Dr. Candido Lima da Silva Dias.

ESPAÇOS VECTORIAIS TOPOLÓGICOS E SUA APLICAÇÃO NA TEORIA DOS ESPAÇOS FUNCIONAIS ANALÍTICOS.

Tese apresentada no concurso para provimento efetivo da Cadeira X - Complementos de Geometria e Geometria Superior - da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de Sao Paulo.

São Paulo.

-1951-

DEDICO ESTA TESE À MEMÓRIA

DE MEU PAI.

INTRODUÇÃO.

O objetivo desta tese é a apresentação de resultados obtidos pelo autor na teoria dos espaços funcionais analíticos, pela aplicação da teoria moderna dos espaços vectoriais topológicos.

A teoria dos funcionais analíticos, magnífica criação do matemático Luigi Fantappiè, apresenta um aspecto singular que talvez possa ser descrito, dizendo-se que, para servir de base à teoria, falta-lhe a identificação de um espaço topológico com estrutura bem definida e simples. E' verdade que, desde 1940, Fantappiè mostrou como é possível introduzir uma estrutura de espaço T_o (na nomenclatura de Alexandroff-Hopf) no conjunto das funções localmente analíticas. Entretanto, esta teoria é por demais geral para que dela se possa efetivamente servir; por outro lado, o que, em primeira linha interessa, é uma estrutura de espaço vectorial topológico para fundamentar a teoria dos funcionais analíticos lineares. Êste estudo é desenvolvido por Fantappiè a partir dos conceitos de região funcional linear e linha analítica.

O segundo dêstes conceitos pode ser substituido pelo de sucessão uniformemente convergente de funções analíticas, num oportuno conjunto aberto, que se adapta melhor aos métodos da Topologia Geral. Esta modificação foi sugerida por Caccioppoli em 1931, desenvolvida pelo autor em sua tese de doutoramento (1942) e também por J. Sebastião e Silva (I, 1946). Quanto ao primeiro conceito mencionado, convém destacar explìcitamente que uma região funcional linear não é um espaço vectorial e, neste sentido, foi um avanço significativo a sua substituição pelo conceito de função analítica ligada a um conjunto, feita por J. Sebastião e Silva (II, 1950). A totalidade das funções analíticas ligadas a um conjunto, confunde-se com o espaço vectorial $[F]$ como é exposto nesta tese. O conceito de espaço $[F]$ apresentou-se independentemente ao autor desta tese e cumpre observar que a mesma noção aparece, com objetivo diferente, num trabalho de L. Nachbin (II, 1947). Restava, então, a introdução de estrutura de espaço vectorial topológico e, mais particularmente, de espaço localmente convexo no espaço vectorial $[F]$. Para a solução dêste problema foi decisivo o estudo que o autor fez da memória de G.W. Mackey: On convex topological linear spaces. Neste trabalho, Mackey estuda e resolve a seguinte questão: determinar as topologias localmente convexas sôbre um espaço E, compatíveis com uma parte do seu dual algébrico, isto é, aquelas topologias, em relação as quais, os funcionais lineares dados são contínuos. O principal resultado desta tese provem da aplicação dêstes teoremas, precisados por Arens, ao caso do espaço [F]. Neste estudo, apresenta-se necessàriamente a consideração simultânea do espaço [O], que se identifica com o espaço vectorial constituido pelos funcionais analíticos lineares e, dêste modo, introduz-se a noção de dualidade na teoria de Fantappiè. Uma das consequências mais importantes é a identificação da topologia forte sôbre o espaço [O], como topologia de espaço de Montel e a topologia de espaço dual, com a mesma propriedade de Montel, sôbre o espaço [F]. No estudo das propriedades do espaço [O], como espaço de Fréchet e do seu dual, o autor utilizou abundantemente resultados contidos numa recente e profunda memória de Jean Dieudonné e Laurent Schwartz: La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{L}\mathcal{F})$.

O autor julga, neste ponto, ser conveniente destacar que o problema da introdução de uma estrutura localmente convexa sôbre o espaço [F] é resolvido nesta tese (§2 do Capítulo II) independentemente da consideração do espaço dual [O], utilizando-se a noção de espaço envoltória de espaços localmente convexos, recentemente introduzida por Köthe; entretanto, o verdadeiro aspecto da questão se revela dentro do ponto de vista focalizado nos períodos anteriores. Além disso, êste espaço envoltória se identifica com o dual forte de [O].

Outra consequência dêste estudo é o de ter mostrado a relação íntima entre os funcionais analíticos de Fantappiè e os funcionais contínuos sôbre [O], [O] com a topologia da convergência uniforme sôbre os seus compactos, que aparece pela primeira vez, neste trabalho.

Resolvemos também uma questão apresentada por J.Sebastião e Silva (II) e relativa à possibilidade da introdução de uma topologia de Banach no espaço [F], que é aqui respondida pela negativa.

No apêndice I, aplicamos ràpidamente a teoria desenvolvi da no Capítulo II na demonstração do teorema clássico de Runge, que assim se apresenta sôbre seu verdadeiro aspecto geométrico. Esta aplicação já havia sido tentada por Cacciopoli, em trabalho citado na bibliografia; entretanto, a ausência de uma teoria de espaço vectorial localmente convexo sôbre $[O]$ e $[F]$ tornam aquele trabalho não rigoroso e prematuro.

O autor da presente tese, depois de redigir a maior parte da mesma, tomou conhecimento do último trabalho de J.Sebastião e Silva: Sôbre a Topologia dos Espaços Funcionais Analíticos, que se ocupa também com o mesmo problema. A solução apresentada na pg.55 e seguintes da referida memória não define o espaço $[F]$ como espaço vectorial topológico e se ocupa sòmente com o espaço (F). Além disso, no resumo em língua franceza com que finaliza aquele trabalho, referindo-se precisamente à topologia sôbre o espaço $[F]$, assim se exprime: "Mais nous ne l'avons pas fait, comme nous l'avons déjà dit, parce que la famille des ensembles fermés dans $\mathfrak{J}[C]$ n'a pas donné prise à nos raisonnements. Toutefois, il n'est pas exclu qu'on réussisse à definir de façon convenable, dans l'ensemble $\mathfrak{J}[C]$, une topologie qui le rende un espace pseudo-normable ou même un espace de Banach (avec les opérations vectorielles déjà définies). La question reste donc ouverte dans cette direction." O capítulo segundo desta tese responde completamente a esta questão como já tivemos ocasião de observar e mostra também como a teoria dos funcionais analíticos se entroza com a análise funcional moderna. Devido à limitação de tempo não nos foi possível tratar das aplicações contínuas de um espaço $[O]$ em outro espaço $[O_1]$ e o problema dual, assim como a aplicação da teoria ao estudo das funções médio-periódicas (ver L.Schwartz,I).

No programa da cadeira "Complementos de Geometria e Geometria Superior" figura extensivamente pontos sôbre espaços vectoriais, em particular, sôbre a noção de dualidade. A tese aqui apresentada não passa de variações sôbre o tema da dualidade e seu principal resultado é, essencialmente, a dualidade que se estabelece entre os espaços $[O]$ e $[F]$.

O objetivo do Capítulo I é expôr o mais prevemente possível, tôdas as noções e teorema sôbre espaços vectoriais topológicos indispensáveis ao entendimento do que se segue. Procurou-se dar maior destaque àquelas partes, como, por exemplo, a referente à dualidade e ao teorema de Mackey que são essenciais ao desenvolvimento do segundo capítulo; entretanto, as numerosas citações, permitirão reconstruir as demonstrações com todo detalhe. Para facilitar êste estudo o autor apresenta no apêndice II, uma espécie de índice das noções de Topologia Geral, como são dadas na obra de Bourbaki.

A redação do primeiro capítulo foi fortemente influenciada pelo excelente curso sôbre espaços vectoriais topológicos, desenvolvido no Departamento de Matemática, em 1949, pelo Prof. Delsarte, assim como, de um modo geral, pela obra de Bourbaki, inclusive, um manuscrito sôbre espaços vectoriais topológicos que o autor teve ocasião de consultar. A demonstração do teorema de Mackey-Arens não foi dada no curso mencionado, nem no referido manuscrito e o autor aproveita esta oportunidade para agradecer a colaboração que, neste ponto, assim como no §5, do Capítulo II lhe prestou o Prof.L. Nachbin, da Universidade do Brasil.

A idéia fundamental dêste trabalho o autor a teve durante sua permanência no Institute for Advanced Study, com Bolsa de Estudos outorgada pela Fundação Guggenheim, à qual testemunha sua gratidão. Ao Prof. A.Weil, a quem deve a recomendação de seu nome à referida Bolsa de Estudos, o reconhecimento do autor.

Finalmente aqui ficam os agradecimentos ao licenciado Snr. S. Chain Hönig, assistente da cadeira de Análise Superior, com quem o autor discutiu de modo o mais estimulador possível todos os pontos desta tese e também ao assistente L.H.Jacy Monteiro que não mediu esforços para que esta tese fosse publicada em tempo útil.

São Paulo, Julho de 1951.

NOTAÇÕES.

As notações da teoria dos conjuntos, são, em geral, as usadas no livro "Théorie des Ensembles (Fascicule des Résultats) de Bourbaki. Assim $x \in A$, $x \notin A$, $A \cup B$, $A \cap B$, $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$, $\complement A$, $E \times F$, $\prod_{i \in I} E_i$, indicam respectivamente: o elemento x pertence ao conjunto A; o elemento x não pertence ao conjunto A; reunião dos conjuntos A e B; intersecção dos conjuntos A e B; reunião da família de conjuntos A_i; intersecção dos conjuntos da família A_i; complementar de A, isto é, o conjunto dos elementos do espaço que não pertencem a A; conjunto dos pares (x,y) com $x \in E$ e $y \in F$; conjunto das famílias $(x_i)_{i \in I}$ onde $x_i \in E_i$.

Dado um conjunto E, para se indicar o subconjunto de elementos de E que satisfazem uma propriedade P, se escreve:

$$A = \{\, x \in E \mid x \text{ satisfaz } P \,\}.$$

Substitui-se a notação $x \in E$ por x simplesmente quando não há dúvida sôbre o conjunto E de que se fala.

As notações de Topologia Geral são também as de Bourbaki (Topologie Générale) assim: $\bar{A}$ e $\overset{\circ}{A}$ indicam, respectivamente, a aderência e o interior do conjunto A, considerado como parte de um espaço topológico.

Indica-se sempre com N o conjunto dos números inteiros estritamente positivos.

CAPÍTULO I.

PRELIMINARES SÔBRE ESPAÇOS VECTORIAIS TOPOLÓGICOS.

§ 1. Espaço vectorial topológico complexo.

1. Espaço vectorial complexo.

Definição 1. Grupo comutativo ou abeliano é um conjunto E, com estrutura dada pela aplicação soma. Chama-se aplicação soma a tôda aplicação $(x,y) \longrightarrow x+y$ do conjunto $E \times E$ em E [1] que satisfaz os axiomas:

1) $x + y = y + x$, quaisquer que sejam $x,y \in E$ (propriedade comutativa);
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, q.q. sejam [2] $x,y,z \in E$ (propriedade associativa);
3) existe um elemento de E, representado por 0 e chamado zero ou orígem, tal que $0 + x = x$, para todo $x \in E$;
4) dado um elemento $x \in E$, existe um elemento do mesmo conjunto, indicado por $-x$ e chamado simétrico ou oposto de x, tal que $x + (-x) = 0$.

E' consequência imediata dos axiomas que existe um único elemento zero e que, dado $x \in E$, o oposto de x é único.

Definição 2. Um espaço vectorial complexo ou simplesmente espaço vectorial é um grupo abeliano que possui também uma estrutura definida por uma aplicação produto por um escalar. Chama-se aplicação produto por um escalar a tôda aplicação $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$ do conjunto $C \times E$ [par ordenado (λ,x), onde $\lambda \in C$ (corpo complexo) e $x \in E$] sôbre E que satisfaz os axiomas:

1) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ - distributivo em relação ao grupo abeliano; $\lambda \in C$ e $x,y \in E$
2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda, \mu \in C$ e $x \in E$ - distributivo em relação ao corpo C;
3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $\lambda, \mu \in C$, $x \in E$;
4) $1.x = x$.

---

(1) Indicaremos o elemento imágem de (x,y) em E com a notação aditiva, isto é: $x+y$.

(2) Abreviaremos sempre a expressão "quaisquer que sejam" escrevendo em seu lugar "q.q.sejam".

E' costume referir-se ao número complexo λ, chamando-o de escalar. Os elementos do espaço vectorial são denominados vectores ou pontos. Chama-se diferença de dois vectores x, y, ao elemento $x - y = x + (-y)$.

Definição 3. Dados dois vectores x e y de E, chama se segmento fechado de extremidades a e b ao conjunto de vectores $\rho x+(1-\rho)y$, em que ρ percorre o intervalo $[0,1]$. Uma parte A de E é convexa se, q.q. sejam x e $y \in A$, o segmento fechado de extremidades x e y está contido em A. A parte A é absolutamente convexa se, juntamente com x e y, vectores quaisquer de A, ela contém os vectores $\lambda x+ \mu y$, onde $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

A intersecção de uma família qualquer de conjuntos absolutamente convexos é um conjunto absolutamente convexo.

Definição 4. Dada uma parte qualquer A de um espaço vectorial E, a envoltória absolutamente convexa de A é a intersecção dos absolutamente convexos que contêm A; ela é, portanto, o menor absolutamente convexo que contém A.

Proposição 1. A envoltória absolutamente convexa de A em E é o conjunto de tôdas as combinações lineares $\sum_i \lambda_i x_i$, todos os λ_i nulos com exceção de um número finito, em que $\{x_i\}$ é uma família qualquer de pontos de A e $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$.

Com efeito, a envoltória contém o conjunto destas combinações e êste conjunto é absolutamente convexo e contém A.

Definição 5. Num espaço vectorial E, diz-se que uma parte S é estrelada e simétrica, se as relações $x \in S$ e $|\lambda| \leq 1$, implicam $\lambda x \in S$; diz-se que S é equilibrada em relação à origem se, para todo $x_0 \in E$, existe um número real $\alpha > 0$, tal que $|\lambda| \leq \alpha$ implica $\lambda x_0 \in S$.

Definição 6. Uma parte V de um espaço vectorial é chamada sub-espaço vectorial se satisfaz as condições

1) $0 \in V$;

2) se $x,y \in V$, então $x+y \in V$;

3) se $x \in V$, então $\lambda x \in V$, q.q. seja $\lambda \in C$.

Seja V um sub-espaço vectorial de E. Diz-se que V é uma reta se a sua dimensão é 1. V é um hiperplano homogêneo ou hiperplano, se a dimensão do espaço quociente E/V é 1 (Bourbaki, A. II, pg.37 e seguintes).

2. Espaço vectorial topológico.

Definição 7. Grupo abeliano topológico é um grupo abeliano E que possui também estrutura de espaço topológico compatível com a estrutura de grupo abeliano, isto é: $x+y$ é função contínua de x e y simultâneamente e $-x$ é função contínua de x. E é um espaço vectorial topológico sôbre o corpo C ou simplesmente espaço vectorial topológico se satisfaz ainda o seguinte axioma: a aplicação $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $C \times E$ sôbre E é contínua.

A definição anterior equivale a dizer: E é um grupo abeliano e as duas aplicações $(x,y) \longrightarrow x+y$ e $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $E \times E$ e $C \times E$ respectivamente em E, são contínuas.

Sôbre um espaço vectorial topológico E define-se uma estrutura uniforme [Bourbaki, T.G.II, pg.85 e seguintes; T.G.III, pg.30] como se segue: seja V uma vizinhança da orígem em E e considere-se o conjunto

$$U_V = \{(x,y) \mid x,y \in E, \quad x-y \in V\}.$$

A totalidade dos conjuntos U_V, quando V percorre um sistema fundamental de vizinhanças, constitue um filtro sôbre $E \times E$, que define a estrutura uniforme sôbre o espaço vectorial topológico E. Os conceitos de sucessão de Cauchy ou filtro de Cauchy e espaço completo, quando aplicados a um espaço vectorial topológico se referem sempre a esta estrutura uniforme.

Teremos ocasião de caracterizar um espaço vectorial topológico por meio de um sistema fundamental de vizinhanças. Esta caracterização está baseada na seguinte

Proposição 2. Em um espaço vectorial topológico E existe um sistema fundamental de vizinhanças da orígem S que satisfaz as seguintes condições:

1) Todo $V \in S$ é estrelado e simétrico, isto é: q.q. seja $V \in S$ e $x \in V$, a relação $|\lambda| \leq 1$ arrasta $\lambda x \in V$.

2) Todo $V \in S$ é equilibrado, isto é: q.q. seja $V \in S$ e $x_0 \in E$, existe um $\alpha > 0$ tal que $|\lambda| \leq \alpha$ implica $\lambda x_0 \in V$.

3) q.q. seja $V \in S$ e $\lambda \neq 0$, tem-se $\lambda V \in S$ (S é invariável por homotetia).

4) q.q. seja $\in V$ S existe $W \in S$ tal que $W+W \subset V$. Inversamente, se uma base de filtro S, sôbre um espaço vectorial E, satisfaz essas condições, existe uma topologia sôbre E, compatível com a estrutura de espaço vectorial de E, e, para a qual, S é um sistema fundamental de vizinhanças da orígem em E. (Sôbre esta proposição consultar: Delsarte, Cap.I, prop.3; Nachbin, pg. 32).

Definição 8. Uma vizinhança W da orígem é chamada vizinhança circular se ela é absolutamente convexa; segue-se que W satisfaz $e^{i\theta} W = W$, para todo θ real. Reciprocamente, tôda vizinhança convexa que goza desta propriedade é vizinhança circular.

Definição 9. Uma variedade linear em E é a transformada por translação de um sub-espaço de E.

Tôda variedade linear é da forma x_o+V, onde V é o sub-espaço que a define e x_o é um vector de E que define a translação. Reta é tôda variedade linear de dimensão 1 (dimensão do sub-espaço que a define) e hiperplano tôda variedade definida a partir de um hiperplano homogêneo. Frequentemente, para se evitar confusão, chama-se o sub-espaço vectorial E de dimensão 1, de reta homogênea e, correspondentemente, hiperplano homogêneo.

Proposição 3. A aderência de uma variedade linear é uma variedade linear. (Delsarte, §2, prop. I).

Definição 10. Seja E um espaço vectorial topológico. Se A é uma parte de E, chama-se sub-espaço vectorial, gerado por A, a aderência de A (não confundir com o conceito de mesmo nome mas relativo exclusivamente à estrutura vectorial de E). O sub-espaço gerado por A é, portanto, o menor sub-espaço vectorial fechado que contém A.

Definição 11. Um subconjunto A de E é total se o sub espaço vectorial gerado por A coincide com todo o espaço.

Tôda vizinhança da orígem em E é total (prop.2, 2).

Definição 12. Uma família de pontos $(a_i)_{i \in I}$ é topològicamente livre em E se, q.q. seja k do conjunto dos índices, o sub-espaço vectorial gerado pelos a_i, com $i \neq k$, não contém o vector a_k.

O conjunto dos elementos de uma família topològicamente livre forma uma parte topològicamente livre de E.

Definição 13. Uma parte L de um espaço vectorial topológico é limitada se, q.q. seja a vizinhança V da orígem em E, existe um número complexo λ, $\lambda \neq 0$, tal que $\lambda L \subset V$, isto é: existe sempre uma homotetia que leva L em V.

