Newton Carneiro Affonso da Costa

ÁLGEBRAS DE CURRY

Tese apresentada em Concurso para a Cátedra da Cadeira de Crítica dos Princípios e Complementos de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

São Paulo
1 966

Í N D I C E

ERRATA

(As linhas são contadas a partir do pé da página)

Pág. 14, linha 16, em vez de "reticulado implicativo clássico", ler "anel de Boole com unidade".

Pág. 14, linha 7, em vez de "... a álgebra de Boole isomorfa...", ler "... a álgebra de Boole obtida como se indica no teorema 6. Qualquer álgebra de Boole isomorfa...".

Pág. 18, linha 7, em vez de "$p \supset q$", ler "$p \supset p$".

Pág. 19, linha 11, em vez de "$\vdash p \sim q$; logo, $p \equiv q$", ler "$\vdash p \sim p$; logo $p \equiv p$".

Pág. 19: acrescentar, na Definição XI, o seguinte:

1 por $p \supset p$

0 por $p^{o} \wedge p \wedge \neg p$.

Pág. 22: Na Definição XVI, a condição III) pode ser suprimida, pois é conseqüência de I), II) e IV).

Pág. 23, linha 12, em vez de "se tenha", ler "se tenha F3), F 17) e qualquer uma das restantes: ".

Pág. 24, linha 20, em vez de "com efeito, se ...", ler "com efeito, se, por ex., ...".

Pág. 25, linha 20, em vez de "Tarski", ler "Rosenbloom".

Pág. 26, linha 16, em vez de "finito", ler "filtro".

ADENDA

É conveniente observar que o teorema de Stone, segundo o qual as álgebras de Boole e os aneis de Boole com unidade são estruturas equivalentes, pode ser estendido às álgebras C_n, $1 \leq n < \omega$. Estas álgebras são aneis (no sentido de Curry) booleanos com unidade, nos quais se acham definidos operadores não monótonos. Por outro lado, é evidente que as noções de ideal, de homomorfismo bivalente, de medida bivalente (cf. o livro de Sikorski, p. 16), etc., podem ser generalizadas para as álgebras em aprêço. Vale, por exemplo, o teorema: Todo ideal próprio I, numa álgebra C_n, $n < \omega$, é tal que existe uma medida bivalente, m, satisfazendo a condição: se x pertence a I, m(x) = o.

Em certas definições, como, v.g., na de "0", subentende-se que no definiens só figuram obs (na acepção de Curry) fixos.

INTRODUÇÃO.

1- Considerações preliminares. - Em diversas publicações precedentes (cf. os trabalhos [1] - [14], na Bibliografia desta tese), edificamos uma nova disciplina matemática: a teoria dos sistemas formais inconsistentes. Com êste objetivo, foi preciso elaborar cálculos lógicos diferentes dos usuais, especialmente pelo fato de que, para estruturar semelhantes sistemas, não se pode empregar os cálculos lógicos comuns, pois isto os tornaria triviais, no sentido de tôdas as suas fórmulas serem teoremas.

Assim, fomos conduzidos, entre outros resultados, aos cálculos proposicionais C_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, aos cálculos quantificacionais C_n^*, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, e aos cálculos quantificacionais com igualdade $C_n^=$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

Com o desenvolvimento de nossas pesquisas, surgiu, naturalmente, a questão de algebrizar os cálculos obtidos. A principal dificuldade que apareceu foi a seguinte: a negação, em nossos sistemas lógicos, não é compatível com a relação de equivalência (entre proposições) básica. Conseqüentemente, não se poderia passar ao quociente, como é usual, para se chegar às álgebras de Lindenbaum correspondentes.

Seguindo idéias de Curry (ver [15] e [16]), que se refere a operações não monótonas em reticulados ou, o que dá no mesmo no âmbito de nossa tese, a operadores definidos em reticulados e que não são compatíveis com as relações e equivalência fundamentais dêsses reticulados, procedemos como se evi dencia a seguir.

Partindo, como Curry, de reticulados em que a relação básica é uma relação de equivalência, investigamos operadores não monótonos, definidos nesses reticulados, que algebrizam as diversas formas de negação que havíamos introduzido. O resultado direto dêsses estudos foram as álgebras C_n, $1 \leq n \leq \omega$, que constituem uma generalização interessante das álgebras de Boole.

O passo imediato, em nossa pesquisa, constituiu em indagar se não existiriam outros tipos importantes de operadores não monótonos em reticulados. (Na verdade, Curry apenas menciona a possibilidade de tais operadores, mas não fornece nenhum exemplo importante.)

Surpreendentemente, então, verificamos que os operadores de nossas álgebras C_n estavam algèbricamente correlacionados com os conectivos intensionais da lógica, com a matemática intuicionista, com a teoria da computação e com a topologia geral.

A finalidade dêste trabalho é, precisamente, apresentar a primeira sistematização dos resultados acima referidos. Convém observar que em [8], [9] e [12] já havíamos publicado alguns aspectos do tema.

Cremos que com esta tese abrimos novos horizontes na teoria dos reticulados. Porém, nosso trabalho deve ser encarado, tão sòmente, como iniciando a teoria geral das operações não monótonas em reticulados. Esta circunstância se deve, principalmente, a dois motivos: 1º) não procuramos elaborar, aqui, a teoria geral de tais operações, pois achamos que se deve explorar, primeiramente, os casos especiais ventilados, para após tratarmos de chegar a resultados de caráter geral; 2º) do prisma lógico, apenas permanecemos ao nível do cálculo proposicional.

Sob certo ponto de vista isso se justifica, porquanto estamos começando a dar forma a novo capítulo da teoria dos reticulados, e os problemas encontrados são difíceis. Todavia, no Apêndice I, fazemos referencias às pesquisas que estamos desenvolvendo sôbre a quantificação e suas conexões com determinados operadores não monótonos.

2- Álgebras de Curry. - Seja S um conjunto não vazio; f é uma operação n-ária em S se a cada n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de S, f faz corresponder um único elemento a de S. Nestas condições, escreve-se

(1) $\quad f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a.$

Se n = 1 ou n = 2, f diz-se, respectivamente, uma operação unária (ou operador) ou uma operação binária. Nêste último caso, em vez da notação (1), também se pode escrever

(2) $\quad a_1 \, f \, a_2 = a.$

Suponhamos que em S esteja definida a relação de equivalência $\equiv$; fàcilmente se define, então, operação compatível com $\equiv$: a operação n-ária f é i-compatível com $\equiv$, $1 \leq i \leq n$, se, e só se, quaisquer que sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b, c$, pertencentes a S, $b \equiv c$ acarreta $f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) \equiv f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. A operação f denomina-se compatível com $\equiv$ quando fôr i-compatível com $\equiv$ para todo i, $1 \leq i \leq n$.

Seguindo a terminologia de Curry [15] e [16], podemos aqui considerar as expressões "operação monótona relativamente a $\equiv$" ("operação i-monótona relativamente a $\equiv$") e "operação compatível com a relação $\equiv$" ("operação i-compatível com a relação $\equiv$") como sinônimas, muito embora, na realidade, a terminologia do lógico norteamericano seja mais geral e mais conveniente do que a comum.

A operação n-ária f chama-se idempotente com referência a $\equiv$ ou $\equiv$-idempotente se, para todo a pertencente a S, tivermos

$$f(a,a, \ldots ,a) \equiv a.$$

(É claro que na definição anterior convém excluir os operadores.)

Se f fôr =-idempotente, f dir-se-á, simplesmente, idempotente.

Para nós, uma álgebra é uma quíntupla, $(S, (S_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J}, (f_k)_{k \in K}, (C_m)_{m \in M})$, onde :

S é um conjunto não vazio;

$(S_i)_{i \in I}$ é uma família finita de subconjuntos de S;

$(R_j)_{j \in J}$ é uma família finita de relações definidas em S;

$(f_k)_{k \in K}$ é uma família finita de operações definidas em S, e $K \neq \emptyset$;

$(C_m)_{m \in M}$ é uma família finita de elementos de S.

Supomos, evidentemente, que as operações, relações, etc., de uma álgebra satisfaçam certas condições de "natureza" algébrica. Por exemplo, as operações podem ser comutativas, associativas, etc. Geralmente, representa-se uma álgebra assim:

$$(3) \quad \left\langle S, (S_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J}, (f_k)_{k \in K}, (C_m)_{m \in M} \right\rangle .$$

A notação precedente pode sofrer modificações para ficar mais de acôrdo com o uso. Assim, uma álgebra de Boole se representa da seguinte maneira:

$$(4) \quad \left\langle S, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1 \right\rangle$$

Observe-se que a relação $\leqslant$, relevante para a álgebra (4), fica subentendida na notação. Na notação (3), sempre que certos elementos puderem ser definidos em função de outros, convém deixá-los subentendidos. Assim, por exemplo, a álgebra de Boole (4), caso $\equiv$ seja a relação de igualdade, será designada por

$$\left\langle B, =, \wedge, ' \right\rangle .$$

A álgebra (3) denomina-se uma álgebra lógica se pelo menos uma das operações f_k, $k \in K$, fôr idempotente (no tocante a certa relação de equivalência).

Chamaremos álgebra de Curry uma álgebra na qual existem operações não monótonas com referência a determinadas relações de equivalência dessa álgebra.

Nesta tese, vão nos interessar, sobretudo, as álgebras lógicas de Curry que contêm apenas operadores não monótonos.

3- Observações sôbre a terminologia e a notação. - A terminologia e as notações empregadas são adaptações patentes das utilizadas nas obras constantes da Bibliografia.

Não pensamos ser necessário reproduzir aqui definições e resultados que devem ser conhecidos do especialista. Em nossa tese procuramos apresentar ùnicamente resultados originais nossos e os poucos que fogem a esta regra foram incluídos apenas para não embaraçar inteiramente a continuidade da exposição.

Convém terminar esta secção com alguns comentários sôbre reticulados. (Essencialmente, seguiremos a diretriz de Curry [15] e [16].)

Conforme se tome como relação fundamental de um reticulado a relação $\equiv$ (equivalência) ou a relação $\leq$ (de quase ordem) podemos representá-lo, respectivamente, pela notação

$$\langle S, \equiv, \wedge, \vee \rangle,$$

ou pela notação

$$\langle S, \leqslant, \wedge, \vee \rangle.$$

Qualquer das relação $\equiv$ ou $\leqslant$ pode ser definida por meio da outra.

O primeiro elemento de um reticulado, caso exista, será denotado por " 1 " e o menor, caso exista, por "0". De modo geral, os elementos de um reticulado serão simbolizados pelas letras latinas minúsculas.

