EDISON FARAH

SÔBRE A MEDIDA de LEBESGUE

TESE APRESENTADA À FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DA UNIVERSIDADE DE S. PAULO PARA DOUTORAMENTO EM CIÊNCIAS (Matemática).

*

1950

*

GRAFICA OMEGA
SÃO PAULO

INTRODUÇÃO

Para introduzirmos a medida de Lebesgue no espaço R^n, de modo construtivo e elementar, surgiu-nos a questão de formar uma classe de partes do R^n, para as quais a medida fosse definida de maneira expontânea, mas que todas as possíveis reuniões finitas de conjuntos (interiormente disjuntos) da referida classe constituissem o que se chama um <u>anel</u> [1] sôbre o R^n. Essas condições são preenchidas pela classe $\mathcal{J}_o$ que definimos no primeiro parágrafo do capítulo segundo dêste trabalho. (O fato de que o conjunto das reuniões finitas de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos, é um anel, está assegurado pelo corolário do primeiro dos teoremas relativos a essa classe).

Quanto à definição de conjunto mensuravel-L, para o caso de L-medida finita, mostramos que a nossa definição é equivalente à habitual (na qual se empregam sòmente os conjuntos abertos e os fechados). Estendemos, também, por meio das sequências de $\mathcal{R}$, a L-mensurabilidade a certos conjuntos do R^n, vindo, assim, os conjuntos mensuraveis-L de L-medida infinita; e a extensão é feita de tal modo que os conjuntos mensuraveis-L do R^n formam uma tribo perfeita nesse espaço.

No primeiro capítulo dêste trabalho recordamos algumas noções relativas aos espaços topológicos, começando ,

---

(1) - Um conjunto $\mathcal{F}$ de partes de um conjunto fixo E, se diz um <u>anel</u> sôbre E, quando são verificadas as seguintes condições:

a) - a reunião finita de conjuntos de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$;

b) - se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap \complement B \in \mathcal{F}$.

naturalmente, por introduzir as notações e definições comumente empregadas na teoria dos conjuntos, e que o leitor encontrará, principalmente, no livro "THEORIE DES ENSEMBLES " - (Fascicule des résultats) de N. BOURBAKI. Quanto aos espaços topológicos, ocupamo-nos, quase que exclusivamente dos espaços métricos, e mais particularmente ainda, dos espaços euclidianos, pois são êstes que interessam ao assunto pròpriamente desta tese. Os conjuntos são tratados no § 1º, e, os espaços topológicos, no § 2º.

No § 1º do segundo capítulo tratamos dos intervalos no R^n, e introduzimos a noção de divisão de um intervalo I (fechado), gerada por um número finito de intervalos fechados contidos em I, noção essa, utilizada frequentemente no que se segue. Ainda nesse parágrafo, que terminamos com a noção de tribo sôbre um conjunto, introduzimos as classe $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$, dando as suas principais propriedades. No § 2º definimos a medida para os conjuntos de $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$, que é obtida por prolongamentos - sucessivos, a partir da medida sôbre a classe dos intervalos - fechados (limitados) do R^n. Finalmente, no § 3º, tratamos dos conjuntos mensuraveis-L, demonstrando as propriedades que permitem considera-los como formando uma tribo perfeita sôbre o R^n.

E.F.

---ooo000ooo---

CAPITULO I

CONJUNTOS DE ELEMENTOS QUAISQUER, ESPAÇOS TOPOLOGICOS

§1.- NOTAÇOES E DEFINIÇOES RELATIVAS À TEORIA DOS CONJUNTOS.

1.- Relação de pertinência.- Para indicar que o elemento a pertence ao conjunto A, isto é, que a é elemento de A, escrevemos: $a \in A$; a negação de $a \in A$ é $a \notin A$. Para exprimir que os elementos a, b, c, ..., m pertencem, todos ao conjunto A, escreveremos: $a, b, \ldots, m \in A$; assim, $a, b \in A$ significa que a e b pertencem, ambos a A.

Conjunto vazio. O chamado conjunto vazio, isto é, - conjunto sem elementos, que é familiar na teoria dos conjuntos, será indicado, aqui, pelo símbolo $\emptyset$.

Nota:- Indicaremos por $\{a, b, c, \ldots, m\}$ o conjunto formado pelos elementos a, b, c, ..., m; em particular, $\{a\}$ designará o conjunto formado pelo único elemento a .

Relação de inclusão . Dizemos que o conjunto A é um sub-conjunto, uma parte, ou um conjunto parcial do conjunto B, se A é vazio ou se, não sendo vazio, todo elemento de A pertence a B. Para exprimir que A é sub-conjunto de B escrevemos ... $A \subset B$ ou $B \supset A$. Quando $A \subset B$ dizemos, também, que A está contido em B, ou que êste contém A.

Se $A \subset B$ e $B \subset A$, os dóis conjuntos A e B coincidem, isto é, são iguais; neste caso escrevemos $A = B$. As negações de de $A \subset B$ e $A = B$ indicam-se, respectivamente, por $A \not\subset B$ e

$A \neq B$.

É claro que se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (propriedade transitiva da inclusão).

Quando $A \subset B$ e $A \neq B$ dizemos que A é uma parte própria de B (conjunto parcial ou sub-conjunto próprio de B).

Nota:- O conjunto dos elementos $x \in E$ que gozam de uma certa - propriedade P será designado, aqui, por

$$\{x \in E \mid P\}$$

Assim, por exemplo, se E é o conjunto dos números inteiros, e A é parte de E formada pelos inteiros compreendidos entre 10 e 1000, escreveremos:

$$A = \{x \in E \mid 10 \leqslant x \leqslant 1000\}$$

(A propriedade P do elemento $x \in A$ está expressa pela relação $10 \leqslant x \leqslant 1000$).

Conjunto complementar. Dados os conjuntos A e B, $A \subset B$, chama-se complementar de A em relação a B, ao conjunto dos elementos de A em relação a B, ao conjunto dos elementos de B que não pertencem a A. O complementar de A em relação a B indica-se por $\complement_B A$. Verifica-se fàcilmente que:

1º) - Se $A = B$, tem-se:- $\complement_B A = \emptyset$;

2º) - $\complement_A \emptyset = A$;

3º) - $\complement_B (\complement_B A) = A$;

4º) - Se $A \subset B \subset E$, tem-se: $\complement_E B \subset \complement_E A$.

Nota:- Quando, num certo estudo, se convenciona que o complementar de uma parte qualquer, A, de um certo conjunto fixo, E, é sempre tomado em relação a E, escreve-se, simplesmente, $\complement A$ ao invés de $\complement_E A$.

Conjuntos de partes. Dado um conjunto E, indicaremos por $\mathcal{P}(E)$ o conjunto de tôdas as partes de E. Será, pois, $\mathcal{P}(E)$, um novo conjunto em que os elementos são sub-conjuntos de E. O conjunto $\mathcal{P}(E)$ possui, sempre, pelo menos um elemento, precisamente a parte vazia de E.

Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$, diremos, às vezes, quando nos referirmos aos elementos de $\mathcal{F}$: "os conjuntos de $\mathcal{F}$" em lugar de "os elementos de $\mathcal{F}$", ficando, assim, entendido, que a frase "B é um conjunto de $\mathcal{F}$" equivale à " B é uma parte de E pertencente a $\mathcal{F}$".

FUNÇÕES

2.- Sejam E e F dois conjuntos não vazios (distintos ou não), x variável em E (1) e y variável em F. Se f é uma correspondência entre os elementos de E e os de uma parte de F, que associa a cada valor a da variável x um e sòmente um valor (que se designa por f(a)) da variável y, dizemos que f é uma função definida em E, com os valores em F; mais brevemente, diremos que f é uma aplicação de E em F. O elemento $f(a) \in F$ é o valor da função f para o valor a de x; e se chamarmos de "pontos" aos elementos de E, diremos que f(a) é o valor da função f no ponto a. As variáveis x e y dizem-se, respectivamente, variável independente e variável dependente.

Duas funções f e g, definidas em E, dizem-se iguais ($f = g$), se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in E$.

Nota:- Se f é uma função definida em E, com os valores em F (uma aplicação de E em F), e x é um elemento genérico de E costuma-se dizer, também, "a função f(x) (ou, $y = f(x)$, ou ainda, $x \longrightarrow f(x)$", em vez de " a função f".

---

(1) - Em outras palavras: x designa um elemento genérico de E. Cada elemento $a \in E$ é um valor da variável x.

Restrição e prolongamento de uma função. Se f é uma aplicação de E em F, e A é uma parte não vazia de E, a aplicação g, de A em F, tal que $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, chama-se restrição de f à parte A de E. A aplicação f se diz, por sua vez, prolongamento de g a E.

Imagem direta e imagem inversa de um conjunto .- Seja f uma aplicação de E em F e tomemos uma parte A de E. Chama-se imagem direta de A (ou simplesmente: imagem de A), pela aplicação f, o conjunto de $f(x) \in F$ tais que $x \in A$; se B é uma parte de F, o conjunto dos elementos $x \in E$ tais que $f(x) \in B$ se diz a imagem inversa (ou recíproca) de B, pela aplicação f. A imagem direta de $A \subset E$ e a inversa de $B \subset F$, pela f, designam-se, respectivamente, por $f(A)$ e $f^{-1}(B)$. O conjunto de todos os valores de f é, pois, $f(E)$; por outro lado, tem-se: $f^{-1}(F) = E$. É claro que $f(A) = \emptyset$ quando é sòmente quando $A = \emptyset$. Para a imagem recíproca tem-se $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$; porém, pode acontecer que $f^{-1}(B) = \emptyset$ sem que $B = \emptyset$ (basta considerar, por exemplo, a aplicação $x \rightarrow x^2$ do conjunto dos inteiros relativos - nesse mesmo conjunto e tomar a imagem inversa da parte constituida pelos inteiros negativos).

Nota:- Se f é uma aplicação de E em F, e $f(E) = F$, dizemos que f é uma aplicação de E sôbre F. Neste caso, qualquer que seja a parte B, não vazia, de F, tem-se $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

Aplicações biunívocas . Uma aplicação f de E em (sôbre) F se diz uma aplicação biunívoca de E em (respect. sôbre) F, se $f(x') = f(x)$ $(x, x' \in E)$ sòmente quando $x' = x$.

Seja f uma aplicação biunívoca de E sôbre F e consideremos a aplicação φ, de F em E, tal que $\varphi(y) = x$, onde $y = f(x)$. Vêmos, então que φ é uma aplicação biunívoca de F sôbre E, à qual chamaremos de aplicação inversa (ou recíproca) de f e designaremos por f^{-1}.

Se existir uma aplicação biunívoca de um conjunto A sôbre o conjunto B diremos que A e B estão em correspondência biunívoca.

Função composta. Sendo f uma aplicação de E em F, g uma aplicação de F em G, podemos considerar a aplicação h, de E em G, definida pela igualdade $h(x) = f(g(x))$, $x \in E$. Dizemos, então, que h é a aplicação (ou função) composta de g e f, e indicamo-la por $g.f$. É fácil vêr que se f e g são aplicações biunívocas respectivamente de E sôbre F e F sôbre G, então h é uma aplicação biunívoca de E sôbre G.

Função de conjunto. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto (não vazio) de partes de um certo conjunto E. Se f é uma aplicação de $\mathcal{F}$ num outro conjunto G, isto é, uma função definida em $\mathcal{F}$, com os valores em G, dizemos que f e uma função de conjunto. Assim, por exemplo, tomando para $\mathcal{F}$ o conjunto das circunferências de um plano α, para G, o próprio α, e, para f, a aplicação de $\mathcal{F}$ em G que faz corresponder a cada circunferência de $\mathcal{F}$, o respectivo centro, f será uma função deconjunto.

FAMÍLIAS DE ELEMENTOS

3:- Seja f uma aplicação de E em F e designemos por A o conjunto dos valores de f, isto é, $A = f(E)$. Êste conjunto, associado à aplicação f, é o que se chama uma família de elementos de F; o conjunto A diz-se, então, conjunto dos elementos da família. Sendo λ um elemento genérico de E e designando por x_λ o valor da aplicação f para o elemento $\lambda \in E$, indicaremos por $(x_\lambda)_{\lambda \in E}$ a família acima definida; o conjunto E (onde está definida a função f) se diz, então, conjunto dos índices da família.

Duas famílias $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ e $(y_\lambda)_{\lambda \in I}$ (com o mesmo conjunto de índices) são iguais, quando e sòmente quando $x_\lambda = y_\lambda$, qualquer que seja $\lambda \in I$. Pode acontecer que duas famílias (com o mesmo conjunto de índices) não sejam iguais, embora o conjunto dos elementos de uma seja o mesmo que o da outra; assim, as famílias $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ e $(y_\lambda)_{\lambda \in I}$, onde I é o conjunto dos números reais, e $x_\lambda = \lambda^2$, $y_\lambda = \lambda^4$, não são iguais, não obstante o conjunto dos elementos da primeira (precisamente o conjun to dos números reais não negativos) seja o mesmo que o da segunda. Por aí vemos que o que caracteriza a família $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ é a aplicação $\lambda \to x_\lambda$.

<u>Sub-família</u>. Se $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ é uma família de elementos de um conjunto F e $J \subset I$ ($J \neq \emptyset$), dizemos que a família ... $(x_\lambda)_{\lambda \in J}$ de elementos de F é uma <u>sub-família</u> de $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$. Diremos então, que a família $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ <u>contém</u> a sub-família $(x_\lambda)_{\lambda \in J}$.

Famílias finitas, infinitas e enumeraveis .- Uma família $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ se diz <u>finita</u> ou <u>infinita</u> segundo seja, o conjunto I dos índices, finito ou infinito. Se o conjunto I é enumeravel (2) dizemos que a família $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ é <u>enumeravel</u>, e, neste caso, $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ toma o nome particular de <u>sequência</u>; será uma sequência finita ou infinita segundo seja, I, finito ou infinito.

Se I é o conjunto dos inteiros de 1 a n, ou de todos os inteiros positivos, escrevemos às vezes, para designar a família $(a_i)_{i \in I}$,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), \text{ ou respectivamente}, (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

A família $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é o que se costuma chamar também uma " n-pla ordenada " de elementos de E; em particular, um par ordenado de elementos de E é uma família (a_1, a_2) de elementos de E. Segundo a definição de igualdade entre famílias, duas n-plas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, de elementos E, serão iguais quando e sòmente quando $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

<u>Família de conjuntos</u>. Pode ocorrer que F seja um conjunto de partes de um certo conjunto G. Neste caso, se $(X_\lambda)_{\lambda \in I}$ é uma família de elementos de F (os X_λ são, pois, sub-conjuntos de G), dizemos que $(X_\lambda)_{\lambda \in I}$ é uma <u>família de conjuntos</u>.

---

(2) - Recordemos que um conjunto não vazio, se diz <u>enumeravel</u> quando está em correspondencia biunívoca com uma parte do conjunto dos números naturais. Em particular, todo conjunto finito, não vazio, é enumeravel.

Nota:- Quando não houver necessidade de se especificar o conjunto dos índices, pode-se empregar, em lugar de $(x_\iota)_{\iota\in I}$, a notação mais cômoda: (x_ι). Esta notação se utiliza, ainda, quando, numa certa consideração ocorre que tôdas as famílias que nela interveem, possuem, para conjunto de índices, um mesmo conjunto fixo.

AS OPERAÇÕES "REUNIÃO" E "INTERSECÇÃO"

4.- Seja $\mathcal{F}$ um conjunto (não vazio) de partes de um certo conjunto E, e consideremos o conjunto G dos elementos de E que pertencem a pelo menos um dos conjuntos de $\mathcal{F}$. Dizemos, então, que G é a reunião dos conjuntos de $\mathcal{F}$ (isto é, das partes de E pertencentes a $\mathcal{F}$), e designamo-la por

$$\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$$

onde

X é um elemento (conjunto) genérico de $\mathcal{F}$.

O conjunto H dos elementos de E que pertencem a todos os conjuntos de $\mathcal{F}$ é a intersecção dos conjuntos de $\mathcal{F}$ e designa-se por

$$\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X$$

onde X é um elemento (conjunto) genérico de $\mathcal{F}$.

A reunião G será vazia quando e sòmente quando em $\mathcal{F}$ não houver outro conjunto senão o vazio. E se entre os conjuntos de $\mathcal{F}$ figurar o conjunto vazio, então a intersecção H será, necessariamente vazia; porém, é claro que a intersecção H pode ser o conjunto vazio sem que nenhum dos conjuntos de $\mathcal{F}$ o seja.

Reunião e intersecção de uma família de conjuntos. Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ uma família de partes de um conjunto E e formemos o conjunto A dos elementos $x \in E$ tais que $x \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in I$. O conjunto A, assim definido, se diz reunião da família $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$, e designa-se por

$$\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$$

O conjunto dos elementos $x \in E$ tais que $x \in A_\lambda$ qualquer que seja $\lambda \in I$, se diz intersecção da família $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ e se indica por

$$\bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda$$

É facil vêr que, sendo $\mathcal{F}$ o conjunto dos elementos da família $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ (isto é, o conjunto das partes X de E para as quais existe um índice $\lambda \in I$ tal que $X = A_\lambda$), a reunião e a intersecção da referida família coincidem, respectivamente, com a reunião e a intersecção dos conjuntos de $\mathcal{F}$. Porisso, a reunião e a intersecção de uma família de conjuntos depende unicamente do conjunto dos elementos (conjuntos) da família.

Nota:- Se $\mathcal{F}$ é um conjunto finito ou enumeravel de partes de um conjunto E, costuma-se dizer que a reunião dos conjuntos de $\mathcal{F}$, é uma reunião finita, ou, respectivamente, enumeravel, de partes de E. (Análogamente para a intersecção). É claro, então, que a reunião de tôda família finita (enumeravel) de sub-conjuntos de E é uma reunião finita (enumeravel) de partes de E, o mesmo acontecendo com a intersecção.

Propriedades da reunião e intersecção de famílias. Citaremos agora algumas propriedades relativas à reunião e intersecção da famílias de conjuntos, que o leitor poderá verificar fàcilmente. São as seguintes:

a) - Se $J \subset I$ $(J \neq \emptyset)$, tem-se

$$\bigcup_{\lambda\in J} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda \quad e \quad \bigcap_{\lambda\in J} A_\lambda \supset \bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda \;;$$

b) - Se $A_\lambda \subset B_\lambda$ para todo $\lambda \in I$, tem-se

$$\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda \quad e \quad \bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda$$

c) (Associatividade da reunião) ;

$$\bigcup_{\lambda\in \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda\Big) \;;$$

c') - (Associatividade da intersecção);

$$\bigcap_{\lambda\in \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\lambda\in I_\lambda} A_\lambda\Big)$$

d) - Se $\lambda \longrightarrow \lambda'$ é uma aplicação biunívoca de I sôbre I, tem-se:

$$\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda = \bigcup_{\lambda'\in I} A_{\lambda'} \quad e \quad \bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda = \bigcap_{\lambda'\in I} A_{\lambda'}$$

(comutatividade da reunião e intersecção, respectivamente).

<u>Outras notações para as reuniões e intersecções finitas ou infinitas enumeraveis.</u>

Quando a família $(A_\iota)_{\iota \in I}$ é finita, isto é, o conjunto I finito, digamos $I = \{1, 2, \dots, p\}$, então escrevemos

$$\bigcup_{i=1}^{p} A_i \qquad \text{ou} \qquad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$$

para a reunião, e analogamente para a intersecção, bastando trocar $\bigcup$ por $\bigcap$ e $\cup$ por $\cap$.

Quando o conjunto é infinito, mas enumeravel, digamos, o conjunto dos números naturais, 1, 2, 3,..., escreveremos, para reunião,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \text{ou} \qquad A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

bastando, para a intersecção, trocar $\bigcup$ por $\bigcap$ e $\cup$ por $\cap$.

Finalmente, se I for o conjunto dos inteiros de 1 a p, ou o conjunto de todos os inteiros positivos, escreveremos, às vezes, simplesmente

$$\bigcup_{i} A_i$$

para designar $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ ou, respectivamente, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$; analogamente para a intersecção.

<u>Propriedades distributivas da reunião e da intersecção.</u>

Dadas as famílias

$$(A_{1\iota})_{\iota \in I_1}, \dots, (A_{p\iota})_{\iota \in I_p}$$

de partes de E, e sendo S o conjunto das p-plas $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ $\lambda_1 \in I_1, \ldots, \lambda_p \in I_p$, verificam-se as propriedades:-

e) - $$\left(\bigcap_{\lambda \in I_1} A_{1\lambda}\right) \cup \ldots \cup \left(\bigcap_{\lambda \in} A_{p\lambda}\right) = \bigcap_{\in} (A_{1\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{p\lambda_p})$$

(propriedade distributiva da reunião em relação à intersecção);

e') - $$\left(\bigcup_{\lambda \in I_1} A_{1\lambda}\right) \cap \ldots \cap \left(\bigcup_{\lambda \in I_p} A_{p\lambda}\right) = \bigcup_{\in} (A_{1\lambda_1} \cap \ldots \cap A_{p\lambda_p})$$

(propriedade distributiva da intersecção em relação a reunião).

Recobrimentos e partições. Uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ de partes de um conjunto E, cuja reunião contém o conjunto A, se diz um recobrimento de A. (O recobrimento será finito, infinito, ou enumerável, se o mesmo acontecer, respectivamente, com o conjunto I). O recobrimento acima dir-se-á uma partição de A quando se verificarem, ao mesmo tempo, as três seguintes condições:

a) $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda = A$

b) $A_\lambda \neq \emptyset$ qualquer que seja $\lambda \in I$;

c) $A_\lambda \cap A_\sigma = A_\lambda \cap E_{\lambda\sigma}$, onde

$$E_{\lambda\sigma} = \begin{cases} \emptyset \text{ se } \lambda \neq \sigma \\ E \text{ se } \lambda = \sigma \end{cases}$$

Nota:- Quando se verifica a condição c) dizemos que os A_ν são disjuntos. (É comum também, dizer-se, neste caso, que os A_ν são dois a dois disjuntos).