Proposição 4. Os seguintes resultados são consequências imediatas da definição de parte limitada e da proposição 2: Tôda parte reduzida a um ponto é limitada; tôda parte de um limitado é limitada. Se L_1 e L_2 são limitados, o mesmo acontece com $L_1 \cup L_2$ e L_1+L_2, em particular, tôda parte finita é limitada.

Proposição 5. A aderência de uma parte limitada é limitada (Delsarte, §1, prop.7).

Proposição 6. Num espaço vectorial topológico separado E, todo conjunto relativamente compacto é limitado (Delsarte, §1, prop.9).

Convém observar explìcitamente, que dado um espaço vectorial topológico, pode acontecer que nenhuma vizinhança da orígem seja limitada (ver proposição 11).

3. Dual de um espaço vectorial topológico.

Nota: Sôbre o conteúdo dêste número consultar: Bourbaki T.G. X, §1 e §2 assim como Delsarte, cap.I, §3.

Sejam E e F dois espaços vectoriais topológicos e $\mathcal{L}(E,F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas u de E em F. E' claro que $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço vectorial sôbre C, quando se define: $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ e $(\alpha u)(x) = \alpha u(x)$ para $u,v \in \mathcal{L}(E,F)$ e $x \in E$ (Bourbaki, A.II, pg.23 e 24). Seja Φ um conjunto de partes de E. Nosso objetivo final é introduzir em $\mathcal{L}(E,F)$ uma estrutura de espaço vectorial topológico; começaremos definindo sôbre $\mathcal{L}(E,F)$ uma topologia, precisamente a topologia $\mathcal{T}_\Phi$ da convergência uniforme nos conjuntos de Φ. Um sistema fundamental de vizinhanças na topologia $\mathcal{T}_\Phi$ é constituido pela totalidade dos conjuntos $T(V,A)$ definidos como se segue:

$$T(V,A) = \left\{ u \,\middle|\, u(A) \subset V,\ A \in \Phi,\ V, \text{ vizinhança da orígem em } E \right\}$$

(Bourbaki, T.G.X,§1,1,pg.2).

Se V é tal que $V = -V$, segue-se que $T(-V,A) = -T(V,A)$; para verificar que a topologia $\mathcal{T}_{\Phi}$ é compatível com a estrutura de grupo abeliano de $\mathcal{L}(E,F)$, basta demonstrar que, qualquer que seja $T(V,A)$, existe $T(W,A)$ tal que $T(W,A)+T(W,A) \subset T(V,A)$ (Bourbaki, T.G.III,pg.6). E sendo grupo abeliano topológico, dado V, existe W tal que $W+W \subset V$; tomando-se $u,v \in T(W,A)$ e considerando-se $w = u+v$, segue-se: $w(x) = u(x) + v(x) \in W + W \subset V$, q.q. seja $x \in A$, logo, $T(W,A)+T(W,A) \subset T(V,A)$.

A compatibilidade da topologia $\mathcal{T}_{\Phi}$ com a estrutura vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$ depende do conjunto de partes Φ, de acôrdo com a seguinte

<u>Proposição 7</u>. Para que a topologia $\mathcal{T}_{\Phi}$ seja compatível com a estrutura de espaço vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$ é necessária e suficiente que, para todo $u \in \mathcal{L}(E,F)$ e todo elemento $A \in \Phi$, $u(A)$ seja <u>limitada</u> em F.

A demonstração consiste em mostrar que, nas condições indicadas, os $T(V,A)$ podem ser escolhidos de modo que satisfaçam à segunda parte da proposição 2.

Seja $u \in T(V,A)$, com V <u>estrelada</u> e <u>simétrica</u>; então, $u(A) \subset V$, implica $\lambda u(A) \subset \lambda V \subset V$, para todo $|\lambda| \leq 1$ e a condição 1, da prop.2 está satisfeita.

A condição 4 já foi demonstrada, quando se provou que é compatível com o grupo abeliano $\mathcal{L}(E,F)$. Por outro lado, é claro que $T(\lambda V,A) = \lambda T(V,A)$, para todo $\lambda \neq 0$. Logo a condição 3 está também satisfeita. Finalmente, para que a condição 2 seja satisfeita é necessário e suficiente que, para todo $u \in \mathcal{L}(E,F)$, todo $A \in \Phi$ e todo V, vizinhança de 0 em F, exista $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda u \in T(V,A)$ ou $\lambda u(A) \subset V$ e, portanto, $u(A)$ <u>limitado</u> em F, o que demonstra a proposição 7.

<u>Definição 14</u>. A condição expressa pela proposição 7 é, em particular, satisfeita nos dois casos seguintes:

a) E e F quaisquer, Φ formado pelas partes finitas de E. A topologia $\mathcal{T}_{\Phi}$, neste caso, é chamada <u>topologia da convergência simples</u> sôbre $\mathcal{L}(E,F)$ e indicada com a notação $\mathcal{T}_s$.

b) E e F quaisquer e Φ conjunto das partes limitadas de E. Sendo L uma parte limitada de E, $u(L)$ é limitado em F. Com efeito, para tôda vizinhança W da orígem em F, $\overset{-1}{u}(W)$ é uma vizinhança da orígem em E, logo existe um $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda L \subset \overset{-1}{u}(W)$ e portanto $u(\lambda L) = \lambda u(L) \subset W$.

A topologia $\mathcal{T}_{\Phi}$, neste caso, é chamada topologia da convergência uniforme sôbre os limitados de E e é indicada com a notação $\mathcal{T}_{\ell}$.

Voltaremos oportunamente às topologias definidas em a) e b) assim como introduziremos outras em $\mathcal{L}(E,F)$.

Definição 15. Uma parte H de $\mathcal{L}(E,F)$ é um conjunto equicontínuo num ponto $x_0 \in E$, se qualquer que seja a vizinhança do zero W em F, existe uma vizinhança V de x_0, tal que, q.q. sejam $x \in V$ e $u \in H$, $u(x)-u(x_0) \in W$. H é um conjunto equicontínuo se é equicontínuo em todo ponto de E; condição necessária e suficiente para que isso aconteça é que H seja equicontínuo na orígem.

Definição 16. Introduziremos, em primeiro lugar, a noção de dual algébrico de um espaço vectorial E. Chama-se dual algébrico de E ao espaço vectorial E^* formado pelo conjunto das formas lineares em E. Forma linear em E é tôda aplicação linear do espaço E no corpo C dos números complexos (Bourbaki, A.II, pg.42). Quando E é um espaço vectorial topológico, chama-se dual de E ao sub-espaço E' de E^* constituido pelas formas lineares contínuas (funcionais lineares) em E.

Definiremos uma topologia sôbre E' considerando as vizinhanças $T(V,A)$ de $\mathcal{L}(E,C)$, quando A percorre um conjunto Φ de limitados de E e V percorre as vizinhanças do zero no corpo dos complexos, com sua topologia natural.

Nosso objetivo agora é obter uma condição necessária e suficiente para que a topologia definida sôbre E' seja separada. Para êsse fim, consideremos a intersecção das vizinhanças $T(V,A)$ que é constituida pelas formas lineares contínuas u tais que $u(A) \subset V$, q.q. seja V e $A \in \Phi$. Tendo-se em vista a topologia separada sôbre C, segue-se que $u(A) = 0$, q.q. seja $A \in \Phi$. Portanto, condição suficiente para que a topologia definida sôbre E' seja separada é que

Φ seja um recobrimento de E; essa condição é também necessária (Bourbaki, T.G.X,§1,5,prop.2).

Definição 17. Em particular, a topologia da convergência simples, que já vimos ser compatível com a estrutura de espaço vectorial de E', é separada. Esta topologia é chamada topologia fraca sôbre E' e será indicada com a notação $\sigma(E',E)$. E', com esta topologia, é chamado dual fraco de E e será indicado com a notação E'_f.

Definição 18. Seja x um ponto de E e x' um elemento de E'. Indica-se o valor de x' no ponto x com a notação $\langle x,x' \rangle$, isto é: $x'(x) = \langle x,x' \rangle$. A aplicação $(x,x') \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ é chamada forma bilinear canônica definida sôbre E x E'. A aplicação parcial $x \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ é um elemento de E', por definição. A outra aplicação parcial $x' \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ é evidentemente linear. Para verificar que esta é contínua em E'_f, basta considerar sôbre E a parte finita $\{x\}$; a imágem inversa da vizinhança V do zero de C é constituida por todos os x' tais que $|\langle x,x' \rangle| \in V$, que é precisamente uma vizinhança do zero em E'_f. Introduzindo-se em E' uma topologia τ mais fina que a topologia fraca é claro que a aplicação $x' \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ é contínua também na topologia τ.

Definição 19. Seja A (respectivamente B) uma parte qualquer de E (respectivamente de E'); chama-se conjunto polar de A (resp. de B) ao conjunto A^o (resp. B^o) dos x' (resp. x) pertencentes a E' (resp. E) e tais que $|\langle x,x \rangle| \leq 1$ para todo x (resp. x') pertencente a A (resp. B).

Seja V (resp. W) um sub-espaço vectorial de E (resp. E'), $x' \in V^o$ (resp. $x \in W^o$); segue-se, portanto, que $|\langle x,x' \rangle| \leq 1$, q.q. seja $x \in V$ (resp. $x' \in W$) e, em particular, $|\langle \lambda x,x' \rangle| \leq 1$ (resp. $|\langle x, \lambda x' \rangle| \leq 1$) λ arbitrário. Por outro lado, $|\langle \lambda x,x' \rangle| = |\lambda||\langle x,x' \rangle|$ e, portanto, $\langle x,x' \rangle = 0$, isto é: V^o (resp. W^o) é parte do conjunto dos vectores ortogonais a V (resp. W) (Bourbaki, A.II, pg.44) e, por abuso de linguágem, é chamado sub-espaço de E' (resp. E) ortogonal a V (resp. W).

Definição 19'. O espaço E', dual de um espaço vectorial topológico E, é separador se $E'^o = \{0\}$; nestas condições, para todo $x \neq 0$ em E, existe um x' tal que $\langle x,x'\rangle \neq 0$.

Proposição 8. Qualquer que seja o sub-espaço vectorial W do dual fraco E'_f tem-se: $(W^o)^o = \overline{W}$.

Com efeito, de acôrdo com a definição 19,

$$W^o = \left\{x \,\middle|\, |\langle x,x'\rangle| = 0,\ x' \in W\right\},$$

portanto, $(W^o)^o$ é a intersecção dos hiperplanos que contêm W e cujas equações são $\langle a,x'\rangle = 0$, com $a \in W^o$. Êstes hiperplanos são fechados (como imágem inversa do zero da reta complexa); portanto, sua intersecção também é fechada e a proposição ficará demonstrada provando-se que essa intersecção é $\overline{W}$. Basta, para êste fim, demonstrar que, para todo $x' \notin \overline{W}$, existe $a \in W^o$ e tal que $\langle a,x'\rangle \neq 0$. Seja U uma vizinhança de x':

$$U = \left\{y' \,\middle|\, |\langle a_i,x'-y'\rangle| \leq \varepsilon\ ,\ 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Está vizinhança pode ser escolhida de modo que $y' \notin W$, pois $x' \notin \overline{W}$. Seja V o sub-espaço vectorial fechado de E'_f definido pelas equações $\langle a_i,z'\rangle = 0$, $1 \leq i \leq n$; por definição, U não contém a variedade linear $x'+V$ e como esta última não encontra W, segue-se que $x' \notin W+V$. Existe, portanto, um hiperplano H em E' que contém $W+V$ e tal que $x' \notin H$ (Bourbaki, A.II,§3,prop.9). Mas como H não contém V, segue-se que sua equação é da forma $\langle a,z'\rangle = 0$, em que a é uma combinação linear dos a_i (Bourbaki, A.II, §4, prop.10, pg. 51) (Delsarte, Cap.I,§3,Teor.1). (q.e.d.).

Proposição 9. Todo hiperplano fechado H de E'_f possui equação da forma $\langle a,x'\rangle = 0$, em que $a \in E$.

Com efeito, $H^o \neq \{0\}$ pois, caso contrário, de acôrdo com a proposição anterior, teríamos: $H = (H^o)^o = E'$; existe, portanto, $a \neq 0$, em E, tal que $\langle a,x'\rangle = 0$, para $x' \in H$. Mas o conjunto dos pontos $x' \in E'$ tais que $\langle a,x'\rangle = 0$ é um hiperplano, logo $\langle a,x'\rangle = 0$ é a equação de H. (Q.E.D.).

Proposição 10. Tôda forma linear contínua em E'_f, isto é, fracamente contínua, é da forma $x' \longrightarrow \langle a,x'\rangle$, em que $a \in E$.

Com efeito, seja u uma forma linear contínua não nula em E'_f, $\overset{-1}{u}(0)$ é, pois, um hiperplano fechado, logo, de acôrdo com a proposição 9, existe $a \in E$ tal que $u(x') = \langle a,x'\rangle$, para todo

$x' \in H'$. (Q.E.D.).

4. Espaço vectorial topológico localmente convexo.

Definição 20. Seja E um espaço vectorial topológico sôbre o corpo complexo. E é chamado localmente convexo se possui um sistema fundamental de vizinhanças da origem formado por partes de E absolutamente convexas (vizinhanças circulares) (Delsarte, Cap. III, §3).

Definição 21. Uma função real p definida em E (espaço vectorial topológico) é uma semi-norma se satisfaz as propriedades:

1) $p(x) \geq 0$, q.q. seja $x \in E$;

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, q.q. seja $x \in E$ e λ real;

3) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, q.q. sejam $x, y \in E$.

p é uma norma se ela é uma semi-norma e, além disso, $p(x) = 0$, quando e sòmente quando $x = 0$.

Dada uma vizinhança circular W, de um espaço localmente convexo E, pode-se definir uma função real $p(x)$ como se segue:

$$p(x) = \inf. |\lambda|, \quad \text{onde} \quad \frac{x}{\lambda} \in W.$$

E' fácil verificar que $p(x)$ é uma semi-norma, chamada, nestas condições, padrão da vizinhança W. E' evidente que $p(x) = p(e^{i\theta} x)$, q.q. seja $x \in E$; tomando-se $\lambda = \rho e^{i\theta}$, segue-se: $p(e^{i\theta} x) = p(x)$, $p(\rho x) = \rho p(x)$ e, portanto, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, qualquer que seja $\lambda \in C$. Por convenção, uma semi-norma, definida sôbre um espaço vectorial complexo, é uma semi-norma que possui esta última propriedade.

Seja Γ um conjunto qualquer de semi-normas definidas sôbre o espaço vectorial topológico E. Seja S o conjunto dos conjuntos indicadores das semi-normas λ_p, isto é: o conjunto dos vectores x tais que $\lambda p(x) \leq 1$, com $\lambda > 0$ e $p \in \Gamma$. O conjunto S é um sistema fundamental de vizinhanças circulares que determina uma estrutura de espaço localmente convexo sôbre E, a qual se dirá definida pela família de semi-normas Γ.

Definição 21'. Os espaços normados (ou espaços com norma) constituem um caso particular dos espaços localmente convexos quando o conjunto Γ se reduz a uma única norma.

Num espaço localmente convexo E cuja topologia é definida pelo conjunto de semi-normas Γ, a definição de conjunto <u>limitado</u> se traduz do seguinte modo: condição necessária e suficiente para que A seja limitado é que $\sup_{x \in A} p(x) < +\infty$, para tôda semi-norma $p \in \Gamma$.

Condição necessária e suficiente para que E seja <u>separado</u> é que, para todo $x \neq 0$, exista $p \in \Gamma$, tal que $p(x) \neq 0$.

<u>Proposição 11</u>. Condição necessária e suficiente para que um espaço localmente convexo seja <u>normado</u> é que êle possua uma vizinhança <u>limitada</u> da orígem (Kolmogoroff, Studia Math. vol.5, pp.441-453; Hyers, Bull. A.M.Society, 51, 1, pg.3).

<u>Proposição 12</u>. Seja E um espaço vectorial topológico. Condição necessária e suficiente para que um hiperplano seja fechado é que êste seja definido por uma equação $u(x) = a$, onde u é uma forma linear contínua não nula (Delsarte, Cap.I,§2, Teor.1).

<u>Proposição 13</u>. (Teorema de Minkowski) - Seja E um espaço localmente convexo, K uma parte aberta e convexa de E, V um sub-espaço que não encontra K; existe um hiperplano fechado que contém V e não encontra K (Banach, Opérations linéaires, p.27; Dieudonné, Revue Scientifique, 1941, p.642; Delsarte, Cap.II,§3,Teor.1).

<u>Proposição 14</u>. Seja V um sub-espaço vectorial <u>fechado</u> em E e x_0 um ponto que não pertence a V, existe um hiperplano fechado que contém V e não contém x_0; segue-se daí que V é intersecção dos planos que a contêm.

Considerando-se uma vizinhança aberta de x_0, esta proposição é uma consequência imediata da prop.13.

<u>Proposição 15</u>. (Teorema de Hahn-Banach) - Seja E um espaço localmente convexo, G um sub-espaço de E, f uma forma linear contínua definida em G. Existe uma forma linear contínua f^* que a prolonga em E (Delsarte, Cap.II,§3,Teor.2; Cap.III,§3,Prop.3).

<u>Proposição 16</u>. Seja $x_0 \neq 0$ um ponto de um espaço localmente convexo e p uma semi-norma de E tal que $p(x_0) \neq 0$; existe uma forma linear contínua f tal que $f(x_0) = p(x_0)$ e $|f(x)| \leqslant p(x)$, q.q. seja $x \in E$ (Delsarte, Cap.III, Prop.5, Cor.1).

5. Dual fraco de um espaço localmente convexo.

Proposição 17. O dual E' de um espaço localmente convexo separado satisfaz a condição $(E')^{\circ} = \{0\}$, isto é, é separador.

Com efeito, sendo E separado, dado um ponto $x \in E$, $x \neq 0$, existe uma semi-norma p sôbre E tal que $p(x) \neq 0$ (parte final da definição 21'). Aplicando-se a proposição 16 ao ponto x, segue-se a existência de uma forma linear f igual a $p(x)$ em x e, em valor absoluto, não superior a $p(y)$ em todo ponto $y \in E$; portanto $E'^{\circ} = \{0\}$ e E' é separador (definição 19'). (Q.E.D.).

Seja E um espaço localmente convexo e consideremos a forma linear definida sôbre E'_f:

$$\tilde{x}: \quad x' \longrightarrow \langle x,x' \rangle \quad , \quad x \in E.$$

Esta aplicação é contínua (contexto da definição 18) e de acôrdo com a proposição 10, tôda forma linear contínua em E'_f é uma forma $\tilde{x}$. Por outro lado, se $\tilde{x} = \tilde{y}$ ou $\langle x,x' \rangle = \langle y,y' \rangle$, para todo $x' \in E'$, segue-se que $x = y$, pois o espaço E' é separador (proposição 17).

