LIMITES INDUTIVOS

ANTONIO GILIOLI

1969

Agradecimentos

Desejamos aqui externar nosso reconhecimento ao Professor Chaim Samuel Hönig, orientador dêste trabalho, pelas suas sugestões e por seu constante interêsse pelos nossos estudos. A parte fundamental dêste trabalho girou em tôrno de uma questão proposta pelo Professor Chaim.

Agradecemos a todos que contribuiram à execução dêste trabalho, em particular ao Professor Carlos B. de Lyra, que reviu parte dos originais, juntamente com o Professor Chaim, e à Professôra Elza F. Gomide, Diretora do Departamento de Matemática da FFCL da USP, que nos proporcionou o material necessário à confecção desta apostila.

Estendemos o nosso agradecimento à minha espôsa, que redigiu integralmente êste trabalho no stêncil.

Agradecemos ainda à sra. Maria E. Nunes, que o mimeografou.

PREFÁCIO

O presente trabalho surgiu de nosso interêsse em verificar quando que as diversas topologias $\mathcal{T}_T$, $\mathcal{T}_G$, $\mathcal{T}_V$, $\mathcal{T}_{LC}$ coincidem, pois é de se notar que, quando se tem um sistema indutivo de espaços convexos, a topologia de seu limite indutivo, considerado na categoria de espaços convexos ($\mathcal{T}_{LC}$), geralmente é distinta da topologia de seu limite indutivo, considerado na categoria de espaços topológicos ($\mathcal{T}_T$), de grupos topológicos ($\mathcal{T}_G$), ou de espaço vetorial topológico ($\mathcal{T}_V$).

Inicialmente constava êle de cêrca de 5 páginas, onde expunhamos parte dos resultados dos atuais §4.1B e §4.1D.

O professor Chaim S. Hönig nos sugeriu que tentássemos provar que o espaço $\mathcal{D}(R^n)$ das funções C^∞ de suporte compacto, considerado como limite indutivo dos $\mathcal{D}(\overline{B}_m)$, das funções C^∞ de suporte contido em $\overline{B}_m$ com a topologia usual (e onde $\overline{B}_m$ é a bola fechada de centro 0 e raio m), é tal que $\mathcal{T}_{LC} = \mathcal{T}_T$. Essa questão possui resposta afirmativa, e é parte do "folklore" matemático, mas sua demonstração não se encontra na literatura matemática.

Nosso esfôrço posterior girou em tôrno dessa meta, que apesar de não atingida, deixou pelo caminho uma série de resultados (como corolário de um dêles provamos que $\mathcal{T}_{LC} = \mathcal{T}_G$, e mesmo $\mathcal{T}_{LC} = \mathcal{T}_{G_1}$, no caso acima de $\mathcal{D}(R^n)$). Provàvelmente parte do insucesso foi devido a tentarmos sempre demonstrar teoremas na forma mais geral possível.

Enfim, achamos que seria útil começar êste trabalho com as noções e resultados usuais sôbre limites indutivos, que, em contraste com os limites projetivos, são pouco tratados na literatura matemática (por exemplo no caso de grupos topológicos e espaços vetoriais topológicos).

Assim, o §1 contém as noções sôbre categorias necessárias para definir limite indutivo de um sistema indutivo sôbre uma categoria qualquer, e apresenta resultados válidos para qualquer categoria. O §1 termina com um estudo detalhado do limite indutivo na categoria dos conjuntos.

O §2 essencialmente prova que grande parte das estruturas algébricas usuais têm limites indutivos. O §3 faz o mesmo com as estruturas topológico-algébricas.

Os 3 primeiros §§ são pouco mais que um repertório de trivialidades, e consiste pràticamente na tradução à linguagem de categorias de conceitos e resultados já conhecidos. Há apenas 2 pontos que merecem ser mencionados. 1) No §2.2 provamos que nem sempre existe o limite indutivo na categoria de corpos (fato que usualmente é passado despercebido), e damos uma condição necessária e suficiente para que exista êsse limite indutivo (Prop. 4 §2.2). O fato se repete no §3 com a categoria de corpos topológicos. 2) O §3 apresenta um tratamento unificado da existência de limites indutivos de estruturas topológico-algébricas via estruturas finais. A idéia é devida ao professor Chaim, e nosso trabalho consistiu em dar definições convenientes de estruturas finais e de subcategoria na linguagem de categorias (§3.2) (não é o que se entende por subcategoria em [9], mas antes da noção de estrutura mais rica que outra). É portanto perfeitamente viável para quem está familiarizado com as noções de limite indutivo e de categorias, pular os 3 primeiros §§, vendo apenas as definições e os enunciados das proposições, que estabelecem a notação usada nos 2 últimos §§.

No §4.1B temos a 2ª Proposição Fundamental, onde se prova que $\tau_G = \tau_T$ é equivalente a ser o produto em G: $(G\times G, \tau_T\times\tau_T) \longrightarrow (G, \tau_T)$ contínua na origem (e,e), e também se mostra que uma certa condição (1), estritamente topológica, acarreta $\tau_G = \tau_T$ (mas não sabemos se é equivalente a $\tau_G = \tau_T$). Essa proposição é a base para §4.2 e §4.3. Nos §4.1C e §4.1D apresentamos

2 casos em que se tem $\tau_G = \tau_T$: Prop. 9 do § 4.1C e corol. 3 da Prop. 13 do § 4.1D, além de resultados de menor importância. No § 4.4 provamos que, quando se tem um sistema indutivo enumerável de espaços convexos, então $\tau_{C_1} = \tau_G = \tau_V = \tau_{LC}$: Prop. 24 e seu corolário. Mostramos também que o limite indutivo de espaços topológicos localmente compactos na categoria de espaços topológicos não é necessàriamente localmente compacto. Na realidade, a Prop. 24 é uma generalização do exercício 14, § 4 cap. 2 do Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques. Êsse exercício pede para provar que $\tau_V = \tau_{LC}$ no caso de se ter um limite indutivo estrito de uma seqüência crescente de espaços convexos, mas a mesma demonstração prova a Prop. 24, que é bem mais geral.

No § 5.1 provamos que sempre se tem $\tau_G = \tau_{C_1}$. No § 5.2 provamos que $\tau_V = \tau_G = \tau_{C_1}$ quando o corpo base é um corpo com valorização (na realidade provamos algo também para módulos). Finalmente, o § 5.3 consiste de contraexemplos provenientes do Bourbaki, que deixam claro não ser possível obter resultados gerais melhores que os que conseguimos.

Tínhamos em vista fazer um estudo mais detalhado de estruturas especiais, tais como anéis de integridade, nœtherianos, principais, espaços topológicos conexos, de Hausdorff, T_1, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4, espaços uniformes, conjuntos com ponto base, conjuntos ordenados, etc., mas as proporções que êste trabalho adquiriu e a exigüidade de tempo impediram que realizássemos êsse propósito. No entanto, um pequeno grupo de resultados esparsos foram reunidos como exercícios. Achamos que um estudo de limites indutivos de estruturas uniformes podem aclarar as idéias sôbre a igualdade $\tau_G = \tau_T$.

Finalmente, devemos mencionar que não tocamos em limites indutivos de seqüências exatas ou de ordem 2, de estruturas algébricas. Também não estudamos as relações entre limites indutivos de módulos e produto tensorial. Assim, êste trabalho está longe de apresentar um tratamento exaustivo de limites indutivos.

São Paulo, agôsto de 1.969 — Antonio Gilioli

ÍNDICE

§1: Definições e Propriedades Gerais. Limites indutivos de conjuntos.

1. Categorias e Funtores

Apesar de que, geralmente, os objetos de uma categoria são dados como os elementos de uma classe, posta em correspondência bijetora com as identidades dessa categoria, daremos aqui uma axiomatização simplificada de categoria:

Def. 1: Uma categoria é uma classe não vazia de objetos t.q.:

a) para todo par (A,B) de objetos, está associado um conjunto (que pode ser vazio) denotado $Hom(A,B)$ cujos elementos são chamados morfismos de A em B (costuma-se denotar um morfismo por: $f: A \longrightarrow B$).

b) para toda tripla (A,B,C) de objetos, está associada uma aplicação de $Hom(B,C) \times Hom(A,B)$ em $Hom(A,C)$ chamada composição de morfismos (denota-se $(g,f) \mapsto g \circ f$).

Tais dados devem satisfazer os seguintes axiomas:

C_0) $Hom(A,B)$ e $Hom(A',B')$ são conjuntos disjuntos, exceto se $A = A'$ e $B = B'$. (Para um morfismo $f: A \longrightarrow B$, está então bem definida a fonte A e o alvo B).

C_1) Associatividade da composição de morfismos:
$\forall f \in Hom(A,B)$, $\forall g \in Hom(C,D)$, $\forall h \in Hom(B,C)$ tem-se:
$g \circ (h \circ f) = (g \circ h) \circ f$.

C_2) Para todo objeto A da categoria, existe um elemento de $Hom(A,A)$ chamado morfismo identidade de A, e denotado 1_A, t.q. $\forall f \in Hom(A,B)$, $\forall g \in Hom(C,A)$, tem-se $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$. (É fácil ver que tal morfismo 1_A é necessariamente único).

Exemplos: 1) A categoria dos conjuntos: os objetos são os conjuntos, os morfismos são as aplicações entre conjuntos; a composição de morfismos é a composição usual de aplicações, e o morfismo identidade é a aplicação identidade.

2) A categoria dos grupos: os objetos são os grupos, os morfismos são os homomorfismos de grupos.

3) A categoria dos espaços topológicos: os objetos são os espaços topológicos, os morfismos são as aplicações contínuas.

4) A categoria dos grupos topológicos: os objetos são os grupos topológicos, os morfismos são os homomorfismos contínuos de grupos.

Nos exemplos 2 a 4, a composição de morfismos é a composição de aplicações, e o morfismo identidade é a aplicação identidade.

<u>Def 2</u>: Dois <u>objetos</u> A e B de uma categoria $\mathcal{C}$ se dizem <u>isomorfos</u> se existem morfismos $f: A \to B$ e $g: B \to A$ t.q. $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$. (Geralmente se dá outra definição, mas equivalente a esta, apesar de aparentemente exigir uma condição mais fraca). Nesse caso dizemos que f e g são isomorfos.

<u>Def 3</u>: Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são duas categorias, um <u>funtor covariante</u> F de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$ é um par de aplicações q, cada objeto A de $\mathcal{C}$, associa um objeto $F(A)$ de $\mathcal{C}'$, e a cada morfismo $f: A \to B$ associa um morfismo $F(f): F(A) \to F(B)$, verificando as condições: 1) $F(1_A) = 1_{F(A)}$; 2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. (O funtor será <u>contravariante</u> se $f: A \to B$ associar $F(f): F(B) \to F(A)$ e satisfizer 1) e 2'): $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

<u>Def 4</u>: Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são duas categorias, F_1 e F_2 funtores covariantes de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$, um morfismo funtorial Φ de F_1 em F_2, é uma aplicação que, a cada objeto A de $\mathcal{C}$, associa um morfismo $\Phi(A): F_1(A) \to F_2(A)$ t.q., se $f: A \to B$ é morfismo, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "\Phi(A)"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(B) \arrow[r, "\Phi(B)"] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, temos

$$\Phi(B) \circ F_1(f) = F_2(f) \circ \Phi(A)$$

Def 5: Diz-se que um morfismo funtorial Φ de F_1 em F_2 é um isomorfismo funtorial se existe um morfismo funtorial Ψ de F_2 em F_1, t.q. $\Psi(A)\circ\Phi(A)=1_{F_1(A)}$ e $\Phi(A)\circ\Psi(A)=1_{F_2(A)}$ (Para isso é necessário e suficiente que $\Phi(A)$ seja um isomorfismo para todo objeto A de $\mathcal{C}$). Nesse caso, dizemos que F_1 e F_2 são funtores isomorfos.

2. Categoria dos sistemas indutivos sôbre uma categoria dada.

Def 6: Um conjunto I se diz pré-ordenado se estiver definida sôbre êle uma relação R, transitiva e reflexiva (i.é., $\forall a,b,c \in I$ se aRb e bRc, então aRc; $\forall a \in I$, aRa). Denotaremos geralmente aRb por $a \leq b$.

Def 7: Um conjunto pré-ordenado I se diz filtrante à direita se, $\forall \alpha,\beta \in I$, $\exists \gamma \in I$ t.q. $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$.

Def 8: Dados 2 conjuntos pré-ordenados I e I', uma aplicação $f: I \longrightarrow I'$ se diz crescente se $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$, $\forall \alpha,\beta \in I$.

Def 9: Se I é um conjunto pré-ordenado filtrante à direita, e $J \subset I$, J munido de uma pré-ordem filtrante à direita, diremos que $J \subset_0 I$ se $\alpha \leq_J \beta$ acarretar $\alpha \leq_I \beta$, $\forall \alpha,\beta \in J$, i.é., se a inclusão canônica $i: J \longrightarrow I$ fôr crescente.

Def 10: Se I é pré-ordenado filtrante à direita, e $J \subset_0 I$ diremos que J é cofinal em I se $\forall \alpha \in I$, $\exists \beta \in J$, t.q. $\alpha \leq_I \beta$.

Exemplo: Se I é pré-ordenado filtrante à direita, $\alpha_0 \in I$, e $J = \{\beta \in I / \beta \geq_I \alpha_0\}$, com a pré-ordem induzida pela de I (i.é., $\beta \leq_J \gamma \Longleftrightarrow \beta \leq_I \gamma$, $\forall \beta,\gamma \in J$), então J é cofinal em I: é claro que $J \subset_0 I$, e, se $\alpha \in I$, $\exists \beta \in I$ t.q. $\beta \geq_I \alpha$, $\beta \geq_I \alpha_0$, pois I é filtrante à direita, mas então $\beta \in J$.

Def 11: Chama-se sistema indutivo sôbre uma categoria

$\mathcal{C}$, a tôda terna $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_I\beta})$, onde I é um conjunto pré-ordenado filtrante à direita não vazio, $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$, e $(f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_I\beta}$ uma família de morfismos de $\mathcal{C}$, verificando as condições:

a) $\forall \alpha,\beta\in I$ se $\alpha\leq_I\beta$, então $f_{\beta\alpha}: E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ é um morfismo de E_α em E_β.

b) $\forall\alpha\in I$, $f_{\alpha\alpha}: E_\alpha\longrightarrow E_\alpha$ é o morfismo identidade.

c) $\forall \alpha,\beta,\gamma\in I$, se $\alpha\leq_I\beta$ e $\beta\leq_I\gamma$, então $f_{\gamma\alpha}=f_{\gamma\beta}\circ f_{\beta\alpha}$, i.é,

o diagrama
$$\begin{tikzcd} & E_\beta \arrow[dr, "f_{\gamma\beta}"] & \\ E_\alpha \arrow[ur, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, "f_{\gamma\alpha}"'] & & E_\gamma \end{tikzcd}$$
é comutativo.

Observações: 1) A relação $\leq$ não precisa ser anti-simétrica. Se tivermos $\alpha\leq\beta$ e $\beta\leq\alpha$ segue que $i_{E_\alpha}=f_{\alpha\alpha}=f_{\alpha\beta}\circ f_{\beta\alpha}$ e que $i_{E_\beta}=f_{\beta\beta}=f_{\beta\alpha}\circ f_{\alpha\beta}$, logo, $f_{\alpha\beta}$ e $f_{\beta\alpha}$ serão isomorfismos.

2) Para tôdas nossas aplicações, bastaria que a relação $\leq$ fôsse transitiva e filtrante à direita. (Nêsse caso, porém, não valeria a observação 1).

3) Se J fôr cofinal em I, I pré-ordenado filtrante à direita e $(I,(E_\alpha)_{\alpha\in I},(f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$ é um sistema indutivo sôbre $\mathcal{C}$, então é fácil ver que $(J,(E_\alpha)_{\alpha\in J},(f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$ é um sistema indutivo que diremos ser cofinal em $(I,(E_\alpha)_{\alpha\in I},(f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$.

Def 12: Se $\mathcal{C}$ é uma categoria, associa-se a $\mathcal{C}$ uma categoria $\underrightarrow{\mathcal{C}}$ chamada categoria dos sistemas indutivos sôbre $\mathcal{C}$ cujos objetos são os sistemas indutivos sôbre $\mathcal{C}$ e os morfismos entre dois objetos $(I,(E_\alpha)_{\alpha\in I},(f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$ e $(I',(E'_{\alpha'})_{\alpha'\in I'},(f'_{\beta'\alpha'})_{\alpha'\leq\beta'})$ são os pares $(\varphi,(u_\alpha)_{\alpha\in I})$, onde $\varphi: I\longrightarrow I'$ é uma aplicação crescente e $\forall\alpha\in I$, $u_\alpha: E_\alpha\longrightarrow E'_{\varphi(\alpha)}$ é um morfismo t.q. $\alpha\leq_I\beta$ acarreta $g_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}\circ u_\alpha = u_\beta\circ f_{\beta\alpha}$, i.é, o diagrama
$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "u_\alpha"'] & E_\beta \arrow[d, "u_\beta"] \\ E'_{\varphi(\alpha)} \arrow[r, "g_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}"'] & E'_{\varphi(\beta)} \end{tikzcd}$$
é comutativo. A composição de 2 morfismos:

$(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta}) \xrightarrow{(\varphi, u_\alpha)} (I', (E'_{\alpha'})_{\alpha'\in I'}, (g_{\beta'\alpha'})_{\alpha'\leq_{I'}\beta'}) \xrightarrow{(\psi, v_{\alpha'})}$

$(I'', (E''_{\alpha''})_{\alpha''\in I''}, (h_{\beta''\alpha''})_{\alpha''\leq_{I''}\beta''})$ é o morfismo $(\psi\circ\varphi, v_{\varphi(\alpha)}\circ u_\alpha)$.

O morfismo identidade de $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$ é $(1_I, (1_\alpha)_{\alpha\in I})$.
É fácil ver que $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ realmente é uma categoria.

3. Limite indutivo de um sistema indutivo. Propriedades gerais.

Def. 13: Se $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$ é um sistema indutivo sôbre $\mathcal{C}$, chama-se limite indutivo dêsse sistema a um par $(M, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ t.q.:

L_1) M é objeto de $\mathcal{C}$, $f_\alpha : E_\alpha \longrightarrow M$ é morfismo de $\mathcal{C}$, $\forall \alpha\in I$, t.q. $\alpha\leq_I\beta \Longrightarrow f_\beta\circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$, i.é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} & E_\beta \arrow[dr, "f_\beta"] & \\ E_\alpha \arrow[ur, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, "f_\alpha"] & & M \end{tikzcd}$$

é comutativo.

L_2) Se M' é objeto de $\mathcal{C}$, e $(f'_\alpha)_{\alpha\in I}$ é uma família de morfismos de $\mathcal{C}$, $f'_\alpha : E_\alpha \longrightarrow M'$, que verificam a condição L_1, i.é. t.q. $\alpha\leq_I\beta \Longrightarrow f'_\alpha = f'_\beta\circ f_{\beta\alpha}$, então existe um único morfismo

$f : M \longrightarrow M'$ t.q. $f\circ f_\alpha = f'_\alpha$, $\forall\alpha\in I$, i.é, t.q. o diagrama

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "f'_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & M' \\ & M \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

seja comutativo.

Notação: Quando não houver confusão designaremos o sistema indutivo $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_I\beta})$ abreviadamente por $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$.

Exemplo de limite indutivo: Se I é um conjunto pré-ordenado filtrante à direita, não vazio, E um objeto de uma categoria $\mathcal{C}$, 1_E o morfismo identidade de E, então $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$ é um sistema indutivo, se $E_\alpha = E$ $\forall\alpha\in I$ e $f_{\beta\alpha} = 1_E$, $\forall\alpha,\beta\in I$ com $\alpha\leq_I\beta$, de limite indutivo $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ onde $f_\alpha = 1_E$, $\forall\alpha\in I$.

A verificação é imediata.

Proposição 1: a) Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre uma categoria $\mathcal{C}$, e (M, f_α), (M', f'_α) são dois limites indutivos, então existe um único morfismo $f: M \longrightarrow M'$ t.q. $f\circ f_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, (i.e. t.q.

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f'_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & M' \\ & M \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

seja comutativo), e êsse morfismo é um isomorfismo. b) Reciprocamente, se (M, f_α) é um limite indutivo e $f: M \longrightarrow M'$ é um isomorfismo, então (M', f'_α) é também limite indutivo do sistema, se fizermos $f'_\alpha = f\circ f_\alpha$.

Dem: a) Como (M', f'_α) é lim. indutivo temos por L_1 que $\alpha \le \beta \Longrightarrow f'_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f'_\alpha$. Como (M, f_α) é lim. indutivo por L_2, temos que existe um único morfismo $f: M \longrightarrow M'$ t.q. $f\circ f_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha\in I$. Analogamente, existe um único $g: M' \longrightarrow M$ t.q. $g\circ f'_\alpha = f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Logo, $(g\circ f)\circ f_\alpha = g\circ(f\circ f_\alpha) = g\circ f'_\alpha = f_\alpha$ $\forall \alpha\in I$. Mas, $1_M : M \longrightarrow M$ é certamente um morfismo t.q. $1_M \circ f_\alpha = f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, e por L_2 é o único morfismo satisfazendo essa condição, já que (M, f_α) é um limite indutivo. Logo $g\circ f = 1_M$. Analogamente temos $f\circ g = 1_{M'}$. Logo, pela def. 2, f é isomorfismo. (Na verdade, (M, f_α) e (M', f'_α) são objetos iniciais de uma certa categoria associada a $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, donde segue que são isomorfos).

b) Se $\alpha \le \beta$, temos $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ $\therefore$ $f\circ(f_\beta\circ f_{\beta\alpha}) = f\circ f_\alpha$ $\therefore$ $(f\circ f_\beta)\circ f_{\beta\alpha} = f\circ f_\alpha$ $\therefore$ $f'_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f'_\alpha$ $\therefore$ L_1 está verificada para (M', f'_α). Se M'' é objeto de $\mathcal{C}$, e $f''_\alpha : E_\alpha \longrightarrow M''$ t.q. $f''_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f''_\alpha$ se $\alpha\le\beta$, então por L_2 (relativamente a (M, f_α)) existe único morfismo $g: M \longrightarrow M''$ t.q. $g\circ f_\alpha = f''_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Logo o morfismo $g\circ f^{-1} : M' \longrightarrow M''$ é t.q. $g\circ f^{-1} \circ f'_\alpha = g\circ f^{-1}\circ f\circ f_\alpha = g\circ f_\alpha = f''_\alpha$. Se $h: M' \longrightarrow M''$ for um morfismo t.q. $h\circ f'_\alpha = f''_\alpha$ $\forall \alpha\in I$* donde $h\circ f = g$ $\therefore$ $h = h\circ f\circ f^{-1} = g\circ f^{-1}$.

Logo existe um único morfismo h (a saber $h = g\circ f^{-1}$) t.q.

*intercalar: então $h\circ f\circ f_\alpha = f''_\alpha$, $\forall \alpha \in I$, donde...

$u \circ f_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, donde L_2 está verificada (relativamente a (M', f'_α)). Logo, (M', f'_α) é um limite indutivo.

<u>Proposição 2</u>: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ e $(I', H_{\alpha'}, h_{\beta'\alpha'})$ são dois sistemas indutivos sôbre uma categoria $\mathcal{C}$, de limites indutivos (E, f_α) e (H, h'_α) respectivamente, e se (φ, μ_α) é morfismo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ em $(I', H_{\alpha'}, h_{\beta'\alpha'})$, então existe um único morfismo $\mu: E \to H$, t.q. $h_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha = \mu \circ f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, i.é, t.q. seja comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, dashed, "w_\alpha"] & E \arrow[d, "\mu"] \\ H_{\varphi(\alpha)} \arrow[r, "h_{\varphi(\alpha)}"'] & H \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>: Seja $w_\alpha = h_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$.

Se $\alpha \leq \beta$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\mu_\alpha"'] & E_\beta \arrow[d, "\mu_\beta"] \\ H_{\varphi(\alpha)} \arrow[r, "h_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}"] \arrow[dr, "h_{\varphi(\alpha)}"'] & H_{\varphi(\beta)} \arrow[d, "h_{\varphi(\beta)}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

devido a (φ, μ_α) ser morfismo de sistemas indutivos, e a ser $(H, h_{\alpha'})$ lim. indutivo de $(I', H_{\alpha'}, h_{\beta'\alpha'})$. Daí segue que, se $\alpha \leq \beta$, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "w_\alpha"'] & & E_\beta \arrow[dl, "w_\beta"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Então, por L_2, já que (E, f_α) é lim. indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ segue que existe único morfismo $\mu: E \to H$ t.q.

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "w_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & H \\ & E \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

seja comutativo $\forall \alpha \in I$, i.é, t.q. $\mu \circ f_\alpha = h_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$.

<u>Notação</u>: 1) Se (E, f_α) é limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, indicamos: $\varinjlim (I, E_\alpha, f_{\beta\alpha}) = (E, f_\alpha)$. (Se não houver perigo de confusão indicaremos, abreviadamente: $\varinjlim E_\alpha = (E, f_\alpha)$).

2) Se $(\varphi, \mu_\alpha): (I, E_\alpha, f_{\beta\alpha}) \to (I', H_{\alpha'}, h_{\beta'\alpha'})$ é morfismo de sistemas indutivos, e μ é o morfismo da proposição 2, indicaremos $\mu = \varinjlim (\varphi, \mu_\alpha)$.

<u>Corolário 1</u>: $\varinjlim (1_I, 1_{E_\alpha}) = 1_{\varinjlim E_\alpha}$

<u>Corolário 2</u>: $\varinjlim (\psi \circ \varphi, \nu_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha) = \varinjlim (\psi, \nu_{\alpha'}) \circ \varinjlim (\varphi, \mu_\alpha)$

<u>Def 14</u>: Se todo sistema indutivo sôbre a categoria $\mathcal{C}$ admite limite indutivo, diremos que <u>a categoria $\mathcal{C}$ tem limites indutivos</u>.

[illegible]

a) a cada sistema indutivo $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ [illegible] $\mathcal{C}$ (i.é, a cada objeto de $\mathcal{C}_{\to}$) associemos um limite indutivo fixo (E, f_α), e b) a cada morfismo de sistemas indutivos (φ, μ_α) (i.é, morfismo de $\mathcal{C}_{\to}$), associemos o morfismo μ da prop. 2, em relação aos limites indutivos considerados em a). Então, se chamarmos de F ao par de aplicações que a cada objeto $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ de $\mathcal{C}_{\to}$ associa E: 1º elemento do par (E, f_α): lim. indutivo fixo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, e que a cada morfismo (φ, μ_α) de $\mathcal{C}_{\to}$ associa o μ considerado em b), é claro, usando os corolários 1 e 2 da proposição 2, que F é um funtor covariante de $\mathcal{C}_{\to}$ em $\mathcal{C}$. Note-se, porém, que para tanto, necessitou-se usar algo semelhante ao axioma da escolha, mas relativamente a classes. Um funtor dêsse tipo denominaremos de funtor limite indutivo.

Proposição 3: Dois funtores limites indutivos são isomorfos.

Dem: sejam $A = (I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ e $B = (I', H_{\alpha'}, h_{\beta'\alpha'})$ dois sistemas indutivos (sôbre uma categoria $\mathcal{C}$ que tem limites indutivos), e seja (φ, μ_α) um morfismo do 1º no 2º. Sejam (E^1, f^1_α), $(H^1, h^1_{\alpha'})$ seus limites indutivos, considerados relativamente ao funtor limite indutivo F_1; e sejam (E^2, f^2_α) e $(H^2, h^2_{\alpha'})$ seus limites indutivos relativamente ao funtor F_2. Sejam $\mu_1 = F_1((\varphi, \mu_\alpha)) : E_1 \to H_1$, $\mu_2 = F_2((\varphi, \mu_\alpha)) : E_2 \to H_2$. Então, sejam $\Phi(A) : E_1 \to E_2$ o isomorfismo dado pela proposição 1, e analogamente $\Phi(B) : H_1 \to H_2$. Temos então: $\mu_1 \circ f^1_\alpha = h^1_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, $\mu_2 \circ f^2_\alpha = h^2_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, $\Phi(A) \circ f^1_\alpha = f^2_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, $\Phi(B) \circ h^1_{\alpha'} = h^2_{\alpha'}$ $\forall \alpha' \in I'$, onde $F_1(A) = E_1$, $F_2(A) = E_2$, $F_1(B) = H_1$, $F_2(B) = H_2$, $F_1((\varphi, \mu_\alpha)) = \mu_1$, $F_2((\varphi, \mu_\alpha)) = \mu_2$. Então $\Phi(B) \circ \mu_1 : E_1 \to H_2$ e $\mu_2 \circ \Phi(A) : E_1 \to H_2$ são t.q. $\Phi(B) \circ \mu_1 \circ f^1_\alpha = \mu_2 \circ \Phi(A) \circ f^1_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, pois

$\Phi(B)\circ\mu_1\circ f^1_\alpha = \Phi(B)\circ h^1_{\varphi(\alpha)}\circ\mu_\alpha = h^2_{\varphi(\alpha)}\circ\mu_\alpha = \mu_2\circ f^2_\alpha =$

$= \mu_2\circ\Phi(A)\circ f^1_\alpha$ $\forall\alpha\in I$. Logo por L_2, $\Phi(B)\circ\mu_1 = \mu_2\circ\Phi(A)$, donde, pela def. 4, Φ é um morfismo funtorial entre F_1 e F_2 e como, para todo objeto A de $\underline{\underline{C}}$ $\Phi(A)$ é isomorfismo de $F_1(A)$ em $F_2(A)$, segue que Φ é isomorfismo funtorial e $\therefore$ F_1 e F_2 são isomorfos.

<u>Proposição 4</u>: a) Se $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_I\beta})$ é um sistema indutivo (sobre uma categoria $\mathcal{C}$), de limite indutivo $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ e J é cofinal em I, então $(J, (E_\alpha)_{\alpha\in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$ é um sistema indutivo de limite indutivo $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in J})$. b) Reciprocamente, se $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_I\beta})$ é um sistema indutivo, J cofinal em I, então $(J, (E_\alpha)_{\alpha\in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$ é um sistema indutivo; se existir o limite indutivo $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in J})$ de $(J, (E_\alpha)_{\alpha\in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$, então existe limite indutivo $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ de $(I, (E_\alpha)_{\alpha\in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_I\beta})$, onde, se $\alpha\in I$ e $\beta\in J$, $\alpha\leq_I\beta$, então $f_\alpha = f_\beta\circ f_{\beta\alpha}$.

<u>Dem</u>: a) É evidente que $(J, (E_\alpha)_{\alpha\in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$ é um sistema indutivo. Sabemos que, se $\alpha\leq_I\beta$, então $f_\beta\circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ logo, em particular, se $\alpha\leq_J\beta$, teremos $f_\beta\circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ $\therefore$ L_1 está verificada.

Suponhamos dado um objeto H de $\mathcal{C}$, e uma família $(\mu_\alpha)_{\alpha\in J}$, $\mu_\alpha : E_\alpha \to H$, t.q. $\mu_\beta\circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$ se $\alpha\leq_J\beta$: vamos mostrar que se pode estender tal família para uma família $(\mu_\alpha)_{\alpha\in I}$, $\mu_\alpha : E_\alpha \to H$ t.q. $\mu_\beta\circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$ se $\alpha\leq_I\beta$.

Seja $\alpha\in I$: como J é cofinal em I, existe $\beta\in J$, t.q. $\alpha\leq_I\beta$. Definamos então $\mu_\alpha = \mu_\beta\circ f_{\beta\alpha}$: devemos verificar que esta definição é boa. Se $\gamma\in J$, com $\alpha\leq_I\gamma$, vamos mostrar que $\mu_\gamma\circ f_{\gamma\alpha} = \mu_\beta\circ f_{\beta\alpha}$ $\therefore$ sendo J filtrante à direita, $\exists\delta\in J$, com $\beta\leq_J\delta$, $\gamma\leq_J\delta$, logo, por hipótese, $\mu_\delta\circ f_{\delta\gamma} = \mu_\gamma$ e $\mu_\delta\circ f_{\delta\beta} = \mu_\beta$. Daí segue que $\mu_\gamma\circ f_{\gamma\alpha} = \mu_\delta\circ f_{\delta\gamma}\circ f_{\gamma\alpha} =$

$= \mu_\delta \circ f_{\delta\alpha} = \mu_\delta \circ f_{\delta\beta} \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha}$. Logo a definição é boa. Além disso, mostramos que, se $\alpha \in I$, $\beta \in J$ e $\alpha \leq_I \beta$, então $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha}$.

Falta mostrar que, se $\alpha \in I$, $\beta \in I$ e $\alpha \leq_I \beta$, então $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha}$. Ora, $\exists \alpha' \in J$ t.q. $\alpha \leq_I \alpha'$ e $\exists \beta' \in J$ t.q. $\beta \leq_I \beta'$, e como J é filtrante à direita, $\exists \gamma \in J$ t.q. $\alpha' \leq_J \gamma$, $\beta' \leq_J \gamma$ $\therefore$ $\alpha' \leq_I \gamma$, $\beta' \leq_I \gamma$. Logo, $\alpha \leq_I \gamma$, $\beta \leq_I \gamma$, mas $\gamma \in J$, donde pelo que vimos antes, $\mu_\alpha = \mu_\gamma \circ f_{\gamma\alpha}$, $\mu_\beta = \mu_\gamma \circ f_{\gamma\beta}$ e portanto, $\mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\gamma \circ f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} =$

$= \mu_\gamma \circ f_{\gamma\alpha} = \mu_\alpha$.

Então, por L_2 (relativamente a $(E, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$), existe um único morfismo $f: E \longrightarrow H$ t.q. $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Em particular, temos então $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in J$. Se $g: E \longrightarrow H$ é um morfismo t.q. $g \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in J$, então, se $\alpha \in I$, $\exists \beta \in J$ com $\alpha \leq_I \beta$ $\therefore$ $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha}$. Mas $\mu_\beta = g \circ f_\beta$, pois $\beta \in J$, logo $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g \circ f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g \circ f_\alpha$ $\therefore$ $g \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Mas, então, por L_2 (relativamente a $(E, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ temos que $f = g$ $\therefore$ existe um único morfismo $f: E \longrightarrow H$ t.q. $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in J$, i.é, está verificada a condição L_2 relativamente a $(E, (f_\alpha)_{\alpha \in J})$.

b) Primeiro verifiquemos que é boa a definição de f_α, se $\alpha \in I$: se $\alpha \leq_I \beta$, $\alpha \leq_I \gamma$, $\beta \in J$, $\gamma \in J$, seja $\delta \in J$ t.q. $\beta \leq_J \delta$, $\gamma \leq_J \delta$: então por L_1 (relativamente a $(E, (f_\alpha)_{\alpha \in J})$ temos: $f_\delta \circ f_{\delta\beta} = f_\beta$, $f_\delta \circ f_{\delta\gamma} = f_\gamma$ e $\therefore$ $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\delta \circ f_{\delta\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_\delta \circ f_{\delta\alpha} = f_\delta \circ f_{\delta\gamma} \circ f_{\gamma\alpha} = f_\gamma \circ f_{\gamma\alpha}$

$\therefore$ a definição é boa. Além disso, se $\alpha \leq_I \beta$, sabemos que $\exists$ $\alpha' \in J$, $\beta' \in J$ t.q. $\alpha \leq_I \alpha'$, $\beta \leq_I \beta'$; e $\exists \gamma \in J$ t.q. $\alpha' \leq_J \gamma$, $\beta' \leq_J \gamma$ $\therefore$ $\alpha' \leq_I \gamma$, $\beta' \leq_I \gamma$, donde $\alpha \leq_I \gamma$, $\beta \leq_I \gamma$, com $\gamma \in J$, logo $f_\gamma \circ f_{\gamma\alpha} = f_\alpha$,

$f_\gamma \circ f_{\gamma\beta} = f_\beta$. Então $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\gamma \circ f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_\gamma \circ f_{\gamma\alpha} = f_\alpha$. Logo, a

condição L_1 está verificada, relativamente a $(E, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$.

Seja H um objeto de $\mathcal{C}$, e $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de morfismo $\mu_\alpha : E_\alpha \longrightarrow H$ t.q. $\alpha \leq_I \beta \Rightarrow \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$. Então temos em particular que $(\mu_\alpha)_{\alpha \in J}$ é uma família de morfismos t.q. $\alpha \leq_J \beta \Longrightarrow \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$, donde, por L_2 (relativamente a $(E,(f_\alpha)_{\alpha\in J})$) temos: existe um único morfismo $f: E \longrightarrow H$ t.q. $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in J$. Então, se $\alpha \in I$, seja $\beta \in J$ t.q. $\alpha \leq_I \beta$: temos $f_\alpha = f_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ e $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ ∴

$f \circ f_\alpha = f \circ f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$ ∴ $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$.
Como evidentemente tal morfismo é único, está verificada a condição L_2 para $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$.

<u>Observações:</u>

1) Se I é um conjunto pré-ordenado filtrante à direita, não vazio, consideremos em I a relação R: $\alpha R \beta \Longleftrightarrow \alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$. Como $\leq$ é reflexiva segue que R é reflexiva; é evidente que R é simétrica. Além disso, R é transitiva: $\alpha R \beta$ e $\beta R \gamma \Rightarrow$ $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \alpha$, $\beta \leq \gamma$, $\gamma \leq \beta \Longrightarrow \alpha \leq \gamma$ e $\gamma \leq \alpha$ pois $\leq$ é transitiva.

∴ $\alpha R \gamma$. Logo, R é uma relação de equivalência, e determina uma partição de I. Se tomarmos um elemento em cada classe de equivalência (o que é possível pelo axioma de escolha), formando um conjunto $J \subset I$, então a pré-ordem de I induz uma <u>ordem</u> sôbre J, como é fácil de ver, e é claro que J é filtrante à direita e cofinal em I. Logo, a proposição 4 mostra (em sentido vago, mas que poderia ser tornado preciso, provàvelmente) que a noção de limite indutivo obtida pondo em I uma pré-ordem filtrante à direita, não é mais geral do que a que se obtém munindo I de uma ordem filtrante à direita. Devido a isso, <u>nas próximas considerações, suporemos sempre que I é ordenado filtrante à direita.</u>

2) Se α e β forem elementos maximais em I, $\exists \gamma \in I$ t.q.

$\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ ∴ $\alpha = \gamma$, $\beta = \gamma$ ∴ $\alpha = \beta$. Logo, I tem no máximo um elemento maximal. Se α_0 fôr um elemento maximal de I e $\beta \in I$, $\exists \gamma \in I$, com $\alpha_0 \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ ∴ $\alpha_0 = \gamma$ ∴ $\beta \leq \alpha_0$. Logo, se I tiver um elemento maximal α_0, terá um máximo α_0.

Seja $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo sôbre uma categoria $\mathcal{C}$, α_0 o máximo de I. Então (E_{α_0}, f_α) onde $f_\alpha = f_{\alpha_0\alpha}$, é limite indutivo: se $\alpha \leq \beta$, temos $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_{\alpha_0\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_{\alpha_0\alpha} = f_\alpha$ ∴ L_1 está verificada. Se H é objeto de $\mathcal{C}$, e $\mu_\alpha : E_\alpha \to H$ morfismos t.q. $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \mu_\alpha = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha}$, então, fazendo $f = \mu_{\alpha_0} : E_{\alpha_0} \to H$, temos:
$f \circ f_\alpha = \mu_{\alpha_0} \circ f_\alpha = \mu_{\alpha_0} \circ f_{\alpha_0\alpha} = \mu_\alpha$, $\forall \alpha \in I$. Além disso, se $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, teremos $f \circ f_{\alpha_0} = \mu_{\alpha_0}$, e como $f_{\alpha_0} = f_{\alpha_0\alpha_0} = 1_{E_{\alpha_0}}$, segue que $f = \mu_{\alpha_0}$ ∴ é único tal morfismo f. Logo, L_2 está verificada. Isso mostra que não há interêsse em considerar limites indutivos, quando I possui elemento maximal (e ∴ máximo).

3) Se I fôr finito, é claro que possui máximo. Logo, pela observação anterior, não há interêsse em tais limites indutivos.

4) Pode suceder que I tenha potência superior a $\aleph_0$ mas exista J cofinal em I, J enumerável e ∴ com o "mesmo" limite indutivo. Mais adiante (§4) veremos que há mais interêsse em considerar apenas tipos especiais de conjuntos ordenados, como sequências ordenadas, por exemplo. Isso é devido à simplificação de certas demonstrações e também porque nêsses casos preservam-se mais propriedades. A observação que acabamos de fazer mostra que tal restrição não é tão grande como pode parecer à primeira vista, o que não quer dizer que não seja considerável. A proposição seguinte esclarece mais êsse fato.

Proposição 5: Se I é um conjunto ordenado filtrante à direita t.q. existe $H \subset I$ enumerável e cofinal em I, então existe $J \subset H$, J cofinal em H (e $\therefore$ em I) com a ordem induzida pela de H (e $\therefore$ pela de I), sendo J uma sequência ordenada (i. é, J é isomorfo a $\mathbb{N}$, com sua ordem usual, ou a $\{1, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$).

Dem: Como H é enumerável, $\exists$ uma aplicação $f : \mathbb{N} \to H$ bijetora. Designemos $f(n)$ por α_n. Seja $\beta_0 = \alpha_0$ e se tiver sido definida β_{n-1}, seja β_n um elemento qualquer de H, t.q. $\beta_n \geq \beta_{n-1}$ e $\beta_n \geq \alpha_n$. Seja J o conjunto dos β_n: é claro que $\beta_{n-1} \leq \beta_n$ $\forall n \geq 1$, donde J, com a ordem induzida pela de H, é uma sequência ordenada ($\therefore$ é ordenado, filtrante à direita). Além disso, J é cofinal em H: se $\alpha \in I$, $\alpha = \alpha_n$, para algum n, $\therefore$ $\alpha_n \leq \beta_n$, com $\beta_n \in J$. É claro que então J é cofinal em I.

4. Limite indutivo de conjuntos.

Proposição 6: A categoria dos conjuntos tem limites indutivos.

Dem: Seja $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de conjuntos, e $(\coprod_{\alpha \in I} E_\alpha, j_\alpha)$ a soma direta da família $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$, isto é, $\coprod_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \{\alpha\} \times E_\alpha$; $j_\beta : E_\beta \to \coprod_{\alpha \in I} E_\alpha$ definida por $j_\beta(x) = (\beta, x)$.

Consideremos sôbre $\coprod_{\alpha \in I} E_\alpha$ a relação de equivalência $(\alpha, x) \sim (\beta, y) \iff \exists \lambda \in I$ t.q. $\alpha \leq \lambda$, $\beta \leq \lambda$ e $f_{\lambda\alpha}(x) = f_{\lambda\beta}(y)$. A reflexividade e simetria são evidentes. A transitividade decorre de I ser filtrante à direita. Seja $\pi : \coprod_{\alpha \in I} E_\alpha \to \coprod_{\alpha \in I} E_\alpha / \sim = M$ a aplicação canônica, e se $\beta \in I$ seja $f_\beta = \pi \circ j_\beta$. Verifiquemos que $(M, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ é limite indutivo do sistema dado.

LI 1: $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha : E_\alpha \to M$ se $\alpha \leq \beta$. Seja $x \in E_\alpha$, então $f_\alpha(x) = \pi j_\alpha(x) = \pi(\alpha, x) =$ classe de (α, x); $f_\beta \circ f_{\beta\alpha}(x) = \pi j_\beta f_{\beta\alpha}(x) = \pi(\beta, f_{\beta\alpha}(x)) =$ classe de $(\beta, f_{\beta\alpha}(x))$. Devemos mostrar que as classes de (α, x) e de $(\beta, f_{\beta\alpha}(x))$ são a mesma; mas se $\lambda \geq \beta$, temos sempre $f_{\lambda\alpha}(x) = f_{\lambda\beta} f_{\beta\alpha}(x)$, o que mostra que as classes são iguais. LI2: Seja M' um conjunto, $(f'_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma família de aplicações $f'_\alpha : E_\alpha \longrightarrow M'$ t.q. $\mu \leq \nu \Longrightarrow f'_\mu = f'_\nu \circ f_{\nu\mu}$. Então, pela propriedade da soma, $\exists f' : \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \longrightarrow M'$ t.q. $f' \circ j_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Se f' fôr constante sôbre as classes módulo $\sim$, poderemos então passá-la ao quociente, obtendo $f : M \longrightarrow M'$ t.q. $f \circ \pi = f'$ $\therefore$ $f \circ f_\alpha = f \circ \pi \circ j_\alpha = f' \circ j_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Ora, se $\pi(\alpha, x) = \pi(\beta, y)$, então $\exists \lambda \in I$, $\lambda \geq \alpha$, $\lambda \geq \beta$ t.q. $f_{\lambda\alpha}(x) = f_{\lambda\beta}(y)$, donde $f'_\lambda f_{\lambda\alpha}(x) = f'_\lambda f_{\lambda\beta}(y)$ $\therefore$ $f'_\alpha(x) = f'_\beta(y)$ $\therefore$ $f'(\alpha, x) = f'(\beta, y)$, o que mostra que f' é constante sôbre as classes módulo $\sim$. Se $g : M \longrightarrow M'$ fôr t.q. $g \circ f_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, então $(g \circ \pi) \circ j_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, mas pela propriedade da soma, só existe uma aplicação $f' : \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \longrightarrow M'$ t.q. $f' \circ j_\alpha = f'_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, donde segue que $g \circ \pi = f' = f \circ \pi$, e como π é sobrejetora, de $g \circ \pi = f \circ \pi$ obtemos $g = f$. Logo, está verificada LI2.

<u>Observação</u>: Note-se que $E = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(E_\alpha)$, se (E, f_α) é limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$. E isso vale para todo limite indutivo (E, f_α) em virtude da proposição 1a.

<u>Lema 1</u>: Seja $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de conjuntos; (E, f_α) um seu limite indutivo. Então:

a) Se $(x^i)_{1\leq i\leq n}$ é um sistema finito de elementos de E, então, $\exists \alpha \in I$ e um sistema finito $(x^i_\alpha)_{1\leq i\leq n}$ de elementos de E_α t.q. $x^i = f_\alpha(x^i_\alpha)$ $\forall i$, $1\leq i\leq n$.

b) Se $(y^i_\alpha)_{1\leq i\leq n}$ é um sistema finito de elementos de E_α, e se $f_\alpha(y^i_\alpha) = f_\alpha(y^j_\alpha)$ para todo par (i,j), então $\exists \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(y^i_\alpha) = f_{\beta\alpha}(y^j_\alpha)$ para todo par (i,j).

<u>Dem</u>: a) Pela observação, para cada i, $\exists \beta_i \in I$, $z_{\beta_i} \in E_{\beta_i}$ t.q. $x^i = f_{\beta_i}(z_{\beta_i})$. Tomemos $\alpha \in I$, $\alpha \geq \beta_i$, $\forall i$, $1\leq i\leq n$ (é possível por I ser filtrante à direita) e $x^i_\alpha = f_{\alpha\beta_i}(z_{\beta_i})$; então $f_\alpha(x^i_\alpha) = f_\alpha f_{\alpha\beta_i}(z_{\beta_i}) = f_{\beta_i}(z_{\beta_i}) = x^i$, $\forall i$, $1\leq i\leq n$.

b) Por definição de E na proposição 6, como $f_\alpha = \pi \circ j_\alpha$, para todo par (i,j) teremos $f_\alpha(y^i_\alpha) = f_\alpha(y^j_\alpha)$ $\therefore$ $\pi(\alpha, y^i_\alpha) = \pi(\alpha, y^j_\alpha)$ $\therefore$

$(\alpha, y^i_\alpha) \sim (\alpha, y^j_\alpha)$ ∴ $\exists\, \gamma_{ij} \in I$, com $\gamma_{ij} \geq \alpha$ e $f_{\gamma_{ij}\alpha}(y^i_\alpha) = f_{\gamma_{ij}\alpha}(y^j_\alpha)$

Tomemos $\beta \geq \gamma_{ij}$ para todos os pares (i,j) (que são em número finito): usando as relações $f_{\beta\alpha} = f_{\beta\gamma_{ij}} \circ f_{\gamma_{ij}\alpha}$ segue ~~que~~ $f_{\beta\alpha}(y^i_\alpha) = f_{\beta\alpha}(y^j_\alpha)$ para todos os pares (i,j).

Corolário: Com as mesmas notações se $(z_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$ é uma família finita com $z_{\lambda_i} \in E_{\lambda_i}$ e $f_{\lambda_i}(z_{\lambda_i}) = f_{\lambda_j}(z_{\lambda_j})$ para todo par (i,j) então $\exists\, \beta \in I$ t.q. $\beta \geq \lambda_i$ para todo i, t.q. $f_{\beta\lambda_i}(z_{\lambda_i}) = f_{\beta\lambda_j}(z_{\lambda_j})$ para todo par (i,j).

Dem.: Análoga à demonstração do lema 1 b.

Proposição 7: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos, (E, f_α) seu limite indutivo, H um conjunto e $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de aplicações $\mu_\alpha : E_\alpha \to$ t.q. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$, sabemos que existe uma única aplicação $\mu : E \to H$ t.q. $\mu \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ (1.I.2). Então:

a) μ é sobrejetora $\Leftrightarrow H = \bigcup_{\alpha \in I} \mu_\alpha(E_\alpha)$

b) μ é injetora $\Leftrightarrow \forall \alpha \in I$, as relações $x \in E_\alpha$, $y \in E_\alpha$, $\mu_\alpha(x) = \mu_\alpha(y)$ acarretam: $\exists\, \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$.

Dem: a) $\Rightarrow$: Lembremos que $E = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha)$. Então $H = \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in I} \mu \circ f_\alpha(E_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} \mu_\alpha(E_\alpha)$.

$\Leftarrow$: Se $y \in H$, $\exists\, \alpha \in I$, $x_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $\mu_\alpha(x_\alpha) = y$. Então chamando $x = f_\alpha(x_\alpha)$, temos: $\mu(x) = \mu f_\alpha(x_\alpha) = \mu_\alpha(x_\alpha) = y$, donde μ é sobrejetora.

b) $\Rightarrow$: Se $x \in E_\alpha$, $y \in E_\alpha$, $\mu_\alpha(x) = \mu_\alpha(y)$, então $\mu \circ f_\alpha(x) = \mu \circ f_\alpha(y)$ donde $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$, por μ ser injetora, e a conclusão segue do lema 1 b.

$\Leftarrow$: seja $\mu(v) = \mu(w)$; por lema 1 a, $\exists\, \alpha \in I$, $x, y \in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x) = v$, $f_\alpha(y) = w$. Então $\mu_\alpha(x) = \mu f_\alpha(x) = \mu(v) = \mu(w) = \mu f_\alpha(y) = \mu_\alpha(y)$. Então por hipótese, $\exists\, \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$ e como $f_\alpha = f_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ segue que $v = f_\alpha(x) = f_\alpha(y) = w$.

Proposição 8: Sejam $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ e $(I', E'_{\alpha'}, f'_{\beta'\alpha'})$ dois sistemas indutivos de conjuntos, de limites indutivos respectivamente (E, f_α) e $(E', f'_{\alpha'})$. Seja (φ, μ_α) um morfismo do 1º no 2º t.q. $\varphi(I)$ seja cofinal em I' e seja $\mu: E \to E'$ o limite indutivo do morfismo (φ, μ_α). Então:

a) μ_α injetora $\forall \alpha \in I \Rightarrow \mu$ injetora.

b) μ_α sobrejetora $\forall \alpha \in I \Rightarrow \mu$ sobrejetora.

<u>Dem.</u>: a) Sejam as μ_α injetoras. Chamemos $w_\alpha = f'_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha : E_\alpha \to E'$; se $\alpha \leq \beta$, temos: $w_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f'_{\varphi(\beta)} \circ \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f'_{\varphi(\beta)} \circ f'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha = f'_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha = w_\alpha$. Ora, μ é o único morfismo $\mu: E \to E'$ t.q. $\mu \circ f_\alpha = w_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Logo pela proposição anterior, parte b, μ será injetora se, $x \in E_\alpha$, $y \in E_\alpha$, $w_\alpha(x) = f'_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha(x) = f'_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha(y) = w_\alpha(y)$ acarretar $\exists \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$. Ora, a hipótese implica, pelo lema 4b, (relativo a $(I', E'_{\alpha'}, f'_{\beta'\alpha'})$), que $\exists \beta' \geq \varphi(\alpha)$ t.q. $f'_{\beta'\varphi(\alpha)} \mu_\alpha(x) = f'_{\beta'\varphi(\alpha)}(y)$ $\therefore$ $f'_{\gamma'\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha(x) = f'_{\gamma'\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha(y)$ $\forall \gamma' \geq \beta'$, e sendo $\varphi(I)$ cofinal em I', $\exists \gamma' \geq \beta'$, com $\gamma' = \varphi(\gamma)$, $\gamma \in I$ e $\therefore$ tomando $\beta \geq \alpha$, $\beta \geq \gamma$, segue que $\varphi(\beta) \geq \varphi(\gamma) = \gamma' \geq \beta'$, logo $f'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)} \mu_\alpha(x) = f'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)} \mu_\alpha(y)$, ou seja, $\mu_\beta f_{\beta\alpha}(x) = \mu_\beta f_{\beta\alpha}(y)$, donde $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$ pois μ_β é injetora.

b) Sejam as μ_α sobrejetoras. Como $\varphi(I)$ é cofinal em I' (e trivialmente filtrante à direita), segue, pela proposição 4a, que $(\varphi(I), E'_{\varphi(\alpha)}, f'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)})$ é um sistema indutivo de limite indutivo $(E', f'_{\varphi(\alpha)})$. Então, temos: $E' = \bigcup_{\alpha \in I} f'_{\varphi(\alpha)}(E'_{\varphi(\alpha)}) = \bigcup_{\alpha \in I} f'_{\varphi(\alpha)} \mu_\alpha(E_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} \mu f_\alpha(E_\alpha) = \mu\left(\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha)\right) = \mu(E)$.

<u>Proposição 9</u>: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos, de limite indutivo (E, f_α), $S_\alpha \subset E_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, $f_{\beta\alpha}(S_\alpha) \subset S_\beta$, se $\alpha \leq \beta$, então chamando $\bar{f}_{\beta\alpha} = f_{\beta\alpha}|_{S_\alpha} : S_\alpha \to S_\beta$, temos que $(I, S_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos, de lim. indutivo $(S, \bar{f}_\alpha)$ onde $S = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(S_\alpha)$ e $\bar{f}_\alpha = f_\alpha|_{S_\alpha} : S_\alpha \to S$.

<u>Dem.</u>: Seja $(\bar{S}, f^*_\alpha)$ um limite indutivo de $(I, S_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$. Temos que $(1_I, i_\alpha)$ é um morfismo do sistema indutivo entre $(I, S_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$

e $(I, S_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$, onde $i_\alpha : S_\alpha \longrightarrow E_\alpha$ é a inclusão canônica.
Seja $i : \bar{S} \longrightarrow E$ seu limite indutivo. Como i_α é injetora $\forall \alpha \in I$, segue pela proposição anterior parte a, que i é injetora.
Além disso,

$$\begin{array}{ccc} S_\alpha & \xrightarrow{\bar{f}_\alpha} & \bar{S} \\ \downarrow{\scriptstyle i_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ E_\alpha & \xrightarrow[f_\alpha]{} & E \end{array}$$

é comutativo $\forall \alpha \in I$. Se chamarmos $S = i(\bar{S})$, teremos: $i : \bar{S} \longrightarrow S$ é isomorfismo de conjunto logo, $(S, i \circ \bar{f}_\alpha) =$ $= (S, \bar{f}_\alpha)$ é limite indutivo de $(I, S_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$, pela proposição ib.
Logo, $S = \bigcup_{\alpha \in I} \bar{f}_\alpha(S_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(S_\alpha)$.

