}) \cap N_E^{\delta'} \neq \emptyset$. Isto contradiz o fato de \tilde{w} ser um cilindro sobre a órbita periódica $P_{3,E}$, pois $N_E^{\delta'} \cap P_{3,E} = \emptyset$. Com isso mostramos que, em cada um de seus furos negativos, \tilde{w} é assintótica a algum recobrimento de $P_{2,E}$. Uma vez que \tilde{w} é *somewhere injective* e $w(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \subset \dot{S}_E$, se ocorresse $\#\Gamma \geq 2$ ou se, para algum furo em Γ , \tilde{w} fosse assintótica a um p -recobrimento de $P_{2,E}$ com $p \geq 2$, então w admitiria auto-interseções segundo a Proposição B.0.4-i)-ii). Isto implicaria que \tilde{w} intersecta a curva pseudo-holomorfa $\tilde{w}_c := (d + c, w)$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ e, mais ainda, como \tilde{w} é *somewhere injective* e não é um cilindro sobre uma órbita periódica, as interseções entre \tilde{w} e \tilde{w}_c seriam isoladas pelo Princípio da Similaridade de Carleman. Logo, por positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, teríamos que \tilde{w}_n intersecta $\tilde{w}_{n,c} := (d_n + c, w_n)$ para n grande, contradizendo o fato de w_n ser um mergulho para cada $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, o conjunto Γ é formado por um único ponto $z^* \in \mathbb{D}$ e a curva \tilde{J}_E -holomorfa de energia finita $\tilde{w} : \mathbb{C} \setminus \{z^*\} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, satisfazendo $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, é assintótica a $P_{2,E}$ em seu furo negativo z^* e assintótica a $P_{3,E}$ em seu furo positivo $+\infty$. Em particular,

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \{z^*\}} w^* d\lambda_E = T_{3,E} - T_{2,E}. \quad (3.135)$$

Vamos precisar da afirmação a seguir, cuja prova segue os mesmos passos da demonstração do Lema 3.5.6.

Afirmação IV: Para $E > 0$ suficientemente pequeno, ocorre o seguinte: dada uma vizinhança S^1 -invariante \mathcal{W}_1 da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{3,E}(T_{3,E}t)$ em $C^\infty(S^1, W_E)$, existe $R_1 > 0$ tal que, para todo $R \geq R_1$ e todo n grande, a curva fechada $t \mapsto w_n(Re^{2\pi it})$ está contida em \mathcal{W}_1 .

Para demonstrar essa afirmação, vamos mostrar primeiramente que, para qualquer $\epsilon > 0$

e qualquer sequência $R_n \rightarrow +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, se $n \geq n_0$, então

$$\int_{\mathbb{C} \setminus B_{R_n}(0)} w_n^* d\lambda_n \leq \epsilon. \quad (3.136)$$

Suponha, por absurdo, que possamos encontrar um $\epsilon > 0$ e uma sequência $R_n \rightarrow +\infty$ satisfazendo $\int_{\mathbb{C} \setminus B_{R_n}(0)} w_n^* d\lambda_n > \epsilon$ para todo n . Neste caso, como a energia $d\lambda_n$ do plano \tilde{w}_n é igual a $T_{3,n}$ para cada n , obtemos que

$$\int_{B_{R_0}(0)} w_n^* d\lambda_n \leq T_{3,n} - \epsilon \quad (3.137)$$

para todo $R_0 > 0$ e todo n grande. Além disso, como z^* é um furo negativo de \tilde{w} , dado qualquer $r_0 > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\int_{B_{r_0}(z^*)} w_n^* d\lambda_n \geq T_{2,E} - \frac{\epsilon}{2} \quad (3.138)$$

para todo n grande. Tendo em vista que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, (3.137) e (3.138) implicam a seguinte desigualdade

$$\int_{B_{R_0}(0) \setminus B_{r_0}(z^*)} w^* d\lambda_E \leq T_{3,E} - \epsilon - \left(T_{2,E} - \frac{\epsilon}{2} \right) = T_{3,E} - T_{2,E} - \frac{\epsilon}{2}$$

para todo n grande. Disto segue, pela arbitrariedade de R_0 e r_0 , que

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \{z^*\}} w^* d\lambda_E \leq T_{3,E} - T_{2,E} - \frac{\epsilon}{2} < T_{3,E} - T_{2,E},$$

contradizendo (3.135). Com isso, mostramos (3.136).

Agora, vamos assumir que existem uma sequência $R_j \rightarrow +\infty$ e uma subsequência \tilde{w}_{n_j} de \tilde{w}_n tais que as curvas fechadas $t \mapsto w_{n_j}(R_j e^{2\pi i t})$ não estão contidas na vizinhança \mathcal{W}_1 . Denotamos as sequências R_j e \tilde{w}_{n_j} , com $j \in \mathbb{N}$, respectivamente por R_n e \tilde{w}_n , com $n \in \mathbb{N}$.

Considere as curvas \tilde{J}_n -holomorfas $\tilde{v}_n : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ definidas por

$$\tilde{v}_n(s, t) = (b_n(s, t), v_n(s, t)) = (d_n(R_n e^{2\pi(s+it)}) - d_n(R_n), w_n(R_n e^{2\pi(s+it)})).$$

Para todo n , temos que $b_n(0, 0) = 0$ e a curva fechada $S^1 \ni t \mapsto v_n(0, t) = w_n(R_n e^{2\pi i t})$ não está contida na vizinhança \mathcal{W}_1 . Além disso, observe que, para qualquer $R > 0$,

$$(s, t) \in [-R, R] \times S^1 \Leftrightarrow R_n e^{2\pi(s+it)} \in B_{R_n e^{2\pi R}}(0) \setminus B_{R_n e^{-2\pi R}}(0). \quad (3.139)$$

Por esta razão, podemos garantir que a sequência \tilde{v}_n possui uma limitação C_{loc}^∞ . De fato, qualquer sequência de pontos (s_n, t_n) convergindo a um ponto de *bubbling-off* em $\mathbb{R} \times S^1$ “rouba” pelo menos $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$, devido ao Lema 3.5.1 e a Proposição A.0.1, e corresponde a uma sequência de pontos z_n em \mathbb{C} satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$, por (3.139) e pelo fato de $R_n \rightarrow +\infty$. Mas isto contradiz (3.136). Portanto, a menos da extração de uma

subsequência, temos que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo. Além disso, (3.136) e (3.139) também implica que, para qualquer $S_0 > 0$ fixado e todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{[-S_0, S_0] \times S^1} v^* d\lambda_E &\leq \limsup_n \int_{[-S_0, S_0] \times S^1} v_n^* d\lambda_n \\ &\leq \limsup_n \int_{B_{e^{2\pi S_0 R_n}}(0) \setminus B_{e^{-2\pi S_0 R_n}}(0)} w_n^* d\lambda_n \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

se n for suficientemente grande e disto segue que $\int_{\mathbb{R} \times S^1} v^* d\lambda_E = 0$. Usando o Lema de Fatou, vemos que $E(\tilde{v}) \leq \limsup_n T_{3,n} = T_{3,E}$ e, mais ainda, temos que \tilde{v} é não-constante, pois

$$T_{3,E} \geq \int_{\{0\} \times S^1} v^* \lambda_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times S^1} v_n^* \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial B_{R_n}(0)} w_n^* \lambda_n \geq T_{2,E}.$$

Sendo assim, pela caracterização das superfícies de energia finita com energia $d\lambda_E$ igual a zero (Teorema 6.11 de [29]), \tilde{v} é um cilindro sobre uma órbita periódica $Q = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda_E)$. Por construção, Q é geometricamente distinta de $P_{3,E}$ e sua ação T é menor ou igual a $T_{3,E}$. Por (3.131) e pelo fato de $R_n \rightarrow +\infty$, as curvas fechadas $t \mapsto v_n(0, t) = w_n(R_n e^{2\pi i t})$ estão contidas em $U_E^{\delta_0}$, logo Q também é geometricamente distinta de $P_{2,E}$. Além disso, Q não está enlaçada com $P_{3,E}$, pois, caso contrário, as curvas fechadas $t \mapsto v_n(0, t)$ também estariam, para n suficientemente grande. Mas isso contradiz a Proposição A.0.3 se $E > 0$ for suficientemente pequeno. Assim, concluímos a prova da Afirmação IV.

É possível mostrar também que \tilde{w} tem um decaimento exponencial próximo ao furo $+\infty$, que é descrito por um autovetor e associado a um autovalor negativo δ do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$, no sentido de (3.114). A prova deste fato segue os mesmos passos da demonstração da Proposição 3.5.5 e, por esta razão, optamos por omiti-la. Mais que isso, pelos mesmos argumentos apresentados na demonstração da Proposição 3.5.8-(iv), obtemos que o *winding number* de e é igual a 1. Observe ainda que, além de estar contida em \dot{S}_E , a imagem $w(\mathbb{C} \setminus \{z^*\})$ não intersecta a órbita periódica $P_{3,E}$, pois, caso contrário, usando (3.135), o Princípio da Similaridade de Carleman e positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, concluiríamos que $w_n(\mathbb{C})$ intersecta $P_{3,n}$ para todo n grande, uma contradição. Portanto, pela unicidade obtida na Proposição B.0.2, \tilde{w} deve coincidir com o cilindro rígido $\tilde{v}_E = (b_E, v_E)$ construído na Subseção 3.5.2, a menos de reparametrização e translação na direção real.

Logo, pela Afirmação IV e pelo fato de $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, chegamos a seguinte conclusão: dado qualquer $R_2 > 0$ e dada qualquer vizinhança aberta $\mathcal{V}_1 \subset W_E$ de $v_E(\mathbb{R} \times S^1) \cup P_{3,E}$, temos que

$$w_n(\mathbb{C} \setminus B_{R_2}(z^*)) \subset \mathcal{V}_1, \forall n \text{ grande.} \quad (3.140)$$

Nosso próximo passo é analisar o comportamento das curvas $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$ próximo ao

ponto $z^* \in \mathbb{D}$, utilizando para isso um procedimento conhecido como *soft rescaling*. Para uma exposição mais geral sobre este procedimento, recomendamos as referências [27, 37, 40].

Uma vez que \tilde{w} é assintótico a $P_{2,E}$ em seu furo negativo z^* , podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$0 < \int_{\partial B_\epsilon(z^*)} w^* \lambda_E - T_{2,E} < \frac{T_{2,E}}{4}, \quad (3.141)$$

onde $\partial B_\epsilon(z^*)$ está orientado no sentido anti-horário. Agora, definimos uma sequência $z_n \rightarrow z^*$ da seguinte forma: sejam $z_n \in B_\epsilon(z^*)$ e $0 < \delta_n < \epsilon$ tais que

$$\begin{aligned} d_n(z_n) &\leq d_n(\zeta), \forall \zeta \in B_\epsilon(z^*), \\ \int_{B_\epsilon(z^*) \setminus B_{\delta_n}(z_n)} w_n^* d\lambda_n &= \frac{T_{2,E}}{2}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

A existência de δ_n satisfazendo a segunda equação de (3.142) segue de (3.141). Observe que, como z^* é um furo negativo, a primeira equação de (3.142) nos diz que $z_n \rightarrow z^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, temos que $\delta_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, supondo o contrário, podemos assumir que $\delta_n \rightarrow \bar{\delta} > 0$. Então, por (3.141) e (3.142), dado $0 < \bar{\epsilon} < \bar{\delta}$, obtemos a seguinte contradição

$$\frac{T_{2,E}}{4} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(z^*) \setminus B_{\bar{\epsilon}}(z^*)} w_n^* d\lambda_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(z^*) \setminus B_{\delta_n}(z_n)} w_n^* d\lambda_n = \frac{T_{2,E}}{2}.$$

Seja $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais satisfazendo $R_n \rightarrow +\infty$ e

$$\delta_n R_n < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.143)$$

Para cada n , considere a curva \tilde{J}_n -holomorfa $\tilde{v}_n : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ definida por

$$\tilde{v}_n(z) = (b_n, v_n) = (d_n(z_n + \delta_n z) - d_n(z_n + 2\delta_n), w_n(z_n + \delta_n z)). \quad (3.144)$$

Observamos que $\tilde{v}_n(2) \in \{0\} \times W_E$ e, pelo modo como a sequência z_n foi definida em (3.142), vemos que $z = 0$ é ponto de mínimo da função b_n , para todo n . Na afirmação a seguir, analisamos a convergência da sequência \tilde{v}_n .

Afirmação V: *A menos da extração de uma subsequência, $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita assintótico a $P_{2,E}$ em $+\infty$.*

Para provar a Afirmação V, mostremos primeiramente que $|\nabla \tilde{v}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em $z \in B_{R_n}(0)$ e em $n \in \mathbb{N}$. Suponha o contrário, isto é, que existem uma sequência de pontos $\zeta_n \in B_{R_n}(0)$ e uma subsequência de \tilde{v}_n , ainda denotada por \tilde{v}_n , tais que $|\nabla \tilde{v}_n(\zeta_n)|_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Por (3.142) e (3.143), temos que

$$\int_{B_{R_n}(0) \setminus \mathbb{D}} v_n^* d\lambda_n = \int_{B_{\delta_n R_n}(z_n) \setminus B_{\delta_n}(z_n)} w_n^* d\lambda_n \leq \frac{T_{2,E}}{2}$$

para todo n grande. E já que cada ponto de *bubbling-off* da sequência \tilde{v}_n deve “roubar” pelo menos $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$, devido ao Lema 3.5.1 e a Proposição A.0.1, podemos concluir que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\zeta_n| \leq 1$. Além disso, para qualquer $R > 0$ grande fixado, temos, por (3.141), que

$$\int_{\partial B_R(0)} v_n^* \lambda_n = \int_{\partial B_{R\delta_n}(z_n)} w_n^* \lambda_n < \int_{\partial B_\epsilon(z^*)} w_n^* \lambda_n < \frac{5T_{2,E}}{4} \quad (3.145)$$

para todo n grande.

Após um procedimento indutivo, como aquele realizado na demonstração da Proposição 3.5.4, encontramos uma curva \tilde{J}_E -holomorfa de energia finita $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência, onde $\Gamma' \subset \mathbb{D}$ é um conjunto finito de pontos de *bubbling-off* da sequência \tilde{v}_n . Note que aqui estamos usando o fato de $\tilde{v}_n(2) \in \{0\} \times W_E$ para todo n .

Visto que cada ponto em Γ' acumula uma energia $d\lambda_E$ de pelo menos $T_{2,E}$, (3.145) garante que Γ' pode conter no máximo um elemento. Suponha que $\#\Gamma' = 1$ e denote por \bar{z} o único ponto em Γ' . Neste caso, temos que \bar{z} é um furo negativo de \tilde{v} e, conseqüentemente, \tilde{v} é não-constante e $\bar{z} = 0$, pois $z = 0$ é ponto de mínimo da função b_n para todo n . Por (3.145) e pela Proposição A.0.1, concluímos que \tilde{v} é assintótica a $P_{2,E}$ tanto no seu furo positivo $+\infty$, quanto no seu furo negativo \bar{z} e, portanto, \tilde{v} é um cilindro trivial sobre $P_{2,E}$. Por (3.142) temos que

$$\int_{\partial \mathbb{D}} v_n^* \lambda_n = \int_{\partial B_{\delta_n}(z_n)} w_n^* \lambda_n = \int_{\partial B_\epsilon(z^*)} w_n^* \lambda_n - \frac{T_{2,E}}{2}$$

para todo n . Conseqüentemente, como $\bar{z} = 0$, podemos usar (3.141) e obter que

$$\int_{\partial \mathbb{D}} v^* \lambda_E = \int_{\partial B_\epsilon(z^*)} w^* \lambda_E - \frac{T_{2,E}}{2} \leq \frac{T_{2,E}}{4} + T_{2,E} - \frac{T_{2,E}}{2} = \frac{3T_{2,E}}{4} < T_{2,E}.$$

Mas isto contradiz o fato de \tilde{v} ser um cilindro sobre a órbita periódica $P_{2,E}$. Com esta contradição concluímos que $\Gamma' = \emptyset$ e, portanto, $|\nabla \tilde{v}_n(z)|_n$ é uniformemente limitado em z e em n .

