23601

Ao Lyra
com um grande abraço
do
Barros
S.P. 6/9/60.

JOSÉ BARROS NETO

ALGUNS TIPOS DE NÚCLEOS-DISTRIBUIÇÕES

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

RIO DE JANEIRO
1960

INTRODUÇÃO

O conceito de núcleo-distribuição foi introduzido por L. Schwartz em seu trabalho [12] (1). Aí são estudadas algumas propriedades dos núcleos e caracterizados os núcleos semi-regulares. A importância dos núcleos-distribuições reside no chamado teorema dos núcleos ([12], pg. 223, teorema II) o qual garante que, "na prática", tôdas as aplicações lineares e contínuas entre os espaços vetoriais topológicos usuais da Análise Funcional ([12], pg. 224), são definidas por um núcleo.

Na teoria das equações diferenciais parciais, intervém importantes exemplos de núcleos, entre os quais os núcleos inversos (ou elementares) de um operador diferencial parcial. Entre êsses têm especial interêsse os núcleos muito regulares e os analìticamente muito regulares. Assim é que, se um operador diferencial parcial possui um núcleo inverso muito regular (resp. analìticamente muito regular), êsse operador é hipoelítico (resp. hipoelítico analítico) ([11], tome I, 2e édit., pg. 143, teorema XII). No caso particular em que o operador diferencial tem coeficientes constantes, os núcleos inversos são, na realidade, núcleos de composição associados às soluções elementares ([11], tome I, 2e éd., pg. 136) do operador diferencial.

Nosso objetivo é estudar os núcleos distribuições analìticamente regulares e os núcleos de composição.

O presente trabalho se compõe de quatro partes. No Capítulo I, nº 1 e 2, fazemos uma rápida exposição de resultados

(1) Os números entre colchetes se referem à bibliografia.

conhecidos da teoria dos espaços vetoriais topológicos e dos produtos tensoriais topológicos que utilisaremos a seguir. Pretendemos com isso familiarizar o leitor com a nomenclatura e notações que utilizaremos. No nº 3, introduzimos a definição de núcleo-distribuição em uma variedade infinitamente derivável ou analítica, bem como damos algumas de suas propriedades mais interessantes. Nossa atenção está sobretudo voltada para os núcleos muito regulares que se caracterizam por serem regulares e infinitamente deriváveis no complementar da diagonal da variedade produto (cf. teorema 1).

A fim de estudarmos, no Capítulo III, os núcleos analiticamente muito regulares e procurarmos saber se, uma caracterização análoga à dos núcleos muito regulares é válida para aquêles, desenvolvemos, no Capítulo II, um estudo sistemático da noção de função analítica real com valores em um espaço vetorial topológico e de alguns espaços de funções analíticas vetoriais.

Não nos limitamos, porém, a demonstrar apenas os resultados que utilizaremos no Capítulo III; estabelecemos para os espaços de funções analíticas reais sôbre um produto de dois compactos de variedades analíticas reais, propriedades análogas, em termos dos produtos tensoriais topológicos, às que se demonstram para os espaços de funções infinitamente deriváveis sôbre um produto de duas variedades diferenciáveis e os de funções holomorfas sôbre um produto de duas variedades analíticas complexas (cf. Capítulo I, pg. 11).

No nº 1 introduzimos o conceito de série múltipla de potências em um espaço localmente convexo e estudamos algumas de suas propriedades, às quais servem de base para a definição de função analítica vetorial, no nº 2. O conceito de função escalarmente analítica se introduz, de modo natural, bem como a questão de se saber em que condições uma função escalarmente analítica é analítica, procedimento análogo ao caso infinitamente derivável.

No nº 3, estudamos o espaço vetorial das funções analíticas reais definidas numa parte compacta de R^n. A topologia adequada para êsse espaço é topologia limite indutivo, já considerada em [3] e [8] no caso de uma parte compacta do plano complexo. O teorema 5 estabelece a equivalência de duas possíveis definições da topologia de $\mathcal{A}(K)$, uma das quais será mais conveniente para demonstrarmos o teorema 8. O teorema 6 dá uma caracterização das partes limitadas de $\mathcal{A}(K)$. Se bem que resulte de um resultado mais geral de [5], pg. 268, teorema 1, julgamos conveniente demonstrá-lo por ser fundamental para as conclusões do Capítulo III.

No nº 4 demonstramos que o espaço $\mathcal{A}(K\times L)$ das funções analíticas sôbre o produto de dois compactos de R^n e R^m se identifica: ao espaço $\mathcal{A}(K,\mathcal{A}(L))$ das funções analíticas vetoriais definidas em K e com valores no espaço vetorial topológico $\mathcal{A}(L)$; a produto tensorial topológico $\mathcal{A}(K)\hat{\otimes}\mathcal{A}(L)$ e ao espaço $L_e(\mathcal{A}'(L),\mathcal{A}(K))$.

Utilizando a noção de complexificação de uma variedade analítica real é possível estender para o caso de variedades analíticas reais, os resultados dos números anteriores.

No Capítulo III, estudamos os núcleos analìticamente muito regulares definidos sôbre uma variedade analítica V.

Nossa definição difere da de Schwartz ([11] , tome I, 2e édit., pg. 140) que corresponde ao que denominamos núcleo anallticamente muito regular em y . Utilizando o conceito de transposto de um núcleo, definimos núcleo anallticamente muito regular em x .

O teorema 1 estabelece que os núcleos anallticamente muito regulares em y (resp. em x) são funções infinitamente deriváveis no complementar da diagonal de V×V . Como consequência, os núcleos anallticamente muito regulares são muito regulares.

Contràriamente ao que sucede com os núcleos muito regulares (cf. Capítulo I, teorema 1), um núcleo regular e função analítica no complementar da diagonal, não é necessàriamente um núcleo anallticamente muito regular. O corolário 2 do teorema 2 demonstra a analiticidade do núcleo desde que imponhamos sôbre êste uma condição suplementar. Um contra-exemplo mostra que não podemos prescindir dessa condição. O teorema 2, em si, afirma que, em condições bastante gerais, um núcleo é anallticamente muito regular em y (resp. em x). Êsse teorema e seu recíproco (teorema 3) utilizam na sua demonstração os resultados do capítulo anterior, sôbre funções analíticas vetoriais.

Como consequência imediata do teorema 3, decorre que os núcleos anallticamente muito regulares são, no complementar da diagonal, funções separadamente analíticas. O teorema 4 afirma, de modo mais preciso, que os núcleos anallticamente muito regulares são funções analíticas no complementar da diagonal. A demonstração utiliza um critério de analiticidade recentemente demonstrado por F.E. Browder [15] , dando resposta afirmativa a uma questão por nós formulada.

O Capítulo IV estuda os núcleos de composição. Êsses núcleos são determinados pelo produto de composição por uma distribuição fixa. Os resultados que obtemos afirmam que: 1) os núcleos de composição muito regulares (resp. analìticamente muito regulares) são funções infinitamente deriváveis (resp. analíticas) fora da diagonal e, 2) tais núcleos provém de distribuições infinitamente deriváveis (resp. analíticas) fora da origem. Tais resultados foram, inicialmente, obtidos em R^n. Consideramos aqui, o caso mais geral de um grupo de Lie, onde é possível definir o produto de composição de distribuições (em particular, de funções). Surgem pequenas dificuldades pelo fato de perdermos a comutatividade do produto de composição no caso de grupos não comutativos. Além disso, se, em R^n, para derivarmos um produto de composição, podemos indistintamente derivar um ou outro fator, o mesmo não ocorre num grupo de Lie; aqui, os operadores diferenciais invariantes à esquerda (resp. à direita) operam a direita (resp. à esquerda), (cf. teoremas 3 e 4).

Inicialmente definimos produto de composição em um grupo de Lie e estabelecemos algumas de suas propriedades bem conhecidas. Os lemas 1 e 2 estabelecem de que maneira campos de vetores invariantes à esquerda (resp. à direita) operam à esquerda (resp. à direita) num produto de composição, expressões que utilizaremos no teorema 13.

No nº 4, damos algumas caracterizações simples dos núcleos de composição, utilizando resultados do nº 2, notadamente os teoremas 5 e 6.

A fim de estabelecer os teoremas 12 e 13, desenvolvemos no nº 3, algumas propriedades especiais relativas ao suporte do produto de composição e ao comportamento do mesmo num aberto, quando uma das distribuições tem suporte compacto e a outra toma valores num conveniente aberto (teorema 8). São os teoremas 12 e 13 que estabelecem a caracterização acima mencionada para os núcleos de composição muito regulares e analìticamente muito regulares.

Acreditamos que êste trabalho pode servir de ponto de partida para o estudo de categorias mais gerais de núcleos ligados a operadores diferenciais parciais (cf. [15]), assunto que pretendemos examinar pròximamente.

Finalizando, desejamos expressar ao Prof. Leopoldo Nachbin os nossos mais sinceros agradecimentos pelo estímulo e apôio que nos tem dado em diversas ocasiões. Foi por sua sugestão que nos encontramos estagiando no IMPA, onde temos trabalhado com o Prof. Nachbin em proveitosa colaboração. Inúmeras vêzes tivemos a oportunidade de expor e discutir os assuntos aqui tratados, recebendo em troca valiosas sugestões.

Agradecemos ao Prof. F.E. Browder que leu o manuscrito com especial interêsse, contribuindo com suas observações para melhorar vários pontos e completar outros dêste trabalho.

Ao Prof. Cândido Lima da Silva Dias, que sempre nos incentivou, nossos agradecimentos; foi por sua sugestão que lemos o "Théorie des Noyaux" de L. Schwartz, ponto de partida para nosso trabalho.

Agradecemos ainda ao Conselho Nacional de Pesquisas que nos concedeu uma bôlsa de Chefe de Pesquisas e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada, na pessoa de seu Diretor, o Prof. Lélio I. Gama que, com sua boa vontade e apôio, muito contribuiu para nossa permanência no Instituto. Ao Prof. Gama devemos a publicação dêste trabalho.

Ao Prof. Luiz Arthaud Berthet, com quem trabalhos na Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da U.S.P. e que tem sempre possibilitado a seus auxiliares as melhores condições para seus trabalhos científicos, nosso reconhecimento. Graças a sua compreensão e apôio, pudemos nos beneficiar de um estágio no exterior e, do atual, no IMPA.

Finalmente, nossos agradecimentos aos Srs. Wilson Góes e Manoel Cavalheiro pelos cuidadosos trabalhos de datilografia e impressão.

José Barros Neto

Rio de Janeiro, Julho de 1960.

ÍNDICE

Cap. I - Preliminares sôbre espaços vetoriais topológicos; Produtos tensoriais topológicos e núcleos distribuições 1

1 - Espaços vetoriais topológicos: notação e terminologia.... 1

2 - Produtos tensoriais topológicos 6

3 - Núcleos distribuições 12

Cap. II - Alguns espaços de funções analíticas 18

1 - Séries múltiplas de potências em um espaço localmente convexo 18

2 - Funções analíticas vetoriais 23

3 - O espaço vetorial topológico das funções analíticas reais definidas em um compacto 27

4 - O espaço das funções analíticas reais no produto de dois compactos 34

5 - O espaço das funções analíticas sôbre uma variedade analítica real 42

Cap.III - Núcleos analìticamente muito regulares 46

Cap. IV - Núcleos de composição em grupos de Lie 59

1 - O produto de composição em um grupo de Lie 59

2 - Transformações lineares que comutam com o produto de composição 69

3 - Suporte do produto de composição: propriedades 74

4 - Núcleos de composição 76

5 - Núcleos de composição muito regulares e analìticamente muito regulares 82

Bibliografia 96

CAPÍTULO I

PRELIMINARES SÔBRE ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS; PRODUTOS TENSORIAIS TOPOLÓGICOS E NUCLEOS DISTRIBUIÇÕES

1. Espaços vetoriais topológicos: notação e terminologia.

Seja E um espaço vetorial topológico; o corpo dos escalares será, invariàvelmente, R ou C.

Uma parte A de E se denomina equilibrada se $\lambda A \subset A$, para todo escalar λ tal que $|\lambda| \leqslant 1$.

Diremos que A absorve B se existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que para todo escalar λ tal que $|\lambda| < \varepsilon$, tenhamos $\lambda B \subset A$. A parte A se diz absorvente se absorve todo $x \in E$.

Uma parte A de E é limitada se tôda vizinhança do zero em E absorve A.

Diremos que A é un conjunto convexo se, quaisquer que sejam $x, y \in A$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$, para todo λ tal que $0 < \lambda < 1$.

Chama-se envoltória convexa, equilibrada de A, que indicaremos por $\Gamma(A)$, o menor conjunto convexo e equilibrado que contem A. $\Gamma(A)$ é o conjunto das somas finitas $\sum \lambda_i x_i$, onde os $x_i \in A$ e os λ_i são escalares tais que $\sum |\lambda_i| \leqslant 1$.

Um espaço vetorial topológico E se denomina localmente convexo se a topologia de E admite um sistema fundamental de vizinhanças de zero, formado por conjuntos <u>convexos</u>, <u>equilibrados</u> e <u>absorventes</u>. A topologia de um espaço localmente convexo pode ser sempre definida por uma família de seminormas.

Os espaços que consideraremos, no presente trabalho, serão sempre espaços localmente convexos, separados.

Indicaremos por E' o dual de E : espaço das formas lineares contínuas sôbre E.

Seja A uma parte de E ; chama-se <u>polar</u> de E, o conjunto dos elementos $x' \in E'$ tais que

$$|\langle x, x'\rangle| \leqslant 1 \quad , \text{ para todo } x \in A .$$

Indicaremos por A^o o polar de A. Definição análoga para uma parte de E'.

Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes <u>limitadas</u> de E ; a topologia da $\mathfrak{S}$-convergência em E' é compatível com a estrutura de espaço vetorial de E'. Um sistema fundamental de vizinhanças do zero nessa topologia se obtém tomando as intersecções finitas de homotetias não nulas dos polares dos elementos de E.

Quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto das partes <u>finitas</u> de E (resp. de E') a topologia da $\mathfrak{S}$-convergência em E' (resp. E) se denomina <u>topologia fraca</u> de E' (resp. E). Indicaremos essa topologia por $s(E',E)$ (resp. $s(E,E')$) e por E_s (resp. E'_s) o espaço E (resp. E') munido da topologia fraca.

Quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto de tôdas as partes <u>limitadas</u> de E a topologia da $\mathfrak{S}$-convergência em E' se denomina <u>topologia forte</u> de E'.

O espaço localmente convexo E se denomina <u>reflexivo</u>

O problema de se saber se E é separado quando os espaços E_i são separados ou se E é completo quando os espaços E_i são completos, apresenta sempre dificuldades. Da mesma maneira, saber se tôda parte limitada de E está contida e é limitada em um conveniente E_i.

Denominamos espaço $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ <u>generalizado</u> todo espaço localmente convexo e separado E que é limite indutivo de uma sequência (E_i) de espaços $(\mathcal{F})$ pelas aplicações lineares u_i.

A observação feita acima nos mostra que podemos supor que (E_i) é uma sequência crescente de sub-espaços de E, munidos de suas topologias de espaço $(\mathcal{F})$, tais que a aplicação idêntica de E_i em E_{i+1} é contínua e E é reunião dos sub-espaços E_i.

Os espaços $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ considerados em ([4]) correspondem ao caso particular em que a topologia induzida por E_{i+1} em E_i <u>coincide</u> com a topologia de E_i.

Para êstes espaços demonstra-se que E induz em cada E_i uma topologia que coincide com a topologia de E_i; se os E_i são completos, E é completo; tôda parte limitada de E está contida e é limitada num conveniente E_i.

Estas conclusões nem sempre são válidas para os espaços $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ generalizados. No capítulo II, consideraremos um caso bem conhecido de espaço $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ generalizado em que as duas últimas conclusões se verificam.

2. Produtos tensoriais topológicos.

Se E e F são dois espaços localmente convexos e separados, no produto tensorial $E \otimes F$ dêsses espaços é possível definir várias topologias localmente convexas, distintas, compatíveis com a estrutura de espaço vetorial. Apenas duas terão interesse para nós, a topologia π e a topologia ε cujas definições e principais propriedades daremos, sucintamente, a seguir. Para maiores detalhes consultar [6] ou [10].

Existe uma única topologia localmente convexa, separada, sôbre $E \otimes F$ tal que para todo espaço localmente convexo G, o espaço das aplicações lineares contínuas de $E \otimes F$ em G se identifica ao espaço das aplicações bilineares contínuas de $E \times F$ em G. Nesta identificação, as partes equicontínuas de $L(E \otimes F, G)$ e de $B(E \otimes F, G)$ se correspondem.

Em particular, o dual de $E \otimes F$ se identifica ao espaço das formas bilineares contínuas sôbre $E \times F$.

Indicaremos por π essa topologia (denominada topologia produto tensorial projetiva) e por $E \otimes_{\pi} F$ o espaço $E \otimes F$ munido dessa topologia.

Um sistema fundamental de vizinhanças do zero na topologia π é constituido pelos conjuntos $\Gamma(U \otimes V)$, envoltória convexa, equilibrada, dos conjuntos $U \otimes V$, quando U (resp. V) percorre um sistema fundamental de vizinhanças do zero em E (resp. F).

A topologia π é a mais fina das topologias localmente convexas sôbre $E \otimes F$ que tornam contínua a aplicação bilinear canônica $(x,y) \longrightarrow x \otimes y$ de $E \times F$ em $E \otimes F$.

$E\hat{\otimes}_{\pi}F$ indica o completado de $E\otimes_{\pi}F$; temos $(E\hat{\otimes}_{\pi}F)'=B(E\times F)$.

Vamos indicar por $\mathcal{B}(E'_s,F'_s)$ o espaço das formas bilineares separadamente contínuas sôbre $E'_s\times F'_s$. Êsse espaço vetorial se identifica algèbricamente a $L(F'_s,E_s)$, espaço das aplicações lineares contínuas de F'_s em E_s , o qual se identifica, òbviamente, a $L(E'_s,F_s)$.

Indicaremos por E_t (resp. E'_t) o espaço E (resp. E') munido da topologia de Mackey $t(E,E')$ (resp. $t(E',E)$) : topologia da convergência uniforme sôbre as partes convexas, equilibradas, fracamente compactas de E' (resp. E).

É conhecido que $L(F'_s,E_s)$ se identifica a $L(F'_t,E)$, espaço das aplicações lineares contínuas de F'_t em E munido de sua topologia ([5], pg. 151, corol. 2).

Temos então as identificações algébricas:

$$\mathcal{B}(E'_s,F'_s) = L(F'_s,E_s) = L(F'_t,E) .$$

Além disso, se $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$ indica o espaço das formas bilineares separadamente contínuas sôbre $E'_s\times F'_s$, munido da topologia da convergência uniforme sôbre os produtos de partes equicontínuas de E' por partes equicontínuas de F' e se $L_e(F'_t,E)$ representa o espaço das aplicações lineares contínuas de F'_t em E munido da topologia da convergência uniforme sôbre as partes equicontínuas de F' , valem as identificações algébrico-topológicas:

$$\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s) = L_e(F'_t,E) = L_e(E'_t,F) .$$

O produto tensorial $E\otimes F$ é um sub-espaço de $\mathcal{B}(E'_s,F'_s)$:

todo elemento $\sum_{i=1}^{p} x_i \otimes y_i$ de $E \otimes F$ define a forma bilinear separadamente contínua sôbre $E'_s \times F'_s$:

$$(x', y') \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \langle x', x_i \rangle \langle y', y_i \rangle$$

e a aplicação de $E \otimes F$ em $\mathcal{L}(E'_s, F'_s)$ é biunívoca pois a dualidade entre $E \otimes F$ e $E' \otimes F'$ é separante ([6] , Cap.I, pg.30, lema 1).

O espaço $E \otimes F$ munido da topologia induzida por $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ será indicado por $E \otimes_\varepsilon F$; seu completado por $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$. Quando E e F são completos, $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ é completo e, portanto, $E \otimes_\varepsilon F$ é um sub-espaço de $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$.

Pode-se verificar que a aplicação bilinear canônica $(x, y) \longrightarrow x \otimes y$ de $E \times F$ em $E \otimes_\varepsilon F$ é contínua, donde se segue que em $E \otimes F$ a topologia ε é menos fina que a topologia π . Em geral, essas topologias não coincidem.

Um espaço localmente convexo e separado E se denomina nuclear se, para todo espaço localmente convexo e separado F , $E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$.

São numerosos os exemplos de espaços nucleares, entre os quais citaremos os seguintes:

a) Seja V uma variedade infinitamente derivável (resp. analítica real), conexa e paracompacta. Seja $\mathcal{E}(V)$ o espaço das funções infinitamente deriváveis em V , munido da topologia da convergência uniforme sôbre todo compacto, da função e de tôdas as suas derivadas. Seja $\mathcal{D}(V)$ o sub-espaço de $\mathcal{E}(V)$ formado pelas funções de suporte compacto e, se K é um compacto de V , seja $\mathcal{D}_K(V)$ o sub-espaço de $\mathcal{E}(V)$ das funções de suporte compacto con tido em K. Muniremos $\mathcal{D}_K(V)$ da topologia induzida pela topologia de $\mathcal{E}(V)$ e $\mathcal{D}(V)$ da topologia limite indutivo das topologias $\mathcal{D}_K(V)$ quando K percorre todos os conjuntos compactos de V.

Seja $\mathcal{D}'(V)$, dual de $\mathcal{D}(V)$, o espaço das distribuições sôbre V e $\mathcal{E}'(V)$, dual de $\mathcal{E}(V)$, o sub-espaço de $\mathcal{D}'(V)$ formado pelas distribuições de suporte compacto. Suporemos $\mathcal{D}'(V)$ e $\mathcal{E}'(V)$ munidos de suas topologias fortes.

Os espaços $\mathcal{D}(V)$, $\mathcal{E}(V)$, $\mathcal{E}'(V)$, $\mathcal{D}'(V)$ são nucleares ([6], Cap. 2, §2, nº 3, teor. 10).

b) Sejam V uma variedade analítica complexa, conexa e paracompacta e $\mathcal{H}(V)$ o espaço das funções analíticas complexas sôbre V, munido da topologia da convergência compacta. O espaço $\mathcal{H}(V)$ é nuclear ([6], cap.2, §2, nº 3, teor. 10, corolário).

Se E é um espaço localmente convexo, separado, vamos indicar por E'_c o dual de E munido da topologia da convergência uniforme sôbre as partes convexas e compactas de E. Essa topologia é mais fina que a topologia fraca de E' e menos fina que a topologia de Mackey, logo o dual de E'_c é E.