<u>Corolário</u>: Sejam $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, $(I', E'_{\alpha'}, f'_{\beta'\alpha'})$ dois sistemas indutivos de conjuntos, de limites indutivos respectivamente (E, f_α) e $(E', f'_{\alpha'})$; seja (φ, μ_α) um morfismo de sistema indutivo do 1º no 2º, t.q. $\varphi(I)$ seja cofinal em I', e seja $\mu : E \longrightarrow E'$ seu lim. indutivo.
Então:

a) Se $M_\alpha \subset E_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, $f_{\beta\alpha}(M_\alpha) \subset M_\beta$ se $\alpha \leq \beta$, então $(\varphi(I), \mu_\alpha(M_\alpha), \bar{f}'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)})$ é um sistema indutivo de conj. onde $\bar{f}'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)} = f'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}\big|_{\mu_\alpha(M_\alpha)} : \mu_\alpha(M_\alpha) \longrightarrow \mu_\beta(M_\beta)$, $(I, M_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conj., onde $\bar{f}_{\beta\alpha} = f_{\beta\alpha}\big|_{M_\alpha} : M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ e se $(S', \bar{f}'_{\varphi(\alpha)})$ e $(S, \bar{f}_\alpha)$ são os seus limites indutivos, dados pela proposição anterior, então $S' = \mu(S)$.

b) Seja $(a'_{\varphi(\alpha)})_{\alpha \in I}$ uma família t.q. se tem $a'_{\varphi(\alpha)} \in E'_{\varphi(\alpha)}$ $\forall \alpha \in I$, e $f'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}(a'_{\varphi(\alpha)}) = a'_{\varphi(\beta)}$ se $\alpha \leq \beta$. Então $(I, \mu_\alpha^{-1}(\{a'_{\varphi(\alpha)}\}), \bar{f}_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjs., onde

$$\bar{f}_{\beta\alpha}\big|_{\mu_\alpha^{-1}(\{a'_{\varphi(\alpha)}\})} : \mu_\alpha^{-1}(\{a'_{\varphi(\alpha)}\}) \longrightarrow \mu_\beta^{-1}(\{a'_{\varphi(\beta)}\}).$$

Se seu limite indutivo, dado pela proposição anterior, for $(S, \bar{f}_\alpha)$, então $S = \mu^{-1}(\{a'\})$ se designarmos por a' o único elemento de E' imagem canônica de $a'_{\varphi(\alpha)}$ $\forall \alpha \in I$.

<u>Dem</u>: Deixamos ao leitor, pois não usaremos nunca tal resultado neste trabalho.

Proposição 10: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conj., de limite indutivo (E, f_α), então:

a) se $f_{\beta\alpha}$ são injetoras se $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f_\alpha$ são injetoras $\forall \alpha \in I$.

b) se $f_{\beta\alpha}$ são sobrejetoras se $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f_\alpha$ são sobrejetoras $\forall \alpha \in I$.

__Dem__: a) Pelo lema Lb, se $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$, $\exists \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$ donde $x = y$, já que $f_{\beta\alpha}$ é injetora. Logo, f_α é injetora, $\forall \alpha \in I$.

b) Seja $x \in E$, e $\alpha \in I$. Como $E = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha)$, $\exists \beta \in I$, $x_\beta \in E_\beta$ t.q. $f_\beta(x_\beta) = x$. Seja $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$: então, chamando $x_\gamma = f_{\gamma\beta}(x_\beta)$, temos:

$f_\gamma(x_\gamma) = f_\gamma f_{\gamma\beta}(x_\beta) = f_\beta(x_\beta) = x$. Temos então $\gamma \geq \alpha$ e $f_\gamma(x_\gamma) = x$.
Mas, sendo $f_{\gamma\alpha}: E_\alpha \longrightarrow E_\gamma$ sobrejetora, $\exists x_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $f_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = x_\gamma$.
Então, $x = f_\gamma(x_\gamma) = f_\gamma f_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)$. Logo f_α é sobrejetora.

__Observação__: Vale a recíproca de __a__: se f_α são injetoras $\forall \alpha \in I$, então $f_{\beta\alpha}$ são injetoras se $\alpha \leq \beta$. Com efeito: se $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$, então $f_\alpha(x) = f_\beta(f_{\beta\alpha}(x)) = f_\beta(f_{\beta\alpha}(y)) = f_\alpha(y)$ $\therefore$ $x = y$.

__Exemplo de limite indutivo de conjunto__: Seja $\mathcal{A}$ uma coleção não vazia de subconjuntos dum conjunto dado F, ordenado por inclusão, t.q. $\mathcal{A}$ seja filtrante à direita (i.é, se $A, B \in \mathcal{A}$, então $\exists C \in \mathcal{A}$, t.q. $A \subset C$ e $B \subset C$) e t.q. $\bigcup \mathcal{A} = F$. Então $(\mathcal{A}, (\alpha_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, (i_{\beta\alpha})_{\alpha \subset \beta})$ é um sistema indutivo de conjuntos, onde $i_{\alpha\beta}: \alpha \longrightarrow \beta$ é a inclusão canônica e, (F, i_α) é seu lim. indutivo, se $i_\alpha: \alpha \longrightarrow F$ fôr a inclusão canônica. A verificação detalhada é longa mas trivial. Um caso em que $\mathcal{A}$ é filtrante à direita e $\bigcup \mathcal{A} = F$ é o que se tem quando $\mathcal{A}$ é a classe dos subconjuntos finitos de F. Temos então: todo conjunto é limite indutivo de suas partes finitas.

Reciprocamente, se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos t.q. $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f_{\beta\alpha}$ injetora, então, pela proposição 10a, se (E, f_α) é seu limite indutivo, temos que f_α é injetora $\forall \alpha \in I$. Pode-se então identificar cada E_α com $f_\alpha(E_\alpha)$ e

__Proposição 10__: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conj., de limite indutivo (E, f_α), então:

a) se $f_{\beta\alpha}$ são injetoras se $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f_\alpha$ são injetoras $\forall \alpha \in I$.

b) se $f_{\beta\alpha}$ são sobrejetoras se $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f_\alpha$ são sobrejetoras $\forall \alpha \in I$.

__Dem__: a) Pelo lema 1b, se $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$, $\exists \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$ donde $x = y$, já que $f_{\beta\alpha}$ é injetora. Logo, f_α é injetora, $\forall \alpha \in I$.

b) Seja $x \in E$, e $\alpha \in I$. Como $E = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha)$, $\exists \beta \in I$, $x_\beta \in E_\beta$ t.q. $f_\beta(x_\beta) = x$. Seja $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$: então, chamando $x_\gamma = f_{\gamma\beta}(x_\beta)$, temos:

$f_\gamma(x_\gamma) = f_\gamma f_{\gamma\beta}(x_\beta) = f_\beta(x_\beta) = x$. Temos então $\gamma \geq \alpha$ e $f_\gamma(x_\gamma) = x$.
Mas, sendo $f_{\gamma\alpha}: E_\alpha \longrightarrow E_\gamma$ sobrejetora, $\exists x_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $f_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = x_\gamma$.
Então, $x = f_\gamma(x_\gamma) = f_\gamma f_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)$. Logo f_α é sobrejetora.

__Observação__: Vale a recíproca de a: se f_α são injetoras $\forall \alpha \in I$, então $f_{\beta\alpha}$ são injetoras se $\alpha \leq \beta$. Com efeito: se $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$, então $f_\alpha(x) = f_\beta(f_{\beta\alpha}(x)) = f_\beta(f_{\beta\alpha}(y)) = f_\alpha(y)$ $\therefore$ $x = y$.

__Exemplo de limite indutivo de conjunto__: Seja $\mathcal{A}$ uma coleção não vazia de subconjuntos dum conjunto dado F, ordenado por inclusão, t.q. $\mathcal{A}$ seja filtrante à direita (i.é, se $A, B \in \mathcal{A}$, então $\exists C \in \mathcal{A}$, t.q. $A \subset C$ e $B \subset C$) e t.q. $\bigcup \mathcal{A} = F$. Então $(\mathcal{A}, (\alpha_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, (i_{\beta\alpha})_{\alpha \subset \beta})$ é um sistema indutivo de conjuntos, onde $i_{\alpha\beta}: \alpha \longrightarrow \beta$ é a inclusão canônica e, (F, i_α) é seu lim. indutivo, se $i_\alpha: \alpha \longrightarrow F$ fôr a inclusão canônica. A verificação detalhada é longa mas trivial. Um caso em que $\mathcal{A}$ é filtrante à direita e $\bigcup \mathcal{A} = F$ é o que se tem quando $\mathcal{A}$ é a classe dos subconjuntos finitos de F. Temos então: todo conjunto é limite indutivo de suas partes finitas.

Reciprocamente, se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos t.q. $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f_{\beta\alpha}$ injetora, então, pela proposição 10a, se (E, f_α) é seu limite indutivo, temos que f_α é injetora $\forall \alpha \in I$. Pode-se então identificar cada E_α com $f_\alpha(E_\alpha)$ e considerar E como reunião dos E_α. De modo mais preciso: seja $F_\alpha = f_\alpha(E_\alpha)$; se $\alpha \leq \beta$, temos $F_\alpha = f_\alpha(E_\alpha) = f_\beta f_{\beta\alpha}(E_\alpha) \subset f_\beta(E_\beta) = F_\beta$ ∴ $(I, F_\alpha, i_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos onde $i_{\beta\alpha}: F_\alpha \to F_\beta$ é a inclusão canônica, e como $\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha) = E$, segue que E é a reunião dos F_α e é fácil ver que (E, i_α) é seu limite indutivo, se $i_\alpha: F_\alpha \to F$ fôr a inclusão canônica. Além disso, temos: $(1_I, f_\alpha^*)$ é um morfismo de sistema indutivo, de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ em $(I, F_\alpha, i_{\beta\alpha})$, onde $f_\alpha^*: E_\alpha \to F_\alpha$, é obtida de f_α.

Observação: Na realidade, do lema 1 à proposição 10, tôdas as demonstrações foram feitas apenas para um limite indutivo: o considerado na proposição 6, obtido por meio de $\coprod E_\alpha / \sim$. No entanto, em virtude da proposição 1, os resultados valem para todos os limites indutivos como é fácil de verificar, caso por caso.

Proposição 11: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ e $(I, E'_\alpha, f'_{\beta\alpha})$ são dois sistemas indutivos de conjuntos com o mesmo conjunto pré-ordenado filtrante à direita I, de limites indutivos (E, f_α) e (E', f'_α), respectivamente, então $(I, E_\alpha \times E'_\alpha, f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos: seja (F, g_α) seu limite indutivo. Se $\alpha \leq \beta$, então $f_\alpha \times f'_\alpha = (f_\beta \times f'_\beta) \circ (f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha})$, donde, pela proposição 2, existe uma única aplicação $\mu: F \to E \times E'$ t.q. $\mu \circ g_\alpha = f_\alpha \times f'_\alpha$. Então μ é bijetora.

Dem: É claro que $(I, E_\alpha \times E'_\alpha, f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos e $(f_\beta \times f'_\beta) \circ (f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha}) = (f_\beta \circ f_{\beta\alpha}) \times (f'_\beta \circ f'_{\beta\alpha}) = f_\alpha \times f'_\alpha$. Usaremos a proposição 7: se $E \times E' = \bigcup_{\alpha\in I} (f_\alpha \times f'_\alpha)(E_\alpha \times E'_\alpha)$ então μ será sobrejetora. Ora, se $(x, x') \in E \times E'$, sabemos (lema 1.a) que $\exists \alpha \in I$, $x_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha) = x$ e $\exists \beta \in I$, $x'_\beta \in E'_\beta$ t.q. $f'_\beta(x'_\beta) = x'$. Seja $\gamma \in I$, $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$, $x_\gamma = f_{\gamma\alpha}(x_\alpha)$, $x'_\gamma = f'_{\gamma\beta}(x'_\beta)$; então $f_\gamma(x_\gamma) = f_\gamma f_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha) = x$, $f'_\gamma(x'_\gamma) = f'_\gamma f'_{\gamma\beta}(x'_\beta) = f'_\beta(x'_\beta) = x'$. Logo, $(f_\gamma \times f'_\gamma)(x_\gamma, x'_\gamma) = (x, x')$, donde $E \times E' = \bigcup_{\alpha \in I} (f_\alpha \times f'_\alpha)(E_\alpha \times E'_\alpha)$.

Se $(x,x')\in E_\alpha\times E'_\alpha$, $(y,y')\in E_\alpha\times E'_\alpha$, são t.q. $(f_\alpha\times f'_\alpha)(x,x')=$
$=(f_\alpha\times f'_\alpha)(y,y')$, devemos mostrar que $\exists\,\delta\geq\alpha$ t.q. $(f_{\delta\alpha}\times f'_{\delta\alpha})(x,x')=$
$=(f_{\delta\alpha}\times f'_{\delta\alpha})(y,y')$ para provar que μ é injetora (proposição 7).
Ora, temos $f_\alpha(x)=f_\alpha(y)$, $f'_\alpha(x')=f'_\alpha(y')$ donde, pelo lema 1b, $\exists\beta\geq\alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x)=f_{\beta\alpha}(y)$, $\exists\gamma\geq\alpha$ t.q. $f'_{\gamma\alpha}(x')=f'_{\gamma\alpha}(y')$. Seja $\delta\geq\beta$, $\delta\geq\gamma$: é fácil de ver que $f_{\delta\alpha}(x)=f_{\delta\alpha}(y)$, $f'_{\delta\alpha}(x')=f'_{\delta\alpha}(y')$
$\therefore (f_{\delta\alpha}\times f'_{\delta\alpha})(x,x')=(f_{\delta\alpha}\times f'_{\delta\alpha})(y,y')$.

Corolário 1: Se $(I,E_\alpha,f_{\beta\alpha})$ e $(I,E'_\alpha,f'_{\beta\alpha})$ são dois sistemas indutivos de conjuntos com o mesmo conjunto pré-ordenado filtrante à direita I, de lim. indutivos (E,f_α) e (E',f'_α) respectivamente, então $(I,E_\alpha\times E'_\alpha,f_{\beta\alpha}\times f'_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos de lim. indutivo $(E\times E',f_\alpha\times f'_\alpha)$.

Dem: Segue da proposição anterior e da proposição 1 b.

Observação: Sempre consideraremos como lim. indutivo de $(I,E_\alpha\times E'_\alpha,f_{\beta\alpha}\times f'_{\beta\alpha})$ o $(E\times E',f_\alpha\times f'_\alpha)$.

Corolário 2. Com as notações do corolário 1, se $(J,F_{\alpha'},g_{\beta'\alpha'})$ e $(J,F'_{\alpha'},g'_{\beta'\alpha'})$ são sistemas indutivos de conjuntos, de lim. indutivos respectivamente $(F,g_{\alpha'})$ e $(F',g'_{\alpha'})$; $(\varphi,\mu_\alpha):(I,E_\alpha,f_{\beta\alpha})\longrightarrow(J,F_{\alpha'},g_{\beta'\alpha'})$ e $(\varphi,\mu'_\alpha):(I,E'_\alpha,f'_{\beta\alpha})\longrightarrow(J,F'_{\alpha'},g'_{\beta'\alpha'})$ são morfismos de sistemas indutivos de conjuntos, de limites respectivamente $\mu:E\longrightarrow F$ e $\mu':E'\longrightarrow F'$, então $(\varphi,\mu_\alpha\times\mu'_\alpha):(I,E_\alpha\times E'_\alpha,f_{\beta\alpha}\times f'_{\beta\alpha})\longrightarrow(J,F_{\alpha'}\times F'_{\alpha'},g_{\beta'\alpha'}\times g'_{\beta'\alpha'})$ é um morfismo de sistemas indut. de conj. e seu limite é $\mu\times\mu':E\times E'\longrightarrow F\times F'$.

Dem: $(g_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}\times g'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)})\circ(\mu_\alpha\times\mu'_\alpha)=(g_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}\circ\mu_\alpha)\times(g'_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}\circ\mu'_\alpha)=$
$=(\mu_\beta\circ f_{\beta\alpha})\times(\mu'_\beta\circ f'_{\beta\alpha})=(\mu_\beta\times\mu'_\beta)\circ(f_{\beta\alpha}\times f'_{\beta\alpha})\;\therefore\;(\varphi,\mu_\alpha\times\mu'_\alpha)$ é um morfismo de sistema indutivo de conjunto.

Por outro lado, $(\mu\times\mu')\circ(f_\alpha\times f'_\alpha)=(\mu\circ f_\alpha)\times(\mu'\circ f'_\alpha)=(g_{\varphi(\alpha)}\circ\mu_\alpha)\times(g'_{\varphi(\alpha)}\circ\mu'_\alpha)=$
$=(g_{\varphi(\alpha)}\times g'_{\varphi(\alpha)})\circ(\mu_\alpha\times\mu'_\alpha)$ o que, juntamente com a unicidade que a prop. 2 afirma, mostra que $\mu\times\mu'$ é limite indutivo de $(\varphi,\mu_\alpha\times\mu'_\alpha)$.

Não estudaremos neste trabalho os duplos limites indutivos, pois não têm nenhuma utilidade para o que desejamos fazer.

§2. Limite indutivo de estruturas algébricas (existência).

Introdução.

Encontramos em Algèbre Chap. I pg. 42 (Structures algébriques) Bourbaki, a seguinte definição de estrutura algébrica: "Chama-se estrutura algébrica sôbre um conj. E, tôda estrutura determinada sôbre E por uma ou mais leis de composição internas entre elementos de E, e uma ou mais leis de composição externas entre domínios de operadores $\Omega, \Theta, \ldots$ e E, estas leis podendo estar sujeitas a satisfazer certas condições (exemplo: associatividade, comutatividade, etc) ou a haver entre elas certas relações (exemplo: distributividade, etc)".

Nêste §, demonstraremos a existência de limites indutivos em "tôda" categoria algébrica, onde por tôda significamos, de modo um tanto vago, que não serão consideradas certas condições de natureza mais específica que podem haver, como por exemplo: estrutura de anel de integridade, de anel nötheriano, etc..

1. Estruturas algébricas com uma só lei de composição interna.

Def.1: Chama-se lei de composição interna sôbre um conjunto E, a uma aplicação $f: E\times E \to E$. Costuma-se denotar $f(x,y)$ por $x \top y$.

Def.2: Se $\top_E$ e $\top_F$ são leis de composição interna sôbre E e F, respectivamente, chamaremos de morfismo de $(E,\top_E)$ em $(F,\top_F)$ à uma aplicação $f: E \to F$ t.q. $f(x \top_E y) = f(x) \top_F f(y)$, $\forall x, y \in E$, i.é, t.q. o diagrama:

$$\begin{tikzcd} E\times E \arrow[r, "\top_E"] \arrow[d, "f\times f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F\times F \arrow[r, "\top_F"'] & F \end{tikzcd}$$

seja comutativo. Denotaremos nesta seção por C_1 a categoria que tem por objetos os pares $(E, \top_E)$, onde $\top_E$ é uma lei de composição interna sôbre E, os morfismos sendo os que acabamos de definir e a composição de morfismos sendo a composição de aplicações.

<u>Proposição 1</u>: A categoria C_1 tem limites indutivos.

<u>Dem</u>: Seja $(I, (E_\alpha, T_\alpha), f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo sôbre C_1. Então $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conj.; seja (E, f_α) seu limite indutivo. Sabemos que $(I, E_\alpha \times E_\alpha, f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos de lim. indutivo $((E \times E), f_\alpha \times f_\alpha)$ (§1.4 - corol. 1 prop. 11). Como, se $\alpha \leq \beta$ tem-se $f_{\beta\alpha}(x_\alpha) T_\beta f_{\beta\alpha}(y_\alpha) = f_{\beta\alpha}(x_\alpha T_\alpha y_\alpha)$, i.é, $T_\beta \circ (f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha}) = f_{\beta\alpha} \circ T_\alpha$, segue que $(1_I, T_\alpha)$ é morfismo entre os sistemas indutivos de conjs. $(I, E_\alpha \times E_\alpha, f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ e $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$. Logo, (§1.3 - prop. 2) existe uma única aplicação de conjunto $T: E \times E \to E$ t.q.

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \times E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha \times f_\alpha"] \arrow[d, "T_\alpha"'] & E \times E \arrow[d, "T"] \\ E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"'] & E \end{tikzcd}$$

seja comutativo $\forall \alpha \in I$, i.é, t.q. $f_\alpha(x_\alpha) T f_\alpha(y_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha T_\alpha y_\alpha)$ $\forall \alpha \in I$. Além disso, pela própria definição de T, segue que f_α é morfismo (de C_1) entre E_α e E, $\forall \alpha \in I$. Logo, L_1 está verificada.

Se $((H, T_H), \mu_\alpha)$, com μ_α morfismo de C_1, é t.q. $\alpha \leq \beta \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \mu_\alpha = \mu_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ então sabemos que existe uma única aplicação de conjuntos (pois (E, f_α) é lim. indut. de conjs.) $f: E \to H$ t.q. $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Ora, se $x, y \in E$, $\exists \lambda \in I$, $x_\lambda, y_\lambda \in E_\lambda$ t.q. $f_\lambda(x_\lambda) = x$, $f_\lambda(y_\lambda) = y$ (§1.4 - lema 1a) $\therefore$ $x T y = f_\lambda(x_\lambda T_\lambda y_\lambda)$ (pela definição de T). Logo, $f(x T y) = f \circ f_\lambda(x_\lambda T_\lambda y_\lambda) = \mu_\lambda(x_\lambda T_\lambda y_\lambda) =$ $= \mu_\lambda(x_\lambda) T_H \mu_\lambda(y_\lambda) = f f_\lambda(x_\lambda) T_H f f_\lambda(y_\lambda) = f(x) T_H f(y)$ e $\therefore$ f é morfismo de E em H. Logo, a condição L_2 está verificada.

<u>Def. 3</u>: Se T é uma lei de composição interna sôbre E, diz-se que T é associativa se, $\forall x, y, z \in E$, tem-se $(x T y) T z = x T (y T z)$.

<u>Def. 4</u>: Se T é uma lei de composição interna sôbre E, diz-se que T é comutativa se, $\forall x, y \in E$, tem-se $x T y = y T x$.

Def 5: Se T é uma lei de composição interna sôbre E, diz-se que $e \in E$ é elemento neutro em relação à T se, $\forall x \in E$, tem-se $e T x = x T e = x$. (É fácil de ver que, se existe, o elemento neutro é necessàriamente único).

Def 6: Se T é uma lei de composição interna sôbre E, que admite elemento neutro e, diz-se que $x' \in E$ é simétrico de $x \in E$ se $x T x' = x' T x = e$. Diz-se que x é simetrizável se existe pelo menos um simétrico de x. (É fácil de ver que, se T é associativa, todo elemento simetrizável admite um único simétrico).

Def 7: Chamaremos categoria dos monóides à que tem por objetos ternas (E, T_E, e) onde T_E é lei de composição interna sôbre E, e é elemento neutro em relação à T_E; e cujos morfismos entre (E, T_E, e_E) e (F, T_F, e_F) são as aplicações de conjuntos $f: E \to F$ t.q. $f(x T_E y) = f(x) T_F f(y)$ $\forall x, y \in E$ e $f(e_E) = e_F$. A composição de morfismos é a composição de aplicações.

Def 8: Chamaremos categoria dos grupos à que tem por objetos os grupos (i.é, conjuntos E, munidos duma lei de composição interna associativa T_E, que admite elemento neutro e e t.q. $\forall x \in E$ é simetrizável) e cujos morfismos são os homomorfismos de grupos (i.é, $f: (E, T_E) \to (F, T_F)$ t.q. $f(x T_E y) = f(x) T_F f(y)$ $\forall x, y \in E$). A composição de morfismos é a composição de aplicações. (É fácil ver que, se $f: (E, T_E) \to (F, T_F)$ é homomorfismo de grupo, então $f(e_E) = e_F$).

Proposição 2: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre C_1, e $((E, T), f_\alpha)$ seu limite indutivo, então:

a) Se $\forall \alpha$, T_α é associativa, então T é associativa.

b) Se $\forall \alpha$, T_α é comutativa, então T é comutativa.

c) Se $\forall \alpha$, existe elemento neutro e_α em relação à T_α e se $f_{\beta\alpha}(e_\alpha) = e_\beta$ se $\alpha \leq \beta$, então existe elemento neutro e em relação à T (a saber: $f_\alpha(e_\alpha)=e$, $\forall\alpha\in I$).

d) Se $\forall\alpha$, existe elemento neutro e_α em relação à T_α e todo elemento de E_α é simetrizável e se $f_{\beta\alpha}(e_\alpha)=e_\beta$ se $\alpha\leq\beta$, então pela parte c), existe elemento neutro e em relação à T. Além disso todo elemento de E é simetrizável.

d') Se as hipóteses, em d) estão satisfeitas, e existe único simétrico de x_α, $\forall x_\alpha\in E_\alpha$ $\forall\alpha$, então existe único simétrico de $x\in E$, $\forall x\in E$, e além disso $f_\alpha(x_\alpha^{-1})=$
$=[f_\alpha(x_\alpha)]^{-1}$.

Dem: a) Sejam $x,y,z\in E$: pelo §1.4 - lema 1a, $\exists\alpha\in I$, $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha)=x$, $f_\alpha(y_\alpha)=y$, $f_\alpha(z_\alpha)=z$. Temos então: $(xTy)Tz=(f_\alpha(x_\alpha)Tf_\alpha(y_\alpha))Tf_\alpha(z_\alpha)=$

$=f_\alpha(x_\alpha T_\alpha y_\alpha)Tf_\alpha(z_\alpha)=f_\alpha((x_\alpha T_\alpha y_\alpha)T_\alpha z_\alpha)=$

$=f_\alpha(x_\alpha T_\alpha(y_\alpha T_\alpha z_\alpha))=f_\alpha(x_\alpha)Tf_\alpha(y_\alpha T_\alpha z_\alpha)=f_\alpha(x_\alpha)T(f_\alpha(y_\alpha)Tf_\alpha(z_\alpha))=$

$=xT(yTz)$ $\therefore$ T é associativa.

b) Sejam $x,y\in E$: pelo §1.4 — lema 1a, $\exists\alpha\in I$, $x_\alpha, y_\alpha\in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha)=x$, $f_\alpha(y_\alpha)=y$. Temos então: $xTy=$
$=f_\alpha(x_\alpha)Tf_\alpha(y_\alpha)=f_\alpha(x_\alpha T_\alpha y_\alpha)=f_\alpha(y_\alpha T_\alpha x_\alpha)=f_\alpha(y_\alpha)Tf_\alpha(x_\alpha)=$
$=yTx$ $\therefore$ T é comutativa.

c) $\forall\alpha,\beta\in I$ $\exists\gamma\in I$, com $\alpha,\beta\leq\gamma$. Temos $f_\gamma(e_\gamma)=f_\gamma f_{\gamma\alpha}(e_\alpha)=$
$=f_\alpha(e_\alpha)$; $f_\gamma(e_\gamma)=f_\gamma f_{\gamma\beta}(e_\beta)=f_\beta(e_\beta)$. Logo $f_\alpha(e_\alpha)=f_\beta(e_\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in I$.

Chamemos $e=f_\alpha(e_\alpha)$, $\forall\alpha\in I$. Então, se $x\in E$, $\exists\alpha\in I$, $x_\alpha\in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha)=x$ (§1.4 - lema 1a.) $\therefore$ $xTe=f_\alpha(x_\alpha)Tf_\alpha(e_\alpha)=$
$=f_\alpha(x_\alpha T_\alpha e_\alpha)=f_\alpha(x_\alpha)=x$; $eTx=f_\alpha(e_\alpha)Tf_\alpha(x_\alpha)=f_\alpha(e_\alpha T_\alpha x_\alpha)=$

$=f_\alpha(x_\alpha)=x$ $\therefore$ e é elemento neutro em relação à T.

d) Temos por c): $f_\alpha(e_\alpha)=e$, $\forall\alpha\in I$, onde e: elemento neutro em relação a T. Seja $x \in E$: $\exists \alpha \in I$, $x_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha) = x$ (§ 1.4 - Lema 1a). Como $\exists x'_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $x'_\alpha T_\alpha x_\alpha = x_\alpha T_\alpha x'_\alpha = e_\alpha$, segue que $f_\alpha(x'_\alpha T_\alpha x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha T_\alpha x'_\alpha) = f_\alpha(e_\alpha) \therefore f_\alpha(x'_\alpha) T f_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha) T f_\alpha(x'_\alpha) = f_\alpha(e_\alpha) \therefore x' T x = x T x' = e$, se chamarmos $x' = f_\alpha(x'_\alpha)$. Logo, todo elemento $x \in E$, é simetrizável.

d') Sabemos por d) que todo elemento $x \in E$ é simetrizável. Suponhamos que x' e x'' sejam t.q. $x T x' = x' T x = e$, $x T x'' = x'' T x = e$. Então (§ 1.4 - Lema 1a) $\exists \alpha \in I$, $x_\alpha, x'_\alpha, x''_\alpha \in E_\alpha$, t.q. $f_\alpha(x_\alpha) = x$, $f_\alpha(x'_\alpha) = x'$, $f_\alpha(x''_\alpha) = x''$. Então, $f_\alpha(x_\alpha T_\alpha x'_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha) T f_\alpha(x'_\alpha) = x T x' = e$; analogamente, $f_\alpha(x'_\alpha T_\alpha x_\alpha) = e$; $f_\alpha(x_\alpha T_\alpha x''_\alpha) = f_\alpha(x''_\alpha T_\alpha x_\alpha) = e$; $f_\alpha(e_\alpha) = e$. Então (§ 1.4 - Lema 1b), $\exists \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x_\alpha T_\alpha x'_\alpha) = f_{\beta\alpha}(x'_\alpha T_\alpha x_\alpha) = f_{\beta\alpha}(x_\alpha T_\alpha x''_\alpha) = f_{\beta\alpha}(x''_\alpha T_\alpha x_\alpha) = f_{\beta\alpha}(e_\alpha) = e_\beta$. De $f_{\beta\alpha}(x_\alpha T_\alpha x'_\alpha) = e_\beta$, segue: $f_{\beta\alpha}(x_\alpha) T_\beta f_{\beta\alpha}(x'_\alpha) = e_\beta \therefore x_\beta T_\beta x'_\beta = e_\beta$, chamando $x_\beta = f_{\beta\alpha}(x_\alpha)$, $x'_\beta = f_{\beta\alpha}(x'_\alpha)$, $x''_\beta = f_{\beta\alpha}(x''_\alpha)$. Analogamente temos: $x'_\beta T_\beta x_\beta = x_\beta T_\beta x''_\beta = x''_\beta T_\beta x_\beta = e_\beta$. Mas, então, x'_β e x''_β seriam simétricos de x_β, donde por hipótese $x'_\beta = x''_\beta \therefore x' = f_\alpha(x'_\alpha) = f_\beta f_{\beta\alpha}(x'_\alpha) = f_\beta(x'_\beta) = f_\beta(x''_\beta) = f_\beta f_{\beta\alpha}(x''_\alpha) = f_\alpha(x''_\alpha) = x''$. Logo, $\exists$ único simétrico de $x \in E$. Além disso, $f_\alpha(x_\alpha^{-1} T_\alpha x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha T_\alpha x_\alpha^{-1}) = f_\alpha(e_\alpha) \therefore f_\alpha(x_\alpha^{-1}) T f_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha^{-1}) T f_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha) T f_\alpha(x_\alpha^{-1}) = e \therefore f_\alpha(x_\alpha^{-1})$ é o simétrico de $f_\alpha(x_\alpha)$, i.é, $[f_\alpha(x_\alpha)]^{-1} = f_\alpha(x_\alpha^{-1})$.

<u>Corolário</u>: As categorias de monóide, de grupo, grupo abeliano, têm limites indutivos.

A demonstração é trivial.

2. <u>Estruturas algébricas com várias leis de composição internas.</u>

Denotaremos nesta seção por $C_2^{(n)}$ $(n \geq 2)$ a categoria que tem por objetos $(n+1)$-plas $(E, T_{E_1}, \dots, T_{E_n})$ onde E é um conj., $T_{E_1}, T_{E_2}, \dots, T_{E_n}$ são leis de composição internas distintas sobre E e cujos morfismos entre $(E, T_{E_1}, \dots, T_{E_n})$ e $(F, T_{F_1}, \dots, T_{F_n})$ são as aplicações de conjuntos $f: E \to F$ t.q. $\forall x, y \in E$, $\forall i$, $i = 1, \dots, n$, tem-se $f(x T_{E_i} y) = f(x) T_{F_i} f(y)$.

Como consequência imediata da prop. 1, segue que, se $n \geq 2$, a categoria $C_2^{(n)}$ tem limites indutivos. (Mais precisamente: dado um sistema indutivo sôbre $C_2^{(n)}$, toma-se o sistema indutivo de conjunto subjacente e seu limite indutivo de conj, e usa-se o processo da proposição 1 para levar as aplicações $T_{\alpha i}$ ao seu limite indutivo T_i).

Como consequência imediata da proposição 2, segue que a) se $\forall \alpha$, $T_{\alpha i}$ é associativa, então T_i é associativa (onde $1 \leq i \leq n$) etc. (Mais precisamente: vale o análogo da prop. 2, cuja demonstração é a mesma da prop. 2).

Def 9: Se T_1 e T_2 são duas leis de composição interna sôbre E, diz-se que T_1 é distributiva à esquerda (respectivamente à direita) em relação a T_2 se, $\forall x, y, z \in E$, tem-se $(x T_2 y) T_1 z = (x T_1 z) T_2 (y T_1 z)$ (respectivamente, $x T_1 (y T_2 z) = (x T_1 y) T_2 (x T_1 z)$). Diz-se que T_1 é distributiva em relação a T_2 se fôr simultâneamente distributiva à esquerda e à direita.

Def. 10: Chamamos categoria de anéis, anéis abelianos, corpos, corpos comutativos, respectivamente à que tem por objetos anéis, anéis abelianos, corpos, corpos comutativos e por morfismos os de $C_2^{(2)}$. A composição de morfismos é a composição de aplicações.

Def. 11: Chamamos categoria de anéis com elemento unidade, de anéis abelianos com elemento unidade, respectivamente à que tem por objetos anéis com elemento unidade, anéis abelianos com elemento unidade, e cujos morfismos além de serem morfismos de $C_2^{(2)}$, também preservam os elementos unidade (i.é, $f(1_E) = 1_F$).

Proposição 3: Se $(I, (E_\alpha, T_{\alpha 1}, \ldots, T_{\alpha n}), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre $C_2^{(n)}$, e $((E, T_1, \ldots, T_n), f_\alpha)$ seu limite indutivo, então:
a) se $\forall \alpha \in I$, $T_{\alpha i}$ é distributiva à esquerda (respectivamente, distributiva à direita, distributiva) em relação a $T_{\alpha j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$, então T_i é distributiva à esquerda (respectivamente distributiva à

direita, distributiva) em relação a T_j.

b) Se $\forall \alpha \in I$, $\exists$ elementos neutros $e_{\alpha i}$, $e_{\alpha j}$ em relação a $T_{\alpha i}$, $T_{\alpha j}$, respectivamente e se todo elemento de E_α, distinto de $e_{\alpha j}$, é simetrizável em relação a $T_{\alpha i}$ e se $f_{\beta\alpha}(e_{\alpha i}) = e_{\beta i}$, $f_{\beta\alpha}(e_{\alpha j}) = e_{\beta j}$ se $\alpha \leq \beta$, então (análogo da prop. 2 para $C_2^{(n)}$: considerações iniciais) $\exists$ elementos neutros e_i, e_j em relação a T_i, T_j, respectivamente. Além disso, todo elemento de E, distinto de e_j, é simetrizável em relação a T_i.

c) Se $\forall \alpha \in I$, $\exists$ elementos neutros $e_{\alpha i}$, $e_{\alpha j}$ em relação a $T_{\alpha i}$, $T_{\alpha j}$, respectivamente e se todo elemento de E_α, distinto de $e_{\alpha j}$ é simetrizável em relação a $T_{\alpha i}$, se $f_{\beta\alpha}(e_{\alpha j}) = e_{\beta j}$ se $\alpha \leq \beta$; se $f_{\beta\alpha}(e_{\alpha i}) = e_{\beta i}$ ou $f_{\beta\alpha}(E_\alpha) = \{e_{\beta j}\}$ se $\alpha \leq \beta$, então (considerações iniciais) $\exists$ elemento neutro e_j em relação a T_j. Além disso, $\exists$ elemento neutro e_i em relação a T_i, e todo elemento de E, distinto de e_j, é simetrizável em relação a T_i.

<u>Dem:</u> a) Se $x, y, z \in E$, então pelo §1.4 - lema 1a, $\exists \alpha \in I$, $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha) = x$, $f_\alpha(y_\alpha) = y$, $f_\alpha(z_\alpha) = z$. Então,

$$(x T_j y) T_i z = (f_\alpha(x_\alpha) T_j f_\alpha(y_\alpha)) T_i f_\alpha(z_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha T_{\alpha j} y_\alpha) T_i f_\alpha(z_\alpha) =$$
$$= f_\alpha((x_\alpha T_{\alpha j} y_\alpha) T_{\alpha i} z_\alpha) = f_\alpha((x_\alpha T_{\alpha i} z_\alpha) T_{\alpha j} (y_\alpha T_{\alpha i} z_\alpha)) = f_\alpha(x_\alpha T_{\alpha i} z_\alpha) T_j$$
$$T_j f_\alpha(y_\alpha T_{\alpha i} z_\alpha) = (f_\alpha(x_\alpha) T_i f_\alpha(z_\alpha)) T_j (f_\alpha(y_\alpha) T_i f_\alpha(z_\alpha)) = (x T_i z) T_j (y T_i z).$$

Analogamente, para distributiva à direita e distributiva.

b) Pelas considerações iniciais, temos: $f_\alpha(e_{\alpha j}) = e_j$ $\forall \alpha$, $f_\alpha(e_{\alpha i}) = e_i$ $\forall \alpha$, onde e_j e e_i são elementos neutros em relação a T_j e T_i, respectivamente. Seja $x \in E$, $x \neq e_j$: então (§1.4 - lema 1a) $\exists \alpha \in I$, $x_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha) = x$ e como $f_\alpha(e_{\alpha j}) = e_j$, $f_\alpha(e_{\alpha i}) = e_i$, temos: $x_\alpha \neq e_{\alpha j}$, senão $x = f_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(e_{\alpha j}) = e_j$, contra a hipótese $x \neq e_j$. Logo, $\exists x'_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $x'_\alpha T_{\alpha i} x_\alpha = x_\alpha T_{\alpha i} x'_\alpha = e_{\alpha i}$ $\therefore$
$f_\alpha(x'_\alpha T_{\alpha i} x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha T_{\alpha i} x'_\alpha) = f_\alpha(e_{\alpha i})$ $\therefore$ $f_\alpha(x'_\alpha) T_i f_\alpha(x_\alpha) =$
$= f_\alpha(x_\alpha) T_i f_\alpha(x'_\alpha) = e_i$ $\therefore$ $x' T_i x = x T_i x' = e_i$, chamando $x' = f_\alpha(x'_\alpha)$, donde x é simetrizável em relação a T_i.

c) Se $E = \{e_j\}$, nada há a demonstrar. Suponhamos $x \in E$,

[illegible]
Então $e_{\alpha_0} \neq e_{\alpha_0 j}$; caso contrário, teríamos $x = f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = f_{\alpha_0}(e_{\alpha_0 j}) = e_j$, contra a hipótese $x \neq e_j$.

Ora, se $\beta \geq \alpha_0$, temos: $f_{\beta\alpha_0}(e_{\alpha_0 i}) = e_{\beta j}$; caso contrário, teríamos $f_{\beta\alpha_0}(E_{\alpha_0}) = \{e_{\beta j}\}$ e então $f_{\alpha_0}(E_{\alpha_0}) = f_\beta f_{\beta\alpha_0}(E_{\alpha_0}) = f_\beta(\{e_{\beta j}\}) = \{e_j\}$, o que é absurdo, pois $x \neq e_j$, e $x \in f_{\alpha_0}(E_{\alpha_0})$ já que $x = f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})$. Seja $J = \{\beta \in I \mid \beta \geq \alpha_0\}$, com a ordem induzida pela de I: então J é cofinal em I (exemplo de def 10 - §1.2). Logo, $(J, (E_\alpha; T_{\alpha 1}, \dots, T_{\alpha m})_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq_J \beta})$ tem limite indutivo $(E, (f_\alpha)_{\alpha \in J})$ (Prop. 4a - §1.3). Ora, se $\beta \leq_J \delta$, então $f_{\delta\beta}(e_{\beta i}) = f_{\delta\beta} f_{\beta\alpha_0}(e_{\alpha_0 i}) = f_{\delta\alpha_0}(e_{\alpha_0 i}) = e_{\delta i}$ ∴ estamos em condições de aplicar a parte b) desta proposição: ∃ elemento neutro e_i em relação a T_i (a saber: $f_{\alpha_0}(e_{\alpha_0 i}) = e_i$, $f_\beta(e_{\beta i}) = e_i$, se $\beta \geq \alpha_0$). Além disso, todo elemento de E, distinto de e_j, é simetrizável em relação a T_i.

<u>Corolário</u>: As categorias de anel, anel abeliano, anel com elemento unidade, anel abeliano com elemento unidade, têm limites indutivos.

<u>Proposição 4</u>: Seja $(I, (E_\alpha, +_\alpha, \times_\alpha), f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo sôbre a categoria dos corpos (respectivamente corpos comutativos) $((E, +, \times), f_\alpha)$ seu limite indutivo na categoria de anéis. Temos então:

a) Se E tem pelo menos dois elementos, então $((E, +, \times), f_\alpha)$ é limite indutivo do sistema na categoria de corpos (respectivamente corpos comutativos).

b) Se E tiver sòmente um elemento (e_+), então não existe limite indutivo do sistema na categoria dos corpos. (respectivamente corpos comutativos).

c) Uma condição necessária e suficiente para que E tenha sòmente um elemento é que $\forall \alpha \in I$, $\exists \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha} = 0$.

<u>Dem</u>: Lembremos inicialmente que um homomorfismo entre dois corpos ou é injetor ou é a aplicação nula: se $f(1) = 0$,

então $f(x)=f(x.1)=f(x).f(1)=f(x).0=0$, $\forall x\in E$; se $f(1)\neq 0$ como $f(1)=f(1.1)=f(1).f(1)$ e como $\exists\,[f(1)]^{-1}$, (pois $f(1)\neq 0$), segue que $1=f(1)$; além disso, $f(x)\neq 0$ se $x\neq 0$ pois $f(x).f(x^{-1})=f(x.x^{-1})=f(1)=1$.

a) É conseqüência imediata da proposição 3c).

b) Se E tem apenas um elemento (e_1) e se K é um corpo, $g_\alpha : E_\alpha \longrightarrow K$ são homomorfismos de corpos t.q. $g_\beta\circ f_{\beta\alpha}=g_\alpha$ se $\alpha\leq\beta$, então como K é um anel e (E, f_α) é limite indutivo do sistema dado na categoria de anel, segue que $\exists$ único homomorfismo de anéis $h: E\longrightarrow K$ t.q. $h\circ f_\alpha = g_\alpha$, $\forall\alpha\in I$. Mas então $\forall x\in E_\alpha$, teremos $g_\alpha(x)=h\,f_\alpha(x)=h(e_1)=0_K$ ∴ toda g_α é nula.

Ora, se existe limite indutivo (K, g_α) do sistema dado, na categoria de corpos, então teríamos: $g_\beta\circ f_{\beta\alpha}=g_\alpha$ se $\alpha\leq\beta$ ∴ pelo que acabamos de ver $g_\alpha=0$ $\forall\alpha\in I$. Por outro lado, pela condição L_2, existiria um único homomorfismo de corpos $h: K\longrightarrow K$ t.q. $h\circ g_\alpha = g_\alpha$ $\forall\alpha\in I$. Mas $h_1=0$ e $h_2=1_K$ satisfazem esta condição; como é evidente que $h_1\neq h_2$, teríamos um absurdo. Logo, não existe limite indutivo do sistema na categoria dos corpos.

c) Se $\forall\alpha\in I$, $\exists\beta\geq\alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}=0$ e se $x\in E$, sabemos que existem $\alpha\in I$, $x_\alpha\in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha)=x$ (§1.4-Lema 1a). Então $x=f_\alpha(x_\alpha)=f_\beta f_{\beta\alpha}(x_\alpha)=f_\beta(0_{E_\beta})=0_E$, donde $E=\{0_E\}=\{0\}$.
Reciprocamente, se $\exists\alpha\in I$ t.q. $\forall\beta\geq\alpha$, $f_{\beta\alpha}\neq 0$ então $J=\{\beta\in I \,/\, \beta\geq\alpha\}$ é cofinal em I; considerando em J a ordem induzida pela de I (exemplo da def. 10 - §1.2) ∴ $(E,(f_\beta)_{\beta\in J})$ é limite indutivo de $(J,(E_\alpha)_{\alpha\in J},(f_{\gamma\beta})_{\gamma\geq\beta})$ na categoria de anéis. Se $\gamma,\delta\in J$, com $\gamma\leq\delta$, temos $f_{\delta\gamma}\neq 0$ senão $f_{\delta\alpha}=f_{\delta\gamma}f_{\gamma\alpha}=0$ contra a hipótese.

Mas, se todas as $f_{\delta\gamma}\neq 0$ se $\gamma\leq\delta$, segue (§1.4-prop. 10a) que todas as f_γ, $\gamma\geq\alpha$ são injetoras e como E_α tem pelo menos dois elementos segue que E tem pelo menos dois elementos.

<u>Corolário 1</u>: A categoria dos corpos (respectivamente, corpos comutativos) não têm limites indutivos.

<u>Dem</u>: Basta tomar um corpo fixo (por exemplo $\mathbb{R}$), como E_α, $\forall \alpha \in I$, tomar $f_{\beta\alpha} = 0$ se $\alpha \leq \beta$ e tomar I como um conjunto ordenado filtrante à direita, não vazio, sem elemento maximal (por exemplo $\mathbb{N}$, com sua ordem usual).

<u>Corolário 2</u>: Notação da prop. 4. Se $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f_{\beta\alpha}$ é injetora então existe limite indutivo na categoria de corpos. (respectivamente corpos comutativos).

<u>Corolário 3</u>: Se E tiver pelo menos dois elementos, então $f_\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \forall \beta \geq \alpha$, tem-se $f_{\beta\alpha} \neq 0$ (lembrar que $f \neq 0 \Longleftrightarrow f$ injetora se f é homomorfismo de corpos).

<u>Dem</u>: Se $\forall \beta \geq \alpha$, $f_{\beta\alpha} \neq 0$, então pela demonstração final da parte c) da proposição anterior, temos f_α injetora $\therefore f_\alpha \neq 0$, já que E tem mais de um elemento. Reciprocamente, se $f_\alpha \neq 0$, então $f_{\beta\alpha} \neq 0$, $\forall \beta \geq \alpha$ caso contrário $f_\alpha = f_\beta f_{\beta\alpha} = 0$ contra a hipótese.

3. <u>Estruturas algébricas com várias leis de composição internas e uma só lei de composição externa.</u>

<u>Def. 12</u>: Chama-se lei de composição externa entre um conjunto Ω (chamado conjunto dos operadores da lei ou domínio dos operadores da lei) e um conjunto E, a uma aplicação $f: \Omega \times E \longrightarrow E$. Costuma-se denotar por $x \perp y$ ao elemento $f(x, y)$.

<u>Def. 13</u>: Denotaremos nesta seção por $C_{3\Omega}$ a categoria cujos objetos são pares $(E, \perp_E)$ onde E é um conjunto, $\perp_E$ é lei de composição externa entre Ω e E e cujos morfismos entre $(E, \perp_E)$ e $(F, \perp_F)$ são as aplicações $f: E \longrightarrow F$ t.q. $f(x \perp_E y) = x \perp_F f(y)$, $\forall x \in \Omega$, $y \in E$, i.e., t.q. o diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega \times E \arrow[r, "\perp_E"] \arrow[d, "1_\Omega \times f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \Omega \times F \arrow[r, "\perp_F"] & F \end{tikzcd}$$

seja comutativo.

A composição de morfismos é a composição de aplicações.

Def. 14: Seja D_0 uma categoria cujos objetos são conjuntos munidos eventualmente de estruturas algébricas adicionais, cujos morfismos são aplicações de conjunto satisfazendo eventualmente condições especiais; a composição de morfismos seja a composição de aplicações e o morfismo identidade seja a aplicação identidade. (Exemplos: D_0 pode ser a categoria dos conjuntos, dos grupos, dos grupos abelianos, dos anéis, dos anéis comutativos, dos anéis com elemento unidade, dos corpos, dos corpos comutativos). Denotaremos nesta seção por $C_{E\Omega D_0}$ a categoria cujos objetos são pares $(E, \perp_E)$, onde E é o objeto D_0, $\perp_E$ lei de composição externa entre Ω e E e cujos morfismos entre os objetos $(E, \perp_E)$ e $(F, \perp_F)$ são as aplicações $f: E \to F$ t.q. f seja morfismo de D_0 e t.q. $f(x \perp_E y) = x \perp_F f(y)$, i.e, t.q. o diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega \times E \arrow[r, "\perp_E"] \arrow[d, "1_\Omega \times f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \Omega \times F \arrow[r, "\perp_F"] & F \end{tikzcd}$$

seja comutativo. A composição de morfismos é a composição de aplicações. (Usamos aqui o mesmo símbolo E tanto para representar um objeto de D_0, como o conjunto subjacente, para evitar complicar demasiadamente a notação).

Ω é um conjunto que pode, eventualmente, estar munido de estruturas adicionais.

Def. 15: Sejam D_0 e D_1 categorias satisfazendo as condições da categoria D_0 na definição anterior. Denotaremos nesta seção por $C^{geral}_{ED_0D_1}$ a categoria cujos objetos são ternas $(E, \Omega_E, \perp_{E\Omega_E})$ onde E é um objeto de D_0, Ω_E objeto de D_1 e $\perp_{E\Omega_E}$ (que usualmente representamos por $\perp_{\Omega_E}$) uma lei de composição externa entre Ω_E e E e cujos morfismos entre $(E, \Omega_E, \perp_{\Omega_E})$ e $(F, \Omega_F, \perp_{\Omega_F})$ são pares (φ, f) onde $f: E \to F$ e $\varphi: \Omega_E \to \Omega_F$, são aplicações a composição t.q. φ (respectivamente f) é morfismo entre Ω_E e Ω_F na categoria D_1 (respectivamente entre E e F na categoria D_0) e t.q. $f(x \perp_E y) = \varphi(x) \perp_F f(y)$ $\forall x, y \in E$ i.é, t.q. o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega_E \times E \arrow[r, "\perp_E"] \arrow[d, "\varphi \times f"'] & E \arrow[d, "f"] \\
\Omega_F \times F \arrow[r, "\perp_F"] & F
\end{tikzcd}$$

seja comutativo. A composição de morfismos é a composição de pares de aplicações.

Observação $C_{3\Omega}$ é caso particular de $C_{3\Omega D_0}$ quando D_0 é a categoria dos conjuntos. A categoria $C_{3\Omega D_0}$ é isomorfa à categoria $C^{geral}_{3D_0D_1}$ (no sentido de que existe um funtor covariante F da primeira na segunda, um funtor covariante G da segunda na primeira, t.q. $F \circ G = 1_{C^{geral}_{3D_0D_1}}$ e $G \circ F = 1_{C_{3\Omega D_0}}$ quando se toma D_1 como a categoria cujo único objeto é o conjunto Ω munido da mesmas estruturas adicionais que Ω possui, considerado na categoria $C_{3\Omega D_0}$ e cujo único morfismo é a aplicação identidade de Ω em Ω. Podemos definir o funtor $F: C^{geral}_{3D_0D_1} \to C_{3\Omega D_0}$ por $F: (E, \Omega_E, \perp_{E\Omega_E}) \to (E, \perp_E)$ onde $\perp_E = \perp_{E\Omega_E}$ e se $(\varphi, f): (E, \Omega_E, \perp_{E\Omega_E}) \to (F, \Omega_F, \perp_{F\Omega_F})$ é morfismo de $C^{geral}_{3D_0D_1}$, então $\varphi = 1_\Omega$; podemos definir $F(\varphi, f) = f: (E, \perp_E) \to (F, \perp_F)$).

Proposição 5: Se $(I, (E_\alpha, \Omega_\alpha, \perp_\alpha), (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo sôbre $C^{geral}_{3D_0D_1}$, então $(I, \Omega_\alpha, (\varphi_{\beta\alpha}))$ (respectivamente $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$) é evidentemente um sistema indutivo sôbre D_1 (respectivamente D_0). Suponhamos que exista o limite indutivo (Ω, φ_α) (respectivamente (E, f_α)) dêsse sistema na categoria D_1 (respectivamente D_0) e que o limite indutivo dêsse sistema na categoria de conjuntos também seja (Ω, φ_α) (respectivamente (E, f_α)). Então existe o limite indutivo do sistema inicial na categoria $C^{geral}_{3D_0D_1}$.

Dem: Pelo corolário 1 da proposição 11 – § 1.4 temos $(I, \Omega_\alpha \times E_\alpha, \varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de conjuntos de limite indutivo $(\Omega \times E, \varphi_\alpha \times f_\alpha)$. Como se $\alpha \leq \beta$ temos $f_{\beta\alpha}(x_\alpha \perp_\alpha y_\alpha) = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha) \perp_\beta f_{\beta\alpha}(y_\alpha)$, $\forall x_\alpha \in \Omega_\alpha$, $y_\alpha \in E_\alpha$, i.é, $f_{\beta\alpha} \circ \perp_\alpha = \perp_\beta \circ (\varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ segue que $(1_I, \perp_\alpha)$ é morfismo entre os sistemas indutivos de conjuntos $(I, \Omega_\alpha \times E_\alpha, \varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ e $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$. Logo (§ 1.3 – prop 2) existe uma única aplicação de conjuntos $\perp : \Omega \times E \dashrightarrow E$, que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega_\alpha \times E_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha \times f_\alpha"] \arrow[d, "\perp_\alpha"'] & \Omega \times E \arrow[d, dashed, "\perp"] \\ E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & E \end{tikzcd}$$

$\forall \alpha \in I$, i.é, t.q. $f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha y_\alpha) = \varphi_\alpha(x_\alpha) \perp f_\alpha(y_\alpha)$, $\forall x_\alpha \in \Omega_\alpha$, $y_\alpha \in E_\alpha$, $\alpha \in I$. Além disso, essa comutatividade garante que $(\varphi_\alpha, f_\alpha)$ são morfismos de $C^{geral}_{3D_0D_1}$ entre $(E_\alpha, \Omega_\alpha, \perp_\alpha)$ e $(E, \Omega, \perp)$, $\forall \alpha \in I$ (lembrar que φ_α e f_α são morfismos de D_1 e D_0 respectivamente). Como $\varphi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha$ e $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$, segue que, temos $(\varphi_\beta, f_\beta) \circ (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}) = (\varphi_\alpha, f_\alpha) = (\varphi_\alpha, f_\alpha)$ se $\alpha \leq \beta$, donde L_1 está verificada.

