EDUARDO ALCANTARA DE OLIVEIRA

POSTULADOS DA ESTATÍSTICA DESCRITIVA

Tese apresentada no Concurso para provimento efetivo da Cadeira VI -- Estatística-I, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de S.Paulo

São Paulo
1952

E R R A T A

pg	linha	onde se lê	leia-se
3	7	idempotente	idempotentes
4	1	complexox	complexos
6	ult.	emtão	então
14	7 e 8	Teorema 13, etc.	Teorema 13. Se $\alpha \div \beta = (\alpha\beta) \div \beta$, e $\alpha \neq 0$ então $\beta = 1$
17	7	múmero	número

INTRODUÇÃO

Depois da completa axiomatisação do cálculo de probabilidades por Kolmogoroff, em 1933, "toda discussão se desviou para a questão de saber se certas proposições devem ocupar o lugar de axiomas ou de teoremas"(W.Feller), havendo completo acordo quanto aos fatos matemáticos propriamente ditos.

Considerada como aplicação do cálculo de probabilidades, a estatística não tardaria a ser encarada, pelos formalistas, como um campo a ser esquematisado. Naturalmente, o instrumento mais indicado seria a álgebra de Boole. Todavia, somente com a introdução de uma operação que correspondesse à palavra "Se" ("if"), poder-se-ia pretender a aplicação da álgebra booleana a esse campo. Foi o que procurou fazer Copeland, em seu trabalho "A Postulational characterization of statistics", University of California Press, 1949.

Em seu sistema, os elementos fundamentais são variaveis. Se x e y são variaveis, tambem o são

$$x+y \quad , \quad x.y \quad , \quad -x$$

"Uma observação de uma variavel é um número, e a observação da variavel $x+y$ é a soma das correspondentes observações feitas sobre x e y. Do mesmo modo para o produto e a negativa". Não se define o quociente.

A resultante da operação $x|y$ ("x se y")(*) é uma variavel idempotente, desde que x e y tambem sejam idempotente. Introduz ainda Copeland o operador "$\times$" através da relação

$$(x|y) \mid z = x \mid (y \times z)$$

Tendo definido a disjunção de x e y por

$$x \vee y = x+y - x.y$$

constroi, a partir de um anel R com elemento unidade (diferente de zero), utilisando algumas consequências do teorema de Stone, uma álgebra de Boole (B). Depois de apresentar os postulados que definem o operador " | ", constroi um corpo (a classe N de Copeland), de onde parte para demonstrar que o espectro de um elemento de R é

(*) Copeland usa a notação $x \subset y$, que modificamos para evitar confusão.

uma sequência de números complexox; define, em seguida, a periodicidade de elementos de R, passa às definições de "esperança matemática", de "função de distribuição" e define integrais de Stieltjes em termos de esperança matemática.

Mostra, em resumo, que um anel comutativo com elemento unidade (diferente de zero) constitui uma base adequada para a estatística.

Julgamos, entretanto, que a consideração de fenômenos estatísticos, tais como nos apresenta a observação concreta, exige a formulação de um esquema matemático capaz de servir de base para a definição de relações estatísticas e sua medida.

Ora, em alguns casos particulares, mais conveniente que a noção de condicionalidade, para a formulação de um "esquema" matemático, é o estudo das consequências da introdução dos postulados de indiferença e escolha, para a descrição de certos problemas concretos. É o que procuramos fazer, introduzindo a noção de "espaço preferencial".

Servimo-nos para isso da parte fundamental dos postulados de Copeland, o que nos levou a reproduzir re sumidamente a segunda, terceira e quarta secções de seu trabalho já citado.

Reduzimos propositadamente a dimensão de nosso trabalho, para evitar a apresentação de noções que, embora pudessem levar a efeitos mais brilhantes, nos pareceram complicações formalísticas não desejaveis na linha de simplicidade que mais convém a um trabalho metodológico.

-o-o-o-

PARTE I

1.1 - As classes R e B e os operadores $+$, $:$, $-$, $\bigvee$, $\sim$.

<u>Postulado 1</u> - R. é um anel comutativo com uma unidade (diferente de zero). Os elementos de R são interpretados como variáveis.

<u>Definição 1.</u> Se x é um elemento de R e $x.x = x$, então x se diz idempotente, ou x é um elemento de B. Os elementos de B são interpretados como eventos casuais.

<u>Definição 2.</u>

$$-x = 1 - x$$

$$x \bigvee y = x+y - x.y$$

<u>Teorema 1.</u> $x \bigvee y = \sim(\sim x . \sim y)$

<u>Teorema 2.</u> Se x e y são elementos de B, então $x.y$, $\sim x$, e $x \bigvee y$ são elementos de B.

