Edison Farah

# A L G U M A S  P R O P O S I Ç Õ E S

# E Q U I V A L E N T E S  A O

# A X I O M A  D A  E S C O L H A

Tese apresentada no Concurso para Provimento Efetivo da Cadeira LI - ANÁLISE SUPERIOR - da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

- 1 9 5 4 -

Farah

# E R R A T A (pag. 1)

| PÁGINAS: | LINHAS: | A CORRIGIR: | CORRETO: |
|---|---|---|---|
| 6 | 24 | "não existe" | "não existir" |
| 7 | 14 | "teorema" | "teorema," |
| 8 | 10 | "aplicação" | "aplicação de E" |
| 26 | 17 | "ordena" | "ordens" |

31 - 32: a partir da 12ª linha da pagina 31, até o fim da página seguinte, modificar o que está escrito, para:

..."Suponhamos ainda que O satisfaça à seguinte condição:

(a). Sendo $(X_\iota)_{\iota \in I}$ e $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ duas famílias quaisquer de partes de E e F, respectivamente, de modo que a família $(X_\iota O\, Y_\iota)_{\iota \in I}$ ordenada por inclusão seja totalmente ordenada, tem-se

$$\bigcup_{\iota \in I} (X_\iota \, O \, Y_\iota) = (\bigcup_{\iota \in I} X_\iota) \, O \, (\bigcup_{\iota \in I} Y_\iota) .$$

Consideremos, agora, uma classe não vazia, $\mathcal{E}$, de partes de E, de modo que $\mathcal{E}$, ordenada por inclusão, seja indutiva. Designemos por $\mathcal{F}$ o conjunto dos paros ordenados (f,f') onde f é uma aplicação biunívoca de uma parte X de E sôbre uma parte Y de F, e f' uma aplicação biunívoca de X sôbre X O Y. Admitindo-se, então, o teorema de Zorn (Cap. I, § 1º, nº 7), resulta o

TEOREMA 1: Se $\mathcal{F}$ não fôr vazio, então, ordenando-o pela relação

$$(f,f') \leq (g,g') , \qquad ((f,f'),(g,g')) \in \mathcal{F},$$

em que (f,f') é inferior a (g,g') quando e sòmente quando g é prolongamento de f, e g' é prolongamento de g, pode-se assegurar a existência de um elemento màximal em $\mathcal{F}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{F}'$ uma parte parte totalmente ordenada de $\mathcal{F}$, e, para cada s = (f,f') de $\mathcal{F}'$, sejam $G_s$ e $G'_s$ os gráficos de f e f' respectivamente. É claro, então, que as seis famílias

$$(G_s), \quad (G'_s), \quad (pr_i(G_s)), \quad (pr_i(G'_s)), \qquad i = 1, 2,$$

[illegible] que o conjunto dos índices s é $\mathcal{F}'$ ($pr_i$, i = 1, 2, designa a i-ésima [illegible]jeção para o produto E×F), são totalmente ordenadas por inclusão.

Pondo-se, agora,

$$G = \bigcup G_s \quad \text{e} \quad G' = \bigcup G'_s ,$$

onde s percorre $\mathcal{F}'$, G será o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr_1(G)$ sôbre $pr_2(G)$ (o que se verifica fàcilmente), enquanto que G' será o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr_1(G)$ sôbre $pr_1(G) \cup pr_2(G)$. Com efeito, designando-se, respectivamente, por $pr'_1$ e $pr'_2$ a primeira e segunda projeção para o produto $E \times M$, então G' será o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr'_1(G')$ sôbre $pr'_2(G')$. Porém, fazendo-se s percorrer $\mathcal{F}'$, resulta

$$pr'_1(G') = pr'_1(\bigcup G'_s) = \bigcup pr'_1(G'_s) = \bigcup pr_1(G_s) = pr_1(G),$$

e, por fôrça da condição (a),

$$pr'_2(G') = \bigcup (pr_1(G_s) \cup pr_2(G_s)) = pr_1(G) \cup pr_2(G).$$

Como $pr_1(G)$ pertence a $\mathcal{E}$ (pois êste, ordenado por inclusão, é indutivo), segue-se que o par (f,f') em que f e f' são as aplicações de gráficos G e G', respectivamente, pertence a $\mathcal{F}$; como, evidentemente, $(f,f') = \sup(\mathcal{F}')$, segue-se que $\mathcal{F}$ é indutivo, e portanto possúi um elemento màximal $(f^*,f'^*)$, c. q. d.

<u>Observação</u>. É claro que se $X \cup Y = Y$ quaisquer que sejam $X \subset E$ e $Y \subset F$, então $f^*$ será uma aplicação màximal entre as aplicações biunívocas de um conjunto $X \in \mathcal{E}$ sôbre um conjunto $Y \subset F$, na ordem por prolongamento. " ...

<u>Página 33, penúltima e última linhas</u>: em lugar de

"uma aplicação màximal f* ..." ,

leia-se:

"um elemento màximal $(f^*,f'^*)$ do conjunto $\mathcal{F}$, onde $f^*$ é uma aplicação biunívoca de uma parte $E^*$ de E sôbre a parte $F^*$ de F, e $f'^*$ uma aplicação biunívoca de $E^*$ sôbre $E^* \cup F^*$. Se provarmos ..."

<u>Página 34, da 5ª à 10ª linha</u>, modificar:

"Sendo, como se sabe ...",

para:

"Como é possível construir uma aplicação biunívoca $\bar{f}$ de $E^* \cup A$ sôbre $F^* \cup B$ cuja restrição a $E^*$ coincida com $f^*$ (pois basta tomar $\bar{f}(x) = f^*(x)$ para $x \in E^*$, e $\bar{f}(x) = g(x)$ para $x \in A$, onde g é uma aplicação biunívoca de A sôbre B), e como, do mesmo modo se pode construir uma aplicação biunívoca $\bar{f}'$ de $E^*\cup A$ sôbre $(E^*\cup A)\cup(F^*\cup B) = (E^*\cup F^*)\cup(A\cup B)$, cuja restrição a $E^*$ coincida com $f'^*$, então $(f^*,f'^*)$ não seria màximal, pois $(\bar{f},\bar{f}') > (f^*,f'^*)$. Portanto, ..."

Páginas 42 e 43; da 26ª linha da página 42, à 5ª linha da página 43, modificar:

"$X \circ Y = Y \times Y$ etc."

para:

"$X \circ Y = X \times X \qquad (X, Y \in \mathcal{P}(E))$,

verificam-se as condições sob as quais se aplica o referido teorema. Existe, pois, em $\mathcal{F}$, um elemento màximal $(f^*,f'^*)$ onde $f^*$ é uma aplicação biunívoca de uma parte $E^*\subset E$ sôbre $E^*$, e $f'^*$ uma aplicação biunívoca de $E^*$ sôbre $E^*\times E^*$. Se provarmos que $E^*$ é equipotente a $E$, a implicação $P_{III} \Longrightarrow P_{VI}$ ficará demonstrada. Ora, se não fosse $E^*\sim E$, então $E^*$ seria equipotente a uma parte $E'$ de $E - E^*$; e como

$$(E^*\cup E')\times(E^*\cup E') = E^*\times E^*\cup H ,$$

onde $H$ é equipotente a $E'$, e não encontra $E^*\times E^*$, poder-se-ia construir um elemento $(\bar{f},\bar{f}')$ de $\mathcal{F}$, estritamente superior a $(f^*,f'^*)$. Logo $E^*\sim E$, donde $E\times E\sim E$, c. q. d."

# INTRODUÇÃO

O Axioma da Escolha, cujo caráter é puramente existencial, foi introduzido, de maneira explícita, por E. Zermelo, em 1908, no seu artigo "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre" ([3], págs. 261-281), onde o autor apresenta uma axiomatização para a Teoria dos Conjuntos, até então considerada sob o ponto de vista "ingênuo" (*). O enunciado original do referido axioma é o seguinte:

"Dada uma classe $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos, existe um conjunto C, contido na reunião dos conjuntos de $\mathcal{F}$, de modo que todo conjunto pertencente a $\mathcal{F}$ contenha um e sòmente um elemento de C".

Admitindo-se, porém, como já introduzido o conceito de função, pode-se transformar o enunciado precedente neste outro ([1], pág. 27), que será o adotado aqui:

Sendo $(X_\iota)_{\iota \in I}$ uma família qualquer de partes de um conjunto E, com todos os $X_\iota$ não vazios, existe uma aplicação f, de I em E, de modo a verificar-se $f(\iota) \in X$ para todo $\iota \in I$. (Em outras palavras: o produto cartesiano da referida família é não vazio).

O Axioma da Escolha intervém, explícita ou implìcitamente, às vezes sob formas particulares, não só na própria Teoria dos Conjuntos, como também nos vários outros sectores da Matemática. Êle é utilizado, por exemplo, na caracterização das funções contínuas nos espaços metrizáveis, por meio das sequências de pontos; na noção de compacidade para

---

(*) Na realidade, duas teorias axiomáticas apareceram em 1908: a de Bertrand Russell ([7], págs. 222-262) e a de Zermelo, ambas com o principal objetivo de eliminar certas antinomias da Teoria dos Conjuntos, especialmente a imaginada pelo próprio Russell, que se obtém considerando-se o "conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios". Aliás, o admitir-se a existência do conjunto de todos os conjuntos que gozam de uma certa propriedade, pode levar a contradições quando se escolhe convenientemente a propriedade; assim, por exemplo, uma antinomia (que, tanto quanto pudemos verificar, não se encontra entre as já conhecidas) provém de considerar-se o "conjunto de todos os conjuntos finitos".

os Espaços Topológicos em geral (a fim de se estabelecer a equivalência entre certas definições de espaço compacto); na prova da existência de uma base de Hamel para os números reais (mais em geral, de uma base algébrica nos espaços vetoriais de dimensão não finita); na demonstração de que todo anel com elemento unitário contém um ideal màximal, etc.

Quando se consegue um critério de escolha, o referido axioma se torna naturalmente,dispensável. É o que acontece, por exemplo, nos Espaços Topológicos de caráter enumerável, se se trata de extrair um elemento de cada conjunto de uma classe de conjuntos com os interiores não vazios; assim, também, no caso do teorema da média do Cálculo Diferencial, pode-se estabelecer um critério de escolha para os $\xi$ entre x e a, satisfazendo $f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi)$. Entretanto, há casos, mesmo concretos, em que não se conhece nenhum critério de escolha; é o que acontece, por exemplo, quando se deseja um sistema de representantes das classes de equivalência para a seguinte relação de equivalência sôbre o conjunto dos números reais: $x \equiv y$ quando e sòmente quando $x - y$ é racional ([ 9 ], pág. 109). Fatos como êste deram origem a que se encarasse de maneira tôda especial o Axioma da Escolha, suscitando mesmo, entre os mais eminentes matemáticos do princípio dêste século, polêmicas, em que se discutia não só o significado do referido axioma, como também a sua aceitação (*). Não desejamos, todavia, entrar em mais detalhes sôbre êsse aspecto da questão, que envolve, certamente, considerações de ordem estranha aos domínios da Matemática.

Neste trabalho (de que faremos, a seguir, uma exposição resumida), apresentamos algumas formas (precisamente, seis) do Axioma da Escolha, duas das quais ($P_{II}$ e $P_{VII}$) figuram entre os resultados que obtivemos e que nos permitiram tratar, até certo ponto, de um modo pessoal, as outras quatro já conhecidas.

No primeiro capítulo consideramos a parte preliminar da Teoria dos Conjuntos, dando, no § 1º, as notações e a nomenclatura empregadas no texto. Ainda nesse parágrafo, introduzimos a noção de <u>relação</u> entre elementos genéricos de dois conjuntos E e F (pág. 3, nº 3); dêsse con-

---

(*) Vêr, por exemplo, Émile Borel ([ 8 ], págs. 135-179) e W. Sierpiński ([ 9 ], págs. 103-138).

ceito provém o de <u>função</u>, do qual extraimos a noção de <u>sequência</u>, e, em particular, a de par ordenado (*).

Quanto à definição de conjunto finito, a mais oportuna nos pareceu a que adotamos no texto, de vez que admitimos como já introduzidos os números inteiros; a demonstração de que um conjunto finito não pode ser equipotente a uma sua parte própria não difere, em substância, da que se encontra, por exemplo, nos livros de A. A. Fraenkel ([ 14 ], págs. 38-39) e R. L. Wilder (op. cit. [ 13 ], pág. 68). Finalmente, a distributividade da intersecção finita relativamente à reunião (qualquer) aparece sob forma adequada para a generalização (igualdade (4), pág. 15), pois basta tomar convenientemente o conjunto S de índices para se obter a distributividade generalizada.

No capítulo II, damos, de maneira suscinta, as noções de Topologia Geral que serão utilizadas nas demonstrações dos teoremas 3 e 6, respectivamente das páginas 34 e 44. Tais noções se encontram, sem modificação essencial, nos livros de Topologia Geral de N. Bourbaki [ 2 ] (op. cit.) e [ 15 ]; apenas em alguns pontos do § 2º, especialmente no que concerne às demonstrações, pode-se notar alguma diferença. Assim, à página 20 damos uma prova direta do teorema sôbre a imagem de uma base de ultra-filtro, enquanto que Bourbaki utiliza duas proposições, precisamente as de números 5 e 6 (páginas 38 e 40 do livro citado [ 2 ]). Por outro lado, a demonstração do teorema de separação de um espaço produto, que damos à página 22 (proposição 3), também é direta. (Bourbaki, em [ 2 ], pág. 67, aplica os seguintes resultados por êle estabelecidos: a proposição 1 da página 64, referente à associatividade do espaço produto, a proposição 6 da página 66 e o corolário da proposição 5 da mesma página.) Finalmente, nas proposições 3 (pág. 22) e 4 (pág. 24) fazemos, por motivos óbvios, a ressalva de que se trata de um produto não vazio.

---

(*) É comum definir-se o par ordenado (a,b) como sendo o conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$ (pág. 3, nº 3); essa definição, devida a C. Kuratowski ([ 10 ], págs. 161-171), é adotada por diversos autores, como por exemplo P. Bernays ([ 11 ], pág. 68), K. Gödel ([ 12 ], pág. 4) e Raymond L. Wilder [ 13 ], pag. 206).

No capítulo III começamos por demonstrar um teorema a respeito das boas ordens sôbre partes de um conjunto dado; trata-se do teorema 1 (pág 26) (*), que utilizamos na prova da implicação $P_I \Longrightarrow P_{IV}$ (pág. 40). Aliás, êsse teorema se aplica também em outras questões da Teoria dos Conjuntos, como, por exemplo, na demonstração de que o conjunto das potências das partes de um conjunto dado é bem ordenado pela ordem habitual [ 16 ]. O teorema 2 da página 28, devido essencialmente a Cantor ([ 17 ], págs. 207-246, teoremas N e O), é apresentado de maneira pessoal, não só no enunciado (em que utilizamos a aplicação principal várias vezes mencionada em outras partes do texto), como também na demonstração. (A que se encontra nesta tese tem, como pontos fundamentais, a primeira das observações que precedem o aludido teorema, e a construção do conjunto $A_o$). Quanto ao teorema 3 do § 1º (pág. 29), a idéia da demonstração é de F. Hartogs ([ 18 ], págs. 438-443).

No § 2º do capítulo III, nº 34, introduzimos a operação O sôbre o conjunto das partes de um conjunto dado, provando, a seguir, o teorema 1 (pág. 31), várias vezes utilizados naquele capítulo. Êsse teorema se inclui entre os resultados que obtivemos no presente trabalho, assim como o teorema 3 (pág. 34), com que termina o parágrafo, essencial na prova da implicação $P_{VII} \Longrightarrow P_I$ (pág. 44).

Finalmente, no § 3º do capítulo III especificamos as proposições que provaremos serem equivalentes ao Axioma da Escolha (pág. 36), começando por demonstrar o teorema 1 da página 37 (**) (equivalência entre o Axioma da Escolha e a distributividade generalizada da intersecção relativamente à reunião); nesse teorema, que constitui um dos principais resultados da tese, nota-se que a equivalência entre $P_I$ e $P_{II}$ se mantém sob tôdas as formas particulares (assim, por exemplo, o Axioma da Escolha para uma família enumerável de conjuntos é equivalente à distributividade da intersecção enumerável relativamente à reunião). Quanto à equivalência entre $P_I$ e $P_{III}$ (teorema 2 da página 38), a de-

(*) Êsse teorema, obtido em [ 16 ], aparece, aí, como o lema 1.

(**) A respeito dêsse teorema fizemos uma comunicação à Academia Brasileira de Ciências, em sessão realizada no dia 22 de setembro de 1953.

monstração da primeira parte (Teorema de Zorn) é, em substância, a que se encontra em [ 19 ] (págs. 19-34), havendo alguma simplificação na prova do lema L; com efeito, o lema auxiliar $l_2$, que se utiliza em [ 19 ], foi totalmente suprimido, e, no lema $l_3$, que agora se acha bastante simplificado, poupamos considerar as alternativas de que s seja ou não máximo de T. Quanto à demonstração de que $P_{III}$ implica $P_I$, vê-se que se trata de uma prova simples e direta.

Entre as demonstrações de que $P_I$ acarreta $P_{IV}$ (teorema 3, pág. 40) obtidas a partir do Teorema de Zorn (*), encontram-se, por exemplo, a do livro "Lattice Theory" de Garret Birkhoff ([ 22 ], pág. 43) e a de C. B. de Lyra ([ 23 ], págs. 61-63); na que damos aqui (reprodução da que se encontra no trabalho já citado, [ 16 ]), a construção do conjunto ordenado indutivo do qual se deseja um elemento màximal se consegue por meio do teorema 1 da página 26.

No teorema 4 (pág. 41), a implicação $P_{III} \Longrightarrow P_V$ aparece como uma consequência do teorema 1 da página 31 (em [ 24 ], págs. 59-61, provámos, primeiramente, a existência de uma aplicação biunívoca màximal de uma parte de E sôbre uma parte de F, o que, nesta tese, se pôde poupar em virtude do referido teorema 1). Quanto à demonstração de que $P_V$ acarreta $P_I$, ou seja, $P_{IV}$, a que adotamos é, em substância, a do artigo já citado ([ 18 ]) de Hartogs, que foi o primeiro a mostrar a equivalência entre $P_{IV}$ e $P_V$.

Passemos, agora, à equivalência entre $P_I$ e $P_{IV}$ (teorema 5 da página 42). A implicação $P_I \Longrightarrow P_{IV}$ (ou seja $P_{III} \Longrightarrow P_{IV}$) é uma consequência do teorema 1 da página 31, quando se toma a operação O de modo que $X \mathbin{O} Y = Y^2$. Quanto ao fato, algo surpreendente, de que $P_{VI}$ implica $P_I$, ou seja, $P_{IV}$ (**), constatado por A. Tarski em [ 25 ] (págs. 148-150), a demonstração não difere essencialmente da que se encontra no referido artigo de Tarski, a não ser pela circunstância de evitarmos o emprêgo dos números cardeais transfinitos.

---

(*) O fato de que $P_{IV}$ é uma consequência de $P_I$ foi provado, pela primeira vez, por E. Zermelo ([ 20 ], págs. 514-516 e [ 21 ], págs. 107-128) que, em [ 21 ], deu uma demonstração direta.

