# SÔBRE UM MÉTODO DE REFINAMENTO DE TOPOLOGIAS

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

SÃO PAULO - 1952

CHAIM SAMUEL HÖNIG.

# SÔBRE UM MÉTODO DE REFINAMENTO DE TOPOLOGIAS.

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

São Paulo - 1952.

# INTRODUÇÃO.

Na presente tese estudamos um método ou processo pelo qual obtemos, a partir de uma topologia dada, novas topologias mais finas do que a primeira.(refinamento); consiste êste método em acrescentar ao anel de conjuntos fechados de uma topologia $\mathcal{T}$, dada, um anel $\mathcal{A}$ de conjuntos sem $\mathcal{T}$-interior. As novas topologias $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \geq \mathcal{T}$ assim obtidas são,em geral,teratopologias permitindo formar de modo muito simples exemplos e contra-exemplos de muitas situações topológicas; a importância primordial dêste método reside, porém, no fato de que êle vai servir para estabelecer relações existentes entre determinadas topologias (entre topologias quaisquer e topologias semi-regulares) e vai caracterizar completamente determinadas topologias a partir de outras mais simples (as topologias absolutamente fechadas a partir das topologias separadas minimais; as topologias separadas extremamente desconexas a partir das topologias completamente regulares e extremamente desconexas); segue-se também a existência de topologias irresolúveis.

Neste trabalho usamos as notações dos "Éléments de Mathématique" do grupo Bourbaki, em particular de sua Teoria dos Conjuntos ((B Ens.)) (º) e de sua Topologia Geral ((B I, ou B I' e B IX)) cujo conteudo assumimos como conhecido, em especial os parágrafos 1 a 6 e 10 do capítulo I e parágrafo 5 do capítulo IX da Topologia Geral, cujos resultados usamos constantemente e sem mencioná-los explìcitamente a maior parte das vezes.

---

(º) Os parêntesis duplos (( )) referem-se à bibliografia que se encontra no fim do presente trabalho.

No capítulo I desenvolvemos brevemente as noções e propriedades da Teoria dos Conjuntos (§1º), Topologia Geral (§2º) e Conjuntos Ordenados (3º) que não se encontram nos citados livros de Bourbaki.

No §1º do capítulo II expomos os resultados principais do processo $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ; mostramos (teorema 2 e corolário 2) que o anel $\mathcal{A}$ de conjuntos sem interior, que acrescentamos ao anel de conjuntos fechados da topologia $\mathcal{T}$ , sempre pode ser tomado de modo que todo conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-aberto seja da forma $O \cap \complement A$, onde $O$ é $\mathcal{T}$-aberto e $A \in \mathcal{A}$ . Indicando com $\langle \mathcal{T} \rangle$ o conjunto das topologias $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ obtidas a partir de $\mathcal{T}$ pelo processo $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ , mostramos (teorema 3 e corolário 9) que $\langle \mathcal{T} \rangle$ é uma parte ordenada indutiva, inf-reticulada, inf-completa e convexa do reticulado de tôdas as topologias e portanto tem elementos máximais, topologias em que todo conjunto sem interior é fechado (corolário 2 do teorema 3).

No §2º estudamos as topologias semi-regulares; dizemos que um conjunto aberto $O$ é <u>regular</u> se $O = \overset{\circ}{\overline{O}}$ e que uma topologia é <u>semi-regular</u> se seus conjuntos abertos regulares formam uma base de conjuntos abertos; mostramos que os conjuntos abertos regulares de uma topologia $\mathcal{T}$ formam uma base de conjuntos abertos de uma topologia semi-regular $\mathcal{T}^*$ (teorema 5) que chamamos de <u>topologia semi-regular associada à topologia</u> $\mathcal{T}$ ; se $\mathcal{T}$ é separada ou completamente separada sua topologia semi-regular associada $\mathcal{T}^*$ também o é (teorema 6 e corolário 1) donde se segue que as topologias separadas minimais são semi-regulares (corolário 2 do teorema 6).

A noção de semi-regularidade foi destacada por Stone

((S 1, p.442, def.19)) e a noção de topologia semi-regular associada a uma topologia e o teorema 5 também se encontram em Hewitt ((He, "semi-regular contraction" e seu teorema 5)) que, porém, não achou os teorema 6 e corolário 1 e sim formas mais fracas deles ((He, teoremas 5 e 6)) (ver também páginas 15 e 16 desta tese); a noção de semi-regularidade também foi usada por Katetov ((K 1,2,3 e 4)),eRamanathan ((R 1 e 2)) e outros. Queremos deixar aqui os nossos agradecimentos ao prof. Leopoldo Nachbin que nos chamou a atenção ao citado trabalho de Hewitt e que pôs a nossa disposição separatas de trabalhos de Katetov.

Reunindo êstes resultados com os do parágrafo 1º demonstramos que para uma topologia semi-regular $\tau_1$ o conjunto $\langle \tau_1 \rangle$ é justamente o conjunto das topologias cuja semi-regular associada é $\tau_1$ (teoremas 7 e 7') e temos assim:

O conjunto das topologias que têm uma mesma topologia semi-regular associada é uma parte inf-reticulada e inf-completa, convexa e ordenada indutiva do reticulado das topologias; tôdas estas topologias têm as mesmas funções numéricas contínuas e são caracterizadas por terem os mesmos conjuntos abertos regulares; se uma delas for separada ou completamente separada tôdas as outras também o serão; estas topologias também são caracterizadas pelo fato de serem obtidas a partir da topologiassemi-regular acrescentando ao anel de conjuntos fechados desta um anel de conjuntos sem interior.

No §1º do capítulo III aplicamos o processo $\tau \longrightarrow \tau_\Omega$ ao estudo das topologias absolutamente fechadas e por meio dele conseguimos caracterizá-las completamente; mostramos que uma topologia $\tau$ é absolutamente fechada se, e sòmente se, sua topologia semi-regular asso-

ciada é separada minimal (teorema 10') o que com o teorema 7 ou 7' nos dá o teorema 10: tôda topologia absolutamente fechada é da forma $\tau_{\mathcal{A}}$, onde $\tau$ é uma topologia separada minimal e $\mathcal{A}$ um anel de conjuntos sem $\tau$-interior; e recìprocamente, tôda topologia desta forma é absolutamente fechada.

Segue-se então que uma condição necessária e suficiente para que uma topologia absolutamente fechada seja separada minimal, é que ela seja semi-regular (corolário 1 do teorema 10) e uma condição necessária e suficiente para que a topologia $\tau^*$ semi-regular associada a uma topologia absolutamente fechada $\tau$ seja compacta, é que $\tau$ seja completamente separada (corolário 2 do teorema 10); com o auxílio do teorema 3 demonstramos então a existência de topologias absolutamente fechadas e completamente separadas maximais (corolário 4 do teorema 10). O corolário 1 do teorema 10 também foi obtido por Ramanathan ((R2)) e por Katetov ((K 1, teoremas 1.3 e 1.4)); mas êles não obtiveram a condição suficiente do teorema 10 que completa a caracterização das topologias absolutamente fechadas.

No parágrafo 2º estudamos as topologias extremamente desconexas (a aderência de todo conjunto aberto é um conjunto aberto); êste parágrafo teve sua origem na seguinte questão proposta pelo prof. Leopoldo Nachbin: se nosso processo nos permite resolver se tôda topologia separada extremamente desconexa é regular ou não.

Mostramos que para topologias extremamente desconexas a semi-regularidade, o axioma $(O_{III})$ e o axioma $(O_{IV})$ são equivalentes (teorema 12 e corolário 1) e que a situação do teorema 7 se aplica às topologias extremamente desconexas (teorema 11); segue-se então o teo-

rema 13: as topologias separadas extremamente desconexas são as topologias obtidas a partir das topologias completamente regulares e extremamente desconexas (topologias quasi stonianas) pelo processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$.

Damos em seguida um exemplo de uma topologia separada extremamente desconexa que não é regular, respondendo assim pela negativa a questão do prof. Leopoldo Nachbin.

No §3º aplicamos o processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$ para demonstrar a existência de topologias irresolúveis e para construir topologias irresolúveis a partir de uma topologia $\tau$ qualquer. Hewitt ((He, teorema 39)) foi o primeiro a estudar espaços irresolúveis e demonstrou a existência de espaços completamente regulares densos em si e irresolúveis. Dizemos que um espaço topológico é <u>irresolúvel</u> se êle não pode ser decomposto em dois conjuntos complementares densos em todo o espaço; é imediato que se num espaço topológico todo conjunto sem interior é fechado então êste espaço é irresolúvel (Lema 8); segue-se então que as topologias maximais do corolário do teorema 3 são irresolúveis; mais ainda, (corolário do teorema 15): Dada qualquer topologia separada e densa $\tau$ existe uma topologia separada densa e irresolúvel $\tau_1 \geqslant \tau$ que tem a mesma topologia semi-regular associada que $\tau$.

No capítulo IV damos outras aplicações do processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$. No §1º eformamos espaços topológicos sem sequências convergentes; demonstramos que dada uma topologia $\tau$ separada densa em si, existe uma topologia separada e densa em si $\tau_{\mathcal{A}} \geqslant \tau$ tal que $\tau_{\mathcal{A}}$ não tenha sequências convergentes e tenha a mesma topologia semi-regular associada que a topologia $\tau$ (corolário do teorema 16).

No §2º damos ràpidamente um contra-exemplo na teoria dos caracteres de Alexandroff.

No §3º mostramos que se no teorema do prolongamento de uma função contínua ((B I, p.38, Teorema 1)) o espaço separado E' não satisfizer o axioma ($O_{III}$), então existe uma topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ sôbre E (indicamos com $\tau$ a topologia original sôbre E) t.q. f é contínua de $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$ em E' (Teorema 17).

No §4º esboçamos ràpidamente outros exemplos, contra-exemplos e teratopologias.

No apêndice I abordamos a relação entre o $\Theta$-homeomorfismo de Fomin e as topologias semi-regulares; mostramos (Teorema 18) que duas topologias que têm a mesma topologia semi-regular associada são $\Theta$-homeomorfas. A recíproca recebeu apenas uma resposta parcial (Teorema 19 e observações).

No apêndice II esboçamos resultados que obtivemos no estudo da imersão de espaços separados em espaços separados; mostramos como o processo $\tau_{\mathcal{A}}$ permite formular e obter muitos resultados de modo muito simples.

No apêndice III damos alguns dos resultados que obtivemos no estudo de um problema que é uma generalização natural de um dos aspectos da presente tese: dada uma topologia qualquer achar um processo que nos permita obter a sua topologia $O_{III}$-associada (a mais fina das topologias que satisfazem o axioma $O_{III}$ e que são menos finas do que a topologia dada); e recìprocamente, achar um processo que a partir de uma

topologia $\mathcal{T}$ que satisfaz o axioma $O_{III}$ nos permita obter tôdas as topologias cuja $O_{III}$-associada seja a topologia $\mathcal{T}$.

Terminando esta introdução queremos deixar aqui os nossos agradecimentos aos professores E.Farah, Candido L. da Silva Dias, Luiz Henrique Jacy Monteiro e Leopoldo Nachbin, pelo apoio e estímulo que sempre deram nas nossas pesquizas.

# CAPITULO I.

## Noções preliminares.

### §1º - Teoria dos conjuntos.

Como já dissemos na introdução, seguiremos as notações da teoria dos conjuntos de Bourbaki ((B Ens.)); afastamo-nos dela em dois pontos. Quando um conjunto B é uma parte de um conjunto A escreveremos às vezes A - B para indicar $A \cap \complement B$. Dada uma família $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos suprimiremos, em geral, a referência ao conjunto I de índices da família, desde que não haja possibilidade de confusão, e escreveremos simplesmente "a família $X_i$".

Definições.

Dado um conjunto E dizemos que uma parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ é um anel de partes de E ou simplesmente um anel de conjuntos ou ainda um anel, se $\mathcal{A}$ tem as seguintes propriedades:

(A1) - A reunião finita de conjuntos de $\mathcal{A}$ é um conjunto de $\mathcal{A}$; em particular, a reunião vazia, que é o conjunto vazio, pertence a $\mathcal{A}$.

(A2) - Uma intersecção qualquer, não vazia, de conjuntos de $\mathcal{A}$ é um conjunto de $\mathcal{A}$.