5.- Seja $(A_\nu)_{\nu \in I}$ uma sequência de partes de E, cuja reunião é A, e suponhamos que I designe ou o conjunto dos inteiros de 1 a n ou o conjunto de todos os inteiros positivos. Vamos construir, então, a partir de $(A_\nu)_{\nu \in I}$, uma outra sequência $(B_\nu)_{\nu \in I}$ de partes de E, de modo que sua reunião seja, também, A, e ainda: $B_r \cap B_s = B_r \cap E_{rs}$ (1), isto é, com os B disjuntos. Para isso ponhamos

$$B_1 = A_1 \,, \; B_\nu = (\complement A_1) \cap \;\ldots\; \cap (\complement A_{\nu-1}) \cap A_\nu \qquad (1)$$

$$(\nu \geqslant 2 \,,\; \nu \in I)$$

(Os complementares são tomados em relação a E). É claro, então que

$$B_r \cap B_s = \emptyset \,, \text{ para } r \neq s \,,$$

pois, supondo $r > s$, se $x \in B_s$, teremos, em virtude de (1), $x \in A_s$, e portanto, $x \notin B_r$, visto que $B_r \subset \complement A_s$. Por outro lado, qualquer que seja $p \in I$, verifica-se a igualdade

$$\bigcup_{\nu=1}^{p} B_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{p} A_\nu \qquad (2)$$

De fato, o primeiro membro de (2) está contido no segundo, uma vez que $B_\nu \subset A_\nu$ para todo $\nu \in I$. Para mostrar a inclusão contrária, tomemos um elemento qualquer, x, do segundo membro (deixamos de lado o caso trivial em que êste é vazio); se $x \in A_1$, então $x \in B_1$ e, pois, pertence ao primeiro membro de (2); se

---

(1) - O significado do símbolo E_{rs} é o dado no final do número precedente, isto é: $E_{rs} = \emptyset$ se $r \neq s$, e $E_{rs} = E$ se $r = s$.

$x \in A_1$ e m é o menor inteiro tal que $x \in A_m$, x não pertencerá a nenhum dos conjuntos $A_1, \ldots, A_{m-1}$, e, portanto,

$$x \in B_m = (\complement A_1) \cap \ldots \cap (\complement A_{m-1}) \cap A_m ;$$

como $m \leq p$, x pertence ao primeiro membro de (2). Fica, portanto demonstrada a igualdade (2). Pondo, agora, $\bigcup_{\nu=1}^{p} A_\nu = A'_p$, e notando que $\bigcup_{p \in I} A'_p = \bigcup_{\nu \in I} A_\nu$ (o que é quase imediato),

vem
$$\bigcup_{\nu \in I} B_\nu = \bigcup_{\nu \in I} A_\nu = A .$$

REGRA DE DUALIDADE

6.- Se $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ é uma família qualquer de partes de um conjunto E, em relação ao qual suporemos sejam tomados os complementares de suas partes, verifica-se que

$$\complement\left(\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in I} \complement A_\lambda \qquad (1)$$

donde, substituindo-se os A pelos respectivos complementares e tomando-se os complementares de ambos os membros da igualdade que resulta, vem:-

$$\complement\left(\bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in I} \complement A_\lambda \qquad (1')$$

As relações (1) e (1') nos permitem enunciar a seguinte regra, chamada <u>regra de dualidade</u>:

Se o conjunto G se deduz dos p sub-conjuntos A_1, A_2, ..., A_p de E e das m famílias (B_{λ_1}), ..., (B_{λ_m}) de partes de E, pela aplicação unicamente das operações $\complement$, $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, numa certa ordem, então, para se obter o complementar de G substituem-se os conjuntos A_1, ..., A_p assim como os B_{λ_1}, ..., os B_{λ_m}, pelos respectivos complementares e trocam-se as operações $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, respectivamente por $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$, conservando a ordem em que elas figuram na expressão de G, e sem modificar as reuniões ou intersecções a que, eventualmente, estejam submetidas partes dos conjuntos de índices das famílias que figuram na aludida expressão.

Assim, por exemplo, se

$$G = [(A \cup B) \cap C] \cap \left[\bigcup_{\lambda \in \bigcup_{\sigma \in S} I_\sigma} \left(\bigcap_{\lambda \in J_\lambda} A_\lambda \right) \right],$$

tem-se, designando-se por G', A', B', C', A'_λ os complementares de G, A, B, C, A_λ, respectivamente:

$$G' = [(A' \cap B') \cup C'] \cup \left[\bigcap_{\lambda \in \bigcup_{\sigma \in S} I_\sigma} \left(\bigcup_{\lambda \in J_\lambda} A'_\lambda \right) \right]$$

A fórmula c') do nº 4, por exemplo, pode deduzir-se da fórmula c) aplicando-se a regra de dualidade, e reciprocamente. Porisso dizemos que c) e c') são duais (cada uma dual da outra).

7.- Seja λ um elemento genérico de um conjunto I e desinamos por $\mathcal{F}_\lambda$ a família $(A_{\lambda\sigma})_{\sigma \in S}$ de elementos a de um conjunto fixo E. Pondo então,

$$S = \bigcup_{\lambda \in} S_\lambda ,$$

consideremos a família $(a_\sigma)_{\sigma \in S}$ de elementos de E, tal que, se $\sigma \in S_\iota$, então $a_\sigma = a_{\iota\sigma}$. Dizemos, então que os elementos das famílias $\mathcal{F}_\iota$ foram dispostos na família unica $(a_\sigma)_{\sigma \in S}$.

Um caso particularmente importante é o em que o conjunto I, assim como cada um dos S_ι, é enumeravel. Neste caso, em virtude de um conhecido teorema sôbre conjuntos enumeraveis, S será, também, enumeravel, o mesmo acontecendo, pois, com a família $(a_\sigma)_{\sigma \in S}$.

PROPRIEDADES DAS IMAGENS DIRETA E RECÍPROCA

8 - Seja f uma aplicação de E em F e designemos pelas letras maiusculas A, B, C, etc, afetadas ou não de índices inferiores, a partes de E, e por A', B', C', etc., com ou sem índices inferiores, as partes de F. Verifica-se, então, facilmente, as seguintes propriedades para a imagem direta:

a) Se $A \subset B$, tem-se $f(A) \subset f(B)$;

b) $f\left(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} f(A_\iota)$

c) $f\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota\right) \subset \bigcap_{\iota \in I} f(A_\iota)$

Como vemos acima, a imagem direta da reunião coincide com a reunião das imagens diretas, enquanto que a imagem direta da intersecção está contida na intersecção das imagens diretas. Nêste ponto, são mais interessantes as propriedades da imagem recíproca, pois a operação pela qual se determina tal imagem não só conserva a reunião, como também os complementares, e, portanto (por dualidade), a intersecção, no sentido em que:

β) $\quad f^{-1}\left(\bigcup_{\iota \in I} A'_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} f^{-1}(A'_\iota)$;

$$\gamma') \quad f^{-1}(\complement_F A') = \complement_E f^{-1}(A') \ ;$$

$$\beta') \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\iota \in I} A'_\iota\Big) = \bigcap_{\iota \in I} f^{-1}(A'_\iota) \ .$$ (Conse-

quência de β) e γ)) .

Verifica-se também a propriedade análoga à a), ou seja:

$$\alpha') \quad f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B') \quad , \ \text{sempre que} \ \ A' \subset B' \ .$$

PRODUTO CARTESIANO DE CONJUNTOS

8.- Seja $(A_\iota)_{\iota \in I}$ uma família de partes de um conjunto E. Chama-se produto cartesiano (ou, simplesmente, produto) da família $(A_\iota)_{\iota \in I}$ ao conjunto das famílias $(x_\iota)_{\iota \in I}$, de elementos $x \in E$, tais que $x_\iota \in A_\iota$ para cada $\iota \in I$. Tal produto indica-se por

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota \qquad (1)$$

e os conjuntos A_ι dizem-se fatores do produto. É claro que se um dos fatores for vazio, o produto também o será.

Quando $(A_i)_{i \in I}$ é uma família finita, ou infinita enumeravel, onde I é o conjunto dos inteiros de 1 a n, no primeiro caso, e o conjunto de todos os inteiros positivos, no segundo, designaremos o produto da família $(A_i)_{i \; I}$ por

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ou} \quad A_1 \times \ldots \times A_n \ ,$$

no primeiro caso, e por:

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{ou} \quad A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots\ldots ,$$

no segundo.

O produto cartesiano da família $(A_\iota)_{\iota \in I}$ se diz um produto finito ou infinito, segundo seja, essa família, finita ou infinita; será um produto enumeravel se a família for enumeravel.

Observação.- Contrariamente ao que acontece com a reunião e a intersecção, o produto cartesiano de uma família de - partes de E não depende unicamente do conjunto dos elementos - (partes de E) da família. Assim, se E é o conjunto dos inteiros as famílias ($\{1\}$, $\{2\}$) e ($\{2\}$, $\{1\}$) possuem o mesmo conjunto de elementos (precisamente $\{1\}$ e $\{2\}$), e no entanto,

$$\{1\} \times \{2\} = (1,2) \neq \{2\} \times \{1\} = (2,1)$$

Sendo $(A_1, \ldots, A_n)$ uma família de partes de E, diremos às vezes que

$$A_1 \times \ldots \times A_n$$

é o produto cartesiano dos conjuntos $A_1, \ldots\ldots, A_n$ considerados na ordem escrita. Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, diremos que o produto acima é o produto de A por si próprio, tomado n vezes como fator e escreveremos A^n em lugar de $A \times A \times \ldots \times A$ (n fatores A).

AXIOMA DA ESCOLHA:-

Vamos admitir aqui, como verdadeira, a seguinte proposição, conhecida por axioma da escolha (ou axioma de Zermelo):

" Se uma família $(A_\iota)_{\iota \in I}$, de partes de E, é tal que $A_\iota \neq \emptyset$ qualquer que seja $\iota \in I$, então

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset$$

PROJEÇOES:-

Seja $(E_\iota)_{\iota\in I}$ uma família de partes não vazias de E, e tomemos um sub-conjunto não vazio, J, de I. Pode-se verificar, sem dificuldade, que a aplicação

$$z = (x_\iota)_{\iota\in I} \qquad z' = (x_\iota)_{\iota\in J}$$

do conjunto

$$\mathcal{E} = \prod_{\iota\in I} E_\iota \quad \text{em} \quad \mathcal{E}' = \prod_{\iota\in J} E_\iota$$

é uma aplicação de $\mathcal{E}$ sôbre $\mathcal{E}'$. Tal aplicação, que será designada por pr_J se denomina projeção sôbre $\mathcal{E}'$ (ou projeção de índice J). O valor de pr_J para o elemento $z \in \mathcal{E}$, isto é, ... $pr_J(z)$, se diz projeção de z sôbre $\mathcal{E}'$; a imagem de uma parte $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, pela aplicação pr_J, se chama projeção de $\mathcal{A}$ sôbre $\mathcal{E}'$. Quando J se reduz a um conjunto formado por um único elemento, digamos ι, escreveremos simplesmente pr_ι em vez de $pr_{\{\iota\}}$, e pr_ι será a projeção sôbre A_ι. Neste caso temos $pr_\iota(z) = x$, que é a coordenada de índice ι de z.

Quando $\mathcal{E}$ é um produto finito, como

$$E_1 \times \ldots \times E_n,$$

as n projeções pr_1, pr_2, ..., pr_n, respectivamente sôbre E_1, E_2 .... E_n, dizem-se simplemente, respeitando a ordem, 1ª, 2ª,.... ... n-ésima projeção. O elemento $pr_s(z) \in E_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n;$ $z \in \mathcal{E})$ é a sésima projeção de z, e a parte $pr_s(\mathcal{A})$ de E_s ... $(\mathcal{A} \subset \mathcal{E})$ é a sésima projeção de $\mathcal{A}$. (Estas considerações se estendem, naturalmente, aos produtos enumeraveis).

PROPRIEDADES DO PRODUTO CARTESIANO.

Verificam-se as seguintes propriedades do produto cartesiano, onde as letras A, B, afetadas ou não de índices inferi ores, designam partes de um conjunto fixo E:

a) <u>Se</u> $A_\iota \subset B_\iota$ <u>para todo</u> $\iota \in I$, <u>tem-se</u>

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota \subset \prod_{\iota \in I} B_\iota \,; \tag{2}$$

<u>e se o primeiro membro de (2) é não vazio, a verificação de (2) tem por consequência</u> $A_\iota \subset B_\iota$ para todo $\iota \in I$ (Em particular, se em (2) se verifica a igualdade, tem-se:- $A_\iota = B_\iota$ qualquer que seja $\iota \in I$).

b) $$\left(\bigcup_{\sigma \in S_n} A_{1\sigma}\right) \times \ldots \times \left(\bigcup_{\sigma \in S_n} A_{n\sigma}\right) = \bigcup_{(\sigma_1, \ldots \sigma_n) \in \prod_{r=1}^{n} S_n} (A_{1\sigma_1} \ldots A_{n\sigma_n})$$

c) $$\left(\bigcap_{\sigma \in S_1} A_{1\sigma}\right) \times \cdots \times \left(\bigcap_{\sigma \in S_n} A_{n\sigma}\right) = \bigcup_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \prod_{r=1}^{n} S_r} (A_{1\sigma_1} \ldots A_{n\sigma_n})$$

d) $$\bigcap_{\iota \in I} \left(\prod_{\sigma \in S} A_{\iota\sigma}\right) \quad \prod_{\sigma \in S} \left(\bigcap_{\iota \in I} A_{\iota\sigma}\right)$$

e) (<u>Associatividade do produto</u>). Seja $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma partição de I e ponhamos

$$\mathcal{A} = \prod_{\iota \in I} A_\iota \,, \quad \mathcal{A}_\lambda = \prod_{\iota \in I_\lambda} A_\iota \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \prod_{\lambda \in L} \mathcal{A}_\lambda$$

Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$, então (pelo axioma da escolha) $\mathcal{A}_\lambda \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in L$, e, pois, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Consideremos a aplicação φ de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$,

$$z \longrightarrow (y_\lambda)_{\lambda \in L} ,$$

onde $z = (x_\iota)_{\iota \in I} \in \mathcal{A}$ e $y_\lambda = (x_\iota)_{\iota \in I_\lambda} \in \mathcal{A}_\lambda$. Verifica-se que φ é uma aplicação biunívoca de $\mathcal{A}$ sôbre $\mathcal{B}$. A existência de tal aplicação se exprime dizendo que a operação $\prod$ é associativa.

No caso de produtos finitos, digamos

$$\mathcal{A} = A_1 \times \ldots \times A_n , \qquad (n > 2)$$

tomando, por exemplo, $\mathcal{B} = (A_1 \times \ldots . \times A_p \times A_{p+1} \times \ldots \times A_n)$ $(1 \leq p < n)$, a aplicação biunívoca será:-

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow ((x_1, \ldots, x_p), (x_{p+1}, \ldots ., x_n)),$$

onde $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$.

§ 2º :- ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

1.- Seja E um conjunto não vazio e consideremos a aplicação $\mathcal{V}$ de E em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ de modo que o valor $\mathcal{V}(x)$ de $\mathcal{V}$, para cada $x \in E$, satisfaça às seguintes condições:

V_I . Se $V \in \mathcal{V}(x)$ e se W é uma parte qualquer de E, contendo V, então $W \in \mathcal{V}(x)$;

V_{II} . Quaisquer que sejam $V, W \in \mathcal{V}(x)$, tem-se $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$;

V_{III}. Para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ tem-se $x \in V$;

V_{IV}. Para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe um $W \in \mathcal{V}(x)$ tal que, qualquer que seja $y \in W$, tem-se $V \in \mathcal{V}(y)$.

Dizemos, então, que sôbre E está definida uma estrutura topológica, ou simplesmente, uma topologia, por meio da aplicação $\mathcal{V}$. Cada parte V de E, pertencente a $\mathcal{V}(x)$, é o que se chama uma vizinhança de x nessa topologia. As condições V_I, V_{II}, V_{III}, e V_{IV} são conhecidas, também, por axiomas das vizinhanças de x.

Duas topologias sôbre o mesmo conjunto E, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, definidas por meio das aplicações $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$, respectivamente, dizem-se iguais ($\mathcal{T} = \mathcal{T}'$) quando e sòmente quando $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$, isto é, para $x \in E$, o conjunto das vizinhanças de x em $\mathcal{T}$, coincide com o conjunto das vizinhanças de x em $\mathcal{T}'$. Pelo axioma V_I das vizinhanças de x vê-se que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ quando e sòmente quando se verifica o seguinte:

Para cada $x \in E$, tôda vizinhança de x, em $\mathcal{T}$, contém uma vizinhança de x em $\mathcal{T}'$, e tôda vizinhança de x, em $\mathcal{T}'$, contém uma vizinhança de x em $\mathcal{T}$.

ESPAÇO TOPOLÓGICO:- Um conjunto E, associado a uma topologia qualquer sôbre E, se diz um espaço topológico de suporte E; os elementos dêste dizem-se, então, pontos. Quando não houver possibilidade de confusão, - por exemplo, quando fôr objeto de nossas considerações sòmente uma dada topologia $\mathcal{T}$ sôbre E, designaremos pelo mesmo símbolo E o espaço topológico que se obtem associando-se $\mathcal{T}$ a E; para eliminar, porém qualquer ambiguidade diremos "o conjunto E" ou "o espaço E" (ou expressões equivalentes) segundo E seja considerado como conjunto, simplesmente, ou como espaço topológico. Finalmente, para pôr em relevo o fato de que a topologia que se considera sôbre E é uma dada topologia $\mathcal{T}$, diremos, às vezes, que E é um espaço topológico com a topologia $\mathcal{T}$.

NOTA:- Daqui por diante, quando fixarmos nossa atenção sôbre um dado espaço topológico, de suporte E, todos os conjuntos que considerarmos, serão, salvo menção em contrario, supostos partes de E; os complementares dessas partes serão tomados, então, sempre em relação a E.

CONJUNTOS ABERTOS E CONJUNTOS FECHADOS

2.- Seja E um espaço topológico, com a topologia $\mathcal{T}$. Um conjunto A $(A \subset E)$ se diz <u>aberto</u> se A ou é vazio ou é vizinhança de cada um dos seus pontos; um conjunto B se diz <u>fechado</u> se o seu complementar é aberto. Da definição segue-se que o conjunto vazio, assim como o próprio E, é ao mesmo tempo aberto e fechado.

NOTA:- Na definição acima está implícito que as vizinhanças são consideradas na topologia $\mathcal{T}$; pode bem acontecer que um conjunto aberto (ou fechado) quando se considera E com a topologia $\mathcal{T}$, isto é, em relação à topologia $\mathcal{T}$, não o seja em relação a outra topologia sôbre E; a propriedade de A ser aberto (ou fechado) depende, pois da topologia adotada. Em geral, tôda propriedade do conjunto A que depende da topologia sôbre E se diz uma propriedade topológica de A. Quando, numa dada consideração, intervier mais de uma topologia, e houver possibilidade de confusão a respeito da topologia em relação à qual se considera uma propriedade de um conjunto, diremos explicitamente qual a topologia ou espaço topológico a que se refere a aludida propriedade.

<u>TEOREMA I</u> - <u>Para que a parte V de E seja vizinhança do ponto $x \in E$, é necessário e suficiente que V contenha uma vizinhança aberta (1) de x.</u>

Condição necessária:- Seja V uma vizinhança qualquer de x, e consideremos o conjunto Ω dos pontos $y \in E$ tais que V é vizinhança de y. O conjuto Ω não é vazio,

(1) - Uma <u>vizinhança aberta de</u> x é qualquer conjunto aberto ao qual x pertença.

pois $x\in\Omega$; por outro lado, dado um ponto qualquer $y\in\Omega$, existe, pelo axioma V_{IV}, uma vizinhança W de y tal que V é vizinhança de todo ponto de W; portanto $W\subset\Omega$, o que, em virtude do axioma V_I, siginifica que Ω é vizinhança y; como êste é um ponto qualquer de Ω , fica provada a condição necessária.

Condição suficiente:- Imediata.

Ponto interior e ponto aderente a um conjunto: Um ponto x do espaço topologico E se diz interior ao conjunto $A\subset E$ se A é vizinhança de x; é claro, então que se x é interior a A $x\in A$. Um ponto x se diz aderente ao conjunto A se em cada vizinhança de x existe pelo menos um ponto de A.

OBSERVAÇÃO:- Do teorema anterior segue-se que, para que o ponto x seja interior ao conjunto A é necessário e suficiente que exista uma vizinhança aberta de x contida em A; analogamente, para que x seja aderente a A é necessário e suficiente que em tôda vizinhança aberta de x exista pelo menos um ponto de A.

Interior e aderência de um conjunto. O conjunto dos pontos de E interiores ao conjunto A se denomina interior de A e designa-se por $\overset{\circ}{A}$; o conjunto dos pontos de E aderentes a A se chama aderência de A e se indica por $\overline{A}$. É claro que ......
$\overset{\circ}{\emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overset{\circ}{E} = \overline{E} = E$.