(**) Sierpiński, em [ 9 ] (op. cit. pag. 232, nota em rodapé), ao referir-se à igualdade entre um número cardeal não finito qualquer e seu quadrado, diz: "Cette proposition paraît être une conséquence très speciale de l'axiome de choix; cependant elle lui est equivalente".

O teorema 6 da página 44, que estabelece a equivalência direta entre $P_I$ e $P_{VII}$, e que figura também entre os nossos resultados, mostra que a equivalência entre o Axioma da Escolha e o dos Ultra-Filtros está na dependência de se poder construir, sem o auxílio de $P_I$, a família $(\mathcal{G}_\iota)$ de topologias compactas sôbre os $E_\iota$. Na segunda parte da implicação $P_I \Longrightarrow P_{VII}$ (a primeira se encontra em [ 2 ], op. cit., pág. 38), o Axioma da Escolha nos permitiu a construção das topologias compactas sôbre os $E_\iota$, e portanto assegurar a validade de $P_{VII}$ uma vez admitida $P_I$. O fato de que $P_{VII}$ acarreta $P_I$ é uma consequência imediata do teorema 3 da página 34.

A tese termina com uma observação (pág. 45) a respeito do Axioma dos Ultra-Filtros: êste acarreta o da Escolha sob uma forma atenuada (o que nos mostra não ser fora de propósito uma conjetura sôbre a equivalência entre o primeiro e um caso particular do segundo) (*); mencionamos, enfim, o fato de que existe equivalência entre o Teorema de Tychonoff e o Axioma dos Ultra-Filtros.

Deixamos, aqui, nossos agradecimentos ao Prof. Geraldo dos Santos Lima Filho, a quem devemos todo o trabalho mimeográfico.

E. Farah.

(*) A. Weil, em [ 26 ] (pág. 38) afirma a equivalência entre os dois Axiomas.

# C A P Í T U L O  I

## NOÇÕES SÔBRE OS CONJUNTOS DE ELEMENTOS QUAISQUER

### § 1º - NOÇÕES PRELIMINARES SÔBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS. RELAÇÕES.

1. A nomenclatura e as notações sôbre a parte da Teoria dos Conjuntos e da Topologia Geral, de que faremos uso neste trabalho, se encontram na quase totalidade, nos livros "Théorie des Ensembles (Fascicule des Résultats)" [1] e "Topologie Générale" (Chapitre I) [2], de N. Bourbaki. Quanto aos axiomas da teoria dos conjuntos, adotaremos o sistema de Zermelo [3], exceptuando, naturalmente, o Axioma da Escolha, que é, justamente, o objeto de nossas considerações.

Embora possamos prescindir dos números naturais, vamos admiti-los,mais por brevidade e comodidade, como já introduzidos, empregando-os, então, em exemplos e definições.

Em geral, os <u>conjuntos</u> (<u>classes</u> ou <u>agregados</u>) serão designados por letras maiúsculas, como A, B, C, X, Y, Z, etc., e os elementos de um conjunto, por minúsculas, como a, b, c, x, y, z, etc.

Escreveremos, sistemàticamente, $a = b$, para exprimir que a e b designam o mesmo elemento; a negação de $a = b$ se indicará por $a \neq b$.

A pertinência do elemento m ao conjunto M se designa por $m \in M$ (" m <u>pertence</u> <u>a</u> M", ou "m <u>é</u> <u>elemento</u> <u>de</u> M"); e $m \notin M$ exprime a negação de $m \in M$. Em geral, para indicar que os elementos a, b, c, ... pertencem, todos, ao conjunto M, escreveremos $a,b,c,\ldots \in M$; assim, $a,b \in M$ significará que a e b pertencem, ambos, ao conjunto M.

O conjunto formado pelos elementos a, b, c, ... será designado por $\{a,b,c,\ldots\}$; em particular, $\{a\}$ e $\{a,b\}$ indicarão, respectivamente, o conjunto formado pelo único elemento <u>a</u>, e o constituido exclusivamente dos elementos <u>a</u> e <u>b</u>.

O conjunto <u>vazio</u>, isto é, sem elementos, será indicado pelo símbolo $\emptyset$.

Para exprimir-se que o conjunto A <u>está</u> <u>contido</u> no conjunto B, isto é, que todo elemento de A é elemento de B, escrever-se-á $A \subset B$ (ou $B \supset A$);a negação de $A \subset B$, será $A \not\subset B$. Quando $A \subset B$, diz-se que A é uma <u>parte</u> <u>de</u> B, <u>conjunto</u> <u>parcial</u> <u>de</u> B, ou ainda, <u>sub</u>-<u>conjunto</u> <u>de</u> B.

Se $A \subset B$, porém $B \not\subset A$, diremos que A é uma <u>parte</u> <u>própria</u> (<u>conjunto</u> <u>parcial</u> <u>próprio</u>, ou <u>sub</u>-<u>conjunto</u> <u>próprio</u>) de B. (Tenhamos presente que A e B designam o mesmo conjunto, isto é, $A = B$, quando e sòmente quando $A \subset B$ e

$B \subset A$.)

O conjunto de tôdas as partes de um conjunto E será designado, aqui, por $\mathcal{P}(E)$. É claro que $\mathcal{P}(E)$ nunca é vazio.

Neste trabalho empregaremos, às vezes, alguns símbolos lógicos, como por exemplo: $\exists x$, $\forall x$ e $|$, que significam, respectivamente: "existe x" , "para todo x" e "tal que". Sendo, agora, P e P' duas proposições, escreveremos $P \Longrightarrow P'$ a fim de exprimir que P <u>implica</u> P'; e quando se verificar ao mesmo tempo $P \Longrightarrow P'$ e $P' \Longrightarrow P$, diremos que P e P' são <u>equivalentes</u> (cada uma <u>equivalente</u> à outra) e escreveremos $P \Longleftrightarrow P'$. As negações de $P \Longrightarrow P'$ e $P \Longleftrightarrow P'$ se indicam, respectivamente, por $P \not\Longrightarrow P'$ e $P \not\Longleftrightarrow P'$.

Sendo P uma propriedade do <u>elemento genérico</u> (ou <u>variável</u>) x de um conjunto E, a parte de E <u>definida</u> pela propriedade P (ou seja: o conjunto dos elementos de E que <u>gozam</u> da propriedade P), será designado por $\{x \in E | P\}$. Assim, se indicarmos por N o conjunto dos números naturais e por P a propriedade do elemento genérico n de N: " n é par ", ou, em outras palavras: " $\exists\, m | (m \in N$ e $n = 2m)$", então, $\{n \in N | P\}$ será o conjunto dos naturais pares.

Dados os conjuntos A e B, com $A \subset B$, o <u>complementar de A em relação a</u> B, isto é, o conjunto dos elementos de B que não pertencem a A, será designado por $\complement_B A$, ou por $B - A$. Quando se considera um conjunto <u>suporte</u> E, em relação ao qual se supõem considerados os complementares de suas partes, escreve-se, mais simplesmente, $\complement A$ em lugar de $\complement_E A$.

2. <u>Reunião e intersecção de conjuntos</u>. Dada uma classe $\mathcal{F}$ de conjuntos, a <u>reunião</u> dos conjuntos de $\mathcal{F}$, isto é, o conjunto M dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos de $\mathcal{F}$, se designa por

$$\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X ,$$

onde X é um conjunto genérico de $\mathcal{F}$. A reunião M é, pois, dada pela seguinte condição:

$$"x \in M" \Longleftrightarrow "\exists\, X \mid X \in \mathcal{F} \text{ e } x \in X" .$$

Note-se que se $\mathcal{F} = \emptyset$, então $M = \emptyset$.

No caso em que $\mathcal{F}$ consta sòmente dos conjuntos A e B, a reunião M será indicada, indiferentemente, por $A \cup B$ ou $B \cup A$.

Sendo, agora, $\mathcal{F}$ uma classe não vazia de conjuntos, a <u>intersecção</u> dos conjuntos de $\mathcal{F}$, isto é, o conjunto I dos elementos que pertencem a <u>todos</u> os conjuntos de $\mathcal{F}$, se designa por

$$\bigcap_{X \in \mathscr{F}} X$$

onde X é um conjunto genérico de $\mathscr{F}$. Fixando-se, arbitràriamente, um conjunto A de $\mathscr{F}$, a intersecção dos conjuntos de $\mathscr{F}$ será

$$I = \{x \in A \mid x \in X, \forall X \in \mathscr{F}\}.$$

É claro que I não depende do particular conjunto A tomado em $\mathscr{F}$.

No caso em que $\mathscr{F}$ se compõe sòmente dos conjuntos A e B, a intersecção dêstes se designa indiferentemente, por $A \cap B$ ou $B \cap A$.

Diz-se que o conjunto A encontra o conjunto B, se $A \cap B \neq \emptyset$; quando A não encontra B (isto é, $A \cap B = \emptyset$), A e B se dizem disjuntos (cada um disjunto com o outro).

3. Relações. Dados os conjuntos E e F, consideremos a classe H dos conjuntos $\{\{a\}, \{a,b\}\}$, onde $a \in E$ e $b \in F$. Uma parte R de H é o que se chama uma relação entre os elementos genéricos x de E e y de F. A relação R se diz verdadeira para os valores a e b de x e y, respectivamente, escrevendo-se, então, a R b, quando e sòmente quando $\{\{a\}, \{a,b\}\} \in R$; a negação de a R b se indica por $a \not R b$.

Em vez de dizermos "a relação R entre os elementos genéricos x e y de E e F, respectivamente", diremos, mais simplesmente, "a relação

$$x \, R \, y \quad (x \in E, \; y \in F)",$$

podendo omitir-se "$(x \in E, y \in F)$", quando não houver ambiguidade relativamente aos conjuntos E e F.

O estabelecer-se uma relação R entre os elementos genéricos x de E e y de F equivale a dar-se uma propriedade de um elemento genérico do conjunto H, precisamente a que define a parte R de H. (Assim, se E = F = conjunto dos números naturais, a propriedade do elemento genérico z de H que é satisfeita pelo valor $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ de z quando e sòmente quando quando a é primo com b, define uma relação R entre os elementos genéricos x de E e y de F). Por êsse motivo, toma-se, frequentemente, uma pela outra, a relação R e a propriedade P que a define. (Assim, no exemplo há pouco citado, diremos: a relação

"x é primo com y",

de vez que a sentença entre aspas exprime uma propriedade do elemento genérico $\{\{x\}, \{x,y\}\}$ de H).

Se R for uma relação entre dois elementos genéricos x e y de um mesmo conjunto E (isto é, se E = F), diremos mais simplesmente, que R é uma relação sôbre E, e escreveremos, para indicá-la:

$$x \; R \; y \quad (x,y \in E).$$

4. Relação de equivalência. Uma relação R sôbre um conjunto não vazio E, se diz uma relação de equivalência sôbre E quando e sòmente quando R é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é:

$x \; R \; x, \quad \forall x \in E$ . (reflexividade);

se $x \; R \; y$, então $y \; R \; x$ (simetria);

se $x \; R \; y$ e $y \; R \; z$, tem-se $x \; R \; z$ (transitividade).

Em lugar de $x \; R \; y$ escreve-se, então, $x \equiv y \pmod{R}$, que se lê: "x equivalente a y segundo R".

O conjunto $E_x$ dos elementos de E equivalentes a x, segundo R, é a classe de equivalência a que pertence x. O conjunto das classes de equivalencia segundo a relação de equivalência R se denomina conjunto quociente de E por R e se designa por E/R. É claro que os conjuntos pertencentes a E/R são não vazios; têm, para reunião, E, e são dois a dois disjuntos; em outras palavras: êles formam uma partição de E.

Um sistema de representantes das classes de equivalência segundo R é uma parte S de E para a qual tôda classe de equivalência possui um único elemento pertencente a S. No caso geral, a existência de um sistema de representantes está subordinada ao Axioma da Escolha.

5. Relação de ordem. Uma relação $\omega$ sôbre um conjunto não vazio E, se diz uma relação de ordem sôbre E, ou simplesmente uma ordem sôbre E, quando e sòmente quando se verificam as duas seguintes condições:

1ª) $(x \omega y$ e $y \omega x) \Longleftrightarrow x = y$;

2ª) $(x \omega y$ e $y \omega z) \Longrightarrow x \omega z$ (transitividade da ordem $\omega$).

Diremos, então, que E é um conjunto ordenado (pela ordem $\omega$).

Se a e b forem dois elementos de E para os quais se verifique, ou $a \omega b$ ou $b \omega a$, diz-se que a e b são comparáveis (na ordem $\omega$).

Tomando-se, para E, o conjunto dos números inteiros, ou o dos racionais, ou ainda, o dos reais, a relação $x \leq y$ (com o significado habitual) é uma relação de ordem sôbre E; é a ordem habitual sôbre E. Essa particular ordem sugeriu, no caso de uma ordem qualquer, $\omega$, sôbre um conjunto qualquer E, a leitura "x inferior ou igual a y" para $x \omega y$, leitura essa que abreviaremos, ainda, dizendo simplesmente "x inferior a y"; e, adotando essa leitura, diremos que x é estritamente inferior a y, quando $x \omega y$ e

$x \neq y$.

As notações $x \leq y$ e $x \preceq y$ serão utilizadas frequentemente para designar uma ordem sôbre um conjunto qualquer (a primeira, naturalmente, quando não houver possibilidade de confusão com a ordem habitual sôbre os conjuntos numéricos a que nos referimos acima). Nesse caso, escreve-se, mais simplesmente, $x < y$ e $x \prec y$ para exprimir-se que $x$ é estritamente inferior a $y$, respectivamente nas ordens $x \leq y$ e $x \preceq y$.

A relação $X \subset Y$ sôbre uma classe não vazia $\mathcal{F}$ de conjuntos é uma ordem sôbre $\mathcal{F}$; é a <u>ordem por inclusão</u> sôbre $\mathcal{F}$.

<u>Ordem induzida</u>. <u>Ordem oposta</u>. Seja $\omega$ uma relação de ordem sôbre um conjunto E e tomemos uma parte não vazia A de E. Podemos, então, definir uma relação de ordem $\omega_A$ sôbre A pela seguinte condição:

$$x \, \omega_A \, y \iff x \omega y \quad (x, y \in A).$$

A ordem $\omega_A$ é a <u>ordem induzida de $\omega$ sôbre</u> A.

<u>Ordem oposta</u>. Seja E um conjunto ordenado pela ordem $\omega$, e consideremos a ordem $\omega'$, sôbre E, definida pela condição:

$$x \, \omega' \, y \iff y \, \omega \, x.$$

Diz-se, então, que $\omega'$ é a <u>ordem oposta</u> de $\omega$, e se designa por $\omega^{-1}$. Lendo-se, a relação $x \omega y$, "x inferior a y", então, $x \omega^{-1} y$ lêr-se-á "x superior a y" (acrescentando-se, naturalmente, o advérbio "estritamente" no caso em que $x \neq y$). Quando uma relação de ordem sôbre E for indicada por $x \leq y$ ou por $x \preceq y$, a sua oposta será, sempre, designada por $x \geq y$, ou, respectivamente, por $x \succeq y$, escrevendo-se, então, $a > b$ ($a \succ b$) quando <u>a</u> for estritamente superior a <u>b</u>.

<u>Parte totalmente ordenada de um conjunto ordenado</u>. Seja E um conjunto ordenado por uma relação de ordem que designaremos por $x \leq y$. Se uma parte não vazia A de E for constituida de elementos dois a dois comparáveis (isto é, dados dois elementos quaisquer <u>a</u> e <u>b</u> de A, se verificar, ou $a \leq b$ ou $b \leq a$), então diremos que A é uma parte <u>totalmente ordenada</u> de E. Em particular, se dois elementos quaisquer de E forem comparáveis, então E será totalmente ordenado pela ordem $x \leq y$, a qual, por isso, se dirá uma <u>ordem total</u> sôbre E.

6. <u>Elementos extremais de uma parte de um conjunto ordenado</u>. Seja E um conjunto ordenado por uma ordem que designaremos por $x \leq y$. Dada, então, uma parte A, não vazia, de E, suponhamos que <u>z</u> seja um elemento de E satisfazendo às duas seguintes condições:

1ª) $x \leq z$ $(z \leq x)$ $\forall x \in A$;

2ª) Para todo $z' \in E$ que verifique $x \leq z'$ (respect. $z' \leq x$) $\forall x \in A$, tem-se $z \leq z'$ (respect. $z' \leq z$).

Dizemos, então, que z é extremo superior (respect. extremo inferior) de A e escrevemos, para o extremo superior:

$$z = \sup (A) \quad \text{ou} \quad z = \sup_{x \in A} x ,$$

podendo-se substituir, na segunda notação, a pertinência "$x \in A$" por qualquer propriedade do elemento genérico de E que defina a parte A de E. As notações para o extremo inferior são óbvias, bastando trocar "sup" por "inf".

É claro que, se A admitir extremo superior (inferior), êste será único. Se z for o extremo superior (inferior) de A, e ainda $z \in A$, então diremos que z é o máximo (mínimo) ou o maior (menor) elemento, ou ainda o último (primeiro) elemento de A. As notações para o máximo e o mínimo de A obtêm-se trocando-se, simplesmente, nas adotadas para os extremos superior e inferior, "sup" e "inf" por "max" e "min", respectivamente.

Observação. Note-se que a definição de extremo superior como demos acima não equivale à que habitualmente se adota na Análise Clássica (na qual $z = \sup (A)$ se: 1º) $z \geq x$, $\forall x \in A$; 2º) se $z' < z$, então existe um $x \in A$ estritamente superior a $z'$), a menos que E seja totalmente ordenado.

Elemento maximal e elemento minimal. Dada uma parte A de um conjunto ordenado E, diz-se que o elemento m é um elemento màximal (mìnimal) de A, se $m \in A$ e não existe, em A, nenhum elemento estritamente superior (resp. inferior) a m. Assim, por exemplo, ordenando por inclusão o conjunto $\mathcal{F}$ das partes do conjunto N dos números naturais, cada uma delas formadas por elementos (números) dois a dois primos entre si, vê-se que a classe dos naturais primos é um elemento màximal de $\mathcal{F}$.

7. Conjunto ordenado indutivo. Um conjunto ordenado, E, se diz indutivo quando e sòmente quando tôda parte totalmente ordenada de E admite extremo superior. Por exemplo, sendo M um conjunto qualquer, o conjunto $\wp(M)$, ordenado por inclusão, é indutivo. Ao invés, o conjunto dos inteiros (ou dos reais) ordenado pela ordem habitual, não é indutivo. Admitindo-se o Axioma da Escolha, demonstra-se o seguinte teorema (Teorema de ZORN):

<u>Todo conjunto ordenado indutivo possui, pelo menos, um elemento màximal</u>.

Aliás, êsse teorema é, como veremos no capítulo III, equivalente ao Axioma da Escolha.

8. <u>Conjunto bem ordenado</u>. Um conjunto E, ordenado por uma ordem $\omega$, se diz <u>bem ordenado</u>, quando e sòmente quando tôda parte não vazia de E possui primeiro elemento. $\omega$ se diz, então, uma <u>boa ordem</u> sôbre E. O conjunto dos números naturais, ordenado pela ordem habitual, é bem ordenado; ao invés, a ordem habitual sôbre o conjunto dos números reais não é uma boa ordem.

Dado um conjunto bem ordenado E, e sendo x um elemento qualquer de E, o conjunto dos elementos de E inferiores a x é o que se chama um <u>segmento</u> de E, e se designa por E(x); o elemento x é o <u>extremo</u> do segmento E(x).