Um ideal $\mathcal{J}$ de partes de E é um anel de partes de E que tem a propriedade:

(I) - Tôda parte de um conjunto de $\mathcal{J}$ pertence a $\mathcal{J}$.

Exemplos - 1) Os subconjuntos enumeráveis de um conjunto E qualquer é um ideal;

2) Os conjuntos raros e fechados de um espaço topológico qualquer formam um anel ((B IX, p.73)).

3) Os conjuntos raros de um espaço topológico formam um ideal ((loc.cit.)).

Dado um anel $\mathcal{A}$ de partes de E dizemos que um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de E é uma <u>base</u> do anel $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}$ é o conjunto das intersecções dos conjuntos de $\mathcal{B}$.

Dada uma família $\mathcal{A}_i$ de aneis chamamos de <u>anel soma</u> dos aneis $\mathcal{A}_i$ ao menor anel de partes de E que contêm todos os aneis $\mathcal{A}_i$; é imediato que o anel soma dos aneis $\mathcal{A}_i$ é formado pelas intersecções quaisquer de reuniões finitas de conjuntos de $\bigsqcup_i \mathcal{A}_i$.

O ideal gerado por um anel é o ideal formado por todos os subconjuntos de conjuntos do anel.

§ 2º - Topologia.

Na parte de topologia tambem seguiremos as notações e definições de Bourbaki ((B I, B I' e B IX)); faremos algumas pequenas modificações de notação que serão dadas a seguir.

Sempre que não houver menção explícita do contrário consideraremos tôdas as topologias como definidas sôbre um mesmo conjunto E; para indicar o conjunto E munido da topologia $\tau$ indicaremos o espaço topológico como $E_\tau$; se não houver possibilidade de confusão omitiremos a referência à topologia e diremos, simplesmente, o espaço topológico E. Em geral, porém, consideraremos um conjunto E munido de mais de uma estrutura topológica e sempre que for êste o caso teremos de especificar em relação a que topologia sôbre E se verificam determinadas propriedades topológicas; assim diremos que um conjunto é $\tau$-aberto, $\tau$-fechado, $\tau$-raro, uma $\tau$-vizinhança, etc., se estas são propriedades do conjunto dado no espaço topológico $E_\tau$. Do mesmo

modo temos de especificar em relação a que topologia tomamos as operações de aderência e interior; escreveremos assim $\overline{A}^{\tau}$, $\overset{\circ}{A}^{\tau_1}$, $\overset{\circ}{A}^{\tau^*}$, etc., cujo significado é evidente; também neste caso, suprimiremos a referência à topologia desde que não haja perigo de confusão.

Dizemos que uma parte A de $E_{\tau}$ <u>não tem $\tau$-interior</u>, ou, que é um <u>conjunto sem $\tau$-interior</u>, se $\overset{\circ}{A}^{\tau} = \emptyset$.

Dadas duas topologias $\tau_1$ e $\tau_2$ (sôbre um conjunto E) tal que $\tau_1$ seja menos fina do que $\tau_2$, escrevemos esta relação como $\tau_1 \leq \tau_2$, ou, $\tau_2 \geq \tau_1$; se $\tau_1$ for estritamente menos fina do que $\tau_2$, escreveremos $\tau_1 < \tau_2$, ou, $\tau_2 > \tau_1$.

Nesta tese usaremos seguidamente as relações duais de relações demonstradas e os teoremas duais assim obtidos não serão, em geral, mencionados explìcitamente.

Dualmente à noção de base de conjuntos abertos definimos: uma família $\mathcal{H}$ de conjuntos fechados de uma topologia $\tau$ é uma <u>base de conjuntos fechados</u> da topologia $\tau$, se todo conjunto $\tau$-fechado pode ser expresso como intersecção de conjuntos de $\mathcal{H}$.

Dizemos que uma topologia $\tau$ é <u>completamente separada</u> se pontos distintos têm vizinhanças fechadas disjuntas.

Dizemos que uma topologia $\tau$ sôbre E é <u>separada minimal</u> se ela é um elemento minimal no conjunto das topologias separadas sôbre E.

Quando um conjunto A é denso no espaço topológico E

dizemos, simplesmente, que <u>A é um conjunto denso</u>, ou ainda, que <u>A é denso</u> ("partout dense" segundo B I).

§ 3º - <u>Conjuntos ordenados</u>.

Seja E um conjunto ordenado por uma relação de ordem que escrevemos $\leqslant$ $(x \leqslant y)$:

Dizemos que uma parte A de E é <u>inf-reticulada</u>, se para quaisquer elementos x e y de A existe um elemento $z = \inf(x,y)$ em E e $z \in A$.

Dizemos que uma parte A de E é <u>inf-completa</u>, se para qualquer família $x_i$ de elementos de A existe um elemento $z = \inf x_i$ em E e $z \in A$.

Uma parte inf-completa é evidentemente inf-reticulada e tem um primeiro elemento.

Dizemos que uma parte A de E é <u>convexa</u>, se para quaisquer elementos x e y de A, com $x \leqslant y$, a relação $x \leqslant z \leqslant y$, com z em E, implica $z \in A$.

# CAPITULO II.

## Topologias $\tau_{\mathcal{A}}$ e topologias semi-regulares.

### § 1º - O processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$.

Seja $\tau$ uma topologia sôbre um conjunto E, $\mathcal{O}$ seu conjunto de conjuntos abertos; seja $\mathcal{A}$ um anel de partes de E sem $\tau$-interior. Consideremos a família de todos os conjuntos da forma $O \cap \complement A$, onde $O \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{A}$; é imediato que a intersecção de um número finito de conjuntos desta família ainda pertence a ela e, portanto, podemos considerar êstes conjuntos $O \cap \complement A$ como base de conjuntos abertos de uma topologia que indicaremos com $\tau_{\mathcal{A}}$.

Como $\emptyset \in \mathcal{A}$ segue-se que todo conjunto $\tau$-aberto é também $\tau_{\mathcal{A}}$-aberto, i.é.:

Teorema 1 - $\tau_{\mathcal{A}} \geqslant \tau$ ; $\tau_{\mathcal{A}} > \tau$ se e sòmente se existe um conjunto $A \in \mathcal{A}$ que não é $\tau$-fechado.

Dada uma topologia $\tau$ indicamos com $\langle \tau \rangle$ o conjunto das topologias $\tau_{\mathcal{A}}$ que podem ser obtidas a partir de $\tau$ pelo método acima, isto é, o conjunto das topologias $\tau_{\mathcal{A}}$, onde $\mathcal{A}$ percorre o conjunto dos aneis sem $\tau$-interior.

Há topologias $\tau$ em que todo conjunto sem interior é fechado e, portanto, para qualquer anel $\mathcal{A}$ de conjuntos sem $\tau$-interior temos $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$, isto é, $\langle \tau \rangle = \{\tau\}$ (ver corolário do teorema 3).

São equivalentes as seguintes condições:

a) todo conjunto sem interior é fechado;

b) todo conjunto denso no espaço todo é aberto;

c) todo conjunto é reunião de um conjunto aberto e de um conjunto fechado;

d) todo conjunto é intersecção de um conjunto aberto e de um conjunto fechado.

Dualmente, podemos considerar a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ como obtida a partir da topologia $\mathcal{T}$ acrescentando ao anel de conjuntos fechados desta o anel $\mathcal{A}$. Em geral nem todo conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-aberto é da forma $O \cap \complement A$ com $A \in \mathcal{A}$ e $O \in \mathcal{O}$ mas vamos mostrar (corolário 1 do teorema 2) que existe um anel $\mathcal{A}'$ de conjuntos sem $\mathcal{T}$-interior t.q. $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}'} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ e t.q. todo conjunto aberto de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}'} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ seja da forma $O \cap \complement A'$ onde $O \in \mathcal{O}$ e $A' \in \mathcal{A}'$.

Neste trabalho indicaremos sempre com as letras $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}_1$, etc. aneis de conjuntos sem $\mathcal{T}$-interior de uma topologia $\mathcal{T}$ dada. $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{T}^*_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{T}_{1\mathcal{A}}$ indicarão a topologia obtida pelo processo acima, $\mathcal{A}$ sendo sempre um anel de conjuntos sem $\mathcal{T}$-interior, respectivamente, sem $\mathcal{T}^*$ ou $\mathcal{T}_1$-interior. Chamaremos êste processo de <u>processo</u> $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ou simplesmente <u>processo</u> $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

Dizemos que um conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-aberto da forma $O' = O \cap \complement A$ é $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-<u>associado</u> ou simplesmente <u>associado</u> ao conjunto $\mathcal{T}$-aberto $O$.

<u>Lema 1</u> - Se $O_1$ e $O_2$ são dois conjuntos $\mathcal{T}$-abertos cuja intersecção não é vazia, a intersecção de dois seus $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-associados também não é vazia.

<u>Demonstração</u> - Sejam $O_1' = O_1 \cap \complement A_1$ e $O_2' = O_2 \cap \complement A_2$ os conjuntos $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-abertos, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-associados a $O_1$ e $O_2$, respectivamente; de $O_1' \cap O_2' = O_1 \cap O_2 \cap \complement(A_1 \cup A_2) = \emptyset$ seguiria $O_1 \cap O_2 \subset A_1 \cup A_2$, contra a hipótese de $\mathcal{A}$ ser um anel de conjuntos sem $\mathcal{T}$-interior.

<u>Lema 2</u> - Seja $O$ um conjunto $\tau$-aberto e $O'$ um seu $\tau_{\mathcal{A}}$-associado: $\overline{O'}^{\tau_{\mathcal{A}}} = \overline{O}^{\tau}$.

<u>Demonstração</u> - De $O' \subset O$ e $\tau_{\mathcal{A}} \geq \tau$ segue-se imediatamente que $\overline{O'}^{\tau_{\mathcal{A}}} \subset \overline{O}^{\tau}$; seja então $x \in \overline{O}$; isto quer dizer que $O_x \cap O \neq \emptyset$ para qualquer vizinhança $\tau$-aberta $O_x$ de $x$; do lema 1 segue-se que $O'_x \cap O' \neq \emptyset$ para qualquer vizinhança $O'_x$ de $x$ $\tau_{\mathcal{A}}$-associada à $O_x$ (estas formam um sistema fundamental de vizinhanças de $x$ na topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ pois os conjuntos abertos da forma $O \cap \complement A$ formam uma base de conjuntos abertos de $\tau_{\mathcal{A}}$) i.é., $x \in \overline{O'}^{\tau_{\mathcal{A}}}$ o que termina a demonstração do lema.

<u>Lema 3</u> - Dado um conjunto $\tau_{\mathcal{A}}$-aberto $O'$, existe um conjunto $\tau$-aberto $O$ t.q.: $\overline{O}^{\tau} = \overline{O'}^{\tau_{\mathcal{A}}}$.

<u>Demonstração</u> - Os conjuntos $\tau_{\mathcal{A}}$-abertos da forma $O \cap \complement A$ formando uma base de conjuntos abertos da topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ e portanto existe uma família de conjuntos $\tau_{\mathcal{A}}$-abertos $O'_i = O_i \cap \complement A_i$ t.q. $O' = \bigcup (O_i \cap \complement A_i)$. Tomemos $O = \bigcup O_i$; de $O' \subset O$ e $\tau_{\mathcal{A}} \geq \tau$ segue-se que $\overline{O'}^{\tau_{\mathcal{A}}} \subset \overline{O}^{\tau}$; reciprocamente, seja $x \in \overline{O}^{\tau}$; logo $O_x \cap O \neq \emptyset$ para qualquer $\tau$-vizinhança aberta $O_x$ de $x$; mas então existe um $i \in I$ t.q. $O_x \cap O_i \neq \emptyset$. Do lema 1 segue-se então que $O'_x \cap O'_i \neq \emptyset$ para qualquer $\tau_{\mathcal{A}}$-vizinhança $O'_x$ de $x$, $\tau_{\mathcal{A}}$-associada a $O_x$ e portanto $O'_x \cap O' \neq \emptyset$ para qualquer $\tau_{\mathcal{A}}$-vizinhança $O'_x$ de $x$, i.é., $x \in \overline{O'}^{\tau_{\mathcal{A}}}$.