Se no reticulado $\langle S, \equiv, \wedge, \vee \rangle$ (ou $\langle S, \leqslant, \wedge, \vee \rangle$) estiver definido o operador *, que a cada $p \in S$ faz corresponder $p^* \in S$, tal reticulado será representado assim:

$\langle S, \equiv, 1, \vee, * \rangle$ (ou $\langle S, \leq, \wedge, \vee, * \rangle$), notação que torna explícito o operador.

Por motivos de ordem algébrica, chamaremos de reticulado implicativo absoluto um reticulado implicativo qualquer, quando desejarmos sublinhar que a lei de Peirce pode não ser válida. Se esta lei fôr satisfeita, o reticulado se dirá clássico (e, em caso contrário, intuicionista). Terminologia semelhante será usada com relação aos reticulados subtrativos.

Nota: os sinais " $\Longrightarrow$ " e " $\Longleftrightarrow$ " serão utilizados como abreviações metamatemáticas de " acarreta " e " equivale a".

Terminando a introdução, queremos deixar consignados aqui nossos agradecimentos a três pessoas. Ao prof. H.B. Curry, pelo interêsse demonstrado pelas nossas pesquisas e pela correspondência que tem mantido conosco. Ao prof. M. Guillaume, com quem temos colaborado nos últimos anos, pelas suas críticas e sugestões, bem como pelo apôio científico que tornou possível o desenvolvimento de nossas idéias. Ao prof. Celso Volpe, por haver assumido o encargo da publicação desta tese.

CAPÍTULO I.

As álgebras C_n.

1- Os cálculos C_n. - No estudo dos sistemas inconsistentes, como já dissemos, fomos levadas a edificar uma hierarquia de cálculos proposicionais $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots, C_\omega$, o primeiro dos quais é o cálculo proposicional clássico. (Sôbre essa hierarquia, ver [1] e [10].) Os conectivos básicos de tais cálculo são: $\supset$(se ..., logo ...), & (e), $\vee$ (ou), $\neg$ (não) e $\sim$ (se e sòmente se); êste último conectivo pode ser definido em função de $\supset$ e de & como é usual.

Postulados de C_1

A, B e C são fórmulas e A^o é abreviação de $\neg(A \& \neg A)$.

1) $A \supset (B \supset A)$

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

3) $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$

4) $A \& B \supset A$

5) $A \& B \supset B$

6) $A \supset (B \supset A \& B)$

7) $A \supset A \vee B$

8) $B \supset A \vee B$

9) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

10) $\neg\neg A \supset A$

11) $A \vee \neg A$

12) $B^{o} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$

13) $A^{o} \& B^{o} \supset (A \supset B)^{o}$

14) $A^{o} \& B^{o} \supset (A \& B)^{o}$

15) $A^{o} \& B^{o} \supset (A \vee B)^{o}$

16) $A^{o} \supset (\neg A)^{o}$

Definição I. A^{1} abrevia A^{o}

A^{n} abrevia $A^{o o \ldots o}$, onde, nesta última fórmula, o símbolo ^{o} figura n vêzes (n é um número natural maior ou igual a 1).

Definição II. $A^{(1)}$ abrevia A^{1}

$A^{(n+1)}$ abrevia $A^{(n)} \& A^{n+1}$.

Postulados de C_n, $1 < n < \omega$.

São os mesmos de C_1, excessão feita de 12) - 16), que são substituídos, respectivamente, pelos seguintes:

12_n) $B^{(n)} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$

13_n) $A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \supset B)^{(n)}$

14_n) $A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \& B)^{(n)}$

15_n) $A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \vee B)^{(n)}$

16_n) $A^{(n)} \supset (\neg A)^{(n)}$.

Postulados de C_ω.

São os mesmos de C_1, suprimindo-se 12) - 16).

Os cálculos C_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, possuem muitas das propriedados de C_o. Valem, assim o teorema da dedução, a regra de prova por casos e a regra da dupla negação.

Demonstra-se que nos cálculos em aprêço a negação $\neg$ não é compatível com a equivalência $\sim$. Noutras palavras, de $\vdash A \sim B$ não se pode concluir que $\vdash A \sim \neg B$. Por outro lado, em C_n, $1 \leq n < \omega$, vale a regra $A^{(n)} \& A \& \neg A \vdash B$.

2 - <u>As álgebras C_1</u>. - Passemos à algebrização de C_1. Em vista de 1) - 9), C_1 é, do ponto de vista algébrico, um reticulado implicativo absoluto. Como se tem $\vdash A^o \& A \& \neg A \supset B$, segue-se que êsse reticulado deve possuir primeiro elemento. Além disso, pelos esquemas 10) - 16) constata-se que em tal reticulado se acha definido um operador, que simbolizaremos por $'$, possuindo algumas das propriedades do complemento booleano.

<u>Definição III</u>. p^o abrevia $(p \wedge p')'$.

Em resumo, C_1 é, algèbricamente, um reticulado implicativo absoluto, $\langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, 0, ' \rangle$, com menor elemento, no qual se acha definido um operador $'$, satisfazendo as condições:

$$p \vee p' \equiv 1$$

$$p'' \leq p$$

$$q^o \leq (p \supset q) \supset ((p \supset q') \supset p')$$

$$p^o \wedge q^o \leq (p \supset q)^o$$

$$p^o \wedge q^o \leq (p \vee q)^o$$

$$p^o \wedge q^o \leq (p \wedge q)^o$$

$p^0 \leqslant (p')^0$.

(Observação: $p \equiv q \Leftrightarrow (p \leqslant q$ e $q \leqslant p)$.)

Denominaremos um reticulado do tipo anterior de <u>reticulado C_1</u> ou <u>álgebra C_1</u>.

Desde que $p \equiv q$ não acarreta $p' \equiv q'$ (ver [2] e [10]), isto é, o operador ' não é monótono relativamente à relação de equivalência $\equiv$, não se pode passar ao quociente como é habitual.

<u>Definição IV.</u> p^* abrevia $p' \wedge p^0$

<u>Teorema 1.</u> Numa álgebra C_1, tem-se :

$$a \leqslant b \Rightarrow b \supset c \leqslant a \supset c$$

$$a \leqslant b \Rightarrow c \supset a \leqslant c \supset b.$$

<u>Demonstração.</u> Uma álgebra C_1 é um reticulado implicativo absoluto.

<u>Teorema 2.</u> Em uma álgebra C_1 (quaisquer que sejam <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u> elementos dessa álgebra), são válidas as expressões abaixo:

$b \leqslant a \supset b$

$a \supset (b \supset c) \equiv a \wedge b \supset c \equiv b \supset (a \supset c)$

$a \wedge (a \supset b) \equiv a \wedge b$

$a \supset (b \supset c) \leqslant (a \supset b) \supset (a \supset c)$

$a \supset b \wedge c \leqslant (a \supset b) \wedge (a \supset c)$

$a \supset b \leqslant a \wedge c \supset b \wedge c$

$(a \supset b) \wedge (b \supset c) \leqslant (a \supset c)$

$a \supset a \wedge b \equiv a \supset b \equiv a \supset (a \supset b)$

$(a \supset b) \vee (a \supset c) \leq a \supset (b \vee c)$

$(a \supset c) \vee (b \supset c) \leq a \wedge b \supset c$

$c \vee (a \supset b) \leq (a \vee c) \supset (b \vee c)$

$(a \vee b) \wedge (a \supset b) \equiv b$

$a \vee b \leq (a \supset b) \supset b$

$(a \supset b) \wedge (b \supset a) \equiv (a \vee b) \supset (a \wedge b)$

Demonstração. Análoga à do teorema precedente.

Teorema 3. Em uma álgebra C_1 existe maior elemento e tem-se:

$a \wedge (a \supset b) \leq b$

$a \wedge c \leq b \Rightarrow c \leq a \supset b$

$a \equiv 1 \supset a$

$a \leq b \Leftrightarrow 1 \leq a \supset b$

Demonstração. Decorrência das álgebras C_1 serem reticulados implicativos.

Teorema 4. Tôda álgebra C_1 é distributiva e tem-se:

$(a \vee b) \supset c \equiv (a \supset b) \vee (b \supset c)$

Teorema 5. Em um reticulado C_1, p^* é o complemento booleano de p; logo,

$$p \vee p^* \equiv 1 \qquad p \wedge p^* \equiv 0.$$

Demonstração. Temos:

1) $p^o \leq p \vee p^o$

2) $(p^o)' \leq ((p \wedge p')')' \leq p \wedge p' \leq p \leq p \vee p^o$

Logo, de 1) e de 2),

$$p^o \vee (p^o)' \leq p \vee p^o.$$

Como

$$p^o \vee (p^o)' \equiv 1,$$

resulta que

3) $p \vee p^o \equiv 1.$

Mas,

4) $p \vee p' \equiv 1.$

De 3) e 4) advém

$$(p \vee p') \wedge (p \vee p^o) \equiv 1,$$

ou seja,

$$p \vee (p' \wedge p^o) \equiv 1,$$

$$p \vee p^* \equiv 1.$$

Por outro lado, como

$$p \wedge p^* \equiv p \wedge p' \wedge p^o,$$

resulta

$$p \wedge p^* \wedge 1 \leqslant p \therefore p \wedge p^* \leqslant 1 \supset p,$$

$$p \wedge p^* \wedge 1 \leqslant p' \therefore p \wedge p^* \leqslant 1 \supset p',$$

$$p \wedge p^* \wedge 1 \leqslant p^o \therefore p \wedge p^* \leqslant 1 \supset p^o,$$

donde

$$p \wedge p^* \leqslant (1 \supset p) \wedge (1 \supset p') \wedge (1 \supset p^o),$$

ou

$$p \wedge p^* \leqslant 1 \supset [p^o \supset ((1 \supset p) \supset (1 \supset p'))],$$

$$p \wedge p^* \leqslant 1 \supset 1',$$

$$p \wedge p^* \leqslant 1',$$

$$p \wedge p^* \leqslant 0,$$

$$p \wedge p^* \equiv 0.$$

Teorema 6. Em um reticulado C_1, a estrutura composta pelo conjunto subjacente a êsse reticulado e pelas operações $\wedge$, $\vee$ e $*$ é uma álgebra de Boole.

Demonstração. Conseqüência do teorema anterior.

Teorema 7. Tôda álgebra C_1 é um reticulado implicativo clássico. Logo, para quaisquer elementos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ dessa álgebra, são válidas as relações

$$a \vee (a \supset b) \equiv 1$$

$$(a \supset b) \supset a \leqslant a \quad \text{(lei de Peirce)}$$

$$(a \supset b) \supset b \leqslant a \vee b$$

Demonstração. Corolário do fato de tôda álgebra C_1 ser um reticulado implicativo clássico.