Há um teorema devido a Zermelo, segundo o qual todo conjunto E, não vazio, pode ser bem ordenado. Êsse teorema é, também, equivalente ao Axioma da Escolha (cap. III, nº 42, $P_I \Longleftrightarrow P_{IV}$).

---§---

§ 2º - FUNÇÕES.

9. Seja f uma relação entre os elementos genéricos x e y dos conjuntos E (não vazio) e F, respectivamente, de modo que, para cada $a \in E$ exista um e sòmente um $b \in F$, verificando $a\ f\ b$. Então, f se diz uma <u>função definida</u> em E, com os <u>valores</u> em F, ou mais simplesmente, uma <u>aplicação</u> de <u>E em</u> F. O elemento $b \in F$, para o qual $a\ f\ b$, é o <u>valor</u> da aplicação f para o valor <u>a</u> de x, e se designa por f(a); diremos, então, que f <u>associa</u> ao valor <u>a</u> de x o valor b = f(a) de y, valor êste, que se diz, também, <u>correspondente</u> de <u>a</u> pela f.

Dadas as aplicações f, de E em F, e g, de E em G, ter-se-á f = g quando e sòmente quando $f(a) = g(a),\ \forall a \in E$.

Sendo, agora, A uma parte não vazia de E e g uma aplicação de A em F, diremos que g é a <u>restrição</u> da aplicação f de E em F, à parte A de E, quando e sòmente quando g(a) = f(a) para todo $a \in A$; a aplicação f se dirá, então, um <u>prolongamento</u> de g a E.

<u>Imagens direta e recíproca</u>. Seja f uma aplicação de E em F, e tomemos uma parte qualquer A de E. O conjunto dos elementos $f(x) \in F$ para os quais $x \in A$, se chama <u>imagem direta</u> de A, pela f, e se designa por f(A).

Temos, portanto:

$$f(A) = \{y \in F \mid (\exists\, x \mid x \in A \text{ e } f(x) = y)\} .$$

Sendo, agora, A' uma parte qualquer de F, o conjunto dos x de E para os quais $f(x) \in A'$, se denomina <u>imagem</u> <u>recíproca</u>(ou <u>inversa</u>) de A', <u>pela</u> f, e se indica por $\overset{-1}{f}(A')$. Tem-se, então:

$$\overset{-1}{f}(A') = \{x \in E \mid f(x) \in A'\} .$$

É claro que $f(\emptyset) = \overset{-1}{f}(\emptyset) = \emptyset$; porém, pode acontecer que $\overset{-1}{f}(A')$ seja vazio sem que o seja A'. Para que se tenha $\overset{-1}{f}(A') = \emptyset$ quando e sòmente quando $A' = \emptyset$, é necessário e suficiente que $f(E) = F$, isto é, que f seja uma aplicação <u>sôbre</u> F.

Seja f uma aplicação de E em F, e g uma aplicação de F em G. A aplicação <u>composta</u> de f e g, isto é, a aplicação h de E em G, que associa a cada x de E o elemento $h(x) = g(f(x))$ de G, se designa por $g \circ f$.

Sendo f uma aplicação <u>biunívoca</u> de E em F, isto é, para a qual a igualdade $f(x) = f(x')$ $(x, x' \in E)$ acarreta sempre $x = x'$, podemos considerar a aplicação <u>inversa</u> $\overset{-1}{f}$ de f, como se segue: $\overset{-1}{f}$ é a aplicação de $E' = f(E)$ sôbre E, que associa a cada $y \in E'$ o elemento $x = \overset{-1}{f}(y)$ para o qual $y = f(x)$. É claro que a aplicação $\overset{-1}{f}$ é, também, biunívoca. Se f fôr uma aplicação biunívoca de E <u>sôbre</u> F, êstes dois conjuntos dir-se-ão em <u>correspondência</u> <u>biunívoca</u>. Em geral, quando dissermos, simplesmente, que dois conjuntos A e B estão em <u>correspondência</u> <u>biunívoca</u> (cada um em correspondência biunívoca com o outro), ou ainda, que são <u>equipotentes</u> (cada um <u>equipotente</u> ao outro), devemos entender que: ou A e B são vazios, ou existe uma aplicação biunívoca de um deles sôbre o outro.

Se, agora, f e g forem duas aplicações biunívocas respectivamente de E em (sôbre) F e de F em (sôbre G), a aplicação composta $h = g \circ f$ será uma aplicação biunívoca de E em (sôbre) G.

<u>Funções</u> <u>monotônicas</u>. Sejam E e F dois conjuntos ordenados pelas ordens $x \leq y$ e $x' \leq y'$ respectivamente, e consideremos uma aplicação f de E em F. Dizemos, então, que f é <u>crescente</u> se $f(x) \leq f(y)$, sempre que $x < y$ $(x, y \in E)$; f será <u>estritamente</u> <u>crescente</u> se $f(x) < f(y)$ sempre que $x < y$. (Se E constar de um único elemento, então f será, por definição, estritamente crescente).

A definição de aplicação <u>decrescente</u> (estritamente ou não) é óbvia; basta substituir, na definição acima, $<$ por $>$.

É claro que, se o conjunto E fôr totalmente ordenado, e a aplicação f estritamente crescente, ou estritamente decrescente, então f será biunívoca.

10. Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis. Um conjunto A diz-se finito quando é vazio, ou quando está em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais de 1 até um certo natural n. Uma propriedade particularmente importante dos conjuntos finitos é a expressa pelo seguinte

TEOREMA: Um conjunto finito não pode, nunca, estar em correspondência biunívoca com uma sua parte própria.

Demonstração: Deixando de lado o caso imediato do conjunto vazio, seja P a propriedade do natural genérico n: "Nenhum conjunto finito, A, em correspondência biunívoca com o conjunto $M_n = \{1,2,\ldots,n\}$ pode ser equipotente a uma sua parte própria".

A propriedade P é òbviamente satisfeita para n=1. Admitindo-a verdadeira para o natural n, provemos que o é para n+1, donde, em virtude do princípio de indução finita, resulta o teorema. Seja, então, A, um conjunto em correspondência biunívoca com o conjunto $M_{n+1}$. Se A fosse equipotente a uma sua parte própria A', então $M_{n+1}$ seria equipotente a uma sua parte própria M', por uma aplicação biunívoca, digamos h; portanto, $M_n$ estaria em correspondência biunívoca com a sua parte própria pela aplicação g definida do seguinte modo: $g(x) = h(x)$ para todo $1 \leq x \leq n$, se $h(n+1) = n+1$; $g(x) = h(x+1)$ para x de 1 a n, se $h(1) = n+1$; finalmente,

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{para } 1 \leq x \leq p-1 \\ h(x+1) & \text{para } p \leq x \leq n\,, \end{cases}$$

se $h(p) = n+1$ e $1 < p \leq n$.

Nota. O enunciado do teorema que acabamos de demonstrar é precisamente a primeira definição de conjunto finito segundo Dedekind. Com esta definição (que pressupõe o conceito de correspondência biunívoca), cremos não ser possível demonstrar nem mesmo o fato intuitivo de que a reunião de dois conjuntos finitos é um conjunto finito. Entretanto, pode-se dar uma definição de conjunto finito [ 4 ] que não exige mais que a relação de inclusão entre conjuntos, e segundo a qual, a reunião de dois conjuntos finitos é um conjunto finito.

Número de elementos de um conjunto finito. O natural n para o qual o conjunto finito (não vazio) A é equipotente ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, e que, em virtude do teorema anterior, está unìvocamente associado a A, é o número de elementos de A. Por definição, o número de elementos do conjunto vazio é o inteiro 0.

Conjunto infinito e conjunto enumerável. Diremos que um conjunto A é infinito se êle contiver uma parte equipotente ao conjunto de todos os números naturais. Admitindo-se o Axioma da Escolha, pode-se assegurar que todo conjunto não finito é, necessàriamente, infinito (nº 35, observação ao lema).

Um conjunto A se diz enumerável se é finito, ou se está em correspondência biunívoca com o conjunto de todos os números naturais.

11. Famílias de elementos. Sendo f uma aplicação de um conjunto I num conjunto E, costuma-se atribuir à aplicação f, também o nome de família de elementos de E (cujo conjunto de índices é I), sempre que f seja designada pela notação indicial $(x_\iota)_{\iota \in I}$, onde $\iota$ é variável em I, e, para cada $\iota \in I$, $f(\iota) = x_\iota$. Como se vê, não há, para nós, nenhuma diferença conceitual entre função e família; apenas adotamos outro nome, de acôrdo com a notação empregada.

Dada uma parte não vazia $J \subset I$, a família $(x_\iota)_{\iota \in J}$ de elementos de E se diz uma sub-família de $(x_\iota)_{\iota \in I}$; dizemos, então, que esta contém a sub-família $(x_\iota)_{\iota \in J}$.

A família $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de elementos de E se diz finita, infinita, ou enumerável, segundo seja o conjunto dos índices, I, finito, infinito, ou enumerável. E se I fôr o conjunto dos naturais de 1 a um certo natural n, ou o de todos os naturais, a família $(x_\iota)_{\iota \in I}$ se dirá uma sequência (ou sucessão) de elementos de E; será uma sequência finita, no primeiro caso, e infinita, no segundo.

Quando não houver ambiguidade a respeito do conjunto de índices, escrever-se-á, mais simplesmente $(x_\iota)$ em lugar de $(x_\iota)_{\iota \in I}$. E se esta família fôr uma sequência, escreveremos frequentemente $(x_\nu)$ para designá-la, sendo $\nu$ um elemento genérico ou do conjunto dos naturais de 1 até um certo n, ou do de todos os naturais, conforme se trate de uma sequência finita ou infinita; no primeiro caso empregaremos, para indicá-la, também a notação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e, no segundo, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ou, mais simplesmente, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Uma sequência finita $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elementos de um conjunto E se diz, também, uma n-pla ordenada de elementos de E, em que o 1º, o 2º, ... ..., o n-ésimo elemento, são, respectivamente, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Em particular, (a,b) (onde $a = x_1$ e $b = x_2$) é um par ordenado, em que o primeiro elemento é a, e o segundo, b.

Da condição de igualdade entre funções resulta que: duas famílias $(x_\iota)_{\iota \in I}$ e $(y_\iota)_{\iota \in I}$ (com o mesmo conjunto de índices) serão iguais quando e sòmente quando $x_\iota = y_\iota \ \forall \iota \in I$. Assim, as n-plas $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ e $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ serão iguais se e sòmente se $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$; em particular, para que $(a,b) = (c,d)$, é necessário e suficiente que $a = c$ e $b = d$.

Dada uma família $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de elementos de um conjunto E, a parte A de E definida por

$$A = \{x \in E \mid (\exists\ \iota \in I \mid x_\iota = x)\},$$

é o <u>conjunto dos elementos</u> da referida família, e se designa por $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$. No caso de uma sequência $(x_\nu) = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ ou $(x_\nu) = (x_1,x_2,x_3,\dots)$, escreve-se $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, ou, respectivamente, $\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$ para designar o conjunto dos elementos da sequência.

Seja, agora, $(x_\iota)_{\iota \in I}$ uma família qualquer de elementos de um conjunto ordenado E, pela relação de ordem $x \leq y$. Diremos, então, que a sub-família $(x_\iota)_{\iota \in J}$ de $(x_\iota)_{\iota \in I}$ $(J \subset I)$ é <u>totalmente ordenada</u>, se o sub-conjunto $\{x_\iota\}_{\iota \in J}$ de E fôr totalmente ordenado. Em outras palavras, a referida sub-família será totalmente ordenada quando e sòmente quando, dados dois índices $\alpha$ e $\beta$ de J, se verifica, ou $x_\alpha \leq x_\beta$ ou $x_\beta \leq x_\alpha$.

12. <u>Famílias de conjuntos. Reunião e intersecção de uma família de conjuntos.</u> Pode ocorrer que $(X_\iota)_{\iota \in I}$ seja uma família de elementos de um conjunto $\mathfrak{M}$ que, por sua vez, seja constituido de conjuntos (por exemplo, de partes de um certo conjunto E). Diremos, então, que $(X_\iota)_{\iota \in I}$ é uma <u>família de conjuntos</u>.

Sendo $\mathcal{F}$ o conjunto dos elementos da família de conjuntos $(X_\iota)_{\iota \in I}$ acima considerada, $\mathcal{F} = \{X_\iota\}_{\iota \in I}$ será uma classe de conjuntos, precisamente a formada pelos conjuntos $X_\iota$, $\iota$ percorrendo I. À referida família $(X_\iota)_{\iota \in I}$ estão unìvocamente associados dois conjuntos: a <u>reunião da família</u> e a <u>intersecção da família</u>, que se designam, respectivamente, por

$$\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{\iota \in I} X_\iota ,$$

e são definidos pelas igualdades:

$$\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{\iota \in I} X_\iota = \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X .$$

Considerando-se os $X_\iota$, $\iota \in I$, como partes de um mesmo suporte E, têm-se, evidentemente:

$$\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = \{x \in E \mid (\exists \iota \in I \mid x \in X_\iota)\}$$

e

$$\bigcap_{\iota \in I} X_\iota = \{x \in E \mid \forall \iota \in I,\ x \in X_\iota\}.$$

Além disso, verifica-se a seguinte identidade:

$$\complement(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota) = \bigcap_{\iota \in I} \complement X_\iota, \qquad (1)$$

donde (substituindo-se os $X_\iota$ pelos complementares e tomando-se, depois, os complementares de ambos os membros), vem:

$$\bigcup_{\iota \in I} \complement X_\iota = \complement(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota). \qquad (1')$$

As igualdades (1) e (1') exprimem a chamada <u>regra de dualidade</u>; cada uma é a <u>dual</u> da outra.

<u>Imagens da reunião e da intersecção.</u> Seja f uma aplicação de E em F, e consideremos a família $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de partes de E. Verifica-se, então, que

(a) $f(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota) = \bigcup_{\iota \in I} f(X_\iota)$;

(b) $f(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota) \subset \bigcap_{\iota \in I} f(X_\iota)$.

Sendo, agora, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ uma família de partes de F, têm-se:

(c) $\overset{-1}{f}(\bigcup_{\iota \in I} Y_\iota) = \bigcup_{\iota \in I} \overset{-1}{f}(Y_\iota)$;

(d) $\overset{-1}{f}(\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota) = \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{f}(Y_\iota)$.

A igualdade (d) pode deduzir-se de (c), por dualidade, aplicando-se esta outra, onde Y designa uma parte qualquer de F:

(e) $\overset{-1}{f}(\complement_F Y) = \complement_E \overset{-1}{f}(Y)$.

<u>Notações para a reunião e a intersecção de uma sequência de conjuntos.</u> No caso de uma sequência $(X_\nu)$ de conjuntos, escreve-se, para a reunião

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} X_\nu \qquad \text{ou} \qquad \bigcup_{\nu=1}^{\infty} X_\nu,$$

segundo se trate de uma sequência finita (em que o conjunto dos índices é formado pelos inteiros de 1 a n) ou infinita. Essas mesmas notações podem escrever-se sob a <u>forma desenvolvida</u>:

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} X_\nu = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n ,$$

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} X_\nu = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots .$$

As notações análogas para a intersecção são óbvias, bastando trocar $\bigcup$ por $\bigcap$ e $\cup$ por $\cap$.

13. Recobrimentos e partições. Uma família $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de conjuntos, cuja reunião contém um certo conjunto A, se diz um recobrimento de A. E se êsse recobrimento fôr tal que

1º) $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = A$ ;

2º) $X_\iota \neq \emptyset$, $\forall \iota \in I$ e $X_\iota \cap X_\sigma \neq \emptyset$ para $\iota \neq \sigma$,

diremos que $(X_\iota)_{\iota \in I}$ é uma partição de A.

Nota. Dada uma classe não vazia, $\mathcal{F}$, de conjuntos, consideremos a família canônica sôbre $\mathcal{F}$, isto é, a família

$$(X_\iota)_{\iota \in \mathcal{F}},$$

onde, para cada $\iota \in \mathcal{F}$, $X_\iota = \iota$. Se, então, essa família fôr um recobrimento ou uma partição do conjunto A, diremos que os conjuntos de $\mathcal{F}$ formam um recobrimento, ou, correspondentemente, uma partição de A.

14. Produto cartesiano de uma família de conjuntos. Projeções. Dada uma família $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de partes de um conjunto E, o produto cartesiano dessa família é, por definição, o conjunto das famílias $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de elementos de E, para as quais se tenha $x_\iota \in X_\iota, \forall \iota \in I$. Êsse produto cartesiano se designa por

$$\prod_{\iota \in I} X_\iota ,$$

e os conjuntos $X_\iota$ se dizem, então, conjuntos fatores do produto. No caso de uma sequência $(A_\nu)$ de partes de E, empregam-se as notações análogas à da reunião, trocando-se $\bigcup$ por $\prod$ e $\cup$ pelo sinal $\times$ da multiplicação ordinária de números. Assim é que

$$\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \qquad (2)$$

e

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots , \qquad (3)$$

conforme se trate de uma sequência finita (o conjunto dos índices formados pelos naturais de 1 a n) ou infinita.

Segundo a definição, o produto cartesiano (2) será o conjunto das n-plas ordenadas $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ com $x_i \in A_i$, $1 \leq i \leq n$; o produto (3) será o conjunto das sequências infinitas $(x_\nu)$, com $x_\nu \in A_\nu$ para todo $\nu \geq 1$.

No caso em que $X_\iota = M$ para todo $\iota \in I$, põe-se:

$$\prod_{\iota\in I} X_\iota = M^I \;;$$

em se tratando de uma sequência finita $(A_\nu)$, em que o conjunto dos índices é $I = \{1,2,\ldots,n\}$, escreveremos, no caso em que $A_\nu = A$, $\nu = 1,2,\ldots,n$, $A^n$ em lugar de $A^I$ para designar o produto

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A \times A \times \ldots \times A \,.$$

É claro que se algum dos fatores do produto cartesiano

$$\prod_{\iota\in I} X_\iota$$

fôr vazio, o produto também o será; a recíproca, isto é, o fato de que

$$\prod_{\iota\in I} X_\iota \neq \emptyset$$

para tôda família $(X_\iota)_{\iota\in I}$ em que nenhum dos $X_\iota$ é vazio, constitui uma das formas do Axioma da Escolha, justamente a que adotaremos aqui. Entretanto, para as famílias <u>finitas</u>, pode-se demonstrar apenas com o auxílio do princípio de indução finita, que se nenhum dos fatores fôr vazio, o produto cartesiano também será não vazio.

<u>Projeções</u>. No caso em que não é vazio o produto cartesiano

$$F = \prod_{\iota\in I} A_\iota$$

da família $(A_\iota)_{\iota\in I}$ de partes de E, pode-se considerar, para cada $\sigma \in I$, a aplicação $pr_\sigma$ de F em $A_\sigma$, que associa, a cada elemento $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ de F, o elemento $pr_\sigma(x) = x_\sigma$ de $A_\sigma$. Essa aplicação $pr_\sigma$, que é, evidentemente, uma aplicação de F sôbre $A_\sigma$, é chamada <u>projeção de índice</u> $\sigma$. O valor $pr_\sigma(x) = x_\sigma$ de $pr_\sigma$ para o elemento $x \in F$ é a <u>coordenada de índice</u> $\sigma$ de x; e, sendo A uma parte qualquer de F, $pr_\sigma(A)$ será a <u>projeção de índice</u> $\sigma$ do conjunto A, ou seja: a projeção de A sôbre $A_\sigma$.