Seja $(H, \mho, \perp_H)$ um objeto de $C^{geral}_{3D_0D_1}$, $(\psi_\alpha, \mu_\alpha)$ morfismos de $C^{geral}_{3D_0D_1}$ t.q. $\alpha \leq \beta \Longrightarrow (\psi_\beta, \mu_\beta) \circ (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}) = (\psi_\alpha, \mu_\alpha)$ então, se $\alpha \leq \beta$ temos $\psi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \psi_\alpha$ e $\mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$ $\therefore \exists$ um único morfismo $\varphi : \Omega \to \mho$ de D_1 t.q. $\varphi \circ \varphi_\alpha = \psi_\alpha$ $\forall \alpha \in I$ e $\exists$ um único morfismo $f : E \to H$ de D_0, t.q. $f \circ f_\alpha = \mu_\alpha$. Logo $(\varphi, f) \circ (\varphi_\alpha, f_\alpha) = (\psi_\alpha, \mu_\alpha)$ $\forall \alpha \in I$. Por outro lado, se $x \in \Omega$ $y \in E$, $\exists \alpha, \beta \in I$, $x_\alpha \in \Omega_\alpha$, $y_\beta \in E_\beta$ t.q. $\varphi_\alpha(x_\alpha) = x$, $f_\beta(y_\beta) = y$ (§ 1.4 – lema 1a): seja $\gamma \geq \alpha, \beta$, então chamando $x_\gamma = \varphi_{\gamma\alpha}(x_\alpha)$, $y_\gamma = f_{\gamma\beta}(y_\beta)$, temos: $\varphi_\gamma(x_\gamma) = \varphi_\gamma \varphi_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = \varphi_\alpha(x_\alpha) = x$; $f_\gamma(y_\gamma) =$

$= f_\gamma f_{\gamma\beta}(y_\beta) = y = f_\beta(y_\beta)$ $\therefore$ $x \perp y = \varphi_\gamma(x_\gamma) \perp f_\gamma(y_\gamma) = f_\gamma(x_\gamma \perp_\gamma y_\gamma)$ (pois $(\varphi_\gamma, f_\gamma)$ é morfismo de $C^{geral}_{3D_0D_1}$). Logo,
$f(x \perp y) = f f_\gamma(x_\gamma \perp_\gamma y_\gamma) = \mu_\gamma(x_\gamma \perp_\gamma y_\gamma) = \psi_\gamma(x_\gamma) \perp_H \mu_\gamma(y_\gamma) =$
$= \varphi \circ \varphi_\gamma(y_\gamma) \perp_H f \circ f_\gamma(y_\gamma) = \varphi(x) \perp_H f(y)$, donde (φ, f) é morfismo entre $(E, \Omega, \perp)$ e $(H, \mho, \perp_H)$ na categoria $C^{geral}_{3D_0D_1}$.
Como é claro que tal morfismo é único, L_2 está verificada.

Corolário 1: Se as categorias D_0 e D_1 satisfazem as condições da def. 15 e se elas têm limites indutivos e seus limites indutivos comutam com os funtores esquecimentos $\mathcal{F}_{0,1}: D_{0,1} \to \mathcal{C}$ onde $\mathcal{C}$ é a categoria dos conjuntos, então $C^{geral}_{3D_0D_1}$ têm limites indutivos.

Corolário 2: a) Se D_0 e D_1 são duas categorias entre as seguintes: C_1, $C_2^{(n)}$, dos monóides, de grupos, de grupos abelianos, de anéis, de anéis abelianos, de anéis com elemento unidade, de anéis abelianos com elemento unidade, então $C^{geral}_{3D_0D_1}$ têm limites indutivos.

b) $C_{3\text{-}\Omega}$ têm limites indutivos.

c) Se D_0 satisfaz as condições do corolário 1, então $C_{3\text{-}\Omega D_0}$ têm limites indutivos.

Corolário 3: Seja D_1 a categoria dos corpos ou dos corpos comutativos, D_0 uma categoria satisfazendo as condições da def. 15 e $(I, (E_\alpha, K_\alpha, \perp_\alpha), (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}))$ um sistema indutivo sôbre $C^{geral}_{3D_0D_1}$. Então: a) se o limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é (E, f_α) tanto na categoria D_0 como na categoria dos conjuntos e b) se $\exists \alpha \in I$ t.q. $\forall \beta \geq \alpha$, $\varphi_{\beta\alpha} \neq 0$, então existe limite indutivo do sistema inicial na categoria $C^{geral}_{3D_0D_1}$.

Observações: 1) Se D_0 e D_1 são categorias satisfazendo tôdas as condições do corolário 3, exceto a condição b), então, não existe limite indutivo do sistema inicial na categoria $C^{geral}_{3D_0D_1}$. Com efeito, neste caso, o limite indutivo de $(I, K_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ na categoria de anéis teria apenas um elemento (§2.2 - prop. 4 b) e c)). Se $(H, K, \perp_H)$ é objeto de $C^{geral}_{3D_0D_1}$ e $(\psi_\alpha, \mu_\alpha)$ morfismos de $C^{geral}_{3D_0D_1}$ t.q. $(\psi_\beta, \mu_\beta) \circ (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}) = (\psi_\alpha, \mu_\alpha)$ se $\alpha \leq \beta$, então teríamos $\psi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \psi_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$, donde, pela demonstração da prop. 4b - §2.2, teríamos $\psi_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in I$. Se existisse limite indutivo $((H, K, \perp_H), (\psi_\alpha, \mu_\alpha))$ na categoria $C^{geral}_{3D_0D_1}$, então teríamos $(\psi_\beta, \mu_\beta) \circ (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}) = (\psi_\alpha, \mu_\alpha)$ se $\alpha \leq \beta$ ($\therefore$ teríamos $\psi_\alpha = 0$ $\forall \alpha \in I$). Pela condição L_2, existiria um único morfismo

(k,h) de [illegible] t.q. $(k,h)\circ(\psi_\alpha, \mu_\alpha)=(\psi_\alpha, \mu_\alpha)\ \forall \alpha\in I$. Ora, como $\psi_\alpha = 0\ \forall\alpha\in I$ é fácil ver que $(1_K, 1_H)$ e $(0_K, 1_H)$ são dois morfismos distintos t.q. $(1_K, 1_H)\circ(\psi_\alpha, \mu_\alpha)=(\psi_\alpha, \mu_\alpha)\ \forall\alpha\in I$ e $(0_K, 1_H)\circ(\psi_\alpha, \mu_\alpha)=(\psi_\alpha, \mu_\alpha)\ \forall\alpha\in I$ o que é um absurdo.

2) Vale corolário análogo ao 3 e observação análoga à 1 permutando D_0 com D_1.

3) Vale corolário análogo ao 3 e observação análoga à 1, se D_0 e D_1 forem uma das categorias: de corpos, de corpos comutativos.

Def. 16: Se $\perp$ é uma lei de composição externa entre Ω e E e T é uma lei de composição interna sôbre E, diz-se que $\perp$ é distributiva em relação a T se $\forall x, y\in E$, $\alpha\in\Omega$, tem-se $\alpha\perp(xTy)=(\alpha\perp x)T(\alpha\perp y)$.

Def. 17: Se $\perp$ é uma lei de composição externa entre Ω e E, T e $\overline{T}$ leis de composição interna sôbre E e Ω, respectivamente, diz-se que $\perp$ é distributiva em relação ao par $(T,\overline{T})$ se $\forall\alpha,\beta\in\Omega$, $x\in E$ tem-se $(\alpha\overline{T}\beta)\perp x=(\alpha\perp x)T(\beta\perp x)$.

Def. 18: Se $\perp$ é uma lei de composição externa entre Ω e E, T uma lei de composição interna sôbre Ω, diz-se que $\perp$ é associativa à esquerda (respectivamente, à direita) em relação a lei T se $(\alpha T\beta)\perp x=\alpha\perp(\beta\perp x)$ (respectiva/, $(\alpha T\beta)\perp x=\beta\perp(\alpha\perp x)$) $\forall\alpha,\beta\in\Omega$, $x\in E$. Diz-se que $\perp$ é duplamente associativa em relação a T se fôr associativa à direita e à esquerda em relação a T.

Def. 19: Se $\perp$ é uma lei de composição externa entre Ω e E, T uma lei de composição interna sôbre E, diz-se que T é associativa à esquerda (respectiva/, à direita) em relação a lei $\perp$ se $\alpha\perp(xTy)=(\alpha\perp x)Ty$ (respectiva/: $\alpha\perp(xTy)=xT(\alpha\perp y)$) $\forall\alpha\in\Omega$, $\forall x,y\in E$. Diz-se que T é duplamente associativa em relação a $\perp$ se fôr associativa à esq. e à dir. em relação a $\perp$.

Def. 20: Chamaremos categoria dos módulos (respectiva/ espaços vetoriais) sôbre um anel A (respectiva/, corpo K) à que tem por objetos, módulos sôbre A (respectiva/, espaços vetoriais sôbre K) e por morfismos entre $(M, T_M, \perp_M)$ e $(M', T_{M'}, \perp_{M'})$ as aplicações

$f: M \to M'$ t.q. f é morfismo na categoria de grupos e t.q. $f \circ \perp_M = \perp_{M'} \circ (1_A \times f)$ (respectiva/ $f \circ \perp_M = \perp_{M'} \circ (1_K \times f)$). A composição de morfismos é a composição de aplicações.

Def. 21: Chamaremos de categoria generalizada de módulos (respectiva/ categoria de espaços vetoriais) à que tem por objetos ternas $(E, \Omega_E, \perp_E)$, onde Ω é um anel com elemento unidade (respectiva/ corpo), $\perp$ uma lei de composição externa entre Ω e E, e E é um par (E, T) que é grupo abeliano, t.q. esta terna induza sôbre E uma estrutura de módulo sôbre Ω (respectiva/ espaço vetorial sôbre Ω). Os morfismos entre $(E, \Omega_E, \perp_E)$ e $(F, \Omega_F, \perp_F)$ são os pares (φ, f) t.q. $\varphi: \Omega_E \to \Omega_F$ seja morfismo na categoria de anel com elemento unidade (respectiva/ seja homomorfismo de corpo injetor) e t.q. $f: E \mapsto F$ seja morfismo na categoria de grupo e $f \circ \perp_E = \perp_F \circ (\varphi \times f)$, i.é, t.q.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_E \times E & \xrightarrow{\perp_E} & E \\ {\scriptstyle \varphi\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Omega_F \times F & \xrightarrow{\perp_F} & F \end{array}$$

seja comutativo.

Def. 22: Diz-se que A é uma álgebra sôbre um corpo K se A fôr um espaço vetorial sôbre K e, além disso, estiver definida sôbre A uma lei de composição interna T, que seja bilinear (T é chamada a multiplicação da álgebra). Uma álgebra A se diz, associativa, com elemento unidade, conforme T seja associativa, admitir elemento neutro, ou T seja associativa e admita elemento neutro. Fica a cargo do leitor definir a categoria das álgebras sôbre um corpo K e a categoria generalizada das álgebras. Anàlogamente para álgebras associativas, álgebras com elemento unidade, álgebras associativas com elemento unidade.

Proposição 6: Se $(I, (E_\alpha, \Omega_\alpha, \perp_\alpha), (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo sôbre $\mathcal{E}^{geral}_{3D_0D_1}$ t.q. existem os limites indutivos (Ω, φ_α) e (E, f_α) dos sistemas indutivos $(I, \Omega_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ e $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ sôbre

D_1 e D_0, respectivamente e "coincidem" com os respectivos limites indutivos na categoria dos conjuntos, então:

A) Se $\forall \alpha \in I$, $\exists e_\alpha \in \Omega_\alpha$ t.q. $e_\alpha \perp_\alpha x_\alpha = x_\alpha$ $\forall x_\alpha \in E_\alpha$ e se $\varphi_{\beta\alpha}(e_\alpha) = e_\beta$ se $\alpha \leq \beta$, então existe $e \in \Omega$ t.q. $e \perp x = x$ $\forall x \in \Omega$ (a saber: $e = \varphi_\alpha(e_\alpha)$ $\forall \alpha \in I$).

B) Se D_0 é uma categoria t.q. todo objeto é um conjunto munido de pelo menos uma lei de composição interna e os morfismos preservam essa especial lei de composição interna então (representando por T_α essa lei de composição interna, no objeto E_α): a) Se $\forall \alpha \in I$, $\perp_\alpha$ é distributiva em relação a T_α, então $\perp$ é distributiva em relação a T.

b) Se $\forall \alpha \in I$, T_α é associativa à esquerda (respectiv/ à direita, duplamente) em relação a $\perp_\alpha$, então T é associativa à esquerda (respectiv/ à direita, duplamente) em relação a $\perp$.

C) Se D_1 é uma categoria como a definida em B) e se denotamos por T_α a lei de composição interna do objeto Ω_α, então:

Se $\forall \alpha \in I$, $\perp_\alpha$ é associativa à esquerda (respectiv/ à direita, duplamente) em relação a T_α, então $\perp$ é associativa à esquerda (respectiv/ à direita, duplamente) em relação a T.

D) Se D_0 e D_1 são categorias como a definida em B) e denotamos por $\overline{\overline{T}}_\alpha$ e T_α, respectiv/, as leis de composição interna dos objetos Ω_α e E_α, então:

Se $\forall \alpha \in I$, $\perp_\alpha$ é distributiva em relação ao par $(T_\alpha, \overline{\overline{T}}_\alpha)$ então $\perp$ é distributiva em relação ao par $(T, \overline{\overline{T}})$.

<u>Dem:</u> Inicialmente, lembremos que (ver fim da dem. da proposição 5) se $x \in \Omega$, $y \in E$, então $\exists \alpha \in I$, $x_\alpha \in \Omega_\alpha$, $y_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $\varphi_\alpha(x_\alpha) = x$, $f_\alpha(y_\alpha) = y$. Temos resultados análogos se $x, y \in \Omega$, $z \in E$, ou $x \in \Omega$ e $y, z \in E$.

A) Se $\alpha, \beta \in I$, $\exists \gamma \in I$, $\gamma \geq \beta$ $\therefore$ $\varphi_\alpha(e_\alpha) = \varphi_\gamma(\varphi_{\gamma\alpha}(e_\alpha)) = \varphi_\gamma(\varphi_{\gamma\beta}(\varphi_{\beta\alpha}(e_\alpha))) = \varphi_\gamma(\varphi_{\gamma\beta}(e_\beta)) = \varphi_\beta(e_\beta)$. Chamemos $e = \varphi_\alpha(e_\alpha)$ $\forall \alpha \in I$.

[illegible] t.q. $f_\alpha(x_\alpha)=x$ ([illegible]).
Então $e\perp x = \varphi_\alpha(e_\alpha)\perp f_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(e_\alpha \perp_\alpha x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha) = x$.

B) a) $\forall \alpha\in I$, $x_\alpha \in \Omega_\alpha$, $y_\alpha, z_\alpha \in E_\alpha$, Tem-se:
$x_\alpha \perp_\alpha (y_\alpha T_\alpha z_\alpha) = (x_\alpha \perp_\alpha y_\alpha) T_\alpha (x_\alpha \perp_\alpha z_\alpha)$. Sejam $x\in\Omega$
$y, z\in E$. Então $\exists \alpha\in I$, $x_\alpha\in\Omega_\alpha$, $y_\alpha, z_\alpha\in E_\alpha$ (observação inicial) t.q. $\varphi_\alpha(x_\alpha)=x$, $f_\alpha(y_\alpha)=y$, $f_\alpha(z_\alpha)=z$. Logo, $x\perp(yTz) =$
$= \varphi_\alpha(x_\alpha)\perp(f_\alpha(y_\alpha) T f_\alpha(z_\alpha)) = \varphi_\alpha(x_\alpha)\perp f_\alpha(y_\alpha T_\alpha z_\alpha) =$

$= f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha (y_\alpha T_\alpha z_\alpha)) = f_\alpha((x_\alpha \perp_\alpha y_\alpha) T_\alpha (x_\alpha \perp_\alpha z_\alpha)) = f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha y_\alpha) T$

$f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha z_\alpha) = (\varphi_\alpha(x_\alpha)\perp f_\alpha(y_\alpha)) T (\varphi_\alpha(x_\alpha)\perp f_\alpha(y_\alpha)) = (x\perp y)T(x\perp z)$
$\therefore \perp$ é distributiva em relação a T.

b) (à esq) $\forall\alpha\in I$, $x_\alpha\in\Omega_\alpha$, $y_\alpha\in E_\alpha$, $z_\alpha\in E_\alpha$ Tem-se: $x_\alpha \perp_\alpha (y_\alpha T_\alpha z_\alpha) =$
$= (x_\alpha \perp_\alpha y_\alpha) T_\alpha z_\alpha$. Sejam $x\in\Omega$, $y, z\in E$. Então $\exists \alpha\in I$,
$x_\alpha\in\Omega_\alpha$, $y_\alpha, z_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $\varphi_\alpha(x_\alpha)=x$, $f_\alpha(y_\alpha)=y$, $f_\alpha(z_\alpha)=z$.

Logo, $x\perp(yTz) = \varphi_\alpha(x_\alpha)\perp(f_\alpha(y_\alpha) T f_\alpha(z_\alpha)) = \varphi_\alpha(x_\alpha)\perp f_\alpha(y_\alpha T_\alpha z_\alpha) =$

$= f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha (y_\alpha T_\alpha z_\alpha)) = f_\alpha((x_\alpha\perp_\alpha y_\alpha) T_\alpha z_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha y_\alpha) T f_\alpha(z_\alpha) =$

$= (\varphi_\alpha(x_\alpha)\perp f_\alpha(y_\alpha)) T f_\alpha(z_\alpha) = (x\perp y)Tz$. Logo, T é associativa à esquerda em relação a $\perp$. Anàlogamente se demonstra para associativa à direita e duplamente associativa.

C) (à esquerda) $\forall\alpha\in I$, $x_\alpha, y_\alpha \in\Omega_\alpha$, $z_\alpha\in E_\alpha$, Tem-se $(x_\alpha T_\alpha y_\alpha)\perp_\alpha z_\alpha =$
$= x_\alpha \perp_\alpha (y_\alpha \perp_\alpha z_\alpha)$. Sejam $x, y\in\Omega$, $z\in E$. Então $\exists\alpha\in I$,
$x_\alpha, y_\alpha\in\Omega_\alpha$, $z_\alpha\in E_\alpha$ t.q. $\varphi_\alpha(x_\alpha)=x$, $\varphi_\alpha(y_\alpha)=y$, $f_\alpha(z_\alpha)=z$.
Logo $(xTy)\perp z = (\varphi_\alpha(x_\alpha) T \varphi_\alpha(y_\alpha))\perp f_\alpha(z_\alpha) = \varphi_\alpha(x_\alpha T_\alpha y_\alpha)\perp f_\alpha(z_\alpha) =$
$= f_\alpha((x_\alpha T_\alpha y_\alpha)\perp_\alpha z_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha (y_\alpha \perp_\alpha z_\alpha)) = \varphi_\alpha(x_\alpha)\perp f_\alpha(y_\alpha \perp_\alpha z_\alpha) =$
$= \varphi_\alpha(x_\alpha)\perp(\varphi_\alpha(y_\alpha)\perp f_\alpha(z_\alpha)) = x\perp(y\perp z)$ $\therefore \perp$ é associativa à esquerda em relação a T. Anàlogamente se demonstra para associativa à direita e duplamente associativa.

D) $\forall\alpha\in I$, $x_\alpha, y_\alpha\in\Omega_\alpha$, $z_\alpha\in E_\alpha$ Tem-se: $(x_\alpha T_\alpha y_\alpha)\perp_\alpha z_\alpha =$

[illegible]

[illegible] Ω, $y \in E$. Então $\exists\, \alpha \in I$, $x_\alpha, y_\alpha \in \Omega_\alpha$, $z_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $\varphi_\alpha(x_\alpha) = x$, $\varphi_\alpha(y_\alpha) = y$, $f_\alpha(z_\alpha) = z$. Logo, $(x \overline{T} y) \perp z =$

$$= (\varphi_\alpha(x_\alpha) \overline{T} \varphi_\alpha(y_\alpha)) \perp f_\alpha(z_\alpha) = \varphi_\alpha(x_\alpha \overline{T}_\alpha y_\alpha) \perp f_\alpha(z_\alpha) = f_\alpha((x_\alpha \overline{T}_\alpha y_\alpha) \perp_\alpha z_\alpha) =$$

$$= f_\alpha((x_\alpha \perp_\alpha z_\alpha) T_\alpha (y_\alpha \perp_\alpha z_\alpha)) = f_\alpha(x_\alpha \perp_\alpha z_\alpha) T f_\alpha(y_\alpha \perp_\alpha z_\alpha) =$$

$$= (\varphi_\alpha(x_\alpha) \perp f_\alpha(z_\alpha)) T (\varphi_\alpha(y_\alpha) \perp f_\alpha(z_\alpha)) = (x \perp z) T (y \perp z) \therefore \perp \text{ é}$$

distributiva em relação ao par $(T, \overline{T})$.

Corolário: As categorias de módulo sôbre um anel A, de espaço vetorial sôbre um corpo K, álgebra sôbre um corpo K, álgebra associativa sôbre um corpo K, álgebra associativa com elemento unidade sôbre um corpo K e as categorias generalizadas de módulos, de espaços vetoriais, de álgebras, de álgebras associativas, de álgebras associativas com elemento unidade, de álgebras com elemento unidade, têm limites indutivos.

4. Estruturas algébricas com várias leis de composição internas e externas.

Denotaremos nesta seção por $C_{4-\Omega_1,\dots,\Omega_n}$ a categoria que tem por objetos $n+1$-plas $(E, \perp_{E_1}, \dots, \perp_{E_n})$ onde E é conjunto e $\perp_{E_i}$ é lei de composição externa entre Ω_i e E, $i = 1, \dots, n$ e cujos morfismos entre $(E, \perp_{E_1}, \dots, \perp_{E_n})$ e $(F, \perp_{F_1}, \dots, \perp_{F_n})$ são as aplicações $f : E \to F$ t.q. $f(x \perp_{E_i} y) = x \perp_{F_i} f(y)$, $\forall x \in \Omega_i$, $y \in E$, $i = 1, \dots, n$. A composição de morfismos é a composição de aplicações.

Se D_0 é uma categoria nas condições da def. 14 da seção anterior, denotaremos por $C_{4-\Omega_1,\dots,\Omega_n D_0}$ a categoria cujos objetos são $n+1$-plas $(E, \perp_{E_1}, \dots, \perp_{E_n})$ onde E é objeto de D_0, $\perp_{E_i}$ é lei de composição externa entre Ω_i e E, $i = 1, \dots, n$ e cujos morfismos entre $(E, \perp_{E_1}, \ldots, \perp_{E_n})$ e $(F, \perp_{F_1}, \ldots, \perp_{F_n})$ são as aplicações $f: E \to F$ t.q. f seja morfismo de D_0 e t.q. $f(x \perp_{E_i} y) = x \perp_{F_i} f(y)$. A composição de morfismos é a composição de aplicações.

Sejam $D_0, D_1, \ldots, D_n$ categorias nas condições da def. 14 da seção anterior. Denotaremos nesta seção por $C^{geral}_{4 D_0 D_1 \ldots D_n}$ a categoria cujos objetos são $2n+1$-plas $(E, \Omega_{E_1}, \perp_{E_1}, \Omega_{E_2}, \perp_{E_2}, \ldots, \Omega_{E_n}, \perp_{E_n})$ onde E é objeto de D_0, Ω_{E_i} é objeto de D_i, $i=1, \ldots, n$ e $\perp_{E_i}$ é lei de composição externa entre Ω_{E_i} e E, $i=1, \ldots, n$, e cujos morfismos entre $(E, \Omega_{E_1}, \perp_{E_1}, \ldots, \Omega_{E_n}, \perp_{E_n})$ e $(F, \Omega_{F_1}, \perp_{F_1}, \ldots, \Omega_{F_n}, \perp_{F_n})$ são $n+1$-plas $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, f)$ onde $f: E \to F$ e $\varphi_i: \Omega_{E_i} \to \Omega_{F_i}$ são aplicações de conjunto t.q. f é morfismo de D_0, φ_i é morfismo de D_i, $i=1, \ldots, n$ e t.q. $f(x \perp_{E_i} y) = \varphi_i(x) \perp_{F_i} f(y)$, $\forall x \in \Omega_{E_i}$, $\forall y \in E$, $i=1, \ldots, n$. A composição de morfismos é a composição de $n+1$-plas de aplicações: $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, f) \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n, g) = (\varphi_1 \circ \psi_1, \varphi_2 \circ \psi_2, \ldots, \varphi_n \circ \psi_n, f \circ g)$. Vale o análogo da observação que antecede a proposição 5 e vale o análogo da prop. 5, assim como os análogos dos corolários 1, 2 e 3 da prop. 5. A verificação é trivial.

__Def. 23__: Sejam $\perp_1$ e $\perp_2$ leis de composição externas entre Ω_1 e E, e Ω_2 e E, respectivamente. Diz-se que estas leis são permutáveis se se tem: $\alpha \perp_1 (\beta \perp_2 x) = \beta \perp_2 (\alpha \perp_1 x)$ $\forall x \in E, \alpha \in \Omega_1, \beta \in \Omega_2$.

__Proposição 7__: Se $(I, (E_\alpha, \Omega_{\alpha 1}, \perp_{\alpha 1}, \ldots, \Omega_{\alpha n}, \perp_{\alpha n}), (\varphi_{\beta\alpha 1}, \ldots \varphi_{\beta\alpha n}, f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo sôbre $C^{geral}_{4 D_0 D_1 \ldots D_n}$ t.q. existem os limites indutivos $(\Omega_i, \varphi_{\alpha i})$ $i=1, \ldots, n$ e (E, f_α) dos sistemas indutivos $(I, \Omega_{\alpha i}, \varphi_{\beta\alpha i})$ e $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ sôbre D_i, $i=1, \ldots, n$ e D_0 respectivamente e "coincidem" com os respectivos limites indutivos na categoria de conjuntos, então:

Se $\forall \alpha \in I$, $\perp_{\alpha i}$ e $\perp_{\alpha j}$ são permutáveis, então $\perp_i$ e $\perp_j$ são permutáveis.

<u>Dem.</u>: É fácil ver que, se $x \in \Omega_i$, $y \in \Omega_j$, $z \in E$, então $\exists \alpha \in I$, $x_\alpha \in \Omega_{\alpha i}$, $y_\alpha \in \Omega_{\alpha j}$, $z_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $\varphi_{\alpha i}(x_\alpha) = x$, $\varphi_{\alpha j}(y_\alpha) = y$, $f_\alpha(z_\alpha) = z$. Ora, $x_\alpha \perp_{\alpha i} (y_\alpha \perp_{\alpha j} z_\alpha) = y_\alpha \perp_{\alpha j} (x_\alpha \perp_{\alpha i} z_\alpha)$

logo, $x \perp_i (y \perp_j z) = \varphi_{\alpha i}(x_\alpha) \perp_i (\varphi_{\alpha j}(y_\alpha) \perp_j f_\alpha(z_\alpha)) =$

$$= \varphi_{\alpha i}(x_\alpha) \perp_i f_\alpha(y_\alpha \perp_{\alpha j} z_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha \perp_{\alpha i} (y_\alpha \perp_{\alpha j} z_\alpha)) = f_\alpha(y_\alpha \perp_{\alpha j} (x_\alpha \perp_{\alpha i} z_\alpha)) =$$

$$= \varphi_{\alpha j}(y_\alpha) \perp_j f_\alpha(x_\alpha \perp_{\alpha i} z_\alpha) = \varphi_{\alpha j}(y_\alpha) \perp_j (\varphi_{\alpha i}(x_\alpha) \perp_i f_\alpha(z_\alpha)) = y \perp_j (x \perp_i z)$$

$\therefore$ $\perp_i$ e $\perp_j$ são permutáveis.

<u>Observação</u>: Note-se que dadas duas categorias quaisquer das estudadas neste parágrafo que tenham limites indutivos, então, se uma delas possui uma estrutura mais rica que a outra, o funtor esquecimento comuta com o funtor limite indutivo. Veremos nos próximos parágrafos que esta é uma diferença essencial entre as estruturas algébricas e as estruturas topológico-algébricas.

§3: Limites indutivos das estruturas Topológicas e topológicas-algébricas. (estruturas finais e existência).

1. Supremo dum conjunto de Topologias

Def. 1: Se E é um conjunto ordenado pela ordem $\leq$, e $X \subset E$, diz-se que $a \in E$ é supremo ou extremo superior de X em E se:
1) $x \leq a \ \forall x \in X$; 2) se $y \in E$ e $x \leq y \ \forall x \in X$, então $a \leq y$.
É imediato que, se existir supremo de X em E êle é necessàriamente único.

Notação 1: Denotaremos por $T(E)$ o conjunto de tôdas as Topologias sôbre E, ordenado por inclusão.

Proposição 1: Tôda parte $\mathcal{Q}$ não vazia de $T(E)$ admite supremo (a saber: a Topologia gerada por $\bigcup \mathcal{Q}$).

Dem.: Seja $\emptyset \neq \mathcal{Q} \subset T(E)$ e seja $A = \bigcup \mathcal{Q}$. Seja $\mathcal{T}$ a Topologia sôbre E que tem A para sub-base de abertos: vamos mostrar que $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$. Como $\mathcal{T}^* \in \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{T}^* \subset A \subset \mathcal{T}$, segue que a condição 1 da definição 1 está verificada. Por outro lado, se $\mathcal{T}' \in T(E)$, t.q. $\mathcal{T}^* \in \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}'$, então $A \subset \mathcal{T}'$ e $\therefore \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ pois tôda Topologia que contém A contém $\mathcal{T}$, que é a Topologia gerada por A. Logo, a condição 2 da definição 1 está verificada.

Observação: A condição $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ não é necessária se convencionarmos que a Topologia caótica é o supremo de $\emptyset$ e que a topologia gerada por $\emptyset$ é a topologia caótica.

Notação 2: Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias sôbre E e F, respectiva/, denotaremos por $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ a Topologia produto sôbre $E \times F$.

Def. 2: Se T é uma lei de composição interna sôbre E, diremos que uma Topologia $\mathcal{T}$ sôbre E é compatível com T se a aplicação $T: (E \times E, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ é contínua. Denotaremos por

$T(T_E)$ ao conjunto de tôdas as topologias sôbre E, compatíveis com T, ordenado por inclusão.

Lema 1: Para que $f:(E,\mathcal{T})\to(F,\mathcal{T}')$ seja contínua, é necessário e suficiente que $f^{-1}(\Omega)\in\mathcal{T}$, $\forall\,\Omega\in$ sub-base de abertos de $\mathcal{T}'$.

Dem: Admitiremos sabido que $f:(E,\mathcal{T})\to(F,\mathcal{T}')$ é contínua, se e somente $f^{-1}(\mathcal{T}')\subset\mathcal{T}$ (onde $f^{-1}(\mathcal{T}')=\{A\subset E/\exists\, B\in\mathcal{T}'$ t.q. $f^{-1}(B)=A\}$). Ora, se $\Omega\in\mathcal{T}'$, $\Omega=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$, onde $\Omega_i=\bigcap_{j=1}^{m_i}(\Omega_{ij})$, com $\Omega_{ij}\in$ sub-base de abertos de $\mathcal{T}'$. Ora, então $f^{-1}(\Omega_{ij})\in\mathcal{T}$ $\forall i\in I$, $j=1,\dots,m_i$ $\therefore f^{-1}(\Omega_i)=f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{m_i}\Omega_{ij}\right)=\bigcap_{j=1}^{m_i}f^{-1}(\Omega_{ij})\in\mathcal{T}$.
$\therefore f^{-1}(\Omega)=f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\Omega_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(\Omega_i)\in\mathcal{T}$.

Proposição 2: Se $\mathcal{Q}\neq\emptyset$ é uma parte de $T(E)$, t.q. $\forall\,\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$, a aplicação $T:(E\times E,\mathcal{T}'\times\mathcal{T}')\to(E,\mathcal{T}')$ é contínua, então, se $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$, a aplicação $T:(E\times E,\mathcal{T}\times\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ é contínua (Noutros têrmos, se $\mathcal{Q}\neq\emptyset$ é uma parte de $T(T_E)$, então existe o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(T_E)$, que coincide com o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$).

Dem: Pelo lema 1, basta verificar que $T^{-1}(\Omega)$ é aberto em $(E\times E,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$, quando Ω percorre uma sub-base de abertos de $\mathcal{T}$, por exemplo $\bigcup\mathcal{Q}$ (ver prop. 1). Ora se $\Omega'\in\mathcal{T}'$, então $T^{-1}(\Omega')$ é por hipótese aberto em $(E\times E,\mathcal{T}'\times\mathcal{T}')$ $\therefore$ com maior razão em $(E\times E,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$, uma vez que $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}$ (e $\therefore\mathcal{T}'\times\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}\times\mathcal{T}$).

Notação 3: Se $A\subset E$, tôda topologia $\mathcal{T}$ sôbre E induz uma topologia sôbre A que denotaremos por $\mathcal{T}_A$. Se $\mathcal{Q}$ é uma parte de $T(E)$, indicaremos por $\mathcal{Q}_A=\{\mathcal{T}_A\mid\mathcal{T}\in\mathcal{Q}\}\subset T(A)$.

Proposição 3: Se $A\subset E$, $\mathcal{Q}\neq\emptyset$ é uma parte de $T(E)$, então, se $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$, temos que $\mathcal{T}_A$ é o supremo de $\mathcal{Q}_A$ em $T(A)$.

Dem: Seja $\mathcal{T}'_A$ o supremo de $\mathcal{Q}_A$ em $T(A)$. Uma sub-base de abertos de $\mathcal{T}'_A$ é $H'=\bigcup_{\mathcal{T}\in\mathcal{Q}}\mathcal{T}_A$ (ver prop. 1) Uma sub-base de abertos de $\mathcal{T}$ é $\bigcup_{\mathcal{T}\in\mathcal{Q}}\mathcal{T}$, donde é claro que uma subbase de abertos de $\mathcal{T}_A$ é $\bigcup\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{Q}} \mathcal{T}_A$. Logo, $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_A$.

<u>Proposição 4</u>: Se $\mathcal{Q} \neq \phi$ é uma parte de $T(E)$, $f:(E,\mathcal{T}')\longrightarrow(E,\mathcal{T}')$ é contínua $\forall \mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$, então, se $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$, temos que $f:(E,\mathcal{T})\longrightarrow(E,\mathcal{T})$ é contínua.

<u>Dem</u>: Pelo lema 1, basta verificar que $f^{-1}(\Omega)$ é aberto quando Ω percorre uma sub-base de abertos de $\mathcal{T}$, por exemplo $\bigcup\mathcal{Q}$ (ver propos. 1). Ora, se $\Omega'\in\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$, então $f^{-1}(\Omega')\in\mathcal{T}'$ por hipótese $\therefore f^{-1}(\Omega')\in\mathcal{T}$, já que $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}\ \forall\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$.

<u>Corolário</u>: Se $\mathcal{Q}\neq\phi$ é uma parte de $T(E)$, $A\subset E$, $f:(A,\mathcal{T}'_A)\longrightarrow(A,\mathcal{T}'_A)$ é contínua $\forall\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$, então, se $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$, temos que $f:(A,\mathcal{T}_A)\longrightarrow(A,\mathcal{T}_A)$ é contínua.

<u>Dem</u>: Basta usar props 3 e 4

<u>Def. 3</u>: Se $\perp$ é uma lei de composição externa entre A e E estando A munido duma Topologia $\mathcal{T}^A$, diremos que uma topologia sobre E é compatível com $\perp$, relativamente a $\mathcal{T}^A$, se a aplicação $\perp:(A\times E,\mathcal{T}^A\times\mathcal{T})\longrightarrow(E,\mathcal{T})$ é contínua.
Denotaremos por $T(\perp_E,\mathcal{T}^A)$ ao conjunto das Topologias sobre E, compatíveis com $\perp$, relativamente a $\mathcal{T}^A$, ordenado por inclusão.

<u>Proposição 5</u>: Se $\mathcal{Q}\neq\phi$ é uma parte de $T(E)$ t.q. $\forall\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$, a aplicação $\perp:(A\times E,\mathcal{T}^A\times\mathcal{T}')\longrightarrow(E,\mathcal{T}')$ é contínua, então, se $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$, a aplicação $\perp:(A\times E,\mathcal{T}^A\times\mathcal{T})\longrightarrow(E,\mathcal{T})$ é contínua. Noutras palavras, se $\mathcal{Q}$ é uma parte de $T(\perp_E,\mathcal{T}^A)$, então existe o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(\perp_E,\mathcal{T}^A)$, que coincide com o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$.

<u>Dem</u>: Pelo lema 1, basta provar que $\perp^{-1}(\Omega)$ é aberta, quando Ω percorre uma sub-base de abertos de $\mathcal{T}$, por exemplo $\bigcup\mathcal{Q}$. Ora, se $\Omega'\in\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$, então $\perp^{-1}(\Omega')\in\mathcal{T}^A\times\mathcal{T}'$, por hipótese, Logo, $\perp^{-1}(\Omega')\in\mathcal{T}^A\times\mathcal{T}$, pois $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}\ \forall\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$ e $\therefore\ \mathcal{T}^A\times\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}^A\times\mathcal{T}$, $\forall\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$.

<u>Proposição 6</u>: Se $(F,\mathcal{T}_F)$ é um espaço Topológico e $f:F\longrightarrow E$ uma aplicação, se $\mathcal{Q}\neq\phi$ é uma parte de $T(E)$ t.q. $\forall\mathcal{T}'\in\mathcal{Q}$,

a aplicação $f:(F,\mathcal{T}_F)\to(E,\mathcal{T}')$ é contínua e se $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathfrak{Q}$ em $T(E)$, então $f:(F,\mathcal{T}_F)\to(E,\mathcal{T})$ é contínua.

<u>Dem</u>: Pelo Lema 1, basta mostrar que $f^{-1}(\Omega')\in\mathcal{T}_F$, quando Ω' percorre uma sub-base de abertos de $\mathcal{T}$, por exemplo $\bigcup\mathfrak{Q}$. Ora, se $\Omega'\in\mathcal{T}'\in\mathfrak{Q}$, então $f^{-1}(\Omega')\in\mathcal{T}_F$ por hipótese, donde $f:(F,\mathcal{T}_F)\to(E,\mathcal{T})$ é contínua.

<u>Def. 4</u>: Se T é uma lei de composição interna sôbre E, que induz sôbre E uma estrutura de grupo, diremos que uma Topologia $\mathcal{T}$ sôbre E é compatível com a <u>estrutura de grupo</u> induzida por T sôbre E se: a) a aplicação $T:(E\times E,\mathcal{T}\times\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ é contínua (i.é, compatível com T); b) a aplicação $T^{-1}:(E,\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ é contínua, onde $T^{-1}x$ é o simétrico de x em relação a T. Nêsse caso, $(E,\perp,\mathcal{T})$ se diz um grupo topológico (Comparar com def. 2).

<u>Def. 5</u> Se $+$ e $\times$ são leis de composição internas sôbre E, que induzem sôbre E uma estrutura de anel, diremos que uma Topologia $\mathcal{T}$ sôbre E é compatível com a estrutura de anel induzida por $+$ e $\times$ sôbre E se: a) $\mathcal{T}$ é compatível com a estrutura de grupo de $(E,+)$; b) $\mathcal{T}$ é compatível com a lei $\times$. Nêsse caso, $(E,+,\times,\mathcal{T})$ se diz um anel Topológico.

<u>Def. 6</u>: Se $+$ e $\times$ são leis de composição interna sôbre E, que induzem sôbre E uma estrutura de corpo, diremos que uma topologia $\mathcal{T}$ sôbre E é compatível com sua estrutura de corpo se: a) $\mathcal{T}$ é compatível com a estrutura de anel de $(E,+,\times)$; b) $\overset{-1}{\times}: E-\{0\}\to E-\{0\}$ é contínua, onde $\overset{-1}{\times}x = x^{-1}$ é o inverso de x em relação à lei $\times$, e sôbre $E-\{0\}$ consideramos a Topologia induzida por $\mathcal{T}$. Nêsse caso, $(E,+,\times,\mathcal{T})$ se diz um corpo Topológico.

<u>Def. 7</u>: Se E é um módulo (respectivamente espaço vetorial) sôbre o anel topológico (respectivamente corpo Topológico) $(A,\mathcal{T}^A)$, (onde $\perp: A\times E\to E$ é a lei de composição externa e $+_E$ é a adição em E) diremos que uma Topologia $\mathcal{T}$ sôbre E é compatível com a estrutura de módulo

(respectiva/ espaço vetorial) induzida por $\perp$ e $+_E$ sôbre E, relativamente a $\mathcal{T}^A$ se: a) $\mathcal{T}$ é compatível com a estrutura de grupo de $(E, +_E)$; b) $\mathcal{T}$ é compatível com $\perp$, relativamente a $\mathcal{T}^A$. Neste caso, $(E, +_E, \perp, \mathcal{T})$ se diz um módulo topológico (respectiva/ espaço vetorial topológico) sôbre o anel topológico (respectiva/ corpo topológico) $(A, \mathcal{T}^A)$.

<u>Def 8</u>: Se E é uma álgebra sôbre o corpo topológico $(K, \mathcal{T}^K)$ (onde $\perp$ e $+_E$ têm o significado da def 7, e $\times_E$ é a multiplicação em E), diremos que uma topologia $\mathcal{T}$ sôbre E é compatível com a estrutura de álgebra induzida por $\perp$, $+_E$ e $\times_E$ sôbre E, relativamente a $\mathcal{T}^K$ se: a) $\mathcal{T}$ é compatível com a estrutura de espaço vetorial de $(E, \perp, +_E)$ relativamente a $\mathcal{T}^K$; b) $\mathcal{T}$ é compatível com a lei $\times_E$. Neste caso, dizemos que $(E, \perp, +_E, \times_E, \mathcal{T})$ é uma álgebra topológica sôbre o corpo topológico $(K, \mathcal{T}^K)$.

<u>Observações</u>: 1) As proposições 2 e 4 permitem afirmar: se $\mathcal{a} \neq \emptyset$ é um conjunto de topologias sôbre E, compatíveis com uma estrutura de grupo (anel, corpo, respectiva/) sôbre E, então o supremo de $\mathcal{a}$ em $T(E)$ é compatível com essa estrutura de grupo (anel, corpo, respectiva/). No caso de corpo usar o corolário da proposição 4.

2) As proposições 2, 4 e 5 permitem afirmar: se E é um módulo sôbre o anel topológico $(A, \mathcal{T}^A)$ (respectiva/ espaço vetorial, álgebra sôbre o corpo topológico $(K, \mathcal{T}^K)$) e $\mathcal{a} \neq \emptyset$ é um conjunto de topologias sôbre E compatíveis com sua estrutura de módulo sôbre $(A, \mathcal{T}^A)$ relativamente a $\mathcal{T}^A$ (respectiva/ com sua estrutura de espaço vetorial, álgebra sôbre $(K, \mathcal{T}^K)$ relativa/ a $\mathcal{T}^K$), então o supremo de $\mathcal{a}$ em $T(E)$ é compatível com a estrutura de módulo de E sôbre $(A, \mathcal{T}^A)$ relativamente à $\mathcal{T}^A$ (respectiva/ com sua estrutura de espaço vetorial, álgebra sôbre $(K, \mathcal{T}^K)$ relativamente à $\mathcal{T}^K$).

3. Relações entre estruturas finais e limites indutivos.

Baseada na definição de estruturas finais do Bourbaki, a definição mais natural de estruturas finais em têrmos de categorias seria a seguinte:

" Se $\mathcal{C}$ é uma categoria satisfazendo a def. 14 §2.3, $(\bar{A}_i)_{i \in I}$ é uma família de objetos da $\mathcal{C}$ e A_i é o conjunto subjacente a $\bar{A}_i$; se E é um conjunto e $(g_i)_{i \in I}$ é uma família de aplicações de conjunto $g_i : A_i \longrightarrow E$, então um objeto $\bar{E}$ de $\mathcal{C}$ diz-se uma estrutura final para a família $(\bar{A}_i, g_i)_{i \in I}$, se o conjunto subjacente a $\bar{E}$ fôr E, e além disso estiver satisfeita a condição: se $\bar{E}'$ é objeto de $\mathcal{C}$, de conjunto subjacente E', e $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação de conjunto, então f é morfismo de $\mathcal{C}$, $f : \bar{E} \longrightarrow \bar{E}'$, se e sòmente se, $\forall i \in I$, $f \circ g_i$ é morfismo de $\mathcal{C}$, $f \circ g_i : \bar{A}_i \longrightarrow \bar{E}'$. "

No entanto, tal definição é bastante restrita, não se aplicando, no caso em que $\mathcal{C}$ seja uma categoria onde os morfismos são pares de aplicações de conjuntos, como por exemplo, quando $\mathcal{C}$ fôr a categoria generalizada de módulos. Devido a isso, para generalizar tal definição, fomos levados a introduzir o conceito de subcategoria relativamente a um funtor. Primeiramente lembraremos algumas definições, que permitirão dar exemplos dêsse conceito.

__Def. 9__: Chamamos categoria de grupos topológicos, de grupos abelianos topológicos, de anéis topológicos, de anéis abelianos topológicos, de anéis com elemento unidade topológicos, de anéis abelianos com elemento unidade topológicos, de corpos topológicos, de corpos comutativos topológicos, respectivamente à categoria cujos objetos têm o mesmo nome da categoria, e cujos morfismos são os morfismos das respectivas estruturas algébricas, e que sejam contínuos. A composição de morfismos é a composição das aplicações.

Def. 10: Chamaremos categoria dos módulos topológicos (respectivamente dos espaços vetoriais topológicos, das álgebras topológicas) sôbre um anel topológico A (respectiva/ corpo topológico K) à que têm por objetos os módulos topológicos (respectiva/ os espaços vetoriais topológicos, as álgebras topológicas) sôbre A (respectivamente K) e cujos morfismos são os morfismos da categoria de módulos (respectiva/ de espaços vetoriais, de álgebras) sôbre A (respectiva/ K), que são contínuos.

Def. 11: Chamaremos categoria generalizada de módulos topológicos à que tem por objetos ternas $(\mathbb{E}, \Omega_E, \perp_E)$, onde Ω_E é um anel topológico com elemento unidade, de conjunto subjacente Ω, $\perp_E$ é uma lei de composição externa entre Ω e E, e $\mathbb{E}$ é uma terna $(E, T, \mathcal{T})$ t.q. (E, T) é grupo abeliano e t.q. a terna $(\mathbb{E}, \Omega_E, \perp_E)$ induza uma estrutura de módulo topológico sôbre o anel topológico Ω_E. Os morfismos entre os objetos $(\mathbb{E}, \Omega, \perp_E)$ e $(\mathbb{F}, \Omega_F, \perp_F)$ são os pares (φ, f), onde $\varphi: \Omega_E \to \Omega_F$ é morfismo na categoria de anel topológico com elemento unidade, $f: \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ é morfismo na categoria de grupos topológicos, e $f \circ \perp_E = \perp_F \circ (\varphi \times f)$. A composição de morfismos é a composição de pares de aplicações. Temos definições análogas para a categoria generalizada de álgebras topológicas.

As definições das categorias $\mathcal{C}_{1\mathcal{T}}$, $\mathcal{C}^{(n)}_{2\mathcal{T}}$, $\mathcal{C}_{3\Omega\mathcal{T}}$, $\mathcal{C}_{4\Omega_1 \cdots \Omega_n \mathcal{T}}$ são evidentes.

Def. 12: Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são duas categorias e F é um funtor covariante de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, diremos que $\mathcal{C}$ é uma subcategoria de $\mathcal{D}$, relativamente ao funtor F se estiver verificada a condição: se $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são objetos de $\mathcal{C}$, $\bar{f}: \bar{A} \to \bar{B}$ e $\bar{g}: \bar{A} \to \bar{B}$ morfismos de $\mathcal{C}$, $F(\bar{A}) = A$, $F(\bar{B}) = B$, $F(\bar{f}) = f$, $F(\bar{g}) = g$, então

$\bar{f} \neq \bar{g}$ acarreta $f \neq g$ (o que é equivalente a: se $\bar{f}, \bar{g} : \bar{A} \to \bar{B}$ e $f = g$, então $\bar{f} = \bar{g}$). Noutros têrmos, a aplicação $F : \mathrm{Hom}(\bar{A}, \bar{B}) \to \mathrm{Hom}(F(\bar{A}), F(\bar{B}))$ é injetora, quaisquer que sejam os objetos $\bar{A}, \bar{B}$ de C.

<u>Exemplos</u>: 1) Se C é a categoria dos espaços topológicos, grupos topológicos, anéis topológicos, corpos topológicos, de módulos topológicos sôbre o anel topológico com elemento unidade A, generalizada de módulos topológicos, $C_{1\tau}$, $C_{2\tau}^{(\pi)}$, $C_{3\Omega\tau}$, $C_{4\Omega_1\dots\Omega_n\tau}$, etc, e D é respectivamente a categoria dos conjuntos, grupos, anéis, corpos, módulos sôbre o anel subjacente A, generalizada de módulos, C_1, $C_2^{(\pi)}$, $C_{3\Omega}$, $C_{4\Omega_1\dots\Omega_n}$, etc, e $F : C \to D$ os respectivos funtores esquecimentos, então C é subcategoria de D relativamente a F.

2) Se C é qualquer das categorias estudadas até o momento, e mais geralmente, se C satisfaz, digo satisfaz, a definição 14, § 2,3, e D é a categoria dos conjuntos e $F : C \to D$ é o funtor esquecimento, então C é subcategoria de D relativamente a F.

3) Se C e D são duas categorias, das quais a estrutura em C é mais rica que em D e $F : C \to D$ é o funtor esquecimento, então C é subcategoria de D, relativamente a F. Êste exemplo, no entanto, é vago, pois não definimos o que é estrutura mais rica que outra. Justamente a definição de subcategoria pode servir de definição de estrutura mais rica.

<u>Def. 13</u>: Se C é subcategoria de D, relativamente ao funtor F, $(\bar{A}_i)_{i \in I}$ uma família de objetos de C, $A_i = F(\bar{A}_i)$ $\forall i \in I$; E um objeto de D; $(g_i)_{i \in I}$ uma família de morfismos de D, $g_i : A_i \to E$, $\forall i \in I$, então um objeto $\bar{E}$ de C diz-se uma <u>estrutura final para a família</u> $(\bar{A}_i, g_i)_{i \in I}$, <u>relativamente ao funtor</u> F se: a) $F(\bar{E}) = E$; b) Se $\bar{G}$ é objeto de

C, $G = F(\overline{G})$, $f: E \to G$ morfismo de D, então existe $\overline{f}: \overline{E} \to \overline{G}$ morfismo de C t.q. $F(\overline{f}) = f$, se e somente se, $\forall i \in I$, existe $\overline{h}_i : \overline{A}_i \to \overline{G}$ morfismo de C t.q. $F(\overline{h}_i) = f \circ g_i$.

<u>Observação</u>: A definição possível dada no início desta seção é caso particular da def. 13, quando D é a categoria dos conjuntos, C é uma categoria satisfazendo a condição da def. 14 § 2,3 e $F: C \to D$ é o funtor esquecente.

<u>Def. 14</u>: Se C é subcategoria de D, relativamente ao funtor F, $(\overline{A}_i)_{i\in I}$ uma família de objetos de C, $A_i = F(\overline{A}_i)$ $\forall i \in I$, E um objeto de D; $(g_i)_{i\in I}$ uma família de morfismos de D; $g_i : A_i \to E$, $\forall i \in I$, então um objeto $\overline{E}$ de C diz-se uma <u>estrutura final fraca para a família</u> $(\overline{A}_i, g_i)_{i\in I}$, <u>relativamente ao funtor</u> F, se: a) $F(\overline{E}) = E$; b) Se $\overline{G}$ é objeto de C, $G = F(\overline{G})$, $f: E \to G$ um morfismo de D, então: b_1) se $\exists \overline{f}: \overline{E} \to \overline{G}$ morfismo de C t.q. $F(\overline{f}) = f$, então $\forall i \in I$, existe $\overline{h}_i : \overline{A}_i \to \overline{E}$ morfismo de C, t.q. $F(\overline{h}_i) = f \circ g_i$; b_2) se $\forall i \in I$, existe $\overline{h}_i : \overline{A}_i \to \overline{G}$ morfismo de C, t.q. $F(\overline{h}_i) = f \circ g_i$, então existe $\overline{f}: \overline{E} \to \overline{G}$ morfismo de C t.q. $F(\overline{f}) \circ g_i = f \circ g_i$ $\forall i \in I$.

<u>Observação</u>: Se $\overline{E}$ é estrutura final para uma família $(\overline{A}_i, g_i)_{i\in I}$ relativamente à um funtor F, é claro que $\overline{E}$ é estrutura final fraca para a família $(\overline{A}_i, g_i)_{i\in I}$ relativamente ao funtor F.

<u>Proposição 7</u>: Se $\overline{E}$ é uma estrutura final fraca para a família $(\overline{A}_i, g_i)_{i\in I}$, então, $\forall i \in I$, existe um e um só morfismo $\overline{g}_i : \overline{A}_i \to \overline{E}$ na categoria C t.q. $F(\overline{g}_i) = g_i$. Notações da definição 13.

<u>Dem</u>: Pela condição a da def. 14, $F(\overline{E}) = E$, logo $F(1_{\overline{E}}) = 1_E$, donde pela condição b_1 da def. 14, $\forall i \in I$, $\exists \overline{g}_i : \overline{A}_i \to \overline{E}$ morfismo de C, t.q. $F(\overline{g}_i) = 1_E \circ g_i = g_i$.

A unicidade decorre de C ser subcategoria de D, relativamente ao funtor F, e da def. 12.

<u>Proposição 8</u>: a) Duas estruturas finais para uma família $(\bar{A}_i, g_i)_{i\in I}$, relativamente a um funtor F, são isomorfas. Notações da def. 13 b) Reciprocamente, se $\bar{E}$ é estrutura final, para uma família $(\bar{A}_i, g_i)_{i\in I}$ relativamente a um funtor F, $\bar{E}'$ é isomorfo a $\bar{E}$ em C, e $F(\bar{E}) = F(\bar{E}')$ então $\bar{E}'$ também é estrutura final para a família $(\bar{A}_i, g_i)_{i\in I}$, relativamente ao funtor F.

<u>Dem:</u> a) Sejam $\bar{E}$ e $\bar{E}'$ estruturas finais para a família $(\bar{A}_i, g_i)_{i\in I}$, relativamente a um funtor F. Logo $F(\bar{E}) = F(\bar{E}') = E$. Pela proposição anterior, $\forall i\in I, \exists\, \bar{g}_i' : \bar{A}_i \to \bar{E}'$ morfismo de C t.q. $F(\bar{g}_i') = g_i = 1_E \circ g_i$, logo pela condição b da def. 13, lembrando que $\bar{E}$ é estrutura final, $\exists\, \bar{f} : \bar{E} \to \bar{E}'$ morfismo em C, t.q. $F(\bar{f}) = 1_E$. Analogamente se prova que $\exists\, \bar{f}' : \bar{E}' \to \bar{E}$ morfismo em C t.q. $F(\bar{f}') = 1_E$. Logo, como $\bar{f}\circ\bar{f}' : \bar{E}' \to \bar{E}'$ e $\bar{f}'\circ\bar{f} : \bar{E} \to \bar{E}$ são tais que $F(\bar{f}\circ\bar{f}') = F(\bar{f})\circ F(\bar{f}') = 1_E \circ 1_E = 1_E$ e $F(1_{\bar{E}'}) = 1_E$ segue (def. 12) que $\bar{f}\circ\bar{f}' = 1_{\bar{E}'}$. Analogamente temos $\bar{f}'\circ\bar{f} = 1_{\bar{E}}$, logo, $\bar{f}: \bar{E}\to\bar{E}'$ é isomorfismo na categoria C.
b) trivial.

<u>Observação</u>: É fácil de ver que $\bar{f}\circ\bar{g}_i = \bar{g}_i'$, $\forall i\in I$ (def. 12 e aplicando F aos dois membros da "igualdade" acima, obtemos $1_E\circ g_i = g_i$). No entanto, geralmente haverão outros morfismos $\bar{g} : \bar{E} \to \bar{E}'$ t.q. $\bar{g}\circ\bar{g}_i = \bar{g}_i'$ $\forall i\in I$, pela simples razão de que pode haver uma aplicação $g: E \to E$, $g \neq 1_E$ t.q. $g\circ g_i = g_i$ $\forall i \in I$. Isto acontece, por exemplo, se D for categoria dos conjuntos e $\bigcup_{i\in I} g_i(A_i) \neq E$.

<u>Def. 15</u>: Se C é uma subcategoria de D, relativamente ao funtor F, dizemos que C tem estruturas finais (respectiv. estruturas finais fracas) relativamente a D (e ao funtor F) se, dada uma família qualquer $(\bar{A}_i)_{i\in I}$ de objetos de C, um

objeto E de D, e uma família $(g_i)_{i\in I}$, $g_i : A_i \to E$, onde $A_i = F(\bar{A}_i)$ e g_i é morfismo na categoria D, para todo i, então existe uma estrutura final (respectivamente uma estrutura final fraca) para a família $(\bar{A}_i, g_i)_{i\in I}$ (relativamente ao funtor F).