Definição 22. A aplicação linear $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E sôbre o dual E'' de E' é portanto biunívoca, o que nos autoriza identificar E com o dual do dual fraco E de E. Esta identificação permite a introdução em E da topologia da convergência simples em E', chamada topologia fraca sôbre E e indicada com a notação $\sigma(E,E')$. Em virtude da relação $\langle x, \lambda x' \rangle = \lambda \langle x,x' \rangle$, obtem-se um sistema fundamental de vizinhanças para esta topologia, considerando-se para tôda parte finita F de E', o conjunto polar F°, isto é: o conjunto dos $x \in E$, tais que $|\langle x,x' \rangle| \leq 1$, para todo $x' \in F$. De acôrdo com a definição 21, esta topologia é uma topologia de espaço localmente convexo definida pelas semi-normas

$$|x|_F = \sup_{x' \in F} |\langle x,x' \rangle| \; .$$

A topologia $\sigma(E,E')$ é menos fina que a topologia de E, como se conclui imediatamente, considerando-se as vizinhanças do zero na topologia $\sigma(E,E')$.

Raciocinando-se sôbre E do mesmo modo que sôbre E', conclui-se que tôda forma linear sôbre E, contínua na topologia

$\sigma(E,E')$, é da forma $x \longrightarrow \langle x,x' \rangle$, isto é: E' é o <u>dual</u> de E, com a topologia $\sigma(E,E')$.

<u>Proposição 18</u>. Seja E um espaço vectorial topológico separador. Condição necessária e suficiente para que uma parte A seja <u>total</u> em E'_f é que, para todo $x \in E$, $x \neq 0$, exista $x' \in A$, tal que $\langle x,x' \rangle \neq 0$.

Com efeito, seja W o sub-espaço gerado por A. Sendo A total, segue-se: $\overline{W} = E'_f$; mas, de acôrdo com a proposição 8, tem-se $(W^o)^o = E'_f$ e E'_f deve ser <u>ortogonal</u> a W^o e como $(E')^o = \{0\}$, vem $V^o = \{0\}$ e recìprocamente, como é evidente. (Q.E.D.).

<u>Proposição 19</u>. Para que uma família $(x'_i)_{i \in I}$ seja topològicamente livre em E'_f, é necessário e suficiente que, para todo índice k, exista um vector $a_k \in E$ tal que $\langle a_k,x'_k \rangle \neq 0$ e $\langle a_k,x'_i \rangle = 0$, para todo $i \neq k$.

Demonstração evidente.

<u>Proposição 20</u>. Seja A uma parte não vazia do espaço localmente convexo E. O conjunto <u>bipolar</u> $A^{oo} = (A^o)^o$ é idêntico ao menor conjunto B absolutamente convexo, fechado na topologia $\sigma(E,E')$, que contém A.

Demonstração - O conjunto bipolar A^{oo} é evidentemente <u>circular</u>. O conjunto A^o é fechado na topologia $\sigma(E',E)$. Com efeito, o conjunto dos pontos x' tais que $|\langle x,x' \rangle| \leq 1$, para x fixo, é fechado pois o mesmo é a imágem inversa do conjunto fechado $|\xi| \leq 1$ da reta complexa pela aplicação contínua $x' \longrightarrow \langle x,x' \rangle$. A^o sendo a intersecção dêstes conjuntos fechados, quando x percorre A, é também fechado. O mesmo raciocínio demonstra que $(A^o)^o$ é fechado na topologia $\sigma(E,E')$. Seja B a intersecção das partes circulares e fechadas na topologia $\sigma(E,E')$ e que contêm A^{oo}; é claro que $B \subset A^{oo}$. Para demonstrar que $B = A^{oo}$, toma-se um $x^o \notin B$ e mostra-se que $|\langle x_o,x' \rangle| > 1$, para $x' \in A^o$. Com efeito, aplicando-se a proposição 16 no caso em que p é a semi-norma padrão de B, conclui-se a existência de uma forma linear real g sôbre E, contínua na topologia $\sigma(E,E')$ e tal que $g(x_o) > 1$ e $g(x) \leq 1$, para todo $x \in B$; como B é circular, segue-se que $g(e^{i\theta}x) \leq 1$, para todo $x \in B$ e θ real qualquer. Seja $\langle x,x' \rangle = g(x) - ig(ix)$ uma forma linear contínua sôbre E, cuja parte real é precisamente $g(x)$. Tomando-se $\langle e^{i\theta}x,x'\rangle = e^{i\theta}\langle x,x'\rangle = g(e^{i\theta}x) - ig(i\,e^{i\theta}x)$, é claro que a parte real de $e^{i\theta}\langle x,x'\rangle$ é $g(e^{i\theta}x)$. Por outro lado, qualquer que seja $x \in B$, pode-se escolher um θ conveniente de modo que $e^{i\theta}\langle x,x'\rangle$ seja real; segue-se, portanto, que $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$, para todo $x \in B$, em particular, para $x \in A$, o que mostra que $x' \in A^{o}$. Entretanto, referindo-se a $\langle x,x'\rangle = g(x) - i\,g(ix)$ e à definição de $g(x)$, conclui-se que $|\langle x_0,x'\rangle| > 1$, logo $x_0 \notin A^{oo}$ e portanto $B = A^{oo}$. (Q.E.D.). (Dieudonné-Schwartz, prop.1, pg.64).

<u>Proposição 21</u>. Tôda variedade linear fechada V de um espaço localmente convexo E é <u>fechada</u> na topologia $\sigma(E,E')$.

Seja $x_0 \notin V$; de acôrdo com a proposição 14, existe um hiperplano H que contém V e não contém x_0. Segue-se da proposição 12 que $\langle x,x'\rangle = a$, com $x' \in E'$, é uma equação de H. Mas H não contém x_0, portanto, $\langle x_0,x'\rangle = b$ com $b \neq a$. Supondo-se $|b| < |a|$ e $d < |a| - |b|$ e considerando-se a vizinhança de x_0, $|\langle x-x_0,x'\rangle| \leq d$, é evidente que esta vizinhança não encontra o hiperplano H, logo, H é fechado na topologia $\sigma(E,E')$.(º) (Q.E.D.).

<u>Proposição 22</u>. Para que uma parte A de um espaço localmente convexo seja um conjunto total, <u>em</u> E, é necessário e suficiente que para <u>todo</u> $x' \neq 0$ em E', exista um $x \in A$ tal que $\langle x,x'\rangle \neq 0$.

Com efeito, sendo A total em E, $\bar{A} = E$ e portanto A é total na topologia $\sigma(E,E')$ (prop.21) e a condição exprime precisamente a condição necessária e suficiente para que A seja total nesta topologia (prop.18). (Q.E.D.).

<u>Proposição 23</u>. Para que uma família de pontos $(x_i)_{i\in I}$ de um espaço localmente convexo E seja <u>topològicamente</u> <u>livre</u> em E, é necessário e suficiente que, para todo k, exista um a'_k em E', tal que $\langle x_k,a'_k\rangle \neq 0$ e $\langle x_i,a'_k\rangle = 0$ para $i \neq k$.

De acôrdo com a proposição 21, esta proposição se reconduz à proposição 19.

(º) Supondo-se $|a| = |b|$, a translação definida pelo vector <u>a</u> reconduz a demonstração ao caso tratado acima.

6. Espaços vectoriais postos em dualidade por uma forma bilinear. Teorema de Mackey-Arens.

Sejam E e E' dois espaços vectoriais sôbre o corpo complexo e suponhamos dada uma forma bilinear $B(x,x'): (x,x') \rightarrow B(x,x')$.

Definição 23. Diz-se que os espaços E e E' estão postos em dualidade pela forma B se estão satisfeitas as seguintes condições (Dieudonné: Ann. de l'Ecole Normale, LIX, Fasc.2,pg. 192):

(D_I) - A relação "qualquer que seja $x \in E$, $B(x,x')=0$" implica $x'=0$;

(D_{II})- A relação "qualquer que seja $x' \in E'$, $B(x,x')=0$" implica $x = 0$.

Seja $B_{x'}$ a forma linear parcial $x \longrightarrow B(x,x')$ sôbre E. A aplicação $x' \longrightarrow B_{x'}$ é, evidentemente, uma aplicação linear do espaço E' no dual algébrico E^* de E e, de acôrdo com a condição D_I, esta aplicação é biunívoca em E^*; esta aplicação permite identificar E' com um sub-espaço de E^*, $E' \subset E^*$. Considerando-se a outra forma parcial B_x: $x' \longrightarrow B(x,x')$ e a aplicação $x \longrightarrow B_x$, a condição D_{II} permite a identificação de E com um sub-espaço do dual algébrico E'^* de E', $E \subset E'^*$; feitas estas identificações, a forma $x \longrightarrow B(x,x')$ será um elemento de E' e nestas condições, é cômodo escrever-se x,x' em lugar de $B(x,x')$. A identificação de E' com uma parte de E^* permite ainda a introdução em E' da topologia da convergência simples em E, e com argumentos idênticos aos desenvolvidos na definição 22, constata-se que essa topologia é de espaço localmente convexo e será indicada com a notação $\sigma(E',E)$. Trocando-se os papeis de E e E', define-se sôbre E a topologia da convergência simples sôbre E que será designada por $\sigma(E,E')$.

Proposição 23. As funções $|B_{x'}|$ são semi-normas sôbre E e precisamente as semi-normas que definem a topologia de espaço localmente convexo $\sigma(E,E')$. Esta topologia é a topologia de espaço localmente convexo menos fina para a qual tôdas as formas $B_{x'}$ são contínuas.

Observação - As proposições 8,9 e 10, como é fácil verificar, permanecem verdadeiras substituindo-se naqueles enunciados o dual fraco E'_f pelo espaço E' com a topologia $\sigma(E',E)$.

Segue-se dessa observação a seguinte

Proposição 24. O sub-espaço E de E'^* é o dual de E' com a topologia $\sigma(E',E)$ e, correspondentemente, o sub-espaço E' de E^* é o dual de E com a topologia $\sigma(E,E')$.

Observação - No que se segue empregaremos muitas vezes o advérbio fracamente, quando se tratar de propriedade relativa à topologia $\sigma(E,E')$, conforme o contexto.

Proposição 25. Seja E um espaço vectorial topológico e U uma vizinhança da orígem em E. O conjunto U^o é fracamente compacto.

Demonstração - E' fácil verificar que o espaço E' pode ser considerado como sub-espaço do espaço C^E, tendo-se em vista a definição de vizinhança na topologia fraca de E' e a definição de topologia produto no espaço produto C^E (Bourbaki, T.G.II,pg.42 e Bourbaki, T.G.X,§1, 3, I). Da propriedade 3 da prop.2, conclui-se que, para todo $x \in E$, existe $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$ e tal que $\lambda x \in U$ e, por tanto, $|\langle \lambda x,x'\rangle| \leq 1$ ou $|\langle x,x'\rangle| \leq \frac{1}{|\lambda|}$, para todo $x' \in U^o$. Verifica-se dêste modo, que as projeções de U^o sôbre os espaços fatores de C^E são limitadas. De acôrdo com Bourbaki, T.G.VIII,§1,p. 93 e Bourbaki,T.G.VI, §1, Prop.1, segue-se que essas projeções são relativamente compactas; utilizando-se do teorema de Tychonoff (Bourbaki, T.G.I, §10, Teor. 2, Corol. pg. 63) conclui-se que U^o é relativamente compacto em C^E. Mas U^o é evidentemente fechado em C^E, portanto U^o é compacto e, lembrando a observação que abriu esta demonstração, U^o é fracamente compacto. (Q.E.D.). (Sôbre esta demonstração ver Delsarte, Cap.I, §3, Teor. 2 e Dieudonné, Ann. Ecole Normale, LIX, Fasc. 2, pg. 128).

Definição 24. No espaço vectorial $\mathcal{L}(E,F)$, com E e F espaços vectoriais topológicos separados, pode-se introduzir a topologia da convergência compacta. Esta é obtida tomando-se para Φ (ver pg.5) o conjunto das partes relativamente compactas de E. Com efeito, A sendo elemento de Φ, $u(A)$ é relativamente compacta em F (Bourbaki, T.G.I, §10, pg.62) e, portanto, limitado (Prop. 6) e, de acôrdo com a prop.7, esta topologia é compatível com a estrutura de espaço vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$. Em particular, sôbre E', dual de E, a topologia da convergência uniforme sôbre os compactos (topologia compacta τ_c) é separada, pois Φ é um recobrimento de E.

Definição 25. Na hipótese em que os espaços E e E' estejam postos em dualidade, isto é, nas condições da definição 23, sabe-se que, com oportuna identificação, $E \subset E'^*$. Nesta, circunstância, pode-se considerar sôbre E a topologia da convergência uniforme sôbre as partes absolutamente convexas e fracamente compactas de E'. Esta topologia será indicada com a notação $\tau(E,E')$ e, trocando-se os papéis de E e E', define-se sôbre E' a topologia $\tau(E',E)$, isto é: a topologia da convergência uniforme sôbre as partes absolutamente convexas e fracamente compactas de E.

Os polares de K, precisamente, os conjuntos

$$K^o = \left\{ x \;\middle|\; |\langle x,x'\rangle| \leqslant 1, \; x' \in K \right\},$$

quando K percorre o conjunto das partes absolutamente convexas e fracamente compactas de E', constituem um sistema fundamental de vizinhanças da orígem de E na topologia $\tau(E,E')$. Êste resultado é de fácil verificação, lembrando-se da proposição 2 e def. 14, b) e do fato que o homotético de uma parte absolutamente convexa e fracamente compacta é uma parte com as mesmas propriedades.

Nesta altura é oportuna a introdução da seguinte notação: o espaço vectorial topológico com a topologia localmente convexa será indicado por E_τ, e o dual de E_τ, com a notação E'_τ.

Pode-se agora apresentar a seguinte questão, supondo-se ainda que E e E' sejam espaços vectoriais nas condições da definição 23. Quais são as topologias τ (respect. τ') de espaço localmente convexo que se pode introduzir em E (respectivamente E') e para as quais $E'_\tau = E'$ (respect. E é dual de $E'_{\tau'}$)? A resposta é dada pela seguinte

Proposição 26 (Teorema de Mackey-Arens) - Sejam E e E' espaços vectoriais nas condições da definição 23. Condição necessária e suficiente para que $E'_\tau = E'$ (respect. $(E'_{\tau'})' = E$) é que a topologia τ (resp. τ') seja mais fina que a topologia $\sigma(E,E')$ (respect. $\sigma(E',E)$) e menos fina que a topologia $\tau(E,E')$ (resp. $\tau(E',E)$).

Demonstração - Em primeiro lugar, observe-se que, se a condição $E'_{\tau} = E'$ está satisfeita, é claro que $\tau \geq \sigma(E,E')$ (contexto da definição 22). Trata-se agora de demonstrar que, da hipótese $E'_{\tau} = E'$, implica $\tau \leq \tau(E,E')$ (º). Seja U uma vizinhança circular arbitrária da origem na topologia τ e U^{o} o seu conjunto polar. De acôrdo com a proposição 25, U^{o} é fracamente compacto e, por outro lado, é trivial a verificação de que U^{o} é absolutamente convexo. Recordando-se (definição 25) que os polares de partes absolutamente convexas e fracamente compactas de E' são vizinhanças da orígem de E na topologia $\tau(E,E')$, segue-se que $(U^{o})^{o}$ é uma $\sigma(E,E')$-vizinhança. Seja p a semi-norma padrão da vizinhança circular U; aplicando-se a proposição 15, dado $x_o \notin U$, é possível construir uma forma linear contínua x' (na topologia τ) que satisfaz: $\langle x_o, x' \rangle = p(x_o) > 1$ e $\langle x, x' \rangle = p(x)$, para $x \in E$. Nestas condições, é claro que $x_o \notin (U^{o})^{o}$ e, portanto, $(U^{o})^{o} \subset U$, o que traduz a relação $\tau \leq \tau(E,E')$. Baseando-se na observação de que a continuidade de uma forma linear numa topologia menos fina que $\tau(E,E')$ implica sua continuidade nesta topologia, basta, então, demonstrar que tôda forma linear contínua na topologia $\tau(E,E')$ pertence a E' (convém não se esquecer que E' está identificado com uma parte do dual algébrico E^{*} de E). Seja K uma parte qualquer de E' que seja absolutamente convexa e fracamente compacta, K^{o} seu conjunto polar. Considerando-se $K \subset E' \subset E^{*}$, indica-se com $K^{o}_{EE^{*}}$ o polar de K, relativamente ao par E, E^{*}. E' claro que $K^{o} = K^{o}_{EE^{*}}$. Seja agora $\varphi \in E^{*}$, uma forma linear contínua na topologia $\tau(E,E')$. Trata-se de demonstrar que $\varphi \in E'$. A forma linear φ sendo contínua na topologia $\tau(E,E')$, segue-se a existência de uma parte circular e fracamente compacta $K \subset E'$, tal que $|\varphi(K^{o})| \leq 1$. K sendo fracamente compacto em E' é fracamente fechado no mesmo espaço. Por outro lado, a aplicação canônica θ de E' em E^{*} é uma aplicação contínua pois a topologia $\sigma(E',E)$ é a topologia induzida por $\sigma(E^{*},E)$ sôbre E'; logo, $\theta(K) = K$ é fracamente com-

(º) Dadas duas topologias comparáveis τ e ν sôbre um mesmo conjunto, usamos a notação $\tau \leq \nu$ para exprimir que τ é menos fina (no sentido largo) que ν.

pacto em E (Bourbaki, T.G.I, Teor.1, pg.62) e, portanto, fracamente fechado em E^*, isto é, fechado na topologia $\sigma(E^*,E)$. Consideremos finalmente o polar de K ; como $K^o = K^o_{EE^*}$, segue-se, de acôrdo com a proposição 19, que $(K^o_{EE^*})^o = K \subset E'$, pois K é absolutamente convexo e fechado na topologia $\sigma(E^*,E)$. Mas a forma linear φ é tal que $|\varphi(K^o)| \leq 1$ e, portanto, $\varphi \in (K^o_{EE^*})^o = K \subset E'$, como queríamos demonstrar (º).

Sôbre o teorema de Mackey-Arens consultar: G.W.Mackey, On convex topological linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 60, nº3, Th.5, pg.523; G.W.Mackey: On infinite dimensional linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.57, nº2, Th.VII-4, pg.198; R. Arens: Duality in linear spaces, Duke Math. J., vol.14,nº3, Th.2,pg. 790.

§ 7. Espaços de Fréchet. Espaços de Banach. Espaços envoltória de espaços localmente convexos.

Sôbre o conteúdo da primeira parte dêste parágrafo consultar Bourbaki, T.G.IX-§1,2 e §3, até a pg.37. As definições e resultados principais encontram-se no apêndice desta tese.

Proposição 27.- Condição necessária e suficiente para que um grupo abeliano G seja metrizável é que G seja separado e que a orígem possua um sistema fundamental de vizinhanças enumerável (Bourbaki, T.G.IX,pg.36).

Definição 26. Um espaço vectorial topológico E é metrizável, se, considerado como grupo abeliano topológico, é metrizável.

Proposição 28. Condição necessária e suficiente para que um espaço vectorial topológico E seja metrizável é que seja separado e que sua topologia seja definida por uma família enumerável de semi-normas.

Com efeito, de acôrdo com a definição 21, se a topologia de E está definida por uma família enumerável de semi-normas, a orígem possui uma família enumerável de vizinhanças. Reciprocamente, se a orígem possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças, conforme a definição de espaço localmente convexo complexo, pode-se su-

(º) A demonstração da última parte do teorema de Mackey-Arens foi sugerida ao autor pelo Prof. L. Nachbin.

pôr que essas vizinhanças sejam circulares; segue-se que os padrões dos mesmos constituem uma família de semi-normas que definem a topologia de E. (Q.E.D.).