De conformidade com o teorema 6, a estrutura composta pelo conjunto subjacente a uma álgebra C_1 e pelas operações $\wedge$, $\vee$, e $*$ é uma álgebra de Boole, cuja relação básica é a relação de equivalência $\equiv$ (ou a quase ordem $\leqslant$). Pode-se, no entanto, passar ao quociente e obter uma álgebra de Boole na acepção usual. Com apôio nesta observação, formulamos a seguinte:

Definição V. Seja $\langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \circ, ' \rangle$ uma álgebra C_1 e $\langle S, \equiv, \wedge, \vee, * \rangle$ a álgebra de Boole isomorfa à álgebra quociente de $\langle S, \equiv, \wedge, \vee, * \rangle$ por $\equiv$, denomina-se <u>álgebra de Boole associada à álgebra C_1 em aprêço</u>.

A teoreia da representação das álgebras de Boole de Stone, quer do pisma conjuntista, quer do ponto de vista topológico, pode ser estendida às álgebras C_1. Os resultados mais importantes no tocante à representação das álgebras C_1 são os seguintes:

Teorema 8. Tôda álgebra C_1 é associada a um corpo reduzido de conjuntos.

Demonstração. De fato, qualquer álgebra C_1 acha-se associada a uma álgebra de Boole cuja relação básica é a igualdade. Mas, pelo teorema da representação de Stone (ver, p. ex., Sikorski [21]), tôda álgebra de Boole é isomorfa a um corpo reduzido de conjuntos.

Teorema 9. Tôda álgebra C_1 é associada ao corpo dos conjuntos ao mesmo tempo abertos e fechados de um espaço de Haussdorff compacto e totalmente desconexo.

Demonstração. Semelhante à do teorema anterior.

Uma questão não resolvida interessante é a seguinte:

Problema. Quantas álgebras C_1 são isomorfas, associadas à mesma álgebra de Boole, existem?

3- As álgebras C_n, $1 < n < \omega$. - Tudo o que se disse relativamente às álgebras C_1 se estende, sem dificuldade, às álgebras C_n (ou reticulados C_n), $1 < n < \omega$, que se definem de modo similar. Citaremos, não obstante, alguns resultados.

Definição VI. Se n fôr um inteiro maior ou igual a 1,

$$p^1 \text{ abrevia } p^o$$

$$p^n \text{ abrevia } p^{oo\ldots o},$$ onde, nesta última expressão, o símbolo ^{o} aparece n vêzes.

Definição VII. Nas condições da definição precedente,

$$p^{(1)} \text{ abrevia } p^1$$

$p^{(n+1)}$ abrevia $p^{(n)} \& p^{n+1}$

Isto posto, uma álgebra C_n, $1 < n < \omega$, é um reticulado implicativo absoluto, com primeiro elemento, no qual se acha definido um operador satisfazendo as condições:

$$p \vee p' \equiv 1$$

$$p'' \leqslant p$$

$$q^{(n)} \leqslant (p \supset q) \supset ((p \supset q') \supset p')$$

$$p^{(n)} \wedge q^{(n)} \leqslant (p \supset q)^{(n)}$$

$$p^{(n)} \wedge q^{(n)} \leqslant (p \wedge q)^{(n)}$$

$$p^{(n)} \wedge q^{(n)} \leqslant (p \vee q)^{(n)}$$

$$p^{(n)} \leqslant (p')^{(n)}$$

__Teorema 10.__ Tôda álgebra C_n, $1 < n < \omega$, é um reticulado associativo.

__Teorema 11.__ Uma álgebra C_n, $1 < n < \omega$, é um reticulado implicativo clássico.

4- __As álgebras C_ω.__ - Do ponto de vista algébrico, C_ω é um reticulado implicativo absoluto com o operador ' , não monótono, satisfazendo os postulados

$$p \vee p' \equiv 1 \qquad p'' \leqslant p.$$

Os reticulados do tipo precedente denominam-se reticulados C_ω ou álgebras C_ω.

__Teorema 12.__ As álgebras C_ω não são reticulados implicativos clássicos e não possuem, em geral, primeiro elemento.

__Teorema 13.__ Se $m < n$, qualquer álgebra C_m é, também, uma álgebra C_n $(m,n = 0,1,2, \ldots, \omega)$.

Teorema 14. Tôda álgebra de Boole é um reticulado C_n, $1 \leq n \leq \omega$.

Observação. Diversos exemplos de álgebras C_n, $1 \leq n \leq \omega$, definidos por meio de matrizes, podem ser encontrados em [10] e em [13].

5- Álgebras proposicionais C_1. - Vamos, agora, introduzir o conceito de álgebra proposicional C_1, que generaliza o conceito de álgebra de Boole proposicional de Rosenbloom [20]. Partindo das álgebras C_n, $1 < n \leq \omega$, também poderíamos erigir a teoria das álgebras proposicionais C_n, $1 < n \leq \omega$. Porém, como esta última generalização é semelhante à primeira, sòmente trataremos das álgebras proposicionais C_1.

Denominaremos de álgebra proposicional C_1 a uma álgebra $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$, onde $\tilde{S} \subset S$ (e $S \neq \emptyset$), $\supset$, $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias em S e $\neg$ é um operador em S, sendo satisfeitos os postulados:

A1) $p,q \in S \Rightarrow p \supset (q \supset p) \in \tilde{S}$

A2) $p,q,r \in S \Rightarrow (p \supset q) \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset (p \supset r)) \in \tilde{S}$

A3) $(p \in \tilde{S}$ e $p \supset q \in \tilde{S}) \Rightarrow q \in \tilde{S}$

A4) $p,q \in S \Rightarrow p \wedge q \supset r \in \tilde{S}$

A5) $p,q \in S \Rightarrow p \wedge q \supset q \in \tilde{S}$

A6) $p,q \in S \Rightarrow p \supset (q \supset p \wedge q) \in \tilde{S}$

A7) $p,q \in S \Rightarrow p \supset p \vee q \in \tilde{S}$

A8) $p,q \in S \Rightarrow q \supset p \vee q \in \tilde{S}$

A9) $p,q,r \in S \Rightarrow (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)) \in \tilde{S}$

A10) $p \in S \Rightarrow \neg\neg p \supset p \in \tilde{S}$

A11) $p \in S \Rightarrow p \vee \neg p \in \tilde{S}$

A12) $p, q \in S \Rightarrow p^{o} \supset ((p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)) \in \tilde{S}$

A13) $p, q \in S \Rightarrow p^{o} \wedge q^{o} \supset (p \supset q)^{o} \in \tilde{S}$

A14) $p, q \in S \Rightarrow p^{o} \wedge q^{o} \supset (p \wedge q)^{o} \in \tilde{S}$

A15) $p, q \in S \Rightarrow p^{o} \wedge q^{o} \supset (p \vee q)^{o} \in \tilde{S}$

A16) $p \in S \Rightarrow p^{o} \supset (\neg p)^{o} \in \tilde{S}$

(p^{o} abrevia $\neg(p \wedge \neg p)$).

<u>Definição VIII</u>. $p \sim q$ abrevia $(p \supset q) \wedge (q \supset p)$.

<u>Definição IX</u>. $\vdash p$ abrevia $p \in \tilde{S}$.

<u>Teorema 15</u>. Tôda álgebra de Boole proposicional é uma álgebra proposicional C_1.

<u>Demonstração</u>. Conseqüência da própria noção de álgebra de Boole proposicional. (Convém insistir, no entanto, que as operações da álgebra C_1 correspondente devem ser definidas da maneira usual.)

<u>Teorema 16</u>. Em uma álgebra proposicional C_1 temos:

1) $\vdash p \supset p$

2) $\vdash p \wedge q \sim q \wedge p$

3) $\vdash (p \supset q) \wedge (q \supset p) \sim (p \sim q)$

4) $\vdash p \vee q \sim q \vee p$

5) $\vdash (p \sim q) \wedge (q \sim r) \supset (q \sim r)$

6) $\vdash p^{o} \wedge p \wedge \neg p \supset q$

7) $\vdash q \supset (p \supset p)$

8) $\vdash (p\wedge q)\wedge r \sim p\wedge (q\wedge r)$

9) $\vdash (p \supset q) \supset (p\wedge r \supset q\wedge r)$

10) $\vdash (p\vee q)\vee r \sim p\vee (q\vee r)$

11) $\vdash p\wedge (q\vee r) \sim (p\wedge q)\vee (p\wedge r)$

12) $\vdash p\vee (q\wedge r) \sim (p\vee q)\wedge (p\vee r)$

13) $\vdash p\vee (p \supset q)$

14) $\vdash ((p \supset q) \supset p) \supset p$

15) $\vdash (p^{o})^{o}$

__Definição X.__ $p \equiv q$ por $\vdash p \sim q$.

__Definição XI.__ $p \leqslant q$ por $\vdash p \supset q$.

__Teorema 17.__ $\equiv$ é uma relação de equivalência.

__Demonstração.__ Por 1) do teorema 16 e por A6, deduz-se que $\vdash p \sim q$; logo, $p \equiv q$.

Suponhamos que $\vdash p \sim q$, ou seja, que $\vdash (p\supset q)\wedge(q\supset p)$; por 3) do teorema 16, resulta $\vdash (p \supset p)\wedge(p\supset q)$, donde $\vdash q \sim p$. Então, $p\equiv q$ acarreta $q \equiv p$.

Se $p\equiv q$ e $q \equiv r$, resulta $p\equiv r$, aplicando-se 5) do teorema 16 e A6.

__Teorema 18.__ $\leqslant$ é uma quase ordem.

__Demonstração.__ Como $\vdash p \supset p$, vê-se que $p \leqslant p$. Além disso, de $\vdash p \supset q$ e $\vdash q \supset r$ obtém-se, fàcilmente, $\vdash p \supset r$.

__Teorema 19.__ $p \leqslant q \Leftrightarrow p\wedge q \equiv p$

$p \leqslant q \Leftrightarrow p\vee q \equiv q$.

Teorema 20. Qualquer que seja $p \in S$, $0 \leq p$ e $p \leq 1$.

Demonstração. Corolário de 6) e 7) do teorema 16.

Teorema 21. Se $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$ fôr uma álgebra proposicional C_1, se definirmos $\equiv$ e 0 como anteriormente e se $'$ abrevia $\neg$, então $\langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, 0, ' \rangle$ é uma álgebra C_1.

Demonstração. Basta verificar que tôdas as condições de definição de álgebra C_1 são satisfeitas.

Teorema 22. Se $\langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, 0, ' \rangle$ fôr uma álgebra C_1, definindo-se $\tilde{S}$ como o conjunto dos elementos p de S tais que $p \equiv q \supset q$, para algum $p \in S$, e representando-se o operador $'$ por $\neg$, $\langle S, \tilde{S}, \supset, \vee, \wedge, \neg \rangle$ é uma álgebra proposicional C_1.

Demonstração. Análoga à do teorema precedente.