O espaço $L(F'_c,E)$ das aplicações lineares contínuas de F'_c em E se identifica ao sub-espaço de $L(F'_s,E_s)$ (e portanto de $L(F'_t,E)$) constituido pelas aplicações que transformam as partes equicontínuas de F' em partes relativamente compactas de E ([10], exposé 8, prop. 4).

É fácil verificar que $E \otimes F$ é um sub-espaço de $L(F'_c,E)$ isto decorre de que os elementos de $E \otimes F$ se identificam às aplicações lineares contínuas de F'_s em E_s de posto finito; assim sendo $E \otimes_\varepsilon F$ é um sub-espaço vetorial topológico de $L_e(F'_c, E)$.

Se E e F são completos, $L_e(F'_c, E)$ é completo ([10], esposé 8, prop. 5) e, portanto $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ é um sub-espaço vetorial topológico de $L_e(F'_c, E)$. Para que $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ coincida com $L_e(F'_c, E)$ é necessário e suficiente que $E \otimes F$ seja denso em $L_e(F'_c, E)$.

Diz-se que um espaço localmente convexo e separado E verifica a propriedade de aproximação se o sub-espaço $E \otimes E'$ de $L(E,E)$ formado pelas aplicações de posto finito de E em E é denso em $L(E,E)$ munido da topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas e convexas de E.

O espaço E verifica a propriedade de aproximação se e somente se, para todo espaço localmente convexo F, $E \otimes F$ é denso em $L_e(F'_c, E)$ ([10], exposé 14, teor. 2). Se E e F são completos e se E verifica a propriedade de aproximação, em virtude do que mencionamos acima, vale a identificação $E \hat{\otimes}_\varepsilon F = L_e(F'_c, E)$.

A maioria dos espaços estudados na Análise Funcional verificam a propriedade de aproximação; para alguns dêles não se sabe demonstrar se é verdadeira ou não; não se conhecem exemplos de espaços que não verifiquem a propriedade de aproximação.

Os espaços: $L^p(X, \mu)$ $1 \leq p \leq \infty$ onde X é localmente compacto e μ uma medida ≥ 0 sôbre X; $C(K)$ espaço das funções contínuas sôbre K munido da topologia uniforme, seu dual $C'(X)$; os espaços $\mathcal{D}(V)$, $\mathcal{E}(V)$, $\mathcal{E}'(V)$ e $\mathcal{D}'(V)$; o espaço $\mathcal{H}(V)$; os espaços nucleares; verificam a propriedade de aproximação.

Voltando aos exemplos a) e b) acima, obtemos os seguintes resultados: se E é um espaço localmente convexo, separado e completo, seja $\mathcal{E}(V,E)$ o espaço das funções infinitamente deriváveis definidas em V e com valores em E (funções vetoriais infinitamente deriváveis), munido da topologia da convergência uniforme sôbre compactos da função e tôdas as suas derivadas. Êsse espaço se identifica a $\mathcal{E}(V)\hat{\otimes}_\pi E$ ([6], chap. II, pg. 81, exemplo 1). Como $\mathcal{E}(V)$ é nuclear e verifica a propriedade de aproximação, temos as identificações:

$$\mathcal{E}(V,E) = \mathcal{E}(V)\hat{\otimes} E = L_e(E'_c, \mathcal{E}(V))$$

(não há necessidade de se explicitar qual a topologia sôbre o produto tensorial pois a $\mathcal{E}$ e a π coincidem).

Em particular, se $E = \mathcal{E}(W)$, como $\mathcal{E}(V\times W)$ munido de sua topologia usual se identifica algébrica e topologicamente a $\mathcal{E}(V, \mathcal{E}(W))$, temos:

$$\mathcal{E}(V\times W) = \mathcal{E}(V, \mathcal{E}(W)) = \mathcal{E}(V)\hat{\otimes}\mathcal{E}(W) = L_e(\mathcal{E}'(W), \mathcal{E}(V)) .$$

(Em $\mathcal{E}'(W)$ as topologias forte e da convergência uniforme sôbre as partes convexas e compactas de $\mathcal{E}(W)$ coincidem pois $\mathcal{E}(W)$ é um espaço de Montel).

Os mesmos resultados valem para o espaço $\mathcal{H}(V,E)$ das funções analíticas complexas com valores vetoriais, munido da topologia da convergência compacta. Teremos:

$$\mathcal{H}(V,E) = \mathcal{H}(V)\hat{\otimes} E = L_e(E'_c, \mathcal{H}(V))$$

e também:

$$\mathcal{H}(V\times W) = \mathcal{H}(V, \mathcal{H}(W)) = \mathcal{H}(V)\hat{\otimes}\mathcal{H}(W) = L_e(\mathcal{H}'(W), \mathcal{H}(V)) .$$

3. <u>Núcleos distribuições.</u>

Seja V (resp. W) uma variedade infinitamente derivável, conexa, paracompacta e orientada, de dimensão n (resp. m). $\mathcal{E}(V \times W)$ (resp. $\mathcal{D}(V \times W)$) representa, como no número anterior, o espaço das funções infinitamente deriváveis (resp. infinitamente deriváveis e com suporte compacto) em $V \times W$. Consideraremos êsses espaços munidos de suas topologias usuais. $\mathcal{D}'(V \times W)$ (resp. $\mathcal{E}'(V \times W)$) representa o espaço das distribuições (resp. das distribuições de suporte compacto) sôbre $V \times W$. Ambos êsses espaços, suporemos munidos da topologia forte.

<u>Definição 1</u> - Os elementos de $\mathcal{D}'(V \times W)$ serão denominados <u>núcleos-distribuições</u> ou, abreviadamente, <u>núcleos</u> sôbre $V \times W$.

Os núcleos serão, usualmente, indicados com as notações $K_{x,y}$, $L_{x,y}$, $T_{x,y}$ etc., x representa a variável em V, e y em W. Se $f(x,y) \in \mathcal{D}(V \times W)$ e $K_{x,y} \in \mathcal{D}'(V \times W)$, o produto escalar dêsses dois elementos será indicado por

$$< K_{x,y} , f(x,y) >$$

ou, simplesmente, $K(f)$.

Dado um núcleo $K_{x,y} \in \mathcal{D}'(V \times W)$ a êle correspondem:

1) Uma aplicação linear contínua L_K de $\mathcal{D}(W)$ em $\mathcal{D}'(V)$ definida por:

$$< L_K(g), f > \;=\; < K_{x,y} , f(x) \otimes g(y) > ,$$

quaisquer que sejam $f \in \mathcal{D}(V)$ e $g \in \mathcal{D}(W)$.

2) Uma aplicação linear contínua ${}^tL_K$ de $\mathcal{D}(V)$ em $\mathcal{D}'(W)$

(transposta da anterior), definida por:

$$< {}^tL_K(f), g > = < K_{x,y} , f(x) \otimes g(y) > ,$$

quaisquer que sejam $f \in \mathcal{D}(V)$ e $g \in \mathcal{D}(W)$.

Conforme mencionamos no número anterior, o espaço $\mathcal{D}'(V)$ é nuclear e, sendo completo, temos

$$\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W) = L_e(\mathcal{D}(W), \mathcal{D}'(V)) .$$

A aplicação linear L_K é, pois, um elemento dêsse produto tensorial topológico.

Fica assim definida uma aplicação linear:

$$K \in \mathcal{D}'(V \times W) \longrightarrow L_K \in \mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W) ,$$

a qual é biunívoca: se

$$< K_{x,y} , f(x) \otimes g(y) > = 0$$

quaisquer que sejam $f \in \mathcal{D}(V)$ e $g \in \mathcal{D}(W)$ então $K_{x,y}$ é nulo, pois o produto tensorial <u>algébrico</u> $\mathcal{D}(V) \otimes \mathcal{D}(W)$ é denso em $\mathcal{D}(V \times W)$. Logo $\mathcal{D}'(V \times W)$ se identifica a um sub-espaço de $\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W)$.

O importante teorema dos núcleos de L. Schwartz ([12]) afirma que tôda aplicação linear e contínua de $\mathcal{D}(W)$ em $\mathcal{D}'(V)$ provém de um único núcleo.

Em outras palavras: $\mathcal{D}'(V \times W)$ se idenfica <u>algébrica</u> e <u>topològicamente</u> a $\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W)$.

O interesse da teoria dos núcleos-distribuições se prende ao estudo de importantes categorias de núcleos que constituem sub-espaços vetoriais de $\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W)$. Mencionaremos aqui, sòmente aquêles que se relacionam com o presente trabalho, um estudo mais completo podendo ser encontrado em ([12]).

<u>Definição 2</u> - O núcleo $K_{x,y}$ se denomina <u>semi-regular em y</u> se a aplicação $L_K : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \mathcal{D}'(V)$ se prolonga a uma aplicação linear contínua de $\mathcal{E}'(W)$ em $\mathcal{D}'(V)$.

Isto significa que $K_{x,y}$ (ou L_K) é um elemento de $\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(W)$; recìprocamente, todo elemento desse espaço define um núcleo semi-regular em y. Portanto, $\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(W)$ é o espaço dos núcleos semi-regulares em y.

<u>Definição 3</u> - O núcleo $K_{x,y}$ se denomina <u>semi-regular em x</u> se $L_K : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \mathcal{D}'(V)$ aplica $\mathcal{D}(W)$ em $\mathcal{E}(V)$.

Resulta, em virtude do teorema do gráfico fechado ([5], pg. 271, teor. 2), que L_K é uma aplicação <u>contínua</u> de $\mathcal{D}(W)$ em $\mathcal{E}(V)$, pois L_K sendo uma aplicação contínua de $\mathcal{D}(W)$ em $\mathcal{D}'(V)$, seu gráfico é um conjunto fechado de $\mathcal{D}(W) \times \mathcal{D}'(V)$ e, portanto, fechado em $\mathcal{D}(W) \times \mathcal{E}(V)$.

Isto significa que $K_{x,y}$ (ou L_K) é elemento de $\mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W)$ e recìprocamente. Donde $\mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W)$ é o espaço dos núcleos semi-regulares em x.

<u>Definição 4</u> - O núcleo $K_{x,y}$ se denomina <u>regular</u> se é semi-regular em x e em y.

O espaço dos núcleos regulares é, òbviamente, formado pela intersecção dos espaços $\mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(W)$ e $\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(W)$. Está claro que essa intersecção contém o espaço $\mathcal{E}(V \times W) = \mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(W)$ mas é, em geral, distinta dêste.

Para as considerações que se seguem, devemos nos restringir ao caso em que $V = W$; continuaremos a designar por (x,y)

os elementos da variedade produto e conservaremos as mesmas notações para os núcleos.

Definição 5 - O núcleo $K_{x,y}$ se denomina muito regular se:

1) $K_{x,y}$ é semi-regular em y ;

2) qualquer que seja $T \varepsilon \mathcal{E}'(V)$, $L_K(T)$ é uma função infinitamente derivável em todo aberto de V onde T é função infinitamente derivável.

O teorema que daremos a seguir, é conhecido [7] , pg. 250 e [11] , 2ª edition, pg. 139. Julgamos conveniente dar aqui sua demonstração, tendo em vista o caso análogo que estudaremos no capítulo seguinte.

Teorema 1 - Uma condição necessária e suficiente para que o núcleo $K_{x,y}$ seja muito regular é que seja regular e, no complementar da diagonal de $V \times V$, seja uma função infinitamente derivável.

Suponhamos $K_{x,y}$ muito regular e L_K a aplicação de $\mathcal{D}(V)$ em $\mathcal{D}'(V)$ que êsse núcleo define. Em virtude da condição 2) da definição 5, L_K aplica $\mathcal{D}(V)$ em $\mathcal{E}(V)$ logo $K_{x,y}$ é semi-regular em x ; como por hipótese é semi-regular em y , segue-se que $K_{x,y}$ é regular.

Sejam A e B dois conjuntos abertos e disjuntos em V . Se $T \varepsilon \mathcal{E}'(B)$, T se prolonga a uma distribuição de suporte compacto definida em V , tomando-a identicamente nula no complementar de B . Continuando a indicar com T a prolongada, em virtude da condição 2) da definição 5 e de que T é nula em A ,

$L_K(T)$ é uma função infinitamente derivável em A. Fica assim definida uma aplicação linear de $\mathcal{E}'(B)$ em $\mathcal{E}(A)$ que é contínua pelo teorema do gráfico fechado ([5], pg. 271, teor. 2). Concluímos que L_K é um elemento de $L_e(\mathcal{E}'(B), \mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(A) \hat{\otimes} \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(A \times B)$ e, portanto, que a restrição de $K_{x,y}$ a $A \times B$ é uma função infinitamente derivável. Como A e B são abertos quaisquer, porém disjuntos, segue-se que $K_{x,y}$ é, no complementar da diagonal de $V \times V$, uma função infinitamente derivável.

Recìprocamente, se as condições do teorema estão verificadas, a condição 1) da definição 5 está, automàticamente, satisfeita. Basta, pois, verificar 2).

Seja $T \in \mathcal{E}'(V)$ e suponhamos $T \notin \mathcal{D}(V)$, pois se $T = f \in \mathcal{D}(V)$, $L_K(f) \in \mathcal{E}(V)$ visto que $K_{x,y}$ é regular. Seja O o maior aberto onde T é uma função infinitamente derivável. O contém, pelo menos, o complementar do suporte de T. Seja k o complementar de O; k é compacto e não vazio, pois $T \notin \mathcal{D}(V)$; k é o conjunto das singularidades de T.

Sejam x um elemento qualquer de O; A e B dois abertos relativamente compactos, disjuntos, tais que $A \supset k$ e $B \ni x$ e α uma função infinitamente derivável de suporte compacto contido em A, igual a 1 numa vizinhança de k. Podemos escrever:

$$T = \alpha T + (1 - \alpha)T .$$

A distribuição αT tem suporte compacto contido em A, logo é nula em B. Como, por hipótese, $K_{x,y} \in \mathcal{E}(A \times B)$ então $L_K(\alpha T) \in \mathcal{E}(B)$. Por outro lado, $(1 - \alpha)T$ sendo nula em k é uma função infinitamente derivável e de suporte compacto. Como, por hipótese, $K_{x,y}$ é regular, $L_K((1-\alpha)T)$ é infinitamente derivável em V, em particular em B. Concluimos que

$$L_K(T) = L_K(\alpha T) + L_K((1-\alpha)T)$$

é uma função infinitamente derivável em x, elemento arbitrário de O, logo em O, c.q.d.

CAPÍTULO II

ALGUNS ESPAÇOS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS

1. Séries múltiplas de potências em um espaço localmente convexo.

Em todo êste capítulo indicaremos por:

x (resp. z) uma n-upla de números reais (resp. complexos), $(x_1,\ldots,x_n)$ (resp. $(z_1,\ldots,z_n)$) ;

$|x|$ (resp. $|z|$) a norma $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ (resp. $(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}$;

p uma n-upla de números inteiros, não negativos, $(p_1,\ldots,p_n)$; $|p|$ será a soma $p_1 + \ldots + p_n$; $p! = p_1!\ldots p_n!$.

x^p (resp. z^p) o produto $x_1^{p_1}\ldots x_n^{p_n}$ (resp. $z_1^{p_1}\ldots z_n^{p_n}$) .

Se $r = (r_1,\ldots,r_n)$ é uma n-upla de números reais com $r_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, denomina-se <u>hiperparelelepípedo</u> (resp. <u>policilindro</u>) <u>aberto</u> de centro x_0 (resp. z_0), o conjunto dos $x \in R^n$ (resp. $z \in C^n$) definido pelas condições

$$|x_i - x_{oi}| < r_i \qquad (\text{resp. } |z_i - z_{oi}| < r_i) ,$$

$1 \leqslant i \leqslant n$.

Sempre que não houver ambiguidade, representaremos por

$$|x - x_0| < r \qquad (\text{resp. } |z - z_0| < r)$$

o hiperparalelepípedo (resp. policilindro) aberto de centro x_0 (resp. z_0).

Nas considerações que se seguem vamos nos limitar, por comodidade, ao caso x variável real; todos os resultados serão válidos no caso z variável complexa.

<u>Definição 1</u> - Sejam E um espaço localmente convexo, separado; (a_p), $p = (p_1,\ldots,p_n)$, p_i inteiros ≥ 0, uma sequência de elementos de E e $x = (x_1,\ldots,x_n)$ um elemento de R^n. A sequência $(a_p\, x^p)$ de elementos de E se denomina <u>série múltipla de potências a n variáveis reais com coeficientes</u> a_p.

<u>Definição 2</u> - Diremos que a série $(a_p\, x^p)$ é <u>somável no ponto</u> x_o e sua <u>soma</u> é s se, para toda vizinhança V da origem em E, existir um inteiro $N_o > 0$ tal que para todo inteiro $N \geq N_o$, tenhamos:

$$s - s_N \in V$$

onde $s_N = \sum_{|p| \leq N} a_p\, x_o^p$.

A série $(a_p\, x^p)$ se diz <u>somável em</u> $I \subset R^n$ se for somável em todo ponto $x \in I$.

A série $(a_p\, x^p)$ é <u>uniformemente somável</u> em I e sua soma é $s(x)$ se, para toda vizinhança V da origem em E, exis tir um inteiro $N_o > 0$ tal que para $N \geq N_o$, tenhamos:

$$s(x) - s_N(x) \in V,$$

qualquer que seja $x \in I$, onde $s_N(x) = \sum_{|p| \leq N} a_p\, x^p$.

Quando $(a_p\, x^p)$ for somável, indicaremos sua soma com uma das seguintes notações:

$$\sum_p a_p\, x^p \quad \text{ou} \quad \sum_{(p_1,\ldots,p_n)} a_{p_1\ldots p_n}\, x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}.$$

Teorema 1 - Seja E um espaço localmente convexo e separado. A série $(a_p\, x^p)$ é somável no ponto x_0 (resp. uniformemente somável em I) se e sòmente se para tôda semi-norma contínua γ definida em E, a série for somável no ponto x_0 (resp. uniformemente somável em I) no espaço E munido da topologia definida pela semi-norma γ.

Com efeito, o teorema resulta das duas observações seguintes: se γ é uma semi-norma contínua definida em E, todo conjunto

$$\{x \in E : \gamma(x) < \varepsilon\}$$

que é vizinhança do zero em E na topologia definida pela semi-norma é vizinhança do zero na topologia de E. Sendo E um espaço localmente convexo, sua topologia pode ser definida por uma família $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ de semi-normas contínuas e as vizinhanças do zero em E são conjuntos do tipo

$$\{x \in E : p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon \; , \; 1 \leqslant i \leqslant k\} .$$

No caso de séries numéricas de potências é sabido que a existência de uma n-upla $r = (r_1, \ldots, r_n)$ de números reais positivos e de uma constante $M > 0$, tais que

$$|a_p\, r^p| \leqslant M$$

acarreta que a série $(a_p\, x^p)$ é absolutamente convergente no hiperparalelepípedo $|x_i| < r_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ e uniformemente convergente em todo fechado contido nêsse hiperparalelepípedo.

O análogo dêste caso num espaço localmente convexo E é dado pelo teorema que se segue.

Teorema 2 - Seja $(a_p\ x^p)$ uma série de potências a n-variáveis reais e suponhamos que existam um n-upla $r = (r_1,\ldots,r_n)$ de números reais $r_i > 0$ e uma parte A de E convexa, equilibrada, limitada e completa tal que $a_p r^p \in A$ qualquer que seja o índice p. Nessas condições a série de potências $(a_p\ x^p)$ é absolutamente somável no espaço de Banach E_A, no hiperparalelepípedo $|x| < r$ e uniformemente em todo fechado contido nêsse hiperparalelepípedo. A fortiori, a série será uniformemente somável em E, em todo fechado contido em $|x| < r$.

Com efeito, seja $x = (x_1,\ldots,x_n)$ uma n-upla de números reais, tal que $|x_i| < r_i$ para todo $i=1,\ldots,n$.

Temos:

$$a_p\ x^p = a_{p_1\ldots p_n} r_1^{p_1}\ldots r_n^{p_n} (x_1/r_1)^{p_1}\ldots(x_n/r_n)^{p_n} \in (x_1/r_1)^{p_1}\ldots$$
$$\ldots(x_n/r_n)^{p_n}.A$$

pois, de acôrdo com nossa hipótese, $a_p\ r^p \in A$. Da definição da norma em E_A decorre que

$$\| a_{p_1\ldots p_n} x_1^{p_1}\ldots x_n^{p_n} \| \leqslant \lambda_1^{p_1}\ldots\lambda_n^{p_n}$$

onde $$0 < \lambda_i = \frac{|x_i|}{r_i} < 1 .$$

Portanto, para $|x_i| < r_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, a norma, em E_A, de todo elemento da série $(a_p x^p)$ é majorada pelo elemento de mesmo índice da série numérica convergente (λ^p) o que nos mostra que a série de potências $(a_p\ x^p)$ é absolutamente somável, donde uniformemente somável em E_A; em todo fechado contido em $|x| < r$.

Como a topologia induzida por E em E_A é menos fina que a topologia de espaço normado, concluimos que a série dada é uniformemente somável em E em todo fechado contido no hiperparalelepípedo $|x| < r$.

Corolário - Seja E um espaço localmente convexo, separado e quase-completo, $(a_p x^p)$ uma série de potências a n-variáveis reais e suponhamos que exista uma n-upla $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de números reais $\beta_i \neq 0$ tal que o conjunto $\{a_p \beta^p\}$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, seja limitado em E. Nessas condições, se $0 < r_i < |\beta_i|$, $1 \leqslant i \leqslant n$, a série de potências $(a_p x^p)$ é absoluta e uniformemente somável no hiperparalelepípedo fechado $|x| \leqslant r$, em um espaço de Banach conveniente $E_A \subset E$. A fortiori, a série será uniformemente somável em E, em $|x| \leqslant r$.

Seja, com efeito, A a envoltória convexa, equilibrada e fechada do conjunto $\{a_p \beta^p\}$. Como êste conjunto é limitado, segue-se que A é uma parte limitada e fechada de E, a qual é completa pois, por hipótese, E é quase-completo.

Estamos então nas condições do teorema 2 o que demonstra o corolário.

Definição 3 - Diremos que a série múltipla de potências $(a_p x^p)$ é escalarmente somável no ponto x_0 (resp. uniformemente escalarmente somável em $|x| \leqslant r$) se, para todo $e' \in E$ a série numérica $(\langle a_p, e' \rangle x^p)$ for somável no ponto x_0 (resp. uniformemente somável em $|x| \leqslant r$).

Se a série $(a_p x^p)$ for somável em E e uniformemente quando $|x| \leqslant r$, então a série será escalarmente somável e uniformemente quando $|x| \leqslant r$, pois somável e uniformemente quando $|x| \leqslant r$, na topologia fraca de E.