Todo espaço normado é evidentemente metrizável.

Definição 27. Um espaço localmente convexo metrizável e completo é um espaço de Fréchet.

Definição 28. Um espaço normado e completo é um espaço de Banach.

Indicaremos um espaço de Fréchet com a notação $(\mathfrak{F})$.

Proposição 29. Seja E um espaço $(\mathfrak{F})$, H uma parte do dual E' de E. As proposições seguintes são equivalentes:

a) existe uma vizinhança U de 0 em E tal que $H \subset U^{\circ}$;

b) H é limitado na topologia τ_{ℓ};

c) H é fracamente limitado;

d) H é fracamente relativamente compacto.

A topologia τ_{ℓ} é chamada topologia forte sôbre E' e no que se segue a expressão fortemente refere-se sempre à topologia forte. Demonstra-se, em primeiro lugar, que a condição a) implica que H é uma parte equicontínua de E'. Esta afirmação é consequência do seguinte: condição necessária e suficiente para que uma parte de E' seja equicontínua é que esteja contida no conjunto polar de uma vizinhança da orígem em E. Com efeito, dizer que H é equicontínua é dizer que dado $\sigma > 0$, existe uma vizinhança V da orígem em E, tal que $|\langle x,x'\rangle| \leqslant \sigma$, para $x \in V$ e $x' \in H$. Tomando-se $|\lambda| \geqslant \sigma$, segue-se $|\langle \lambda^{-1}x,x'\rangle| \leqslant \left|\frac{\sigma}{\lambda}\right| \leqslant 1$, para $x \in V$ e $x' \in H$, logo $H \subset (\frac{1}{\lambda} U)^{\circ}$. A recíproca é evidente. Demonstra-se, então, a implicação a) $\longrightarrow$ b), provando-se que todo conjunto equicontínuo é fortemente limitado. H sendo equicontínuo, segue-se que dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V da orígem em E tal que $|\langle x,x'\rangle| < \varepsilon$, para $x' \in H$ e $x \in V$. A sendo um conjunto limitado de E vem: $\lambda A \subset V$, para um oportuno λ. Conclui-se daí que $|\lambda \langle x,x'\rangle| < \varepsilon$, para $x' \in H$, $x \in V$ pois $\langle \lambda x,x'\rangle = \lambda\langle x,x'\rangle$. A implicação b) $\longrightarrow$ c) é trivial. Para demonstrar que de a) segue-se d), basta observar que, de acôrdo com a prop.25, U° é fracamente compacto, logo fracamente fechado e, portanto, $\bar{H} \subset U^{\circ}$ é fracamente compacta

(H relativamente compacto). A proposição c) é implicada pela proposição d) em consequência da proposição 6. Para terminar a demonstração resta provar que a), b) e c) são equivalentes. Como já se demonstrou que a) arrasta b) e b) implica c), falta, sòmente, provar que c) arrasta a). Ora, por hipótese, a função $f(x) = \sup_{x' \in H} |\langle x,x'\rangle|$ é finita em E e $\langle x,x'\rangle$ sendo contínua em E, f é semi-contínua inferiormente (Bourbaki, T.G.IV,pg.110); resulta do teorema de Baire (Bourbaki, T.G.IX,Teor.2,pg.77) que existe um ponto $x_0 \in E$ e uma vizinhança V da origem em E tais que f(x) seja limitada superiormente em x_0+V. Sendo f a envoltória superior de funções convexas é uma função convexa (Delsarte, Cap.II, §2,Prop.3) logo, para $y \in V$, tem-se $f(y) \leq f(x_0) + f(x_0+y)$, o que demonstra que f é limitada superiormente em V, portanto, H e equicontínua na origem, logo em E. (Dieudonné-Schwartz, Teor.2 e Teor.3, pg.73, 74 e 76).

<u>Observação</u> - Nas condições da proposição 29, as topologias induzidas sôbre H pela topologia fraca e pela topologia da convergência uniforme sôbre os compactos de E, <u>coincidem</u>. Outra consequência da mesma proposição é que no espaço E' uma parte limitada numa qualquer das topologias τ_s, τ_ℓ, τ_c é limitada nas outras duas.

<u>Definição 29</u>. Seja E um espaço localmente convexo separado. O <u>bidual</u> (forte) E'' de E é o dual forte do dual forte E' de E. A forma $x' \longrightarrow \langle x,x'\rangle$ sôbre E' é contínua para a topologia $\sigma(E',E)$ (ver pg.12), segue-se que é contínua também para a topologia forte. Nestas condições, a forma $x' \longrightarrow \langle x,x'\rangle$ é um elemento de E'' que se indica com a notação $\tilde{x}$; tem-se, portanto, idênticamente $\langle x,x'\rangle = \langle x',\tilde{x}\rangle$. A aplicação $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E <u>em</u> E'' é <u>biunívoca</u> e permite, pois, a identificação de E com um sub-espaço de E'', introduzindo-se, dêste modo, sôbre E a topologia <u>induzida</u> por E'' sôbre E.

<u>Proposição 30</u>. A topologia induzida sôbre E pela topologia forte de E'' é <u>mais fina</u> que a topologia de E. (Dieudonné-Schwartz, 8, pg.77).

Com efeito, seja U uma vizinhança absolutamente convexa da origem em E e L um conjunto limitado arbitrário de E; existe, então, um $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda U$ (definição 13), portanto $U^{o} \subset \lambda B^{o}$ e, por definição, os conjuntos B^{o} constituem um sistema fundamental de vizinhanças da orígem em E', na topologia τ_{ℓ}. Seja $U^{o}_{E'' E'}$ o polar de U^{o} em E''; a intersecção $U^{oo}_{E'' E'} \cap E = U^{oo}$ é o polar de U^{o}. U sendo fechado e convexo, pode-se demonstrar(º), raciocinando-se de modo semelhante ao desenvolvido na demonstração da proposição 21, que $U^{oo} = U$, o que mostra que a topologia forte de E é mais fina que a topologia de E. Da discussão anterior resulta que uma condição necessária para que a topologia forte de E seja estritamente mais fina que a topologia de E, é que existam em E conjuntos fortemente limitados que não estejam contidos num conjunto da forma U^{o}. A proposição 29 mostra que esta condição não se apresenta quando o espaço E é um espaço de Fréchet. Conclui-se, daí, a seguinte

Proposição 31. Se E é um espaço de Fréchet, a aplicação $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E no seu bidual E'' é um isomorfismo (Dieudonné-Schwartz, Prop.9,pg.78).

Trata-se, nesta proposição, de isomorfismo da estrutura de espaço vectorial topológico.

Definição 30. Um espaço localmente convexo e separado E é reflexivo se a aplicação $x \longrightarrow \tilde{x}$ é um isomorfismo de E sôbre E''.

Proposição 32. Seja E um espaço de Fréchet. Condição necessária e suficiente para que E seja reflexivo é que todo conjunto fracamente fechado e limitado em E seja fracamente compacto.

Demonstração - De acôrdo com a Prop.31, E sendo um espaço de Fréchet a aplicação $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E em E'' é um isomorfismo. Para demonstrar que se trata de um isomorfismo sôbre basta provar que $E'' = E$. Para êsse fim observemos, em primeiro lugar, que a topologia da convergência uniforme sôbre as partes absolutamente convexas e fechadas de E coincide com a topologia forte de E'. Para demonstrá-lo, basta verificar que tôda parte limitada está contida

(º) Pode-se demonstrar, de um modo geral, a seguinte proposição: Se A é uma parte fechada e absolutamente convexa de um espaço localmente convexo, A é fracamente fechado (Delsarte, Cap.III,§3 - Prop.2).

na aderência de sua envoltória absolutamente convexa e que estas partes também são limitadas. Mas, por hipótese, todo conjunto fracamente fechado e limitado de E é fracamente compacto, logo, todo conjunto convexo fechado e limitado também é fracamente compacto. Segue-se daí que a topologia forte sôbre E' coincide com a topologia $\tau(E',E)$ (definição 25). Mas, de acôrdo com a Prop.26 (Teorema de Mackey-Arens) o dual de E' (E' com a topologia $\tau(E',E)$ é E, conseguintemente $E = E''$. Reciprocamente, se a topologia $\tau(E',E)$ é idêntica à topologia forte, todo conjunto absolutamente convexo, fechado e limitado em E, está contido num conjunto fracamente compacto, logo, é fracamente compacto. Mas, como já se observou no início desta demonstração, todo conjunto fechado (ou fracamente fechado) e limitado está contido num conjunto absolutamente convexo fechado e limitado e é, portanto, fracamente compacto. (Q.E.D.).

Seja E um espaço localmente convexo e separado que verifica a seguinte condição $\mathcal{M}$: tôda parte A de E fortemente fechada e limitada é fortemente compacta. A parte A sendo fortemente compacta é fracamente compacta (consequência imediata da definição de parte compacta) logo, fracamente fechada e a condição $\mathcal{M}$ implica a condição "tôda parte fracamente fechada e limitada em E é fracamente compacta". Caso o espaço E seja um espaço de Fréchet a proposição 32 implica a reflexividade de E.

Definição 31. Seja E um espaço de Fréchet, diz-se que E é um espaço de Montel se satisfaz a condição $\mathcal{M}$.

Todo espaço de Montel é reflexivo e tôda sua parte limitada é compacta e reciprocamente. Indica-se um espaço de Montel com a notação $(\mathcal{M})$.

Proposição 33. Seja E um espaço $(\mathcal{M})$. Tôda parte H limitada e fortemente fechada de E', é fortemente compacta (Dieudonné-Schwartz, Prop.10 - pg.80).

Sôbre o conceito e proposições que se seguem consultar: G.Köthe: Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume, Math. Zeitschrift, 52 Band, 5.Heft (1950) -pg.627 e seguintes.

Espaço envoltória de espaços localmente convexos.

Seja E um espaço vectorial e E_n uma sequência estritamente crescente $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ de sub-espaços vectoriais de E, tais que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Suponha-se, além disso, que os espaços E_n, $n=1,2,\dots$, sejam espaços vectoriais localmente convexos e que a topologia τ_{n+1} de E_{n+1} induza sôbre o espaço E_n uma topologia menos fina (no sentido largo) que a topologia τ_n de E_n. Seja W_i uma vizinhança circular da orígem em E_i, na topologia τ_i, i inteiro positivo qualquer e forme-se a envoltória absolutamente convexa (definição 4) $W = \Gamma_{n=1}^{\infty} W_n$ da reunião dos conjuntos W_n, isto é:

$$W = \left\{ x \;\middle|\; x = \sum \alpha_i x_i,\ x_i \in W_i,\ \text{todos os } \alpha_i \text{ nulos com exceção de um número finito deles e } \sum |\alpha_i| \leq 1 \right\}$$

Os conjuntos W são partes circulares de E; considerando-se a totalidade dos conjuntos W assim obtidos, para tôdas as vizinhanças W_i em E_i, obtem-se evidentemente um conjunto de partes de E que é uma base de filtro S sôbre E. E' fácil verificar que esta base de filtro satisfaz as condições da proposição 2 e define, portanto, sôbre o espaço vectorial E uma estrutura de espaço vectorial localmente convexo. Indica-se a topologia ssim obtida com a notação τ_e (topologia envoltória das topologias τ_i).

Proposição 34. A topologia τ_e é a mais fina de tôdas as topologia localmente convexas τ^* sôbre E que induzem em cada E_n uma topologia menos fina que a topologia τ_n.

Demonstração - Seja V uma vizinhança circular da orígem de E na topologia τ^*. Da hipótese feita sôbre a topologia τ^*, segue-se que $V_n = V \cap E_n$ é uma vizinhança circular da orígem em E_n na topologia τ_n. Como V contém $\Gamma_{n=1}^{\infty} V_n$ e está contido no mesmo conjunto, segue-se que $V = \Gamma_{n=1}^{\infty} V_n$. Mas $\Gamma_{n=1}^{\infty} V_n$ é uma vizinhança da orígem em E na topologia τ_e, logo, $\tau_e \geq \tau^*$. (Q.E.D.).

Definição 32. O espaço $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, com a topologia localmente convexa τ_e, é o espaço envoltória dos espaços localmente convexos E_n.

Os espaços $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, "limite indutivo de espaços de Fréchet", introduzidos por Dieudonné e Schwartz (trabalho já citado, pg.66) são um caso particular dos espaços que acabam de ser definidos; basta, para obtê-los, supôr os espaços E_n, espaços de Fréchet e a topologia induzida pela topologia τ_{n+1} sôbre o espaço E_n idêntica à topologia τ_n de E_n.

Proposição 35. Caso os espaços localmente convexos E_n que figuram na definição anterior sejam separados, condição necessária e suficiente para que o espaço envoltória E seja completo é que, para todo n, qualquer filtro de Cauchy definido por uma base de filtro constituida exclusivamente por partes de E_n, seja convergente num conveniente espaço E_{n+k}. (Köthe, trabalho citado, pg.628).

Sôbre as noções e resultados utilizados nesta demonstração, consultar Bourbaki, T.G.II, especialmente §3.

A condição é evidentemente necessária. Para demonstrar que a mesma é suficiente, seja Φ um filtro de Cauchy nas condições da proposição. Dada, então, uma vizinhança circular W da orígem, existe, pelo menos, um conjunto F_W do filtro dado, tal que $x-y \in W$ para $x,y \in F_W$. Constroe-se agora o conjunto F'_W como se segue:

$$F'_W = \left\{ y \mid y-x \in W; \quad x \in F_W \right\}.$$

F'_W é um conjunto pequeno de ordem $3W$. Com efeito, sejam y_1 e y_2 pontos de F'_W: mas, $y_1-y_2 = (y_1-x_1)+(x_1-x_2)-(y_2-x_2)$, com $x_1,x_2 \in F_W$, e portanto $y_1-x_1 \in W$, $x_1-x_2 \in W$, $y_2-x_2 \in W$, logo, $y_1-y_2 \in 3W$. Considere-se $F'_{W_1} \cap F'_{W_2}$ e $F'_{W_1 \cap W_2} = \left\{ y \mid y-x \in W_1 \cap W_2, x \in F_{W_1 \cap W_2} \right\}$; é claro que $F'_{W_1} \cap F'_{W_2} \supset F'_{W_1 \cap W_2}$. Por outro lado, as vizinhanças $3W$ formam uma base de vizinhanças (Bourbaki, T.G.I, pg. 23 e 24) quando W percorre o conjunto das vizinhanças circulares da orígem. Da definição de F'_W vem: $F'_W \subset F_W$; como F'_W é pequeno de or dem $3W$, êle contém um oportuno conjunto F_{W_1}. Vê-se, assim, que F'_W é também uma base do filtro dado. Considere-se agora o conjunto de tôdas as intersecções $F'_W \cap E_n$. Existe um n fixo para o qual $F'_W \cap E_n$ não é vazia. Para demonstrá-lo, suponha-se o contrário, isto é, existe uma sequência $W^{(1)} \supset W^{(2)} \supset \ldots$, de vizinhanças circulares da orígem em E e conjuntos correspondentes $F^{(o)}_{W^{(i)}}$, para os quais

$$(1) \qquad F^{(o)}_{W^{(i)}} \cap E_i = \emptyset, \quad i=1,2,\ldots,n,\ldots \quad .$$

Pondo-se, $W^{(i)} \cap E_n = W^{(i)}_n$, é claro que $W^{(i)}_n$ é circular e é uma vizinhança de E_n na topologia τ_n. Formando-se a vizinhança em E:

$V^{(i)} = \Gamma(\frac{1}{2}W^{(1)}_1 \cup \frac{1}{2}W^{(2)}_2 \cup \ldots \cup \frac{1}{2}W^{(i-1)}_{i-1} \cup W^{(i)})$-envoltória absoluta dos conjuntos que figuram entre parêntesis - segue-se que

$$(2) \qquad F'_{V^{(i)}} \cap E_i = \emptyset, \quad i=1,2,\ldots,n,\ldots \quad .$$

Com efeito, da definição de $F_{V^{(i)}}$ conclui-se que $F_{V^{(i)}} \cap F^{(o)}_{W^{(i)}} \neq \emptyset$ e portanto existe em $F_{V^{(i)}}$ um elemento x_o de $F^{(o)}_{W^{(i)}}$. Tendo-se presente a definição de envoltória absolutamente convexa vem:

$$F_{V^{(i)}} = \left\{ x \quad x = x_o + \sum_{k=1}^{i} \alpha_k x_k, \quad x_k \in W^{(k)}_k \text{ para } k < i, \quad x_i \in \tfrac{1}{2}W^{(i)}, \quad \sum_{k=1}^{i} (\alpha_k) \leq 1 \right\},$$

consequentemente todo elemento $z \in F'_{V^{(i)}}$ tem a forma:

$$z = x_o + \sum_{k=1}^{i} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{i} \alpha'_k x'_k, \quad \text{onde} \quad \sum_{k=1}^{i} \alpha'_k x'_k \in V^{(i)}.$$

Escrevendo-se, $z = x_o + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha'_k x'_k + \alpha_i x_i + \alpha'_i x'_i$ e e observando que $\alpha_i x_i + \alpha_i' x_i' \in \frac{1}{2}W^{(i)} + \frac{1}{2}W^{(i)} \subset W^{(i)}$, $x_o \in F_{W^{(i)}}^{(o)}$ e $x_o + {}_i x_i + {}_i' x_i' \notin E_i$, pois $F_{W^{(i)}}^{(o)} \cap E_i = \emptyset$, $i=1,2,\ldots,n,\ldots$, é fácil concluir que $z \notin E_i$. Com efeito, se $z \in E_i$, como $\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k' x_k' \in E_{i-1}$, segue-se que $x_o + \alpha_i x_i + \alpha_i' x_i' \in E_i$, o que é absurdo. Fica assim demonstrada a relação (2).

Considere-se agora a vizinhança absoluta $U = \Gamma_n W_n^{(n)}$ (envoltória absoluta de todos os $W_n^{(n)}$). E' claro que $U \subset V^{(i)}$, qualquer que seja i inteiro positivo. Mas, dada a vizinhança absoluta U, existe um conjunto F_U do filtro que é pequeno de ordem U. Por outro lado, dado $y \in F_{V^{(i)}}$, de acôrdo com (2), $y+V^{(i)}$ não contem nenhum elemento de E_i. Nestas condições, $z_i - y \notin V^{(i)}$ e, portanto, $z_i - y \notin U$, $y \notin F_U$ e finalmente $F_{V^{(i)}} \cap F_U = \emptyset$, o que contradiz a propriedade acima do filtro Φ.

Segue-se, então, que <u>existe um</u> n_o para o qual $F_W' \cap E_{n_o}$ <u>não é vazia</u>. Considere-se os conjuntos $F_W' \cap E_{n_o}$; êles formam uma base de filtro cujos elementos são partes de E_n e, de acôrdo com a hipótese da proposição, êste filtro tem limite num oportuno E_{n+k} e o filtro de Cauchy Φ tem limite, logo a condição é <u>suficiente</u>.

<u>Observação</u>. Seja $\{x_j\}_{j \in N}$ uma sucessão convergente em E com a topologia envoltória τ_e. Segue-se da demonstração anterior que existe um inteiro positivo n tal que a sucessão $\{x_j\}_{j \in N}$ pertence a E_n e é convergente nesse espaço.

C A P I T U L O   I I.