<u>Proposição 9</u>: a) Se $\mathcal{C}$ é subcategoria de D, relativamente a um funtor F; se $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo sôbre $\mathcal{C}$, de limite indutivo $(\bar{E}, \bar{f}_\alpha)$, se $F(\bar{E}) = E$, $F(\bar{E}_\alpha) = E_\alpha$, $F(\bar{f}_{\beta\alpha}) = f_{\beta\alpha}$, $F(\bar{f}_\alpha) = f_\alpha$, temos: $\bar{E}$ é estrutura final fraca para a família $(\bar{E}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$, relativamente a D e ao funtor F. b) Para que $\bar{E}$ seja estrutura final para a família $(\bar{E}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$ relativamente a D e ao funtor F, é <u>suficiente</u> que uma das seguintes condições se verifique:

1) $\mathcal{C}$ tem estruturas finais relativamente a D e ao funtor F
2) existe uma estrutura final $\bar{E}'$ relativamente a D e ao funtor F, para a família $(\bar{E}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$.
3) (E, f_α) é limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ na categoria D.

<u>Dem</u>: a) É claro que a condição <u>a</u> da def. 14 está verificada. Vejamos a condição <u>b</u>: seja $\bar{G}$ objeto de $\mathcal{C}$, $G = F(\bar{G})$, $f: E \to G$ morfismo em D. Então, se $\exists\, \bar{f}: \bar{E} \to \bar{G}$ morfismo em $\mathcal{C}$, t.q. $F(\bar{f}) = f$, chamemos $\bar{h}_\alpha = \bar{f} \circ \bar{f}_\alpha$, $\forall \alpha \in I$: $\bar{h}_\alpha : \bar{E}_\alpha \to \bar{G}$ e temos $F(\bar{h}_\alpha) = F(\bar{f}) \circ F(\bar{f}_\alpha) = f \circ f_\alpha$, $\forall \alpha\in I$ $\therefore$ <u>b_1</u> está verificada. Por outro lado, se, $\forall \alpha \in I$, $\exists\, \bar{h}_\alpha : \bar{E}_\alpha \to \bar{G}$ t.q. $F(\bar{h}_\alpha) = f \circ f_\alpha$, então, se $\alpha \leq \beta$, temos: $\bar{h}_\beta \circ \bar{f}_{\beta\alpha} : \bar{E}_\alpha \to \bar{G}$ e $\bar{h}_\alpha : \bar{E}_\alpha \to \bar{G}$ são t.q. $F(\bar{h}_\beta \circ \bar{f}_{\beta\alpha}) = F(\bar{h}_\beta) \circ F(\bar{f}_{\beta\alpha}) = f \circ f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f \circ f_\alpha$ (pois $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = F(\bar{f}_\beta) \circ F(\bar{f}_{\beta\alpha}) = F(\bar{f}_\beta \circ \bar{f}_{\beta\alpha}) = F(\bar{f}_\alpha) = f_\alpha$) e $F(\bar{h}_\alpha) = f \circ f_\alpha$, logo (def. 12), temos $\bar{h}_\beta \circ \bar{f}_{\beta\alpha} = \bar{h}_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$. Logo, como $(\bar{E}, \bar{f}_\alpha)$ é limite indutivo do sistema dado, segue que existe <u>um único</u> morfismo $\bar{f} : \bar{E} \to \bar{G}$ t.q. $\bar{f} \circ \bar{f}_\alpha = \bar{h}_\alpha$ $\forall \alpha \in I$: então $F(\bar{f}) \circ F(\bar{f}_\alpha) = F(\bar{h}_\alpha)$ ou seja, $F(\bar{f}) \circ f_\alpha = f \circ f_\alpha$, $\forall \alpha \in I$ $\therefore$ b_2 está verificada ▪

b) 3) Se (E, f_α) é limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ na categoria D, então, pela condição L_2, de $F(\bar{f}) \circ f_\alpha = f \circ f_\alpha$, $\forall \alpha \in I$, segue que

$F(\bar{f}) = f$.

2) Pela prop. 7, $\forall i \in I, \exists\ \bar{g}_i' : \bar{E}_i \to \bar{E}'$ morfismo em $\mathcal{C}$ t.q. $F(\bar{g}_i') = g_i = 1_E \circ g_i$ (note-se que $F(\bar{E}') = E$), logo (fim da dem. da parte a)), $\exists$ único morfismo $\bar{f} : \bar{E} \to \bar{E}'$ em $\mathcal{C}$, t.q. $\bar{f} \circ \bar{g}_i = \bar{g}_i'$ $\forall i \in I$; além disso $F(\bar{f}) \circ g_i = g_i$, $\forall i \in I$. Por outro lado, $F(\bar{g}_i) = g_i = 1_E \circ g_i$ $\therefore$ (condição b da def. 13) $\exists$ um morfismo $\bar{f}' : \bar{E}' \to \bar{E}$ ($\bar{f}' : \bar{E}' \to \bar{E}$) t.q. $F(\bar{f}') = 1_E$ e além disso $\bar{f}' \circ \bar{g}_i' = \bar{g}_i$, $\forall i \in I$ (ver observação após prop. 8).

Logo, $\bar{f}' \circ \bar{f} : \bar{E} \to \bar{E}$ e $1_{\bar{E}}$ são t.q. $\bar{f}' \circ \bar{f} \circ \bar{g}_i = \bar{f}' \circ \bar{g}_i' = \bar{g}_i$ $\forall i \in I$, e $1_{\bar{E}} \circ \bar{g}_i = \bar{g}_i$ $\forall i \in I$ $\therefore$ (unicidade verificada no fim da demonstração da parte a)) $\bar{f}' \circ \bar{f} = 1_{\bar{E}}$. Daí segue: $F(\bar{f}') \circ F(\bar{f}) = 1_E$ $\therefore$ $1_E \circ F(\bar{f}) = 1_E$ $\therefore$ $F(\bar{f}) = 1_E$. Logo, $F(\bar{f} \circ \bar{f}') = F(\bar{f}) \circ F(\bar{f}') = 1_E \circ 1_E = 1_E$. Por outro lado, $1_{\bar{E}'}$ é t.q. $F(1_{\bar{E}'}) = 1_E$; logo, como $\bar{f} \circ \bar{f}' : \bar{E}' \to \bar{E}'$, segue que (def. 12) $\bar{f} \circ \bar{f}' = 1_{\bar{E}'}$. Portanto, $\bar{f}' : \bar{E}' \to \bar{E}$ é isomorfismo em $\mathcal{C}$, donde $\bar{E}$ é estrutura final para a família $(\bar{E}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ relativamente a D e ao funtor F (prop. 8 b).

<u>Proposição 10</u>: Se D tem limites indutivos e $\mathcal{C}$ tem estruturas finais fracas relativamente a D (e a algum funtor F), então $\mathcal{C}$ tem limites indutivos. Além disso, os funtores limites indutivos comutam com o funtor F. (Mais precisamente: se $\underrightarrow{\lim}_{\mathcal{C}}$ é um funtor limite indutivo em $\mathcal{C}$, então existe um particular funtor $\underrightarrow{\lim}_{D}$, limite indutivo em D t.q. se tem: $F \circ \underrightarrow{\lim}_{\mathcal{C}} = \underrightarrow{\lim}_{D} \circ \underrightarrow{F}$ onde $\underrightarrow{F} : \underrightarrow{\mathcal{C}} \to \underrightarrow{D}$ é o funtor que, a cada objeto $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ de $\underrightarrow{\mathcal{C}}$, associa o objeto $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ de $\underrightarrow{D}$, onde $E_\alpha = F(\bar{E}_\alpha)$ e $f_{\beta\alpha} = F(\bar{f}_{\beta\alpha})$ e se $(\varphi, \bar{\mu}_\alpha)$ é morfismo em $\underrightarrow{\mathcal{C}}$, entre $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ e $(I', \bar{E}'_{\alpha'}, \bar{f}'_{\beta'\alpha'})$, então $\underrightarrow{F}(\varphi, \bar{\mu}_\alpha) = (\varphi, \mu_\alpha)$, onde $\mu_\alpha = F(\bar{\mu}_\alpha)$. Note-se que $\underrightarrow{\lim}_{\mathcal{C}} : \underrightarrow{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ e $\underrightarrow{\lim}_{D} : \underrightarrow{D} \to D$. Também temos: se $\underrightarrow{\lim}_{D}$ é um funtor limite indutivo em D, então existe um particular funtor $\underrightarrow{\lim}_{\mathcal{C}}$, limite indutivo em $\mathcal{C}$, t.q. $F \circ \underrightarrow{\lim}_{\mathcal{C}} = \underrightarrow{\lim}_{D} \circ \underrightarrow{F}$).

<u>Dem:</u> Seja $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo sôbre $\mathcal{C}$. Se chamarmos $E_\alpha = F(\bar{E}_\alpha)$, $\forall \alpha \in I$, e $f_{\beta\alpha} = F(\bar{f}_{\beta\alpha})$ se $\alpha \leq \beta$, é

claro que: $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo sôbre D. Seja $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ seu limite indutivo, seja $\overline{E}$ uma estrutura final fraca para a família $(\overline{E}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$, relativamente ao funtor F e sejam $\overline{f}_\alpha : \overline{E}_\alpha \to \overline{E}$ morfismos na categoria $\mathcal{C}$ t.q. $F(\overline{f}_\alpha) = f_\alpha$, $\forall \alpha \in I$ (pela prop. 7, $\exists$ um e um só morfismo $\overline{f}_\alpha$ nessas condições). Afirmamos que $(\overline{E}, (\overline{f}_\alpha)_{\alpha\in I})$ é limite indutivo de $(I, \overline{E}_\alpha, \overline{f}_{\beta\alpha})$: com efeito, se $\alpha \leq \beta$ temos $F(\overline{f}_\beta \circ \overline{f}_{\beta\alpha}) = F(\overline{f}_\beta) \circ F(\overline{f}_{\beta\alpha}) = f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha = F(\overline{f}_\alpha)$ $\therefore$ $\overline{f}_\beta \circ \overline{f}_{\beta\alpha} = \overline{f}_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$, usando a def. 12 e lembrando que $\mathcal{C}$ é subcategoria de D relativamente ao funtor F. Logo L_1 está verificada. Seja $\overline{G}$ um objeto de $\mathcal{C}$, $\overline{\mu}_\alpha : \overline{E}_\alpha \to \overline{G}$ morfismos de $\mathcal{C}$ t.q. se $\alpha \leq \beta$, tem-se $\overline{\mu}_\beta \circ \overline{f}_{\beta\alpha} = \overline{\mu}_\alpha$; seja $G = F(\overline{G})$, $\mu_\alpha = F(\overline{\mu}_\alpha)$: então, $F(\overline{\mu}_\beta \circ \overline{f}_{\beta\alpha}) = F(\overline{\mu}_\alpha)$ se $\alpha \leq \beta$ $\therefore$ $F(\overline{\mu}_\beta) \circ F(\overline{f}_{\beta\alpha}) = F(\overline{\mu}_\alpha)$ $\therefore$ $\mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$, se $\alpha \leq \beta$. Logo, como $(E, (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ é limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ na categoria D, temos (condição L_2): $\exists$ um e um só $\mu : E \to G$ morfismo de D, t.q. $\mu \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Ora, $\forall \alpha \in I$, $\overline{\mu}_\alpha : \overline{E}_\alpha \to \overline{G}$ é morfismo de $\mathcal{C}$ t.q. $F(\overline{\mu}_\alpha) = \mu_\alpha = \mu \circ f_\alpha$, donde, pela condição $\underline{b_2}$ da def. 14, $\exists$ um morfismo $\overline{\mu} : \overline{E} \to \overline{G}$ de $\mathcal{C}$, t.q. $F(\overline{\mu}) \circ f_\alpha = \mu \circ f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Mas então, $\forall \alpha \in I$ temos: $F(\overline{\mu} \circ \overline{f}_\alpha) = F(\overline{\mu}) \circ F(\overline{f}_\alpha) = F(\overline{\mu}) \circ f_\alpha = \mu \circ f_\alpha = \mu_\alpha = F(\overline{\mu}_\alpha)$ donde, (def. 12) temos: $\overline{\mu} \circ \overline{f}_\alpha = \overline{\mu}_\alpha$, $\forall \alpha \in I$. Tal $\overline{\mu}$ é única: se $\overline{\mu}' : \overline{E} \to \overline{G}$ fôsse t.q. $\overline{\mu}' \circ \overline{f}_\alpha = \overline{\mu}_\alpha$, $\forall \alpha \in I$, então, chamando $\mu' = F(\overline{\mu}')$ é claro que teríamos $\mu' \circ f_\alpha = \mu_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, donde $\mu' = \mu$, pois (E, f_α) é limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$. Mas então, pela def. 12, temos que $\overline{\mu} = \overline{\mu}'$ o que completa a verificação de L_2. Logo $\mathcal{C}$ tem limites indutivos.

Além disso, se $(\varphi, \overline{\mu}_\alpha)$ é um morfismo de $\mathcal{C}_\to$, entre $(I, \overline{E}_\alpha, \overline{f}_{\beta\alpha})$ e $(I', \overline{E}'_{\alpha'}, \overline{f}'_{\beta'\alpha'})$ e $\varinjlim_D$ é um funtor limite indutivo em D, então $(\varphi, \mu_\alpha) = F_\to(\varphi, \overline{\mu}_\alpha)$ é evidentemente um morfismo de $D_\to$, entre $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha}) = F_\to(I, \overline{E}_\alpha, \overline{f}_{\beta\alpha})$ e $(I', E'_{\alpha'}, f'_{\beta'\alpha'}) = F_\to(I', \overline{E}'_{\alpha'}, \overline{f}'_{\beta'\alpha'})$. Seja (E, f_α) e $(E', f'_{\alpha'})$ respectivamente seus limites indutivos considerados por $\varinjlim_D$, e $\mu = \varinjlim_D(\varphi, \mu_\alpha)$, $\mu : E \to E'$. Então, se $\bar{E}$ (respectivamente $\bar{E}'$) é estrutura final para a família $(\bar{E}_\alpha, f_\alpha)$ (respectivamente $(\bar{E}'_{\alpha'}, f_{\alpha'})$) relativamente a D e ao funtor F, e $\bar{f}_\alpha$ (respectivamente $\bar{f}'_{\alpha'}$) o único morfismo de $\mathcal{C}$, entre $\bar{E}_\alpha$ e $\bar{E}$ (respectivamente $\bar{E}'_{\alpha'}$ e $\bar{E}'$) t.q. $F(\bar{f}_\alpha) = f_\alpha$ (respectivamente $F(\bar{f}'_{\alpha'}) = f'_{\alpha'}$), então, já sabemos que $(\bar{E}, \bar{f}_\alpha)$ (respectivamente $(\bar{E}', \bar{f}'_{\alpha'})$) é limite indutivo de $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ (respectivamente de $(I', \bar{E}'_{\alpha'}, \bar{f}'_{\beta'\alpha'})$). Além disso, $\exists$ único $\bar{\mu} : \bar{E} \to \bar{E}'$ t.q. $\bar{f}'_{\varphi(\alpha)} \circ \bar{\mu}_\alpha = \bar{\mu} \circ \bar{f}_\alpha$, $\forall \alpha \in I$ (prop. 2 §1.3). Logo, aplicando o funtor F a essa igualdade, temos: $f'_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha = F(\bar{\mu}) \circ f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, donde já que $\mu = \varinjlim_D(\varphi, \mu_\alpha)$ e portanto μ é o único morfismo de E em E' t.q. $f'_{\varphi(\alpha)} \circ \mu_\alpha = \mu \circ f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$ (prop. 2 §1.3), segue que $\mu = F(\bar{\mu})$. Façamos $\varinjlim_C(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha}) = \bar{E}$ (considerando o limite indutivo em relação a $(\bar{E}, \bar{f}_\alpha)$: ver observação em seguida à def. 14 §1.3), $\varinjlim_C(I', \bar{E}'_{\alpha'}, \bar{f}'_{\beta'\alpha'}) = \bar{E}'$, e $\varinjlim_C(\varphi, \bar{\mu}_\alpha) = \bar{\mu}$. Então temos: $F \circ \varinjlim_C(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha}) = F(\bar{E}) = E = \varinjlim_D(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha}) = \varinjlim_D \circ \underrightarrow{F}(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$. Do mesmo modo, $F \circ \varinjlim_C(I', \bar{E}'_{\alpha'}, \bar{f}'_{\beta'\alpha'}) =$

$= \varinjlim_D \circ \underrightarrow{F}(I', \bar{E}'_{\alpha'}, \bar{f}'_{\beta'\alpha'})$. Além disso, $F \circ \varinjlim_C(\varphi, \bar{\mu}_\alpha) = F(\bar{\mu}) = \mu =$

$= \varinjlim_D(\varphi, \mu_\alpha) = \varinjlim_D \circ \underrightarrow{F}(\varphi, \bar{\mu}_\alpha)$.

Logo, $F \circ \varinjlim_C = \varinjlim_D \circ \underrightarrow{F}$, para êste particular $\varinjlim_C$. Acabamos de ver que: dado um $\varinjlim_D$, podemos achar um particular $\varinjlim_C$ t.q. $F \circ \varinjlim_C = \varinjlim_D \circ \underrightarrow{F}$.

Para verificar que, dado um $\varinjlim_C$, podemos achar um particular $\varinjlim_D$ t.q. $F \circ \varinjlim_C = \varinjlim_D \circ \underrightarrow{F}$, precisamos primeiro provar que se $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo em $\mathcal{C}$, de limite indutivo $(\bar{E}, \bar{f}_\alpha)$, então (E, f_α) é um limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ em D, se chamarmos $F(\bar{E}_\alpha) = E_\alpha$, $F(\bar{f}_{\beta\alpha}) = f_{\beta\alpha}$, $F(\bar{E}) = E$ e $F(\bar{f}_\alpha) = f_\alpha$, pois então o resto da demonstração é trivial.

Ora, seja (E', f'_α) um limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ em D:

como $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$, segue que (condição L_2 de limite indut.) $\exists$ um e um só morfismo $f: E' \to E$ em D t.q. $f \circ f'_\alpha = f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Seja $\bar{E}'$ uma estrutura final fraca para a família $(\bar{E}_\alpha, f'_\alpha)_{\alpha \in I}$ em relação à categoria D e ao funtor F e seja $\bar{f}'_\alpha$ o único morfismo de $\bar{E}_\alpha$ em $\bar{E}'$ (em C), t.q. $F(\bar{f}'_\alpha) = f'_\alpha$ (prop. 7). Já sabemos que $(\bar{E}', \bar{f}'_\alpha)$ é um limite indutivo de $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ em C. Então (prop. 1a §1.3), $\exists$ um único morfismo de C: $\bar{f}: \bar{E}' \to \bar{E}$, t.q. $\bar{f} \circ \bar{f}'_\alpha = \bar{f}_\alpha$ $\forall \alpha \in I$ e $\bar{f}$ é isomorfismo. Aplicando o funtor F a essa igualdade, temos: $F(\bar{f}) \circ F(\bar{f}'_\alpha) = F(\bar{f}_\alpha)$ ou seja, $F(\bar{f}) \circ f'_\alpha = f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$ mas, f é o único morfismo de E' em E t.q. $f \circ f'_\alpha = f_\alpha$ $\forall \alpha \in I$ $\therefore F(\bar{f}) = f$. Ora, como $\bar{f}$ é isomorfismo, é claro que f também é isomorfismo. Então, pela prop. 1b §1.3, segue que (E, f_α) é limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ em D.

<u>Corolário</u>: Com as mesmas hipóteses da prop. 10, se $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo em C, de lim. indutivo $(\bar{E}, \bar{f}_\alpha)$ e $F(\bar{E}_\alpha) = E_\alpha$, $F(\bar{E}) = E$, $F(\bar{f}_{\beta\alpha}) = f_{\beta\alpha}$, $F(\bar{f}_\alpha) = f_\alpha$, então a) $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre D, de limite indutivo (E, f_α) e b) $\bar{E}$ é <u>estrutura final</u> para a família (E_α, f_α) relativamente à D e ao funtor F.

<u>Dem</u>: A parte a) é o fim da demonstração da prop. 10. A parte b) segue da parte a) do corolário e da prop. 9 b_3.

<u>Observações</u>: 1) As condições da prop. 10 são muito mais fortes do que as que realmente se necessita: bastaria que os sistemas indutivos de D que são imagens por F dalgum sistema indutivo de C tivessem limites indutivos e bastaria que existissem estruturas finais fracas duma pequena classe de famílias.

2) Para mostrar que nem sempre, quando C é subcategoria de D, relativamente a um funtor F, C tem estruturas finais fracas relativamente a D e ao funtor F, basta tomar para D a categoria dos espaços topológicos, para C a categoria dos grupos topológicos, e para F o funtor es-

quecimento de $\mathcal{C}$ em D: veremos na próxima seção que $\mathcal{C}$ e D têm limites indutivos. Mas então, se $\mathcal{C}$ tivesse estruturas finais fracas relativamente a D e ao funtor F (mesmo nas condições mais fracas da observação anterior), teríamos, pela prop. 10, que os funtores limites indutivos comutariam com F, o que veremos no próximo parágrafo não ser verdade. Êste mesmo exemplo mostra que, ainda que $\mathcal{C}$ e D tenham limites indutivos, e $\mathcal{C}$ seja subcategoria de D relativamente a um funtor F, pode-se ter um sistema indutivo $(I, \bar{E}_\alpha, \bar{f}_{\beta\alpha})$ de $\mathcal{C}$, de limite indutivo $(\bar{E}, \bar{f}_\alpha)$ e apesar disto (E, f_α) não ser limite indutivo de $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, com as notações usuais. Entretanto deixeamos em aberto o seguinte problema:

<u>Problema em aberto</u>: Haverá alguma estrutura final fraca que não seja estrutura final?

<u>3. Existência de limites indutivos de estruturas topológico-algébricas</u>

O objetivo desta seção é provar que, se $\mathcal{C}$ é uma categoria álgebro-topológica (uma das usuais) e D é a categoria algébrica subjacente, então $\mathcal{C}$ tem estruturas finais relativamente a D e ao funtor esquecimento. Utilizando então o fato que D possui limites indutivos (quando é uma das categorias usuais: §2) e a prop. 10 da seção anterior, concluiremos que $\mathcal{C}$ tem limites indutivos.

<u>Proposição 11</u>: Se $f: E \longrightarrow F$ é uma aplicação de conjuntos, $\mathcal{T}_F$ uma topologia sôbre F, então $f^{-1}(\mathcal{T}_F) = \mathcal{T}$ é uma topologia sôbre E. ($f^{-1}(\mathcal{T}_F) = \{\Omega \subset E \mid \exists\, \Omega' \in \mathcal{T}_F$ t.q. $\Omega = f^{-1}(\Omega')\}$ por def.).

<u>Dem</u>: $F \in \mathcal{T}_F \therefore f^{-1}(F) = E \in \mathcal{T}$; $\phi \in \mathcal{T}_F \therefore f^{-1}(\phi) = \phi \in \mathcal{T}$.
Se $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}$, $\exists\, \Omega'_1, \Omega'_2 \in \mathcal{T}_F$ t.q. $f^{-1}(\Omega'_1) = \Omega_1$, $f^{-1}(\Omega'_2) = \Omega_2 \therefore f^{-1}(\Omega'_1 \cap \Omega'_2) = f^{-1}(\Omega'_1) \cap f^{-1}(\Omega'_2) = \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{T}$ já que $\Omega'_1 \cap \Omega'_2 \in \mathcal{T}_F$.

se $\Omega_i \in \mathcal{T}$, $\exists\ \Omega'_i \in \mathcal{T}_F$ t.q. $f^{-1}(\Omega'_i) = \Omega_i$, $\forall i \in I \therefore f^{-1}(\bigcup_{i\in I}\Omega'_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\Omega'_i) = \bigcup_{i\in I}\Omega_i \in \mathcal{T}$, já que $\bigcup_{i\in I}\Omega'_i \in \mathcal{T}_F$. Logo, $\mathcal{T}$ é topologia sôbre E.

<u>Observação</u>: $f:(E,\mathcal{T}) \to (F,\mathcal{T}_F)$ é contínua, e é claro que $\mathcal{T}$ é a menos fina das topologias sôbre E que tornam f contínua.

<u>Proposição 12</u>: Se $f: E \to F$ e $g: E' \to F'$ são aplicações de conjunto, $\mathcal{T}_F$ e $\mathcal{T}_{F'}$ topologias sôbre F e F' respectivamente, $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}_F)$, $\mathcal{T}' = g^{-1}(\mathcal{T}_{F'})$, então, considerando $f\times g: E\times E' \to F\times F'$ temos: $(f\times g)^{-1}(\mathcal{T}_F \times \mathcal{T}_{F'}) = \mathcal{T}\times\mathcal{T}'$.

<u>Dem</u>: Seja $(f\times g)^{-1}(\mathcal{T}_F\times\mathcal{T}_{F'}) = \mathcal{T}^*$. Temos que $f\times g: (E\times E', \mathcal{T}\times\mathcal{T}') \to (F\times F', \mathcal{T}_F\times\mathcal{T}_{F'})$ é contínua: pelo Lema 1 (seção 1), temos que é suficiente provar que $(f\times g)^{-1}(\Omega) \in \mathcal{T}\times\mathcal{T}'$, quando Ω percorre uma subbase de abertos de $\mathcal{T}_F\times\mathcal{T}_{F'}$, por exemplo, o conjunto das partes de $F\times F'$ da forma $\Omega_F \times \Omega_{F'}$, quando $\Omega_F \in \mathcal{T}_F$ e $\Omega_{F'} \in \mathcal{T}_{F'}$. Mas então $f^{-1}(\Omega_F) = \Omega \in \mathcal{T}$ e $g^{-1}(\Omega_{F'}) = \Omega' \in \mathcal{T}'$, $\therefore (f\times g)^{-1}(\Omega_F\times\Omega_{F'}) = f^{-1}(\Omega_F)\times g^{-1}(\Omega_{F'}) = \Omega\times\Omega' \in \mathcal{T}\times\mathcal{T}'$. Logo, pela observação anterior temos: $\mathcal{T}\times\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}^*$.
Por outro lado, o conjunto das partes de $E\times E'$ da forma $\Omega\times\Omega'$ com $\Omega\in\mathcal{T}$ e $\Omega'\in\mathcal{T}'$, é base de abertos de $\mathcal{T}\times\mathcal{T}'$ $\therefore$ é claro que se todos êsses conjuntos pertencerem a $\mathcal{T}^*$, teremos $\mathcal{T}\times\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}^*$ pois $\mathcal{T}^*$ é topologia sôbre $E\times E'$. Ora, se $\Omega\in\mathcal{T}$ e $\Omega'\in\mathcal{T}'$, existe $\Omega_F \in\mathcal{T}_F$ e $\Omega_{F'}\in\mathcal{T}_{F'}$ t.q. $f^{-1}(\Omega_F)=\Omega$ e $g^{-1}(\Omega_{F'}) = \Omega'$ $\therefore \Omega\times\Omega' = f^{-1}(\Omega_F)\times g^{-1}(\Omega_{F'}) = (f\times g)^{-1}(\Omega_F\times\Omega_{F'}) \therefore \Omega\times\Omega' \in \mathcal{T}^*$. Logo, $\mathcal{T}\times\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}^*$ e $\therefore \mathcal{T}\times\mathcal{T}' = \mathcal{T}^* = (f\times g)^{-1}(\mathcal{T}_F\times\mathcal{T}_{F'})$.

<u>Proposição 13</u>: Se T_E e T_F são leis de composição interna sôbre E e F respectivamente, $\mathcal{T}_F$ uma topologia sôbre F compatível com T_F e $f: E\to F$ uma aplicação de conjunto t.q. $f\circ T_E = T_F \circ (f\times f)$, então $f^{-1}(\mathcal{T}_F) = \mathcal{T}$ é compatível com T_E.

<u>Dem.</u>: Temos $T_F: (F\times F, \mathcal{T}_F\times\mathcal{T}_F) \to (F,\mathcal{T}_F)$ contínua por hipótese e o diagrama $E\times E \xrightarrow{f\times f} F\times F$ comutativo. Seja $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}_F)$:

$$\begin{tikzcd} E\times E \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "T_E"'] & F\times F \arrow[d, "T_F"] \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

pela prop. 11, τ é Topologia sôbre E, e pela prop. 12, $\tau\times\tau=(f\times f)^{-1}(\tau_F\times\tau_F)$. Seja $\Omega\in\tau$; então $\exists\,\Omega_F\in\tau_F$ t.q. $f^{-1}(\Omega_F)=\Omega$. Então $T_E^{-1}(\Omega)=T_E^{-1}(f^{-1}(\Omega_F))=(f\circ T_E)^{-1}(\Omega_F)=$ $=(T_F\circ(f\times f))^{-1}(\Omega_F)=(f\times f)^{-1}(T_F^{-1}(\Omega_F))\in\tau\times\tau$, pois $T_F^{-1}(\Omega_F)\in\tau_F\times\tau_F$ já que $T_F:(F\times F,\tau_F\times\tau_F)\to(F,\tau_F)$ é contínua. Logo τ é compatível com T_E.

<u>Proposição 14</u>: Se $f:E\to F$ é aplicação de conjuntos, $A\subset E$, $B\subset F$ t.q. $f(A)\subset B$, τ_F uma topologia sôbre F, τ_B a topologia induzida por τ_F sôbre B, $f^{-1}(\tau_F)=\tau$, então chamando $g=f|_A:A\to B$ teremos $g^{-1}(\tau_B)=\tau_A$, onde τ_A é a Topologia induzida por τ sôbre A. (<u>Nota</u>: Em particular, no caso $B=F$ e $g=f|_A:A\to F$, teremos $g^{-1}(\tau_F)=\tau_A$).

<u>Dem.</u>: Notemos que, se $H\subset B$, então $g^{-1}(H)=f^{-1}(H)\cap A$. Se $\Omega_A\in\tau_A$, $\exists\,\Omega\in\tau$ t.q. $\Omega\cap A=\Omega_A$ ∴ $\exists\,\Omega_F\in\tau_F$ t.q. $f^{-1}(\Omega_F)=\Omega$, isto é t.q. $f^{-1}(\Omega_F)\cap A=\Omega_A$. Seja $\Omega_B=\Omega_F\cap B\in\tau_B$ então $g^{-1}(\Omega_B)=g^{-1}(\Omega_F\cap B)=f^{-1}(\Omega_F\cap B)\cap A=f^{-1}(\Omega_F)\cap f^{-1}(B)\cap A=$ $=\Omega\cap f^{-1}(B)\cap A=\Omega\cap A=\Omega_A$ (pois $f^{-1}(B)\supset A$) ∴ $\Omega_A\in g^{-1}(\tau_B)$ ∴ $\tau_A\subset g^{-1}(\tau_B)$.

Se $\Omega\in g^{-1}(\tau_B)$, então $\exists\,\Omega_B\in\tau_B$ t.q. $g^{-1}(\Omega_B)=\Omega$, onde $\Omega_B=$ $\Omega_B=\Omega_F\cap B$ com $\Omega_F\in\tau_F$ ∴ $g^{-1}(\Omega_F\cap B)=\Omega$ ∴ $\Omega=f^{-1}(\Omega_F\cap B)\cap A=f^{-1}(\Omega_F)\cap f^{-1}(B)\cap A=f^{-1}(\Omega_F)\cap A\in\tau_A$, pois $f^{-1}(\Omega_F)\in\tau$. Logo, $g^{-1}(\tau_B)\subset\tau_A$, donde $g^{-1}(\tau_B)=\tau_A$.

<u>Proposição 15</u>: Se $f:E\to F$ é aplicação de conjuntos, τ_F Topologia sôbre F, $g_E:E\to E$, $g_F:F\to F$ aplicações de conjuntos t.q. $g_F:(F,\tau_F)\to(F,\tau_F)$ é contínua e o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_E"'] & F \arrow[d, "g_F"] \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

comutativo (isto é, $f\circ g_E=g_F\circ f$), $\tau=f^{-1}(\tau_F)$, então $g_E:(E,\tau)\to(E,\tau)$ é contínua.

<u>Dem.</u>: Seja $\Omega\in\tau$ ∴ $\exists\,\Omega_F\in\tau_F$ t.q. $\Omega=f^{-1}(\Omega_F)$. Então $g_E^{-1}(\Omega)=$ $=g_E^{-1}(f^{-1}(\Omega_F))=(f\circ g_E)^{-1}(\Omega_F)=(g_F\circ f)^{-1}(\Omega_F)=f^{-1}(g_F^{-1}(\Omega_F))\in\tau$ pois, $g_F^{-1}(\Omega_F)\in\tau_F$. Logo, $g_E:(E,\tau)\to(E,\tau)$ é contínua.

<u>Corolário</u>: Se $f:E\to F$ é aplicação de conjuntos, τ_F Topologia sôbre F, $A\subset E$, $B\subset F$, $f(A)\subset B$, τ_B: Topologia induzida por τ_F sôbre B;

$\mathcal{T}=f^{-1}(\mathcal{T}_F)$, $\mathcal{T}_A$: topologia induzida por $\mathcal{T}$ sôbre A, $g_A: A \to A$, $g_B: B \to B$ aplicações de conjuntos t.q. $g_B:(B,\mathcal{T}_B)\to(B,\mathcal{T}_B)$ é contínua e o diagrama
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar f} & B \\ {\scriptstyle g_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_B} \\ A & \xrightarrow{\bar f} & B \end{array}$$
seja comutativo (isto é, $\bar f \circ g_A = g_B \circ \bar f$), onde $\bar f = f|_A : A \to B$. Então $g_A:(A,\mathcal{T}_A)\to(A,\mathcal{T}_A)$ é contínua.

<u>Dem.</u>: Usar proposições 14 e 15.

<u>Proposição 16</u>: Se $\perp_E$ e $\perp_F$ são leis de composição externa entre Ω_E e E, Ω_F e F, respectivamente, $\mathcal{T}_{\Omega_E}$, $\mathcal{T}_{\Omega_F}$, topologias sôbre Ω_E e Ω_F respectivamente, $\mathcal{T}_F$ uma topologia sôbre F, compatível com $\perp_F$ relativamente a $\mathcal{T}_{\Omega_F}$; $f: E \to F$ e $\varphi: \Omega_E \to \Omega_F$ aplicações de conjuntos t.q. $\perp_F \circ (\varphi \times f) = f \circ \perp_E$ e $\varphi: (\Omega_E, \mathcal{T}_{\Omega_E}) \to (\Omega_F, \mathcal{T}_{\Omega_F})$ seja contínua. Então, $f^{-1}(\mathcal{T}_F)=\mathcal{T}$ é compatível com $\perp_E$, relativamente a $\mathcal{T}_{\Omega_E}$, e de modo mais geral, relativamente a qualquer topologia sôbre Ω_E, mais fina que $\varphi^{-1}(\mathcal{T}_{\Omega_F})$.

<u>Dem.</u>: $\varphi:(\Omega_E,\mathcal{T}_{\Omega_E})\to(\Omega_F,\mathcal{T}_{\Omega_F})$ contínua $\therefore$ $\mathcal{T}_0=\varphi^{-1}(\mathcal{T}_{\Omega_F})\subset\mathcal{T}_{\Omega_E}$.
Pela prop. 12, $\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}=(\varphi\times f)^{-1}(\mathcal{T}_{\Omega_F}\times\mathcal{T}_F)$. Por hipótese, $\perp_F:(\Omega_F\times F, \mathcal{T}_{\Omega_F}\times\mathcal{T}_F)\to(F,\mathcal{T}_F)$ é contínua e o diagrama
$$\begin{array}{ccc} \Omega_E\times E & \xrightarrow{\varphi\times f} & \Omega_F\times F \\ {\scriptstyle \perp_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \perp_F} \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$
é comutativo. Seja $U\in\mathcal{T}$: então $\exists\, U_F\in\mathcal{T}_F$ t.q. $U=f^{-1}(U_F)$.
Então $\perp_E^{-1}(U)=\perp_E^{-1}(f^{-1}(U_F))=(f\circ\perp_E)^{-1}(U_F)=(\perp_F\circ(\varphi\times f))^{-1}(U_F)=$
$=(\varphi\times f)^{-1}(\perp_F^{-1}(U_F))\in(\varphi\times f)^{-1}(\mathcal{T}_{\Omega_F}\times\mathcal{T}_F)=\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}$, pois $\perp_F^{-1}(U_F)\in\mathcal{T}_{\Omega_F}\times\mathcal{T}_F$.
Mas $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}_{\Omega_E}$ $\therefore$ $\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_{\Omega_E}\times\mathcal{T}$ $\therefore$ $(\perp_E)^{-1}(U)\in\mathcal{T}_{\Omega_E}\times\mathcal{T}$ $\therefore$
$\perp_E:(\Omega_E\times E, \mathcal{T}_{\Omega_E}\times\mathcal{T}')\to(E,\mathcal{T})$ é contínua se $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}_0$ $\therefore$ $\mathcal{T}$ é compatível com $\perp_E$, relativamente a $\mathcal{T}'$ se $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}_0$; em particular $\mathcal{T}$ é compatível com $\perp_E$, relativamente a $\mathcal{T}_{\Omega_E}$.

<u>Observações</u>: As proposições 13 e 15 permitem ~~[illegible]~~ afirmar: se E e F são grupos (anéis, corpos, etc.), $f: E\to F$ homomorfismo de grupo (anel, corpo, etc.), $\mathcal{T}_F$ uma topologia sôbre F compatível com a estrutura de grupo (anel, corpo, etc) de F, então $f^{-1}(\mathcal{T}_F)=\mathcal{T}$ é uma topologia sôbre E, compatível com a estrutura de grupo (anel, corpo, etc.) de E. (No caso de corpos, usar o corolário da prop. 12: há 2 casos: se f é injetora

então $f(E-\{0\}) \subset F-\{0\}$ e basta usar o corolário da prop. 12; se $f=0$, então $f^{-1}(\mathcal{T}_F)$ é a Topologia caótica. ∴ a Topologia induzida por $\mathcal{T}$ sôbre $E-\{0\}$ é a caótica, e é claro que $\bar{x}: E-\{0\} \to E-\{0\}$ é contínua com essa Topologia). No "etc.", incluem-se as categorias C_1, $C_2^{(n)}$, grupos abelianos, etc.

2) As proposições 13, 15 e 16 permitem afirmar: se E é um módulo sôbre o anel Topológico A_E (espaço vetorial ou álgebra sôbre o corpo Topológico K_E), F é módulo sôbre o anel Topológico A_F (espaço vetorial ou álgebra sôbre o corpo Topológico K_F, etc.); (f,φ) — onde $\varphi: A_E \to A_F$ e $f: E \to F$ — um homomorfismo generalizado de módulos ($\varphi: K_E \to K_F$ e $f: E \to F$ — um homomorf. generalizado de esp. vet. ou álgebras), e φ é contínua, então se $\mathcal{T}_F$ é uma Topologia sôbre F, compatível com a estrutura de módulo de F sôbre o anel Topológico A_F (com a estrutura de esp. vet ou álgebra de F sôbre o corpo Topológico K_F, etc.), e $\mathcal{T}=f^{-1}(\mathcal{T}_F)$ temos que $\mathcal{T}$ é Topologia sôbre E, compatível com a estrutura de módulo de E sôbre o anel topológico A_E (com a estrutura de esp. vet. ou álgebra de E sôbre o corpo Topológico K_E, etc.). No "etc." incluem-se as categorias $C_{3,n}$, $C_{4,n_1,\dots,n_r}$, etc.

Proposição 17: se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de espaços Topológicos A_i (grupos Topológicos, anéis top., corpos top., etc.) de conjunto base A_i (grupo base, anel base, corpo base, etc.), E é um conjunto (grupo, anel, corpo, etc.) e $(g_i)_{i \in I}$ uma família de morfismos $g_i: A_i \to E$ na categoria dos conjuntos (grupos, anel, corpo, etc.), então $\exists$ uma Topologia $\mathcal{T}$ sôbre E t.q. $(E,\mathcal{T})$ é estrutura final para a família $(A_i, g_i)_{i \in I}$, relativ. ao funtor esquecimento F, da categoria dos espaços Topológicos na categoria de conjuntos (de grupos top. na de grupos, anéis top. na de anéis, corpos top. na de corpos, etc.). (No "etc." incluem-se as categorias C_1, $C_2^{(n)}$, etc.).

Dem.: seja $\mathcal{C}$ o conjunto das Topologias sôbre E (compatíveis com sua estrutura de grupo, anel, corpo, etc.) que tornam tôdas as g_i contínuas; $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ pois a topologia caótica sôbre E evidentemente pertence a $\mathcal{Q}$; seja $\mathcal{T}_E$ o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$; pela observação 1 do fim da seção 1, temos que $\mathcal{T}_E$ é uma topologia sôbre E (compatível com a estrutura de grupo, anel, corpo, etc. de E); $(E, \mathcal{T}_E)$ é um espaço topológico (grupo top., anel top., corpo top., etc.) e pela proposição 6, tôdas as g_i são contínuas de $\bar{A}_i$ em $(E, \mathcal{T}_E)$.

Seja $(F, \mathcal{T}_F)$ um espaço topológico (grupo top., anel top., corpo top., etc.) e $f: E \to F$ um morfismo na categoria de conjuntos (grupos, anéis, corpos, etc.). É claro que, se f for contínua, então $f \circ g_i$ é contínua $\forall i \in I$, pois g_i é contínua $\forall i \in I$. Reciprocamente se $f \circ g_i$ é contínua $\forall i \in I$, consideremos $f^{-1}(\mathcal{T}_F) = \mathcal{T}$: pela observação 1 anterior, $\mathcal{T}$ é uma topologia sôbre E (compatível com sua estrutura de grupo, anel, corpo, etc.) e é claro que $g_i: \bar{A}_i \to (E, \mathcal{T})$ são contínuas, $\forall i \in I$, pois $f \circ g_i: \bar{A}_i \to (F, \mathcal{T}_F)$ são contínuas, $\forall i \in I$. Logo $\mathcal{T} \in \mathcal{Q}$ $\therefore$ $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_E$. Mas $f: (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{T}_F)$ é contínua (observação posterior a prop. 11) e com maior razão, $f: (E, \mathcal{T}_E) \to (F, \mathcal{T}_F)$ é contínua. Logo, $(E, \mathcal{T}_E)$ é estrutura final para a família $(\bar{A}_i, g_i)_{i \in I}$, relativamente aos respectivos funtores esquecimentos.

<u>Proposição 12</u>: Se $(\bar{E}_i)_{i \in I}$ é uma família de módulos topológicos sôbre os anéis topológicos com elemento unidade $\bar{A}_i$, se E é módulo topológico sôbre o anel com elemento unidade A, $(g_i, \varphi_i)_{i \in I}$ uma família de morfismos na categoria de módulos generalizados, $(g_i, \varphi_i): (E_i, A_i) \to (E, A)$, onde (E_i, A_i) é o módulo subjacente ao módulo topológico $(\bar{E}_i, \bar{A}_i)$; então existem topologias $\mathcal{T}(A)$ e $\mathcal{T}(E)$ sôbre A e E respectivamente t.q. $(E, \mathcal{T}(E), A, \mathcal{T}(A))$ é estrutura final para a família $(\bar{E}_i, \bar{A}_i, (g_i, \varphi_i))_{i \in I}$ relativamente ao funtor esquecimento F, da categoria dos módulos topológicos generalizados

na categoria dos módulos generalizados. Nota: Vale o mesmo para as demais categorias usuais.

Dem.: Tomemos $\mathcal{T}(A)$ t.q. $(A, \mathcal{T}_{\bar{A}})$ seja estrutura final para a família $(\bar{A}_i, \varphi_i)$ relativamente ao funtor esquecimento F^*: da categoria de anéis topológicos com elemento unidade na categoria de anéis com elemento unidade. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto das topologias sôbre E, compatíveis com sua estrutura de módulo sôbre A, relativamente à topologia $\mathcal{T}(A)$, que tornam tôdas as g_i contínuas. $\mathcal{O} \neq \emptyset$ pois a topologia caótica pertence a $\mathcal{O}$. Seja $\mathcal{T}(E)$ o supremo de $\mathcal{O}$ em $T(E)$: então ~~[illegible]~~ $(E, \mathcal{T}(E), A, \mathcal{T}(A))$ satisfaz a proposição. O resto da demonstração é análogo a proposição anterior.

Corolário 1: As categorias de espaços topológicos, grupos topológicos, anéis topológicos, módulos topológicos, sôbre um anel topológico A, generalizados de módulos topológicos, etc., tem limites indutivos. (que comutam com os funtores esquecimento que só esquecem a topologia).

Dem.: Usar as proposições 17, 18 e 20.

Corolário 2: Um sistema indutivo $(I, K_\alpha; f_{\beta\alpha})$ de corpos topológicos tem limite indutivo se $\exists \alpha \in I$ t.q. $\forall \beta \geq \alpha$, tem-se $f_{\beta\alpha}$ injetora.

Dem.: Prop. 4 a e c §2.2 e prop. 17 e 10.

Observações: 1) Um sistema indutivo $(I, K_\alpha, f_{\beta\alpha})$ de corpos topológicos t.q. $\forall \alpha \in I$ $\exists \beta \geq \alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha} = 0$ não tem limite indutivo. Com efeito, seja $(\bar{E}, f_\alpha)$ o limite indutivo de $(I, K_\alpha, f_{\beta\alpha})$ na categoria de anéis topológicos. Então, se K é um corpo topológico e $\mu_\alpha : K_\alpha \longrightarrow K$ uma família de homomorfismos contínuos t.q. $\mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$, se $\alpha \leq \beta$, então $\exists$ um morfismo contínuo $f : \bar{E} \longrightarrow K$ t.q. $\mu_\alpha = f \circ f_\alpha$, $\forall \alpha \in I$, e como $\bar{E} = \{0\}$ (Prop. 4 b e c §2.2, e prop. 17 e 10) segue que $f = 0$ $\therefore$ $\mu_\alpha = 0$ $\forall \alpha \in I$. Então, se (K, μ_α) fôsse um limite indutivo na categoria dos corpos, teríamos $\mu_\alpha = 0$. Mas então, $1_K \circ \mu_\alpha = \mu_\alpha \ \forall \alpha \in I$ e $0_K \circ \mu_\alpha = \mu_\alpha \ \forall \alpha \in I$, o que é absurdo, pois $1_K \neq 0_K$ e por L_2 teríamos $0_K = 1_K$.

2) Pelas demonstrações das proposições 17 e 18 e tendo em vista os corolários 1 e 2 temos:

$$\mathcal{T}_T \supset \mathcal{T}_{C_{ET}} \supset \mathcal{T}_G \supset \mathcal{T}_V \ (\supset \mathcal{T}_{LC})$$
$$\supset \mathcal{T}_A \supset \mathcal{T}_K,$$ no seguinte sentido:

se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo na categoria C_{ET} e (E, f_α) é seu limite indutivo na categoria dos conjuntos e $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$ e $((E, \mathcal{T}_{C_{ET}}), f_\alpha)$ são seus limites indutivos respectivamente nas categorias de espaço topológico e na categoria C_{ET}, então $\mathcal{T}_T \supset \mathcal{T}_{C_{ET}}$. Analogamente para as demais inclusões, onde por $\mathcal{T}_G$ representaríamos a topologia correspondente ao limite indutivo na categoria de grupos, $\mathcal{T}_A$ na de anéis, $\mathcal{T}_K$ na de corpos, $\mathcal{T}_V$ na de espaços vetoriais sôbre um corpo fixo K (e $\mathcal{T}_{LC}$ na de espaços convexos: ver seção seguinte) desde que o sistema indutivo seja sôbre essas categorias.

4. Limite indutivo de espaços localmente convexos.

Nesta seção, demonstraremos ràpidamente a existência de limites indutivos de espaços localmente convexos, mas no espírito das seções anteriores, e não pelo processo usual. Exceto as proposições referentes diretamente à existência de limites indutivos, não demonstraremos as proposições desta seção (ver ROBERTSON & ROBERTSON). Os espaços vetoriais aqui considerados serão sempre sôbre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que designaremos genèricamente por $\mathbb{K}$.

Def. 16: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito convexo se, $\forall x, y \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, com $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ e $\lambda + \mu = 1$, então $\lambda x + \mu y \in A$.

dos corpos, teríamos $\mu_\alpha = 0$. Mas então, $1_K \circ \mu_\alpha = \mu_\alpha \; \forall \alpha \in I$ e $0_K \circ \mu_\alpha = \mu_\alpha \; \forall \alpha \in I$, o que é absurdo, pois $1_K \neq 0_K$ e por L_2 teríamos $0_K = 1_K$.

2) Pelas demonstrações das proposições 17 e 18 e tendo em vista os corolários 1 e 2 temos:

$$\mathcal{T}_T \supset \mathcal{T}_{C_T} \supset \mathcal{T}_G \supset \mathcal{T}_V \; (\supset \mathcal{T}_{lc})$$
$$\supset \mathcal{T}_A \supset \mathcal{T}_K,$$ no seguinte sentido:

se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo na categoria C_{IT} e (E, f_α) é seu limite indutivo na categoria dos conjuntos e $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$ e $((E, \mathcal{T}_{C_T}), f_\alpha)$ são seus limites indutivos respectivamente nas categorias de espaço topológico e na categoria C_{IT}, então $\mathcal{T}_T \supset \mathcal{T}_{C_T}$. Analogamente para as demais inclusões, onde por $\mathcal{T}_G$ representaríamos a topologia correspondente ao limite indutivo na categoria de grupos, $\mathcal{T}_A$ na de anéis, $\mathcal{T}_K$ na de corpos, $\mathcal{T}_V$ na de espaços vetoriais sôbre um corpo fixo K (e $\mathcal{T}_{lc}$ na de espaços convexos: ver seção seguinte) desde que o sistema indutivo seja sôbre essas categorias.

4. Limite indutivo de espaços localmente convexos.

Nesta seção, demonstraremos ràpidamente a existência de limites indutivos de espaços localmente convexos, mas no espírito das seções anteriores, e não pelo processo usual. Exceto as proposições referentes diretamente à existência de limites indutivos, não demonstraremos as proposições desta seção (ver ROBERTSON & ROBERTSON). Os espaços vetoriais aqui considerados serão sempre sôbre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que designaremos genèricamente por $\mathbb{K}$.

Def. 16: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito convexo se, $\forall x, y \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, com $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ e $\lambda + \mu = 1$, então $\lambda x + \mu y \in A$.

Def. 17: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito equilibrado se, $\forall x \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq 1$, então $\lambda x \in A$.

Def. 18: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito absolutamente convexo se fôr convexo e equilibrado.

Nota: A é absolutamente convexo $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, com $|\lambda|+|\mu| \leq 1$ então $\lambda x + \mu y \in A$.

Def. 19: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito absorvente se, $\forall x \in E$, $\exists \lambda > 0$, t.q. $x \in \mu A$, $\forall \mu \in \mathbb{K}$ com $|\mu| \geq \lambda$.

Nota: A intersecção finita de conjuntos absorventes é absorvente. A intersecção qualquer de convexos (respectiva/. equilibrados, absolutamente convexos) é convexo (respectiva/. equilibrado, absolutamente convexo).

Prop.-def. 1: Se A é um subconjunto do espaço vetorial E, então o conjunto de tôdas as combinações lineares finitas $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, com $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $x_i \in A$, $\forall i = 1, \ldots, n$, é o menor subconjunto convexo de E que contém A. Êste conjunto é chamado a envoltória convexa de A.

Prop.-def. 2: Se A é subconjunto do espaço vetorial E, então o conjunto de tôdas as combinações lineares finitas $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, com $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1$ e $x_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$ é o menor subconjunto absolutamente convexo de E que contém A. Êste conjunto é chamado a envoltória absolutamente convexa de A.

Nota: Se $(A_j)_{j \in J}$ é família de conjuntos absolutamente convexos e $A = \bigcup_{j \in J} A_j$, então a envoltória convexa W de A coincide com a envoltória absolutamente convexa de A, e todo $x \in W$ é da forma $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, onde $x_i \in A_i$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Proposição 19: Se E é um grupo abeliano topológico (esp. vetorial topológico), então, $\forall a \in E$, a translação $f: E \to E$ definida por $f(x) = x + a$ é um homeomorfismo de E sôbre si próprio. Em particular, se $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhanças da origem de E, então $\mathcal{U}+a$ é uma base de vizinhanças de a (Prop. 1 de ROBERTSON & ROBERTSON) (ver também §4.1.B, lema 3 e corolário). Quando não houver confusão, chamaremos as vizinhanças da origem apenas de vizinhanças.

Corolário: Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são duas topologias sôbre E, compatíveis com a estrutura de grupo abeliano de E, e se $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são bases de vizinhanças da origem em $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, respectivamente e se $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2$, então $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

Proposição 20: $\forall \alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, a homotetia $f: E \to E$ definida por $f(x) = \alpha x$ é homeomorfismo de E sôbre si próprio (onde E é um espaço vetorial). Em particular, se U é uma vizinhança, então αU é uma vizinhança, $\forall \alpha \in K$, $\alpha \neq 0$. (Prop. 2 de ROBERTSON & ROBERTSON).

Proposição 21: Se $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhanças (da origem) para uma topologia sôbre E, compatível com sua estrutura de espaço vetorial, então, $\forall U \in \mathcal{U}$ temos:
a) U é absorvente; b) $\exists V \in \mathcal{U}$, com $V+V \subset U$; c) $\exists$ uma vizinhança equilibrada W da origem, com $W \subset U$. (Prop. 3 de ROBERTSON & ROBERTSON)

Def. 20: Se E é um espaço vetorial topológico t.q. $\exists$ uma base de vizinhanças convexas da origem, então E é dito um espaço vetorial topológico localmente convexo, ou, mais resumidamente, um espaço convexo. Uma topologia $\mathcal{T}$ que torne E um espaço convexo é dita uma topologia localmente convexa sôbre E.

Proposição 22: Um espaço convexo E tem uma base $\mathcal{U}$ de vizinhanças (da origem), com as seguintes propriedades: a) se $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$, então $\exists W \in \mathcal{U}$, com $W \subset U \cap V$; b) se $U \in \mathcal{U}$ e $\alpha \neq 0$, $\alpha \in K$, então $\alpha U \in \mathcal{U}$; c) se $U \in \mathcal{U}$, então U é absolutamente convexo e absorvente. Reciprocamente, dado um conjunto $\mathcal{U} \neq \emptyset$ de subconjuntos de um espaço vetorial E, satisfazendo as propriedades a, b e c, então existe uma topologia $\mathcal{T}$ localmente convexa sôbre E, t.q. $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças da origem, de $\mathcal{T}$. (Teorema 2 de BOURBAKI)

<u>Def. 21</u>: A categoria dos espaços convexos é a que tem por objetos os espaços convexos, por morfismos as aplicações lineares contínuas, e por composição de morfismos a composição de aplicações de conjuntos.

<u>Proposição 23</u>: Se E é um espaço vetorial sôbre $\mathbb{K}$, e $\mathcal{Q}$ é um conjunto não vazio de topologias localmente convexas sôbre E, então o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$ é uma topologia localmente convexa sôbre E.

<u>Dem.</u>: Seja $\mathcal{Q} = \{\mathcal{T}_j \mid j \in J\}$, e seja $\mathcal{U}_j$ uma base de vizinhanças (da origem), de $\mathcal{T}_j$, satisfazendo as condições a, b, c da prop. 22, $\forall j \in J$. Seja $H = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$ e seja $\mathcal{U}$ o conjunto de tôdas as intersecções finitas de elementos de H. Devido à nota em seguida à def. 19, segue que $\mathcal{U}$ satisfaz a condição c da prop. 22 e as condições a e b são evidentemente satisfeitas. Logo, pela prop. 22 $\exists$ uma topologia $\mathcal{T}$ localmente convexa sôbre E, que admite $\mathcal{U}$ para base de vizinhanças da origem de $\mathcal{T}$.