Convém observar que, se $(a_p\, x^p)$ é escalarmente somável no ponto x_0 não decorre necessàriamente que $(a_p\, x_0^p)$ seja somável na topologia fraca de E. Está claro que, nêste caso, a sucessão das reduzidas

$$s_n = \sum_{|p| \leqslant n} a_p\, x_0^p$$

é uma sucessão de Cauchy na topologia fraca cuja convergência só estará garantida se impusermos condições suplementares em E.

Vale o seguinte resultado:

Teorema 3 - Sejam E um espaço localmente convexo, separado e quase-completo e $(a_p\, x^p)$ uma série múltipla de potências com coeficientes em E, uniformemente escalarmente somável no hiperparalelepípedo $|x| \leqslant r$; então $(a_p\, x^p)$ é uniformemente somável em E, no hiperparalelepípedo $|x| \leqslant r$.

Com efeito, de nossa hipótese decorre que para todo x no hiperparalelepípedo considerado, a sequência $\{a_p\, x^p\}$ é fracamente limitada em E, logo limitada. Podemos então aplicar o corolário do teorema 2, o que prova o teorema 3.

2. Funções analíticas vetoriais.

Definição 4 - Sejam E um espaço localmente convexo e separado e f uma função definida em um aberto U de R^n com valores em E. A função f se denomina analítica no ponto $x_0 \in U$ se

$$f(x) = \sum_p a_p(x - x_o)^p$$

a série do segundo membro sendo uniformemente somável no hiperparalelepípedo $|x_i - x_{oi}| < r_i$, $1 \leq i \leq n$.

Quando o espaço E é quase-completo decorre, pelo que for estabelecido no número 1, que a série do segundo membro é absolutamente convergente num espaço de Banach conveniente E_A.

Os resultados seguintes são de demonstração "standard":

1. Se $f(x)$ é uma função analítica no ponto $x_o \in U$, $f(x)$ é infinitamente derivável nêsse ponto e

$$\left(\frac{\partial^{p_1+\dots+p_{n_f}}}{\partial_{x_1}^{p_1}+\dots+\partial_{x_n}^{p_n}}\right)_{x_o} = p_1! \dots p_n! \; a_{p_1\dots p_n}$$

2. Se $f(x)$ é analítica no ponto $x_o \in U$, se $x_1=(x_{11},\dots,x_{1n})$ é tal que $|x_{1i},\dots,x_{oi}| < r_i$, $1 \leq i \leq n$, então $f(x)$ é analítica no ponto x_1.

3. Se $f(x)$ é analítica no ponto $x_o \in U$, então $f(x)$ se prolonga a uma função analítica da variável complexa z, definida no policilindro $|z_i - x_{oi}| < r_i$, $1 \leq i \leq n$ de C^n por

$$f(x) = \sum_p a_p(z - x_o)^p .$$

Definição 5 - A função $f(x)$ se denomina analítica em U se for analítica em todos os pontos de U.

Resulta das definições e propriedades acima mencionadas que se $f(x)$ é analítica em U, $f(x)$ é uma função vetorial infinitamente derivável em U e suas derivadas são funções analíticas em U ; além disso $f(x)$ se prolonga a uma função <u>analítica complexa</u> definida numa vizinhança aberta U^* de U em C^n .

Se $f(x)$ é analítica em U , é fácil ver que, para todo $e' \varepsilon E'$, a função numérica

$$f_{e'}(x) = \langle f(x), e' \rangle$$

definida em U e com valores em C é analítica em V .

Com efeito, se

$$f(x) = \sum_p a_p (x - x_o)^p ,$$

a série do segundo membro sendo uniformemente somável em E quando $|x_i - x_{oi}| \leqslant r$, $1 \leqslant i \leqslant n$, então essa série é uniformemente somável na topologia fraca de E e sua soma é $f(x)$. Decorre que, para todo $e' \varepsilon E'$,

$$\langle f(x), e' \rangle = \sum_p \langle a_p, e' \rangle \, (x - x_o)^p$$

uniformemente quando $|x_i - x_{oi}| \leqslant r$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

<u>Definição 6</u> - Uma função f definida no aberto $U \subset R^n$ com valores em E se diz <u>escalarmente analítica</u> no ponto $x_o \, \varepsilon \, U$ se, para todo $e' \varepsilon E'$, $f_{e'}$ se representar como uma série de potências em $(x - x_o)$ uniformemente convergente no hiperparalelepípedo $|x_i - x_{oi}| \leqslant r_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

A função f se diz escalarmente analítica em U se for escalarmente analítica em todos os pontos de V .

Se f é escalarmente analítica no ponto x_o , para todo $e' \varepsilon E'$, $f_{e'}$ é infinitamente derivável e vale a representação

$$f_{e'}(x) = \sum_p \frac{1}{p!} D^p f_{e'}(x_0).(x - x_0)^p$$

ou

$$\langle f(x), e' \rangle = \sum_p \frac{1}{p!} D^p [\langle f(x), e' \rangle]_{x_0} . (x - x_0)^p$$

uniformemente em $|x - x_0| \leq r$.

Relembramos que (cf. [5] pg. 238 e seguintes), uma função $f: U \longrightarrow E$ se denomina <u>escalarmente derivável</u> no ponto $x_0 \in U$ se, para todo $e' \in E'$, $f_{e'}$ for derivável nesse ponto.

Uma função f escalarmente analítica no ponto $x_0 \in U$ é, pois, infinitamente escalarmente derivável nêsse ponto.

Quando E é um espaço localmente convexo quase-completo é conhecido que ([5], pg. 244, corolário 2) tôda f infinitamente escalarmente derivável é infinitamente derivável em E .

Isto significa, no caso em que f é escalarmente analítica, que existem tôdas as derivadas $D^p f(x_0)$, $x_0 \in U$, e são elementos de E . Na realidade temos o resultado mais preciso.

<u>Teorema 4</u>. Se E é um espaço localmente convexo quase-completo, tôda função escalarmente analítica é analítica.

Com efeito, em $x_0 \in U$ existem as derivadas $D^p f(x_0)$ e temos

$$\langle D^p f(x_0), e' \rangle = D^p [\langle f(x), e' \rangle]_{x_0} .$$

A série de potências $\left(\frac{1}{p!} D^p f(x_0).(x-x_0)^p \right)$ é, em virtude de nossa hipótese e da igualdade acima uniformemente escalarmente somável quando $|x - x_0| \leq r$ e sua soma é $\langle f(x), e' \rangle$.

Pelo teorema 3, concluimos que a série acima é uniformemente somável para $|x - x_0| \leq r$ e sua soma é $f(x)$ o que prova que f é analítica no ponto x_0 .

Os resultados dêsse número e do número anterior nos mostram que o conceito de função analítica com valores num espaço localmente convexo E é o mais natural quando E é quase-completo.

Convém observar, finalmente que, para as funções analíticas de <u>variável complexa</u> com valores em E, vale a representação integral de Cauchy, utilizando-se o conceito de integral de funções vetoriais. A fim de garantir que a integral seja um elemento de E, impõe-se a E o axioma: "a envoltória convexa e fechada de todo compacto é compacta" condição essa pouco restritiva: os espaços quase-completos possuem-na.

Os espaços que consideraremos serão sempre localmente convexos, separados e <u>completos</u> e, para êsses, as condições acima mencionadas se verificam.

3. O espaço vetorial topológico das funções analíticas reais definidas em um compacto.

Seja K uma parte compacta de R^n e $f(x)$ uma função numérica, analítica em todos os pontos de K. É sabido que f se prolonga a uma função analítica complexa, definida num aberto conveniente de C^n que contem K.

Reciprocamente, tôda função numérica $f(z)$, analítica complexa num aberto U de C^n que contém K, define por restrição a $U \cap R^n$, uma função analítica real em todos os pontos de K.

Se f é analítica complexa em U, g analítica complexa em V, U e V abertos de C^n que contém K e se f coincide com g num aberto W de C^n que contenha K e esteja con tido em $U \cap V$, então f e g definem a mesma função analítica real em $W \cap R^n$.

Vamos indicar por $\mathcal{H}(U)$ o espaço vetorial sôbre C das funções analíticas complexas definidas no aberto U de C^n . Consideremos, a seguir, o conjunto formado por êsses espaços quando V percorre <u>todos</u> os conjuntos abertos de C^n que contenham K e definamos nêsse conjunto a relação de equivalência seguinte: $f \in \mathcal{H}(U)$ é equivalente a $g \in \mathcal{H}(V)$ se existe um aberto W contendo K e contido em $U \cap V$ tal que f coincide com g em W . O espaço quociente por essa relação de equivalência é formado pelas classes de funções analíticas complexas, duas funções pertencendo a uma mesma classe se coincidirem num aberto de C^n que contenha K ou, equivalentemente, tendo em vista a observação feita no início dêste número, pelas classes de funções analíticas reais definidas em abertos de R^n que contenham K , duas funções pertencendo a uma mesma classe se coincidirem num aberto de R^n que contenha K .

Indicaremos por $\mathcal{A}(K)$ êsse espaço. Trata-se de um espaço vetorial sôbre C . Seus elementos serão denominados, por simplicidade, <u>funções analíticas</u> sôbre K . Indicaremos por u a aplicação natural de $\mathcal{H}(U)$ em $\mathcal{A}(K)$.

É sabido que a topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas de U é compatível com a estrutura de espaço vetorial de $\mathcal{H}(U)$ e que, munido desta topologia, $\mathcal{H}(U)$ é um espaço $\mathcal{F}$, i.e. localmente convexo metrisável e completo.

Definiremos em $\mathcal{A}(K)$ a topologia limite indutivo das topologias dos espaços $\mathcal{H}(U)$ pelas aplicações u ; é a mais fina das topologias localmente convexas sôbre $\mathcal{O}(K)$ que tornam contínuas as aplicações u.

Resulta das considerações gerais sôbre a topologia limite indutivo (cf. [5], pg. 248) que, nêsse caso, a topologia de $\mathcal{O}(K)$ pode ser obtida como a topologia limite indutivo de uma sequência crescente de espaços $\mathcal{H}(U_j)$ pelas aplicações u_j, onde $(U_j)_{j=1,2,\ldots}$ é uma sequência decrescente de partes abertas de C^n que contêm K e tais que se U é um aberto contendo K, existe um índice j tal que $U \supset U_j$.

Podemos supor ainda que cada uma das componentes conexas de U_j, $j=1,2,\ldots$, contenha pelo menos um ponto de K, o que nos garantirá a biunivocidade das aplicações u_j.

Finalmente, como K é compacto, podemos supor que os U_j são abertos <u>relativamente compactos</u> de C^n. A aplicação de inclusão v_j que a tôda $f \in \mathcal{H}(U_j)$ faz corresponder sua restrição a $\mathcal{H}(U_{j+1})$ é uma aplicação linear <u>compacta</u>, isto é, transforma uma conveniente vizinhança do zero em $\mathcal{H}(U_j)$ em uma parte relativamente compacta de $\mathcal{H}(U_{j+1})$, fato êsse que utilizaremos a seguir. É óbvio que $u_j = u_{j+1} v_j$.

Seja W_j a vizinhança do zero em $\mathcal{H}(U_j)$ cuja imagem $v_j(W_j)$ é uma parte relativamente compacta de $\mathcal{H}(U_{j+1})$ e indiquemos por A_{j+1} a envoltória convexa, equilibrada e fechada de $u_j(W_j)$ em $\mathcal{H}(U_{j+1})$. A_{j+1} é compacto logo completo. Seja B_{j+1} o sub-espaço vetorial de $\mathcal{H}(U_{j+1})$, gerado por A_{j+1} no qual introduzimos a norma definida por A_{j+1} (cf. cap. I, nº 1).

B_{j+1} é um espaço de Banach e a topologia induzida por $\mathcal{H}(U_{j+1})$ em B_{j+1} é menos fina que a topologia de espaço normado.

Obtemos assim, uma sequência de espaços de Banach B_j, $j=2,3,\ldots$ cada B_j sendo um sub-espaço vetorial de $\mathcal{H}(U_j)$, $j=2,3,\ldots$ e, é fácil ver, podemos supor $B_j \subset B_{j+1}$ para todo índice j. Indicaremos ainda por u_j a restrição a B_j da aplicação de $\mathcal{H}(U_j)$ em $\mathcal{A}(K)$ e por v_j a aplicação de B_j em B_{j+1}.

Vamos demonstrar o

<u>Teorema 5</u> - A topologia de $\mathcal{A}(K)$ acima definida coincide com a topologia limite indutivo das topologias dos espaços de Banach B_j pelas aplicações u_j.

Inicialmente vamos demonstrar que a reunião das imagens $u_j(B_j)$ é $\mathcal{A}(K)$. Com efeito, se $f \in \mathcal{A}(K)$, como êsse espaço é reunião dos espaços $u_j(\mathcal{H}(U_j))$, existe um j e $g \in \mathcal{H}(U_j)$ tais que $u_j(g) = f$. Seja λ_j um escalar tal que $\lambda_j g \in W_j$, segue-se que $\lambda_j\, v_j(g) \in A_{j+1}$ donde $v_j(g) \in B_{j+1}$ e, portanto, $f = u_j(g) = u_{j+1}\, v_j(g) \in u_{j+1}(B_{j+1})$ c.q.d.

Seja, agora, V uma vizinhança do zero em $\mathcal{A}(K)$ na topologia limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}(U_j)$ pelas aplicações u_j. Para todo índice $j=1,2,\ldots$, $u_j^{-1}(V)$ é uma vizinhança do zero em $\mathcal{H}(U_j)$ (cf. definição de vizinhança do zero na topologia limite indutivo) a qual induz, para $j=2,3,\ldots$, uma vizinhança do zero no espaço de Banach B_j o que prova que a topologia limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}(U_j)$ pelas aplicações u_j é menos fina que a topologia limite indutivo dos espaços B_j pelas u_j.

Finalmente suponhamos W uma vizinhança do zero em $\mathcal{A}(K)$ na topologia limite indutivo dos espaços B_j pelas aplicações u_j. Para todo $j=2,3,\ldots,$ $u_j^{-1}(W)$ é vizinhança do zero em B_j. Como um sistema fundamental de vizinhanças do zero em B_j são os homotéticos dos conjuntos A_j, existe um escalar λ_{j-1} tal que

$$\lambda_{j-1} A_j \subset u_j^{-1}(W)$$

ou

$$\lambda_{j-1} v_{j-1}(W_{j-1}) \subset u_j^{-1}(W),$$

pois $v_{j-1}(W_{j-1}) \subset A_j$; segue-se que

$$u_j \circ v_{j-1}(\lambda_{j-1} W_{j-1}) \subset W$$

e como $u_{j-1} = u_j \circ v_{j-1}$, temos $\lambda_{j-1} W_{j-1} \subset u_{j-1}^{-1}(W)$. Concluimos que, para todo $j=1,2,\ldots,$ existe um escalar λ_j tal que

$$\lambda_j W_j \subset u_j^{-1}(W)$$

o que prova que $u_j^{-1}(W)$ é vizinhança do zero em $\mathcal{H}(U_j)$, $j=1,2,\ldots$ e, portanto, que W é vizinhança do zero na topologia limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}(U_j)$ pelas aplicações u_j e o lema fica assim demonstrado.

O teorema 5 mostra que as duas definições da topologia de $\mathcal{A}(K)$ que se encontram, uma delas, em [3], pg. 37 e seguintes e em [8] pg. 80, a outra em [5], pg. 315, exemplo b) são equivalentes. O fato de a topologia de $\mathcal{A}(K)$ poder ser definida como limite indutivo de espaços de Banach será essencial para estabelecermos os lemas 2 e 3 e o teorema 8 do nº 4.

Uma propriedade bem conhecida do espaço $\mathcal{A}(K)$, demonstrada por Kothe, (que se encontra também em [3], pg. 27, prop. 35 e pg. 39, prop. 8) é que êsse espaço é <u>completo</u>.

O teorema que demonstraremos a seguir, caso particular de um teorema mais geral estabelecido em [5], pg. 268, teorema 1, permite caracterizar as <u>partes limitadas</u> de $\mathcal{A}(K)$.

<u>Teorema 6</u> - Se A é uma parte limitada de $\mathcal{A}(K)$, existe um índice j_o tal que A está contida e é limitada na imagem de $\mathcal{H}(U_{j_o})$ por u_{j_o}, munida da topologia obtida por transporte de estrutura por u_{j_o}.

Como $\mathcal{A}(K)$ é um espaço completo, podemos supor, sem perda de generalidade, que A é uma parte limitada, convexa, equilibrada e completa de $\mathcal{A}(K)$. Indiquemos por E_A o sub-espaço vetorial de $\mathcal{A}(K)$ gerado por A e munido da norma definida por A; E_A é um espaço de Banach e a aplicação idêntica
$I: E_A \longrightarrow \mathcal{A}(K)$ é contínua.

Seja $E_j = E_A \cap u_j(\mathcal{H}(U_j))$; como a reunião dos $u_j(\mathcal{H}(U_j))$ é $\mathcal{A}(K)$ então $E_A = \bigcup_j E_j$ e sendo E_A um espaço de Baire pois espaço de Banach, decorre que existe um j_o tal que E_{j_o} não é um conjunto magro.

Por outro lado no espaço $(\mathcal{F})$ $E_A \times \mathcal{H}(U_j)$ consideremos o sub-espaço vetorial fechado

$$H_j = \{(f,g) : I(f) = u_j(g)\}$$

e indiquemos por p_j a projeção de $E_A \times \mathcal{H}(U_j)$ sôbre E_A. É fácil ver que $p_j(H_j) = E_j$. Como H_j e E_A são espaços $\mathcal{F}$ e p_j

é uma aplicação linear contínua de H_j em E_A, resulta do teorema dos homomorfismos de Banach que se $p_j(H_j) = E_j$ for distinto de E_A, E_j é magro. Porém E_{j_o} não é magro, logo $E_{j_o} = E_A$ e, portanto, $E_A \subset u_{j_o}(\mathcal{H}(U_{j_o}))$.

Por outro lado, I é contínua de E_A em $u_{j_o}(\mathcal{H}(U_{j_o}))$ munido da topologia induzida por $\mathcal{A}(K)$ que é menos fina que a topologia de espaço metrisável e completo de $u_{j_o}(\mathcal{H}(U_{j_o}))$ obtida por transporte de estrutura por u_{j_o}. Logo em virtude do teorema do gráfico fechado, I é contínua na topologia de $u_{j_o}(\mathcal{H}(U_{j_o}))$, donde decorre que A é uma parte limitada nesse espaço. c.q.d.

<u>Corolário</u> - O espaço $\mathcal{A}(K)$ munido da topologia limite indutivo das topologias dos espaços $\mathcal{H}(U_j)$ pelas aplicações u_j é um espaço de Montel.

Com efeito, se A é uma parte limitada de $\mathcal{A}(K)$, A é limitada em $u_{j_o}(\mathcal{H}(U_{j_o}))$ o qual é um espaço de Montel, logo é relativamente compacta em $u_{j_o}(\mathcal{H}(U_{j_o}))$ e, portanto, em $\mathcal{A}(K)$, c.q.d.

Além das propriedades acima mencionadas, sabe-se que o espaço $\mathcal{A}(K)$ é <u>nuclear</u> ([6], Chap.II, pg. 57). Todo espaço nuclear verifica a propriedade de aproximação (cf. Cap.I, nº 2); já vimos então que se E é um espaço localmente convexo, separado e completo:

$$\mathcal{A}(K)\,\hat{\otimes}\,E = L_e(E'_c, \mathcal{A}(K)) .$$

Em particular, se $E = \mathcal{A}(L)$ onde L é um compacto de R^m, temos

$$\mathcal{A}(K)\hat{\otimes}\mathcal{A}(L) = L_e(\mathcal{A}(L)',\mathcal{A}(K)).$$

4. O espaço das funções analíticas reais no produto de dois compactos.

Sejam K um conjunto de R^n e L um compacto de R^m. O espaço $\mathcal{A}(K\times L)$ se define de maneira análoga ao espaço $\mathcal{A}(K)$ do nº 3, como sendo o espaço das classes de funções analíticas complexas definidas em abertos de $C^n\times C^m$ que contêm $K\times L$, duas funções pertencendo à mesma classe se coincidirem num mesmo aberto que contem $K\times L$.

Se O é um aberto contendo de $C^n\times C^m$ indicaremos, como anteriormente, por $\mathcal{H}(O)$ o espaço vetorial sôbre C das funções analíticas complexas definidas em O.

O espaço vetorial $\mathcal{A}(K\times L)$ será munido da topologia limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}(O)$, munidos da topologia da convergência compacta. É claro que podemos nos restringir, em nossas considerações, aos espaços $\mathcal{H}(U\times V)$ onde U (resp. V) é um aberto de C^n (resp. C^m) que contem K (resp. L).

Já vimos que (cap.I, nº 2) o espaço $\mathcal{H}(U\times V)$ se identifica ao produto tensorial topológico $\mathcal{H}(U)\hat{\otimes}_\pi\mathcal{H}(V)$. Além disso, se u (resp. v) indica a aplicação natural de $\mathcal{H}(U)$ (resp. $\mathcal{H}(V)$) em $\mathcal{A}(K)$ (resp. $\mathcal{A}(L)$), a aplicação natural de $\mathcal{H}(U\times V)$ em $\mathcal{A}(K\times L)$ se identifica a $u\hat{\otimes}v$. Podemos então dizer que a topologia de $\mathcal{A}(K\times L)$ é a limite indutivo das topologias dos espaços $\mathcal{H}(U)\hat{\otimes}_\pi\mathcal{H}(V)$ pelas aplicação $u\hat{\otimes}v$.

Se $(U_j)_{j=1,2,\dots}$ (resp. $(V_k)_{k=1,2,\dots}$) é uma sequência decrescente de partes abertas de C^n (resp. C^m) que contêm K (resp. L) e tais que se U (resp. V) é um aberto contendo K (resp. L), existe um índice j (resp. k) tal que $U \supset U_j$ (resp. $V \supset V_k$). A topologia de $\mathcal{A}(K \times L)$ será então a topologia limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}(U_j)\hat{\otimes}_\pi \mathcal{H}(V_k)$ pelas aplicações $u_j \hat{\otimes} v_k$.

Estamos em condições de demonstrar o

Teorema 7 - O produto tensorial $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$ é denso em $\mathcal{A}(K \times L)$.