TOPOLOGIA VECTORIAL CONVEXA NOS ESPAÇOS FUNCIONAIS ANALÍTICOS. DUALIDADE DEFINIDA PELA FÓRMULA DE FANTAPPIÈ.

§1 - Função localmente analítica. Espaço vectorial [F]. Funcional analítico linear.

1. Definição de função localmente analítica.

Definição 1. Uma função localmente analítica é uma função complexa de uma variável complexa definida num conjunto aberto Ω da esfera complexa [º] e monógena (derivável em cada ponto de Ω).

O campo de definição Ω pode ser não conexo e convém acentuar que o conceito de função é aqui tomado no seu sentido habitual e não no sentido das funções analíticas de Weierstrass; uma função $w = f(z)$ é caracterizada pela correspondência f e pelo seu campo de definição Ω e duas funções distintas podem ter restrições coincidentes numa parte própria, conexa, dos seus respectivos campos de definição. Êste conceito de função analítica foi destacado e utilizado por L.Fantappiè que a êle se refere nos seguintes termos (L.Fantappiè,II,pg.534): "E' da osservare che, mentre una funzione analitica in senso stritto, col suo campo naturale di esistenza, risulta sempre perfettamente individuata dai valori che essa assume nell'intorno di un punto qualunque di tal campo, per individuare invece una funzione analitica localmente bisogna assegnare insieme tanto la regione R in cui essa è definida (anche costituita di piu parte non connesse), come i valori che essa vi assume (in modo, naturalmente, che vi resulti regolare ovunque)".

Se o campo de definição Ω contém o ponto no infinito, supõe-se a função localmente analítica $w = f(z)$ sujeita à restrição de se anular nesse ponto. Esta condição de regularidade é mantida em todo o trabalho, mesmo naqueles lugares em que não venha explìcita-

---

[º] No que se segue supõe-se os números complexos representados sôbre a esfera complexa ou esfera de Riemann. A vizinhança (ε) de um ponto finito é o conjunto dos números z que satisfazem a desigualdade $|z-a| < \varepsilon$ e as vizinhanças (K) do ponto no infinito é o conjunto dos números $|z| > K$. Esta representação é equivalente topològicamente, ao plano tornado compacto com a adjunção de um ponto no infinito que é a imágem do polo da esfera pela conhecida projeção estereográfica (ver qualquer bom tratado sôbre funções analíticas).

mente mencionada. No que se segue, diz-se que uma função é regular num conjunto A se ela é localmente analítica num conjunto aberto Ω que contém A.

Definição 2 - Espaço vectorial $[F]$. Seja F uma parte própria e fechada da esfera complexa. Designa-se com (F) o conjunto das funções localmente analíticas definidas em conjuntos abertos que contêm F. Pode-se introduzir em (F) uma relação de equivalência R_F definida do seguinte modo: Se $x(z)$ e $y(z)$ são funções de (F), diz-se que elas são equivalentes segundo R_F (ou módulo R_F) se existem restrições dessas funções que coincidem em algum conjunto aberto que contém F. Esta relação é evidentemente reflexiva e simétrica. Para demonstrar que é transitiva, supõe-se $x(z)$ e $y(z)$ equivalentes segundo R_F, escrevendo-se, para simplificar, $x(z) = y(z)$ (mod. R_F) e também $y(z) = u(z)$ (mod. R_F). Nestas condições, as restrições de $x(z)$ e $y(z)$ coincidem num aberto Ω que contém F e as restrições de $y(z)$ e $u(z)$ coincidem num aberto Ω'; é claro, então, que as restrições de $x(z)$ e $u(z)$ coincidem no conjunto $\Omega \cap \Omega'$ que contém F, logo, $x(z) = u(z)$ (mod. R_F).

Seja $[F]$ o conjunto quociente de (F) pela relação de equivalência R_F, o que quer dizer: $[F]$ é o conjunto das classes de equivalência determinadas em (F) pela relação R_F. Dadas duas funções, pertencentes a uma mesma classe de equivalência e tais que o campo de definição da primeira contenha o da segunda, diz-se que a primeira é prolongamento da segunda (êste prolongamento não é necessàriamente analítico). Indica-se a classe de equivalência definida pelo elemento $x(z)$ de (F) com a notação $\dot{x}$; portanto, se $x(z) = y(z)$ (mod. R_F), segue-se que $\dot{x} = \dot{y}$.

Pode-se introduzir uma estrutura de espaço vectorial no conjunto $[F]$. Com efeito, pondo-se: $\dot{x} + \dot{y} = \overset{\bullet}{\overline{(x(z)+y(z))}}$, onde $x(z)+y(z)$ representa a soma das funções $x(z)$ e $y(z)$ na intersecção dos seus campos de definição, e $\alpha\dot{x} = \overset{\bullet}{\overline{(\alpha x(z))}}$, onde α é um número complexo qualquer. E' claro, em primeiro lugar, que essas operações estão univocamente definidas módulo R_F. Em segundo lugar, é fácil verificar que o conjunto $[F]$, com essas operações, respectivamente, soma e multiplicação por um escalar, torna-se um espaço vectorial sôbre o corpo complexo C.

Definição 3. Funcional analítico linear. Diz-se que uma sucessão $\{\dot{x}_n\}_{n \in N}$ de elementos de $[F]$ tende para $\dot{x}$, se existem representantes $x_n(z)$ das classes de equivalência $\dot{x}_n$, de modo que a sucessão $x_n(z)$ tenda uniformemente para algum representante $x(z)$ de $\dot{x}$, num conjunto aberto que contém F.

Pode-se agora definir uma classe de formas lineares ou funcionais lineares sôbre $[F]$. Seja f uma forma linear sôbre $[F]$, isto é: f é uma aplicação linear de $[F]$ em C que satisfaz,

$$f(\dot{x}+\dot{y}) = f(\dot{x}) + f(\dot{y})$$
$$f(\alpha \dot{x}) = \alpha f(\dot{x})$$

onde $\dot{x},\dot{y} \in [F]$ e $\alpha \in C$.

A aplicação linear f é regular no ponto $\dot{x}$ de $[F]$ se $\lim_{n \to \infty} f(\dot{x}_n) = f(\dot{x})$, sempre que $\dot{x}_n \longrightarrow \dot{x}$ no sentido que vem de ser definido. O funcional linear f é regular sôbre $[F]$ se fôr regular em cada ponto de $[F]$.

A um funcional linear regular f definido sôbre $[F]$ corresponde univocamente uma aplicação de (F) em C (funcional definido sôbre (F)) que é indicada com a mesma letra f; precisamente, $f(x(z)) = f(\dot{x})$, para todo representante $x(z)$ de $\dot{x}$. Além disso, o funcional f satisfaz a seguinte condição:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n(z)) = f(x(z)) \ ,$$

sempre que $x_n(z) \longrightarrow x(z)$ uniformemente, sôbre um conjunto aberto que contém F.

Por outro lado, a um funcional f, definido sôbre (F), constante sôbre as classes de equivalência mod. R_F e que satisfaz a condição (A), corresponde univocamente um funcional linear regular, definido sôbre $[F]$.

Os funcionais f, definidos sôbre (F) e que satisfazem a condição (A) são os funcionais analíticos lineares introduzidos por L.Fantappiè (L.Fantappiè, III, pg.31 , C.L.da Silva Dias,I , pg.1-9); verifica-se, portanto, a partir da correspondência biunívoca acima demonstrada que os funcionais analíticos lineares podem ser identificados com os funcionais regulares, definidos sôbre $[F]$. Sôbre o conceito de funcional analítico linear ver o §1 do Capítulo III desta tese.

2. Representação dos funcionais analíticos lineares por meio de uma integral complexa.

Convem, neste ponto, recordar e frizar algumas noções e resultados sôbre a topologia da esfera complexa (ou plano completado), assim como da teoria das funções analíticas.

Domínio que cobre F é todo conjunto fechado que contém F no seu interior e é a aderência do seu interior; é, portanto, uma particular vizinhança fechada de F.

Região é um conjunto aberto e conexo.

Um arco simples (ou arco de Jordan) é um conjunto de pontos homeomorfo com o segmento fechado $[0,1]$.

Curva simples fechada (ou curva de Jordan) é um conjunto de pontos homeomorfo com a circunferência de raio 1.

No que se segue, o termo contôrno é usado no sentido de uma curva de Jordan composta de um número finito de arcos de Jordan.

Proposição 1 (Teorema de Jordan) - Uma curva de Jordan no plano completado (ou no R^2 simplesmente) determina duas regiões, das quais ela é a fronteira completa (ver, p.ex.: Newman , Topology of Plane Sets, pg.104).

Uma dessas regiões é a interior, a outra, a exterior. Uma curva de Jordan pode ser percorrida em dois sentidos, um oposto ao outro (Newman,I,pg.142).

Seja Γ um conjunto de pontos que é a reunião de um número finito de curvas de Jordan, duas a duas exteriores; com exceção de um número finito de pontos que podem pertencer a diversas dessas curvas. Um ponto é interior a Γ se é interior a uma das curvas que compõem Γ ; é exterior a Γ , se exterior à todas as curvas que formam Γ.

Dado um conjunto fechado F, diz-se que dois pontos do seu complementar estão separados por F se não existe nenhum arco de Jordan que os une sem encontrar F. Seja R um conjunto aberto que contém o conjunto fechado F e $I = \complement R$ (complementar de R).

Existe sempre uma reunião de contôrnos que separa o conjunto F do conjunto I. Com efeito, seja $\delta > 0$ a distância de I a F (mínimo das distâncias dos pontos de I aos pontos de F - êste mínimo existe e é positivo, pois I e F são conjuntos compactos sem ponto em comum). Recobrindo-se o conjunto I com vizinhanças (δ') com $\delta' < \delta$ e aplicando-se o teorema de Borel-Lebesgue, chega-se a um conjunto cuja fronteira é constituida por arcos de círculo e separa I de F. Seja Γ uma reunião de contôrnos que separa F de I. Os pontos interiores a Γ (pontos êstes que estão nas mesmas regiões que os pontos de F) e os pontos de Γ constituem um <u>domínio</u> que cobre F que se indica com Γ^*; sua fronteira é formada por um número finito de curvas de Jordan, é, portanto, um domínio de <u>conexão finita</u>. Seja Γ' uma reunião de contôrnos completamente interior a Γ e que também separa I de F, Γ'^* o domínio, definido por Γ' e que cobre F. E' claro que $\Gamma'^* \subset \Gamma^*$. O conjunto formado por Γ' e pelo complementar de Γ'^* em Γ^* é um dominio cuja fronteira é constituida pelos contôrnos de Γ e Γ'; é, portanto, um domínio de conexão finita (ver, p.ex., Newman, livro citado, prop. 10-4, pg.107).

<u>Proposição 2</u>. Todo conjunto F fechado e próprio do plano (ou plano completado) <u>separa</u> o plano num número finito ou enumerável de regiões duas a duas sem ponto comum. Todo ponto fronteira de uma dessas regiões é um ponto de F. (Ver Walsh: Int. and Approx., pg.7).

<u>Proposição 3</u>. Seja $x(z)$ uma função regular num conjunto F fechado e próprio do plano completado. Existem, então, 1º) - um conjunto de pontos S que contém F, formado por um número finito de regiões, cada uma das quais é limitada por um número finito de contôrnos que não se cortam; 2º) - uma função $G(z)$, regular no conjunto fechado $\bar{S}$, coincidente com $x(z)$ sôbre F e definida univocamente num ponto $z \in \bar{S}$ pelo desenvolvimento de Taylor de $x(z)$ num ponto $z_1 \in F$. (ver livro citado acima, pg.13).

E' consequência desta proposição que todos os representantes de um ponto $\dot{x} \in [F]$ coincidem no conjunto S que contém F.

Observe-se, explicitamente que, no caso em que $x(z)$ é a restrição a F de um representante de $\dot{x} \in [F]$, o prolongamento G está univocamente definido, inclusive na vizinhança de um ponto isolado z' de F, porque o desenvolvimento de Taylor de $x(z)$ no ponto z' está perfeitamente determinado (ver penúltimo período da pg.13, do citado livro de Walsh).

Proposição 4. (Teorema de Cauchy generalizado) - Seja $f(z)$ uma função regular numa região R e na fronteira da mesma, que consiste de n curvas de Jordan (conexão n). A integral $\int_C f(z)dz$, extendida a todo o contôrno da região R, percorrida no sentido positivo é nula (Courant-Hurwitz, I, pg.288; Newman, I, pg. 151 e seguintes).

Um resultado fundamental da teoria dos funcionais analíticos (ver Fantappiè, III, pg.40 e seguintes) é a seguinte

Proposição 5 (Representação dos funcionais analíticos pela fórmula de Fantappiè) - Todo funcional analítico linear f definido em $[F]$ pode ser representado por meio de uma integral complexa como se segue:

$$(1) \qquad f(\dot{x}) = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} x(z)u(z)dz,$$

em que o caminho de integração Γ é uma reunião de contôrnos que separa o conjunto I dos pontos onde $x(z)$ não está definida, do conjunto F. A função regular $u(z)$ é definida por

$$(2) \qquad u(z) = f\left(\frac{1}{t-z}\right), \qquad t \in F, \quad z \in O = \complement F.$$

Sôbre a demonstração desta fórmula e também sôbre a regularidade da função $u(z)$ consultar: C.L. da Silva Dias, III, pg. 29.

Definição 4. A função $u(z)$ definida pela fórmula (2) é a indicatriz (hemi-simétrica) do funcional f.

3. Correspondência biunívoca entre os funcionais lineares e as funções regulares em O.

A fórmula (2) associa a todo funcional analítico linear uma função $u(z)$, definida e regular em O.

Reciprocamente, <u>dada uma função</u> $u(z)$, <u>regular em</u> O, <u>a fórmula</u> (1) <u>nas condições indicadas pela Prop.5, determina um funcional analítico linear, definido em</u> $[F]$ <u>e cuja indicatriz é a função</u> $u(z)$.

Mostra-se, inicialmente, que o funcional definido por (1) e cujo campo de definição e (F), é constante sôbre as classes de equivalência R_F. A expressão

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} x(z)u(z)dz$$

não depende dos contôrnos Γ. Sejam, com efeito, Γ_1 e Γ_2 dois caminhos de integração nas condições indicadas e Γ_1^* e Γ_2^* os domínios correspondentes que contêm F (pg. 32). E' sempre possível encontrar um caminho de integração $\bar{\Gamma}$, composto de contôrnos e interior a Γ_1 e Γ_2. Basta, para êste fim, cobrir F com círculos de raio menores que a menor das distâncias de F a Γ_1 e Γ_2, respectivamente, aplicar o teorema de Borel-Lebesgue e considerar o caminho que contém F no seu interior e é composto de arcos de círculo. Nestas condições, $\Gamma_1 - \bar{\Gamma}$ é o caminho segundo a fronteira de $\Gamma_1^* - \bar{\Gamma}^*$ (complemento de $\bar{\Gamma}^*$ em Γ_1^*) e, pela proposição 4, segue-se que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} x(z)u(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{\Gamma}} x(z)u(z)dz$. Trocando-se Γ_1 por Γ_2, chega-se à conclusão: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} x(z)u(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} x(z)u(z)dz$.

Sejam, agora, $x(z)$ e $x_1(z)$ dois representantes de $\dot{x}$; como a expressão (1) não depende do caminho de integração, pode-se tomar o caminho Γ contido no conjunto S, cuja existência é dada pela prop.3, e no qual $x(z)$ e $x_1(z)$ coincidem. Segue-se, daí, que o funcional definido por (1) é constante sôbre as classes de equivalência e pode ser interpretado como um funcional definido sôbre $[\hat{F}]$. Êste funcional é evidentemente linear. Resta demonstrar que o mesmo é analítico. Para êste fim, seja $\{x_n(z)\}_{n\in N}$ uma sucessão de funções regulares uniformemente convergente para $x(z)$ num aberto Ω que contém F. Pode-se considerar um domínio Γ^*(contido em Ω) que contém F e cuja fronteira seja composta de contôrnos. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro n_o, tal que, para todo $n \geqslant n_o$ e todo $z \in \Gamma^*$, segue-se $|x_n(z) - x(z)| < \varepsilon$. Sôbre a fronteira Γ, de comprimento L, tem-se: $|u(z)| \leqslant K$, logo,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (x_n(z)-x(z))u(z)dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |x_n(z)-x(z)| \, |u(z)| dz \leqslant \frac{\varepsilon KL}{2\pi} .$$

Segue-se, portanto, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n(z)) = f(x(z))$ e o funcional é analítico. A indicatriz dêste funcional, como é fácil verificar, é a própria função $u(z)$.

Pode-se demonstrar que os funcionais definidos por (1) e correspondentes a duas funções regulares em O e distintas, $u_1(z)$ e $u_2(z)$, são distintas. Com efeito, suponha-se o contrário. Segue-se então:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma x(z)\left[u_1(z)-u_2(z)\right] dz = 0,$$

q.q.seja $x(z) \in (F)$, em particular, para as funções $\frac{1}{z-t}$, com $t \in O$. Aplicando-se a fórmula de Cauchy, vem:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u_1(z)-u_2(z)}{z - t} dz = u_1(t)-u_2(t) = 0,$$

q.q.seja $t \in O$, donde as funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são idênticas. (Nesta última demonstração e na anterior, caso o ponto no infinito pertença ao conjunto O, é essencial a condição de regularidade no infinito que foi introduzida na pg.28). Fica assim demonstrada a

<u>Proposição 6</u>. Existe uma correspondência biunívoca entre os funcionais analíticos lineares definidos em [F] e as funções localmente analíticas definidas no conjunto aberto O, complementar de F na esfera complexa.

Definindo-se, como é habitual, a soma de duas funções definidas num mesmo conjunto e a multiplicação por um escalar é claro que o conjunto de tôdas as funções localmente analíticas em O é um espaço vectorial complexo que se indica com a anotação $[O]$. A correspondência biunívoca afirmada pela Prop.6, pode ser interpretada como um isomorfismo entre o espaço vectorial complexo constituido pelos funcionais analíticos lineares e o espaço vectorial $[O]$.

---

§ 2. O espaço $[F]$ como espaço envoltória de espaços de Banach.

Os funcionais lineares regulares ou analíticos definidos sôbre $[F]$ foram introduzidos sem a imposição de estrutura topológica em $[F]$. Com o objetivo de extender o alcance da teoria, em particular, de aplicar, neste caso, o teorema de Hahn-Banach e suas consequências, define-se, neste parágrafo, uma estrutura de espaço vectorial topológico localmente convexo (ver Cap.I, pg.10 e seguintes) sôbre $[F]$ e demonstra-se que os funcionais contínuos nesta topologia são precisamente os funcionais analíticos lineares.

1. Definição dos espaços $[F_n]$.

Seja F uma parte própria e fechada do plano completado. Definimos uma sequência de domínios $\{F_n\}_{n\in N}$ como se segue: Seja σ um número positivo conveniente, Φ_σ um recobrimento de F com círculos de raio σ. Aplicando-se o teorema de Borel-Lebesgue, existe um sub-recobrimento finito Φ'_σ de Φ_σ. Seja C a fronteira de Φ'_σ; esta fronteira é uma reunião de contornos (curvas de Jordan constituida por arcos de círculo) que define um domínio F_1 (constituido por C e pelos seus pontos interiores) que contém F no seu interior. F_1 é evidentemente um domínio de conexão finita. Toma-se, em seguida, um recobrimento $\Phi_{\frac{\sigma}{2}}$ de F com círculos de raio $\frac{\sigma}{2}$ e define-se, como no caso anterior, um domínio F'_2. Caso F'_2 não esteja contido pròpriamente em F_1, abandona-se F'_2 e considera-se um recobrimento $\Phi_{\frac{\sigma}{3}}$ de F e um domínio $F_3^{(2)}$ a êle associado, como nos casos anteriores. Se $F_3^{(2)}$ está contido pròpriamente em F_1, toma-se $F_2 = F_3^{(2)}$ como segundo elemento da sucessão $\{F_n\}_{n\in N}$.