Verifiquemos que $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$: Por um lado, $\mathcal{U} \supset H = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j \therefore \mathcal{U} \supset \mathcal{U}_j \; \forall j \in J \therefore \mathcal{T} \supset \mathcal{T}_j \; \forall j \in J$ (corolário da prop. 19). Logo, se $\mathcal{T}^*$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$ temos $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}^*$. Por outro lado já sabemos que $\mathcal{T}^*$ é compatível com a estrutura de espaço vetorial de E (observação 2, em seguida à def. 8, da seção 1). Além disso, como $\mathcal{T}^* \supset \mathcal{T}_j$, $\forall j \in J$, segue que, se $\mathcal{U}^*$ é o conjunto de tôdas as vizinhanças da origem, de $\mathcal{T}^*$, então $\mathcal{U}^* \supset \mathcal{U}_j$, $\forall j \in J \therefore$ $\mathcal{U}^* \supset H = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$, e $\therefore \mathcal{U}^* \supset \mathcal{U}$, donde $\mathcal{T}^* \supset \mathcal{T}$ (corolário da prop. 19). Logo, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$, isto é, $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ em $T(E)$.

<u>Proposição 24</u>: Se E e F são dois espaços vetoriais sôbre o corpo $\mathbb{K}$, $\mathcal{T}_F$ uma topologia localmente convexa sôbre F, $f: E \longrightarrow F$ uma aplicação linear, então $f^{-1}(\mathcal{T}_F)$ é uma topo-

logia localmente convexa sôbre E.

<u>Dem:</u> seja $\mathcal{U}_F$ uma base de vizinhanças (da origem) em $\mathcal{T}_F$, satisfazendo as condições a, b e c da prop. 22. Então $f^{-1}(\mathcal{U}_F) = \mathcal{U}_E$ evidentemente satisfaz as mesmas condições, donde, pela prop. 22, $\exists$ uma topologia $\mathcal{T}$ localmente convexa sôbre E, que admite $\mathcal{U}_E$ para base de vizinhanças da origem. Provemos que $f^{-1}(\mathcal{T}_F) = \mathcal{T}$: seja $f^{-1}(\mathcal{T}_F) = \mathcal{T}^*$. É claro que todo elemento de $\mathcal{U}_E$ é vizinhança da origem em $\mathcal{T}^*$, donde $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ (corolário da prop. 19). Por outro lado, é claro que uma vizinhança da origem em $\mathcal{T}^*$ contém a imagem inversa de uma vizinhança da origem em $(F, \mathcal{T}_F)$ $\therefore$ contém a imagem inversa de um elemento de $\mathcal{U}_F$ $\therefore$ contém um elemento de $\mathcal{U}_E$. Logo, $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ (corolário da prop. 19). Logo, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$, isto é, $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}_F)$.

A demonstração da proposição abaixo, é essencialmente a demonstração das props. 17 e 18.

<u>Proposição 25</u>: Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de espaços convexos, E um espaço vetorial, e $(g_i)_{i\in I}$ uma família de aplicações lineares de A_i em E, então $\exists$ uma topologia $\mathcal{T}$ sôbre E, t.q. $(E, \mathcal{T})$ é estrutura final para a família $(A_i, g_i)_{i\in I}$, relativamente ao funtor esquecimento F da categoria de espaços convexos na categoria de espaços vetoriais. (Resumidamente: a categoria de espaços convexos tem estruturas finais relativamente a categoria de espaços vetoriais e ao funtor F).

<u>Dem.</u>: seja $\mathcal{A}$ o conjunto das topologias localmente convexas sôbre E, que tornam tôdas as g_i contínuas: $\mathcal{A} \neq \emptyset$ pois a topologia caótica pertence a $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{T}$ o supremo de $\mathcal{A}$ em $T(E)$: então $\mathcal{T}$ é topologia localmente convexa sôbre E (prop. 23), que torna tôdas as g_i contínuas (prop. 6). Se $(G, \mathcal{T}_G)$ é espaço convexo, $f: E \to G$ aplicação linear

então: se f é contínua, segue que $f \circ g_i$ é aplicação linear contínua de A_i em G, $\forall i \in I$; se $f \circ g_i$ é aplicação linear contínua de A_i em G, $\forall i \in I$, então, se $f^{-1}(\mathcal{T}_G) = \mathcal{T}_E$, temos que $\mathcal{T}_E$ é topologia localmente convexa sôbre E (prop. 24) e é claro que $g_i : A_i \longrightarrow (E, \mathcal{T}_E)$ é contínua, pois $f \circ g_i : A_i \longrightarrow (G, \mathcal{T}_G)$ é contínua. Logo, $\mathcal{T}_E \in \mathcal{Q}$ $\therefore$ $\mathcal{T}_E \subset \mathcal{T}$. Mas, $f : (E, \mathcal{T}_E) \longrightarrow (G, \mathcal{T}_G)$ é contínua (observação posterior à prop. 11), donde, com maior razão, $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (G, \mathcal{T}_G)$ é contínua. Logo $(E, \mathcal{T})$ é estrutura final para a família $(A_i, g_i)_{i \in I}$, relativamente ao funtor esquecimento F. (def. 13).

<u>Corolário:</u> A categoria dos espaços convexos tem limites indutivos (que comutam com o funtor F).

<u>Dem.:</u> Usar corolário da prop. 6, §2.3, e as proposições 10 e 25 dêste parágrafo.

§4: Comutatividade de limite indutivo com o funtor esquecimento.

Introdução

Quando se tem um sistema indutivo de espaços convexos, denotaremos respectivamente por $\mathcal{T}_{LC}$, $\mathcal{T}_V$, $\mathcal{T}_G$; $\mathcal{T}_{C_1}$, $\mathcal{T}_T$ à topologia do limite indutivo dêsse sistema, considerado na categoria de espaços convexos, espaços vetoriais topológicos sôbre $\mathbb{K}$, grupos topológicos, C_1, espaços topológicos. (Anàlogamente, se se tem um sistema indutivo de espaços vetoriais topológicos sôbre $\mathbb{K}$ (ou grupos topológicos, ou C_{1T}), usaremos as notações $\mathcal{T}_V$, $\mathcal{T}_G$, $\mathcal{T}_{C_1}$, $\mathcal{T}_T$ (ou $\mathcal{T}_G$, $\mathcal{T}_{C_1}$, $\mathcal{T}_T$ ou $\mathcal{T}_{C_1}$, $\mathcal{T}_T$) com os significados evidentes. A comutatividade dos diversos funtores esquecimento (que não esquecem a estrutura topológica) com os limites indutivo se reduz à igualdade entre as diversas topologias acima. O objetivo dêste § e do próximo é procurar condições para que se tenha a igualdade entre tais topologias). Tal frase tem sentido, pois o conjunto subjacente do limite indutivo em qualquer das categorias mencionadas é o mesmo, como foi visto nos parágrafos 2 e 3. Lembramos (observ. 2 do fim da seção 3 do §3), que sempre se tem: $\mathcal{T}_T \supset \mathcal{T}_{C_1} \supset \mathcal{T}_G \supset \mathcal{T}_V \supset \mathcal{T}_{LC}$.
Daremos uma atenção secundária ao problema de procurar a igualdade entre $\mathcal{T}_G$, $\mathcal{T}_A$ e $\mathcal{T}_K$ se $\mathcal{T}_G$, $\mathcal{T}_A$ e $\mathcal{T}_K$ representam a topologia dum limite indutivo dum sistema indutivo de corpos topológicos respectivamente nas categorias de grupos topológicos, anéis topológicos e corpos topológicos. Lembramos que se tem sempre: $\mathcal{T}_T \supset \mathcal{T}_{C_1} \supset \mathcal{T}_G \supset \mathcal{T}_A \supset \mathcal{T}_K$.

1. Limite indutivo de grupos topológicos (quando que $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_T$?)

A) Grupos semi-topológicos e quase topológicos

Def. 1: Um par $(G, \mathcal{T})$ se diz um grupo semi-topológico se G é um grupo e $\mathcal{T}$ uma topologia sôbre G t. q.:

1) $\forall a \in G$, as translações $x \longrightarrow ax$ e $x \longrightarrow xa$, de G em G, são contínuas.

2) a aplicação $x \longrightarrow x^{-1}$ de G em G é contínua.

<u>Def. 2</u>: Um par $(G, \mathcal{T})$ se diz um <u>grupo</u> <u>quase-topológico</u> se fôr um grupo semi-topológico e se, $\forall a \in G$, a aplicação $x \longrightarrow xax^{-1}$ de G em G é contínua.

<u>Observações</u>: 1) Se $(G, \mathcal{T})$ é grupo semi-topológico (ou quase-topológico) e $\mathcal{T}$ fôr uma topologia localmente compacta, separada, sôbre G, então $(G, \mathcal{T})$ é um grupo topológico (ver capítulo X, §3, exercício 25 de Bourbaki: Topologie Générale, 2ª edição).
2) Se $(G, \mathcal{T})$ é grupo semi-topológico e G é comutativo, então $(G, \mathcal{T})$ é grupo quase-topológico.

<u>Def. 3</u>: Chamamos categoria dos grupos semi-topológicos (respectivamente quase-topológicos) à que tem por objetos os grupos semi-topológicos (respectivam. quase-topológicos) e por morfismos os homomorfismos de grupos contínuos. A composição de morfismos é a composição de aplicações.

<u>Proposição 1</u>: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre C_1, $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de espaços topológicos, de limites indutivos respectivamente $((E, T), f_\alpha)$ e $((E, \mathcal{T}), f_\alpha)$ (o conj. E e as aplicações f_α são as mesmas, pois êsses limites indutivos comutam com os funtores esquecimento, dessas categorias na categoria de conjuntos), então:
a) Se, $\forall \alpha \in I$, $\forall x_\alpha \in E_\alpha$, as aplicações $\psi_{x_\alpha}^{\alpha} : (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ definidas por $\psi_{x_\alpha}^{\alpha}(y_\alpha) = x_\alpha T_\alpha y_\alpha$, são contínuas (respectivam. as aplicações $\varphi_{x_\alpha}^{\alpha} : (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ definidas por $\varphi_{x_\alpha}^{\alpha}(y_\alpha) = y_\alpha T_\alpha x_\alpha$ são contínuas) então, $\forall x \in E$, a aplicação $\psi_x : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ definida por $\psi_x(y) = xTy$ é contínua (respectivam. a aplicação $\varphi_x : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ definida por $\varphi_x(y) = yTx$ é contínua).
b) Se $\forall \alpha \in I$, $\exists$ elemento neutro $e_\alpha \in E_\alpha$, t. q. $f_{\beta\alpha}(e_\alpha) = e_\beta$ se $\alpha \leq \beta$ e se, $\forall x_\alpha \in E_\alpha$, $\exists$ único simétrico $x_\alpha^{-1} \in E_\alpha$, e se $\forall \alpha \in I$, a aplicação $\overset{-1}{T}_\alpha : (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ definida por $\overset{-1}{T}_\alpha(x_\alpha) = x_\alpha^{-1}$ é

contínua, então pela Prop. 2d', §2.1, ∃ elemento neutro $e \in E$ ($f_\alpha(e_\alpha) = e$, $\forall \alpha \in I$) e, $\forall x \in E$ ∃ único simétrico $x^{-1} \in E$, valendo a relação $f_\alpha(\overset{-1}{T}_\alpha x_\alpha) = \overset{-1}{T}(f_\alpha(x_\alpha))$. Além disso, nêsse caso, $\overset{-1}{T} : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ é contínua. ($\overset{-1}{T}(x) = x^{-1}$ por def.)

c) Nas mesmas hipóteses de b, se $\forall x_\alpha \in E_\alpha$, a aplicação $\phi_{x_\alpha} : (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ definida por $\phi_{x_\alpha}(y_\alpha) = (y_\alpha T_\alpha x_\alpha) T_\alpha \overset{-1}{y_\alpha} = (y_\alpha T_\alpha x_\alpha) T_\alpha (\overset{-1}{T}_\alpha y_\alpha)$ é contínua (respectivo/. a aplicação $\theta_{x_\alpha} : (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ definida por $\theta_{x_\alpha}(y_\alpha) = y_\alpha T_\alpha (x_\alpha T_\alpha \overset{-1}{y_\alpha}) = y_\alpha T_\alpha (x_\alpha T_\alpha (\overset{-1}{T}_\alpha y_\alpha))$ é contínua) então, $\forall x \in E$, a aplicação $\phi_x : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ definida por $\phi_x(y) = (y T x) T y^{-1}$ é contínua (respectivo/. a aplicação $\theta_x : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ definida por $\theta_x(y) = y T (x T y^{-1})$ é contínua).

Dem: a) Seja $x \in E$ ∃ $\alpha_0 \in I$, $x_{\alpha_0} \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$ (lema 1a, §1.4), sabemos que $J = \{\beta \in I \mid \beta \geq \alpha_0\}$, com ordem induzida por I, é cofinal em I (exemplo da def. 10 §1.2), logo,
$(J, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ e $(J, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ são sistemas indutivos sôbre C_1 a categoria dos espaços topológicos respectivos de limites indutivos $((E, \mathcal{T}), (f_\alpha)_{\alpha \in J})$ e $((E, \mathcal{T}), (f_\alpha)_{\alpha \in J})$ (Prop. 4a, §1.3) de $\alpha \in J$ chamemos $x_\alpha = f_{\alpha\alpha_0}(x_{\alpha_0})$: assim se $\alpha \leq \beta$, teremos $f_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$ pois $f_{\beta\alpha}(x_\alpha) = f_{\beta\alpha} f_{\alpha\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x_\beta$; se $\beta \in J$, teremos $f_\beta(x_\beta) = x$ pois $f_\beta(x_\beta) = f_\beta f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$. Temos então o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\psi_{x_\alpha}"'] & E_\beta \arrow[d, "\psi_{x_\beta}"] \\ E_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] & E_\beta \end{tikzcd}$$

, pois

$\psi_{x_\beta} f_{\beta\alpha}(y_\alpha) = x_\beta T_\beta f_{\beta\alpha}(y_\alpha) =$

$= f_{\beta\alpha}(x_\alpha) T_\beta f_{\beta\alpha}(y_\alpha) = f_{\beta\alpha}(x_\alpha T_\alpha y_\alpha) = f_{\beta\alpha} \psi_{x_\alpha}(y_\alpha)$, $\forall y \in E_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$.
Como tôdas essas aplicações ψ_{x_α} são contínuas, segue que $(1_J, (\psi_{x_\alpha})_{\alpha \in J})$ é um morfismo de sistemas indutivos, de

$(J, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ em si próprio, assim como de

$(J, (E_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ em si próprio, donde ∃ uma única aplicação de conjunto $\psi : E \longrightarrow E$ t.q. $\psi \circ f_\alpha = f_\alpha \circ \psi_{x_\alpha}$, $\forall \alpha \in J$, e além disso

ψ é contínua (Prop. 2, §1.3). Seja $y \in E$, $\exists\, \alpha_1 \in J$, $y_{\alpha_1} \in E_{\alpha_1}$ t.q. $f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1}) = y$ (lema 1a, §1.4). Logo $\psi(y) = \psi(f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1})) = f_{\alpha_1}\psi_{\alpha_1 x_{\alpha_1}}(y_{\alpha_1}) =$

$= f_{\alpha_1}(x_{\alpha_1} T_{\alpha_1} y_{\alpha_1}) = f_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}) T f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1}) = x\, T y = \psi_x(y)$. Logo, $\psi = \psi_x$

e como ψ é contínua, segue que ψ_x é contínua. Analogamente se demonstra que as φ_x são contínuas.

b) É evidente que $f_{\beta\alpha} \circ \overset{*}{T}_\alpha = \overset{*}{T}_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ se $\alpha \leq \beta$, o que mostra (já que, por hipótese as aplicações $\overset{*}{T}_\alpha$ são contínuas, $\forall \alpha \in J$) que $(1_J, (\overset{*}{T}_\alpha)_{\alpha \in J})$ é um morfismo de sistemas indutivos de $(J, (E_\alpha, T_\alpha), f_{\beta\alpha})$ em si próprio, assim como $(J, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ em si próprio, donde $\exists$ uma única aplicação de conjunto $F : E \to E$ t.q. $f_\alpha \circ \overset{*}{T}_\alpha = F \circ f_\alpha$, $\forall \alpha \in J$, e além disso, F é contínua (Prop. 2, §1.3). Ora, sabemos que $f_\alpha \circ \overset{*}{T}_\alpha = \overset{*}{T} \circ f_\alpha$, $\forall \alpha \in J$, logo $\overset{*}{T} = F$ e $\therefore \overset{*}{T}$ é contínua.

c) Repetem-se as 10 primeiras linhas da demonstração da parte a. Temos, se $\alpha \leq \beta$, $\varphi_{x_\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_{\beta\alpha} \circ \varphi_{x_\alpha}$ pois: $\varphi_{x_\beta} f_{\beta\alpha}(y_\alpha) =$

$= (f_{\beta\alpha}(y_\alpha) T_\beta x_\beta) T_\beta (\overset{*}{T}_\beta f_{\beta\alpha}(y_\alpha)) = (f_{\beta\alpha}(y_\alpha) T_\beta f_{\beta\alpha}(x_\alpha)) T_\beta (f_{\beta\alpha}(\overset{*}{T}_\alpha y_\alpha)) =$

$= f_{\beta\alpha}(y_\alpha T_\alpha x_\alpha) T_\beta f_{\beta\alpha}(\overset{*}{T}_\alpha y_\alpha) = f_{\beta\alpha}((y_\alpha T_\alpha x_\alpha) T_\alpha (\overset{*}{T}_\alpha y_\alpha)) = f_{\beta\alpha} \circ \varphi_{x_\alpha}(y_\alpha)$, $\forall y_\alpha \in E_\alpha$. Como todas essas aplicações φ_{x_α} são contínuas, segue que $(1_J, (\varphi_{x_\alpha})_{\alpha \in J})$ é morfismo de sistemas indutivos de $(J, (E_\alpha, T_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ em si próprio, assim como de $(J, (E_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ em si próprio. Logo, $\exists$ uma única aplicação de conjunto $\phi : E \to E$ t.q. $\phi \circ f_\alpha = f_\alpha \circ \varphi_{x_\alpha}$, $\forall \alpha \in J$, que no caso é contínua. (Prop. 2, §1.3) Ora, se $y \in E$, $\exists\, \alpha_1 \in J$, $y_{\alpha_1} \in E_{\alpha_1}$ t.q. $f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1}) = y$ (lema 1a, §1.4), logo, $\phi(y) = \phi \circ f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1}) = f_{\alpha_1} \varphi_{x_{\alpha_1}}(y_{\alpha_1}) =$

$= f_{\alpha_1}((y_{\alpha_1} T_{\alpha_1} x_{\alpha_1}) T_{\alpha_1} (\overset{*}{T}_{\alpha_1} y_{\alpha_1})) = f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1} T_{\alpha_1} x_{\alpha_1}) T f_{\alpha_1}(\overset{*}{T}_{\alpha_1} y_{\alpha_1}) =$

$= (f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1}) T f_{\alpha_1}(x_{\alpha_1})) T (\overset{*}{T} f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1})) = (y\, T x) T (\overset{*}{T} y) = \varphi_x(y) \therefore \phi = \varphi_x$, donde φ_x é contínua.

Anàlogamente se demonstra que as θ_x são contínuas.

Corolário 1: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre a categoria de grupos semi-topológicos (respectiva/. quase-topológicos), $((E,\mathcal{T}),f_\alpha)$ e $((E,T),f_\alpha)$ seu limite indutivo na categoria de espaços topológicos e grupos, respectivamente, então $((E,T,\mathcal{T}),f_\alpha)$ é seu limite indutivo na categoria de grupos semi-topológicos (respectivamente quase-topológicos).

Corolário 2: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de grupos topológicos, de lim. indutivos $((E,T),f_\alpha)$ e $((E,\mathcal{T}),f_\alpha)$ nas categorias de grupos e de espaços topológicos, respectiva/, então $(E,T,\mathcal{T})$ é um grupo quase-topológico (mas não necessàriamente um grupo topológico).

Lema 1: Se $(E,T,\mathcal{T})$ é objeto da categoria $C_{1\mathcal{T}}$, então, $\forall x\in E$ as aplicações $\psi_x:(E,\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ e $\varphi_x:(E,\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ definidas por $\psi_x(y)=xTy$ e $\varphi_x(y)=yTx$ são contínuas.

Dem.: A aplicação $y\to(x,y)$ de $(E,\mathcal{T})$ em $(E\times E,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$ é evidentemente contínua, e a aplicação $T:(x,y)\to xTy$ de $(E\times E,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$ em $(E,\mathcal{T})$ é contínua por hipótese. Logo, a composta das duas, que é ψ_x é contínua. Análoga/ para φ_x.

Corolário: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre $C_{1\mathcal{T}}$, e $((E,\mathcal{T}),f_\alpha)$ e $((E,T),f_\alpha)$ seu limite indutivo na categoria de espaços topológicos e na categoria C_1, respectiva/. então, as aplicações ψ_x e φ_x, de $(E,\mathcal{T})$ em $(E,\mathcal{T})$ são contínuas $\forall x\in E$.

Dem.: Usar lema 1 e prop. 1a

B) Proposições fundamentais sôbre a igualdade $\mathcal{T}_\mathcal{E}=\mathcal{T}_\mathcal{I}$.

Def. 4: Se $(E,\mathcal{T})$ e $(E',\mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $f:E\to E'$ uma aplicação, dizemos que f é uma aplicação aberta se, $\forall\,\Omega\in\mathcal{T}$, $f(\Omega)\in\mathcal{T}'$.

Lema 2: Se E_1,E_2,F_1,F_2 são espaços topológicos, $E_1\neq\emptyset$, $E_2\neq\emptyset$, então as aplicações $f_1: E_1 \to F_1$ e $f_2: E_2 \to F_2$ são contínuas (respectivamente abertas), se e sòmente se, $f_1 \times f_2: E_1 \times E_2 \to F_1 \times F_2$ é contínua (respectivamente aberta) (onde $E_1 \times E_2$ representa o produto de E_1 por E_2, munido da topologia produto).

Dem.: a) Se f_1 e f_2 são contínuas, então $f_1 \times f_2$ é contínua: basta (lema 1, §3.1) provar que $(f_1 \times f_2)^{-1}(\Omega)$ é aberto quando Ω percorre uma base de abertos de $F_1 \times F_2$, por exemplo, quando $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, Ω_1 aberto em F_1 e Ω_2 aberto em F_2. Mas $(f_1 \times f_2)^{-1}(\Omega_1 \times \Omega_2) = f_1^{-1}(\Omega_1) \times f_2^{-1}(\Omega_2)$ que evidentemente é aberto em $E_1 \times E_2$.

b) Se f_1 e f_2 são abertas, então $f_1 \times f_2$ é aberta: se $\Omega \subset E_1 \times E_2$ é aberto, então $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i \times U_i$, onde Ω_i é aberto em E_1 e U_i é aberto em E_2, $\forall i \in I$. Logo $f_1 \times f_2(\Omega) = f_1 \times f_2(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \times U_i) = \bigcup_{i \in I} (f_1 \times f_2)(\Omega_i \times U_i) = \bigcup_{i \in I} f_1(\Omega_i) \times f_2(U_i)$, que evidentemente é aberto.

c) Se $f_1 \times f_2$ é contínua e $y_0 \in E_2$, é fácil ver que as aplicações $x \to (x, y_0)$ de E_1 em $E_1 \times E_2$; $(x, y_0) \to (f_1(x), f_2(y_0))$ de $E_1 \times E_2$ em $F_1 \times F_2$ (que é $f_1 \times f_2$); e $(f_1(x), f_2(y_0)) \to f_1(x)$ de $F_1 \times F_2$ em F_1 (que é a projeção $p_1: F_1 \times F_2 \to F_1$) são tôdas contínuas. Logo, a composta, que é $f_1: E_1 \to F_1$ é contínua. Ànàlogamente se prova que f_2 é contínua.

d) Se $f_1 \times f_2$ é aberta e $\Omega_1 \subset E_1$ é aberto, então $\Omega_1 \times E_2$ é aberto em $E_1 \times E_2$, donde $f_1(\Omega_1) \times f_2(E_2) = (f_1 \times f_2)(\Omega_1 \times E_2)$ é aberto em $F_1 \times F_2$ e como $E_2 \neq \emptyset$, temos $f_2(E_2) \neq \emptyset$ ∴ $p_1(f_1(\Omega_1) \times f_2(E_2)) = f_1(\Omega_1)$ é aberto em F_1 (pois a projeção $p_1: F_1 \times F_2 \to F_1$ é aberta). Logo f_1 é aberta. Ànàlogamente se prova que f_2 é aberta.

Observe-se que só se utilizou a hipótese $E_1 \neq \emptyset$ e $E_2 \neq \emptyset$ nas partes c e d da demonstração.

Observação: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ e $(I, (E'_\alpha, \mathcal{T}'_\alpha), f'_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos de espaços topológicos, então, pelo lema anterior, é imediato que $(I, (E_\alpha \times E'_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}'_\alpha), f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos (onde $\mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}'_\alpha$ representa a topologia produto). Além disso, se $((E,\mathcal{T}), f_\alpha)$ e $((E',\mathcal{T}'), f'_\alpha)$ são os limites indutivos dos dois sistemas iniciais, temos que o limite indutivo do último será $((E\times E', \mathcal{T}''), f_\alpha \times f'_\alpha)$ pois, pelo corolário 1 da prop. 11, §1.4, o limite indutivo de $(I, E_\alpha \times E'_\alpha, f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha})$ na categoria de conjuntos é $(E\times E', f_\alpha \times f'_\alpha)$ e pelo corolário 1 da prop. 18, §1.3, o funtor esquecimento da categoria de espaços topológicos na categoria de conjuntos comuta com os limites indutivos.

<u>Notação</u>: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de C_{IT} (de grupos topológicos, respectivamente) então denotaremos por $\mathcal{T}_T$ a topologia do limite indutivo dêsse sistema na categoria de espaços topológicos, por $\mathcal{T}_{C_I}$ (respectivamente $\mathcal{T}_G$) a topologia do limite indutivo dêsse sistema na categoria C_{IT} (respectivamente de grupos topológicos) e por $\mathcal{T}_{TT}$ a topologia do limite indutivo de $(I, (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ na categoria de espaços topológicos.

<u>Proposição 2</u>: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre a categoria C_{IT}, t.q. o limite indutivo na categoria C_I é $((E,T), f_\alpha)$ e na categoria de espaços topológicos é $((E,\mathcal{T}_T), f_\alpha)$ então $T: E\times E \to E$ é contínua, se munirmos $E\times E$ da topologia limite indutivo de $(I, (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha); f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ na categoria de espaços topológicos. (i.é, $T: (E\times E, \mathcal{T}_{TT}) \to (E, \mathcal{T}_T)$ é contínua).

<u>Dem.</u>: Sabemos (ver demonstração da prop. 1, §2.1) que $(1_I, T_\alpha)$ é morfismo de sistemas indutivos de conjuntos, entre $(I, E_\alpha \times E_\alpha, f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ e $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ e que $T: E\times E \to E$ é a única aplicação de conjunto t.q. $T\circ(f_\alpha \times f_\alpha) = f_\alpha \circ T_\alpha$. Mas, como tôdas as T_α são contínuas, temos que $(1_I, T_\alpha)$ é morfismo de sistemas indutivos de espaços topológicos entre $(I, (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ e $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ e portanto (prop. 2, §1.3), existe uma única aplicação contínua $\bar{T}: (E\times E, \mathcal{T}_{TT}) \to (E, \mathcal{T}_T)$ t.q. $\bar{T}\circ(f_\alpha \times f_\alpha) = f_\alpha \circ T_\alpha$. Logo, $\bar{T} = T$

donde T é contínua, de $(E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ em $(E, \mathcal{T}_T)$.

Proposição 3: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de limite indutivo $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$, então $\mathcal{T}_{TT} \supset \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$ (onde $((E\times E, \mathcal{T}_{TT}), f_\alpha \times f_\alpha)$ é o limite indutivo de $(I, (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})$).

1ª Dem.: Como, se $\alpha \leq \beta$, temos $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ e como f_α é contínua de $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ em $(E, \mathcal{T}_T)$, segue que $(f_\beta \times f_\beta)\circ(f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha}) = f_\alpha \times f_\alpha$, onde $f_\alpha \times f_\alpha : (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T)$ é contínua, pelo lema 2. Como $((E\times E, \mathcal{T}_{TT}), f_\alpha \times f_\alpha)$ é o limite indutivo de $(I, (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})$ e $(E\times E, f_\alpha \times f_\alpha)$ é o limite indutivo de $(I, E_\alpha \times E_\alpha, f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})$, segue, pela condição L2, que existe uma única aplicação de conjuntos f de $E\times E$ em $E\times E$, t.q. $f\circ f_\alpha = f_\alpha, \forall \alpha \in I$ $\therefore$ $f = 1_{E\times E}$, e além disso, f é contínua, de $(E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ em $(E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T)$. Logo, $1_{E\times E} : (E\times E, \mathcal{T}_{TT}) \longrightarrow (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T)$ é contínua, donde $\mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T = (1_{E\times E})^{-1}(\mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \subset \mathcal{T}_{TT}$.

2ª Dem.: (esbôço da demonst.) Consideremos o sistema indutivo de espaços topológicos $(I, E'_\alpha, f'_{\beta\alpha})$, onde, $\forall \alpha \in I$, $E'_\alpha = (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T)$ e se $\alpha \leq \beta$, $f'_{\beta\alpha} = 1_{E\times E}$. Então, $(1_I, f_\alpha \times f_\alpha)$ é evidentemente um morfismo de sistemas indutivos, entre $(I, (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})$ e $(I, E'_\alpha, f'_{\beta\alpha})$, de limite evidente, $1_{E\times E} : (E\times E, \mathcal{T}_{TT}) \longrightarrow (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T)$, donde $\mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T \supset (E\times E)^{-1}(\mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \subset \mathcal{T}_{TT}$.

Corolário: Nas hipóteses da proposição 3, as condições abaixo são equivalentes: a) $\mathcal{T}_{TT} = \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$; b) $1_{E\times E} : (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \longrightarrow (E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ é contínua.

Dem.: a) $\Longrightarrow$ b): evidente. b) $\Longrightarrow$ a): a condição b) acarreta $\mathcal{T}_{TT} \subset \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$, e como pela proposição anterior $\mathcal{T}_{TT} \supset \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$ segue que $\mathcal{T}_{TT} = \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$

Primeira Proposição Fundamental (sôbre $C_{i\mathcal{T}}$):

Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre $C_{1\tau}$, então as condições 1 e 2 são equivalentes, as condições 3 e 4 são equivalentes e as condições 1 e 2 acarretam as condições 3 e 4:

1) $\tau_{TT} = \tau_T \times \tau_T$

2) $1_{E\times E} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E\times E, \tau_{TT})$ é contínua

3) $\tau_{C_1} = \tau_T$

4) $T : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua.

Dem.: Pelo corolário da prop. anterior, temos que 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

3) $\Longrightarrow$ 4): Sabemos que $T : (E\times E, \tau_{C_1} \times \tau_{C_1}) \longrightarrow (E, \tau_{C_1})$ é contínua. Se $\tau_{C_1} = \tau_T$ então $T : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua.

4) $\Longrightarrow$ 3): Se $T : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua, então τ_T é topologia sôbre E compatível com T, donde $\tau_T \in \mathcal{Q}$: conjunto das topologias sôbre E, compatíveis com a lei T, que tornam tôdas as f_α contínuas. Mas τ_{C_1} = supremo de $\mathcal{Q}$ (ver demonstração da prop. 17, §3.3), logo, $\tau_{C_1} \supset \tau_T$. Como sempre se tem $\tau_T \supset \tau_{C_1}$ (ver introdução dêste §), segue que $\tau_{C_1} = \tau_T$.

1) $\Longrightarrow$ 4): Pela prop. 2, $T : (E\times E, \tau_{TT}) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua. Se $\tau_{TT} = \tau_T \times \tau_T$, então $T : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua.

Lema 3: a) Se (E, T) é grupo, τ topologia sôbre E, t.q. $\forall x \in E$, $\psi_x : (E, \tau) \longrightarrow (E, \tau)$ é contínua (respectiva/. $\varphi_x : (E, \tau) \longrightarrow (E, \tau)$ é contínua), onde $\psi_x(y) = x T y$ $\forall y \in E$ ($\varphi_x(y) = y T x$, $\forall y \in E$), então, $\forall x \in E$, ψ_x é homeomorfismo (respectiva/. φ_x é homeomorfismo).

b) Se T é lei de composição interna sôbre E, e: elemento neutro em relação a T, τ: topologia sôbre E t.q. ψ_x é homeomorfismo (respectiva/. φ_x é homeomorfismo), então H é vizinhança (vizinhança aberta) de $\underline{e}$, se e sòmente se $x T H$ é vizinhança (vizinhança aberta) de $\underline{x}$ (respectiva/. $H T x$ é vizinhança (vizinhança aberta) de $\underline{x}$).

c) Se ψ_x e φ_x são homeomorfismos (mesmas hipóteses que em b)) e se H é vizinhança (vizinhança aberta) de $\underline{e}$, então existem vizinhanças (vizinhanças abertas) $\bar{H}$, $\bar{\bar{H}}$ de $\underline{e}$, t.q. $x T H = \bar{H} T x$ e $H T x = x T \bar{\bar{H}}$.

<u>Dem.</u>: a) Basta notar que $\varphi_{x^{-1}}$ é a inversa de φ_x (e que $\psi_{x^{-1}}$ é a função inversa de ψ_x). b e c evidentes.

<u>Corolário 1</u>: Nas hipóteses de b, se $\forall x \in E$, φ_x é homeomorfismo (respectiv. $\forall x \in E$, ψ_x é homeomorfismo) então, se $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhanças de e, $xT\mathcal{U}$ (respectiv. $\mathcal{U}Tx$) será uma base de vizinhanças de x.

<u>Corolário 2</u>: Nas hipóteses de b, se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são duas topologias sôbre E t.q. $\forall x \in E$, φ_x é homeomorfismo de $(E, \mathcal{T}_1)$ sôbre $(E, \mathcal{T}_1)$ e de $(E, \mathcal{T}_2)$ sôbre $(E, \mathcal{T}_2)$ (ou, $\forall x \in E$, ψ_x é homeomorfismo entre os mesmos espaços), então, se $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são bases de vizinhanças de e em $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, respectivamente, e $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, teremos $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

<u>Dem.</u>: Basta usar o corolário 1, e lembrar que um conjunto é aberto se e somente se, fôr vizinhança de cada um de seus pontos.

<u>Corolário 3</u>: Se (E, T) é grupo, $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologias sôbre E t.q. $\forall x \in E$, φ_x é contínua (ou, $\forall x \in E$, ψ_x é contínua), então, se $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são bases de vizinhanças de e em $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, respectivamente e $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, teremos $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

<u>Proposição 5</u>: Se T é lei de composição interna associativa sôbre E, e: elemento neutro em relação a T, e $\mathcal{T}$ uma topologia sôbre E, t.q. $\forall x \in E$, φ_x e ψ_x são homeomorfismos, então $T: (E \times E, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$ é contínua se e somente se é contínua no ponto (e, e).

<u>Dem.</u>: Seja $(x, y) \in E \times E$ e seja S uma vizinhança de xTy; então $S = (xTy)T\Omega$, onde Ω é vizinhança de e (lema 3b). Como T é contínua no ponto (e, e), temos que $\overset{-1}{T}(\Omega)$ é vizinhança de (e, e) e portanto, existem vizinhanças H_1 e H_2, de e, t.q. $H_1 T H_2 \subset \Omega$. Pelo lema 3c, existe vizinhança H_3 de e, t.q. $H_3 T y = y T H_1$. Então, xTH_3 e yTH_2 são vizinhanças de x e y, respectivamente (lema 3b), donde $(xTH_3) \times (yTH_2)$ é vizinhança de (x, y). Mas $(xTH_3)T(yTH_2) = xT((H_3Ty)TH_2) =$

$= xT(yTH_1TH_2) \subset (xTy)T\Omega = S$. Logo, T é contínua no ponto (x,y).

<u>Corolário 1</u>: Se (E,T) é grupo, $\mathcal{T}$ topologia sôbre E t.q. ψ_x e φ_x são contínuas, $\forall x \in E$, então $T:(E\times E, \mathcal{T}\times\mathcal{T}) \to (E,\mathcal{T})$ é contínua se e sòmente se é contínua no ponto (e,e).

<u>Dem.</u>: Usar lema 3a e a prop. anterior.

<u>Corolário 2</u>: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo de grupos $(I,(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha),f_{\beta\alpha})$ sistema indutivo de espaços topológicos, e se, $\forall \alpha \in I$, $x_\alpha \in E_\alpha$, as aplicações $\psi_{x_\alpha}^{\alpha}$ e $\varphi_{x_\alpha}^{\alpha}$ são contínuas, então se $((E,T),f_\alpha)$ e $((E,\mathcal{T}),f_\alpha)$ são os limites indutivo dos respectivos sistemas indutivos, $T:(E\times E,\mathcal{T}\times\mathcal{T}) \to (E,\mathcal{T})$ será contínua se e sòmente se fôr contínua no ponto (e,e)

<u>Dem.</u>: Usar prop. 1a, §4.1A e o corolário anterior.

<u>Corolário 3</u>: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo sôbre a categoria $C_{1\mathcal{T}}$, t.q. (E_α,T_α) é grupo, $\forall \alpha \in I$ e $((E,T),f_\alpha)$ é seu limite indutivo na categoria de grupos, então $T:(E\times E, \mathcal{T}_T\times\mathcal{T}_T) \to (E,\mathcal{T}_T)$ é contínua se e sòmente se fôr contínua no ponto (e,e).

<u>Dem.</u>: Usar lema 1 (§4.1A) e o corolário anterior.

<u>Corolário 4</u>: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo de grupos topológicos, de limite indutivo $((E,T),f_\alpha)$ na categoria de grupos, então $T:(E\times E, \mathcal{T}_T\times\mathcal{T}_T) \to (E,\mathcal{T}_T)$ é contínua se e sòmente se fôr contínua no ponto (e,e).

<u>Proposição 6</u>: Se $(E,\mathcal{T}_E)$, $(F,\mathcal{T}_F)$ são espaços topológicos T_E e T_F leis de composição interna sôbre E e F, respectivam., e e_E e e_F elementos neutros em relação a T_E e T_F, respectivam.; se $\forall x \in E$, ψ_E^x é homeomorfismo (respectivam. φ_E^x é homeomorf.) e $\forall x \in F$, ψ_F^x é homeomorfismo (respectivamente φ_F^x é homeomorf.) e $f: E \to F$ morfismo em C_1, t.q. $f(e_E) = e_F$, então $f:(E,\mathcal{T}_E) \to (F,\mathcal{T}_F)$ é contínua, se e sòmente se, fôr contínua no ponto e_E.

<u>Dem.</u>: Seja $x \in E$, e S vizinhança de $f(x)$: então $S = f(x)T_F\Omega$

onde Ω é vizinhança de e_F (lema 3b), logo $f^{-1}(\Omega)$ é vizinhança de e_E, donde $x T_E f^{-1}(\Omega)$ é vizinhança de x (lema 3b) e como $f(x T_E f^{-1}(\Omega)) = f(x) T_F f f^{-1}(\Omega) \subset f(x) T_F \Omega = S$ segue que f é contínua no ponto x.

Corolário: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo sôbre a categoria $C_{1\tau}$, t.q. (E_α, T_α) é grupo, $\forall \alpha \in I$, e $((E,T), f_\alpha)$ seu limite indutivo na categoria de grupos, então $1_{E\times E} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \to (E\times E, \tau_{TT})$ é contínua se e sòmente se fôr contínua no ponto (e,e).

Dem.: Consideremos a lei de composição interna $\overline{T}$ sôbre $E\times E$, definida por $\overline{T} = T\times T$ (i.e., $(x_1,x_2)\overline{T}(y_1,y_2) = (x_1 T y_1, x_2 T y_2)$). Então êste corolário será consequência da proposição, se provarmos que as aplicações $\psi_{(x_1,x_2)} : (E\times E, \tau_T\times\tau_T) \to (E\times E, \tau_T\times\tau_T)$ e $\psi_{(x_1,x_2)} : (E\times E, \tau_{TT}) \to (E\times E, \tau_{TT})$ são contínuas $\forall (x_1,x_2)\in E\times E$, onde $\psi_{(x_1,x_2)}(y_1,y_2) = (x_1,x_2)\overline{T}(y_1,y_2) = (x_1 T y_1, x_2 T y_2)$. (pois então serão homeomorfismos, pelo lema 3a, já que é fácil de ver que $(E\times E, \overline{T})$ é grupo).

Mas, $\psi_{(x_1,x_2)} = \psi_{x_1}\times\psi_{x_2}$, e como ψ_{x_1} e ψ_{x_2} são contínuas, de (E,τ_T) em (E,τ_T) (corolário do lema 1, §4.1A), segue que $\psi_{(x_1,x_2)} : (E\times E, \tau_T\times\tau_T) \to (E\times E, \tau_T\times\tau_T)$ é contínua (lema 2). Por outro lado, $\forall \alpha\in I$, $\forall x_\alpha \in E_\alpha$, as aplicações $\psi^\alpha_{x_\alpha} : (E_\alpha, \tau_\alpha) \to (E_\alpha, \tau_\alpha)$ são contínuas (lema 1, §4.1A), donde $\psi^\alpha_{(x_\alpha,y_\alpha)} = \psi^\alpha_{x_\alpha}\times\psi^\alpha_{y_\alpha} : (E_\alpha\times E_\alpha, \tau_\alpha\times\tau_\alpha) \to (E_\alpha\times E_\alpha, \tau_\alpha\times\tau_\alpha)$ são contínuas, $\forall\alpha\in I$, $(x_\alpha, y_\alpha)\in E_\alpha\times E_\alpha$ (lema 2.). Ora, é fácil de verificar que $(I, (E_\alpha\times E_\alpha, \overline{T}_\alpha), f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})$ e $(I, (E_\alpha\times E_\alpha, \tau_\alpha\times\tau_\alpha), f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos sôbre C_1 e de espaços topológicos, respectivamente, de limites indutivos respectivamente $((E\times E, \overline{T}), f_\alpha\times f_\alpha)$ e $((E\times E, \tau_{TT}), f_\alpha\times f_\alpha)$ onde $\overline{T}_\alpha = T_\alpha\times T_\alpha$. (Pela demonstração da prop. 1, §2.1, T é a única aplicação de conjunto $T : E\times E \to E$ t.q. $T\circ(f_\alpha\times f_\alpha) = f_\alpha\circ T_\alpha$ $\forall\alpha\in I$, logo $\overline{T} : (E\times E)\times(E\times E) \to (E\times E)$ é t.q. $\overline{T}\circ((f_\alpha\times f_\alpha)\times(f_\alpha\times f_\alpha)) = (T\times T)\circ((f_\alpha\times f_\alpha)\times(f_\alpha\times f_\alpha)) = (T\circ(f_\alpha\times f_\alpha))\times(T\circ(f_\alpha\times f_\alpha)) = (f_\alpha\circ T_\alpha)\times(f_\alpha\circ T_\alpha) = (f_\alpha\times f_\alpha)\circ(T_\alpha\times T_\alpha) = (f_\alpha\times f_\alpha)\circ\overline{T}_\alpha$ $\forall\alpha\in I$, donde ainda pela demonstração da prop.1, §2.1, temos que $((E\times E, \overline{\overline{T}}), f_\alpha \times f_\alpha)$ é limite indutivo de $(I, (E_\alpha \times E_\alpha, \overline{\overline{T_\alpha}}), f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})$ na categoria C_1). Logo, pela prop.1a, §4.1A segue que: $\psi_{(x_1,x_2)}:(E\times E, \mathcal{T}_{TT}) \to (E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ é contínua, $\forall (x_1,x_2)\in E\times E$.

<u>Observação</u>: Poderíamos supor que a prop.5 fôsse um caso particular da prop.6, mas isso não é verdade, pois $T: E\times E \to E$ só é morfismo em C_1, se fôr comutativa: T é morfismo $\iff T(x_1,x_2)\overline{\overline{T}}(y_1,y_2)) = (T(x_1,x_2))T(T(y_1,y_2))$, ou seja, se $T(x_1 T y_1, x_2 T y_2) = (x_1 T x_2) T (y_1 T y_2)$, ou seja, $x_1 T y_1 T x_2 T y_2 = x_1 T x_2 T y_1 T y_2$, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$; em particular, se $x_1 = y_2 = e$ temos: $y_1 T x_2 = x_2 T y_1$, $\forall x_2, y_1 \in E$ $\therefore$ T é comutativa. É claro que se T é comutativa, então T é morfismo em C_1.

<u>Segunda Proposição Fundamental</u> (<u>sôbre grupos topológicos</u>): Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo sôbre a categoria $C_{1\mathcal{T}}$ t.q. (E_α, T_α) é grupo $\forall \alpha\in I$, (respectivam. sôbre a categoria dos grupos topológicos) então as condições 1, 2 e 3 são equivalentes, as condições 4, 5, 6 são equivalentes e as condições 1, 2, 3 acarretam as condições 4, 5, 6:

1) $\mathcal{T}_{TT} = \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$

2) $1_{E\times E}: (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \to (E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ é contínua

3) $1_{E\times E}: (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \to (E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ é contínua no ponto (e,e)

4) $\mathcal{T}_{C_1} = \mathcal{T}_T$ (respectivam. $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_T$)

5) $T: (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \to (E, \mathcal{T}_T)$ é contínua

6) $T: (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \to (E, \mathcal{T}_T)$ é contínua no ponto (e,e)

<u>Dem.</u>: $1 \Rightarrow 2$: corolário da prop.3; $2 \Rightarrow 3$: corolário da prop.6; $5 \Rightarrow 6$: corolários 3 e 4 da prop.5; $4 \Rightarrow 5$: sabemos que $T: (E\times E, \mathcal{T}_{C_1}\times \mathcal{T}_{C_1}) \to (E, \mathcal{T}_{C_1})$ e $T: (E\times E, \mathcal{T}_G \times \mathcal{T}_G) \to (E, \mathcal{T}_G)$ são contínuas então, se $\mathcal{T}_{C_1} = \mathcal{T}_T$ ou $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_T$, ter-se-á $T: (E\times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T) \to (E, \mathcal{T}_T)$ contínua. $5 \Rightarrow 4$: no caso da categoria $C_{1\mathcal{T}}$, vem de $4 \Rightarrow 3$ na Primeira Proposição Fundamental; no caso de grupos topológicos, temos: $\mathcal{T}_T$ é compatível com a lei T, e pela prop.1b §4.1A, segue que

$\overset{-1}{T}:(E,\tau_T)\to(E,\tau_T)$ é contínua, e portanto (E,T,τ_T) é grupo topológico. Logo, $\tau_T\in Q$: conjunto das topologias sôbre E compatíveis com sua estrutura de grupo, que tornam todos os f_x contínuas, e como τ_G = supremo de Q (ver dem. da prop. 17, §3.3), segue que $\tau_G\supset\tau_T$. Mas temos sempre $\tau_T\supset\tau_G$, donde $\tau_G=\tau_T$.

$1\Rightarrow 5$: vem de $1\Rightarrow 4$ na Primeira Proposição Fundamental.

Observação: O interêsse dessa prop. reside no fato de que as condições 1, 2, 3 não encerram nenhum conceito algébrico e acarretam as condições 4, 5, 6, que envolvem conceitos algébricos em sua formulação. No entanto, deixamos em aberto o seguinte problema:

Problema em aberto: As condições 4, 5, 6 acarretam as condições 1, 2, 3, ainda que eventualmente se imponha que os grupos sejam abelianos?

Se a resposta fôr afirmativa, teremos consequências importantes: Se $\tau_G=\tau_T$, então $\tau_A=\tau_T$ (e $\tau_K=\tau_T$, também) e mais geralmente, se $\tau_G=\tau_T$, então $\tau_{C(\Omega)_\sigma}=\tau_T$, pois se T é lei de composição interna que torna (E,T) um grupo, e $\tau_G=\tau_T$, segue $(4\Rightarrow 1)$ que $\tau_{TT}=\tau_T\times\tau_T$ e portanto, se T' fôr qualquer outra lei de composição interna, teremos $T':(E\times E,\tau_{TT})\to(E,\tau_T)$ contínua (prop. 2) e portanto $T':(E\times E,\tau_T\times\tau_T)\to(E,\tau_T)$ contínua.

C) Limites Indutivos Enumeráveis de Grupos Localmente compactos.

Inicialmente, daremos uma caraterização da Topologia τ_T, que por ser de manuseio mais fácil que a propriedade de ser o supremo dum conjunto de topologias permitir-nos-á, em conjunto com as proposições Fundamentais da parte B), obter resultados tanto desta parte C), como da D).

<u>Proposição 8</u>: Se $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ é uma família de espaços topológicos, E um conjunto, $(g_i)_{i\in I}$ uma família de aplicações de conjunto $g_i : E_i \longrightarrow E$, e, se $\mathcal{T}$ é a topologia t.q. $(E, \mathcal{T})$ é estrutura final para a família $((E_i, \mathcal{T}_i), g_i)_{i\in I}$, relativa ao funtor esquecimento F, da categoria dos espaços topológicos na categoria dos conjuntos, então $\Omega \in \mathcal{T} \iff g_i^{-1}(\Omega) \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$.

<u>Dem.</u>: Sabemos que $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{Q}$, onde $\mathcal{Q}$ é o conjunto de tôdas as topologias sôbre E, que tornam tôdas as g_i contínuas (ver dem. da prop. 17, §3.3). Seja $\mathcal{T}_0 = \{\Omega \subset E / g_i^{-1}(\Omega) \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I\}$, $\mathcal{T}_0$ é uma topologia sôbre E, pois $g_i^{-1}(\phi) = \phi \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$ e $g_i^{-1}(E) = E_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$ $\therefore \phi \in \mathcal{T}_0$, $E \in \mathcal{T}_0$. Se $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}_0$, então $g_i^{-1}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = g_i^{-1}(\Omega_1) \cap g_i^{-1}(\Omega_2) \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I \therefore \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{T}_0$. Se $\Omega_j \in \mathcal{T}_0, \forall j \in J$, então $g_i^{-1}(\bigcup_{j\in J} \Omega_j) = \bigcup_{j\in J} g_i^{-1}(\Omega_j) \in \mathcal{T}_i \therefore \bigcup_{j\in J} \Omega_j \in \mathcal{T}_0$. Além disso, pela definição de $\mathcal{T}_0$, tôdas as g_i são contínuas, munindo E com a topologia $\mathcal{T}_0$, $\therefore \mathcal{T}_0 \in \mathcal{Q}$. Por outro lado, se $\mathcal{T}'$ é uma topologia sôbre E que torna tôdas as g_i contínuas e $\Omega \in \mathcal{T}'$, teremos $g_i^{-1}(\Omega) \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$ $\therefore \Omega \in \mathcal{T}_0$, donde $\mathcal{T}_0 \supset \mathcal{T}'$. Logo, $\mathcal{T}_0$ é o supremo de $\mathcal{Q}$ $\therefore$ $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$.

<u>Corolário</u>: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de limite indutivo $((E, \mathcal{T}), f_\alpha)$, então $\Omega \in \mathcal{T} \iff f_\alpha^{-1}(\Omega) \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in I$.

<u>Dem.</u>: Basta usar a prop. anterior, e as prop. 10 §3.2 e prop. 17 §3.3 (juntamente com suas demonstrações).

<u>Proposição 9</u>: Se $(\mathbb{N}, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$, (onde $\mathbb{N}$ está munido de sua ordem usual) é um sistema indutivo de espaços topológicos localmente compactos (i.é, localmente quasi-compactos, na nomenclatura de Bourbaki: todo ponto do espaço admite um sistema fundamental de vizinhanças quasi-compactas), de limite indutivo $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$, então o limite indutivo do sistema $(\mathbb{N}, (E_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ é $((E \times E, \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T), f_\alpha \times f_\alpha)$ isto é,

$\mathcal{T}_{TT} = \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$ (Nota: Mas não se deve pensar que $\mathcal{T}_T$ seja topologia localmente compacta; veremos um contra-exemplo mais adiante: §4.4 contra-exemplo em seguida à prop. 29).

Dem.: Pelo corolário da prop. 3, §4.1B, para que $\mathcal{T}_{TT} = \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$ basta mostrar que $1_{E\times E}: (E\times E, \mathcal{T}_T\times\mathcal{T}_T) \to (E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ é contínua. Seja $(x,y)\in E\times E$: $\exists \alpha_0 \in \mathbb{N}$, $x_{\alpha_0}\in E_{\alpha_0}$, $y_0 \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$, $f_{\alpha_0}(y_{\alpha_0}) = y$. (lema 1a, §1.4). Chamemos $x_\beta = f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0})$, $y_\beta = f_{\beta\alpha_0}(y_{\alpha_0})$, se $\beta \geq \alpha_0$: então $f_\beta(x_\beta) = x$ se $\beta\geq\alpha_0$ e $f_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$ se $\alpha_0\leq\alpha\leq\beta$, pois: $f_\beta(x_\beta) = f_\beta f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$ e $f_{\beta\alpha}(x_\alpha) = f_{\beta\alpha} f_{\alpha\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x_\beta$; analogamente, temos $f_\beta(y_\beta) = y$ se $\beta\geq\alpha_0$, e $f_{\beta\alpha}(y_\alpha) = y_\beta$ se $\alpha_0\leq\alpha\leq\beta$. Além disso,

$J = \{\beta\in\mathbb{N} / \beta\geq\alpha_0\}$ é cofinal em $\mathbb{N}$ (exemplo em seguida à def. 10, §1.2) e portanto $(J, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$ e $(J, (E_\alpha\times E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha\times\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}, (f_{\beta\alpha}\times f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$ são sistemas indutivos de limites indutivos, respectivamente, $((E,\mathcal{T}_T),(f_\alpha)_{\alpha\in J})$ e $((E\times E, \mathcal{T}_{TT}),(f_\alpha\times f_\alpha)_{\alpha\in J})$ (Prop. 4a §1.3).

Seja V uma vizinhança de (x,y) em $(E\times E, \mathcal{T}_{TT})$ e seja Ω o interior de V, em $\mathcal{T}_{TT}$ ($\therefore (x,y)\in\Omega$). Então $(f_\beta\times f_\beta)^{-1}(\Omega)$ é vizinhança aberta de (x_β, y_β) em $(E_\beta\times E_\beta, \mathcal{T}_\beta\times\mathcal{T}_\beta)$, $\forall\beta\in J$, pois $(f_\beta\times f_\beta)(x_\beta, y_\beta) = (x,y)$, se $\beta\in J$. Como $(f_{\alpha_0}\times f_{\alpha_0})^{-1}(\Omega)$ é vizinhança aberta de $(x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0})$ em $(E_{\alpha_0}\times E_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0}\times\mathcal{T}_{\alpha_0})$ segue que $\exists$ vizinhanças $\Omega'^1_{\alpha_0}$ e $\Omega'^2_{\alpha_0}$ de x_{α_0} e y_{α_0}, respectivamente, em $(E_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0})$ t.q.
$\Omega'^1_{\alpha_0}\times\Omega'^2_{\alpha_0} \subset (f_{\alpha_0}\times f_{\alpha_0})^{-1}(\Omega)$. Mas, como $(E_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0})$ é localmente compacto, $\exists$ vizinhanças compactas $\Omega^1_{\alpha_0}$, $\Omega^2_{\alpha_0}$ de x_{α_0} e y_{α_0}, respectiva/., contidas respectivamente em $\Omega'^1_{\alpha_0}$ e $\Omega'^2_{\alpha_0}$, donde $\Omega^1_{\alpha_0}\times\Omega^2_{\alpha_0} \subset (f_{\alpha_0}\times f_{\alpha_0})^{-1}(\Omega)$.

Suponhamos que, para um índice $n_0 - 1$ ($\geq\alpha_0$) tenhamos obtido uma sequência $\Omega^1_{\alpha_0}\times\Omega^2_{\alpha_0}, \ldots, \Omega^1_{n_0-1}\times\Omega^2_{n_0-1}$ onde Ω^1_j e Ω^2_j são vizinhanças compactas de x_j e y_j, respectivamente, em $(E_j, \mathcal{T}_j)$ $\forall j = \alpha_0, \ldots, n_0-1$, t.q.

$\Omega_j^1 \times \Omega_j^2 \subset (f_j \times f_j)^{-1}(\Omega)$, $\forall j = \alpha_0, \dots, n_0-1$ e que $f_{j,j-1}^{-1}(\mathring{\Omega}_j^1) \supset \Omega_{j-1}^1$, $f_{j,j-1}^{-1}(\mathring{\Omega}_j^2) \supset \Omega_{j-1}^2$, para $j = \alpha_0+1, \dots, n_0-1$.