Com efeito, seja $f \in \mathcal{A}(K \times L)$ e W uma vizinhança do zero em $\mathcal{A}(K \times L)$. Seja $\bar{f}$ um representante de f em $\mathcal{H}(U_j \times V_k) = \mathcal{H}(U_j)\hat{\otimes}_\pi \mathcal{H}(V_k)$; como a imagem recíproca de W por $u_j \hat{\otimes} v_k$ é uma vizinhança do zero em $\mathcal{H}(U_j \times V_k)$, existe um elemento $\sum_{p=1}^{q} g_{jp} \otimes h_{kp} \in \mathcal{H}(U_j) \otimes \mathcal{H}(V_k)$ tal que $\bar{f} - \sum_{p=1}^{q} g_{jp} \otimes h_{kp}$ pertence à imagem recíproca de W por $u_j \hat{\otimes} v_k$. Logo, $f - \sum_{p=1}^{q} u_j(g_{jp}) \otimes v_k(h_{kp}) \in W$ e $\sum_{p=1}^{q} u_j(g_{jp}) \otimes v_k(h_{kp}) \in \mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$, c.q.d.

No espaço vetorial $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$ podemos definir duas topologias: a primeira é a topologia π produto tensorial topológico das topologias de $\mathcal{A}(K)$ e $\mathcal{A}(L)$; a segunda é a topologia limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}(U_j) \otimes_\pi \mathcal{H}(V_k)$ pelas aplicações $u_j \otimes v_k$. Demonstraremos, a seguir, que essas topologias coincidem.

Lema 1 - Sejam (E_j) uma sequência de espaços normados, u_j aplicações lineares de E_j em E e u_j' suas transpostas. Suponhamos definida em E a topologia limite indutivo das topologias dos espaços E_j pelas aplicações u_j . Em E' , dual de E , a topologia forte coincide com a topologia a menos fina que torna contínuas as aplicações u_j' de E' em E_j' munido da topologia forte.

Com efeito, indiquemos por τ_f a topologia forte de E' e por τ a topologia a menos fina que torna contínuas as aplicações lineares u_j'.

É fácil ver que τ é menos fina que τ_f ; vamos demonstrou que τ_f é menos fina que τ ou seja que, a aplicação idêntica de E' munido da τ em E' munido da τ_f é contínua.

Inicialmente observemos que E_j' forte é metrisável pois E_j sendo normado, admite uma sequência crescente de partes limitadas cuja reunião é E_j e cujos polares determinam em E_j' forte uma sequência fundamental de vizinhanças do zero. Segue-se, dêste fato, que a topologia τ é também metrisável como a menos fina das topologias que tornem contínuas uma sequência de aplicações em espaços metrisáveis.

Por outro lado, todo espaço metrisável é bornológico ([5], pg. 204, teor. 3), logo para concluirmos que a aplicação idêntica de E' munido da τ em E' munido da τ_f é contínua, basta verificar que essa aplicação transforma limitados em limitados (cap. I, nº 1).

Seja M uma parte limitada de E' munido da τ ; para todo j , $u_j'(M)$ é limitada em E_j' pois u_j' é uma aplicação contínua. Mas em E_j' munido da topologia forte, as partes limitadas coincidem com as partes equicontínuas, visto que, E_j sendo um espaço normado é quase-tonelado ([5], pg. 194, def. 3 e pg. 204, corolário). Logo, para todo j, $u_j'(M)$ é uma parte equicontínua de E_j', donde se segue que M é uma parte equicontínua de E' e, portanto, fortemente limitado em E', c.q.d.

<u>Corolário</u> - Para tôda sequência (W_i) de vizinhanças do zero em E, existe uma vizinhança W do zero em E e uma sequência (λ_i) de escalares >0 tais que $\lambda_i W \subset W_i$ para todo i.

Com efeito, podemos supor que as vizinhanças W_i sejam convexas, equilibradas e fechadas. Seja A_i o polar de W_i; A_i é uma parte equicontínua de E', logo fortemente limitada. Como E' munido da topologia forte é metrisável, existe uma sequência (λ_i) de escalares >0 tais que $A = \bigcup \lambda_i A_i$ é limitada ([5], pg. 286, th. 1). Pelo lema 1 decorre que A é parte equicontínua de E'. É fácil ver que $W = A^o$ é a vizinhança do zero procurada.

O espaço $\mathcal{A}(K)$ (resp. $\mathcal{A}(L)$) sendo limite indutivo de uma sequência de espaços de Banach (B_j) (resp. C_k) por aplicações u_j (resp. v_k), (nº 3, teorema 5) verifica as hipóteses do lema 1 e seu corolário e, portanto, as conclusões acima se aplicam.

Convém notar que êsse espaço entra na categoria dos espaços $(\mathcal{DF})$, ([8] e [5] pg. 301) para os quais o resultado estabelecido no corolário é verdadeiro ([5], pg. 305, prop. 2).

<u>Lema 2</u> - No espaço $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$ a topologia produto tensorial topológico coincide com a topologia limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}(U_j) \otimes_\pi \mathcal{A}(L)$ pelas aplicações $u_j \otimes 1$, onde 1 indica a aplicação idêntica de $\mathcal{A}(L)$.

Vamos demonstrar que os duais de $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$ munido da topologia π e munido da topologia limite indutivo coincidem, bem como as partes equicontínuas dêsses duais.

O dual de $\mathcal{A}(K) \otimes_\pi \mathcal{A}(L)$ é, de acôrdo com a definição da topologia π, $B(\mathcal{A}(K), \mathcal{A}(L))$. Seja A um conjunto equicontínuo de formas bilineares sôbre $\mathcal{A}(K) \times \mathcal{A}(L)$; existe uma vizinhança W (resp. W') da origem em $\mathcal{A}(K)$ (resp. $\mathcal{A}(L)$) tal que

$$|u(f,g)| < 1 ,$$

quaisquer que sejam $f \in W$, $g \in W'$ e $u \in A$. Para todo j, seja $u_j^{-1}(W)$ a vizinhança do zero em $\mathcal{H}(U_j)$; para todo $\tilde{f} \in u_j^{-1}(W)$ $g \in W'$ e $u \in A$ temos

$$|u(u_j(\tilde{f}),g)| < 1$$

o que mostra que $A \circ u_j \otimes 1$ é um conjunto equicontínuo de formas bilineares sôbre $\mathcal{H}(U_j) \times \mathcal{A}(L)$ ou seja, uma parte equicontínua do dual de $\mathcal{H}(U_j) \otimes_\pi \mathcal{A}(L)$. Tendo em conta a caracterização das partes equicontínuas do dual de um limite indutivo, concluimos que A é uma parte equicontínua do dual de $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$ munido da topologia limite indutivo.

Recìprocamente, suponhamos A parte equicontínua do dual de $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$ munido da topologia limite indutivo. Para todo j, $A \circ u_j \otimes 1$ é parte equicontínua do dual de $\mathcal{H}(U_j) \otimes \mathcal{A}(L)$, ou seja, de $B(\mathcal{H}(U_j), \mathcal{A}(L))$. Existe, pois, para todo j, uma vizinhança W_j (resp. W_j') do zero em $\mathcal{H}(U_j)$ (resp. $\mathcal{A}(L)$) tal que

$$(1) \qquad |u(u_j(\tilde{f}),g)| < 1$$

quaisquer que sejam $\tilde{f} \in W_j$, $g \in W_j'$ e $u \in A$.

Pelo corolário do lema 1, existem uma vizinhança W' do zero em $\mathcal{A}(L)$ e uma sequência (λ_j) de escalares >0 tais que $\lambda_j W' \subset W'_j$, qualquer que seja j .

O conjunto $W = \Gamma(\bigcup_j u_j(\lambda_j W_j))$ envoltória convexa, equilibrada da reunião das imagens por u_j das vizinhanças do zero $\lambda_j W_j$ em $\mathcal{H}(U_j)$ é uma vizinhança do zero em $\mathcal{A}(K)$. Os elementos dessa vizinhança são da forma

$$f = \sum_{p=1}^{q} \alpha_p \; u_{j_p}(\lambda_{j_p} \bar{f}_{j_p})$$

onde $\bar{f}_{j_p} \in W_{j_p}$ e os α_p são escalares tais que $\sum |\alpha_p| \leqslant 1$.

Quaisquer que sejam $f \in W$, $g \in W'$ e $u \in A$, temos:

$$u(f,g) = \sum_{p=1}^{q} \alpha_p \; u(u_{j_p}(\bar{f}_{j_p}), \lambda_{j_p} g)$$

e, levando em conta a desigualdade (1), a inclusão $\lambda_j W' \subset W'_{j_p}$ e $\sum |\alpha_p| \leqslant 1$, concluimos que

$$|u(f,g)| < 1 ,$$

o que mostra que A é um conjunto de formas bilineares equicontínuo sôbre $\mathcal{A}(K) \times \mathcal{A}(L)$, o que prova o lema.

No enunciado do lema 2, podemos òbviamente, substituir os espaços $\mathcal{H}(U_j)$ pelos espaços de Banach B_j cujo limite indutivo é $\mathcal{A}(K)$. O fato de estarmos considerando $\mathcal{H}(U_j)$ ou B_j em nada altera a demonstração na qual, porém, a propriedade das sequências de vizinhanças do zero em $\mathcal{A}(L)$, descrita no corolário do lema 1, intervem de modo essêncial.

<u>Lema 3</u> - No espaço $B_j \otimes \mathcal{A}(L)$, a topologia π coincide com a topologia limite indutivo dos espaços $B_j \otimes_\pi C_k$ pelas aplicações $1 \otimes v_k$, onde 1 é a aplicação idêntica de B_j .

A demonstração é análoga à anterior. Basta observar que B_j sendo espaço de Banach, a propriedade das sequências de vizinhanças acima mencionada é trivialmente verdadeira.

Teorema 8 - Em $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$, as topologias π e limite indutivo das topologias dos espaços $B_j \otimes_\pi C_k$ pelas aplicações $u_j \otimes v_j$, coincidem.

O teorema resulta dos lemas 2 e 3 e da propriedade de transitividade da topologia limite indutivo.

Como já vimos (teorema 7) que $\mathcal{A}(K) \otimes \mathcal{A}(L)$ é denso em $\mathcal{A}(K \times L)$ e que êste espaço é completo, resulta do teorema 8 que

$$\mathcal{A}(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(L) = \mathcal{A}(K \times L) .$$

No número 2 introduzimos o conceito de função analítica vetorial e no número 3 introduzimos o espaço das classes de funções analíticas definidas em um compacto de R^n. Vamos considerar, a seguir, um particular espaço de classes de funções analíticas vetoriais.

Sejam K um compacto de R^n e L um compacto de R^m. Indicaremos por $\mathcal{A}(K, \mathcal{A}(L))$ o espaço das classes de funções analíticas definidas em conjuntos abertos U de C^n contendo K e com valores no espaço vetorial topológico $\mathcal{A}(L)$, duas funções pertencendo a mesma classe se coincidirem num aberto de C^n que contenha K .

Teorema 9 - O espaço $\mathcal{A}(K, \mathcal{A}(L))$ se identifica com o espaço $\mathcal{A}(K \times L)$.

Com efeito, seja $f \in \mathcal{A}(K, \mathcal{A}(L))$ e seja $\bar{f} \in \mathcal{H}(U, \mathcal{A}(L))$ um representante de f . Se $z_0 \in U$, então

$$\bar{f}(z) = \sum_p a_p (z - z_0)^p$$

onde os $a_p \in \mathcal{A}(L)$ e a série que comparece no segundo membro sendo uniformemente somável em $\mathcal{A}(L)$ quando $|z_i - z_{oi}| \leq 1$, $1 \leq i \leq n$.

Para todo z fixado nêsse hipercilindro, os elementos $a_p(z - z_o)^p$, $p \in N^n$, constituem um conjunto limitado em $\mathcal{A}(L)$; existe, pois, pelo teorema 6, um conjunto aberto V de C^m contendo L onde a sucessão dos representantes $(\bar{a}_p(z - z_o)^p)$ é limitada em $\mathcal{H}(V)$. Pelo corolário do teorema 2, a série de potências associada a êsses elementos é somável em $\mathcal{H}(V)$ e uniformemente somável em $|z - z_o| \leq r$. É claro que a soma desta série é um representante de $\bar{f}(z)$ em $\mathcal{H}(V)$ o qual continuaremos a indicar com a mesma notação.

Concluimos assim que $\bar{f}$ é um elemento de $\mathcal{H}(U, \mathcal{H}(V))$ o qual se identifica a $\mathcal{H}(U \times V)$; portanto $\bar{f}$ é representante de um elemento de $\mathcal{A}(K \times L)$. Fica dêsse modo estabelecida uma aplicação linear de $\mathcal{A}(K, \mathcal{A}(L))$ em $\mathcal{A}(K \times L)$ e é fácil ver que essa aplicação é biunívoca.

Ela é sôbre. Seja $f \in \mathcal{A}(K \times L)$ e $\bar{f} \in \mathcal{H}(U \times V) = \mathcal{H}(U, \mathcal{H}(V))$ um representante de f. Para todo $z \in U$, $\bar{f}(z)$ que pertence a $\mathcal{H}(V)$, define um elemento de $\mathcal{A}(L)$ que representaremos por $\bar{g}(z)$.

A aplicação $z \in U \longrightarrow \bar{g}(z) \in \mathcal{A}(L)$ é analítica. Como $\bar{f} \in \mathcal{H}(U, \mathcal{H}(V))$, temos para $z_o \in U$:

$$\bar{f}(z) = \sum_p \bar{a}_p (z - z_o)^p$$

onde $\bar{a}_p \in \mathcal{H}(V)$, a série sendo uniformemente somável em $\mathcal{H}(V)$, para $|z_i - z_{oi}| < r$, $1 \leq i \leq n$. Fixado z nêsse hipercilindro q conjunto formado pelos elementos $\bar{a}_p\ (z - z_o)^p$, $p \in N^n$, é limitado em $\mathcal{H}(V)$, logo sua imagem $a_p\ (z - z_o)^p$, $p \in N^n$, é limitada em $\mathcal{A}(L)$ e pelo corolário do teorema 2 teremos

$$\bar{g}(z) = \sum_p a_p\ (z - z_o)^p$$

uniformemente somável em $\mathcal{A}(L)$ para z num hipercilindro conveniente.

Concluimos assim que $\bar{g} \in \mathcal{H}(U, \mathcal{A}(L))$ o qual define um elemento $g \in \mathcal{A}(K, \mathcal{A}(L))$ c.q.d.

Reunindo então os resultados dêste número e a observação final do número 3, temos as identificações:

$$\mathcal{A}(K{\times}L) = \mathcal{A}(K, \mathcal{A}(L)) = \mathcal{A}(K)\hat{\otimes}\,\mathcal{A}(L) = L_e(\mathcal{A}'(L), \mathcal{A}(K)) \ .$$

5. <u>O espaço das funções analíticas sôbre uma variedade analítica real.</u>

Seja V uma variedade analítica real de dimensão n , paracompacta, conexa e orientada.

Uma <u>complexificação</u> de V ([2]) é um par formado por uma variedade analítica complexa V^* , de dimensão n e de um isomorfismo analítico real φ^* de V sôbre uma sub-variedade analítica real $\varphi^*(V)$ de V^* tais que, para todo $x \in V^*$, existe um isomorfismo analítico complexo de uma vizinhança aberta U^* de x sôbre um aberto U de C^n , transformando $\varphi^*(V) \cap U^*$ em $R^n \cap U$.

A proposição que enunciaremos a seguir e que se encontra demonstrada em [2] , pg. 133, prop. 1, estabelece a existência e unicidade, a menos de um isomorfismo, de uma complexificação de V :

Se V é uma variedade analítica paracompacta, existem complexificações de V ; se (V_1^*, φ_1^*) e (V_2^*, φ_2^*) são duas complexificações de V, existe um isomorfismo analítico complexo de uma vizinhança aberta de $\varphi_1^*(V)$ em V_1^* sôbre uma vizinhança aberta de $\varphi_2^*(V)$ em V_2^*, prolongando o isomorfismo $\varphi_2^* \circ \varphi_1^{*-1}$ de $\varphi_1^*(V)$ sôbre $\varphi_2^*(V)$.

Dada V, fixemos uma complexificação (V^*, φ^*) e, por comodidade, vamos identificar V a $\varphi^*(V)$.

Se f é uma função analítica real definida em V, f se prolonga a uma função analítica complexa definida em uma vizinhança aberta de V em V^*. Reciprocamente, tôda função analítica complexa definida em uma vizinhança aberta de V em V^* determina, por restrição, uma função analítica real em V.

No conjunto das funções analíticas complexas definidas em conjuntos abertos de V^* que contêm V, podemos estabelecer uma relação de equivalência análoga à estabelecida no número 3.

Se indicamos por $\mathcal{A}(V)$ o espaço das funções analíticas reais definidas em V, $\mathcal{A}(V)$ se identifica ao espaço das classes de equivalência de funções analíticas complexas definidas em abertos de V^* que contenham V, módulo essa relação de equivalência.

Estas considerações não dependem da complexificação escolhida tendo em vista a unicidade da complexificação que a proposição acima referida estabelece.

Se, para todo aberto U^* de V^* que contem V , indicamos por $\mathcal{H}(U^*)$ o espaço vetorial topológico das funções analíticas complexas definidas em U^* , munido da topologia da convergência compacta e por u a aplicação natural de $\mathcal{H}(U^*)$ em $\mathcal{A}(V)$, definiremos nêste espaço a topologia limite indutivo das topologias dos espaços $\mathcal{H}(U^*)$ pelas aplicações u . Também nêste caso, a topologia não se altera se nos restringirmos a um sistema fundamental enumerável (U_j^*) de vizinhanças abertas de V em V^* e considerarmos a topologia limite indutivo das topologias dos $\mathcal{H}(U_j)$ pelas aplicações correspondentes u_j . É claro também que esta topologia não depende da complexificação considerada.

Em particular, se K é um compacto de V , para definir a topologia de $\mathcal{A}(K)$ podemos nos restringir, ainda, a um sistema fundamental enumerável (U_j^*) de vizinhanças aberta e <u>relativamente compactas</u> de K em V^* .

O espaço vetorial topológico $\mathcal{A}(K)$ satisfaz tôdas as propriedades estabelecidas no nº 3, como sejam: é <u>completo</u>, de <u>Montel</u> e <u>nuclear</u>.

Seja E um espaço localmente convexo e <u>completo</u> (bastaria supormos <u>quase-completo</u>). Se $x_o \in V$ e $(U, x_1,\ldots,x_n)$ é um sistema de coordenadas em x_o , toda função $f:V\longrightarrow E$ pode se representar por

$$f(x) = f^*(x_1,\ldots,x_n) \ , \quad x \in U \ ,$$

onde $f^*(x_1,\ldots,x_n)$ é uma função de n-variáveis reais com valores em E .

A função f se denominará <u>analítica no ponto</u> x_o se

$f^*(x_1,\dots,x_n)$ for analítica no ponto $(x_{01},\dots,x_{0n})$; f se denominará <u>analítica em um aberto</u> O de V se for analítica em todos os pontos de O . Estas definições não dependem do sistema de coordenadas escolhido.

Como no nº 2, definição 6, podemos definir, também, a noção de função <u>escalarmente analítica</u> com valores em E . Quando o espaço E for quase-completo as duas noções de analiticidade coincidem.

Aqui como no número 4, interessa-nos considerar o caso em que E é o espaço $\mathcal{A}(L)$ onde L é um compacto de uma variedade analítica real W .

Se K (resp. L) é um compacto de V (resp. W) variedade analítica real, os teoremas 7, 8 e 9 são verdadeiros e temos as identificações:

$$\mathcal{A}(K\times L) = \mathcal{A}(K, \mathcal{A}(L)) = \mathcal{A}(K)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{A}(L) = L_e(\mathcal{A}'(L), \mathcal{A}(K)) .$$

CAPÍTULO III

NÚCLEOS ANALÌTICAMENTE MUITO REGULARES

Seja V uma variedade analítica real de dimensão n, paracompacta e orientada. $\mathcal{D}(V)$, $\mathcal{E}(V)$, $\mathcal{E}'(V)$ e $\mathcal{D}'(V)$ os espaços das funções infinitamente deriváveis com suporte compacto, das infinitamente deriváveis, das distribuições de suporte compacto e das distribuições sôbre V, munidos de suas topologias usuais que tivemos lugar de mencionar no Capítulo I, nº 2, exemplo a).

Seja $\mathcal{A}(V)$ o espaço das funções analíticas reais em V, munido da topologia limite indutivo definida no Capítulo II, nº 5. $\mathcal{A}(V)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{E}(V)$ e é fácil ver que a topologia induzida por $\mathcal{E}(V)$ em $\mathcal{A}(V)$ é menos fina que a topologia de $\mathcal{A}(V)$. Além disso, $\mathcal{A}(V)$ é denso em $\mathcal{E}(V)$. Decorre, pois, que o dual $\mathcal{E}'(V)$ de $\mathcal{E}(V)$ se identifica a um sub-espaço de $\mathcal{A}'(V)$.

Um núcleo distribuição é, como no Capítulo I, nº 3, um elemento do espaço $\mathcal{D}'(V \times V)$ das distribuições em $V \times V$. As definições de núcleos semi-regulares, regulares e muito-regulares serão mantidas. O caso analítico dá lugar às definições que se seguirão.

<u>Definição 1</u> - O núcleo $K_{x,y}$ se denomina <u>analìticamente muito regular em y</u> se

1) $K_{x,y}$ é semi-regular em y;

2) qualquer que seja $T \in \mathcal{E}'(V)$, $L_K(T)$ é função analítica em todo aberto de V onde T é função analítica.

<u>Definição 2</u> - O núcleo $K_{x,y}$ se denomina <u>analìticamente muito regular em x</u> se

1) $K_{x,y}$ é semi-regular em x ;

2) qualquer que seja $T \in \mathcal{E}'(V)$, ${}^tL_K(T)$ é função analítica em todo aberto de V onde T é função analítica.

Se ${}^tK_{x,y}$ representa o <u>transposto</u> do núcleo $K_{x,y}$, definido por:

$$< {}^tK_{x,y} , \varphi(x,y) > = < K_{x,y} , \Phi(y,x) > , \Phi \in \mathcal{D}(V \times V) ,$$

dizer que $K_{x,y}$ é analìticamente muito regular em x , significa que ${}^tK_{x,y}$ é analiticamente muito regular em y , pois $L_{({}^tK)} = {}^tL_K$ o que é fácil verificar.

Uma observação trivial é que, quando o núcleo é uma função $H(x,y)$, seu transposto é $H(y,x)$.

<u>Definição 3</u> - O núcleo $K_{x,y}$ se denomina <u>analìticamente muito regular</u> se $K_{x,y}$ é analìticamente muito regular em x e em y .