Propriedades do interior e da aderência de um conjunto.

a) Tem-se, qualquer que seja a parte A de E:

$$\complement\overset{\circ}{A} = \overline{\complement A} \quad . \qquad (1)$$

De fato, o primeiro membro de (1) está contido no (o que é imediato se aquele for vazio), pois se $x \notin \overset{\circ}{A}$, isto significa que em qualquer vizinhança de x existem pontos de $\complement A$, ou seja: $x \in \overline{\complement A}$; por outro lado, se $x \in \overline{\complement A}$, então, qualquer que seja a vizinhança V de x, tem-se $V \cap \complement A \neq \emptyset$ e, pois, x não é interior a A, isto é, $x \in \complement \overset{\circ}{A}$.

b) - <u>Tem-se, quaisquer que sejam as partes A e B de E:</u>

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} . \qquad (2)$$

Com efeito, se x é um elemento qualquer do 1º membro de (2) existem duas vizinhanças V e W de x tais que $V \subseteq A$, $W \subseteq B$, e, pois, $V \cap W \subseteq A \cap B$; como $V \cap W$ é vizinhança de x (axioma V_{II}) conclui-se que x pertence ao 2º membro de (2); portanto o 1º membro de (2) está contido no 2º. A inclusão contrária é imediata, pois se x é um elemento qualquer do 2º membro, existe uma vizinhança V de x contida em $A \cap B$; portanto $V \subseteq A$ e $V \subseteq B$, o que mostra que x pertence ao 1º membro de (2).

b') <u>Quaisquer que sejam as partes A e B de E, tem-se :</u>

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} . \qquad (2')$$

Para demonstra-lo basta substituir, em (2), A e B pelos respectivos complementares, tomar os complementares de ambos os membros da igualdade que resulta, e aplicar a relação (1).

Demonstremos agora os seguintes teoremas:-

<u>TEOREMA II</u>:- <u>Para que um conjunto A seja aberto é necessário e suficiente que</u> $A = \overset{\circ}{A}$.

Condição necessária. Se A é aberto, excluindo-se o caso trivial $A = \emptyset$, A é vizinhança de cada um dos seus pontos, e portanto $A \subset \mathring{A}$; e como, em qualquer caso, $\mathring{A} \subset A$, segue-se que $A = \mathring{A}$

Condição suficiente. Deixando de lado o caso imediato em que $\mathring{A} = \emptyset$, a cada $x \in \mathring{A}$ corresponde uma vizinhança aberta V contida em A; como V é vizinhança de cada um dos seus pontos, estes serão todos, interiores, a A, isto é, $V \subset \mathring{A}$; portanto, $\mathring{A}$ é vizinhança de cada um dos seus pontos, ou seja, é um conjunto aberto.

TEOREMA II - Para que um conjunto A seja fechado é necessário e suficiente que $A = \bar{A}$:

Êste teorema é o dual do precedente; para demonstrá-lo basta aplicar o teorema anterior e a igualdade (1) (propriedade a)).

TEOREMA III.- Se $(A_1, \ldots, A_p)$ é uma família finita de partes de E, cujas aderências não possuem pontos interiores, a reunião da família e, também, um conjunto cuja aderência não possui pontos interiores.

Demonstração:- (por recorrência). Para $p = 1$ o teorema é imediato. Suponhamo-lo verificado para $p = m \geq 1$ e mostremos que êle se verifica para $p = m + 1$. Pondo, com efeito,

$$A_1 \cup \ldots \cup A_m = A,$$

se x fosse um ponto interior a

$$\overline{A \cup A_{m+1}} = \bar{A} \cup \bar{A}_{m+1}$$

deveria pertencer à intersecção de $\bar{A}$ com $\bar{A}_{m+1}$ do contrário, se x não pertencesse, digamos, a $\bar{A}_{m+1}$, haveria uma vizinhança de x sem ponto comum com êsse conjunto e, pois, x seria interior a $\bar{A}$, contra a hipótese de indução. Então, ou existe uma vizinhança aberta de x contida em $\bar{A} \cap \bar{A}_{m+1}$, o que é absurdo (pois. $\overset{\circ}{\overbrace{\bar{A} \cap \bar{A}_{m+1}}} = \emptyset$). ou, em qualquer vizinhança de x existem pontos de $\bar{A}$ não pertencentes a $\bar{A}_{m+1}$; mas neste segundo caso, sendo V uma vizinhança de x, contida em $\bar{A} \cup \bar{A}_{m+1}$ haveria um ponto ...... $y \in \bar{A} \cap V$, $y \notin \bar{A}_{m+1}$ e uma vizinahnça W de y contida em V, sem pontos comuns com $\bar{A}_{m+1}$, donde y seria interior a $\bar{A}$, contra a hipótese.

<u>COROLÁRIO</u>:- Se $(A_1, \ldots, A_p)$ <u>é uma família finita de partes de E cuja reunião é um conjunto aberto, A, então cada ponto $x \in A$ é aderente a pelo menos um conjunto A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ cuja aderência possui pontos interiores.</u>

Demonstração.- Se os $\overset{\Omega}{A_i}$ forem, todos, não vazios, o corolário é imediato. Suponhamos, então, que existem entre os A_i, conjuntos cujas aderências não possuam pontos interiores; designemos por A" a reunião deles e, por A', a dos que possuem aderências de interiores não vazios. Se existisse um ponto $x \in A$, não pertencente a $\overline{A'}$ (lembremos de que a reunião finita das aderências é a aderência da reunião), poderíamos determinar uma vizinhança aberta V, de x, contida em A, e tal que $V \cap \overline{A'} = \emptyset$. Teríamos, então:

$$V \cap A'' = V \cap (A' \cup A'') = V \cap A = V ,$$

o que é absurodo, em vista do teorema anterior.

3.- <u>Reunião e intersecção de conjuntos abertos e de conjuntos fechados.</u>

Seja E um espaço topologico ao qual vamos nos referir neste número. Verificam-se, então, os seguintes teoremas:-

<u>TEOREMA I</u>.- <u>A reunião de uma família qualquer $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$ de conjuntos abertos é um conjunto aberto; a intersecção de uma família finita qualquer $(\Omega_i)_{i \in J}$ de conjuntos abertos é um conjunto aberto.</u>

<u>Demonstração</u>.- Ponhamos $\Omega = \bigcup_{\iota \in I} \Omega_\iota$. Se $\Omega = \emptyset$ está verificado o teorema; se $\Omega \neq \emptyset$ e se x é um ponto qualquer de Ω, existe um $\iota \in I$ tal que Ω_ι é vizinhança de x; como $\Omega \supset \Omega_\iota$, Ω é vizinhança de x, o que demonstra a primeira parte do teorema,

Pondo, agora, $\Omega' = \bigcap_{i \in J} \Omega_i$ e deixando de lado o caso trivial em que $\Omega' = \emptyset$, se $x \in \Omega$, tem-se $x \in \Omega_i$, qualquer que seja $i \in J$; como os Ω_i $(i \in J)$ sao vizinhanças de x , e são em número finito, a intersecção Ω' é tambémvizinhança ....

de x (consequência imediata de V_{II}), o que prova a segunda parte do teorema.

TEOREMA I: - A intersecção de uma família qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado; a reunião de uma família qualquer, finita, de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Este teorema, que é o dual do precedente (e reciprocamente), demonstra-se por dualidade, a partir do teorema anterior.

Fronteira de um conjunto. Dado um espaço topológico E, e sendo A uma parte de E, chama-se fronteira (ou contôrno) de A ao conjunto dos pontos de E que são, ao mesmo tempo, aderentes a A e ao complementar de A; em outras palavras, a fronteira de A é o conjunto $\bar{A} \cap \overline{\complement A}$. Em virtude dos teoremas II: do nº anterior e I: dêste número, a fronteira de um conjunto qualquer é, sempre, um conjunto fechado.

4.- SUB-ESPAÇOS TOPOLÓGICOS.- Seja E um espaço topológico, com a topologia $\mathcal{T}$, e consideremos uma parte não vazia, A, de E. Vamos definir, sôbre A, uma topologia $\mathcal{T}'$, na qual um conjunto qualquer, V', é vizinhança do ponto $x \in A$ quando e sòmente quando V' é a intersecção de A com alguma vizinhança de x na topologia $\mathcal{T}$. Verifica-se que as vizinhanças V', assim definidas, satisfazem, efetivamente, aos quatro axiomas das vizinhanças, V_I, V_{II}, V_{III} e V_{IV}. O espaço A, como a topologia $\mathcal{T}'$, é o que se chama um sub-espaço topológico (ou, simplesmente, sub-espaço) de E.

Espaços separados.- Um espaço E se diz separado se E possui um só ponto, ou se goza da seguinte propriedade, que chamaremos (H); "Dados dois pontos quaisquer de E, x e y, $x \neq y$, existe uma vizinhança de x e uma vizinhança de y, sem pontos comuns". Os espaços topológicos discretos (espaços em que todo conjunto é aberto) são espaços separados. Outra classe de espaços separados é a dos espaços métricos, dos quais trataremos mais adiante.

Um exemplo de espaço não separado é o seguinte: fixamos, num plano α, um ponto O, e chamemos de vizinhança de um ponto $M \neq O$, qualquer, tôda parte da reta OM que contenha o segmento OM; e, para vizinhança de O, tomemos todo o conjunto de pontos de α que contenha O. Verificam-se, então, fàcilmente, os axiomas V_I, V_{II}, V_{III} e V_{IV} (nº 1), e, portanto, temos, efetivamente, uma topologia sôbre α, em que as vizinhanças de cada ponto são definidas dessa maneira; porém, o espaço topológico assim definido não é, evidentemente, separado.

É claro que todo sub-espaço de um espaço separado é um espaço separado. É, também, óbvio, que um sub-espaço de um espaço E pode ser separado sem que E o seja.

NOTA:- A propriedade (H) é o chamado axioma de Hausdorff.

PRODUTO DE ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

5.- Sejam $E_1, \ldots, E_n$ n conjuntos sôbre os quais estão definidas as topologias $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$, respectivamente. Pondo $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, consideremos a topologia $\mathcal{T}$, sôbre E, definida da seguinte maneira: uma parte qualquer, V, de E, é vizinhança do ponto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ quando e sòmente quando existem n vizinhanças $V_1, \ldots, V_n$, respectivamente dos pontos $x_1, \ldots, x_n$, nos espaços $E_1, \ldots, E_n$, tais que

$$V \supset V_1 \times \ldots \times V_n \ .$$

É fácil vêr que os axiomas V_I, V_{II}, V_{III} e V_{IV} (nº1) são, efetivamente, verificados pelas vizinhanças V acima definidas; basta, com efeito, levar em conta as propriedades a), b), c) e d) do produto cartesiano.

A topologia que acabamos de definir sôbre E é o produto das topologias $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ (topologias fatores), na ordem escrita, e o espaço E, com a topologia $\mathcal{T}$, é o produto -

dos espaços $E_1, \ldots E_n$ (espaços fatores), na ordem escrita.

OBSERVAÇÃO:- É facil ver que o espaço produto, E, é separado, quando e sòmente quando cada um dos espaços fatores é separado.

NOTA:- Pode-se dar uma definição mais geral do produto de espaços topológicos, que abrange o caso de um família - qualquer (finita ou não) de espaços fatores, e que, no caso de uma família finita, coincide com a definição a cima (vêr, por exemplo, N. Bourbaki, "TOPOLOGIE GENERALE" Chapitre I). Como aqui nos interessam sòmente os produtos de espaços constituindo uma família finita, é exclusivamente dêstes que trataremos neste trabalho.

CONJUNTOS COMPACTOS

6.- Seja E um espaço topológico e A uma parte não vazia de E. O conjunto A se diz, então, compacto, se o sub-espaço A, de E, é separado, e, alem disso, todo recobrimento aberto de A, em E[1], contém um sub-recobrimento finito de A. O conjunto vazio também se diz compacto. Se $A \neq \emptyset$ é um conjunto compacto, diremos que o sub-espaço A, de E é um espaço - compacto. As partes finitas de um espaço discreto, por exemplo são, tôdas, conjuntos compactos.

TEOREMA .- Num espaço separado, E, todo conjunto compacto é fechado.

Seja, com efeito, A uma parte qualquer, compacta, de E. Se $A = \emptyset$ ou $A = E$ o teorema está verificado. Supenhamos, então $A \neq \emptyset$, e tomemos um ponto qualquer $y \in E$, não pertencente a A. Como E é um espaço separado, podemos associar, a cada ponto $x \in A$, um par de vizinhanças abertas V_x, vizinhança de y, W_x, vizinhança de x, tais que $V_x \cap W_x = \emptyset$ $(x \in A)$. O-

(1) - Um recobrimento $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$ de A, se diz um recobrimento aberto de A, em E, se todos os Ω_ι, $\iota \in I$, são conjuntos abertos no espaço E.

ra, $(W_x)_{x \in A}$ é um recobrimento aberto de A, e como êste é compacto, tal recobrimento contém um recobrimento finito de A, digamos $(W_{x_1}, \ldots, W_{x_2})$. Tomando a intersecção.

$$V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$$

e a reunião

$$W = W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_n}$$

e atendendo a que $V_{x_i} \cap W_{x_i} = \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$, teremos: $V \cap W = \emptyset$. Como V é vizinhança de y, e $W \supset A$, podemos concluir que $y \notin \overline{A}$. Portanto, todo ponto de E que pertença a $\overline{A}$ deve pertencer a A, o que mostra que A é fechado, como queríamos provar.

. <u>Isomorfismo entre dois espaços topológicos.</u> Dois espaços topológicos E e E' dizem-se <u>isomorfos</u> se existe uma aplicação biunívoca f de E sôbre E' tal que a imagem direta de todo conjunto aberto de E pela f, é um conjunto aberto de E' e a imagem inversa de todo conjunto aberto de E' é um conjunto aberto de E; isto equivale a dizer que a imagem direta, pela f, de tôda vizinhança de um ponto qualquer $x \in E$ é vizinhança do ponto $x' = f(x) \in E'$, e a imagem direta, pela f^{-1}, de tôda vizinhança de um ponto qualquer $x' \in E'$ é uma vizinhança do ponto .... $x = f^{-1}(x') \in E$. A aplicação f se diz, então, um <u>isomorfismo</u> entre os espaços topológicos E e E'.

<u>ESPAÇOS MÉTRICOS. ESPAÇOS EUCLIDIANOS</u>

7.- Neste número vamos introduzir uma particular classe de espaços topológicos, a dos chamados espaços métricos, que, dado o ponto de vista sob o qual nos coloamos neste trabalho, são os que nos interessam. Antes porém, queremos observar que o símbolo R_+ a que nos referimos na definição de distância, designa o conjunto dos números reais não negativos . Aliás, adotaremos aqui, sistematicamente, as notações R, R_+, $\hat{R}$ e $\hat{R}_+$, onde

R = conjunto dos números reais;

R_+ = conjunto dos números reais não negativos;

$\hat{R}$ = conjunto dos números reais e os elementos $-\infty$ e $+\infty$;

$\hat{R}_+$ = conjunto dos números reais não negativos e o elemento $+\infty$.

Distâncias. Dado um conjunto E, não vazio, diz-se que uma função δ, definida em $E \times E$, com os valores em R_+ é uam distância sôbre E, se δ goza das seguintes propriedades:

a) $\delta(x,y) = 0$[1], $x,y \in E$, quando e sòmente quando $x = y$;

b) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$, quaisquer que sejam $x, y \in E$;

c) Quaisquer que sejam $x, y, z \in E$, tem-se:

$\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$. (propriedade triangular da distância).

Dizemos, então, que sôbre E está definida uma métrica por meio da distância $\delta(x,y)$.

Pondo-se, por exemplo, $\delta(x,y) = |x-y|$, onde x e y percorrem o conjunto R dos números reais relativos, vê-se que a função $\delta(x,y)$ assim construida, é uma distância sôbre R.

(1) Se quiséssemos atender, a rigor, às notações, deveriamos escrever $f((x,y))$ a fim de designar o valor da função f para o elemento (x,y) do produto $E \times F$, onde f esta definida. Por comodidade, entretanto, escrevemos simplesmente $f(x,y)$.

Espaço métrico.- Seja δ uma distância sôbre o conjunto E. Dado então, um elemento qualquer $x \in E$, e sendo r um número real positivo, chamaremos de esfera aberta de centro x e raio r ao conjunto dos pontos ... $y \in E$ tais que $\delta(x,y) < r$. Posto isto, diremos que uma parte V de E é vizinhança de x quando e sòmente quando V contém uma esfera aberta de centro x. Verifica-se, então, fàcilmente, que os conjuntos V_x, assim definidos, satisfazem aos quatro axiomas V_I, V_{II}, V_{III} e V_{IV} (nº1) das vizinhanças de x. De fato, os três primeiros axiomas são imediatos; quanto ao último, basta notar, aplicando-se a propriedade triangular da distância, que todo ponto y pertencente a uma esfera aberta, de raio r e centro x, é centro de uma esfera de raio $r - \delta(x,y)$, contida na precedente.

Fica, pois, dêste modo, definida, sôbre E, uma topologia $\mathcal{T}$ em que é vizinhança de um ponto x, qualquer, todo conjunto V que contenha uma esfera aberta de centro x . O espaço E com essa topologia, é o que se chama um espaço métrico; e a topologia $\mathcal{T}$ se diz uma topologia de espaço métrico, dada pela distância δ sôbre E.

OBSERVAÇÕES.-

1.- Pelo raciocínio de há pouco, deduz-se que tôda esfera aberta num espaço métrico é um conjunto abert[o do] espaço, o que justifica a denominação de "esfera aberta" dada a "priori".

2.- Todo espaço métrico é separado, pois, deixando de lado o caso trivial em que o espaço contém um só ponto, se x e y são dois pontos de tal espaço, $x \neq y$, as esferas de centro x e y, e raios iguais à metade da distância entre x e y , não possuem nenhum ponto comum. (Para prová-lo, utiliza-se a propriedade triangular da distância).

Espaço euclidiano. Consideremos o conjunto

$$R^n = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{n \text{ fatores}} \qquad (R^1 = R)$$

e ponhamos

$$\delta(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \text{(raiz aritmética)} \quad (1)$$

onde $x = (x_1,\dots,x_n)$ e $y = (y_1,\dots,y_n)$ são dois elementos (n-plas de números reais) quaisquer de R^n. Verifica-se que a função $\delta(x,y)$ dada pela relação (1) é uma distância sôbre R^n. Este, associado à topologia dada por essa distância é, pois um espaço métrico, ao qual chamaremos espaço euclidiano, de n dimensões (ou n-dimensional); o ponto $0 = (o,\dots,o)$ de R^n se diz origem de R^n. Se $n = 1$, teremos $\delta(x,y) = |x-y|$ $(x,y \in R)$, e, ao espaço R (espaço euclidiano de uma dimensão) chamaremos - também, de reta real.

OBSERVAÇÃO.-

Todo espaço euclidiano R^n pode ser considerado como o produto da reta real R por si própria tomada n vezes como fator. De fato, sendo $x = (x_1,\dots,x_n)$ um ponto qualquer do espaço euclidiano R^n, e V uma vizinhança $|x$, V contém uma certa - esfera aberta, Σ_x, de centro x e raio r. Pondo, para cada i entre 1 e n,

$$V_i = \left\{ y_i \in R \mid (x_i - y_i)^2 < r^2/n \right\} .$$

vemos que $V_1 \times \dots \times V_n \subset \Sigma_x \subset V$; como V_i é vizinhança de x $(1 \leq i \leq n)$ no espaço uni-dimensional R, segue-se que V é vizinhança de x na topologia do espaço produto da reta real R n vezes por si própria. Reciprocamente, dada uma vizinhança V' de x, nesse espaço produto, teremos,

$$V' \supset V_1 \times \dots \times V_n$$

onde $V_1, \dots, V_n$ são, na reta real, esferas abertas de mesmo raio r e centros $x_1,\dots,x_n$, respectivamente; portanto, o 2º membro de (2) contém a esfera aberta de centro $x = (x_1,\dots x_n)$ e raio r, do espaço euclidiano R^n. Em resumo, a topologia do espaço produto da reta real R n vezes por si própria, coincide com a topologia do espaço euclidiano R^n. Podemos, então, dizer que o espaço euclidiano R^n, é o produto da reta real R por si própria, tomada n vezes como fator.

Mais geralmente, pode-se verificar que o produto de um número finito de espaços euclidianos é um espaço métrico isomorfo ao espaço euclidiano cuja dimensão é a soma das dimensões dos espaços fatores. Assim por exemplo, considerando-se dois espaços euclidianos R e R^2, e pondo-se

$$\delta(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2} \quad ,$$

onde $x = (x_1 \, , (x_2,x_3))$ e $y = (y_1,(y_2,y_3))$ são dois elementos quaisquer do conjunto $R \times R^2$, vê-se que $\delta(x,y)$ é uma distância sôbre $R \times R^2$, e ainda, a topologia de espaço métrico dada por essa distância coincide com a topologia do espaço produto $R \times R^2$. Este, porém, não é um espaço euclidiano, pois cada ponto $x \in R \times R^2$, não é uma n-pla ordenada de números reais, mas sim um par ordenado de elementos, em que o primeiro é um número real, e o segundo, um par de números reais. Levando, entretanto, em conta a associatividade do produto cartesiano (nº 8 do § 1º, propriedade d)) e a definição de isomorfismo entre dois espaços topológicos, vê-se fàcilmente que os espaços $R \times R^2$ e R^3 são isomorfos.

DIÂMETRO DE UM CONJUNTO NUM ESPAÇO MÉTRICO

CONJUNTO LIMITADO

8.- Seja E um espaço métrico cuja topologia é dada pela distância δ, e consideremos um conjunto A, não vazio, de pontos de E. O extremo superior do conjunto dos números reais $\delta(x,y)$, (x,y) percorrendo $A \times A$ denomina-se <u>diâmetro</u> de A. Um conjunto do espaço E se diz <u>limitado</u>, se é vazio ou se, não sendo vazio, seu diâmetro é finito.

E/

Fixado um ponto qualquer $x \in E$, vê-se que o conjunto A é limitado quando e sòmente quando existe uma esfera aberta de centro x, contendo A.

OBSERVAÇÃO.-

No espaço euclidiano R^n, um conjunto A será limitado quando e sòmente quando cada uma das suas projeções sôbre R for, neste espaço uni-dimensional, um conjunto limitado De fato, para que A seja limitado no R^n é necessário e suficiente que exista uma esfera aberta, com centro na origem 0 = (o,...o) do R^n, que contenha A; portanto, deixando de lado o caso trivial em que A é vazio, sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ um ponto qualquer de A, e levando em conta as desigualdades,

$$|x_s| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad 1 \leq s \leq n,$$

segue-se nossa afirmação.