Sendo $B_\sigma$ uma parte de $A_\sigma$, tem-se:

$$\overset{-1}{pr_\sigma}(B_\sigma) = \prod_{\iota\in I} B_\iota \,,$$

onde $B_\iota = A_\iota$ para todo $\iota \neq \sigma$.

15. <u>Distributividade da intersecção relativamente à reunião</u>. Dada, para cada $\sigma$ de um conjunto não vazio, S, uma família

$$(A_{(\sigma,\iota)})_{\iota\in I_\sigma}$$

de partes de um mesmo conjunto E, pode-se mostrar que, quando S é finito, então:

$$\bigcap_{\sigma\in S}\Big(\bigcup_{\iota\in I_\sigma} A_{(\sigma,\iota)}\Big) = \bigcup_{\lambda\in\prod_{\sigma\in S} I_\sigma}\Big(\bigcap_{\sigma\in S} A_{(\sigma,\, pr_\sigma(\lambda))}\Big) . \qquad (4)$$

Essa igualdade exprime a <u>distributividade da intersecção finita</u> (por ser S finito) <u>relativamente à reunião</u>). Ocorre expontâneamente indagar-se da validade ou não da igualdade (4) para S qualquer (finito ou não), sempre que $\prod_{\sigma\in S} I_\sigma \neq \emptyset$. A resposta é afirmativa quando se admite o Axioma da Escolha; e, mais do que isso, a validade de (4) para S qualquer (sempre que $\prod_{\sigma\in S} I_\sigma \neq \emptyset$) é, como teremos oportunidade de mostrar, <u>equivalente</u> ao Axioma da Escolha.

A igualdade (4), para S qualquer, exprime a <u>distributividade generalizada da intersecção relativamente à reunião</u>.

A fórmula <u>dual</u> de (4), isto é, a <u>distributividade da reunião relativamente à intersecção</u>, se obtém, simplesmente, substituindo-se, em (4), $\bigcup$ por $\bigcap$ e $\bigcap$ por $\bigcup$.

16. <u>Parte do produto E×F definida por uma relação</u>. Dada uma relação R entre os elementos genéricos x e y de E e F, respectivamente, vê-se que a R está univocamente associado o sub-conjunto C de $E\times F$, formado pelos elementos $(x,y)\in E\times F$, para os quais $x\,R\,y$. Diz-se, então, que C é a parte de $E\times F$ <u>definida</u> pela relação R. Por outro lado, dada uma parte qualquer $C\subset E\times F$, existe uma única relação R entre os elementos genéricos x de E e y de F que define C. Em particular, sendo f uma aplicação de E em F, essa aplicação define uma parte G de $E\times F$, que é o <u>gráfico</u> de f, caracterizado pelo fato de que:

1º) $pr_1(G) = E$;

2º) $(x,y)\in G$ e $(x,y')\in G \implies y = y'$ (visto que $y = f(x) = y'$) .

Reciprocamente, sendo G uma parte não vazia de $E\times F$ satisfazendo às duas condições acima, existe uma única aplicação de E em F cujo gráfico é G.

Sendo, agora, $\mathscr{F}$ uma classe (não vazia) de aplicações de <u>partes</u> de um certo conjunto E num outro, F, chama-se <u>ordem por prolongamento</u> sôbre $\mathscr{F}$ à ordem em que uma aplicação $f\in\mathscr{F}$ é <u>inferior</u> a outra aplicação $g\in\mathscr{F}$ quando e sòmente quando o gráfico de f está contido no de g.

# CAPÍTULO II

# ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

## § 1º - TOPOLOGIA SÔBRE UM CONJUNTO. FUNÇÕES CONTÍNUAS.

17. Dado um conjunto E (vazio ou não), consideremos uma classe $\mathcal{O}$ de partes de E satisfazendo aos dois seguintes axiomas:

$\mathcal{O}_I$. A reunião dos conjuntos de uma sub-classe qualquer de $\mathcal{O}$ pertence a $\mathcal{O}$.

$\mathcal{O}_{II}$. E pertence a $\mathcal{O}$, e a intersecção de dois conjuntos quaisquer de $\mathcal{O}$ pertence a $\mathcal{O}$.

Dizemos, então, que a classe $\mathcal{O}$ define uma estrutura topológica sôbre E, ou, mais brevemente, uma topologia sôbre E. O conjunto E associado a essa topologia toma o nome de Espaço Topológico, cujo suporte é E, e os elementos dêste se dizem, então, pontos. As partes de E pertencentes à classe $\mathcal{O}$ são os conjuntos abertos na topologia definida por $\mathcal{O}$ sôbre E. Como consequência de $\mathcal{O}_I$, o conjunto vazio é aberto na referida topologia, isto é, pertence a $\mathcal{O}$.

Sendo $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias sôbre E, definidas, respectivamente, pelas classes $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ de partes de E, diz-se que $\mathcal{T}$ é mais fina (menos fina) que $\mathcal{T}'$ quando e sòmente quando $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ (respect. $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$); em outras palavras: quando todo conjunto aberto em $\mathcal{T}'$ (respect. $\mathcal{T}$) é aberto em $\mathcal{T}$ (respect. $\mathcal{T}'$). As classes $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ definirão a mesma topologia sôbre E, isto é, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, quando e sòmente quando $\mathcal{T}$ é, ao mesmo tempo, mais fina e menos fina que $\mathcal{T}'$.

Dentre as topologias sôbre E, a menos fina é a em que os únicos conjuntos abertos são o vazio e E, isto é: $\mathcal{O} = \{\emptyset, E\}$; a mais fina, ou seja, a topologia discreta sôbre E, é a em que todos os sub-conjuntos de E são abertos, isto é: $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$. O espaço E com a topologia discreta é o que se chama um espaço discreto.

Conjuntos fechados. Sendo E um espaço topológico com a topologia $\mathcal{T}$, diz-se que uma parte A de E é um conjunto fechado quando e sòmente quando seu complementar é aberto. Por dualidade, deduzem-se dos axiomas $\mathcal{O}_I$ e $\mathcal{O}_{II}$, as seguintes propriedades dos conjuntos fechados:

$F_I$. E é fechado, e a intersecção de conjuntos fechados, em número qualquer ($\geq 1$), é um conjunto fechado.

$F_{II}$. A reunião de conjuntos fechados, em número finito, é um conjunto fechado.

18. Vizinhanças. A cada ponto x de um espaço topológico $E \neq \emptyset$, está unìvocamente associado um conjunto $\mathcal{V}(x)$ de partes de E, precisamente as partes V de E que contêm um conjunto aberto ao qual x pertence. Êsses conjuntos $V \in \mathcal{V}(x)$ são as vizinhanças de x na topologia $\mathcal{T}$. Verificam-se, então, as seguintes propriedades para as vizinhanças de x:

$V_I$. Se $V \in \mathcal{V}(x)$ e $W \supset V$ ($W \subset E$), então $W \in \mathcal{V}(x)$;

$V_{II}$. Se V e W pertencem a $\mathcal{V}(x)$, a intersecção $V \cap W$ também pertence a $\mathcal{V}(x)$.

$V_{III}$. Se $V \in \mathcal{V}(x)$, então $x \in V$.

$V_{IV}$. Para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe um $W \in \mathcal{V}(x)$, de modo que $V \in \mathcal{V}(y)$, $\forall y \in W$.

É importante notar que, dado um conjunto $E \neq \emptyset$, e supondo associado a cada $x \in E$ um único conjunto $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ de partes de E, com as propriedades $V_I$, $V_{II}$, $V_{III}$, $V_{IV}$ enunciadas acima, então existe uma única topologia sôbre E, em que, para cada $x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ é o conjunto (ou sistema) das vizinhanças de x. Essa topologia é a em que a classe dos conjuntos abertos é formada pelo vazio e pelos sub-conjuntos de E, cada um dos quais é vizinhança de cada um dos seus pontos.

19. Interior. Aderência. Fronteira. Seja E um espaço topológico e consideremos uma parte A de E. Chama-se interior de A à reunião de todos os conjuntos abertos contidos em A; chama-se aderência de A à intersecção dos conjuntos fechados que contêm A. O interior e a aderência de A se designam, respectivamente, por $\overset{\circ}{A}$ e $\bar{A}$. Diz-se que x é um ponto interior a A ou aderente a A, segundo se tenha $x \in \overset{\circ}{A}$ ou $x \in \bar{A}$. Verifica-se, então, que x é interior a A quando e sòmente quando A é vizinhança de x; e x será aderente a A quando e sòmente quando tôda vizinhança de x encontra A.

Da definição de interior e aderência de um conjunto A, segue-se que $\overset{\circ}{A}$ é sempre aberto, enquanto que $\bar{A}$ é sempre fechado; além disso, tem-se, evidentemente: $\overset{\circ}{\emptyset} = \bar{\emptyset} = \emptyset$ e $\overset{\circ}{E} = \bar{E} = E$.

Chama-se fronteira de um conjunto $A \subset E$, ao conjunto $\bar{A} \cap \overline{\complement A}$.

20. <u>Funções contínuas</u>. <u>Homeomorfismos</u>. Sejam E e E' dois espaços topológicos e consideremos uma aplicação f de E em E'. Diz-se que f é <u>contínua no ponto</u> $x \in E$ se qualquer que seja a vizinhança V' de f(x) em E', $\overset{-1}{f}(V')$ é vizinhança de x em E. A f se dirá, simplesmente, uma aplicação contínua de E em E' se fôr contínua em cada ponto de E.

Verifica-se, então, que f é uma aplicação contínua de E em E' quando e sòmente quando a imagem inversa, pela f, de todo conjunto aberto em E' é um conjunto abérto em E.

Se f fôr uma aplicação biunívoca e contínua de E sôbre E', e a sua inversa fôr, também, uma aplicação contínua de E' sôbre E, diremos que f é um <u>homeomorfismo</u> entre E e E'.

Dois espaços topológicos E e E' dizem-se <u>homeomorfos</u> quando $E = E' = \emptyset$, ou quando existe um homeomorfismo entre E e E'.

21. <u>Sub-espaços</u>. Seja E um espaço topológico com a topologia $\mathcal{T}$ e consideremos uma parte A de E. Podemos, então, definir uma topologia $\mathcal{T}_A$ sôbre A, em que a classe dos conjuntos abertos é formada pelas intersecções, com A, dos conjuntos abertos em $\mathcal{T}$. O espaço A, com a topologia $\mathcal{T}_A$, se diz, então, um <u>sub-espaço</u> de E.

---§---

## § 2º - FILTRO E ULTRA-FILTRO. ESPAÇOS COMPACTOS.

22. Uma classe não vazia, $\mathcal{F}$, de partes de um conjunto E, se diz um <u>filtro</u> sôbre E, se forem verificadas as três seguintes condições:

$\mathcal{F}_{I}$. Se $A \in \mathcal{F}$, <u>então todo sub-conjunto</u> B <u>de</u> E <u>que contenha</u> A, <u>também pertence a</u> $\mathcal{F}$;

$\mathcal{F}_{II}$. <u>A intersecção de conjuntos de</u> $\mathcal{F}$, em número finito, <u>pertence a</u> $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}_{III}$. <u>O conjunto vazio não pertence a</u> $\mathcal{F}$.

Tomando-se, para $\mathcal{F}$, a classe das partes de um conjunto E que contêm um sub-conjunto fixo $A \neq \emptyset$ de E, tem-se um exemplo de filtro sôbre E.

Dados dois filtros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sôbre E, diz-se que $\mathcal{F}$ é <u>mais fino</u> que $\mathcal{F}'$ (o qual se dirá, então, <u>menos fino</u> que $\mathcal{F}$), se $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, isto é, se todo sub-conjunto de E pertencente a $\mathcal{F}'$ pertence também a $\mathcal{F}$.

<u>Ultra-filtro</u>. Considerando-se o conjunto $\Phi$ dos filtros sôbre um

conjunto E, e ordenando-se $\Phi$ pela ordem "$\mathcal{F}$ é mais fino que $\mathcal{F}'$" ($\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \Phi$), então todo elemento màximal de $\Phi$ é o que se chama um <u>ultra-filtro</u> sôbre E. Em outras palavras, um filtro $\mathcal{U}$ sôbre E é um ultra-filtro quando e sòmente quando não existe nenhum filtro estritamente mais fino que $\mathcal{U}$. Por exemplo, o conjunto $\mathcal{U}$ das partes de E que contêm um elemento fixo $a \in E$, é um ultra-filtro sôbre E.

23. <u>Bases de um filtro</u>. Sendo $\mathcal{F}$ um filtro sôbre E, e $\mathcal{B}$ um sub-conjunto de $\mathcal{F}$, diz-se que $\mathcal{B}$ é uma <u>base</u> de $\mathcal{F}$ se, dado um conjunto qualquer $A \in \mathcal{F}$, existir um conjunto $B \in \mathcal{B}$ contido em A; em outras palavras, se $\mathcal{F}$ fôr precisamente o conjunto das partes de E que contêm algum conjunto de $\mathcal{B}$. Assim, por exemplo, num espaço topológico E, o conjunto $\mathcal{V}(x)$ das vizinhanças de um ponto $x \in E$, que é, evidentemente um filtro sôbre E (o <u>filtro das vizinhanças de</u> x) possui para base, o conjunto das vizinhanças abertas de x.

Da definição de base de um filtro $\mathcal{F}$ sôbre E, vê-se que se $\mathcal{B}$ fôr uma base de $\mathcal{F}$, serão verificadas as seguintes propriedades:

$\mathcal{B}_I$. $\emptyset \notin \mathcal{B}$;

$\mathcal{B}_{II}$. <u>A intersecção de dois conjuntos quaisquer A e B de $\mathcal{B}$ contém um conjunto de $\mathcal{B}$</u>.

<u>Geração de um filtro por um conjunto de partes</u>. Dada uma classe não vazia, $\mathcal{G}$, de partes de E, de modo que a intersecção dos conjuntos de uma sub-classe finita qualquer (não vazia) de $\mathcal{G}$ seja um sub-conjunto não vazio de E, é claro, então, que o conjunto $\mathcal{G}'$ de tôdas essas intersecções satisfaz $\mathcal{B}_I$ e $\mathcal{B}_{II}$. Considerando-se, agora, o conjunto $\mathcal{F}$ das partes de E que contêm algum conjunto de $\mathcal{G}'$, $\mathcal{F}$ será um filtro sôbre E, do qual $\mathcal{G}'$ é uma base. Diz-se, então, que $\mathcal{F}$ (que, evidentemente, é o menos fino dos filtros sôbre E que contêm $\mathcal{G}$) é o filtro <u>gerado</u> por $\mathcal{G}$; êste conjunto se diz um <u>sistema de geradores de</u> $\mathcal{F}$.

Do que precede, resulta que <u>uma classe não vazia</u>, $\mathcal{B}$, <u>de partes de um conjunto</u> E, <u>é uma base de um filtro sôbre</u> E <u>quando e sòmente quando</u> $\mathcal{B}$ <u>satisfaz as propriedades</u> $\mathcal{B}_I$ e $\mathcal{B}_{II}$.

24. Seja, agora, f uma aplicação de E em E' e consideremos uma base $\mathcal{B}$ de um filtro sôbre E. Pondo-se

$$\mathcal{B}' = \{ f(A) \subset E' \mid A \in \mathcal{B} \},$$

verifica-se que $\mathcal{B}'$ é uma base de filtro sôbre E'. Tal base, $\mathcal{B}'$, chamada imagem direta pela f, da base $\mathcal{B}$, se costuma indicar por $f(\mathcal{B})$. E se $\mathcal{B}$ fôr base de um ultra-filtro sôbre E, então $f(\mathcal{B})$ será, também, base de um ultra-filtro sôbre E'. De fato, sendo $\mathcal{F}'$ o filtro (sôbre E') de base $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$, se $\mathcal{F}''$ fôr um filtro (sôbre E') mais fino que $\mathcal{F}'$, então dever-se-á ter, quaisquer que sejam $B'' \in \mathcal{F}''$ e $A \in \mathcal{B}$ :

$$B'' \cap f(A) \neq \emptyset ,$$

donde

$$\overset{-1}{f}(B'') \cap A \neq \emptyset,$$

o que mostra que $\overset{-1}{f}(B'')$ encontrará todo conjunto do ultra-filtro $\mathcal{U}$ sôbre E, de base $\mathcal{B}$, e por êsse motivo pertencerá a $\mathcal{U}$, isto é, conterá um certo conjunto $B \in \mathcal{B}$. Como $B'' \supset f(\overset{-1}{f}(B'')) \supset f(B)$, segue-se que $B'' \in \mathcal{F}'$, o que prova que $\mathcal{F}'$ é um ultra-filtro sôbre E'.

25. Filtros nos espaços topológicos. No caso em que E é um espaço topológico, pode-se definir a noção de ponto aderente, e a de limite de uma base de filtro. Assim, diz-se que x é um ponto aderente à base $\mathcal{B}$ de um filtro $\mathcal{F}$ sôbre um espaço topológico E, quando x é aderente a todo subconjunto de E pertencente a $\mathcal{B}$. O ponto x será dito limite da base $\mathcal{B}$, a qual, então, converge para o ponto x, se o filtro $\mathcal{F}$ (sôbre E) gerado por $\mathcal{B}$, fôr mais fino que o filtro das vizinhanças de x.

Quando, num espaço topológico E, uma base de filtro $\mathcal{B}$ converge para algum ponto de E, dizemos que $\mathcal{B}$ é convergente em E.

Pode acontecer que uma base de filtro, $\mathcal{B}$, convergente num espaço topológico E admita mais de um limite. Isso não se verificará, porém, se E fôr um espaço separado, isto é, se satisfizer ao seguinte axioma:

Axioma de HAUSDORFF: "Dados dois pontos quaisquer x e y de E, com $x \neq y$, existe uma vizinhança de x e uma vizinhança de y sem pontos comuns".

A topologia de um espaço separado se diz, também, separada.

26. Espaços compactos. Um espaço topológico E se diz compacto, quando se verificam as seguintes condições:

(a) E é separado;

(b) Todo recobrimento aberto (isto é, formado exclusivamente por conjuntos abertos) de E contém um sub-recobrimento finito de E.

Um espaço discreto, por exemplo, é compacto quando e sòmente quando é finito. (A topologia de um espaço compacto se diz <u>compacta</u>).

Da definição de espaço compacto, resulta a seguinte

PROPOSIÇÃO 1: <u>Para que um espaço separado, E, seja compacto, é necessário e suficiente que todo filtro sôbre E admita pelo menos um ponto aderente.</u>

Para demonstrá-la, observemos, primeiramente, que a condição (b) da definição acima é equivalente a esta outra, <u>dual</u> de (b):

(b'). <u>Tôda familia de conjuntos fechados em E, cuja intersecção é vazia, contém uma sub-família finita, cuja intersecção é, também, vazia.</u>

Sendo, agora, $\mathcal{F}$ um filtro sôbre E, e supondo E compacto, provemos que a intersecção das aderências dos conjuntos de $\mathcal{F}$ é não vazia. De fato, do contrário haveria, em virtude de (b'), uma parte finita $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$, de tal modo que a intersecção das aderências dos conjuntos de $\mathcal{F}'$ fosse vazia, o mesmo acontecendo, com maior razão, com os conjuntos de $\mathcal{F}'$; chegar-se-ia, assim, a uma contradição com o fato de que $\mathcal{F}$ é um filtro.