Sendo assim, uma vez que $\tilde{v}_n(2) \in \{0\} \times W_E$ para todo n , obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência de curvas \tilde{J}_n -holomorfas $\tilde{v}_n : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$. Como $R_n \rightarrow +\infty$, segue que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência, onde $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita que, por (3.145) e pela Proposição A.0.1, é assintótico a $P_{2,E}$ em $+\infty$. Com isso, finalizamos a demonstração da Afirmação V.

Observe que, pela unicidade obtida na Proposição B.0.2, o plano \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ deve coincidir, a menos de reparametrização e translação na direção real, com $\tilde{u}_{1,E}$ ou com $\tilde{u}_{2,E}$, os planos rígidos construídos na Seção 3.3. Assumindo que seja com $\tilde{u}_{1,E}$, a convergência $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ nos permite concluir que, dado qualquer $R_3 > 0$ e qualquer vizinhança $\mathcal{V}_2 \subset W_E$ de $u_{1,E}(\mathbb{C})$, as imagens $v_n(B_{R_3}(0))$ estão contidas em \mathcal{V}_2 para todo n grande. Disto segue que

$$w_n(B_{R_3\delta_n}(z_n)) \subset \mathcal{V}_2, \forall n \text{ grande.} \quad (3.146)$$

Agora, considere \mathcal{W}_2 uma pequena vizinhança S^1 -invariante da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{2,E}(T_{2,E}t)$ em $C^\infty(S^1, W_E)$. Sabendo que $P_{2,E}$ é uma órbita periódica hiperbólica, podemos assumir que não existe nenhuma outra órbita periódica além de $P_{2,E}$ contida na vizinhança \mathcal{W}_2 , módulo S^1 -reparametrizações. Como $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e \tilde{w} é assintótica a $P_{2,E}$ em seu furo negativo z^* , encontramos $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ pequeno tal que, fixando $0 < \rho \leq \epsilon_0$,

$$\text{a curva fechada } t \mapsto w_n(z_n + \rho e^{2\pi it}) \text{ está contida em } \mathcal{W}_2, \forall n \text{ grande.} \quad (3.147)$$

Do mesmo modo, como $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e \tilde{v} é assintótica a $P_{2,E}$ em seu furo positivo $+\infty$, podemos encontrar $R_0 > 0$ grande tal que, fixando $R \geq R_0$, a curva fechada $t \mapsto v_n(Re^{2\pi it})$ está contida em \mathcal{W}_2 para todo n grande e, portanto,

$$\text{a curva fechada } t \mapsto w_n(z_n + R\delta_n e^{2\pi it}) \text{ está contida em } \mathcal{W}_2, \forall n \text{ grande.} \quad (3.148)$$

Ainda pela convergência $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ e pelo fato de \tilde{v} ser assintótico a $P_{2,E}$, podemos assumir que

$$\int_{\partial B_{\delta_n R_0}(z_n)} w_n^* \lambda_n = \int_{\partial B_{R_0}(0)} v_n^* \lambda_n > \frac{T_{2,E}}{2} > 0 \quad (3.149)$$

para todo n suficientemente grande.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o cilindro \tilde{J}_n -holomorfo $\tilde{C}_n : \left[\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi}, \frac{\ln \epsilon_0}{2\pi}\right] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ da seguinte forma

$$\tilde{C}_n(s, t) = (c_n(s, t), C_n(s, t)) = \tilde{w}_n(z_n + e^{2\pi(s+it)}). \quad (3.150)$$

Observe que $s \in \left[\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi}, \frac{\ln \epsilon_0}{2\pi}\right]$ se, e somente se, $e^{2\pi s} \in [R_0 \delta_n, \epsilon_0]$. Por (3.147) e (3.148), as curvas fechadas $t \mapsto C_n\left(\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi}, t\right)$ e $t \mapsto C_n\left(\frac{\ln \epsilon_0}{2\pi}, t\right)$ estão contidas na vizinhança \mathcal{W}_2 para todo n grande. Além disso, usando (3.141), obtemos que

$$\begin{aligned} E(\tilde{C}_n) &= \sup_{\psi \in \Lambda} \int_{\left[\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi}, \frac{\ln \epsilon_0}{2\pi}\right] \times S^1} \tilde{C}_n^* d\lambda_{n,\psi} \\ &= \sup_{\psi \in \Lambda} \left(\int_{\partial B_{\epsilon_0}(z_n)} \tilde{w}_n^* \lambda_{n,\psi} - \int_{\partial B_{R_0 \delta_n}(z_n)} \tilde{w}_n^* \lambda_{n,\psi} \right) \\ &< \int_{\partial B_\epsilon(z^*)} w_n^* \lambda_n < \frac{5T_{2,E}}{4} \end{aligned} \quad (3.151)$$

para todo n grande, onde $\Lambda = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \psi' \geq 0\}$ e $\lambda_{n,\psi} = \psi \lambda_n$. Mais ainda, por (3.142) e (3.149), temos que

$$\int_{\left[\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi}, \frac{\ln \epsilon_0}{2\pi}\right] \times S^1} C_n^* d\lambda_n = \int_{B_{\epsilon_0}(z_n) \setminus B_{R_0 \delta_n}(z_n)} w_n^* d\lambda_n \leq \frac{T_{2,E}}{2} \quad (3.152)$$

$$\int_{\{\rho\} \times S^1} C_n^* \lambda_n = \int_{\partial B_{2\pi\rho}(z_n)} w_n^* \lambda_n > \frac{T_{2,E}}{2}, \forall \rho \in \left[\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi}, \frac{\ln \epsilon_0}{2\pi}\right] \quad (3.153)$$

para todo n grande. Sendo assim, estamos em condições de usar a seguinte afirmação, que

é essencialmente equivalente ao Lema 4.9 de [27].

Afirmção VI: Seja $\mathcal{W}_2 \subset C^\infty(S^1, W_E)$ uma pequena vizinhança S^1 -invariante da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{2,E}(T_{2,E}t)$, onde $P_{2,E} = (x_{2,E}, T_{2,E})$ e considere uma sequência de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) : [r_n, R_n] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ satisfazendo

$$E(\tilde{u}_n) \leq \frac{3T_{2,E}}{2}, \quad (3.154)$$

$$\int_{[r_n, R_n] \times S^1} u_n^* d\lambda_n \leq \frac{T_{2,E}}{2}, \quad (3.155)$$

$$\int_{\{\rho\} \times S^1} u_n^* \lambda_n \geq \frac{T_{2,E}}{2}, \forall \rho \in [r_n, R_n]. \quad (3.156)$$

Então, existe $h > 0$ tal que cada curva fechada $S^1 \ni t \mapsto u_n(s, t)$ está contida em \mathcal{W}_2 para todo $s \in [r_n + h, R_n - h]$.

Para demonstrar essa afirmação por absurdo, podemos assumir que existe uma sequência de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) : [r_n, R_n] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, satisfazendo (3.154), (3.155) e (3.156), de modo que

$$\text{a curva fechada } S^1 \ni t \mapsto u_n(s_n, t) \text{ não está contida em } \mathcal{W}_2 \quad (3.157)$$

para algum $s_n \in [r_n + n, R_n - n]$ e $R_n - r_n \geq 2n$. Neste caso, definimos uma nova sequência de curvas \tilde{J}_n -holomorfas $\tilde{E}_n : [r_n - s_n + \epsilon_1, R_n - s_n - \epsilon_1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ da seguinte forma

$$\tilde{E}_n(s, t) = (e_n(s, t), E_n(s, t)) = (a_n(s + s_n, t) - a_n(s_n, 0), u_n(s + s_n, t)),$$

onde $\epsilon_1 > 0$ é qualquer número real suficientemente pequeno. Note que, para todo n , $e_n(0, 0) = 0$ e a curva fechada $t \mapsto E_n(0, t) = u_n(s_n, t)$ não está contida em \mathcal{W}_2 por (3.157). Devido à propriedade (3.155), temos que $|\nabla \tilde{E}_n(s, t)|_n$ é uniformemente limitado em (s, t) e em n . De fato, se existissem uma subsequência de \tilde{E}_n , novamente denotada por \tilde{E}_n , e uma sequência de pontos $z_n = (s_n, t_n) \in [r_n - s_n + \epsilon_1, R_n - s_n - \epsilon_1] \times S^1$ satisfazendo $|\nabla \tilde{E}_n(z_n)|_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então a sequência z_n “roubaria” pelo menos $T_{2,E}$ da energia $d\lambda_E$, pelo Lema 3.5.1 e pela Proposição A.0.1, contradizendo assim (3.155). Portanto, a sequência \tilde{E}_n admite uma limitação C_{loc}^∞ e, por esta razão, encontramos um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{E} = (e, E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{E}_n \rightarrow \tilde{E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$.

Tendo em vista as propriedades de \tilde{u}_n em (3.154), (3.155) e (3.156) e, conseqüentemente, propriedades similares de \tilde{E}_n , concluímos que \tilde{E} satisfaz

$$E(\tilde{E}) \leq \frac{3T_{2,E}}{2}, \int_{\mathbb{R} \times S^1} E^* d\lambda_E \leq \frac{T_{2,E}}{2} \text{ e } \int_{\{\rho\} \times S^1} E^* \lambda_E \geq \frac{T_{2,E}}{2}, \forall \rho \in \mathbb{R}.$$

Logo, \tilde{E} é um cilindro de energia finita, não constante, com um furo negativo em $s = -\infty$ e um furo positivo em $s = +\infty$. Mais que isso, em $s = +\infty$, \tilde{E} é assintótico a uma órbita periódica de λ_E com ação menor ou igual $\frac{3T_{2,E}}{2}$ e, portanto, o mesmo ocorre em $s = -\infty$.

Sendo assim, segue da Proposição A.0.1 que, se $E > 0$ for suficientemente pequeno, então $P_{2,E}$ é o limite assintótico de \tilde{E} em ambos os furos $s = \pm\infty$, implicando que \tilde{E} é um cilindro trivial sobre $P_{2,E}$. Mas isto contradiz o fato de $t \mapsto E_n(0, t)$ não estar contido em \mathcal{W}_2 para todo n , pois $\tilde{E}_n \rightarrow \tilde{E}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Com isso, finalizamos a demonstração da Afirmação VI.

Uma vez que a sequência de cilindros \tilde{J}_n -holomorfos $\tilde{C}_n = (c_n, C_n) : \left[\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi}, \frac{\ln \epsilon_0}{2\pi}\right] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, definida em (3.150), satisfaz as propriedades (3.151), (3.152) e (3.153), podemos usar a Afirmação VI para encontrar $h > 0$ de modo que, para todo n grande, a curva fechada $S^1 \ni t \mapsto C_n(s, t)$ esteja contida na vizinhança \mathcal{W}_2 para qualquer $s \in \left[\frac{\ln R_0 \delta_n}{2\pi} + h, \frac{\ln \epsilon_0}{2\pi} - h\right]$. Disto segue que

$$\text{a curva fechada } S^1 \ni t \mapsto w_n(z_n + \rho e^{2\pi t i}) \text{ está contida em } \mathcal{W}_2$$

para todo n grande e para todo $\rho \in [e^{2\pi h} R_0 \delta_n, e^{-2\pi h} \epsilon_0]$. Consequentemente, para qualquer vizinhança $\mathcal{V}_3 \subset W_E$ de $P_{2,E}$, temos que

$$w_n(B_{e^{-2\pi h} \epsilon_0}(z_n) \setminus B_{e^{2\pi h} R_0 \delta_n}(z_n)) \subset \mathcal{V}_3, \forall n \text{ grande.} \quad (3.158)$$

Escolhendo $0 < R_2 < e^{-2\pi h} \epsilon_0$ e $R_3 > e^{2\pi h} R_0$, podemos usar (3.140), (3.146), (3.158) e o fato de que $z_n \rightarrow z^*$ quando $n \rightarrow \infty$, para concluir que, dada qualquer vizinhança pequena $\bar{\mathcal{V}} \subset W_E$ de $u_{1,E}(\mathbb{C}) \cup P_{2,E} \cup v_E(\mathbb{R} \times S^1) \cup P_{3,E}$, as imagens $w_n(\mathbb{C})$ estão contidas em $\bar{\mathcal{V}}$ para todo n grande. Lembre-se que os planos \tilde{J}_n -holomorfos de energia finita $\tilde{w}_n = (d_n, w_n) \in \tilde{\mathcal{F}}_n$ são tais que $p_0 \in w_n(\mathbb{C})$ para todo n grande. Portanto, basta tomar uma vizinhança $\bar{\mathcal{V}}$ suficientemente pequena de modo que $p_0 \notin \bar{\mathcal{V}}$ para, finalmente, encontrar uma contradição.

Com isso, chegamos à conclusão de que $|\nabla \tilde{w}_n(z)|_n$ é de fato uniformemente limitado em $z \in \mathbb{C}$ e em $n \in \mathbb{N}$ e, sendo assim, usando (3.131) e regularidade elíptica usual, obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência de planos \tilde{w}_n . Em particular, encontramos um plano \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Por (3.131) e (3.132), \tilde{w} é não-constante e, pelo Lema de Fatou, $E(\tilde{w}) \leq T_{3,E}$. Devido a (3.131) e ao fato de que toda órbita periódica em $U_E^{\delta_0} \setminus P_{3,E}$ com ação menor ou igual a $T_{3,E}$ deve estar enlaçada com $P_{3,E}$, segundo a Proposição A.0.3, obtemos que \tilde{w} é assintótico à órbita periódica $P_{3,E}$ em seu furo positivo $+\infty$.

Recapitulando, baseados nas condições de interseção (3.123) ou (3.130), dividimos esta demonstração em dois casos. Em cada um deles, reparametrizamos e \mathbb{R} -transladamos a sequência de planos \tilde{J}_n -holomorfos $\tilde{w}_n = (d_n, w_n) \in \tilde{\mathcal{F}}_n$, satisfazendo $p_0 \in w_n(\mathbb{C})$ para todo n grande, de modo que (3.124) ou (3.131) se cumprisse. Em ambos os casos, concluimos que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos de extração de subsequência, onde $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita assintótico a $P_{3,E}$ em $+\infty$. Pelo Princípio da Similaridade de Carleman e por positividade e estabilidade de interseções entre curvas pseudo-holomorfas, vemos que $w(\mathbb{C})$ não pode intersectar $u_{1,E}(\mathbb{C}), u_{2,E}(\mathbb{C}), v_E(\mathbb{C}), P_{2,E}$ ou $P_{3,E}$, pois isto implicaria interseções de $w_n(\mathbb{C})$ com $u_{1,n}(\mathbb{C}), u_{2,n}(\mathbb{C}), v_n(\mathbb{C}), P_{2,n}$ ou $P_{3,n}$ para todo n grande, uma contradição, logo $w(\mathbb{C}) \subset \mathcal{V}_E \subset \dot{S}_E$. Além disso, podemos argu-

mentar como no Lema 3.5.6, veja também [33, Lema 8.1], para concluir que, dada qualquer vizinhança $\mathcal{V}_4 \subset W_E$ de $P_{3,E}$, existe $R_0 > 0$ tal que $w_n(\mathbb{C} \setminus B_{R_0}(0)) \subset \mathcal{V}_4$ para todo n grande. Escolhendo \mathcal{V}_4 suficientemente pequena de maneira que $p_0 \notin \mathcal{V}_4$, obtemos uma sequência de pontos $\zeta_n \in B_{R_0}(0)$ que satisfaz $w_n(\zeta_n) = p_0$ para cada n . Sendo ζ_n uma sequência limitada, podemos assumir que $\zeta_n \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$ e, como $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, devemos ter que $w(z_0) = p_0$.