Distância de dois conjuntos.- Sejam A e B duas partes não vazias de E e consideremos o extremo inferior do conjunto das distâncias $\delta(x,y)$, onde (x,y) percorre o conjunto. A X B. Esse extremo inferior é o que se chama distância dos conjuntos A e B. A distância de um ponto $x \in E$ ao conjunto A é por definição, a distância dos conjuntos $\{x\}$ e A.

SEQUÊNCIA DE PONTOS NUM ESPAÇO MÉTRICO

9.- Sequência limitada. Uma sequência (x_ν) de pontos de um espaço métrico E, se diz limitada, se o conjunto A dos elementos de (x_ν) é limitado.

Sequência convergente. Uma sequência (x_ν) de pontos de E se diz convergente para o ponto $x \in E$ se, para cada $\varepsilon > 0$ se pode determinar um índice ν_0 tal que

$$\delta(x_\nu, x) < \varepsilon \quad ,$$

qualquer que seja $\nu \geq \nu_0$. O ponto x se diz, então limite da sequência (x_ν), e se escreve, do mesmo modo que para as sequências numéricas:

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = x \text{, ou } x_\nu \to x$$

Do fato do que o espaço E é separado, e da propriedade triangular da distância, segue-se que se (x_ν) converge também para x', então x' = x (unicidade do limite). Verifica-se, também, que se (x_ν) é convergente, (x_ν) é, necessáriamente, uma sequência limitada.

Sequências de Cauchy. Espaço métrico completo. Diz-se que a sequência (x_ν), de pontos do espaço métrico E, é uma sequência de Cauchy, se dado arbitrariamente o número real $\varepsilon > 0$, existe um índice ν_0 tal que, quaisquer que sejam os índices ... $m \geq \nu_0$ e $p \geq \nu_0$, se tenha.

$$\delta(x_m, x_p) < \varepsilon \quad .$$

Tôda sequência convergente é, certamente, uma sequência de Cauchy, como é fácil verificar; mas a recíproca nem sempre é verdadeira, como mostra o seguinte exemplo: Seja Q o conjunto dos números racionais, $\delta(x,y) = |x-y|$ a distancia sôbre Q, e x_ν o maior número de ν casas decimais, cujo quadrado é menor que 2; verifica-se que a sequência (x_ν) assim definida, de pontos do espaço métrico Q, é uma sequência de Cauchy, mas não é convergente.

Quando, num espaço métrico E, tôda sequência de Cauchy é convergente, dizemos que E é um espaço métrico completo. Assim a reta real R, é como se sabe da análise (critério geral de convergencia de Cauchy) um espaço métrico completo.

Ponto limite de uma sequência. Um ponto x do espaço E se diz ponto limite da sequência (x_ν), de pontos de E, se esta contém uma sub-sequência convergente para x. Quando existe um ponto de E que é ponto limite da sequência (x_ν) dizemos que esta possui ponto limite (sem, com isso, querermos dizer que êste pertença ao conjunto dos elementos da sequência).

Na reta real R, por exemplo, a sequência .... $\{(1+\nu)[1+(-1)^{\nu}]/2\nu\}$ possui, para pontos limites, 0 e 1, enquanto que a sequência $((-1)^{\nu}\nu)$, não possui nenhum ponto limite.

10.- Conjuntos compactos nos espaços métricos. No caso de um espaço métrico completo. E, pode-se estabelecer uma condição necessária e suficiente para que um conjunto não vazio A seja compacto, por meio das sequências de pontos de E.
Para isso vamos demonstrar dois lemas, começando, porém por estabelecer a seguinte convenção:

Sendo E um espaço métrico, e A uma parte não vazia de E, diremos que "A goza da propriedade (P) se tôda sequência infinita de pontos de A possui um ponto limite pertencente a A "

Vejamos, agora, os lemas a que nos referimos:

Lema I .- Se E é um espaço métrico completo, e A é um sub-conjunto fechado não vazio, de E, então, para que A goze da propriedade (P) é necessário e suficiente que dado arbitrariamente o número real $\varepsilon > 0$, o recobrimento .... $\{\Sigma_x(\varepsilon)\}_{x\in A}$, de A, onde $\Sigma_x(\varepsilon)$ designa a esfera aberta de centro x e raio ε, contenha um sub-recobrimento finito de A.

Condição necessária. Suponhamos que A goze da propriedade (P). Se, então, não fosse verificado o que afirma o teorema, tomando o ponto x_1 de A, haveria, certamente, uma infinidade de pontos de A, fora da $\Sigma_{x_1}(\varepsilon)$; sendo x_2 um outro ponto de A, não pertencente a $\Sigma_{x_1}(\varepsilon)$, haveria uma infinidade de pontos de A, fora de $\Sigma_{x_1}(\varepsilon) \cup \Sigma_{x_2}(\varepsilon)$; continuando assim, e levando em conta que êste processo não termina, construiremos uma sequência infinita (x_ν) de pontos de A, e a sequência correspondente $(\Sigma_{x_\nu}(\varepsilon))$ de esferas tais que, para cada $\nu \geqslant 1$, o ponto x_ν, centro da esfera $\Sigma_{x_\nu}(\varepsilon)$, está fora da reunião das esferas precedentes. Como (x_ν) deve admitir um ponto limite $x \in A$, haveria uma infinidade de indices ν para os quais os pontos x_ν pertencem à esfera $\Sigma_x(\varepsilon/4)$, o que é absurvisto que, para dois valores quaisquer m e p de ν, a distancia entre x_m e x_p é superior ou igual a $\varepsilon/2$. Portanto o recobrimento dado de A contém necessariamente, um sub-recobrimento finito de A, o que demonstra a condição necessária.

<u>Condição suficiente</u>. Suponhamos que, para cada $\varepsilon > 0$ $(\Sigma_x(\varepsilon))_{x \in A}$ contenha um sub-recobrimento finito de A. Então, dada uma sequência infinita qualquer, (y_ν), de pontos de A, e tomando-se $\varepsilon = 1$, exite uma esfera $\Sigma_{x_1}(1)$, $(x_1 \in A)$, contendo o conjuntos dos elementos de uma sequência parcial infinita $(y_{1\nu})$ de (y_ν), pois todos os pontos de A estão na reunião de um certo número finito de esfera $\Sigma_x(1)$ $(x \in A)$; pela mesma razão, tomando-se $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe uma esfera $\Sigma_{x_2}(\frac{1}{2})$ $(x_2 \in A)$ contendo o conjunto dos pontos de uma sequência parcial infinita $(y_{2,\nu})$ de $(y_{1\nu})$; continuando assim, tomando-se para ε, os valores 1/3, $\frac{1}{4}$, etc...., obteremos as sequências $(y_{3\nu})$ $(y_{4\nu})$, ..., cada uma sendo sub-sequência da precedente. Consideremos, agora, a sequência $(y_{1,1}, y_{2,2}, y_{3,3}, \ldots)$; como, para todo .. $m \geq M$, onde M é um indice arbitráriamente grande, tem-se ...... $y_{m,\nu} \in \Sigma_{x_M}(1/M)$, qualquer que seja $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, segue se que:

$$\delta(y_{m,m}, y_{p,p}) < \frac{2}{M},$$

para $m \geq M$, $p \geq M$, o que, dado a abitrariedade de M, prova que a sequência $(y_{1,1}, y_{2,2}, y_{3,3}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy; como é suposto ... completo, essa sequência converge para um ponto $y \in E$, ponto êste, necessariamente da aderência de A; porém sendo A um conjunto fechado, por hipótese, tem-se .. $y \in A$, e como $(y_{\nu\nu})$ é uma sequência parcial de (y_ν), fica demonstrada a condição suficiente.

<u>NOTA</u>:- Na demonstração da condição necessária não foi utilizado o fato de que A é fechado; aliás, todo conjunto que goza da prpriedade (P) é, como se vê sem dificuldade, necessariamente fechado.

Lema II.- <u>Se E é um espaço métrico qualquer, e A é um sub-conjunto de E, satisfazendo à propriedade (P), então dado um recobrimento aberto qualquer, (Ω_ι) de A existe um $\varepsilon>0$ tal que, para cada $x \in A$, $\Sigma_x(\varepsilon)$ está contida em algum Ω_ι.</u>

<u>Demonstração</u>.- Suponhamos que não se verificasse o que diz o teorema. Então, a cada número $1/\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, corresponderia um ponto $y_\nu \in A$ tal que a esfera $\Sigma_{y_\nu}(\frac{1}{\nu})$ não estivesse contida em nenhum dos conjuntos Ω_ι do recobrimento; como A goza da propriedade (P), a sequência (y_ν) possuiria um ponto limite $y \in A$, ponto êste, interior a um dos conjuntos Ω_ι, digamos, Ω_{ι_0}, o qual, portanto, conteria uma esfera aberta de centro y e de um certo raio σ. Sendo, y, ponto limite de (y_ν), haveria índices arbitràriamente grandes, para os quais $y_\nu \in \Sigma_y(\frac{\sigma}{2})$; tomando um tal índice de modo que $\frac{1}{\nu} < \frac{\sigma}{2}$, teríamos:

$$\Sigma_{x_\nu}(\tfrac{1}{\nu}) \subset \Sigma_y(\sigma) \subset \Omega_{\iota_0},$$

contra a hipótese, Portanto, o lema é verdadeiro.

Podemos, agora, enunciar o seguinte

TEOREMA:- <u>Num espaço métrico completo, E, para que um conjunto A, não vazio, seja compacto é necessário e suficiente que A goze da propriedade (P).</u>

<u>Condição necessária</u>. Basta levar em conta que, sendo A compacto, êle é, necessàriamente, fechado (teor. do nº 6) e raciocinar como na demonstração da condição suficiente do lema I.

<u>Condição suficiente</u>. Suponhamos que A goze da propriedade (P), e seja $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$ um recobrimento aberto qualquer de A, em E. Pelo Lema II, existe um $\varepsilon>0$ tal que, para

cada $x \in A$, a esfera $\Sigma_x(\varepsilon)$ está contida num dos conjuntos Ω_ι; pelo Lema I (condição necessária) existe um número finito de esferas $\Sigma_x(\varepsilon)$, digamos $\Sigma_{x_1}(\varepsilon)$ .... $\Sigma_{x_p}(\varepsilon)$ que constituem um recobrimento de A. Como existem, em I, os indices ι_1, ι_2, ... ι_p, tais que:

$$\Sigma_{x_s}(\varepsilon) \subset \Omega_{\iota_s} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

segue-se a condição suficiente. O teorema fica, pois demonstrado.

SEQUÊNCIA DE PONTOS NOS ESPAÇOS EUCLIDIANOS

11.- Seja (x_ν) uma sequência infinita de pontos do espaço euclidiano R^n e chamemos de $x_{i\nu}$, $1 \leq i \leq n$, a i-ésima coordenada de x_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$). Teremos, então para cada ν :

$$x_\nu = (x_{1\nu}, \ldots, x_{n\nu})$$

A cada i entre 1 e n, corresponde a sequência $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots)$ de pontos da reta real R; é a sequência das i-ésimas coordenadas dos pontos x_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Vamos demonstrar os seguintes teoremas:-

TEOREMA I.- Para que (x_ν) seja limitada é necessário e suficiente que cada uma das sequências de números reais $(x_{1\nu})$, ... $(x_{n\nu})$ o seja.

De fato, já observamos (observação do nº8) que o conjunto A dos pontos x_ν é limitado quando e sòmente quando cada uma das suas n projeções é um conjunto limitado na reta real R. Como a i-ésima projeção de A é o conjunto dos pontos $x_{i\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) de R, segue-se o teorema.

<u>TEOREMA II.</u>- <u>A sequência</u> (x_ν) <u>converge para o ponto</u>

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$$

<u>quando e sòmente quando, para cada i entre 1 e n, a sequência</u> $(x_{i\nu})$ <u>das i-ésimas coordenadas converge para a i-ésima coordenada,</u> y_i , de y.

De fato, considerando-se as desigualdades

$$|y_s - x_{s\nu}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_{i\nu})^2} \quad (1 \leq s \leq n; \nu = 1,2,3,\ldots) \tag{1}$$

e

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_{i\nu})^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_{i\nu}| \quad (\nu = 1,2,3,\ldots) \tag{2}$$

a condição necessária segue-se de (1), e a suficiente, de (2).

<u>COROLÁRIO:</u> <u>O espaço</u> R^n <u>é um espaço métrico completo.</u>

De fato, a desigualdade (1) mostra que a sequência (x_ν) é uma sequência de Cauchy, então as sequências das projeções i-ésimas (i = 1, 2, ..., n) são sequências de Cauchy na reta real R; como esta é um espaço métrico completo(pois , em R, tôda sequência de Cauchy é convergente), segue-se, pelo teorema acima, que (x_ν) é convergente.

Vejamos, agora, uma aplicação do teorema II, que será utilizada mais adiante. Chamando-se de ponto racional um ponto qualquer do R^n cujas coordenadas são, tôdas, números racionais, verifica-se o seguinte:

Dado um conjunto aberto qualquer, Ω, não vazio, no espaço R^n, todo ponto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ é o limite de uma sequência de pontos racionais pertencentes a Ω.

De fato, dada uma vizinhança V de x, no espaço R^n, contida em Ω, existe, para cada i, uma vizinhança V_i de x_i, na reta R, de modo que

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \subset V ;$$

como se sabe, um número real qualquer pode sempre ser considerado como o limite de uma sequência de números racionais, e, portanto, para cada i entre 1 e n, existe uma sequência $(y_{i\nu})$ de pontos racionais sôbre R, os quais podem ser supostos, ainda, pertencentes a V_i, convergente para o ponto x_i de R. Pelo teorema II, a sequência (y_ν) de pontos racionais pertencentes a Ω, onde

$$y_\nu = (y_{1\nu}, \ldots, y_{n\nu}), \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

converge para o ponto $x \in \Omega$.

TEOREMA III. - Se a sequência (x_ν) de pontos do R^n, é limitada, ela possui um ponto limite no R^n.

Demonstração. - Raciocinemos por recorrência sôbre n. Para $n = 1$, o teorema é verificado, como se sabe por uma propriedade dos números reais. Suponhamo-lo verificado para $n = m \geq 1$ e provemos que o é para $n = m + 1$. De fato, seja

$$x_\nu = (x_{1\nu}, \ldots, x_{m\nu}, x_{m+1\,\nu}), \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

e levemos em conta que, pela hipótese de indução, existe uma sequência (r_ν) de números inteiros positivos r_ν, com ...... $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots\ldots$, tal que, para cada i entre 1 e m, a sequência (x_{ir_ν}) converge para um certo número real y_i. Como a sequência (x_ν) é limitada, $(x_{m+1,\nu})$, e portanto (x_{m+1,r_ν}) é também limitada (teorema I), e, pois existe uma sequência parcial (s_ν) de (r_ν) tal que (x_{m+1,s_ν}) converge para um - certo número real y_{m+1}. Sendo, cada (x_{is_ν}), sequência parcial de (x_{ir_ν}), $i = 1, 2, \ldots, m$, segue-se que (x_{is_ν}) converge para y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), donde, pelo teorema anterior (x_ν) converge para o ponto

$$x = (y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}) \in R^{m+1},$$

o que demonstra o teorema.

Conjuntos compactos nos espaços euclidianos.

12.- No espaço euclideano R^n, que, como sabemos, é um espaço completo, se impuzermos a condição de que o conjunto - fechado A seja limitado, então A gozará da propriedade (P), e será, portanto, compacto. Mais precisamente, no R^n verifica-se o seguinte

TEOREMA:- Para que um conjunto limitado, A, do espaço euclideano R^n, seja compacto, é necessário e suficiente que A seja fechado.

Condição necessária .- Teorema do nº 6 dêste parágrafo.

Condição suficiente .- Como A é limitado, tôda sequência de - pontos de A possui um ponto limite $x \in E$ (naturalmente, deixamos de lado o caso imediato em que A é vazio); do fato de que A é fechado segue-se que $x \in A$, e, pois , A goza da propriedade (P); então, pelo teorema do nº 10 dêste parágrafo, A é compacto, o que demonstra a condição suficiente.

C A P I T U L O II

MEDIDA DE LEBESQUE

1º INTERVALOS. CLASSES $\mathcal{J}_o$, $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$

1.- Intervalos. Na reta real R, ou seja, no espaço euclidiano unidimensional, um intervalo de extremos a e b, $a < b$ (a e b designando números reais ou os elementos $-\infty$ e $+\infty$), é todo conjunto compreendido entre os conjuntos

$$\{x \in R \mid a < x < b\} \quad e \quad \{x \in R \mid a \leq x \leq b\} .$$

Designaremos por (a,b) qualquer intervalo de R, de extremos a e b, e, para indicar a inclusão ou não dos extremos adotaremos as notações empregadas por N. Bourbaki:

$$[a,b] \quad , \quad]a,b[\quad , \quad [a,b[\quad e \quad]a,b] \quad ,$$

que correspondem, respectivamente, aos casos em que a e b estão incluidos, a e b excluidos, a incluido e b excluido, a excluido e b incluido.

No espaço euclidiano de n dimensões, R^n, um intervalo é o produto cartesiano de n intervalos da reta real R, ou melhor, todo conjunto de forma

$$I_1 \times \ldots \times I_n \quad ,$$

onde $I_1, \ldots, I_n$ são intervalos de R.

Para o assunto que vamos expôr é conveniente estender a noção de intervalo, considerando, também como intervalo no espaço de uma dimensão (reta real), todo conjunto formado por um único ponto (número real). Um tal intervalo dir-se-á, então, degenerado; os seus extremos coincidem com o ponto que o constitui. Para indicá-lo utilizaremos as notações mencionadas acima; assim o intervalo (a,b) será degerado - quando a = b. No espaço R^n, todo conjunto da forma $I_1 \times \ldots \times I_n$, onde os I_r (r = 1, 2, ..., n) são intervalos de R, degerados ou não, se diz, também um intervalo de R^n; será, por definição um intervalo degenerado se o for pelo menos um dos intervalos $I_1, \ldots, I_n$.

As propriedades topológicas dos conjuntos dos espaços euclidianos se aplicam, naturalmente, aos intervalos; assim, um intervalo do R^n é aberto ou fechado segundo seja um conjunto aberto ou fechado de R^n. Por aí vê-se que um intervalo de R será aberto quando e sòmente quando não contiver nenhum dos extremos e, se pelo menos um dos extremos por finito, o intervalo será fechado quando e sòmente quando os extremos finitos pertencerem ao intervalo.

Por outro lado é fácil vêr que um intervalo $I_1 \times \ldots \times I_n$ do R^n será aberto (respectivamente fechado) quando e sòmente quando as suas projeções $I_1, \ldots, I_n$ forem, tôdas, intervalos abertos (respectivamente fechados) de R; daí resulta que um intervalo degenerado não possui, nunca, ponto interior.

Nota. Se $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ é um intervalo limitado não degenerado, do R^n, fechado (ou aberto), onde

$$I_r = [a_r, b_r] \quad , \quad r = 1, \ldots, n \; (\text{ou } I_r = \;]a_r, b_r[$$

r = 1, 2, ..., n), diz-se também que I um paralelepipedo do R^n, ou "n-paralelepipedo ", fechado (ou respectivamente aberto). Em particular, se $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_n - a_n$, I se diz um cubo do R^n, ou "n-cubo", fechado (respectivamente aberto), O ponto de coordenadas $(a_r+b_r)/2$, r = 1,..., n, é o centro de I.

Um ponto $(x_1, \ldots, x_n)$ de I (ou de $\overset{\circ}{I}$), onde cada x_r, $1 \leq r \leq n$ designa ou a_r ou b_r, é o que se chama um vértice de I. Cada um dos conjuntos

$$A_1 \times \ldots \times A_n$$

de pontos de I (ou de $\mathring{I}$), onde um certo $A_r (1 \leq r \leq n)$ designa o intervalo I_s, enquanto que cada A_s, com $s \neq r$ $(1 \leq s \leq n)$ indica ou $\{a_s\}$ ou $\{b_s\}$, se chama <u>aresta</u> de I. Finalmente, se apenas um certo $A_r (1 \leq r \leq n)$ designa ou $\{a_r\}$ ou $\{b_r\}$, ao passo que cada A_s, com $s \neq r$, designa o intervalo I_s, o conjunto

$$A_1 \times \ldots\ldots, \times A_n$$

é o que se chama uma face de I. É fácil vêr que um n-paralelepipedo possue 2^n vértices, $n.2^{n-1}$ arestas e 2n faces.

Os vértices do n-paralelepipedo I estão ao igual distância do centro de I, pois sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ um vértice qualquer, e levando-se em conta que cada x_r ou é a_r ou é b_r, tem-se:

$$\left(x_r - \frac{a_r + b_r}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_r - b_r}{2}\right)^2 ,$$

donde a distância de x ao centro de I é:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{n=1}^{n} (a_r - b_r)^2}$$

A esfera aberta (<u>fechada</u>[1]) cujo centro é o centro de n-paralelepipedo aberto (respectivamente fechado) I, se diz <u>circunscrita</u> a I, e êste, <u>inscrito</u> nessa esfera. Em particular, se I é um n-cubo cujas arestas têm comprimento a, o raio da esfera circunscrita é $a\sqrt{n}/2$. É claro que os pontos de um n-paralelepipedo qualquer I, são, com exceção dos vertices, inteiores à esferas circunscrita.