Caso contrário, considera-se novamente um recobrimento $\Phi_{\frac{\delta}{4}}$ e assim por diante. Como em cada estágio dêste processo a distância da fronteira de F_n ao conjunto F é finita, êle pode ser indefinidamente aplicado, obtendo-se finalmente a sucessão $\{F_n\}_{n\in N}$, tal que $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$, estritamente decrescente e $F_n \supset F$, pròpriamente, qualquer que seja n. Dada uma parte aberta Ω arbitrária do plano completado e que contém F, é possível encontrar um número inteiro positivo n_o, tal que $F_n \subset \Omega$, para todo $n \geqslant n_o$. Basta, com efeito, considerar o complementar de I de Ω, a distância δ entre I e F e tomar um n_o suficientemente grande, de modo que $d(F,F_{n_o}) < \delta$ (distância de F à <u>fronteira</u> de F_{n_o} menor do que δ).

<u>Definição 5</u>. Diz-se que $\dot{x}$ de $[F]$ pertence a $[F_n]$ se existe um representante $x(z)$ de $\dot{x}$, regular e limitado no interior de F_n.

Seja $x_1(z)$ outro representante de $\dot{x}$, regular e limitado em $\overset{\circ}{F}_n$; como $\overset{\circ}{F}_n$ é composto de regiões de conexão finita, segue-se de teoremas gerais sôbre identidade de funções regulares em regiões (Bieberbach,I, pg.138) que $x(z) = x_1(z)$ em $\overset{\circ}{F}_n$.

O conjunto $[F_n]$ é um <u>sub-espaço vectorial do espaço vectorial</u> $[F]$ e $[F_{n+1}] \supset [F_n]$, <u>qualquer que seja o inteiro positivo</u> n. Dado um ponto qualquer $\dot{x} \in [F]$, existe um inteiro n_o tal que $\dot{x} \in [F_{n_o}]$.

Com efeito, seja S um conjunto aberto associado a $\dot{x}$ de acôrdo com a Prop.3, § anterior. Basta, então, tomar n_o de modo que $F_{n_o} \subset S$.

O espaço $[F]$ é reunião <u>dos espaços</u> $[F_n]$, $[F] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [F_n]$. Seja $\dot{x} \in [F_n]$; põe-se, por definição:

$$\|\dot{x}\| = \sup_{z \in \overset{\circ}{F}_{n_o}} |x(z)| < +\infty.$$

$\|\dot{x}\|$ é evidentemente uma <u>norma</u>, pois $\|\dot{x}\| = 0$, implica $\dot{x} = 0$.

<u>Proposição 7</u>. O espaço $[F_n]$, com a topologia dada pela norma que acaba de ser definida, é um espaço de Banach.

Com efeito, seja $\{\dot{x}_n\}_{n \in N}$ uma sucessão de Cauchy (º) em $[F_n]$; segue-se que, dado $\varepsilon > 0$, $\|\dot{x}_{n+p} - \dot{x}_n\| < \varepsilon$ ou $|x_{n+p}(z) - x_n(z)| < \varepsilon$, $z \in \overset{\circ}{F}_n$, para todo $n > n_o$, n_o inteiro positivo conveniente e p inteiro positivo qualquer. Do teorema fundamental de Weierstrass sôbre sucessões uniformemente convergentes (Montel, I, pg.16; Bieberbach,I, pg.153) segue-se que $x_n(z)$ converge uniformemente em $\overset{\circ}{F}_n$ para uma função $x(z)$ limitada e regular em $\overset{\circ}{F}_n$. A função $x(z)$ é representante de um ponto $\dot{x}$ de $[F_n]$. Conclui-se, portanto, que a sucessão de Cauchy $\{\dot{x}_n\}_{n \in N}$ é convergente para o ponto $\dot{x}$ de $[F_n]$ e $[F_n]$ é completo. (Q.E.D.).

A notação $[F_n]$ indica, daqui por diante, o espaço $[F_n]$ com a topologia de espaço de Banach que acaba de ser definida.

<u>A topologia induzida por $[F_{n+1}]$ sôbre $[F_n]$ é menos fina que a topologia de $[F_n]$</u>. Basta, para êste fim, recordar que uma vizinhança na topologia induzida é a intersecção de uma vizinhança da origem em $[F_{n+1}]$, com $[F_n]$.

O espaço vectorial $[F] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [F_n]$, está, tendo-se em vista os resultados dêste número, nas condições do espaço E da definição de espaço envoltória de espaços localmente convexos (ver Cap. I, Def. 32).

O espaço F com a topologia envoltória τ_e, será indicado com a notação $[F]_e$.

<u>Proposição 8</u>. O espaço $[F]_e$ é completo.

Para demonstrá-la basta aplicar a condição necessária e suficiente dada pela Pro.35, Cap.I. Seja então uma sequência $\{\dot{x}_n\}_{n \in N}$ de Cauchy (ºº) constituida por elementos de $[F_n]$; segue-se que a sucessão $\{x_n(z)\}_{n \in N}$ é uniformemente convergente em $\overset{\circ}{F}_n$ e tende, portanto, para uma função $x(z)$ regular e limitada em

(º) Consultar: Bourbaki, T.G.IX, pg.25, Prop.9.

(ºº) O espaço $[F_n]$ sendo um espaço de Banach basta considerar sequências de Cauchy. Consultar: Bourbaki, T.G.IX, pg.25, Prop.9.

$\overset{\circ}{F}_n$. Esta função é representante de um ponto $\dot{x} \in [F_n]$; conclui-se assim que $\dot{x}_n \longrightarrow \dot{x} \in [F_n]$.

2. Funcionais contínuos em $[F]_e$.

Proposição 9. Seja f um funcional analítico linear definido em $[F]$ e A um domínio que cobre F. Dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um número $\sigma > 0$, tal que, para tôdas as funções $x(z) \in (F)$ que satisfazem $|x(z)| < \sigma$, $z \in A$, tenha-se $|f(x(z))| < \varepsilon$.

Demonstração. Seja $\{\sigma_n\}_{n \in N}$ uma sucessão de números reais convergente para zero. Se, qualquer que seja n, a condição acima não for verificada para $\sigma = \sigma_n$, segue-se a existência de, pelo menos, uma função que será designada com a notação $x_{\sigma_n}(z)$, regular em A, que satisfaz $|x_{\sigma_n}(z)| < \sigma_n$ e para a qual

$$(1) \qquad |f(x_{\sigma_n}(z))| \geqslant \varepsilon .$$

Conclui-se, então, que a sucessão $x_{\sigma_n}(z)$ é uniformemente convergente para zero no interior de A e, como o funcional f é regular, tem-se $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_{\sigma_n}(z)) = 0$, o que contradiz (1).

Proposição 10. Condição necessária e suficiente para que um funcional definido em $[F]_e$ seja contínuo, é que as restrições de f a $[F_n]$, qualquer que seja n, sejam contínuas.

Demonstração - Como $[F_n] \subset [F]$ e a topologia induzida por $[F]$ sôbre $[F_n]$ é menos fina que a topologia de $[F_n]$, segue-se que a restrição de f a $[F_n]$ é contínua, q.q.seja n. Reciprocamente, suponha-se as restrições de f em $[F_n]$ contínuas; de acôrdo com esta hipótese, dado $\varepsilon > 0$, em cada $[F_n]$ existe uma vizinhança W_n da orígem em $[F_n]$ tal que $|f(W_n)| < \varepsilon$. Seja então $W = \Gamma_{n=1}^{\infty} W_n$, a envoltória absoluta dos W_n (ver Cap.I, pg.24); todo $x \in W$ é da forma $\sum \alpha_i x_i$ (soma finita) com $\sum_i |\alpha_i| \leqslant 1$ e $x_i \in W_i$. Segue-se, daí, que

$$|f(x)| = \left|\sum \alpha_i f(x_i)\right| \leq \sum |\alpha_i|\,|f(x_i)| < \varepsilon,$$

e o funcional f é contínuo em $[F]_e$. (Q.E.D.).

<u>Proposição 11</u>. A classe dos funcionais lineares contínuos sôbre o espaço $[F]_e$ coincide com a classe E' dos funcionais analíticos lineares sôbre $[F]$.

<u>Demonstração</u> - De acôrdo com a proposição que vem de ser demonstrada, para provar que um funcional analítico f é τ_e-contínuo, basta provar que é contínuo em cada $[F_n]$; mas êste fato é precisamente o conteúdo da proposição 8, dêste capítulo, logo, f é contínuo em $[F]_e$.

Recìprocamente, a observação que segue a Prop.35, Cap.I, pg.27, mostra que, se $\dot{x}_m \longrightarrow \dot{x}$ na topologia τ_e, segue-se que todos os $\dot{x}_m$ pertencem a um mesmo $[F_n]$ e, em $[F_n]$, aquela convergência se traduz por $\|\dot{x}_m - \dot{x}\| \longrightarrow 0$, ou, $|x_m(z)-x(z)| \longrightarrow 0$, uniformemente em F_n. Conclui-se, portanto, que $f(x_m(z)) \longrightarrow f(x(z))$, no interior de F_n que é um conjunto aberto que contém F e, portanto, f é linear <u>analítico.</u> (Q.E.D.).

<u>Observação</u>: A demonstração desenvolvida em C.L.da Silva Dias, III, para a dedução da fórmula fundamental de Fantappiè, adapta se à representação, por meio de uma integral complexa, dos funcionais contínuos em $[F]_e$. Obtém-se, dêste modo, fórmula idêntica a de Fantappiè, o que mostra também a identidade das duas classes de funcionais lineares.

§ 3. <u>Os espaços vectoriais $[F]$ e $[O]$ postos em dualidade pela fórmula de Fantappiè.</u>

1 - Os resultados do nº 3 dêste parágrafo permitem interpretar a fórmula de Fantappiè como uma forma <u>bilinear</u>: $[F] \times [O] \longrightarrow C$, que se indica com

$$B(\dot{x},u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} x(z)u(z)\,dz.$$

<u>Proposição 12</u>. Os espaços $[F]$ e $[O]$ estão postos em dualidade pela forma $B(\dot{x},u)$.

<u>Demonstração</u> - De acôrdo com a Def.23, do Cap.I, devem-se demonstrar as seguintes condições:

(D_I) - A relação "qualquer que seja $\dot{x} \in [F]$, $B(\dot{x},u) = 0$" implica $u = 0$.

Em particular, $B(\dot{x},u) = 0$, para $\dot{x} = \dot{\frac{1}{z-t}}$, com $t \in O$. Segue-se:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(z)}{z-t}\,dz = 0, \quad \text{q.q. seja} \quad t \in O,$$

e aplicando-se a fórmula de Cauchy, vem, $u(t) = 0$, q.q. seja $t \in O$ e, portanto, u é a orígem de $[O]$.

(D_{II}) - A relação "qualquer que seja $u \in [O]$, $B(\dot{x},u) = 0$" implica $\dot{x} = 0$.

Com efeito, tomando-se, em particular, $u(t) = \frac{1}{z-t}$ com $t \in F$, vem:

$$B(\dot{x},\frac{1}{z-t}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(z)}{z-t}\,dz = x(t),$$

pela fórmula de Cauchy. Na hipótese do conjunto F ser um <u>domínio</u>, segue-se imediatamente que $\dot{x} = 0$, pois $x(z)$ será idênticamente nula num aberto que contém F. Caso contrário, considere-se as funções de $[O]$, $\frac{1}{(z-t)^i}$, com $i=1,2,\ldots,n,\ldots$ e $t \in F$ e vem:

$$B(\dot{x},\frac{1}{(z-t)^i}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(z)}{(z-t)^i}\,dz = \frac{x^{(n)}(t)}{n!},$$

de acôrdo com a fórmula de Cauchy (Bieberbach, I, pg.134). Aplicando-se a Prop.3 dêste capítulo, conclui-se que $x(z)$ é idênticamente nula num aberto S que contém F, logo $\dot{x} = 0$. (Pode-se também chegar a esta conclusão, aplicando-se a Prop.2, dêste capítulo, e lembrando-se que uma função analítica fica determinada num círculo conveniente conhecendo-se o valor da função e de suas derivadas no centro do círculo.)

A proposição que acaba de ser demonstrada e as considerações que seguem a Def.23 do Capítulo I, permitem não sòmente identificar o espaço $[O]$ com um sub-espaço vectorial do dual algébrico de F que é o conteúdo da Prop.6, dêste capítulo, como também identificar o espaço $[F]$ com um sub-espaço vectorial do dual algébrico de $[O]$.

Ainda de acôrdo com as considerações que seguem a definição 23 do Capítulo I, a aplicação bilinear $B(\dot{x},u)$ passa a ser indicada com a notação $\langle \dot{x},u \rangle$:

$$\langle \dot{x},u \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} x(z)u(z)\, dz.$$

2. Topologia fraca sôbre $[F]$.

Para maior comodidade de exposição é conveniente indicar, muitas vezes, o espaço $[F]$ com a notação E e o espaço $[O]$ com a notação E', isto é, põe-se, $E = [F]$ e $E' = [O]$.

Definição 6. A topologia fraca, ou topologia $\sigma(E,E')$, é a topologia da convergência simples em E'; uma base de vizinhança pode ser dada pelos conjuntos (Prop.23, Cap.I):

$$\text{(I)} \quad V_{u_i,\varepsilon} = \left\{ \dot{x} \,\middle|\, |\langle \dot{x},u_i \rangle| \leqslant 1, \quad i=1,2,\dots,n; \quad u_i \in [O] \right\}.$$

A aplicação $\dot{x} \longrightarrow \langle \dot{x},u \rangle$ define uma forma linear contínua na topologia $\sigma(E,E')$ e tôdas as formas lineares $\sigma(E,E')$-contínuas são dessa forma (Observação que segue a Prop.23, Cap.I).

Mutatis mutandis, uma base de vizinhança na topologia $\sigma(E',E)$ sôbre $[O]$ é dada pelos conjuntos:

$$\text{(II)} \quad V'_{\dot{x}_i,\varepsilon} = \left\{ u \,\middle|\, |\langle \dot{x},u \rangle| \leqslant 1; \quad \dot{x}_i \in [F], \quad i=1,2,\dots,n \right\}$$

e $u \longrightarrow \langle \dot{x},u \rangle$ define as formas lineares contínuas na topologia $\sigma(E',E)$.

Definição 7. A topologia $\tau(E,E')$ sôbre $E = [F]$ é a topologia de espaço localmente convexo da convergência uniforme sôbre as partes fracamente compactas de $[O]$ (Cap.I, Def.25). Ela possui um sistema fundamental de vizinhanças dado por:

$$W_{\Phi, \varepsilon} = \left\{ \dot{x} \;\middle|\; |\langle \dot{x}, u \rangle| \leq \varepsilon, \quad u \in \Phi, \quad \Phi \text{ parte fracamente compacta de } [0] \right\}.$$

De modo análogo se define a topologia $\tau(E',E)$ sôbre $E' = [0]$.

3. <u>Topologia em</u> E' <u>da convergência uniforme sôbre as partes compactas de</u> 0.

Seja K uma parte compacta de 0 e $U_{K,\varepsilon}$ a parte de $[0]$, definida como se segue:

$$U_{K,\varepsilon} = \left\{ u \;\middle|\; \sup_{z \in K} |u(z)| \leq \varepsilon, \quad u \in [0] \right\}.$$

A totalidade dos $U_{K,\varepsilon}$, quando K percorre o conjunto das partes compactas de 0 e ε percorre uma sequência de números positivos que converge para zero, constitui uma base de filtro $\mathcal{B}$ sôbre $[0]$, que satisfaz as propriedades 1), 2), 3) e 4) da Prop.2 do Cap. I. Mais particularmente, seja $\{K_n\}_{n \in N}$ uma sequência pròpriamente crescente de partes compactas(º) de 0 e tais que, dada uma parte compacta K arbitrária (ºº) de 0, existe um número inteiro positivo n_o, tal que $K_{n_o} \supset K$. A base de filtro $\mathcal{B}^*$ constituida pelos conjuntos $U_{K_n, \frac{1}{n}}$ é <u>equivalente</u> (ººº) à base de filtro $\mathcal{B}$.

Os conjuntos $U_{K_n, \frac{1}{n}}$ são, evidentemente, conjuntos circulares (Def. 8, Cap.I).

<u>Definição 8</u>. A topologia de espaço vectorial localmente convexo definida pela base de filtro $\mathcal{B}^*$ ou $\mathcal{B}$, é chamada <u>topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas de</u> 0 e é indicada com a notação β.

(º) No que se segue supõe-se que as partes compactas K_n são <u>domínios</u>, o que não constitui restrição.

(ºº) Sôbre a existência de sucessões $\{K_n\}_{n \in N}$ nestas condições, consultar Walsh, I and A, Th.2 e Th.4, pg.8 e 10 respectivamente, observando-se que na esfera complexa que é um espaço compacto, todo conjunto fechado é compacto.

(ººº) Bourbaki, T.G.I, pg.24.

A base de filtro $\mathfrak{B}^*$ sendo constituida pelos conjuntos $U_{K_n,\frac{1}{n}}$, para $n \in N$, é enumerável; por outro lado, tôda sequência de Cauchy neste espaço (º) é uniformemente convergente sôbre todo compacto K de O, e de acôrdo com o teorema de Weirstrass (ºº) converge uniformemente para uma função analítica u(z) sôbre todo domínio K_n, isto é, converge para uma função u(z) definida em [O] e esta convergência se dá, então, no sentido da topologia β. O espaço [O] com a topologia β é, portanto, completo. O espaço $[O]_\beta$ possuindo um sistema fundamental de vizinhanças e sendo completo é um espaço de Fréchet (Definição 27, Cap.I).

4. Comparação da topologia β com as topologias $\sigma(E',E)$ e $\tau(E',E)$ sôbre [O].

Proposição 13. A topologia $\sigma(E',E)$ sôbre [O] é menos fina que a topologia β.

A demonstração desenvolvida na pg.35 pode ser adaptada para provar que as aplicações $u \longrightarrow \langle \dot{x}, u \rangle$ são formas lineares contínuas sôbre $[O]_\beta$. Segue-se daí a proposição, pois, a topologia $\sigma(E',E)$ é a menos fina das topologias sôbre [O] para as quais $E = [F]$ é o dual (Prop.23, Cap.I).

Pode-se dar uma demonstração direta desta proposição, como se segue: Seja V_{x_i} uma $\sigma(E',E)$-vizinhança sôbre [O]:

$$V_{x_i} = \left\{ u \;\middle|\; |\langle \dot{x}_i, u \rangle| \leq 1,\ \dot{x}_i \in [F],\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Esta vizinhança contém uma β-vizinhança. Com efeito, fixando-se um representante $x_i(z)$ de $\dot{x}_i$, pode-se fazer o mesmo com os caminhos de integração Γ_i que figuram nas expressões:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} x_i(z) u(z) dz \right| \leq 1, \qquad \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

(º) Consultar Bourbaki, IX, pg.24 e 25.