Se, por outro lado, todo filtro sôbre E possuir, pelo menos, um ponto aderente, E será compacto, pois, sendo $(F_\iota)_{\iota \in I}$ uma família qualquer de conjuntos fechados em E, cuja intersecção é vazia, tal família conterá uma sub-família finita, cuja intersecção é vazia. De fato, se não, pondo-se $\mathcal{G} = \{F_\iota\}_{\iota \in I}$, $\mathcal{G}$ geraria um filtro $\mathcal{F}$ sem ponto aderente, pois a intersecção das aderências dos conjuntos de $\mathcal{F}$ está contida na intersecção dos conjuntos de $\mathcal{G}$ que é vazia, C. Q. D.

Provemos, finalmente, a seguinte

PROPOSIÇÃO 2: <u>Num espaço compacto E, tôda base de ultra-filtro é convergente.</u>

Com efeito, seja $\mathcal{B}$ uma base de um ultra-filtro $\mathcal{U}$ sôbre E, o qual admitirá, então, um ponto aderente x; como tôda vizinhança de x encontra todo conjunto de $\mathcal{U}$, e êste é um ultra-filtro, então $\mathcal{U}$ será mais fino que o filtro das vizinhanças de x, isto é, $\mathcal{B}$ convergirá para a ponto x, C.Q.D.

<u>Nota</u>. Um espaço compacto segundo a definição adotada aqui é o que, em alguns tratados (por exemplo, no de ALEXANDROFF e HOPF [ 5 ]) se chama de <u>bi-compacto separado</u> (pois, de acôrdo com êsses tratados, um espaço <u>bi-</u>

compacto é um espaço topológico satisfazendo a condição (b)).

§ 2º - PRODUTO DE ESPAÇOS TOPOLÓGICOS.

27. Seja $(E_\iota)_{\iota \in I}$ uma família de espaços topológicos, cada $E_\iota$ com a topologia $\mathcal{T}_\iota$, $\iota \in I$. Pondo

$$F = \prod_{\iota \in I} E_\iota ,$$

onde os fatores $E_\iota$ são os suportes dos espaços $E_\iota$ com as respectivas topologias $\mathcal{T}_\iota$, consideremos as partes de F da forma

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota , \qquad (5)$$

onde cada $A_\iota$ é um sub-conjunto aberto de $E_\iota$, e, com exceção de um número finito de índices, $A_\iota = E_\iota$. É claro que a intersecção de conjuntos da forma (5), em número finito qualquer é, também, um conjunto da forma (5). Seja, então, $\mathcal{O}$ o conjunto de tôdas as possíveis reuniões de conjuntos da forma (5). É fácil verificar que $\mathcal{O}$ satisfaz aos axiomas $\mathcal{O}_I$ e $\mathcal{O}_{II}$ dos conjuntos abertos, e, portanto, define uma topologia $\mathcal{T}$ sôbre F, na qual os conjuntos abertos são, precisamente, os conjuntos de $\mathcal{O}$. Os conjuntos da forma (5), que são particulares abertos em $\mathcal{T}$, são os <u>conjuntos abertos elementares de</u> $\mathcal{T}$.

O espaço topológico F, com a topologia $\mathcal{T}$, é o <u>produto topológico da família</u> $(E_\iota)_{\iota \in I}$ dos espaços topológicos E (espaços <u>fatores</u>). Por sua vez, $\mathcal{T}$ é <u>topologia produto</u> da família $(\mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$.

Quando $F \neq \emptyset$, cada projeção $pr_\sigma$ sôbre $E_\sigma$, $\sigma$ percorrendo I, é uma aplicação contínua de F (com a topologia produto $\mathcal{T}$) sôbre $E_\sigma$, pois sendo $\Omega_\sigma$ um aberto qualquer em $E_\sigma$, o conjunto

$$\overset{-1}{pr_\sigma}(\Omega_\sigma) \subset F$$

será um aberto elementar em F. Além disso, $\mathcal{T}$ é a menos fina das topologias com essa propriedade, pois se $\mathcal{T}'$ fôr uma topologia sôbre F para a qual $pr_\sigma$ é contínua, qualquer que seja $\sigma \in I$, então os conjuntos abertos elementares na $\mathcal{T}$ serão abertos na $\mathcal{T}'$, e, portanto, <u>todo</u> conjunto aberto na $\mathcal{T}$ sê-lo-á na $\mathcal{T}'$.

28. <u>Produto topológico de espaços separados</u>. Seja $(E_\iota)_{\iota \in I}$ uma família de espaços topológicos cujo produto F é não vazio. Subsiste, então, a seguinte

PROPOSIÇÃO 3: <u>Para que o produto topológico F seja separado, é neces-</u>

<u>sário e suficiente que o seja cada um dos fatores $E_\iota$.</u>

A condição é necessária, pois, dados, num qualquer dos espaços fatores, digamos, $E_\sigma$, dois pontos distintos quaisquer, $x_\sigma$ e $y_\sigma$, e sendo $x = (x_\iota)$ e $y = (y_\iota)$ dois pontos de $F$ que difiram ùnicamente pelas coordenadas de índice $\sigma$ (isto é, $x_\iota = y_\iota$, $\forall \iota \neq \sigma$, $\iota \in I$), existem dois abertos elementares

$$V = \prod A_\iota \qquad \text{e} \qquad W = \prod B_\iota ,$$

vizinhanças de $x$ e $y$, respectivamente, sem pontos comuns. Como $x_\sigma$ e $y_\sigma$ pertencem, respectivamente, aos abertos $A_\sigma$ e $B_\sigma$, em $E_\sigma$, e, além disso, $A_\sigma$ não encontra $B_\sigma$ (pois do contrário, $V$ encontraria $W$), segue-se que $E_\sigma$ é separado.

A condição suficiente é consequência imediata da continuidade das projeções $pr_\iota$.

29. <u>Compacidade do espaço produto</u>. Dada uma família qualquer $(E_\iota)_{\iota\in I}$ de espaços topológicos, com $F = \prod E_\iota$ não vazio, pode-se provar que se o produto topológico $F$ fôr compacto, então o mesmo acontecerá com cada um dos fatores $E_\iota$. E a recíproca é verdadeira, desde que se admita o seguinte axioma (ao qual chamaremos de <u>axioma dos ultra-filtros</u>):

($\mathcal{U}$). <u>Dado um filtro qualquer, $\mathcal{F}$, sôbre um conjunto $E$, existe um ultra-filtro sôbre $E$, mais fino que $\mathcal{F}$.</u>

Pode-se mostrar que êsse axioma é uma consequência do Axioma da Escolha; porém, não estamos seguros de que exista equivalência entre ambos. Restringindo-nos, então, exclusivamente aos axiomas admitidos até agora, podemos provar a seguinte

PROPOSIÇÃO 4: <u>Seja $(E_\iota)_{\iota\in I}$ uma família qualquer de espaços topológicos cujo produto $F$ é não vazio. Então, para que o espaço produto $F$ seja compacto, é necessário que o seja cada um dos espaços fatores.</u>

<u>Demonstração:</u> Suponhamos que $F$ seja compacto; então, $F$ será separado, e, pela proposição 3, do número anterior, sê-lo-á, também, cada um dos espaços fatores. Por outro lado, sendo $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in L}$ um recobrimento aberto do espaço $E_\sigma$, então

$$(\overset{-1}{pr}_\sigma(\Omega_\lambda))_{\lambda\in L}$$

será um recobrimento aberto de $F$, e, portanto, conterá um sub-recobrimento finito $(\overset{-1}{pr}_\sigma(\Omega_{\lambda_1}), \ldots, \overset{-1}{pr}_\sigma(\Omega_{\lambda_n}))$; portanto, $(\Omega_{\lambda_1}, \ldots, \Omega_{\lambda_n})$ será um sub-recobrimento finito de $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in L}$, o que mostra que $E_\sigma$ é compacto; e, como $\sigma$ é qualquer em I, segue-se a proposição, C. Q. D.

Se, agora, admitirmos o axioma dos ultra-filtros, a condição expressa na proposição anterior será também suficiente; de modo mais preciso, subsistirá o seguinte

TEOREMA 1: *Para que o produto topológico F seja compacto, é necessário e suficiente que cada um dos espaços fatores seja compacto.*

*Demonstração* (condição suficiente): Suponhamos que cada um dos espaços fatores $E_\iota$ seja compacto. Dado, então, um filtro qualquer $\mathcal{F}$ sôbre F, existirá (pelo axioma dos ultra-filtros) um ultra-filtro $\mathcal{U}$ mais fino que $\mathcal{F}$. Porém, para cada $\iota \in I$, a base de ultra-filtro $\mathcal{B}_\iota = pr_\iota(\mathcal{U})$ sôbre $E_\iota$ converge para um ponto $x_\iota \in E_\iota$ que é único, em virtude de que $E_\iota$ é separado. Provemos que $\mathcal{U}$ converge para o ponto $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ de F. De fato, dada uma vizinhança qualquer V de x, V conterá um conjunto aberto elementar

$$A = \prod_{\iota \in I} A_\iota ,$$

ao qual pertence x. Então, com exceção, no máximo, de um número finito de índices, digamos $\iota_1, \dots, \iota_n$, teremos $A_\iota = E_\iota$, donde

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \overset{-1}{pr}_{\iota_k}(A_{\iota_k}) .$$

Como cada $A_{\iota_k}$ pertence ao ultra-filtro sôbre $E_{\iota_k}$ gerado por $\mathcal{B}_{\iota_k}$ $(1 \leq k \leq n)$, segue-se que $\overset{-1}{pr}_{\iota_k}(A_{\iota_k})$ pertence ao ultra-filtro $\mathcal{U}$, qualquer que seja k entre 1 e n, donde A, e consequentemente V, pertence a $\mathcal{U}$. Portanto, $\mathcal{U}$ converge para x, donde se conclui que x é aderente ao filtro $\mathcal{F}$, C. Q. D.

*Nota*. O teorema que acabamos de demonstrar é o conhecido *Teorema de TYCHONOFF* para os espaços compactos. Admitindo-se o Axioma da Escolha, pode-se demonstrar o

TEOREMA 1'. *Para que o produto* (não vazio) *de uma família qualquer de espaços topológicos seja um espaço bi-compacto, é necessário e suficiente que o seja cada um dos espaços fatores.*

Êsse teorema, aliás, é equivalente ao Axioma da Escolha, segundo mostrou J. KELLEY [ 6 ]. O Axioma da Escolha intervém na prova da condição suficiente do teorema 1', em virtude de que, para cada $\sigma$ do conjunto dos índices da família dos espaços fatores, o conjunto dos pontos de $E_\sigma$ que são limites da base $pr_\sigma(\mathcal{U})$ de ultra-filtro pode ser constituido de mais de um elemento.

---------

# CAPÍTULO III

# O AXIOMA DA ESCOLHA E CERTAS PROPOSIÇÕES QUE LHE SÃO EQUIVALENTES.

## § 1º - ALGUNS TEOREMAS SÔBRE OS CONJUNTOS BEM ORDENADOS.

30. Neste capítulo, trataremos do assunto pròpriamente da tese, começando por demonstrar, no presente parágrafo, três teoremas sôbre conjuntos bem ordenados, que serão utilizados oportunamente. A fim de evitar que o enunciado do primeiro dêsses teoremas se torne demasiado longo, vamos fazer algumas considerações iniciais, introduzindo uma particular relação de ordem entre as boas ordens sôbre partes de um conjunto dado.

Seja E um conjunto não vazio, e tomemos duas partes $A_1$ e $A_2$ de E, bem ordenadas pelas ordens $\omega_1$ e $\omega_2$, respectivamente. Ponhamos, então, $\omega_1 \leq \omega_2$ quando e sòmente quando $A_1 \subset A_2$ e

$$(x\omega_2 y, \text{ com } y \in A_1) \Longrightarrow x \omega_1 y .$$

Sendo $\Omega$ o conjunto das boas ordena sôbre partes de E, verifica-se que $\omega_1 \leq \omega_2$ $(\omega_1,\omega_2 \in \Omega)$ é, de fato, uma relação de ordem sôbre $\Omega$.

Verifica-se, ainda, que $\omega_1 \leq \omega_2$ se e sòmente se todo segmento de $A_1$ coincide com um segmento, de mesmo extremo, de $A_2$. Em outras palavras, designando-se, como no nº 8, por A(x) o segmento de extremo x, do sub-conjunto bem ordenado A de E, ter-se-á $\omega_1 \leq \omega_2$ quando e sòmente quando $A_1(x) = A_2(x)$, $\forall x \in A_1$. De fato, se $\omega_1 \leq \omega_2$, dado $x \in A_1 \subset A_2$, tem-se, para todo $y \in A_1(x)$ ou seja $y\omega_1 x$ (donde $y\omega_2 x$), $y \in A_2(x)$; e se $y \in A_2(x)$, então $y\omega_1 x$, donde $y \in A_1(x)$. Logo, $A_1(x) = A_2(x)$. Reciprocamente, se $A_1(x) = A_2(x)$, para todo $x \in A_1$, então, $\omega_1 \leq \omega_2$. De fato, é claro que $A_1 \subset A_2$; além disso, se $x\omega_2 y$, com $y \in A_1$, tem-se $A_2(x) \subset A_2(y)$, donde $A_2(x) \subset A_1(y)$, e, pois, $x\omega_1 y$; logo, $\omega_1 \leq \omega_2$.

Provemos, agora, o

TEOREMA 1: <u>Todo sub-conjunto $\Omega'$ de $\Omega$</u> (êste ordenado por $\omega_1 \leq \omega_2$), <u>não vazio e totalmente ordenado, possui mínimo</u>.

<u>Demonstração</u>: Em primeiro lugar, designando-se por $E_\omega$ a parte de E sôbre a qual $\omega$ é uma boa ordem, verifica-se que a inclusão $E\omega_1 \subset E\omega_2$, com $\omega_1,\omega_2 \in \Omega'$, acarreta sempre $\omega_1 \leq \omega_2$. De fato, se não fosse $\omega_1 \leq \omega_2$,

ter-se-ia $\omega_2 \lneq \omega_1$, donde $E_{\omega_2}$ seria uma parte própria de $E_{\omega_1}$, contra a hipótese.

Pondo, agora,

$$A = \bigcap_{\omega \in \Omega'} E_\omega ,$$

provemos que A coincide com um certo $E_{\omega_0}$, $\omega_0 \in \Omega'$. Com efeito, deixando de lado o caso imediato em que $\Omega'$ possui um único elemento, seja $\omega_1$ uma boa ordem pertencente a $\Omega'$, para a qual o conjunto $E_{\omega_1}$ possua elementos fora de A, e designemos por m o menor de tais elementos de $E_{\omega_1}$. Sendo, então, $\omega_0$ um elemento de $\Omega'$ para o qual $m \notin E_{\omega_0}$, tem-se $y\, \omega_1 m$, estritamente, $\forall y \in E_{\omega_0}$. De fato, como $E_{\omega_1} \not\subset E_{\omega_0}$, não poderá ser $\omega_1 \leq \omega_0$; logo, $\omega_0 \lneq \omega_1$, isto é, para todo $y \in E_{\omega_0}$ tem-se (conservando-se a notação adotada nas considerações precedentes),

$$E_{\omega_0}(y) = E_{\omega_1}(y) \; ;$$

como m não pertence ao segundo membro (pois não pertence ao primeiro), resulta $y\, \omega_1\, m$, estritamente, segundo nossa afirmação. Em resumo, qualquer que seja $y \in E_{\omega_0}$, tem-se $y \in A$, visto que, do contrário, m não seria o menor elemento de $E_{\omega_1}$ fora de A. Como, por outro lado, $A \subset E_{\omega_0}$, então $A = E_{\omega_0}$. Portanto, $E_{\omega_0} \subset E_\omega \; \forall \omega \in \Omega'$, ou seja (em virtude do que observamos no início): $\omega_0 \leq \omega$ para todo $\omega \in \Omega'$. Logo, $\omega_0$ é o mínimo de $\Omega'$, C. Q. D.

31. Para os teoremas que se seguem, vamos, primeiramente, fazer as seguintes observações:

1ª) Sendo A e B dois conjuntos bem ordenados pelas ordens $x \leq y$ e $x' \leq y'$, respectivamente, e f uma aplicação estritamente crescente de A em B que transforma todo segmento de A num segmento de B (isto é, a imagem direta, pela f, de cada segmento de A é um segmento de B), então f é única (ou seja, tôda aplicação de A em B, nas condições de f, coincide com f).

Suponhamos, com efeito, que houvesse outra, $g \neq f$; sendo, então, u o menor dos x de A para os quais $f(x) \neq g(x)$, teríamos, digamos, $f(u) \lneq g(u)$; ora, para o elemento $v \in A$ (que certamente existe e é único) satisfazendo $g(v) = f(u)$, resultaria $v \lneq u$, donde $f(v) \lneq f(u) = g(v)$, o que contradiz a hipótese sôbre u.

Por comodidade de linguagem, convém dar um nome à aplicação f; esta será, para nós, a <u>aplicação principal</u> de A em B.

2ª) <u>Se existir uma aplicação biunívoca estritamente crescente de</u> A <u>sôbre</u> B (caso em que A e B se dizem <u>semelhantes</u>), <u>então</u>, f <u>coincide com a aplicação principal de</u> A sôbre B.

De fato, sendo $A(x)$ um segmento qualquer de A, tem-se, evidentemente, $f(A(x)) = B(f(x))$.

Do que precede, resulta que um conjunto bem ordenado E não pode ser semelhante a uma sua parte própria $E_0$ que satisfaça à seguinte condição: <u>se</u> $x \in E_0$, <u>então</u> $E_0$ <u>contém o segmento de</u> E <u>de extremo</u> x. De fato, a aplicação f de $E_0$ em E para a qual $f(x) = x$, $\forall x \in E_0$, é aplicação principal, e não é <u>sôbre</u>.

32. Demonstremos, agora, o

TEOREMA 2: <u>Dados dois conjuntos bem ordenados</u> A <u>e</u> B, <u>existe a aplicação principal, ou de</u> A <u>em</u> B, <u>ou de</u> B <u>em</u> A.

<u>Demonstração</u>: Seja $A_0$ o conjunto dos $x \in A$ (A bem ordenado por $x \leq y$) para os quais existe a aplicação principal $f_x$ do segmento $A(x)$ (bem ordenado pela ordem induzida por $x \leq y$) no conjunto B (bem ordenado por $x \leq y$). É claro que $A_0 \neq \emptyset$, pois o primeiro elemento m de A pertence a $A_0$. Além disso, se $x \in A_0$, então $A(x) \subset A_0$, pois sendo y um elemento qualquer de A, inferior a x, a restrição de $f_x$ ao segmento $A(y)$ é a aplicação principal de $A(y)$ em B.

Pondo-se, agora, para cada $x \in A_0$, $f(x) = f_x(x)$, verifica-se que f é a aplicação principal de $A_0$ em B. De fato, f é estritamente crescente, pois se $x < y$ ($y \in A_0$), vem

$$f(x) = f_x(x) = f_y(x) < f_y(y) = f(y);$$

e, tendo-se, para todo $t \leq x$, $f_x(t) = f_t(t) = f(t)$, resulta

$$f(A(x)) = f_x(A(x)) = B(f_x(x)) = B(f(x)).$$

O teorema ficará, então, demonstrado, se provarmos que, ou $A_0 = A$, ou $f(A_0) = B$ (neste segundo caso, a função inversa de f será a aplicação principal de B em A).