(onde $\mathring{A}$ representa o interior de A). Mostremos que é possível estender para n_0 esta sequência, isto é, que podemos obter vizinhanças compactas $\Omega_{n_0}^1$ e $\Omega_{n_0}^2$ de x_{n_0} e y_{n_0}, respectiva/., em $(E_{n_0}, \mathcal{T}_{n_0})$, t.q. $\Omega_{n_0}^1 \times \Omega_{n_0}^2 \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega)$ e t.q. $f_{n_0,n_0-1}^{-1}(\mathring{\Omega}_{n_0}^1) \supset \Omega_{n_0-1}^1$, $f_{n_0,n_0-1}^{-1}(\mathring{\Omega}_{n_0}^2) \supset \Omega_{n_0-1}^2$.

Ora, como $\Omega_{n_0-1}^1$ e $\Omega_{n_0-1}^2$ são vizinhanças compactas de x_{n_0-1} e y_{n_0-1}, respectiva/., em $(E_{n_0-1}, \mathcal{T}_{n_0-1})$ e $f_{n_0,n_0-1} \times f_{n_0,n_0-1} : (E_{n_0-1} \times E_{n_0-1}, \mathcal{T}_{n_0-1} \times \mathcal{T}_{n_0-1}) \to (E_{n_0} \times E_{n_0}, \mathcal{T}_{n_0} \times \mathcal{T}_{n_0})$ é contínua, segue que $A = (f_{n_0,n_0-1} \times f_{n_0,n_0-1})(\Omega_{n_0-1}^1 \times \Omega_{n_0-1}^2)$ é compacto em $(E_{n_0} \times E_{n_0}, \mathcal{T}_{n_0} \times \mathcal{T}_{n_0})$ e que $(x_{n_0}, y_{n_0}) \in A$. Além disso, como $\Omega_{n_0-1}^1 \times \Omega_{n_0-1}^2 \subset (f_{n_0-1} \times f_{n_0-1})^{-1}(\Omega) =$
$= ((f_{n_0} \times f_{n_0}) \circ (f_{n_0,n_0-1} \times f_{n_0,n_0-1}))^{-1}(\Omega) = (f_{n_0,n_0-1} \times f_{n_0,n_0-1})^{-1}((f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega))$,
segue que

$$A = (f_{n_0,n_0-1} \times f_{n_0,n_0-1})(\Omega_{n_0-1}^1 \times \Omega_{n_0-1}^2) \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega).$$

Para cada ponto $(x_1, x_2) \in A$, temos vizinhanças compactas U_1, U_2 de x_1 e x_2, respectiva/. em $(E_{n_0}, \mathcal{T}_{n_0})$ t.q. $U_1 \times U_2 \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega)$ (é fácil ver que existem). Como, $\forall x_2 \in f_{n_0,n_0-1}(\Omega_{n_0-1}^2)$, temos que $B_{x_2} = f_{n_0,n_0-1}(\Omega_{n_0-1}^1) \times \{x_2\}$ é compacto, com $B_{x_2} \subset A$, segue que $\exists$ nº finito de pontos x_1^j t.q. $\bigcup_{j=1}^{m_0} (\mathring{U}_1^j) \times (\mathring{U}_2^j) \supset B_{x_2}$. Então $(\bigcup_{j=1}^{m_0} U_1^j) \times (\bigcap_{j=1}^{m_0} U_2^j) \subset$

$\subset \bigcup_{j=1}^{m_0} (U_1^j \times U_2^j) \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega)$, donde, chamando $U_2^{x_2} =$

$= \bigcap_{j=1}^{m_0} U_2^j$ e $U_1^{x_2} = \bigcup_{j=1}^{m_0} U_1^j$, temos: $U_1^{x_2}$ e $U_2^{x_2}$ são compactos

$U_1^{x_2} \times U_2^{x_2} \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega)$ e, $U_2^{x_2}$ é vizinhança de x_2, e

$f_{n_0,n_0-1}(\Omega^1_{n_0-1}) \subset \bigcup_{j=1}^{n_0}(\overset{\circ}{U}{}^j_1) \subset \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{n_0} U^j_1\right)} = \overset{\circ}{U}{}^{x_2}_1$, como é fácil de ver.

Logo $\forall x_2 \in f_{n_0,n_0-1}(\Omega^2_{n_0-1})$, existem $U_1^{x_2}$, $U_2^{x_2}$ vizinhanças compactas de $f_{n_0,n_0-1}(\Omega^1_{n_0-1})$ e $\{x_2\}$, respectivam. em $(E_{n_0}, \mathcal{T}_{n_0})$, t.q. $B_{x_2} \subset \overset{\circ}{U}{}_1^{x_2} \times \overset{\circ}{U}{}_2^{x_2} \subset U_1^{x_2} \times U_2^{x_2} \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega)$. Por outro lado, como A é compacto, segue que existe número finito de pontos x_2^h t.q. $\bigcup_{h=1}^{n_0}(\overset{\circ}{U}{}_1^{x_2^h}) \times (\overset{\circ}{U}{}_2^{x_2^h}) \supset A$. Mas, então,

$$\left(\bigcap_{h=1}^{n_0} U_1^{x_2^h}\right) \times \left(\bigcup_{h=1}^{n_0} U_2^{x_2^h}\right) \subset \bigcup_{h=1}^{n_0}\left(U_1^{x_2^h} \times U_2^{x_2^h}\right) \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega).$$

Chamemos $\Omega^1_{n_0} = \bigcap_{h=1}^{n_0} U_1^{x_2^h}$, $\Omega^2_{n_0} = \bigcup_{h=1}^{n_0} U_2^{x_2^h}$: então

$\Omega^1_{n_0} \times \Omega^2_{n_0} \subset (f_{n_0} \times f_{n_0})^{-1}(\Omega)$ e $\Omega^1_{n_0}$ e $\Omega^2_{n_0}$ são compactos em

$(E_{n_0}, \mathcal{T}_{n_0})$; além disso, $\overset{\circ}{\Omega}{}^1_{n_0} = \overline{\left(\bigcap_{h=1}^{n_0} U_1^{x_2^h}\right)} \supset \bigcap_{h=1}^{n_0}(\overset{\circ}{U}{}_1^{x_2^h}) \supset$

$\supset f_{n_0,n_0-1}(\Omega_{n_0-1})$, e é fácil de ver que $\bigcup_{h=1}^{n_0}(\overset{\circ}{U}{}_2^{x_2^h}) \supset f_{n_0,n_0-1}(\Omega^2_{n_0-1})$

donde $\overset{\circ}{\Omega}{}^2_{n_0} = \overline{\left(\bigcup_{h=1}^{n_0} U_2^{x_2^h}\right)} \supset \bigcup_{h=1}^{n_0}(\overset{\circ}{U}{}_2^{x_2^h}) \supset f_{n_0,n_0-1}(\Omega^2_{n_0-1})$

portanto $x_{n_0} \in \overset{\circ}{\Omega}{}^1_{n_0}$, $y_{n_0} \in \overset{\circ}{\Omega}{}^2_{n_0}$ e $f^{-1}_{n_0,n_0-1}(\overset{\circ}{\Omega}{}^1_{n_0}) \supset \Omega_{n_0-1}$,

$f^{-1}_{n_0,n_0-1}(\overset{\circ}{\Omega}{}^2_{n_0}) \supset \Omega^2_{n_0-1}$ (pois $x_{n_0-1} \in \Omega^1_{n_0-1}$, $y_{n_0-1} \in \Omega^2_{n_0-1}$, e

$x_{n_0} = f_{n_0,n_0-1}(x_{n_0-1})$, $y_{n_0} = f_{n_0,n_0-1}(y_{n_0-1})$).

Logo, por indução, é possível obter uma sequência $\Omega^1_{j_0} \times \Omega^2_{j_0}, \ldots, \Omega^1_{n_0} \times \Omega^2_{n_0}, \ldots$ infinita, t.q.

$\Omega^1_j \times \Omega^2_j \subset (f_j \times f_j)^{-1}(\Omega)$, $\forall j \geq j_0$ (i.e, $\forall j \in J$), t.q. Ω^1_j e Ω^2_j são vizinhanças compactas de x_j e y_j, respectivam. em $(E_j, \mathcal{T}_j)$, se $j \in J$; e t.q. $f^{-1}_{j,j-1}(\overset{\circ}{\Omega}{}^1_j) \supset \Omega^1_{j-1}$, $f^{-1}_{j,j-1}(\overset{\circ}{\Omega}{}^2_j) \supset \Omega^2_{j-1}$,

$\alpha\ \delta \in J$, $\delta \neq \alpha_0$. Além disso, é fácil ver que $f_{\beta\alpha}^{-1}(\mathring{\Omega}^1_\beta) \supset \Omega^1_\alpha$ e $f_{\beta\alpha}^{-1}(\mathring{\Omega}^2_\beta) \supset \Omega^2_\alpha$, se $\alpha <_J \beta$.

Seja agora $\Omega_1 = \bigcup_{n \in J} f_n(\Omega^1_n)$, $\Omega_2 = \bigcup_{n \in J} f_n(\Omega^2_n)$: é claro que $(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Se $(x^1, x^2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, segue, pela definição de Ω_1 e Ω_2, que $\exists\, \gamma_0, \delta_0 \in J$, $x^1_{\gamma_0} \in \Omega^1_{\gamma_0}$, $x^2_{\delta_0} \in \Omega^2_{\delta_0}$, t.q. $f_{\gamma_0}(x^1_{\gamma_0}) = x^1$, $f_{\delta_0}(x^2_{\delta_0}) = x^2$. Logo, se $s_0 > \gamma_0, \delta_0$

teremos $x^1_{s_0} = f_{s_0\gamma_0}(x^1_{\gamma_0}) \in f_{s_0\gamma_0}(\Omega^1_{\gamma_0}) \subset \mathring{\Omega}^1_{s_0} \subset \Omega^1_{s_0}$;

$x^2_{s_0} = f_{s_0\delta_0}(x^2_{\delta_0}) \in f_{s_0\delta_0}(\Omega^2_{\delta_0}) \subset \mathring{\Omega}^2_{s_0} \subset \Omega^2_{s_0}$ e $f_{s_0}(x^1_{s_0}) =$

$= f_{s_0} f_{s_0\gamma_0}(x^1_{\gamma_0}) = f_{\gamma_0}(x^1_{\gamma_0}) = x^1$; $f_{s_0}(x^2_{s_0}) = f_{s_0} f_{s_0\delta_0}(x^2_{\delta_0}) = f_{\delta_0}(x^2_{\delta_0}) = x^2$:

donde $(x^1, x^2) = (f_{s_0} \times f_{s_0})(x^1_{s_0}, x^2_{s_0}) \in (f_{s_0} \times f_{s_0})(\Omega^1_{s_0} \times \Omega^2_{s_0}) \subset \Omega$.
Logo, $\Omega^1 \times \Omega^2 \subset \Omega$ e $(x,y) \in \Omega^1 \times \Omega^2$.

Por outro lado, de $f_{\beta\alpha}^{-1}(\mathring{\Omega}^1_\beta) \supset \Omega^1_\alpha$ se $\alpha <_J \beta$, segue que $f_{\beta\alpha}(\Omega^1_\alpha) \subset \mathring{\Omega}^1_\beta \subset \Omega^1_\beta$ se $\alpha <_J \beta$, donde $f_\beta f_{\beta\alpha}(\Omega^1_\alpha) \subset$

$\subset f_\beta(\Omega^1_\beta)$ ou $f_\alpha(\Omega^1_\alpha) \subset f_\beta(\Omega^1_\beta)$ se $\alpha <_J \beta$. Logo, se $n_0 \in J$

temos que $\Omega^1 = \bigcup_{n \in J} f_n(\Omega^1_n) = \bigcup_{n \geq n_0} f_n(\Omega^1_n)$. Então, se $\beta \in J$,

temos $f_\beta^{-1}(\Omega^1) = f_\beta^{-1}\left(\bigcup_{n \geq \beta} f_n(\Omega^1_n)\right) = \bigcup_{n \geq \beta} f_\beta^{-1}(f_n(\Omega^1_n)) =$

$= \bigcup_{n \geq \beta} (f_n \circ f_{n\beta})^{-1}(f_n(\Omega^1_n)) = \bigcup_{n \geq \beta} f_{n\beta}^{-1}(f_n^{-1}(f_n(\Omega^1_n))) \supset \bigcup_{n \geq \beta} f_{n\beta}^{-1}(\Omega^1_n) \supset$

$\supset \bigcup_{n \geq \beta} f_{n\beta}^{-1}(\mathring{\Omega}^1_n)$; além disso, se $x_\beta \in f_\beta^{-1}(\Omega^1)$, temos

$f_\beta(x_\beta) \in \Omega^1 = \bigcup_{n \geq \beta} f_n(\Omega^1_n)$ $\therefore \exists\, n_0 \geq \beta$, $x_{n_0} \in \Omega^1_{n_0}$ t.q.

$f_\beta(x_\beta) = f_{n_0}(x_{n_0})$, donde $\exists\, m_0 \in J$, $m_0 \geq n_0$, $m_0 \geq \beta$, t.q.

$f_{m_0\beta}(x_\beta)=f_{m_0 n_0}(x_{n_0})$ (corolário do lema 1, §1.4) $\therefore$

$f_{m_0+1,m_0}f_{m_0\beta}(x_\beta)=f_{m_0+1,m_0}f_{m_0 n_0}(x_{n_0})$, i.é, $f_{m_0+1,\beta}(x_\beta)=$
$=f_{m_0+1,n_0}(x_{n_0})$. Mas $m_0+1 \geq_J m_0 \geq_J n_0$, e $x_{n_0}\in \Omega^1_{n_0}$,

donde $f_{m_0+1,\beta}(x_\beta)=f_{m_0+1,n_0}(x_{n_0})\in f_{m_0+1,n_0}(\Omega^1_{n_0})\subset \mathring{\Omega}^1_{m_0+1}$

$\therefore x_\beta\in f^{-1}_{m_0+1,\beta}(\mathring{\Omega}^1_{m_0+1}) \therefore x_\beta \in \bigcup_{n\geq\beta} f^{-1}_{n\beta}(\mathring{\Omega}^1_n)$. Logo,

$f^{-1}_\beta(\Omega^1)=\bigcup_{n\geq\beta} f^{-1}_{n\beta}(\mathring{\Omega}^1_n)$, que evidentemente é aberto em

(E_β,τ_β), $\forall\beta\in J$. Mas, se $f^{-1}_\beta(\Omega^1)\in\tau_\beta$, $\forall\beta\in J$, segue (corolário da prop. 8) que ~~$(\Omega^1\in\tau_T)$~~ $\Omega^1\in\tau_T$. Analogamente se prova que $\Omega^2\in\tau_T$.

Então, $(x,y)\in\Omega^1\times\Omega^2\in\tau_T\times\tau_T$, com $\Omega^1\times\Omega^2\subset\Omega\subset V$, donde V é vizinhança de (x,y) em $(E\times E,\tau_T\times\tau_T)$. Mas, se tôda vizinhança de (x,y) em $(E\times E,\tau_{TT})$ é vizinhança de (x,y) em $(E\times E,\tau_T\times\tau_T)$, segue $1_{E\times E}:(E\times E,\tau_T\times\tau_T)\longrightarrow$ $\longrightarrow(E\times E,\tau_{TT})$ é contínua.

__Corolário 1__: Se $(I,(E_\alpha,\tau_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo enumerável (i.é, I é enumerável) de espaços topológicos localmente compactos, de limite indutivo $((E,\tau_T),f_\alpha)$, então $\tau_{TT}=\tau_T\times\tau_T$.

__Dem.__: Pela prop. 5 §1.3, $\exists J$ cofinal em I, t.q. J é ou $\mathbb{N}$, ou um conjunto finito totalmente ordenado. Na primeira hipótese, usando a prop. 4a, §1.3, e esta proposição, segue o resultado. Na segunda hipótese, basta usar a observação 2, em seguida à prop. 4, §1.3.

__Corolário 2__: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\tau_\alpha),f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo enumerável sôbre a categoria C_{1G} (respectivamente dos grupos topológicos) t.q. τ_α seja localmente compacta, $\forall\alpha\in I$, então teremos $\tau_{C_1}=\tau_T$.

(respectivamente $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_{\Pi}$).

<u>Dem.</u>: Basta usar o corolário 1, juntamente com a Primeira Proposição Fundamental §4.1.B (respectivamente com a Segunda Proposição Fundamental, §4.1.B).

D) Aplicações Abertas.

<u>Observação</u>: Lembremos que, se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de limite indutivo $((E,\mathcal{T}), f_\alpha)$ então (E, f_α) é limite indutivo do sistema indutivo de conjuntos $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$. Por outro lado (ver dem. da prop. 6, §1.4), podemos considerar $f_\alpha = \pi \circ j_\alpha$, onde $j_\alpha: E_\alpha \longrightarrow \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha$ é a inclusão canônica e $\pi: \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \longrightarrow E = \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha/\sim$ a projeção canônica. Se munirmos $\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha$ com a topologia mais fina que torna tôdas as j_α contínuas (que denotaremos por $\mathcal{T}_{\amalg}$ e é chamada a topologia soma) que é a topologia estrutura-final para a família $((E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), j_\alpha)$ relativamente ao funtor esquecimento F da categoria de espaços topológicos na categoria de conjuntos, e evidentemente torna tôdas as j_α abertas e E com a topologia mais fina (denotemos por $\mathcal{T}'$) que torna $\pi: (\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha, \mathcal{T}_{\amalg}) \longrightarrow \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha/\sim = E$ contínua (que é a estrutura final para a "família" $(\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha, \mathcal{T}_{\amalg})$ relativamente ao funtor F), então certamente $\mathcal{T}'$ torna tôdas as f_α contínuas, pois $f_\alpha = \pi \circ j_\alpha$ $\forall \alpha \in I$, logo $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Mais precisamente: $A \in \mathcal{T}' \iff \pi^{-1}(A) \in \mathcal{T}_{\amalg} \iff j_\alpha^{-1}(\pi^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in I \iff (\pi \circ j_\alpha)^{-1}(A) \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in I \iff f_\alpha^{-1}(A) \in \mathcal{T}_\alpha$ $\forall \alpha \in I \iff A \in \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Êsse é outro modo de caracterizar $\mathcal{T}$: é a topologia quociente em E, quando se mune $\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha$ com a topologia soma.

<u>Proposição 10</u>: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos com $f_{\beta\alpha}$ abertas se $\alpha \leq \beta$, de limite indutivo $((E, \mathcal{T}), f_\alpha)$, então:

a) V é vizinhança de $x \in E$ em $(E, \mathcal{T}) \iff \forall \alpha \in I, \forall x_\alpha \in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha) = x$, então $f_\alpha^{-1}(V)$ é vizinhança de x_α em $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$; b) se houver uma família $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, onde $x_\alpha\in E_\alpha$ $\forall\alpha\in I$, e $f_{\beta\alpha}(x_\alpha)=x_\beta$ se $\alpha\leq\beta$ e $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})=x$ para algum $\alpha_0\in I$, então V é vizinhança de x em $(E,\mathcal{T})\iff\forall\alpha\in I$, $f_\alpha^{-1}(V)$ é vizinhança de x_α em $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$;

c) se $\alpha_0\in I$, $x_{\alpha_0}\in E_{\alpha_0}$ e chamarmos $x_\beta=f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0})$ se $\beta\geq\alpha_0$, e $x=f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})$, então V é vizinhança de x em $(E,\mathcal{T})\iff f_\beta^{-1}(V)$ é vizinhança de x_β, se $\beta\geq\alpha_0$.

<u>Dem.</u>: $a_1)\implies$: se V é vizinhança de $x\in E$, existe $\Omega\in\mathcal{T}$ t.q. $x\in\Omega\subset V$ $\therefore f_\alpha^{-1}(V)\supset f_\alpha^{-1}(\Omega)$, que é aberto em $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$, pelo corolário da prop. anterior; se $x_\alpha\in E_\alpha$ é t.q. $f_\alpha(x_\alpha)=x$, então $x_\alpha\in f_\alpha^{-1}(\Omega)\subset f_\alpha^{-1}(V)$, donde $f_\alpha^{-1}(V)$ é vizinhança de x_α em $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$.

$a_2)\impliedby$: se $f_\alpha^{-1}(V)$ é vizinhança em $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ de todo $x_\alpha\in E_\alpha$ t.q. $f_\alpha(x_\alpha)=x$, $\forall\alpha\in I$, então seja Ω_α o interior de $f_\alpha^{-1}(V)$: é claro então que se $f_\alpha(x_\alpha)=x$, teremos $x_\alpha\in\Omega_\alpha$; além disso, $f_\alpha(\Omega_\alpha)\subset f_\alpha f_\alpha^{-1}(V)\subset V$. Seja $\Omega=\bigcup_{\alpha\in I}f_\alpha(\Omega_\alpha)$: é claro que $\Omega\subset V$. Provaremos que Ω é aberto em $(E,\mathcal{T})$. Com efeito, $\forall\alpha\in I$, temos $f_\alpha^{-1}(\Omega)\supset f_\alpha^{-1}(f_\alpha(\Omega_\alpha))\supset\Omega_\alpha$. Mostremos que $\Omega_\alpha=f_\alpha^{-1}(\Omega)$: se existisse $y_\alpha\in f_\alpha^{-1}(\Omega)$ t.q. $y_\alpha\notin\Omega_\alpha$, então $y=f_\alpha(y_\alpha)\in\Omega=$ $=\bigcup_{\alpha\in I}f_\alpha(\Omega_\alpha)$ $\therefore$ existiria $\beta\in I$, $y_\beta\in\Omega_\beta$ t.q. $f_\beta(y_\beta)=y$. Sabemos

que $\exists\gamma\geq\alpha,\beta$ t.q. $f_{\gamma\alpha}(y_\alpha)=f_{\gamma\beta}(y_\beta)=y_\gamma$ (corolário do lema 1, §14) e $\therefore f_\gamma(y_\gamma)=f_\gamma(f_{\gamma\alpha}(y_\alpha))=f_\alpha(y_\alpha)=y$. Se α e γ são dois índices quaisquer de I, t.q. $\alpha\leq\gamma$, de $f_\gamma f_{\gamma\alpha}=f_\alpha$ segue que $f_{\gamma\alpha}^{-1}(\Omega_\gamma)\subset$ $\subset f_{\gamma\alpha}^{-1}(f_\gamma^{-1}(V))=(f_\gamma\circ f_{\gamma\alpha})^{-1}(V)=f_\alpha^{-1}(V)$, mas Ω_γ é aberto e $f_{\gamma\alpha}$ contínua $\therefore f_{\gamma\alpha}^{-1}(\Omega_\gamma)$ é aberto contido em $f_\alpha^{-1}(V)$ donde

$f_{\gamma\alpha}^{-1}(\Omega_\gamma)\subset\Omega_\alpha$ (pois Ω_α é o maior aberto contido em $f_\alpha^{-1}(V)$), logo se $\alpha\leq\gamma$, temos $f_{\gamma\alpha}^{-1}(\Omega_\gamma)\subset\Omega_\alpha$. Por outro lado, se $\alpha\leq\gamma$, temos que $\Omega_\alpha\subset f_\alpha^{-1}(V)=(f_\gamma\circ f_{\gamma\alpha})^{-1}(V)=f_{\gamma\alpha}^{-1}(f_\gamma^{-1}(V))$ e $\therefore$ $f_{\gamma\alpha}(\Omega_\alpha)\subset f_\gamma^{-1}(V)$, mas, como $f_{\gamma\alpha}$ é aberta se $\alpha\leq\gamma$, segue que $f_{\gamma\alpha}(\Omega_\alpha)$ é aberto contido em $f_\gamma^{-1}(V)$ $\therefore f_{\gamma\alpha}(\Omega_\alpha)\subset\Omega_\gamma$, já que Ω_γ é o maior aberto contido em $f_\gamma^{-1}(V)$. Logo,

$f_{\gamma\alpha}^{-1}(\Omega_\gamma)\supset\Omega_\alpha$, e portanto $f_{\gamma\alpha}^{-1}(\Omega_\gamma)=\Omega_\alpha$, se $\alpha\leq\gamma$.

Ora, então, de $f_{\gamma\beta}(\Omega_\beta)\subset\Omega_\gamma$, segue que $y_\gamma\in\Omega_\gamma$, pois $y_\gamma=f_{\gamma\beta}(y_\beta)$, com $y_\beta\in\Omega_\beta$; e como $y_\gamma=f_{\gamma\alpha}(y_\alpha)$ segue que $y_\alpha\in f_{\gamma\alpha}^{-1}(\Omega_\gamma)=\Omega_\alpha$ e então $y_\alpha\in\Omega_\alpha$, contra a hipótese $y_\alpha\notin\Omega_\alpha$. Logo, se $y_\alpha\in f_\alpha^{-1}(\Omega)$, temos que $y_\alpha\in\Omega_\alpha$ $\therefore$ $f_\alpha^{-1}(\Omega)\subset\Omega_\alpha$ e como $f_\alpha^{-1}(\Omega)\supset\Omega_\alpha$, segue que $f_\alpha^{-1}(\Omega)=$ $=\Omega_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha$, $\forall\alpha\in I$, donde Ω é aberto em $(E,\mathcal{T})$ (corolário da prop. 8). Mas, se $x\in\Omega\subset V$, segue que V é vizinhança de x em $(E,\mathcal{T})$.

b) Inicialmente, notemos que, se $\beta\geq\alpha_0$, então $f_\beta(x_\beta)=f_\beta f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0})=$ $=f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})=x$. Se $\beta\in I$ é qualquer, então $\exists\gamma\in I$, $\gamma\geq\beta,\alpha_0$ e temos $f_{\gamma\beta}(x_\beta)=x_\gamma$, $f_{\gamma\alpha_0}(x_{\alpha_0})=x_\gamma$ $\therefore$ $f_\beta(x_\beta)=f_\gamma(f_{\gamma\beta}(x_\beta))=f_\gamma(x_\gamma)=x$ pois $\gamma\geq\alpha_0$. Logo, $f_\beta(x_\beta)=x$, $\forall\beta\in I$.

b_1) $\Rightarrow$: consequência de a_1.

b_1) $\Leftarrow$: Mostraremos que as hipóteses de $\underline{a_2}$ estão verificadas e $\therefore$ V será vizinhança de x em $(E,\mathcal{T})$. Seja $x'_\alpha\in E_\alpha$, t.q. $f_\alpha(x'_\alpha)=x$, e mostremos que $f_\alpha^{-1}(V)$ é vizinhança de x'_α em $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$. Ora, $f_\alpha(x'_\alpha)=x=f_\alpha(x_\alpha)$, logo (lema 1b, §1.4) $\exists\beta\geq\alpha$ t.q. $f_{\beta\alpha}(x'_\alpha)=f_{\beta\alpha}(x_\alpha)=$ $=x_\beta$. Mas $f_\beta^{-1}(V)$ é vizinhança de x_β em $(E_\beta,\mathcal{T}_\beta)$ e $\therefore$ $f_{\beta\alpha}^{-1}f_\beta^{-1}(V)=(f_\beta\circ f_{\beta\alpha})^{-1}(V)=f_\alpha^{-1}(V)$ é vizinhança de x'_α em $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$.

c) Inicialmente notemos que, se $\alpha_0\leq\beta\leq\gamma$, então $x_\gamma=f_{\gamma\alpha_0}(x_{\alpha_0})=$ $=f_{\gamma\beta}f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0})=f_{\gamma\beta}(x_\beta)$. Logo, a hipótese de $\underline{b}$ está satisfeita, em relação ao conjunto de índices $J=\{\beta\in I/\beta\geq\alpha_0\}$. Lembrando que (prop. 4a, §1.3) então $(J,(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J},(f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq_J\beta})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos de limite indutivo $((E,\mathcal{T}),(f_\alpha)_{\alpha\in J})$ segue a parte $\underline{c}$ usando $\underline{b}$.

<u>Observação</u>: A prop. 10 não é verdadeira, se não impusermos que as $f_{\beta\alpha}$ sejam abertas, como podemos ver pelo seguinte contra-exemplo: $(\mathbb{N},(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}^n),f_{mn})$, onde $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}^n)$ é o $\mathbb{R}^n$ com a topologia euclidiana, e $f_{mn}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ a inclusão canônica. Pelo exemplo que se encontra após a prop. 10, §1.4, é

Como que se, $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \bigcup \mathbb{R}^n$, e $f_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ fôr a inclusão canônica, então $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, f_m)$ é o limite indutivo na categoria de conjuntos do sistema dado. Seja $((\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \tau), f_m)$ o limite indutivo na categoria de espaço topológico. Seja A^n a bola aberta de centro na origem, e raio $\frac{1}{n}$, em $(\mathbb{R}^n, \tau^n)$ e seja $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$. É claro então que $f_m^{-1}(V) \supset A^m \ni (0,0,0,\dots)$ ∴ $f_m^{-1}(V)$ é vizinhança da origem, $\forall m \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se V fôsse vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, então haveria $\Omega \subset V$, com $(0,0,0,\dots) \in \Omega$, t.q. $\Omega \in \tau$. Mas então $f_m^{-1}(\Omega) \in \tau^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. (corolário da prop. 8, §4.1C) e daí segue que $f_m^{-1}(\Omega) \subset A^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, pois $f_m^{-1}(V) = \bigcup_{n \leq m} A^n$, como é fácil de ver, e o interior de $\bigcup_{n \leq m} A^n$ é evidentemente A^m. Mas então, se chamarmos B^m as bolas abertas de raio $\frac{1}{m}$ em $(\mathbb{R}_0^1, \tau^1)$, temos:
$f_1^{-1}(\Omega) = (f_m \circ f_{m1})^{-1}(\Omega) = f_{m1}^{-1}(f_m^{-1}(\Omega)) \subset f_{m1}^{-1}(A^m) = B^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ ∴ $f_1^{-1}(\Omega) \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B^m = \{0\}$ e então $f_1^{-1}(\Omega) = \emptyset$ ou $f_1^{-1}(\Omega) = \{0\}$. Como $f_1^{-1}(\Omega)$ tem de ser aberto, segue que $f_1^{-1}(\Omega) = \emptyset$ ∴ $\Omega = \emptyset$, o que é absurdo, pois nesse caso, $(0,0,\dots) \notin \Omega$. Logo, V não é vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, apesar de $f_m^{-1}(V)$ ser vizinhança da origem, $\forall m \in \mathbb{N}$. Se a prop. 10 fôsse verdadeira, sem que as $f_{\beta\alpha}$ fôssem abertas, a dem. da prop. 9 seria bem simplificada.

<u>Proposição 11</u>: Se $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de lim. indutivo $((E, \tau), f_\alpha)$, então, se $f_{\beta\alpha}$ fôr aberta se $\alpha \leq \beta$, teremos que f_α será aberta, $\forall \alpha \in I$.

<u>Dem.</u>: Seja $\alpha_0 \in I$ e consideremos $\Omega_{\alpha_0} \in \tau_{\alpha_0}$. Se $\beta \geq \alpha_0$, façamos $\Omega_\beta = f_{\beta\alpha_0}(\Omega_{\alpha_0})$: então $\Omega_\beta \in \tau_\beta$. Seja $\Omega = f_{\alpha_0}(\Omega_{\alpha_0})$: então $\Omega = f_\beta \circ f_{\beta\alpha_0}(\Omega_{\alpha_0}) = f_\beta(\Omega_\beta)$, $\forall \beta \geq \alpha_0$, donde $f_\beta^{-1}(\Omega) \supset \Omega_\beta$, $\forall \beta \in I, \beta \geq \alpha_0$. Seja $x \in \Omega = f_{\alpha_0}(\Omega_{\alpha_0})$: então existe $x_{\alpha_0} \in \Omega_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$; e se chamarmos $x_\beta = f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0})$, para $\beta \geq \alpha_0$, teremos $x_\beta \in \Omega_\beta$. Ora, então $f_\beta^{-1}(\Omega) \supset \Omega_\beta \ni x_\beta$ ∴ $f_\beta^{-1}(\Omega)$ é vizinhança de x_β, $\forall \beta \geq \alpha_0$, donde, pela prop. 10 c segue que Ω é vizinhança de x. Mas, se Ω é vizinhança de todos os seus pontos, segue que Ω é

aberto e portanto f_{α_0} é aberta.

<u>Proposição 12</u>: Se $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ é uma família de espaços topológicos, E e H espaços topológicos, $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma família de aplicações contínuas $f_\alpha : E_\alpha \to E$ t.q. $\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(E_\alpha) = E$, e se $\mu_\alpha : E_\alpha \to H$ é uma família de aplicações abertas, e $\mu : E \to H$ uma aplicação t.q. $\mu\circ f_\alpha = \mu_\alpha$, $\forall \alpha\in I$, então μ é uma aplicação aberta.

<u>Dem.</u>:
$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "\mu_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & H \\ & E \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$
Notemos primeiramente que, se $A \subset E$ e chamamos $A_\alpha = f_\alpha^{-1}(A)$, então $\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(A_\alpha) = A$.

Com efeito, como $f_\alpha(f_\alpha^{-1}(A)) \subset A$ $\forall \alpha\in I$, segue que $\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(A_\alpha) \subset A$;

por outro lado, se $x \in A \subset E$, $\exists \alpha_0 \in I$, $y \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(y) = x$ (pois $\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(E_\alpha) = E$) logo $y \in f_{\alpha_0}^{-1}(A) = A_{\alpha_0}$ $\therefore$ $x = f_{\alpha_0}(y) \in f_{\alpha_0}(A_{\alpha_0})$ $\therefore$

$A = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(A_\alpha)$. Seja $A \subset E$ aberto: então A_α é aberto, $\forall \alpha\in I$,

pois f_α é contínua donde $\mu_\alpha(A_\alpha)$ é aberto $\forall \alpha\in I$, pois μ_α é aberta. Mas, $\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(A_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha\in I} \mu(f_\alpha(A_\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in I} \mu_\alpha(A_\alpha)$ que é aberto, evidentemente. Logo μ é aberta.

<u>Corolário 1</u>: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de limite indutivo (E, f_α), então f_α é aberta $\forall \alpha\in I \iff \pi : \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \to E$ é aberta ($\iff \sim$ é uma relação de equivalência aberta).

<u>Dem.</u>:
$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "f_\alpha"] \arrow[dr, "j_\alpha"'] & & E \\ & \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$
Pela proposição se f_α é aberta $\forall \alpha\in I$, segue que π é aberta. Lembrando que j_α é aberta $\forall \alpha\in I$, (observação inicial desta parte D) e que $\pi\circ j_\alpha = f_\alpha$ $\forall \alpha\in I$, segue a recíproca.

<u>Corolário 2</u>: Se $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de lim. indutivo (E, f_α), H um espaço topológico e $(\mu_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma família de aplicações contínuas $\mu_\alpha : E_\alpha \to H$ t.q., se $\alpha \le \beta$, tem-se $\mu_\beta \circ f_{\beta\alpha} = \mu_\alpha$, então (condição

L_2 do lim. indutivo) $\exists$ uma aplicação contínua $\mu: E \to H$ t.q. $\mu \circ f_\alpha = \mu_\alpha$, $\forall \alpha \in I$. Então, se tôdas as μ_α forem abertas, μ também será aberta. (A recíproca será verdadeira, se tôdas as f_α forem abertas).

<u>Dem.</u>: Aplicar a prop. 12, lembrando que $\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha) = E$.

<u>Proposição 13</u>: Se $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ e $(I, (E'_\alpha, \tau'_\alpha), f'_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos de espaços topológicos, de limites indutivos respectivamente $((E, \tau), f_\alpha)$ e $((E', \tau'), f'_\alpha)$, e se f_α e f'_α forem abertas, $\forall \alpha \in I$, então $(I, (E_\alpha \times E'_\alpha, \tau_\alpha \times \tau'_\alpha), f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de limite indutivo $((E \times E', \tau \times \tau'), f_\alpha \times f'_\alpha)$.

<u>Dem.</u>: É evidente que $(I, (E_\alpha \times E'_\alpha, \tau_\alpha \times \tau'_\alpha), f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaço topológico (usar lema 2, §4.1B). Seja $((E \times E', \bar{\tau}), f_\alpha \times f'_\alpha)$ seu limite indutivo (sabemos que o conjunto base do lim. indutivo tem de ser $E \times E'$ (ou equipotente a $E \times E'$), pelo corolário 1 da prop. 11 §1.4, e pelo corolário 1 da prop. 18, §3.3). Ora, as aplicações $f_\alpha \times f'_\alpha : (E_\alpha \times E'_\alpha, \tau_\alpha \times \tau'_\alpha) \to (E \times E', \tau \times \tau')$ são tais que $f_\alpha \times f'_\alpha = (f_\alpha \times f'_\alpha) \circ 1_{E \times E'}$, onde $1_{E \times E'} : (E \times E', \bar{\tau}) \to (E \times E', \tau \times \tau')$ e t.q. se $\alpha \leq \beta$, tem-se $(f_\beta \times f'_\beta) \circ (f_{\beta\alpha} \times f'_{\beta\alpha}) = (f_\beta \circ f_{\beta\alpha}) \times (f'_\beta \circ f'_{\beta\alpha}) = f_\alpha \times f'_\alpha$ $\therefore$ pela condição L_2, $\exists$ uma única aplicação de conjunto $g : (E \times E', \bar{\tau}) \to (E \times E', \tau \times \tau')$, que no caso é contínua (pois $f_\alpha \times f'_\alpha : (E_\alpha \times E'_\alpha, \tau_\alpha \times \tau'_\alpha) \to (E \times E', \tau \times \tau')$ são contínuas pelo lema 2, §4.1B), t.q. $f_\alpha \times f'_\alpha = (f_\alpha \times f'_\alpha) \circ g$. Logo, $g = 1_{E \times E'}$ $\therefore$ $1_{E \times E'}$ é contínua, donde $\bar{\tau} \supset \tau \times \tau'$.

Além disso, $E \times E' = \bigcup_{\alpha \in I} (f_\alpha \times f'_\alpha)(E_\alpha \times E'_\alpha)$ (observação em seguida à prop. 6, §1.4) donde, sendo $f_\alpha \times f'_\alpha : (E_\alpha \times E'_\alpha, \tau_\alpha \times \tau'_\alpha) \to (E \times E', \tau \times \tau')$ abertas, já que f_α e f'_α são abertas (lema 2, §4.1B), segue que $1_{E \times E'}$ é aberta, pela prop. 12. Logo, $\bar{\tau} = \tau \times \tau'$.

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha \times E'_\alpha, \tau_\alpha \times \tau'_\alpha) \arrow[r, "f_\alpha \times f'_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha \times f'_\alpha"'] & (E \times E', \tau \times \tau') \\
& (E \times E', \bar{\tau}) \arrow[u, "1_{E \times E'}"']
\end{tikzcd}$$

Corolário 1: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos, de lim. indutivo $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$, onde tôdas as f_α são abertas, então $\mathcal{T}_{TT} = \mathcal{T}_T \times \mathcal{T}_T$.

Corolário 2: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre $C_{I\mathcal{T}}$ (de grupos topológicos, respectiva/.) de limite indutivo $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$ na categoria de espaço topológico, onde tôdas as f_α são abertas, então $\mathcal{T}_{C_1} = \mathcal{T}_T$ ($\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_T$), respectiva/.).

Dem.: Usar o corolário 1 e a Primeira Proposição Fundamental (e a Segunda Proposição Fundamental, respectiva/.).

Corolário 3: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre C_{IG} (respectiva/., de grupos topológicos) onde $f_{\beta\alpha}$ é aberta se $\alpha \leq \beta$, e seu limite indutivo na categoria de espaço topológico é $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$ então $\mathcal{T}_{C_1} = \mathcal{T}_T$ (respectiva/. $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_T$).

Dem.: Usar o corolário 2 e a prop. 1.1.

Proposição 14: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ e $(I', (H_{\alpha'}, \mathcal{T}'_{\alpha'}), h_{\beta'\alpha'})$ são sistemas indutivos de espaços topológicos, de lim. indutivos $((E, \mathcal{T}), f_\alpha)$ e $((H, \mathcal{T}'), h_{\alpha'})$, respectiva/., e (φ, μ_α) é um morfismo entre os sistemas indutivos de conjuntos $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ e $(I', H_{\alpha'}, h_{\beta'\alpha'})$, t.q. $\varphi(I)$ seja cofinal em I' e se μ_α fôr aberta, $\forall \alpha \in I$, então se $\mu : E \longrightarrow H$ é o limite indutivo de (φ, μ_α) na categoria de conjuntos, teremos que μ é aberta, de $(E, \mathcal{T})$ em $(H, \mathcal{T}')$.

Dem.: Como $\varphi(I)$ é cofinal em I', segue que $(\varphi(I), (H_{\varphi(\alpha)}, \mathcal{T}_{\varphi(\alpha)}), h_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)})$ é um sistema indutivo de esp. topológicos de lim. indutivo $((H, \mathcal{T}'), h_{\varphi(\alpha)})$ (Prop. 4a, §1.3), e é evidente que (φ, μ_α) é morfismo de sistema indutivo de conj., entre $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ e $(\varphi(I), (H_{\varphi(\alpha)}, \mathcal{T}_{\varphi(\alpha)}), h_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)})$, de lim. indutivo $\mu : E \to H$.

Seja $\Omega \in \mathcal{T}$ e $\Omega' = \mu(\Omega)$: queremos provar que $\Omega' \in \mathcal{T}'$.
Seja $\Omega_\alpha = f_\alpha^{-1}(\Omega)$, então $\Omega_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$, $\forall \alpha \in I$ e $f_\alpha(\Omega_\alpha) \subset \Omega$, $\forall \alpha \in I$
$\therefore \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(\Omega_\alpha) \subset \Omega$. Mas, se $x \in \Omega$, $\exists \alpha_0 \in I$, $x_{\alpha_0} \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x \in \Omega$ (lema 1a, §1.4) $\therefore$ $x_{\alpha_0} \in f_{\alpha_0}^{-1}(\Omega)$, donde $x_{\alpha_0} \in \Omega_{\alpha_0}$
$\therefore$ $x = f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) \in f_{\alpha_0}(\Omega_{\alpha_0}) \subset \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(\Omega_\alpha)$. Logo, $\Omega = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(\Omega_\alpha)$.
Por outro lado, se $\alpha \leq \beta$, temos: $\Omega_\alpha = f_\alpha^{-1}(\Omega) = (f_\beta \circ f_{\beta\alpha})^{-1}(\Omega) =$

$f_{\beta\alpha}^{-1}(f_\beta^{-1}(\Omega)) = f_{\beta\alpha}^{-1}(\Omega_\beta)$, donde $f_{\beta\alpha}(\Omega_\alpha) \subset \Omega_\beta$ se $\alpha \leq \beta$ e $\therefore f_\beta f_{\beta\alpha}(\Omega_\alpha) \subset f_\beta(\Omega_\beta)$, isto é, $f_\alpha(\Omega_\alpha) \subset f_\beta(\Omega_\beta)$ se $\alpha \leq \beta$. Como I é filtrante à direita, é fácil ver então que, se $\alpha_0 \in I$, temos $\Omega = \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} f_\alpha(\Omega_\alpha)$. Logo, se chamarmos $\mu_\alpha(\Omega_\alpha) = \Omega'_{\varphi(\alpha)}$, $\Omega'_{\varphi(\alpha)} \in \tau'_{\varphi(\alpha)}$, temos: $\Omega' = \mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} f_\alpha(\Omega_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} \mu \circ f_\alpha(\Omega_\alpha) = \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)} \mu_\alpha(\Omega_\alpha) = \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)}(\Omega'_{\varphi(\alpha)})$ se $\alpha_0 \in I$.

Seja $\alpha_0 \in I$: então $h_{\varphi(\alpha_0)}^{-1}(\Omega') = h_{\varphi(\alpha_0)}^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)}(\Omega'_{\varphi(\alpha)})\right) =$

$= \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha_0)}^{-1} h_{\varphi(\alpha)}(\Omega'_{\varphi(\alpha)}) = \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} (h_{\varphi(\alpha)} \circ h_{\varphi(\alpha)\varphi(\alpha_0)})^{-1} h_{\varphi(\alpha)}(\Omega'_{\varphi(\alpha)}) =$

$= \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)\varphi(\alpha_0)}^{-1} h_{\varphi(\alpha)}^{-1} h_{\varphi(\alpha)}(\Omega'_{\varphi(\alpha)}) \supset \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)\varphi(\alpha_0)}^{-1}(\Omega'_{\varphi(\alpha)})$.

Por outro lado, como $f_{\beta\alpha}(\Omega_\alpha) \subset \Omega_\beta$ se $\alpha \leq \beta$, segue que $\mu_\beta f_{\beta\alpha}(\Omega_\alpha) \subset \mu_\beta(\Omega_\beta)$, $\therefore h_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)} \mu_\alpha(\Omega_\alpha) \subset \mu_\beta(\Omega_\beta)$. $\therefore h_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)}(\Omega'_{\varphi(\alpha)}) \subset \Omega'_{\varphi(\beta)}$ se $\alpha \leq \beta$. Logo se $x_{\varphi(\alpha_0)} \in h_{\varphi(\alpha_0)}^{-1}(\Omega')$, segue que $h_{\varphi(\alpha_0)}(x_{\varphi(\alpha_0)}) \in \Omega'$ $= \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)}(\Omega'_{\varphi(\alpha)})$, donde $\exists \alpha_1 \geq \alpha_0$, $x_{\varphi(\alpha_1)} \in \Omega'_{\varphi(\alpha_1)}$ t.q.

$h_{\varphi(\alpha_0)}(x_{\varphi(\alpha_0)}) = h_{\varphi(\alpha_1)}(x_{\varphi(\alpha_1)})$. Então, $\exists \gamma \geq \alpha_0, \alpha_1$ t.q. $h_{\varphi(\gamma)\varphi(\alpha_0)}(x_{\varphi(\alpha_0)}) = h_{\varphi(\gamma)\varphi(\alpha_1)}(x_{\varphi(\alpha_1)})$ (corolário do lema 1, §1.4), donde $h_{\varphi(\gamma)\varphi(\alpha_0)}(x_{\varphi(\alpha_0)}) = h_{\varphi(\gamma)\varphi(\alpha_1)}(x_{\varphi(\alpha_1)}) \in h_{\varphi(\gamma)\varphi(\alpha_1)}(\Omega'_{\varphi(\alpha_1)}) \subset$ $\subset \Omega'_{\varphi(\gamma)}$ e $\therefore x_{\varphi(\alpha_0)} \in h_{\varphi(\gamma)\varphi(\alpha_0)}^{-1}(\Omega'_{\varphi(\gamma)}) \subset \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)\varphi(\alpha_0)}^{-1}(\Omega'_{\varphi(\alpha)})$.

Logo, $h_{\varphi(\alpha_0)}^{-1}(\Omega') = \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} h_{\varphi(\alpha)\varphi(\alpha_0)}^{-1}(\Omega'_{\varphi(\alpha)})$ que evidentemente é aberto em $(H_{\varphi(\alpha_0)}, \tau'_{\varphi(\alpha_0)})$. Mas, se $h_{\varphi(\alpha)}^{-1}(\Omega')$ é aberto em $(H_{\varphi(\alpha)}, \tau'_{\varphi(\alpha)})$ $\forall \alpha \in I$ segue que $\Omega' \in \tau'$ (corolário da prop. 8, §4.1C). Logo, $\mu:(E,\tau) \to (H,\tau')$ é aberta.

<u>Proposição 15</u>: Se (E,T,τ) é um objeto de $C_{I\tau}$ t.q. (E,T) é grupo, então $T:(E\times E, \tau\times\tau) \to (E,\tau)$ é uma aplicação aberta.

<u>Dem.</u>: Se $\Omega \in \tau\times\tau$, então é fácil de ver que $(\{x\}\times E)\cap\Omega = \{x\}\times\Omega_x$, onde $\Omega_x \in \tau$. Logo $T(\{x\}\times\Omega_x) = xT\Omega_x \in \tau$, pois a aplicação $\psi_x:(E,\tau) \to (E,\tau)$ definida por $\psi_x(y) = xTy$

é contínua, $\forall x \in E$ (Lema 1, §4.1A) e $\therefore$ é homeomorfismo (Lema 3a, §4.1B). Mas $T(\Omega) = T(\bigcup_{x \in E}((\{x\} \times E) \cap \Omega)) = T(\bigcup_{x \in E}(\{x\} \times \Omega_x)) = \bigcup_{x \in E} T(\{x\} \times \Omega_x)$ que evidentemente pertence a $\mathcal{T}$ donde T é aberta.

Corolário: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo sôbre $C_{i\mathcal{T}}$, t.q. (E_α, T_α) é grupo, $\forall \alpha \in I$, e $((E,T), f_\alpha)$, $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$ são seus lim. indutivos nas categorias de grupos e espaços topológicos, respectiva/., então $T: (E \times E, \mathcal{T}_{T \cdot T}) \to (E, \mathcal{T}_T)$ é aberta.

Dem.: É evidente que (i_I, T_α) é um morfismo de sistemas indutivos de conjuntos, entre $(I, E_\alpha \times E_\alpha, f_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ e $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, de lim. indutivo $T: E \times E \to E$ (ver dem. da prop. 1, §2.1) e T_α é aberta, $\forall \alpha \in I$ (Prop. 15), logo, $T: (E \times E, \mathcal{T}_{T \cdot T}) \to (E, \mathcal{T}_T)$ é aberta (Prop. 14).

2. Limites indutivos de anéis e corpos topológicos (quando $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_T$, $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_T$?)

Proposição 16: Se $(E, T, \overline{T})$ é um anel, $\mathcal{T}$ topologia sôbre E t.q. $(E, T, \mathcal{T})$ é grupo topológico, então $\overline{T}: (E \times E, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$ é contínua, se e sòmente se, $\overline{T}$ é contínua no ponto $(0,0)$ e as aplicações $\overline{\psi}_x$, $\overline{\varphi}_x$, de $(E, \mathcal{T})$ em $(E, \mathcal{T})$, (onde $\overline{\psi}_x(y) = x \overline{T} y$ e $\overline{\varphi}_x(y) = y \overline{T} x$, $\forall y \in E$) são contínuas, $\forall x \in E$.

Dem.: $\Longrightarrow$ é evidente

$\Longleftarrow$ Basta notar que $xy - x_0 y_0 = (x - x_0)(y - y_0) + x_0(y - y_0) + (x - x_0) y_0$, onde substituímos T por $+$ e $\overline{T}$ por $\times$. Os detalhes ficam a cargo do leitor.

Proposição 17: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \overline{T}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de anéis topológicos, de lim. indutivos $((E, T, \overline{T}), f_\alpha)$ e $((E, \mathcal{T}_T), f_\alpha)$ e $((E, T, \overline{T}, \mathcal{T}_A), f_\alpha)$ respectiva/. nas categorias de anéis, de espaços topológicos e de anéis topológicos, então as condições 1, 2, 3 são equivalentes, 4, 5, 6 são equivalentes e 1, 2, 3 acarretam 4, 5, 6:

1) $\tau_{TT} = \tau_T \times \tau_T$

2) $1_{E\times E} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E\times E, \tau_{TT})$ é contínua.

3) $1_{E\times E} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E\times E, \tau_{TT})$ é contínua no ponto $(0,0)$

4) $\tau_A = \tau_T$

5) T e $\overline{T} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ são contínuas

6) T e $\overline{T} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ são contínuas no ponto $(0,0)$.

Dem.: $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$: Segunda Proposição Fundamental (§4.1B); $4 \Longrightarrow 5$: sabemos que T e $\overline{T} : (E\times E, \tau_A \times \tau_A) \longrightarrow (E, \tau_A)$ são contínuas, e então, se $\tau_A = \tau_T$, teremos T e $\overline{T} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ contínuas. $5 \Longrightarrow 4$: temos que τ_T é compatível com as leis T e $\overline{T}$, e pela Prop. 1b §4.1A, segue que $\overline{\overline{T}} : (E, \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua, donde $(E, T, \overline{T}, \tau_T)$ é anel topológico. Logo, $\tau_T \in \mathcal{A}$: conjunto das topologias sôbre E compatíveis com sua estrutura de anel, que tornam tôdas as f_α contínuas, e como τ_A = supremo de $\mathcal{A}$, segue que $\tau_A \supset \tau_T$. Mas, temos sempre $\tau_T \supset \tau_A$ donde $\tau_A = \tau_T$.

$5 \Longrightarrow 6$: evidente; $6 \Longrightarrow 5$: Como T é contínua no ponto $(0,0)$, segue que T é contínua (Segunda Prop. Fundamental), e pela Prop. 1b, §4.1A, temos $\overline{\overline{T}} : (E, \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ contínua $\therefore (E, T, \tau_T)$ é grupo topológico. Por outro lado, as aplicações ψ_x e φ_x são contínuas, pela Prop. 1a, §4.1A, donde, sendo $\overline{T}$ contínua no ponto $(0,0)$, teremos $\overline{T}$ contínua (Prop. 1b).

$1 \Longrightarrow 5$: Pela Prop. 2 §4.1B, T e $\overline{T} : (E\times E, \tau_{TT}) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua, donde, se $\tau_{TT} = \tau_T \times \tau_T$, teremos T e $\overline{T} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ contínuas.

Corolário 1: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \overline{T}_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de anéis topológicos, de lim. indutivo (E, f_α) na categoria de conjuntos, t.q. ou f_α é aberta $\forall \alpha \in I$, ou $f_{\beta\alpha}$ é aberta para $\alpha \leq \beta$, então $\tau_A = \tau_T$.

Dem.: Usar esta prop. e corolário 1 da Prop. 13, §4.1D, quando f_α são abertas. Usar também a Prop. 11 §4.1D, quando as $f_{\beta\alpha}$ forem abertas.

<u>Corolário 2</u>: Se $(I, (E_\alpha, +_\alpha, \times_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de anéis topológicos localmente compactos, onde I é enumerável, então $\tau_A = \tau_T$.

<u>Dem.</u>: Usar esta Prop. e corolário 1 da prop. 9, §4.10.

<u>Proposição 48</u>: Se $(I, (E_\alpha, +_\alpha, \times_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de corpos topológicos, que possui lim. indutivo $((E, +, \times, \tau_K), f_\alpha)$, e onde $((E, \tau_T), f_\alpha)$ é seu limite indutivo na categoria de espaços topológicos, então $\tilde{\chi}: (E^*, \tau^*) \to (E^*, \tau^*)$ é contínua, se $E^* = E - \{0\}$ e τ^* é a topologia induzida por τ sôbre E^*. ($\tilde{\chi}(a) = a^{-1}$, $\forall a \in E^*$).

<u>Dem.</u>: Pela observação 1 em seguida à prop. 18, §3.3, $\exists \alpha_0 \in I$, t.q. $\forall \beta \geq \alpha_0$, $f_{\beta\alpha_0} \neq 0$ (i.e., $f_{\beta\alpha_0}$ é injetora). Mas, $J = \{\beta \in I / \beta \geq \alpha_0\}$ é cofinal em I, donde $(J, (E_\alpha, +_\alpha, \times_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ é um sistema indutivo de corpos topológicos de limites indutivos $((E, +, \times, \tau_K), (f_\alpha)_{\alpha \in J})$ e $((E, \tau_T), (f_\alpha)_{\alpha \in J})$ nas categorias de corpos topológicos e espaços topológicos, respectivamente. É fácil ver que, se $\alpha \leq \beta$, então $f_{\beta\alpha}$ é injetora (pois $f_{\beta\alpha} \circ f_{\alpha\alpha_0} = f_{\beta\alpha_0}$ onde $f_{\alpha\alpha_0}$ e $f_{\beta\alpha_0}$ são injetoras), donde f_α é injetora, $\forall \alpha \in J$ (Prop. 100, §1.4). Se $a_\alpha \in E^*_\alpha = E_\alpha - \{0\}$, temos: $a_\alpha \times_\alpha a_\alpha^{-1} = a_\alpha^{-1} \times_\alpha a_\alpha = 1_{E_\alpha}$, donde $f_\alpha(a_\alpha) \times f_\alpha(a_\alpha^{-1}) = f_\alpha(a_\alpha^{-1}) \times f_\alpha(a_\alpha) = 1_E \therefore f_\alpha(a_\alpha^{-1}) = [f_\alpha(a_\alpha)]^{-1}$ (pois o inverso é único). Logo, $f^*_\alpha \circ \tilde{\chi}_\alpha = \tilde{\chi} \circ f^*_\alpha$, onde $f^*_\alpha = f_\alpha|_{E^*_\alpha}$:

$$\begin{array}{ccc} E^*_\alpha & \xrightarrow{f^*_\alpha} & E^* \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\chi}_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\chi}} \\ E^*_\alpha & \xrightarrow{f^*_\alpha} & E^* \end{array}$$

, $\forall \alpha \in J$ (note-se que, sendo f_α injetora, $f^*_\alpha(E^*_\alpha) \subset E^*$).