As proposições anteriores evidenciam que álgebra C_1 e álgebra proposicional C_1 são estruturas equivalentes. Dêsse modo, tudo o que valer para uma delas pode ser adaptado à outra. Assim, para as álgebras proposicionais C_1 demonstram-se, sem dificuldade, teoremas de representação como os teorema 8 e 9.

Teorema 23. Na álgebra proposicional C_1, $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$, o operador $\neg$ não é monótono relativamente a $\equiv$ (definição X).

Definição XII. $S^o = \{ p \mid p \in S \text{ e } \vdash p^o \}$

Definição XIII. $\tilde{S}^o = \{ p \mid p \in S \text{ e } \vdash p^o \wedge p \}$

Teorema 24. Seja $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$ uma álgebra proposicional C_1. Então, $\langle S^o, \tilde{S}^o, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$ constitui uma álgebra de Boole proposicional.

Demonstração. Deve-se mostrar que os postulados que definem o conceito de álgebra de Boole proposicional, de acôrdo com Rosenbloom [20], p.31, são verdadeiros. A demonstração, embora trabalhosa, não oferece nenhuma dificuldade essencial.

Teorema 25. Consideremos a álgebra $C_1 \langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, 0, ' \rangle$ e seja $S^o = \{p \mid p \in S \text{ e } p^o \equiv 1\}$; nestas condições, $\langle S^o, \equiv, \wedge, \vee, ' \rangle$ é umaa álgebra de Boole.

Intuitivamente, os teoremas 24 e 25 patenteiam que, nas álgebras C_1 ou nas álgebras proposicionais C_1, os elementos "bem comportados", isto é, os que satisfazem o princípio da não contradição, comportam-se de maneira "clássica".

Definição XIV. Em uma álgebra proposicional C_1, como nas álgebras C_1,

$$p^* \text{ abrevia } p^o \wedge p'.$$

Teorema 26. Se $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$ fôr uma álgebra proposicional C_1, então $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, *, \neg \rangle$ é uma álgebra de Boole proposicional, com o operador $\neg$.

Demonstração. Versão do teorema 6 para as álgebras proposicionais.

5- Sistema dedutivos. - A finalidade desta secção é mostrar como a teoria de Tarski e Stone sôbre sistemas dedutivos pode ser estendida às álgebras C_1. Resumo das idéias de Tarski e Stone encontra-se em Rosenbloom [20], p.44 e seguintes.

Estudaremos a questão ùnicamente nas álgebras C_1 e nas álgebras proposicionais C_1; a generalização dos resultados para as álgebras C_n, $1 < n < \omega$, e para as álgebras proposicionais C_n,

$1 < n \leq \omega$, é imediata.

<u>Definição XV</u>. Numa álgebra C_1:

$$\vdash p \quad \text{abrevia} \quad p \equiv 1.$$

Pela exposição feita, vê-se que os símbolos " $\vdash$ ", " $\equiv$ ", " $\leq$ ", etc., podem ser empregados, de modo equivalente, tanto nas álgebras C_1 como nas álgebras proposicionais C_1. Isto decorre, evidentemente, da circunstância dessas duas estruturas serem estruturas equivalentes. Por isso, nesta secção, desenvolveremos a teoria dos sistemas dedutivos de forma unificada, referindo-nos às álgebras C_1 e às álgebras proposicionais C_1 simultâneamente: quando falarmos de "álgebra" ficará subentendido que se trata de qualquer um dos dois tipos mencionados de estrutura.

<u>Definição XVI</u>. Numa álgebra, denominaremos filtro um subconjunto não vazio, F, dessa álgebra, satisfazendo às condições (<u>a</u> e <u>b</u> são elementos quaisquer da álgebra):

I) $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$

II) $a \in F \Rightarrow a \vee b \in F$

III) $a,\ a \supset b \in F \Rightarrow b \in F$

IV) $(a \in F \text{ e } a \equiv b) \Rightarrow b \in F$

<u>Teorema 27</u>. Condição necessária e suficiente para que o subconjunto G de uma álgebra seja filtro, é que se tenha:

I') $1 \in G$

II') $(a \in G \text{ e } a = b) \Rightarrow b \in G$

III') $(a \in G \text{ e } a \supset b \in G) \Rightarrow b \in G$.

<u>Demonstração</u>. Suficiência: como $1 \in G$, G não é vazio.

Se $a, b \in G$, como $a \supset (b \supset a \wedge b) \equiv 1 \in G$, resulta que $a \wedge b \in G$. Desde que $a \supset a \vee b \equiv 1 \in G$, se $a \in G$, então $a \vee b \in G$, qualquer que seja o elemento b da álgebra.

Necessidade: suponhamos que G seja filtro. Então, $G \neq \emptyset$; logo, existe <u>a</u> tal que $a \in G$; em consequência, $a \vee 1 \equiv 1 \in G$.

<u>Teorema 28</u>. Se F fôr um filtro, $a \in F$ e $a \leqslant b$ acarretam $b \in F$.

<u>Demonstração</u>. Se $a \in F$ e $a \leqslant b$, resulta $a \in F$ e $a \supset b \equiv 1$. Logo, $a \in F$ e $a \supset b \in F$ e, por conseguinte, $b \in F$.

<u>Teorema 29</u>. Condição necessária e suficiente para que o subconjunto F de uma álgebra seja um filtro, é que, quaisquer que sejam os elementos p, q e r pertencentes a essa álgebra, se tenha:

F1) $p \supset (q \supset p) \in F$

F2) $(p \supset q) \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset (p \supset r)) \in F$

F3) $(p \in F$ e $p \supset q \in F) \Rightarrow q \in F$

F4) $p \wedge q \supset p \in F$

F5) $p \wedge q \supset q \in F$

F6) $p \supset (q \supset p \wedge q) \in F$

F7) $p \supset p \vee q \in F$

F8) $q \supset p \vee q \in F$

F9) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)) \in F$

F10) $\neg\neg p \supset p \in F$

F11) $p \vee \neg p \in F$

F12) $p^{o} \supset ((p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)) \in F$

F13) $p^{o} \wedge q^{o} \supset (p \supset q)^{o} \in F$

F14) $p^{o} \wedge q^{o} \supset (p \wedge q)^{o} \in F$

F15) $p^{o} \wedge q^{o} \supset (p \vee q)^{o} \in F$

F16) $p^{o} \supset (\neg p)^{o} \in F$

F17) $(p \in F$ e $p \equiv q) \Rightarrow q \in F$

<u>Demonstração</u>. Suficiência: com efeito, se $p \supset (q \supset p) \in F$ como $p \supset (q \supset p) \equiv 1$, advém que $1 \in F$. Logo, F é filtro pelo teorema precedente.

Necessidade: se F é filtro, $1 \in F$ e tôdas as condições F1) - F17) são evidentemente satisfeitas.

<u>Teorema 30</u>. Se a álgebra C_1, $\mathcal{A}$, é álgebra de Boole, um filtro em $\mathcal{A}$, considerado como álgebra C_1, é um filtro em $\mathcal{A}$, como álgebra de Boole, e reciprocamente.

<u>Teorema 31</u>. Seja $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$ uma álgebra proposicional C_1. Então $\tilde{S}$ é filtro.

Seja M um conjunto de elementos da álgebra $\mathcal{A}$. A seqüência finita $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ chama-se uma dedução de p (p é elemento de $\mathcal{A}$) a partir das hipóteses M se e só se : 1) para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ou $m_i \in M$ ou $\vdash m_i$ ou existem $j,k < i$ tais que m_k é $m_s \supset m_i$; 2) m_n é p. Se existir uma dedução de p a partir das hipóteses M, p diz-se uma consequência de M e escreve-se

$$M \vdash p$$

Se $M \neq \emptyset$, a dedução denomina-se demonstração (formal) e o sinal "$\vdash$" readquire o seu sentido original, escrevendose $\vdash p$ em vez de $\emptyset \vdash p$. (Ver teorema 33 abaixo.)

Quando se tiver

$$\vdash p,$$

p diz-se demonstrável. Os elementos demonstráveis formam, pois, um filtro.

O conjunto das consequências de M representa-se, seguindo Tarski, por

$$\overline{M}.$$

Se $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ e $M \vdash p$, pode-se escrever $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash p$.

<u>Teorema 32</u>. $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash p \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \supset p$.

<u>Demonstração</u>. Consequência do fato das álgebras de que tratamos serem reticulados implicativos.

<u>Teorema 33</u>. $\emptyset \vdash p \Leftrightarrow \vdash p$

<u>Teorema 34</u>. Se $M \neq \emptyset$, $M \vdash p$ se, e sòmente se, existirem elementos $p_1, p_2, \ldots, p_n \in M$ tais que $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \vdash p$.

<u>Teorema 35</u>. $p \vdash q \Leftrightarrow \vdash p \supset q$.

<u>Definição XVII</u>. Numa álgebra, o filtro dos elementos demonstráveis será denotado por V.

<u>Teorema 36</u>. $\overline{M}$ é o menor filtro contendo V e M.

<u>Demonstração</u>. Fàcilmente se prova que $V \subset \overline{M}$, que $M \subset \overline{M}$ e que qualquer filtro que contenha V e M conterá $\overline{M}$. Por outro lado, é fácil ver que $\overline{M}$ é um filtro.

<u>Teorema 37</u>. Na álgebra $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$; $\{\overline{p \wedge p' \wedge p^o}\} = \{\overline{p, p', p^o}\} = S$; $p \supset q \in \overline{M} \Leftrightarrow q \in \overline{M \cup \{p\}}$; $\tilde{\emptyset} = \{\bar{1}\} = \tilde{S}$ (supõe-se que $M \subset S$ e que p e q são elementos

quaisquer de S).

<u>Definição XVIII</u>. M denomina-se um sistema dedutivo se $\overline{M} \subset M$.

<u>Teorema 38</u>. Se M fôr um sistema dedutivo, $\overline{M} = M$.

<u>Teorema 39</u>. $\overline{\{p\}} \cap \overline{\{p^*\}} = V$.

<u>Definição XIX</u>. Um conjunto M de elementos da álgebra $\mathcal{A}$ diz-se trivial se, e só se, $M \vdash 0$.

<u>Definição XX</u>. Nas condições da definição anterior, M denomina-se inconsistente se, e sòmente se, $M \vdash p$ e $M \vdash p'$, para algum p pertencente à álgebra $\mathcal{A}$. Em caso contrário, M diz-se consistente.

<u>Definição XXI</u>. Se F fôr finito e $0 \notin F$, F chama-se filtro próprio.

<u>Definição XXII</u>. Um filtro próprio que não estiver contido pròpriamente em nenhum outro filtro próprio denomina-se filtro maximal.

<u>Teorema 40</u>. Todo conjunto não trivial M de elementos da álgebra $\mathcal{A}$ está contido num filtro maximal.