<u>Teorema 2</u> - Dada uma topologia $\tau'$ t.q. $\tau \leq \tau' \leq \tau_{\mathcal{A}}$ existe um anel $\mathcal{B}$ de conjuntos sem $\tau$-interior t.q. $\tau' = \tau_{\mathcal{B}}$ e t.q. todo conjunto $\tau_{\mathcal{B}}$-aberto seja da forma $O \cap \complement B$ onde $O \in \mathcal{O}$ e $B \in \mathcal{B}$.

Demonstração - Todo conjunto $O'$ que é $\mathcal{T}'$-aberto é também $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-aberto e pelo lema 3 existe um conjunto $O$ $\mathcal{T}$-aberto, $O' \subset O$, t.q. $\overline{O}^{\mathcal{T}} = \overline{O'}^{\mathcal{T}_{\mathcal{A}}}$ e como temos $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}' \leq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ segue-se que $\overline{O} = \overline{O'}^{\mathcal{T}} = \overline{O'}^{\mathcal{T}_{\mathcal{A}}}$. Consideremos a família dos conjuntos da forma $B = \overline{O'}^{\mathcal{T}'} - O'$ ($O'$ percorrendo os conjuntos $\mathcal{T}'$-abertos); êles constituem o anel $\mathcal{B}$ dos conjuntos $\mathcal{T}'$-raros e fechados: todo conjunto de $\mathcal{B}$ é fronteira de um conjunto $\mathcal{T}'$-aberto e é portanto $\mathcal{T}'$-raro e fechado; recìprocamente, todo conjunto $\mathcal{T}'$-raro e fechado $R$ é da forma $\overline{O'}^{\mathcal{T}'} - O'$, basta tomar $O' = \complement R$. Como $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ êstes conjuntos também não têm $\mathcal{T}$-interior e de $O \supset O'$, da definição de $B$ e de $\overline{O}^{\mathcal{T}} = \overline{O'}^{\mathcal{T}'}$ segue-se que $O' = O \cap \complement B$. (C.Q.D.).

Observemos que sendo $O'$ também $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-aberto e $\overline{O'}^{\mathcal{T}'} = \overline{O'}^{\mathcal{T}_{\mathcal{A}}}$ todo conjunto $\mathcal{T}'$-raro e fechado é tambem $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-raro e fechado. Portanto:

Corolário 1 - Seja $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}' \leq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ então todo conjunto $\mathcal{T}'$-raro e fechado é também $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-raro e fechado.

Corolário 2 - Dada a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ existe um anel $\mathcal{A}'$ de conjuntos sem $\mathcal{T}$-interior t.q. $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}'}$ e t.q. todo conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-aberto seja da forma $O' = O \cap \complement A'$; $\mathcal{A}'$ é o anel dos conjuntos $\mathcal{T}'$-raros e fechados.

Demonstração - E' o que ficou demonstrado no teorema 2 tomando $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{A}' = \mathcal{B}$; considerando conjuntos abertos da forma $\complement A$ segue-se que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ pois $A = \overline{\complement A} - \complement A = E - \complement A$.

Corolário 3 - Os conjuntos do anel $\mathcal{A}$ são conjuntos raros e fechados na topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

Corolário 4 - Todo conjunto $\tau_{\mathcal{A}'}$ -fechado é da forma $F \cup A'$, onde $F$ é $\tau$ -fechado e $A' \in \mathcal{A}'$.

Corolário 5 - O ideal dos conjuntos $\tau_{\mathcal{A}'}$ -raros é o ideal gerado pelo anel $\mathcal{A}'$.

Corolário 6 - Seja $\mathcal{B}$ um anel de conjuntos sem $\tau_{\mathcal{A}}$ - interior, então existe um anel $\mathcal{C}$ de conjuntos sem $\tau$ -interior t.q. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ e $(\tau_{\mathcal{A}})_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{C}}$.

Demonstração - Tomando como anel $\mathcal{C}$ o anel $\mathcal{B}'$ do corolário 2 temos $(\tau_{\mathcal{A}})_{\mathcal{B}} = (\tau_{\mathcal{A}})_{\mathcal{B}'}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$; os conjuntos de $\mathcal{A}$ são $\tau_{\mathcal{A}}$-raros e fechados (corolário 3) e portanto de $\tau_{\mathcal{A}} \leqslant \tau_{\mathcal{A}} \leqslant (\tau_{\mathcal{A}})_{\mathcal{B}}$ segue-se (corolário 1) que êles são também $(\tau_{\mathcal{A}})_{\mathcal{B}}$ -raros e fechados, isto é, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}'$ (corolário 2); portanto, $(\tau_{\mathcal{A}})_{\mathcal{B}'} = \tau_{\mathcal{B}'}$.

Corolário 7 - Seja $\tau \leqslant \tau' \leqslant \tau_{\mathcal{A}}$ : existe um anel $\mathcal{B}$ de conjuntos sem $\tau'$-interior t.q. $\tau_{\mathcal{A}} = (\tau')_{\mathcal{B}}$.

Demonstração - E' imediato que o próprio anel $\mathcal{A}$ satisfaz estas condições.

Corolário 8 - O anel $\mathcal{A}'$ (do corolário 2) é t.q. $\tau \leqslant \tau_{\mathcal{B}} \leqslant \tau_{\mathcal{A}'}$ implica $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$.

Demonstração - Os conjuntos de $\mathcal{B}$ são $\tau_{\mathcal{B}}$-raros e fechados (corolário 3), portanto, $\tau_{\mathcal{A}'}$ -raros e fechados (corolário 1) e portanto pertencem a $\mathcal{A}'$ (corolário 2).

Corolário 9 - $\langle \tau \rangle$ é uma parte inf-reticulada, inf-completa e convexa do reticulado das topologias.

Demonstração - Seja $\tau_i = \tau_{\mathcal{A}_i}$ um conjunto de topologias de $\langle \tau \rangle$ ; temos $\tau \leqslant \tau_i$ (teorema 1) e portanto $\tau \leqslant \tau' =$

$= \inf \tau_i$ (o reticulado de tôdas as topologias é completo) mas $\tau \leq \tau' \leq \tau_{\mathcal{A}_i}$ implica $\tau' \in \langle \tau \rangle$ (corolário 7) e portanto $\langle \tau \rangle$ é inf-reticulado e inf-completo.

Dadas duas topologias $\tau_{\mathcal{A}} \leq \tau_{\mathcal{B}}$ de $\langle \tau \rangle$ seja $\tau'$ uma topologia t.q. $\tau_{\mathcal{A}} \leq \tau' \leq \tau_{\mathcal{B}}$ ; temos $\tau \leq \tau_{\mathcal{A}}$ e portanto $\tau \leq \tau' \leq \tau_{\mathcal{B}}$ seguindo então do corolário 7 que $\tau' \in \langle \tau \rangle$ i.é. $\langle \tau \rangle$ é convexo.

<u>Teorema 3</u> - <u>O conjunto $\langle \tau \rangle$ é um conjunto ordenado indutivo.</u>

<u>Demonstração</u> - Seja $\tau_i = \tau_{\mathcal{A}_i}$ uma família totalmente ordenada de topologias de $\langle \tau \rangle$ ; podemos supôr que os aneis $\mathcal{A}_i$ sejam os dados pelo teorema 2 e seu corolário 8, de modo que êles formam uma família totalmente ordenada isomorfa à família $\tau_i$; seja $\tau' = \sup \tau_i$ e indiquemos com $\mathcal{F}$ o anel dos conjuntos fechados de $\tau$ ; então $\mathcal{F} \cup \mathcal{A}_i$ é o anel dos conjuntos fechados da topologia $\tau_i$ e $\mathcal{F} \cup \bigcup_i \mathcal{A}_i$ é um sistema de geradores de conjuntos fechados da topologia $\tau'$ ; todos os conjuntos de $\bigcup_i \mathcal{A}_i$ são sem $\tau$-interior, e, uma reunião finita de conjuntos de $\bigcup_i \mathcal{A}_i$ ainda pertence a êste conjunto pois os $\mathcal{A}_i$ estão totalmente ordenados; portanto as intersecções quaisquer de conjuntos de $\bigcup_i \mathcal{A}_i$ formam um anel $\mathcal{A}$ de conjuntos sem $\tau$-interior e $\mathcal{F} \cup \mathcal{A}$ é uma base de conjuntos fechados de $\tau'$ i.é. $\tau' = \tau_{\mathcal{A}}$ .

Segue-se do teorema de Zorn que $\langle \tau \rangle$ tem elementos maximais e que:

<u>Corolário 1</u> - Para qualquer topologia $\tau'$ de $\langle \tau \rangle$ existe pelo menos um elemento maximal $\tau_1 \geq \tau'$ .

Corolário 2 - Se $\tau_1$ é um elemento maximal de $\langle\tau\rangle$ então todo conjunto sem $\tau_1$-interior é $\tau_1$-fechado.

Demonstração - $\tau_1$ como elemento de $\langle\tau\rangle$ é da forma $\tau_1 = \tau_{\mathcal{A}}$ e se houvesse um anel $\mathcal{B}$ de conjuntos sem $\tau_1$-interior tal que $\tau_{1\mathcal{B}} > \tau_1$ seguir-se-ia do corolário 6 do teorema 2 a existência de um anel $\mathcal{C}$ de conjuntos sem $\tau$-interior tal que $\tau_{1\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{C}}$ e portanto $\tau \leqslant \tau_1 = \tau_{\mathcal{A}} < \tau_{1\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{C}}$ logo $\tau_1$ não seria um elemento maximal de $\langle\tau\rangle$. Portanto para todo anel $\mathcal{B}$ de conjuntos sem $\tau_1$-interior temos $\tau_{1\mathcal{B}} = \tau_1$ seguindo-se então do teorema 1 que todo conjunto sem $\tau_1$-interior é $\tau_1$-fechado.

O teorema 3 nos permitirá a construção de topologias irresolúveis (ver teorema 15 do §3º, cap.III) a partir de uma topologia qualquer; também nos permitirá demonstrar a existência de topologias absolutamente fechadas maximais (não minimais!) (ver corolário 4 do teorema 10).

Teorema 4 - Dado um conjunto E munido de duas topologias $\tau$ e $\tau_{\mathcal{A}}$, e um espaço topológico regular F as aplicações contínuas de E em F são as mesmas nas duas topologias.

Demonstração - Sendo $\tau \leqslant \tau_{\mathcal{A}}$ segue-se que tôda aplicação contínua de $E_\tau$ em F é também contínua de $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$ em F. Se-

ja reciprocamente $f$ uma aplicação contínua de $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$ em $F$; então dado qualquer $x \in E$ e qualquer vizinhança fechada $\overline{V}$ de $f(x)$ em $F$ existe uma $\tau_{\mathcal{A}}$-vizinhança $O'_x = O_x \cap \complement A$ de $x$ t.q. $f(O'_x) \subset \overline{V}$; sendo $f$ $\tau_{\mathcal{A}}$-contínua segue-se que $f(\overline{O'_x}^{\tau_{\mathcal{A}}}) \subset \overline{V}$ e pelo lema 2 temos $\overline{O'_x}^{\tau_{\mathcal{A}}} = \overline{O}_x^{\tau}$ e portanto $f(O_x) \subset \overline{V}$, i.é., $f$ é $\tau$-contínua em $x$ e sendo $x$ qualquer segue-se a $\tau$-continuidade de $f$ em $E$.

<u>Corolário</u> - $E_{\tau}$ e $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$ têm as mesmas funções numéricas contínuas.

Veremos no parágrafo seguinte que as topologias $\tau_{\mathcal{A}}$ são o que se costuma chamar, em geral, teratopologias; assim se $\tau_{\mathcal{A}} \neq \tau$ então $\tau_{\mathcal{A}}$ nem siquer é semi-regular. (corolário 4 do teorema 7).

## § 2º - <u>Topologias semi-regulares</u>.

Dizemos que um conjunto aberto $O$ é <u>regular</u> se $\overset{\circ}{\overline{O}}=O$. Dizemos que um conjunto fechado $F$ é <u>regular</u> se $\overline{\overset{\circ}{F}} = F$. O complementar de um conjunto fechado regular é um conjunto aberto regular e reciprocamente; ver ((He,)) p.311, teorema 3).