Ora, por hipótese, $\tilde{\chi}_\alpha$ é contínua, se munirmos E^*_α da topologia τ^*_α, induzida por τ_α sôbre E^*_α. Além disso, $f_\alpha: (E_\alpha, \tau_\alpha) \to (E, \tau_T)$ é contínua. Então $f^*_\alpha: (E^*_\alpha, \tau^*_\alpha) \to (E^*, \tau^*)$ é contínua $\forall \alpha \in J$: se $\Omega^* \in E^*$ é aberto em τ^*, então $\exists \Omega$ aberto em (E, τ) t.q. $\Omega^* = \Omega \cap E^* = \Omega \cap \complement 0_E$, donde $f^{*-1}_\alpha(\Omega^*) = f^{*-1}_\alpha(\Omega \cap \complement 0_E) = f^{-1}_\alpha(\Omega) \cap \complement 0_\alpha$ que é aberto em $(E^*_\alpha, \tau^*_\alpha)$, pois $f^{-1}_\alpha(\Omega)$ é aberto em (E_α, τ_α).

Mas também, τ^* é a topologia mais fina sôbre E^* que torna as f^*_α contínuas, $\forall \alpha \in J$: já vimos que torna tôdas as f^*_α contímas, donde basta provar que, se $\Omega^* \subset E^*$ é t.q. $f_{\alpha}^{*-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}^*$, $\forall \alpha \in J$, então $\Omega^* \in \tau^*$.

Ora, $\Omega^* \in \tau^* \iff \exists \Omega \in \tau$ t.q. $\Omega^* = \Omega \cap \complement\{0_E\}$, donde $\Omega^* \in \tau^* \iff \Omega^* \in \tau$ ou $\Omega^* \cup \{0_E\} \in \tau$. Analogamente, $\Omega_{\alpha}^* \in \tau_{\alpha}^* \iff \Omega_{\alpha}^* \in \tau_{\alpha}$ ou $\Omega_{\alpha}^* \cup \{0_{\alpha}\} \in \tau_{\alpha}$.

Suponhamos, por absurdo, que $\Omega^* \subset E^*$, $\Omega^* \notin \tau^*$ e $f_{\alpha}^{*-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}^*$, $\forall \alpha \in J$ ($\therefore f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}^*$, $\forall \alpha \in J$). Ora, $f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}^* \therefore f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}$ ou $f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) \cup \{0_{\alpha}\} \in \tau_{\alpha}$, i.é, ou $f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}$, ou $f_{\alpha}^{-1}(\Omega^* \cup \{0_E\}) \in \tau_{\alpha}$, $\forall \alpha \in J$. Por outro lado, $\Omega^* \notin \tau^* \therefore \Omega^* \notin \tau_T$ e $\Omega^* \cup \{0_E\} \notin \tau_T$, donde $\exists \alpha \in J$, $\beta \in J$ t.q. $f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) \notin \tau_{\alpha}$ e $f_{\beta}^{-1}(\Omega^* \cup \{0_E\}) \notin \tau_{\beta}$ (corolário da prop. § 4.10). Seja $\gamma \in J$, $\gamma \geq \alpha, \beta$; então $f_{\alpha} = f_{\gamma} \circ f_{\gamma\alpha}$ e $f_{\beta} = f_{\gamma} \circ f_{\gamma\beta}$, donde $f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) = f_{\gamma\alpha}^{-1}(f_{\gamma}^{-1}(\Omega^*))$ e $f_{\beta}^{-1}(\Omega^* \cup \{0_E\}) = f_{\gamma\beta}^{-1}(f_{\gamma}^{-1}(\Omega^* \cup \{0_E\}))$, e como $f_{\gamma\alpha}$ e $f_{\gamma\beta}$ são contínuas, devemos ter $f_{\gamma}^{-1}(\Omega^*) \notin \tau_{\gamma}$ e $f_{\gamma}^{-1}(\Omega^* \cup \{0_E\}) \notin \tau_{\gamma}$, caso contrário $f_{\alpha}^{-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}$ ou $f_{\beta}^{-1}(\Omega^* \cup \{0_E\}) \in \tau_{\beta}$. Mas já vimos que ou $f_{\gamma}^{-1}(\Omega^*) \in \tau_{\gamma}$ ou $f_{\gamma}^{-1}(\Omega^* \cup \{0_E\}) \in \tau_{\gamma}$, o que é um absurdo. Logo, se $f_{\alpha}^{*-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}^*$ $\forall \alpha \in J$, teremos $\Omega^* \in \tau^*$ (se $\Omega^* \subset E^*$) e $\therefore$ $\Omega^* \in \tau^* \iff f_{\alpha}^{*-1}(\Omega^*) \in \tau_{\alpha}^*$, $\forall \alpha \in J$.

Provemos então que $\overset{-1}{X} : (E^*, \tau^*) \to (E^*, \tau^*)$ é contínua: se $\Omega^* \in \tau^*$, então $f_{\alpha}^{*-1}(\overset{-1}{X})^{-1}(\Omega^*) = (\overset{-1}{X_{\alpha}})^{-1}(f_{\alpha}^{*-1}(\Omega^*)) \in \tau_{\alpha}^*$, $\forall \alpha \in J$, pois f_{α}^* e $\overset{-1}{X_{\alpha}}$ são contínuas. Mas então, chamando $A = (\overset{-1}{X})^{-1}(\Omega^*)$ temos: $f_{\alpha}^{*-1}(A) \in \tau_{\alpha}^*$ $\forall \alpha \in J$, donde $A \in \tau^* \therefore \overset{-1}{X}$ é contínua.

<u>Proposição 19</u>: Se $(I, (E_{\alpha}, +_{\alpha}, X_{\alpha}, \tau_{\alpha}), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de corpos topológicos que possui limite indutivo $((E, +, X, \tau_K), f_{\alpha})$, então as condições 1, 2, 3 são equivalentes, as condições 4, 5, 6 são equivalentes, e as condições 1, 2, 3 acarretam 4, 5, 6:

1) $\tau_{TT} = \tau_T \times \tau_T$

2) $1_{E\times E} : (E \times E, \tau_T \times \tau_T) \to (E \times E, \tau_{TT})$ é contínua

3) $1_{E\times E} : (E \times E, \tau_T \times \tau_T) \to (E \times E, \tau_{TT})$ é contínua no ponto $(0,0)$

4) $\tau_K = \tau_T$

5) $+$ e $X:(E\times E, \tau_T\times\tau_T)\to(E,\tau_T)$ são contínuas

6) $+$ e $X:(E\times E, \tau_T\times\tau_T)\to(E,\tau_T)$ são contínuas no ponto $(0,0)$

Dem.: $1\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow 3$ e $5\Leftrightarrow 6$ e $1\Rightarrow 5$: consequência da prop. 17.

$4\Rightarrow 5$: Sabemos que $+$ e $X:(E\times E, \tau_K\times\tau_K)\to(E,\tau_K)$ são contínuas, se $\tau_K=\tau_T$, teremos então: $+$ e $X:(E\times E,\tau_T\times\tau_T)\to(E,\tau_T)$ são contínuas.

$5\Rightarrow 4$: Temos que τ_T é compatível com as leis $+$ e X; pela Prop. 1b, §4.1A, $\overset{-}{+}:(E,\tau_T)\to(E,\tau_T)$ é contínua, e pela Prop. 13, $\overset{-1}{X}:(E-\{0\},\tau^*)\to(E-\{0\},\tau^*)$ é contínua $\therefore (E,+,X,\tau_T)$ é um corpo topológico. Logo, $\tau_T\in\mathcal{Q}$: conj. das topologias sôbre E compatíveis com sua estrutura de corpo, que tornam tôdas as fs contínuas, e como τ_K = supremo de $\mathcal{Q}$, segue que $\tau_K\supset\tau_T$. Mas temos sempre $\tau_T\supset\tau_K$, donde $\tau_K=\tau_T$.

3. Limites indutivos de módulos e espaços vetoriais topológicos (quando que $\tau_V=\tau_T$?)

Lema 4: Se (E,τ_E) e (A,τ_A) são espaços topológicos, $\perp$ uma lei de composição externa entre A e E, t.q. $\perp:(A\times E,\tau_A\times\tau_E)\to(E,\tau_E)$ seja contínua, então as aplicações $\theta_x:(A,\tau_A)\to(E,\tau_E)$ definidas por $\theta_x(\lambda)=\lambda\perp x$, $\forall\lambda\in A$, são contínuas $\forall x\in E$; e as aplicações $\eta_\lambda:(E,\tau_E)\to(E,\tau_E)$ definidas por $\eta_\lambda(x)=\lambda\perp x$, $\forall x\in E$ são contínuas, $\forall\lambda\in A$.

Dem.: Basta notar que θ_x é a composta das aplicações

$$\begin{array}{ccccc}(A,\tau_A) & \longrightarrow & (A\times E,\tau_A\times\tau_E) & \xrightarrow{\perp} & (E,\tau_E)\\ \lambda & \longrightarrow & (\lambda,x) & \longrightarrow & \lambda\perp x\end{array}$$

que são contínuas.

Do mesmo modo, η_λ é a composta das aplicações

$$\begin{array}{ccccc}(E,\tau_E) & \longrightarrow & (A\times E,\tau_A\times\tau_E) & \xrightarrow{\perp} & (E,\tau_E)\\ x & \longrightarrow & (\lambda,x) & \longrightarrow & \lambda\perp x\end{array}$$

que são contínuas.

Corolário: Se $(E,\top,\tau_E,A,\perp,\tau_A)$ é um módulo topológico ou espaço vetorial topológico, então as aplicações θ_x e η_λ são contínuas, $\forall x\in E$, $\forall\lambda\in A$.

Proposição [illegible]: Sejam $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha}), f_{\beta\alpha})$ e $(I, (A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha}), \varphi_{\beta\alpha})$ sistemas indutivos de espaços topológicos, de limites indutivos $((E, \mathcal{T}_E), f_\alpha)$, $((A, \mathcal{T}_A), \varphi_\alpha)$ respectivamente, e $\perp_\alpha$ lei de composição externa entre A_α e E_α t.q. $f_{\beta\alpha} \circ \perp_\alpha = \perp_\beta \circ (\varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ se $\alpha \leq \beta$. Então:

a) Se $\forall \alpha \in I$, $\forall x_\alpha \in E_\alpha$, as aplicações $\theta_{x_\alpha} : (A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha}) \to (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha})$ (definidas por $\theta_{x_\alpha}(\lambda_\alpha) = \lambda_\alpha \perp_\alpha x_\alpha$, $\forall \lambda_\alpha \in A_\alpha$) são contínuas (respectivamente $\forall \alpha \in I$, $\lambda_\alpha \in A_\alpha$, as aplicações $\eta_{\lambda_\alpha} : (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha}) \to (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha})$ são contínuas), então, $\forall x \in E$, as aplicações $\theta_x : (A, \mathcal{T}_A) \to (E, \mathcal{T}_E)$ são contínuas (respectivamente, $\forall \lambda \in A$, as aplicações $\eta_\lambda : (E, \mathcal{T}_E) \to (E, \mathcal{T}_E)$ são contínuas). (Onde $\perp$ é o limite indutivo do morfismo de sistemas indutivos de conjuntos $(1_I, \perp_\alpha)$, entre $(I, A_\alpha \times E_\alpha, \varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ e $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$).

b) Se, $\forall \alpha \in I$, $\perp_\alpha : (A_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha} \times \mathcal{T}_{E_\alpha}) \to (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha})$ é contínua então, $\forall x \in E$, a aplicação $\theta_x : (A, \mathcal{T}_A) \to (E, \mathcal{T}_E)$ é contínua $\forall \lambda \in A$, a aplicação $\eta_\lambda : (E, \mathcal{T}_E) \to (E, \mathcal{T}_E)$ é contínua, e a aplicação $\perp : (A \times E, \mathcal{T}_{TT}) \to (E, \mathcal{T}_E)$ é contínua, se por $\mathcal{T}_{TT}$ entendermos a topologia do lim. indutivo de $(I, (A_\alpha \times E_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha} \times \mathcal{T}_{E_\alpha}), \varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ na categoria de espaços topológicos.

c) Se $(I, (E_\alpha, T_{E_\alpha}, \mathcal{T}_{E_\alpha}), f_{\beta\alpha})$ e $(I, (A_\alpha, T_{A_\alpha}, \mathcal{T}_{A_\alpha}), \varphi_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos de grupos topológicos, de limites indutivos respectivamente $((E, T_E, \mathcal{T}_{EG}), f_\alpha)$ e $((A, T_A, \mathcal{T}_{AG}), \varphi_\alpha)$, e se, $\forall \alpha \in I$ $\perp_\alpha$ é distributiva em relação ao par $(T_{E_\alpha}, T_{A_\alpha})$ (ver def. 17, §2.3) e $\theta_{x_\alpha} : (A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha}) \to (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha})$ é contínua, $\forall \alpha \in I$, $\forall x_\alpha \in E_\alpha$, então $\theta_x : (A, \mathcal{T}_{AG}) \to (E, \mathcal{T}_{EG})$ é contínua, $\forall x \in E$.

d) Se $(I, (E_\alpha, T_{E_\alpha}, \mathcal{T}_{E_\alpha}), f_{\beta\alpha})$ é sistema indutivo de grupos topológicos, de lim. indutivo $((E, T_E, \mathcal{T}_{EG}), f_\alpha)$, e se $\forall \alpha \in I$, $\perp_\alpha$ é distributiva em relação a T_{E_α} (ver def. 16, §2.3) e $\eta_{\lambda_\alpha} : (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha}) \to (E_\alpha, \mathcal{T}_{E_\alpha})$ é contínua, $\forall \alpha \in I$, $\forall \lambda_\alpha \in A_\alpha$, então $\eta_\lambda : (E, \mathcal{T}_{EG}) \to (E, \mathcal{T}_{EG})$ é contínua, $\forall \lambda \in A$.

<u>Dem.</u>: Só delinearemos as demonstrações, deixando a verificação das afirmações ao cargo do leitor.

Notemos que $f_{\beta\alpha} \circ \perp_\alpha = \perp_\beta \circ (\varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ se $\alpha \leq \beta$ é que garante que $(1_I, \perp_\alpha)$ é um morfismo de sistemas indutivos e portanto permite definir $\perp$: lim. indutivo de $(1_I, \perp_\alpha)$.

a) Se $x \in E$, $\exists \alpha_0 \in I$, $x_{\alpha_0} \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$. Chamemos $x_\beta = f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0})$ se $\beta \geq \alpha_0$. Temos $J = \{\beta \in I \mid \beta \geq \alpha_0\}$ é cofinal em I, e $(1_J, \theta_{x_\alpha})$ é um morfismo entre os sistemas indutivos de espaços topológicos $(J, (A_\alpha, \tau_{A_\alpha})_{\alpha \in J}, (\varphi_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ e $(J, (E_\alpha, \tau_{E_\alpha})_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$, de limite indutivo θ_x. Logo, $\theta_x : (A, \tau_A) \to (E, \tau_E)$ é contínua. Analogamente se prova que $\eta_\lambda : (E, \tau_E) \to (E, \tau_E)$ é contínua $\forall \lambda \in A$.

b) Se $\perp_\alpha : (A_\alpha \times E_\alpha, \tau_{A_\alpha} \times \tau_{E_\alpha}) \to (E_\alpha, \tau_{E_\alpha})$ é contínua, então pela prop. 19, $\forall x_\alpha \in E_\alpha$, $\forall \lambda_\alpha \in A_\alpha$, as aplicações θ_{x_α} e η_{λ_α} são contínuas, donde pela parte a, $\forall x \in E, \forall \lambda \in A$, as aplicações θ_x e η_λ são contínuas. Por outro lado, $(1_I, \perp_\alpha)$ é um morfismo entre os sistemas indutivos de espaços topológicos $(I, (A_\alpha \times E_\alpha, \tau_{A_\alpha} \times \tau_{E_\alpha}), (\varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha}))$ e $(I, (E_\alpha, \tau_{E_\alpha}), f_{\beta\alpha})$ donde $\perp : (A \times E, \tau_{TT}) \to (E, \tau_E)$ é contínua.

c) Seja $x \in E$: $\exists \alpha_0 \in I$, $x_{\alpha_0} \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$. Seja $x_\beta = f_{\beta\alpha_0}(x_{\alpha_0})$, se $\beta \geq \alpha_0$, e $J = \{\beta \in I \mid \beta \geq \alpha_0\}$: J é cofinal em I, e $(1_J, \theta_{x_\alpha})$ é um morfismo entre os sistemas indutivos de grupos topológicos $(J, (A_\alpha, \tau_{A_\alpha})_{\alpha \in J}, (\varphi_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ e $(J, (E_\alpha, \tau_{E_\alpha})_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ de lim. indutivo θ_x, donde $\theta_x : (A, \tau_{AG}) \to (E, \tau_{EG})$ é contínua.

d) Análogo a c.

<u>Corolário</u>: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \tau_{E_\alpha}, A_\alpha, \tau_{A_\alpha}, \perp_\alpha), (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo sôbre a categoria de módulos topológicos ou espaços vetoriais topológicos generalizados, então temos: $\theta_x : (A, \tau_A) \to (E, \tau_E)$, $\theta_x : (A, \tau_{AG}) \to (E, \tau_{EG})$, $\eta_\lambda : (E, \tau_E) \to (E, \tau_E)$, $\eta_\lambda : (E, \tau_{EG}) \to (E, \tau_{EG})$ são contínuas $\forall x \in E, \lambda \in A$, e $\perp : (A \times E, \tau_{TT}) \to (E, \tau_E)$ é contínua. (Notações da Prop.) Além disso, se $\lambda \neq 0$, $\eta_\lambda : \begin{cases} (E, \tau_E) \to (E, \tau_E) \\ (E, \tau_{EG}) \to (E, \tau_{EG}) \end{cases}$ é homeomorfismo, pois $\eta_{\lambda^{-1}}$ é a aplicação inversa de η_λ.

[illegible] de (E,T_E) é grupo abeliano, (A,T_A) grupo, t.q. $(E,T_E,\mathcal{T}_E)$ e $(A,T_A,\mathcal{T}_A)$ sejam objetos de C_{AT}, e se $\perp$ é lei de composição externa entre A e E, distributiva em relação a T_E, e ao par (T_E,T_A) (ver definições 16 e 17, § 2.3), t.q. η_λ e θ_x são contínuas, $\forall \lambda\in A$, $\forall x\in E$, então $\perp:(A\times E,\mathcal{T}_A\times\mathcal{T}_E)\longrightarrow(E,\mathcal{T}_E)$ é contínua, se e sòmente se, é contínua no ponto $(\theta,0)$.

<u>Dem.</u>: Basta usar a relação: $\lambda x-\lambda_0 x_0=(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)+\lambda_0(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0$, na notação usual. Os detalhes ficam a cargo do leitor.

<u>Notação</u>: Se $(I,(A_\alpha,\mathcal{T}_{A\alpha}),\varphi_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de anéis topológicos (corpos topológicos), representaremos seu limite indutivo por $((A,\mathcal{T}_{AA}),\varphi_\alpha)$, $(((A,\mathcal{T}_{AK}),\varphi_\alpha)$, respectiv/.)

<u>Corolário</u>: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_{E\alpha},A_\alpha,\mathcal{T}_{A\alpha},\perp_\alpha),(\varphi_{\beta\alpha},f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo sôbre a categoria de módulos topológicos generalizados (espaço vetorial top. gener.), t.q. $\mathcal{T}_A=\mathcal{T}_{AA}$ ($\mathcal{T}_A=\mathcal{T}_{AK}$ respectiv/.), então $\mathcal{T}_{AG}=\mathcal{T}_A$ e $\perp:(A\times E,\mathcal{T}_A\times\mathcal{T}_{EG})\longrightarrow(E,\mathcal{T}_{EG})$ é contínua se e sòmente fôr contínua no ponto $(0,0)$.

<u>Dem.</u>: Usar corolário da prop. 20.

<u>Lema 5</u>: Se $(I,(E_\alpha,T_{E\alpha},\mathcal{T}_{E\alpha}),f_{\beta\alpha})$ e $(I,(A_\alpha,T_{A\alpha},\mathcal{T}_{A\alpha}),\varphi_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos de C_{AT}, t.q. $(E_\alpha,T_{E\alpha})$ e $(A_\alpha,T_{A\alpha})$ sejam grupos, $\forall\alpha\in I$, então $\perp_{A\times E}:(A\times E,\mathcal{T}_A\times\mathcal{T}_E)\longrightarrow(A\times E,\mathcal{T}_{TT})$ é contínua se e sòmente se fôr contínua no ponto (e,e).

<u>Dem.</u>: A dem. é análoga à do corolário da prop. 6, § 4.1B.

<u>Corolário</u>: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_{E\alpha},A_\alpha,\mathcal{T}_{A\alpha},\perp_\alpha),(\varphi_{\beta\alpha},f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo de módulos topológicos generalizados (esp. vet. top. gener.), então $\perp_{A\times E}:(A\times E,\mathcal{T}_A\times\mathcal{T}_E)\longrightarrow(A\times E,\mathcal{T}_{TT})$ é contínua, se e sòmente se, fôr contínua no ponto $(0,0)$.

<u>Notação</u>: Se $(I,(E_\alpha,T_\alpha,\mathcal{T}_{E\alpha},A_\alpha,\mathcal{T}_{A\alpha},\perp_\alpha),(\varphi_{\beta\alpha},f_{\beta\alpha}))$ é um sist. indutivo de módulos top. gener. (esp. vet. top. gener.) representaremos seu lim. indutivo por $((E,T,\mathcal{T}_V,A,\mathcal{T}_{AA},\perp),(\varphi_\alpha,f_\alpha))$

(respectiva/. $(E, T, \tau_\nu, A, \tau_{AK}, \perp), (\varphi_\alpha, f_\alpha))$.

Lema 6: a) Se $(I, (E_\alpha, \tau_{E_\alpha}), f_{\beta\alpha})$ e $(I, (A_\alpha, \tau_{A_\alpha}), \varphi_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos de espaços topológicos, de lim. indutivos $((E, \tau_E), f_\alpha)$ e $((A, \tau_A), \varphi_\alpha)$ respectiva/., e $(I, (A_\alpha \times E_\alpha, \tau_{A_\alpha} \times \tau_{E_\alpha}), \varphi_{\beta\alpha} \times f_{\beta\alpha})$ tem limite indutivo $((A \times E, \tau_{TT}), \varphi_\alpha \times f_\alpha)$, então $\tau_{TT} \supset \tau_A \times \tau_E$.

b) Se $(N, (E_\alpha, \tau_{E_\alpha}), f_{\beta\alpha})$ e $(N, (A_\alpha, \tau_{A_\alpha}), \varphi_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos de espaços topológicos localmente compactos, de limites indutivos respectiva/. $((E, \tau_E), f_\alpha)$ e $((A, \tau_A), \varphi_\alpha)$, então $\tau_{TT} = \tau_A \times \tau_E$.

c) Se $(I, (E_\alpha, \tau_{E_\alpha}), f_{\beta\alpha})$ e $(I, (A_\alpha, \tau_{A_\alpha}), \varphi_{\beta\alpha})$ são sistemas indutivos de espaços topológicos localmente compactos, onde I é enumerável, e seus limites indutivos são $((E, \tau_E), f_\alpha)$ e $((A, \tau_A), \varphi_\alpha)$ respectiva/., então $\tau_{TT} = \tau_A \times \tau_E$.

Dem.: a) A demonstração é análoga à da Prop. 3, §4.1B. b) A dem. é análoga à da Prop. 9; c) A dem. é análoga à do corolário 1 da prop. 9.

Proposição 22: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \tau_{E_\alpha}, A_\alpha, \tau_{A_\alpha}, \perp_\alpha), (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo de módulos topológicos generalizados (esp. vet. top. gener.) t.q. $\tau_A = \tau_{AA}$ (respectiva/. $\tau_A = \tau_{AK}$) e $\tau_{EG} = \tau_E$, então as condições 1, 2, 3 são equivalentes, as condições 4, 5, 6 são equivalentes e as condições 1, 2, 3 acarretam as condições 4, 5, 6:

1) $\tau_{TT} = \tau_A \times \tau_E$

2) $1_{A\times E} : (A \times E, \tau_A \times \tau_E) \to (A \times E, \tau_{TT})$ é contínua

3) $1_{A\times E} : (A \times E, \tau_A \times \tau_E) \to (A \times E, \tau_{TT})$ é contínua no ponto $(0,0)$

4) $\tau_\nu = \tau_E$

5) $\perp : (A \times E, \tau_A \times \tau_E) \to (E, \tau_E)$ é contínua

6) $\perp : (A \times E, \tau_A \times \tau_E) \to (E, \tau_E)$ é contínua no ponto $(0,0)$.

Dem.: $1 \Rightarrow 2$: evidente; $2 \Rightarrow 1$: se $1_{A\times E} : (A \times E, \tau_A \times \tau_E) \to (A \times E, \tau_{TT})$ é contínua, então $\tau_A \times \tau_E \supset \tau_{TT}$. Mas $\tau_{TT} \supset \tau_A \times \tau_E$ (lema 6a) donde $\tau_{TT} = \tau_A \times \tau_E$.

$2 \Rightarrow 3$: Corolário do lema 5; $4 \Rightarrow 5$: sabemos que $\perp : (A \times E, \tau_A \times \tau_E) \to (E, \tau_\nu)$ é contínua, se $\tau_\nu = \tau_E$ teremos $\perp : (A \times E, \tau_A \times \tau_E) \to (E, \tau_E)$ contínua;

[illegible] : [illegible], se $\perp : (A\times E, \tau_A \times \tau_E) \longrightarrow (E, \tau_E)$ é contínua, então (como [illegible]) temos $\tau_E \in \mathcal{Q}$: conj. das topologias sôbre E compatíveis com sua estrutura de módulo sôbre A, relativamente à topologia τ_{AA} (com sua estrutura de esp. vet. sôbre A, relativa/. à topologia τ_{AK}), que tornam tôdas as $f_{\beta\alpha}$ contínuas; mas τ_V = supremo de $\mathcal{Q}$, donde $\tau_V \supset \tau_E$. Como sempre se tem $\tau_E \supset \tau_V$, segue que $\tau_E = \tau_V$.

[illegible] 6 : corolário da prop. 21; $1 \Longrightarrow 5$: sabemos que $\perp : (A\times E, \tau_{TT}) \longrightarrow (E, \tau_E)$ é contínua (corolário da prop. 20), donde, se $\tau_{TT} = \tau_A \times \tau_E$, teremos $\perp : (A\times E, \tau_A \times \tau_E) \longrightarrow (E, \tau_E)$ contínua.

Corolário 1: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \tau_{E_\alpha}, A_\alpha, \tau_{A_\alpha}, \perp_\alpha), (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo de módulos top. gener. (esp. vet. top. gener.), t.q. $\varphi_{\beta\alpha}$ e $f_{\beta\alpha}$ são abertas, se $\alpha \leq \beta$, então $\tau_{AA} = \tau_A$ (respectiva/. $\tau_{AK} = \tau_A$), $\tau_{EG} = \tau_E$, e vale a condição 1 da prop., donde $\tau_V = \tau_E$.

Dem.: Pelo corolário 1 da prop. 17, temos $\tau_{AA} = \tau_A$ (Pela prop. 19, corol. 1 da prop. 13, e prop. 11, temos $\tau_{AK} = \tau_A$). Pelo corolário 3 da prop. 13, temos $\tau_{EG} = \tau_E$. Mas, pela prop. 13 e prop. 11, temos que $\tau_{TT} = \tau_A \times \tau_E$: a condição 1 da proposição, donde $\tau_V = \tau_E$.

Corolário 2: Se $(I, (E_\alpha, T_\alpha, \tau_{E_\alpha}, A_\alpha, \tau_{A_\alpha}, \perp_\alpha), (\varphi_{\beta\alpha}, f_{\beta\alpha}))$ é um sistema indutivo de mód. top. generalizados (esp. top. vet. gener.) onde I é enumerável, e as topologias τ_{E_α} e τ_{A_α} são localmente compactas, $\forall \alpha \in I$, então $\tau_{AA} = \tau_A$ (respectiva/., $\tau_{AK} = \tau_A$), $\tau_{EG} = \tau_E$, e vale a condição 1 da proposição, donde $\tau_V = \tau_E$.

Dem.: Pelo corolário 2 da proposição 17, temos $\tau_{AA} = \tau_A$ (pelo corolário 1 da proposição 9 e pela proposição 19, temos $\tau_{AK} = \tau_A$). Pelo corolário 2 da proposição 9, temos $\tau_{EG} = \tau_E$. Pelo lema 6 c, temos $\tau_{TT} = \tau_A \times \tau_E$, a condição 1 da proposição 22, logo $\tau_V = \tau_E$.

4. limites indutivos de espaços convexos (quando que $\mathcal{T}_{lc} = \mathcal{T}_f$?)

Inicialmente daremos uma caracterização da topologia $\mathcal{T}_{lc}$, que por ser de manuseio mais fácil que a propriedade de ser o supremo dum conjunto de topologias, permitir-nos-á obter alguns resultados.

Proposição 23: Se $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ é uma família de espaços convexos, E um espaço vetorial, $(g_i)_{i \in I}$ uma família de aplicações lineares $g_i : E_i \longrightarrow E$, e se $\mathcal{T}$ é a topologia t.q. $(E, \mathcal{T})$ é estrutura final para a família $((E_i, \mathcal{T}_i), g_i)$ relativamente ao funtor esquecimento F da categoria de espaços convexos na categoria de espaços vetoriais, e se $\mathcal{U}$ é o conjunto dos subconjuntos A absolutamente convexos absorventes de E t.q. $g_i^{-1}(A)$ é vizinhança de 0 em $(E_i, \mathcal{T}_i)$ $\forall i \in I$, então $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0 em $(E, \mathcal{T})$.

Dem.: Sabemos que $\mathcal{T}$ é o supremo de $\mathcal{A}$: conjunto das topologias localmente convexas sôbre E, que tornam tôdas as g_i contínuas (ver dem. da prop.25, §3.4). É claro que $E \in \mathcal{U}$ $\therefore$ $\mathcal{U} \neq \emptyset$ e é fácil de ver que $\mathcal{U}$ satisfaz as condições a, b e c da prop.22, §3.4, donde existe uma topologia $\mathcal{T}^*$ localmente convexa sôbre E, t.q. $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0, em $(E, \mathcal{T}^*)$. Além disso, usando a prop.6, §4.1B, é fácil ver que tôdas as g_i são contínuas, de $(E_i, \mathcal{T}_i)$ em $(E, \mathcal{T}^*)$. Logo, $\mathcal{T}^* \in \mathcal{A}$ e $\therefore$ $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}^*$.

Por outro lado, $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$, pois $\mathcal{T}$ é localmente convexa sôbre E (Prop.23, §3.4) e torna tôdas as g_i contínuas (prop.6, §3.1). Se V é uma vizinhança de 0 em $(E, \mathcal{T})$ e $\mathcal{T}$ é localmente convexa, existe uma vizinhança U de 0, absolutamente convexa absorvente t.q. $U \subset V$ (Prop.22, §3.4). Como $\mathcal{T}$ torna tôdas as g_i contínuas, segue que $g_i^{-1}(U)$ é vizinhança de 0 em $(E_i, \mathcal{T}_i)$, $\forall i \in I$, logo $U \in \mathcal{U}$, donde V é vizinhança da origem em $(E, \mathcal{T}^*)$. Logo, $\mathcal{T}^* \supset \mathcal{T}$ (corolário da prop.29 §3.4), donde $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. Logo, $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças da origem em $(E, \mathcal{T})$.

Proposição 24: Se $(\mathbb{N}, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços convexos, de limite indutivo $((E, \tau_{LC}), f_\alpha)$, então $\tau_{C1} = \tau_G = \tau_V = \tau_{LC}$.

Dem.: Seja τ uma topologia compatível com a adição de E (i.é, $+ : (E \times E, \tau \times \tau) \longrightarrow (E, \tau)$ é contínua), que torne tôdas as f_α contínuas, e provemos que $\tau_{LC} \supset \tau$.

Seja V_0 uma vizinhança de 0 em (E, τ). Como $+ : (E \times E, \tau \times \tau) \longrightarrow (E, \tau)$ é contínua, podemos obter uma sequência $(V_n)_{n \geq 0}$ de vizinhanças de zero em (E, τ), t.q. $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$, $\forall n \geq 0$. Para $n \geq 1$, temos: $f_n^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0 em (E_n, τ_n) $\therefore$ $\exists$ uma vizinhança absolutamente convexa absorvente W_n de 0 em (E_n, τ_n), t.q. $W_n \subset f_n^{-1}(V_n)$ (Prop. 22, § 3.4). Seja $T = \bigcup_{n \geq 1} f_n(W_n)$ e W a envoltória absolutamente convexa de T em E. Como W_n é absolutamente convexa, é claro que $f_n(W_n)$ é absolutamente convexa donde W é a envoltória convexa de T (nota em seguida à Prop.-def. 2, § 3.4) e se $x \in W$, temos $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$; $x_i \in f_i(W_i)$, $\lambda_i \geq 0$, e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, mas então $\lambda_i x_i \in f_i(W_i)$, pois $f_i(W_i)$ é absolutamente convexo, donde $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $y_i \in f_i(W_i)$.
Além disso, $f_n(W_n) \subset V_n$, $\forall n \geq 0$, donde, se $x \in W$, teremos $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$, onde $y_i \in V_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Mas, $y_{n-1} + y_n \in V_{n-1} + V_n \subset$ $\subset V_{n-1} + V_{n-1} \subset V_{n-2}$ e por indução temos: $\sum_{i=i_0}^{n} y_i \in V_{i_0 - 1}$, $\forall i_0 : 1, \dots, n$; em particular, $x = \sum_{i=1}^{n} y_i \in V_0$. Logo, $W \subset V_0$. Por outro lado, se $x \in E$, $\exists n_0 \geq 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_{n_0} \in E_{n_0}$ t.q. $f_{n_0}(x_{n_0}) = x$. Mas W_{n_0} é absorvente $\therefore$ $\exists \lambda > 0$ t.q. $x_{n_0} \in \mu W_{n_0}$, $\forall \mu$, com $|\mu| \geq \lambda$ e como $W \supset T \supset f_{n_0}(W_{n_0})$, segue que $x = f_{n_0}(x_{n_0}) \in \mu f_{n_0}(W_{n_0}) \subset \mu W$, $\forall \mu$, com $|\mu| \geq \lambda$, donde W é absorvente. Logo, W é absolutamente convexo absorvente, e $f_n^{-1}(W) \supset f_n^{-1}(T) \supset f_n^{-1}(f_n(W_n)) \supset W_n$ $\forall n \geq 1$ $\therefore$ $f_n^{-1}(W)$ é vizinhança de 0 em (E_n, τ_n) $\forall n \geq 1$, donde (lembrando que $J = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$ é cofinal em $\mathbb{N}$) $W \in \mathcal{U}$ (Prop. 23), e então, como $W \subset V_0$, segue que V_0 é vizinhança de 0 em

(E, τ_{LC}) logo, $\tau \subset \tau_{LC}$ (corolário 3 do lema 3, §4.1B), donde, em particular, $\tau_{C_1} \subset \tau_{LC}$; mas como sempre se tem $\tau_{C_1} \supset \tau_{LC}$ segue que $\tau_{C_1} = \tau_{LC}$. Além disso, já que sempre se tem $\tau_{C_1} \supset \tau_G \supset \tau_V \supset \tau_{LC}$, e $\tau_{C_1} = \tau_{LC}$, segue que $\tau_{C_1} = \tau_G = \tau_V = \tau_{LC}$.

Corolário: Se $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços convexos, onde I é enumerável, então $\tau_{C_1} = \tau_G = \tau_V = \tau_{LC}$.

Dem.: Basta usar as proposições 5 §1.3 e 4, §1.3.

Proposição 25: Se $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços convexos, onde I é enumerável, então as condições 1, 2, 3, são equivalentes, 4, 5, 6 equivalentes e as condições 1, 2, 3 acarretam 4, 5, 6:

1) $\tau_{TT} = \tau_T \times \tau_T$

2) $1_{E\times E} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E \times E, \tau_{TT})$ é contínua.

3) $1_{E\times E} : (E\times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E \times E, \tau_{TT})$ é contínua no ponto $(0,0)$.

4) $\tau_{LC} = \tau_T$

5) $+ : (E \times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua

6) $+ : (E \times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua no ponto $(0,0)$.

Dem.: $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$; $5 \Longleftrightarrow 6$ e $1 \Longrightarrow 5$: consequência da segunda Proposição Fundamental (§4.1B). Também pela segunda Proposição Fundamental temos que $5 \Longrightarrow \tau_{C_1} = \tau_T$, donde, pelo corolário da Prop. 24, temos $\tau_{LC} = \tau_T$. Logo, $5 \Longrightarrow 4$. Mas, também $4 \Longrightarrow 5$: sabemos que $+ : (E \times E, \tau_{LC} \times \tau_{LC}) \longrightarrow (E, \tau_{LC})$ é contínua, donde, se $\tau_{LC} = \tau_T$ teremos $+ : (E \times E, \tau_T \times \tau_T) \longrightarrow (E, \tau_T)$ é contínua.

Corolário 1: Se $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços convexos, onde I é enumerável, e $f_{\beta\alpha}$ é aberta quando $\alpha \leq \beta$, então a condição 1 da Prop. 25 está verificada donde $\tau_{LC} = \tau_T$.

Corolário 2: Se $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de espaços convexos, onde I é enumerável, e τ_α é localmente compacta, $\forall \alpha \in I$, então a condição 1 da Prop. 25 está verificada, donde $\tau_{LC} = \tau_T$.

Def. 5: Um sistema indutivo $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ se diz enumerável e I fôr enumerável.

Def. 6: Seja D_0 uma categoria satisfazendo a def. 14 §2.3, exceto que as estruturas adicionais não necessitam ser algébricas. Então dizemos que um sistema indutivo $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ sôbre D_0 é injetor (respectivam. sobrejetor) se $\forall \alpha \leq \beta$, tivermos $f_{\beta\alpha}$ injetora (respectivam., sobrejetora).

Def. 7: Seja D_0 uma categoria satisfazendo a def. 6, mas t.q. todo objeto seja um espaço topológico, munido de estruturas adicionais. Então dizemos que um sistema indutivo $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ sôbre D_0 é aberto se, $\forall \alpha \leq \beta$, tivermos $f_{\beta\alpha}$ aberta.

Def. 8: Seja D_0 uma categoria satisfazendo a def. 7. Então dizemos que um sistema indutivo $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é estrito se fôr enumerável injetor e se $\alpha \leq \beta$, então $f_{\beta\alpha}^{-1}(\mathcal{T}_\beta) = \mathcal{T}_\alpha$.

Observação: Os sistemas indutivos estritos de espaços convexos são os mais importantes. Para tais sistemas indutivos, entretanto, o corolário 1 não é aplicável, pois pela prop. 21a, §3.4, uma vizinhança de 0 num espaço vet. top. E é sempre absorvente $\therefore$ não está contida em nenhum subespaço próprio de E, e portanto se $f_{\beta\alpha}$ fôr aberta, será necessariamente sobrejetora, e então seria um isomorfismo, que é um caso que não interessa. Para poder usar êsse corolário, seria preciso tentar obter os espaços convexos limites indutivos dum sistema estrito ($\therefore$ de espaços "crescentes") como o lim. indutivo dum outro sistema indutivo enumerável, onde as $f_{\beta\alpha}$ sejam abertas ($\therefore$ os espaços sejam "decrescentes", pois $f_{\beta\alpha}$ serão sobrejetoras). Quanto ao corolário 2, êle só é aplicável num único caso de algum interêsse, que é o exemplo que daremos pouco mais adiante. Os demais casos têm que ser estudados, cada qual, em particular utilizando a prop. 25.

Antes de dar um exemplo de limite indutivo de espaços convexos convém lembrar os seguintes fatos:

Proposição 26: Um espaço vetorial de dimensão finita (sôbre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) admite uma única topologia sob a qual êle é um espaço convexo separado (a saber: sua topologia usual, que será denominada euclidiana) (ver Robertson & Robertson: cap. I, prop. 11). Sabemos que esta topologia é localmente compacta.

Proposição 27: Se M é um subespaço vetorial de dimensão finita dum espaço convexo separado E, então M é fechado em E, e a topologia induzida por E sôbre M é a topologia euclidiana. (ver Robertson & Robertson: cap. II, Teor. 5)

Proposição 28: Um espaço vetorial topológico separado, localmente compacto, é de dimensão finita (ver Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. I §2.4, Th. 3, 2ème edition revue et corrigée).

Proposição 29: Seja $(\mathbb{N}, (E_n, \tau_n), f_{mn})$ um sistema indutivo estrito de espaços convexos. Então:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n^{-1}(\tau_{LC}) = \tau_n$. Se os τ_n são separados, então τ é separado.

b) Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1,n}(E_n)$ é fechado em E_{n+1}, então, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(E_n)$ é fechado em (E, τ_{LC}).

c) Se $\forall n \in \mathbb{N}$, (E_n, τ_n) é completo, então (E, τ_{LC}) é completo. (ver Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. II, §4.6, Prop. 9).

Exemplo: $(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n, f_{mn})$ é um sistema indutivo de espaços convexos, onde $\mathbb{R}^n$ está munido de sua topologia euclidiana e $f_{mn}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é a injeção canônica ($f_{mn}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0_{n+1}, \dots, 0_m)$). Então $\tau_{LC} = \tau_T$.

Dem.: Pela Prop. 27 é fácil ver que f_{mn} são contínuas se $n \leq m$. Além disso, é trivial verificar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, f_n)$ é lim. indutivo do sistema dado, na categoria de conjuntos, onde $f_n: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ é a injeção canônica. Pela prop. 26, a topologia euclidiana é localmente compacta, donde, pelo corolário 2 da prop. 25, segue que $\tau_{LC} = \tau_T$, e portanto

$\mathcal{T}_T = \mathcal{T}_{C_s} = \mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}_V = \mathcal{T}_{LC}$. No entanto pela prop. 29, $\mathcal{T}_{LC}$ é separada, donde, pela prop. 28, $\mathcal{T}_{LC}$ não é localmente compacta, e portanto $\mathcal{T}_T$ não é localmente compacta. Logo, êsse mesmo sistema indutivo fornece o seguinte contra exemplo:

<u>Contra exemplo</u>: $(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n, f_{mn})$ é um sistema indutivo de espaços topológicos localmente compactos de limite indutivo $((\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \mathcal{T}_T), f_n)$, onde $\mathcal{T}_T$ não é localmente compacta. (Verificação da <u>nota</u> da Prop. 9, § 4.1C).

No entanto, a prop. 28 tira a esperança de obter outros exemplos de interêsse, a partir do corolário 2 da prop. 25.

§5. Comutatividade do Limite Indutivo com o Funtor Esquecimento (continuação).

Introdução

A prop. 24 que é uma fácil generalização do exercício 14, §4 Chap II Espaces Vectoriels Topologiques: Bourbaki, sugere-nos que, se $(\mathbb{N}, (E_n, \tau_n), f_{mn})$ é um sistema indutivo de grupos topológicos, então $\tau_G = \tau_{C_1}$, e se fôr sistema indutivo de espaços vetoriais topológicos sôbre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então $\tau_V = \tau_G = \tau_{C_1}$. É o que faremos, nêste parágrafo, obtendo, no entanto, um resultado muito mais forte.

1. A igualdade $\tau_G = \tau_{C_1}$ é sempre verdadeira.

Proposição 1: Se $\mathcal{U}_x$ denota o conjunto de tôdas as vizinhanças do ponto x do espaço topológico E, então $\mathcal{U}_x$ satisfaz as seguintes propriedades:

1) $x \in U$, $\forall U \in \mathcal{U}_x$
2) $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x$
3) $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset E \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$
4) $\forall U \in \mathcal{U}_x$, $\exists V \in \mathcal{U}_x$ t.q. $(y \in V \Rightarrow U \in \mathcal{U}_y)$

Recìprocamente, se para cada ponto x de E associarmos um conjunto $\mathcal{U}_x \neq \phi$ de partes de E, satisfazendo as condições 1, 2, 3, 4, então existe uma e uma só topologia τ sôbre E, t.q. $\forall x \in E$, o conjunto das vizinhanças de x em (E, τ) é $\mathcal{U}_x$. (ver Prop. 2, §1.3 Chap. I: Topologie Générale, Bourbaki).

Proposição 2: Num grupo topológico G, tôda base de vizinhanças $\mathcal{U}$, da origem e, satisfaz as seguintes propriedades:

1) $e \in U$, $\forall U \in \mathcal{U}$
2) se $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{U}$, então existe $W \in \mathcal{U}$, t.q. $W \subset U \cap V$.
3) se $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$, t.q. $V.V \subset U$.
4) se $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$, t.q. $V \subset U^{-1}$

5) Se $U \in \mathcal{U}$ e $a \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$, t.q. $V \subset a^{-1} U a$.

Recìprocamente, se $\mathcal{U} \neq \emptyset$ é um conjunto de partes de um grupo G, satisfazendo as condições 1 a 5, então existe uma e uma só topologia $\mathcal{T}$ sôbre G, t.q. $(G,\mathcal{T})$ seja um grupo topológico e $\mathcal{U}$ seja uma base de vizinhanças da origem em $(G,\mathcal{T})$.

Dem.: A primeira parte é trivial. Quanto à recìproca, se existir uma topologia $\mathcal{T}$ respondendo à questão, então $\mathcal{V}$ é o conjunto de tôdas as vizinhanças da origem em $(G,\mathcal{T})$, se $\mathcal{V}$ é o conjunto de tôdas as partes V de G, t.q. existe $U \in \mathcal{U}$, com $U \subset V$. Além disso, se $a \in G$, $\mathcal{V}.a$ será o conjunto das vizinhanças de a em $(G,\mathcal{T})$. (corolário 1 do lema 3, §4.1B) donde os abertos de $\mathcal{T}$ serão as partes U de G t.q. $\forall a \in U, U \in \mathcal{V}.a$. Logo, a topologia $\mathcal{T}$ é única.

Por outro lado, dando o mesmo significado a $\mathcal{V}$ e a $\mathcal{V}.a$, temos: os conjuntos $\mathcal{V}.a$ satisfazem as condições 1, 2, 3, 4 da prop. 1, pois, as condições 1, 2, 3 são de verificação trivial. Quanto à condição 4: se $V \in \mathcal{V}.a$, então $V = V_0 . a$, onde $V_0 \in \mathcal{V}$, donde $\exists U \in \mathcal{U}$, com $U \subset V_0$, donde (condição 3) existe $U_1 \in \mathcal{U}$ com $U_1.U_1 \subset U$. Então $U_1.a \in \mathcal{U}.a \subset \mathcal{V}.a$, e, se $x \in U_1.a$, então como $U_1.x \subset U_1.U_1.a \subset U.a \subset V_0.a = V$, segue que $V = V_1.x$, com $V_1 \supset U_1 \in \mathcal{U}$ e portanto, $V_1 \in \mathcal{V}$, donde $V \in \mathcal{V}.x$, $\forall x \in U_1.a$. Logo, pela Prop. 1, existe uma e uma só topologia $\mathcal{T}$ sôbre G, t.q. $\forall a \in G$, $\mathcal{V}.a$ é o conjunto das vizinhanças de a, donde, em particular, $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhanças da origem em $(G,\mathcal{T})$.

Provemos que $(G,\mathcal{T})$ é um grupo topológico: A multiplicação é contínua de $(G \times G, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (G,\mathcal{T})$: se $(a,b) \in G \times G$, e $U_0 \in \mathcal{U}$, existe $U_1 \in \mathcal{U}$ t.q. $U_1 U_1 \subset U_0$ (condição 3), e existe $U_2 \in \mathcal{U}$ com $U_2 \subset a^{-1} U_1 a$ (∴ $a U_2 \subset U_1 a$: ver condição 5), donde existe $U_3 \in \mathcal{U}$ com $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ (condição 2) logo, $U_3.a$ e $U_3.b$ são vizinhanças de a e b, respectiv., em $(G,\mathcal{T})$ e, $U_3.a.U_3.b \subset U_3(aU_2).b \subset$

$\subset U_3 U_1 ab \subset U_1 U_1 ab \subset U_0(ab)$, donde a multiplicação é contínua no ponto (a,b). Denotemos por $\overset{-1}{X}: G \to G$ a aplicação que leva x em x^{-1}. Então $\overset{-1}{X}: (G,\mathcal{T}) \to (G,\mathcal{T})$ é contínua: se $U_0 \in \mathcal{U}$ e $a \in G$, existe $U_1 \in \mathcal{U}$ t.q. $U_1 \subset U_0^{-1}$ (condição 4) e existe $U_2 \in \mathcal{U}$ t.q. $U_2 \subset a^{-1} U_1 a$ (condição 5), donde $U_2 . a^{-1} \subset a^{-1} . U_1$. Logo, $(\overset{-1}{X})^{-1}(U_0 . a) = a^{-1} . U_0^{-1} \supset a^{-1} . U_1 \supset U_2 . a^{-1}$, donde $\overset{-1}{X}$ é contínua no ponto a^{-1}.

<u>Observação</u>: Se G é grupo abeliano, temos $U = a^{-1} U a, \forall a \in G$, donde a condição 5 está sempre satisfeita.

<u>Proposição 3</u>: Seja $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ uma família de grupos topológicos, E um grupo, e $(g_i)_{i \in I}$ uma família de homomorfismos $g_i: E_i \to E$. Seja $(E,\mathcal{T})$ estrutura final para a família $((E_i,\mathcal{T}_i), g_i)_{i \in I}$, relativamente ao funtor esquecimento F da categoria de grupos topológicos na categoria de grupos. Seja $\mathcal{U}$ o conj. das partes V_0 de E, t.q. $\forall n \geq 1$, existe $V_n \subset E$ t.q. $e \in V_n$, $V_n . V_n \subset V_{n-1}$ e t.q. $g_i^{-1}(V_n)$ seja vizinhança de e_i, $\forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{U}$ satisfaz as condições 1, 2, 3, 4 da prop. 2. Se $\mathcal{U}$ satisfizer também a condição 5 da prop. 2, (é o caso quando E é grupo abeliano), então $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhanças (na realidade é o sistema total de vizinhanças de 0) da origem, em $(E,\mathcal{T})$, e além disso, $(E,\mathcal{T})$ também é estrutura final para a família $((E_i,\mathcal{T}_i), g_i)_{i \in I}$ relativamente ao funtor esquecimento F_1 da categoria $C_{1\mathcal{T}}$ na categoria C_1.

<u>Dem.</u>: É claro que, se $V_0 \in \mathcal{U}$, então os conjuntos V_n da definição de $\mathcal{U}$ também pertencem a $\mathcal{U}$, donde a condição 3 está verificada: $V_1 . V_1 \subset V_0$ e $V_1 \in \mathcal{U}$. É evidente que $\mathcal{U} \neq \phi$ $(E \in \mathcal{U})$ e que as condições 1 e 2 estão verificadas. Condição 2: se $V_0 \in \mathcal{U}$, $U_0 \in \mathcal{U}$, $\forall n \geq 1$, existe $V_n \subset E$, $U_n \subset E$, t.q. $e \in U_n$, $e \in V_n$, $V_n . V_n \subset V_{n-1}$, $U_n . U_n \subset U_{n-1}$, $g_i^{-1}(V_n)$ e $g_i^{-1}(U_n)$ são vizinhanças de e_i em $(E_i, \mathcal{T}_i)$. Logo, $W_n = V_n \cap U_n \subset E$, $e \in W_n$, $W_n . W_n \subset \begin{cases} V_n . V_n \subset V_{n-1} \\ U_n . U_n \subset U_{n-1} \end{cases}$

$\therefore W_n . W_n \subset V_{n-1} \cap V_{n-1} = W_{n-1}$, e $g_i^{-1}(W_n) = g_i^{-1}(V_n) \cap g_i^{-1}(U_n)$ é vizinhança de e_i, em $(E_i, \mathcal{T}_i)$ $\therefore$ $W_0 = V_0 \cap U_0 \in \mathcal{U}$.

Condição 4: Seja $V_0 \in \mathcal{U}$ e V_n t.q. $V_n . V_n \subset V_{n-1}$, $e \in V_n$, e $g_i^{-1}(V_n)$ seja vizinhança de e_i em $(E_i, \mathcal{T}_i)$. Chamemos $W_n = V_n \cap V_n^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos $e \in W_n$, e $g_i^{-1}(W_n) = g_i^{-1}(V_n) \cap g_i^{-1}(V_n^{-1}) = g_i^{-1}(V_n) \cap [g_i^{-1}(V_n)]^{-1}$ é vizinhança de e_i em $(E_i, \mathcal{T}_i)$, pois $(E_i, \mathcal{T}_i)$ é grupo topológico. Por outro lado, $W_n . V_n \subset \begin{cases} V_n . V_n \subset V_{n-1} \\ V_n^{-1} . V_n^{-1} \subset V_{n-1}^{-1} \end{cases}$ $\therefore W_n . W_n \subset V_{n-1} \cap V_{n-1}^{-1} = W_{n-1}$. Logo, $W_0 \in \mathcal{U}$, e $W_0 \subset V_0$.

Se $\mathcal{U}$ satisfizer também a condição 5, então, pela prop. 2, existe uma única topologia $\mathcal{T}^*$ sôbre E, t.q. $(E, \mathcal{T}^*)$ seja grupo topológico, e $\mathcal{U}$ uma base de vizinhanças da origem em $(E, \mathcal{T}^*)$. Além disso, é claro que $g_i : (E_i, \mathcal{T}_i) \to (E, \mathcal{T}^*)$ é contínua na origem, donde g_i é contínua (Prop. 6, §4.1B). Logo, $\mathcal{T}^* \in \mathcal{Q}$: conjunto das topologias compatíveis com a estrutura de grupo de E, que tornam tôdas as g_i contínuas. Mas $\mathcal{T}$ = supremo de $\mathcal{Q}$ (ver dem. da Prop. 17, §3.3), logo $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}^*$. Seja $(E, \mathcal{T}_1)$ estrutura final para a família $((E_i, \mathcal{T}_i), g_i)_{i \in I}$ relativamente ao funtor F_1: então $\mathcal{T}_1$ = supremo de $\mathcal{Q}_1$: conjunto das topologias compatíveis com a multiplicação de E, que tornam tôdas as g_i contínuas. Logo, $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$, pois $\mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q}$. Por outro lado, sabemos que $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{Q}_1$ (ver Prop. 2 e 6 do §3.1), donde, se V_0 é uma vizinhança da origem em $(E, \mathcal{T}_1)$, como $\times : (E \times E, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1) \to (E, \mathcal{T}_1)$ é contínua, segue que podemos obter $V_n \subset E$, t.q. V_n seja vizinhança da origem em $(E, \mathcal{T}_1)$ e $V_n . V_n \subset V_{n-1}$. Mas, devido à continuidade das $g_i : (E_i, \mathcal{T}_i) \to (E, \mathcal{T}_1)$, temos que $g_i^{-1}(V_n)$ é vizinhança de e_i em $(E_i, \mathcal{T}_i)$. Logo, $V_0 \in \mathcal{U}$. Então $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}^*$ (corolário 3, do lema 3, §4.1B). Mas então $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T} \supset \mathcal{T}^* \supset \mathcal{T}_1$ donde $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} = \mathcal{T}_1$.