<u>Demonstração</u>. Seja $\tilde{M}$ o conjunto dos filtros próprios que contêm M. Dado, então, um subconjunto T de $\tilde{M}$, linearmente ordenado por inclusão, $\bigcup T$ é um filtro que contém M e qualquer outro elemento de T. Logo, $\tilde{M}$ é indutivo superiormente. Aplicando-se o lema de Zorn, prova-se o teorema.

<u>Teorema 41</u>. Se F fôr um filtro maximal, para todo elemento p da álgebra, $p \in F$ ou $p^* \in F$.

<u>Teorema 42</u>. Se F fôr um filtro maximal e $p \vee q \in F$, então $p \in F$ ou $q \in F$.

Definição XXIII. O sistema dedutivo M diz-se completo se fôr um filtro maximal.

Teorema 43. O sistema dedutivo M da álgebra $\mathcal{A}$ é completo se, e sòmente se, para qualquer elemento p de $\mathcal{A}$, $p \in M$ ou $p^* \in M$.

Demonstração. Corolário do teorema 41.

Teorema 44. Seja M um sistema dedutivo na álgebra $\mathcal{A}$. Fazendo $\mathcal{A}_M = \{p \mid p$ é elemento de $\mathcal{A}$ e $M \vdash p^o\}$ e $M^o = \{p \mid p$ é elemento de $M \cap \mathcal{A}_M\}$, M^o é sistema dedutivo na álgebra de Boole $\mathcal{A}_M$.

Teorema 45. Existem sistemas dedutivos inconsistentes e não triviais.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ a álgebra C_1 livre gerada por dois geradores p e q. Em $\mathcal{A}$, a relação

$$p \wedge p' \leqslant q,$$

ou, o que é equivalente,

$$p \wedge p' \supset q \equiv 1,$$

não é verdadeira. Com efeito, basta aplicar a matriz $\langle\{1,2,3\}, \{1,2\}, \supset, \wedge, \vee, ' \rangle$, onde as operações $\supset$, $\wedge$, $\vee$ e $'$ acham-se definidas pelos quadros seguintes

x	x'
1	3
2	1
3	1

x	y	$x \supset y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	3	1
1	2	1	1	1
2	2	1	1	1
3	2	1	3	1
1	3	3	3	1
2	3	3	3	1
3	3	1	3	3

Em $\mathcal{A}$ consideremos o sistema dedutivo $N = \{\overline{p, p'}\}$. N é, evidentemente, inconsistente; mas não trivial, dado que $q \notin N$, pois, em caso contrário, ter-se-ia que

$$p \wedge p' \supset q \equiv 1.$$

Sem dúvida, existem sistemas inconsistentes e não triviais muito mais interessantes do que o precedente (consultar [7] e [10]).

7- <u>Álgebras duais</u>. -Tôda a teoria das álgebras C_n (e das álgebras proposicionais C_n), $1 \leqslant n \leqslant \omega$, foi feita partindo-se de reticulados implicativos. Se houvéssemos empregado, inicialmente, reticulados subtrativos e procedido de modo dual, poderíamos ter edificado a teoria das álgebras C_n duais. Como o assunto se constitui em mera variação do estudo das álgebras C_n; $1 \leqslant n \leqslant \omega$, não o trataremos aqui.

CAPÍTULO II.

Construtibilidade, computabilidade e operadores intensionais.

1- Álgebras de Heyting e álgebras proposicionais de Heyting. - Chamaremos de álgebra de Heyting todo reticulado implicativo absoluto com primeiro elemento. Como reticulados implicativos, as álgebras de Heyting possuem maior elemento.

Uma álgebra de Heyting, pois, pode ser denotada assim:

$$\langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, o \rangle.$$

Se, em particular, a relação de equivalência $\equiv$ fôr a relação de igualdade, tem-se o conceito usual de álgebra de Heyting.

Definição I. Numa álgebra de Heyting,

$\neg p$ abrevia $p \supset o$.

$\vdash p$ abrevia $p \equiv 1$.

Seja S um espaço topológico e designemos por ^{o} o operador interior. Sendo A e B subconjuntos de S,

$$A \supset B$$

denotará o conjunto

$$(\complement_S A \cup B)^o,$$

e

$$\neg A$$

denotará

$$A \supset \emptyset.$$

Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto de $\mathcal{P}(S)$, tal que se $A, B \in \mathcal{S}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \supset B$ e $\neg A$ também pertencem a $\mathcal{S}$. Então $\langle \mathcal{S}$,

$=, \supset, \cap, \cup, \emptyset \rangle$ chama-se uma álgebra de abertos.

Tôda álgebra de abertos é uma álgebra de Heyting e qualquer álgebra de Heyting, $\mathcal{H} = \langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, o \rangle$, é tal que $\mathcal{H}/\equiv$ é isomorfa a uma álgebra de abertos.

A álgebra $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$ diz-se uma álgebra proposicional de Heyting se forem satisfeitos os postulados ($S \neq \emptyset$, $\tilde{S} \subset S$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$ são operações binárias em S e $\neg$ é operador em S):

H1) $p, q \in S \Rightarrow p \supset (q \supset p) \in \tilde{S}$

H2) $p, q, r \in S \Rightarrow (p \supset q) \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset (p \supset r)) \in \tilde{S}$

H3) $(p \in \tilde{S}$ e $p \supset q \in \tilde{S}) \Rightarrow q \in \tilde{S}$

H4) $p, q \subset S \Rightarrow p \wedge q \supset p \in \tilde{S}$

H5) $p, q \in S \Rightarrow p \wedge q \supset q \in \tilde{S}$

H6) $p, q \in S \Rightarrow p \supset (q \supset p \wedge q) \in \tilde{S}$

H7) $p, q \in S \Rightarrow p \supset p \vee q \in \tilde{S}$

H8) $p, q \in S \Rightarrow q \supset p \vee q \in \tilde{S}$

H9) $p, q, r \in S \Rightarrow (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)) \in \tilde{S}$

H10) $p, q \in S \Rightarrow (p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p) \in \tilde{S}$

H11) $p, q \in S \Rightarrow \neg p \supset (p \supset q) \in \tilde{S}$

<u>Definição II.</u> Em qualquer álgebra proposicional de Heyting:

$\vdash p$ abrevia $p \in \tilde{S}$.

0 abrevia $p \wedge \neg p$

$p \leq q$ abrevia $p \supset q \in \tilde{S}$

$p \equiv q$ abrevia $(p \supset q) \wedge (q \supset p) \in \tilde{S}$

Teorema 1. Seja $\langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \circ \rangle$ uma álgebra de Heyting e façamos $\tilde{S} = \{p \mid p \in S \text{ e } p \equiv 1\}$. Então, $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$, "$\neg$" definido de acôrdo com a Definição I, é uma álgebra proposicional de Heyting.

Teorema 2. Se $\langle S, \tilde{S}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$ fôr uma álgebra proposicional de Heyting, $\langle S, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \circ \rangle$, "$\circ$" definido como na Definição II, é uma álgebra de Heyting.

Os teoremas 1 e 2 mostram que os conceitos de álgebra de Heyting e de álgebra proposicional de Heyting são equivalentes: tudo o que fôr válido para uma dessa estruturas vale para a outra e reciprocamente. Para tais estruturas pode-se definir os conceitos de filtro, sistema dedutivo, etc., como foi feito para as álgebras C_n e as álgebras proposicionais C_n.

Precisamente como as álgebras de Boole e as álgebras proposicionais de Boole constituem formulações algébricas do cálculo proposicional clássico, as álgebras de Heyting e as álgebras proposicionais de Heyting são versões algébricas do cálculo proposicional intuicionista.

2- O operador de construtibilidade. - Trataremos, agora, de elaborar uma teoria algébrica clássica do cálculo proposicional intuicionista. Para tanto, partamos da álgebra de Boole

$$\langle B, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1, {}^{\circ} \rangle,$$

na qual se acha definido o operador ${}^{\circ}$.

A interpretação intuitiva dêsse operador é a seguinte: se $p \in B$ representa uma proposição, p° significa que a proposição p é construtivamente verdadeira (ou, melhor, intuicionistamente verdadeira). Noutras palavras,

$$p^{\Omega}$$

exprime que existe uma construção apropriada para p, ou seja, que p é verdadeira por construção.

O operador Ω deve satisfazer determinados postulados, que enunciaremos a seguir.

Definição III. $p \supset_{\Omega} q$ abrevia $(p \supset q)^{\Omega}$

$\neg_{\Omega}\, p$ abrevia $p \supset_{\Omega} 0^{\Omega}$

Definição IV. B^{Ω} é a imagem de B por Ω.

Postulados do operador Ω:

$\Omega 1)$ $p^{\Omega\Omega} \equiv p^{\Omega}$

$\Omega 2)$ $p^{\Omega} \leqslant p$

$\Omega 3)$ $(p \wedge q)^{\Omega} \equiv p^{\Omega} \wedge q^{\Omega}$

$\Omega 4)$ $p, q \in B^{\Omega} \Longrightarrow p \wedge q,\ p \vee q \in B^{\Omega}$

$\Omega 5)$ $p, q, x \in B^{\Omega} \Longrightarrow (p \wedge x \leqslant q \Longrightarrow x \leqslant p \supset_{\Omega} q)$

Os significados intuitivos dos postulados acima são óbvios. Por exemplo: $\Omega 1)$ afirma que é construtivamente verdadeiro que p é construtivamente verdadeira equivale a se dizer que p é construtivamente verdadeira; $\Omega 2)$ significa que, se p é construtivamente verdadeira, então p é clàssicamente verdadeira.

Teorema 3. $0^{\Omega} \equiv 0$.

Demonstração. $0 \leqslant 0^{\Omega}$, pois 0 é primeiro elemento da álgebra de Boole em consideração. Mas, por $\Omega 2)$, $0^{\Omega} \leqslant 0$. Logo, $0^{\Omega} \equiv 0$.

Teorema 4. Se $p \in B$, $p'^{\Omega} \leqslant p'$.

Demonstração. Conseqüência de $\Omega 2)$

O teorema precedente tem a seguinte interpretação intuitiva: se p fôr construtivamente falsa, p é clàssicamente falsa.

Teorema 5. $p \in B \Longrightarrow p' \leqslant p^{\Omega'}$

Teorema 6. $p \supset_\Omega q \leqslant p \supset q$.

Demonstração. $p \supset_\Omega q$ é $(p \supset q)^\Omega$. Mas, $(p \supset q)^\Omega \leqslant p \supset q$. Logo, $p \supset_\Omega q \leqslant p \supset q$.

Teorema 7. $p \wedge (p \supset_\Omega q) \leqslant q$.