A intersecção de um número finito de conjuntos abertos regulares é um conjunto aberto regular: pois para conjuntos abertos temos $\overline{O_1 \cap O_2} = \overline{O}_1 \cap \overline{O}_2$ e portanto $\overset{\circ}{\overline{O_1 \cap O_2}} = \overset{\circ}{\overline{O}}_1 \cap \overset{\circ}{\overline{O}}_2$ de modo que se $O_1$ e $O_2$ forem regulares a sua intersecção também o será.

Dizemos que uma topologia é <u>semi-regular</u> se os seus conjuntos abertos regulares formam uma base de conjuntos abertos, ou, dualmente, se os seus conjuntos fechados regulares formam uma base de conjuntos fechados.

<u>Lema 4</u> - Todo conjunto aberto da forma $\overset{o}{O}$ é regular.

<u>Demonstração</u> - Seja $O_1 = \overset{o}{O}$; queremos demonstrar que $\overset{o}{O}_1 = O_1$; $O \subset \overline{O}$ portanto $O \subset \overset{o}{\overline{O}} = O_1$, donde $\overline{O} \subset \overline{O}_1$, logo, $O_1 = \overset{o}{\overline{O}} \subset \subset \overset{o}{\overline{O}}_1$; por outro lado, temos $\overset{o}{\overline{O}} \subset \overline{O}$ donde $\overset{o}{\overline{O}} = \overline{O}_1 \subset \overline{O}$ logo $\overset{o}{\overline{O}}_1 \subset \overset{o}{\overline{O}} = O_1$ que com a relação de inclusão em sentido contrário que temos logo acima demonstra a nossa relação.

<u>Corolário 1</u> - A aderência de um conjunto aberto é um conjunto fechado regular, isto é, $\overline{\overset{o}{\overline{O}}} = \overline{O}$ e todo conjunto fechado regular é desta forma.

<u>Corolário 2</u> - O interior de um conjunto fechado é um conjunto aberto regular.

<u>Corolário 3</u> - <u>Tôda topologia que satisfaz o axioma</u> ($O_{III}$) (B. I. p.38) <u>é semi-regular</u>.

<u>Demonstração</u> - Seja $O$ um conjunto aberto qualquer; para todo ponto $x \in O$, $O$ contém uma vizinhança fechada $F_x$ de $x$; pelo corolário 2 $\overset{o}{F}_x$ é um conjunto aberto regular e portanto $O$ pode ser escrito como reunião de conjuntos abertos regulares i.é. êstes formam uma base de conjuntos abertos.

Dada uma topologia $\tau$ consideremos a topologia $\tau^*$, que é obtida tomando como base de conjuntos abertos os conjuntos $\tau$-abertos regulares, ou, dualmente, tomando como base de conjuntos fechados os conjuntos $\tau$-fechados e regulares; é imediato que:

$\tau^* \leq \tau$ ; $\tau^* = \tau$ <u>se e sòmente se</u> $\tau$ <u>é uma topologia semi-regular</u>.

<u>Teorema 4</u> - <u>Tôda topologia da forma</u> $\tau^*$ <u>é semi-regular</u>.

<u>Demonstração</u> - Os conjuntos $\tau$-fechados regulares $\overline{O}$ (corolário 1 do lema 4) formam uma base de conjuntos fechados da topologia $\tau^*$; se demonstrarmos que êstes conjuntos são $\tau^*$-fechados regulares teremos demonstrado o teorema. Basta mostrar que $\overline{\overset{o}{\overline{O}}}^{\tau^*} = \overline{O}$, pois, do corolário 1 do lema 4 segue-se que $\overline{\overset{o}{\overline{O}}}^{\tau^*}$ como aderência de um conjunto $\tau^*$-aberto é $\tau^*$-fechado regular. Demonstração da igualdade $\overline{\overset{o}{\overline{O}}}^{\tau^*} = \overline{O}$: 1) $\tau \geqslant \tau^* \longrightarrow \overline{\overset{o}{\overline{O}}}^{\tau^*} \supset \overline{\overset{o}{\overline{O}}} = \overline{O}$ (corolário 1 do lema 4); 2) seja $x \notin \overline{O}$; então existe uma vizinhança $\tau$-aberta $O_x$ de $x$ t.q. $O_x \cap O = \emptyset$; donde vem $\overline{O}_x \cap O = \emptyset$, logo, $\overset{o}{\overline{O}}_x \cap O = \emptyset$; e do mesmo modo $\overset{o}{\overline{O}}_x \cap \overset{o}{\overline{O}} = \emptyset$, i.é., $x \notin \overline{\overset{o}{\overline{O}}}^{\tau^*}$ pois $\overset{o}{\overline{O}}_x$ como conjunto aberto regular (lema 4) é uma $\tau^*$-vizinhança de $x$; temos, portanto, $\overline{\overset{o}{\overline{O}}}^{\tau^*} = \overline{O}$.

Se definimos o conjunto aberto $\overset{o}{\overline{O}}$ como <u>o conjunto aberto regularizado de</u> $O$, vemos que demonstramos no teorema 3 o

<u>Corolário</u> - Se a intersecção de dois conjuntos abertos é vazia a intersecção de seus abertos regularizados também o é.

Dizemos que a topologia semi-regular $\tau^*$ que associamos à topologia $\tau$ é <u>a topologia semi-regular associada à topologia</u> $\tau$ e a indicaremos sempre por $\tau^*$.

<u>Teorema 5</u> - <u>Uma topologia</u> $\tau$ <u>é separada se e sòmente se sua semi-regular associada</u> $\tau^*$ <u>também o é</u>.

<u>Demonstração</u> - Se $x$ e $y$ têm $\tau$-vizinhanças aber-

tas que não se encontram então pelo corolário do teorema 4 os abertos regularizados destas vizinhanças também têm intersecção vazia; mas êstes abertos regularizados são $\tau^*$-vizinhanças de x e y respectivamente. A recíproca segue do fato de tôda topologia mais fina que uma topologia separada ser separada.

Corolário 1 - A topologia $\tau$ é completamente separada se e sòmente se a sua semi-regular associada $\tau^*$ o é.

Demonstração - Sejam $F_x$ e $F_y$ $\tau$-vizinhanças fechadas e disjuntas de x e y, respectivamente, então $\overset{\circ}{F}_x$ e $\overset{\circ}{F}_y$ são $\tau$-vizinhanças abertas de x e y e do corolário 2 do lema 4, segue-se que êstes conjuntos também são $\tau^*$-vizinhanças abertas de x e y. Então $\overline{\overset{\circ}{F}}_x$ e $\overline{\overset{\circ}{F}}_y$ são $\tau^*$-vizinhanças de x e y, respectivamente e do corolário 1 do lema 4 segue-se que elas são $\tau^*$-fechadas; de $F_x \supset \overline{\overset{\circ}{F}}_x$ e $F_y \supset \overline{\overset{\circ}{F}}_y$ segue-se que elas são disjuntas.

A recíproca vem do fato de tôda topologia mais fina que uma topologia completamente seprada ser completamente separada.

Corolário 2 - As topologias separadas minimais são semi-regulares.

Demonstração - Temos sempre $\tau^* \leq \tau$ e sendo $\tau$ separada minimal, o teorema 6 implica que $\tau = \tau^*$.

Hewitt (He., Teorema 5) também demonstrou o teorema 5, mas ao envez dos teorema 6 e corolário 1, êle apenas demonstrou que a topologia semi-regular associada a uma topologia completamente separada é separada, e, a associada a uma topologia separada é separada $T_1$

(todo conjunto finito é fechado) (He., Teoremas 5 e 6). Os teoremas 5 e corolário 1 são essenciais para a aplicação dos resultados dêste parágrafo e do precedente ao estudo das topologias absolutamente fechadas (§1º, cap.III).

<u>Teorema 5</u> - (<u>Teorema fundamental</u>) <u>Seja</u> $\tau_1$ <u>uma topologia semi-regular e</u> $\tau$ <u>uma topologia qualquer:</u> $\tau_1$ <u>é a topologia semi-regular associada à topologia</u> $\tau$ <u>se e sòmente se existe um anel</u> $\mathcal{A}$ <u>de conjuntos sem</u> $\tau_1$<u>-interior t.q.</u> $\tau = \tau_{1\mathcal{A}}$.

<u>Demonstração</u> - Seja $\tau^* = \tau_1$; consideremos o anel $\mathcal{A}$ formado pelos conjuntos $A = \overline{O} - O$ onde $O$ percorre os conjuntos $\tau$-abertos; êste é o anel dos conjuntos $\tau$-raros e fechados e sendo $\tau_1 = \tau^* \leq \tau$ é também um anel de conjuntos sem $\tau_1$-interior e como $O_1 = \overset{\circ}{\overline{O}}^{\tau}$ é um conjunto aberto regular em $\tau$ e em $\tau^* = \tau_1$ então de $O_1 \supset O$ e da definição de $A$ vem que $O = O_1 \cap \complement A$, i.é., $\tau = \tau_{1\mathcal{A}}$.

Recìprocamente: seja $\tau = \tau_{1\mathcal{A}}$ onde $\tau_1$ é semi-regular e $\mathcal{A}$ um anel de conjuntos sem $\tau_1$-interior; usando o corolário 2 do teorema 2 podemos supôr que $\mathcal{A}$ é t.q. qualquer conjunto $\tau$-aberto seja da forma $O = O_1 \cap \complement A$ onde $O_1$ é $\tau_1$-aberto e $A \in \mathcal{A}$. Pelo lema 2 temos $\overline{O}^{\tau} = \overline{O_1}^{\tau_1}$ e portanto $\overset{\circ}{\overline{O}}^{\tau} = \overset{\circ}{\overline{O_1}}^{\tau_1}$ (dual do lema 2) e êstes últimos são, conforme o lema 4, $\tau$ e $\tau_1$-abertos regulares, isto é, os conjuntos $\tau$-abertos regulares e os conjuntos $\tau_1$-abertos regulares são os mesmos, logo, $\tau^* = \tau_1$.

<u>Corolário 1</u> - $\tau$ e $\tau^*$ têm os mesmos conjuntos abertos regulares.

Corolário 2 - Uma condição necessária e suficiente para que duas topologias tenham a mesma topologia semi-regular associada, é que elas tenham os mesmos conjuntos abertos regulares.

Corolário 3 - Seja $\tau$ uma topologia sôbre um conjunto E e $\tau^*$ a sua topologia semi-regular associada; seja F um espaço topológico regular; as aplicações contínuas de E em F são as mesmas nas duas topologias.

Demonstração - Segue-se imediatamente do teorema acima e do teorema 4.

Corolário 4 - Se $\tau \neq \tau_A$ então $\tau_A$ não é semi-regular.

Demonstração - Do teorema 1 segue-se que $\tau < \tau_A$ ; do teorema 7 temos $\tau = \tau^*_B$ e do corolário 6 do teorema 2 vem $\tau_A = \tau^*_C$ e portanto $\tau^* \leq \tau < \tau_A = \tau^*_C$ e então ainda pelo teorema 4 segue-se que $\tau_A$ não é semi-regular.

Usando o conjunto $\langle \tau \rangle$ podemos dar outra forma ao teorema 7:

Teorema 7' - Se $\tau_1$ é uma topologia semi-regular $\langle \tau_1 \rangle$ é formado pelo conjunto das topologias cuja topologia semi-regular associada é a topologia $\tau_1$.

O teorema 4 nos mostra em que sentido as operações $\tau \longrightarrow \tau_A$ e $\tau \longrightarrow \tau^*$ são inversas uma da outra.

Resumindo os resultados dêste capítulo temos:

O conjunto das topologias que têm uma mesma topologia semi-regular associada é uma parte inf-reticulada e inf-completa convexa ordenada e indutiva do reticulado das topologias; tôdas estas to-

pologias têm as mesmas funções numéricas contínuas e são caracterizadas por terem os mesmos conjuntos abertos regulares; se uma delas for separada ou completamente separada tôdas as outras também o serão; estas topologias também são caracterizadas pelo fato de serem obtidas a partir da topologia semi-regular acrescentando ao anel de conjuntos fechados desta um anel de conjuntos sem interior.

# CAPITULO III.

## Espaços absolutamente fechados; espaços extremamente desconexos; espaços irresolúveis.

### §1º - Caracterização das topologias absolutamente fechadas.

Dizemos que um espaço topológico separado E é absolutamente fechado se êle satisfaz uma das quatro condições equivalentes:

($AF_I$) - O espaço E é fechado em qualquer espaço separado do qual êle é sub-espaço.