(ºº) Montel, I, pg.18.

Pondo-se,

$$\int_{\Gamma_i} |x_i(z)|\,dz = A_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

é fácil verificar que as funções $u(z)$ que satisfazem a relação

$$(1) \qquad \sup_{z \in \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i} |u(z)| < \frac{2\pi}{A},$$

onde $A = \inf. A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, verificam também $|\langle \dot{x}_i, u \rangle| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. As funções que satisfazem (1) definindo uma vizinhança do zero em $[0]_\beta$, segue-se que $\sigma(E',E) \leqslant \beta$.

<u>Proposição 14</u>. Seja K uma parte compacta de O e K^* a família de elementos $(\frac{1}{z-t})$, com $t \in K$ e $|z-t| > \rho$, $\rho > 0$ e fixado convenientemente. A envoltória convexa absoluta ΓK^* de K^* <u>é uma parte fracamente compacta de</u> $[F]$.

Com efeito, basta demonstrar que ΓK^* é <u>compacto</u> na topologia $\tau(E,E')$, pois $\sigma(E,E') \leqslant \tau(E,E')$. Seja a distância entre os conjuntos F e K; tomando-se $\rho < \delta$ e $\frac{\sigma}{n} < \rho$, segue-se que $(\frac{i}{z-t}) \in [F_n]$, com $t \in K$. O espaço $[F_n]$ sendo um espaço de Banach, para demonstrar que ΓK^* é uma sua parte compacta basta provar que tôda sequência de pontos de ΓK^* possui uma <u>sequência parcial convergente</u> (º). Mas os representantes de ΓK^* em $\mathring{F}_n$ constituem um conjunto de funções regulares e <u>uniformemente limitadas</u> (ºº), portanto tôda sequência de tais funções possui uma sequência parcial uniformemente convergente em $\mathring{F}_n$ para uma função $x(z)$ que é representante de um elemento de $[F_n]$. Segue-se que ΓK^* é compacto em $[F_n]$ e portanto em $[F]_e$ (a topologia induzida por $[F]_e$ em $[F_n]$ é menos fina que a topologia de espaço de Banach de $[F_n]$), logo ΓK^* é fracamente compacto.

(º) Consultar Bourbaki, T.G.IX, Prop.11, pg.26 e Prop.8, pg.25.

(ºº) Montel I, pg.41.

Proposição 15. A topologia β é menos fina que a topologia $\tau(E',E)$.

Demonstração - Seja K uma parte compacta arbitrária de O e ΓK^* a parte fracamente compacta de $[F]$ definida na Prop. anterior. O conjunto,

$$U_{K,\varepsilon} = \left\{ u \;\middle|\; \sup_{u \in K} |u(z)| \leqslant \varepsilon, \quad u \in [O] \right\}$$

é vizinhança arbitrária da base de filtro de vizinhanças $\mathcal{B}^*$ da orígem em $[O]$ e

$$W'_{\Gamma K^*,\varepsilon} = \left\{ u \;\middle|\; |\langle \dot{x}, u \rangle| \leqslant \varepsilon \;, \quad \dot{x} \in \Gamma K^* \right\}$$

é uma vizinhança da orígem em $[O]$ na topologia $\tau(E',E)$. Mas,

(1) $$W'_{\Gamma K^*,\varepsilon} \subset U_{K,\varepsilon} .$$

Com efeito, um elemento genérico de ΓK^* é da forma

$$\dot{x} = \sum_i \alpha_i \left(\dot{\frac{1}{z-t_i}}\right), \quad \text{com} \quad \sum_i |\alpha_i| \leqslant 1 \ \text{ e } \ t_i \in K$$

e, portanto, $u \in W'_{\Gamma K^*,\varepsilon}$ satisfaz

$$\left| \left\langle \sum_i \alpha_i \left(\dot{\frac{1}{z-t_i}}\right), u \right\rangle \right| \leqslant \varepsilon ,$$

ou

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\sum \frac{\alpha_i}{z-t_i} \right) u(z)\, dz \right| = \left| \sum_j \frac{\alpha_j}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u(z)}{z-t_j}\, dz \right| =$$

$$= \left| \sum \alpha_i u(t_i) \right| \leqslant \varepsilon ,$$

e, então, $|u(t_i)| \leqslant \varepsilon$, q.q. seja $t_i \in K$. A relação (1) verificando-se, q.q. seja a vizinhança $U_{K,\varepsilon}$, segue-se que $\beta \leqslant \tau(E',E)$.

(Q.E.D.).

E' consequência dêste resultado e da Prop.26 (Teorema de Mackey-Arens) que o dual de $E' = [O]$ com a topologia β é o espaço $E = [F]$ (interpretado como parte do dual algébrico de $[O]$).

A topologia β sendo uma topologia de <u>espaço de Fréchet, pode-se demonstrar que</u> $\tau(E',E) \leqslant \beta$.

Com efeito, seja H uma parte fracamente compacta de $[F]$ dual de $[O]_\beta$. De acôrdo com a Prop.29, Cap.I, existe uma vizinhança fechada U da orígem em $[O]_\beta$ tal que $H \subset U^o$. Por outro lado, U^o é uma parte fracamente compacta de $[F]$ (Prop.25,Cap.I), e $U^{oo} = U$ (Nota da pg.22) e como $H^o \supset U^{oo} = U$, H^o sendo uma vizinhança arbitrária da orígem em $[O]$ com a topologia $\tau(E',E)$, segue-se que $\beta \geqslant \tau(E',E)$.

Consequentemente, vale a seguinte

<u>Proposição 16</u> (<u>1ª Proposição fundamental</u>) - <u>A topologia localmente convexa mais fina sôbre</u> $[O]$ <u>para a qual</u> $[F]$ <u>é o dual de</u> $[O]$, <u>é a topologia da convergência uniforme sôbre os conjuntos compactos de</u> O.

5. <u>Conjuntos limitados em</u> $[O]_\beta$.

Seja L' um conjunto limitado de $[O]_\beta$. Pela definição de conjunto limitado (Cap.I, Def. 13) dada uma vizinhança $U_{K,\varepsilon}$ da orígem, na topologia β, existe um número $\lambda > 0$, tal que $\lambda L' \subset U_{K,\varepsilon}$, ou, $\sup_{z \in K} |\lambda u(z)| < \varepsilon$, para todo $u \in L'$. Segue-se que $\sup_{z \in K} |u(z)| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Isto significa que qualquer conjunto limitado de $[O]_\beta$ é constituido por funções uniformemente limitadas sôbre K; em particular, pode-se supôr K um domínio e a condição se traduz: o conjunto de funções L' é limitado se êsse conjunto é uniformemente limitado sôbre qualquer compacto de O ou ainda sôbre qualquer aberto completamente interior (º) a O. Nestas condições, segue-se de um teorema conhecido sôbre funções analíticas limitadas no seu conjunto (ºº) que de tôda sequência de funções de L, pode-

(º) Um conjunto é completamente interior a O, se sua aderência pertence a O.

(ºº) Montel,I, pg.21 e observação no fim do nº 13,pg.26.

se extrair uma sequência parcial que converge uniformemente, sôbre todo compacto de O, para uma função limite, isto é: a sequência parcial converge no sentido da topologia β.

O conjunto limitado L é, portanto, <u>relativamente compacto</u> (Bourbaki, T.G.IX, pg.26-27). Em particular, se o conjunto L é limitado e <u>fechado</u>, segue-se que L é <u>compacto</u>, concluindo-se, assim que o espaço $[O]_\beta$ é um espaço de Montel (ver Cap.I, Def.31).

Os conjuntos relativamente compactos de $[O]_\beta$ são famílias normais (º) de funções regulares em O, no sentido de Montel.

6. <u>Topologia forte sôbre</u> $[F]$.

Consideremos, sôbre $E = [F]$, em primeiro lugar, a topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas de $E' = [O]_\beta$; esta topologia coincide com a topologia <u>forte</u> (da convergência uniforme sôbre os limitados de E') sòmente quando todo conjunto limitado em $E' = [O]_\beta$ está contido na envoltória absolutamente convexa e fechada de um conjunto compacto. Mas o espaço $[O]_\beta$ sendo um espaço de Montel, todo conjunto limitado é relativamente compacto e a condição acima está automàticamente satisfeita, neste caso. Em resumo, <u>sôbre</u> $[F]$ <u>a topologia forte e a topologia</u> τ_c, <u>da convergência uniforme sôbre os compactos de</u> $[O]$, <u>coincidem</u>.

Por outro lado, $[O]_\beta$ sendo um espaço de Montel, todo conjunto fracamente fechado e limitado em E é fracamente compacto (pois $[O]_\beta$ é reflexivo) consequentemente, <u>a topologia forte sôbre</u> $E = [F]$ <u>é idêntica à topologia</u> $\tau(E,E')$; portanto,

<u>Proposição 17</u>. Sôbre $E = [F]$ as topologias forte, τ_c e $\tau(E,E')$ coincidem.

<u>Observação</u>: A proposição 33 do Cap.I mostra que o espaço $[F]$, sendo o dual do espaço de Montel $[O]_\beta$, goza também da propriedade $\mathcal{M}_o$, isto é, todo conjunto limitado e <u>fortemente</u> fechado de $[F]$ é fortemente compacto.

(º) Montel, I, pg.32 e seguintes.

Proposição 18. A topologia $\tau(E,E')$ induz sôbre cada $[F_n]$ uma topologia mais fraca que a sua topologia de espaço de Banach.

Demonstração - De acôrdo com a Proposição anterior, a topologia $\tau(E,E')$ coincide com a topologia da convergência uniforme sôbre os limitados de $[O]_\beta$. Nestas condições, uma vizinhança do zero é dada pelo conjunto

$$V_{L,\varepsilon} = \left\{ \dot{x} \;\middle|\; |\langle \dot{x},u\rangle| < \varepsilon \;,\; u \in L, \text{ onde } L \text{ é um conjunto limitado de } [O]_\beta \right\}.$$

Basta, então, demonstrar que $V_{u,x} \cap [F_n]$ contém uma vizinhança do zero em $[F_n]$.

Com efeito, na expressão

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma x(z)u(z)\,dz \right| < \varepsilon,$$

considerando-se que os $x(z)$ são representantes de pontos de $[F_n]$, pode-se supôr o caminho de integração Γ fixado. Seja γ o seu comprimento. As funções $u(z)$ pertencendo a um conjunto limitado de $[O]_\beta$, são uniformemente limitadas, sôbre qualquer compacto de O, em particular, sôbre Γ (ver nº5, neste parágrafo), isto é:

$$|u(z)| < M, \qquad \text{para} \quad z \in \Gamma \quad \text{e} \quad u(z) \in L.$$

Nestas condições,

$$|\langle x,u\rangle| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |x(z)|\,|u(z)|\,dz < \frac{M}{2\pi} \int_\Gamma |x(z)|\,dz$$

e, tomando-se,

$$\|\dot{x}\| < \frac{2\pi\varepsilon}{M\gamma}, \qquad \text{para} \quad \dot{x} \in [F_n],$$

segue-se que

$$|\langle x,u\rangle| < \varepsilon. \qquad \text{(Q.E.D.)}.$$

Pode-se, finalmente, demonstrar a seguinte

<u>Proposição 19</u>. (2ª <u>Proposição Fundamental</u>)- <u>A topologia $\tau(E,E')$ sôbre $E = [F]$ coincide com a topologia envoltória τ_e</u>.

Com efeito, a topologia τ_e é a mais fina das topologias localmente convexas sôbre $[F]$ que induzem topologias menos fina que a topologia de Banach sôbre os $[F_n]$ e, de acôrdo com a Prop. 11 dêste capítulo, o espaço $[O]$ é o dual de $[F]_e$; segue-se, então, da Prop.26 do Cap.I (teorema de Mackey-Arens) que $\sigma(E,E') \leq \tau_e \leq \tau(E,E')$. Por outro lado, a Proposição precedente mostra que $\tau(E,E')$ <u>induz topologias menos fina</u> sôbre $[F_n]$ que a sua topologia de Banach, conclui-se, portanto, que

$$\tau_e = \tau(E,E').$$

<u>Observação 1</u>. O dual forte de $E' = [O]_\beta$ coincide com o espaço $[F]$ com a topologia $\tau(E,E')$. Êste espaço é completo, pois, segundo a proposição que acaba de ser demonstrada, sua topologia coincide com a topologia τ_e que é completa (Cap.II, Prop. 8).

<u>Observação 2</u>. A proposição 18 mostra que a topologia envoltória τ_e sôbre $[F]$ não depende da particular sequência $\{F_n\}_{n \in N}$, estritamente decrescente de domínios que contêm o conjunto fechado F, ou, da particular sequência $\{[F_n]\}_{n \in N}$, estritamente crescente de espaços de Banach que a define. Com efeito, qualquer que seja essa sequência, a topologia envoltória é sempre a topologia do dual forte de $[O]_\beta$.

<u>Proposição 20</u>. O espaço $[F]_e$ não é metrizável.

Para demonstrá-la são necessárias algumas considerações preliminares. Diz-se que um espaço vectorial topológico E satisfaz a <u>segunda condição de enumerabilidade de Mackey</u> (Mackey, I, pg. 182) se existe uma sequência (B_n) de conjuntos limitados no espaço considerado, tal que todo conjunto limitado em E, esteja contido num dos B_n. É claro que esta condição implica que E é a reunião de todos os $\bar{B}_n$. Seja E um espaço de Fréchet; nestas condições, o Teorema de Baire (ver Bourbaki, T.G.IX, pgs. 75 e 76) implica que um pelo menos, dos conjuntos $\bar{B}_n$ contém um ponto interior e $\bar{B}_n$ é, então, uma vizinhança limitada, portanto, de acôrdo com a Prop.11 do Cap.I, o espaço E é um espaço normado. Em conclusão, um espaço de Fréchet satisfaz a segunda condição de Mackey quando, e sòmente quando, êle é um espaço normado. Conforme as proposições 17 e 19 dêste capítulo o espaço $[F]_e$ coincide com o dual forte do espaço de Fréchet $[O]_\beta$; basta, então mostrar que o dual forte de um espaço de Fréchet, que não é um espaço de Banach, não é metrizável. Com efeito, se existe um sistema fundamental de vizinhanças V_n da orígem em E, dual forte de um espaço de Fréchet E', os conjuntos polares V_n^o em E' constituem uma sequência de limitados, tal que todo limitado de E' está contido num dêsses conjuntos. Mas, de acôrdo com as considerações preliminares desta demonstração, isto só pode acontecer se o espaço de Fréchet E' for normado, isto é, de Banach. (Consultar, Dieudonné-Schwartz, pg.75). Note-se, explìcitamente, que o espaço $[O]_\beta$ não é um espaço de Banach, pois, aplicando-se a Prop.11, do Cap. I, dizer que existe uma vizinhança limitada $V_{K,\varepsilon}$ em $[O]_\beta$ equivale a dizer que as funções de $[O]$, uniformemente limitadas sôbre K, são uniformemente limitadas sôbre qualquer outro compacto de O, o que evidentemente não é verdade.

Nota - Observando-se a demonstração feita na pg. 47 (demonstração do fato que $\tau(E',E) \leq \beta$) verifica-se imediatamente que nenhuma topologia localmente convexa sôbre $[F]$, associada à forma bilinear de Fantappiè, é topologia de espaço de Fréchet. Com efeito, segue-se dessa demonstração que, se uma dessas topologia de Fréchet, então ela coincide com a topologia $\tau(E,E')$ que, como acaba de ser demonstrado, não é topologia de espaço de Frechet (º).

§4. Sucessões fraca e fortemente convergentes nos espaços $[O]$ e $[F]$.

Demonstração da Prop.33 do Capítulo I.

Notação: H parte fortemente fechada e limitada de $E = [F]$.

H sendo limitado (fortemente limitado) de acôrdo com a

(º) Estas considerações respondem a questão apresentada por J.Sebastiao Silva demonstrando a impossibilidade de se introduzir uma topologia de espaço de Fréchet, ou, em particular, de Banach, sôbre o espaço $[F]$ e compatível com os funcionais analíticos lineares (J.Sebastião Silva, I e II, respectivamente, nas pgs. 37 e 80).

Proposição 29 ((a) $\longrightarrow$ H é equicontínuo) H é também equicontínuo e segundo a observação que segue a prop.29, sôbre H a topologia induzida pela topologia fraca coincide com a induzida pela topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas de E'. Mas as partes compactas de E' coincidem com suas partes limitadas, portanto sôbre H a topologia fraca coincide com a topologia forte. Por hipótese, H é fortemente fechado; se, além disso, supõe-se H convexo, a nota no pé da pg.22, implica que H é fracamente fechado e a proposição 29 arrasta que H é fracamente compacto (º) e portanto fortemente compacto. Caso H não seja convexo, começa-se por construir sua envoltória absolutamente convexa H^*. H sendo limitado, H^* também possui a mesma propriedade, como é evidente; por outro lado, a aderência de um conjunto absolutamente convexo é absolutamente convexa e a aderência de um limitado é limitada (Cap.I, Prop.5). Em conclusão, $\bar{H}^*$ é um conjunto absolutamente convexo e fortemente fechado, portanto, de acôrdo com a demonstração já feita, $\bar{H}^*$ é fortemente compacto, consequentemente, H que é uma sua parte fortemente fechada também é fortemente compacta.

Seja L um conjunto limitado, convexo e fechado de $E' = [0]_\beta$. De acôrdo com a nota já citada (pg.22) L é também fracamente fechado. Mas L é limitado e fechado (fortemente), logo é compacto, pois E' é um espaço de Montel; sendo compacto, é fortemente compacto, portanto, L é compacto na topologia de espaço de Fréchet e na topologia fraca (ºº). Demonstra-se assim a seguinte

Proposição 21. As topologias induzidas sôbre L, respectivamente pela topologia fraca e pela topologia de espaço de Fréchet, coincidem.

(Aplicar o corolário 2 da pg.62 de Bourbaki,T.G.I, no

(º) A proposição 29 afirma que H é fracamente relativamente compacto, mas, como se acabou de demonstrar que H é fracamente fechado, segue-se que H é fracamente compacto.

(ºº) Caso L não seja convexo, considera-se, como no caso anterior a aderência da envoltória absoluta e chega-se à mesma conclusão.

caso em que a aplicação biunívoca é a aplicação idêntica).

Observação - A mesma proposição vale para o sub-conjunto H de E, trocando-se a expressão "topologia de espaço de Fréchet" por "topologia forte sôbre E", isto é, topologia τ_e ou $\tau(E,E')$ (Prop.19, dêste capítulo).

Observação - Seja $\{x_n\}_{n\in N}$ uma sequência de Cauchy de um espaço localmente convexo; o conjunto de pontos dessa sequência é limitado. Com efeito, a sucessão dada sendo de Cauchy, fixada uma vizinhança circular V, existe um inteiro m, tal que para todo inteiro $n \geqslant m$, segue-se $x_n - x_m \in V$. Os pontos correspondentes aos índices menores que m sendo um conjunto finito é limitado (Cap.I, Prop.4) isto é, existe um número $\lambda > 0$, tal que o conjunto dos x_n está contido em $(\lambda+1)V$ e a observação fica demonstrada.