Ora, se nenhuma dessas hipóteses fosse verificada, sendo u e v os mínimos de $A - A_0$ e $B - f(A_0)$, respectivamente, e pondo-se, para todo $x \in A_0$ $\varphi(x) = f(x)$, enquanto que, para $x = u$, $\varphi(u) = v$, ter-se-ia $\varphi = f_u$, donde $u \in A_0$, o que é absurdo, C. Q. D.

<u>Observação</u>. Suponhamos que $A \subset B$ e que a boa ordem $x \leq y$ sôbre $A$ seja a induzida por $x' \leq y'$. Então existirá certamente a aplicação principal de $A$ em $B$. De fato, indicando também por $x \leq y$ a boa ordem sôbre $B$ (o que, agora, não acarretará confusão), e retomando o conjunto $A_0$, assim como a aplicação principal $f$ de $A_0$ em $B$, construidos na demonstração precedente, mostremos que $A_0 = A$. Ora, se assim não fosse, ter-se-ia $f(A_0) = B$, e, pois, no caso de existir algum $t$ de $A_0$ para o qual $f(t) > t$, sendo $y$ o menor dêsses $t$, e $x$ o elemento de $A_0$ para o qual $f(x) = y$, viria $f(x) = y < f(y)$, donde $x < y$ e portanto $f(x) \leq x < y$, o que é absurdo. No caso em que $f(t) \leq t$, para todo $t \in A_0$, tomando-se $y \in A - A_0$, e sendo $x$ o elemento de $A_0$ para o qual $f(x) = y$, ter-se-ia $y \leq x$, isto é, $y \in A(x) \subset A_0$, o que é outro absurdo. Logo, $A_0 = A$ e $f$ é a aplicação principal de $A$ em $B$, C. Q. D.

33. O teorema 3 será também precedido de algumas considerações, que faremos a seguir.

Tomemos o conjunto $\Omega$ das boas ordens sôbre partes de um conjunto $E \neq \emptyset$, já considerado no teorema 1 dêste parágrafo, e definamos sôbre $\Omega$ a seguinte relação de equivalência $R$:

$$\omega_1 \equiv \omega_2 \pmod{R} \qquad (\omega_1, \omega_2 \in \Omega)$$

quando e sòmente quando os conjuntos bem ordenados $E_{\omega_1}$ e $E_{\omega_2}$ são semelhantes. (Para cada $\omega \in \Omega$, $E_\omega$ designa, como sempre, a parte de $E$ sôbre a qual $\omega$ é uma boa ordem).

Verifica-se que $R$ é, efetivamente, uma relação de equivalência sôbre $\Omega$. Designando, então, por $\mathcal{H}$ o conjunto quociente $\Omega/R$, vamos definir uma relação de ordem sôbre $\mathcal{H}$, da seguinte maneira:

$$\alpha \leq \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{H})$$

quando e sòmente quando, sendo $\omega_1$ e $\omega_2$ representantes das classes $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, existe a aplic. princ. de $E_{\omega_1}$ em $E_{\omega_2}$. É claro que essa definição de $\alpha \leq \beta$ não depende dos particulares representantes das classes $\alpha$ e $\beta$; e $\alpha \leq \beta$ é efetivamente uma ordem sôbre $\mathcal{H}$, e, mais ainda, uma ordem total (teorema 2).

Posto isto, provemos o

TEOREMA 3: <u>O conjunto $\mathcal{H}$ é bem ordenado pela ordem</u> $\alpha \leq \beta$.

<u>Demonstração</u>: Se provarmos que existe uma aplicação $\Phi$ do conjunto (suposto não vazio) dos $\alpha$ de $\mathcal{H}$ estritamente inferiores a $\beta$, no conjunto $E_\omega$, o teorema ficará demonstrado. De fato, seja $\mathcal{A}$ uma parte qualquer,

não vazia, de $\mathcal{H}$ e tomemos, nela, um elemento $\beta$. Ora, se $\beta$ for o primeiro elemento de $\mathcal{A}$, nada teremos que provar; se não, a imagem, pela $\Psi$, do conjunto dos elementos de $\mathcal{A}$ estritamente inferiores a $\beta$ possuirá, em $E_\omega$, um menor elemento $x_0$. Sendo, então, $\alpha_0$, o elemento de $\mathcal{A}$ para o qual $\Psi(\alpha_0) = x_0$, $\alpha_0$ será o menor elemento de $\mathcal{A}$: com efeito, como $\Psi$ é estritamente crescente, tem-se $\alpha_0 \leq \alpha$ para todo $\alpha$ de $\mathcal{A}$ estritamente inferior a $\beta$; e, como $\mathcal{H}$ é totalmente ordenado, tem-se $\alpha > \alpha_0$, para todo $\alpha$ de $\mathcal{A}$ não estritamente inferior a $\beta$, visto que $\beta > \alpha_0$. Logo $\mathcal{H}$ é bem ordenado.

Tudo se reduz, então, a demonstrar a existência da aplicação $\Psi$. Seja, pois, $\alpha$ um elemento qualquer de $\mathcal{H}$ estritamente inferior a $\beta$ e tomemos um representante $\omega'$ de $\alpha$. Como $\alpha < \beta$, existirá a aplicação principal f' de $E_{\omega'}$ em $E_\omega$; além disso, sendo $\omega''$ um representante da classe $\gamma \leq \alpha$, e f" a aplicação principal de $E_{\omega''}$ em $E_\omega$, tem-se, òbviamente:

$$f''(E_{\omega''}) \subset f'(E_{\omega'}) . \qquad (6)$$

E se $\gamma < \alpha$, o primeiro membro de (6) será uma parte própria do segundo. Se $\gamma = \alpha$, ter-se-á, em virtude de (6), a igualdade

$$f''(E_{\omega''}) = f'(E_{\omega'}) ,$$

isto é, essa imagem direta não depende do particular representante de $\alpha$. Fica, assim, unìvocamente determinada, para cada $\alpha < \beta$, a parte $A_\alpha$ de $E_\omega$, imagem de $E_{\omega'}$ pela aplicação f' principal de $E_{\omega'}$ em $E_\omega$, onde $\omega'$ é um qualquer representante de $\alpha$. E se $\gamma < \alpha$, então $A_\gamma$ será uma parte própria de $A_\alpha$. Além disso, se $x \in A_\alpha$, êste conjunto conterá o segmento $E_\omega(x)$ de $E_\omega$ (imagem, pela f', de um segmento de $E_{\omega'}$).

Estamos, agora, em condições de construir a aplicação $\Psi$.

De fato, ponhamos, para cada $\alpha < \beta$: $y = \Psi(\alpha)$, onde y é o menor elemento de $E_\omega$ que supera estritamente todos os elementos de $A_\alpha$.

Mostremos que $\Psi$ é estritamente crescente. De fato, se $\gamma < \alpha$, sendo x um elemento de $A_\alpha$ fora de $A_\gamma$, vem:

$$\Psi(\gamma)\, \omega\, x \quad \text{e} \quad x\, \omega\, \Psi(\alpha) \quad (x \neq \Psi(\alpha)),$$

donde $\Psi(\gamma)\, \omega\, \Psi(\alpha)$ <u>estritamente</u>.

Fica, pois, demonstrado o teorema.

## § 2º - ALGUMAS APLICAÇÕES DO TEOREMA DE ZORN E DO AXIOMA DOS ULTRA-FILTROS

34. Neste parágrafo demonstraremos três teoremas que serão utilizados nos quatro últimos teoremas do parágrafo seguinte. O primeiro, assim como o lema e o segundo que se lhe seguem e que dele derivam, dependem essencialmente do Teorema de ZORN; o terceiro é uma aplicação do Axioma dos Ultra-Filtros. Para o primeiro deles faremos, inicialmente, algumas considerações, como se segue.

Dados os conjuntos não vazios E e F, seja O uma operação que associa, univocamente, a cada par de conjuntos $(X,Y)$, $X \subset E$, $Y \subset F$, uma parte, que designaremos por $X \mathbin{O} Y$, de um certo conjunto M (em outras palavras: O é uma aplicação de $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(F)$ em $\mathfrak{P}(M)$). Suponhamos ainda que O satisfaça às duas seguintes condições:

a) Se $X \mathbin{O} Y \subset X' \mathbin{O} Y'$ $\quad (X,X' \in \mathfrak{P}(E),\ Y,Y' \in \mathfrak{P}(F))$,
então $Y \subset Y'$;

b) Sendo $(X_\iota)_{\iota \in I}$ e $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ duas famílias quaisquer de partes não vazias de E e F respectivamente, de modo que a família $(X_\iota \mathbin{O} Y_\iota)_{\iota \in I}$ seja totalmente ordenada por inclusão, tem-se

$$\bigcup_{\iota \in I} (X_\iota \mathbin{O} Y_\iota) = \Big(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota\Big) \mathbin{O} \Big(\bigcup_{\iota \in I} Y_\iota\Big) .$$

Consideremos, agora, uma classe não vazia $\mathfrak{E}$, de partes de E, de modo que $\mathfrak{E}$, ordenada por inclusão, seja indutiva. Designemos por $\mathcal{F}$ o conjunto das aplicações biunívocas de uma parte X de E sôbre a parte $X \mathbin{O} Y$ de M onde $X \in \mathfrak{E}$ e Y é um sub-conjunto de F equipotente a X. Admitindo-se, então, o Teorema de Zorn (Cap. I, § 1º, nº 7), resulta o

TEOREMA 1: <u>Se o conjunto $\mathcal{F}$ não fôr vazio, $\mathcal{F}$, ordenado por prolongamento, possuirá certamente um elemento maximal.</u>

<u>Demonstração</u>. Seja $\mathcal{G}$ o conjunto dos gráficos das aplicações biunívocas de conjuntos de $\mathfrak{E}$ sôbre partes de F, e designemos por $\mathcal{G}'$ o conjunto dos gráficos de aplicações biunívocas de $pr_1(G)$ sôbre $pr_1(G) \mathbin{O} pr_2(G)$ , com $G \in \mathcal{G}$. Supondo $\mathcal{G}'$ não vazio (o que equivale a supor-se $\mathcal{F} \neq \emptyset$), mostremos que $\mathcal{G}'$, ordenado por inclusão, é indutivo. De fato, dada uma parte totalmente ordenada $\mathcal{G}''$ de $\mathcal{G}'$ e sendo $(G'_\iota)_{\iota \in I}$ $(I = \mathcal{G}'')$ a família canônica sôbre $\mathcal{G}''$ (Cap. I, § 2º, nº 13), essa família será, também, totalmeente ordenada

Ora, a cada $G'_\iota$ $(\iota \in I)$ está associado um $G_\iota \in \mathcal{G}$ para o qual $G'_\iota$ é o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr_1(G_\iota)$ sôbre $pr_1(G_\iota) \bigcirc pr_2(G_\iota)$. Esse $G_\iota$ é para cada $\iota \in I$, unìvocamente determinado; com efeito, se $H_\iota \in \mathcal{G}$ estiver nas mesmas condições de $G_\iota$, isto é, se $G'_\iota$ fôr o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr_1(H_\iota)$ sôbre $pr_1(H_\iota) \bigcirc pr_2(H_\iota)$, então ter-se-á, naturalmente,

$$pr_1(G_\iota) = pr_1(H_\iota),$$

e, em virtude da condição (a),

$$pr_2(G_\iota) = pr_2(H_\iota);$$

portanto, $G_\iota = H_\iota$. Além disso, a família $(G_\iota)_{\iota \in I}$ é totalmente ordenada por inclusão, pois dados dois índices quaisquer, $\iota, \sigma \in I$, tem-se, ou $G'_\iota \subset G'_\sigma$ ou $G'_\sigma \subset G'_\iota$, donde, raciocinando como acima, vem, correspondentemente, ou $G_\iota \subset G_\sigma$ ou $G_\sigma \subset G_\iota$.

Pondo-se, agora,

$$G = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota \qquad \text{e} \qquad G' = \bigcup_{\iota \in I} G'_\iota,$$

$G$ será o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr_1(G)$ sôbre $pr_2(G)$, enquanto que $G'$ será o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr_1(G)$ sôbre $pr_1(G) \bigcirc pr_2(G)$. De fato, sendo $(x,y)$ e $(x',y')$ dois elementos quaisquer de $G$, êles estarão num mesmo conjunto $G_\alpha$ $(\alpha \in I)$, e, portanto, $x = x' \iff y = y'$. Por outro lado, $G'$ será, igualmente, o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr'_1(G')$ sôbre $pr'_2(G')$, onde $pr'_1$ e $pr'_2$ designam, respectivamente, a primeira e a segunda projeção para o produto $E \times M$. Porém,

$$pr'_1(G') = pr'_1(\bigcup_{\iota \in I} G') = \bigcup_{\iota \in I} pr'_1(G'_\iota) = \bigcup_{\iota \in I} pr_1(G_\iota) = pr_1(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota) =$$

$$= pr_1(G),$$

e, por fôrça da condição (b),

$$pr'_2(G') = \bigcup_{\iota \in I} (pr_1(G_\iota) \bigcirc pr_2(G_\iota)) = pr_1(G) \bigcirc pr_2(G).$$

Como $pr_1(G)$ pertence a $\mathcal{E}$ (pois êste é indutivo, e a família $(pr_1(G_\iota))_{\iota \in I}$ é totalmente ordenada), segue-se que $G'$, extremo superior dos conjuntos $G'_\iota$ $(\iota \in I)$, pertence a $\mathcal{G}'$; portanto, êste é indutivo.

Finalmente, pelo teorema de Zorn, $\mathcal{G}'$ possuirá um elemento maximal $G'^*$ que será o gráfico de uma aplicação biunívoca de $pr_1(G^*)$ sôbre

$$pr_1(G^*) \bigcirc pr_2(G^*),$$

onde $G^*$ é o gráfico de uma aplicação biunívoca $f^*$ pertencente a $\mathcal{E}$, de uma certa parte $E^* \subset E$, sôbre uma parte $F^*$ de $F$. Como $f^*$ é um elemento maximal de $\mathcal{F}$ ordenado por prolongamento (pois $G'^*$ é maximal em $\mathcal{G}'$), o teorema fica demonstrado.

35. Como uma primeira aplicação do teorema precedente, vamos demonstrar o seguinte

LEMA: <u>Todo conjunto não finito contém um sub-conjunto infinito enumerável</u>.

De fato, tomemos, no teorema anterior, para E, o conjunto dos números naturais; para $\mathcal{E}$, o conjunto formado por E e pelos segmentos de E; para F, o conjunto não finito em questão. Finalmente, ponhamos $X \circ Y = Y$, para todo $X \subset E$ e todo $Y \subset F$.

As condições segundo as quais o teorema anterior se pode aplicar são, evidentemente, verificadas. Existe, portanto, uma aplicação maximal $f^*$ de um conjunto $E^* \in \mathcal{E}$ sôbre um $E^* \circ F^* = F^*$ contido em F. Se mostrarmos que $E^* = E$, o lema ficará provado. Ora, não se poderá ter $E^* \neq E$, pois, do contrário, $E^*$ seria um segmento $E(m)$ de E; como F não é finito, poder-se-ia tomar um elemento y em $F - f^*(E(m))$ e construir-se a aplicação biunívoca g de $E(m+1)$ sôbre a parte $\{y\} \cup f^*(E(m))$ de F, do seguinte modo:

$$g(x) = \begin{cases} f^*(x) & \text{se} \quad 1 \leq x \leq m \\ y & \text{se} \quad x = m+1 \, ; \end{cases}$$

mas, então, $f^*$ não seria maximal. Logo $E^* = E$, C. Q. D.

<u>Observação</u>. Quando se admite o Axioma da Escolha, pode-se assegurar, em virtude do lema precedente, que todo conjunto não finito é, necessàriamente, infinito.

36. Uma outra aplicação do teorema precedente será feita, agora, para estabelecermos um conhecido resultado da teoria dos conjuntos, que será utilizado na prova da equivalência $P_I \Longleftrightarrow P_{VI}$ (§ 3º). Trata-se do

TEOREMA 2: <u>A reunião de dois conjuntos infinitos equipotentes, E e F, é equipotente a cada um deles</u>.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos, primeiramente, que E e F sejam disjuntos. Tomando-se para O, a operação $\cup$, e para $\mathcal{E}$ o conjunto das partes de E, verifica-se que as condições para se aplicar o teorema 1 são satisfeitas. Existe, pois, uma aplicação maximal $f^*$ de uma parte $E^*$ de E sôbre uma parte $E^* \cup F^*$ de $E \cup F$, com $E^* \sim F^*$ (1). Se provarmos que $E^* \sim E$, o teorema ficará

(1) Daqui por diante escreveremos $C \sim D$ para indicar que o conjunto C

demonstrado. Ora, se não fosse $E^* \sim E$, os conjuntos $E - E^*$ e $F - F^*$ seriam, ambos, não finitos, e, portanto, existiriam (lema anterior) dois conjuntos infinitos enumeráveis $A$ e $B$, contidos em $E - E^*$ e $F - F^*$, respectivamente.

Sendo, como se sabe, $E^* \cup A$ e $F^* \cup B$ equipotentes, e existindo, também, uma aplicação biunívoca $f$ de $A$ sôbre $A \cup B$, poderiamos construir a aplicação biunívoca $g$ de $E^* \cup A$ sôbre $(E^* \cup A) \cup (F^* \cup B)$ estritamente superior a $f^*$ (na ordem por prolongamento) da seguinte maneira:

$$g(x) = \begin{cases} f^*(x) & \text{se} \quad x \in E^* \\ f(x) & \text{se} \quad x \in A \, ; \end{cases}$$

então $f^*$ não seria maximal, contra a hipótese. Portanto, $E^*$ é equipotente a $E$, resultando, pois, o teorema para o caso em que $E$ e $F$ são disjuntos.

Notemos agora que, se $C$ e $D$ forem dois conjuntos disjuntos, o primeiro infinito, e o segundo equipotente a uma parte $C'$ de $C$, então $C \cup D$ e $C$ serão equipotentes. De fato, deixando de lado o caso trivial em que um dos conjuntos $C'$ e $C - C'$ seja finito, tem-se, como se acabou de provar, $C' \sim C' \cup D$ por uma aplicação biunívoca $\varphi$ do primeiro sôbre o segundo. Pondo-se, então,

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para} \quad x \in C' \\ x & \text{para} \quad x \in C - C' \, , \end{cases}$$

vê-se que $h$ é uma aplicação biunívoca de $C$ sôbre

$$(C - C') \cup (C' \cup D) = C \cup D \, ,$$

segundo se afirmou.

Posto isto, se $E$ e $F$ não forem disjuntos, sendo $F'$ o conjunto dos elementos de $F$ que não pertencem a $E$, $F'$ será equipotente a uma parte $E'$ de $E$. Tomando-se, então $C = E$, $D = F'$ e $C' = E'$, vem, segundo notámos há pouco,

$$E \sim E \cup F' \, , \qquad \text{ou seja} \qquad E \sim E \cup F \, ,$$

ficando, assim, completamente demonstrado o teorema 2.