Dizer que $K_{x,y}$ é analìticamente muito regular significa que $K_{x,y}$ é regular e que as aplicações L_K e $L_{{}^tK}$ verificam a condição 2) das definições 1 e 2.

<u>Teorema 1</u> - Se o núcleo $K_{x,y}$ é analìticamente muito regular em y (resp. em x) então $K_{x,y}$ é uma função infinitamente derivável no complementar da diagonal de $V \times V$.

Sejam, com efeito, A e B dois conjuntos abertos, disjuntos, de V. Se $T \in \mathcal{E}'(B)$ (resp. $\mathcal{E}'(A)$) a condição 2 da definição 1 (resp. def. 2) acarreta que $L_K(T)$ (resp. ${}^tL_K(T)$) é uma função analítica em A (resp. B).

Logo L_K (resp. ${}^tL_K$) aplica $\mathcal{E}'(B)$ (resp. $\mathcal{E}'(A)$) em $\mathcal{E}(A)$ (resp. $\mathcal{E}(B)$).

Mas $\mathcal{E}'(B)$ sendo dual forte de um espaço ($\mathcal{F}$) completo é bornológico ([5], pg. 320, corol. 3) e é completo ([5], pg. 207, exerc. 7). Estamos em condições de aplicar o teorema do gráfico fechado ([5], pg. 271, teor. 2), pois L_K sendo contínuo de $\mathcal{E}'(B)$ em $\mathcal{E}(A)$ munido da <u>topologia induzida</u> por $\mathcal{D}'(A)$, seu gráfico é fechado em $\mathcal{E}'(B) \times \mathcal{D}'(A)$, logo será fechado em $\mathcal{E}'(B) \times \mathcal{E}(A)$, logo será fechado em $\mathcal{E}'(B) \times \mathcal{E}(A)$ o que garante que L_K é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{E}'(B)$ em $\mathcal{E}(A)$.

Com o mesmo argumento, concluimos, no caso em que $K_{x,y}$ é um núcleo analìticamente muito regular em x, que ${}^tL_K$ é contínua de $\mathcal{E}'(A)$ em $\mathcal{E}(B)$, ou seja, que L_K é contínua de $\mathcal{E}'(B)$ em $\mathcal{E}(A)$.

Em qualquer caso temos $L_K \in \mathcal{E}(A \times B)$, ou seja, a restrição de $K_{x,y}$ a $A \times B$ é uma função infinitamente derivável o que demonstra o teorema.

Decorre da observação feita acima sôbre o transposto de um núcleo que ${}^tK_{x,y}$ é, também, uma função infinitamente derivável no complementar da diagonal.

<u>**Corolário**</u> - Se $K_{x,y}$ é analìticamente muito regular, $K_{x,y}$ é muito regular.

Com efeito, $K_{x,y}$ é uma função infinitamente derivável em $c(\Delta)$ (= complementar da diagonal de $V \times V$) e, por outro lado, $K_{x,y}$ é regular (cf. def. 3). Pelo teorema 1 do Capítulo I segue-se que $K_{x,y}$ é muito regular, c.q.d.

Lema 1 - Seja $H(x,y)$ um núcleo função infinitamente derivável em $V \times V$; para tôda $T \varepsilon \mathcal{E}'(V)$, temos:

$$L_H(T)\ (x) = \langle H(x,y),\ T \rangle \ .$$

Com efeito, o segundo membro tem sentido pois fixado x , $H(x,y)$ é uma função infinitamente derivável em y e T é uma distribuição com suporte compacto. Além disso, o segundo membro é uma função infinitamente derivável em V ([11], tome I, 2e éd., th. II, pg. 105).

Por outro lado, L_H é uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{E}'(V)$ em $\mathcal{E}(V)$ pois já mencionamos, Cap. I, nº 2, que $\mathcal{E}(V \times V) = \mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V)$. Além disso, para tôda $g \varepsilon \mathcal{D}(V)$, temos:

$$L_H(g)\ (x) = \int_V H(x,y)\ g(y)\ dy = \langle H(x,y),\ g(y) \rangle .$$

O resultado segue por continuidade, c.q.d.

Teorema 2 - Seja $K_{x,y}$ um núcleo verificando as seguintes condições:

1) semi-regular em y (resp. semi-regular em x);

2) se A e B são dois quaisquer conjuntos abertos de V , disjuntos, em $A \times B$ o núcleo $K_{x,y}$ (resp. ${}^tK_{x,y}$) é uma função $H(x,y)$ (resp. ${}^tH(x,y)$) tal que $x \longrightarrow H(x,.)$ (resp. $x \longrightarrow {}^tH(x,.)$) é uma função analítica vetorial (Cap.II, nº 2, def. 4 e Cap.II, nº 5) de A em $\mathcal{E}(B)$;

3) se $g \varepsilon \mathcal{D}(V)$, $L_K(g)$ (resp. $L_{{}^tK}(g)$) é uma função analítica em todo aberto de V onde g é função analítica.

Nessas condições, $K_{x,y}$ é analìticamente muito regular em y (resp. x).

A condição 1) das definições 1 e 2 estando verificadas, por hipótese, basta-nos verificar a condição 2). Seja, com efeito, T uma distribuição de $\mathcal{E}'(V)$, analítica num aberto O de V . Seja ω um aberto relativamente compacto tal que $\bar{\omega} \subset O$, α uma função infinitamente derivável de suporte compacto contido em O , igual a 1 numa vizinhança aberta W de $\bar{\omega}$. Podemos escrever:

$$T = \alpha T + (1-\alpha).T .$$

O têrmo αT é uma função infinitamente derivável em V, com suporte compacto e analítica em ω . Pela condição 3) do teorema, segue-se que $L_K(\alpha T)$ (resp. $L_{t_K}(g)$) é analítica em ω.

Por outro lado $(1-\alpha)T$ é uma distribuição de suporte compacto, nula em W e no complementar do suporte de T , logo seu suporte está contido no compacto $k = \mathrm{spt}\, T \cap c(W)$, o qual é disjunto de ω , pois $W \supset \bar{\omega}$.

Sejam A e B dois abertos disjuntos e tais que $A \supset \bar{\omega}$ e $B \supset k$. Por hipótese, em $A \times B$, o núcleo $K_{x,y}$ (resp. ${}^tK_{x,y}$) é uma função $H(x,y)$ (resp. ${}^tH(x,y)$) verificando a condição 2). É imediato que $H(x,y)$ (resp. ${}^tH(x,y)$) pertence a $\mathcal{E}(A \times B)$, pois $x \longrightarrow H(x,.)$ (resp. $x \longrightarrow {}^tH(x,.)$) sendo uma função analítica vetorial de A em $\mathcal{E}(B)$ é uma função vetorial infinitamente derivável de A em $\mathcal{E}(B)$ (Cap.II, nº 2), ou seja, pertence a $\mathcal{E}(A, \mathcal{E}(B)) = \mathcal{E}(A \times B)$ (Cap. I, nº 2). Pelo lema 1, temos:

$$L_K(S)(x) = \langle H(x,y), S \rangle \quad (\text{resp. } L_{t_K}(S)(x) = \langle {}^tH(x,y), S \rangle)$$

qualquer que seja $S \in \mathcal{E}'(B)$. Mas a condição 2) implica que

$$x \longrightarrow \langle H(x,y), S \rangle \quad (\text{resp. } x \longrightarrow \langle {}^tH(x,y), S \rangle)$$

é uma função analítica em A , qualquer que seja $S \in \mathcal{E}'(B)$, pois tôda função vetorial é escalarmente analítica (cf. Cap.II, def. 6). Concluimos que $L_K(S)$ (resp. $L_{t_K}(S)$) é uma função analítica em A , qualquer que seja $S \in \mathcal{E}'(B)$. Essas conclusões valem para a distribuição $(1-\alpha)T$ pois seu suporte está contido em B . Portanto, $L_K(T)$ (resp. $L_{t_K}(T)$) é uma função analítica em ω , logo em O , pois ω é um aberto arbitrário de aderência compacta contido em O .

<u>Corolário 1</u> - Seja $H(x,y)$ uma função em $V \times V$ tal que a aplicação

$$x \longrightarrow H(x,.) \quad (\text{resp. } y \longrightarrow H(.,y))$$

é uma função analítica de V com valores em $\mathcal{E}(V)$. Nessas condições, o núcleo $H(x,y)$ é analìticamente regular em y (resp. em x).

Com efeito, nossa hipótese sôbre $H(x,y)$ acarreta como vimos na demonstração do teorema que $H(x,y) \in \mathcal{E}(V \times V)$. O núcleo distribuição definido por $H(x,y)$ é, pois, regular (cf. Cap.I, def. 4).

A condição 2) do teorema está automàticamente verificada. Tendo em vista o lema 1 e que tôda função analítica vetorial é escalarmente analítica,

$$L_H(T)(x) = \langle H(x,y), T \rangle \quad (\text{resp. } L_{t_H}(T)(x) = \langle {}^tH(x,y), T \rangle)$$

é, para todo $T \in \mathcal{E}'(V)$, uma função analítica em V , o que acarreta a condição 3), c.q.d.

<u>Corolário 2</u> - Seja $K_{x,y}$ um núcleo verificando as seguintes condições:

1) regular;

2) função analítica em $c(\Delta)$;

3) se $g \in \mathcal{D}(V)$, $L_K(g)$ (resp. $L_{t_K}(g)$) é uma função analítica em todo aberto onde g é função analítica.

Nessas condições, $K_{x,y}$ é um núcleo analìticamente regular.

Basta ver, com efeito, que a condição 2) do corolário acarreta as duas condições de mesmo número do teorema e que 1) e 3) são as mesmas, c.q.d.

Como podemos observar, no corolário 2 intervem a condição 3), cuja análoga, no caso infinitamente derivável (teorema 1 do Cap. I) está contido na hipótese de ser $K_{x,y}$ regular. A condição 3) não é supérflua, nem decorre de 1) e 2) como prova o seguinte exemplo.

Suponhamos $V = R^n$ e seja $I_{x,y}$ o núcleo definido por:

$$< I_{x,y} , \Phi(x,y) > = \int_{R^n} \Phi(t,t)dt , \qquad \Phi \in \mathcal{D}(R^n \times R^n) .$$

O núcleo $I_{x,y}$ representa a massa unitária sôbre a diagonal Δ de $R^n \times R^n$; seu suporte está contido em Δ , logo $I_{x,y}$ é uma função analítica em $c(\Delta)$ pois se identifica nêsse aberto à função idênticamente nula. É fácil verificar que $I_{x,y}$ é o núcleo que provém da aplicação idêntica de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}$.

Seja $\alpha(x)$ uma função <u>contínua</u> em R^n e consideremos o núcleo $K_{x,y} = \alpha(x)\, I_{x,y}$ definido por:

$$< K_{x,y} \, , \Phi(x,y) > = \int_{R^n} \alpha(t)\, \Phi(t,t)dt, \quad \Phi \in \mathcal{D}(R^n \times R^n) \; .$$

O núcleo $K_{x,y}$ representa uma distribuição de massas de densidade $\alpha(x)$ sôbre a diagonal $\triangle$. Seu suporte está contido em $\triangle$, logo $K_{x,y}$ é uma função analítica em $c(\triangle)$ e, é fácil ver, que êsse núcleo provém da aplicação linear contínua

$$y \in \mathcal{D} \longrightarrow \alpha . g \in \mathcal{D}' \; .$$

$K_{x,y}$ verifica, pois, a condição 2) do corolário 2 e, se $\alpha(x)$ é <u>infinitamente derivável</u>, verifica 1) mas não verifica 3).

<u>Lema 2</u> - Seja $H(x,y)$ um núcleo função infinitamente derivável em $V \times V$. Vamos demonstrar que

$$L_H(\delta_{(yo)}) = H(x,yo)$$

onde $\delta_{(yo)}$ representa a medida de Dirac no ponto yo .

Seja, com efeito, (α_j) uma sequência de funções de $\mathcal{D}(V)$ que converge para $\delta_{(yo)}$ em $\mathcal{E}'(V)$; como $H(x,y)$ é regular, $L_H(\alpha_j)$ converge para $L_H(\delta_{(yo)})$ em $\mathcal{D}'(V)$. Temos, qualquer que seja $f \in \mathcal{D}(V)$:

$$< L_H(\alpha_j), f > \; = \; < H(x,y), \; f(x).\alpha_j(y) > \; = \; << H(x,y), f(x) > \; , \; \alpha_j(y) > \; ,$$

o último membro tendo sentido pois $< H(x,y), f(x) >$ é uma função infinitamente derivável em y e $\alpha_j(y)$ uma distribuição de suporte compacto.

Por passagem ao limite, obtemos:

$$< L_H(\delta_{(yo)}), f > \; = \; < H(x,yo), f(x) >$$

para tôda $f \in \mathcal{D}(V)$, donde $L_H(\delta_{(yo)}) = H(x,yo)$, c.q.d.

<u>Teorema 3</u> - Seja $K_{x,y}$ um núcleo analìticamente muito regular em y (resp. em x). Se A e B são dois abertos, disjuntos, em V, então $x \longrightarrow K_{x,.}$, (resp. $x \longrightarrow {}^tK_{x,.}$) é uma aplicação analítica de A em $\mathcal{E}(B)$.

Inicialmente observamos que, pelo teorema 1, $K_{x,y}$ é uma função infinitamente derivável em $c(\triangle)$ que indicaremos por $H(x,y)$. Além disso levando em conta o lema 2, temos que $L_K(\delta_{(y)})(x) = H(x,y)$ em $A \times B$.

Sejam A_1 e B_1 dois conjuntos compactos tais que $A_1 \subset A$ e $B_1 \subset B$. Com um raciocínio análogo ao que utilisamos no teorema 1, decorre, pelo teorema do gráfico fechado que L_K é uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{E}'(B)$ em $\mathcal{a}(A)$. Como a aplicação $y \in B \longrightarrow \delta_{(y)} \in \mathcal{E}'(B)$ é contínua, segue-se que $y \longrightarrow L_K(\delta_{(y)})$ é uma aplicação contínua de B em $\mathcal{a}(A)$, em particular, de B em $\mathcal{a}(A_1)$. Como B_1 é compacto, o conjunto

$$\{L_K(\delta_{(y)}) = H(.,y) \in \mathcal{a}(A_1) : y \in B_1\}$$

é limitado em $\mathcal{a}(A_1)$, logo, pelo teorema 6 do Capítulo II, existe um aberto U_1^* em V^*, complexificação de V (cf. Cap.II, nº 5) tal que, para todo $y \in B_1$, as funções $H(.,y)$ se prolongam a U_1^* e formam um conjunto limitado em $\mathcal{H}(U_1^*)$. Temos então, $H(z,y)$ definida em $U_1^* \times B_1$, holomorfa em z para y fixado em B_1 e infinitamente derivável em y para z fixado em U_1^*.

Seja, agora, a aplicação $z \in U_1^* \longrightarrow H(z,.) \in \mathcal{E}(B_1)$. Digo que essa aplicação é <u>escalarmente holomorfa</u>. Com efeito, $H(z,y) \in \mathcal{E}(U_1^* \times B_1)$ e, pelo lema 1, temos para tôda $T \in \mathcal{E}'(B_1)$:

$$L_H(T)(z) = \langle H(z,y), T \rangle .$$

Por continuidade, resulta que $L_H(T)(z)$ é holomorfa em U_1^* pois, para tôda $g \in \mathcal{D}(B_1)$,

$$L_H(g)(z) = \langle H(z,y), g(y)\rangle = \int_{B_1} H(z,y)\, g(y)dy$$

é, obviamente, holomorfa em U_1^* e a topologia de $\mathcal{H}(U_1^*)$ é a induzida por $\mathcal{E}(U_1^*)$.

Decorre que, para todo $z_0 \in U_1^*$ é possível fixarmos uma carta local (que independe de $T \in \mathcal{E}'(B_1)$) , onde

$$\langle H(z,y), T \rangle$$

se representa por uma série de potências em $(z-z_0)$, uniformemente convergente nessa vizinhança. Como $\mathcal{E}(B_1)$ é completo, pelo teorema 4 do Capítulo II, concluimos que $z \longrightarrow H(z,.)$ é uma aplicação holomorfa de U_1^* em $\mathcal{E}(B_1)$. Por restrição a A_1 , obtemos uma aplicação analítica $x \in A_1 \longrightarrow H(x,.) = K_{x,.} \in \mathcal{E}(B_1)$, o que demonstra o teorema.

Com uma demonstração análoga, concluimos que $x \rightarrow {}^tK_{x,.} = K_{.,x}$ é analítica de A_1 em $\mathcal{E}(B_1)$. Ou seja mudando as variáveis que $y \longrightarrow K_{.,y}$ é analítica de B_1 em A_1 .

<u>Corolário</u> - Se $K_{x,y}$ é um núcleo analìticamente muito regular, então $K_{x,y}$ é uma função separadamente analítica no complementar da diagonal.

Sejam $x_o, y_o \in V$, $x_o \neq y_o$; A e B duas vizinhanças abertas e disjuntas de x_o e y_o, respectivamente. Pelo teorema 3, segue-se que $x \longrightarrow K_{x,y_o}$ é analítica em A e também que $y \longrightarrow K_{x_o,y}$ é analítica em B, c.q.d.

Na realidade, para os núcleos analìticamente muito regulares, obtemos um resultado mais preciso, graças a um critério de analiticidade em $V \times V$, em termos de propriedades analíticas de uma função nas variáveis separadas, estabelecido recentemente por F.E. Browder [15]. Temos o

Teorema 4 - Se $K_{x,y}$ é um núcleo analìticamente muito regular, então $K_{x,y}$ é uma função analítica no complementar da diagonal.

Com efeito, sendo $K_{x,y}$ analìticamente muito regular, as duas condições do teorema 3 estão satisfeitas. Se A, A_1 e B, B_1 indicam os conjuntos lá considerados, vimos que

$$\{ H(.,y) = K_{.,y} : y \in B_1 \}$$

é um conjunto limitado em $\mathcal{A}(A_1)$ e, anàlogamente,

$$\{ H(x,.) = K_{x,.} : x \in A_1 \}$$

é um conjunto limitado em $\mathcal{A}(B_1)$. Existem dois abertos U_1^* e W_1^* em V^*, $U_1^* \supset A_1$, e $W_1^* \supset B_1$, tais que, para todo $y \in B_1$ (resp. $x \in A_1$), as funções $H(.,y)$ (resp. $H(x,.)$) se prolongam a U_1^* (resp. W_1^*) e formam um conjunto limitado em $\mathcal{H}(U_1^*)$ (resp. $\mathcal{H}(W_1^*)$). Isto significa, restringindo convenientemente os abertos U_1^* e W_1^* que existe uma constante $M > 0$, tal que:

$$|H(z,y)| \leq M \quad \text{para todo } z \in U_1^* \text{ e } y \in B_1$$

e

$$|H(x,z)| \leqslant M \qquad \text{para todo} \quad x \in A_1 \quad e \quad z \in W_1^*$$

O Prof. F.E. Browder demonstrou ([15]) que se $H(x,y)$ é uma função separadamente analítica definida em $V \times W$, onde V e W são variedades analíticas reais e se as majorações acima estão verificadas, então $H(x,y)$ é uma função analítica.

As principais etapas da demonstração são as seguintes. Podemos, òbviamente, nos restringirmos ao caso em que $H(x,y)$ é uma função definida numa vizinhança de $(0,0)$ em $R^n \times R^n$.

Decorre, pela fórmula integral de Cauchy, aplicada numa e noutra variável que as desigualdades acima são equivalentes a condição (A): existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$|D_x^\alpha H(x,y)| \quad C_0^{|\alpha|} . \alpha !$$

$$|D_y^\beta H(x,y)| \quad C_0^{|\beta|} . \beta !$$

numa conveniente vizinhança do zero.

Para provarmos que H é analítica no ponto $(0,0)$ é suficiente provarmos a seguinte condição (B): existe uma constante $C_1 > 0$ tal que, quaisquer que sejam os índices α e β :

$$|(D_x^\alpha D_y^\beta H)(0,0)| < C_1^{|\alpha| + |\beta|} (|\alpha| + |\beta|) ! \quad .$$

Com efeito, se (B) está verificada, a série de potências:

$$H_1(x,y) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\beta!} (D_x^\alpha D_y^\beta H)(0,0) \quad x^\alpha . x^\beta$$

é majorada pela série numérica de termos positivos

$$[1 - \sum_j C_1(x_j + y_j)]^{-1} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\beta!} C_1^{|\alpha| + |\beta|} . |x|^\alpha . |y|^\beta$$

a qual converge para $|x|$ e $|y|$ suficientemente pequenos. Logo $H_1(x,y)$ é analítica em uma vizinhança conveniente de $(0,0)$.

Como, quaisquer que sejam α e β,

$$(D_x^\alpha D_y^\beta H)(0,0) = (D_x^\alpha D_y^\beta H_1)(0,0)$$

segue-se que $H(x,0)$ e $H_1(x,0)$ são ambas analíticas em uma vizinhança de 0 e têm mesmas derivadas em relação a x no ponto 0, logo $H(x,0) = H_1(x,0)$ em $|x| < r$. Anàlogamente $D_y^\beta H(x,0) = D_y^\beta H_1(x,0)$ para $|x| \leq r$. Finalmente, fixado x, $H(x,y)$ e $H_1(x,y)$ são ambas, como funções de y, analíticas em uma vizinhança da origem e têm as mesmas derivadas em $y = 0$. Segue-se que $H(x,y) = H_1(x,y)$ em uma vizinhança de $(0,0)$.

Trata-se, pois, de demonstrar que (A) acarreta (B). A demonstração se faz, construindo-se pelo método da transformada de Fourier, uma solução elementar do operador diferencial parcial com coeficientes constantes, definido em $R^n \times R^n$ por:

$$A_{2m} = (-\Delta_x)^m + (-\Delta_y)^m + 1$$

onde Δ representa o Laplaciano e estabelecendo certas majorações para a solução elementar, para cujos detalhes enviamos a [15].

Finalmente, os resultados dêsse Capítulo, servem de ponto de partida para o estudo de uma categoria mais geral de núcleos, ligados aos núcleos integrais que comparecem nos problemas de contôrno para as equações diferenciais parciais de tipo hiperbólico. Em um trabalho conjunto do autor e do Prof. F.E. Browder ([14]) a ser publicado pròximamente, estabelecemos o teorema 4 dêste Capítulo, bem como uma generalização dêsse resultado a um tipo mais geral de núcleo que entra na categoria acima mencionada.

CAPÍTULO IV

NÚCLEOS DE COMPOSIÇÃO EM GRUPOS DE LIE

1 - O produto de composição em um grupo de Lie.