Podemos mostrar também, seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 7.2 de [33], que o plano \tilde{w} tem um decaimento exponencial próximo ao furo $+\infty$, no sentido de (3.160) da Proposição 3.5.11 enunciada logo abaixo. De fato, existem um autovalor negativo δ e um δ -autovetor e do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$ tais que, em coordenadas de Martinet em torno de $P_{3,E}$, temos $\tilde{w}(e^{2\pi(s+it)}) = (d(s,t), \vartheta(s,t), x(s,t), y(s,t))$, $s \gg 0$, satisfazendo as estimativas exponenciais dadas em (3.160). Neste caso, podemos considerar os *winding numbers* $\text{wind}_\infty(\tilde{w})$ e $\text{wind}_\pi(\tilde{w})$ associados ao plano de energia finita \tilde{w} . Como $CZ(P_{3,E}) = 3$, temos que $\text{wind}_\infty(+\infty) \leq \text{wind}^{<0}(A_{P_{3,E}}) = 1$ e, então, pela segunda equação de (1.52), obtemos

$$0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{w}) = \text{wind}_\infty(\tilde{w}) - 1 = \text{wind}_\infty(+\infty) - 1 \leq 1 - 1 = 0.$$

Disto segue que $\text{wind}_\infty(+\infty) = \text{wind}(e) = 1$ e $\text{wind}_\pi(\tilde{w}) = 0$ e, portanto, w é uma imersão transversal ao campo de Reeb X_{λ_E} . Mais ainda, pelo comportamento assintótico de \tilde{w} próximo ao seu furo $+\infty$, temos que \tilde{w} é um mergulho próximo ao bordo e, por ser limite C_{loc}^∞ dos mergulhos \tilde{w}_n , podemos concluir que \tilde{w} também é um mergulho.

Para mostrar que w é um mergulho, vamos proceder como na demonstração da Proposição 7.3 de [33]. Primeiramente, afirmamos que $\tilde{w}(\mathbb{C}) \neq \tilde{w}_c(\mathbb{C})$ para qualquer $c \neq 0$, onde $\tilde{w}_c = (d + c, w)$. De fato, suponha por absurdo que exista $c < 0$ tal que as imagens $\tilde{w}(\mathbb{C})$ e $\tilde{w}_c(\mathbb{C})$ coincidam. Nesta situação, dado $z \in \mathbb{C}$, encontramos $z' \in \mathbb{C}$ que satisfaz $\tilde{w}(z') = \tilde{w}_c(z)$ e, conseqüentemente, $d(z') = d(z) + c$. Iterando este argumento, obtemos uma sequência $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $d(z_n) = d(z) + nc$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $c < 0$, temos que $d(z_n) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, contradizendo o fato de que a função real d é limitada por baixo. No caso em que $c > 0$, basta construir uma sequência $z_n \in \mathbb{C}$ satisfazendo $d(z_n) = d(z) - nc$ e, assim, chegamos à mesma contradição. Portanto, as interseções entre as imagens $\tilde{w}(\mathbb{C})$ e $\tilde{w}_c(\mathbb{C})$, $c \neq 0$, devem ser isoladas pelo Princípio da Similaridade de Carleman. Todavia, por positividade e estabilidade de interseções de curvas pseudo-holomorfas, a existência de uma tal interseção implicaria que $\tilde{w}_n(\mathbb{C}) \cap \tilde{w}_{n,c}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ para n grande, onde $\tilde{w}_{n,c} = (d_n + c, w_n)$. Já que isso não ocorre, pois cada w_n é um mergulho, concluimos que $\tilde{w}(\mathbb{C}) \cap \tilde{w}_c(\mathbb{C}) = \emptyset$ para qualquer $c \neq 0$. Por esta razão, e também pelo comportamento assintótico de w próximo ao furo $+\infty$, por \tilde{w} ser um mergulho e por w ser uma imersão, podemos inferir que w é um mergulho.

Agora, pelo Teorema 1.4 de [29], obtemos a seguinte propriedade de unicidade: se $\tilde{w}_1 = (d_1, w_1)$ e $\tilde{w}_2 = (d_2, w_2)$ são planos \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita assintóticos a $P_{3,E}$ com decaimento exponencial como em (3.160), então

$$w_1(\mathbb{C}) = w_2(\mathbb{C}) \quad \text{ou} \quad w_1(\mathbb{C}) \cap w_2(\mathbb{C}) = \emptyset. \quad (3.159)$$

Na verdade, o Teorema 1.4 de [29] assume que o limite assintótico é não-degenerado. Entretanto, sua demonstração faz uso apenas do decaimento exponencial dos planos \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita próximo ao furo $+\infty$ e, sendo assim, podemos aplicá-lo em nosso contexto. Segue de (3.159) que o limite $C_{\text{loc}}^\infty \tilde{w} = (d, w)$ da sequência $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$, após convenientes reparametrizações e \mathbb{R} -translações, satisfazendo $p_0 \in w(\mathbb{C})$, é único. Vamos denotá-lo por $\tilde{w}_E = (d_E, w_E)$. \square

A proposição abaixo descreve detalhadamente o comportamento assintótico próximo ao furo $+\infty$ de um plano \tilde{J}_E -holomorfo que, como na Proposição 3.5.10, é obtido como limite C_{loc}^∞ de uma sequência de planos \tilde{J}_n -holomorfos $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$ satisfazendo $p_0 \in w_n(\mathbb{C})$ para todo n .

Proposição 3.5.11. *Sejam $p_0 \in \mathcal{V}_E$ e $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ um plano \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita assintótico a $P_{3,E} = (x_{3,E}, T_{3,E})$ em $+\infty$ que é obtido como limite C_{loc}^∞ da sequência de planos \tilde{J}_n -holomorfos de energia finita $\tilde{w}_n = (d_n, w_n)$ satisfazendo $p_0 \in w_n(\mathbb{C})$ para todo n grande, como na Proposição 3.5.10. Considere coordenadas de Martinet $(\vartheta, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$, como no Lema 1.3.2, definidas em uma pequena vizinhança tubular $\mathcal{U} \subset W_E$ de $P_{3,E}$, nas quais a órbita periódica $P_{3,E}$ é vista como $S^1 \times \{0\}$ e a forma de contato λ_E assume a forma $g_E(d\vartheta + xdy)$. Então, usando coordenadas cilíndricas em \mathbb{C} , temos que $w(s, t) \in \mathcal{U}$ para todo s suficientemente grande e, nas coordenadas de Martinet, o plano \tilde{w} é representado por funções*

$$(d(s, t), \vartheta(s, t), x(s, t), y(s, t)), (s, t) \in \mathbb{R} \times S^1, s \gg 0,$$

que satisfazem

$$\begin{aligned} |D^\gamma(d(s, t) - (T_{3,E}s + a_0))| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \\ |D^\gamma(\vartheta(s, t) - t - \vartheta_0)| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \\ z(s, t) := (x(s, t), y(s, t)) &= e^{\int_{s_0}^s \mu(r) dr} (e(t) + R(s, t)), \\ |D^\gamma R(s, t)|, |D^\gamma(\mu(s) - \delta)| &\leq A_\gamma e^{-r_0 s}, \end{aligned} \tag{3.160}$$

para todo s grande e todo $\gamma \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, onde $A_\gamma, r_0 > 0, \vartheta_0$ e a_0 são constantes reais. A função $\vartheta(s, t)$ é vista como uma aplicação em \mathbb{R} e satisfaz $\vartheta(s, t + 1) = \vartheta(s, t) + 1$. Aqui $\mu(s) \rightarrow \delta < 0$ quando $s \rightarrow +\infty$, onde δ é um autovalor do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$ e a aplicação $e : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ corresponde a um δ -autovetor de $A_{P_{3,E}}$, representado em coordenadas induzidas pelo tubo de Martinet. Seu winding number com respeito a uma trivialização global é igual a 1.

A não ser por pequenos ajustes, como aqueles realizados na demonstração da Proposição 3.5.5, a prova da Proposição 3.5.11 é dada essencialmente pela demonstração do Teorema 7.2 de [33].

Denote por $\mathcal{M}_{3,E}$ o espaço dos planos \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ tais que \tilde{w} é um mergulho assintótico a $P_{3,E}$ em $+\infty$, com decaimento exponencial descrito por um autovetor associado a um autovalor negativo do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$

com *winding number* 1, como na Proposição 3.5.11. Os planos de energia finita com tal comportamento assintótico foram chamados por U. Hryniewicz em [35] de *planos rápidos*. Vimos na Proposição 3.5.10 que, se $E > 0$ for suficientemente pequeno, então, dado qualquer ponto $p_0 \in \mathcal{V}_E = \dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$, encontramos $\tilde{w}_E = (d_E, w_E) \in \mathcal{M}_{3,E}$ tal que $p_0 \in w_E(\mathbb{C}) \subset \mathcal{V}_E$. Disto segue, pela propriedade de unicidade (3.159), que $w(\mathbb{C}) \subset \mathcal{V}_E$ para todo $\tilde{w} = (d, w) \in \mathcal{M}_{3,E}$.

Em [30], Hofer, Wysocki e Zehnder desenvolveram uma teoria de Fredholm com pesos para descrever localmente espaços como $\mathcal{M}_{3,E}$. Usando o comportamento assintótico exponencial dos planos \tilde{J}_E -holomorfos em $\mathcal{M}_{3,E}$, podemos demonstrar o resultado a seguir, que é essencialmente o Teorema 2.3 de [35]. Veja também [30, Teorema 1.5].

Teorema 3.5.12. *Considere um plano \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{w} = (d, w) \in \mathcal{M}_{3,E}$. Então existem $\epsilon > 0$ e um mergulho*

$$\tilde{\Phi} = (a, \Phi) : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$$

tais que

(i) $\tilde{\Phi}(0, z) = \tilde{w}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Para qualquer $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $\tilde{\Phi}_\tau = (a_\tau, \Phi_\tau) := \tilde{\Phi}(\tau, \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ pertence a $\mathcal{M}_{3,E}$, isto é, $\tilde{\Phi}_\tau$ é um plano rápido mergulhado assintótico a $P_{3,E}$ que satisfaz $\Phi_\tau(\mathbb{C}) \subset \mathcal{V}_E$ para todo τ .

(iii) A aplicação

$$\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{C} \rightarrow W_E \setminus P_{3,E}$$

é um mergulho.

(iv) Se uma sequência $\tilde{w}_n = (d_n, w_n) \in \mathcal{M}_{3,E}$ satisfaz $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$, então, para cada n grande, encontramos $A_n, B_n \in \mathbb{C}$, $c_n \in \mathbb{R}$, $\tau_n \in (-\epsilon, \epsilon)$ de modo que $A_n \rightarrow 1$, $B_n \rightarrow 0$, $c_n \rightarrow 0$ e $\tau_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e, além disso,

$$\tilde{w}_n(z) = \tilde{\Phi}_{\tau_n, c_n}(A_n z + B_n) := (a_{\tau_n}(A_n z + B_n) + c_n, \Phi_{\tau_n}(A_n z + B_n)).$$

O Teorema 3.5.12 nos fornece uma família suave maximal de planos $\tilde{w}_{\tau,E} = (d_{\tau,E}, w_{\tau,E}) \in \mathcal{M}_{3,E}$, com τ variando em um intervalo (τ_-, τ_+) , que satisfaz $w_{\tau_1,E}(\mathbb{C}) \cap w_{\tau_2,E}(\mathbb{C}) = \emptyset$ para todo $\tau_1 \neq \tau_2$. Note que esta família não pode ser compactificada a uma família com parâmetros em S^1 . De fato, uma S^1 -família de tais planos proporcionaria uma decomposição em livro aberto em W_E com *binding* (ou encadernação) $P_{3,E}$, o que não ocorre, pois λ_E admite órbitas periódicas em W_E que não estão enlaçadas com $P_{3,E}$, como $P_{2,E}$ e $P'_{3,E}$.

Finalmente, vamos analisar a convergência da (τ_-, τ_+) -família de planos \tilde{J}_E -holomorfos $\tilde{w}_{\tau,E} = (d_{\tau,E}, w_{\tau,E})$ quando o parâmetro τ converge aos extremos τ_- e τ_+ . Mais especificamente, veremos no próximo resultado que a família de planos $D_{\tau,E} = w_{\tau,E}(\mathbb{C})$ se quebra em $U_{1,E} \cup P_{2,E} \cup V_E$ quando $\tau \rightarrow \tau_-$ e se quebra em $U_{2,E} \cup P_{2,E} \cup V_E$ quando $\tau \rightarrow \tau_+$. Relembrando as notações, $U_{1,E} = u_{1,E}(\mathbb{C})$ e $U_{2,E} = u_{2,E}(\mathbb{C})$, onde os planos rígidos $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E})$ e

$\tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E})$ são como na Proposição 2.3.10-i), $V_E = v_E(\mathbb{R} \times S^1)$, onde o cilindro rígido $\tilde{v}_E = (b_E, v_E)$ é como na Proposição 2.3.10-ii), $P_{2,E} = (x_{2,E}, T_{2,E})$ e $P_{3,E} = (x_{3,E}, T_{3,E})$ são as órbitas periódicas de λ_E com índices de Conley-Zehnder 2 e 3 respectivamente. Podemos assumir a seguinte normalização

$$\tau_- = 0, \quad \tau_+ = 1 \quad \text{e} \quad X_{\lambda_E}|_{w_{\tau,E}} \cdot \tau > 0, \quad (3.161)$$

ou seja, o parâmetro τ cresce na direção apontada pelo campo de Reeb X_{λ_E} .

Proposição 3.5.13. *Para $E > 0$ suficientemente pequeno, ocorre o seguinte. Se $\tau_n \in (0, 1)$ é uma sequência satisfazendo $\tau_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$, então, após reparametrizar e \mathbb{R} -transladar convenientemente as curvas $\tilde{w}_{\tau_n,E}$, \tilde{v}_E e $\tilde{u}_{1,E}$, obtemos que $\tilde{w}_{\tau_n,E}$ converge para $\tilde{v}_E \odot \tilde{u}_{1,E}$ quando $n \rightarrow \infty$ no sentido SFT [1, 7], isto é,*

(i) *existe $z^* \in \mathbb{D}$ tal que $\tilde{C}_n = (c_n, C_n) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, definido por $\tilde{C}_n(s, t) = \tilde{w}_{\tau_n,E}(z^* + e^{2\pi(s+it)})$, satisfaz*

$$\tilde{C}_n \rightarrow \tilde{v}_E \text{ em } C_{loc}^\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty;$$

(ii) *existem sequências $z_n \rightarrow z^*$, $\delta_n \rightarrow 0^+$ e $c_n \in \mathbb{R}$ tais que $\tilde{P}_n = (p_n, P_n) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, definido por $\tilde{P}_n(z) = (d_{\tau_n,E}(z_n + \delta_n z) + c_n, w_{\tau_n,E}(z_n + \delta_n z))$, satisfaz*

$$\tilde{P}_n \rightarrow \tilde{u}_{1,E} \text{ em } C_{loc}^\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty;$$

(iii) *dada uma vizinhança S^1 -invariante \mathcal{W}_3 da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{3,E}(T_{3,E} t)$ em $C^\infty(S^1, W_E)$, existe $R_0 \gg 0$ tal que*

$$\text{a curva fechada } t \mapsto w_{\tau_n,E}(z^* + Re^{2\pi it}) \text{ está contida em } \mathcal{W}_3$$

para todo $R \geq R_0$ e todo n grande;

(iv) *dada uma vizinhança S^1 -invariante \mathcal{W}_2 da curva fechada $S^1 \ni t \mapsto x_{2,E}(T_{2,E} t)$ em $C^\infty(S^1, W_E)$, existem $\epsilon_1 > 0$ pequeno e $R_1 \gg 0$ tais que*

$$\text{a curva fechada } t \mapsto w_{\tau_n,E}(z_n + \rho e^{2\pi it}) \text{ está contida em } \mathcal{W}_2$$

para todo $0 < R_1 \delta_n \leq \rho \leq \epsilon_1$ e todo n grande.