<u>Teorema 3.</u> Se x é um elemento de B, então $x . \sim x = 0$ e $x \bigvee \sim x = 1$

Vê-se emtão que B é uma álgebra booleana. Os operadores $\cdot$, $\vee$, $\sim$ são definidos relativamente a todos os elementos de R mas são interpretados somente para elementos de B.

1.2 - O operador $|$

Postulado 2. Se x é um elemento de R, y um elemento de B, e $y \neq 0$, então $x|y$ é um elemento de R.

Sempre que aparecer uma expressão como $x|y$, entende-se que x é um elemento de R , y um elemento de B , e $y \neq 0$.

Postulado 3. $(x+y)|z = (x|z) + (y|z)$

Postulado 4. $(x.y)|z = (x|z) . (y|z)$.

Postulado 5. $x|y = (x.y)|y$

Postulado 6. $x|(y.z) = (x|y) \mid (z|y)$

Postulado 7. Se $x|z = y|z$, então $x.z = y.z$

Teorema 4. Se x é um elemento de B , então $x|y$ é um elemento de B.

Teorema 5. $0|x = 0$

1.3 - As classes N e A

Definição 3. Se $x|y = x$ para todo elemento y de B , não nulo, então se diz que x pertence a N.

Teorema 6. Se x e y são elementos de N , então $x+y$, $x.y$ e $-x$ são elementos de N. Tambem 0 é um elemento de N.

Postulado 8. Se x é um elemento de N e $x \neq 0$, então existe um elemento y de R tal que $x.y = 1$. O elemento y se escreverá $\frac{1}{x}$.

Postulado 9. Se x e z são elementos de N , y é um elemento de R , $z \neq 0$ e $x.z = y.z$, então $x=y$.

Teorema 7. Se x pertence a N e a B, então x é 1 ou 0.

Definição 4. Se $x|a$ é um elemento de N para todo elemento x de R , então se diz que a pertence a A. Os elementos de A se chamam átomos e o elemento $x|a$ é interpretado como uma observação de x.

Postulado 10. Se x e y são elementos de R e $x|a = y|a$ para todo a de A, então $x = y$.

Teorema 8. A classe A não é vasia.

Teorema 9. O elemento 1 pertence a N.

Teorema 10.

$$1|x = x|x = 1$$

$$-(x|y) = (-x)|y$$

$$\sim(x|y) = (\sim x)|y$$

$$(x \vee y)|z = (x|z) \vee (y|z)$$

Teorema 11. Se x é um membro de N e $x \neq 0$, então $y = \frac{1}{x}$ é um membro de N.

Postulado 11. A classe N contém uma sub-classe ordenada de elementos chamados reais que satisfazem ao postulado de Dedekind e às leis usuais de sinais. N contém tambem um elemento i tal que $i.i = -1$.

Teorema 12. N é a classe de todos os números complexos.

Teorema 13. Se x é um membro de B e a é um membro de A, então $x.a = a$, ou $x.a = 0$

Teorema 14. Se a é um elemento de A, então a não é a disjunção de dois elementos distintos não nulos de B.

PARTE II

2.1 - Relação de preferência

Definição 1. Se x e y são elementos não negativos de um conjunto S diremos que entre x e y existe uma relação de preferência, que indicaremos com $\rightarrow$ se

1) $x \rightarrow y$ implica $y \not\rightarrow x$
2) $x \rightarrow y$ e $y \rightarrow z$ implica $x \rightarrow z$
3) $x \not\rightarrow x$

isto é a relação $\rightarrow$ é assimétrica, transitiva e irreflexiva.

2.2 - Classe de preferência

Definição 2. Se x e y são elementos não negativos de um conjunto S e $x \rightarrow y = x$, então x pertence à classe P. Em outros termos, o resultado de uma preferência $x \rightarrow y$. é uma verificação de x . (x.y , x+y são elementos de S).

Postulado 1.

$$x.y \rightarrow z = x.y$$
$$x+y \rightarrow z = x+y \qquad \text{se } x , y \in P$$
$$xy \rightarrow y = xy$$
$$x+y \rightarrow y = x$$

<u>Teorema 1.</u> $(x+y) \longrightarrow z = (x \longrightarrow z) + (y \longrightarrow z)$

Segue imediatamente da definição 2 e do postulado 1 .

<u>Teorema 2.</u> $(x.y) \longrightarrow z = (x \longrightarrow z) \cdot (y \longrightarrow z)$

Segue da definição 2 e do postulado 1 .