Seja G um grupo de Lie, conexo, de dimensão n ; indicaremos por dx uma medida de Haar invariante à esquerda em G. Temos, se a é um elemento qualquer de G :

$$\int f(ax)dx = \int f(x)dx$$

e

$$\int f(x\, a^{-1})dx = \Delta(a)\int f(x)dx$$

onde Δ é a chamada função modular de G : $\Delta(x) > 0$ para todo $x \in G$; $\Delta(xy) = \Delta(x).\Delta(y)$, Δ é contínua ([13], pg. 39) e, na realidade é analítica (cf. [1], pg. 38, corolário 1).

Representaremos por $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}'(G)$ e $\mathcal{D}'(G)$, respectivamente, os espaços das funções infinitamente deriváveis e com suporte compacto; das infinitamente deriváveis; das distribuições com suporte compacto e das distribuições, definidas em G . Cada um dêsses espaços, suporemos munido de sua topologia usual, definida no Capítulo I.

Uma vez fixada a medida de Haar invariante à esquerda dx , estabelecemos a imersão natural $f \in \mathcal{E}(G) \longrightarrow \mu_f = f dx \in \mathcal{D}'(G)$, onde μ_p é a distribuição definida por:

$$< \mu_f, g > = \int_G g(x)\, f(x)dx ,$$

qualquer que seja $g \in \mathcal{D}(G)$. Quando não houver confusão possível, indicaremos μ_f por f .

Se T é uma distribuição de $\mathcal{D}'(G)$, indicaremos por spt T o suporte de T .

<u>Definição 1</u> - Se S e T são duas distribuições de $\mathcal{D}'(G)$, o <u>produto de composição de</u> S <u>por</u> T é a distribuição $S * T$ definida por:

$$< S * T , f > = < S_x \otimes T_y , f(x.y) >$$

onde $S_x \otimes T_y$ representa o <u>produto tensorial</u> da distribuição S pela distribuição T ([11] , tome I, II^e édition, pg. 106).

O segundo membro da igualdade acima estará <u>bem definido</u>, tôdas as vêzes que a intersecção dos suportes de $S_x \otimes T_y$ com o suporte de $f(x.y)$, $f \in \mathcal{D}(G)$, for compacto. Se $A = \text{spt } S$ e $B = \text{spt } T$, o suporte de $S_x \otimes T_y$ é $A \times B \subset G \times G$ ([11] , tome I, II^e éd.,pg. 110), enquanto que se K é o suporte de f , o suporte de $f(x.y)$ é

$$I_K = \{(x,y) \in G \times G : x.y \in K\},$$

de modo que, o produto de composição de S por T estará bem definido se, para todo compacto K de G , $(A \times B) \cap I_K$ for compacto ([11] , tome II, pg. 10).

É fácil ver que se A ou B forem <u>compactos</u> então $S * T$ está bem definido. No que se segue, suporemos sempre que uma das distribuições tem suporte compacto.

O produto de composição $S * T$ não é comutativo, a menos que G seja um grupo comutativo.

É fácil ver que o produto de composição é <u>associativo</u>:

$$(S * T) * R = S * (T * R)$$

se, pelo menos duas das distribuições que aí comparecem, tiverem suporte compacto.

<u>Teorema 1</u> - Se $h \in \mathcal{D}(G)$ (resp. $\mathcal{E}(G)$) e $T \in \mathcal{E}'(G)$ (resp. $\mathcal{D}'(G)$) então $T*h$ e $h*T$ são funções infinitamente deriváveis em G dadas por:

$$T*h(x) = < T_y, h(y^{-1}x) >$$

e

$$h*T(x) = < T_y, \Delta(y^{-1}) h(xy^{-1}) > .$$

Com efeito, temos para toda $f \in \mathcal{D}(G)$:

$$< T*h, f > = < T_x \otimes h(y), f(xy) > = < T_x, < h(y), f(xy) >>$$

([11], tome II, II^e édition, pg. 109, th. IV), onde a última expressão tem sentido pois $< h(y), f(xy) >$ como função de x é infinitamente derivável e tem suporte compacto se $h \in \mathcal{D}(G)$.

Mas:

$$< h(y), f(xy) > = \int_G h(y) f(xy) dy = \int_G h(x^{-1}y) f(y) dy = < f(y), h(x^{-1})y >$$

em virtude da invariância à esquerda da medida de Haar e é fácil ver que

$$< T_x, < h(y), f(xy) >> = < T_x, < f(y), h(x^{-1}y) >> = << T_x, h(x^{-1}y) >, f(y) >$$

([11] , mesma referência). Concluimos que:

$$< T*h, f > = << T_x, h(x^{-1}y) >, f(y) >$$

para tôda $f \in \mathcal{D}(G)$, donde mudando x por y que:

$$T*h(x) = < T_y, h(y^{-1}x) > ,$$

que é a primeira fórmula que desejávamos estabelecer.

Seja agora:

$$\langle h*T,\ f\rangle = \langle h(x)\otimes T_y,\ f(xy)\rangle = \langle T_y, \langle h(x), f(xy)\rangle\rangle$$

([11] , mesma referência).

Mas

$$\langle h(x), f(xy)\rangle = \int_G h(x)f(xy)dx = \Delta(y^{-1}) \int_G h(xy^{-1})f(x)dx =$$
$$= \langle f(x),\ \Delta(y^{-1})h(xy^{-1})\rangle .$$

De modo análogo obtemos:

$$\langle T_y, \langle h(x), f(xy)\rangle\rangle = \langle T_y, \langle f(x),\ \Delta(y^{-1})h(xy^{-1})\rangle = $$
$$= \langle\langle T_y,\ \Delta(y^{-1})h(xy^{-1})\rangle, f(x)\rangle$$

donde

$$h*T(x) = \langle T_y,\ \Delta(y^{-1})\ h(xy^{-1})\rangle$$

que é a segunda fórmula que desejávamos estabelecer.

Além disso, $T*h(x)$ e $h*T(x)$ são infinitamente deriváveis em virtude de [11], tome I, II^e éd., pg. 105, th.II.

Resulta do teorema 1 o seguinte

<u>Corolário</u> - Se $h \in \mathcal{D}(G)$ (resp. $\mathcal{E}(G)$) e se $T \in \mathcal{D}'(G)$ (resp. $\mathcal{E}'(G)$) é uma função g , então

$$g*h(x) = \int_G g(y)\ h(y^{-1}x)dy = \int_G g(xy^{-1})h(y)\Delta(y^{-1})dy$$

e

$$h*g(x) = \int_G g(y)\Delta(y^{-1})h(xy^{-1})dy = \int g(y^{-1}x)h(y)dy .$$

Vamos indicar por σ_s (resp. τ_s) a <u>translação à esquerda</u> (resp. <u>à direita</u>), $x \longrightarrow sx$ (resp. $x \longrightarrow xs$) em G . Se f é uma função definida em G , poremos

$$\sigma_s f(x) = f(sx) \quad \text{e} \quad \tau_s f(x) = f(xs) .$$

Se T é uma distribuição em G, definiremos a <u>transladada à esquerda</u> (resp. <u>à direita</u>), $\sigma_s T$ (resp. $\tau_s T$), de T por:

$$<\sigma_s T\ ,\ f> \ = \ <T,\ \sigma_{s^{-1}} f> \ (\text{resp.} <\tau_s T, f> = <T, \tau_{s^{-1}}\ f>),$$

qualquer que seja $f \in \mathcal{D}(G)$.

Indicaremos por $\delta_{(s)}$ a <u>medida de Dirac</u> no ponto $s \in G$ e, sempre que não houver confusão, por δ a medida de Dirac $\delta_{(e)}$, onde e é o elemento neutro de G.

<u>Teorema 2</u> - Valem os seguintes resultados:

i) $\delta_{(s)} * T = \sigma_{s^{-1}} T$ e $T * \delta_{(s)} = \tau_{s^{-1}} T$

ii) $\delta * T = T * \delta = T$

iii) $\delta_{(s)} * \delta_{(t)} = \delta_{(st)}$

qualquer que seja $T \in \mathcal{D}'(G)$.

Com efeito, os produtos de composição estão todos bem definidos pois pelo menos uma das distribuições que comparecem tem suporte compacto. Vamos verificar a primeira das duas relações i):

$$<\delta_{(s)} * T,\ f> = <\left[\delta_{(s)}\right]_x \otimes T_y, f(xy)> = <T_y, <\left[\delta_{(s)}\right]_x, f(xy)>> =$$

$$= <T_y,\ f(sy)> = <T,\ \sigma_s f> = <\sigma_{s^{-1}}\ T, f>\ ,$$

para tôda $f \in \mathcal{D}(G)$, donde $\delta_{(s)} * T = \sigma_{s^{-1}}\ T$.

A segunda relação se estabelece, fàcilmente, de modo análogo, sendo que ii) e iii) decorrem, imediatamente, de i), cqd.

Seja, agora, X_e um <u>vetor tangente</u> a G em e, como X_e tem por expressão local

$$X_e = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_e ,$$

X_e define a distribuição

$$< X_e, f > = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_e , \quad f \in \mathcal{D}(G) ,$$

cujo suporte é $\{ e \}$.

Seja X o <u>campo de vetores invariante à esquerda</u> definido por X_e . Representaremos por X_x o vetor tangente a $x \varepsilon G$ definido pelo campo X . Temos de acôrdo com as notações usuais:

$$X\, f(x) = X_x(f) = X_e(\sigma_x f) ,$$

para tôda $f \in \mathcal{E}(G)$.

Se $T \in \mathcal{D}'(G)$ poremos, por definição,

$$< XT, f > = - < T, Xf >$$

qualquer que seja $f \in \mathcal{D}(G)$.

<u>Teorema 3</u> - Se X é um campo de vetores invariante a esquerda,

$$XT = T * X\delta \quad , \text{ para tôda } T \in \mathcal{D}'(G) .$$

Observemos, inicialmente, que $X\delta$ é a distribuição $-X_e$. Com efeito,

$$< X\delta, f > = - < \delta, Xf > = - Xf(e) = -X_e(f) .$$

Pela definição do produto de composição, temos:

$$< T * X\delta, f > = < T_x \otimes (X\delta)_y , f(xy) > = < T_x, < (X\delta)_y, f(xy) >> .$$

Mas,

$$< (X\delta)_y, f(xy) > = - < (X_e)_y, f(xy) > = -X_e(\sigma_x f) = -Xf(x)$$

e substituindo na igualdade acima temos:

$$< T*X\delta, f > = - < T_x, Xf(x) > = < XT \; , \; f > \; ,$$

qualquer que seja $f \in \mathcal{D}(G)$, donde

$$T*X\delta \; = \; XT \; , \; \text{c.q.d.}$$

Para os campos de vetores Y <u>invariantes à direita</u> obtem-se um resultado análogo, ou seja

$$YT \; = \; Y\delta * T \; , \; \text{qualquer que seja} \; T \in \mathcal{D}'(G) \; .$$

Vimos, então, que a todo vetor tangente a G em e , corresponde um operador diferencial X , de ordem 1, invariante à esquerda, que se calcula sôbre as distribuições de G por meio de um produto de composição.

Êsse resultado se generaliza da seguinte maneira. X_e é uma particular distribuição cujo suporte é $\{ e \}$. É sabido que ([11], tome I, II^{e} éd., pg. 100, th. XXXV) que tôda distribuição D_e de suporte $\{ e \}$ é dada por:

$$< D_e \; , \; f > \; = \; \sum_{|p| \leq m} a_p \left[D^p f\right]_e$$

onde $p=(p_1, \ldots, p_n)$, $\left[D^p f\right]_e = \left(\dfrac{\partial^{p_1 + \ldots + p_n} f}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \right)_{x=0}$ e a_p constante.

A D_e corresponde (de modo análogo que a X_e), um <u>operador diferencial</u> D <u>invariante à esquerda</u> em G , dado por:

$$Df(x) \; = \; D_e(\sigma_x f) \; .$$

Reciprocamente, todo operador diferencial D , invariante à esquerda, provém de uma distribuição de suporte compacto $\{ e \}$. Com efeito, seja

$$D \; = \; \sum_{|p| \leq m} a_p(x) \, D^p$$

a expressão local de D num sistema de coordenadas no ponto e.
Seja D_e a distribuição de suporte $\{e\}$ definida por:

$$< D_e, f > = \sum_{|p| \leq m} a_p(e) [D^p f]_e .$$

Como D é invariante à esquerda e coincide em e com o operador diferencial invariante à esquerda definido por D_e, então ambos coincidem.

Definamos, agora, $\check{D}_e$ pela fórmula:

$$< \check{D}_e, f > = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} ap [D^p f]_e .$$

A $\check{D}_e$ corresponde o operador invariante à esquerda $\check{D}$, transposto de D.

Se $T \in \mathcal{D}'(G)$, poremos

$$< DT , f > = < T, \check{D}f > , \quad f \in \mathcal{D}(G) .$$

Decorre fàcilmente que $D\delta = \check{D}_e$.

Por outro lado temos qualquer que seja $f \in \mathcal{D}(G)$:

$$<T*D\delta, f> = <T_x \otimes (D\delta)_y, f(xy)> = < T_x, <(D\delta)_y , f(x.y)>> .$$

Mas

$$<(D\delta)_y, f(xy)> = <(\check{D}_e)_y, f(xy)> = \check{D}_e(\sigma_x f) = \check{D}f(x) ,$$

substituindo, vem:

$$< T*D\delta, f> = <T, \check{D}f> = < DT, f >$$

donde

$$T * D\delta = DT .$$

Demonstramos, pois, o

<u>Teorema 4</u> - Se D é um operador diferencial invariante à esquerda,

$$DT = T*D\delta \quad , \text{ para tôda } T \in \mathcal{D}'(G) .$$

Anàlogamente se A é um operador diferencial invariante à direita,

$$AT = A\delta * T \quad , \text{ para tôda } T \in \mathcal{D}'(G) .$$

Uma aplicação imediata dos teoremas 3 e 4 é a seguinte. Consideremos o produto de composição $S*T$ e seja D_1 (resp. D_2) um operador diferencial invariante à esquerda (resp. à direita). Temos:

$$D_1(S*T) = S*D_1(T) \quad (\text{resp. } D_2(S*T) = D_2\, S*T).$$

Com efeito:

$$D_1(S*T) = (S*T)*D_1\delta = S*D_1T$$

utilizando a associatividade do produto de composição e o teorema 4. A expressão análoga para D_2 se verifica da mesma maneira.

Vemos então que, num produto de composição, um operador diferencial invariante à esquerda (resp. à direita), opera à direita (resp. à esquerda).

Necessitamos, também, de uma expressão que estabeleça de que maneira um campo de vetores invariante à esquerda (resp. à direita), opera à esquerda (resp. à direita) num produto de composição. Essa expressão será dada pelos lemas que se seguem, os quais serão formulados para o caso de um produto de composição de duas funções infinitamente deriváveis uma das quais com suporte compacto, visando ùnicamente sua aplicação no número 5.

<u>Lema 1</u> - Sejam g e h duas funções de $\mathcal{E}(G)$, uma delas com suporte compacto e X um campo de vetores invariante à esquerda em G . Vamos demonstrar que:

$$X(g*h)\ (x) = \int [(\mathrm{ady}X)g]\ (xy^{-1})h(y)\,\Delta(y^{-1})dy\ .$$

Com efeito, X sendo um campo de vetores invariante à esquerda, sabemos que:

$$Xf(x) = \lim_{u\to o} \frac{f(x,\mathrm{expu}X) - f(x)}{u}$$

Segue-se que

$$X(g*h)(x) = \lim_{u\to o} \int\left[\frac{g(x\ \mathrm{expu}X.y^{-1}) - g(xy^{-1})}{u}\right] h(y)\,\Delta(y^{-1})dy =$$

$$= \int\left[\lim_{u\to o} \frac{g(x\ \mathrm{expu}X.y^{-1}) - g(xy^{-1})}{u}\right] h(y)\,\Delta(y^{-1})dy$$

o que é lícito em virtude de nossas hipóteses sôbre g e h, ou ainda:

$$X(g*h)(x) = \int\left[\lim_{u\to o} \frac{g(xy^{-1}.y\mathrm{expu}Xy^{-1}) - g(xy^{-1})}{u}\right] h(y)\Delta(y^{-1})dy$$

Como $y \exp u X y^{-1} = \exp(\mathrm{ady}(uX)) = \exp(u\ \mathrm{ady}(X))$ (cf. [1],pg.25), temos:

$$X(g*h)(x) = \int [(\mathrm{ady}X)g]\ (xy^{-1})\ h(y)\,\Delta(y^{-1})dy\ ,\quad \text{c.q.d.}$$

<u>Corolário</u> - Se $X_1,\ldots,X_m$ são m campos de vetores invariantes à esquerda, temos:

$$X_m\ldots X_2X_1(g*h)(x) = \int[(\mathrm{ady}\ X_m)\ldots(\mathrm{ady}\ X_1)g](xy^{-1})h(y)\Delta(y^{-1})dy.$$

A demonstração se faz por indução.

<u>Lema 2</u> - Nas condições do lema 1, se Y for um campo de vetores invariante à direita, temos:

$$Y(g*h)(x) = \int[(\mathrm{ad}\ y^{-1}Y)h](y^{-1}x)\ g(y)dy =$$

$$= \int[(\mathrm{ad}\ yx^{-1}Y)h](y).g(xy^{-1})\Delta(y^{-1})dy\ .$$

A demonstração é análoga ao lema 1.

Corolário - Se $Y_1,\ldots,Y_m$ são m campos de vetores invariantes à direita, temos:

$$Y_m\ldots Y_1(g*h)(x) = \int [(ady^{-1}Y_m)\ldots(ady^{-1}Y_1)h](y).g(xy^{-1}).\Delta(y^{-1})dy.$$

2 - <u>Transformações lineares que comutam com o produto de composição</u>.

O objetivo, nêsse número, é demonstrar dois teoremas que estabelecem para os grupos de Lie, resultados análogos aos que se encontram em [11], tome II, pg. 18 e 19, th.X, para o caso $G = R^n$.

Seja S uma distribuição fixa de $\mathcal{D}'(G)$ e consideremos a aplicação linear contínua

$$g \in \mathcal{D}(G) \longrightarrow S*g \in \mathcal{D}'(G)$$

([11], tome II, pg. 23, th. XII). Como já mencionamos, teorema 1, $S*g$ pertence a $\mathcal{E}(G)$.

Pelo teorema 2, temos:

$$\tau_{s^{-1}}(S*g) = (S*g)*\delta_{(s)} = S*(g*\delta_{(s)}) = S*\tau_{s^{-1}}\, g$$

(a associatividade vale pois g e $\delta_{(s)}$ têm suporte compacto), o que mostra que a aplicação linear contínua, acima definida, comuta com as translações à direita.

De modo análogo, verifica-se que $g \longrightarrow g*S$ comuta com as translações à esquerda.

Reciprocamente,

<u>Teorema 5</u> - Tôda aplicação linear e contínua $L: \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}'(G)$ que comuta com as translações à direita, i.e.

$$\tau_{s^{-1}} L(g) = L(\tau_{s^{-1}} g) ,$$

para todo $s \varepsilon G$, é do tipo $L(g) = S * g$, onde S é uma distribuição bem determinada de $\mathcal{D}'(G)$.

Com efeito, pelo teorema 2, dizer que L comuta com as translações à direita equivale a

$$L(g) * \delta_{(s)} = L(g * \delta_{(s)})$$

qualquer que seja $s \varepsilon G$.

Tôda $h \varepsilon \mathcal{D}(G)$ é limite em $\mathcal{E}'(G)$ de combinações lineares finitas de medidas de Dirac ([11], tome II, pg. 17):

$$h = \lim_j \sum_\mu a_{\mu j} \cdot \delta_{(s_{\mu j})} .$$

Como $g * h \varepsilon \mathcal{D}(G)$ (cf. teorema 7), então

$$g * h = \lim_j \sum_\mu a_{\mu j} \left[g * \delta_{(s_{\mu j})} \right]$$

o limite sendo calculado <u>em</u> $\mathcal{D}$ (cf. [11], mesma referência). Concluímos que

$$L(g * h) = \lim_j \sum_\mu a_{\mu j} L(g * \delta_{(s_{\mu j})}) =$$

$$= \lim_j \sum_\mu a_{\mu j} \left[L(g) * \delta_{(s_{\mu j})} \right] = L(g) * h ,$$

o que prova que L comuta com os produtos de composição à direita com funções de $\mathcal{D}(G)$.

Seja, agora, (α_i) uma sequência de funções $\mathcal{D}(G)$ que converge para a distribuição δ em $\mathcal{E}'(G)$ ([11], tome II, pg. 22).

Da continuidade do produto de composição, segue-se que $\alpha_i * g \longrightarrow$ $\longrightarrow \delta * g = g$ em $\mathcal{D}$ ([11], tome II, pg.23, th.XII); portanto

$$L(\alpha_i * g) \longrightarrow L(g) \qquad \text{em } \mathcal{D}'(G) .$$

Mas, pelo que demonstramos acima,

$$L(\alpha_i * g) = L(\alpha_i) * g .$$

Portanto, a sequência $L(\alpha_i)*g$ converge em $\mathcal{D}'(G)$ para $L(g)$, qualquer que seja $g \in \mathcal{D}$; donde decorre que $L(\alpha_i)$ <u>converge em</u> $\mathcal{D}'(G)$ em virtude do théoreme XXIII, 2º de [11], tome II, pg. 53. Seja $S \in \mathcal{D}'(G)$ êsse limite, que representaremos também por $S = L(\delta)$. Temos:

$$L(g) = \lim_i L(\alpha_i * g) = \lim_i L(\alpha_i) * g = S * g \quad ,$$

$g \in \mathcal{D}(G)$, c.q.d.

Vale um resultado semelhante para aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}'$ que comutam com as translações à esquerda.

Resulta imediatamente que se $L: \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$ é uma aplicação linear e contínua que comuta com as translações à direita (resp. à esquerda) , L se prolonga a uma aplicação linear contínua de $\mathcal{E}'(G)$ em $\mathcal{D}'(G)$.

<u>Corolário</u> - Tôda aplicação linear e contínua L de $\mathcal{E}'(G)$ em $\mathcal{D}'(G)$ que comuta com as translações à direita (resp. à esquerda) é do tipo

$$L(T) = S * T \qquad (\text{resp. } L(T) = T * S)$$

onde S é uma distribuição bem determinada de $\mathcal{D}'(G)$.

Com efeito, L é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{D}(G)$

em $\mathcal{D}'(G)$ pois a topologia induzida por $\mathcal{E}'(G)$ é menos fina que a topologia de $\mathcal{D}(G)$ e L comuta com as translações à direita (resp. à esquerda).