($AF_{II}$) - Não podemos acrescentar a E um novo ponto não isolado t.q. o espaço resultante ainda seja separado.

($AF_{III}$) - Qualquer recobrimento aberto de E contém uma sub-família finita cujas aderências cobrem E;

($AF_{IV}$) - Qualquer filtro sôbre E que tem uma base de conjuntos abertos tem pelo menos um ponto aderente.

A equivalência das três primeiras condições foi demonstrada por Alexandroff e Urysohn ((AU.,pp.261-262)); é imediato por ($AF_{III}$) que qualquer espaço compacto é absolutamente fechado e um exemplo de Urysohn ((U.,p.268) mostra que a recíproca não é verdadeira; êste exemplo é o que hoje chamamos de espaço separado minimal; Bourbaki ((B.1)) fez a definição ($AF_{IV}$) e mostrou que todo espaço separado minimal é absolutamente fechado e deram um exemplo de Alexandroff e Hopf ((AH., p.31, 1º exemplo)) de um espaço absolutamente fechado que não é separado minimal.

Vamos usar a seguinte caracterização dos espaços separados minimais feita por Bourbaki ((loc.cit.)):

Um espaço topológico separado é separado minimal se e sòmente se qualquer filtro com base de conjuntos abertos que têm no máximo um ponto aderente é convergente.

Lema 5 - Seja $\tau$ uma topologia absolutamente fechada e $\tau'$ uma topologia separada, $\tau' \leq \tau$ ; então $\tau'$ é também absolutamente fechada.

Demonstração - Seja $(O'_i)_{i \in I}$ um recobrimento $\tau'$-aberto de E; sendo $\tau' \leq \tau$ êstes conjuntos são também $\tau$-abertos e por $(AF_{III})$ existe uma sub-família finita de $(O'_i)$, que indicaremos com $O'_1, \ldots, O'_n$ tal que $\overline{O'_1}^{\tau} \cup \ldots \cup \overline{O'_n}^{\tau} = E$; de $\tau' \leq \tau$ vem $\overline{O'_i}^{\tau'} \supset \overline{O_i}^{\tau}$ e portanto $\overline{O'_1}^{\tau'} \cup \ldots \cup \overline{O'_n}^{\tau'} = E$.

Teorema 8 - A topologia semi-regular associada $\tau^*$ a uma topologia absolutamente fechada $\tau$, é separada minimal.

Demonstração - Sendo $\tau^* \leq \tau$ segue-se do teorema 6 do lema 5 que $\tau^*$ é absolutamente fechada. Sendo $\mathfrak{F}^*$ um filtro que tem uma base de conjuntos $\tau^*$-abertos êle terá pelo menos um ponto $\tau^*$-aderente x $(AF_{IV})$; se tomarmos $\mathfrak{F}^*$ t.q. x seja seu único ponto $\tau^*$-aderente e demonstrarmos que $\mathfrak{F}^*$ converge para x então seguirá do teorema acima citado de Bourbaki que a topologia $\tau^*$ é separada minimal.

$\mathfrak{F}^*$ tem também uma base de conjuntos $\tau$-abertos pois $\tau^* \leq \tau$ e x é também $\tau$-aderente a $\mathfrak{F}^*$ pois sendo $O'_x$ uma $\tau$-vizinhança aberta de x e $O_x$ seu aberto regularizado, e, $O \in \mathfrak{F}^*$ um conjunto $\tau^*$-aberto então $O_x \cap O \neq \emptyset$ implica $O'_x \cap O \neq \emptyset$ (por causa do teorema 7 podemos aplicar o lema 1). Se $\mathfrak{F}^*$ não convergisse para x em $\tau^*$, existiria uma vizinhança aberta regular de x, vizinhança esta que pelo lema 4 e pelo corolário 1 do teorema 7 podemos escrever $\overset{\circ}{\overline{O'_x}}^{\tau}$,

t.q. para qualquer $\tau^*$-aberto $O \in \mathcal{F}^*$ teríamos $O \not\subset \overset{o}{\overline{O'_x}}^{\tau}$ e por conseguinte $O \not\subset \overline{O'_x}^{\tau}$; então os conjuntos $O' = O \cap \complement \overline{O'_x}^{\tau}$ ($O$ percorrendo os conjuntos abertos de $\mathcal{F}^*$) formariam uma base de filtro de conjuntos $\tau$-abertos $\mathcal{F}' \geqslant \mathcal{F}^*$ e $x$ não sendo a $\tau$-aderente a $\mathcal{F}'$ (pois $O'_x \cap O' = \emptyset$) $\mathcal{F}'$ não teria ponto aderente, contra a hipótese de $\tau$ ser absolutamente fechada.

<u>Teorema 9</u> - Se a topologia $\tau$ é absolutamente fechada, a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ também o é.

<u>Demonstração</u> - Seja $(O'_i)$ um recobrimento $\tau_{\mathcal{A}}$-aberto de $E$; pelo lema 3 para cada $i \in I$ existe um conjunto $\tau$-aberto $O_i$ t.q. $O'_i \subset O_i$ e $\overline{O'_i}^{\tau_{\mathcal{A}}} = \overline{O_i}^{\tau}$; então os $O_i$ formam um recobrimento $\tau$-aberto de $E$ e sendo $\tau$ absolutamente fechado, existe uma sub-família finita $O_1, \ldots, O_n$ cujas $\tau$-aderências cobrem $E$; de $\overline{O'_i}^{\tau_{\mathcal{A}}} = \overline{O_i}^{\tau}$ segue-se então que as $\tau_{\mathcal{A}}$-aderências de $O'_1, \ldots, O'_n$ cobrem $E$.

Os teoremas 7, 8 e 9 nos dão imediatamente o

<u>Teorema 10</u> - <u>Uma topologia $\tau$ é absolutamente fechada se e sòmente se ela for da forma $\tau = \tau^*_{\mathcal{A}}$ onde $\tau^*$ é separada minimal; $\tau^*$ é a topologia semi-regular associada à topologia $\tau$.</u>

Podemos também formular o teorema 10 do seguinte modo:

<u>Teorema 10'</u> - <u>Uma topologia é absolutamente fechada se e sòmente se a sua semi-regular associada for separada minimal.</u>

O teorema 8 e o corolário 2 do teorema 6 nos dão o

<u>Corolário 1</u> - <u>Uma topologia absolutamente fechada é separada minimal se e sòmente se ela for semi-regular.</u>

Êste corolário generaliza o teorema de Alexandroff e Urysohn ((AU., teorema 5)) que diz que um espaço absolutamente fechado

Urysohn ((AU.,teorema 5)) que diz que um espaço absolutamente fechado é compacto se e sòmente se êle for regular.

Corolário 2 - A topologia $\tau^*$ semi-regular associada a uma topologia $\tau$ absolutamente fechada é compacta se e sòmente se $\tau$ for completamente separada.

Demonstração - Bourbaki demonstrou ((B.1)) que uma topologia separada minimal é compacta se e sòmente se ela for completamente separada; usando o corolário 1 do teorema 6 segue-se a nossa afirmação.

Corolário 3 - O conjunto das topologias absolutamente fechadas e completamente separadas é indutivo.

Demonstração - Seja $(\tau_i)$ uma família totalmente ordenada de topologias absolutamente fechadas e completamente separadas.

1.- Tôdas estas topologias têm a mesma topologia semi-regular associada: pois a topologia $\tau_i^*$ semi-regular associada a uma topologia $\tau_i$ absolutamente fechada e completamente separada é compacta e portanto regular; mas o conjunto das topologias que satisfazem o axioma $O_{III}$ é um sub-reticulado completo do reticulado de tôdas as topologias e $\tau_i^*$ é, neste caso, a mais fina das topologias regulares menos finas que $\tau_i$ e para estas topologias regulares temos $\tau_i \leqslant \tau_j \longrightarrow \tau_i^* \leqslant \tau_j^*$ e estas últimas sendo topologias compactas coincidem.((V.,N.,p.41,nota 3)).

2. - Tôdas as $\tau_i$ tendo a mesma topologia semi-regular associada $\tau^*$ estão contidas em $\langle\tau^*\rangle$, mas êste conjunto é indutivo (Teoremas 3 e 7).

Do teorema de Zorn segue-se portanto a existência de topologias absolutamente fechadas e completamente separadas maximais e portanto temos o

Corolário 4 - Dada qualquer topologia absolutamente fechada e completamente separada $\tau$ existe uma topologia absolutamente fechada e completamente separada maximal $\tau' \geq \tau$ .

§2º - Topologias extremamente desconexas.

Dizemos que um espaço topológico E é extremamente desconexo se a aderência de todo conjunto aberto for um conjunto aberto, ou, dualmente, se o interior de todo conjunto fechado for um conjunto fechado. Ver ((He,p.326,def.16)), ((D)) ou ((S)).

Lema 6 - Uma condição necessária e suficiente para que uma topologia seja extremamente desconexa, é que todo conjunto fechado regular seja aberto (e portanto aberto regular).

Demonstração - Seja $F = \overline{\overset{\circ}{F}}$ um conjunto fechado regular, então F é aberto por ser aderência de um conjunto aberto, $\overset{\circ}{F}$. Recìprocamente o corolário 1 do lema 4 diz que a aderência de todo conjunto aberto é um conjunto fechado regular e portanto se todo conjunto fechado regular for aberto, a topologia é extremamente desconexa.

As topologias extremamente desconexas são portanto as topologias para as quais os conjuntos abertos regulares e os conjuntos fechados regulares coincidem. Sabemos dos corolários 1 e 2 do teorema 7 que uma topologia qualquer e a sua semi-regular associada são caracterizadas por terem os mesmos conjuntos abertos regulares e portanto os mesmos conjuntos fechados regulares, de modo que usando o teorema 7 temos:

Teorema 10 - As topologias extremamente desconexas são as topologias obtidas a partir das topologias extremamente desconexas semi-regulares acrescentando ao anel de conjuntos fechados

destas um anel de conjuntos sem interior.

Corolário - Se uma topologia $\mathcal{T}$ é extremamente desconexa, a sua topologia semi-regular associada $\mathcal{T}^*$ e as topologias $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ também o são.

Teorema 12 - As topologias extremamente desconexas semi-regulares satisfazem o axioma $(0_{IV})$ ((B IX, p.9)) (e portanto o axima $0_{III}$).

Demonstração - Sendo $\mathcal{T}$ uma topologia semi-regular, qualquer vizinhança $V_x$ de um ponto $x$ contém uma vizinhança aberta regular $0_x$ de $x$ e sendo $\mathcal{T}$ extremamente desconexa do dual do lema 6 segue-se que $0_x$ é também um conjunto fechado. Então a função numérica definida como igual a zero em $0_x$ e igual a um no seu complementar é contínua e satisfaz as condições do axioma $(0_{IV})$.

Corolário 1 - Para topologias extremamente desconexas, a semi-regularidade, o axioma $(0_{III})$ e o axioma $(0_{IV})$ são equivalentes.

Demonstração - Temos sempre $(0_{IV}) \longrightarrow (0_{III}) \longrightarrow$ $\longrightarrow$ semi-regularidade e no teorema acima demonstrámos a implicação inversa.

Corolário 2 - Para topologias extremamente desconexas separadas as condições de semi-regularidade, regularidade e regularidade completa são equivalentes.

M.H.Stone ((S, teorema 14)) demonstrou que para topologias completamente regulares são equivalentes as condições de serem extremamente desconexas e de terem uma álgebra completamente reticulada de funções numéricas contínuas (isto é, qualquer família limitada de funções numéricas contínuas admite um extremo superior). O mesmo ainda

vale para topologias que apenas satisfazem o axima $(0_{IV})$.

Dixmier ((D p.153)) definiu como espaço stoniano um espaço compacto extremamente desconexo; se definirmos como espaço quasi-stoniano um espaço extremamente desconexo completamente regular segue-se do teorema 12 e do seu corolário 2 o

Teorema 13 - As topologias separadas extremamente desconexas são as topologias obtidas a partir das topologias quasi-stonianas pelo processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$.