Demonstração. Numa álgebra de Boole, $p \wedge (p \supset q) \leqslant q$, pois $p \supset q$ abrevia $p' \vee q$. Por conseguinte, em virtude do Teorema 6, $p \wedge (p \supset_\Omega q) \leqslant q$.

Definição V. Se p é um elemento qualquer da álgebra $\langle B, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1, \Omega \rangle$,

$$1_\Omega \text{ abrevia } p^\Omega \supset_\Omega p^\Omega.$$

Teorema 8. $\langle B^\Omega, \equiv, \wedge, \vee, \supset_\Omega, \neg_\Omega, 0^\Omega, 1_\Omega \rangle$ é uma álgebra de Heyting.

Demonstração. As álgebras de Heyting são reticulados implicativos absolutos com primeiro elemento.

Vamos provar, inicialmente, que $\langle B^\Omega, \equiv, \wedge, \vee \rangle$ é um reticulado. De fato, por $\Omega 4)$, se $p, q \in B^\Omega$, $p \wedge q$ e $p \vee q$ pertencerão, também, a B^Ω. Oras as operações $\wedge$ e $\vee$ satisfazem, por ser qualquer álgebra de Boole um reticulado, os postulados dêste último tipo de estrutura.

Para que $\langle B^\Omega, \equiv, \supset_\Omega, \wedge, \vee \rangle$ seja reticulado implicativo, é preciso que se tenha;

(I) $p, q \in B^\Omega \Longrightarrow p \wedge (p \supset_\Omega q) \leqslant q$

(II) $\quad p, q, x \in B^{\Omega} \Longrightarrow (p \wedge x \leqslant q \Rightarrow x \leqslant p \;{}_{\Omega} q)$.

Pelo teorema 6, (I) é verdadeiro; pelo postulado $\Omega 5$), deduz-se que (II) também vale. Logo, $\langle B^{\Omega}, \equiv, \supset_{\Omega}, \wedge, \vee \rangle$ é reticulado implicativo.

Como $0^{\Omega} \equiv 0$, 0^{Ω} é primeiro elemento do reticulado em aprêço. Pelas definições III e V, $\neg_{\Omega}$ e 1_{Ω} são, respectivamente, o operador de negação e o último elemento de tal reticulado.

Que $\langle B^{\Omega}, \equiv, \supset_{\Omega}, \vee, \wedge, \neg_{\Omega}, 0^{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle$ é reticulado implicativo absoluto (não vale a lei de Pèirce), será demonstrado adiante.

<u>Teorema 9</u>. $\quad 1^{\Omega} \leqslant 1_{\Omega}$

<u>Teorema 10</u>. Em $\langle B^{\Omega}, \equiv, \supset_{\Omega}, \wedge, \vee, \neg_{\Omega}, 0^{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle$, $p, q \in B^{\Omega} \Longrightarrow (p \equiv q \Longrightarrow p^{\Omega} \equiv q^{\Omega})$.

<u>Demonstração</u>. Se $p, q \in B^{\Omega}$, existem $p_1, q_1 \in B$ tais que $p = p_1^{\Omega}$ e $q = q_1^{\Omega}$. Logo, $p^{\Omega} = p_1^{\Omega\Omega} \equiv p_1^{\Omega}$ e $q^{\Omega} = q_1^{\Omega\Omega} \equiv q_1^{\Omega}$. Como $p \equiv q$, isto é, $p_1^{\Omega} \equiv q_1^{\Omega}$, advém que $p^{\Omega} \equiv q^{\Omega}$.

<u>Teorema 11</u>. Se $p, q \in B$, $p \equiv q$ não acarreta $p^{\Omega} \equiv q^{\Omega}$

<u>Demonstração</u>. Basta considerar a álgebra de Boole $\langle \{0, \underline{a}, 1\}, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1, {}^{\Omega} \rangle$ com o operador ${}^{\Omega}$, onde a relação de equivalência $\equiv$ é definida por $0 \equiv 0$, $\underline{a} \equiv \underline{a}$, $\underline{a} \equiv 1$, $1 \equiv \underline{a}$, $1 \equiv 1$, e as operações $\wedge$, $\vee$, $'$ e ${}^{\Omega}$ são caracterizadas pelos quadros

$p \wedge q$ $\quad p \backslash q$	0	$\underline{a}$	1
0	0	0	0
$\underline{a}$	0	$\underline{a}$	$\underline{a}$
1	0	$\underline{a}$	1

$p \vee q$ $\quad p \backslash q$	0	$\underline{a}$	1
0	0	$\underline{a}$	1
$\underline{a}$	$\underline{a}$	$\underline{a}$	1
1	1	1	1

p	p'
0	1
$\underline{a}$	0
1	0

p	p^{Ω}
0	0
$\underline{a}$	0
1	1

Constata-se que todos os postulados são satisfeitos. Porém, $p \equiv q$ não acarreta $p^{\Omega} \equiv q^{\Omega}$; de fato, $\underline{a} \equiv 1$, mas $\underline{a}^{\Omega} = 0 \not\equiv 1^{\Omega} = 1$.

Os dois teoremas precedentes evidenciam que o operador $^{\Omega}$ não é monótono relativamente a $\equiv$ em $\langle B, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$, mas é monótono em $\langle B^{\Omega}, \equiv, \supset_{\Omega}, \wedge, \vee, \neg_{\Omega}, 0^{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle$. Isto parece razoável, pois, por exemplo, no cálculo de predicados clássico se tem

(1) $\vdash \neg \forall x \; \neg A(x) \sim \exists x \, A(x)$,

no entanto, de (1) não se pode deduzir que

$$\vdash (\neg \forall x \; \neg A(x))^{\Omega} \sim (\exists x \; A(x))^{\Omega}.$$

Por outro lado, se tivermos, no cálculo intuicionista,

(2) $\vdash A \sim B$,

deduz-se, evidentemente, de (2), que

$$\vdash A^{\Omega} \sim B^{\Omega},$$

onde os significados dos símbolos anteriores são imediatos.

<u>Teorema 12.</u> Em $\langle B^{\Omega}, \equiv, \supset_{\Omega}, \wedge, \vee, \neg_{\Omega}, 0^{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle$, a lei de Peirce, $(p \supset_{\Omega} q) \supset_{\Omega} p \leqslant p$, não é verdadeira.

<u>Demonstração.</u> Basta utilizar a álgebra de Boole dos subconjuntos do plano euclidiano e interpretar $^{\Omega}$ como o operador que faz corresponder a cada conjunto o seu interior. (Nesta interpretação, $\equiv$ é a relação de igualdade.) Todos os postulados que definem o conceito de álgebra de Boole com operador de

construtibilidade são satisfeitos, mas a lei de Peirce não é satisfeita na álgebra de abertos correspondente.

__Problema.__ Dada uma álgebra de Boole, quantos operadores de construtibilidade existem?

__Definição VI.__ Dada a álgebra de Boole com o operador de construtibilidade Ω, $\langle B, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1, \Omega \rangle$, qualquer álgebra de Heyting isomorfa à álgebra $\langle B^{\Omega}, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \neg_{\Omega}, 0^{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle / \equiv$ denomina-se álgebra de Heyting associada à álgebra de Boole considerada.

Designemos por $\mathcal{C}$ um cérto tipo de álgebra e seja $\mathcal{C}^*$ determinado tipo particular de estruturas do tipo $\mathcal{C}$. Um teorema que afirme que qualquer estrutura do tipo $\mathcal{C}$ é isomorfa a uma do tipo $\mathcal{C}^*$, constitui um teorema de representação para as estruturas $\mathcal{C}$.

__Teorema 13.__ Tôda álgebra de Boole com o operador de construtibilidade é associada a uma álgebra de abertos.

__Demonstração.__ Conseqüência do fato de tôda álgebra de Heyting ser isomorfa a uma álgebra de abertos.

O teorema acima constitui teorema de representação para as álgebras de Boole com operador de construtibilidade. No entanto, êle não é muito significativo.

__Problema.__ Obter teoremas de representação __significativos__ e __fortes__ paras as álgebras de Boole com operador de construtibilidade.

Tratou-se do operador Ω nas álgebras de Boole. Evidentemente, pode-se introduzi-lo nas álgebras de Boole proposicionais.

Seguindo Rosenbloom [20], p. 31, chamaremos álgebra de

Boole proposicional à álgebra $\langle S, \tilde{S}, \supset, \neg, \rangle$, na qual $S \neq \emptyset$, $\tilde{S} \subset S$, $\supset$ é operação binária em S e $\neg$ é operador em S, sendo satisfeitas as condições:

B1) $p,r,q \in S \Rightarrow (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)) \in \tilde{S}$

B2) $p,q \in S \Rightarrow p \supset (q \supset p) \in \tilde{S}$

B3) $p,q \in S \Rightarrow (\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p) \in \tilde{S}$

B4) $(p \in \tilde{S}$ e $p \supset q \in \tilde{S}) \Rightarrow q \in \tilde{S}$

Definição VII. Na álgebra de Boole proposicional $\langle S, \tilde{S}, \supset, \neg \rangle$:

$p \vee q$	abrevia	$\neg p \supset q$
$p \wedge q$	abrevia	$\neg(p \supset \neg q)$
$p \sim q$	abrevia	$(p \supset q) \wedge (q \supset p)$
$\vdash p$	abrevia	$p \in \tilde{S}$
$p \leq q$	abrevia	$\vdash p \supset q$
$p \equiv q$	abrevia	$p \leq q$ e $q \leq p$
0	abrevia	$p \wedge \neg p$

Denomina-se álgebra de Boole proposicional com operador de construtibilidade Ω à álgebra de Boole proposicional $\langle S, \tilde{S}, \supset, \neg, \Omega \rangle$, com o perador Ω, sendo válidos os postulados ΩI) - ΩV) abaixo indicados.

Definição VIII. $S\Omega = \{p \mid$ existe $q \in S$ tal que $q^{\Omega} = p\}$

Definição IX. $p \supset_{\Omega} q$ abrevia $(p \supset q)^{\Omega}$

Definição X. $\neg_{\Omega} p$ abrevia $p \supset_{\Omega} 0^{\Omega}$

Definição XI. 1_{Ω} abrevia $p^{\Omega} \supset_{\Omega} p^{\Omega}$

Definição XII. $\tilde{S}\Omega = \{p \mid p \in S\Omega$ e $p \equiv 1_{\Omega}\}$

Postulados do operador Ω.