Teorema 6 - A aplicação linear e contínua $L: \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}'(G)$ comuta com as translações à direita (resp. à esquerda) se e sòmente se comutar com os campos de vetores invariantes à esquerda (resp. à direita).

Com efeito, se L comuta com as translações à direita, L é do tipo

$$L(g) = S*g .$$

Seja X um campo de vetores invariante à esquerda. Pelo teorema 3, temos:

$$X(L(g)) = X(S*g) = (S*g)*X\delta = S*(g*X\delta) = S*Xg = L(Xg)$$

e portanto, L comuta com os campos de vetores invariantes à esquerda.

Recìprocamente, suponhamos essa condição satisfeita e vamos demonstrar que $\tau_{s^{-1}} L(g) = L(\tau_{s^{-1}} g)$, $g \in \mathcal{D}(G)$.

Da definição de transladado de uma distribuição decorre que

$$< \tau_{s^{-1}} L(g) , \tau_{s^{-1}} f > = < L(g),f > .$$

Seja

$$h(s) = < L(\tau_{s^{-1}} g), \tau_{s^{-1}} f > = < L(g(s^{-1}x)), f(x^{-1}x) >$$

e vamos demonstrar que h(s) é uma função constante em G . Consideramos em uma vizinhança suficientemente pequena de e , um sistema de coordenadas que a e faz corresponder a origem e vamos indicar por $(s_1,\ldots,s_n)$ e $(x_1,\ldots,x_n)$ as coordenadas de s e x. Temos, para todo $i=1,\ldots,n$:

$$\frac{\partial h(s)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial s_i} < L(\tau_{s^{-1}} g), \tau_{s^{-1}} f > =$$

$$= < \frac{\partial}{\partial s_i} [L(\tau_{s^{-1}} g)], \tau_{s^{-1}} f > + < L(\tau_{s^{-1}} g), \frac{\partial}{\partial s_i} (\tau_{s^{-1}} f)> =$$

$$= < L[\frac{\partial}{\partial s_i} g(x^{-1}x)], f(s^{-1}x)> + <L(g(s^{-1}x)), \frac{\partial}{\partial s_i} (f(s^{-1}x))>,$$

pois L comutando com os campos de vetores invariantes à esquerda, comutará com os $\frac{\partial}{\partial s_i}$. Porém, $\frac{\partial}{\partial s_i} g(s^{-1}x) = - \frac{\partial}{\partial x_i} g(s^{-1}x)$; substituindo e levando em conta que L comuta com $\frac{\partial}{\partial x_i}$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial s_i} h(s) = - < \frac{\partial}{\partial x_i} [L(g(s^{-1}x))], f(s^{-1}x)> + <L(g(s^{-1}x)), \frac{\partial}{\partial s_i} (f(s^{-1}x))> =$$

$$= < L(\tau_{s^{-1}} g) , \frac{\partial}{\partial x_i} f(s^{-1}x) + \frac{\partial}{\partial s_i} f(s^{-1}x) >$$

que é zero pois a soma que comparece no produto escalar é nula. Concluimos que $h(s)$ é constante numa conveniente vizinhança de e. Um argumento análogo mostra que $h(s)$ é constante numa vizinhança de cada ponto de G ; como G é conexo, $h(s)$ é constante em G.

Como $h(e) = < L(g), f >$, concluimos que

$$< L(\tau_{s^{-1}} g), \tau_{s^{-1}} f > = < L(g), f > = < \tau_{s^{-1}} L(g), \tau_{s^{-1}} f >$$

donde $\tau_{s^{-1}} L(g) = L(\tau_{s^{-1}} g)$, c.q.d.

<u>Corolário</u> - A aplicação linear e contínua $L: \mathcal{E}'(G) \to \mathcal{D}'(G)$ comuta com as translações à direita (resp. à esquerda) se e sòmente se comutar com os campos de vetores invariantes à esquerda (resp. à direita). - Demonstração imediata.

3 - <u>Suporte do produto de composição; propriedades</u>.

Nêsse número transpomos para os grupos de Lie, os resultados de [9], exposé 5, théorème 1, proposition 1 e corollaire.

<u>Teorema 7</u> - Sejam S e T duas distribuições; suponhamos que $\text{spt } S \subset A$, fechado e $\text{spt } T = B$, compacto. Nessas condições o suporte de $S*T$ está contido em $A.B$.

Seja, com efeito, $f \in \mathcal{D}(G)$ cujo suporte está contido em $c(A.B)$ (complementar de $A.B$). Pela definição 1, temos

$$< S*T , f > = < S_x \otimes T_y, f(xy) > .$$

Já mencionamos que o suporte de $S_x \otimes T_y$ é $A \times B$ e, é fácil ver que, o suporte de $f(xy)$ está contido no aberto

$$\{ (x,y) \in G \times G : x.y \in c(A.B) \} ,$$

o qual é disjunto de $A \times B$. Segue-se que $< S_x \otimes T_y, f(x.y) > = 0$ ou seja

$$< S*T, f > = 0$$

para tôda $f \in \mathcal{D}(G)$ cujo suporte está contido em $c(A.B)$; consequentemente $S*T$ é nula nêsse aberto logo seu suporte estará contido em $A.B$, c.q.d.

Se M e N são dois conjuntos quaisquer de G, vamos indicar por $M^{-1}.N$ o conjunto

$$\{ x^{-1}.y : x \in M , y \in N \} .$$

$M^{-1}.N$ será aberto se um qualquer dêsses dois conjuntos for aberto.

Seja V uma vizinhança <u>compacta</u> de $e \in G$ e seja O um conjunto aberto qualquer de G. O_V será o conjunto

$$O_V = c(V.c(O)) .$$

O_V é aberto pois sendo V compacto e $c(O)$ fechado, $V.c(O)$ é fechado. Além disso O_V está contido em O pois $c(O) \subset V.c(O)$.

Se V_1 e V_2 são duas vizinhanças compactas de e tais que $V_1 \subset V_2$ é fácil verificar que $O_{V_1} \supset O_{V_2}$.

Finalmente, se V percorre um sistema fundamental de vizinhanças de e , <u>compactas</u> e <u>simétricas</u>, a reunião de O_V é O . Com efeito, se $x \in O$, é possível determinar uma vizinhança compacta e simétrica V de e tal que $Vx \cap c(O) = \emptyset$. Assim sendo, $x \notin V.c(O)$, caso contrário, $x = v.a$ com $v \in V$ e $a \in c(O)$, logo $v^{-1}x = a$ e como $v^{-1} \in V$ pois V é simétrica, teriamos um absurdo. Portanto, $x \in O_V$.

Indiquemos, ainda, por O'_V o conjunto $c(c(O).V)$. É claro que O'_V gosa das mesmas propriedades acima mencionadas para O_V .

<u>Teorema 8</u> - Sejam S e T duas distribuições, suponhamos que S se anula em $O\,B^{-1}$ onde O é um conjunto aberto de G e $B = \text{spt } T$ é compacto. Nessas condições $S*T$ se anula em O .

Temos, com efeito, $\text{spt } S \subset c(OB^{-1})$ e $\text{spt } T = B$. Decorre pelo teorema 7 que $\text{spt } S*T \subset c(OB^{-1}).B$. Sejam $x \in c(OB^{-1})$ e $y \in B$; se $xy \in O$, então $x \in Oy^{-1} \subset OB^{-1}$ o que é absurdo. Logo $c(OB^{-1}).B \subset c(O)$ e, portanto, $S*T$ se anula em O , c.q.d.

<u>Corolário 1</u> - Nas mesmas condições do teorema, se S se anula em $(OB^{-1})_V$, então $S*T$ se anula em O_V .

Com efeito, spt $S \subset c[(OB^{-1})_V]$ e spt $T = B$. De novo, pelo teorema 7, spt $S*T \subset c[(OB^{-1})_V].B = V.c(OB^{-1}).B$. No decorrer da demonstração do teorema 8, vimos que $c(OB^{-1}).B \subset c(O)$; segue-se que:

$$V.\ c(OB^{-1}).B \subset V.\ c(O) = c(O_V)$$

donde concluimos que $S*T$ se anula em O_V, c.q.d.

Corolário 2 - Sejam B um compacto e V uma vizinhança compacta e simétrica de e, suponhamos que a distribuição S se anula em OB^{-1} e que o suporte da distribuição T esteja contido em $B.V$. Nessas condições, $S*T$ se anula em O_V'.

A demonstração é análoga às anteriores: decorre de nossas hipóteses que spt $S*T \subset c(OB^{-1}).B.V \subset c(O).V = c(O_V')$, donde $S*T$ se anula em O_V', c.q.d.

4 - Núcleos de composição.

Seja $S \in \mathcal{D}'(G)$ uma distribuição fixa, já mencionamos (nº 2) que a aplicação linear

$$g \in \mathcal{D}(G) \longrightarrow S*g \in \mathcal{D}'(G)$$

é contínua. Pelo teorema dos núcleos, a ela corresponde um único núcleo $S_{x,y} \in \mathcal{D}'(G \times G)$.

Anàlogamente, a aplicação linear e contínua

$$g \in \mathcal{D}(G) \longrightarrow g*S \in \mathcal{D}'(G),$$

corresponde um único núcleo $S'_{x,y} \in \mathcal{D}'(G \times G)$.

Definição 2 - O núcleo $S_{x,y}$ (resp. $S'_{x,y}$) denomina-se núcleo de composição à esquerda (resp. à direita) associado à distribuição S.

Teorema 9 - O núcleo $S_{x,y}$ (resp. $S'_{x,y}$) é caracterizado pela relação

$$(1) \qquad \langle S_{x,y}, \Phi(x,y)\rangle = \langle S_x, \int_G \Phi(xy,y)dy\rangle$$

(resp. $\langle S'_{x,y}, \Phi(x,y)\rangle = \langle S_y, \int_G \Phi(x,xy)dx\rangle$), onde $\Phi \in \mathcal{D}(G\times G)$.

Com efeito, a aplicação linear L_S de $\mathcal{D}(G)$ em $\mathcal{D}'(G)$ (cf. Cap.I, nº 3, def. 1) é a aplicação $g \longrightarrow S*g$. Temos então, quaisquer que sejam $f,g \in \mathcal{D}(G)$, (conforme o Cap. I, nº 3 e nº 1 dêsse Capítulo, def. 1):

$$\langle S_{x,y}, f(x).g(y)\rangle = \langle L_S(g),f\rangle = \langle S*g,f\rangle =$$
$$= \langle S_x \otimes g(y), f(x.y)\rangle = \langle S_x, \langle g(y),f(x.y)\rangle\rangle =$$
$$= \langle S_x, \int_G g(y)\, f(x.y)dy\rangle,$$

o que estabelece (1) quando $\Phi(x,y) = f(x).g(y)$. Como $\mathcal{D}(G)\otimes\mathcal{D}(G)$ é denso em $\mathcal{D}(G\times G)$ ([11], tome I, II^e édit., pg. 108) (1) vale para tôda $\Phi \in \mathcal{D}(G\times G)$, c.q.d. Anàlogamente para $S'_{x,y}$.

De acôrdo com a def. 4 do Cap. I, é fácil ver que todo núcleo de composição à esquerda (resp. à direita) associado à distribuição S é regular.

Com efeito, por um lado, L_S (resp. L'_S) aplica $\mathcal{D}(G)$ em $\mathcal{E}(G)$, pelo teorema 1 e, por outro lado, se prolonga, a uma aplicação linear contínua de $\mathcal{E}'(G)$ em $\mathcal{D}'(G)$, pois $S*T$ (resp.

$T*S$) está bem definido quando $T \in \mathcal{E}'(G)$ e depende continuamente de T em $\mathcal{E}'(G)$ ([11], tome II, pg. 13, th. V).

Além disso, se $S_{x,y}$ (resp. $S'_{x,y}$) é o núcleo de composição à esquerda (resp. à direita) associado a S e $\delta_{(s)}$ a medida de Dirac no ponto $s \in G$, então $L_S(\delta_{(s)}) = \tau_{s^{-1}}S$ (resp. $L_{S'}(\delta_{(s)}) = \sigma_{s^{-1}}S$).

Com efeito,

$$L_S(\delta_{(s)}) = S*\delta_{(s)} = \tau_{s^{-1}}S \text{ , pelo teorema 2,c.q.d.}$$

Anàlogamente para $L_{S'}(\delta_{(s)})$.

Vamos estabelecer, a seguir, duas condições necessárias e suficientes para que um dado núcleo seja de composição à esquerda (resp. à direita) associado a uma distribuição conveniente.

<u>Definição 3</u> - Chama-se <u>transladado à esquerda</u> (resp. <u>à direita</u>) <u>paralelamente à diagonal</u> de $G \times G$ <u>do núcleo</u> $K_{x,y}$ <u>por</u> s , o núcleo $\sigma_s K_{x,y}$ (resp. $\tau_s K_{x,y}$) definido por:

$$<\sigma_s K_{x,y}, \Phi(x,y)> = <K_{x,y}, \Phi(s^{-1}x, s^{-1}y)>$$

(resp. $<\tau_s K_{x,y}, \Phi(x,y)> = <K_{x,y}, \Phi(xs^{-1}, ys^{-1})>$) , qualquer que seja $\Phi \in \mathcal{D}(G\times G)$.

<u>Definição 4</u> - O núcleo $K_{x,y}$ se diz <u>invariante por translações à esquerda</u> (resp. <u>à direita</u>) <u>paralelamente à diagonal</u> se

$$\sigma_s K_{x,y} = K_{x,y} \quad \text{(resp. } \tau_s K_{x,y} = K_{x,y} \text{)} ,$$

qualquer que seja $s \in G$.

<u>Teorema 10</u> - Uma condição necessária e suficiente para que o núcléo $K_{x,y}$ seja núcleo de composição à esquerda

(resp. à direita) é que $K_{x,y}$ seja invariante por translações à direita (resp. à esquerda) paralelamente à diagonal de $G \times G$.

<u>A condição é necessária</u>. Suponhamos, com efeito, que $K_{x,y}$ seja um núcleo de composição à esquerda associado à distribuição $S \in \mathcal{D}'(G)$. Temos quaisquer que sejam f, $g \in \mathcal{D}(G)$:

$$< K_{x,y}, f(x).g(y)> = <S*g, f>.$$

Queremos demonstrar que $\tau_s K_{x,y} = K_{x,y}$. Temos de acôrdo com a definição 3:

$$<\tau_s K_{x,y}, f(x).g(y)> = <K_{x,y}, f(xs^{-1})g(ys^{-1})> =$$

$$= <K_{x,y}, \tau_{s^{-1}} f.\tau_{s^{-1}} g> = < S*\tau_{s^{-1}} g, \tau_{s^{-1}} f>.$$

Mas, de acôrdo com a observação que preceder o teorema 5 no nº 2,

$$S*\tau_{s^{-1}} g = \tau_{s^{-1}}(S*g).$$

Substituindo, vem:

$$< \tau_{s^{-1}}(S*g), \tau_{s^{-1}} f> = < S*g, f>$$

(cf. definição de transladado de uma distribuição).

Concluimos então que:

$$< \tau_s K_{x,y}, f(x).g(y)> = < K_{x,y}, f(x).g(y)>$$

quaisquer que seja f, $g \in \mathcal{D}(G)$; logo $\tau_s K_{x,y} = K_{x,y}$, c.q.d.

<u>A condição é suficiente</u>. Se $\tau_s K_{x,y} = K_{x,y}$, decorre daqui que $L_K: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ comuta com as translações à direita. Com efeito, temos:

$$<\tau_s(L_K(g)), f> = < L_K(g), \tau_{s^{-1}} f> = < K_{x,y}, (\tau_{s^{-1}} f).g> =$$

$$= < \tau_{s^{-1}} K_{x,y} \, , \, (\tau_{s^{-1}} f).g > = < K_{x,y}, f.(\tau_s g) > = < L_K(\tau_s g), f >$$

donde $\qquad \tau_s(L_K(g)) = L_K(\tau_s g)$.

Resulta pelo teorema 5 que $L_K(g) = S*g$ onde $S = L_K(\delta)$, logo $K_{x,y}$ é o núcleo de composição à esquerda associado a S , c.q.d.

Seja, agora, X um campo de vetores invariante à esquerda em G e $K_{x,y}$ um núcleo de $\mathcal{D}'(G\times G)$.

Definição 5 - $X_x(K_{x,y})$ (resp. $X_y(K_{x,y})$) representa o núcleo definido por

$$< X_x(K_{x,y}), \Phi(x,y) > = - < K_{x,y}, X_x(\Phi(x,y)) >$$

(resp. $\qquad < X_y(K_{x,y}), \Phi(x,y) > = - < K_{x,y}, X_y(\Phi(x,y)) >$) ,

para tôda $\Phi \in \mathcal{D}(G\times G)$.

Em particular, quando $\Phi(x,y) = f(x).g(y)$ com $f, g \in \mathcal{D}(G)$, teríamos

$$< X_x(K_{x,y}), f(x).g(y) > = < K_{x,y}, (Xf(x)).g(y) >$$

respectivamente

$$< X_y(K_{x,y}), f(x).g(y) > = < K_{x,y}, f(x)(Xg(y)) > ,$$

expressões que, por sua vez, definem $X_x(K_{x,y})$ (resp. $X_y(K_{x,y})$).

Teorema 11 - Uma condição necessária e suficiente para que o núcleo $K_{x,y}$ seja núcleo de composição à esquerda (resp. à direita) é que

$$(X_i)_x(K_{x,y}) = -(X_i)_y(K_{x,y})$$

(resp. $(Y_i)_x(K_{x,y}) = -(Y_i)_y(K_{x,y})$) , $i=1,2,\ldots,n$, onde os X_i (resp. Y_i) formam uma base da álgebra dos campos de vetores invariantes à esquerda (resp. à direita).

Suponhamos que $K_{x,y}$ seja um núcleo de composição à esquerda e que

$$L_K(g) = S*g \quad , \quad g \in \mathcal{D}(G) \; .$$

Seja X_i , $1 \leqslant i \leqslant n$, uma base da álgebra dos campos de vetores invariantes a esquerda em G . Temos, pelos teoremas 5 e 6:

$$X_i(L_K(g)) = L_K(X_i g) \; .$$

Mas, para tôda $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$< X_i(L_K(g(y)),f(x)> = - < L_K(g(y)), X_i\, f(x)> =$$

$$= -< K_{x,y}, X_i\, f(x).g(y)> = < (X_i)_x\, K_{x,y}, f(x).g(y)>$$

e

$$< L_K(X_i(g(y))), f(x)> = < K_{x,y}, f(x).(X_i)_y g(y)> =$$

$$= - < (X_i)_y K_{x,y}, f(x).g(y)>$$

Igualando as expressões obtidas, obtemos:

$$< (X_i)_y\, K_{x,y}, f(x).g(y)> = - < (X_i)_y\, K_{x,y}, f(x).g(y)>$$

quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{D}(G)$, donde

$$(X_i)_x\, K_{x,y} = -(X_i)_y\, K_{x,y} \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \; .$$

Reciprocamente, suponhamos verificada essa relação e vamos demonstrar que a aplicação $L_K: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ associada a $K_{x,y}$, comuta com os campos invariantes à esquerda X_i , $1 \leqslant i \leqslant n$. Temos quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{D}(G)$:

$$< X_i(L_K(g(y)),f(x)> = - < L_K(g(y)), X_i f(x)> = -< K_{x,y}, X_i f(x).g(y)> =$$

$$= < (X_i)_x K_{x,y}, f(x).g(y)> = -< (X_i)_y K_{x,y}, f(x).g(y)> =$$

$= \langle K_{x,y}, f(x).\ X_i\ g(y)\rangle = \langle L_K(X_i\ g(y)), f(x)\rangle$ o que prova que:

$$X_i(L_K(g)) = L_K(X_i g) ,$$

para todo $g \in \mathcal{D}(G)$ e $1 \leq i \leq n$. Decorre que a aplicação L_K comuta com todos os campos de vetores X, invariantes à esquerda pois os X_i constituem uma base da álgebra dêsses últimos. Pelo teorema 6 e 5, segue-se que L_K é do tipo

$$L_K(g) = S*g \quad , \quad S \in \mathcal{D}'(G)$$

donde $K_{x,y}$ é o núcleo de composição à esquerda associado a S.

5 - <u>Núcleos de composição muito regulares e analìticamente muito regulares</u>.

Seja $S_{x,y}$ (resp. $S'_{x,y}$) o núcleo de composição à esquerda (resp. à direita) associado à distribuição S. Vimos, no número anterior, que

$$L_S(\delta) = S \qquad (\text{resp. } L_{S'}(\delta) = S).$$

<u>Teorema 12</u> - Uma condição necessária e suficiente para que $S_{x,y}$ (ou $S'_{x,y}$) seja uma função infinitamente derivável (resp. analítica) no complementar da diagonal Δ de $G\times G$ é que S seja uma função infinitamente derivável (resp. analítica) no complementar de $\{e\}$.

<u>A condição é necessária</u>. Seja $H(x,y)$ a restrição de $S_{x,y}$ a $c(\Delta)$. Já vimos que $L_H(\delta) = H(x,e)$, (cf. Cap.III, lema 2); a função $H(x,e)$ está definida e é infinitamente derivável (resp. analítica) em $c(\{e\})$. Por outro lado, $L_H(\delta)$ coincide com $L_S(\delta) = S$ em $c(\{e\})$, o que prova que S é infinita-

mente derivável (resp. analítica) em $c(\{e\})$. Demonstração análoga no caso de núcleo de composição à direita.

Observemos que, sendo $S_{x,y}$ (resp. $S'_{x,y}$) núcleo de composição à esquerda (resp. à direita), $S_{x,y}$ (resp. $S'_{x,y}$) é invariante por translações à direita (resp. à esquerda) paralelamente à diagonal (cf. teorema 10); logo $H(x,y)$ (resp. $H'(x,y)$) tem a mesma propriedade. Temos, então:

$$H(x,y) = \tau_{y^{-1}} H(x,y) = H(x.y^{-1},e)$$

(resp. $H'(x,y) = \sigma_{y^{-1}}H'(x,y) = H(y^{-1}.x,e)$), de modo que, podemos por:

$$H(x,y) = h(x.y^{-1}) \quad (\text{resp. } H'(x,y) = h(y^{-1}.x))$$

onde $h(x) = H(x,e) = H'(x,e)$ está definida em $c(\{e\})$.