<u>Teorema 3.</u> Se x e y são elementos de P e

se $x \longrightarrow z = y \longrightarrow z$ então $x = y$

Segue da definição 2 .

<u>Teorema 4.</u> Se x e y pertencem a B , e x pertence a P , então $(x \longrightarrow y)$ pertence a B .

Porque $x \longrightarrow y = x = x.x = (x \longrightarrow y)(x \longrightarrow y)$

<u>Teorema 5.</u> Se $x \longrightarrow y = (x.y) \longrightarrow y$ e $x \neq 0$

então $y = 1$

Porque pela definição 2 e pelo postulado 1

teríamos $x = xy = x.1$

<u>Teorema 6.</u> Se $x \longrightarrow y = (x+y) \longrightarrow y$ então $y = 0$

Porque pela definição 2 e pelo postulado 1

teríamos $x = x+y$ e $y = x-x = 0$.

<u>Corolário 1.</u> São incompatíveis as relações

$x \longrightarrow y = (x.y) \longrightarrow y$

$x \longrightarrow y = (x+y) \longrightarrow y$

Teorema 7. Se x pertence a B e x é elemento de P, então $x \longrightarrow (y.z) = (x \longrightarrow y)\cdot(x \longrightarrow z)$

Teorema 8. Dado um $x \neq 0$ de P existe um y de S tal que $xy = 1$.

Segue do postulado 1 e teorema 5

Definição 3. Se x pertence a P e y pertence a S,

$$f(x \longrightarrow y) = f(x) \longrightarrow f(y) = f(x)$$

2.3 - O conjunto V.

Seja V um conjunto de elementos α, com componentes não negativos a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Para maior clareza, abandonaremos a indicação indicial e denotaremos os elementos de V com letras gregas minúsculas diferentes e os respectivos componentes com letras minúsculas latinas. Por exemplo,

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ etc.}$$

Postulado 2. $\alpha + \beta = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$

Postulado 3. $\alpha\beta = (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)$

Postulado 4. Se k pertence a N e $\alpha, \beta \in V$

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta \in V$$

<u>Postulado 5</u>. $k\alpha = (ka_1 , ka_2 , \ldots , ka_n) \in V$

O conjunto V se chama <u>espaço</u> <u>preferencial</u>.

<u>Definição 4</u>. Se α pertence a P

$$\alpha \rightarrow \beta = (a_1 \rightarrow b_1 , a_2 \rightarrow b_2 , \ldots , a_n \rightarrow b_n)$$

<u>Teorema 9</u>. Se α e β pertencem a P ,

$$(\alpha + \beta) \rightarrow \gamma = \alpha + \beta$$

De fato, temos, pela definição 3, postulado 2 e e teorema 1

$$(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \rightarrow (c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$

$$= (a_1+b_1 \rightarrow c_1, a_2+b_2 \rightarrow c_2, \ldots, a_n+b_n \rightarrow c_n) =$$

$$= (a_1 \rightarrow c_1 + b_1 \rightarrow c_1, \ldots, a_n \rightarrow c_n + b_n \rightarrow c_n) =$$

$$= (a_1 + b_1 , a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

<u>Teorema 10</u>. Se α e β pertencem a P

$$\alpha\beta \rightarrow \gamma = (\alpha \rightarrow \gamma)(\beta \rightarrow \gamma)$$

Temos, de fato

$$(\alpha \rightarrow \gamma)(\beta \rightarrow \gamma) = (a_1 \rightarrow c_1, \ldots, a_n \rightarrow c_n)(b_1 \rightarrow c_1, \ldots, b_n \rightarrow c_n) =$$

$$= (a_1 , a_2 , \ldots, a_n)(b_1 , b_2 , \ldots, b_n) = \alpha\beta$$

<u>Teorema 11</u>. Se $\alpha \rightarrow \gamma = \beta \rightarrow \gamma$ então $\alpha = \beta$ $\quad \alpha, \beta \in P$

$$(a_1 \rightarrow c_1 , \ldots, a_n \rightarrow c_n) = (b_1 \rightarrow c_1, \ldots, b_n \rightarrow c_n)$$

ou $(a_1 , a_2 , \ldots, a_n) = (b_1 , b_2 , \ldots, b_n)$

Teorema 12. Se α pertence a B e β pertence a S,

então $(\alpha \longrightarrow \beta)(\alpha \longrightarrow \beta) = \alpha$

porque $(\alpha \longrightarrow \beta)(\alpha \longrightarrow \beta) =$

$=(a_1 \rightarrow b_1, a_2 \rightarrow b_2, \ldots, a_n \rightarrow b_n)(a_1 \rightarrow b_1, a_2 \rightarrow b_2, \ldots, a_n \rightarrow b_n) =$