2.- <u>Intersecção de intervalos</u>. Se I e J são dois intervalos do R^n (degenerados ou não), a intersecção $I \cap J$ ou é vazia ou é um intervalo (degenerado ou não) do R^n. De fato,

(1) ver nota em página seguinte.

consideremos primeiramente o caso em que I e J são intervalos de R e exluamos, desde já, que seja $I \cap J = \emptyset$. Então, se pelo menos um dos intervalos I e J for degenerado, $I \cap J$ conterá um único ponto, e portanto será um intervalo degenerado Se nenhum dos intervalos I e J for degenerado, sendo $I = (a,b)$ e $J = (c,d)$, e supondo $a \leqslant c$, a intersecção será um intervalo de extremos c e d, se $d \leqslant b$; será um intervalo degenerado se $c = b$; finalmente será um intervalo de extremos c e b se b $b < c$ e $c < d$. Passando, agora, aos intervalos do R^n, e sendo

$$I = I_1 \times \ldots \times I_n \;, \quad J = J_1 \times \ldots \times J_n \;,$$

onde os I_r e os J_r ($r = 1, 2, \ldots, n$) são intervalos da reta real R, temos

$$I \cap J = (I_1 \cap J_1) \times \quad \ldots \times (I_n \cap J_n) \;;$$

como cada conjunto $H_r = I_r \cap J_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ ou é vazio, ou é um intervalo de R, $I \cap J$ ou será vazio, será um intervalo do R^n, intervalo êsse, degenerado, quando e sòmente quando pelo menos um dos H_r o for. Pela associatividade da intersecção, vê-se que a intersecção de um número finito de intervalos de R^n, ou é vazia, ou é um intervalo do R^n.

NOTA:- Daqui por diante, a menos que se indique o contrário, todo intervalo fechado será suposto, sempre, limitado.

3.- <u>Divisão de um intervalo.</u> Seja $I = [a,b]$ um intervalo da reta R (degenerado ou não) e tomemos, sôbre I, os pontos $a_0 = a$, a_1, ..., a_{p-1}, $a_p = b$, de maneira que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{p-1} \leqslant a_p$ e que os pontos correspondentes a mais de dois índices quaisquer não sejam, todos, coincidentes. Dizemos, então, que o conjunto dos p intervalos $I_1 = [a_0, a_1]$ ......

---

(1) - Num espaço métrico qualquer, E, uma esfera fechada de centro x e raio $\rho > 0$ é o conjunto dos pontos de y $\in$ E tais que $\delta(x,y) \leqslant \rho$. É facil vêr que uma esfera fechada é um conjunto fechado.

$\ldots, I_p = \left(a_{p-1}, a_p\right)$ é uma divisão de I nos p intervalos parciais $I_1, \ldots, I_p$. Duas divisões $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$ do mesmo intervalo I são iguais quando constam do mesmo número de intervalos ordenados iguais. Cada um dos intervalos $I_1, \ldots, I_p$ que constituem uma divisão de I não possui nenhum ponto que seja interior a algum dos outros, ou, dito de outro modo: $\overset{\circ}{I_r} \cap \overset{\circ}{I_s} = \emptyset$, $r \neq s$, $1 \leqslant r \leqslant p$, $1 \leqslant s \leqslant p$. A reunião dos I_r $(1 \leqslant r \leqslant p)$ é, evidentemente, I.

Consideremos, agora, no R^n, um intervalo fechado ... $I = I_1 \times \ldots \times I_n$. Sendo $\mathfrak{D}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ uma divisão do intervalo I_r de R, nos m_r intervalos parciais $I_{r1}, \ldots I_{rm_r}$, teremos:

$$I = (I_{11} \cup \ldots \cup I_{1m_1}) \times \ldots \times (I_{n1} \cup \ldots \cup I_{nm_n}) =$$

$$= \bigcup_{(s_1, \ldots, s_n) \in M} (I_{1s_1} \times \ldots \times I_{ns_n}),$$

onde $M = \{1, 2, \ldots, m_1\} \times \ldots \times \{1, 2, \ldots, m_n\}$. O intervalo I fica, pois, decomposto na reunião de $m_1 . m_2 \ldots m_n$ intervalos parciais fechados, do R^n, e cada um deles não possui nenhum ponto que seja interior a algum dos outros. Dizemos então, que êsses $m_1 . m_2$ intervalos formam uma divisão $\mathfrak{D}$ do intervalo I, e escrevemos:

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n)$$

Uma outra divisão de I, $\mathfrak{D}' = (\mathfrak{D}'_1, \ldots, \mathfrak{D}'_n)$, será igual a $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$) quando e sòmente quando $\mathfrak{D}'_r = \mathfrak{D}_r$, $r = 1, \ldots$ $\ldots, n$.

Um resultado que será de utilidade para a noção que vamos introduzir no número seguinte, é o expresso pelo

TEOREMA : Se $\mathfrak{D}$ é uma divisão do intervalo $I = \left(a, b\right)$ de R, nos p intervalos parciais $\left(a_0, a_1\right), \ldots, \left(a_{p-1}, a_p\right)$ $(a_0 = a,\ a_p = b)$ e se $J = \left(c, d\right)$ é um qualquer intervalo fechado contido em I, existe uma divisão $\mathfrak{D}'$

de I, nos q intervalos parciais $\{b_0,b_1\},\ldots\{b_{q-1},b_q\}$ $(b_0 = a\ ,\ b_q = b)$, onde $p \leq q \leq p+2$, tal que, cada um dos intervalos J, $\{a_0,a_1\}$ $,\ldots\{a_{p-1},a_p\}$ coincide com um intervalo $\{b_r,b_s\}$, $r < s$.

De fato, suponhamos, primeiramente, J degenerado. Se tivermos, então, $a_{r-1} = c$, $a_r = d$, para um certo r entre 1 e p basta tomar, para $\mathcal{D}'$, a propria divisão $\mathcal{D}$; se $a_r = c = d$, mas $a_s \neq a_r$ tomaremos $b_0 = a_0, \ldots, b_r = a\ ,\ b_{r+1} = a_r, \ldots b_{p+1} = a_p$; se, finalmente, $a_{r-1} < c = d < a_r$, faremos $b_0 =$

$= a_0, \ldots, b_{r-1}, a_{r-1}, b_r = c, b_{r+1} = d\ ,\ b_{r+2} = a_r, \ldots, b_{p+2} = a_p$.

Suponhamos, agora, J não degenerado, e designamos por $(\mathcal{D},c)$ a propria divisão $\mathcal{D}$ se c coincide com algum a_r, ou a divisão de I formada pelos intervalos $\{c_{i-1}, c_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, p+1$, onde

$$c_0 = a_0, \ldots, c_r = a_r,\ c_{r+1} = c,\ c_{r+2} = a_{r+1}, \ldots, c_{p+1} = a_p,$$

se $a_r < c$ a_{r+1}. Pondo, então, $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D},c)$, basta tomar ...... $\mathcal{D}' = (\mathcal{D}_1, d)$.

OBSERVAÇÃO. Pela formação da divisão $\mathcal{D}'$, vemos que: se entre os intervalos pertencentes a $\mathcal{D}$ não houver nenhum degenerado, e J não for, também, degenerado, então nenhum dos intervalos de $\mathcal{D}'$ será degenerado.

4.- Divisão gerada por um certo número de intervalos. Dado o intervalo $I = \{a,b\}$, da reta real R, e sendo $I_1,\ldots I_m$, m intervalos de R, fechados, e contidos em I, vamos construir uma divisão $\mathcal{D}$ de I, formada pelos p intervalos $\{a_{r-1},a_r\}$, $r = 1, 2, \ldots, p$ $(a_0 = a\ ,\ a_p = b)$ de maneira que cada um dos intervalos $I_1,\ldots,I_m$ coincida com um certo $\{a_r,a_s\}$ $r \leq s$. Procedamos por recorrencia sôbre o número m. Para $m = 1$ tal construção é possivel, pois basta partir da divisão de I formada pelo próprio I, e aplicar o teorema anterior. Supondo, então, construida a divisão para os intervalos $I_1, \ldots, I_m$, e sendo I_{m+1} um outro intervalo fechado contido em I, obteremos a divisão de I, com as propriedades desejadas, para os intervalos $I_1, \ldots, I_m$, I_{m+1}, aplicando, ainda o teorema anterior (nêste - caso, à divisão $\mathcal{D}$ e ao intervalo I_{m+1}).

A divisão $\mathcal{D}$ de I, obtida a partir dos intervalos I_1, $\ldots I_m$, cuja construção, como vimos, é sempre possivel, se diz gerada pelos intervalos $I_1, \ldots, I_m$. E útil notar que cada intervalo I_r ($r = 1, \ldots, m$) é a reunião de um certo número de intervalos consecutivos, pertencentes a $\mathcal{D}$, formando, êstes, uma divisão $\mathcal{D}_r$ do intervalo I_r. De fato, $I_r = \{a_q, a_s\}$, $0 \leq q \leq s \leq m$; portanto, os intervalos $\{a_q, a_{q+1}\}, \ldots\ldots\ldots, \{a_{s-1}, a_s\}$, que pertencem a $\mathcal{D}$, formam nessa ordem, uma divisão de I_r.

Seja, agora, I um intervalo do R^n, fechado, contendo os intervalos fechados $I_1, \ldots, I_m$ de R^n. Designando por $\mathcal{D}_r$ $(1 \leq r \leq n)$ a divisão da r-ésima projeção de I gerada pelas r-ésimas projeções dos intervalos $I_1, \ldots, I_m$, diremos que a divisão $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ de I é a divisão <u>gerada pelos intervalos</u> $I_1, \ldots, I_m$. Tomando, então, um qualquer dos intervalos $I_1, \ldots, I_m$, digamos I_1, cada uma das divisões $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\ldots, \mathcal{D}_n$ contém um certo número de intervlos de R, os quais constituem, respectivamente, uma divisão da 1ª, 2ª, ... r - -ésima projeção de I_1; portanto I_1 é a reunião de certos intervalos de $\mathcal{D}$, os quais formam uma divisão de I_1. O mesmo acontece, naturalmente, com cada um dos intervalos $I_2, \ldots$ $\ldots, I_m$.

<u>Observação</u>.- Se entre os intervalos $I_1, \ldots I_m$ do R^n não houver nenhum degenerado, o mesmo acontecerá com os intervalos da divisão de I, gerada por $I_1, \ldots I_m$. Este fato é consequência imediata da observação analoga, do nº 3, para o caso da reta real.

A CLASSE $\mathcal{J}_0$

5.- Designemos por $\mathcal{J}_0$ o conjunto das partes A do R^n

tais que cada $A \in \mathcal{J}_0$ esteja contido num intervalo fechado. I do R^n e contenha o interior de I. Ao intervalo I chamaremos, então, de <u>suporte</u> de A.

É claro que todos os intervalos limitados de R^n, e o conjunto vazio, pertencem a $\mathcal{J}_0$. Além disso, se $A \in \mathcal{J}_0$ possui ponto interior, existe sòmente um intervalo fechado I que seja suporte de A, pois, da relação $\mathring{I} \subset A \subset I$, resulta

$$I = \overline{\mathring{I}} \subset \bar{A} \subset \bar{I} = I, \qquad (1)$$

donde $A = I$, o que mostra que se J é outro intervalo fechado para o qual se tenha também $\mathring{J} \subset A \subset J$, então $J = I$. Por outro lado, se I é suporte de A, e é não degenerado, o interior de A é não vazio como decorre da relação imediata $\mathring{A} \supset \mathring{I}$.

Verifica-se, ainda, que se $A, B \in \mathcal{J}_0$, então .... $A \cap B \in \mathcal{J}_0$, pois, sendo I e J suportes de A e B, respectivamente, segue-se, das relações

$$\mathring{I} \subset A \subset I \quad \text{e} \quad \mathring{J} \subset B \subset J,$$

estas outras:

$$\mathring{I} \cap \mathring{J} \subset A \cap B \subset I \cap J,$$

ou, levando-se em conta que $\mathring{I} \cap \mathring{J} = \overset{\circ}{\widehat{I \cap J}}$.

$$\overset{\circ}{\widehat{I \cap J}} \subset A \cap B \subset I \cap J.$$

Como $I \cap J$ ou é vazio ou é um intervalo fechado do R^n, conclui-se que $A \cap B \in \mathcal{J}_0$.

Vejamos, agora, uma importante propriedade dos conjuntos de $\mathcal{J}_0$, que expressaremos pelo seguinte

<u>TEOREMA</u>.- <u>Se $A, B \in \mathcal{J}_0$, a intersecção</u> $A \cap \complement B$ <u>é igual à reunião de um certo número finito de conjuntos</u> de $\mathcal{J}_0$, <u>interiormente disjuntos.</u>(1)

Vamos demonstrá-lo por etapas, começando por examinar

(1) Os conjuntos de uma família $(A_\iota)_{\iota \in I}$ de partes de um espaço topológico E, dizem-se interiormente disjuntos, se os da família $(\mathring{A}_\iota)_{\iota \in I}$ são disjuntos..

os casos

$$I \cap \complement J \quad e \quad A \cap \complement I$$

onde I e J são dois intervalos fechados quaisquer (limitados) do R^n, enquanto que A é um conjunto qualquer de $\mathcal{J}_o$.

<u>1º) ($I \cap \complement J$).</u> Se $I \cap J = \emptyset$, vem $I \cap \complement J = I$, verificando-se, pois o teorema. Se $I \cap J \neq \emptyset$, consideramos a divisão $\mathcal{D}$ de I gerada pelo intervalo $k = I \cap J \subset I$; tal divisão é formada por um certo número p de intervalos fechados $I_1, \ldots$ $\ldots, I_p$, dos quais K é um deles, tendo-se ainda,

$$\bigcup_{r=1}^{p} I_r = I, \text{ com } I_r \cap \overset{o}{I}_s = \emptyset \text{ para } r \neq s.$$

Como

$$I \cap \complement J = I \cap \complement K = \bigcup_{r=1}^{p} (I_r \cap \complement K),$$

basta mostrar que os conjuntos $A_r = I_r \cap \complement K$, $r = 1, \ldots, p$, pertencem a $\mathcal{J}_o$ e são interiormente disjuntos. Excluindo-se o caso trivial $I_r = K$ (neste caso, $I_r \cap \complement K = \emptyset$), tem-se, por ser $\overset{o}{I}_r \cap K = \emptyset$:

$$\overset{o}{I}_r = \overset{o}{I}_r \cap \complement K \subset A_r \subset I_r \quad .$$

e portanto $A_r \in \mathcal{J}_o$, $r = 1, \ldots, p$; como os A_r são interiormente disjuntos (pois $A_r \subset I_r$, $r = 1, \ldots, p$) e

$$I \cap \complement J = I \cap \complement K = \bigcup_{r=1}^{p} (I_r \cap \complement K) = \bigcup_{r=1}^{p} A_r \quad ,$$

Conclue-se ~~que~~ que é verdadeiro o teorema neste caso.

<u>2º) ($A \cap \complement I$).</u> Sendo H um intervalo fechado contendo A, vem, utilizando-se a relação $A \cap \complement I = (H \cap \complement I) \cap A$ e o fa

to de que $H \cap \complement I = \bigcup_{r=1}^{q} B_r$, com os $B_r \in \mathcal{J}_o$, e interiormen-
te dispjuntos (caso anterior):

$$A \cap \complement I = \bigcup_{r=1}^{q} B_r \quad ; \qquad ;$$

como os $B_r \cap A \in \mathcal{J}_o$ $(r = 1, \ldots, q)$ e são interiormente disjun-
tos, segue-se o teorema neste segundo caso.

Verifica-se ainda, que se H é suporte de A, $H \cap \complement A$ é, também, reunião finita de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos. De fato, tem-se

$$\complement \overset{\circ}{H} \supset \complement A \supset \complement H \text{, donde } \quad H \cap \complement \overset{\circ}{H} \supset H \cap \complement A \quad ;$$

excluindo-se o caso imediato em que H é degenerado (neste caso, o 1º membro da 2ª relação acima coincide com H), vê-se que $H \cap \complement H$ é a reunião de 2n intervalos degenerados (precisamente as 2 n faces do n-paralelepipedo H), e portanto,

$$H \cap \complement A = \left[H \cap \complement \overset{\circ}{H} \right] \cap (H \cap \complement A)$$

é reunião de 2n conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos.

Finalmente, sendo A e B dois conjuntos quaisquer de $\mathcal{J}_o$; e J um suporte de B, tem-se

$$B = J \cap \complement (J \cap \complement B) \text{, donde}$$

$$A \cap \complement B = A \quad \left[(J \cap \complement B) \cup \complement J \right] = (A \cap \complement J) \cup A \cap (J \cap \complement B);$$

como já verificamos,

$$A \cap \complement J = \bigcup_{r=1}^{p} A_r \quad \text{e} \quad J \cap \complement B = \bigcup_{s=1}^{q} B_s \; ,$$

onde os A_r são conjuntos interiormente disjuntos pertencentes a $\mathcal{J}_o$, o mesmo acontecendo com os B_s. Pondo $B'_s = A \cap B_s$, $s = 1, \ldots, q$ (os B'_s também serão interiormente disjuntos e pertencerão a $\mathcal{J}_o$), podemos escrever

$$A \cap \complement B = \left(\bigcup_{r=1}^{p} A_r\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{q} B'_s\right) \; ;$$

como cada um dos A_r não possui pontos comuns com cada um dos B'_s (pois $A_r \subset \complement J$ enquanto que $B'_s \subset J$, $r = 1, \ldots, p$; $s = 1, \ldots, q$), segue-se o teorema.

<u>COROLÁRIO</u>.- <u>Se $A_1, \ldots, A_p$, $B_1, \ldots B_q$ são conjuntos de $\mathcal{J}_o$, com os A_r interiormente disjuntos, a intersecção</u>

$$\left(\bigcup_{r=1}^{p} A_r\right) \cap \complement\left(\bigcup_{s=1}^{q} B_s\right)$$

<u>é igual a reunião de um número finito de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos.</u>

Provemo-lo por recorrência sôbre q. Para q = 1, tem-se

$$\left(\bigcup_{r=1}^{p} A_r\right) \cap \complement B_1 = \bigcup_{r=1}^{p} \left(A_r \cap \complement B_1\right) ,$$

onde cada um dos conjuntos $A_r \cap \complement B_1$ ($r = 1, \ldots, p$) é, pelo teorema anterior, a reunião de um número finito de conjuntos de

$\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos, segue-se o corolário para q = 1. Supondo-o, agora, verdadeiro para q - 1, q > 1, e utilizando a igualdade

$$\left(\bigcup_{r=1}^{p} A_r\right) \cap \complement\left(\bigcup_{s=1}^{q} B_s\right) = \left[\left(\bigcup_{r=1}^{p} A_r\right) \cap \complement\left(\bigcup_{s=1}^{q-1} B_s\right)\right] \cap \complement B_q$$

recaimos no caso ha pouco verificado; portanto, fica completamente demonstrado o corolário.

AS CLASSES $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$

6.- Chamamos de $\mathcal{J}$ à classe formada pelas partes $\mathcal{A}$ de R^n, que são reuniões enumeraveis (finitas ou não) de conjuntos pertencentes a $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos. Em particular, os conjuntos de $\mathcal{J}$ pertencerão, todos, a $\mathcal{J}$.

Vejamos algumas propriedades da classe .

a) $\mathcal{J}$ é "enumeravelmente aditiva ", isto é, se $(\mathcal{A}_\nu)$ é uma sequência de conjuntos pertencentes a $\mathcal{J}$, a sua reunião também pertence a $\mathcal{J}$.

Demonstração. Cada $\mathcal{A}_\nu$ é reunião enumeravel de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos, isto é,

$$\mathcal{A}_\nu = \bigcup_r A_{\nu r} , \quad A_{\nu r} \in \mathcal{J}_o , \quad \mathring{A}_{\nu r} \cap \mathring{A}_{\nu r'} = \emptyset \text{ para}$$

$r \neq r'$.

Dispondo os $A_{\nu r}$ (ν = 1, 2, 3, ...; r = 1, 2, 3, ...) numa única sequência (B_ν), ponhamos, como no nº5 do cap. I, § 19:

$$\mathcal{B}_1 = B_1 , \quad \mathcal{B}_\nu = (\complement B_1) \cap \ldots (\complement B_{\nu-1}) \cap B_\nu , \quad \nu > 1 ;$$

como

$$(\complement B_1) \cap \ldots (\complement B_{\nu-1}) \cap B_\nu =$$

$$= (B_\nu \cap \complement B_1) \cap \ldots (B_\nu \cap \complement B_{\nu-1}),$$

e os $B_\nu \cap \complement B_i$ $(i = 1, \ldots, \nu - 1)$ são reuniões de um número finito de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos (teor. do nº 5), segue-se que cada $\mathcal{B}_\nu$ é a reunião de um número finito de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos; portanto, levando em em conta que os $\mathcal{B}_\nu$ são disjuntos, resulta

$$\bigcup_\nu \mathcal{B}_\nu = \bigcup_\nu C_\nu \;, \quad C_\nu \in \mathcal{J}_o \;, \quad \overset{\circ}{C}_r \cap \overset{\circ}{C}_s = \emptyset \text{ para } r \neq s$$

Como a reunião que figura no primeiro membro é igual à reunião dos $\mathcal{A}_\nu$, a propriedade a) fica demonstrada.

b) $\mathcal{J}$ é "finitamente multiplicativa", isto é, a intersecção de um número finito qualquer de conjuntos de $\mathcal{J}$ pertencen a $\mathcal{J}$.

Basta demonstrar que para dois conjuntos quaisquer $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{J}$, a propriedade se verifica. Sendo, então

$$(A_m)_{m \in M} \quad \text{e} \quad (B_s)_{s \in S}$$

duas sequências de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, cujas reuniões são, respectivamente, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, os A_m, assim como os B_s, interiormente disjuntos, tem-se, pondo $M \times S = P$,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \bigcup_{(m,s) \in P} (A_m \cap B_s) \;;$$

como os conjuntos $A_m \cap B_s$ pertencem a $\mathcal{J}_o$ e são interiormente disjuntos, segue-se a propriedade b).

c) <u>Todo conjunto aberto de R^n pertence a</u> $\mathcal{J}$.

Para demonstrá-la, provemos, principalmente, o seguinte

LEMA.- <u>Todo conjunto aberto de R^n, não vazio, é reunião enumeravel de cubos abertos do</u> R^n.

Seja, com efeito, Ω um conjunto aberto qualquer, não vazio. Se $\Omega = R^n$, o lema se verifica, pois basta tomar a sequência de cubos abertos I_ν , cada um com centro na origem O do R^n, de modo que a distância de O ao contôrno de I, seja igual a ν . Suponhamos, então, $\Omega \neq R^n$, ... e, considerando a sequência $(x_1, \ldots, x_\nu, \ldots)$ dos pontos racionais de Ω, associemos a cada x_ν o cubo aberto I_ν , do R^n , inscrito na esfera aberta de centro x_ν e raio igual à metade da distância de x_ν ao contorno de Ω. Provemos que

$$\Omega = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I \qquad (1)$$

De fato, o segundo membro de (1) está, evidentemente contido no primeiro; por outro lado, sendo x um ponto qualquer de Ω , e σ a distância de x ao contorno de Ω , podemos determinar um ν tal que a distância de x_ν a x seja inferior a $\sigma/3n$ (Cap. I, §29, nº 11 , aplicação do teorema II)como a distância de x_ν à fronteira de Ω é, certamente, maior que $2\sigma/3$, segue-se que a de x_ν ao contorno de I_ν é superior a $\sigma/3\sqrt{n}$; mas $(\sigma/3\sqrt{n}) \geq \sigma/3n$,portanto $x \in I_\nu$, e, pois, o primeiro membro de (1) esta contido no 2º. Logo $\Omega \in \mathcal{J}$, e como o conjunto vazio também pertence a $\mathcal{J}$, fica demonstrada a propriedade c) .

OBSERVAÇÃO .- Do lema acima segue-se um resultado de muita aplicação na teoria da medida nos espaços euclidianos. É o seguinte:-

<u>Todo conjunto aberto,</u> Ω, <u>não vazio,</u> de R^n , <u>é reunião enumeravel de intervalos fechados de</u> R^n, <u>não degenerados, e e interiormente disjuntos.</u>

Com efeito, sendo (I_ν) a sequência dos cubos construídos no lema anterior, e pondo

$$I'_1 = I_1 \; , \; I'_\nu = (\complement I_1) \cap \ldots \cap (\complement I_{\nu-1}) \cap I_\nu \; , \quad \nu > 1 \, , \tag{2}$$

os I'_ν são, como se observou na demonstração da propriedade da a) do $\mathcal{J}$, reuniões finitas de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos. Sendo x um ponto qualquer de Ω, x pertencerá a um certo I_p, e, portanto, a

$$\bigcup_{r=1}^{p} I_r = \bigcup_{r=1}^{p} I'_r \; ;$$

Como o 2º membro dessa igualdade é reunião finita de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, e o 1º membro é um conjunto aberto não vazio, segue-se da obs. do Teor. III nº [illegible], cap. I, § [illegible], que x é aderente a um certo $A_\nu \in \mathcal{J}_o$, de suporte não degenerado, e que faz parte da sequência (A_ν) de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente disjuntos, cuja reunião é Ω, sequência, essa, deduzida (como na prop. a)) das relações (2). Sendo, então (A'_ν) a sequência parcial de (A_ν) formada pelos A_ν de suportes não degenerados, e (A''_ν) a formada pelos de suportes degenerados, resulta

$$\bigcup_\nu A_\nu \subset \Big(\bigcup_\nu \bar{A}'_\nu\Big) \cup \Big(\bigcup_\nu A''_\nu\Big) = \bigcup_\nu \bar{A}'_\nu \; ;$$

como cada A_ν está contido num certo n-cubo I_{r_ν} cuja aderência, por sua vez, está contida em Ω, segue-se que

$$\Omega = \bigcup_\nu A_\nu \subset \bigcup_\nu \bar{A}'_\nu \subset \Omega \, ,$$

donde $\Omega = \bigcup_\nu \bar{A}'_\nu$, precisamente o resultado anunciado, pois os $\bar{A}_j$ são intervalos fechados não degenerados, e interiormente disjuntos.

A classe $\mathcal{J}'$. Designemos por $\mathcal{J}'$ a classe das partes $\mathcal{A}'$ de R^n, que são complementares dos conjuntos de $\mathcal{J}$. A classe $\mathcal{J}'$, à qual chamaremos de dual da $\mathcal{J}$, goza de três propriedades, respectivamente duais de a), b) c), e que se demonstram simplesmente pela passagem ao complementar. São as seguintes:

a') - $\mathcal{J}'$ é enumeravelmente multiplicativa", isto é, a intersecção enumeravel de conjuntos de $\mathcal{J}'$ pertence a $\mathcal{J}'$;

b') - $\mathcal{J}'$ é "finitamente aditiva", isto é, a reunião finita de conjuntos de $\mathcal{J}'$ pertence a $\mathcal{J}'$;

c') - Todo conjunto fechado de R^n pertence a $\mathcal{J}'$.

TRIBOS SÔBRE UM CONJUNTO

7.- Um conjunto $\mathcal{T}$ de partes de um certo conjunto E se diz uma tribo sôbre E se $\mathcal{T}$ goza das seguintes propriedades:-

1º) $\mathcal{T}$ é numeravelmente aditiva;

2º) $\mathcal{T}$ é enumeravelmente multiplicativa;

3º) Se $A, B \in \mathcal{T}$ então $A \cap \complement B \in \mathcal{T}$.

A tribo $\mathcal{T}$ se diz perfeita se $E \in \mathcal{T}$. O conjunto das partes de um sub-conjunto E_1 de E, por exemplo, é uma tribo sôbre E; será uma tribo perfeita se $E_1 = E$.

É fácil vêr que se $(\mathcal{T}_\iota)$ é uma familia de tribos sôbre o mesmo conjunto E, a intersecção $\bigcap \mathcal{T}_\iota = \mathcal{T}$ é, também, uma tribo sôbre E.

Se f é uma aplicação de E em F, e $\mathcal{T}'$ é uma tribo sôbre F, o conjunto $\mathcal{T}$ das partes $f^{-1}(A')$, $A' \in \mathcal{T}'$, é uma tribo sôbre E; para verificá-lo basta utilizar as propriedades da imagem recíproca citadas no final do nº 8, cap. I, §1º.

Tribo gerada por um conjunto de partes. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de partes de um conjunto E. A tribo $\mathcal{T}$, intersecção de tôdas as tribos que contêm $\mathcal{F}$, se diz gerada pelo conjunto $\mathcal{F}$ de partes de E; $\mathcal{T}$ é, pois a menor das tribos, sôbre E, que contêm $\mathcal{F}$.

Tribo de Borel. Se E é um espaço topológico, a tribo sôbre E, gerada pelos conjuntos abertos de E, se denomina tribo de Borel; tal tribo é perfeita, e seus conjuntos são os chamados borelianos de E.

2º.- MEDIDAS PARA OS CONJUNTOS DE $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$

1.- Este capítulo será dedicado ao estudo de uma particular função de conjunto, μ, com os valores em $\hat{R}_+$, definida numa tribo perfeita, $\mathcal{T}$, sôbre o espaço R^n. Tal função, que será construida por prolongamentos sucessivos, a partir de uma determinada função de conjunto definida numa certa classe simples de partes de R^n (a dos intervalos fechados), é o que se chama uma medida sôbre $\mathcal{T}$, precisamente a medida de Lebesgue sôbre $\mathcal{T}$. Todo conjunto $E \in \mathcal{T}$ dir-se-á, então, mensuravel-Lebesgue, e o valor $\mu(E)$, da função μ, para o conjunto E, é a medida (segundo Lebesgue) de E. Veremos, ainda, que a tribo $\mathcal{T}$ contem a tribo de Borel sôbre R^n, e que a medida μ goza das seguintes propriedades:

α) É "enumeravelmente aditiva", no sentido em que: dada uma sequência qualquer (E_ν) de conjuntos pertencentes a $\mathcal{T}$, com $E_r \cap E_s = \emptyset$, para $r \neq s$, tem-se:

$$\mu\Big(\bigcup_\nu E_\nu\Big) = \sum_\nu \mu(E_\nu) \quad ;$$

β) Se $E_1, E_2 \in \mathcal{T}$, $E_2 \subset E_1$, $\mu(E_1) < +\infty$, tem-se:

$$\mu(E_1 \cap \complement E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2) .$$

A fim de chegarmos à função μ, teremos que considerar, nas diversas etapas do prolongamento, certas funções de conjunto, definidas, sucessivamente, na classe dos intervalos fechados de R^n, como já dissemos, nas classes $\mathcal{J}_o$, $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$, o que será feito neste segundo parágrafo. Antes porém, vamos estabelecer algumas convenções e notações que serão utilizadas no que se segue. São as seguintes:

1ª) Sendo (a_ν) uma sequência de elementos de $\hat{R}_+$, poremos

$$\sum_\nu a_\nu = +\infty$$

se entre os elementos a_ν houver pelo menos um igual a $+\infty$; no caso contrário, o símbolo $\sum_\nu a_\nu$ tem o sentido habitual.

2ª) Se (a_ν) é uma sequência infinita e monotônica, de elementos de $\hat{R}_+$, contendo uma sequência parcial infinita de elementos de R_+, cujo limite seja λ, poremos

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = \lambda \quad ;$$

no caso contrário convencionaremos que

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = +\infty$$

3ª) Sendo f uma função definida num conjunto qualquer, E, tomando os valores em $\hat{R}$, e A uma parte de E tal que $f(A) \subset R$, o extremo superior (inferior) de $f(A)$ será designado por

$$\sup_{x \in A} f(x) \quad \left(\text{respect.:} \quad \inf_{x \in A} f(x)\right)$$

4ª) Designaremos por $\mathcal{H}$ o conjunto das seqüências infinitas (I_ν) de intervalos de R^n, tais que;

1º) a origem O do R^n pertence a cada I_ν ;

2º) sendo δ_ν a distância de O ao contôrno de I_ν, tem se:

$$\lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = +\infty$$

5ª) Se α designa o elemento $+\infty$ ou $-\infty$, e β é um número real qualquer, poremos

$$\alpha - \beta = \alpha$$

<u>Medida para os intervalos fechados R^n.</u>

2.- Sendo $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ um intervalo fechado de R^n, onde

$$I_1 = \left[a_1, b_1\right], \ldots, I_n = \left[a_n, b_n\right]$$

são intervalos da reta real R, chamaremos de <u>medida</u> de I ao número real não negativo.

$$m(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$$

Fica, dêste modo, definida uma função de conjunto, m, na classe dos intervalos fechados de R^n. Ter-se-á $m(I) = 0$ quando e sòmente quanto I for degenerado. No espaço euclidiano de uma dimensão, isto é, na reta real R, a medida do intervalo $I = \left[a, b\right]$ é $b - a$.

Vejamos algumas propriedades da função m, que serão expressas pelos seguintes teoremas:

TEOREMA I .- <u>Se $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ é uma divisão do intervalo fechado I, então m(I) é igual à soma das medidas dos intervalos de $\mathcal{D}$</u> .

Com efeito, sendo $I_s = pr_s(I)$, e $I_{s1},\dots,I_{sq_s}$ os q_s intervalos de R que formam a divisão $\mathcal{D}_s$ de I_s $(1 \leqslant s \leqslant n)$, e, designando-se, respectivamente, por c_s, c_{s1}, ..., c_{sq_s} as medidas dos intervalos I_s, I_{s1}, ..., I_{sq_s}, na reta real R, tem-se, evidentemente:

$$c_s = c_{s1} + \dots + c_{sq_s} \qquad (s = 1, \dots, n);$$

como, por definição, $m(I) = c_1, \dots c_n$, segue-se que

$$m(I) = \sum c_{1r_1} \dots c_{nr_n} \quad , \qquad (1)$$

onde o somatório é estendido a tôdas as n-plas $(r_1,\dots,r_n) \in M$, com

$$M = \{1,2,\dots,q_1\} \times \dots \times \{1,2,\dots,q_n\}.$$

Levando-se em conta que (ainda pela definição)

$$m(I_{1r_1} \times \dots \times I_{nr_n}) = c_{1r_1} \dots c_{nr_n} \,,$$

e que os intervalos do R^n, pelos quais é formada a divisão $\mathcal{D}$, são, precisamente, os produtos cartesianos

$$I_{1r_1} \times \dots \times I_{nr_n} \quad (r_1,\dots,r_n) \in M \,,$$

segue-se, de (1), o teorema que se queria provar.

<u>TEOREMA</u> II. <u>Se $I_1,\dots,I_p$, $J_1,\dots,J_q$ são intervalos fechados do R^n, os p primeiros interiormente disjuntos, e se</u>

$$\bigcup_{r=1}^{p} I_r \subset \bigcup_{s=1}^{q} J_s ,$$

então,

$$\sum_{r=1}^{p} m(I_r) \leqslant \sum_{s=1}^{q} m(J_s) \; ; \qquad (2)$$

além disso, se os J_s são, também interiormente disjuntos, e

$$\bigcup_{r=1}^{p} I_r = \bigcup_{s=1}^{q} J_s ,$$

em (2) verifica-se a igualdade.

Demonstração.- Supondo, primeiramente, que entre os I_r e os J_s não figur nenhum intervalo degenerado, e encerrando-os num único intervalo fechado K, seja $\mathcal{D}$ a divisão de K gerada pelos I_r e J_s $(r = 1, \ldots, p;\ s = 1, \ldots q)$.
A divisão $\mathcal{D}$ não contém intervalos degenerados (§ 1º, nº 4, obsv.) e cada um dos intervalos intervaloes I_r ,assim como cada um dos J_s, tem por medida a soma das medidas de certos intervalos de $\mathcal{D}$, precisamos aqueles que constituem uma sua divisão
Considerando conjunto dos intervalos de $\mathcal{D}$ que formam uma divisão de um certo intervalo I_r $(1 \leqslant r \leqslant p)$ e o dos que constituem uma divisão de outro intervalo $I_{r'}$, $r' \neq r$ $(1 \leqslant r' \leqslant p)$, vê se que cada intervalo do primeiro conjunto é diferente de cada um do segundo conjunto, pois, do contrário, não sendo êles degerados, I_r e $I_{r'}$, posuiriam pontos interiores comuns, contra a hipotese. Por outro lado, todo intervalo I' de que esteja contido em algum I_r está, certamente, contido em alguns J_s, ou melhor pertence ao conjunto dos intervalos de $\mathcal{D}$ que constituem uma divisão de J_s De fato, tomando um ponto $x \in \overset{\circ}{I'}$, teremos

$$x \in \bigcup_{s=1}^{q} J_s \quad (\text{pois } I' \subset I_r \subset \bigcup_{s=1}^{q} J_s) ,$$

donde x pertence a um certo J_s, e, portanto, a um intervalo $J' \subset J_s$, com $J' \in \mathfrak{D}$; como $\overset{o}{I'} \cap J' = \emptyset$, para $I' \neq J'$, segue-se que $I' = J'$.

Em resumo, $\sum_{r=1}^{p} m(I_r)$ é igual à soma das medidas de certos intervalos de $\mathfrak{D}$, interiormente disjuntos (e, portanto dois a dois distintos), digamos, $I'_1, \ldots, I'_N$, enquanto que $\sum_{s=1}^{q} m(J_s)$ é igual à soma das medidas de certos intervalos $J'_1, \ldots, J'_S$ (que poderão não ser dois a dois distintos), pertencentes a $\mathfrak{D}$, entre os quais figuram, certamente, os intervalos $I'_1, \ldots, I'_N$. Portanto

$$\sum_{r=1}^{p} m(I_r) \leqslant \sum_{s=1}^{q} m(J_s) . \qquad (2 \text{ bis})$$

Se entre os I_r e J_s houver degenerados, basta considerar, como se compreende fàcilmente, o caso em que os I_r são, todos, não degenerados. Sendo, então, I_k um qualquer dos intervalos I_r ($r = 1, 2, \ldots, p$), o seu interior estará contido na reunião A_k de certos intervalos não degenerados entre os J_s (corol. do teor. III, do nº2, cap. I, § 2º); como os J_s são fechados ter-se-á : $\overline{\overset{o}{I_k}} \subset A_k$; portanto, a reunião dos I_r estará contida na reunião A de certos intervalos não degenerados entre os J_s, recaindo-se, assim, no primeiro caso.

Finalmente, se forem satisfeitas as condições da 2ª. parte do teorema, poderemos substituir, em (2), o sinal $\leqslant$ por $\geqslant$, vindo, então, a igualdade. E o teorema fica demonstrado.

Medida para os conjuntos de $\mathfrak{J}_\sigma$.

3.- Vamos definir um primeiro prolongamento da função m, definida para os intervalos fechados do R^n; êsse prolongamento, que indicaremos provisoriamente por m_1, é uma função de conjunto definida na classe $\mathcal{J}_o$, da seguinte maneira:

$$m_1(A) = m(I) \quad , \quad A \in \mathcal{J}_o ,$$

onde I é suporte de A. Por esta definição vemos que a cada conjunto $A \in \mathcal{J}_o$ corresponde um único número real $m_1(A)$, pois se A não possui ponto interior, todo intervalo fechado, I, que seja suporte de A, é, certamente, degenerado, donde $m_1(A) = 0$; e se A possui ponto interior, existe um único intervalo fechado I que é suporte de A. Além disso, a função m_1 é efetivamente, como decorre da propria definição, um prolongamento de m, razão pela qual indica-la-emos, daqui por diante, pelo mesmo símbolo m.

Demonstremos, agora, os seguintes teoremas relativos à função m definida na classe $\mathcal{J}_o$:

TEOREMA I . <u>Se $A_1,\ldots,A_p$ são p conjuntos de $\mathcal{J}_o$, interiormente - disjuntos, contidos num mesmo conjunto B de $\mathcal{J}_o$, tem-se:</u>

$$\sum_{r=1}^{p} m(A_r) \leqslant m(B) . \tag{1}$$

De fato, supondo $m(A_r) \neq 0$, $r = 1,\ldots,p$ (o que não afeta a generalidade) temos

$$\overset{o}{I_r} \subset A_r \subset I_r \quad , \; r = 1, \ldots, p, \text{ e } \quad \overset{o}{J} \subset B \subset J \; ,$$

onde os I_r e J são intervalos fechados não degenerados. Como os A_r são interiormente disjuntos, o mesmo acontece com os I_r; além disso, os I_r estão, todos, contidos em J, pois

$$\overset{o}{\overbrace{I_r \cap J}} \subset A_r \cap B \subset I \cap J \text{ , ou } \overset{o}{\overbrace{I_r \cap J}} \subset A_r \subset I_r \cap J,$$

donde (unidicade do suporte) $I_r \cap J = I_r$, ou seja: $I_r \subset J$; portanto, do teor. II do nº 2, resulta:

$$\sum_{r=1}^{p} m(I_r) \leq m(J) ;$$

como $m(A_r) = m(I_r)$, $r = 1,\ldots,p$, e $m(J) = m(B)$, segue-se a relação (1), como queríamos provar.

TEOREMA II.- Sendo A um conjunto qualquer de $\mathcal{J}_0$, não vazio, e dado arbitrariamente o número real $\varepsilon > 0$, existem dois intervalos J e J', respectivamente aberto e fechado, o primeiro contido em A, o segundo contendo A, tais que

$$m(J) > m(A) - \varepsilon \quad \text{e} \quad m(J') < m(A) + \varepsilon .$$

De fato, seja I um intervalo fechado, suporte de A, ponhamos

$$pr_i(I) = I_i = \left[a_i, b_i\right] \qquad i = 1, \ldots, n$$

e consideremos os intervalos da reta real R,

$$I_i(x) = \left[a_i - \frac{x}{2}, b_i + \frac{x}{2}\right], \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$-\lambda \leq x < +\infty$$

onde $\lambda = \min (b_i - a_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Designando por $I(x)$ o intervalo de R^n, produto cartesiano dos intervalos $I_1(x), \ldots\ldots, I_n(x)$, na ordem escrita, teremos:

$$m(I(x)) = (x + b_1 - a_1) \ldots (x + b_n - a_n) \qquad (x \geq -\lambda).$$

A função $m(I(x))$ da variável real x é contínua e toma o valor $m(I)$ quando $x = 0$. Como $m(I(x)) = m(\overset{o}{I}(x))$, e, para $x > 0$, .. $\overset{o}{I}(x) \supset I$, torna-se óbvia a existência do intervalo J' com as condições desejadas. Por outro lado, se I não é degenerado, - tem-se $I(x) \subset \overset{o}{I} \subset A$, para $-\lambda \leq x < 0$, seguindo-se, pois, facilmente, a existência do intervalo J com as condições exigidas; se I é degenerado, basta tomar, para J, o intervalo degenerado formado por um ponto qualquer de A.

<u>TEOREMA III</u> . <u>Se (A_ν) e (B_ν) são duas sequências quaisquer de conjuntos de $\mathcal{J}_o$, os A_ν interiormente disjuntos, e se</u>

$$\bigcup_\nu A_\nu \subset \bigcup_\nu B_\nu$$

tem-se

$$\sum_\nu m(A_\nu) \leq \sum_\nu m(B_\nu) \qquad (2)$$

<u>Demonstração.</u> Podemos supôr, sem perda de generalidade, que entre os A_ν e os B_ν não figura o conjunto vazio. Se, então, o primeiro membro de (2) fosse, digamos, maior que o segundo, haveria um índice p tal que

$$\sum_{=1}^{p} m(A_\nu) > \sum_\nu m(B_\nu) \qquad ;$$

mas, pelo teorema anterior, dado arbitrariamente o número $\varepsilon > 0$ podemos determinar para cada ν , um intervalo fechado $J_\nu \subset A$ e um aberto $J'_\nu \supset B$, tais que

$$m(J_\nu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu} > m(A_\nu) \quad \text{e} \quad m(B_\nu) > m(J'_\nu) - \frac{\varepsilon}{2^\nu},$$

donde, por ser $\sum_\nu (\varepsilon/2^\nu) \leq \varepsilon$, vem:

$$\sum_{\nu} m(J_{\nu}) + \varepsilon > \sum_{\nu} m(A_{\nu}) > \sum_{\nu} m(B_{\nu}) > \sum_{\nu} m(J'_{\nu}) - \varepsilon;$$

(3)

tomando, então, ε menor que a semi-diferença das duas somatórias intermeidas que figuram em (3), resulta:

$$\sum_{\nu=1}^{p} m(J_{\nu}) > \sum_{\nu} m(J'_{\nu}) . \tag{4}$$

Como os J'_{ν} constituem, evidentemente, um recobrimento aberto do conjunto $\bigcup_{\nu=1}^{p} J_{\nu}$, que é limitado e fechado, e portanto compacto, podemos determinar (teorema do nº 12, cap. I, § 2º) um número finito de índices $r_1, \ldots, r_q$, de modo que a reunião dos intervalos $J'_{r_1}, \ldots, J'_{r_q}$, e com maior razão, dos intervalos fechados $\bar{J}'_{r_1}, \ldots \bar{J}'_{r_q}$, contenha a dos intervalos J_1, ..., J_p. Estes são, evidentemente, interiormente disjuntos, donde, pelo teorema II do nº 2,

$$\sum_{r=1}^{p} m(J_r) \leq \sum_{s=1}^{q} m(\bar{J}'_{r_s}) ;$$

como o 2º membro da desigualdade acima é, obviamente, não superior ao 2º membro de (4), chega-se a uma contradição com (4), o que, enfim, mostra que é absurdo supor o 1º membro de (2) maior que o 2º, ficando, pois demonstrado o teorema.