Para dar um exemplo de espaço separado extremamente desconexo não regular (ou o que é o mesmo, não completamente regular) basta achar um espaço quasi-stoniano ou stoniano em que existam conjuntos sem interior que não são fechados; tomando um anel $\mathcal{A}$ dêstes conjuntos a topologia $\tau_{\mathcal{A}} > \tau$ satisfaz as condições requeridas (corolário 4 do teorema 9 e corolário 1 acima); observando que o compactificado de Čech ((Č)) $\beta E$ de um espaço quasi-stoniano E é um espaço stoniano (pois o compactificado $\beta E$ de Cech de um espaço completamente regular E, tem uma álgebra de funções numéricas contínuas isomorfa à álgebra das funções numéricas contínuas e limitadas ((Č)) de E) segue-se que o compactificado $\beta N$ de um espaço discreto infinito numerável N é um espaço stoniano. $A = \beta N - N$ é um subconjunto fechado (logo compacto) de $\beta N$ (pois N é localmente compacto e portanto aberto em qualquer espaço separado no qual é denso) e sem interior e nem todos os subconjuntos de $A = \beta N - N$ são fechados, pois senão, indicando com $\mathcal{A}$ o ideal $\mathcal{P}(A)$ e com $\tau$ a topologia de $\beta N$ teríamos $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$ ; mas a topologia induzida por $\tau_{\mathcal{A}}$ sôbre A é a topologia discreta e por outro lado A é $\tau$-compacto e portanto A seria um conjunto finito;

mas sabemos ((P)) que $\beta N$ tem a potência $2^{2^{\aleph_0}}$ e portanto A não pode ser finito, sendo portanto $\tau_{\mathcal{A}} \neq \tau$. $(\beta N)_{\tau_{\mathcal{A}}}$ é então um espaço separado extremamente desconexo não regular.

O processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$ também nos mostra fàcilmente que todo sub-espaço denso de um espaço extremamente desconexo é extremamente desconexo, o que é importante pelas suas aplicações:

<u>Lema 7</u> - Todo conjunto aberto de um espaço extremamente desconexo é um sub-espaço extremamente desconexo.

<u>Demonstração</u> - Seja A um sub-espaço de um espaço E e seja X uma parte de A; indicamos com $\overline{X}^A$ a aderência de X em A e com $\overline{X}^E$ a aderência de X em E; se A for aberto temos $\overline{X}^A = \overline{X}^E \cap A$ e todo subconjunto aberto O de A é também aberto em E e portanto $\overline{O}^A = \overline{O}^E \cap A$ é aberto pois $\overline{O}^E$ é aberto por E ser extremamente desconexo.

<u>Teorema 14</u> - Todo sub-espaço de um espaço extremamente desconexo é extremamente desconexo.

<u>Demonstração</u> - Seja A um sub-espaço denso de um espaço extremamente desconexo E; então $\complement A$ é um conjunto sem interior e considerando o anel $\mathcal{A} = \{A, \emptyset\}$; a topologia induzida por $\tau_{\mathcal{A}}$ sôbre A é a mesma que a topologia induzida por $\tau$ sôbre A e A é um sub-espaço aberto de $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$ que pelo corolário 1 do teorema 10 é extremamente desconexo e do lema 7 segue-se que A é também extremamente desconexo.

§ 3º - Espaços topológicos irresolúveis.

Dizemos que um espaço topológico E é resolúvel se podemos decompôr E em dois conjuntos complementares densos em E; em caso contrário dizemos que E é irresolúvel; como todo espaço com pontos isolados é irresolúvel, apenas espaços topológicos densos em si podem ser resolúveis. As definições acima são inspiradas nas definições de Hewitt ((H, p.322, def.12)) que demonstrou a existência de espaços (completamente regulares) densos em si irresolúveis. Vamos aplicar o processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$ para a formação de topologias irresolúveis, mostrando que dada uma topologia $\tau$ qualquer existe uma topologia $\tau_{\mathcal{A}} \geqslant \tau$, $\tau_{\mathcal{A}}$ irresolúvel; observemos que se $\tau$ for separada, $\tau$ e $\tau_{\mathcal{A}}$ tem os mesmos pontos isolados, pois então êstes são conjuntos abertos regulares (corolário 1 do teorema 7) e portanto, se $\tau$ for densa em si a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ também o é.

Lema 8 - Uma topologia em que todo conjunto sem interior é fechado (ou, dualmente, todo conjunto denso é aberto) é irresolúvel.

Demonstração - Sendo X denso em E, $\complement X$ não tem interior e portanto é fechado, logo não denso.

O corolário 2 do teorema 3 nos mostra então que

Teorema 15 - Se $\tau_1$ é um elemento maximal de $\langle \tau \rangle$ então a topologia $\tau_1$ é irresolúvel.

Corolário - Dada qualquer topologia separada e densa $\tau$ existe uma topologia separada densa e irresolúvel $\tau_1 \geqslant \tau$ que tem a mesma topologia semi-regular associada que $\tau$.

# CAPITULO IV.

## Formação de teratopologias e outras aplicações.

### §1º - Espaços topológicos sem sequências convergentes.

Dado um espaço topológico E e uma sequência $x_n$ de pontos de E que converge para um ponto x de E, dizemos que esta sequência convergente é trivial se existe um $n_o$ t.q. para $n \geqslant n_o$ temos $x_n = x$. Dizemos que um espaço topológico E não tem sequências convergentes se tôda sequência convergente for trivial.

Da definição de sequência convergente segue-se imediatamente o

Lema 9 - Sejam $\tau_1$ e $\tau_2$ duas topologias sôbre um conjunto E t.q. $\tau_1 \leqslant \tau_2$, tôda sequência $\tau_2$-convergente é $\tau_1$-convergente.

Dizemos que num ponto x de um espaço topológico E vale o 1º axioma de enumerabilidade se x admite um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Dizemos que em E vale o 2º axioma de enumerabilidade se E admite uma base enumerável de conjuntos abertos. Dizemos que E é de caracter enumerável se existe um conjunto enumerável, denso em E. E' imediato que se num espaço topológico vale o 2º axioma de enumerabilidade então vale o 1º em todo ponto de E, e, E é de caracter enumerável (ver qualquer livro que trata de espaços métricos). O processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$ também nos permitirá a formação de espaços em que a recíproca não é verdadeira.

Lema 10 - Se x é um ponto não isolado de um espaço topológico E e se em x vale o 1º axioma de enumerabilidade, então existe uma sequência $x_n$ de pontos de E que converge para x e que não é trivial.

Demonstração - Seja $V_n$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de $x$; podemos supôr as $V_n$ embutidas, isto é, $V_n \supset V_{n+1}$ e sendo $x$ não isolado em tôda $V_n$ existe um ponto $x_n \neq x$; é imediato que a sequência $x_n$ converge para $x$.

No resto dêste parágrafo consideraremos $E_\tau$ como um espaço topológico separado denso em si, isto é, um espaço topológico separado sem pontos isolados; a partir da topologia $\tau$ vamos construir uma topologia $\tau_\gamma \geq \tau$ t.q. $E_{\tau_\gamma}$ não tenha sequências convergentes; para isto basta, aliás, que $E_\tau$ satisfaça o axioma de separação mais fraco ($T_1$): todo conjunto constituido de um único ponto é fechado.

Indiquemos com $\gamma$ a parte de $\mathcal{P}(E)$ formada pelos conjuntos enumeráveis que têm apenas um número finito de pontos de acumulação (em $E_\tau$):

Lema 11 - $\gamma$ é um ideal de conjuntos sem $\tau$-interior.

Demonstração - E' imediato que $\gamma$ é um ideal; sendo $E_\tau$ denso em si, todo conjunto aberto é denso em si, isto é, não tem pontos isolados e sendo além disto $E_\tau$ separado todo conjunto aberto é infinito e tem portanto infinitos pontos de acumulação; então todo conjunto de $\gamma$ tem interior vazio.

Teorema 16 - Seja $\tau$ uma topologia separada densa: em $\tau_\gamma$ não existem sequência convergentes e portanto não vale o 1º axioma de enumerabilidade nem o 2º.

Demonstração - Seja $x_n$ uma sequência de pontos de E $\tau_\gamma$-convergente para o ponto $x$ de E; do lema 1 segue-se que a sequência $x_n$ também é $\tau$-convergente para $x$. Consideremos o conjunto X formado pelos $x_n \neq x$: êste conjunto tem no máximo um único ponto de

acumulação, x, e portanto $X \in \gamma$ e é portanto $\tau_\gamma$-fechado; então $\complement X$ é uma $\tau_\gamma$-vizinhança de x que não contém nenhum $x_n \neq x$ e como $x_n$ $\tau_\gamma$-converge para x tôda vizinhança de x contém todos $x_n$ exceto um número finito no máximo donde segue-se que a sequência convergente $x_n$ é trivial. O resto do teorema segue-se do lema 2.

Corolário - Dada qualquer topologia separada e densa $\tau$ existe uma topologia separada e densa $\tau_\gamma$ $\tau_\gamma \geqslant \tau$ tal que $\tau_\gamma$ não tenha sequências convergentes e tenha a mesma topologia semi-regular associada que a topologia $\tau$.

Segue-se também do lema 19 que qualquer topologia $\tau_\mathcal{A}$ $\tau_\mathcal{A} \geqslant \tau_\gamma$ tem as mesmas propriedades que a topologia $\tau_\gamma$ de acima; $\tau_\gamma$ é a menos fina das topologias mais finas que $\tau$ que não tem sequências convergentes.

Aplicando o processo $\tau_\gamma$ à topologia habitual $\tau$ da reta racional obtemos um espaço enumerável, e, portanto, de caracter enumerável, em que nenhum ponto admite um sistema fundamental enumerável de vizinhanças e em que não existem sequências convergentes.

## §2º - Caracteres em espaços topológicos separados.

Seja $E_\tau$ um espaço topológico separado; Alexandroff ((A, p.269)) deu as seguintes definições: Caracter $\mathcal{V}_\tau(x)$ de um ponto x de $E_\tau$ é a menor potência de um sistema fundamental de vizinhanças de x; caracter de intersecção de $\mathcal{J}_\tau(x)$ é a menor potência de um conjunto de vizinhanças de x cuja intersecção se reduz ao próprio ponto x.

E' imediato que dizer que x é um ponto não isolado em que vale o primeiro axioma de enumerabilidade equivale a $\mathcal{V}_\tau(x) = \aleph_0$;

temos então $\mathcal{J}_{\tau}(x) = \mathcal{V}_{\tau}(x) = \aleph_0$. Temos sempre $\mathcal{J}_{\tau}(x) \leqslant \mathcal{V}_{\tau}(x)$ e $\tau \leqslant \tau' \longrightarrow \mathcal{J}_{\tau}(x) \leqslant \mathcal{J}_{\tau'}(x)$.

Aplicando o processo $\tau_{\gamma}$ a uma topologia separada densa em si em que o 1º axioma de enumerabilidade vale em todo ponto temos $\mathcal{J}_{\tau_{\gamma}}(x) < \mathcal{V}_{\tau_{\gamma}}(x)$: pois então $\mathcal{J}_{\tau_{\gamma}}(x) \leqslant \mathcal{J}_{\tau}(x) = \mathcal{V}_{\tau}(x) = \aleph_0 < \mathcal{V}_{\tau_{\gamma}}(x)$ como segue do teorema do § anterior.

## § 3º - Prolongamento de funções contínuas.

Sabemos ((B I, p.38, Teorema 1 ou B I', p.55, corolário do teorema 1)) que sendo $A$ uma parte densa de um espaço topológico $E_{\tau}$ e $g$ uma aplicação de $A$ num espaço regular $F$ t.q. para todo ponto $a$ de $E$ exista o limite $\lim\limits_{x \to a, x \in A} g(x)$, então indicando com $f(a)$ êste limite, $f$ é uma aplicação contínua de $E_{\tau}$ em $F$ que dizemos estende ou prolonga a aplicação contínua $g$ de $A$ em $F$ a uma aplicação contínua de $E_{\tau}$ em $F$. Neste teorema não podemos prescindir da regularidade de $F$; o processo $\tau_{\mathcal{A}}$ nos permite dar exemplos fáceis de espaços separados $F$ não regulares em que a extensão $f$ da função $g$ não é contínua.