ΩI) $p \in S \Rightarrow p^{\Omega\Omega} \equiv p^{\Omega}$

ΩII) $p \in S \Rightarrow p^{\Omega} \leqslant p$

ΩIII) $p, q \in S \Rightarrow (p \wedge q)^{\Omega} \equiv p^{\Omega} \wedge q^{\Omega}$

ΩIV) $p, q \in S^{\Omega} \Rightarrow p \wedge q,\ p \vee q \in S^{\Omega}$

ΩV) $p, q, x \in S^{\Omega} \Rightarrow (p \wedge x \leqslant q \Rightarrow x \leqslant p \supset_{\Omega} q)$

Teorema 14. Se $\langle S, \tilde{S}, \supset, \neg, \Omega \rangle$ fôr uma álgebra de Boole com o operador de construtibilidade Ω, $\langle S^{\Omega}, \equiv, \supset_{\Omega}, \wedge, \vee, 0^{\Omega} \rangle$ ($S^{\Omega}, \equiv, \supset_{\Omega}, \wedge, \vee$ e $\neg_{\Omega}$ definidos como se fez acima) é uma álgebra de Heyting.

Teorema 15. Nas condições do teorema precedente, $\langle S^{\Omega}, \tilde{S}^{\Omega}, \supset_{\Omega}, \wedge, \vee, \neg_{\Omega} \rangle$ é uma álgebra proposicional de Heyting.

Como se edificou a teoria das álgebras C_n e das álgebras proposicionais C_n, poder-se-ia desenvolver a teoria das álgebras de Boole e das álgebras proposicionais de Boole com o operador de construtibilidade. Definir-se-iam, por exemplo, os conceitos de filtro, sistema dedutivo, etc., e estudar-se-iam suas principais propriedades. Têm particular interêsse as álgebras de Boole e as álgebras de Boole proposicionais com operador Ω que são normais, isto é, aquelas em que se verifica a condição.

$$1^{\Omega} \equiv 1_{\Omega} \equiv 1.$$

3- Computabilidade. - Seja T uma teoria matemática qualquer. Certas proposições de T podem ser tais, que existam métodos de cálculo que as demonstrem efetivamente. Por exemplo, na teoria das equações numéricas ou das equações diferenciais, a existência de soluções é muitas vêzes acompanhada de processos por meio dos quais essas soluções podem ser "calculadas" com a aproximação que se queira. Se isto acontecer, as proposições em aprêço dizem-se <u>computacionalmente verdadeiras</u>. Para exprimir que a proposição p é computacionalmente verdadeira, escreveremos p^*.

Se encararmos T como álgebra de Boole, o operador * goza, precisamente, das propriedades do operador de construtibilidade. A noção de álgebra de Boole com o operador $^{\Omega}$ se constitui, pois, em generalização da idéia de computabilidade.

É claro que o operador $^{\Omega}$ poderia receber outras interpretações análogas.

4 - <u>Espaços topológicos generalizados</u>. - O teorema 12 dêste capítulo patenteia que a noção de álgebra de Boole com o operador de construtibilidade generaliza a idéia de espaço topológico; amplia, também, o conceito de álgebra de Boole com operador interior. Na realidade, seria possível definir as noções de elemento aberto, de fronteira, de função contínua generalizada, de espaço compacto, etc., etc.; chegar-se-ia, então, a uma topologia generalizada, cuja finalidade seria o estudo de semelhantes espaços topológicos generalizados.

Na teoria "topológica" das álgebras de Boole com operador $^{\Omega}$ surgem certas peculiaridades. Por exemplo, há dois tipos de elementos abertos, de conformidade com as definições abaixo:

<u>Definição XIII</u>. p é aberto $\Longleftrightarrow p^{\Omega} \equiv p$

<u>Definição XIV</u>. p é estritamente aberto $\Longleftrightarrow p^{\Omega} = p$.

5- <u>Dualidade</u>. - Introduzimos, nas álgebras de Boole, o operador de construtibilidade para obter uma álgebra de Heyting; como se viu, essa estrutura generaliza a noção de espaço topológico.

Se tivéssemos procedido dualmente, trataríamos de álgebras de Boole com um operador £ e chegaríamos a um álgebra de Brouwer (reticulado dual das álgebras de Heyting), isto é, a um reticulado subtrativo absoluto com último elemento. Do ponto de vista topológico, a estrutura resultante também seria generalização do conceito de espaço topológico e, além disso, da idéia muito mais ampla de álgebra de Boole com operador fecho. Aqui, reproduziremos, tão sòmente, a definição da nova estrutura.

<u>Definição XV.</u> Numa álgebra de Boole,

$$p - q \quad \text{abrevia} \quad p \wedge q'$$

Chamaremos de álgebra de Boole com o operador de fecho generalizado, £ , tôda álgebra de Boole $\langle B, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1, £ \rangle$, com o operador £, de tal modo que se verifiquem os postulados £1) - £5) a seguir indicados.

<u>Definição XVI.</u> $p \underset{£}{-} q$ abrevia $(p - q)^{£}$

<u>Definição XVII.</u> $\underset{£}{-} p$ abrevia $1^{£} \underset{£}{-} p$

<u>Definição XVIII.</u> $B^{£}$ é a imagem de B por £.

<u>Postulados do operador £:</u>

£1) $p^{££} \equiv p^{£}$

£2) $p \leq p^{£}$

£3) $(p \vee q)^{£} \equiv p^{£} \vee q^{£}$

£4) $p, q \in B^{£} \Rightarrow p \wedge q,\ p \vee q \in B^{£}$

£5) $p, q, x \in B^{£} \Longrightarrow (q \leq p \vee x \Rightarrow q \underset{£}{-} p \leq x)$.

6- Álgebras de Heyting com operador de idealidade. - Situação "simétrica" das álgebras de Boole com operador de construtibilidade, obtém-se da maneira a seguir descrita.

Seja $\mathcal{H} = \langle H, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ uma álgebra de Heyting e suponhamos definido nessa álgebra o operador i: $H \longrightarrow H$. (Se $p \in H$, a imagem de p por i será denotada por p^i.)

Definição XIX. p' abrevia $(\neg p)^i$

Definição XX. $p \supset_i q$ abrevia $(p \supset q)^i$

Definição XXI. H^i é a imagem de H por i.

A álgebra $\mathcal{H}$ com o operador i denomina-se uma álgebra de Heyting com o operador de idealidade, i, ou, ainda, uma i-álgebra de Heyting, caso se verifiquem os postulados:

i1) $p^{ii} \equiv p^i$

i2) $p \leqslant p^i$

i3) $p \leqslant q \Rightarrow p^i \leqslant q^i$

i4) $p, q \in H^i \Rightarrow p \wedge q,\ p \vee q \in H^i$

i5) $p, q \in H^i \Rightarrow p \supset_i q \equiv p' \vee q$

i6) $p \in H^i \Rightarrow (p \wedge p' \equiv 0^i \quad \text{e} \quad p \vee p' \equiv 1^i)$.

Se $p \in H$ fôr considerado como sendo uma proposição, pode-se interpretar p^i assim: p^i significa que p é idealmente ou clàssicamente verdadeira.

Teorema 16. $0^i, 1^i \in H^i$; $p, q \in H^i \Rightarrow p \wedge q,\ p \vee q,\ p \supset_i q,\ p', q' \in H^i$.

Teorema 17. $\langle H^i, \equiv, \wedge, \vee, {}', 0^i, 1^i \rangle$ é uma álgebra de Boole.

Teorema 18. O sistema de postulados das i-álgebras de Heyting é consistente.

Demonstração. Seja $\mathcal{H}$ a álgebra de Heyting de todos os conjuntos abertos de um espaço topológico e $\underline{i}$ a aplicação que faz corresponder a um aberto qualquer dessa álgebra o "menor" conjunto simultâneamente aberto e fechado de $\mathcal{H}$ que contenha o aberto em aprêço. A álgebra $\mathcal{H}$, com o operador $\underline{i}$, constitui uma $\underline{i}$-álgebra de Heyting.

Teorema 19. $0 \leqslant 0^{i}$ e $1 \equiv 1^{i}$.

Teorema 20. $p \vee q \leqslant (p \vee q)^{i}$ e $p^{i} \vee q^{i} \leqslant (p \vee q)^{i}$.

Demonstração de que $p^{i} \vee q^{i} \leqslant (p \vee q)^{i}$. $p \leqslant p \vee q$ e $q \leqslant p \vee q$; logo, $p^{i} \leqslant (p \vee q)^{i}$ e $q^{i} \leqslant (p \vee q)^{i}$, donde $p^{i} \vee q^{i} \leqslant (p \vee q)^{i}$.

Teorema 21. $p \equiv q \Rightarrow p^{i} \equiv q^{i}$.

Teorema 22. $p \in H^{i} \Rightarrow p \supset_{i} 0^{i} \equiv a'$.

Teorema 23. $p, q \in H^{i} \Rightarrow (p \leqslant q \Rightarrow p^{i} \leqslant q)$.

Teorema 24. $p, q \in H^{i} \Rightarrow (p \vee q)^{i} \equiv p^{i} \vee q^{i}$

Demonstração. $p^{i} \vee q^{i} \leqslant (p \vee q)^{i}$ pelo teorema 20. Mas $p \leqslant p^{i}$ e $q \leqslant q^{i}$, donde $p \vee q \leqslant p^{i} \vee q^{i}$, ou seja, $(p \vee q)^{i} \leqslant p^{i} \vee q^{i}$.

Teorema 25. $p, q \in H^{i} \Rightarrow (p \wedge q)^{i} \equiv p^{i} \wedge q^{i}$

Teorema 26. $p \in H^{i} \Rightarrow p^{i} \equiv p$.

Teorema 27. $p^{i} \wedge q^{i} \equiv (p^{i} \wedge q^{i})^{i}$ e $p^{i} \vee q^{i} \equiv (p^{i} \vee q^{i})^{i}$.

Definição XXII. A $\underline{i}$-álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ diz-se forte se, e sòmente se, $p \in H^{i}$ acarreta $p \vee q \in H^{i}$, quaisquer que sejam $p, q \in H$.

Teorema 28. Numa álgebra de Heyting forte,

$$p, q \in H \Rightarrow p^{i} \vee q \in H^{i}$$

Definição XXIII. A i-álgebra de Heyting $\langle H, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, {}^{i} \rangle$ diz-se concreta se, e sòmente se, $\langle H, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ fôr uma álgebra de abertos.

Teorema 29. Tôda álgebra de Heyting com operador de idealidade, $\mathscr{H} = \langle H, \equiv, \supset, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, {}^{i} \rangle$, é tal que $\mathscr{H}/\equiv$ é isomorfa a uma i-álgebra de Heyting concreta.

Por meio da noção de álgebra de Brouwer, fàcilmente se define a estrutura dual de álgebra de Heyting com o operador de idealidade.

Problema. Partindo-se de uma álgebra de Boole B, através do operador Ω, pode-se definir uma álgebra de Heyting $\mathscr{H}$. Com auxílio do operador i, é possível definir uma álgebra de Boole, B*, a partir de $\mathscr{H}$. Em que condições B e B* são isomorfas?

Problema. Questão análoga à anterior, se principiarmos com a álgebra de Heyting $\mathscr{H}$ e o operador de idealidade i.