Seja $\{x_n\}_{n\in N}$ uma sequência fracamente convergente em $E = [F]_e$. De acôrdo com a observação anterior, o conjunto de elementos dessa sequência com seu ponto limite é limitado e fracamente fechado (logo fortemente fechado). Pode-se, então, aplicar a proposição anterior e conclui-se que a sucessão $\{x_n\}_{n\in N}$ é também fortemente convergente. Vale a mesma conclusão quando se trata de uma sucessão fracamente convergente em $E' = [O]$. Resumindo tem-se a seguinte

Proposição 22. Tanto em $E = [F]$ como em $E' = [O]_\beta$, uma sequência fracamente convergente é também fortemente convergente e ambas convergem para o mesmo limite.

Observação 1. Seja $\{u_n\}_{n\in N}$ uma sucessão fracamente convergente para $u(z)$ em $[O]$. Recordando-se a definição de vizinhança na topologia fraca (pg.42), êste fato se traduz como se segue: Dado um conjunto finito de funções $\{x_j(z)\}_{1\leqslant j\leqslant k}$ pertencentes a (F) e $\sigma > 0$, existe um inteiro n_o tal que para todo $n > n_o$:

$$\text{(A)} \qquad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} x_j(z)(u_n(z)-u(z))dz \right| < \sigma, \qquad j=1,2,\ldots,k.$$

Em particular, uma relação dêsse tipo deve se verificar quando as funções dadas são da forma $x_j(z) = \frac{1}{x-t_j}$, com $t_j \in O$. Tem-se, então, aplicando-se a fórmula de Cauchy,

$$|u_n(t_j)-u(t_j)| < \sigma,$$

o inteiro n_0 dependendo do conjunto de pontos $\{t_1,t_2,\ldots,t_k\}$ o que não traduz a uniformidade da convergência. Mas a Prop.22 diz que a sucessão $\{u_n\}_{n\in N}$ é também fortemente convergente, isto é, uniformemente convergente para $u(z)$ sôbre todo campacto de O. Isto permite interpretar a Prop.22 do seguinte modo: Condição necessária e suficiente para que uma sucessão $\{u_n\}_{n\in N}$ seja uniformemente convergente sôbre todo compacto contido em O, é que a condição (A) se verifique para todo conjunto finito de funções de (F).

Trocando-se os papéis das funções $x(z)$ e $u(z)$, pode-se enunciar critério análogo para a convergência uniforme num aberto que contém (F), de acôrdo com a seguinte

Observação 2. A convergência forte de uma sucessão $\{\dot{x}_n\}_{n\in N}$ de $[F]$ equivale a convergência da topologia envoltória τ_e que, por sua vez, significa convergência uniforme (Prop.9) no interior de um oportuno F_n, isto é, convergência uniforme de $x_n(z)$ para $x(z)$ num conjunto aberto que contém F. Conclui-se, dêste modo, que a topologia fraca e a topologia forte sôbre $[F]$ têm como sucessões convergentes, precisamente as sucessões que definem a regularidade dos funcionais lineares analíticos definidos sôbre (F).

§ 5 - Demonstração direta da representação dos funcionais lineares contínuos definidos em $[O]_\beta$.

Neste parágrafo é apresentada uma outra demonstração de que a topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas de O é menos fina que a topologia $\tau(E',E)$, da convergência uniforme sôbre as partes fracamente compactas de $E = [F]$. Para êste fim, demonstra-se que o dual de $[O]_\beta$ é o espaço vectorial $[F]$ o que equivale a dizer: os funcionais lineares contínuos $\varphi(u)$ na topologia β são representados pela integral complexa

$$\varphi(u) = \langle \dot{x}, u \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma x(z)u(z)dz,$$

onde $u \in [O]$ e $\dot{x} \in [F]$.

O funcional φ sendo contínuo sôbre o espaço de Fréchet $[O]_\beta$, existe um compacto, em particular, um domínio K, contido em O e um número positivo $\sigma > 0$, tal que, de $u \in [O]_\beta$ com $|u(z)| \leq \sigma$ sôbre K, siga-se $|\varphi(u)| \leq 1$. Para $u(z) \in [O]_\beta$ seja u_K a sua restrição a K e B o espaço de Banach das funções regulares sôbre K, isto é, o espaço vectorial topológico normado cuja norma é dada por $\|u\|_K = \sup_{z \in K} |u(z)|$ $+\infty$. E' claro que êste espaço é de Banach. A aplicação $u \longrightarrow u_K$ é uma aplicação linear do espaço $[O]_\beta$ sôbre uma parte A do espaço B. Observe-se, neste ponto, que se u e v pertencem a $[O]_\beta$ e $u_K = v_K$, então $\varphi(u) = \varphi(v)$. Com efeito, u_K sendo igual a v_K, segue-se que $|n[u(z)-v(z)]| = 0 \leq \sigma$ sôbre K, logo $|\varphi[n(u-v)]| \leq 1$, qualquer que seja o inteiro positivo n, o que acarreta, $\varphi(u) = \varphi(v)$. O que se acabou de demonstrar prova que existe um e um único funcional linear Ψ sôbre A e tal que $\Psi(u_K) = \varphi(u)$. O funcional Ψ é <u>contínuo</u>. Com efeito, de $|u(z)| \leq c \longrightarrow |\varphi(u)| \leq 1$, segue-se que $|u(z)| < 1$ arrasta $|\varphi(u)| \leq 1/c$ e portanto

$$\|\Psi\| = \sup_{\|u_K\| \leq 1} |\Psi(u_K)| \leq \frac{1}{c} \quad \text{e} \quad \Psi \text{ é contínuo.}$$

A sendo um sub-espaço linear de B, o teorema de Hahn-Banach (Prop.15, Cap.I) mostra que é possível prolongar o funcional Ψ, como funcional linear e contínuo, ao espaço de Banach B. Nestas condições, seja $t \notin K$ e a_t a função definida sôbre K por $a_t(z) = \frac{1}{t-z}$. E' claro que $a_t \notin B$. De acôrdo com os resultados do número 2, dêste capítulo, e do teorema de Cauchy, existe uma reunião Γ de um número finito de curvas de Jordan tal que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u(t)}{t-z}\,dt, \qquad \text{para} \quad z \notin K.$$

Mas

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u(t)}{t-z}\,dt = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$$

onde

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n} \frac{u(t_k)(u_{k+1}-u_k)}{t_k - z}$$

e a convergência $g_n(z) \longrightarrow u(z)$ é uniforme (º) para $z \in C$, onde C é um conjunto fechado contido em Γ e que contém K. Segue-se, que $g_n(z) \longrightarrow u(z)$ na topologia do espaço de Banach B e, portanto,

$$\Psi(u_K) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} u(t)\,\Psi(a_t)\,dt.$$

Como $\varphi(u) = \Psi(u_K)$, vem:

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} u(t)x(t)\,dt,$$

onde $x(t) = \Psi(a_t)$ é regular (ºº) para $t \notin K$. Observe-se que esta representação só depende da classe $\dot{x}$ e que o caminho Γ separa os pontos onde $x(t)$ **não** está definida dos pontos onde $u(t)$ não está definida. Em conclusão, $\varphi(u) = \langle \dot{x}, u \rangle$. (Q.E.D.).

<u>Observação</u> - Os funcionais lineares e contínuos definidos no espaço $[O]_\beta$ são funcionais que satisfazem a condição seguinte: se a função analítica de duas variáveis $u(z,\alpha)$, com $z \in O$,

---

(º) Ver Walsh, I and A, pg.10, Teor.5.

(ºº) Note-se que $x(t)$ tende para zero quando t tende para o ponto no infinito.

e $\alpha \in \Omega$ (conjunto aberto conveniente da esfera complexa) considerada como função [º] de z pertence a O , então $\langle \dot{x}, u(z,\alpha) \rangle$ é função regular [ºº] de α . Êstes funcionais lineares possuem a propriedade fundamental dos funcionais analíticos lineares que é a da conservação da analiticidade em relação ao parâmetro α , apezar de não pertencerem a esta classe, pois seu campo de definição não é um conjunto (F), ou região linear na nomenclatura de Fantappiè [ººº]. Identificando-se, como é permitido, a classe dos funcionais analíticos com o espaço vectorial $[O]$ e os funcionais lineares contínuos definidos em $[O]_\beta$ com o espaço vectorial $[F]$, estas duas classes apresentam-se como mùtuamente duais. E'de se presumir que todo funcional linear definido sôbre um conjunto linear de funções localmente analíticas, no sentido de Fantappiè (ver Fantappiè III, pg.24) e que possui a propriedade de conservar a analiticidade em relação a um parâmetro pertença a uma das classes acima mencionadas.

Seja F_1 um conjunto compacto contido em O , é claro, então, que $[F_1] \supset [O]$. Tomando um ponto z_1 de O não contido em F_1, o funcional linear contínuo φ em $[O]_\beta$, definido por $\varphi(u) = u(z_1)$, não é um funcional linear de $[F_1]$, portanto, nem todo funcional linear contínuo em $[O]_\beta$, ou, $[O]$ com a topologia $\sigma(E',E)$, pode ser prolongado a um funcional linear contínuo em $[F_1]_e$ e a topologia induzida por $[F_1]$ não coincide nem é mais fina que a topologia $\sigma(E',E)$ de $[O]$ (pois, caso contrário, seria sempre possível o prolongamento).

(º) Ver a noção de linha analítica em Fantappiè, III, pg.27.

(ºº) Osgood, I, pg.322.

(ººº) Fantappiè, III, pg.24.

APÊNDICE I.

Seja O uma região que não contém o ponto no infinito e cuja fronteira é constituida por um números finito de contôrnos $C, C_1, \ldots, C_k$ que não se cortam e onde o contorno C, contém no seu interior os contôrnos $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_k$ pontos interiores às curvas de Jordan $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Nestas condições, pode-se demonstrar a seguinte

Proposição 1. O conjunto A constituido pelas funções $1, z^n, \dfrac{1}{(z-z_j)^n}$, onde $j=1,2,\ldots,k$ e $n \in N$, é um conjunto total no espaço $[O]_\beta$.

Para demonstrá-la, aplica-se a Proposição 22, do Capítulo I, o que equivale a dizer, condição necessária e suficiente para que A seja total, é que a relação $\langle \dot{x}, u \rangle = 0$, para todo $u \in A$, implica $\dot{x} = 0$. Em particular, para $u(z) = \dfrac{1}{(z-z_j)^{n+1}}$, vem:

$$\langle \dot{x}, u \rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{x(z)}{(z-z_j)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_j} \frac{x(z)}{(z-z_j)^{n+1}}\,dz = \frac{x^{(n)}(z_j)}{n!} = 0$$

(C'_j é um contôrno que contém C_j no seu interior) para $j=1,\ldots,k$ e n inteiro positivo qualquer, o que implica, que $x(z)$ é idênticamente nula no interior de $C'_1, C'_2, \ldots, C'_k$. Mas, por outro lado,

$$\langle \dot{x}, z^n \rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} x(z) z^n\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} x(z) z^n\,dz = 0 .$$

(C' contôrno contido em C e que contém os contôrnos C'_j no seu interior) para n inteiro não negativo qualquer, arrasta $x(z)=0$, para todo z exterior a C'. Em conclusão $x(z)$ é nula num aberto que contém o complementar de O, logo $\dot{x} = 0$. (Q.E.D.).

A proposição que acaba de ser demonstrada é equivalente ao clássico Teorema de Runge, pois dizer que A é total (Def.11, Cap.I) é dizer que tôda função regular em O, pode ser uniformemente aproximada, sôbre todo compacto contido em O, por uma combinação linear de funções racionais com polos nos pontos $z_1, z_2, \ldots, z_k$ e ∞. Caso a região O seja simplesmente conexa e não contenha o ponto ∞, segue-se a possibilidade de aproximação uniforme sôbre todo compacto contido em O de qualquer função regular em O, por meio de polinômios.

Pode-se demonstrar também as seguintes proposições:

Proposição 2. Seja F um conjunto fechado próprio qualquer da esfera complexa. Condição necessária e suficiente para que uma função de (F) possa ser aproximada uniformemente por funções racionais com polos nos pontos $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$, é que um pelo menos, dêstes pontos, pertença a cada uma das regiões em que F separa o plano. (Prop.2, do Capítulo II).

Esta proposição diz, portanto, que os elementos $\left[\widehat{\frac{1}{(z-z_k)^n}}\right] = \dot{x}_{k,n}$, com n inteiro positivo e os pontos z_k escolhidos como foi indicado, constituem um conjunto total. Indicando-se um representante de um elemento genérico dêsse conjunto com a notação $x_{k,n}$, para demonstrar a proposição basta verificar que $\langle \dot{x}_{k,n}, u \rangle = 0$, qualquer que seja k, implica $u=0$. Mas,

$$\langle \dot{x}_{k,n+1}, u \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(z)}{(z-z_k)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{u(z)}{(z-z_k)^{n+1}} dz = \frac{u^{(n)}(z_k)}{n!} = 0,$$

onde Γ_1 é um contôrno de Γ que contém z_k. Segue-se, dêste cálculo, que a função $u(z)$ é idênticamente nula em cada uma das regiões em que $O = \complement F$ se decompõe; ela é, portanto, idênticamente nula e o conjunto de elementos $\dot{x}_{k,n}$ é total. (Q.E.D.).

<u>Proposição 3</u>. Seja O um conjunto aberto próprio qualquer da esfera complexa. Condição necessária e suficiente para que uma função de $[O]$ possa ser aproximada uniformemente por funções racionais com polos nos pontos z_j, j pertence a J, é que, um pelo menos dêsses pontos, pertença a cada uma das componentes conexas fechadas em que o complementar de O se decompõe.

Como no caso anterior, trata-se de demonstrar que as funções $u_{j,n}(z) = \dfrac{1}{(z-z_j)^{n+1}}$ constituem um conjunto total. Basta, então, provar que a relação $\langle \dot{x}, u_{j,n} \rangle = 0$, qualquer que seja o inteiro n e o índice $j \in J$, arrasta $\dot{x} = 0$. Seja $x(z)$ um representante de $\dot{x}$, definido num aberto Ω que contém $F = \complement O$; é sempre possível encontrar uma vizinhança aberta Ω_1 de F, contido em Ω e composta de um número finito de regiões. Cada uma destas regiões contendo componentes conexas de F, contém pontos z_j e raciocínio semelhante ao da proposição anterior mostra que a restrição de $x(z)$ à vizinhança Ω_1 é idênticamente nula, portanto, $\dot{x} = 0$. (Q.E.D.).

As duas proposições anteriores ilustram a dualidade existente entre os espaços $[O]$ e $[F]$ e generalizam o teorema de Runge.

A P Ê N D I C E II.

Referências sôbre as definições dos principais conceitos e resultados da Teoria dos Conjuntos e da Topologia Geral de Bourbaki, utilizados nesta Tese.

A indicação Fasc. Rés., se refere ao Livre I: Théorie des Ensembles (Fascicule de Résultats) e T.G. ao livro "Topologie Générale", o algarismo romano que a segue ao capítulo correspondente.

Relações de equivalência e conjunto quociente - Fasc.Rés., pgs.28, 29 e 30.

Noção de estruturas - Fasc.Rés., pgs. 41,42,43,44 e 45.

Produto de conjuntos, projeção - Fasc.Rés., pgs.13 e 14.

Imágem inversa ou recíproca - p Fasc.Rés., pg.9.

Aplicação canônica de uma parte de um conjunto no conjunto todo - Fasc.Rés., pg.8.

Definição de conjuntos abertos, estrutura topológica e espaço topoló gico, T.G.I, pg.1.

Noção de vizinhança e propriedades das vizinhanças de um ponto - T.G. I, pgs.2, 3 e 4.

Conjuntos fechados - T.G.I, pgs. 4 e 5.

Interior de um conjunto - T.G.I, pg.5.

Aderência de um conjunto - T.G.I, pg.6.

Fronteira de um conjunto - T.G.I, pg.7.

Noção de homeomorfismo - T.G.I, pg.11.

Noção de topologia induzida, T.G.I, pgs. 13 e 14.

Definição de função contínua,- T.G.I, pg.16.

Noção de filtro - T.G.I, pg.20.

Bases de um filtro - T.G.I, pgs. 23 e 24.

Sistema fundamental de vizinhanças - T.G.I, pg.24.

Noção de ponto limite - T.G.I, pg.31.

Noção de espaço separado - T.G.I, pg. 32.

Valor limite de uma função, em particular, de uma sucessão - T.G.I, pg.34.

Produto de espaços topológicos - T.G.I, pg.42.

Espaços compactos - T.G.I, pg.59.

Conjuntos compactos - T.G.I, pg. 60.

B I B L I O G R A F I A.

Arens, R. - Duality in linear spaces, Duke Math.J., vol.14, nº3, pg.789

Banach, S. - Théorie des Opérations linéaires, Varsovia, 1932.

Bieberbach - Lehrbuch der Funktionentheorie, Teubner, 1934.

Bourbaki, N. - Topologie Générale, Ch. I, II, III, VI, VIII, IX e X.
Algebre, Ch.II (Algèbre Linèaire), Hermann & Cie., Editeurs.

Cacciopoli, R. - Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche, Atti dela R. Accad. Lincei, vol.13, pgs.263-266 (1931).

Delsarte, J. - Curso sôbre Espaços Vectoriais Topológicos. Notas de aula - 1949.

Dias, C.L.da Silva - I - Sôbre o conceito de funcional analítico, Anais da Academia Brasileira de Ciências, Tomo XV - n.1 (1943).
II - Sôbre a regularidade dos funcionais definidos no campo das funções localmente analíticas - Tese de doutoramento - 1942.
III - Sôbre a continuidade dos funcionais analíticos lineares, Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, vol.3º.

Dieudonné, J. - La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Annales Scient. de L'Ec.Norm.Sup. - vol.LIX,Fasc.2º.

Dieudonné, J. e Schwartz, L. - La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$; Annales de L'Institut Fourier, Tome I (1949), 61-101.

Fantappiè, L. - I - I Funzionali Analitici, Mem. Acc. Lincei (1930).
II - Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici, Mem. Acc. Italia, 1941, pp.617-706.
III - Teoria de los Funcionales Analiticos y sus aplicaciones, Barcelona, 1943.

Hurwitz-Courant - Funktionentheorie, J.Springer, 1929.

Mackey, G.W. - On convex topological linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol.60, nº3.
On infinite dimensional linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol57, nº2.

Montel, P. - I : Leçons sur les familles normales, Gauthiers Villars & Cie., 1927.

Newmann, M.H.A. - Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge University Press, 1939.

Nachbin, L. - Espaços vectoriais topológicos (I Parte) - Notas de Matemática - Rio de Janeiro (1948).

Schwartz, L. - ver Dieudonné, J. e Schwartz, L.

I -Théorie Générale des Fonctions Moyenne-Périodiques, Ann. of Math., vol.48, nº4.

Silva, J.Sebastião - I - L'Analise Funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche, Mem.Acc.Lincei, 1947, 207-240.

II -As funções analiticas e a Analise funcional, Portugaliae Math., 1950.

III -Sôbre a topologia dos Espaços funcionais analíticos, Revista da Faculdade de Ciências de Lisbôa, 2ª Série, A, Vol.I-pgs.1-8.

Walsh, J.L. - Interpolation and Approximation (I and A) Colloquium Publications, vol.XX (1935).

I N D I C E.

Mimeografado por L.H.Jacy Monteiro
e encadernado na Gráfica S. João.

S.Paulo,1951.