Seja $E_{\tau}$ um espaço topológico separado e $X$ um conjunto sem $\tau$-interior não $\tau$-fechado; seja $\mathcal{X} = \{X, \emptyset\}$; do teorema 1 segue-se que $\tau_{\mathcal{X}} > \tau$; tomemos $F = E_{\tau_{\mathcal{X}}}$, $F$ é um espaço separado não regular (corolário 4 do teorema 7 e corolário 3 do lema 4). A aplicação idêntica $g$ de $A = \complement X$ em $F$ satisfaz às condições da função $g$ do princípio dêste §, mas a sua extensão $f$, que é a aplicação idêntica de $E$ sôbre $F$ não é contínua, pois $\tau_{\mathcal{X}} > \tau$. Neste caso, porém, existe uma topologia $\tau_{\mathcal{A}} \geqslant \tau$ sôbre $E$ t.q. $f$ seja contínua de $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$ em $F$: qualquer topologia $\tau_{\mathcal{A}} \geqslant \tau_{\mathcal{X}}$. Vamos mostrar que esta situação

sempre se verifica:

<u>Teorema 17</u> - Seja $A$ uma parte densa de um espaço topológico $E_{\tau}$ e $F$ um espaço topológico separado; seja $g$ uma aplicação de $A$ em $F$ t.q. para qualquer $a \in E$ exista o limite $\lim_{x \to a, a \in A} g(x)$ que indicamos por $f(a)$; então existe uma topologia $\tau_{\mathcal{A}} \geq \tau$ t.q. $f$ seja contínua de $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$ em $F$.

<u>Demonstração</u> - $A$ sendo denso em $E$, então $\complement A$ é um conjunto sem interior; tomemos como anel $\mathcal{A}$ o ideal $\mathcal{P}(\complement A)$ e vamos mostrar que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ satisfaz às condições do teorema. $\tau_{\mathcal{A}}$ e $\tau$ induzem a mesma topologia sôbre $A$ de modo que $f$ é (pela sua própria definição) contínua em todos os pontos do conjunto $\tau_{\mathcal{A}}$-aberto $A$; seja $a \in E-A$; pela definição de $f$, dada qualquer vizinhança $V$ de $f(a)$ em $F$, existe uma $\tau$-vizinhança aberto $O$ de $a$ t.q. $g(O \cap A) \subset V$ e como $f(a) \in V$ segue-se que $f(\{a\} \cup (O \cap A)) \subset V$; mas $\{a\} \cup (O \cap A)$ é uma $\tau_{\mathcal{A}}$-vizinhança de $a$ (pois $\{a\} \cup (O \cap A) = O - [\complement A - a]$ sendo $\complement A - a$ um conjunto $\tau_{\mathcal{A}}$-fechado pois pertence a $\mathcal{A}$) e portanto $f$ é $\tau_{\mathcal{A}}$-contínua em $a$.

## § 4º - <u>Observações e outros exemplos</u>.

### A) <u>Espaços com um único ponto não regular</u>.

Dizemos que um ponto $x$ de um espaço topológico $E_{\tau}$ é irregular se para as vizinhanças de $x$ não vale o axioma $(O_{III})$; o processo $\tau \longrightarrow \tau_{\mathcal{A}}$ nos permite em certos casos formar topologias $\tau_{\mathcal{A}}$ a partir de uma topologia regular $\tau$ t.q. um ponto $x$ seja o único ponto irregular de $E_{\tau_{\mathcal{A}}}$. Basta, por exemplo, tomar como anel $\mathcal{A}$ um ideal de conjuntos sem interior cujo único ponto de acumulação seja

o ponto x (desde que tais conjuntos existam). Na reta real, por exemplo, podemos tomar como anel $\mathcal{A}$ o ideal gerado por um conjunto não vazio de sequências não triviais convergentes para x. Se $\mathcal{A}$ contém tôdas as sequências convergentes para x, em x deixará de valer o primeiro axioma de enumerabilidade, mas em $\mathcal{C}\{x\}$ temos a topologia habitual da reta.

B) Espaços conexos e localmente conexos segundo caminhos e não semi-regulares.

Dizemos que um espaço topológico é conexo segundo caminhos se para dois pontos x e y quaisquer de E existe uma aplicação contínua f (caminho) de $\{0,1\}$ em E t.q. $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Dizemos que um espaço é localmente conexo segundo caminhos se todo ponto admite um sistema fundamental de vizinhanças conexas segundo caminhos.

Tomando no plano numérico um ideal $\mathcal{A}$ de conjuntos t.q. para dada $A \in \mathcal{A}$ apenas um número finito de retas paralelas ao eixo das abscissas tem intersecção não vazia com A, é imediato que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ satisfaz às condições requeridas.

C) Observação sôbre os espaços de Baire.

O processo $\tau_{\mathcal{A}}$ permite mostrar fàcilmente que a propriedade de um espaço topológico de ser um espaço de Baire não depende apenas das funções numéricas contínuas dêste espaço; assim a reta com a topologia habitual é um espaço de Baire pois é localmente compacta, mas passando a considerar o conjunto dos números irracionais como fechado obtemos uma topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ em que a reta é um conjunto magro (reunião do conjunto magro dos números racionais com o conjunto $\tau_{\mathcal{A}}$-fechado e sem interior, isto é, raro, dos números irracionais).

D) Espaços em que todo conjunto isolado é enumerável.

Dizemos que um espaço topológico é hereditàriamente de caráctre enumerável se todo seu sub-espaço for de caracter enumerável; é sabido que todo espaço métrico de caracter enumerável é hereditàriamente de caracter enumerável. E' imediato que num espaço hereditàriamente de caracter enumerável qualquer conjunto isolado (isto é, cujos pontos de acumulação não pertencem a êle) é enumerável: pois é um sub-espaço discreto e então é de caracter enumerável se e sòmente se for enumerável.

Considerando na reta real o ideal $\mathcal{N}$ dos conjuntos enumeráveis a topologia $\tau_{\mathcal{N}}$ nos dá um exemplo de um espaço em que todo conjunto isolado é enumerável mas que não é de caracter enumerável: todo conjunto enumerável é $\tau_{\mathcal{N}}$-raro e fechado e portanto não denso na reta e da teoria dos pontos de condensação ((Ha, §.23)) segue-se que todo conjunto não enumerável da reta é não isolado em $\tau_{\mathcal{N}}$. (Esbocemos ràpidamente a demonstração de que todo conjunto isolado em $\tau_{\mathcal{N}}$ é enumerável: seja A um conjunto não enumerável; consideremos o conjunto enumerável de intervalos abertos de extremidades racionais e seja O a reunião daqueles intervalos que contêm apenas um conjunto enumerável de pontos de A; então O contém apenas um conjunto enumerável de pontos de A e $\complement O$ é não vazio e tal que tôda $\tau$-vizinhança de um ponto de $\complement O$, e, em particular, dos pontos de A contidos em $\complement O$, contém uma infinidade não enumerável de pontos de A; mas então as $\tau_{\mathcal{N}}$-vizinhanças dêstes pontos, e, em particular, dos pontos de $A \cap \complement O$ também têm esta propriedade e portanto A não é isolado.)

E) Exemplo de um espaço de caracter enumerável em que vale o 1º axioma de enumerabilidade e em que não vale o segundo axioma de enumerabilidade.

Consideremos o seguinte subconjunto do plano com a topologia induzida por êste ((Ha,p.113,§2)): $E = \{(x,y) \mid y=0$ e $0 \leq x \leq 1$, ou, $y = 1/2^n$ e $x = m/2^n$, $m=0,1,2,\ldots,2^n$, $n \in N\}$. Os conjuntos raros de $E$ são os subconjuntos de $A = \{(x,y) \mid y=0, 0 \leq x \leq 1\}$ e passando a considerá-los como conjuntos fechados temos uma topologia nas condições citadas; em $E$ com a nova topologia não vale o 2º axioma de enumerabilidade pois senão valeria no sub-espaço $A$ mas êste é discreto e tem a potência do contínuo. (Em $E$, munido com esta nova topologia, também vale o 1º axioma de enumerabilidade: os pontos de $E-A$ são isolados e se $x$ é um ponto de $A$, sendo $V_n$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de $x$ na topologia primitiva, então $V'_n = \{x\} \cup (V_n \cap \complement A)$ é um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de $x$ na nova topologia.)

F) Espaços totalmente desconexos.

O exercício 11 do §11º, cap.I, p.77 de ((B I)) ou exercício 9, p.122 ((B I')) afirma que todo espaço no qual a intersecção de vizinhanças ao mesmo tempo abertas e fechadas de todo ponto se reduz a êste ponto, é homeomorfo a um sub-espaço de um espaço compacto, produto de espaços discretos com dois elementos, e seria portanto completamente regular e por conseguinte semi-regular. A topologia $\tau_\gamma$ da reta racional (ver §1º dêste capítulo) mostra que a afirmação não é correta (corolário 4 do teorema 7); é necessário supôr ainda que o espaço seja completamente regular.

# A P Ê N D I C E I.

## Topologias semi-regulares e o $\Theta$-homeomorfismo de Fomin.

Fomin ((F)) deu a seguinte definição: uma aplicação f de um espaço topológico E num espaço topológico F é $\Theta$-contínua no ponto x, se para qualquer vizinhança fechada $\overline{V}'$ de f(x) existe uma vizinhança V de x tal que $f(V) \subset \overline{V}'$; f é $\Theta$-contínua em E se é $\Theta$-contínua em todo ponto x de E. Se no espaço topológico F está satisfeito o axioma $(O_{III})$ tôda aplicação $\Theta$-contínua de E em F é também contínua. Uma aplicação biunívoca f de um espaço topológico E sôbre um espaço topológico F é um $\Theta$-homeomorfismo se f e sua aplicação recíproca são $\Theta$-contínuos.

Teorema 18 - Se duas topologias $\tau_1$ e $\tau_2$, sôbre E, têm a mesma topologia semi-regular associada elas são $\Theta$-homeomorfas.

Demonstração - Pois se $\tau_1$ e $\tau_2$ têm a mesma topologia semi-regular associada elas têm os mesmos conjuntos abertos regulares e os mesmos conjuntos fechados regulares (corolário 2 do teorema 7 e dual) e portanto a aplicação idêntica de $E_{\tau_1}$ sôbre $E_{\tau_2}$ e sua recíproca são $\Theta$-contínuas (se $O_x$ é uma $\tau_2$-vizinhança aberta de x, $\overset{o}{\overline{O}}{}_x^{\tau_2}$ é uma $\tau^*$-e portanto uma $\tau_1$-vizinhança aberta de x e $\overset{o}{\overline{O}}{}_x^{\tau_2} \subset \overline{O}_x^{\tau_2}$).

Dada uma topologia $\tau$, seja $\tau^{O_{III}}$ a mais fina das topologias menos finas que $\tau$ que satisfazem o axioma $(O_{III})$; esta topologia satisfaz o axioma $(O_{III})$ (o conjunto das topologias que satisfazem o axioma $(O_{III})$ é um sub-reticulado completo do reticulado das topologias; ver também p.22 desta tese, corolário 3 do teorema 10) e a cha-

mamos de <u>topologia</u> $O_{III}$-<u>associada</u> <u>à</u> <u>topologia</u> $\tau$. Temos:

<u>Teorema 19</u> - Se duas topologias $\tau_1$ e $\tau_2$, sôbre E, são $\Theta$-homeomorfas, elas têm a mesma topologia $O_{III}$-associada.

<u>Demonstração</u> - E' imediato que a aplicação idêntica f de $E\tau_1$ sôbre $E\tau_2^{O_{III}}$ é também $\Theta$-contínua e portanto contínua, pois, $\tau_2^{O_{III}}$ satisfaz o axioma $(O_{III})$ e portanto $\tau_1 \geqslant \tau_2^{O_{III}}$, logo, $\tau_1^{O_{III}} \geqslant \tau_2^{O_{III}}$; do mesmo modo obtemos a relação inversa, de onde se segue a igualdade destas duas topologias.

Não sabemos se o $\Theta$-homeomorfismo entre duas topologias implica sempre a igualdade de suas topologias semi-regulares associadas; em casos particulares sabemos demonstrá-lo; para topologias extremamente desconexas, por exemplo, isto é uma consequência do teorema 19 (e do teorema 12); Fomin também o demonstrou para topologias absolutamente fechadas.

# A P Ê N D I C E II.

## Imersão em espaços separados.

Dizemos que um espaço topológico separado $E_\tau$ está imerso no espaço topológico $E'_{\tau'}$ se $E_\tau$ é um sub-espaço de $E'_{\tau'}$, se E é denso em $E'_{\tau'}$ e se $E'_{\tau'}$ é um espaço topológico separado. Para cada ponto x de E' podemos então considerar o traço sôbre E, do filtro das vizinhanças de x em E'; êste traço é um filtro sôbre E que tem uma base (de filtro) de conjuntos $\tau$-abertos $\mathcal{O}_x$; se $x \in E$ êste traço é o filtro das $\tau$-vizinhanças de x em E; $E_\tau$ com esta família $(\mathcal{O}_x)_{x \in E'}$ é o que chamaremos de esqueleto de imersão de $E_\tau$ em E'. Reciprocamente, dado $E_\tau$ e uma família de filtros $\mathcal{O}_i$ com base de conjuntos abertos (sem pontos aderentes e tal que para $\mathcal{O}_i \neq \mathcal{O}_j$ existe $O_i \in \mathcal{O}_i$ e $O_j \in \mathcal{O}_j$, com $O_i \cap O_j = \emptyset$) podemos formar um espaço $E'_{\tau'}$ tal que $E_\tau$ esteja imerso em $E'_{\tau'}$ e tal que a família $\mathcal{O}_i$ junto com as bases de filtro de vizinhanças abertas dos pontos x de $E_\tau$, seja o esqueleto de imersão de $E_\tau$ em E'.

Em geral, porém, podemos ter muitas topologias sôbre E' tôdas elas dando lugar ao mesmo esqueleto de imersão. Entre estas topologias (sôbre E') existe uma mais fina $\tau'_1$ e uma menos fina $\tau'_0$ que podem ser definidas diretamente a partir do esqueleto ou então a partir de uma topologia qualquer $\tau'$ de E' (tal que $E_\tau$ esteja imerso em $E'_{\tau'}$):

Seja $\tau'^*$ a topologia semi-regular associada à topologia $\tau'$; temos (teorema 7) $\tau' = (\tau'^*)_{\mathcal{A}}$; seja $\mathcal{B}$ o traço do anel $\mathcal{A}$ sôbre E; temos então $\tau'_0 = (\tau'^*)_{\mathcal{B}}$ e $\tau'_1 = (\tau'_0)_{\mathcal{P}(E'-E)}$.

$\tau'_0$ é semi-regular se e sòmente se $E_\tau$ é semi-regular.

Para qualquer topologia $\tau'$ sôbre $E'$ tal que $\tau'_0 \leq \tau' \leq \tau'_1$ temos $E_\tau$ está imerso em $E'_{\tau'}$ e tôdas estas topologias dão lugar ao mesmo esqueleto de imersão (e reciprocamente, qualquer topologia sôbre $E'$ que tenha aquele esqueleto de imersão está entre $\tau'_0$ e $\tau'_1$).

Com escolha adequada dos $\mathcal{J}_i$ podemos obter um espaço $E'$ absolutamente fechado.

O processo $\tau_{\mathcal{A}}$ nos permite definir de modo muito simples os diferentes tipos de imersão, de semi-regularidade relativa, etc.; por exemplo, a topologia $\tau P$ de Katetov ((K 3,p.27, teorema 3.1)) é uma topologia $\tau'_1$, a topologia $\tau' P$ (loc.cit.,teorema 3.2) é uma topologia $\tau'_0$.

A maior parte dos resultados que enunciamos acima são bem conhecidos, sob uma ou outra forma, dos muitos trabalhos que existem sôbre a teoria da imersão; ver ((C)), ((K 3 e 5)), ((S 1)), ((F)), etc.. Parece-nos que o processo $\tau_{\mathcal{A}}$ permite obter a maior parte dêstes resultados de modo mais simples e claro, além de resultados novos. Os detalhes e demonstrações do que enunciamos acima serão publicados num trabalho posterior.

# APÊNDICE III.

## Notas sôbre topologias associadas à topologias regulares.

O processo $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ nos permite obter a partir de uma topologia semi-regular $\mathcal{T}$, tôdas as topologias $\mathcal{T}'$ cuja topologia semi-regular associada é a topologia $\mathcal{T}$ (teorema 7).

O processo $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^*$, isto é, a formação de uma topologia $\mathcal{T}^*$ que tem como base de conjuntos abertos os conjuntos abertos regulares de uma outra topologia $\mathcal{T}$, nos permite formar a partir de qualquer topologia a sua topologia semi-regular associada.

E' pois muito natural procurar resolver o mesmo problema para topologias que satisfazem o axioma $(0_{III})$, isto é, dada uma topologia $\mathcal{T}$ que satisfaz o axioma $(0_{III})$ procurar um processo que nos permita formar tôdas as topologias $\mathcal{T}'$ cuja topologia $(0_{III})$-associada seja a topologia $\mathcal{T}$; basta, aliás, achar um processo que nos permita obter as topologias semi-regulares cuja $(0_{III})$-associada seja $\mathcal{T}$, pois as topologias não semi-regulares serão obtidas a partir d'aquelas pelo processo $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. O segundo problema seria achar um processo pelo qual a partir de uma topologia $\mathcal{T}$ achamos a sua topologia $(0_{III})$-associada.

No estudo do primeiro dêstes problemas o autor obteve os seguintes resultados parciais:

Sendo $\mathcal{T}$ umattopologia qualquer e $\mathcal{D}$ um anel dual (reunião qualquer e intersecção finita não vazia de conjuntos de $\mathcal{D}$ pertence a $\mathcal{D}$) de conjuntos sem interior e densos em conjuntos abertos (isto é, se $D \in \mathcal{D}$ existe um conjunto $\mathcal{T}$-aberto $O$ tal que

$D < O < \bar{D}^{\tau}$) consideremos a topologia $\tau^{\mathcal{D}}$ obtida acrescentando ao anel dual dos conjuntos abertos de $\tau$ o anel dual $\mathcal{D}$ ; temos: $\tau$ e $\tau^{\mathcal{D}}$ têm a mesma topologia $(O_{III})$-associada. Impondo mais algumas condições obtemos topologias $\tau^{\mathcal{D}}$ semi-regulares.

Exemplo - Seja E o intervalo $[0,1]$, com a sua topologia habitual $\tau$ ; seja $Q_p$ o conjunto das frações irredutíveis de E com numerador par e $Q_i$ o das frações irredutíveis com numerador ímpar; tomamos $\mathcal{D} = \{\emptyset, Q_p, Q_i\}$; então $\tau^{\mathcal{D}}$ é uma topologia semi-regular cuja topologia $(O_{III})$-associada é a topologia habitual do intervalo $[0,1]$.

Para abordar o segundo problema indicamos com $\tilde{A}$ o conjunto dos pontos x de E tais que tôda $\tau$-vizinhança fechada de x encontra qualquer $\tau$-vizinhanças fechada de A; os conjuntos $A = \tilde{A}$ satisfazem os axiomas de conjuntos fechados, definindo assim uma topologia $\tilde{\tau} \leq \tau$ ; $\tilde{\tau} = \tau$ se e sòmente se $\tau$ satisfaz o axioma $(O_{III})$.

Sem restrições ulteriores sôbre a topologia $\tau$, que satisfaz o axioma $(O_{III})$, o processo $\tau \longrightarrow \tau^{\mathcal{D}}$ não nos permite porém obter tôdas as topologias semi-regulares que têm uma mesma topologia $(O_{III})$-associada. Não sabemos se a topologia $(O_{III})$-associada a uma topologia $\tau$ é obtida com <u>uma</u> aplicação apenas do processo $\tau \longrightarrow \tilde{\tau}$.

As demonstrações e outros resultados dos processos $\tau \longrightarrow \tau^{\mathcal{D}}$ e $\tau \longrightarrow \tilde{\tau}$ serão publicados num trabalho posterior.

O mesmo problema para topologias que satisfazem o axioma $(O_{IV})$ parece-nos bem mais difícil, o que aliás é natural, pois, pouco se conhece sôbre topologias que satisfazem o axioma $(O_{III})$ e não satisfazem o axioma $(O_{IV})$.

# B I B L I O G R A F I A.

((A)) Alexandroff, "Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume, Math. Annalen, vol.92 (1924),pp.267-274.

((A H)) Alexandroff e Hopf, "Topologie", Berlin, Springer, 1935.

((A U)) Alexandroff e Urysohn, "Zur Theorie der topologischen Räume", Math. Annalen, vol.92 (1924), pp.258-266.

((B. Ens.)) Bourbaki - "Théorie des Ensembles (Fascicule des Résultats)", Paris, Hermann, 1939.

((B I)) Bourbaki, "Topologie Générale - Chap.I et II", Paris, Hermann, 1940.

((B I')) Bourbaki, "Topologie Générale - Chap.I et II - Deuxième édition", Paris, Hermann, 1951.

((B IX)) Bourbaki, "Topologie Générale - Chap. IX", Paris, Hermann, 1948.

((B 1)) Bourbaki, "Espaces minimaux et espaces complétement séparés", Comptes Rendus, 1941.

((Č)) Čech, "On bicompact spaces", Ann. of Math. vol.38 (1937), pp.823-844.

((D)) - Dixmier, "Sur certains espaces considérés par M.H. Stone", Summa Bras. Math., vol.II (1951),pp.151-182.

((F)) Fomin,
Annals of Mathematics,

((Ha)) Hausdorff, "Mengenlehre" 3ª edição, New York,Dover,1944.

((H e)) Hewitt, "A problem of set-theoretic topology", Duke Math. Journal, vol.10(1943), pp.309-333.

((Kl)) Katetov, "Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume", Čas. Mat. Fys., vol.69 (1940),pp.36-49.

((K 2)) Katetov, "Remarque sur les espaces topologiques dénombrables", Ann. Soc.Polon.Math., vol.21(1948),pp.120-122.

((K 3)) Katetov, "On H-closed extensions of topological spaces", Čas. Mat.Fys., vol.72(1947),pp.17-32.

((K 4)) Katetov, "A note on semiregular and nearly regular spaces", Čas. Mat.Fys., vol.72(1947),pp.97-99.

((K 5)) Katetov, "On the equivalence of certain types of extensions of topological spaces", Cas.Mat.Fys., vol.72 (1947),pp.101-106.

((N)) Nachbin, "Combinação de topologias", Notas de Matemática nº1, Rio, 1948.

((P)) Pospísil, "A remark on bicompact spaces", Ann. of Math., vol.38(1937),pp.845-846.

(º) ((R 1)) Ramanathan, "Maximal Hausdorff spaces", Proc. Acad. Sci.Sect.A, vol.26(1947),pp.31-42.

(º) ((R 2)) Ramanathan, "A characterization of maximal-Hausdorff spaces", J.Indian Math.Soc.(N.S.),vol.11(1947),pp.73-80.

((S 1)) Stone, "Applications of the theory of boolean rings to general topology", Trans.Am.Math.Soc., vol.41(1937),pp.375-481.

((S)) Stone, "Boundedness properties in function-lattices", Canad.Journal of Math., vol.1(1949),pp.176-186.

((U)) Urysohn,"Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen", Math.Annalen, vol.94(1925),pp.262-295.

---

(º) Só temos conhecimento dêstes artigos atravez do Mathematical Review.

# I N D I C E.

página

Introdução ..... I

Capítulo I - Noções preliminares.

§1º - Teoria dos conjuntos ..... 1

§2º - Topologia ..... 2

§3º - Conjuntos ordenados ..... 4

Capítulo II - Topologias $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ e topologias semi-regulares.

§1º - O processo $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ..... 5

§2º - Topologias semi-regulares ..... 12

Capítulo III - Espaços absolutamente fechados, espaços extremamente desconexos, espaços irresolúveis.

§1º - Caracterização das topologias absolutamente fechadas... 19

§2º - Topologias extremamente desconexas..... 23

§3º - Espaços topológicos irresolúveis ..... 27

Capítulo IV - Formação de teratopologias e outras aplicações.

§1º - Espaços topológicos sem sequências convergentes .....28

§2º - Caracteres em espaços topológicos separados..... 30

§3º - Prolongamento de funções contínuas ..... 31

§4º - Observações e outros exemplos ..... 32

Apêndice I - Topologias semi-regulares e o $\Theta$-homeomorfismo de Fomin ..... 36

Apêndice II - Imersão em espaços separados ..... 38

Apêndice III - Notas sôbre topologias associadas a topologias regulares ..... 40

Bibliografia ..... 42

Errata ..... 4