<u>A condição é suficiente</u>. Suponhamos S infinitamente derivável (resp. analítica) em $c(\{e\})$ e vamos indicar por $h(x)$ essa função. Obviamente, $h(x.y^{-1})$ (resp. $h(y^{-1}.x)$) é uma função infinitamente derivável (resp. analítica) em $c(\Delta)$, que indicaremos por $H(x,y)$ (resp. $H'(x,y)$).

Vamos demonstrar que o núcleo de composição à esquerda (resp. à direita), $S_{x,y}$ (resp. $S'_{x,y}$) coincide com $H(x,y)$ (resp. $H'(x,y)$) em $c(\Delta)$, ou seja que

$$< S_{x,y}, \Phi(x,y)> = < H(x,y), \Phi(x,y)>$$

(relação análoga para $S'_{x,y}$), qualquer que seja $\Phi \in \mathcal{D}(G\times G-\Delta)$. É bastante demonstrar essa igualdade para $\Phi(x,y) = f(x).g(y)$, com $f, g \in \mathcal{D}(G)$ tais que $spt(f) \cap spt(g) = \emptyset$. Temos:

$$< S_{x,y}, f(x).g(y)> = < S*g, f > .$$

Por outro lado,

$$< H(x,y), f(x)g(y) > = \int\int_{G\times G} h(x.y^{-1})f(x).g(y)dxdy =$$

$$= \int_G f(x)dx \int_G h(xy^{-1})g(y)dy \; .$$

Pelo corolário do teorema 1, a integração na variável y representa $h*g(x)$, logo, podemos escrever:

$$< H(x,y), f(x).g(y) > = < h*g, f > \; .$$

Como os suportes de f e g são disjuntos, existem U e V abertos, $U \supset spt(f)$, $V \supset spt(g)$ e tais que $U \cap V = \emptyset$. Como $U.(spt(g))^{-1}$ não contém e, nêsse aberto, S e $h(x)$ coincidem; logo, pelo teorema 8,

$$S*g = h*g$$

em U, donde

$$< S*g, f > = < h*g , f >$$

o que estabelece a igualdade que queríamos provar, c.q.d.

Teorema 13 - Uma condição necessária e suficiente para que o núcleo $S_{x,y}$ (ou $S'_{x,y}$) seja muito regular (resp. anallticamente muito regular) é que S seja uma função infinitamente derivável (resp. analítica) no complementar de $\{e\}$.

A condição necessária e imediata pois como δ é idênticamente nula em $c\{e\}$, da definição de núcleo muito regular (resp. analìticamente muito regular), (cf. Cap.I, def. 5 e Cap.III, def. 3), decorre que $S = L_S(\delta)$ é uma função infinitamente derivável (resp. analítica) em $c(\{e\})$.

A condição suficiente é também trivial, no caso infinitamente derivável. Ela decorre do teorema 12 e do teorema 1 do Cap. I.

Trata-se de demonstrar o caso analítico. Utilisaremos aquí o corolário 2 do teorema 2 do Capítulo III: como $S_{x,y}$ é regular e, pelo que demonstramos no teorema 12, analítica em $c(\Delta)$, basta verificar a condição 3) do referido corolário. Para isso vamos estabelecer alguns lemas, dos quais os lemas 4 e 5 são variantes, para o caso de grupos de Lie, das proposições 3 e 4, exposé 5 e proposição 1, exposé 6 de [9].

Lema 3 - Seja $(U, x_1,\ldots,x_n)$ uma carta local em G e seja

$$D^p = \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}}$$

um operador diferencial de ordem $|p| = p_1+\ldots+p_n$ em U. Se $X_1,X_2,\ldots,X_n$ formam uma base da álgebra dos campos de vetores invariantes a esquerda em G, D^p se exprime por:

$$(1) \qquad D^p = \sum_{|q|\leq|p|} a_{q_1\ldots q_n}(x)\, X_1^{q_1}\ldots X_n^{q_n}$$

onde os coeficientes $a_{q_1\ldots q_n}(x)$ são funções analíticas em U. Recìprocamente, $X_1^{p_1}\ldots X_n^{p_n}$ se exprime por:

$$(2) \qquad X_1^{p_1}\ldots X_n^{p_n} = \sum_{|q|\leq|p|} b_{q_1\ldots q_n}(x).D^q$$

onde os coeficientes $b_{q_1\ldots q_n}(x)$ são funções analíticas em U. Vale um resultado análogo se em lugar dos X_i, $1\leq i\leq n$, considerarmos uma base da álgebra dos campos de vetores invariantes a direita em G .

Com efeito, é sabido que

(3) $$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

onde os $a_{ij}(x)$ são funções analíticas em U . Por recorrência, é fácil estabelecer (2). Por outro lado, como os campos de vetores $X_1,\ldots,X_n$ são linearmente independentes em todo ponto de G e $\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$ linearmente independentes em todo o ponto de U , podemos resolver (3) em relação aos $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, em U, e os coeficientes obtidos serão funções analíticas em U . Por recorrência, estabelecemos (1).

Observemos que, se f é uma função analítica em U , para todo compacto K de U , existe uma constante $C > 0$ tal que

(4) $$|D^p f(x)| \leq C^{|p|} . p! \quad \text{em} \quad K .$$

Como o número de parcelas de (2) é dado por:

$$\sum_{m=o}^{p} \binom{n - m + 1}{m} \leq 2^{n+|p|-1} ,$$

indicando por M um limite superior do módulo das funções $b_{q_1,\ldots,q_n}(x)$ em K , temos a majoração:

$$\left|X_1^{p_1}\ldots X_n^{p_n}(f)\right| \leq M. \, 2^{n+|p|-1} . C^{|p|} . p ! ,$$

ou seja,

(5) $$\left|X_1^{p_1}\ldots X_n^{p_n}(f)\right| \leq C_1^{|p|} . p ! \quad \text{em} \quad K ,$$

com uma escolha conveniente da constante C_1 . Reciprocamente, (5) acarreta (4).

<u>Corolário</u> - Tôda distribuição T , de suporte compacto, se representa por uma soma finita

$$T = \sum_{p_1 \dots p_n} X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} (f_{p_1 \dots p_n})$$

onde as $f_{p_1 \dots p_n}$ são funções contínuas de suporte compacto contido em uma vizinhança arbitrária do suporte de T .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que o suporte B de T está contido numa carta local $(U, x_1, \dots, x_n)$; caso contrário, poderíamos reconduzir a esta situação utilizando uma partição infinitamente derivável em G .

Pelo teorema XXVI de [11], tome I, 2ª édit., pg.91, T se representa por uma soma finita de um número finito de derivadas (no sentido das distribuições) de funções contínuas de suporte compacto, contidas numa vizinhança arbitrária de B , a qual podemos supor contida na carta local U :

$$T = \sum_q D^q G_q \quad .$$

Utilisando (1) acima, cada parcela dêsse somatório pode se escrever:

$$D^q G_q = \sum_{r \leq q} a_{r_1 \dots r_n}(x) \, X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} \, G_q$$

e, não é dificil verificar que esta soma pode se representar por $\sum_{r \leq q} X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} (f_{r_1 \dots r_n})$ donde decorre a expressão desejada para T .

Obtem-se uma expressão análoga se, em lugar de campos de vetores invariantes à esquerda, considerarmos campos de vetores invariantes à direita.

<u>Lema 4</u> - Seja S uma distribuição que, em $c(\{e\})$, é uma função infinitamente derivável (resp. analítica) e T uma distribuição de suporte compacto B. Nessas condições, a distribuição $S*T$ é uma função infinitamente derivável (resp. analítica) em $c(B)$.

Com efeito, seja $O = c(B)$. Pelo teorema 8, sabemos que os valores de $S*T$ em O, dependem ùnicamente dos valores de S em OB^{-1}. Como $B \cap O = \emptyset$, $OB^{-1} = c(\{e\})$, logo S é, de acôrdo com nossas hipóteses, uma função infinitamente derivável (resp. analítica) em OB^{-1}.

a) <u>caso infinitamente derivável</u>. Sejam V e W duas vizinhanças compactas e simétricas de e e suponhamos que $W \subset V$. Como S é infinitamente derivável em OB^{-1}, é possível determinar uma função infinitamente derivável f que coincida com S no aberto $(OB^{-1})_V$ e cujo suporte está contido em $(OB^{-1})_W$.

O produto da composição $f*T$ é, pois, uma função infinitamente derivável em G (teorema 1).

Por outro lado, $S - f$ se anula em $(OB^{-1})_V$, logo, pelo corolário 1 do teorema 8, $(S-f)*T$ se anula em O_V, ou seja, $S*T$ coincide com $f*T$ em O_V, logo é infinitamente derivável nêsse aberto. Como O é reunião dos abertos O_V quando V percorre um sistema fundamental de vizinhanças compactas e simétricas de e (cf. nº 3), concluimos que $S*T$ é infinitamente derivável em O.

b) <u>caso analítico</u>. Pelo corolário do lema 3, T se representa por

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$

e, podemos supor que o suporte das funções $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ esteja contido em BV, onde V é uma vizinhança simétrica e compacta de e.

Seja ω um conjunto aberto relativamente compacto, cuja aderência está contida em O. Pelo que demonstramos em a), decorre que $S*T$ é infinitamente derivável em ω. Demonstraremos a analiticidade de $S*T$ nêsse aberto, estabelecendo as majorações usuais para suas derivadas.

Seja Y_i, $1 \leq i \leq n$, uma base da álgebra dos campos de vetores invariantes à direita e consideremos o operador $Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n}$. Temos, aplicando o teorema 4:

$$Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n}(S*T) = (Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n} S)*T =$$

$$= \sum_{\alpha} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \left[(Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n} S)*f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\right] .$$

Como o suporte de $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ está contido em $B.V$, cada parcela $S*f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ depende em $\omega_V^!$, apenas dos valores de S em B^{-1} (cf. teorema 8, corolário 2) onde, por hipótese, S é analítica.

Por outro lado, podemos escrever (cf. lema 1, corolário):

$$X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \left[(Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n} S)*f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\right] =$$

$$= \int_B \left[(\mathrm{ady} X_1)^{\alpha_1} \ldots (\mathrm{ady} X_1)^{\alpha_n} (Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n} S)\right](xy^{-1}) . f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(y) . \Delta(y^{-1}) dy .$$

Seja M uma constante positiva tal que

$$\int_B [f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(y)]\, \Delta(y^{-1}) dy \leq M$$

qualquer que seja o índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que ωB^{-1} está contido numa carta local conveniente, de modo que, ady X_i aí se representam por combinações lineares, com coeficientes analíticos, de $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$. Como S é analítica em ωB^{-1}, seja C uma constante positiva tal que

$$|D^r S| \leq C^{|r|} . r! \quad \text{em} \quad \omega B^{-1}$$

(ou em $(\omega B^{-1})_V$, o que não alteraria nossa conclusão, cf. a)).

Como a ordem dos operadores D^r que comparecem na expressão de $(\text{ady } X_1)^{\alpha_1} \ldots (\text{ady } X_n)^{\alpha_n}(Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n} S)$ é $|r| \leq |p| + m$ (cf. (2)) existe uma constante $C_1 > 0$ tal que:

$$|(\text{ady } X_1)^{\alpha_1} \ldots (\text{ady } X_n)^{\alpha_n}(Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n} S)(xy^{-1})| \leq C_1^{|p|+m} . (|p|+m)!$$

em ωB^{-1}.

Se k indica o número de termos que comparece na expressão de T, temos:

$$|Y_1^{p_1} \ldots Y_n^{p_n} (S*T)| \leq k\, M\, C_1^{|p|+m} (|p| + m)!$$

o que estabelece a analiticidade de $S*T$ em ω_V', visto que k e m são inteiros fixos, donde a analiticidade de $S*T$ em ω, c.q.d.

<u>Lema 5</u> - Sejam S e T duas distribuições, uma das quais com suporte compacto e α uma função infinitamente derivável em G. Se $X_1, \ldots, X_m$ são m-campos de vetores invariantes à es-

querda, temos:

$$X_m \ldots X_1 \, (S * \alpha T) =$$

$$S*\alpha . X_m \ldots X_1(f) + \sum_{j=1}^{m} X_m \ldots X_{j+1} [S*(X_j \alpha) . X_{j-1} \ldots X_1(f)] .$$

Com efeito, se $m = 1$, temos utilizando o teorema 3:

$$X_1(S*\alpha T) = S*X_1(\alpha T) = S*X_1(\alpha).T + S*\alpha . X_1(T) .$$

Suponhamos a expressão acima verdadeira para m inteiro >1 e seja X_{m+1} um campo de vetores invariantes à esquerda. Temos:

$$X_{m+1}X_m \ldots X_1(S*\alpha T) = X_{m+1}[S*\alpha . X_m \ldots X_1(f)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} X_{m+1} \, X_m \ldots X_{j+1} [(S*(X_j \alpha) . X_{j-1} \ldots X_1(f)] =$$

$$= S*\alpha . \, X_{m+1} \, X_m \ldots X_1(f) + S*X_{m+1}(\alpha) . X_m \ldots X_1(f) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} X_{m+1} \, X_m \ldots X_{j+1} [S*(X_j \alpha) . X_{j-1} \ldots X_1(f)]$$

donde

$$X_{m+1} \, X_m \ldots X_1(S*\alpha T) = S*\alpha . X_{m+1} \, X_m \ldots X_1(f) \ +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} X_{m+1} \, X_m \ldots X_{j+1} [S*X_j(\alpha) . X_{j-1} \ldots X_1(\ )]$$

donde a expressão acima é verdadeira para todo inteiro.

Fim da demonstração do teorema 13 - Seja f uma função de $\mathcal{D}(G)$ e suponhamos f analítica em um aberto O . Queremos demonstrar (condição 3) do corolário 2 do teorema 2 do Capítulo III) que $S*f$ é analítica em O . Sejam ω um aberto relativamente compacto cuja aderência está contida em O e α uma função infinitamente derivável, de suporte compacto k , contido em O e igual a 1 numa vizinhança arbitrária de $\bar{\omega}$. Temos

$$f = \alpha f + (1-\alpha)f$$

e

$$S*f = S*\alpha f + S*(1-\alpha)f \ .$$

Como $(1-\alpha)$ é nula numa vizinhança de $\bar{\omega}$, segue-se que ω está contido no complementar do suporte de $(1-\alpha)f$, logo, pelo lema 4, $S*(1-\alpha)f$ é analítica em ω . Resta mostrar que $S*\alpha f$ é analítica em ω . Como a demonstração é local, podemos supor que ω e k estejam contidos numa mesma carta local $(U, x_1,\dots,x_n)$.

Seja X_i , $1 \leq i \leq n$, uma base da álgebra dos campos de vetores invariantes à esquerda; o operador diferencial $X_1^{p_1}\dots X_n^{p_n}$ de ordem $m = p_1+\dots+p_n$, pode se exprimir, com eventual repetições dos X_i por: $X_m,\dots,X_2\ X_1$ (os índices não são consistentes com os da base da álgebra; manteremos esta notação por simplicidade).

De acôrdo com o lema anterior, temos:

$$X_m\dots X_2\ X_1\ (S*\alpha f) = S*\alpha . X_m\dots X_2\ X_1(f) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} X_m\dots X_{j+1}[S*X_j(\alpha).X_{j-1}\dots X_2\ X_1\ (f)] \ .$$

Tendo em vista as observações feitas após o lema 3, vamos estabelecer uma majoração para o primeiro membro acima. Inicialmente consideremos $S*\alpha.X_m\dots X_2\ X_1(f)$. Se V e W são duas vizinhanças compactas e simétricas de e como consideramos no lema 4 a), temos que

$$(\omega k^{-1})_V \subset (\omega k^{-1})_W \ .$$

Tomando-se γ de suporte compacto contido em $(\omega k^{-1})_W$ e igual a 1 numa vizinhança arbitrária de $\overline{(\omega k^{-1})_V}$, consideremos γS a qual coincide com S em $(\omega k^{-1})_V$, logo $S * \alpha f$ coincide com $\gamma S * \alpha f$ em ω_V. Porém, corolário do lema 3, γS se representa por:

$$\gamma S = \sum_{\alpha} Y_1^{\alpha_1} \ldots Y_n^{\alpha_n} (g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})$$

onde os Y_i são campos de vetores invariantes à direita e as funções $g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ são funções contínuas de suporte compacto contido em $(\omega k^{-1})_W$, digamos.

Podemos escrever (cf. lema 2, corolário):

$$Y_1^{\alpha_1} \ldots Y_n^{\alpha_n} (g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}) * \alpha X_m \ldots X_1 f =$$

$$= \int_k g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(xy^{-1}) \left[(\mathrm{ad}\,xy^{-1} Y_1)^{\alpha_1} \ldots (\mathrm{ad}\,xy^{-1} Y_n)^{\alpha_n} (\alpha X_m \ldots X_1 f)\right](y) . \Delta(y^{-1})\, dy$$

Seja M uma constante >0 tal que

$$\int_k |g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(xy^{-1})| \, \Delta(y^{-1})\, dy \leq M$$

qualquer que seja o índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Desenvolvendo a expressão entre colchetes vamos ter uma soma de um número r de termos do tipo

$$Y_1^{q_1} \ldots Y_j^{q_j}(\alpha) . Y_{j+1}^{q_{j+1}} \ldots Y_n^{q_n} X_m \ldots X_1 f$$

multiplicados por coeficientes que são funções analíticas. Indicando por $N>0$ uma constante que majora os $|Y_1^{q_1}\dots Y_j^{q_j}(\alpha)|$ em k e levando em conta a analiticidade de f em k, teremos

$$|Y_1^{\alpha_1}\dots Y_n^{\alpha_n}(g_{\alpha_1\dots\alpha_n}) * \alpha\, X_m\dots X_1\, f| \leqslant r.M.N.\ C^{m+p}.(m+p)!$$

onde p indica a maior ordem dos operadores diferenciais que comparece em γS, como cada um dêles é majorado pela expressão acima, teremos:

$$|\gamma S * \alpha(X_m\dots X_1\, f)| \leqslant s.r.\ M.N.\ C^{m+p}\,(m+p)!$$

o que mostra que $S * \alpha(X_m\dots X_1\, f)$ é analítica em ω_V, logo em ω.

Seja agora, um têrmo do tipo

$$X_m\dots X_{j+1}[S*X_j(\alpha).X_{j-1}\dots X_2\, X_1(f)]\ .$$

Como α foi escolhida igual a 1 em uma vizinhança de $\bar{\omega}$, é fácil ver que o suporte k_1 de $X_j(\alpha).X_{j-1}\dots X_2\, X_1(f)$ é disjunto de ω, donde $\omega k_1^{-1} \subset c(\{e\})$ e, nêsse aberto, S é analítica. Utilisando novamente o corolário do lema 1, temos:

$$X_m\dots X_{j+1}[S*X_j(\alpha).X_{j-1}\dots X_2\, X_1(f)] =$$

$$= \int_{k_1} [\mathrm{ady}\, X_m\dots \mathrm{ady}\, X_{j+1} S](xy^{-1})X_j(\alpha)(y).X_{j-1}\dots X_1 f(y).\,\Delta(y^{-1})dy\ .$$

Se $A>0$ é tal que

$$\int_{k_1} |X_j(\alpha)(y)|\,\Delta(y^{-1})dy < A \qquad j=1,2,\dots,m\ ,$$

obtemos levando em conta a analiticidade de S em ωk_1^{-1} e de f em k_1:

$$|X_m\dots X_{j+1}[S*X_j(\alpha).X_{j-1}\dots X_2X_1(f)]| \leqslant A.C_1^{m-j}(m-j)!C_1^{j-1}(j-1)! \leqslant A\ C_1^{m-1}(m-1)!$$

donde

$$\sum_{j=1}^{m} |X_m \ldots X_{j+1} [S * X_j(\alpha) . X_{j-1} \ldots X_1(f)] \leq m.AC_1^{m-1}.(m-1)! \leq C_2^m.m!$$

Obtemos, então:

$$|X_m \ldots X_2 X_1 (S * \alpha f)| \leq r.s.M.N.C^{m+p}(m+p)! + C_2^m . m!$$

e como p, r, s, M e N independem de m, podemos escolher uma constante k tal que

$$|X_m \ldots X_2 X_1 (S * \alpha f)| \leq K^{m+p} (m+p)! \quad \text{em} \quad \omega_V ,$$

o que mostra a analiticidade de $S * \alpha f$ em ω_V, donde em ω, c.q.d.

Resumindo o que foi demonstrado nos teoremas 12 e 13, podemos afirmar que, para os núcleos de composição, as três condições seguintes:

i) $S_{x,y}$ é muito regular (resp. analìticamente muito regular),

ii) $S_{x,y}$ é uma função infinitamente derivável (resp. analítica) em $c(\Delta)$,

iii) a distribuição S é uma função infinitamente derivável (resp. analítica) em $c(\{e\})$,

são equivalentes.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Bruhat, F. - On Lie Groups and Representations of Locally Compact Groups
Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[2] - Bruhat, F. e Whitney, H. - Quelques Propriétés Fondamentales des Ensembles Analytiques Réels
Comm. Math. Helv., vol. 33, fasc.2, 1959, pg. 132-160.

[3] - Dias, Cândido Lima da S. - Espaços Vetoriais Topológicos e sua Aplicação nos Espaços Funcionais Analíticos - Bol. da Soc. Mat. de S.Paulo, vol.5, fasc.1 e 2, 1950.

[4] - Dieudonné, J. e Schwartz,L. - La Dualité dans les Espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$.
Ann. de l'Inst. Fourier, 1949, pg. 61-101.

[5] - Grothendieck, A. - Espaces Vectoriels Topologiques
Soc. Mat. de S.Paulo, 1954.

[6] - --------------- - Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucleaires.
Mem. of the A.M.S., nº 16, 1955.

[7] - --------------- - Sur les Espaces de Solutions d'une Classe Générale d'Équations aux Dérivées Partielles - Jour.d'Analyse Mathématique, 1952/53.

[8] - --------------- - Sur les Espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{DF})$
Summa Bras. Math., vol.3, fasc. 6, 1954.

[9] - Schwartz, L. - Équations aux Dérivées Partielles
Seminaire, Paris 1954/55.

[10] - ----------- - Produits Tensoriels Topologiques
Seminaire, Paris 1953/54.

[11] - ----------- - Théorie des Distributions, tome I et II
Hermann & Cie., Paris.

[12] - Schwartz, L. - Théorie des Noyaux
Proceedings of the International of Mathematicians, 1950.

[13] - Weil, A. - L'Integration dans les Groupes Topologiques et ses applications
Hermann & Cie., Paris.

[14] - Barros Neto, J. e Browder, F.E. - The Analyticity of Kernels
A aparecer.

[15] - Browder, F.E. - Real Analytic Functions on Product Spaces and Separate Analyticity
A aparecer.