Em particular, dada qualquer vizinhança $\mathcal{V}_1 \subset W_E$ de $U_{1,E} \cup V_E \cup P_{2,E} \cup P_{3,E}$, temos que $D_{\tau_n,E} = w_{\tau_n,E}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{V}_1$ para todo n grande. Uma afirmação similar é válida para qualquer sequência $\tau_n \rightarrow 1^-$, substituindo $\tilde{u}_{1,E}$ por $\tilde{u}_{2,E}$.

Demonstração. A prova deste resultado segue as mesmas ideias da demonstração da Proposição 3.5.10 e, por esta razão, vamos apresentar apenas os passos principais. Embora não seja um fato relevante para a análise, observamos que, nesta proposição, a estrutura quase

complexa $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ está fixada, enquanto na Proposição 3.5.10, tivemos que lidar com uma sequência de estruturas quase-complexas $\tilde{J}_n = (\lambda_n, J_n)$ convergindo para \tilde{J}_E em C^∞ .

Assumimos, primeiramente, que existe $\delta_0 > 0$ tal que $w_{\tau_n, E}(\mathbb{C}) \cap N_E^{\delta_0} = \emptyset$ para todo n grande, onde $N_E^{\delta_0}$ é a 2-esfera definida em coordenadas locais por $N_E^\delta = \{q_1 + p_1 = \delta\} \cap K^{-1}(E)$ que separa as órbitas periódicas $P_{3,E}$ e $P_{2,E}$. Neste caso, após reparametrizar e \mathbb{R} -transladar as curvas $\tilde{w}_{\tau_n, E} = (d_{\tau_n, E}, w_{\tau_n, E})$ como em (3.124), obtemos uma limitação C_{loc}^∞ para a sequência $\tilde{w}_{\tau_n, E}$ e, conseqüentemente, encontramos um plano \tilde{J}_E -holomorfo $\tilde{w} \in \mathcal{M}_{3,E}$ satisfazendo $\tilde{w}_{\tau_n, E} \rightarrow \tilde{w}$ em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Entretanto, como $\tau_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$, isto contradiz a maximalidade da família $\tilde{w}_{\tau, E}$ parametrizada no intervalo $(0, 1)$.

Portanto, a imagem $w_{\tau_n, E}(\mathbb{C})$ deve intersectar a 2-esfera N_E^δ para $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno. Nesta situação, reparametrizamos e \mathbb{R} -transladamos os planos $\tilde{w}_{\tau_n, E}$ de modo que satisfaçam propriedades como (3.131) e (3.132). Provamos então que o conjunto Γ formado pelos pontos de *bubbling-off* da sequência $\tilde{w}_{\tau_n, E}$ está contido no disco unitário fechado \mathbb{D} e, devido à maximalidade da $(0, 1)$ -família $\tilde{w}_{\tau, E}$, concluimos que $\Gamma \neq \emptyset$. Mais que isso, usando as propriedades de auto-interseção da Proposição B.0.4 e as propriedades de enlaçamento da Proposição A.0.3, obtemos que $\Gamma = \{z^*\}$ e que o limite da sequência $\tilde{w}_{\tau_n, E}$ em $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \{z^*\}, \mathbb{R} \times W_E)$ é um cilindro assintótico a $P_{3,E}$ no furo positivo $+\infty$ e assintótico a $P_{2,E}$ no furo negativo z^* . Pela unicidade obtida na Proposição B.0.2, vemos que este limite deve coincidir com \tilde{v}_E , a menos de reparametrização e translação na direção real. Isso prova o item (i). Agora, realizando o procedimento de *soft rescaling* em torno do furo z^* , encontramos sequências $z_n \rightarrow z^*$ e $\delta_n \rightarrow 0^+$ tais que as curvas $\tilde{P}_n = (p_n, P_n)$ definidas em (ii) convergem em C_{loc}^∞ para um plano assintótico a $P_{2,E}$ em $+\infty$. Mais uma vez, devido a unicidade obtida na Proposição B.0.2, este plano limite deve coincidir com $\tilde{u}_{1,E}$ ou com $\tilde{u}_{2,E}$, a menos de reparametrização e translação na direção real, e considerando a normalização (3.161) e o fato de que $\tau_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$, chegamos à conclusão de que coincide com $\tilde{u}_{1,E}$. Com isso, mostramos o item (ii). Enfim, após uma análise delicada próximo às órbitas periódicas $P_{3,E}$ e $P_{2,E}$, similar às Afirmações IV e VI contidas na demonstração da Proposição 3.5.10, provamos os itens (iii) e (iv). \square

Como mencionamos anteriormente, todo o procedimento realizado nesta subseção para os planos pseudo-holomorfos assintóticos a $P_{3,E} \subset \dot{S}_E$ é feito de modo completamente análogo no caso dos planos pseudo-holomorfos assintóticos a $P'_{3,E} \subset \dot{S}'_E$. Assim, finalizamos a demonstração da Proposição 2.3.10-iii).

Apêndice A

Propriedades de ação e enlaçamento

Este apêndice tem dois objetivos centrais. O primeiro deles é analisar a ação das órbitas periódicas do fluxo de Reeb associado à λ_E na 3-esfera $W_E = S_E \cup S'_E$, provando especialmente que $P_{2,E} \subset \partial S_E$ é a órbita periódica com ação mínima em W_E , para $E > 0$ pequeno. Em segundo lugar, apresentamos condições para que duas órbitas periódicas geometricamente distintas de λ_E em \dot{S}_E , ou analogamente em \dot{S}'_E , estejam enlaçadas entre si. Estas propriedades de ação e enlaçamento de órbitas periódicas foram utilizadas fortemente na demonstração da Proposição 2.3.10.

Com relação à ação das órbitas periódicas em W_E , temos o seguinte resultado.

Proposição A.0.1. *Para cada $E > 0$ pequeno, seja λ_E a forma de contato em W_E obtida na Proposição 2.3.6 e considere $P_{2,E} \subset W_E$ a órbita periódica na variedade central do sela-centro p_c dada, em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) , por $q_1 = p_1 = 0$ e $I_2 = I_2(0, E)$, como em (2.10). Se $E > 0$ for suficientemente pequeno, então $P_{2,E}$ é a órbita periódica do fluxo de Reeb de λ_E com ação mínima e, exceto por seus recobrimentos, todas as órbitas periódicas de λ_E em W_E têm ação limitada inferiormente por uma constante $T_{min} > 0$ que independe de $E > 0$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.6, a forma de contato λ_E coincide, em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) , com a forma de contato padrão $\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p_i dq_i - q_i dp_i$ próximo à 2-esfera $\partial S_E = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$ que contém $P_{2,E}$ como equador. Logo, a ação da órbita periódica $P_{2,E}$, calculada em (3.68), satisfaz

$$\mathcal{A}(P_{2,E}) = \int_{P_{2,E}} \lambda_E = \frac{2\pi E}{\omega} + \mathcal{O}(E^2) \rightarrow 0 \text{ quando } E \rightarrow 0^+.$$

Suponha, por absurdo, que existe uma sequência $E_n \rightarrow 0^+$ tal que, para cada n , a forma de contato λ_{E_n} admite uma órbita periódica $Q_n \subset W_{E_n}$ que não é um recobrimento de P_{2,E_n} e cuja ação $\mathcal{A}(Q_n) > 0$ satisfaz

$$\mathcal{A}(Q_n) = \int_{Q_n} \lambda_{E_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.1})$$

Assuma, primeiramente, que existe um raio $\delta > 0$ pequeno de modo que, em coordenadas

locais, $Q_n \subset W_{E_n} \setminus B_\delta(0)$ para todo n . Devido à Proposição 2.3.6, $\lambda_{E_n} \rightarrow \bar{\lambda}_0$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ fora da bola $B_\delta(0)$, onde $\bar{\lambda}_0$ é uma forma de contato definida em $\dot{W}_0 = \dot{S}_0 \cup \dot{S}'_0$. Neste caso, aplicando o Teorema de Arzelà-Ascoli e tendo em vista (A.1), encontramos uma subsequência de Q_n convergindo para uma órbita constante do fluxo de Reeb de $\bar{\lambda}_0$ em \dot{W}_0 quando $n \rightarrow \infty$. Isto é uma contradição e, portanto, podemos afirmar que, fixado um $\delta > 0$ pequeno, a órbita periódica Q_n deve intersectar $B_\delta(0)$ para todo n grande. Uma vez que Q_n não é um recobrimento de $P_{2,E_n} = \{q_1 = p_1 = 0, I_2 = I_2(0, E_n)\}$, o comportamento local do fluxo em torno do sela-centro nos diz que Q_n contém um ramo q_n dentro do anel $A_\delta := B_{2\delta}(0) \setminus B_\delta(0)$ que vai de $\partial B_\delta(0)$ ao $\partial B_{2\delta}(0)$, para todo n grande. Sendo assim, como $\lambda_{E_n} \rightarrow \bar{\lambda}_0$ em A_δ quando $n \rightarrow \infty$, é possível encontrar uma constante uniforme $\varepsilon > 0$ de maneira que

$$\mathcal{A}(Q_n) = \int_{Q_n} \lambda_{E_n} > \int_{q_n} \lambda_{E_n} > \varepsilon$$

para todo n suficientemente grande, contradizendo (A.1).

Com isso, concluímos que existe uma constante $T_{\min} > 0$ tal que, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, a ação das órbitas periódicas de λ_E contidas em $W_E \setminus P_{2,E}$ é limitada inferiormente por T_{\min} . Visto que $\mathcal{A}(P_{2,E}) \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow 0^+$ e que $T_{\min} > 0$ independe de $E > 0$ pequeno, podemos considerar energia $E > 0$ ainda menor de modo que $\mathcal{A}(P_{2,E}) < T_{\min}$ e, assim, $\mathcal{A}(P_{2,E})$ é menor que a ação de qualquer órbita periódica de λ_E que não recobre $P_{2,E}$. \square

Agora, vamos investigar as propriedades de enlaçamento de órbitas periódicas em ambas as componentes de $W_E \setminus \partial S_E = \dot{S}_E \cup \dot{S}'_E$. Veremos que, neste quesito, as órbitas periódicas não-nó, com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 desempenham um papel de grande importância. Vamos precisar do seguinte resultado, demonstrado por Hofer, Wysocki e Zehnder em [33].

Teorema A.0.2. [33, Corolário 6.7] *Seja λ uma forma de contato dinamicamente convexa na esfera S^3 . Se P_0 é uma órbita periódica não-nó de λ satisfazendo $CZ(P_0) = 3$ e $sl(P_0) = -1$, então qualquer órbita periódica de λ geometricamente distinta de P_0 está enlaçada com P_0 .*

Motivados pelo Teorema A.0.2, enunciamos:

Proposição A.0.3. *Para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, ocorre o seguinte: seja $Q_E = (y_E, t_E) \subset \dot{S}_E$ uma órbita periódica não-nó de λ_E , com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 , e seja $Q'_E = (y'_E, t'_E) \subset \dot{S}_E$ uma órbita periódica de λ_E geometricamente distinta de Q_E tal que $t'_E \leq t_E$. Então Q'_E está enlaçada com Q_E . Uma afirmação similar é válida para \dot{S}'_E .*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe uma sequência $E_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que, para todo n , a forma de contato λ_{E_n} admite uma órbita periódica não-nó $Q_{E_n} = (y_{E_n}, t_{E_n}) \subset \dot{S}_{E_n}$, com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 , e admite uma órbita periódica $Q'_{E_n} = (y'_{E_n}, t'_{E_n}) \subset \dot{S}_{E_n}$, geometricamente distinta de Q_{E_n} e não enlaçada com Q_{E_n} , satisfazendo $t'_{E_n} \leq t_{E_n}$.

Pela Proposição 3.2.5-i), temos que Q_{E_n} não intersecta uma determinada vizinhança $\tilde{U}_3 \subset \mathcal{U}_{E^*}$ do sela-centro p_c , para n suficientemente grande, onde $E^* > 0$ é como na Proposição 2.3.6. Então, usando a Proposição 1.3.7, vemos que existe $\bar{\eta} > 0$ tal que o argumento $\eta(t)$ de qualquer solução linearizada transversal não-nula ao longo de y_{E_n} satisfaz $\dot{\eta} > \bar{\eta}$, para n suficientemente grande. Disto segue, pelo fato de $CZ(Q_{E_n}) = 3$ para todo n , que os períodos t_{E_n} das órbitas Q_{E_n} são limitados superiormente por uma constante que independe de n . O mesmo pode ser dito dos períodos t'_{E_n} de Q'_{E_n} , visto que $t'_{E_n} \leq t_{E_n}$. Mais que isso, temos que os períodos t'_{E_n} são limitados inferiormente por uma constante positiva que independe de n . De fato, suponha que $t'_{E_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Se existir um raio $\delta > 0$ pequeno de modo que, em coordenadas locais, Q'_{E_n} não intersecta a bola $B_\delta(0)$ para todo n , então, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência de Q'_{E_n} convergindo para uma órbita constante do fluxo de Reeb de $\bar{\lambda}_0$ em \dot{S}_0 , quando $n \rightarrow \infty$, onde $\bar{\lambda}_0$ é a forma de contato obtida na Proposição 2.3.6. Isto é uma contradição e, portanto, podemos afirmar que, fixado um $\delta > 0$, a órbita Q'_{E_n} deve intersectar $B_\delta(0)$ para todo n grande. Neste caso, como $Q'_{E_n} \subset \dot{S}_{E_n}$ e, conseqüentemente, Q'_{E_n} não é um recobrimento da órbita periódica $P_{2,E_n} = \{q_1 = p_1 = 0, I_2 = I_2(0, E_n)\}$, o comportamento local do fluxo em torno do sela-centro nos diz que Q'_{E_n} contém um ramo q'_n dentro do anel $A_\delta := B_{2\delta}(0) \setminus B_\delta(0)$ que vai de $\partial B_\delta(0)$ ao $\partial B_{2\delta}(0)$, para todo n grande. Sendo assim, como $\lambda_{E_n} \rightarrow \bar{\lambda}_0$ em A_δ quando $n \rightarrow \infty$ pela Proposição 2.3.6, é possível encontrar uma constante uniforme $\varepsilon > 0$ tal que

$$t'_{E_n} = \int_{Q'_{E_n}} \lambda_{E_n} > \int_{q'_n} \lambda_{E_n} > \varepsilon$$

para todo n suficientemente grande, contradizendo o fato de $t'_{E_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Chegamos então à conclusão que existe uma constante uniforme $c > 1$ satisfazendo

$$\frac{1}{c} < t'_{E_n} \leq t_{E_n} < c, \quad \forall n. \tag{A.2}$$

Como $Q_{E_n} \subset \dot{S}_{E_n} \setminus \tilde{U}_3$ para todo n , uma das conseqüências de (A.2) é que, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli e a Proposição 2.3.6, encontramos uma órbita periódica $Q_0 = (y_0, t_0)$ de $\bar{\lambda}_0$ em \dot{S}_0 e uma subsequência de E_n , novamente denotada por E_n , tais que $y_{E_n} \rightarrow y_0$ e $t_{E_n} \rightarrow t_0 > 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $CZ(Q_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} CZ(Q_{E_n}) = 3$, obtemos da Proposição 3.2.6 que $CZ(Q_0) = 3$. Além disso, a Proposição 3.2.6 nos fornece ainda que Q_0 é uma órbita periódica simples, pois, caso contrário, seu índice de Conley-Zehnder seria pelo menos 5. Disto segue que Q_0 é não-nó e $sl(Q_0) = -1$, haja visto que $Q_{E_n} \rightarrow Q_0$ quando $n \rightarrow \infty$ e cada Q_{E_n} é um não-nó satisfazendo $sl(Q_{E_n}) = -1$.