Uma consequência imediata do teorema acima é o seguinte

<u>COROLÁRIO</u>.- <u>Se</u> (A_{ν}) e (B_{ν}) <u>são duas sequências de conjuntos de</u> $\mathcal{J}_o$, os A_{ν} <u>interiormente disjuntos, assim como os</u> B_{ν}, <u>e se</u>

$$\bigcup A_\nu = \bigcup_\nu B_\nu ,$$

tem-se:

$$\sum_\nu m(A_\nu) = \sum_\nu m(B_\nu) .$$

Medida para os conjuntos de $\mathcal{J}$.

4.- Seja $\mathcal{A}$ um conjunto qualquer, pertencente a $\mathcal{J}$ e que, portanto, pode escrever-se:

$\mathcal{A} = \bigcup_\nu A_\nu$, onde $A_\nu \in \mathcal{J}_0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, com $\mathring{A}_r \cap \mathring{A}_s = \emptyset$, $r \neq s$.

Pondo, então,

$$\mu(\mathcal{A}) = \sum_\nu m(A_\nu) , \tag{1}$$

fica, dêste modo, construída a função de conjunto, μ , definida na classe $\mathcal{J}$, e tomando os valores em $\hat{R}_+$. Em virtude do corolário do teorema III do número precedente, vemos que $\mu(\mathcal{A})$ não depende dos conjuntos A_ν de $\mathcal{J}_0$, interiormente disjuntos, cuja reunião é $\mathcal{A}$; portanto, a cada $\mathcal{A} \in \mathcal{J}$ corresponde, pela (1), um único valor $\mu(\mathcal{A})$. Por outro lado, se $\mathcal{A} \in \mathcal{J}_0$, temos, pela (1), $\mu(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A})$, o que mostra que μ é, efetivamente, um prolongamento de m à classe $\mathcal{J}$.

OBSERVAÇÃO.- Da definição de μ e do teorema III do nº anterior, segue-se que : se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{J}$, tem-se

$$\mu(\mathcal{A}) \leq \mu(\mathcal{B}) .$$

Os teoremas seguintes resumem as principais propriedades da função μ :

TEOREMA I. A função μ é "enumeravelmente aditiva", isto é, se ($\mathcal{A}_\nu$) é uma sequência qualquer de conjuntos de $\mathcal{T}$, disjuntos, tem-se:

$$\mu\left(\bigcup_\nu \mathcal{A}_\nu\right) = \sum_\nu \mu(\mathcal{A}_\nu)$$

De fato, se ($\mathcal{A}_\nu$) for uma sequência finita ($\nu = 1, \ldots, p$) poremos (sòmente para a demonstração) $\mathcal{A}_\nu = \emptyset$, ... $\nu = p+1$, $p + 2$, ... Como, então,

$$\mathcal{A}_\nu = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_{\nu r}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, A_{\nu r} \in \mathcal{T}_0,$$

e $A_{\nu r} \cap A_{\nu' r'} = \emptyset$ para $(\nu', r') \neq (\nu, r)$, dispondo os $A_{\nu r}$ numa única sequência (B_ν), teremos

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\nu$$

e, pois, por definição,

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(B_\nu) \ ; \qquad (2)$$

mas o segundo membro de (2) é uma série simples associada à série dupla de têrmos não negativos, $\sum_{\nu, r} \mu(A_{\nu r})$; portanto, sua soma é igual à soma por linhas da referida série dupla, ou seja:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(B_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_{\nu r}) \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_\nu),$$

o que, em virtude de (2), demonstra o teorema.

TEOREMA II .- Se $(\mathcal{A}_\nu)$ é uma sequência infinita de conjuntos de $\mathfrak{I}$, monotonica não decrescente (isto é, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \ldots$), tem-se

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\nu\right) = \lim_{\nu \to \infty} \mu(\mathcal{A}_\nu). \qquad (3)$$

De fato, como

$$\mathcal{A}_\nu \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{A}_r ,$$

qualquer que seja ν, resulta, para todo $\nu \geq 1$ (observação anterior):

$$\mu(\mathcal{A}_\nu) \leq \mu\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{A}_r\right),$$

donde se conclui que o 1º membro de (3) não é inferior ao 2º
Por outro lado, para cada ν,

$$\mathcal{A}_\nu = \bigcup_r A_{\nu r} , \qquad A_{\nu r} \in \mathfrak{I}_0 ;$$

escrevendo, então, os $A_{\nu r}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots; r = 1, 2, 3, \ldots$) numa sequência única, (B_ν), e pondo

$$\mathcal{B}_1 = B_1 , \qquad \mathcal{B}_\nu = (\complement B_1) \cap (\complement B_2) \cap \ldots \cap (\complement B_{\nu-1}) \cap B_\nu ,$$

$\nu > 1$, vemos que os $\mathcal{B}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) pertencem a $\mathfrak{J}$ e são disjuntos, o que (teor. anterior) permite escrever

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\mathcal{B}_\nu) = \mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{B}_\nu\right). \tag{4}$$

Designando-se, agora, por s_ν o primeiro índice tal que

$$\bigcup_{r=1}^{\nu} \mathcal{B}_r \subset \mathcal{A}_{s_\nu} ,$$

vem:

$$\sum_{r=1}^{\nu} \mu(\mathcal{B}_r) \leq \mu(\mathcal{A}_{s_\nu}) ,$$

donde, passando-se ambos os membros ao limite para $\nu \to \infty$, e aplicando-se depois, a igualdade (4), resulta

$$\mu\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{B}_r\right) \leq \lim_{\nu \to \infty} \mu(\mathcal{A}_{s_\nu}) , \tag{5}$$

Levando-se em conta que

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{B}_r = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\nu \quad \text{e} \quad \lim_{\nu \to \infty} \mu(\mathcal{A}_{s_\nu}) \leq \lim_{\nu \to \infty} \mu(\mathcal{A}_\nu),$$

conclu-se, em virtude de (5), que o primeiro membro de (3) não é superior ao segundo; como já mostramos que êste não supera a quele, segue-se o teorema.

TEOREMA III. Se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{J}$, tem-se:

$$\mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) + \mu(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}). \tag{6}$$

Com efeito,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu, \quad \mathcal{B} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu, \quad A_\nu, B_\nu \in \mathcal{J}_0,$$

os A_ν, assim como os B_ν, interiormente disjuntos. Pondo-se então,

$$\mathcal{C}_r = A_1 \cup \ldots \cup A_r \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_r = B_1 \cup \ldots \cup B_r,$$

vem:

$$\mu(\mathcal{C}_r) = \mu(\mathcal{C}_r \cap \mathcal{E}_r \cup \mathcal{C}_r \cap \complement \mathcal{E}_r) =$$

$$= \mu(\mathcal{C}_r \cap \complement \mathcal{E}_r) + \mu(\mathcal{C}_r \cap \mathcal{E}_r);$$

portanto,

$$\mu(\mathcal{C}_r) + \mu(\mathcal{E}_r) = \mu(\mathcal{C}_r \cup \mathcal{E}_r) + \mu(\mathcal{C}_r \cap \mathcal{E}_r). \tag{7}$$

Como os $\mathcal{C}_r$ formam uma sequência monotônica não descrescente, o mesmo acontecendo com os $\mathcal{E}_r$, e levando-se em conta que

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{C}_r = \mathcal{A}, \quad \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{E}_r = \mathcal{B}, \quad \bigcup_{r=1}^{\infty} (\mathcal{C}_r \cup \mathcal{E}_r) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

e ainda,

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} (\mathcal{C}_r \cap \mathcal{E}_r) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B},$$

resulta, do teorema II, passando-se ao limite (para $r \to \infty$) ambos os membros de (7), a igualdade (6), como se queria provar.

$\mathcal{J}'$

Medida para os conjuntos de $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$

5.- Antes de prolongarmos a função μ ao conjunto $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$, de partes do R^n, vamos definir uma medida μ_1 para os conjuntos de $\mathcal{J}'$ (Classe dual de $\mathcal{J}$). Seja então, $\mathcal{A}'$, um conjunto de $\mathcal{J}'$, que suporemos, inicialmente, limitado, e, portanto, contido num intervalo limitado I, do R^n. O conjunto $\mathcal{A}'$ é o complementar de um certo $\mathcal{A} \in \mathcal{J}$; pondo, então, por definição,

$$\mu_1(\mathcal{A}') = \mu(I) - \mu(\mathcal{A} \cap I),$$

vemos que o número real $\mu_1(\mathcal{A}')$ depende exclusivamente de $\mathcal{A}'$ e não do intervalo I (limitado) que o contém, pois se J é um outro intervalo nessas condições, temos, por ser

$$I = (I \cap \complement J) \cup (I \cap J) \text{ e } (I \cap \complement J) \cap (I \cap J) = \emptyset :$$

$$\mu(I) - \mu(\mathcal{A} \cap I) = \mu(I \cap \complement J) - \mu(I \cap J) - \mu(\mathcal{A} \cap I \cap \complement J) -$$
$$- \mu(\mathcal{A} \cap I \cap J),$$

ou, levando em conta que $\complement J \subset \mathcal{A}$:

$$\mu(I) - \mu(\mathcal{A} \cap I) = \mu(I \cap J) - \mu(\mathcal{A} \cap I \cap J);$$

se, nessa igualdade, trocarmos entre si I e J, o 2º membro, e portanto, o 1º, não muda, resultando, assim, o que queríamos provar. Se, ainda $\mathcal{A}' \in \mathcal{J} \cap \mathcal{J}'$, teremos $\mu_1(\mathcal{A}') = \mu(\mathcal{A}')$, pois, sendo $\mathcal{A}' = \complement \mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \in \mathcal{J})$, e I um intervalo (limitado) contendo $\mathcal{A}'$, vem:

$$\mu(I \cap \mathcal{A}) + \mu(\mathcal{A}') = \mu(I),$$

donde

$$\mu(\mathcal{A}') = \mu(I) - \mu(I \cap \mathcal{A}) = \mu_1(\mathcal{A}').$$

Supondo, agora, que $\mathcal{A}'$ não seja limitado, e tomando uma sequência (I_ν) de $\mathcal{H}$, poremos, por definição:

$$\mu_1(\mathcal{A}') = \lim_{\nu \to \infty} \mu_1(I_\nu \cap \mathcal{A}')^{(1)}. \tag{1}$$

O limite que figura no 2º membro da igualdade acima, existe, efetivamente, e, além disso, $\mu_1(\mathcal{A}')$ não depende da sequência (I_ν) de $\mathcal{H}$. De fato, sendo

$$\Lambda = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \mu_1(I_\nu \cap \mathcal{A}),$$

dado arbitrariamente o nº real $\Lambda' < \Lambda$, podemos determinar um índice p para o qual $\mu_1(I_p \cap \mathcal{A}') > \Lambda'$; e como distância da origem do R_n ao contôrno de I_ν tende para ∞, existe um índice q, superior a p, a partir do qual $I_\nu \supset I_p$, e, portanto, para todo $\nu \geqslant q$,

(1) - Se $I_\nu \cap \mathcal{A}' \in \mathcal{J}$, já vimos que $\mu_1(I_\nu \cap \mathcal{A}') = \mu(I_\nu \cap \mathcal{A}')$.

$$\mu_1(I_\nu \cap \mathcal{A}') > \Lambda' ,$$

resultando, pois, a primeira parte da nossa afirmação. Por outro lado, sendo (J_ν) outra sequência de $\mathcal{H}$, é possivel determinar uma sequência parcial (J_{r_ν}) de (J_ν), tal que $I_\nu \subset J_{r_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, assim como uma subsequência .. (I_{s_ν}), de (I_ν), para a qual $J_\nu \subset I_{s_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ seguindo-se, portanto, a segunda parte da nossa afirmação.

Se $\mathcal{A}' \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}'$, tomando os I_ν de modo que $I_1 \subset I_2 \subset \subset I_3 \subset \ldots$ (o que sempre podemos fazer, em virtude da observação de ha pouco), vem (nº 4 teor. II):

$$\mu(\mathcal{A}') = \mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu \cap \mathcal{A}'\right) = \lim_{\nu \to \infty} \mu(I_\nu \cap \mathcal{A}') =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \mu_1(I_\nu \cap \mathcal{A}') = \mu_1(\mathcal{A}') .$$

Portanto, em qualquer caso, se $\mathcal{A}' \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}'$, tem-se $\mu_1(\mathcal{A}') = \mu(\mathcal{A}')$.

<u>Observação.</u>- A igualdade (1) vale também no caso em que $\mathcal{A}'$ é limitado, pois, em tal caso, a partir de um certo índice, tem-se

$$I_\nu \cap \mathcal{A}' = \mathcal{A}' , \text{ donde } \lim_{\nu \to \infty} \mu_1(I_\nu \cap \mathcal{A}') = \mu_1(\mathcal{A}')$$

Podemos, agora, prolongar a função μ à classe $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}'$, construindo uma nova função de conjunto, μ_2, definida em $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}'$, com os valores em $\hat{R}_+$, da seguinte maneira:

$$\mu_2(\mathcal{E}) = \begin{cases} \mu(\mathcal{E}), \text{ se } & \mathcal{E} \in \mathcal{T} \\ \mu_1(\mathcal{E}), \text{ se } & \mathcal{E} \in \mathcal{T}' \end{cases}.$$

Procedendo como anteriormente, vamos adotar o mesmo - símbolo μ, em logar de μ_2, para designar o prolongamento que acabamos de definir.

Quando consideramos a função μ aplicada aos conjuntos de $\mathcal{T}$, podemos, é claro, lançar mão dos teoremas I, II, e III do nº 4, sempre que o desejarmos; restringindo-nos, ao invés, à classe $\mathcal{T}'$, há os seguintes teoremas que serão utilizados mais adiante:

TEOREMA III'. Se $\mathcal{A}', \mathcal{B}' \in \mathcal{T}'$, tem-se:

$$\mu(\mathcal{A}') + \mu(\mathcal{B}') = \mu(\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') + \mu(\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'). \qquad (2)$$

Com efeito, se $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ forem limitados, ambos contidos no intervalo limitado I, sendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ os conjuntos de $\mathcal{T}$ tais que $\complement\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $\complement\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, teremos:

$$\mu(\mathcal{A}') + \mu(\mathcal{B}') = 2\mu(I) - [\mu(\mathcal{A} \cap I) - \mu(\mathcal{B} \cap I)],$$

$$\mu(\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') = \mu(I) - \mu(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap I),$$

$$\mu(\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}') = \mu(I) - \mu\{I \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})\},$$

donde, aplicando-se o teorema III do nº 4 para os conjuntos $\mathcal{A} \cap I$ e $\mathcal{B} \cap I$, resulta (2).

No caso geral ($\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ limitados ou não), basta passar ao limite, para $\nu \to \infty$, ambos os membros da igualdade

$$\mu(\mathcal{A}' \cap I_\nu) + \mu(\mathcal{B}' \cap I_\nu) = \mu((\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') \cap I_\nu) + \mu(\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' \cap I_\nu).$$

onde (I_ν) é uma sequência de $\mathcal{H}$.

TEOREMA II. Se $\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_p$ são p conjuntos de $\mathcal{J}'$, disjuntos, tem-se:

$$\sum_{r=1}^{p} \mu(\mathcal{A}'_r) = \mu\left(\bigcup_{r=1}^{p} \mathcal{A}'_r\right). \qquad (3)$$

De fato, aplicando a fórmula (2) do teorema anterior aos dois primeiros conjuntos $\mathcal{A}'_1$ e $\mathcal{A}'_2$, temos, por ser .... $\mathcal{A}'_1 \cap \mathcal{A}'_2 = \emptyset$:

$$\mu(\mathcal{A}'_1) + \mu(\mathcal{A}'_2) = \mu(\mathcal{A}'_1 \cup \mathcal{A}'_2) ;$$

e a igualdade (3) pode estabelecer-se então, por recorrencia.

O teorema que daremos agora, e que envolve conjuntos de $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$, nos permite assegurar, como veremos mais adiante, que a tribo $\mathcal{J}$ a que nos referimos no nº 1, contém, efetivamente, a classe $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$. É o seguinte:

TEOREMA III. Se $\mathcal{A}$ é um conjunto de $\mathcal{J}$, de medida finita, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe um $\mathcal{A}' \in \mathcal{J}'$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, tal que

$$\mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{A}') \leq \varepsilon ;$$

e se $\mathcal{B}' \in \mathcal{J}'$, com $\mu(\mathcal{B}') < \infty$, existe um $\mathcal{B} \in \mathcal{J}$, $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}'$, tal que

$$\mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{B}') < \varepsilon$$

Com efeito, com um raciocínio semelhante ao empregado na demonstração do teorema III do nº 3, podemos determinar um conjunto fechado $\mathcal{A}'$ (igual à reunião finita de intervalos fechados), contido em $\mathcal{A}$, e cuja medida seja arbitràriamente proxima de $\mu(\mathcal{A})$.

Consideremos, agora, o conjunto $\mathcal{B}' \in \mathcal{J}'$ e suponhamos, primeiramente, que $\mathcal{B}' \subset I$, onde I é um intervalo limitado do R^n; temos, pois, por definição:

$$\mu(\mathcal{B}') = \mu(I) - \mu(I \cap \complement \mathcal{B}').$$

Tomando-se então, o conjunto $\mathcal{B}'_1 \in \mathcal{J}'$, $\mathcal{B}'_1 \subset I \cap \complement \mathcal{B}'$ tal que

$$\mu(I \cap \complement \mathcal{B}') - \mu(\mathcal{B}'_1) < \varepsilon \quad ,$$

e levando-se em conta que, sendo

$$\mathcal{B}'_1 = \complement \mathcal{B}_1 \quad , \mathcal{B}_1 \in \mathcal{J} \text{ , tem-se } \quad \mu(\mathcal{B}'_1) = \mu(I) - \mu(I \cap \mathcal{B}_1),$$

resulta:

$$\mu(I \cap \mathcal{B}_1) - \mu(\mathcal{B}') = \mu(I \cap \complement \mathcal{B}') - \mu(\mathcal{B}'_1) < \varepsilon ;$$

como $I \cap \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}'$, segue-se o teorema.

Suponhamos, agora, que $\mathcal{B}'$ não seja, necessariamente, limitado, e tomemos a sequência (I_ν) de $\mathcal{H}$. Pondo,

$$\mathcal{B}_1 = I_1, \quad \mathcal{B}_\nu = (\complement I_1) \cap \ldots \cap (\complement I_{\nu-1}) \cap I_\nu \quad , \nu > 1,$$

vemos que os $\mathcal{B}_\nu \cap \mathcal{B}'$ pertencem a $\mathcal{J}'$, são disjuntos e limitados, donde, pelo teorema I',

$$\sum_{\nu=1}^{p} \mu(\mathcal{B}_\nu \cap \mathcal{B}') = \mu(I_p \cap \mathcal{B}'),$$

qualquer que seja p $\geqslant$ 1, e, pois, passando ao limite, para p $\to \infty$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\mathcal{B}_\nu \cap \mathcal{B}') = \mu(\mathcal{B}') \quad ; \qquad (4)$$

mas, para cada $\nu \geqslant 1$, existe um conjunto $\mathcal{A}_\nu \in \mathcal{J}$, $\mathcal{A}_\nu \supset \mathcal{B}_\nu \cap \mathcal{B}'$, tal que

$$\mu(\mathcal{A}_\nu) - \mu(\mathcal{B}_\nu \cap \mathcal{B}') < \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}} \quad .$$

donde, por ser

$$\sum_{=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_\nu) \geqslant \mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\nu\right)$$

e verificar-se (4), resulta:

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\nu\right) - \mu(\mathcal{B}') \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ ;$$

como a reunião que figura no 1º membro é um conjunto $\mathcal{B} \in \mathcal{J}$ e contém $\mathcal{B}'$, o teorema fica completamente demonstrado.

---ooo000ooo---

§ 3º - MEDIDA DE LEBESGUE

1.- Dado o conjunto $E \subset R^n$, designemos por $\mathfrak{J}_E$ e $\mathfrak{J}'_E$, respectivamente, a classe dos conjuntos $\mathcal{A} \in \mathfrak{J}$ tais que $\mathcal{A} \supset E$ e $\mu(\mathcal{A}) < +\infty$, e a dos $\mathcal{A}' \in \mathfrak{J}'$ tais que $\mathcal{A}' \subset E$. Supondo ..... $\mathfrak{J}_E \neq \emptyset$, diremos que E é mensuravel segundo Lebesgue, ou simplesmente, mensuravel -Lebesgue (abreviadamente: mensuravel--L), no sentido restrito, se

$$\inf_{\mathcal{A} \in \mathfrak{J}_E} \mu(\mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{A}' \in \mathfrak{J}'_E} \mu(\mathcal{A}') \; ; \qquad (1)$$

e o valor comum dos dois membros da igualdade acima é a medida segundo Lebesgue, ou seja, L-medida de E.