<u>Teorema 1</u>: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de grupos topológicos, de lim. indutivo (E, f_α) na categoria de conjuntos, $\mathcal{U}$ o conjunto das partes V_0 de E, t.q. $\forall n \geq 1$, $\exists V_n \subset E$ t.q. $e \in V_n$, $V_n . V_n \subset V_{n-1}$ e t.q. $f_\alpha^{-1}(V_n)$ é vizinhança de e_α em $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, então $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhanças de $\underline{e}$

em $(E,\mathcal{T}_G)$ e além disso, $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{C_1}$.

Dem.: Pela Prop.3, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ satisfaz as condições 1,2,3,4 da prop.2. Mas $\mathcal{U}$ também satisfaz a condição 5: Seja $V_0 \in \mathcal{U}$, e $V_n \subset E$ t.q. $e \in V_n$, $V_n . V_n \subset V_{n-1}$, e $f_\alpha^{-1}(V_n)$ vizinhança de e_α em $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Seja $a \in E$ então $\exists \alpha_0 \in I$, $a_{\alpha_0} \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(a_{\alpha_0}) = a$ (lema 1.a, §1.4). Seja $W_n = a^{-1} V_n a$: então $e \in W_n$, e $W_n . W_n = a^{-1} V_n a . a^{-1} V_n a = a^{-1} . V_n . V_n . a \subset a^{-1} V_{n-1} a = W_{n-1}$. Por outro lado, chamando $a_\beta = f_{\beta\alpha_0}(a_{\alpha_0})$ se $\beta \geq \alpha_0$, temos $f_\beta(a_\beta) = f_\beta f_{\beta\alpha_0}(a_{\alpha_0}) = f_{\alpha_0}(a_{\alpha_0}) = a$, donde, se $\alpha_0 \leq \beta$ temos: $f_\beta^{-1}(W_n) = f_\beta^{-1}(a^{-1} . V_n . a) = a_\beta^{-1} . f_\beta^{-1}(V_n) . a_\beta$ que é vizinhança de e_β em $(E_\beta, \mathcal{T}_\beta)$, pois $(E_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ é grupo. Então, se $\gamma \in I, \exists \beta \in I$, $\beta \geq \alpha_0, \gamma$, donde $f_\gamma^{-1}(W_n) = (f_\beta \circ f_{\beta\gamma})^{-1}(W_n) = f_{\beta\gamma}^{-1}(f_\beta^{-1}(W_n))$

que é vizinhança de e_γ em $(E_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)$ pois $f_\beta^{-1}(W_n)$ é vizinhança de e_β em $(E_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ e $f_{\beta\gamma}$ é contínua. Logo, $W_0 = a^{-1} . V_0 . a \in \mathcal{U}$.

Ora, $(E, \mathcal{T}_G)$ é estrutura final para a família $((E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_\alpha)$ relativamente ao funtor F, e $(E, \mathcal{T}_{C_1})$ é estrutura final para a família $((E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_\alpha)$ relativamente ao funtor F_1 (ver notação da Prop.3); (ver Prop.17, §3.3 e dem. da prop.10, §3.2). ~~Logo~~ Logo, pela prop.3, temos que $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças da origem em $(E, \mathcal{T}_G)$ e além disso, $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{C_1}$.

Observação: No, entanto, deixamos em aberto o seguinte problema:

Problema em aberto: Usando as notações da prop.3 $\mathcal{U}$ satisfaz sempre a condição 5 da prop.2? Se a resposta fôr afirmativa, teremos então que, as estruturas finais para uma família $((E_i, \mathcal{T}_i), g_i)$ relativamente aos funtores F e F_1 sempre coincidirão.

2. A igualdade $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{C_1}$

Def. 1: Chama-se valor absoluto sôbre um anel A, com elemento unidade $1 \neq 0$, a uma aplicação $x \longrightarrow |x|$ de A em $\mathbb{R}_+$, satisfazendo às seguintes condições:

a) $|x| = 0 \iff x = 0$

b) $|x.y| = |x|.|y| \quad \forall x, y \in A$.

c) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in A$.

Lema 1: Se temos um valor absoluto sôbre um anel A, com elemento unidade $1 \neq 0$, então: a) A não possui divisores próprios de (zero) 0; b) $|1| = |-1| = 1$; c) $|-x| = |x|, \forall x \in A$; d) a aplicação $d: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $d(x,y) = |x-y|$ é uma distância sôbre A, invariante por translações, que induz sôbre A uma topologia de espaço métrico compatível com sua estrutura de anel (e no caso de A ser um corpo, compatível com sua estrutura de corpo).

Dem.: a) se $x.y = 0$, então $|x.y| = 0$ (por a), donde $|x|.|y| = 0$ (por b), donde $|x| = 0$ ou $|y| = 0$, e portanto, $x = y$ ou $x = 0$ (por a).

b) Temos $|1| = |1.1| = |1|.|1|$, (por b), donde, sendo $|1| \neq 0$ (por a, e por ser $1 \neq 0$) segue que $|1| = 1$. Temos também $|-1||-1| = |1| = 1$ donde $|-1| = 1$.

c) $|-x| = |(-1).x| = |-1||x| = |x|$

d) $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.

$d(x,y) = |x-y| = |-1||x-y| = |y-x| = d(y,x)$

$d(x,y) + d(y,z) = |x-y| + |y-z| \geq |x-y+y-z| = |x-z| = d(x,z)$

$d(x+z, y+z) = |(x+z)-(y+z)| = |x-y| = d(x,y)$

Logo, d é uma distância sôbre A, invariante por translações que induz sôbre A uma Topologia $\mathcal{T}$ de espaço métrico.

$+ : (A \times A, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \longrightarrow (A, \mathcal{T})$ é contínua: seja $(x_0, y_0) \in A \times A$ e seja V uma vizinhança de $x_0 + y_0$: então existe uma bola $B_\varepsilon(x_0+y_0)$ de centro $x_0 + y_0$ e raio ε contida em V, donde, tomando $B_{\varepsilon/2}(x_0)$ e $B_{\varepsilon/2}(y_0)$ para vizinhanças de x_0 e y_0, respectivam., temos: se $x \in B_{\varepsilon/2}(x_0)$ e $y \in B_{\varepsilon/2}(y_0)$, então $d(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(y, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $d(x+y, x_0+y_0) = |x+y-(x_0+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)| \leq$

$\leq |x-x_0|+|y-y_0| = d(x,x_0)+d(y,y_0) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, logo $x+y \in B_\varepsilon(x_0+y_0)$ donde $B_{\varepsilon/2}(x_0)+B_{\varepsilon/2}(y_0) \subset B_\varepsilon(x_0+y_0)$ e $\therefore$ $+$ é contínua no ponto (x_0,y_0)

$\overset{-1}{+} : (A,\tau) \longrightarrow (A,\tau)$ é contínua: seja $x_0 \in A$ e seja V uma vizinhança de $-x_0$: então $\exists B_\varepsilon(-x_0) \subset V$ e como $\overset{-1}{+}(B_\varepsilon(x_0)) \subset B_\varepsilon(-x_0) \subset V$ segue que $\overset{-1}{+}$ é contínua no ponto x_0.

$\times$ é contínua: basta lembrar a relação:

$xy - x_0y_0 = (x-x_0)(y-y_0)+(x-x_0)y_0+x_0(y-y_0)$ que dá:

$|xy-x_0y_0| \leq |x-x_0||y-y_0| + |x-x_0||y_0| + |x_0||y-y_0|$

Se A fôr um corpo, $\overset{-1}{\times}$ é contínua, de $(A-\{0\},\tau^*)$ em si próprio, onde τ^* é a topologia induzida por τ sôbre $A-\{0\}$. Basta notar que $x^{-1}-x_0^{-1} = x^{-1}(x_0-x)x_0^{-1}$, que junto com a condição b) dá: $|x^{-1}-x_0^{-1}| = \frac{|x_0-x|}{|x||x_0|}$. Se $\delta>0$ é t.q. $\delta<|x_0|$

então a relação $|x-x_0| \leq \delta$ acarreta $|x| \geq |x_0|-\delta$, donde $|x^{-1}-x_0^{-1}| \leq \frac{\delta}{|x_0|(|x_0|-\delta)}$ que tende a zero quando $\delta \to 0$.

<u>Def. 2</u>: Chama-se anel com valorização (corpo com valorização) a um anel A (corpo K) munido dum valor absoluto, e das correspondentes distância e topologia.

<u>Observação</u>: Um anel com valorização A (corpo com valorização) é discreto $\Longleftrightarrow$, $\forall x \in A$, $x \neq 0$, $|x| \geq 1$. A parte $\Longleftarrow$ é evidente. Quanto a $\Longrightarrow$: se $0<|x_0|<1$, então a sequência (x^n) seria formada de têrmos $\neq 0$ e convergiria para 0, donde a topologia não seria discreta. No caso de corpo com valorização, se $|x|>1$, então $|x^{-1}| = |x|^{-1} < 1$, donde, se $|x| \geq 1$, $\forall x \in K$, $x \neq 0$, teremos $|x|=1$, $\forall x \in K$, $x \neq 0$.

<u>Def. 3</u>: Seja A um anel com valorização, E um módulo sôbre A. Diz-se que uma parte M de E é <u>equilibrada</u> se, $\forall x \in M$, $\forall \lambda \in A$ t.q. $|\lambda| \leq 1$, tem-se $\lambda x \in M$.

<u>Observação</u>: É fácil verificar que qualquer reunião e intersecção de equilibrados é equilibrado. A soma de dois

equilibradas é equilibrado. Dada uma parte M de E, seja $\mathcal{B}$ o conjunto de tôdas as partes equilibradas de E, contidas em M. Então $N = \bigcup \mathcal{B}$ é a maior parte equilibrada de M como é fácil de ver. N é chamado o núcleo equilibrado de M.

Def. 4: Seja A um anel com valorização, E um módulo sôbre A. Diz-se que uma parte M de E é absorvente se, $\forall x \in E$, $\exists \alpha > 0$ t.q. $\lambda x \in M$, $\forall \lambda \in A$, com $|\lambda| < \alpha$.

Observação: Note-se que em geral isso não é equivalente a dizer: $\exists \beta > 0$ t.q. $x \in \lambda M$, $\forall \lambda \in A$ com $|\lambda| \geq \beta$. Intersecção finita de absorventes é absorvente. Se $M \subset N$ e M é absorvente, então N é absorvente.

Def. 5: Se A é um anel com valorização, diremos que A é um anel standard se $\exists x \in A$ t.q. $\exists x^{-1}$ e $|x| < 1$.

Observação: Pela observação em seguida à def. 2, se A é um anel standard, então A não é discreto. No caso de A ser corpo com valorização A será anel standard $\Longleftrightarrow$ A fôr não discreto. Em consequência da def. 5, se A é standard e $\alpha > 0$, $\exists y \in A$ t.q. $\exists y^{-1}$ e $|y| < \alpha$: basta tomar $y = x^n$, para um valor conveniente de n.

Lema 2: Se E é um módulo sôbre um anel topológico A, e $(E, \mathcal{T})$ é um grupo topológico, então $\times : (A \times E, \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$ é contínua, se e somente se, estiverem satisfeitas as 3 condições:

a) $\forall x_0 \in E$, a aplicação $\lambda \to \lambda x_0$ é contínua no ponto $\lambda = 0$.

b) $\forall \lambda_0 \in A$, a aplicação $x \to \lambda_0 x$ é contínua no ponto $x = 0$.

c) A aplicação $(\lambda, x) \to \lambda x$ é contínua no ponto $(0,0)$.

Dem.: Basta lembrar que $\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$.

Proposição 4: Se E é um módulo topológico sôbre um anel standard A, tôda base de vizinhanças $\mathcal{U}$ de origem satisfaz as condições:

1) $0 \in U$, $\forall U \in \mathcal{U}$

2) se $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{U}$, então $\exists W \in \mathcal{U}$, com $W \subset U \cap V$

3) se $U \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $V + V \subset U$

4) se $U \in \mathcal{U}$, $\lambda \in A$ t.q. $\exists \lambda^{-1}$, então $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $V \subset \lambda U$.

5) se $U \in \mathcal{U}$, U é absorvente

6) se $U \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $\lambda V \subset U$, $\forall \lambda$ com $|\lambda| \leq 1$.

Reciprocamente, se $\mathcal{U} \neq \phi$ é um conjunto de partes de E satisfazendo as condições 1 a 6, então existe uma e uma só topologia $\mathcal{T}$ sôbre E, compatível com sua estrutura de módulo e t.q. $\mathcal{U}$ seja base de vizinhanças da origem em $(E, \mathcal{T})$.

<u>Dem.</u>: $\Rightarrow$: 1, 2 e 3: evidentes pois $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças em $(E, \mathcal{T})$ que é um grupo topológico (usar prop. 2). 5: A condição <u>a</u> do lema 2 garante que tôda vizinhança de 0 é absorvente. 4: A condição <u>b</u> do lema 2 garante que se $U \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $\lambda^{-1} V \subset U$ e $\therefore V \subset \lambda U$. 6: Se $U \in \mathcal{U}$, pela condição <u>c</u> do lema 2, $\exists W \in \mathcal{U}$ e $\alpha > 0$ t.q. $\lambda W \subset U$ se $|\lambda| \leq \alpha$. Mas, $\exists \mu \in A$ t.q. $\exists \mu^{-1} \in A$, e $|\mu| \leq \alpha$, pois A é anel standard, e então $\lambda(\mu W) \subset U$ e $|\lambda| \leq 1$, pois então $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu| \leq \alpha$, e então pela propriedade 4, $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $V \subset \mu W$, donde $\lambda V \subset U$, se $|\lambda| \leq 1$.

$\Leftarrow$: Pelas condições 1, 2, 3, 4 e lembrando que E é grupo abeliano e usando Prop. 2, §5.1, segue que existe uma única topologia $\mathcal{T}$ sôbre E t.q. $(E, \mathcal{T})$ é grupo topológico, e $\mathcal{U}$ é base de vizinhan-
ças do 0 em $(E, \mathcal{T})$. Em particular, segue a unicidade da
topologia sôbre E compatível com sua estrutura de módulo
t.q. $\mathcal{U}$ seja base de vizinhanças do 0. Resta então, apenas provar
que $\times: (A \times E, \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$ é contínua, ou, pelo lema 2, provar
as condições <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u>. A condição 6 nos garante <u>c</u> e a condição
5 nos garante <u>a</u>. Verifiquemos <u>b</u>: seja $\lambda_0 \in A$; se $|\lambda_0| \leq 1$, a condi-
ção 6 garante <u>b</u>; se $|\lambda_0| > 1$, seja $\mu \in A$ t.q. $\exists \mu^{-1}$ e $|\mu| \leq |\lambda_0|^{-1}$:
então pela condição 6 temos $\lambda\mu V \subset U$ se $|\lambda\mu| \leq 1$ e em particular
$\lambda_0 \mu V \subset U$. Por outro lado pela condição 4 $\exists V' \in \mathcal{U}$ t.q. $V' \subset \mu V$
donde $\lambda V' \subset U$ e portanto temos <u>b</u>.

<u>Corolário</u>: Nas hipóteses da prop. 4 se $U \in \mathcal{U}$ e N é o núcleo
equilibrado de U, segue que N é vizinhança do 0. (Mais preci-
samente, a condição 6 é equivalente à condição VI: se $U \in \mathcal{U}$, e N

o núcleo equilibrado de U, então $\exists V \in \mathcal{U}$, t.q. $V \subset N$).

Dem.: Seja $\mathcal{D} = \{V \subset E / \lambda V \subset U, \forall \lambda \in A \text{ com } |\lambda| \leq 1\}$. Então, é claro que $N' = \cup \mathcal{D}$ é t.q. $\lambda N' \subset U$, $\forall \lambda \in A$, com $|\lambda| \leq 1$.

Se $x' \in N'$, e $\lambda_0 \in A$, com $|\lambda_0| \leq 1$, então $\lambda x' \in U$, $\forall \lambda \in A$ com $|\lambda| \leq 1$, donde $\lambda \lambda_0 x' \in U$, $\forall \lambda \in A$, com $|\lambda| \leq 1$, donde $\{\lambda_0 x'\} \in \mathcal{D}$ e $\therefore \lambda_0 x' \in N'$. Logo, N' é equilibrado, donde $N' \subset N$, se N fôr o núcleo equilibrado de U. Por outro lado, $\lambda N \subset N$, $\forall |\lambda| \leq 1 \therefore \lambda N \subset U$, $\forall \lambda \in A$ com $|\lambda| \leq 1$, donde $N \in \mathcal{D}$ e $\therefore N \subset N'$. Logo $N' = \cup \mathcal{D}$ é o núcleo equilibrado de U.

$6 \Rightarrow VI$: $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $\lambda V \subset U$ se $|\lambda| \leq 1 \therefore V \in \mathcal{D} \therefore V \subset N' \subset N$.

$VI \Rightarrow 6$: $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $V \subset N \subset N' \therefore \lambda V \subset \lambda N' \subset U$, se $|\lambda| \leq 1$.

Observações: 1) Vale Prop. análoga a 4, sem a hipótese do anel A ser standard, se substituirmos as condições 4 e 6, respectivamente por 4' e 6': 4': se $U \in \mathcal{U}$, e $\lambda \in A$, $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $\lambda V \subset U$.
6': se $U \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{U}$, e $\alpha > 0$ t.q. $\lambda V \subset U$, $\forall \lambda \in A$, com $|\lambda| \leq \alpha$.
No entanto, a condição 6' é complicada e não sabemos se a Prop. 5 em seguida é válida nesses casos.

2) Exemplo de anel standard: $A = \{\frac{m}{2^n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, com as operações e o valor absoluto induzidos por $\mathbb{Q}$. $\frac{1}{2} \in A$, $(\frac{1}{2})^{-1} = 2 \in A$ e $|\frac{1}{2}| < 1$. Exemplo de anel com valorização não discreta mas não standard: $A = \{P(x_0) | P \in \mathbb{Z}[X]\}$ onde x_0 é um número real transcendente sôbre $\mathbb{Q}$ (por exemplo, $x_0 = \pi$): os únicos têrmos inversíveis de A são 1 e -1 mas $\exists y \in A$ t.q. $|y| < 1$.

Proposição 5: Se $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ é uma família de módulos topológicos sôbre um anel standard A, E um módulo sôbre A, $(g_i)_{i \in I}$ uma família de aplicações lineares $g_i : E_i \to E$; se $(E, \mathcal{T})$ é estrutura final para a família $((E_i, \mathcal{T}_i), g_i)_{i \in I}$ relativamente ao funtor F da categoria de módulos topológicos sôbre A na categoria de módulos sôbre A, e se $\mathcal{U}$ é o conjunto das partes V_0 de E t.q. $\forall n \geq 1$, $\exists V_n \subset E$ t.q. $0 \in V_n$, $V_n + V_n \subset V_{n-1}$, V_n é absorvente e $g_i^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0 em (E_i, τ_i), então $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0 (na realidade, é o conjunto de tôdas as vizinhanças de 0) em (E, τ).

Dem.: É claro que, se $V_0 \in \mathcal{U}$, os conjuntos V_n da definição de $\mathcal{U}$ também pertencem a $\mathcal{U}$. Temos $\mathcal{U} \neq \phi$ (pois $E \in \mathcal{U}$). É claro que $\mathcal{U}$ satisfaz as condições 1, 2, 3, 5 (quanto à condição 2, a dem. é análoga à dem. da condição 2 na prop. 3, usando a observação em seguida à def. 4). Condição 4: se $\lambda \in A$ é t.q. $\exists \lambda^{-1} \in A$, então chamando $W_n = \lambda V_n$ temos: $0 \in W_n$, $W_n + W_n = \lambda V_n + \lambda V_n = \lambda(V_n + V_n) \subset \lambda V_{n-1} \subset W_{n-1}$; $g_i^{-1}(W_n) = g_i^{-1}(\lambda V_n) = \lambda g_i^{-1}(V_n)$, que é vizinhança de 0 em (E_i, τ_i), pela prop. 4, condição 4. Além disso, W_n é absorvente: V_n é absorvente: dado $x_0 \in E$, $\exists \alpha > 0$ t.q. $\eta x_0 \in V_n$ se $|\eta| \leq \alpha$ logo, $\lambda^{-1}\eta x_0 \in V_n$ se $|\eta| \leq \alpha \cdot |\lambda|$, isto é, $\eta x_0 \in \lambda V_n = W_n$, se $|\eta| \leq \beta = \alpha \cdot |\lambda|$. Logo, $\lambda V_0 \in \mathcal{U}$.

Condição 6 $\Longleftrightarrow$ Cond. VI, pelo Corolário da Prop. 4. Condição VI: seja W_n o núcleo equilibrado de V_n: então temos $0 \in W_n$; $W_n + W_n \subset V_n + V_n \subset V_{n-1}$ mas $W_n + W_n$ é equilibrado (observação em seguida à def. 3), donde $W_n + W_n \subset W_{n-1}$. Se $x_0 \in E$, então $\exists \alpha_n > 0$ t.q. $\lambda x_0 \in V_n$, se $|\lambda| \leq \alpha_n$, pois V_n é absorvente; mas $\{\lambda x_0 \mid |\lambda| \leq \alpha_n\}$ é equilibrado, e contido em V_n, donde está contido em W_n; logo, W_n é absorvente. Além disso, chamando $V_{i,n} = g_i^{-1}(V_n)$, sabemos que $V_{i,n}$ é vizinhança de 0 em (E_i, τ_i), donde, se $W_{i,n}$ fôr o núcleo equilibrado de $V_{i,n}$, $W_{i,n}$ será vizinhança de 0 em (E_i, τ_i) (corolário da prop. 4), e $g_i(W_{i,n}) \subset g_i(V_{i,n}) \subset V_n$, donde sendo $W_{i,n}$ equilibrado e portanto $g_i(W_{i,n})$ equilibrado, temos $g_i(W_{i,n}) \subset W_n$ e $\therefore g_i^{-1}(W_n) \supset W_{i,n}$ donde $g_i^{-1}(W_n)$ é vizinhança de 0 em (E_i, τ_i). Logo, $W_0 \in \mathcal{U}$.

Então, pela prop. 4, $\exists$ uma única topologia τ^* sôbre E, t.q. (E, τ^*) é módulo topológico sôbre A, e $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0 em (E, τ^*). É claro que $g_i : (E_i, \tau_i) \longrightarrow (E, \tau^*)$ é contínua na origem, donde segue que é contínua (Prop. 6, §4.18); logo, $\tau^* \in \mathcal{Q}$: conjunto das topologias compatíveis com a estrutura de módulo de E, que tornam tôdas as g_i contínuas.

lembrando que $\mathcal{T}$ = supremo de $\mathcal{A}$ (ver dem. da prop. 18 §3.3), segue que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}^*$. Mas $\mathcal{T}$ é compatível com a estrutura de módulo de E (observação 2, no fim de §3.1), e torna tôdas as g_i contínuas (Prop. 6, §3.1), logo, se V_0 é vizinhança de 0 em $(E, \mathcal{T})$, podemos obter vizinhança V_n de 0, t.q. $V_n + V_n \subset V_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (pois $+ : (E \times E, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$ é contínua). Mas V_n é absorvente, pois é vizinhança de 0 (Prop. 4, condição 4) e $g_i^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0 em $(E_i, \mathcal{T}_i)$ pois $g_i : (E_i, \mathcal{T}_i) \to (E, \mathcal{T})$ é contínua. Logo, $V_0 \in \mathcal{U}$, donde $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ (corolário da Prop. 19, §3.4) e portanto $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.

<u>Observação</u>: Se chamarmos $(E, \bar{\mathcal{T}})$ à estrutura final para a família $((E_i, \mathcal{T}_i), g_i)_{i \in I}$ relativamente ao funtor F esquecimento, da categoria de grupos topológicos na categoria de grupos, em geral teremos $\bar{\mathcal{T}} \neq \mathcal{T}$. Com efeito, se $\bar{\mathcal{U}}$ é o conjunto das partes V_0 de E t.q. $\forall n \geq 1$ $\exists V_n \subset E$ t.q. $0 \in V_n$; $V_n + V_n \subset V_{n-1}$, e $g_i^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0 em $(E_i, \mathcal{T}_i)$ sabemos pela prop. 3 que $\bar{\mathcal{U}}$ é base de vizinhança de $\bar{\mathcal{T}}$ (pois E é grupo abeliano). Se $\bigcup_{i \in I} g_i(E_i)$ gerar um submódulo próprio E' de E, então $E' \in \bar{\mathcal{U}}$, como é evidente mas $E' \notin \mathcal{U}$ pois E' não é absorvente: se $x_0 \in E - E'$ e existisse $\alpha > 0$ t.q. $\lambda x_0 \in E'$, se $|\lambda| \leq \alpha$, então existiria $\mu \in A$ t.q. $\exists \mu^{-1} \in A$ e $|\mu| \leq \alpha$, donde $\mu x_0 \in E'$ e $\therefore$ $x_0 \in \mu^{-1} E' \subset E'$, contra a hipótese. Logo, $\bar{\mathcal{T}} \neq \mathcal{T}$.

<u>Teorema 2</u>: Se $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de módulos topológicos sôbre o anel standard A (ou o anel discreto A), de limite indutivo (E, f_α) na categoria de conjuntos, e $\mathcal{U}$ é o conjunto das partes V_0 de E, t.q. $\forall n \geq 1$, $\exists V_n \subset E$ t.q. $0 \in V_n$, $V_n + V_n \subset V_{n-1}$ e $f_\alpha^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0 em $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\forall \alpha \in I$, então $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0 em $(E, \mathcal{T}_V)$ (na realidade, $\mathcal{U}$ é o conjunto de tôdas as vizinhanças de 0 em $(E, \mathcal{T}_V)$) e além disso, $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{C_1}$.

<u>Dem.</u>: <u>1) caso</u> A seja um anel standard, se $U \subset E$ é t.q. $f_\alpha^{-1}(U)$ é vizinhança de 0 em $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ $\forall \alpha \in I$, então U é absor-

nita: se $x \in E$, $\exists \alpha_0 \in I$, $x_{\alpha_0} \in E_{\alpha_0}$ t.q. $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x$ (Lema 10, §1.4)
$\therefore$ como $f_{\alpha_0}^{-1}(U)$ é absorvente, (Prop. 4, condição 5) segue que $\exists \alpha > 0$ t.q. $\lambda x_{\alpha_0} \in f_{\alpha_0}^{-1}(U)$, se $|\lambda| \leq \alpha$, donde $f_{\alpha_0}(\lambda x_{\alpha_0}) \in U$ se $|\lambda| \leq \alpha$
$\therefore \lambda f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = \lambda x \in U$ se $|\lambda| \leq \alpha$.

Mas então, $\mathcal{U}$ coincide com o conjunto das partes V_0 de E, t.q. $\forall n \geq 1$, $\exists V_n \subset E$ t.q. $0 \in V_n$, $V_n + V_n \subset V_{n-1}$, V_n absorvente e $f_\alpha^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0 em $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Ora, pela dem. da prop. 18, §3.3, $(E, \mathcal{T}_V)$ é estrutura final para a família $((E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_\alpha)$ relativamente ao funtor F mencionado na prop. 5, donde, pela prop. 5, $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0, em $(E, \mathcal{T}_V)$. Mas pelo Teorema 1, $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0, em $(E, \mathcal{T}_G)$, donde $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_V$ (corolário da prop. 19, §3.4). Ainda pelo Teorema 1 segue $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{C_1}$.

2) caso A seja um anel discreto, sabemos pelo Teorema 1 que $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0 em $(E, \mathcal{T}_G)$. Então ficará provado que $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças de 0 em $(E, \mathcal{T}_V)$ e que $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{C_1}$ se provarmos que $\times : (A \times E, \mathcal{T}_{(A)} \times \mathcal{T}_G) \rightarrow (E, \mathcal{T}_G)$ é contínua (devido às propriedades de supremo de $\mathcal{T}_G$ e de $\mathcal{T}_V$). Mas $\times$ é contínua, se e sòmente se, as aplicações $x \longrightarrow \lambda x$ forem contínuas para todo $\lambda \in A$, (pois A é discreto) e é claro que essas aplicações são contínuas, se forem contínuas na origem, ou, o que é equivalente, se mostrarmos que, se U é vizinhança da origem e $\lambda \in A$, então $\exists V$ vizinhança de 0 t.q. $\lambda V \subset U$ (é a condição 4' da observação 1, em seguida à prop. 4).

Se M é uma parte dum módulo sôbre um anel A, e $\lambda \in A$, seja $\mathcal{H} = \{V \subset E / \lambda V \subset M\}$ e seja $N = \cup \mathcal{H}$: é claro que $\lambda N \subset M$ e que se $N' \subset E$ fôr t.q. $\lambda N' \subset M$, então $N' \subset N$. Chamemos N de λ-núcleo de M.

Se $V_0 \in \mathcal{U}$ e $\lambda \in A$, seja W_n o λ-núcleo de V_n: então $0 \in W_n$ e também $\lambda(W_n + W_n) = \lambda W_n + \lambda W_n \subset V_n + V_n \subset V_{n-1}$, donde $W_n + W_n \subset W_{n-1}$. Além disso $f_\alpha^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0 em $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, donde, sendo $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ um módulo topológico sôbre A, a aplicação $x \mapsto \lambda x$ é contínua e $\therefore$ $\exists$ vizinhança $V_{\alpha,n}$ de 0 em (E_α, τ_α) t.q. $\lambda V_{\alpha,n} \subset f_\alpha^{-1}(V_n)$, donde, se chamarmos de $W_{\alpha,n}$ ao λ-núcleo de $f_\alpha^{-1}(V_n)$, teremos $V_{\alpha,n} \subset W_{\alpha,n}$ $\therefore$ $W_{\alpha,n}$ será vizinhança de 0 em (E_α, τ_α), mas, de $\lambda W_{\alpha,n} \subset f_\alpha^{-1}(V_n)$ segue que $\lambda f_\alpha(W_{\alpha,n}) \subset f_\alpha(f_\alpha^{-1}(V_n)) \subset V_n$ e $\therefore$ $f_\alpha(W_{\alpha,n}) \subset W_n$. Logo, $f_\alpha^{-1}(W_n) \supset W_{\alpha,n}$, donde $f_\alpha^{-1}(W_n)$ é vizinhança de 0 em (E_α, τ_α). Então $W_0 \in \mathcal{U}$ e $\lambda W_0 \subset V_0$. c.q.d.

Corolário: Se $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de módulos topológicos sôbre um corpo com valorização K, de limite indutivo (E, f_α) na categoria de conjuntos, e $\mathcal{U}$ é o conjunto das partes V_0 de E, t.q. $\forall n \geq 1$, $\exists V_n \subset E$ t.q. $0 \in V_n$; $V_n + V_n \subset V_{n-1}$, e $f_\alpha^{-1}(V_n)$ é vizinhança de 0, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in I$, então $\mathcal{U}$ é o conjunto das vizinhanças da origem em (E, τ_V), e além disso, $\tau_V = \tau_G = \tau_{C_1}$.

Observação: O único caso de anel com valorização em que não se provou $\tau_V = \tau_G = \tau_{C_1}$ é aquêle em que o anel com valorização é simultâneamente não discreto e não standard, que permanece como problema em aberto.

3. Contra-exemplos.

Os contra-exemplos que daremos a seguir, provenientes de Bourbaki, mostram que não é possível obter resultados gerais melhores que os apresentados nos dois últimos parágrafos. No entanto, é claro que é possível obter resultados importantes, impondo condições mais restritivas que as aqui usadas e que nem sempre estão verificadas.

Primeiro Contra-exemplo: Seja $(I, (E_\alpha, \tau_\alpha), f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de espaços convexos, onde I' é um conjunto não enumerável e I o conjunto das partes finitas de I', ordenado por inclusão (é claro que I é filtrante à direita). Se $\alpha \in I$, seja E_α o subespaço $\mathbb{R}_\alpha$ de $\mathbb{R}^{(I')}$, produto dos fatôres de índices pertencentes a α e munido da Topologia euclidiana; se $\alpha \in \mathfrak{F}$, seja f_α a injeção canônica de E_α em E. É trivial verificar que o limite indutivo desse sistema na categoria de conjuntos é (E, f_α), onde $E = \mathbb{R}^{(I')}$, e $f_\alpha : E_\alpha \to E$ é a injeção canônica. Então, $\tau_{LC} \neq \tau_V$.

<u>Dem.</u>: Seja $V_a = \{x = (\xi_i)_{i \in I'} \in E / \sum_{i \in I'} |\xi_i|^{1/2} \leq a\}$, se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. É claro que V_a é absorvente. Além disso, como $|\xi_i + \eta_i|^{1/2} \leq (|\xi_i| + |\eta_i|)^{1/2} \leq |\xi_i|^{1/2} + |\eta_i|^{1/2}$, segue que $V_a + V_b \subset V_{a+b}$. Por outro lado, $f_\alpha^{-1}(V_a) = \{x = (\xi_i)_{i \in \alpha} \in E_\alpha \mid \sum_{i \in \alpha} |\xi_i|^{1/2} \leq a\}$; seja $|\alpha|$ o número de índices de α e $A_\alpha = \{x = (\xi_i)_{i \in \alpha} \in E_\alpha \mid |\xi_i| \leq \left(\frac{a}{|\alpha|}\right)^2, \forall i \in \alpha\}$: é claro que $A_\alpha \subset f_\alpha^{-1}(V_a)$ e como $0 \in A_\alpha$ é aberto em (E_α, τ_α), segue que $f_\alpha^{-1}(V_a)$ é vizinhança de 0 em (E_α, τ_α). Então, chamando $W_0 = V_1$, $W_n = V_{\frac{1}{2^n}}$, é claro que está satisfeita a condição do teorema 2, donde $W_0 \in \mathfrak{U}$ $\therefore$ $W_0 = V_1$ é vizinhança de 0 em (E, τ_V).

Mas V_1 não é vizinhança de 0 em (E, τ_{LC}): caso contrário existiria um convexo absorvente C t.q. $0 \in C \subset V_1$ (ver Prop. 22c, §3.4). Então, para cada índice $i \in I'$, haveria um $\xi_i > 0$ t.q., se $\bar{\xi}_i = (\eta_j)_{j \in I'}$, onde $\eta_j = 0$ se $j \neq i$, e $\eta_i = \xi_i$, então $\bar{\xi}_i \in C$ (pois C é absorvente). Ora, existem no máximo $n-1$ índices de I' t.q. $\xi_i > \frac{1}{n}$ com $\bar{\xi}_i \in C$: se houvessem n ou mais índices, então, sendo J um conjunto de n dêles, teríamos $\frac{\sum_{i \in J} \bar{\xi}_i}{n} \in C$, pois C é convexo; donde, sendo $C \subset V_1$, teríamos

$\sum_{i \in J} \left|\frac{\xi_i}{n}\right|^{1/2} \leq 1 \therefore \sum_{i \in J} |\xi_i|^{1/2} \leq n^{1/2}$, donde $n^{1/2} = n \cdot \frac{1}{n^{1/2}} < \sum_{i \in J} |\xi_i|^{1/2} \leq n^{1/2}$,

o que é absurdo. Então, se chamarmos I_n ao conjunto dos índices $i \in I'$ t.q. $\exists \xi_i > \frac{1}{n}$ com $\bar{\xi}_i \in C$, I_n será finito $\therefore$ $I_* = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ é enumerável, e é claro que I_* é o conjunto de todos os índices $i \in I'$ t.q. $\exists \xi_i > 0$, com $\bar{\xi}_i \in C$. Mas I_* está contido pròpriamente em I', o que é absurdo.

Antes de dar o outro contra-exemplo, vejamos algumas proposições:

<u>Proposição 6</u>: Se E é um espaço normado de dimensão infinita, e τ a sua Topologia, existe sôbre E uma Topologia de

espaço normado $\mathcal{T}'$ estritamente mais fina que $\mathcal{T}$ e uma $\mathcal{T}''$ estritamente menos fina que $\mathcal{T}$.

<u>Dem.:</u> Seja $(a_i)_{i\in I}$ uma base algébrica de E, onde I é bem ordenado, e $\|a_i\|=1$, $\forall i\in I$. Seja B_1 a bola unitária fechada de E: é um conjunto absolutamente convexo absorvente. Seja $(b_i)_{i\in I}$ a família definida por $b_i=\begin{cases}\frac{a_i}{i} & \text{se } i\in \mathbb{N}-\{0\}\\ a_i & \text{se } i\in I-\mathbb{N} \text{ ou } i=0\end{cases}$

e seja B_2 a envoltória absolutamente convexa de $(b_i)_{i\in I}$. É claro que B_2 é absorvente: se $x_0\in E$, $x_0=\sum_{i\in J}\lambda_i b_i$, J finito, (pois $(b_i)_{i\in I}$ também é base algébrica, como é evidente). Seja $\sum_{i\in J}|\lambda_i|=a$, então, se $\alpha=\frac{1}{a}$ temos: se $|\lambda|\leq\alpha$, teremos $\lambda x\in B_2$, pois $\lambda x=\sum_{i\in J}\lambda\lambda_i b_i$, onde $b_i\in B_2$ e $\sum_{i\in J}|\lambda\lambda_i|=|\lambda|\sum_{i\in J}|\lambda_i|\leq a.\alpha=1$.

Como B_2 é absolutamente convexo absorvente a êle está associada a semi-norma p_2, definida por $p_2(x)=\inf\{\lambda\,|\,\lambda>0, x\in\lambda B_2\}$. Mas $B_2\subset B_1$, como é claro, donde, se $x\in\lambda B_2$ com $\lambda>0$, temos $x\in\lambda B_1$ $\therefore$ $\frac{x}{\lambda}\in B_1$ $\therefore$ $\|\frac{x}{\lambda}\|\leq 1$ $\therefore$ $\|x\|\leq\lambda$; então se $p_2(x)=a$, temos: se $\lambda>a$, $x\in\lambda B_2$ $\therefore$ $\|x\|\leq\lambda$ se $\lambda>a$ $\therefore$ $\|x\|\leq a$, donde $p_2(x)\geq\|x\|$ $\forall x\in E$, em particular, se $p_2(x)=0$, teremos $\|x\|=0$, donde $x=0$ e $\therefore$ p_2 é uma norma. Além disso a topologia determinada por p_2 é estritamente mais fina que $\mathcal{T}$: é mais fina pois, $p_2(x)\geq\|x\|$, $\forall x\in E$. Por outro lado, $\{x\in E\,|\,p_2(x)<1\}\subset B_2$, donde B_2 é vizinhança do 0 nessa topologia. Entretanto, B_2 não é vizinhança do 0 em $(E,\mathcal{T})$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $B_{1n}=\{x\in E\,|\,\|x\|<\frac{1}{n}\}\not\subset B_2$ pois $\frac{n+1}{n}b_{n+1}\in B_{1n}$ ao passo que não pertence a B_2: de modo geral, $\lambda b_i\notin B_2$ se $|\lambda|>1$, pois senão $\lambda b_i=\sum_{j\in J}\lambda_j b_j$, onde J é um conjunto finito de índices e $\sum_{j\in J}|\lambda_j|\leq 1$, e como os b_j são limites independentes, teríamos $\lambda b_i=\lambda_i b_i$, com $|\lambda|>1$ e $|\lambda_i|\leq 1$, o que é absurdo.

Seja B_2' a envoltória absolutamente convexa de $(b_i)_{i\in I}$, onde $b_i=\begin{cases} i a_i & \text{se } i\in\mathbb{N}-\{0\}\\ a_i & \text{se } i\in I-\mathbb{N}, \text{ ou } i=0\end{cases}$, e seja $B_3=B_2'\cup B_1$. Então como B_1

é absolutamente convexo absorvente, segue que B_3 é absolutamente convexo absorvente, donde define uma semi-norma p_3 dada por $p_3(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B_3\} = \inf(\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B_1\} \cup \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B_2'\}) = \inf(\|x\|, \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B_2'\}) \therefore p_3(x) \leq \|x\|\ \forall x \in E$, donde a topologia determinada por p_3 é menos fina que $\mathcal{T}$. Mas, por um lado, se $x \in E$ fôr t.q. $\inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B_2'\} = 0$, então, como $x = \sum_{i \in J} \lambda_i b_i$, onde J é finito (pois $(b_i)_{i \in I}$ é base algébrica de E, como é claro), e se $\lambda > 0$, $\frac{x}{\lambda} \in B_2$, segue que $\sum_{i \in J} \frac{\lambda_i}{\lambda} b_i \in B_2'$, $\forall \lambda > 0$ $\therefore \sum_{i \in J} \frac{|\lambda_i|}{\lambda} \leq 1$, $\forall \lambda > 0 \therefore \sum_{i \in J} |\lambda_i| \leq \lambda$, $\forall \lambda > 0 \therefore \sum_{i \in J} |\lambda_i| = 0 \therefore x = 0$ logo, p_3 é norma. Além disso, a topologia determinada por p_3 é estritamente menos fina que $\mathcal{T}$: B_1 é vizinhança de 0 em $(E, \mathcal{T})$, mas não é vizinhança de 0 na topologia de p_3: chamemos $\overline{B}_3 = \{x \in E \mid p_3(x) < 1\}$ que sabemos ser t.q. $\overline{B}_3 \supset B_3$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{B}_{3n} = \frac{1}{n} B_3 = \{x \in E \mid p_3(x) < \frac{1}{n}\} \not\subset B_1$, pois $\frac{b_{n+1}}{n} \in \overline{B}_{3n}$, pois

$b_{n+1} \in B_{3n}$, mas $\frac{b_{n+1}}{n} \notin B_1$, pois $\left\|\frac{b_{n+1}}{n}\right\| = \left\|\frac{(n+1)e_{n+1}}{n}\right\| = \frac{n+1}{n} > 1$.

<u>Proposição 7</u>: Se $(E_i)_{i \in I}$ é uma família finita de espaços convexos, então seu produto munido da topologia produto é um espaço convexo. (Def. 2 e Prop. 7, §1, Chap. II, Espaces Vectoriels Topologiques, Bourbaki).

<u>Segundo Contra-exemplo</u>: Seja E_0 um espaço normado de dimensão infinita, E o espaço vetorial produto de E_0 e $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, E_p o sub-espaço de E, produto de E_0 e $\mathbb{R}^p$ (identificado à soma das p primeiras parcelas de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$). Munamos E_p com a topologia $\mathcal{T}_p$ produto das de seus fatores E_0 e $\mathbb{R}^p$ e seja $f_{qp}: E_p \to E_q$ a injeção canônica, se $p \leq q$. É trivial verificar que, se $f_p: E_p \to E$ é a injeção canônica, então $(\mathbb{N}, (E_p, \mathcal{T}_p), f_{qp})$ é um sistema indutivo de espaços convexos, de limite indutivo (E, f_p) na categoria de conjuntos (usar a prop. 7 para garantir que $\mathcal{T}_p$ seja topologia localmente convexa. Então $\mathcal{T}_{LC} \neq \mathcal{T}_T$ (e como $\mathcal{T}_{LC} = \mathcal{T}_V = \mathcal{T}_C = \mathcal{T}_{C}$, pela prop. 2.1, §4.4 e Teorema 2, §5.2, segue

que $\mathcal{T}_{I} \neq \mathcal{T}_T$, $\mathcal{T}_B \neq \mathcal{T}_T$ e $\mathcal{T}_{C_\pi} \neq \mathcal{T}_T$).

<u>Dem.</u>: Seja g uma norma sôbre E_0, definindo uma topologia estritamente menos fina que a de E_0 (usar Prop. 6). Para todo $\varepsilon > 0$, seja $g_\varepsilon : E_0 \dashrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $g_\varepsilon(x) = \sup(g(x), \varepsilon - \|x\|)$. É claro que $g_\varepsilon > 0$ em E_0 e g_ε contínua em E_0.

Seja $U \subset E$, o conjunto dos pontos $(x, (t_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in E$ t.q. $t_n < g_{1/n}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $f_p^{-1}(U) =$ conj. dos pontos $(x, (t_n)_{n \leq p}) \in E_p$ t.q. $t_n < g_{1/n}(x)$, se $n \leq p$. É claro que $0 \in U$, e $f_p^{-1}(U)$ é aberto em E_p, $\forall p \in \mathbb{N}$: se $(x_0, (t_n)_{n \leq p}) \in f_p^{-1}(U)$, então $t_n < g_{1/n}(x_0)$ $\forall n \leq p$; seja $r_n = \dfrac{t_n + g_{1/n}(x_0)}{2}$, $d_n = r_n - t_n \,(>0)$: então é claro que

$W = \{x \in E_0 \mid g_{1/n}(x) > r_n, \ \forall n \leq p\}$ é aberto em E_0, que $x_0 \in W$, e que

$A = W \times (t_1 - d_1, t_1 + d_1) \times \dots \times (t_p - d_p, t_p + d_p)$ é aberto em E_p, com $(x_0, (t_n)_{n \leq p}) \in A$, e $A \subset f_p^{-1}(U)$ (basta notar que $t_n + d_n = r_n$, se $n \leq p$).

Mas, se $f_p^{-1}(U)$ é aberto em E_p, $\forall p \in \mathbb{N}$, segue que U é aberto em $\mathcal{T}_T$ (corolário da Prop. 8, § 4.1C) e ∴ é vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_T$.

Provemos que U não é vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_{LC}$: se fôsse, então existiria uma vizinhança absolutamente convexa absorvente V de 0 em $\mathcal{T}_{LC}$, t.q. $V \subset U$ e t.q. $f_p^{-1}(V)$ fôsse vizinhança de 0 em E_p. (Prop. 23 § 4.4 e dem. da Prop. 10, § 3.2). Em particular como $f_0^{-1}(V)$ é vizinhança de 0 em E_p, existe $a > 0$ t.q. $B_a \subset f_0^{-1}(V)$ onde B_a indica a bola fechada de raio a, em E_0. Como V é absorvente $\forall e_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\exists \mu_n > 0$ t.q. $\mu_n e_n \in V$. Como $B_a \subset f_0^{-1}(V)$ e V é convexo segue que, $\forall x \in B_a$ com $\|x\| = a$, temos $\left(\frac{1}{2}x; \frac{\mu_1}{2m}, \dots, \frac{\mu_m}{2m}, 0, 0, \dots\right)$ pertence a V. Mas $V \subset U$, donde, para $n = 1, \dots, m$, temos $\frac{\mu_n}{2m} < g_{1/n}\left(\frac{1}{2}x\right)$ isto é, $\frac{\mu_n}{2m} < \sup\left(g\left(\frac{1}{2}x\right), \frac{1}{n} - \left\|\frac{x}{2}\right\|\right) = \sup\left(\frac{1}{2}g(x), \frac{1}{n} - \frac{a}{2}\right)$ e como, para $n \geq n_0$, com n_0 suficientemente grande, $\frac{1}{n} - \frac{a}{2} \leq 0$, teremos $\frac{\mu_n}{2m} \leq \frac{1}{2} g(x)$ e ∴ $\frac{\mu_n}{m} \leq g(x)$, para $n \geq n_0$ e $m \geq n$. Mas, como a topologia determinada por g é

é estritamente menos fina que a de E_0, segue que dado $\varepsilon = \frac{\mu_n}{n}$
$\exists x$ com $\|x\| = a$ e $g(x) < \varepsilon$, o que é absurdo. Logo, V não é vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_{LC}$, donde $\mathcal{T}_{LC} \neq \mathcal{T}_T$.

<u>Observações</u>: 1) Êsse é justamente o caso mais simples de sistema indutivo de espaços convexos, depois do exemplo dado em seguida à Prop. 23, § 4.4 e no entanto $\mathcal{T}_{LC} \neq \mathcal{T}_T$. Note-se que $\mathcal{T}_p$ é a topologia induzida por $\mathcal{T}_{p+1}$ em E_p e que $f_{p+1,p}(E_p)$ é fechado em $(E_{p+1}, \mathcal{T}_{p+1})$ donde se trata dum sistema estrito. Além disso, $\mathcal{T}_p$ provém duma norma sôbre E_p, como é fácil de ver. Se E_0 fôr espaço de Banach, então E_p com essa norma é de Banach; se E_0 fôr espaço de Hilbert, então a norma em E_p provém dum produto interno, e E_p são espaços de Hilbert. Logo, qualquer restrição sôbre os espaços E_p, do tipo de: ser completo, reflexivo, bornológico, métrico, tonelado, normado, Banach, Hilbert, não asseguram que $\mathcal{T}_{LC} = \mathcal{T}_T$.

2) Em resumo temos: $\mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_{C_1} = \mathcal{T}_G \equiv \mathcal{T}_V$ :::: $\mathcal{T}_{LC}$, onde $\equiv$ significa que a igualdade vale se o anel topológico A fôr discreto, ou fôr um anel standard; onde :::: (caso $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) significa que o sistema indutivo é enumerável. No caso $\subset$, vimos contraexemplo (o 2º), e no caso :::: vimos contra-exemplo (o 1º). Não demos contra-exemplo no caso $\equiv$, mas êle é bastante geral. Além disso, vimos dois casos em que se tem $\mathcal{T}_T = \mathcal{T}_{C_1}$: sistema indutivo enumerável de espaços localmente compactos, e sistema indutivo aberto de espaços topológicos, Mas apesar de não servirem nos casos mais importantes. Mas ainda o 2º contra-exemplo mostra que é difícil obter um bom resultado nesse sentido.

Exercícios

Conjuntos

1) Seja $(I, E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de conjuntos, a) Seja $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ t.q. $A_\alpha \subset E_\alpha$ $\forall \alpha \in I$ e $f_{\beta\alpha}^{-1}(A_\beta) = A_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$. Seja $A = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(A_\alpha)$, provar que $f_\alpha^{-1}(A) = A_\alpha$, $\forall \alpha \in I$; b) Seja $A \subset E$ e $A_\alpha = f_\alpha^{-1}(A)$, $\forall \alpha \in I$. Provar que $A = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(A_\alpha)$ e que $f_{\beta\alpha}^{-1}(A_\beta) = A_\alpha$ se $\alpha \leq \beta$.

Definição: Chamamos de categoria dos conjuntos com ponto base (CB) à que tem por objetos pares (X, x) onde X é um conjunto e $x \in X$, e onde os morfismos entre (X, x) e (Y, y) são as aplicações de conjunto $f: X \to Y$ t.q. $f(x) = y$. A composição de morfismos é a composição de aplicações.

2) Provar que a categoria dos conjuntos com ponto base (CB) tem limites indutivos, que comuta com o funtor esquecimento F de CB na categoria dos conjuntos.

Anéis

3) Se $(I, A_\alpha, f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo de anéis, de limite indutivo (A, f_α), e se A_α é anel de integridade $\forall \alpha \in I$, então A é anel de integridade. (Sugestão: Verificar primeiro que, se A_α e A_β são anéis de integridade e $f_{\beta\alpha}$ é morfismo de A_α em A_β na categoria de anéis, então $f_{\beta\alpha}(1_\alpha) = 1_\beta$).

Espaços Topológicos

4) Seja $(I, (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de espaços topológicos de limite indutivo $((E, \mathcal{T}), f_\alpha)$. Se $\forall \alpha \in I$, $\mathcal{T}_\alpha$ fôr uma topologia discreta (respectivam. caótica, conexa, conexa por caminhos) então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta (respectivam. caótica, conexa, conexa por caminhos).

5) Seja $(I,(E_\alpha,\tau_\alpha),f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de espaços topológicos de lim. indutivo $((E,\tau),f_\alpha)$ t.q. I não tenha elemento maximal. Prove que se $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ é t.q. $\alpha<\beta \Rightarrow f_{\beta\alpha}(A_\alpha)\subset$ interior de A_β, então $A=\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(A_\alpha)$ é aberto. Em particular, se A_α é aberto $\forall\alpha\in I$, e $f_{\beta\alpha}(A_\alpha)\subset A_\beta$ se $\alpha\leq\beta$, segue que A é aberto, (ainda que I tenha elemento maximal).

6) Sejam $(I,(E_\alpha,\tau_\alpha),f_{\beta\alpha})$ e $(I,(A_\alpha,\tau_{A_\alpha}),g_{\beta\alpha})$ dois sistemas indutivos de espaços topológicos, de lim. indutivos, respectiv. $((E,\tau),f_\alpha)$ e $((A,\tau_A),g_\alpha)$. Seja $(1_I,\mu_\alpha)$ um morfismo entre $(I,(A_\alpha,\tau_{A_\alpha}),g_{\beta\alpha})$ e $(I,(E_\alpha,\tau_\alpha),f_{\beta\alpha})$, t.q. $\mu_\alpha: A_\alpha \to E_\alpha$ seja uma imersão, $\forall\alpha\in I$ (i.e, μ_α é injetora contínua, e é homeomorfismo entre A_α e $\mu(A_\alpha)$, considerado $\mu(A_\alpha)$ como subespaço de E_α), e seja $\mu: A\to E$ o lim. indutivo de $(1_I,\mu_\alpha)$.
Provar que μ é uma imersão nos seguintes casos:
a) $\mu_\alpha(A_\alpha)$ é aberto em E_α, $\forall\alpha\in I$ (sugestão: usar exercício 5). (Nêsse caso, provar também que $\mu(A)$ é aberto em E).
b) $\mu_\alpha(A_\alpha)$ é fechado em E_α, $\forall\alpha\in I$, e $f_{\beta\alpha}(E_\alpha-\mu_\alpha(A_\alpha))\subset E_\beta-\mu_\beta(A_\beta)$ se $\alpha\leq\beta$ (o que é equivalente a: $f_{\beta\alpha}^{-1}(\mu_\beta(A_\beta))=\mu_\alpha(A_\alpha)$ se $\alpha\leq\beta$). (Nêsse caso provar também que $\mu(A)$ é fechado em E).
Não sabemos se μ é imersão no caso geral.

7) Dar um exemplo mostrando que lim. indutivo de espaços compactos separados não é, necessariam. compacto e nem mesmo localmente compacto. (Sugestão: Usar o exercício anterior e o exemplo que segue a Prop. 29 de §4.4. Tomar as ~~bolas~~ bolas fechadas unitárias).

8) Provar que se $(I,(E_\alpha,\tau_\alpha)f_{\beta\alpha})$ é um sistema indutivo enumerável de esp. topológicos, de lim. indutivo $((E,\tau),f_\alpha)$ e se τ_α é topologia localmente compacta de Hausdorff, $\forall\alpha\in I$, então τ é topologia de Hausdorff. (Sugestão: usar corol. 1 da prop. 9, §4.1C e o fato de que (E,τ) é de Hausdorff $\Leftrightarrow$ a diagonal em $(E\times E,\tau\times\tau)$ é fechada). Não sabemos se lim. indut. de esp. topológicos de Hausdorff é sempre de Hausdorff.

Bibliografia

[1]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 1 - cap. 3 - 1963
-2ª edição - Hermann - Paris.

[2]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 1 - cap. 4 - 1957 -
Hermann - Paris.

[3]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 2 - cap. 1 - 1958
- Hermann - Paris

[4]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 2 - cap. 2 - 1962 -
- 3ª edição - Hermann - Paris.

[5]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 3 - cap. 1 e 2 - 1961
- 3ª edição - Hermann - Paris.

[6]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 3 - cap. 3 e 4 - 1.960 -
- 3ª edição - Hermann - Paris.

[7]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 3 - cap. 9 - 1.958 -
- 2ª edição - Hermann - Paris.

[8]-N. Bourbaki - "Éléments de Mathématiques" - livro 5 - cap. 1 e 2 - 1.966 -
2ª edição - Hermann - Paris.

[9]-Peter Freyd - "Abelian Categories: An Introduction to the Theory
of Functors" - 1.964 - Harper & Row, Publishers -
New York.

[10]-Artibano Micali - Notas sôbre categorias, funtores, limites
indutivos, etc. - 15 de outubro de 1.965 - São Paulo.

[11]-Samuel Eilenberg and Norman Steenrod - "Foundations of
Algebraic Topology" - 1.952 - Princeton University
Press - Princeton - New Jersey.

[12]-Robertson & Robertson - "Topological Vector Spaces" - 1.964 - Cambri-
dge - University Press.

[13]-Jorge Alberto A. G. Barroso - "Fundamentos da Teoria dos Espaços
Vetoriais Topológicos" - 1.965 - Rio de Janeiro.

[14]-Sze-Tsen Hu - "Elements of General Topology" - 1964 - Holden
Day, Inc.