Agora vamos analisar a sequência Q'_{E_n} . Assuma, primeiramente, que Q'_{E_n} fica longe do sela-centro p_c , isto é, existe uma vizinhança \tilde{U} de p_c tal que $Q'_{E_n} \subset \dot{S}_{E_n} \setminus \tilde{U}$ para todo n . Nesta situação, obtemos da desigualdade (A.2), do Teorema de Arzelà-Ascoli e da Proposição 2.3.6 que existe uma órbita periódica $Q'_0 = (y'_0, t'_0)$ de $\bar{\lambda}_0$ em \dot{S}_0 tal que $Q'_{E_n} \rightarrow Q'_0$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$, a menos da extração de uma subsequência de E_n . Observe que Q'_0 tem que ser geometricamente distinta de Q_0 . De fato, em caso contrário, Q'_0 seria um recobrimento

simples de Q_0 , por (A.2), e, como $CZ(Q_{E_n}) = 3$ para todo n , o comportamento do fluxo linearizado transversal ao longo y_{E_n} nos diria que Q'_{E_n} está enlaçada com Q_{E_n} para todo n suficientemente grande, o que não ocorre. Considere uma pequena vizinhança $U_0 \subset \mathcal{U}_{E^*}$ de p_c que não intersecta $Q_0 \cup Q'_0$. Como já argumentamos anteriormente, a convexidade estrita do conjunto $S_0 \setminus U_0$ nos permite estendê-lo suavemente a um ovalóide $\tilde{S}_0 \subset \mathbb{R}^4$, devido a um teorema de Ghomi em [18]. Sendo assim, estamos nas hipóteses do Teorema A.0.2, ou seja, temos uma órbita periódica não-nó Q_0 , com $CZ(Q_0) = 3$ e $\text{sl}(Q_0) = -1$, que está contida em um ovalóide \tilde{S}_0 , onde o fluxo é dinamicamente convexo pelo Teorema 2.1.3. Como Q'_0 é uma órbita periódica geometricamente distinta de Q_0 , concluímos do Teorema A.0.2 que Q_0 e Q'_0 devem estar enlaçadas, o que nos leva a uma contradição, uma vez que Q'_{E_n} não está enlaçada com Q_{E_n} para todo n .

Assuma agora que Q'_{E_n} se aproxima do sela-centro p_c quando $n \rightarrow \infty$. Neste caso, fixado $\delta > 0$ pequeno, temos que a órbita Q'_{E_n} intersecta o anel A_δ , determinado em coordenadas locais (q_1, q_2, p_1, p_2) por $A_\delta = B_{2\delta}(0) \setminus B_\delta(0)$, para todo n suficientemente grande. Sejam γ_δ^u a interseção da variedade instável local de p_c com o anel A_δ , dada por $\{q_1 = q_2 = p_2 = 0, \delta \leq p_1 < 2\delta\}$, e γ_δ^s a interseção da variedade estável local de p_c com o anel A_δ , dada por $\{p_1 = q_2 = p_2 = 0, \delta \leq q_1 < 2\delta\}$. Pelo comportamento local do fluxo em torno do sela-centro, vemos que cada componente de Q'_{E_n} intersectando A_δ se aproxima de γ_δ^u ou de γ_δ^s . Uma vez que $\int_{\gamma_\delta^s} \bar{\lambda}_0, \int_{\gamma_\delta^u} \bar{\lambda}_0 > c_1$ para alguma constante $c_1 > 0$ e que $\lambda_{E_n} \rightarrow \bar{\lambda}_0$ em A_δ quando $n \rightarrow \infty$ pela Proposição 2.3.6, obtemos que cada componente γ_n da interseção $Q'_{E_n} \cap A_\delta$ satisfaz $\int_{\gamma_n} \lambda_{E_n} > c_1 > 0$ para n suficientemente grande. Portanto, como a ação de Q'_{E_n} é uniformemente limitada, de acordo com (A.2), concluímos que o número de componentes da interseção $Q'_{E_n} \cap A_\delta$ é uniformemente limitado em n . Podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que o número de tais componentes é constante igual a $2p_0$, com $p_0 \geq 1$, sendo que p_0 delas se aproximam de γ_δ^u e as outras p_0 se aproximam de γ_δ^s . Assim, para cada n grande, a órbita Q'_{E_n} possui exatamente p_0 componentes no complementar da bola $B_{2\delta}(0)$. Como $\lambda_{E_n} \rightarrow \bar{\lambda}_0$ fora de $B_{2\delta}(0)$ quando $n \rightarrow \infty$ pela Proposição 2.3.6, podemos usar a limitação uniforme do período t'_{E_n} , dada por (A.2), e o Teorema de Arzelà-Ascoli para encontrar uma subsequência de E_n , denotada de novo por E_n , e uma órbita homoclínica $\gamma_0 \subset \dot{S}_0$ ao sela-centro p_c de modo que, após uma reparametrização conveniente, Q'_{E_n} converge em C^0 para um p_0 -recobrimento da curva fechada simples $\bar{\gamma}_0 := \gamma_0 \cup \{p_c\} \subset S_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Já que Q'_{E_n} não está enlaçada com Q_{E_n} para todo n , temos que a curva fechada $\bar{\gamma}_0$ não está enlaçada com Q_0 , contradizendo a Proposição A.0.4 que provamos logo abaixo. Com isso finalizamos a demonstração da Proposição A.0.3. \square

Proposição A.0.4. *Assuma que o sela-centro p_c admite uma órbita homoclínica $\gamma_0 \subset \dot{S}_0$. Se $Q_0 \subset \dot{S}_0$ é uma órbita periódica não-nó com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 , então a curva fechada $\bar{\gamma}_0 := \gamma_0 \cup \{p_c\} \subset S_0$ está enlaçada com Q_0 em S_0 . Uma afirmação similar é válida para S'_0 .*

A estratégia para demonstrar a Proposição A.0.4 é regularizar o conjunto singular estritamente convexo S_0 próximo ao sela-centro p_c de modo que Q_0 e $\bar{\gamma}_0$ correspondam a órbitas periódicas de um fluxo de Reeb dinamicamente convexo sobre uma hipersuperfície de contato

difeomorfa à 3-esfera *tight*. E então, com o Teorema A.0.2, poderemos concluir a propriedade de enlaçamento desejada.

Seja $\delta_1 > 0$ pequeno e considere uma função de corte $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in [0, \infty)$, $f(x) = 1$ se $x \in [0, \frac{\delta_1}{2}]$ e $f(x) = 0$ se $x \in [\delta_1, \infty)$. Seja $U_0 \subset \mathbb{R}^4$ uma pequena vizinhança de p_c que não intersecta a órbita periódica Q_0 . Dado $\epsilon > 0$ pequeno, definimos uma hipersuperfície $S_\epsilon \subset \mathbb{R}^4$ da seguinte forma: S_ϵ coincide com S_0 no complementar de U_0 e, dentro de U_0 , S_ϵ é dado, em coordenadas locais $z = (q_1, q_2, p_1, p_2)$, por $K_\epsilon^{-1}(0)$, onde

$$K_\epsilon(z) = K(z) + \epsilon f(q_1 + p_1).$$

Pelo modo como definimos a função de corte f , vemos que S_ϵ também coincide com S_0 nos pontos $w = \varphi(z) \in U$ para os quais $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in V$ satisfaz $q_1 + p_1 \geq \delta_1$, onde $\varphi : V \rightarrow U$ é a mudança de coordenadas da Hipótese 1. Além disso, nos pontos $z = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ tais que $0 \leq q_1 + p_1 \leq \frac{\delta_1}{2}$, $K_\epsilon(z) = 0$ se, e somente se, $K(z) = -\epsilon < 0$. Assim, a hipersuperfície S_ϵ é difeomorfa à esfera S^3 e, em coordenadas locais, sua projeção sobre o plano $q_1 p_1$ não contém a origem e se dá no primeiro quadrante. Mais ainda, observe que $S_\epsilon \rightarrow S_0$ em C^0 quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ e, fora de qualquer vizinhança fixada do sela-centro p_c , $S_\epsilon \rightarrow S_0$ em C^∞ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Lembre-se que, ao longo da demonstração da Proposição 2.3.6, construímos um campo de Liouville \bar{X}_0 numa vizinhança de \dot{S}_0 dado pela concatenação do campo radial X_0 centrado em um ponto conveniente $w_0 = \varphi(z_0) \in U$ com um campo de Liouville $\varphi_* Y$, onde Y é o campo de vetores obtido pela interpolação dos campos de Liouville $\varphi^* X_0$ e o campo radial centrado em $z_0 \in V$. No lema a seguir, mostraremos que \bar{X}_0 é transversal à S_ϵ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e, mais ainda, veremos que a forma de contato $(i_{\bar{X}_0} \omega_0)|_{S_\epsilon}$ induzida por \bar{X}_0 em S_ϵ é dinamicamente convexa.

Lema A.0.5. *Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o fluxo Hamiltoniano em S_ϵ é equivalente a um fluxo de Reeb dinamicamente convexo na 3-esfera *tight*.*

Demonstração. Considerando a mudança de coordenadas simplética $\varphi : V \rightarrow U$ da Hipótese 1, definimos o conjunto $\tilde{S}_\epsilon = \varphi^{-1}(S_\epsilon \cap U)$ que, como observamos anteriormente, se projeta no plano $q_1 p_1$ em $\{q_1 \geq 0, p_1 \geq 0, q_1^2 + p_1^2 \neq 0\}$. Sejam $\delta_0 \gg \bar{\delta}_0 > 0$ como na Proposição 3.1.4 e considere o campo de Liouville Y que, como acabamos de comentar, foi definido no decorrer da demonstração da Proposição 2.3.6 como a interpolação dos campos de Liouville $Y_0 = \varphi^* X_0$ e $Y_1 = \frac{z-z_0}{2}$, onde $X_0 = \frac{w-w_0}{2}$, $w_0 = \varphi(z_0) \in U$ e $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_0, 0, \delta_0, 0) \in V$. Podemos assumir que $\delta_1 > 4\delta_0$, com $\delta_1 > 0$ como acima. Neste caso, se $z = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in B_{\delta_0}(0) \subset V$, então $q_1 + p_1 < 2\delta_0 < \frac{\delta_1}{2}$.

Uma vez que $\tilde{S}_\epsilon \rightarrow \varphi^{-1}(S_0 \cap U)$ em C^∞ no complementar da bola $B_{\bar{\delta}_0}(0)$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, podemos usar a Proposição 3.1.4-i) para garantir que o campo de Liouville Y é transversal à \tilde{S}_ϵ fora de $B_{\bar{\delta}_0}(0)$, se $\epsilon > 0$ for suficientemente pequeno. Agora, para todo $z \in B_{\bar{\delta}_0}(0) \cap \tilde{S}_\epsilon \subset B_{\delta_0}(0)$ temos que $f(q_1 + p_1) = 1$ e, portanto, $K(z) = -\epsilon < 0$. Sendo assim, pela Proposição 3.1.4-ii), Y é transversal à \tilde{S}_ϵ dentro de $B_{\bar{\delta}_0}(0)$. Deste modo, como o campo radial X_0 é transversal à \dot{S}_0 , concluímos que o campo de Liouville \bar{X}_0 , dado pela concatenação de X_0

com φ_*Y , é transversal à S_ϵ para todo $\epsilon > 0$ for suficientemente pequeno. Logo, a 1-forma definida por $\lambda_\epsilon := i_{\bar{X}_0}\omega_0|_{S_\epsilon}$ é uma forma de contato em S_ϵ que gera um campo de Reeb paralelo ao campo Hamiltoniano restrito à S_ϵ . Mais ainda, como $S_\epsilon \subset \mathbb{R}^4$ é difeomorfo à esfera S^3 , temos que S_ϵ é bordo de uma variedade simplética e, conseqüentemente, a estrutura de contato $\ker \lambda_\epsilon$ é *tight* pelo Teorema 1.2.17.

Resta-nos mostrar que λ_ϵ é dinamicamente convexa. Para isso, vamos utilizar novamente o referencial $\{X_1, X_2\}$, definido em (1.27), para analisar o fluxo linearizado transversal, assim como fizemos na demonstração da Proposição 2.3.7. Aplicando o Lema 3.2.3 para $\mathcal{W} = \varphi(B_{\delta_0}(0)) \subset U$, encontramos vizinhanças $U_{2\pi} \subset U_* \subset \mathcal{W}$ do sela-centro p_c tais que a variação de argumento $\Delta\eta$ de qualquer solução não-nula do fluxo linearizado transversal, ao longo de uma trajetória em $U_* \cap S_\epsilon \subset H^{-1}(-\epsilon)$ que intersecta $U_{2\pi}$, satisfaz

$$\Delta\eta > 2\pi. \quad (\text{A.3})$$

Visto que $S_\epsilon \rightarrow S_0$ em C^∞ fora da vizinhança $U_{2\pi}$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, podemos assumir que

$$\dot{\eta} > \bar{\eta} > 0 \quad (\text{A.4})$$

fora de $U_{2\pi}$ para algum $\bar{\eta} > 0$ e para todo $\epsilon > 0$ pequeno. Note que aqui estamos considerando a parametrização induzida pela função Hamiltoniana K_ϵ que coincide com a parametrização dada por H fora de U_0 e nos pontos $w = \varphi(q_1, q_2, p_1, p_2) \in U_0$ tais que $q_1 + p_1 \geq \delta_1$.

Suponha, por absurdo, que existe uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ e existem órbitas periódicas $P_n \subset S_{\epsilon_n}$ satisfazendo $CZ(P_n) < 3$ para todo n . Neste caso, (A.3) e (A.4) garantem que P_n não intersecta a vizinhança $U_{2\pi}$ para todo n e, portanto, a limitação superior dos índices de Conley-Zehnder $CZ(P_n)$ e a estimativa (A.4) implicam que os períodos de P_n são uniformemente limitados. Fazendo uso do Teorema de Arzelà-Ascoli, encontramos uma órbita periódica $P_0 \subset S_0 \setminus U_{2\pi}$ tal que, a menos da extração de uma subsequência, $P_n \rightarrow P_0$ em C^∞ quando $n \rightarrow \infty$ e, sendo assim, $CZ(P_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} CZ(P_n) < 3$, contradizendo a Proposição 3.2.6. Concluimos deste modo que, se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então $CZ(P) \geq 3$ para toda órbita periódica $P \subset S_\epsilon$, finalizando a demonstração deste lema. \square

O último passo para demonstrar a Proposição A.0.4 é construir um homeomorfismo h entre o conjunto singular estritamente convexo S_0 e a hipersuperfície de contato S_ϵ , $\epsilon > 0$ pequeno, de modo que h fixe a órbita periódica $Q_0 \subset S_0 \setminus U_0 = S_\epsilon \setminus U_0$ e associe a curva fechada $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0 \cup \{p_c\} \subset S_0$ a uma órbita periódica $P_0 \subset S_\epsilon$ do fluxo de Reeb de λ_ϵ que seja geometricamente distinta de Q_0 . Neste caso, como λ_ϵ é uma forma de contato dinamicamente convexa em S_ϵ , pelo Lema A.0.5, estaremos em condições de aplicar o Teorema A.0.2 para concluir que Q_0 e P_0 estão enlaçadas e, portanto, o mesmo ocorre com Q_0 e $\bar{\gamma}_0$, visto que a propriedade de enlaçamento é preservada por homeomorfismos. Este é o conteúdo do lema a seguir.

Lema A.0.6. *Considere as hipóteses da Proposição A.0.4. Para cada $\epsilon > 0$ pequeno, existe um homeomorfismo $h : S_0 \rightarrow S_\epsilon$ com as seguintes propriedades:*

- h é a aplicação identidade fora de uma vizinhança de p_c em S_0 que não intersecta Q_0 ;
- a restrição de h à hipersuperfície \dot{S}_0 é um difeomorfismo suave;
- $h(\bar{\gamma}_0) = P_0$, onde $P_0 \subset S_\epsilon$ é uma órbita periódica geometricamente distinta de Q_0 .

Em particular, $\bar{\gamma}_0$ está enlaçada com Q_0 .

Demonstração. Para definir $h : S_0 \rightarrow S_\epsilon$ vamos impor, primeiramente, que h coincida com a aplicação identidade em $S_0 \setminus U_0 = S_\epsilon \setminus U_0$ e nos pontos $w = \varphi(q_1, q_2, p_1, p_2) \in S_0 \cap U_0$ tais que $q_1 + p_1 \geq \delta_1$. Lembre-se que a vizinhança $U_0 \subset \mathbb{R}^4$ do sela-centro p_c foi escolhida de modo que não intersecte a órbita periódica $Q_0 \subset \dot{S}_0$. No restante dos pontos $w \in S_0 \cap U_0$, para os quais temos $z = \varphi^{-1}(w) = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in K^{-1}(0)$ satisfazendo $q_1, p_1 \geq 0$ e $0 \leq q_1 + p_1 < \delta_1$, definimos h em coordenadas locais da seguinte forma, veja Figura A.1. Seja $\bar{q}_1 \geq 0$ tal que $q_1 p_1 = \bar{q}_1 2\delta_1$. Note que $(\bar{q}_1, q_2, 2\delta_1, p_2) \in K_\epsilon^{-1}(0)$, pois $K(\bar{q}_1, q_2, 2\delta_1, p_2) = K(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0$ e $f(\bar{q}_1 + 2\delta_1) = 0$. O campo Hamiltoniano associado à função K_ϵ , dado por

$$X_{K_\epsilon}(z) = X_K(z) + \epsilon f'(q_1 + p_1)(1, 0, 1, 0),$$

é linearmente independente do vetor $(1, 0, 1, 0)$ para qualquer $\epsilon > 0$ pequeno e $q_1 + p_1 \geq 0$ com $q_1^2 + p_1^2 \neq 0$. Sendo assim, o fluxo Hamiltoniano negativo de X_{K_ϵ} passando pelo ponto $(\bar{q}_1, q_2, 2\delta_1, p_2)$ intersecta o hiperplano $\{(q_1, p_1) + \lambda(1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ em um único ponto $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \in K_\epsilon^{-1}(0)$. Como $K_\epsilon(\tilde{q}_1, q_2, \tilde{p}_1, p_2) = K_\epsilon(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 0$, $\varphi(\tilde{q}_1, q_2, \tilde{p}_1, p_2) \in S_\epsilon$ e, então, definimos $h(w) := \varphi(\tilde{q}_1, q_2, \tilde{p}_1, p_2)$. Por construção, h fixa as coordenadas (q_2, p_2) e, além disso, uma vez que as aplicações definidas acima são suaves nas coordenadas (q_1, p_1) , concluímos que h é contínua em S_0 e suave em \dot{S}_0 .

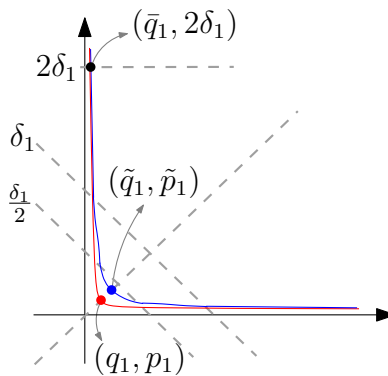


Figura A.1: Construção da função h em coordenadas locais.

Vamos definir agora a inversa $h^{-1} : S_\epsilon \rightarrow S_0$. Nos pontos de $S_\epsilon \setminus U_0 = S_0 \setminus U_0$ e também nos pontos $w = \varphi(q_1, q_2, p_1, p_2) \in S_\epsilon \cap U_0$ tais que $q_1 + p_1 \geq \delta_1$, a aplicação h^{-1} é dada pela identidade. Para os outros pontos $w \in S_\epsilon \cap U_0$, onde temos $z = \varphi^{-1}(w) = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in K_\epsilon^{-1}(0)$ satisfazendo $q_1, p_1 \geq 0$ e $0 < q_1 + p_1 < \delta_1$, definimos h^{-1} em coordenadas locais do seguinte modo. O fluxo Hamiltoniano positivo de X_{K_ϵ} passando por (q_1, q_2, p_1, p_2) intersecta o hiperplano $\{p_1 = 2\delta_1\}$ em um único ponto $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, 2\delta_1, \bar{p}_2) \in K_\epsilon^{-1}(0)$, com $\bar{q}_1 \geq 0$. Seja

$\lambda \in \mathbb{R}$ a raiz da equação de segundo grau $\bar{q}_1 2\delta_1 = (q_1 + \lambda)(p_1 + \lambda)$ dada por

$$\lambda = \frac{-(q_1 + p_1) + \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + 8\delta_1 \bar{q}_1}}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Note que $K(q_1 + \lambda, q_2, p_1 + \lambda, p_2) = K(\bar{q}_1, q_2, 2\delta_1, p_2) = K_\epsilon(\bar{q}_1, \bar{q}_2, 2\delta_1, \bar{p}_2) = 0$, pois $f(\bar{q}_1 + 2\delta_1) = 0$, logo $\varphi(q_1 + \lambda, q_2, p_1 + \lambda, p_2) \in S_0$. Definimos $h^{-1}(w) := \varphi(q_1 + \lambda, q_2, p_1 + \lambda, p_2)$, onde λ é como em (A.5). Observe que h^{-1} fixa as coordenadas (q_2, p_2) . E, mais ainda, as aplicações que utilizamos para definir h^{-1} em coordenadas locais são suaves em (q_1, p_1) , exceto quando $q_1 = p_1$ e $\bar{q}_1 = 0$, como vemos em (A.5). Se $w \in S_\epsilon \cap U_0$ satisfaz $q_1 = p_1$ e $\bar{q}_1 = 0$ em coordenadas locais, então w é mapeado por h^{-1} no sela-centro $p_c \in S_0$ e, neste ponto, obtemos apenas a continuidade da aplicação h^{-1} .

Portanto, a aplicação $h : S_0 \rightarrow S_\epsilon$ é um homeomorfismo que se restringe em $\dot{S}_0 = S_0 \setminus \{p_c\}$ a um difeomorfismo suave. Note que $h(Q_0) = Q_0$, pois a órbita periódica Q_0 pertence ao conjunto $S_0 \setminus U_0$ onde h é dada pela aplicação identidade. Vamos analisar a imagem da curva fechada $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0 \cup \{p_c\} \subset S_0$ por h . Por definição, $h(w) = w$ para todo $w \in \bar{\gamma}_0$ que está fora de U_0 ou que satisfaz $q_1 + p_1 \geq \delta_1$ em coordenadas locais. Próximo ao sela-centro p_c , $\bar{\gamma}_0$ é dada por $\bar{\gamma}_{0,\text{loc}} := \{q_1 p_1 = 0, q_2 = p_2 = 0, 0 \leq q_1 + p_1 \leq \delta_1\}$ e podemos assumir que, em coordenadas locais, $\bar{\gamma}_0 \cap \{0 \leq q_1 + p_1 \leq \delta_1\} = \bar{\gamma}_{0,\text{loc}}$. Pelo modo como a aplicação h foi construída e também pela simetria do campo Hamiltoniano X_{K_ϵ} com relação à $\{q_1 = p_1\}$, vemos que a imagem de $\bar{\gamma}_{0,\text{loc}}$ por h , em coordenadas locais, é uma trajetória de X_{K_ϵ} que está contida em $\{q_2 = p_2 = 0\} \cap \tilde{S}_\epsilon$, começa no ponto $\{q_1 = \delta_1, q_2 = p_1 = p_2 = 0\}$ e termina no ponto $\{p_1 = \delta_1, q_1 = q_2 = p_2 = 0\}$. Portanto, $P_0 := h(\bar{\gamma}_0)$ é uma órbita periódica em S_ϵ que, por construção, é geometricamente distinta de $Q_0 \subset S_\epsilon \setminus U_0$.

Pelo Lema A.0.5, o fluxo Hamiltoniano em S_ϵ é equivalente a um fluxo de Reeb dinamicamente convexo na esfera S^3 , para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $Q_0 \subset S_\epsilon \setminus U_0 = S_0 \setminus U_0$ é uma órbita periódica não-nó satisfazendo $CZ(Q_0) = 3$ e $\text{sl}(Q_0) = -1$. Neste caso, podemos concluir do Teorema A.0.2 que P_0 está enlaçada com Q_0 e, consequentemente, pelas propriedades da aplicação h , $\bar{\gamma}_0$ está enlaçada com Q_0 . \square

Com isso, finalizamos a demonstração da Proposição A.0.4.

Apêndice B

Unicidade e interseção de curvas pseudo-holomorfas

Na Proposição 2.3.8, construímos uma estrutura complexa $J_E \in \mathcal{J}(\lambda_E)$, para $E > 0$ suficientemente pequeno, de modo que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ admite um par de planos de energia finita $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E}), \tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$, ambos assintóticos à órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$, cujas imagens se projetam em W_E sobre os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera $\partial S_E \subset W_E$, respectivamente. Na Proposição 2.3.10-ii), mostramos que \tilde{J}_E admite um par de cilindros de energia finita $\tilde{v}_E = (b_E, v_E), \tilde{v}'_E = (b'_E, v'_E) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ satisfazendo $v_E(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$ e $v'_E(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}'_E \setminus P'_{3,E}$, sendo que \tilde{v}_E é assintótico à $P_{3,E}$ em $s = +\infty$ e à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$, \tilde{v}'_E é assintótico à $P'_{3,E}$ em $s = +\infty$ e à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$ e, mais ainda, \tilde{v}_E (respectivamente \tilde{v}'_E) tem um decaimento exponencial próximo ao furo $s = +\infty$ descrito por um autovetor associado a um autovalor negativo do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$ (respectivamente $A_{P'_{3,E}}$) com *winding number* 1, como vimos nas Proposições 3.5.5 e 3.5.8. Neste apêndice, vamos usar a teoria de interseção de curvas pseudo-holomorfas, desenvolvida por Richard Siefring em [54], para garantir a unicidade dos planos rígidos $u_{1,E}$ e $u_{2,E}$ e dos cilindros rígidos v_E e v'_E na 3-esfera W_E . Além disso, vamos provar algumas propriedades de interseção para semi-cilindros \tilde{J}_E -holomorfos assintóticos à órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$, utilizando para isso a fórmula obtida por R. Siefring em [53], que descreve o comportamento assintótico da diferença de dois semi-cilindros pseudo-holomorfos distintos convergindo exponencialmente para uma mesma órbita periódica do fluxo de Reeb.

Iniciamos com a definição a seguir que estabelece quando duas curvas pseudo-holomorfas na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ se aproximam de uma órbita periódica não-degenerada de λ_E na mesma direção, ou em direções opostas.

Definição B.0.1 (Siefring [54]). *Sejam \tilde{v}_1 e \tilde{v}_2 curvas \tilde{J}_E -holomorfas de energia finita em $\mathbb{R} \times W_E$, assintóticas a uma mesma órbita periódica não-degenerada $P \in \mathcal{P}(\lambda_E)$ em determinados furos z_1^* de \tilde{v}_1 e z_2^* de \tilde{v}_2 . Dizemos que \tilde{v}_1 e \tilde{v}_2 se aproximam de P na mesma direção em z_1^* e z_2^* , respectivamente, se $\eta_1 = c\eta_2$ para uma constante $c > 0$, onde η_1 e η_2 são os autovetores do operador assintótico A_P que descrevem o comportamento assintótico de \tilde{v}_1 e \tilde{v}_2 próximo aos furos z_1^* e z_2^* , respectivamente, como no Teorema 1.4.10. No caso em que*

$\eta_1 = c\eta_2$ para uma constante $c < 0$, dizemos que \tilde{v}_1 e \tilde{v}_2 se aproximam de P em direções opostas nos furos z_1^* e z_2^* .

O resultado que diz respeito à unicidade dos planos rígidos e dos cilindros rígidos em W_E é o seguinte.

Proposição B.0.2. *A menos de reparametrizações e translações na direção real, $\tilde{u}_{1,E}$ e $\tilde{u}_{2,E}$ são os únicos planos \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita em $\mathbb{R} \times W_E$ assintóticos à $P_{2,E}$ em $+\infty$. Do mesmo modo, \tilde{v}_E é o único cilindro \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita em $\mathbb{R} \times W_E$, cuja imagem se projeta em $\dot{S}_E \setminus P_{3,E}$, que é assintótico à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$ e é assintótico à $P_{3,E}$ em $s = +\infty$ com decaimento exponencial descrito por um autovetor associado a um autovalor negativo do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$ com winding number 1. Uma afirmação similar é válida para o cilindro \tilde{v}'_E .*

Demonstração. Vamos lidar primeiramente com a unicidade dos planos rígidos. Para isso, suponha, por absurdo, que \tilde{J}_E admite um plano pseudo-holomorfo de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ que é assintótico à $P_{2,E}$ em $+\infty$, mas não coincide com o plano $\tilde{u}_{1,E} = (a_{1,E}, u_{1,E})$ ou com o plano $\tilde{u}_{2,E} = (a_{2,E}, u_{2,E})$ a menos de reparametrizações e \mathbb{R} -translações. Neste caso, temos que

$$u(\mathbb{C}) \neq u_{1,E}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad u(\mathbb{C}) \neq u_{2,E}(\mathbb{C}). \quad (\text{B.1})$$

Uma vez que o limite assintótico de \tilde{u} é uma órbita periódica hiperbólica, não-nó e com índice de Conley-Zehnder 2 do fluxo de Reeb associado à forma de contato *tight* λ_E em W_E e, além disso, W_E satisfaz $\pi_2(W_E) = \pi_2(S^3) = 0$, estamos em condições de usar o Teorema 1.3 de [29] para concluir que u é um mergulho e

$$u(\mathbb{C}) \cap P_{2,E} = \emptyset. \quad (\text{B.2})$$

Sendo assim, podemos aplicar o Teorema 1.4 de [29] e obter, a partir de (B.1) e (B.2), que

$$u(\mathbb{C}) \cap u_{1,E}(\mathbb{C}) = \emptyset \quad \text{e} \quad u(\mathbb{C}) \cap u_{2,E}(\mathbb{C}) = \emptyset. \quad (\text{B.3})$$

Em [54], Siefring introduziu o *número de interseção generalizado* entre duas curvas pseudo-holomorfas \tilde{v}_1 e \tilde{v}_2 , denotado por $[\tilde{v}_1] * [\tilde{v}_2]$, que, além de contar o número de interseção algébrica entre estas curvas, leva em consideração também o *número de interseção assintótica* entre elas, no caso em que \tilde{v}_1 e \tilde{v}_2 admitem limites assintóticos recobrando uma mesma órbita periódica. Vamos analisar o número de interseção generalizado entre as curvas \tilde{J}_E -holomorfas \tilde{u} e $\tilde{u}_{i,E}$, $i = 1, 2$.

Seja η o autovetor do operador assintótico $A_{P_{2,E}}$ que descreve o decaimento exponencial de \tilde{u} próximo ao furo $+\infty$, como no Teorema 1.4.10, e denote por $\text{wind}(\eta)$ o *winding number* de η calculado com respeito a uma trivialização global da estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_E$. Visto que η está associado a um autovalor negativo de $A_{P_{2,E}}$, temos que $\text{wind}(\eta) \leq \text{wind}^{<0}(A_{P_{2,E}})$, pelo modo como $\text{wind}^{<0}(A_{P_{2,E}})$ foi definido em (1.21). Além disso, como $CZ(P_{2,E}) = 2$,

segue que $\text{wind}^{<0}(A_{P_{2,E}}) = 1$. Logo, pela segunda equação de (1.52), obtemos

$$0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}) - 1 = \text{wind}(\eta) - 1 \leq \text{wind}^{<0}(A_{P_{2,E}}) - 1 = 0$$

e, portanto, $\text{wind}_\pi(\tilde{u}) = 0$, $\text{wind}_\infty(\tilde{u}) = \text{wind}(\eta) = 1$ e

$$d_0(\tilde{u}, +\infty) := \text{wind}^{<0}(A_{P_{2,E}}) - \text{wind}(\eta) = 0. \tag{B.4}$$

Assim como $u(\mathbb{C})$, os planos $u_{1,E}(\mathbb{C})$ e $u_{2,E}(\mathbb{C})$ não intersectam o limite assintótico $P_{2,E}$. Mais ainda, os autovetores e_1 e e_2 , associados a autovalores negativos de $A_{P_{2,E}}$, que descrevem o decaimento exponencial próximo ao furo $+\infty$ de $\tilde{u}_{1,E}$ e $\tilde{u}_{2,E}$, respectivamente, também possuem *winding number* 1 e, conseqüentemente, $d_0(\tilde{u}_{1,E}, +\infty) = d_0(\tilde{u}_{2,E}, +\infty) = 0$. Neste caso, o Corolário 5.9 de [54] (condições (1) e (3)) nos permite concluir que

$$[\tilde{u}] * [\tilde{u}_{1,E}] = 0 \quad \text{e} \quad [\tilde{u}] * [\tilde{u}_{2,E}] = 0. \tag{B.5}$$

Por outro lado, pelas propriedades do operador assintótico $A_{P_{2,E}}$, dadas no Teorema 1.3.4, e pelo fato de $CZ(P_{2,E}) = 2$, existe um único autovalor negativo δ de $A_{P_{2,E}}$ com *winding number* 1 e, mais que isso, a multiplicidade algébrica de δ é 1. Sendo assim, η , e_1 e e_2 pertencem todos ao autoespaço 1-dimensional associado ao autovalor δ e, portanto, é possível encontrar uma constante $c > 0$ tal que $\eta = ce_1$ ou $\eta = ce_2$. Sem perda de generalidade, supomos que $\eta = ce_1$, com $c > 0$, ou seja,

$$\tilde{u} \text{ e } \tilde{u}_{1,E} \text{ se aproximam de } P_{2,E} \text{ na mesma direção em } +\infty, \tag{B.6}$$

de acordo com a Definição B.0.1. Então, (B.3), (B.6) e o Teorema 2.5 de [54], nos dizem que $[\tilde{u}] * [\tilde{u}_{1,E}] > 0$, contradizendo (B.5).

Com isso, mostramos que, a menos de reparametrizações e translações na direção real, $\tilde{u}_{1,E}$ e $\tilde{u}_{2,E}$ são os únicos planos \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita em $\mathbb{R} \times W_E$ assintóticos à $P_{2,E}$. Observe ainda que $\tilde{u}_{1,E}$ e $\tilde{u}_{2,E}$ se aproximam de $P_{2,E}$ em direções opostas.

Agora vamos provar a unicidade do cilindro rígido \tilde{v}_E . Seja $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ um cilindro \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita satisfazendo $v(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$, que é assintótico à $P_{2,E}$ em $s = -\infty$ e é assintótico à $P_{3,E}$ em $s = +\infty$ com decaimento exponencial descrito por um autovetor e^+ associado a um autovalor negativo do operador assintótico $A_{P_{3,E}}$ com *winding number* 1. Suponha, por absurdo, que \tilde{v} não coincide com o cilindro $\tilde{v}_E = (b_E, v_E)$ a menos de reparametrizações e \mathbb{R} -translações, isto é, assumamos que

$$v(\mathbb{R} \times S^1) \neq v_E(\mathbb{R} \times S^1). \tag{B.7}$$

Usando o Princípio da Similaridade de Carleman, que pode ser encontrado em [34, Apêndice A.6], concluímos de (B.7) que não existe vizinhança do furo $s = -\infty$ onde as imagens de v e v_E coincidam.

Do mesmo modo que fizemos para o caso do plano, vamos analisar o número de interseção

generalizado $[\tilde{v}] * [\tilde{v}_E]$. Para isso, considere e^- o autovetor associado a um autovalor positivo do operador $A_{P_{2,E}}$ que descreve o comportamento assintótico de \tilde{v} próximo à $s = -\infty$. Como estamos supondo $\text{wind}(e^+) = 1$ e, além disso, temos que $\text{wind}(e^-) \geq \text{wind}^{\geq 0}(A_{P_{2,E}}) = \text{wind}^{< 0}(A_{P_{2,E}}) = 1$, pois $CZ(P_{2,E}) = 2$, a segunda equação de (1.52) nos diz que

$$0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{v}) = \text{wind}_\infty(\tilde{v}) = \text{wind}(e^+) - \text{wind}(e^-) \leq 1 - \text{wind}^{< 0}(A_{P_{2,E}}) = 0.$$

Disto segue que $\text{wind}(e^-) = \text{wind}(e^+) = 1$ e, portanto, como $CZ(P_{3,E}) = 3$, obtemos

$$\begin{aligned} d_0(\tilde{v}, +\infty) &:= \text{wind}^{< 0}(A_{P_{3,E}}) - \text{wind}(e^+) = 0 \\ d_0(\tilde{v}, -\infty) &:= \text{wind}^{< 0}(A_{P_{2,E}}) - \text{wind}(e^-) = 0. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Observe ainda que as imagens $v(\mathbb{R} \times S^1)$ e $v_E(\mathbb{R} \times S^1)$ não intersectam os limites assintóticos $P_{2,E}$ e $P_{3,E}$, uma vez que, por hipótese,

$$v(\mathbb{R} \times S^1), v_E(\mathbb{R} \times S^1) \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E} = S_E \setminus (U_{1,E} \cup P_{2,E} \cup U_{2,E} \cup P_{3,E}). \tag{B.9}$$

Denote por e_1^+ o autovetor associado a um autovalor negativo do operador $A_{P_{3,E}}$ que descreve o comportamento assintótico de \tilde{v}_E próximo à $s = +\infty$ e denote por e_1^- o autovetor associado a um autovalor positivo do operador $A_{P_{2,E}}$ que descreve o comportamento assintótico de \tilde{v}_E próximo à $s = -\infty$. Vimos na Proposição 3.5.8 que $\text{wind}(e_1^-) = \text{wind}(e_1^+) = 1$, logo $d_0(\tilde{v}_E, +\infty) = d_0(\tilde{v}_E, -\infty) = 0$. Sendo assim, estamos em condições de aplicar novamente o Corolário 5.9 de [54] (condições (1) e (3)) para concluir que

$$[\tilde{v}] * [\tilde{v}_E] = 0. \tag{B.10}$$

Entretanto, pelas propriedades do operador assintótico $A_{P_{2,E}}$ e por $CZ(P_{2,E}) = 2$, sabemos que existe um único autovalor positivo de $A_{P_{2,E}}$ com *winding number* 1 e, mais que isso, o autoespaço associado a este autovalor tem dimensão 1. Logo, existe uma constante c tal que $e^- = ce_1^-$. Note que, por (B.9), a constante c deve ser positiva e, então, podemos afirmar que

$$\tilde{v} \text{ e } \tilde{v}_E \text{ se aproximam de } P_{2,E} \text{ na mesma direção em } -\infty. \tag{B.11}$$

Deste modo, usando mais uma vez o Teorema 2.5 de [54], vemos que (B.7) e (B.11) implicam $[\tilde{v}] * [\tilde{v}_E] > 0$, contradizendo (B.10).

Com isso, provamos que \tilde{v}_E é o único cilindro \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita em $\mathbb{R} \times W_E$ com as propriedades assumidas no enunciado desta proposição, a menos de reparametrizações e translações na direção real. Analogamente, obtemos a unicidade do cilindro \tilde{v}'_E . \square

A estratégia de utilizar o número de interseção generalizado para garantir a unicidade de superfícies de energia finita, como fizemos na demonstração da Proposição B.0.2, pode ser encontrada também na demonstração do Lema 4.4 de [38].

Para finalizar este apêndice, vamos discutir algumas propriedades de interseção para semi-cilindros \tilde{J}_E -holomorfos na simplectização $\mathbb{R} \times W_E$ que são assintóticos a algum recobrimento

de $P_{2,E}$ e se projetam em W_E dentro da 3-bola aberta $\dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$. Propriedades análogas são válidas também para semi-cilindros assintóticos a recobrimentos de $P_{2,E}$ que se projetam em W_E na 3-bola aberta $\dot{S}'_E = S'_E \setminus \partial S'_E$. Antes de enunciar estas propriedades de interseção, vamos definir quando uma curva pseudo-holomorfa é *somewhere injective*.

Definição B.0.3. *Uma curva pseudo-holomorfa $\tilde{u} : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ é dita somewhere injective se existir um ponto $z_0 \in \Sigma \setminus \Gamma$ tal que*

$$d\tilde{u}(z_0) \neq 0 \quad e \quad \tilde{u}^{-1}(\tilde{u}(z_0)) = \{z_0\}.$$

Neste caso, z_0 é chamado de ponto injetivo de \tilde{u} .

Proposição B.0.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- i) *Seja $\tilde{w} = (d, w) : (-\infty, 0] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ um semi-cilindro \tilde{J}_E -holomorfo de energia finita, somewhere injective e assintótico a um p_0 -recobrimento de $P_{2,E}$ em seu furo negativo $-\infty$, com $p_0 \geq 2$. Se $w((-\infty, 0] \times S^1) \subset \dot{S}_E$, então w admite auto-interseções, isto é, existem $z_1, z_2 \in (-\infty, 0] \times S^1$ distintos satisfazendo $w(z_1) = w(z_2)$. Em particular, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{w}(z_1) = \tilde{w}_c(z_2)$, onde $\tilde{w}_c := (d + c, w)$.*
- ii) *Sejam $\tilde{w}_1 = (d_1, w_1), \tilde{w}_2 = (d_2, w_2) : (-\infty, 0] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ semi-cilindros \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita, ambos assintóticos à $P_{2,E}$ no furo negativo $-\infty$. Se $w_1((-\infty, 0] \times S^1), w_2((-\infty, 0] \times S^1) \subset \dot{S}_E$, então w_1 intersecta w_2 , ou seja, existem $z_1, z_2 \in (-\infty, 0] \times S^1$ satisfazendo $w_1(z_1) = w_2(z_2)$. Em particular, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{w}_1(z_1) = \tilde{w}_{2,c}(z_2)$, onde $\tilde{w}_{2,c} := (d_2 + c, w_2)$.*

Afirmações similares são válidas para semi-cilindros em \dot{S}'_E .

Demonstração. A essa altura, já sabemos que o operador assintótico $A_{P_{2,E}}$ admite dois autovalores $\mu < 0$ e $\delta > 0$, ambos com *winding number* 1, cujos autoespaços associados são 1-dimensionais e contêm, respectivamente, um par de μ -autovetores e_1 e e_2 e um par de δ -autovetores e_- e e'_- que descrevem, nesta ordem, o comportamento assintótico dos planos rígidos $\tilde{u}_{1,E}$ e $\tilde{u}_{2,E}$ próximo ao furo positivo $+\infty$ e dos cilindros rígidos \tilde{v}_E e \tilde{v}'_E próximo ao furo negativo $-\infty$, de acordo com a Definição 1.4.10. Mais ainda, pelo Teorema 1.3.4 (item 4.), os δ -autovetores e_- e e'_- são transversais à 2-esfera $\partial S_E = U_{1,E} \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$ nos pontos de $P_{2,E}$ e, além disso, e_- aponta para dentro de \dot{S}_E , enquanto e'_- aponta para dentro de \dot{S}'_E .

Um p_0 -recobrimento de $P_{2,E} = (x_{2,E}, T_{2,E})$, representado por $P_{2,E}^{p_0} = (x_{2,E}, p_0 T_{2,E})$, também é uma órbita periódica hiperbólica e seu índice de Conley-Zehnder é $CZ(P_{2,E}^{p_0}) = 2p_0$. Mais que isso, o operador assintótico $A_{P_{2,E}^{p_0}}$ admite um autovetor $e_-^{p_0}$, dado pelo p_0 -recobrimento de e_- , que está associado ao autovalor positivo $\delta^{p_0} := p_0\delta$ com *winding number* p_0 . Note que todo autovalor positivo de $A_{P_{2,E}^{p_0}}$ maior que δ^{p_0} deve ter *winding number* maior que p_0 , já que, entre os autovalores positivos de $A_{P_{2,E}^{p_0}}$, δ^{p_0} é o menor e é o único com *winding number* p_0 . Pelo Teorema 1.4.10, o decaimento exponencial do semi-cilindro $\tilde{w} = (d, w) : (-\infty, 0] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ próximo ao furo negativo $-\infty$, no qual \tilde{w} é assintótico à $P_{2,E}^{p_0}$, é descrito por um autovetor η associado a um autovalor positivo τ de $A_{P_{2,E}^{p_0}}$. Como

estamos assumindo $w((-\infty, 0] \times S^1) \subset \dot{S}_E$, τ deve coincidir com δ^{p_0} , pois caso contrário, $\text{wind}(\tau) > p_0$, forçando assim uma interseção entre $w((-\infty, 0] \times S^1)$ e a 2-esfera ∂S_E . Consequentemente, $\eta = ce_-^{p_0}$ para alguma constante $c > 0$, que pode ser assumida igual a 1 após uma translação conveniente na coordenada real do domínio.

Considere coordenadas de Martinet $(\vartheta, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$ próximo à $P_{2,E} \equiv S^1 \times \{0\}$, como no Lema 1.3.2, de modo que ∂_x seja um múltiplo positivo de e_- nestas coordenadas. Sendo assim, o *winding number* de e_- , com respeito ao referencial $\{\partial_x, \partial_y\}$, é igual à zero. Pela descrição assintótica de \tilde{w} próximo à $-\infty$, temos que a interseção da faixa conexa $F_0 := w((-\infty, s_0] \times S^1)$, $s_0 \ll 0$, com cada plano $\{\vartheta = t\}$ contém p_0 ramos de curvas que variam suavemente em $t \in S^1$ e convergem ao ponto $(t, 0, 0)$ quando $s \rightarrow -\infty$. Mais ainda, os p_0 ramos desta interseção são tangentes à ∂_x em $(t, 0, 0)$, para cada $t \in S^1$, e, portanto, $F_0 \subset \{x > 0\}$ nestas coordenadas. Se assumirmos que w não possui auto-interseções, então os p_0 ramos de $F_0 \cap \{\vartheta = t\}$ seriam disjuntos e admitiriam uma ordenação natural em $\mathbb{R}^2 \equiv \{\vartheta = t\}$ que independe de t , contradizendo a conexidade da faixa F_0 , já que $p_0 \geq 2$. Concluímos então que w deve se auto-intersectar, provando o item *i*) desta proposição.

Para demonstrar o item *ii*), vamos utilizar a descrição assintótica de Siefring [53] para a diferença de dois semi-cilindros pseudo-holomorfos que convergem exponencialmente para uma mesma órbita periódica, no nosso caso, a órbita hiperbólica $P_{2,E}$.

Por hipótese, $\tilde{w}_1 = (d_1, w_1)$, $\tilde{w}_2 = (d_2, w_2) : (-\infty, 0] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times W_E$ são semi-cilindros \tilde{J}_E -holomorfos de energia finita, ambos assintóticos à $P_{2,E}$ no furo negativo $-\infty$. Os trabalhos de Hofer, Wysocki e Zehnder [28, 31] e Mora [48], mostram que, após uma mudança de coordenadas no domínio (que converge à identidade quando $s \rightarrow -\infty$), podemos escrever

$$w_i(s, t) = \exp_{x_{2,E}(T_{2,E}t)} e^{\delta_i s} (\eta_i(t) + r_i(s, t)), \quad s \ll 0, \quad (\text{B.12})$$

para cada $i = 1, 2$, onde δ_i é um autovalor positivo do operador assintótico $A_{P_{2,E}}$, η_i é um δ_i -autovetor e o resto r_i decai exponencialmente rápido, juntamente com suas derivadas, quando $s \rightarrow -\infty$. Aqui, \exp é a aplicação exponencial associada à métrica Riemanniana usual induzida por $\tilde{J}_E = (\lambda_E, J_E)$ em W_E , isto é,

$$\langle u, v \rangle_E := \lambda_E(u)\lambda_E(v) + d\lambda_E(\pi(u), J_E \cdot \pi(v)),$$

onde $\pi : TW_E \rightarrow \xi = \ker \lambda_E$ é a projeção ao longo do campo de Reeb X_{λ_E} . Da mesma forma que argumentamos no item *i*), a suposição de que $w_1((-\infty, 0] \times S^1)$, $w_2((-\infty, 0] \times S^1) \subset \dot{S}_E$ nos leva à conclusão que ambos os autovalores positivos δ_1 e δ_2 de $A_{P_{2,E}}$ devem coincidir com δ , onde δ é o menor autovalor positivo de $A_{P_{2,E}}$, é o único autovalor positivo com *winding number* 1 e, juntamente com o δ -autovetor e_- , descreve o comportamento assintótico do cilindro \tilde{v}_E próximo ao seu furo negativo $-\infty$. Mais ainda, os autovetores η_1 e η_2 são múltiplos positivos de e_- , ou seja, \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 se aproximam de $P_{2,E}$ na mesma direção que \tilde{v}_E , segundo a Definição B.0.1. Após uma translação conveniente, podemos assumir que $\eta_1 = \eta_2 = e_-$.

Para cada $i = 1, 2$, defina

$$W_i(s, t) := e^{\delta_i s}(\eta_i(t) + r_i(s, t)), \quad s \ll 0,$$

conhecido como *representante assintótico* do semi-cilindro pseudo-holomorfo \tilde{w}_i . Pelo que acabamos de discutir, temos que $W_i(s, t) = e^{\delta s}(e_-(t) + r_i(s, t))$, para $i = 1, 2$. Se W_1 coincidir com W_2 , segue imediatamente de (B.12) que w_1 intersecta w_2 . Suponha então que os representantes assintóticos W_1 e W_2 diferem. Neste caso, o principal resultado de [53] (Teorema 2.2, adaptado a furos negativos), garante a existência de um autovalor positivo $\bar{\delta}$ de $A_{P_{2,E}}$ e de um $\bar{\delta}$ -autovetor \bar{e} tais que $W_1(s, t) - W_2(s, t) = e^{\bar{\delta}s}(\bar{e}(t) + r(s, t))$, onde r decai exponencialmente rápido, juntamente com suas derivadas, quando $s \rightarrow -\infty$. Sendo assim, obtemos

$$e^{\bar{\delta}s}(r_1(s, t) - r_2(s, t)) = W_1(s, t) - W_2(s, t) = e^{\bar{\delta}s}(\bar{e}(t) + r(s, t)), \quad s \ll 0. \quad (\text{B.13})$$

Tendo em vista o decaimento exponencial de r_1 e r_2 quando $s \rightarrow -\infty$, concluímos de (B.13) que $\bar{\delta} > \delta$. Como δ é o único autovalor positivo de $A_{P_{2,E}}$ com *winding number* 1, temos que $\text{wind}(\bar{\delta}) > \text{wind}(\delta) = 1$ e, portanto, existem infinitos pontos de interseção entre w_1 e w_2 para $|s|$ arbitrariamente grande. Veja Figura B.1. \square

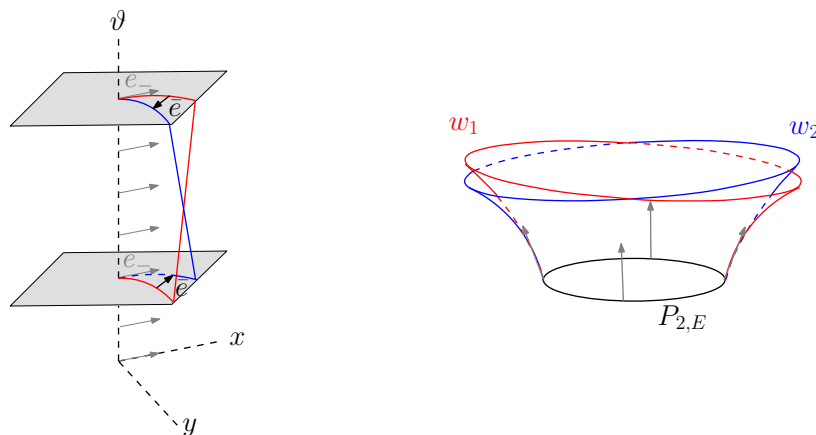


Figura B.1: Comportamento assintótico da diferença dos semi-cilindros w_1 e w_2 . A representação é feita, à esquerda, nas coordenadas de Martinet em torno de $P_{2,E} \equiv S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R}^2$ e, à direita, nas coordenadas originais em W_E .

Referências Bibliográficas

- [1] C. Abbas. *An Introduction to Compactness Results in Symplectic Field Theory*, Springer-Verlag, (2014).
- [2] C. Abbas, H. Hofer. *Holomorphic Curves and Global Questions in Contact Geometry*, http://math.berkeley.edu/~simic/Home_page/Hofer_book.pdf, (2006).
- [3] S. Addas-Zanata, C. Grotta-Ragazzo. *Conservative dynamics: unstable sets for saddle-center loops*. J. Differential Equations, **197**, (2004), 118–146.
- [4] P. Albers, U. Frauenfelder, O. van Koert, G. P. Paternain. *Contact geometry of the restricted three-body problem*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 65(2), (2012), 229–263.
- [5] P. Bernard. *Homoclinic orbit to a center manifold*. Calc. Var., **17**, (2003), 121–157.
- [6] P. Bernard, C. Grotta-Ragazzo, P.A.S. Salomão. *Homoclinic orbits near saddle-center fixed points of Hamiltonian systems with two degrees of freedom*. Astérisque, v. 286, (2003), 151–165.
- [7] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Compactness Results in Symplectic Field Theory*. Geom. Topol., **7**, (2003), 799–888.
- [8] H. Bursztyn, L. Macarini. *Introdução à geometria simplética*, Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, XIV Escola de Geometria Diferencial, (2006).
- [9] D. Bennequin. *Entrelacements et équation de Pfaff*. Astérisque, **107-108** (1983), 83–161.
- [10] A. C. da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, Springer-Verlag, Lecture notes in Mathematics, (2001).
- [11] D. Delatte. *On normal forms in Hamiltonian dynamics, a new approach to some convergence questions*. Erg. Th. Dyn. Sys., **15**, (1995), 49–66.
- [12] N. V. de Paulo, P. A. S. Salomão. *Systems of transversal sections near critical energy levels of Hamiltonian systems in \mathbb{R}^4* , preprint, arXiv:1310.8464.
- [13] Y. Eliashberg. *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **42** (1992), 165–192.

- [14] Y. Eliashberg. *Filling by holomorphic discs and its applications*. London Math. Society Lect. Notes Ser., **151** (1991), 45–67.
- [15] Y. Eliashberg. *Three lectures on symplectic topology in Cala Gonone – Basic notions, problems and some methods*. Conference on Differential Geometry and Topology, (Sardinia, 1988), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **58** (1988), suppl., 27–49.
- [16] J. Franks. *Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms*, Invent. Math. **108** (1992), 403–418.
- [17] H. Geiges. *An introduction to contact topology*, Cambridge studies in advanced Mathematics, Cambridge University Press, (2008).
- [18] M. Ghomi. *Strictly convex submanifolds and hypersurfaces of positive curvature*. J. Differential Geom. **57**, (2001), 239–271.
- [19] A. Giorgilli. *Unstable equilibria of Hamiltonian systems*. Dis. Con. Dyn. Sys. **7** (4) (2001), 855–871.
- [20] M. Gromov. *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*. Invent. Math., **82** (1985), 307–347.
- [21] C. Grotta-Ragazzo. *Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle centers*. Comm. Pure App. Math L, 105–147.
- [22] C. Grotta-Ragazzo, P.A.S. Salomão. *The Conley-Zehnder index and the saddle-center equilibrium*. Journal of Differential Equations **220**, 1 (2006), 259–278.
- [23] C. Grotta-Ragazzo, P.A.S. Salomão. *Global surfaces of section in non-regular convex energy levels of Hamiltonian systems*. Mathematische Zeitschrift **255**, 2 (2007), 323–334.
- [24] H. Hofer. *Pseudoholomorphic curves and symplectisations with application to the Weinstein conjecture in dimension three*. Invent. Math., **114** (1993), 515–563.
- [25] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *A characterization of the tight three sphere*. Duke Math. J., **81**, (1995), no. 1, 159–226.
- [26] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *A characterization of the tight three sphere II*. Commun. Pure Appl. Math., **55**, (1999), no. 9, 1139–1177.
- [27] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics*. Ann. Math, **157**, (2003), 125–255.
- [28] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations I: Asymptotics*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **13**, (1996), 337–379.

- [29] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations II: Embedding controls and algebraic invariants*. *Geom. Funct. Anal.*, **5**, (1995), no. 2, 270–328.
- [30] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations III: Fredholm theory*. *Topics in nonlinear analysis*, Birkhäuser, Basel, (1999), 381–475.
- [31] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations IV: Asymptotics with degeneracies*. *Contact and symplectic geometry* (Cambridge, 1994), 78 – 117. *Publications of the Newton Institute*, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [32] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Pseudoholomorphic curves and dynamics in three dimensions*. *Handbook of dynamical systems*, 1A, North-Holland, Amsterdam, (2002), 1129–1188.
- [33] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *The dynamics of strictly convex energy surfaces in \mathbb{R}^4* . *Ann. of Math.*, **148**, (1998), 197–289.
- [34] H. Hofer., E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, 1994.
- [35] U. Hryniewicz. *Fast finite-energy planes in symplectizations and applications*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 1859–1931.
- [36] U.L. Hryniewicz. *Systems of global surfaces of section for dynamically convex Reeb flows the 3-sphere*, preprint, arXiv:1105.2077.
- [37] U. Hryniewicz, J. Licata, Pedro A. S. Salomão. *A dynamical characterization of universally tight lens spaces*, preprint, arXiv:1306.6617.
- [38] U. L. Hryniewicz, A. Momin, Pedro A. S. Salomão. *A Poincaré-Birkhoff theorem for tight Reeb flows on S^3* , preprint, arXiv:1110.3782.
- [39] U.L. Hryniewicz, P.A.S. Salomão. *Global properties of tight Reeb flows with applications to Finsler geodesic flows on S^2* . *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **154**, (2013), 1–27.
- [40] U. Hryniewicz, Pedro A. S. Salomão. *On the existence of disk-like global sections for Reeb flows on the tight 3-sphere*. *Duke Mathematical Journal* **160**, 3 (2011), 415–465.
- [41] U.L. Hryniewicz, P.A.S. Salomão. *Uma introdução à geometria de contato e aplicações à dinâmica Hamiltoniana*. *Publicações Matemáticas do IMPA*, Rio de Janeiro, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, (2009).

- [42] L. M. Lerman, O. Yu. Koltsova. *Periodic and homoclinic orbits in two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center*. Intern. Jour. Bif. Chaos **5**, (1995), 397–408.
- [43] D. McDuff. *The local behavior of J -holomorphic curves in almost complex 4-manifolds*. J. Diff. Geom., **34**, (1991), 143–164.
- [44] D. McDuff, D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, (1998).
- [45] D. McDuff, D. Salamon. *J -holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, American Mathematical Society, University Lecture Series, Volume 6, (1994).
- [46] D. McDuff, D. Salamon. *J -holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 52, (2004).
- [47] A. Mielke, P. Holmes, O. O'Reilly. *Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle center*. J. Dyn. Diff. Eqns. **4**, (1992), 95–126.
- [48] Mora, E. *Pseudoholomorphic cylinders in symplectisations*. Doctoral dissertation, New York University, 2003.
- [49] J. Moser. *On the generalization of a theorem of A. Liapounoff*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **11**, 2 (1958), 257–271.
- [50] P. Rabinowitz *Periodic solutions of Hamiltonian systems on a prescribed energy surface*, J. Diff. Eq., **33**, (1979), 336–352.
- [51] H. Rüssmann, *Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Math. Ann., Princeton University Press, **154**, (1964), 285–300.
- [52] P.A.S. Salomão *Convex energy levels of Hamiltonian systems*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **4**, (2004), 439–454.
- [53] R. Siefring. *Relative asymptotic behavior of pseudoholomorphic half-cylinders*. Comm. Pure Appl. Math., **61** (12), 1631–1684, 2008.
- [54] R. Siefring. *Intersection theory of punctured pseudoholomorphic curves*. Geometry & Topology, **15** (2011), 2351–2457.
- [55] C. H. Taubes *The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture*, Geometry and Topology, **11**, (2007), 2117–2202.
- [56] C. Viterbo *A proof of Weinstein conjecture in \mathbb{R}^{2n}* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **4**, (1987), 337–356.
- [57] A. Weinstein *Periodic orbits for convex Hamiltonian systems*, The Annals of Mathematics, **108**, 3, (1978), 507–518.

- [58] A. Weinstein *On the hypothesis of Rabinowitz's periodic orbit theorems*, J. Diff. Eq., **33**, (1979), 353–358.