Da definição acima resulta que se E_1 e E_2 são mensuraveis-L no sentido restrito, $E_1 \subset E_2$, a L-medida de E_1 não supera a de E_2. Por outro lado, se

$$E \in \mathfrak{J} \cup \mathfrak{J}' \quad e \quad \mu(E) < +\infty ,$$

então E é mensuravel -L no sentido restrito, e $\mu(E)$ é a sua L-medida. Isto decorre da definição acima e do teorema III do n.º 5 do parágrafo anterior.

NOTA.- Designaremos, provisoriamente, por $\bar{\mu}(E)$, a L-medida do conjunto E, mensuravel-L no sentido restrito.

TEOREMA.- Se E_1 e E_2 são mensuraveis-L no sentido restrito, o mesmo acontece com os conjuntos $E_1 \cup E_2$ e $E_1 \cap E_2$, e tem-se:

$$\bar{\mu}(E_1) + \bar{\mu}(E_2) = \bar{\mu}(E_1 \cup E_2) + \bar{\mu}(E_1 \cap E_2). \qquad (2)$$

De fato, existem os conjuntos

$$\mathcal{A}\in \mathfrak{J}_{E_1} \quad , \quad \mathcal{B}\in \mathfrak{J}_{E_2} \quad , \quad \mathcal{A}'\in \mathfrak{J}_{E_1} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}'\in \mathfrak{J}'_{E_2}$$

tais que

$$\mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{A}') < \varepsilon \quad , \quad \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{B}') < \varepsilon ,$$

donde, adicionando-se membro a membro e aplicando-se os teoremas III e III' dos nºs 4 e 5 , respectivamente, vem:

$$[\mu(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A}'\cup\mathcal{B}')] + [\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A}'\cap\mathcal{B}')] < 2\varepsilon ;$$

como as diferenças entre colchetes são não negativas, cada uma delas é menor que 2ε ,donde, notando que

$$\mathcal{A}\cup\mathcal{B} ; \quad \mathcal{A}'\cup\mathcal{B}' , \quad \mathcal{A}\cap\mathcal{B} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}'\cap\mathcal{B}'$$

pertencem, respectivamente, a

$$\mathfrak{J}_{E_1\cup E_2} \quad , \quad \mathfrak{J}'_{E_1\cup E_2} , \quad \mathfrak{J}_{E_1\cap E_2} \quad \text{e} \quad \mathfrak{J}'_{E_1\cap E_2} ,$$

segue-se que os conjuntos $E_1 \cup E_2$ e $E_1 \cap E_2$ são mensuráveis no sentido restrito. Pondo agora,

$$\alpha = \mu(\mathcal{A}) - \bar{\mu}(E_1) + \mu(\mathcal{B}) - \bar{\mu}(E_2) < 2\varepsilon ,$$

$$\beta = \mu(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) - \bar{\mu}(E_1\cup E_2) < 2\varepsilon ,$$

$$\gamma = \mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) - \bar{\mu}(E_1\cap E_2) < 2\varepsilon ,$$

resulta:

$$|\alpha-\beta-\gamma| \leq \alpha+\beta+\gamma < 6\varepsilon \text{, donde:}$$

$$|\alpha-\beta-\gamma| = |\bar{\mu}(E_1)+\bar{\mu}(E_2)-\bar{\mu}(E_1 \cup E_2)-\bar{\mu}(E_1 \cap E_2)| <$$

$$< 6\varepsilon \text{ ,}$$

resultando, da aribitrariedade de ε, a igualdade (2).

2.- L-medida infinita. Seja E um sub-conjunto do R^n. Se existir uma sequência (I_ν) de $\mathcal{H}$ tal que os conjuntos $I_\nu \cap E$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, sejam, todos, mensuraveis-L, no sentido restrito, diremos, simplesmente, que E é mensuravel-L, e que o

$$\lim_{\nu \to \infty} \bar{\mu}(I_\nu \cap E) \text{ ,} \qquad (1)$$

que pode ser finito ou não, mas existe certamente (basta raciocinar como no nº 5 § 2º), é a L-medida de E. Verifica-se, então, que:

(a). Se E é mensuravel-L, e (I_ν) é uma sequência qualquer de $\mathcal{H}$, os conjuntos $I_\nu \cap E$ são, todos, mensuraveis-L, no sentido restrito, e o limite (1) é sempre o mesmo, isto é, a L-medida de E não depende da sequência (I_ν) escolhida em $\mathcal{H}$.

De fato, se (I_ν) é uma sequência de $\mathcal{H}$ para a qual os conjuntos $I_\nu \cap E$ são, todos, mensuraveis-L no sentido restrito, e sendo (J_ν) outra sequência qualquer de $\mathcal{H}$, existe, para cada ν, um $\bar{\nu}$ tal que $I_{\bar{\nu}} \supset J_\nu$; pelo teorema precedente e pelo fato de que todo conjunto de $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$, de medida finita, é mensuravel-L no sentido restrito, o primeiro membro da igualdade

$$J_\nu \cap (I_{\bar{\nu}} \cap E) = J_\nu \cap E$$

é mensuravel-L no sentido restrito, e portanto o segundo também, qualquer que seja ν. Para o resto, basta raciocinar como no nº 5, § 2º.

(a_2) . Se E é mensuravel-L no sentido restrito, pode se afirmar que E é, também mensuravel-L, e a sua L-medida considerada como o limite (1) coincide com a expressa pelo valor comum dos membros da igualdade (1) do nº precedente.

Com efeito, sendo (I_ν) uma sequência de $\mathcal{K}$ e tomando-se os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{J}_E$ e $\mathcal{J}'_E$, respectivamente, de modo que

$$\mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{A}') < \varepsilon \quad , \qquad (2)$$

onde ε é um número real positivo arbitrário, e levando-se em conta que, para cada ν ,

$$\mu(I_\nu \cap \mathcal{A}') \leq \bar{\mu}(I_\nu \cap E) \leq \mu(I_\nu \cap \mathcal{A}),$$

vem, passando-se ao limite, para $\nu \to \infty$:

$$\mu(\mathcal{A}') \leq \lim_{\nu \to \infty} \bar{\mu}(I_\nu \cap E) \leq \bar{\mu}(E) \leq \mu(\mathcal{A}) \quad ;$$

então, em virtude de (2), segue-se que

$$\bar{\mu}(E) = \lim_{\nu \to \infty} \bar{\mu}(I_\nu \cap E) \quad ,$$

como queríamos provar.

(a_3) - Se $E \in \mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$, então E é mensuravel-L, e a L-medida de E coincide com $\mu(E)$.

De fato, pelo que observamos no nº anterior, temos:

$$\mu(I_\nu \cap E) = \bar{\mu}(I_\nu \cap E),$$

donde, passando ao limite para $\nu \to \infty$, segue-se (a_3).

OBSERVAÇÃO. Vê-se facilmente que se E_1 e E_2 são mensuraveis-L, e $E_1 \subset E_2$, então a L- medida de E_1 não supera a de E_2.

3.- L-medida no R^n. Designemos por $\mathcal{T}$ a classe dos conjuntos mensuraveis L, contidos no R^n, e seja μ_L a função de conjunto definida em $\mathcal{T}$, com os valores em R_+ cujo valor $\mu_L(E)$ para o conjunto E é a L-medida de E. Pelo que observamos, há pouco,

$$\mu_L(E) = \mu(E), \quad \text{se} \quad E \in \mathcal{J} \cup \mathcal{J}';$$

então μ_L é, efetivamente, um prolongamento de μ; e para simplicidade nas notações vamos designar a frunção μ_L (L-medida sôbre $\mathcal{T}$) pelo mesmo símbolo μ, tendo porém, presente que de agora em diante a função μ se considera definida em $\mathcal{T}$.

NOTA:- Daqui por diante, salvo quando houver possibilidade de confusão, diremos, simplesmente, que um conjunto é mensuravel quando êle for mensuravel-L, e, à sua L-medida diremos, apenas, medida.

Teoremas sôbre conjuntos mensuraveis

4.- Daremos, agora, alguns teoremas sôbre os conjuntos mensuraveis, começando por generalizar o teorema do número ante-precedente. Assim,

TEOREMA I. Se E_1 e E_2 são mensuraveis, os conjuntos $E_1 \cup E_2$ e $E_1 \cap E_2$ são, também mensuraveis, e

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2). \quad (1)$$

Com efeito, sendo (I_ν) uma sequência de $\mathcal{I}$, [illegible]

$$(I_\nu \cap E_1) \cup (I_\nu \cap E_2) = I_\nu \cap (E_1 \cup E_2) \quad \text{e}$$

$$(I_\nu \cap E_1) \cap (I_\nu \cap E_2) = I_\nu \cap E_1 \cap E_2$$

então, do teorema do nº I e da definição do nº anterior segue-se que $E_1 \cup E_2$ e $E_1 \cap E_2$ são mensuráveis; além disso, em virtude do referido teorema, pode-se escrever, para cada ν :

$$\mu(I_\nu \cap E_1) + \mu(I_\nu \cap E_2) = \mu\left[I_\nu \cap (E_1 \cup E_2)\right] +$$

$$+ \mu\left[I_\nu \cap E_1 \cap E_2\right],$$

donde, passando-se ao limite para $\nu \to \infty$, resulta (1).

<u>COROLARIO</u>.- <u>Se os conjuntos $E_1, \ldots, E_p$ são mensuraveis, a reunião $E_1 \cup \ldots \cup E_p$ é também um conjunto mensuravel, e</u>

$$\mu(E_1 \cup \ldots \cup E_p) \leq \mu(E_1) + \ldots + \mu(E_p); \qquad (2)$$

<u>se, ainda, os E_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) são disjuntos em (2) verifica-se a igualdade</u> (Recorrência sôbre p).

TEOREMA II . <u>Se (E_ν) é uma sequência qualquer de conjuntos mensuraveis, disjuntos, a sua reunião E, é, também, mensuravel e</u>

$$\sum_\nu \mu(E_\nu) = \mu(E).$$

Demonstração:- (É claro que, para demonstração, podemos supor sempre que a sequência (E_ν) seja infinita, pois basta, no caso contrário, tomar $E_\nu = \emptyset$ a partir de um conveniente valor de ν). Suponhamos, primeiramente, que a reunião E seja um conjunto limitado, e portanto contido num intervalo limitado I. Dado, então, $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos determinar, para cada ν, um $\mathcal{A}_\nu \in \mathfrak{J}_{E_\nu}$ e um $\mathcal{A}'_\nu \in \mathfrak{J}'_{E_\nu}$, tais que $\mathcal{A}_\nu \subset I$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, e

$$\mu(\mathcal{A}_\nu) - \mu(E_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^\nu}, \quad \mu(E_\nu) - \mu(\mathcal{A}'_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^\nu};$$

então, qualquer que seja o inteiro $p \geqslant 1$, tem-se:

$$\sum_{\nu=1}^{p} \mu(\mathcal{A}_\nu) - \sum_{\nu=1}^{p} \mu(E_\nu) < \varepsilon, \quad \sum_{\nu=1}^{p} \mu(E_\nu) - \sum_{\nu=1}^{p} \mu(\mathcal{A}'_\nu) < \varepsilon. \tag{3}$$

Pondo-se

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_\nu), \quad \beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(E_\nu) \quad \text{e}$$

$$\alpha' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}'_\nu) = \mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}'_\nu\Big)$$

(pois os $\mathcal{A}'_\nu$ são disjuntos), vê-se, pelas desigualdades (3), que $\alpha' \leqslant \alpha < +\infty$, e além disso, $\alpha - \beta < \varepsilon$, $\beta - \alpha' < \varepsilon$, donde, em virtude da arbitrariedade de ε, $\alpha = \beta = \alpha'$. Ora $\mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\nu\Big) \leqslant \alpha$, e, para p suficientemente grande

$$\alpha = \alpha' < \sum_{\nu=1}^{p} \mu(\mathcal{A}'_\nu) + \varepsilon = \mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{p} \mathcal{A}'_\nu\Big) + \varepsilon,$$

segue-se que

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\mathcal{A}_\nu\right) - \mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{p}\mathcal{A}'_\nu\right) < \varepsilon , \qquad (4)$$

donde, por serem respectivamente de $\mathcal{J}_\varepsilon$ e $\mathcal{J}'_\varepsilon$ as reuniões que figuram nessa desigualdade, conclui-se qu E é mensuravel. Levando em conta que $\mu(E)$ está compreendido entre as duas medidas que figuram no primeiro membro de (4), e, portanto, entre α e $\alpha - \varepsilon$, resulta, da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$:

$$\mu(E) = \alpha = \beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(E_\nu)$$

Suponhamos, agora, que E não seja, necessáriamente, limitado. Sendo, então, (I_ν) uma sequência de $\mathcal{H}$, e atendend a que, para cada ν, os conjuntos limitados $I_\nu \cap E_r$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, são mensuraveis, segue-se, pelo que provamos há pouco, que $I_\nu \cap E$ é mensuravel (no sentido restrito); como ν é qualquer, o conjunto E, é, por definição mensuravel. Por outro lado, tem-se, para cada ν,

$$\mu(I_\nu \cap E) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu(I_\nu \cap E_r) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \mu(E_r) ,$$

donde, passando-se ao limite, para $\nu \to \infty$,

$$\mu(E) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \mu(E_r) \qquad ; \qquad (5)$$

e como, para cada s, se verifica, qualquer que seja $\nu = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\mu(I_\nu \cap E) \geq \mu\left(\bigcup_{r=1}^{s} I_\nu \cap E_r\right) = \sum_{r=1}^{s} \mu(I_\nu \cap E_r),$$

(Corol. do teor. anterior), tem-se, passando-se ao limite para $\nu \to \infty$:

$$\mu(E) \geq \sum_{r=1}^{s} \mu(E_r),$$

qualquer que seja $s = 1, 2, 3, \ldots$; portanto verifica-se a desigualdade

$$\mu(E) \geq \sum_{r=1}^{\infty} \mu(E_r)$$

que, comparada com (5), estabelece o teorema.

TEOREMA III .- Se E_1 e E_2 são mensuraveis e $E_1 \subset E_2$, então $E_2 \cap \complement E_1$ é mensuravel; e se $\mu(E_1) < +\infty$, tem-se

$$\mu(E_2 \cap \complement E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1). \tag{6}$$

Para demonstra-lo verifiquemos, primeiramente o seguinte: se I é um intervalo limitado contendo o conjunto mensuravel, E, então $I \cap \complement E$ é mensuravel e

$$\mu(I \cap \complement E) = \mu(I) - \mu(E)$$

De fato, dado, arbitrariamente o número real $\varepsilon > 0$, existem os conjuntos $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}' \in \mathcal{T}'_\varepsilon$ tais que

$$\mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{A}') < \varepsilon ,$$

onde podemos supor, sempre, $\mathcal{A} \subset I$. Portanto,

$$[\mu(I) - \mu(\mathcal{A}')] - [\mu(I) - \mu(\mathcal{A})] < \varepsilon ; \tag{7}$$

mas $I \cap \complement \mathcal{A}' \in \mathcal{T}_{I \cap \complement E}$, $I \cap \complement \mathcal{A} \in \mathcal{T}'_{I \cap \complement E}$, e, pelo teorema II, po demos substituir, em (7), as diferenças entre colchetes respectivamente por $\mu(I \cap \complement A)$ e $\mu(I \cap \complement A)$, donde se deduz que $I \cap \complement E$ é mensuravel. Por outro lado, ainda pelo teorema II,

$$(I \cap \complement E) + \mu(E) = \mu(I), \text{ donde } \mu(I \cap \complement E) = \mu(I) - \mu(E),$$

como queríamos provar.

Seja, agora, (I_ν) uma sequência de $\mathcal{H}$. Como o conjunto

$$I_\nu \cap (E_2 \cap \complement E_1) = (I_\nu \cap E_2) \cap [I_\nu \cap \complement (I_\nu \cap E_1)]$$

é mensuravel, qualquer que seja ν, segue-se que $E_2 \cap \complement E_1$ é mensuravel, e se $\mu(E_1) < +\infty$, tem-se

$$\mu(E_2 \cap \complement E_1) = \lim_{\nu \to \infty} \mu[I_\nu \cap (E_2 \cap \complement E_1)] =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \mu(I_\nu \cap E_2) - \lim_{\nu \to \infty} (I_\nu \cap E_1) =$$

$$= \mu(E_2) - \mu(E_1).$$

Ficando, pois, demonstrado o teorema III.

<u>COROLÁRIO</u>. <u>Se</u> E <u>é mensuravel</u>, $\complement E$ <u>também o é</u>.

De fato, $\complement E = R^n \cap \complement E$, e R^n é mensuravel.

<u>TEOREMA IV</u>. <u>Se</u> (E_ν) <u>é uma sequência qualquer de conjuntos mensuraveis, os conjuntos</u>

$$E = \bigcup_{\nu} E_{\nu} \quad \text{e} \quad F = \bigcap_{\nu} E_{\nu}$$

<u>são, também, mensuraveis, e</u>

$$\mu(E) \leq \sum_{\nu} \mu(E_{\nu}). \tag{8}$$

<u>Demonstração.</u> Pondo

$$E'_1 = E_1 \ , \quad E'_{\nu} = (\complement E_1) \cap \ldots \ (\complement E_{\nu-1}) \cap E_{\nu}$$

$\nu > 1$, podemos afirmar, por serem, os E'_{ν}, mensuraveis e disjuntos (teor. II), que $E = \bigcup_{\nu} E'_{\nu}$ é mensuravel, e ainda

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{\nu} E'_{\nu}) = \sum_{\nu} \mu(E'_{\nu}) \ ;$$

como, para cada ν,

$$\mu(E'_{\nu}) \leq \mu(E_{\nu}) \quad (\text{pois } E'_{\nu} \subset E_{\nu}),$$

segue-se a de igualdade (8).

Provemos, agora, que a intersecção F é mensuravel. De fato, como $\complement E_{\nu}$ é mensuravel, qualquer que seja ν (obrol. do teor. anterior), então

$$\bigcup_{\nu} (\complement E_{\nu}) = \bigcap_{\nu} E_{\nu} = F$$

é mensuravel. O teorema fica, pois, completamente demonstrado.

Os teoremas II, III e IV, que acabamos de demonstrar, nos permitem confirmar o que já foi dito no início do segundo parágrafo dêste capítulo, isto é:

1º) <u>A classe $\mathcal{J}$ dos conjuntos mensuraveis-L é uma tribo perfeita sôbre o R^n</u> ;

2º) A L-medida μ sôbre $\mathcal{T}$, é enumeravelmente aditiva ;

3º) Se E_1 e E_2 pertencem a $\mathcal{T}$, $E_2 \subset E_1$, $\mu(E_2) < +\infty$, tem-se

$$\mu(E_1 \cap \complement E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2) .$$

Por outro lado, como todos os conjuntos abertos do R^n pertencem à tribo $\mathcal{T}$, segue-se que esta contém a tribo de Borel sôbre o R^n.

5.- Definição de conjunto mensuravel-L (no sentido restrito) por meio dos conjuntos abertos e dos fechados.

Como o raciocínio empregado na demonstração do teorema III do nº 3 § 2º, dado um conjunto qualquer $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$, de medida finita, podemos, sempre, construir um conjunto aberto Ω, contendo $\mathcal{A}$, de modo que

$$\mu(\Omega) - \mu(\mathcal{A}) < \varepsilon ,$$

onde ε é um número positivo arbitrário. Por outro lado, se $\mathcal{A}'$ é um conjunto qualquer de $\mathcal{T}'$, de medida finita, é possível determinar um fechado F, contido em $\mathcal{A}'$, de maneira que

$$\mu(\mathcal{A}) - \mu(F) < \varepsilon .$$

Com efeito, supondo, primeiramente, $\mathcal{A}'$ limitado, contido no intervalo fechado I, existe um aberto $\Omega_1 \supset I \cap \complement \mathcal{A}'$, tal que

$$\varepsilon > \mu(\Omega_1) - \mu(I \cap \complement \mathcal{A}') = \mu(\mathcal{A}') - [\mu(I) - \mu(\Omega_1)] \geq$$

$$\geq \mu(\mathcal{A}) - \mu(I \cap \complement \Omega_1) ;$$

como $I \cap \complement \Omega$ é fechado e está contido em $\mathcal{A}'$, segue-se a nossa afirmação. Se $\mathcal{A}'$ não for limitado podemos tomar um intervalo fechado I de modo que

$$\mu(\mathcal{A}') - \mu(I \cap \mathcal{A}') < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

e um conjunto fechado F, contido em $I \cap \mathcal{A}'$, tal que

$$\mu(I \cap \mathcal{A}') - \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

donde $\mu(\mathcal{A}') - \mu(F) < \varepsilon$.

Como as classes $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$ conteem, respectivamente, todos os abertos e todos os fechados do R^n, segue-se, do que observamos ha pouco, que se existir um conjunto aberto, de medida finita, contendo E, êste será mensuravel-L (no sentido restrito) quando e sòmente quando o extremo inferior do conjunto das medidas dos abertos que conteem E coincidir com o extremo superior do conjunto das medidas dos fechados contidos em E ; e o valor comum dêsses extremos será, então, a L-medida de E.

Essa condição pode, pois, servir de definição de conjunto mensuravel-L (no sentido restrito).

---ooo000ooo---

BIBLIOGRAFIA

1) - C. DE LA VALLÉ POUSSIN - INTÉGRALES DE LEBESGUE

2) - HENRI LEBESGUE - LEÇONS SUR L'INTEGRATION

3) - PAUL R. HALMOS - MEASURE THEORY

4) - N. BOURBAKI - THÉORIE DES ENSEMBLES

5) - N. BOURBAKI - TOPOLOGIE GÉNÉRALE (Capítulos I, VI e IX).

6) - Notas de aulas do curso sôbre a "Teoria das distribuições" desenvolvido, em 1948, pelo prof. J. Delsarte, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. (1º capítulo: Teoria da integração).