7- Operadores intensionais. - Mais uma razão da importância dos operadores não monótonos em reticulados pode ser apontada: a existência de operadores intensionais em lógica.

Na lógica tradicional, há duas categorias básicas de composição de proposições: por meio de operações extensionais e por intermédio de operações intensionais. Ao se compor determinada proposição a partir de outras, através de uma operação extensional, o valor de verdade da proposição composta depende exclusivamente dos valôres de verdade das proposições componen tes; o mesmo não acontece no caso das operações intensionais.

Exemplos típicos de composição extencional de proposições são os fornecidos pelas operações lógicas usuais de conjunção, disjunção, implicação material e equivalência material.

O operador " Eu creio p", onde p é uma proposição, que representaremos por $p^§$, não é extensional. De fato, se tivermos $p \sim q$ (p é materialmente equivalente a q), não se deduz, em geral, que $p^§ \sim q^§$. Assim, se abreviarmos a proposição "Curitiba é bonita " por "p" e a proposição" A Capital do Paraná é bonita" por " q ", tem-se que $p \sim q$, mas disto forçosamente não se conclui que $p^§ \sim q^§$, pois eu posso crer p sem crer q, o que aconteceria, por exemplo, no caso de eu ignorar que a Capital do Paraná é Curitiba.

Para analizar algèbricamente a operação precedente, partiremos da álgebra de Boole $\langle B, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$, na qual se acha definido o perador §. O operador em aprêço pode ser caracterizado pelo sistema de postulados enumerados abaixo.

1) $p^{§§} \equiv p^§$

2) $(p \vee q)^§ \equiv p^§ \vee q^§$

3) $(p \wedge q)^§ \equiv p^§ \wedge q^§$

4) $p'^§ \leqslant p^{§}{'}$

5) $1^§ \equiv 1$

6) $0^§ \equiv 0$

Teorema 30. $(p \supset q)^§ \leqslant p^§ \supset q^§$.

Demonstração. $p \supset q$ é abreviação de $p' \vee q$. Logo, $(p \supset q)^§ = (p' \vee q)^§ \equiv p'^§ \vee q^§ \leqslant p^§{'} \vee q^§ = p^§ \supset q^§$.

Teorema 31. $p^{\S} \wedge (p \supset q)^{\S} \leqslant q^{\S}$.

Demonstração. $p^{\S} \wedge (p \supset q)^{\S} \leqslant p^{\S} \wedge (p^{\S} \supset q^{\S}) \leqslant q^{\S}$, pois tôda álgebra de Boole é um reticulado implicativo (definindo-se $p \supset q$ como abreviação de $p' \vee q$).

Teorema 32. $p^{\S} \vee p^{\S\prime} \equiv 1$.

Teorema 33. $(p \wedge q)^{\prime\S} \leqslant p^{\S\prime} \vee q^{\S\prime}$.

Demonstração. $(p \wedge q)^{\prime\S} \leqslant (p \wedge q)^{\S\prime} \equiv (p^{\S} \wedge q^{\S})' \equiv p^{\S\prime} \vee q^{\S\prime}$.

Teorema 34. $(p \vee q)^{\prime\S} \leqslant p^{\S\prime} \wedge q^{\S\prime}$.

Teorema 35. $p \equiv q$ não acarreta $p^{\S} \equiv q^{\S}$.

Demonstração. Basta utilizar a álgebra de Boole do teorema 11 dêste capítulo, identificando os operadores § e $^{\Omega}$.

Outro sistema de postulados, análogo ao precedente e que também poderia ser empregado para definir implìcitamente uma das muitas acepções do operador " Eu creio p", é o seguinte:

I) $p^{\S\S} \equiv p^{\S}$

II) $(p \wedge q)^{\S} \equiv p^{\S} \wedge q^{\S}$

III) $(p \vee q)^{\S} \equiv p^{\S} \vee q^{\S}$

IV) $p^{\S\prime} \leqslant p^{\prime\S}$

V) $1^{\S} \equiv 1$

VI) $0^{\S} \equiv 0$

Evidentemente, as duas últimas estruturas estão ìntimamente correlacionadas com as estruturas topológicas.

Problema. Obter teoremas de representação para os dois últimos tipos de estrutura.

Observação. Seja $\langle B, \equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ uma álgebra de Boole, cujos elementos interpretaremos como constituindo proposições. Se $p \in B$,

$$Fp, Np \text{ e } Ip$$

representarão as proposições " p é possível", " p é necessária" e " p é impossível". Tais operadores são as modalidades fundamentais da lógica tradicional. Parece lícito supor que êsses operadores não são monótonos relativamente a $\equiv$. Na realidade, duas proposições podem ser materialmente equivalentes, sem que sejam ambas necessárias ou ambas possíveis, por exemplo. Desta maneira, os operadores não monótonos nos conduzem a uma nova maneira de encarar a lógica das modalidades. Pretendemos desenvolver êste tópico em publicações futuras.

x

APÊNDICE I.

Álgebras quantificacionais C_n^*.

Após a algebrização dos cálculos C_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, a etapa seguinte consiste em se algebrizar os cálculos quantificacionais C_n^* (ver [3] e [7]). Para isso, tendo-se em mente a algebrização do cálculo de predicados clássico, poder-se-iam tentar três vias: 1) álgebras cilíndricas (Tarski, Thompson e Henkin; cf. [19]) 2) álgebras poliádicas (Halmos [18]); 3) aneis hilbertianos e estruturas correlatas (Guillaume [17]).

As álgebras cilíndricas não se adaptam ao tratamento da questão que temos em vista. Afigura-se razoável, por conseguinte, acomodar a teoria das álgebras poliádicas ou a das estruturas hilbertianas às nossas necessidades.

No entanto, em Rosenbloom [20], pp.74-88, encontra-se uma formulação da teoria tradicional da quantificação que pode ser tida como versão algébrica do cálculo quantificacional. Há determinadas dificuldades na exposição de Rosenbloom, como, v.g., na definição de forma sentencial. Porém, fomos capazes de superá-las e obter uma algebrização interessante da quantificação clássica, que denominamos de álgebras de Rosenbloom. Uma das características dessas álgebras reside no modo fácil de se introduzir a igualdade e seus postulados, bem como a noção de têrmo (em especial, o conceito de descritor).

Pois bem, a adaptação das álgebras de Rosenbloom à nossa finalidade é quase imediata. Definem-se, então, as estruturas seguintes: álgebras quantificacionais C_n^* , álgebras quantificacionais com igualdade $C_n^=$ e álgebras com o operador de descrição (descritor) D_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

Seguindo-se êsse caminho, podemos algebrizar, inclusive, os sistemas da teoria dos conjuntos NF_n, $0 \leqslant n \leqslant \omega$.

APÊNDICE II.

Alguns problemas em aberto.

Cremos que o valor de uma tese não reside, ùnicamente, nas questões resolvidas nem na sistematização que encerra. Têm importância também, os problemas levantados, especialmente pelas pesquisas que assim se originam. Por isso, além dos problemas já mencionados, apresentamos mais os seguintes:

I- Estabelecer as relações existentes entre as álgebras de Rosenbloom e as álgebras poliádicas, cilíndricas e hilbertianas.

II- Obter teoremas de representação para as álgebras de Rosenbloom.

III- Nas álgebras de Rosenbloom, formular e demonstrar os teoremas básicos da teoria da quantificação, como as de Gödel e de Löwenheim -Skolem.

IV- Desenvolver uma teoria "semântica" das álgebras quantificacionais C_n^*, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

V- Verificar se as álgebras C_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, são ou não decidíveis.

VI- Desenvolver a teoria das modalidades do ponto de vista de nossa tese.

VII- Estudar as propriedades básicas da noção de sistema dedutivo nas álgebras $C_n^=$ e D_n, $1 \leqslant n < \omega$.

VIII- Nas álgebras de Rosenbloom, no fundo, são utilizados os combinadores da lógica combinatória. Seria possível, pois, uma versão algébrica satisfatória dêsses operadores?

IX - Investigar as estruturas livres ligadas às álgebras por nós definidas.

X- Adaptar as álgebras poliádicas e as estruturas análogas às álgebras hilvertianas à reformulação algébrica dos cálculos C_n^*, $C_n^=$ e D_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

É evidente que os problemas acima são muito amplos; mas também é claro que a resolução de qualquer um dêles constribuiria enormemente para o progresso da álgebra e da lógica.

Bibliografia

Arruda, A. I. e N.C. A da Costa

[1] Sur une hiérarchie de systèmes formels, C.R. Acad. Sc. Paris, 259, p. 2943 - 2945 (1 964)

Costa, N.C.A. da

[2] Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants, idem, 257, p 3790-3792 (1963)

[3] Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants, idem, 258, p 27-29 (1 964)

[4] Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants, idem, p. 1111-1113.

[5] Calculs de descriptions pour les systèmes formels inconsistants, idem, p. 1366-1368.

[6] Sur un système inconsistant de la théorie des ensembles, idem, p. 3144-3147

[7] Sur les systèmes formels C_i, C_i^*, $C_i^=$, D_i et NF_i, idem 260, p. 5427-5430, (1 965).

[8] Opérations non monotones em treillis, a aparecer em C.R. Acad. Sc. Paris.

[9] Non-monotone operations in lattices, Notices Am. Math. Soc., v. 12, nº 5, p. 601-602 (1 965)

[10] Sistemas Formais Inconsistentes. Tese apresentada em Concurso para a Cátedra da Cadeira de Análise Matemática e Análise Superior da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Federal do Paraná, 1 963.

[11] Situação Atual da Lógica Algébrica, publicação do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo, 1 966 (mimeografado)

[12] Operadores não monótonos em reticulados, idem, 1966 (mimeografado).

Costa, N.C.A. da e M.Guillaume

[13] *Sur les calculs C_n*, An. Acad. Brasil. de Ciências, v. 36, nº 4, p. 379-382 (1 964).

[14] *Négations composées et loi de Peirce dans les systèmes C_n*, a aparecer em Port. Math.

Curry, H.B.

[15] *Leçons de Logique Algébrique*. Gauthiers-Villars 1 952.

[16] *Foundations of Mathematical Logic*, MacGraw-Hill, 1 963.

Guillaume, M.

[17] *Sur les structures Hilbertiennes polyadiques*, C.R Acad.Sc. Paris, 258, p. 1957-1960 (1 964).

Halmos, P.R.

[18] *Algebraic Logic*. Chelsea, 1 962.

Henkin, L.

[19] *La Structure Algébrique des Théorèmes Mathématiques* Gauthiers -Villars, 1 956.

Rosenbloom, P.C.

[20] *The Elements of Mathematical Logic*. Dover, 1 950.

Sikorski, R.

[21] *Boolean Algebras*. Springer, 1960.