37. Admitindo-se, agora, o axioma dos ultra-filtros, e, portanto, o teorema de Tychonoff, pode-se provar o seguinte resultado (que será utilizado na prova da equivalência $P_I \iff P_{VII}$ (§ 3º)), expresso pelo

TEOREMA 3: <u>Se $(E_\iota)_{\iota \in I}$ fôr uma família qualquer de espaços topológicos compactos, com todos os $E_\iota$ não vazios, então o produto cartesiano</u>

é equipotente ao conjunto D.

$$E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$$

<u>será, também, não vazio</u>.

<u>Demonstração</u>. Tomemos um elemento qualquer, w, fora da reunião dos $E_\iota$, e ponhamos $E'_\iota = E_\iota \cup \{w\}$ para todo $\iota \in I$. É claro, então, que o produto cartesiano

$$E' = \prod_{\iota \in I} E'_\iota$$

é não vazio, pois a êle pertence o elemento em que tôdas as coordenadas são iguais a w.

Sendo, agora, para $\iota \in I$, $\mathcal{T}_\iota$ a topologia (compacta) do espaço $E_\iota$, consideremos, sôbre $E'_\iota$, a topologia $\mathcal{T}'_\iota$ que induz $\mathcal{T}_\iota$ sôbre $E_\iota$ e, na qual, $\{w\}$ é, ao mesmo tempo, aberto e fechado. Essa topologia $\mathcal{T}'_\iota$ (certamente única para $\iota \in I$) é compacta. De fato, $\mathcal{T}'_\iota$ é separada, o que se verifica imediatamente; além disso, dado um filtro qualquer, $\mathcal{F}_\iota$, sôbre $E'_\iota$, ou $\{w\}$ pertence a $\mathcal{F}_\iota$ (e neste caso w pertence a todos os conjuntos de $\mathcal{F}_\iota$), ou $\{w\}$ não pertence a $\mathcal{F}_\iota$; no primeiro caso, w é aderente a $\mathcal{F}_\iota$, e, no segundo, o conjunto $\mathcal{B}_\iota$ das intersecções dos conjuntos de $\mathcal{F}_\iota$ com $E_\iota$ será uma base de filtro sôbre $E_\iota$; logo, $\mathcal{B}_\iota$ admitirá, em $E_\iota$, um ponto aderente x que será, com maior razão, aderente a $\mathcal{F}_\iota$. Portanto, para cada $\iota \in I$, $E'_\iota$ é um espaço compacto, donde, pelo teorema de Tychonoff, o produto E' é compacto.

Considerando-se, agora, em E, os conjuntos da forma

$$\overset{-1}{\mathrm{pr}}_\iota(E_\iota) \qquad (\iota \in I),$$

vê-se que êstes constituem um sistema $\mathcal{G}$ de geradores de um certo filtro sôbre E'. De fato, tomando-se, em I, n índices quaisquer, digamos $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, tem-se

$$\overset{-1}{\mathrm{pr}}_\alpha(E_\alpha) \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}}_\beta(E_\beta) \cap \ldots \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}}_\lambda(E_\lambda) = \prod_{\iota \in I} A_\iota, \tag{7}$$

onde, para $\iota = \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, $A_\iota = E_\iota$, e, para outros valores de $\iota$, $A_\iota = E'_\iota$. Ora, como os índices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ são em número finito, podemos, sem o auxílio do Axioma da Escolha, tomar os elementos $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$, respectivamente em $E_\alpha, E_\beta, \ldots, E_\lambda$; então, o elemento $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de E', com $x_\iota = w$ para $\iota$ diferente de cada um dos índices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, pertence ao segundo membro de (7), donde se conclui que $\mathcal{G}$ é, de fato, um sistema de geradores de um filtro $\mathcal{F}$ sôbre E'.

Como E' é compacto, existirá, aí, um ponto $y = (y_\iota)_{\iota \in I}$ aderente a $\mathcal{F}$. Porém, tôdas as coordenadas $y_\iota$ de y são diferentes de w; com efeito, para cada $\iota \in I$, tem-se $y \in \overset{-1}{\mathrm{pr}}(E_\iota)$, visto que esta imagem recíproca é um conjunto fechado em E' (pois o é $E_\iota$ em $E'_\iota$) e pertence a $\mathcal{G}$ que, por sua vez, está contido em $\mathcal{F}$. Logo, $y \in E$, isto é, E não é vazio, C. Q. D.

## § 3º - PROPOSIÇÕES EQUIVALENTES AO AXIOMA DA ESCOLHA.

38. Neste parágrafo, em que tratamos diretamente do assunto da tese, vamos demonstrar a equivalência, duas a duas, das sete seguintes proposições:

$P_I$. O produto cartesiano de uma família qualquer de partes de um conjunto E é não vazio sempre que cada um dos fatores seja não vazio (Axioma da Escolha).

$P_{II}$. Dada uma família qualquer

$$\left((A_{(\sigma,\iota)})_{\iota \in I_\sigma}\right)_{\sigma \in S}$$

de famílias $(A_{(\sigma,\iota)})_{\iota \in I_\sigma}$ de partes de um conjunto E, com o produto cartesiano

$$I = \prod_{\sigma \in S} I_\sigma$$

não vazio, tem-se:

$$\bigcap_{\sigma \in S} \left( \bigcup_{\iota \in I_\sigma} A_{(\sigma,\iota)} \right) = \bigcup_{\lambda \in I} \left( \bigcap_{\sigma \in S} A_{(\sigma, pr_\sigma(\lambda))} \right). \quad (8)$$

(Distributividade generalizada da intersecção relativamente à reunião).

$P_{III}$. Todo conjunto ordenado indutivo possui pelo menos um elemento maximal. (Teorema de ZORN).

$P_{IV}$. Dado um conjunto não vazio qualquer, E, existe uma boa ordem sôbre E. (Theorema de ZERMELO).

$P_V$. Dados dois conjuntos quaisquer E e F, ou E é equipotente a uma parte de F, ou F é equipotente a uma parte de E. (Tricotomia da ordem entre as potências).

$P_{VI}$. Todo conjunto não finito, E, é equipotente ao seu quadrado $E^2 = E \times E$.

$P_{VII}$. Todo filtro sôbre um conjunto E está contido num ultra-filtro sôbre E; além disso, para cada família de conjuntos não vazios, $(E_\iota)_{\iota \in I}$, existe uma família $(\mathfrak{T}_\iota)_{\iota \in I}$ de topologias compactas respectivamente sôbre os $E_\iota$.

39. A fim de destacar as equivalências a serem demonstradas, separêmo-las em teoremas, começando, então, com o

TEOREMA 1: $P_I$ <u>é equivalente a</u> $P_{II}$.

<u>Demonstração</u>. Provemos que $P_I \Longrightarrow P_{II}$. Seja x um elemento qualquer do primeiro membro de (8); então existe, para cada $\sigma \in S$, um $\iota \in I_\sigma$ de modo a ter-se $x \in A_{(\sigma,\iota)}$, e, pois, designando-se por $I'_\sigma$ o conjunto dos $\iota \in I_\sigma$ para os quais $x \in A_{(\sigma,\iota)}$, tem-se $I'_\sigma \neq \emptyset$ qualquer que seja $\sigma \in S$. Existe, portanto, em virtude de $P_I$, um $\lambda$ pertencente ao produto

$$\prod_{\sigma \in S} I'_\sigma \subset I\ ;$$

como $\lambda = (pr_\sigma(\lambda))_{\sigma \in S}$, segue-se que $x \in A_{(\sigma, pr_\sigma(\lambda))}$, para todo $\sigma \in S$, donde x pertence ao segundo membro de (8).

A inclusão, em sentido contrário, não depende de $P_I$; é apenas uma consequência do fato de que, para todo $\lambda \in I$, tem-se, qualquer que seja $\sigma \in S$:

$$A_{(\sigma, pr_\sigma(\lambda))} \subset \bigcup_{\iota \in I_\sigma} A_{(\sigma,\iota)}\ ;$$

com efeito, tomando-se a intersecção de ambos os membros desta inclusão, quando $\sigma$ percorre S, vem, para cada $\lambda \in I$:

$$\bigcap_{\sigma \in S} A_{(\sigma, pr_\sigma(\lambda))} \subset \bigcap_{\sigma \in S} \Big( \bigcup_{\iota \in I_\sigma} A_{(\sigma,\iota)} \Big),$$

donde, fazendo-se $\lambda$ percorrer I e tomando-se a reunião do primeiro membro, resulta a inclusão do segundo membro de (8) no primeiro da mesma igualdade. Logo, $P_I \Longrightarrow P_{II}$.

Mostremos, agora, que $P_{II} \Longrightarrow P_I$. Seja, então, $(J_\sigma)_{\sigma \in S}$ uma família qualquer de partes de um conjunto dado, com $J_\sigma \neq \emptyset$ para todo $\sigma \in S$. Tomando-se um elemento, digamos, w, fora da reunião dos $J_\sigma$, e pondo-se, para cada $\sigma \in S$, $I_\sigma = J_\sigma \cup \{w\}$, o produto

$$I = \prod_{\sigma \in S} I_\sigma$$

será (como observamos na demonstração do teorema 3 do nº 37) não vazio. Seja, agora, m um elemento qualquer (por exemplo, o inteiro 1) e ponhamos $A_{(\sigma,\iota)} = \{m\}$ para $(\sigma,\iota) \in S \times (\bigcup_{k \in S} J_k)$ e $A_{(\sigma,w)} = \emptyset$ para todo $\sigma \in S$. O primeiro membro de (8) reduzir-se-á, evidentemente, a $\{m\}$, o mesmo acontecendo, portanto (em virtude de $P_{II}$), com o segundo membro. Existirá, então, um $\alpha \in I$ pára o qual

$$m \in A_{(\sigma, pr_\sigma(\alpha))}, \quad \forall \sigma \in S\ ;$$

porém, $pr_\sigma(\alpha) \neq w$ para todo $\sigma \in S$, visto que, do contrário, algum dos $A_{(\sigma, pr_\sigma(\alpha))}$ seria vazio. Logo, o elemento $\alpha$ pertence a

$$\prod_{\sigma \in S} J_\sigma ,$$

isto é, êste produto não é vazio. Portanto, $P_{II} \Longrightarrow P_I$, ficando, assim, demonstrada a equivalência $P_I \Longleftrightarrow P_{II}$.

Dualmente, a distributividade generalizada da reunião relativamente à intersecção é equivalente ao Axioma da Escolha.

40. Vejamos, agora, o

TEOREMA 2: $P_I$ é equivalente a $P_{III}$.

Para prová-lo, vamos demonstrar primeiramente (sem o auxílio de $P_I$) o seguinte

LEMA: Seja $E$ um conjunto ordenado pela ordem $x \leq y$. Se, então, $E$ fôr indutivo, dada uma aplicação $f$ de $E$ em $E$, satisfazendo $f(x) \geq x$ para todo $x \in E$, existirá, certamente, um elemento $b \in E$ para o qual $f(b) = b$.

Demonstração. Suponhamos que se verifiquem as condições do lema, isto é, que $E$ seja indutivo e $f(x) \geq x$ para todo $x \in E$. Fixado, então, um elemento $m \in E$, designemos por $\mathscr{C}$ a classe dos sub-conjuntos $X$ de $E$ que satisfazem às três seguintes condições:

$(a_1)$. $m \in X$;

$(a_2)$. $f(X) \subset X$ ;

$(a_3)$. Sendo $T$ um sub-conjunto qualquer de $X$, totalmente ordenado, então $\sup(T) \in X$. (Em outras palavras: $X$, ordenado pela ordem induzida por $x \leq y$, é indutivo).

É claro que o conjunto $E$ satisfaz a essas três condições. Além disso, sendo $M$ a intersecção dos conjuntos de $\mathscr{C}$, verifica-se que $M$ pertence a $\mathscr{C}$. Por outro lado, $m$ é o menor elemento de $M$, pois o conjunto

$$\{y \in E \mid y \geq m\}$$

pertence a $\mathscr{C}$, como fàcilmente se verifica.

Se provarmos que $M$ é totalmente ordenado, resultará o Lema, pois, sendo $b = \sup(M)$ ($b \in M$ em virtude de $(a_3)$) e não podendo ser, então, $f(b) > b$ (pois $f(b) \in M$), dever-se-á ter $f(b) = b$. Mas, por sua vez, a ordem total sôbre $M$ poderá assegurar-se se provarmos que, pondo para cada $x \in M$,

$$M'_x = \{y \in M \mid y \leq x\} \quad \text{e} \quad M''_x = \{y \in M \mid y \geq x\},$$

resulta, para todo $x \in M$,

$$M = M'_x \cup M''_{f(x)} ; \tag{9}$$

de fato, se (9) é verdadeira $\forall x \in M$, então, dados dois elementos quaisquer x e y, de M, tem-se $y \leq x$ ou $y \geq f(x) \geq x$, segundo se verifique $y \in M'_x$ ou $y \in M''_{f(x)}$.

Tudo se reduz, pois, a demonstrar que (9) se verifica, efetivamente, para todo $x \in M$. Ora, ponhamos

$$M_o = \{x \in M \mid (y \in M \text{ e } y < x) \Longrightarrow f(y) \leq x\} ,$$

e mostremos que, para os $x \in M_o$, a igualdade (9) se verifica. Com efeito, fixemos um x em $M_o$ e designemos por A o conjunto que, para êsse x, se obtém no segundo membro de (9). Em primeiro lugar, tem-se $m \in A$, pois $m \in M'_x$. Por outro lado, se $y \in A$, então $f(y) \in A$; de fato, se $y \in M'_x$, tem-se $f(y) \in M'_x$ quando $y < x$, e $f(y) \in M''_{f(x)}$ quando $y = x$; se, ao invés, $y \in M''_{f(x)}$, tem-se $f(y) \geq y \geq f(x)$, donde $f(y) \in M''_{f(x)}$. Em qualquer caso, pois, $y \in A \Longrightarrow f(y) \in A$. Finalmente, se T fôr um sub-conjunto de A, totalmente ordenado, então sup(T), que é um elemento de M, pertencerá ou a $M'_x$ ou a $M''_{f(x)}$, segundo T esteja, ou não, contido em $M'_x$; logo, $\sup(T) \in A$.

Em resumo, o conjunto A satisfaz às condições $(a_1)$, $(a_2)$ e $(a_3)$; portanto, A pertence a $\mathcal{C}$ , e como $A \subset M$, segue-se que $A = M$.

Resta, agora, provar que $M_o = M$ a fim de assegurarmos a veracidade de (9) $\forall x \in M$. Para isso, é suficiente mostrar que $M_o \in \mathcal{C}$ . Ora, o elemento m pertence, òbviamente, a $M_o$. De outra parte, sendo x um elemento qualquer de $M_o$, tem-se $f(x) \in M_o$. Com efeito, em virtude de (9), tem-se $y \in M'_x$ para todo $y < f(x)$ $(y \in M)$; se, então, $y = x$, vem $f(y) =$ $= f(x)$; se $y < x$, resulta, do fato de x pertencer a $M_o$,

$$f(y) \leq x \leq f(x);$$

em qualquer caso, pois, a verificação de $y \in M$ e $y < f(x)$ implica $f(y) \leq f(x)$; logo, $f(x) \in M_o$. Finalmente, sendo T uma parte totalmente ordenada de $M_o$, e designando-se por s o extremo superior de T (s será um elemento de M), verifica-se que $s \in M_o$. Com efeito, se $y < s$ $(y \in M)$, existirá um $t \in T$ estritamente superior a y, pois, do contrário, como todo elemento de $M_o$, e portanto de T, é comparável com todo elemento de M, ter-se-ia $t \leq y$, $\forall t \in T$, donde $s \leq y$, contra a hipótese; sendo, então, $t > y$ $(t \in T)$, virá $f(y) \leq t \leq s$, donde $s \in M_o$.

Fica, assim, provado que $M_o$ satisfaz às condições $(a_1)$, $(a_2)$ e $(a_3)$, isto é, que $M_o \in \mathcal{C}$; como $M_o \subset M$, então $M_o = M$, resultando, portanto, o Lema, C. Q. D.

Estamos, agora, em condições de provar o Teorema 2. Mostremos, então, que $P_I \Longrightarrow P_{III}$. Para isso, reconsideremos o conjunto ordenado indutivo $E$, e ponhamos para cada $x \in E$:

$$A_x = \{ y \in E \mid y > x \}$$

se existir, em $E$, algum $y > x$; e

$$A_x = \{x\} \ ,$$

se não existir nenhum $y$ de $E$ estritamente superior a $x$.

É claro, então, que $A_x \neq \emptyset$, $\forall x \in E$, donde, em virtude de $P_I$,

$$\prod_{x \in E} A_x \neq \emptyset \ ,$$

isto é, existe uma aplicação $f$ de $E$ em $E$ de modo que $f(x) \in A_x$, $\forall x \in E$; e, portanto, $f(x) \geq x$ para todo $x \in E$. Pelo Lema precedente, existe um $b \in E$ verificando $b = f(b)$; então, $A_b = \{b\}$, isto é, não existe nenhum elemento de $E$ estritamente superior a $b$, o que equivale a dizer que $b$ é elemento maximal de $E$.

Provemos, agora, que $P_{II} \Longrightarrow P_I$. Seja $(X_\iota)_{\iota \in I}$ uma família qualquer de sub-conjuntos de um conjunto $F$, com $X_\iota \neq \emptyset$, $\forall \iota \in I$, e consideremos a classe $\mathcal{G}$ dos gráficos $G$ de aplicações de partes de $I$ em $F$, satisfazendo à seguinte propriedade: "$(\iota, x) \in G \Longrightarrow x \in X_\iota$". É claro que $\mathcal{G} \neq \emptyset$; além disso, $\mathcal{G}$, ordenado por inclusão, é indutivo. Existe, então, um elemento maximal $G^* \in \mathcal{G}$, o qual deverá, portanto, satisfazer $pr_1(G^*) = I$, pois, do contrário, tomando-se $\sigma$ em $I$, fora de $pr_1(G^*)$, e $x$ em $X_\sigma$, o conjunto $G^* \cup \{(\sigma, x)\}$ pertenceria a $\mathcal{G}$ e conteria pròpriamente $G^*$. Pondo-se, então, $f(\iota) = x$ para $(\iota, x) \in G^*$, tem-se $f(\iota) \in X_\iota$, $\forall \iota \in I$, isto é, a família $(f(\iota))_{\iota \in I}$ pertence ao produto $\prod_{\iota \in I} X_\iota$, o qual, portanto, não é vazio, C.Q.D.

TEOREMA 3: $P_I$ _é equivalente a_ $P_{IV}$.

_Demonstração_. $P_I \Longrightarrow P_{IV}$. De fato, tendo presentes o teorema 1 do nº 30 (§ 1º) e as notações aí empregadas, se provarmos que o conjunto $\Omega$ (das boas ordens sôbre partes de $E$) é indutivo, então $\Omega$ possuirá um elemento maximal $\omega^*$ que será uma boa ordem sôbre uma parte $E^*$ de $E$. Como $E^* = E$ (pois do contrário, tomando-se um elemento $z \in E - E^*$, poder-se-ia construir, de maneira evidente, uma boa ordem sôbre $E^* \cup \{z\}$ estritamente superior a $\omega^*$) segue-se que $E$ é bem ordenado pelo ordem $\omega^*$.