$=(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) = \alpha \cdot \alpha = \alpha$

Postulado 6. $(\alpha . \beta) \longrightarrow \beta = \alpha \beta$

Teorema 13. Se $\alpha \longrightarrow \beta = (\alpha \beta) \longrightarrow \beta$

então $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$

$$\alpha \longrightarrow \beta = \alpha = \alpha \beta$$

Teorema 14. Se α pertence a P,

$$f(\alpha \longrightarrow \beta) = f(\alpha) \longrightarrow f(\beta) = f(\alpha)$$

2.4 - Funções

Postulado 7. Se $f(\xi)$ é uma função linear dos componentes de $\xi \in V$,

$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \qquad \alpha, \beta \in V$

e $cf(\alpha) = f(c\alpha) \qquad c \in N$

2.5 - Classes de indiferença

Introduzamos, entre os elementos de V, a relação

$\longleftrightarrow$ com as três propriedades das relações de equivalência, isto é

1) para cada elemento α de V,

$$\alpha \longleftrightarrow \alpha$$

2) se α e β são elementos de V,

$$\alpha \longleftrightarrow \beta \text{ implica } \beta \longleftrightarrow \alpha$$

3) dados três elementos α, β, γ de V,

$$\alpha \longleftrightarrow \beta,\ \beta \longleftrightarrow \gamma \text{ implica } \alpha \longleftrightarrow \gamma$$

<u>Definição 5</u>. Chamaremos classe de indiferença a todo sub-conjunto de V, entre cujos elementos se possa estabelecer a relação $\longleftrightarrow$. Se V_1 e V_2 são classes de indiferença, $V_1 \cap V_2 = 0$.

<u>Definição 6</u>. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são elementos de uma classe de indiferença V_1 , se

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_n\alpha_n$$

<u>Definição 7</u>. Chama-se conjunto de representantes das classes de indiferença de V, a qualquer conjunto que contenha um elemento de cada uma dessas classes. Suporemos sempre que essas classes são em número finito e as indicaremos com letras maiúsculas

latinas: V_1 , V_2 , ... , V_n . Seus elementos serão representados por α, β , ... , ν respectivamente.

Definição 8. Se $\alpha \longrightarrow \beta$, então $V_1 \longrightarrow V_2$.

Definição 9. Para cada classe V_r denotemos com α_{ro} o elemento para o qual dado um $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots p_n)$ $\sum a_{ri}p_i$ é um mínimo. Ao elemento α_{ro} chamaremos elemento minimisante. Temos assim N elementos minimisantes: $\alpha_{1o}, \alpha_{2o}, \dots \alpha_{No}$.

2.6- Consideremos o conjunto das funções

$$f_r = \sum a_{ri}p_i \qquad (1)$$

Formemos a expressão

$$\varphi = c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_mf_m \qquad (2)$$

e determinemos os coeficientes c_1 , c_2 , ... c_m, de modo que

$$\sum(\mu - \varphi)^2 \text{ seja mínima} \qquad (3)$$

sendo μ uma função linear dos componentes de α_r

e $\mu \geqslant f_r$.

Para que a condição (3) seja satisfeita, basta que tenhamos

$$\sum (\mu - \varphi)\, f_r = 0$$

Definição 10. Consideremos dois elementos quaisquer α, β pertencentes a V. Associemos ao par α, β, um múmero (α, β) chamado afastamento entre α e β, dado por

$$|\alpha - \beta| = (\alpha, \beta) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$$

Propriedades de (α, β)

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

2. $(\alpha, \beta) \neq 0$ para $\alpha \neq \beta$

   $(\alpha, \beta) = 0$ para $\alpha = \beta$

Definição 11. Se existe um elemento μ de V tal que (α, ξ) atinge um mínimo finito para $\xi = \mu$, diremos que μ é uma posição típica de ξ.

<u>Definição 12</u>. Ao extremo inferior de $(\alpha, \xi)^2$, ao variar ξ, chamaremos variância de α.

<u>Definição 13</u>. Se um elemento $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é tal que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1,$$

diremos que α é um "elemento normalizado"

<u>Definição 14</u>. Seja $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$

onde $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$

e $P = \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$

onde os π são "elementos normalizados".

Se a cada elemento α_i de S associarmos um elemento π_i de P de modo que haja uma correspondência biunívoca entre os componentes de α_i e os de π_i, ao par α_i, π_i associaremos um número

$$\mathcal{M}(\alpha_i) = \alpha_i \pi_i$$

a que chamaremos "valor médio" de α_i.