Tudo se reduz, pois, a provar que $\Omega$ (ordenado pela ordem $\omega_1 \leq \omega_2$) é indutivo. Seja, então, $\Omega'$ uma parte qualquer de $\Omega$, totalmente ordedenada e consideremos, sôbre o conjunto

$$E' = \bigcup_{\omega \in \Omega} E_\omega ,$$

a relação de ordem $\bar{\omega}$ definida da seguinte maneira: $x\bar{\omega}y$ quando e sòmente quando existe $\omega \in \Omega'$ para a qual $x\omega y$ $(x,y \in E_\omega)$. Essa relação $\bar{\omega}$ é unìvocamente determinada, visto que $\Omega'$ é totalmente ordenado; além disso, $\bar{\omega}$ é efetivamente uma relação de ordem sôbre E', o que se verifica fàcilmente. Mostremos, então, que E' é bem ordenado por $\bar{\omega}$. Com efeito, dada uma parte não vazia E" de E', o conjunto $\Omega''$ dos $\omega \in \Omega'$ para os quais $E'' \cap E_\omega \neq \emptyset$ é, evidentemente, não vazio, e mais ainda, totalmente ordenado. Então, pelo teorema 1 do nº 30 (§ 1º), $\Omega$ possui um menor elemento $\omega_0$, donde $E_\omega \subset E_{\omega_0}$ $\forall \omega \in \Omega''$. Ora, da definição de $\bar{\omega}$ resulta que, sendo m o mínimo de $E'' \cap E_{\omega_0}$, $m\bar{\omega}x$ para todo x pertencente a

$$E'' = \bigcup_{\omega \in \Omega''} E'' \cap E_\omega ,$$

isto é, m é o menor elemento de E" segundo a ordem $\bar{\omega}$ ; logo, esta é uma boa ordem sôbre a parte $E' = E_{\bar{\omega}}$ de E. Como $\bar{\omega}$ é, evidentemente, o extremo superior de $\Omega'$, segue~~se~~ que $\Omega$ é indutivo. Logo, em virtude das considerações que fizemos no início desta demonstração, segue-se que $P_I \Longrightarrow P_{IV}$.

A implicação $P_{IV} \Longrightarrow P_I$ é imediata.

42. Provemos, em seguida, o

TEOREMA 4: $P_I$ <u>é equivalente a</u> $P_V$.

<u>Demonstração</u>. $P_I \Longrightarrow P_V$. De fato, tomando-se, no teorema 1 do nº 34 (§ 2º), para $\mathfrak{S}$ o conjunto das partes de E, e pondo-se, para todo $X \subset E$ e $Y \subset F$,

$$X \circ Y = Y ,$$

verifica-se que as condições sob as quais o referido teorema se aplica são verificadas. Existirá, então, uma aplicação biunívoca maximal de uma parte E* de E sôbre uma parte F* de F e, portanto, ou E* = E ou F* = F, isto é, ou E é equipotente a uma parte de F, ou êste é equipotente a uma parte de E.

Mostremos, agora, que $P_V \Longrightarrow P_I$. Bastará, para isso, provar que $P_V \Longrightarrow P_{IV}$. Reportêmo-nos ao teorema 3 do nº 33 (§ 1º), tendo presentes as notações alí empregadas. Se E fôr equipotente a uma parte de $\mathcal{H}$ , por uma aplicação biunívoca $f$ de $E$ em $\mathcal{H}$, então $E$ será bem ordenado pela ordem $\omega$, em que $x\omega y$ $(x,y \in E)$ quando e sòmente quando $f(x) \leq f(y)$.

Se $E$ não fôr equipotente a uma parte de $\mathcal{H}$ êste será equipotente a uma parte própria de $E$ por uma aplicação biunívoca $g$ do primeiro no segundo. Então a parte $g(\mathcal{H})$ de $E$ será bem ordenada pela ordem $\omega$ definida, agora, assim: $x\omega y$ quando e sòmente quando $\overset{-1}{g}(x) \leq \overset{-1}{g}(y)$. Conservando as notações já empregadas, teremos $g(\mathcal{H}) = E_\omega$. Tomando-se um elemento $z \in E - E_\omega$, e pondo-se

$$x\omega' y \Longleftrightarrow x\omega y \quad (x,y \in E_\omega) \text{ e } x\omega' z,$$

então, $\omega'$ será uma boa ordem sôbre o conjunto $E_{\omega'} = E_\omega \cup \{z\}$, estritamente superior a $\omega$.

Ponhamos, agora, para cada $x \in E_{\omega'}$, $\varphi(x) = \alpha$, onde $\alpha$ é a classe de $\mathcal{H}$ a que pertence o segmento $E_{\omega'}(x)$ de $E_{\omega'}$. É claro que $\varphi$ é uma aplicação estritamente crescente de $E_{\omega'}$ em $\mathcal{H}$. Como $\varphi(E_{\omega'}) \subset \mathcal{H}$, existirá a aplicação principal $h$ de $\varphi(E_{\omega'})$ (ordenado pela ordem induzida por $\alpha \leq \beta$) em $\mathcal{H}$ (observação ao teorema 2 do nº 32); pondo-se, então, para cada $x \in E_{\omega'}$,

$$\varphi'(x) = g(h(\varphi(x))),$$

$\varphi'$ será a aplicação principal de $E_{\omega'}$ em $E_\omega$, o que é absurdo, uma vez que $\omega'$ é estritamente superior a $\omega$.

Logo, $E$ é equipotente a uma parte de $\mathcal{H}$, donde, segundo o raciocínio já feito, existe uma boa ordem sôbre $E$, C. Q. D.

43. Tratemos, agora, do

TEOREMA 5: $P_I$ <u>é equivalente a</u> $P_{VI}$.

<u>Demonstração</u>. Mostremos que $P_I \Longrightarrow P_{VI}$, ou seja, que $P_{III} \Longrightarrow P_{VI}$. Pondo-se, no teorema 1 do nº 34 (§ 2º), $E = F$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, e

$$X \; O \; Y = Y \times Y \qquad (X,Y \in \mathcal{P}(E)),$$

verificam-se as condições sob as quais se aplica o referido teorema. Existirá, pois, uma aplicação biunívoca maximal $f^*$ de uma parte $E^*$ de $E$ sôbre $F^* \times F^*$, onde $F^*$ é uma parte de $E$ equipotente a $E^*$. Se provarmos que $E^*$ é equipotente a $E$, a implicação $P_{III} \Longrightarrow P_{VI}$ estará demonstrada. Ora, se não fôr $E^* \sim E$, então $E^*$ será equipotente a uma parte $E'$ de $E - E^*$. Anàlogamente, $F^*$ será equipotente a uma parte $F'$ de $E - F^*$. Ora, $(F^* \cup F') \times (F^* \cup F')$ é igual a $F^* \times F^* \cup H$, onde $H$ é equipotente a $F'$ e, portanto, a $E'$, por uma aplicação biunívoca, digamos $f'$, de $E'$ sôbre $H$.

Pondo-se, então,

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x) & \text{se} \quad x \in E^* \\ f'(x) & \text{se} \quad x \in E', \end{cases}$$

f seria uma aplicação biunívoca de $E^* \cup E'$ sôbre $(F^* \cup F') \times (F^* \cup F')$, com $E^* \cup E'$ equipotente a $F^* \cup F'$. Mas isto é absurdo, pois f é estritamente superior a $f^*$ (na ordem por prolongamento) contra a hipótese de que esta é maximal. Logo $E^* \sim E$, donde $F^* \sim E$, e, portanto, $E \sim E \times E$, C. Q. D.

Para provarmos que $P_{VI} \Longrightarrow P_I$, ou seja, que $P_{VI} \Longrightarrow P_{IV}$, vamos, primeiramente, demonstrar o seguinte

LEMA: Sendo A e B dois conjuntos disjuntos, o primeiro bem ordenado, verificando

$$A \cup B \sim A \times B,$$

então, ou A é equipotente a uma parte de B, ou êste é equipotente a uma parte de A.

Demonstração. Seja f uma aplicação biunívoca de $A \cup B$ sôbre $A \times B$. Pondo-se $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, os conjuntos A' e B' formarão uma partição de $A \times B$. Temos, então, dois casos a considerar: ou existe um elemento $b \in B$ para o qual $A \times \{b\} \subset B'$, ou, para todo $b \in B$ existe um $a \in A$ de modo que $(a,b) \notin B'$, e, portanto, $(a,b) \in A'$. No primeiro caso, A, que é equipotente a $A \times \{b\} \subset B'$, será equipotente a uma parte de B', e, portanto, a uma parte de B. No segundo, designando-se por $a_b$ o menor dos elementos de A para o qual $(a_b, b) \in A'$, a aplicação $\varphi$ de B em A', que associa a cada $b \in B$ o elemento $(a_b, b) \in A'$, é biunívoca; e como $\varphi(B) \subset A' \sim A$, segue-se que B é equipotente a uma parte de A, C.Q.D.

Provemos, agora, que $P_{VI} \Longrightarrow P_{IV}$. Consideremos um conjunto qualquer E, não vazio, e provemos que existe uma boa ordem sôbre E. Deixando de lado o caso imediato em que E é finito, seja $\mathcal{H}$ o conjunto bem ordenado pela ordem $\alpha \leq \beta$, construido a partir de E, no nº 33 (teorema 3). Ora, o conjunto $\mathcal{H}$ também não poderá ser finito, pois do contrário êle seria equipotente a uma parte própria de E, o que não é possível segundo se verificou na demonstração de que $P_V \Longrightarrow P_{IV}$, no teorema precedente.

Pondo, agora,

$$A = \mathcal{H} \times \{1\} \quad \text{e} \quad B = E \times \{2\},$$

os conjuntos A e B, respectivamente equipotentes a $\mathcal{H}$ e E, são disjuntos, e A é bem ordenado. Ora, em virtude de $P_{VI}$, vem

$$A \cup B \sim (A \cup B)^2 = A^2 \cup A \times B \cup B \times A \cup B^2,$$

e, pois, $A\times B$ é equipotente a uma parte de $A\cup B$. Se provarmos que $A\cup B$ é, também, equipotente a uma parte de $A\times B$, então, por um conhecido teorema devido a BERNSTEIN-CANTOR (independente do Axioma da Escolha), podemos concluir que

$$A\cup B \sim A\times B ,$$

donde, pelo lema anterior, ou A é equipotente a uma parte de B, ou êste é equipotente a uma parte de A. Como a primeira alternativa deve ser excluida, segundo observámos acima, segue-se que B é equipotente a uma parte de A, donde, por ser A bem ordenado, podemos assegurar a existência de uma boa ordem sôbre B, e, consequentemente, sôbre E.

O teorema ficará, pois, demonstrado, se provarmos que $A\cup B$ é equipotente a uma parte de $A\times B$. Para isso, notemos primeiramente que, sendo A bem ordenado e não finito, então, podemos concluir (sem o Axioma da Escolha) que A é infinito. Portanto, tomando um elemento de A, digamos, m, teremos $A\sim A-\{m\}$; e sendo b um elemento de B, tem-se, também, $A\sim(A-\{m\})\times\{b\}$. Como $\{m\}\times B\sim B$ e $(A-\{m\})\times\{b\}\cup\{m\}\times B\subset A\times B$ , segue-se que $A\cup B$ é equipotente a uma parte de $A\times B$, C. Q. D.

44. Finalmente, provemos o

TEOREMA 6: $P_I$ <u>é equivalente</u> <u>a</u> $P_{VII}$.

<u>Demonstração</u>. Seja $\mathcal{F}$ um filtro sôbre um conjunto E e consideremos a classe $\Phi$ dos filtros sôbre E mais finos que $\mathcal{F}$. É claro que $\Phi$, ordenada por inclusão, é indutiva e portanto, pelo teorema de ZORN (que é consequência de $P_I$), possui um filtro maximal $\mathcal{U}$. Êste é um ultra-filtro sôbre E, pois todo filtro sôbre E, mais fino que $\mathcal{F}$, devendo pertencer a $\Phi$, coincide com $\mathcal{U}$. Fica, pois, verificada a primeira parte de $P_{VII}$.

Seja, agora, $(E_\iota)_{\iota\in I}$ uma família qualquer de conjuntos não vazios. Em virtude de $P_I$ existirá uma família $(a_\iota)_{\iota\in I}$ de elementos da reunião dos $E_\iota$, verificando $a_\iota\in E_\iota$ para cada $\iota\in I$. Definamos sôbre $E_\iota$ a seguinte topologia $\mathcal{T}_\iota$: todo sub-conjunto X de $E_\iota$ ao qual $a_\iota$ não pertença, é aberto em $\mathcal{T}_\iota$; e todo sub-conjunto Y de $E_\iota$ contendo $a_\iota$, é aberto quando e sòmente quando seu complementar (em relação a $E_\iota$) é finito. É claro, então, que, para cada $\iota\in I$, $\mathcal{T}_\iota$ é uma topologia compacta sôbre $E_\iota$. Portanto, $P_I\Longrightarrow P_{VII}$.

A prova de que $P_{VII}\Longrightarrow P_I$ se obtém fàcilmente do teorema 3, do nº 37. De fato, dada uma família qualquer de conjuntos não vazios $(E_\iota)_{\iota\in I}$, existe, em virtude de $P_{VII}$, uma família de topologias $(\mathcal{T}_\iota)_{\iota\in I}$, cada $\mathcal{T}_\iota$ sendo uma topologia compacta sôbre $E_\iota$. Ainda em virtude de $P_{VII}$ (primeira parte), podemos aplicar o teorema 3 do nº 37, vindo, pois

$$\prod_{\iota \in I} E_\iota \neq \emptyset ,$$

o que prova $P_I$, C. Q. D.

45. <u>Observações sôbre o Axioma dos Ultra-Filtros</u>. É interessante notar que o Axioma dos Ultra-Filtros implica o Axioma da Escolha sob uma forma mais fraca, precisamente a seguinte:

<u>Dada uma família qualquer</u> $(X_\iota)_{\iota \in I}$ <u>de conjuntos finitos, nenhum deles vazio, então o produto cartesiano dessa família é não vazio</u>.

Com efeito, é suficiente atribuir a cada $X_\iota$ ($\iota \in I$) a topologia discreta (que, neste caso, é compacta) e aplicar o teorema 3 do nº 37.

Não sabemos, entretanto, se algum caso particular do Axioma da Escolha implica o dos Ultra-Filtros.

Quanto ao teorema de TYCHONOFF, o seu comportamento relativamente à questão de ser equivalente ao Axioma da Escôlha (ou a um caso particular dêste) é o mesmo que o do Axioma dos Ultra-Filtros. Pode-se, com efeito, provar que êste último não só acarreta o teorema de Tychonoff (nº 29, teorema 1), como também é uma consequência dêste; em outras palavras: existe equivalência entre ambos.

---===§===---

# BIBLIOGRAFIA:

[ 1 ]. N. Bourbaki - THÉORIE DES ENSEMBLES (Fascicule des résultats). (Paris, Hermann & Cie., éditeurs, 1939).

[ 2 ]. N. Bourbaki - TOPOLOGIE GÉNÉRALE (Chapitre I - 2e. édition). (Paris, Hermann & Cie., éditeurs, 1951).

[ 3 ]. E. Zermelo - UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER MENGENLEHRE.- (Mathematische Annalen - vol. 65, 1908).

[ 4 ]. A. Tarski - SUR LES ENSEMBLES FINIS. (Fundamenta Mathematicae - vol. 6, 1924, págs. 45-95).

[ 5 ]. P. Alexandroff und H. Hopf - TOPOLOGIE. (Berlin, Julius Springer, 1935, vol. I, pág. 86, nº 3).

[ 6 ]. J. L. Kelley - THE TYCHONOFF PRODUCT THEOREM IMPLIES THE AXIOM OF CHOICE. (Fundamenta Mathematicae - vol. XXXVII, 1950, págs. 75-76).

[ 7 ]. Bertrand Russell - MATHEMATICAL LOGIC AS BASED ON THE THEORY OF TYPES. (American Journal of Mathematics - vol. 30, 1908).

[ 8 ]. Émile Borel - LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS (4e. édition). (Gauthier-Villars, 1950).

[ 9 ]. W. Sierpiński - LEÇONS SUR LES NOMBRES TRANSFINIS. (Paris, Gauthier-Villars, 1950).

[ 10 ]. C. Kuratowski - SUR LA NOTION DE L'ORDRE DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES. (Fundamenta Mathematicae - vol. 2, 1921).

[ 11 ]. P. Bernays - SYSTEM OF AXIOMATIC SET THEORY (Part I). (The Journal of Symbolic Logic, vol. 2, nº 2, june 1937).

[ 12 ]. Kurt Gödel - THE CONSISTENCY OF THE AXIOM OF CHOICE AND OF THE GENERALIZED CONTINUUM HYPOTHESIS WITH THE AXIOMS OF SET THEORY. (Princeton, "Princeton University Press", 1940).

[ 13 ]. Raymond L. Wilder - INTRODUCTION TO THE FOUNDATIONS OF THE MATHEMATICS. (New York, John Wiley & Sons, Inc.; 1952).

[ 14 ]. A. A. Fraenkel - ABSTRACT SET THEORY.
(Amsterdam, North-Holland Publishing Company; 1953).

[ 15 ]. N. Bourbaki - TOPOLOGIE GÉNÉRALE (Fasc. des Résultats).
(Paris, Hermann & Cie., éditeurs; 1953).

[ 16 ]. Edison Farah - SUR LE BON ORDRE DE L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE DONNÉ.
(Summa Brasiliensis Mathematicae - vol. 3, fasc. 4; maio de 1953).

[ 17 ]. G. Cantor - BEITRÄGE ZUR BEGRÜNDUNG DER TRANSFINITEN MENGENLEHRE.
(Mathematische Annalen - vol. 49; 1897).

[ 18 ]. F. Hartogs - ÜBER DAS PROBLEM DER WOHLORDNUNG.
(Mathematische Annalen - vol. 76; 1915).

[ 19 ]. Edison Farah - TEOREMA DE ZORN.
(Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, vol. 1º, fasc. 1º; junho de 1946).

[ 20 ]. E. Zermelo - BEWEIS, DAS JEDE MENGE WOHLGEORDNET WERDEN KANN.
(Mathematische Annalen - vol. 59; 1904).

[ 21 ]. E. Zermelo - NEUER BEWEIS FÜR DIE MÖGLICHKEIT EINER WOHLORDNUNG.
(Mathematische Annalen - vol. 65; 1908).

[ 22 ]. Garrett Birkhoff - LATTICE THEORY.
(American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. XXV; 1948).

[ 23 ]. C. B. Lyra - A NOTE ON ZORN'S THEOREM.
(Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, vol. 4; 1951).

[ 24 ]. Edison Farah - SÔBRE A ORDEM TOTAL DO CONJUNTO DAS POTÊNCIAS DAS PARTES DE UM CONJUNTO DADO.
(Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, vol. 3, fascs. 1 e 2; dezembro, 1948).

[ 25 ]. A. Tajtelbaum - Tarski - SUR QUELQUES THÉORÈMES QUI ÉQUIVALENT À L'AXIOME DE CHOIX.
(Fundamenta Mathematicae - vol. 5; 1924).

[ 26 ]. A. Weil - L'INTÉGRATION DANS LES GROUPES TOPOLOGIQUES ET SES APPLICATIONS.
(Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris, Hermann & Cie.).

# ÍNDICE:



---

Mimeografado por
Geraldo dos Santos Lima Filho,
Departamento de Matemática da
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO.