UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

**REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS ESPACIAIS EM
GEOLOGIA - APLICAÇÕES NO COMPLEXO
ALCALINO DE ANITÁPOLIS**

Jorge Kazuo Yamamoto

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Amaral

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Área de Concentração: Geologia Geral e de Aplicação

São Paulo
1986

A minha esposa Marcia
e ao meu filho Marcos

DEDALUS - Acervo - IGC

30900005910

A G R A D E C I M E N T O S

O autor expressa os seus mais sinceros agradecimentos às pessoas que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Gilberto Amaral pela orientação, apoio e estímulo dados na aplicação de computadores em geologia.

Ao colega Marcos Monteiro pelo apoio dado durante o desenvolvimento dos programas de computação.

A colega Marta Sofia Nunes pela introdução e edição do texto no microcomputador, bem como pelo auxílio dado na organização das referências bibliográficas e da bibliografia.

Ao colega Eduardo Kanabara pela elaboração das ilustrações.

Ao colega Eduardo Todeschini pelo estudo das rotinas gráficas do programa SURFACE II.

Aos amigos Claudio Riccomini e Eleno de Paula Rodrigues pela leitura e sugestões dados ao texto do Capítulo 3.

Ao amigo José Alberto Quintanilha pela leitura crítica da metodologia corrente em interpolação.

Ao Dr. Richard Franke da Naval Postgraduate School - Califórnia, pela colaboração e envio de programas de computação solicitados.

Ao Dr. Rolland L. Hardy da Iowa State University - Iowa, pelas sugestões para utilização de equações multiquádricas.

Ao Dr. Robert E. Barnhill da University of Utah - Utah, pelo envio de referências bibliográficas inéditas no país e pelo interesse demonstrado sobre a aplicação de equações multiquádricas em geologia.

A equipe do Grupo de Documentação Científica da Divisão de Minas e Geologia Aplicada do IPT, através das colegas Marcia R. M. Saad, Maria Solange de Oliveira, Manoel Roque Galvão e Maria de Lourdes de Assis Santos, pela localização e busca das referências bibliográficas e também pelo auxílio na normalização das mesmas.

A minha esposa Márcia Regina K. F. Yamamoto pela leitura e revisão final do texto.

As Indústrias Luchsinger Madorin S.A., através do Geólogo Valmor D' Ávila Vergara, pela autorização dada ao uso dos dados de análises químicas.

Ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, através de Gildézio Lessa, Ricardo F. da Silva e Carlos Dinis da Gama, que possibilitou a realização do presente trabalho.

SUMÁRIO

i

Índice de Figuras	iv
Índice de Tabelas	ix
ABSTRACT	xi
RESUMO	xii
CAPÍTULO 1	
INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO 2	
METODOLOGIA	04
1 INTERPOLAÇÃO	05
1.1 Metodologia corrente	09
1.1.1 Funções polinomiais	09
1.1.2 Equações multiquádricas	17
1.1.3 Ponderação pelo inverso da distância	20
1.1.4 Interpolação em redes triangularizadas	27
1.1.5 Krigagem	30
1.2 Metodologia proposta	36
1.2.1 Definição da vizinhança e da constante C para o ajuste local de equações multiquádricas em duas dimensões	37
1.2.2 Ajuste de equações multiquádricas globais em três variáveis independentes	54
1.2.3 Definição da vizinhança e da constante C para o ajuste local de equações multiquádricas em três variáveis independentes	58
2 DEFINIÇÃO DA ÁREA DE INTERESSE	65
2.1 Metodologia adotada	65
3 DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A ÁREA DE INTERESSE	66
4 CONTORNO AUTOMÁTICO	66

4.1 Metodologia corrente	67
4.2 Metodologia adotada	68
5 PROJEÇÃO EM PERSPECTIVA	70
5.1 Metodologia corrente	70
6 ELIMINAÇÃO DE LINHAS OCULTAS	72

CAPÍTULO 3

GEOLOGIA E PETROLOGIA DO COMPLEXO ALCALINO DE ANITÁPOLIS , SC	75
1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DO COMPLEXO	75
1.1 Localização e vias de acesso	75
1.2 Aspectos geomorfológicos	75
2 GEOLOGIA REGIONAL	76
3 GEOLOGIA LOCAL	82
3.1 Aspectos petrográficos	85
3.2 Quimismo	86
3.3 Distribuição espacial dos tipos litológicos e parâmetros químicos	90
3.4 Origem e evolução petrográfica do complexo	91

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES NO COMPLEXO ALCALINO DE ANITÁPOLIS , SC.....	93
1 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE MALHAS REGULARES BIDIMENSIONAIS	99
1.1 Definição da área de interesse	99
1.2 Mapa de contorno	99
1.3 Bloco-diagrama	102

2 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE MALHAS REGULARES TRIDI- MENSIONAIS	106
2.1 Plantas e perfis	107
CAPÍTULO 5	
CONCLUSÕES	138
APÊNDICE 1	
CONCEITOS BÁSICOS DE GEOESTATÍSTICA	140
1 VARIÁVEIS REGIONALIZADAS	140
2 VARIOGRAMA	141
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	148
BIBLIOGRAFIA	157

I L U S T R A Ç Õ E S

FIGURAS

1 - Fluxo de processamentos para obtenção de representações gráficas espaciais em geologia	05
2 - Sistema de coordenadas geográficas	09
3 - Mapa de anomalia Bouguer e três superfícies polinomiais de alto grau (COONS et al. 1967 apud DOBRIN 1981)	10
4 - Gráfico da distribuição F para o teste de hipóteses	14
5 - Diagramas e equações mostrando o cálculo de médias ponderadas espacialmente para duas, três e quatro variáveis (segundo HARBAUGH & MERRIAM 1968)	17
6 - Funções de ponderação pelo inverso da potência da distância, segundo SAMPSON (1965)	21
7 - Erros de interpolação (RMS), usando 8 pontos vizinhos, para diferentes funções de interpolação, segundo DAVIS (1976, apud HARBAUGH et al. 1977)	22
8 - Erros de interpolação (RMS), para números de pontos vizinhos variáveis, usando a função de ponderação ($1/D^4$), segundo DAVIS (1976, apud HARBAUGH et al. 1977)	22
9 - Esquema mostrando a janela circular definida pelo raio de influência em três posições sucessivas	23
10 - Pesquisa dos 8 pontos vizinhos mais próximos, segundo HARBAUGH et al. 1977)	25
11 - Pesquisa dos vizinhos mais próximos, tomando 2 pontos quadrante, segundo HARBAUGH et al. (1977)	26
12 - Pesquisa dos vizinhos mais próximos, tomando 1 ponto por octante, segundo HARBAUGH et al. (1977)	26
13 - A divisão de DIRICHLET, segundo PETTINATI (1983)	27
14 - A triangulação de Delaunay, segundo PETTINATI (1983)	28
15 - Superfícies obtidas pelo método de ponderadores (a) e por interpolação linear (b), conforme MCLAIN (1976)	29

16 - Significado dos termos da equação (38), BROOKER (1979)...	34
17 - Mapa de localização dos 100 pontos gerados aleatoriamente	39
18 - Mapa de localização dos pontos com a malha regular superposta e a subdivisão em células	41
19 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S1	49
20 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S2	50
21 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S3	51
22 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S4	52
23 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S5	53
24 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a função F1	61
25 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a função F2	62
26 - Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a função "log (F1)"	63
27 - Pesquisa e traçado das curvas de contorno pelo método das células, segundo IBM (1965)	67
28 - Pesquisa e traçado da curva de contorno pelo método de rastreamento, segundo IBM (1965)	69
29 - Traçados possíveis de um trecho da curva no interior de uma célula, quando esta não é subdividida em triângulos (a), subdividida em dois triângulos (b) e subdividida em quatro triângulos (c), segundo BATCHA & REESE (1964)	69
30 - Desenho mostrando a geometria da projeção em perspectiva (baseado em BOUKNIGHT 1970)	70

31 - Bloco-diagrama de uma superfície com as linhas ocultas desenhadas (PETTINATI 1983)	73
32 - Bloco-diagrama da mesma superfície com as linhas ocultas eliminadas (PETTINATI 1983)	73
33 - Mapa de localização do Complexo Alcalino de Anitápolis ..	76
34 - Geologia regional (compilado por RODRIGUES, 1985 a partir de CAMPOS NETO, 1984)	79
35 - Mapa geológico do Complexo Alcalino de Anitápolis (RODRIGUES 1985)	83
36 - Mapa de estruturas da região da intrusão alcalina (MELCHER & COUTINHO 1966)	84
37 - Diagramas de ramos e folhas da distribuição dos óxidos (RODRIGUES 1985)	88
38 - Gráfico das cargas dos fatores Q1 e Q2 (RODRIGUES 1985)	89
39 - Bloco-diagrama interpretativo da distribuição espacial dos tipos litológicos, segundo RODRIGUES (1985)	91
40 - Mapa plani-altimétrico da região do Complexo Alcalino de Anitápolis com a localização dos pontos de dados de topografia amostrados	97
41 - Mapa de localização dos furos de sondagem e dos perfis NS e EW	98
42 - Mapa de localização dos pontos de dados de topografia com o desenho da fronteira convexa dos mesmos	100
43 - Mapa de contorno dos dados de topografia da região do Complexo Alcalino de Anitápolis	101
44 - Desenho esquemático mostrando a localização das visadas A, B e C	102
45 - Bloco-diagrama da topografia da região do Complexo Alcalino de Anitápolis, segundo a visada A	103
46 - Bloco-diagrama da topografia da região do Complexo Alcalino de Anitápolis, segundo a visada B	104

47 - Bloco-diagrama da topografia da região do Complexo Alca-	
lino de Anitápolis, segundo a visada C	105
48 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 745m..	109
49 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 775m..	110
50 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 805m..	111
51 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 835m..	112
52 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil NS 1200	113
53 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil NS 1400	114
54 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil EW 800	115
55 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil EW 1000	116
56 - Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil EW 1200	117
57 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 745m..	119
58 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 775m..	120
59 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 805m..	121
60 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 835m..	122
61 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil NS 1200	123
62 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil NS 1400	124
63 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil EW 800	125
64 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil EW 1000	126
65 - Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil EW 1200	127
66 - Curvas de isovalores de % CaO na planta do nível 745m ..	129
67 - Curvas de isovalores de % CaO na planta do nível 775m ..	130
68 - Curvas de isovalores de % CaO na planta do nível 805m ..	131
69 - Curvas de isovalores de % CaO na planta do nível 835m ..	132
70 - Curvas de isovalores de % CaO no perfil NS 1200	133
71 - Curvas de isovalores de % CaO no perfil NS 1400	134
72 - Curvas de isovalores de % CaO no perfil EW 800	135

73 - Curvas de isovalores de % CaO no perfil EW 1000	136
74 - Curvas de isovalores de % CaO no perfil EW 1200	137
A1 - Exemplos de variogramas (PARKER 1979)	143
A2 - Variograma aleatório teórico, mostrando o efeito pepita puro (OLEA 1977)	145
A3 - Modelos de variogramas teóricos, sem patamar (CLARK 1979)	145
A4 - Modelos de variogramas teóricos, com patamar (CLARK 1979)	146

T A B E L A S

1 - Valores de por cento da soma total dos quadrados para superfícies de tendência aleatórias (AMARAL 1976)	15
2 - Valores de coeficiente de correlação para superfícies de tendência aleatórias (AMARAL 1976)	15
3 - Valores do número F para superfícies de tendência aleatórias (AMARAL 1976)	15
4 - Erros RMS de estimativa (%) entre os ajustes globais e as funções matemáticas originais	39
5 - Tempos de execução, em segundos, do B 6900 obtidos para os dois algoritmos de classificação testados	43
6 - Exemplo ilustrando o algoritmo de classificação para pesquisa dos vizinhos próximos	44
7 - Parâmetros utilizados para recuperação de dados das células	46
8 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S1	47
9 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S2	47
10 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S3	47
11 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S4	48
12 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S5	48
13 - Erros de estimativa RMS (%) entre os ajustes globais e as funções F1 e F2	55
14 - Valores das funções sobre parte dos pontos de dados gerados aleatoriamente	56
15 - Erros de estimativa RMS (%) para a função F1, com o ajuste de equações multiquádricas feito no domínio logaritmico ..	57

16 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a função F1	60
17 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a função F2	60
18 - Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a função "log (F1)"	60
19 - Pontos de dados de topografia	93
20 - Parâmetros das perspectivas A,B e C	102

A B S T R A C T

The main techniques and mathematical concepts of computer graphics, i.e., interpolation, determination of convex hull, determination of the position of a point relative to a convex hull, automatic contouring, perspective projection and hidden line elimination, are presented as a result of a study carried out in order to outline a basic methodology for computer aided graphical displaying of geological data.

The use of multiquadric equations locally applied to limited neighborhood together with adequate constant values for the interpolation of scattered data in two and three independent variables is proposed.

Applications over real topographical and chemical data from the Anitápolis Alkaline Complex, State of Santa Catarina, are also discussed.

R E S U M O

Esta dissertação apresenta os resultados de uma pesquisa realizada para se definir uma metodologia básica na obtenção automática de representações gráficas espaciais em geologia. Nela as principais técnicas e conceitos matemáticos de computação gráfica, quais sejam: interpolação, definição da área de interesse, determinação da posição de um ponto em relação à área de interesse, contorno automático, projeção em perspectiva e eliminação de linhas ocultas, são descritos e discutidos.

É proposto o uso de equações multiquádricas como método local para interpolação de dados dispersos tanto em duas como em três variáveis independentes.

As aplicações da metodologia apresentada foram feitas com os dados de topografia e dados de análises químicas da região do Complexo Alcalino de Anitápolis, SC.

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

A interpretação de resultados obtidos em pesquisas geológicas é feita geralmente sobre perfis, plantas, mapas e blocos-diagrama. Estas formas de representações gráficas de dados geológicos permitem sempre o estudo das variações e/ou inter-relações espaciais dos parâmetros investigados.

Nestas figuras pode-se representar tanto informações qualitativas como quantitativas. Quando os dados forem de natureza qualitativa, isto é, resultados de observações geológicas, utiliza-se uma simbologia adequada para representá-los. Quando quantitativos, resultados de medidas e/ou análises como dados estruturais, geoquímicos, geofísicos, sedimentológicos, entre outros, podem ser representados sob as mais diversas formas gráficas, dentre as quais a mais comum é através das curvas de isovalores em mapas de contorno. Além dos mapas de contorno, os dados numéricos podem ser representados em blocos-diagrama, plantas e perfis. Essas representações gráficas podem ser programadas e obtidas no computador com grandes vantagens, tais como: rapidez, precisão e versatilidade. Entretanto, segundo PETTINATI (1983), no Brasil ainda não é usual a utilização de computadores para esse fim, pela existência de mão de obra razoavelmente capacitada e de custo não muito elevado para processamento manual, pela escassez de equipamentos específicos para a produção de desenhos diretamente pelo computador, bem como pela indisponibilidade de programas e sistemas adequados às necessidades das empresas usuárias. Dentre os fatores citados por aquele autor, acredita-se que, atualmente, ao menos em Geologia, somente o último tende a limitar a aplicação da computação gráfica para a produção automática de desenhos.

Os programas de computação, hoje disponíveis comercialmente para fins gráficos, além de serem relativamente antigos, como SYMAP (DOUGENICK & SHEEHAM 1975) e SURFACE II (SAMPSON 1975), geralmente não proporcionam resultados satisfatórios a seus usuários, pela falta de controle sobre os mesmos. Por exemplo, o programa SURFACE II, apresenta sérios problemas, dentre os quais o principal é a intersecção das curvas de contorno, quando estas são suavizadas.

Além disso, a sua execução em computadores com memória virtual (atualmente a maioria) é muito demorada, em razão da ineficiente estrutura de "overlay" do programa, justamente planejada para ocupar o menor espaço de memória durante a sua execução (os computadores disponíveis na época não apresentavam memória suficiente para comportar todo o programa de uma única vez). Por outro lado, além da indisponibilidade de programas para fins gráficos em Geologia, há também a falta de conhecimento, pelo geólogo, das técnicas e conceitos matemáticos de computação gráfica, necessários ao desenvolvimento de programas de computação segundo suas necessidades específicas.

As principais técnicas e conceitos matemáticos apresentados e discutidos no presente trabalho são:

- . interpolação
- . definição da área de interesse
- . determinação da posição de um ponto em relação à área de interesse
- . contorno automático
- . projeção em perspectiva
- . eliminação de linhas ocultas

A interpolação é, sem dúvida, a fase de maior importância na obtenção de representações gráficas em computador, seja ela empregada para regularizar uma malha de amostragem irregular como também para enriquecer uma malha originalmente regular para traçado suave das curvas de contorno. Assim, dada a importância da interpolação em procedimentos gráficos, deu-se bastante ênfase na apresentação e discussão dos principais métodos existentes em Geologia, bem como na proposta de uma metodologia de um interpolante de uso geral. O método ora proposto foi designado para interpolação de grandes conjuntos de dados, sem restrições quanto à variabilidade e distribuição dos mesmos no espaço. Trata-se de uma adaptação para método local das equações multiquádricas para interpolação de dados em superfície. A interpolação com base nas equações multiquádricas foi proposta originalmente por HARDY (1971) como método global.

A aplicação das principais formas de representações gráficas espaciais, apresentadas no presente trabalho, serão exemplificadas com dados de topografia da região da intrusão e também com os dados

de análises químicas de elementos maiores das rochas do Complexo Alcalino de Anitápolis. Com os primeiros pretende-se exemplificar a obtenção de mapas de contorno e blocos-diagrama, que são as formas de representação gráfica quantitativa e qualitativa, respectivamente, mais utilizadas para dados distribuídos em área. Os dados de análises químicas serão utilizados no mapeamento tridimensional da jazida, isto é, a representação gráfica da variação espacial ao longo da mesma, através de perfis e plantas.

C A P Í T U L O 2

METODOLOGIA

As representações gráficas espaciais mais comuns podem ser obtidas conforme o fluxo de processamentos apresentado na Figura 1. Esse fluxograma foi idealizado para desenho automático das figuras espaciais a partir de uma malha regular de dados, seja ela bi ou tridimensional. Esta decisão foi tomada após uma pesquisa bibliográfica que apontou o desenho automático a partir de malhas regulares como o mais indicado para obtenção de um melhor produto final, em termos estéticos bem como as facilidades computacionais advindas da utilização das mesmas. Porém, dificilmente as investigações geológicas resultam em dados distribuídos sobre uma malha regular, e sim distribuídos irregularmente na região pesquisada devido, principalmente, a problemas de vias de acesso. Uma exceção seria, por exemplo, uma campanha de sondagens planejada sobre uma malha regular; entretanto, o detalhamento de algumas zonas anômalas numa fase posterior da pesquisa, tornaria a malha original irregular. Portanto, pode-se generalizar que será sempre necessário obter-se uma malha regular a partir dos dados originalmente distribuídos sobre uma malha irregular. A regularização dos dados é feita através da interpolação, que é uma técnica de ajuste de uma função matemática aos dados originais para cálculo de valores em pontos não amostrados ou desconhecidos.

O contorno automático é a fase seguinte à da interpolação e permite obter automaticamente mapas de contorno, perfis e plantas em traçadores digitais ("plotters"), a partir das informações contidas nas células da malha regular.

Os dados da malha regular podem ser projetados em perspectiva, permitindo, assim, visualizá-los em três dimensões. Nesta fase obtém-se blocos-diagrama, que permitem o estudo das inter-relações espaciais dos parâmetros geológicos.

Neste capítulo será apresentada uma descrição da metodologia empregada em cada uma das etapas do fluxo de processamentos para obtenção de representações gráficas espaciais em geologia.

Figura 1: Fluxo de processamentos para obtenção de representações gráficas espaciais em geologia.

1 INTERPOLAÇÃO

Nesta fase do processamento a interpolação é feita para se determinar os valores da variável dependente sobre os nós de uma malha regular, a partir dos dados observados que, em geral, estão irregularmente distribuídos. Nesse sentido, a interpolação é efetuada para regularizar a malha de pontos, pois a distribuição inicial era irregular. A interpolação pode também ser utilizada para enriquecer a malha original, caso os dados já estejam regularmente distribuídos, interpolando-se os valores intermediários à amostragem inicial para melhorar traçado das curvas de contorno. No presente trabalho utiliza-se do termo interpolação, tanto para definir o processo pelo qual é determinado o valor de uma função (determinística) dentro do domínio dos pontos de dados desta, bem como para se estimar o valor de uma função aleatória dentro ou fora do domínio dos pontos de dados amostrados.

Uma outra definição importante está relacionada com a dimensionalidade do problema e o número de variáveis independentes. Assim, uma função em duas variáveis independentes tem sua representação geométrica no espaço tridimensional R^3 , enquanto uma função definida em três variáveis independentes é representada geometricamente no espaço quadridimensional R^4 . Dessa forma uma superfície tridimensional representada no espaço R^3 é interpolado usando funções de duas variáveis independentes e uma superfície quadridimensional é interpolada com funções de três variáveis independentes.

O problema da interpolação para construção de superfícies suaves, a partir dos pontos de dados dispersos, é encontrado frequentemente em muitas áreas de aplicações científicas, tais como: meteorologia, geografia, geologia e engenharia (FRANKE & NIELSON 1980).

As funções de interpolação podem ser subdivididas em duas classes (HARBAUGH et al. 1977, MOORE 1977, AKIMA 1978 e HOWARTH 1983):

- funções globais
- funções locais

As funções globais aproximam de uma única vez todos os dados do mapa, permitindo-se interpolar o valor da função em qualquer ponto dentro do domínio dos pontos originais de dados. Segundo FRANKE (1982), a função global é dependente de todos os pontos de dados e a adição ou a retirada de um ponto de dado ou a mudança de uma das coordenadas de um ponto de dado irá propagar através do domínio da definição da função.

Já as funções locais são definidas para pequenas porções do mapa e assim, sucessivamente, até cobrir toda a área do mapa. Conforme FRANKE (1982), a alteração de um ponto de dado irá afetar somente os pontos próximos do mesmo, dentro de alguma dada distância.

Muitas vezes os métodos locais envolvem o uso de métodos globais sobre pequenas porções, que são então compostas para se obter um interpolante global definido sobre suportes locais (FRANKE 1982).

Cada uma dessas funções de interpolação pode ser subdividida em interpoladores exatos e aproximados. Diz-se que a interpolação é exata quando o resíduo (diferença entre o valor

computado pela função de interpolação e o valor observado) é nulo e aproximada quando há resíduo.

A escolha do tipo de interpolador depende principalmente da natureza dos dados, bem como do tipo de mapa que se deseja obter. Assim, se os dados coletados estão com algum tipo de erro, tanto de localização no campo como de medida do parâmetro, é desejável utilizar-se de interpoladores aproximados que, ao promover uma suavização nos dados, pode minimizar tais erros. Por outro lado, se os dados coletados estiverem livres de erros ou seguirem o comportamento de uma função determinística e se o mapa de contorno for utilizado para cálculos (por exemplo: áreas e volumes) mais precisos, deve-se utilizar os interpoladores exatos.

A malha regular a duas dimensões é obtida por interpolação de dados distribuídos em área, enquanto a malha regular a três dimensões é obtida a partir da interpolação de dados distribuídos no espaço. A malha regular a três dimensões é composta por uma série de outras a duas dimensões, dispostas verticalmente (perfis) ou horizontalmente (plantas) ou segundo as duas. Então a interpolação dessas malhas regulares bidimensionais, segundo direções e níveis pré-especificados (perfis e plantas), é feita considerando-se não somente os dados que caem sobre os planos das mesmas, mas também os dados que caem dentro de uma zona de influência em torno desses planos. Assim as funções de interpolação devem considerar a terceira variável independente (geralmente a cota) para o cálculo de plantas e/ou perfis que compõem a malha regular tridimensional.

Teoricamente, todas as funções a duas variáveis independentes seriam casos particulares das mesmas a três, com uma delas ausente como, por exemplo, um polinômio que pode ser definido a uma, duas e três variáveis independentes, conforme as equações abaixo:

$$F = a + bX \quad (1)$$

$$F = a + bX + cY \quad (2)$$

$$F = a + bX + cY + dZ \quad (3)$$

A equação (1) representa uma reta no plano, a equação (2) uma superfície plana em área, enquanto a (3) uma hipersuperfície no

espaço. Agora, pode-se mostrar uma única fórmula que represente as três equações:

$$F = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} c_{ijk} \cdot X^i \cdot Y^j \cdot Z^k \quad (4)$$

Por exemplo, para o caso de uma reta no plano, tem-se:

$$F = c_{000} X^0 Y^0 Z^0 + c_{100} X^1 Y^0 Z^0 \quad (5)$$

ou

$$F = c_0 + c_1 X \quad (6)$$

que é exatamente o polinômio da equação (1).

Como será demonstrado a seguir, quase todas as funções de interpolação em duas variáveis independentes permitem a expansão para o caso a três variáveis independentes, excetuando-se aquelas funções de interpolação que usam redes triangularizadas de dados (AKIMA 1978, PETTINATI 1983), onde a inclusão de mais uma variável independente tornaria o processo extremamente complexo e computacionalmente caro, pois a triangulação no plano já é um procedimento complexo e bastante demorado em termos de tempo de computação.

Neste ítem pretende-se expor os principais métodos atualmente empregados na interpolação de malhas regulares, bem como descrever a metodologia proposta no presente trabalho.

A notação a ser utilizada para designar as variáveis é a seguinte:

X é a variável independente que representa a coordenada leste oeste;

Y é a variável independente que representa a coordenada norte sul;

Z é a variável independente que representa a cota;

F é a variável dependente (pode representar, por exemplo, dados sedimentológicos, geoquímicos, geofísicos, etc).

A origem do sistema de coordenadas é o canto inferior esquerdo, conforme o demonstrado na Figura 2.

Figura 2 : Sistema de coordenadas geográficas.

1.1 Metodologia corrente

Da literatura consultada foram selecionados os métodos de interpolação mais usuais em geologia, quais sejam: funções polinomiais, equações mutiquádricas, ponderação pelo inverso da distância, triangulação e krigagem. Os dois primeiros são métodos globais de interpolação, enquanto os três últimos são métodos locais.

A descrição desses métodos será feita sobre funções de duas variáveis independentes, tendo em vista que quase todos os métodos aqui descritos permitem expansão para três variáveis independentes acrescentando-se o termo correspondente à terceira variável.

1.1.1 Funções polinomiais

As funções polinomiais podem descrever aproximadamente o comportamento de uma superfície qualquer, seja ela topográfica, geológica, geofísica, etc.

Inicialmente, os polinômios bivariados foram utilizados em geologia para ajuste de superfícies de tendência. Nesse sentido, os polinômios utilizados são de baixo grau (geralmente 1 a 8) e servem para estudo da tendência de variação regional de um determinado parâmetro geológico. Assim, para estudos de tendência de variação, o ajuste de superfícies polinomiais pode ser entendido como uma regressão linear múltipla de uma variável dependente em função de duas variáveis independentes.

Polinômios bivariados de alto grau (maiores que 10) podem ser utilizados seja para descrever superfícies mais complexas, seja para produzir ajustes mais refinados de uma superfície. Teoricamente, é possível proceder-se ao ajuste de superfícies de graus sucessivamente elevados desde que o número de coeficientes do polinômio seja menor que o número de pontos de dados. A Figura 3 mostra um exemplo de como o aumento do grau do polinômio melhora o ajuste à superfície original de dados.

Figura 3: Mapa de anomalia Bouguer e três superfícies polinomiais de alto grau (COONS et al., 1967 apud DOBRIN, 1981).

A fórmula geral de um polinômio bivariado de grau m é:

$$F = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} c_{ij} \cdot x^i \cdot y^j \quad (7)$$

onde: F é a variável dependente;
 m é o grau do polinômio;
 c_{ij} são os coeficientes do polinômio;
 Y é a coordenada norte sul;
 X é a coordenada leste oeste.

O número de coeficientes de um polinômio bivariado de grau m é dado por:

$$nc = (m+1) \cdot (m+2) / 2 \quad (8)$$

onde: nc é o número de coeficientes;
 m é o grau do polinômio.

Por exemplo um polinômio de grau 2, a partir da expansão da equação (7), tem a seguinte forma:

$$F = c_{00} + c_{01}Y + c_{02}Y^2 + c_{10}X + c_{11}XY + c_{20}X^2 \quad (9)$$

Agrupando-se os termos do mesmo grau obtém-se:

$$F = c_{00} + c_{10}X + c_{01}Y + c_{20}X^2 + c_{11}XY + c_{02}Y^2 \quad (10)$$

que é a forma mais usual de representação, porque dá idéia melhor da expansão dos termos de graus mais baixos para obtenção dos termos de graus mais elevados.

Os coeficientes de um polinômio são determinados pela resolução de um sistema de equações lineares, que satisfaz o critério dos mínimos quadrados, ou seja, o polinômio ajustado será tal que a somatória das diferenças ao quadrado entre os valores computados e os valores observados será a mínima possível. Por isso as superfícies polinomiais são também chamadas de superfícies dos mínimos quadrados.

O sistema de equações lineares, ou também sistema normal de equações, para o cálculo do polinômio da equação (10) tem a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 n & \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma X^2 & \Sigma XY & \Sigma Y^2 \\
 \Sigma X & \Sigma X^2 & \Sigma XY & \Sigma X^3 & \Sigma X^2 Y & \Sigma XY^2 \\
 \Sigma Y & \Sigma XY & \Sigma Y^2 & \Sigma X^2 Y & \Sigma XY^2 & \Sigma Y^3 \\
 \Sigma X^2 & \Sigma X^3 & \Sigma X^2 Y & \Sigma X^4 & \Sigma X^3 Y & \Sigma X^2 Y^2 \\
 \Sigma XY & \Sigma X^2 Y & \Sigma XY^2 & \Sigma X^3 Y & \Sigma X^2 Y^2 & \Sigma XY^3 \\
 \Sigma Y^2 & \Sigma XY^2 & \Sigma Y^3 & \Sigma X^2 Y^2 & \Sigma XY^3 & \Sigma Y^4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_{00} \\
 c_{10} \\
 c_{01} \\
 c_{20} \\
 c_{11} \\
 c_{02}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \Sigma F \\
 \Sigma FX \\
 \Sigma FY \\
 \Sigma FX^2 \\
 \Sigma FXY \\
 \Sigma FY^2
 \end{bmatrix}
 \quad (11)$$

A matriz à esquerda da equação (11) é chamada matriz dos produtos escalares e o vetor que a multiplica é o vetor dos coeficientes.

O vetor C, vetor dos coeficientes, é a única incógnita desse sistema e pode ser obtido a partir da resolução do mesmo, por exemplo, através do método de eliminação de Gauss (DORN & MCCracken 1978). O cálculo do vetor C que determina a forma do polinômio, através da equação (11), ilustra como a retirada ou adição de um único dado irá se propagar por todo o sistema, como foi citado por FRANKE (1982).

O ajuste de superfícies polinomiais de baixo grau, para estudos de tendência de variação, é conhecido em geologia como análise de superfícies de tendência. Esta análise, no sentido clássico, pressupõe o ajuste de polinômios da forma da equação (7), considerando todos os termos da mesma. Entretanto, segundo GIANNINI & FERNANDES (1984), muitas das variáveis independentes, termos polinomiais em X e Y, podem ser mais correlacionáveis entre si que entre as mesmas e a variável dependente. Isto permitiria a eliminação de alguns termos polinomiais, já que poderiam ser expressos como combinações lineares de outros. GIANNINI & FERNANDES (1984) sugerem a aplicação da técnica de regressão múltipla "stepwise", para ajuste de superfícies de tendência onde, através de critérios de correlação e tolerância, procura-se eliminar aqueles termos não significativos dos polinômios que descrevem numericamente a superfície de tendência.

A técnica clássica de análise de superfícies de tendência é feita no sentido de uma regressão polinomial, através do ajuste de polinômios de graus sucessivamente elevados até encontrar um que

produza um ajuste ótimo. O grau de ajuste ótimo pode tanto ser definido empiricamente pelo pesquisador como estatisticamente, através da análise de variância e teste F.

A análise de variância é feita separando-se da variância total (VTO), a variância explicada (VEX) pela função e a variância não explicada (VNE), devido aos resíduos aleatórios. O Quadro I, a seguir, mostra a sequência do cálculo das variâncias explicada e não explicada, bem como do número F.

FONTE DE VARIACÃO	SOMA DE QUADRADOS	GRAUS DE LIBERDADE	QUADRADO MÉDIO	NÚMERO F
VEX	$\sum (FC_i - \bar{F})^2$	nc-1	VEX/(nc-1)	VEX/(nc-1)
VNE	$\sum (FC_i - F_i)^2$	n-nc	VNE/(n-nc)	VNE/(n-nc)
VTO	$\sum (F_i - \bar{F})^2$	n-1		

QUADRO I - Análise de Variância

onde: $\bar{F}$ é a média dos valores de F observados;

FC_i é o valor de F computado pela função no ponto i;

F_i é o valor de F observado no ponto i;

nc é o número de coeficientes do polinômio;

n é o número de pontos observados.

O número F assim calculado é, no teste de hipóteses:

H_0 : ajuste estatisticamente não significativo

H_1 : ajuste estatisticamente significativo

Se o valor do número F for maior que o valor de F crítico com nc-1 e n-nc graus de liberdade tomado numa tabela (vide, por exemplo, PEREIRA & BUSSAB 1976), rejeita-se a hipótese H_0 e aceita-se a hipótese alternativa H_1 . Isto pode ser visualizado no gráfico da função F da Figura 4.

Figura 4 : Gráfico da distribuição F para o teste de hipóteses.

Quanto maior for o valor do número F em relação ao de F crítico, mais significativo será o ajuste.

Outros parâmetros estatísticos de ajuste podem ser calculados a partir das variâncias:

$$CD = VEX/VTO \quad (12)$$

$$PSTQ = CD.100 (\%) \quad (13)$$

$$CC = (CD)^{1/2} \quad (14)$$

onde: CD é o coeficiente de determinação;

PSTQ é o por cento da soma total dos quadrados;

CC é o coeficiente de correlação.

Os dois primeiros parâmetros medem o ajuste propriamente dito da superfície aos pontos originais de dados, enquanto o último mede apenas a porcentagem dos pontos que se correlacionam à superfície.

Além da análise de variância, o significado estatístico do ajuste da superfície de tendência pode ser verificado através do teste dos parâmetros obtidos para a mesma com aqueles de

distribuições aleatórias determinados por AMARAL (1976).

AMARAL (1976) determinou experimentalmente os valores de PSTQ, CC, e número F para distribuições aleatórias com 100, 300 e 1000 pontos, para superfícies de tendência de graus 1 a 8. Assim, para que a superfície calculada reflita uma verdadeira tendência de variação, os parâmetros estatísticos obtidos devem ser sempre maiores que aqueles determinados por aquele autor para distribuições aleatórias, conforme as Tabelas 1, 2 e 3.

TABELA 1 - Valores de por cento da soma total dos quadrados para superfícies de tendência aleatórias (AMARAL 1976).

Nº Pontos Grau	100	300	1000
1º	2,14 ± 2,11	0,50 ± 0,57	0,22 ± 0,24
2º	5,62 ± 3,27	1,45 ± 0,95	0,55 ± 0,30
3º	9,58 ± 4,07	3,09 ± 1,42	0,98 ± 0,45
4º	14,59 ± 5,33	4,96 ± 2,27	1,44 ± 0,46
5º	21,68 ± 6,50	7,10 ± 2,32	2,06 ± 0,58
6º	28,98 ± 6,99	9,17 ± 2,42	2,86 ± 0,81
7º	36,55 ± 7,80	12,16 ± 2,86	3,64 ± 0,86
8º	46,39 ± 6,44	14,92 ± 3,00	4,53 ± 0,99

TABELA 2 - Valores de coeficiente de correlação para superfícies de tendência aleatórias (AMARAL 1976).

Nº Pontos Grau	100	300	1000
1º	0,13 ± 0,07	0,06 ± 0,03	0,04 ± 0,02
2º	0,23 ± 0,07	0,11 ± 0,04	0,07 ± 0,02
3º	0,30 ± 0,06	0,17 ± 0,04	0,10 ± 0,02
4º	0,38 ± 0,07	0,22 ± 0,05	0,12 ± 0,02
5º	0,46 ± 0,07	0,26 ± 0,04	0,14 ± 0,02
6º	0,53 ± 0,07	0,30 ± 0,04	0,17 ± 0,02
7º	0,60 ± 0,06	0,35 ± 0,04	0,19 ± 0,02
8º	0,68 ± 0,05	0,38 ± 0,04	0,21 ± 0,02

TABELA 3 - Valores do número F para superfícies de tendência aleatórias (AMARAL 1976).

Nº Pontos Graus	100	300	1000
1º	1,08 ± 1,10	0,75 ± 0,86	1,08 ± 1,23
2º	1,91 ± 1,18	1,45 ± 0,96	1,85 ± 0,99
3º	2,44 ± 1,22	2,33 ± 1,12	2,46 ± 1,14
4º	2,99 ± 1,33	3,01 ± 1,48	2,88 ± 0,94
5º	3,76 ± 1,45	3,58 ± 1,27	3,44 ± 0,98
6º	4,34 ± 1,49	3,95 ± 1,16	4,10 ± 1,20
7º	4,81 ± 1,68	4,61 ± 1,24	4,57 ± 1,12
8º	5,46 ± 1,48	5,01 ± 1,19	5,05 ± 1,15

Para superfícies de alto grau, calcula-se apenas os parâmetros estatísticos de ajuste tais como: CD, PSTQ e CC. Nesse caso, o único cuidado que se deve tomar é quanto ao grau do polinômio, onde o número de coeficientes deve sempre ser menor que o número de pontos.

O erro associado ao ajuste de superfícies polinomiais depende tanto do número de pontos de dados como do grau da função, porque o aumento do grau do polinômio implica no aumento do número de termos do mesmo e quando este número aproxima-se do número de pontos, o ajuste tende a ser exato. Teoricamente quando o número de termos ou coeficientes do polinômio for igual ao número de pontos de dados o ajuste será de 100%; entretanto, na prática, isto torna-se impossível quando se trabalha com grandes conjuntos de dados.

A extensão das funções polinomiais para o caso a três variáveis independentes é denominada hipersuperfícies de tendência ou também superfícies de tendência quadridimensionais.

A forma geral de uma hipersuperfície de grau m, é dada pela equação abaixo:

$$F = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} c_{ijk} \cdot X^i \cdot Y^j \cdot Z^k \quad (15)$$

O ajuste de hipersuperfícies de tendência, bem como a análise do significado estatístico do mesmo é feito exatamente da mesma forma como da análise de superfícies de tendência.

Segundo HARBAUGH & MERRIAM (1968), a técnica da análise de hipersuperfícies de tendência proporciona um método conveniente no cálculo de hipervolumes e médias ponderadas espacialmente.

O hipervolume (HYVOL) é obtido calculando-se a integral tripla definida da função $F(X,Y,Z)$ ajustada:

$$HYVOL = \int_{X1}^{X2} dX \int_{Y1}^{Y2} dY \int_{Z1}^{Z2} F(X,Y,Z) dZ \quad (16)$$

A média ponderada é obtida dividindo-se o hipervolume pelo volume físico definido pelas coordenadas $(X1,X2) \times (Y1,Y2) \times (Z1,Z2)$:

$$\bar{F} = HYVOL / (X2-X1) \cdot (Y2-Y1) \cdot (Z2-Z1) \quad (17)$$

O significado geométrico de hipervolumes, bem como de médias ponderadas espacialmente, pode ser visto na Figura 5, que mostra como tais valores podem ser obtidos quando uma, duas e três variáveis independentes estão envolvidas.

Uma média calculada dessa maneira, ponderada espacialmente, é mais significativa que uma média aritmética convencional, particularmente quando os pontos de dados estão irregularmente distribuídos e contêm extremos. Uma aplicação sugerida é o cálculo do valor da porosidade média de reservatórios de óleo em calcários, onde os valores obtidos por análise de testemunhos podem ser altamente erráticos (HARBAUGH & MERRIAM 1968).

Figura 5 : Diagramas e equações mostrando o cálculo de médias ponderadas espacialmente para uma, duas e três variáveis independentes. (segundo HARBAUGH & MERRIAM, 1968)

1.1.2 Equações multiquádricas

HARDY (1971) sugere a aplicação de equações multiquádricas para representação analítica da superfície de um terreno, a partir de um conjunto discreto de pontos de observação.

As equações multiquádricas proporcionam uma interpolação exata e foi justamente pesquisada por aquele autor porque os mapas aproximados por polinômios ou harmônicos de Fourier não apresentavam precisão suficiente para fins de engenharia.

A hipótese básica da análise multiquádrica é que qualquer

superfície matemática suave, e também qualquer superfície arbitrária suave (indefinida matematicamente), pode ser aproximada, com o grau de precisão desejado, através da soma de uma grande variedade de superfícies regulares matematicamente definidas, particularmente de formas quádricas (HARDY 1977).

Segundo FRANKE (1982), o método das equações multiquádricas é o mais impressionante em termos de capacidade de ajuste e suavidade visual dentre os diversos métodos de interpolação por ele testados.

A forma geral de uma equação multiquádrica é como segue:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i \left[(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + C \right]^{1/2} \quad (18)$$

onde: c_i é o coeficiente da equação multiquádrica;

X_i é a coordenada leste oeste do ponto i ;

Y_i é a coordenada norte sul do ponto i ;

X é a coordenada leste oeste do ponto a ser interpolado;

Y é a coordenada norte sul do ponto a ser interpolado;

F é o valor da variável dependente interpolada;

C é uma constante que irá definir os termos da superfície multiquádrica.

Geometricamente, cada termo da superfície multiquádrica, conforme a equação (18), representa um simples cone se o valor de C for igual a zero ou uma hiberbolóide se o valor de C for igual a uma constante positiva. Portanto a superfície multiquádrica é representada por uma somatória de cones simples ou hiperbolóides, dependendo do valor dado a C . Segundo HARDY (1972), essa somatória tem sido bastante efetiva na representação de vários tipos de topografia.

O método das equações multiquádricas, de acordo com FRANKE (1982), é completamente estável com relação a constante C , especificada pelo pesquisador, e dá resultados bastante consistentes.

HARDY (1985) recomenda utilizar ou C igual a zero ou a valores pequenos, porque se esta constante for grande ocorrerá o mau condicionamento do sistema de equações. Ainda conforme esse autor, um bom valor de trabalho para C é igual a 0.6 vezes o espaçamento entre os pontos dados.

Os coeficientes da equação (18) são obtidos através da resolução de um sistema linear de equações:

$$F_i = \sum_{j=1}^n c_j \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + c \right]^{1/2} \quad \text{para } i=1, n \quad (19)$$

ou em forma matricial, fazendo $a_{ij} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + c \right]^{1/2}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

A matriz à esquerda apresenta a diagonal principal igual à raiz quadrada da constante C.

O sistema linear de equações (20) pode ser também resolvido pelo método de eliminação de Gauss (DORN & MCCracken 1978). Se a constante C for igual a zero, deve-se proceder, antes, à permuta de linhas para que, após essa operação, nenhum elemento da diagonal principal seja nulo. Este procedimento não altera os valores dos coeficientes.

Uma solução mais eficiente para resolução do sistema de equações (20) com a diagonal principal nula foi proposta por HARDY (1985). Seguindo sua proposição, ambos os lados do sistema de equações deve ser multiplicado pela matriz dos elementos a_{ij} . Esta multiplicação deixa os elementos da diagonal principal iguais à soma dos quadrados dos elementos da linha e, portanto, livres de zeros. Assim, após esta operação, o sistema pode ser resolvido normalmente pelo método de eliminação de Gauss.

A principal limitação aqui é a dimensão dos sistema, porque é sempre igual ao número de pontos. Por exemplo, para 100 pontos de dados, deve-se calcular 100 coeficientes a partir da resolução de um sistema com igual número de equações. Assim, à medida que o número de pontos aumenta, deve-se resolver sistemas lineares cada vez maiores, embora teoricamente seja possível resolver sistemas maiores que o limite de armazenamento de uma matriz em computador (65.535 elementos no computador BURROUGHS B6900), utilizando-se de partições sucessivas para sistemas menores (FADDEVA 1959); entretanto, na prática, o tempo de computação será muito grande, tornando o procedimento inviável.

Segundo BARNHILL (1983), a extensão do método das equações multiquádricas para interpolação em três variáveis independentes é direta, porque depende somente da medida das distâncias.

Nesse caso, cada termo da equação multiquádrica seria representado geometricamente por uma série de esferas concêntricas ao ponto de dado.

1.1.3 Ponderação pelo inverso da distância

Segundo FRANKE (1982), o método de interpolação usando a ponderação pelo inverso da distância foi originalmente proposto por SHEPARD (1968). A fórmula geral para interpolação de um ponto com ponderação pelo inverso da potência da distância é:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot W_i}{\sum_{i=1}^n W_i} \quad (21)$$

onde: F é o valor interpolado;

F_i é o valor observado no ponto i ;

$W_i = 1/D_i^p$ - é o ponderador;

$D_i = [(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2]^{1/2}$ - é a distância entre o ponto i e o ponto a ser interpolado;

p é a potência da distância;

n é o número de pontos dentro da vizinhança ao ponto a ser interpolado.

Na equação (21), quando o ponto a ser interpolado coincidir com algum ponto i observado, faz-se simplesmente $F = F_i$. Isto causa o surgimento de áreas planas ao redor de cada ponto de controle.

Para evitar o surgimento de áreas planas em torno dos pontos de dados (devido ao fato das derivadas parciais de primeira ordem serem nulas em cada ponto de dado), foi sugerido por SHEPARD (1968) a inclusão das informações acerca das derivadas na equação (21). Nesse caso a interpolação é feita em dois estágios: onde num primeiro estágio são calculadas as projeções dos mergulhos ou inclinações das superfícies que passam pelos pontos de dados, sobre o ponto a ser interpolado e, no segundo, calcula-se a média dessas projeções, ponderadas pelo inverso da distância, como sendo o valor interpolado. Esse é o método de interpolação mais utilizado hoje para fins de contorno automático de mapas de isovalores, inclusive naqueles pacotes gráficos comercialmente disponíveis, tais como:

- SYMAP (DOUGENICK & SHEEHAN 1975)
- SURFACE II GRAPHICS SYSTEM (SAMPSON 1975)

O ponderador (W_i) sendo igual ao inverso de uma potência da distância, faz com que o peso seja grande para pontos próximos do ponto a ser interpolado e pequeno para pontos distantes.

A potência da distância também pode ser variada de modo a dar maior ou menor peso para os pontos próximos. Assim, quanto maior for a potência, mais forte será o ponderador, como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 : Funções de ponderação pelo inverso de potência da distância, segundo SAMPSON (1975).

O erro de interpolação depende, principalmente, da potência da distância e do número de pontos, como pode ser observado nas Figuras 7 e 8 respectivamente.

Figura 7 : Erros de interpolação (RMS), usando 8 pontos vizinhos, para diferentes funções de interpolação, segundo DAVIS (1976, apud HARBAUGH et al., 1977).

Figura 8 : Erros de interpolação (RMS), para números de pontos vizinhos variáveis, usando a função de ponderação ($1/D^4$), segundo DAVIS (1976, apud HARBAUGH et al., 1977).

Outro passo importante quando se usa esse método de interpolação é definir a vizinhança próxima em torno do ponto a ser interpolado. Esta vizinhança pode ser determinada de vários modos: fixando-se o raio de influência, definindo o número de pontos (n) ou o número de pontos por quadrante ou octante. No primeiro modo o número de pontos (n) é variável, enquanto nos outros dois o (n) é mantido fixo.

- raio de influência: fixado o raio de influência, todos os pontos que caem dentro dessa zona de influência são considerados na interpolação, conforme exemplo esquemático mostrado na Figura 9.

Figura 9 : Esquema mostrando a janela circular definida pelo raio de influência em três posições sucessivas.

Geralmente o raio de influência é fixado pelo pesquisador de maneira empírica, a partir do mapa de localização de pontos. Entretanto, existem pelo menos dois métodos para se definir o raio de influência. O primeiro deles, devido a SHEPARD (1968), leva em consideração a distribuição das densidades de pontos sobre a área mapeada e o raio de influência é calculado pela equação a seguir:

$$R = (7A/\pi N)^{1/2} \quad (22)$$

onde: R é o raio de influência, de tal modo que, em média, sete pontos caiam dentro de um círculo definido por esse raio;

A é a área do maior polígono inscrito nos dados;

N é o número total de pontos.

O último deles considera a correlação espacial dos dados e determina o raio de influência igual à amplitude definida sobre o variograma dos dados (PETTINATI 1983). A amplitude é a distância que define a vizinhança dentro da qual os pontos são considerados como dependentes.

Particularmente, esse processo de interpolação, fixando-se o raio de influência, pode ser entendido como um processo de médias móveis bidimensionais, proporcionando uma suavização dos dados. Quanto maior o raio, maior será a suavização dos dados, atenuando os efeitos locais e realçando a tendência de variação regional.

Em geofísica, principalmente em gravimetria e magnetometria, utiliza-se esse processo como um filtro digital, cujos coeficientes são justamente os inversos da potência das distâncias, onde o raio de influência é proporcional ao comprimento de onda que está se filtrando.

- número de pontos vizinhos mais próximos: nesse modo fixa-se o número de pontos mais próximos para a interpolação. Tipicamente, são utilizados de 4 até 16 pontos vizinhos (HOWARTH 1983).

Deve-se tomar cuidado ao utilizar esse modo de interpolação, pois esta será feita em qualquer ponto do mapa e utilizando pontos além da zona de influência, portanto sem muito significado. Um outro problema desse tipo de procura surge quando há agrupamento de pontos próximos e todos estes são considerados simplesmente porque satisfazem o critério dos vizinhos mais próximos. Entretanto, outros pontos, embora mais distantes que aqueles, deveriam ser considerados para que a interpolação fosse mais representativa em área, como pode ser verificado no desenho da Figura 10. Portanto, deve-se utilizar esse modo de procura quando a distribuição dos pontos em área for aproximadamente aleatória.

- número de pontos por quadrante ou octante: quando a distribuição de pontos estiver preferencialmente ao longo de linhas ou então agrupados em porções localizadas do mapa, deve-se utilizar esse modo para definição da vizinhança próxima, porque ao definir

Figura 10 : Pesquisa dos 8 pontos vizinhos mais próximos, segundo HARBAUGH et al., 1977.

simplesmente o número de vizinhos mais próximos, a amostragem pode não ser significativa, devido ao tipo de distribuição de pontos, como foi mostrado por HARBAUGH et al. (1977). Segundo esses autores a procura por quadrante ou octante é feita dividindo-se a área em torno do ponto a ser interpolado, respectivamente em quatro ou oito setores, e pesquisando-se dentro de cada setor um ou dois pontos mais próximos. As Figuras 11 e 12 apresentam, respectivamente, exemplos de procura dos vizinhos mais próximos utilizando quadrante e octante com os mesmos dados da Figura 10. Dessas figuras pode-se ver que os procedimentos de procura por quadrante ou octante proporcionam amostragens mais representativas em área.

A extensão do método de Shepard para o caso a três variáveis independentes é bastante utilizada em mineração para fins de cálculo de reservas.

Figura 11 : Pesquisa dos vizinhos mais próximos, tomando 2 pontos por quadrante, segundo HARBAUGH et al., 1977.

Figura 12 : Pesquisa dos vizinhos mais próximos, tomando 1 ponto por octante, segundo HARBAUGH et al., 1977.

1.1.4 Interpolação em redes triangularizadas

A triangulação é o processo pelo qual o plano XY dos pontos de dados é particionado em triângulos, segundo alguma lei de formação.

Existem várias maneiras de se efetuar a triangulação, porém aquela denominada de Delaunay, conforme PETTINATI (1983), é a mais aceita. Segundo esse autor, a triangulação é feita a partir da "Divisão de Dirichlet", onde em torno de cada ponto é construído um polígono convexo, de tal modo que dois polígonos contíguos possuam em comum uma única aresta, que é equidistante dos pontos internos aos referidos polígonos, como pode ser observado na Figura 13.

Figura 13 : A divisão de DIRICHLET, segundo PETTINATI (1983) .

Ainda conforme o mesmo autor, todos os pontos contíguos são então unidos por segmentos de retas, dando origem a uma malha triangularizada, que é conhecida como "Triangulação de Delaunay" (Figura 14).

Assim, após a obtenção da malha triangular dos dados, a interpolação de um ponto qualquer é feita dentro do domínio da

Figura 14 : A triangulação de DELAUNAY, segundo PETTINATI (1983).

célula triangular a que pertence o mesmo, usando funções matemáticas específicas.

Segundo a literatura consultada, foram encontrados, basicamente, três métodos que permitem fazer a interpolação em células triangulares.

O primeiro deles é o mais simples, porque ajusta um plano em cada triângulo, usando as informações dos três vértices, e faz-se uma interpolação linear (BENGTSSON & NORDBECK 1964, WATSON 1982).

O segundo já é mais refinado em relação ao anterior e a interpolação é feita a partir do cálculo de ponderadores associados a cada vértice do triângulo (MCLAIN 1976, FRANKE & NIELSON 1980, GOLD et al. 1977). No cálculo desses ponderadores estão implícitas condições que garantem suavidade e continuidade lateral nos triângulos vizinhos. Na Figura 15, tem-se uma comparação das superfícies obtidas para um mesmo conjunto de dados usando os dois métodos descritos anteriormente.

O último método faz a interpolação a partir do ajuste de uma superfície de grau 5 em cada triângulo (AKIMA 1978, PETTINATI 1983). Como um polinômio de grau 5 tem 21 coeficientes, enquanto o triângulo fornece apenas três informações, ficam restando 18

Figura 15 : Superfícies obtidas pelo método dos ponderadores (a) e por interpolação linear (b), conforme McLAIN (1976).

informações adicionais, para que o sistema possa ser resolvido.

AKIMA (1978) propõe o cálculo das derivadas parciais de primeira e segunda ordens nos vértices do triângulo e as derivadas normais em cada um dos lados do triângulo.

- para cada vértice: derivadas parciais de primeira ordem (dF/dx e dF/dy);
derivadas parciais de segunda ordem (d^2F/dx^2 , d^2F/dy^2 e $d^2F/dxdy$).
- para cada lado: derivada normal (dF/dN).

que perfazem as 18 condições necessárias para a resolução do sistema. Estas 18 condições adicionais garantem a suavidade e a continuidade da superfície ajustada.

O desempenho deste último método, segundo FRANKE (1982), depende, principalmente, das estimativas das derivadas parciais. Conforme esse mesmo autor, o algoritmo de Akima é o mais rápido por ele testado, mas dá resultados ruins em alguns casos, devido, geralmente, às estimativas também ruins das derivadas parciais e, algumas vezes, devido a triângulos longos e afinados da malha triangularizada.

Segundo AKIMA (1978), este método deve ser aplicado somente quando os valores de F forem precisos ou quando os erros porventura

existentes sejam negligenciáveis, porque a interpolação é exata (não há suavização de dados).

Embora a interpolação em redes triangularizadas seja local, a triangulação dos dados é feita de uma única vez e envolvendo todos os pontos de dados. Assim, a retirada ou a adição de um único ponto de dado poderá influir no desenho final da rede de triângulos e, conseqüentemente, no resultado da interpolação.

Este método também é expansível para interpolação em três variáveis independentes. Nesse caso a interpolação é feita dentro de tetraedros ao invés de triângulos, como no caso a duas variáveis independentes.

O método para interpolação usando a triangulação em três variáveis independentes foi pesquisada por BARNHILL (1983) e ao que parece é feita da mesma forma como aquele proposto por AKIMA (1978), para interpolação de dados irregularmente distribuídos em duas variáveis independentes, ou seja, a triangulação no espaço gera tetraedros, dentro dos quais é feita a interpolação a partir das estimativas das derivadas parciais. Segundo BARNHILL (1983), alguns problemas ocorrem na triangulação dos dados, onde a expansão do caso a duas para três variáveis independentes não é tão simples.

Em termos computacionais, o algoritmo deve ser bastante complexo e exigindo também grande espaço da memória para armazenamento dos vértices de todos os triângulos, limitando assim o número de pontos de dados iniciais.

1.1.5 Krigagem

O termo krigagem é derivado do nome de DANIEL G. KRIGE, que foi o pioneiro a introduzir o uso de médias móveis para evitar a superestimação sistemática de reservas em mineração (DELFINER & DELHOMME 1975). A base conceitual da krigagem está fundamentada na Teoria das Variáveis Regionalizadas, que foi formalizada por MATHERON (1971), a partir dos estudos práticos desenvolvidos por DANIEL G. KRIGE no cálculo de reservas nas minas de ouro do Rand na África do Sul.

A aplicação da Teoria das Variáveis Regionalizadas para estimação de depósitos minerais recebe o nome de Geoestatística (MATHERON 1971).

O cálculo do teor médio para um bloco da jazida, a partir dos dados de teores obtidos nas amostras coletadas ao longo dos furos de sondagem, é um problema de estimação. A krigagem é um método geoestatístico de estimação que usa as informações dos pontos vizinhos, considerando não somente os valores de teor, mas também a posição espacial relativa dos mesmos.

Segundo BROOKER (1979), as técnicas de estimação geoestatísticas, baseadas no estudo da variabilidade espacial do corpo de minério através do semi-variograma, são superiores porque permitem o cálculo do erro associado às estimativas, chamado variância de estimação. Ainda conforme o mesmo autor, a krigagem é o procedimento que permite calcular os ponderadores para uma dada configuração (bloco x disposição das amostras no espaço), com mínima variância de estimação.

Os conceitos básicos de Geostatística, necessários ao desenvolvimento da krigagem, encontram-se no Apêndice 1.

A krigagem, originalmente desenvolvida para fins de estimação de reservas, pode também ser utilizada na interpolação de malhas regulares para fins de contorno automático, conforme algumas aplicações apresentadas por: DELFINER & DELHOMME 1975, SAMPSON 1975, BURGUESS & WEBSTER 1980a e b. Neste ítem desenvolve-se os aspectos teóricos da krigagem que é aplicada a fenômenos estacionários. Para fenômenos não estacionários e, portanto, que apresentam uma certa tendência (deriva) aplica-se a krigagem universal, onde a componente da tendência é removida através do ajuste de uma função polinomial e, geralmente de baixo grau, os resíduos são tratados de maneira semelhante à da krigagem. OLEA (1975) e WEBSTER & BURGUESS (1980) tratam especificamente da krigagem universal aplicada a problemas de interpolação de superfícies.

Assim, a krigagem pode ser utilizada para se estimar o valor desconhecido Z_v , sobre o nó de uma malha regular, a partir um conjunto de n pontos dados $[Z(x_i), i=1, n]$, vizinhos ao nó.

O estimador Z_v^* , associado a cada nó da malha regular a ser interpolada, é obtido como uma combinação linear dos n pontos de dados, conforme fórmula a seguir:

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) \quad (23)$$

O objetivo da krigagem é obter o estimador λ_i , tal que seja melhor estimador linear não enviesado.

Assim, para que esse estimador não seja enviesado, basta garantir que:

$$E[Z_V - Z_V^*] = 0 \quad (24)$$

esta relação impõe que as duas médias sejam iguais:

$$E[Z_V] = E[Z_V^*] \quad (25)$$

fazendo $E[Z_V] = m$ e tendo que:

$$E[Z_V^*] = E\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i E[Z(x_i)] \quad (26)$$

$$E[Z_V^*] = m \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (27)$$

Assim, a condição de não enviesamento do estimador Z_V^* fica:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (28)$$

Como toda estimação, a krigagem procura fazer estimações com mínima variância.

A variância de estimação ou variância de krigagem é dada pela fórmula (29), a seguir:

$$\sigma_E^2 = E[(Z_V - Z_V^*)^2] \quad (29)$$

Expandindo a variância de estimação, tem-se:

$$\sigma_E^2 = E(Z_V^2) - 2E(Z_V Z_V^*) + E(Z_V^{*2}) \quad (30)$$

Sendo conhecida a estimativa de um valor médio sobre um domínio V , conforme relação a seguir:

$$E(Z_V) = \frac{1}{V} \int_V Z(x) dx \quad (31)$$

a equação (30) torna-se:

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 = & \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V E[Z(x) Z(x')] dx' - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{1}{V} \int_V dx \int_{V_{\alpha}} E[Z(x) Z(x')] dx' + \\ & + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \frac{1}{V_{\alpha} V_{\beta}} \int_{V_{\alpha}} dx \int_{V_{\beta}} E[Z(x) Z(x')] dx' \end{aligned} \quad (32)$$

Dentro do sinal de integração mais interno, o termo $E[Z(x)Z(x')]$ pode ser referido em termos da covariância:

$$E[Z(x)Z(x')] = C(h) + m^2 = C(x-x') + m^2 \quad (33)$$

Substituindo-se (33) em (32) tem-se:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V C(x-x') dx' + m^2 - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{1}{V V_{\alpha}} \int_V \int_{V_{\alpha}} C(x-x') dx' - 2m^2 + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \frac{1}{V_{\alpha} V_{\beta}} \int_{V_{\alpha}} \int_{V_{\beta}} C(x-x') dx' + m^2 \quad (34)$$

Fazendo:

$$\bar{C}(V, V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V C(x-x') dx' \quad (35)$$

$$\bar{C}(V, v_{\alpha}) = \frac{1}{V V_{\alpha}} \int_V \int_{V_{\alpha}} C(x-x') dx' \quad (36)$$

$$\bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) = \frac{1}{V_{\alpha} V_{\beta}} \int_{V_{\alpha}} \int_{V_{\beta}} C(x-x') dx' \quad (37)$$

Substituindo-se (35), (36) e (37) em (34), tem-se a variância de estimação como:

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V, V) - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(V, v_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) \quad (38)$$

O significado de cada um dos termos $\bar{C}$ da equação (38) pode ser melhor entendido através da Figura 16.

Assim, $\bar{C}(V, V)$ é o valor médio da função covariância entre todos os pares de pontos dentro do volume V ; $\bar{C}(V, v_{\alpha})$ é o valor médio da função covariância entre uma amostra v_{α} e todo o volume V , assim calculada para todas as amostras e $\bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta})$ é o valor médio da função covariância entre todos os pares possíveis de amostras v_{α} e v_{β} .

O objetivo da krigagem é buscar a melhor estimação, ou seja, encontrar o conjunto de ponderadores, com mínima variância de estimação ou de krigagem. Trata-se, portanto, de encontrar o mínimo da função variância de estimação - equação (38). Entretanto, como tal função tem n variáveis, o ponto mínimo poderá ser determinado após aplicação da técnica dos multiplicadores de Lagrange (CONVERSE 1970), conforme colocação do problema a seguir:

- minimizar a função:

$$\bar{C}(V,V) - 2\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(V,v_{\alpha}) + \sum_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha},v_{\beta}) \quad (39)$$

- restrito a:

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} - 1 = 0 \quad (40)$$

Figura 16 : Significado dos termos da equação (38), BROOKER(1979) .

Forma-se o langrangiano:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu) = \bar{C}(V,V) - 2\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(V,v_{\alpha}) + \sum_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha},v_{\beta}) - \mu (\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} - 1) \quad (41)$$

onde: $L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu)$ é o lagrangiano;
 μ é o multiplicador de Lagrange.

Fazendo cada uma das n derivadas parciais $dL/d\lambda$ iguais a zero, tem-se n equações (42) e fazendo $dL/d\mu$ igual a zero, tem-se (43):

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) - \mu = \bar{C}(v_{\alpha}, V) \quad \text{para } \alpha=1, n \quad (42)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} = 1 \quad (43)$$

As equações (42) e (43) constituem as equações de krigagem ou sistema de krigagem, de acordo com JOURNEL & HUIJBREGTS (1978).

A resolução do sistema de equações leva a determinação dos ponderadores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, sujeitos à condição de não enviesamento (43), que minimizam a variância de estimação σ_E^2 .

Substituindo-se a equação (42) em (38), tem-se a variância de krigagem escrita da seguinte forma:

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V, V) + \mu - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \bar{C}(v_{\alpha}, V) \quad (44)$$

O sistema de equações (42) também pode ser escrito em termos da função semi-variograma, visto que esta e a função covariância estão relacionadas conforme a equação (A - 9).

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \bar{\gamma}(v_{\alpha}, v_{\beta}) + \mu = \bar{\gamma}(v_{\alpha}, V) \quad \text{para } \alpha=1, n \quad (45)$$

Nesses termos, a variância de krigagem torna-se:

$$\sigma_E^2 = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \bar{\gamma}(v_{\alpha}, V) + \mu - \bar{\gamma}(V, V) \quad (46)$$

O desempenho da krigagem depende fundamentalmente do cálculo dos termos $\bar{C}$ ou $\bar{\gamma}$ e, conseqüentemente, do ajuste do modelo teórico aos dados. Tendo-se os parâmetros do variograma, os valores $\bar{C}$ ou $\bar{\gamma}$ podem ser encontrados ou em tabelas precalculadas para determinadas geometrias ou então calculados através do método de Gauss-Cauchy (JOURNEL & HUIJBREGTS 1978). O maior problema, portanto, é o ajuste do modelo teórico aos dados, que é bastante subjetivo. Além disso o número de pontos de dados é, geralmente, muito pequeno para uma estimação confiável do variograma, principalmente para espaçamentos maiores.

1.2 Metodologia proposta

A pesquisa da metodologia corrente em interpolação motivou o autor a estudar um método de interpolação geral para dados geológicos, que não apresentasse os inconvenientes dos métodos descritos no item anterior, conforme resumo no Quadro 2.

Métodos	Tipo de ajuste	Característica da interpolação	Inconvenientes principais
Polinômios	Global	Aproximada (Tendência de variação)	Número de pontos
Equações multiquádricas	Global	Exata	Número de pontos
Ponderação pelo inverso da distância	Local	Suavização	Distribuição dos pontos; áreas planas em torno dos pontos.
Triangulação	Local	Exata	Armazenamento auxiliar; distribuição dos pontos (interpolação pobre em triângulos longos e afinados)
Krigagem	Local	Estimação ótima	Estimativa do modelo do variograma; cálculo dos termos γ ou C

QUADRO 2: Principais métodos de interpolação e suas restrições.

As investigações geológicas (principalmente geoquímicas e geofísicas) resultam sempre em um grande número de amostras, que em geral, se encontram distribuídas irregularmente sobre a área pesquisada. Em razão disso o interpolante de uso geral em geologia não deve ter como restrição o número de amostras e também a distribuição das mesmas no espaço. Para se interpolar um grande conjunto de pontos de dados, deve-se escolher um método de interpolação local; entretanto, todos os métodos locais pesquisados apresentaram sérios inconvenientes, tais como: áreas planas em torno dos pontos de dados quando se usa a ponderação pelo inverso da distância; interpolação pobre em triângulos longos e afinados quando se faz a interpolação em redes triangularizadas de dados e estimativa do modelo do variograma quando se usa a krigagem. Assim, ficariam restando os dois métodos globais, que poderiam ser aplicados localmente para pequenas porções do mapa até cobrir a

área total pesquisada.

MCLAIN (1974) sugere fazer a interpolação usando seis pontos vizinhos mais próximos do ponto a ser interpolado, ajustando-se um polinômio de grau 2 pelo método dos mínimos quadrados ponderados. Esse método, segundo FRANKE (1977), elimina os sérios inconvenientes apresentados pelo método de SHEPARD (1968), ou seja, a estimação direta através da ponderação pelo inverso da distância.

Uma outra possibilidade seria a aplicação de equações multiquádricas definidas para um pequeno número de pontos de dados e assim, sucessivamente, até completar o conjunto de pontos de dados originais. Foi justamente esta possibilidade a pesquisada pelo autor no presente trabalho, visto que, além de proporcionar uma interpolação exata, o único inconveniente apresentado por este método é o número de pontos de dados.

1.2.1 Definição da vizinhança e da constante C para o ajuste local de equações multiquádricas em duas variáveis independentes

Para se utilizar as equações multiquádricas definidas sobre suportes locais é necessário saber, inicialmente, a vizinhança próxima ao ponto a ser interpolado, que deve ser considerada para se interpolar corretamente ou com mínimo de erro. Para se interpolar usando polinômios locais, a vizinhança é facilmente definida pelo número de coeficientes do polinômio. No entanto, como não há nenhuma indicação do número de pontos necessário à interpolação local através de equações multiquádricas, procedeu-se a um estudo simulando a interpolação usando desde 4 até 40 pontos em incrementos de 4. Esse estudo foi efetuado utilizando-se 5 superfícies matematicamente definidas, conforme o Quadro 3.

A fim de se evitar números muito pequenos, somou-se uma constante (igual a 1) aos valores obtidos nas superfícies S2, S3, S4 e S5. Isto equivale a deslocar toda a superfície para uma altura igual a esta constante do plano original.

Além da definição da vizinhança é preciso saber também o valor da constante C da equação (18), que poderia dar o melhor ajuste, tanto global como local. Assim, a fim de se conhecer o efeito dessa constante, todos os ajustes foram feitos para diversos valores de C. Os valores escolhidos nesse estudo foram 0, 1, 2, 4, 8 e 16 vezes a distância média entre os pontos de dados.

Superfície	Referência	Descrição da superfície
$S1 = [64 - (X-5.5)^2 + (Y-5.5)^2]^{1/2}$	MCLAIN(1974)	Parte de 1 esfera
$S2 = \text{EXP}[-((X-5)^2 + (Y-5)^2)]$	MCLAIN(1974)	Colina abrupta elevando-se de um plano
$S3 = \text{EXP}[-0.25((X-5)^2 + (Y-5)^2)]$	MCLAIN(1974)	Colina menos abrupta que S2.
$S4 = \text{EXP}[-((X+Y-11)^2 + (X-Y)^2/10)]$	MCLAIN(1974)	Colina longa e estreita.
$S5 = .75\text{EXP}[-((9X-2)^2 + (9Y-2)^2)/4]$ $+ .75\text{EXP}[-(9X+1)^2/49 - (9Y+1)/10]$ $- .20\text{EXP}[-(9X-4)^2 - (9Y-7)^2]$ $+ .50\text{EXP}[-((9X-7)^2 + (9Y-3)^2)/4]$	FRANKE & NIELSON (1980)	Sem descrição.

QUADRO 3: Superfícies matemáticas utilizadas para simular o ajuste local através de equações multiquádricas.

Para cada superfície calculou-se os valores da mesma em 100 pontos escolhidos aleatoriamente em cada um dos 100 quadrados de lado 1 do intervalo $(0,10) \times (0,10)$. A Figura 17, mostra a distribuição dos 100 pontos de dados utilizados no estudo.

Dessa forma, para cada conjunto de dados, procedeu-se ao ajuste global das equações multiquádricas. Para se avaliar o ajuste mediu-se um erro que se comete ao se estimar uma determinada superfície a partir de um conjunto de dados aleatoriamente distribuídos no domínio da mesma. Tal erro, aqui denominado erro de estimação, foi medido entre os dados interpolados sobre uma malha regular de 10×10 nós, com origem em $(0,0)$ e abertura igual a 1 nos dois eixos, com aqueles calculados pela função. Para a medida do erro escolheu-se um índice que não depende dos valores absolutos da função. Esse índice é chamado erro RMS ("Root Mean Square") e é calculado pela fórmula a seguir:

$$\text{erro RMS (\%)} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(F_{\text{obs}_i} - F_{\text{comp}_i})}{F_{\text{obs}_i}} \right]^2 \right]^{1/2} \cdot 100 (\%) \quad (47)$$

onde: F_{obs_i} é o valor da função do ponto i ;
 F_{comp_i} é o valor interpolado no ponto i .

Figura 17 : Mapa de localização dos 100 pontos gerados aleatoriamente .

A Tabela 4, apresenta os erros RMS de estimativa obtidos para os ajustes globais com os dados das superfícies S1 a S5.

Tabela 4: Erros RMS de estimativa (%) entre os ajustes globais e as funções matemáticas originais.

Superfície	Erros RMS de estimativa (%)					
	C=0	C=1	C=2	C=4	C=8	C=16
S1	3,31	1,96	1,70	1,39	1,10	0,86
S2	1,33	1,13	1,29	1,43	1,62	2,90
S3	0,85	0,22	0,13	0,07	0,03	0,007
S4	3,55	2,27	2,66	3,17	4,22	9,71
S5	4,71	3,99	3,71	3,43	3,18	3,00

Nesta tabela, pode-se notar dois comportamentos distintos com relação à variação da constante C: para as superfícies S1, S3 e S5 o erro RMS diminui com os aumentos da constante C, enquanto

para as superfícies S2 e S4 ocorre exatamente o contrário. Observa-se, também, que, para essas superfícies o erro mínimo está entre 0 e 1. Isto confirma em parte o que foi afirmado por HARDY (1985), que um bom valor de trabalho para C seria igual a 0,6 vezes a distância média entre os pontos de dados. Assim, deve-se evitar o uso de constantes iguais a zero em ajustes globais, porque em todas as superfícies aqui testadas o erro de estimativa sempre foi maior para ajustes com C iguais a zero do que para ajustes com C iguais a valores pequenos (no caso 1 vez a distância média).

A partir da descrição das superfícies S1 a S4, de acordo com MCLAIN (1974) e da observação da projeção em perspectiva da superfície S5 apresentada em FRANKE & NIELSON (1980), tem-se que as superfícies S1, S3 e S5 são topograficamente mais suaves, enquanto as superfícies S2 e S4 são mais acidentadas. Assim pode-se inferir que para superfícies mais suaves o uso de constantes maiores melhora o ajuste, enquanto para superfícies topograficamente mais acidentadas o aumento de C tende a piorar o ajuste.

É preciso ressaltar que o erro de interpolação, que seria medido entre os dados interpolados com aqueles observados nos pontos de dados originais, seria igual a zero porque a superfície multiquádrica passa exatamente pelos pontos originais de dados.

Conhecidos os valores interpolados pelas equações multiquádricas globais sobre os nós da malha regular, procedeu-se aos ajustes locais para cada nó dessa malha, iniciando-se com uma vizinhança definida por 4 pontos, aumentando-se sucessivamente até 40 pontos em incrementos de 4 pontos. Para esse estudo foi necessário também o desenvolvimento de um algoritmo para rápida localização dos pontos vizinhos mais próximos. A localização dos pontos próximos dentro de um arranjo qualquer de dados é muito importante, pois se a busca for muito demorada poderá comprometer, em termos de tempo de computação, todo o algoritmo de interpolação que vier a utilizar o método local. A maneira mais simples, porém a menos eficiente, para localização dos pontos próximos, seria medir a distância entre o ponto a ser interpolado e todos os pontos do conjunto de dados, considerando apenas aqueles pontos que caem dentro de alguma distância prefixada. DAVIS (1973), por exemplo, utiliza desse procedimento para localização dos pontos vizinhos em seu programa de interpolação, usando o método de Shepard.

O algoritmo desenvolvido e descrito a seguir utiliza algumas informações da malha regular que é superposta aos dados irregularmente distribuídos. A idéia básica desse algoritmo foi procurar os pontos vizinhos dentro das células circunvizinhas ao nó a ser interpolado. Essas células são definidas pela própria malha regular, como mostra a Figura 18, onde apresenta-se o mesmo conjunto de pontos de dados gerados aleatoriamente (Figura 17) com a superposição de uma malha regular de 4x4 nós, com origem em (0,0) e abertura igual a 3 em ambos os eixos. As células são então numeradas sequencialmente do sul para norte e de leste para oeste.

Figura 18 : Mapa de localização dos pontos com a malha regular superposta e a subdivisão em células.

Os pontos de dados lidos pelo programa em qualquer ordem são classificados segundo a sequência definida para as células. Isto é

feito pelo cálculo do número da célula para cada ponto de dado, através dos índices I e J associados às coordenadas Y e X, respectivamente, de acordo com as fórmulas a seguir:

$$I = (Y - Y_{\min}) / DY + 1 \quad (48)$$

$$J = (X - X_{\min}) / DX + 1 \quad (49)$$

onde: $X_{\min}$ é a coordenada X mínima;

$Y_{\min}$ é a coordenada Y mínima;

DX é a abertura da célula no eixo X;

DY é a abertura da célula no eixo Y.

Calculados os dois índices, pode-se identificar a célula a que o ponto pertence, usando a seguinte equação:

$$N_{\text{CEL}} = I + NY * (J - 1) \quad (50)$$

onde: NY é o número de células no eixo Y;

N_{CEL} é o número da célula.

Os pontos de dados são, então, classificados em ordem crescente do número da célula. A classificação foi feita inicialmente utilizando-se da adaptação de um algoritmo bastante conhecido e denominado informalmente de "classificação da bolha" (KNUTH 1973). O algoritmo original e como descrito por KNUTH (1973) classifica os dados em ordem decrescente de "bolhas", porque as bolhas maiores sobem para ocupar as suas verdadeiras posições. Para classificar os dados de um conjunto em ordem crescente, este algoritmo procede da seguinte maneira: toma-se o primeiro elemento do arranjo e compara-se com os demais elementos; se existir algum valor menor que o mesmo, faz-se a permuta, colocando-o na primeira posição. O procedimento é repetido tomando-se o segundo elemento e procurando-se nos demais valores do arranjo o segundo menor valor do conjunto e assim sucessivamente até completar todo o arranjo de dados. Embora bastante simples, verificou-se que o algoritmo ora descrito poderia comprometer o desempenho do programa, pois o tempo de computação aumentava exponencialmente com o número de pontos de dados. Assim foi necessário pesquisar na literatura um algoritmo mais eficiente. Dentre os vários algoritmos de classificação descritos por KNUTH (1973) e MARTIN (1971) optou-se por aquele denominado de "classificação rápida". Segundo este algoritmo a

classificação é feita dividindo-se o arranjo de dados em duas partes. A divisão é feita tomando-se um elemento central T. O primeiro e o último elementos do conjunto são comparados com T e permutados para que esses três valores apareçam no arranjo em ordem crescente. Os elementos do arranjo são então permutados até que todos os elementos maiores que ou iguais ao elemento central apareçam na segunda parte do arranjo e todos aqueles menores que ou iguais ao elemento central apareçam na primeira parte. Este processo é aplicado recursivamente em uma das partes (inferior ou superior), até que todos os elementos sejam classificados, ou seja, até que todas as partes tenham apenas um elemento. Quando uma parte é finalmente classificada, o processo começa novamente sobre a parte ainda não classificada do arranjo inicial. Para o presente estudo foi utilizada a subrotina em FORTRAN IV, que implementa o algoritmo da "classificação rápida", desenvolvida por SINGLETON (1969).

A título de ilustração, a Tabela 5 apresenta os tempos de execução, em segundos, do computador Burroughs B 6900, usando os dois algoritmos de classificação aqui descritos, para dois conjuntos de pontos de dados gerados aleatoriamente.

TABELA 5: Tempos de execução, em segundos, do B 6900 obtidos para os dois algoritmos de classificação testados.

Número de pontos	"classificação da bolha"	"classificação rápida"
1000	10,510	1,304
5000	277,316	6,329

Como se pode observar o tempo de execução do algoritmo de "classificação rápida" aumenta linearmente com o número de pontos, além dos tempos de execução serem significativamente menores em valores absolutos, em relação ao algoritmo de "classificação da bolha".

A Tabela 6 apresenta as coordenadas dos pontos de dados, introduzidas em qualquer ordem, os respectivos índices I e J, o número da célula e novamente as coordenadas classificadas em ordem crescente do número da célula. Como se pode verificar nesta tabela o procedimento aqui desenvolvido organiza os dados em uma estrutura

Tabela 6: Exemplo ilustrando o algoritmo de classificação para pesquisa dos vizinhos próximos.

DADOS NÃO CLASSIFICADOS					DADOS CLASSIFICADOS		
Coord. X	Coord. Y	Ind. I	Ind. J	Num. Cel.	Coord. X	Coord. Y	Num. Cel.
7,83	,4	1	3	9	1,85	1,83	1
,54	4,9	2	1	2	1,55	1,84	1
6,62	5,64	2	3	10	2,14	1,75	1
6,25	6,	3	3	11	,16	,03	1
7,45	9,74	4	3	12	,42	2,41	1
4,39	9,72	4	2	8	1,73	,52	1
1,63	9,14	4	1	4	1,83	2,9	1
3,77	3,91	2	2	6	2,68	2,95	1
1,22	8,12	3	1	3	2,07	,86	1
7,21	8,99	3	3	11	2,08	3,22	2
5,38	6,62	3	2	7	,71	5,69	2
4,59	2,13	1	2	5	2,13	4,59	2
1,91	4,69	2	1	2	1,91	4,69	2
1,12	5,17	2	1	2	1,12	5,17	2
6,29	9,16	4	3	12	1,54	4,9	2
3,91	1,67	1	2	5	1,45	3,13	2
7,02	3,02	2	3	10	,51	3,33	2
4,29	7,78	3	2	7	2,79	5,78	2
3,29	,2	1	2	5	1,2	7,52	3
2,79	5,78	2	1	2	1,22	8,12	2
1,73	,52	1	1	1	2,01	8,23	3
8,33	4,07	2	3	10	,86	8,59	3
3,02	9,38	4	2	8	2,51	6,8	3
6,78	1,46	1	3	9	2,28	7,01	3
,42	2,41	1	1	1	1,71	6,28	3
3,5	6,4	3	2	7	,8	6,04	3
6,56	4,38	2	3	10	,13	7,51	3
2,81	9,	4	1	4	1,63	9,14	4
8,08	9,36	4	3	12	2,81	9,	4
3,21	5,92	2	2	6	,48	9,27	4
4,98	4,04	2	2	6	3,29	,27	4
,51	3,33	2	1	2	4,59	2,13	5
8,11	5,57	2	3	10	3,9	2,55	5
,13	7,51	3	1	3	4,56	1,32	5
6,73	2,58	1	3	9	5,24	1,99	5
4,42	3,78	2	2	6	3,91	1,67	5
9,37	8,3	3	4	15	5,46	2,14	5
8,49	,16	1	3	9	5,45	,65	5
8,34	8,78	3	3	11	4,87	,97	5
2,51	6,8	3	1	3	5,42	3,92	6
3,9	2,55	1	2	5	3,19	4,68	6
3,7	7,84	3	2	7	4,7	5,28	6
6,16	8,72	3	3	11	3,77	3,91	6
8,36	7,46	3	3	11	5,02	5,88	6
9,17	9,75	4	4	16	4,98	4,04	6
2,13	4,59	2	1	2	4,42	3,78	6
9,42	1,96	1	4	13	5,02	4,99	6
2,28	7,01	3	1	3	3,21	5,92	6
2,07	,86	1	1	1	4,94	8,36	7
1,71	5,69	2	1	2	4,29	7,78	7
1,71	6,28	3	1	3	3,7	7,84	7
8,63	6,72	3	3	11	3,5	6,4	7
5,46	2,14	1	2	5	4,49	6,83	7
,8	6,04	3	1	3	5,38	8,09	7
9,78	4,18	2	4	14	5,97	7,94	7
5,24	1,99	1	2	5	3,26	8,94	7
4,49	6,83	3	2	7	5,38	6,62	7
5,02	5,88	2	2	6	4,39	9,72	8
6,77	,8	1	3	9	3,02	9,38	8
2,68	2,95	1	1	1	5,07	9,05	8
7,29	4,23	2	3	10	6,78	1,46	9
5,07	9,05	4	2	8	7,01	1,12	9
6,35	7,57	3	3	11	8,49	,16	9
9,9	6,93	3	4	15	7,95	2,17	9

(Continuação da Tabela 6)

DADOS NÃO CLASSIFICADOS					DADOS CLASSIFICADOS		
Coord. X	Coord. Y	Ind. I	Ind. J	Num. Cel.	Coord. X	Coord. Y	Num. Cel.
5,38	8,09	3	2	7	7,83	,4	9
8,81	1,49	1	3	9	6,77	,8	9
9,89	,59	1	4	13	8,81	1,49	9
1,2	7,52	3	1	3	8,18	2,73	9
8,18	2,73	1	3	9	6,73	2,58	9
7,95	2,17	1	3	9	7,02	3,02	10
5,42	3,92	2	2	6	6,07	3,86	10
7,01	1,12	1	3	9	8,93	3,62	10
,16	,03	1	1	1	7,29	4,23	10
5,02	4,99	2	2	6	8,33	4,07	10
9,02	2,36	1	4	13	8,11	5,57	10
2,01	8,23	3	1	3	7,48	5,81	10
,55	1,84	1	1	1	6,62	5,64	10
7,84	7,3	3	3	11	6,56	4,38	10
7,48	5,81	2	3	10	8,36	7,46	11
9,6	5,12	2	4	14	7,25	6,4	11
2,14	1,75	1	1	1	6,25	6,6	11
5,97	7,94	3	2	7	8,63	6,72	11
4,87	,97	1	2	5	7,84	7,3	11
7,25	6,4	3	3	11	6,35	7,57	11
9,62	3,48	2	4	14	8,34	8,78	11
5,45	,65	1	2	5	7,21	8,99	11
1,85	1,83	1	1	1	6,16	8,72	11
3,26	8,94	3	2	7	7,45	9,74	12
1,83	2,9	1	1	1	6,29	9,16	12
6,07	3,86	2	3	10	8,08	9,36	12
,48	9,27	4	1	4	9,02	2,36	13
8,93	3,62	2	3	10	9,42	1,96	13
4,56	1,32	1	2	5	9,89	,59	13
4,94	8,36	3	2	7	9,62	3,48	14
9,4	7,38	3	4	15	9,6	5,12	14
,86	8,59	3	1	3	9,78	4,18	14
4,7	5,28	2	2	6	9,4	7,38	15
1,45	3,13	2	1	2	9,9	6,93	15
3,19	4,68	2	2	6	9,37	8,3	15
2,08	3,22	2	1	2	9,17	9,75	16

onde podem ser facilmente recuperados. A recuperação dos dados é feita com base nos valores de três vetores adicionais, de dimensões iguais ao número total de células que, respectivamente, indicam o total de pontos dentro da célula, posição inicial para leitura dos dados de uma célula na estrutura de dados e a posição final de leitura. Estes dois últimos vetores são apontadores de início e fim de leitura dos dados. Na Tabela 7 tem-se listados os valores desses três parâmetros descritos para os dados da Tabela 6.

Assim, após a classificação, dados os índices IN e JN do nó da malha regular, pode-se identificar as células circunvizinhas e, conseqüentemente, os pontos que caem dentro de uma vizinhança predefinida do mesmo. Por exemplo, para localizar os 16 pontos mais próximos ao nó da malha regular com índices IN e JN iguais a 3, pesquisa-se as 4 células (6,7,10 e 11). Na Tabela 7 verifica-se

Tabela 7: Parâmetros utilizados para recuperação dos dados das células.

Num. Cel.	Número de pontos	Apontadores	
		Início	Fim
1	9	1	9
2	9	10	18
3	9	19	27
4	3	28	30
5	9	31	39
6	9	40	48
7	9	49	57
8	3	58	60
9	9	61	69
10	9	70	78
11	9	79	87
12	3	88	90
13	3	91	93
14	3	94	96
15	3	97	99
16	1	100	100

que essas 4 células contêm 36 pontos de dados e portanto suficientes para localização dos 16 pontos mais próximos, que é feita medindo-se a distância entre o nó e todos os 36 pontos de dados e considerando somente os 16 pontos com as menores distâncias. Dessa forma é possível localizar para qualquer nó da malha regular a vizinhança que contém os pontos mais próximos do mesmo. Assim, foi efetuado o estudo da aproximação local através de equações multiquádricas, utilizando-se do algoritmo de classificação e busca ora descrito. Para cada vizinhança, bem como para cada constante utilizada mediu-se os erros de estimativa e de aproximação, este definido como sendo o desvio do ajuste local em relação ao global. O erro de interpolação, medido entre os valores interpolados com os valores dos pontos de dados originais, mesmo para o ajuste local é zero, porque a superfície multiquádrica passa exatamente sobre todos os pontos de dados utilizados no ajuste da mesma. Os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas 8 a 12 e Figuras 19 a 23. Nestas figuras foram lançados os erros de aproximação RMS (%) em função da constante C para cada vizinhança.

TABELA 8: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S1.

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	19.74	17.95	9.16	8.55	6.85	6.33	4.82	4.37	3.32	2.90	2.38	1.98
8	9.50	7.31	3.66	2.46	2.72	1.63	1.97	1.04	1.44	0.66	1.11	0.46
12	6.97	4.49	2.95	1.49	2.34	1.08	1.75	0.71	1.29	0.43	0.97	0.27
16	5.59	2.68	2.91	0.95	2.09	0.65	1.61	0.39	1.21	0.22	0.94	0.15
20	5.07	2.12	2.46	0.75	2.00	0.51	1.55	0.31	1.18	0.17	0.93	0.11
24	4.76	1.66	2.38	0.61	1.96	0.42	1.54	0.25	1.17	0.13	0.91	0.08
28	4.52	1.40	2.31	0.51	1.91	0.34	1.51	0.20	1.15	0.10	0.89	0.06
32	4.37	1.20	2.28	0.45	1.89	0.31	1.50	0.18	1.15	0.09	0.89	0.05
36	4.25	1.04	2.24	0.39	1.88	0.26	1.49	0.15	1.15	0.08	0.88	0.04
40	4.12	0.90	2.21	0.33	1.85	0.22	1.48	0.13	1.15	0.07	0.88	0.04

TABELA 9: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S2.

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15.10	14.74	7.26	7.24	5.19	5.25	3.45	3.70	2.47	2.99	2.13	3.88
8	6.16	5.97	2.64	2.11	2.71	1.97	3.02	2.11	3.32	2.40	3.53	3.63
12	3.59	3.23	1.85	1.33	1.87	1.28	1.95	1.31	2.07	1.56	2.20	3.09
16	2.37	1.82	1.47	0.77	1.68	0.84	2.01	1.08	2.32	1.53	2.52	3.13
20	2.01	1.37	1.28	0.54	1.42	0.55	1.62	0.70	1.76	1.15	1.82	2.95
24	1.78	0.96	1.24	0.49	1.40	0.56	1.62	0.77	1.81	1.27	1.92	2.99
28	1.73	0.78	1.27	0.30	1.44	0.35	1.63	0.65	1.80	1.26	1.95	3.05
32	1.65	0.62	1.24	0.25	1.42	0.28	1.61	0.54	1.77	1.11	1.95	2.89
36	1.60	0.52	1.22	0.17	1.44	0.19	1.64	0.38	1.90	0.90	2.22	3.10
40	1.54	0.43	1.19	0.14	1.35	0.14	1.54	0.31	1.82	0.80	2.44	2.88

TABELA 10: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S3.

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15.38	15.26	7.49	7.43	5.38	5.34	3.54	3.52	2.25	2.25	1.57	1.57
8	6.48	6.36	2.01	1.89	1.29	1.21	0.85	0.81	0.67	0.66	0.66	0.66
12	3.75	3.55	1.19	1.06	0.92	0.85	0.68	0.65	0.56	0.55	0.52	0.52
16	2.24	1.98	0.79	0.63	0.57	0.48	0.43	0.39	0.39	0.38	0.38	0.38
20	1.80	1.49	0.63	0.46	0.47	0.37	0.38	0.33	0.34	0.32	0.30	0.30
24	1.47	1.07	0.53	0.37	0.38	0.28	0.27	0.21	0.20	0.18	0.17	0.17
28	1.34	0.88	0.44	0.28	0.29	0.20	0.19	0.15	0.15	0.15	0.18	0.18
32	1.12	0.67	0.39	0.22	0.25	0.15	0.16	0.12	0.13	0.13	0.16	0.16
36	1.12	0.56	0.35	0.17	0.21	0.10	0.11	0.07	0.09	0.09	0.13	0.13
40	1.06	0.47	0.32	0.13	0.19	0.08	0.10	0.05	0.06	0.05	0.05	0.05

TABELA 11: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S4.

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15.64	14.88	8.27	8.18	6.45	7.05	5.03	6.64	4.22	7.06	3.88	11.63
8	7.16	6.22	3.24	2.29	2.63	2.41	2.32	3.04	2.28	4.25	2.39	10.18
12	4.83	3.37	2.31	1.71	2.19	2.29	2.19	2.99	2.26	4.24	2.40	10.21
16	4.10	1.82	2.32	0.89	2.56	1.14	2.84	1.71	3.00	3.20	3.08	9.86
20	3.91	1.35	2.23	0.67	2.38	0.98	2.45	1.71	2.40	3.43	2.40	9.96
24	3.74	0.97	2.25	0.59	2.39	0.93	2.43	1.65	2.37	3.27	2.39	9.54
28	3.70	0.79	2.29	0.40	2.53	0.62	2.71	1.17	2.78	2.63	2.97	8.65
32	3.66	0.61	2.28	0.29	2.53	0.49	2.74	1.04	2.85	2.51	3.25	7.99
36	3.65	0.53	2.30	0.21	2.63	0.27	2.96	0.70	3.16	2.15	3.67	7.60
40	3.62	0.44	2.27	0.17	2.58	0.26	2.96	0.64	3.42	1.96	4.59	7.12

TABELA 12: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S5.

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15.75	13.70	8.55	7.36	6.70	5.35	5.20	3.60	4.28	2.42	3.84	1.87
8	7.85	5.62	4.29	1.51	3.76	0.91	3.40	0.66	3.22	0.70	3.20	0.93
12	6.13	2.89	4.00	0.71	3.66	0.64	3.35	0.54	3.14	0.47	3.03	0.45
16	5.30	1.28	4.01	0.43	3.71	0.36	3.44	0.33	3.25	0.36	3.16	0.45
20	5.10	0.95	3.98	0.35	3.70	0.30	3.43	0.27	3.22	0.28	3.10	0.33
24	4.98	0.69	3.98	0.35	3.69	0.31	3.41	0.27	3.20	0.26	3.07	0.29
28	4.94	0.55	3.99	0.28	3.70	0.24	3.42	0.21	3.20	0.19	3.05	0.27
32	4.87	0.45	3.98	0.27	3.70	0.23	3.43	0.19	3.20	0.17	3.04	0.20
36	4.82	0.41	3.97	0.28	3.70	0.24	3.42	0.19	3.18	0.16	3.02	0.16
40	4.83	0.32	3.98	0.21	3.70	0.17	3.43	0.14	3.19	0.12	3.01	0.16

Figura 19 : Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S1.

Figura 20 : Distribuição dos erros de aproximação RMS(%) em função da constante C, obtida para a superfície S2 .

Figura 21 : Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S3 .

Figura 22 : Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S4.

Figura 23 : Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a superfície S5.

Nestas figuras pode-se observar que:

- em geral, o ajuste local aproxima-se mais do global com o aumento do número de pontos, como seria de se esperar, porque se o método é global o ajuste local tende a ele, quando o número de pontos do primeiro tende ao número de pontos usado no último;
- existe uma melhora significativa (diminuição do erro de aproximação) do ajuste local quando se passa de C igual a zero para C igual a 1;
- o ajuste das superfícies S1, S3 e S5, ditas topograficamente suaves, melhora com o aumento da constante C até um valor igual a 4 vezes a distância média. Essa tendência já não se verifica para as superfícies S3 e S5 quando se usa C maiores ou iguais a 8, devido, provavelmente, à forma dessas superfícies;
- o ajuste das superfícies S2 e S4, topograficamente acidentadas, piora com o aumento de C.

Desse modo, pode-se afirmar que as equações multiquádricas definidas sobre suportes locais aproximam aquelas definidas sobre um suporte global, quando se utiliza no mínimo 16 pontos de dados vizinhos e C iguais a valores pequenos, por exemplo 0.6 vezes a distância média entre os pontos vizinhos, conforme sugestão de HARDY (1985). A utilização de C pequeno garante um ajuste bom, mesmo se a superfície for bastante irregular ou topograficamente acidentada. O ideal seria conhecer, a priori, o tipo de superfície que seria interpolada para se escolher corretamente o valor da constante.

Ao se propor um interpolante de uso geral em geologia, este deveria permitir também a interpolação de dados irregularmente distribuídos no domínio de funções de três variáveis independentes. Assim deve-se primeiro testar o ajuste de equações multiquádricas globais, a fim de verificar se é realmente possível a interpolação em três variáveis independentes, usando a fórmula da equação (18) expandida de mais de uma componente relativa à terceira variável independente (cota ou profundidade). Os resultados desse estudo passam a ser descritos no item seguinte.

1.2.2 Ajuste de equações multiquádricas globais em três variáveis independentes

O estudo aqui desenvolvido teve como objetivo testar a aplicabilidade da fórmula da equação (18) expandida em mais um termo, relativo à terceira variável independente para se fazer a

interpolação de dados irregularmente distribuídos no espaço.

A fórmula testada para o ajuste de equações multiquádricas globais em três variáveis independentes foi:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i \left[(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2 + C \right]^{1/2} \quad (51)$$

Novamente recorreu-se ao uso de funções matematicamente conhecidas para verificar a aplicabilidade da metodologia proposta. Nesse caso foram utilizadas apenas duas funções, descritas por BARNHILL (1983), denominadas polinomial tricúbica e polinomial triquádrica, respectivamente.

$$F(X,Y,Z) = X^3 + Y^3 + Z^3 \quad (52)$$

$$F(X,Y,Z) = (X-5)^2 + (Y-5)^2 + (Z-5)^2 \quad (53)$$

A primeira função teve sua forma modificada da proposição original, justamente para se evitar valores menores que a unidade, pois tais valores falseiam a medida dos erros RMS de estimativa e aproximação, calculados através da equação (47).

Seguindo a mesma metodologia adotada no item anterior, calculou-se o valor de cada uma dessas funções em 343 pontos escolhidos aleatoriamente dentro de cada um dos 343 cubos de lado 1,43 do intervalo (0,10) X (0,10) X (0,10).

Assim, após o ajuste de equações multiquádricas globais para cada uma dessas funções, mediu-se o erro de estimação entre os dados interpolados sobre uma malha regular de 7x7x7 nós, com origem em (0,715, 0,715, 0,715) e abertura igual a 1,43 nos três eixos, com aqueles calculados pelas funções primitivas. Na Tabela 13, encontram-se os erros RMS de estimativa observados para as duas funções.

Tabela 13: Erros de estimativa RMS(%) entre os ajustes globais e as funções F1 e F2.

Função	C=0	C=1	C=2	C=4	C=8	C=16
F1	475,63	222,98	161,80	103,44	55,91	24,17
F2	1,09	0,58	0,45	0,31	0,18	0,084

Nesta tabela pode-se observar que os erros de estimativa da primeira função são bem maiores que aqueles obtidos para a segunda. Isto se deve a maior variabilidade dos valores originais da primeira função em relação à última, como pôde ser constatado nas respectivas listagens. Um problema semelhante ocorre em geofísica no ajuste de modelos geofísicos quando os dados apresentam-se com grande variabilidade (e.g. dados de resistividade que podem variar no intervalo 2 - 10.000 $\Omega.m$). A solução comumente adotada, por exemplo RIGOTI (1985), é a transformação dos valores originais para o domínio logarítmico. Esta transformação reduz o intervalo de variação original grande para um intervalo pequeno, tornando mais linear o problema, e conseqüentemente, melhorando o ajuste de modelos geofísicos.

Assim, tendo em vista que tanto o ajuste de modelos geofísicos como o ajuste de equações multiquádricas são modelos lineares, procedeu-se à transformação logarítmica dos dados da função F1 com o objetivo de obter ajustes melhores e, portanto, com erros RMS de estimativa menores. Segundo o procedimento adotado, o ajuste de equações multiquádricas, bem como a interpolação dos valores, são feitos no domínio logarítmico. Os valores dos pontos interpolados são então calculados no domínio original por transformação inversa. A tabela 14 reproduz parte dos dados calculados sobre os pontos gerados aleatoriamente, bem como o logaritmo dos valores da função F1.

Tabela 14: Valores das funções sobre parte dos pontos de dados gerados aleatoriamente.

X	Y	Z	F1	F2	log(F1)
0,95	0,75	1,50	4,65	46,70	0,67
2,00	6,01	1,70	230,05	20,94	2,36
1,40	9,67	1,76	911,90	45,24	2,96
2,33	4,88	1,70	133,64	18,00	2,13
2,46	8,02	1,62	535,85	27,07	2,73
4,93	2,26	1,03	132,12	23,26	2,12
3,98	6,44	0,73	330,42	21,31	2,52
5,95	2,00	1,50	222,55	22,15	2,35
5,71	5,57	1,72	364,58	11,61	2,56
6,39	10,08	1,17	1287,20	42,43	3,11

Para a função F1 verifica-se que uma parte dos pontos originais varia desde 4,65 até 1287,20, para a função F2 esta variação se dá no intervalo 16,11-46,70 e para o logaritmo da função F1 o intervalo original reduz-se para 0,67-3,11. Assim, é inevitável que os erros de estimativa sejam grandes para a função F1, porque qualquer ponto interpolado apresentará um desvio grande em relação aos pontos vizinhos originais e, conseqüentemente, em relação à função original.

A Tabela 15 apresenta os erros de estimativa RMS (%) obtidos para a função F1, de acordo com o procedimento descrito. É preciso ressaltar que os erros de estimativa foram calculados com os valores no domínio original, ou seja, após a transformação inversa.

TABELA 15: Erros de estimativa RMS (%) para a função F1, com o ajuste de equações multiquádricas feito no domínio logarítmico

Função	C=0	C=1	C=2	C=4	C=8	C=16
"log(F1)"	35,41	12,00	8,99	6,65	4,89	3,60

Comparando-se as Tabelas 13 e 15, verifica-se que a transformação logarítmica dos dados da função F1 reduziu significativamente os erros de estimativa RMS (%). A ordem de grandeza dos erros de estimativa da função "log(F1)" ainda são grandes quando comparados com aqueles da função F2, porque tais erros são calculados no domínio original, onde os valores voltam a apresentar grande variabilidade. Portanto, o procedimento ora descrito tende a melhorar o ajuste de modelos lineares quando os dados originais apresentam-se com grande dispersão. Este procedimento poderia ser estendido para qualquer problema de ajuste de modelos lineares para interpolação, tais como: funções polinomiais, interpolação em malhas triangulares, usando o método de Akima e krigagem.

Quanto ao comportamento do erro de estimativa em relação à constante C, observa-se que, para todas as funções, o erro diminui com o aumento de C e, portanto, correlacionáveis às superfícies S1, S3 e S5 do caso a duas variáveis independentes.

Visto que a extensão do método das equações multiquádricas é perfeitamente possível, como tinha sido afirmado por BARNHILL (1983), resta agora verificar a vizinhança necessária para utilizá-las como método local de interpolação. É preciso ressaltar que BARNHILL (1983) já utiliza as equações multiquádricas locais definidas por 20 pontos vizinhos mais próximos para interpolar os nós de uma malha regular, que são usados como um estágio para aproximação da imagem da superfície quadridimensional pelo método multi-estágio.

1.2.3 Definição da vizinhança e da constante C para o ajuste local de equações multiquádricas em três variáveis independentes

Os nós da malha regular em três dimensões, interpolados através do ajuste global de equações multiquádricas, foram utilizados como valores de referência para estudo da vizinhança necessária para que os mesmos possam ser aproximados por equações multiquádricas locais com erro mínimo.

Da mesma forma, como no caso a duas variáveis independentes utilizou-se nesse estudo o número de pontos vizinhos desde 4 até 40 em incrementos de 4 pontos e constante C iguais a 0,1,2,4,8 e 16 vezes a distância média entre os pontos de dados. Novamente nesta fase do estudo precisou-se de um algoritmo para rápida localização dos pontos vizinhos próximos no sistema de três variáveis independentes. Toda a idéia do algoritmo desenvolvido para duas variáveis independentes foi aproveitada e estendida para três variáveis independentes. Nesse caso, o espaço é discretizado em células tridimensionais, de dimensões DX, DY e DZ, respectivamente nos eixos X,Y e Z. As células são numeradas sequencialmente de leste para oeste, do sul para o norte e de baixo para cima. A origem das células está no canto inferior esquerdo. Da mesma forma calcula-se os índices I e J, de acordo com as fórmulas (48) e (49) e o índice K relativo à terceira variável independente, conforme a fórmula (54):

$$K = (Z - Z_{\text{MIN}}) / DZ + 1 \quad (54)$$

O número da célula é calculado pela seguinte relação:

$$NCEL = I + NY*(J-1) + NX*NY*(K-1) \quad (55)$$

onde: NCEL é o número da célula;

NX é o número de células na direção X;

NY é o número de células na direção Y;

A classificação e a busca são feitas da mesma forma que no caso anterior, considerando a inclusão da terceira variável independente.

Os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas 16 a 18 e Figuras 24 a 26, respectivamente para as funções F_1 , F_2 e " $\log(F_1)$ ".

Para a função F_1 , os erros de estimativa, medidos entre os ajustes locais e a função matemática original, aumentam com o número de pontos vizinhos para valores pequenos de C (0,1,2 e 4 vezes a distância média). Este paradoxo pode ser explicado pela variação muito brusca dos dados em pontos vizinhos. Assim, quanto maior o número de pontos vizinhos maior o erro de estimativa, porque inevitavelmente aumenta-se a variabilidade dos dados (no presente estudo o comportamento da função F_1 é bastante particular, visto que não existe algo semelhante na natureza).

Já os erros de estimativa observados nos ajustes locais usando os dados gerados pela função F_2 , apresentam comportamento semelhante àqueles observados para as superfícies S_1 a S_5 no caso a duas variáveis independentes, isto é, diminuem com o aumento do número de pontos vizinhos.

Os erros de estimativa obtidos para a função " $\log(F_1)$ ", diminuem com o aumento do número de pontos vizinhos e também com o aumento da constante C . Ou seja, o comportamento esperado segundo a hipótese do presente trabalho é tal que, na interpolação através de equações multiquádricas locais, o erro de estimação diminua com o aumento do número de pontos vizinhos. Além disso, comparando-se as Tabelas 16 e 18, verifica-se que os erros de estimativa da função " $\log(F_1)$ " são bem menores que aqueles da função F_1 , com exceção do ajuste da função " $\log(F_1)$ " obtido com 4 pontos vizinhos e $C=0$, onde foi medido um erro de 19.000%. Este erro, bastante grande, é devido ao uso de condições severas, indicadas para interpolação de dados com grande variabilidade, na interpolação de dados já suavizados com a transformação logarítmica.

TABELA 16: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a função F1.

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	77.68	18.76	17.17	11.64	12.27	10.07	19.64	9.41	28.29	10.96	34.73	15.74
8	99.70	15.47	43.24	8.67	31.75	7.40	22.08	6.25	15.22	5.17	10.98	3.83
12	101.11	13.45	50.77	7.01	41.57	6.14	34.30	5.09	29.66	3.67	27.18	2.28
16	112.12	11.60	55.16	6.21	42.32	5.33	30.45	4.37	21.21	3.79	15.49	3.62
20	128.71	10.81	64.02	5.79	47.65	4.96	32.24	4.13	20.58	3.70	13.59	3.44
24	133.76	9.94	70.64	5.50	53.82	4.74	37.49	3.94	24.32	3.19	15.44	2.24
28	137.96	9.34	67.66	5.34	48.48	4.74	29.58	4.25	14.22	3.70	4.63	3.82
32	144.22	8.85	72.70	5.26	52.83	4.71	33.13	4.21	16.86	3.84	6.18	3.54
36	165.95	8.18	83.65	5.10	62.74	4.56	43.48	3.96	28.62	3.21	18.42	2.08
40	192.25	7.78	95.36	4.83	70.31	4.33	46.25	3.80	26.83	3.25	13.76	2.50

TABELA 17: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a função F2.

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	12.96	13.26	11.89	11.81	11.52	11.45	11.50	11.45	11.80	11.78	12.29	12.28
8	9.85	9.91	5.63	5.55	5.00	4.94	4.92	4.90	5.16	5.16	5.41	5.41
12	7.44	7.44	2.98	2.84	2.41	2.31	1.95	1.88	1.52	1.48	1.14	1.12
16	5.49	5.42	2.08	1.88	1.81	1.66	1.50	1.41	1.16	1.10	0.81	0.78
20	4.13	3.94	2.16	1.96	2.13	2.00	1.88	1.79	1.44	1.40	0.98	0.97
24	3.47	3.18	2.24	2.04	2.19	2.06	1.90	1.82	1.44	1.39	0.96	0.94
28	2.78	2.34	2.13	1.94	1.98	1.85	1.63	1.54	1.18	1.13	0.75	0.74
32	2.42	1.80	1.83	1.60	1.56	1.40	1.18	1.08	0.79	0.73	0.46	0.44
36	2.32	1.60	1.70	1.45	1.38	1.20	1.00	0.88	0.64	0.57	0.35	0.32
40	2.27	1.51	1.43	1.14	1.08	0.84	0.73	0.55	0.43	0.32	0.22	0.17

TABELA 18: Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a função "log(F1)".

NUMERO	C=0		C=1		C=2		C=4		C=8		C=16	
DE	ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)		ERROS RMS (%)	
PONTOS	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	19010	18700	89.04	89.53	43.79	43.95	27.88	28.06	18.97	19.00	13.52	13.22
8	84.69	62.05	32.38	29.47	23.77	21.94	16.10	14.75	10.39	9.03	7.06	5.48
12	69.42	40.44	20.12	15.31	13.54	10.08	8.82	5.85	6.08	3.16	4.79	2.36
16	62.03	31.10	15.97	9.24	11.06	6.12	7.77	3.73	5.84	2.22	4.82	1.93
20	55.54	24.02	14.80	6.96	10.50	4.98	7.38	3.20	5.34	1.94	4.15	1.57
24	52.61	18.29	14.26	5.85	10.27	4.45	7.28	2.92	5.30	1.97	4.15	1.42
28	50.70	14.03	14.08	4.91	10.12	3.75	7.15	2.47	5.17	1.54	4.01	1.20
32	49.37	11.78	13.75	4.22	9.86	3.07	7.00	1.91	5.10	1.17	3.93	1.02
36	46.72	10.27	13.39	3.84	9.60	2.72	6.82	1.68	4.96	1.02	3.82	0.85
40	44.10	8.99	13.15	3.42	9.52	2.38	6.83	1.45	4.97	0.91	3.77	0.81

Figura 24 : Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a função F1.

Figura 25 : Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C, obtida para a função F2 .

Figura 26 : Distribuição dos erros de aproximação RMS (%) em função da constante C , obtida para a função " $\log(F1)$ ".

Assim, ao se aplicar a transformação logarítmica em qualquer conjunto de dados, os erros de estimativa e aproximação irão diminuir com o aumento do número de pontos vizinhos, bem como com o aumento da constante C. Tais erros deverão ter seus limites fixados pelo pesquisador em função da amostragem (erro de estimativa) e da precisão (erro de aproximação) que se deseja obter.

É preciso ressaltar que somente após a constatação da ordem de grandeza dos erros de estimativa da função F1 (Tabela 13), procurou-se fazer a transformação logarítmica dos dados a fim de se obter ajustes melhores e, conseqüentemente, a diminuição de tais erros. A inclusão da transformação logarítmica para interpolação através de equações multiquádricas locais elimina a necessidade de se conhecer a priori o tipo de superfície para escolha correta da constante C, como foi descrito no item 1.2.1. A aplicação da transformação ora proposta generaliza ainda mais o uso de equações multiquádricas como interpolante de uso geral em geologia.

Quanto aos erros RMS de aproximação, observa-se que estes diminuem com o aumento do número de pontos vizinhos, como observado anteriormente para as superfícies S1 a S5.

Uma aplicação imediata de equações multiquádricas em três variáveis independentes seria o cálculo de reservas minerais. Neste caso, o teor médio no centro de um bloco poderia ser estimado a partir de várias determinações de teor em pequenas porções do bloco, usando os dados de análises de amostras, coletadas ao longo dos furos de sondagem e dipostas irregularmente.

A efetiva e segura utilização de equações multiquádricas no cálculo de reservas deve-se dar após um estudo simulando o cálculo de reservas com dados reais de uma jazida em exploração. Além disso, seria necessário, também, comparar o desempenho deste método com o método geoestatístico, este largamente aceito no cálculo de reservas minerais.

HARDY (1977) faz uma comparação entre as funções de covariância (base do método geoestatístico) e a função multiquádrica em várias aplicações (topografia, gravimetria e processamento de imagem). Nesse estudo o autor conclui que a função multiquádrica é superior às funções de covariância em termos de precisão e eficiência computacional, principalmente porque os fenômenos estudados por ele não são estacionários no sentido de funções aleatórias estacionárias.

2 DEFINIÇÃO DA ÁREA DE INTERESSE

A definição da área de interesse é de importância fundamental para a utilização correta e confiável das interpolações, pois estas só são válidas dentro do domínio dos pontos de dados amostrados.

A esta área de interesse denomina-se fronteira convexa. Segundo EDDY (1977), a fronteira convexa de um conjunto planar é o polígono convexo de área mínima que engloba o conjunto planar.

2.1 Metodologia adotada

Dentre os diversos métodos de determinação de fronteiras convexas existentes, GRAHAM (1972), JARVIS (1973), EDDY (1977), BYKAT (1978), GREEN & SILVERMAN (1979), MCCALLUM & AVIS (1979) e PREPARATA (1979), entre outros, adotou-se aquele proposto por EDDY (1977). Segundo este método, define-se uma linha de partição inicial que une dois pontos quaisquer, por simplicidade escolhe-se os pontos em coordenadas X mínima e máxima. Exclue-se estes dois pontos, que já pertencem à fronteira convexa, do conjunto planar original e procede-se à partição. Dessa partição tem-se dois subconjuntos de pontos, denominados respectivamente "abaixo" e "acima" da linha de partição. Em cada um desses subconjuntos determina-se o ponto mais distante da linha de partição; se existirem pontos dentro dos mesmos, os dois pontos encontrados pertencem à fronteira convexa.

Toma-se o primeiro ponto da linha inicial, juntamente com um dos novos pontos da fronteira convexa que irão definir uma nova linha e procede-se à nova partição, obtendo-se dois outros subconjuntos e, conseqüentemente, se existirem pontos dentro desses subconjuntos determina-se dois novos pontos da fronteira convexa. E assim, sucessivamente, o procedimento da partição é repetido até que não existam pontos para serem processados. No final deste processo tem-se identificados os pontos que são os vértices do polígono convexo procurado.

Dessa forma pode-se encontrar a fronteira convexa de um conjunto planar de dados em duas variáveis independentes. Resta agora definir a fronteira convexa para dados distribuídos em três variáveis independentes. Tendo em vista que a extensão do método descrito para três variáveis independentes tornaria o procedimento adotado bastante complicado, optou-se por

utilizar do mesmo algoritmo de forma iterativa, processando cada nível da matriz 3D como um conjunto planar independente até completar todos os níveis da mesma. Adotou-se esta solução para determinação da fronteira convexa de conjuntos de dados em três variáveis independentes, uma vez que mostrou-se satisfatória para os fins do presente trabalho.

3 DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO À ÁREA DE INTERESSE

Tendo sido definida a fronteira convexa dos dados é preciso saber se um determinado ponto, e.g. nó da malha regular, está dentro ou fora da mesma. Na literatura pesquisada foram encontrados dois algoritmos que determinam a posição de um ponto em relação a um polígono. O primeiro desses foi apresentado por HALL (1975) e baseia-se na soma dos ângulos formados entre o ponto dado e todos os vértices do polígono. Se esta soma for $\pm 360^\circ$ o ponto está dentro e se a soma for 0° então o ponto está fora.

O outro algoritmo proposto por ANDERSON (1976) conta o número de intersecções da reta, que é traçada à direita do ponto e paralela ao eixo de coordenadas X, com os lados do polígono. Se existir um número ímpar de intersecções o ponto está fora.

Esses dois algoritmos foram testados e verificou-se que o primeiro é sempre mais preciso e confiável em relação ao último. O algoritmo de Anderson apresenta falhas, principalmente quando o ponto coincide com um dos vértices do polígono dado. Assim, no presente trabalho adotou-se o algoritmo de HALL (1975), para determinação da posição relativa de um ponto com a área de interesse.

4 CONTORNO AUTOMÁTICO

Esta é a fase do processamento na qual a malha regular interpolada é pesquisada, segundo algum algoritmo, para produzir as curvas de contorno ou de isovalores em traçadores digitais ("plotters").

Os mapas de contorno são a forma de representação gráfica mais usual em geologia. A interpretação do mapa de isovalores é feita superpondo-se ao mesmo uma base geológica, para facilitar as correlações entre a geologia e a variação espacial de um

determinado parâmetro.

4.1 Metodologia corrente

Na literatura consultada pôde-se verificar a existência de vários algoritmos para contorno automático. Entretanto, com a interpolação da malha regular, tais algoritmos ficam restritos a dois tipos:

- O primeiro tipo, denominado método das células (Figura 27),

Figura 27: Pesquisa e traçado das curvas de contorno pelo método das células, segundo IBM (1965).

pesquisa célula por célula, segundo alguma sequência preestabelecida, até cobrir toda a malha. Em cada célula o algoritmo determina todas as intersecções de todas as curvas de contorno que por ventura estejam presentes, armazenando-as em uma estrutura de dados. Finalmente, todas as intersecções (pares de pontos) de uma determinada curva são recuperadas e desenhadas. Este método foi aperfeiçoado por PETTINATI (1983), que incluiu o armazenamento temporário das intersecções para a recuperação das mesmas curva por curva para o traçado contínuo. Esta modificação permitiu àquele autor fazer anotações do valor da curva sobre a mesma, durante o traçado. O método das células, originalmente desenvolvido, não permitia fazer anotações sobre a curva, e apresentava um tempo de desenho muito grande, pois a cada par de pontos havia necessidade de deslocamento da pena do "plotter" para a posição do outro par de pontos.

O segundo tipo, denominado método de rastreamento (Figura 28), é o mais comum dentre os algoritmos utilizados nos programas de computação para traçado automático de curvas de contorno, inclusive naqueles disponíveis comercialmente. Este algoritmo segue as curvas de contorno, ou seja, a partir de algum ponto inicial são pesquisados os demais pontos que pertencem a uma determinada curva até coincidir ou com o ponto inicial (curva fechada) ou com a borda do mapa (curva aberta). Os principais algoritmos desse tipo foram descritos por DAYHOFF (1963), BATCHA & REESE (1964), COTTAFAVA & LE MOLI (1969), PALMER (1970) E SNYDER (1978).

4.2 Metodologia adotada

No presente trabalho adotou-se o método de rastreamento para pesquisa e desenho das curvas de isovalores, porque este pode ser facilmente implementado em programas de computação.

Especificamente, foi adotado o método de contorno descrito por BATCHA & REESE (1964), onde o interior de uma célula é subdividido em 4 triângulos, cujo vértice comum é o ponto central da célula e calculado como sendo a média aritmética dos 4 nós da célula. A Figura 29 mostra os traçados possíveis de um trecho da curva de contorno quando a célula não é subdividida e também quando a mesma é subdividida em 2 e 4 triângulos. A subdivisão do interior da célula em 4 triângulos introduz uma melhora no aspecto final da curva, pois a mesma fica mais suavizada.

Figura 28: Pesquisa e traçado da curva de contorno pelo método do rastreamento, segundo IBM (1965).

Figura 29: Traçados possíveis de um trecho da curva no interior de uma célula, quando esta não é subdividida em triângulos (a), subdividida em dois triângulos (b) e subdividida em quatro triângulos (c), segundo BATCHA & REESE, 1964.

Quando o mapa de contorno for muito grande e, conseqüentemente, o número de células, é conveniente subdividir o mesmo em partes e processá-las individualmente. Este procedimento pode diminuir o tempo de processamento, à medida que muitas células que não apresentam uma determinada curva deixam de ser pesquisadas.

5 PROJEÇÃO EM PERSPECTIVA

Uma outra representação gráfica possível de um arranjo regular de dados é a projeção em perspectiva, que tem um caráter apenas qualitativo. Estas representações permitem que as superfícies, topográficas ou não, sejam facilmente visualizadas e interpretadas.

5.1 Metodologia Corrente

A projeção em perspectiva consiste em tomar as três coordenadas da malha regular, transformando-as em duas que são lançadas no plano. A união de todos esses pontos no plano irá produzir o desenho em perspectiva da superfície ou do modelo digital.

A Figura 30 mostra geometricamente como é obtida a perspectiva de um determinado objeto ou sólido. Nela pode-se ver que a perspectiva é função da posição e da distância do observador em relação ao objeto.

Figura 30 : Desenho mostrando a geometria da projeção em perspectiva (Baseado em BOUKNIGHT, 1970).

As transformações necessárias para se fazer a projeção em perspectiva foram desenvolvidas por KUBERT et al. (1968). É preciso ressaltar que todas as referências consultadas sobre desenho automático em perspectiva de objetos ou superfícies utilizam o algoritmo desenvolvido por aqueles autores. Tais cálculos encontram-se descritos a seguir.

Dado o ponto de coordenadas (cx, cy, cz) onde localiza-se o observador e o ponto (ccx, ccy, ccz) , centro do plano de projeção, calcula-se a distância (D):

$$D = [(cx-ccx)^2 + (cy-ccy)^2 + (cz-ccz)^2]^{1/2} \quad (56)$$

A reta de distância D que une esses dois pontos é denominada linha de visada. Os ângulos dessa linha em relação aos eixos X, Y e Z, são calculados pelas fórmulas (57), (58) e (59), respectivamente.

$$\alpha = \text{acos}[(ccx-cx)/D] \quad (57)$$

$$\beta = \text{acos}[(ccy-cy)/D] \quad (58)$$

$$\gamma = \text{acos}[(ccz-cz)/D] \quad (59)$$

Com esses elementos pode-se calcular a transformação em perspectiva de um ponto qualquer de coordenadas (X, Y, Z) para um ponto no plano de projeção definido como (xp, yp) .

A sequência de cálculos é conforme a que segue:

$$QX = cx + D \cdot \cos(\alpha) \quad (60)$$

$$QY = cy + D \cdot \cos(\beta) \quad (61)$$

$$QZ = cz + D \cdot \cos(\gamma) \quad (62)$$

$$AK = D / [(X-cx) \cdot \cos(\alpha) + (Y-cy) \cdot \cos(\beta) + (Z-cz) \cdot \cos(\gamma)] \quad (63)$$

$$RX = cx + AK \cdot (X-cx) \quad (64)$$

$$RY = cy + AK \cdot (Y-cy) \quad (65)$$

$$RZ = cz + AK \cdot (Z-cz) \quad (66)$$

Finalmente, calcula-se (xp, yp) como:

$$xp = [(RX-QX) \cdot \cos(\beta) - (RY-QY) \cdot \cos(\alpha)] / \sin(\gamma) \quad (67)$$

$$yp = (RZ-QZ) / \sin(\gamma) \quad (68)$$

Dessa forma, calculam-se as transformações de todos os pontos da malha regular obtendo-se, assim, o conjunto de pontos que compõem a projeção em perspectiva de uma superfície qualquer.

6 ELIMINAÇÃO DE LINHAS OCULTAS

O passo seguinte à transformação em perspectiva da malha regular seria a obtenção do desenho pela união de todos os pares de pontos. Entretanto, a simples união desses pontos irá produzir um desenho onde várias linhas estarão se cruzando. Isto acontece porque certas linhas ou trechos das mesmas, em função da perspectiva, ficarão ocultas ao observador. Estas linhas devem ser eliminadas antes do desenho das mesmas, através da aplicação de algoritmos específicos para esse fim. A Figura 31 mostra um bloco diagrama com as linhas ocultas desenhadas, enquanto na Figura 32 tem-se o mesmo desenho, onde essas linhas foram eliminadas.

Os principais algoritmos para eliminação de linhas ocultas para desenho em perspectiva de superfícies representadas por malhas regulares, foram apresentadas por KUBERT et al. (1968), WILLIAMSON (1972), GRAHAM (1972), WRIGHT (1973) e ANDERSON (1982).

Dentre esses algoritmos, foi escolhido aquele publicado por WRIGHT (1973) que, por ser bastante simples, é facilmente implementado em programas de computação para desenho em perspectiva de superfície.

O algoritmo de Wright trabalha no plano de projeção, que pode ser ora a tela do monitor de vídeo, ora o plano da mesa do plotter. Nesse plano de projeção define-se um vetor H , paralelo ao eixo XP , cuja dimensão será igual à resolução da unidade de saída que for utilizada. Por exemplo, se o dispositivo de saída for um monitor de vídeo com resolução de 1024 por 1024 pontos, o vetor H seria dimensionado com 1024 posições.

O vetor H é utilizado para armazenar as alturas, abaixo das quais nenhuma linha é desenhada.

O processamento começa pela escolha do eixo de coordenadas no sistema original que está mais próximo ao observador. Se, por exemplo, este for o eixo Y , então as linhas de Y constante ou paralelas ao eixo X serão desenhadas.

A primeira linha, por estar mais próxima do observador, será totalmente visível e, portanto, totalmente desenhada. O vetor H é armazenado com os valores de altura dessa linha. Isto significa

Figura 31 : Bloco-diagrama de uma superfície com as linhas ocultas desenhadas (PETTINATI 1983)

Figura 32 : Bloco-diagrama da mesma superfície com as linhas ocultas eliminadas (PETTINATI 1983)

que nenhuma linha ou trecho dela com altura menor que aquela encontrada na primeira será desenhada. Antes de prosseguir com o processamento da segunda linha de Y constante, processa-se todos os trechos das linhas de X constante compreendidos entre a primeira e a segunda linhas. Para cada trecho das linhas de X constante, a altura do ponto é comparada com aquela armazenada no vetor H, se menor, o ponto não é desenhado, se maior ou igual o ponto, é desenhado e o vetor é atualizado com o novo valor. Agora, a segunda linha de Y constante é testada quanto a visibilidade e desenhada. Assim, o procedimento descrito é repetido até a última linha Y constante ser processada.

C A P Í T U L O 3

GEOLOGIA E PETROLOGIA DO COMPLEXO ALCALINO DE ANITÁPOLIS ,SC

O complexo alcalino de Anitápolis (SC) é formado por um conjunto de rochas alcalinas intrusivas em granitos pré-cambrianos.

O complexo apresenta-se sob forma subcircular com área global da ordem de 6 km , correspondendo a uma depressão morfológica circundada por rochas granitóides pertencentes ao embasamento cristalino (VERGARA 1980).

Segundo VERGARA (1980), desde 1927, quando surgiram oficialmente os primeiros estudos de geologia, até 1967 os estudos sobre a área tinham objetivos mais acadêmicos que, associados às dificuldades próprias da área (falta de afloramentos), resultaram em interpretações equivocadas do jazimento; entretanto, somente a partir de 1977, quando a ILM (Indústrias Luchsinger Madorin S.A) assumiu os trabalhos de pesquisa geológica em Anitápolis, surgiram resultados conclusivos a respeito da viabilidade técnico-econômica da jazida de fosfato do complexo.

Apresenta-se, neste capítulo, a geologia e petrologia do complexo, baseadas em estudos ali desenvolvidos até hoje.

1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DO COMPLEXO

1.1 Localização e vias de acesso

O complexo alcalino de Anitápolis localiza-se no Distrito de Altos do Rio Pinheiros, Município de Anitápolis, Estado de Santa Catarina, conforme o mapa de localização da Figura 33.

O acesso à área é feito pela rodovia BR-101 até Santo Amaro da Imperatriz e daí, através das rodovias BR-282 e SC-407, chega-se até o acesso para Anitápolis, de onde toma-se a estrada municipal para Altos do Rio Pinheiros, onde localiza-se o complexo.

1.2 Aspectos geomorfológicos

Segundo VERGARA (1980), as feições que mais se evidenciam no complexo são a forma subcircular e a espetacular depressão

originada pela intrusão e as rochas granitóides do Escudo Catarinense.

Figura 33 : Mapa de localização do Complexo Alcalino de Anitápolis.

Ainda segundo o mesmo autor, no interior do maciço destacam-se as elevações escarpadas do bordo oeste, que se contrastam com as zonas mais internas da intrusão onde as rochas máficas e ultramáficas predominam, propiciando assim uma morfologia mais suave, que se estende até a planície comandada pelo Rio Pinheiros.

Segundo CARRARO et al. (1967), a drenagem adaptou-se ao intenso fraturamento das rochas alcalinas, básico-alcalinas e do escudo, pelo processo de erosão remontante dos afluentes. Conforme aqueles autores, a região está em fase de maturidade plena, com vertentes abruptas: grande desnível entre os interflúvios e os riachos; os interflúvios são estreitos e sem quaisquer remanescentes na superfície primitiva.

2 GEOLOGIA REGIONAL

O complexo alcalino de Anitápolis, de idade juro-cretássica, encontra-se introduzido em rochas graníticas pré-cambrianas pertencentes ao Escudo Catarinense, que é a denominação local do Escudo Atlântico em Santa Catarina, segundo SANTOS et al. (1984).

De acordo com a subdivisão do país em províncias estruturais, como proposta por ALMEIDA et al. (1981), esta região pertence à Província Mantiqueira.

Na região do Escudo Catarinense, foram reconhecidas duas importantes unidades geotectônicas, cuja estruturação está ligada à evolução do Ciclo Brasileiro (SANTOS et al. 1984):

- . Cráton do Rio de La Plata
- . Cinturão Dom Feliciano

O Cráton do Rio de La Plata, no Estado de Santa Catarina, de acordo com aqueles autores, é representado pelo Maciço Mediano de Joinville (HASUI et al. 1975) ou o Cráton de Luís Alves (KAUL 1980).

Ainda conforme SANTOS et al. (1984), o Cinturão Dom Feliciano é a faixa móvel marginal ao Cráton do Rio de La Plata (FRAGOSO CESAR 1980), correspondendo, conforme denominações de HASUI et al. (1975), ao Maciço Mediano de Pelotas e ao Sistema Dobrado Tijucas.

JOST & HARTMANN (1984) dão a denominação de blocos Dom Feliciano e Florianópolis nos escudos Sul-Riograndense e Catarinense, respectivamente, para o Cinturão Dom Feliciano como definido por FRAGOSO CESAR (1980).

Segundo SANTOS et al. (1984), o complexo granulítico de Santa Catarina e o complexo metamórfico migmatítico de Santa Catarina representam o embasamento cristalino Pré-Brasiliano do Cráton do Rio de La Plata e Cinturão Dom Feliciano, respectivamente. Tais complexos, de acordo com os mesmos autores, são conjuntos de rochas que foram intensamente retrabalhados e rejuvenescidos em diversos ciclos tecto-orogênicos, aos quais é postulada uma idade Arqueana.

O cinturão Dom Feliciano é uma unidade lito-estrutural, caracterizada por complexos metamórfico-migmatítico-graníticos, derivado da regeneração brasileira atuante na porção sudeste da plataforma Sul-Americana (FRAGOSO CESAR 1980). Conforme esse autor, tais complexos distribuem-se em três bandas paralelas, que foram denominadas informalmente de zona central, flanco ocidental e flanco oriental.

A intrusão alcalina de Anitápolis deu-se em granitos da Suite Pedras Grandes, conforme o mapa geológico regional (CAMPOS NETO 1984) apresentado na Figura 34, que corresponde ao Cinturão Dom Feliciano no Estado de Santa Catarina.

O flanco ocidental do Cinturão Dom Feliciano, de acordo com FRAGOSO CESAR (1980), constitui uma longa seção crustal linear, onde se conjugam tectonicamente o antigo embasamento Pré-Brasiliano, seqüências orogênicas brasileiras e sua molassa tardi-tectônica. Conforme esse autor, as unidades melhor representadas neste flanco são as seqüências orogênicas brasileiras constituídas por espessos pacotes de parametamorfitos de baixo grau, entremeados com meta-vulcânicas ácidas e intermediárias subordinadas. No Estado de Santa Catarina, o Grupo Brusque corresponde, então, à seqüência orogênica brasileira, enquanto o Grupo Itajaí às molassas tardi-tectônicas, segundo definições dadas por aquele autor no Escudo Sul-Riograndense.

Segundo IPT (1980), "O Grupo Brusque representa, em Santa Catarina, a faixa de dobramentos desenvolvidos em sedimentos do Ciclo Brasileiro. É adjacente a sul, à bacia tectônica que abriga os depósitos molássicos e vulcânicos do Grupo Itajaí. De sua constituição participam variados metassedimentos detríticos e carbonáticos, em fácies metamórficas de xisto-verde a anfibolito, sendo numerosas as intrusões de rochas graníticas, algumas tardias, de natureza alcalina. As estruturas do grupo orientam-se a NE, com variações locais, havendo muitas falhas a NE-ENE e NW-WNW." Determinações geocronológicas efetuadas por BASEI & CORDANI (1984) demonstram idade Brasileira (anterior a 700 Ma) para o Grupo Brusque.

O Grupo Itajaí, representado por seqüências molássicas (SANTOS et al. 1984), ocorre em três bacias no Estado de Santa Catarina. A mais meridional ocorre na área geográfica da bacia do Rio Itajaí. Segundo SANTOS et al. (1984), o contato dessa unidade no bordo sul é por falha com o Cinturão Brusque, enquanto no bordo norte os contatos são predominantemente discordantes com os gnaisses granulíticos e no bordo oeste é recoberto discordantemente por sedimentos da Bacia do Paraná e cortados pelo Granitóide Subida. Ainda conforme os mesmos autores, a porção basal do Grupo Itajaí na bacia do Rio Itajaí, é constituída por uma seqüência predominantemente pelítica representada por folhelhos, siltitos,

CONVENÇÕES

FANEROZÓICO

- Quaternário: aluviões e sedimentos litorâneos.
- Jurássico/Cretáceo: Complexo Alcalino de Anitápolis

EO PALEOZÓICO

- Suíte Pedras Grandes: granitos a biotita e/ou anfibólio, alaskitas
- Suíte Subida: granitos alaskíticos
- Grupo Itajaí: sedimentos, vulcânicas ácidas, tufos, granitos

PROTEROZÓICO SUPERIOR

- Suíte São Pedro de Alcântara: granitos a monzonitos
- Suíte Guabiruba: biotita granitos, granitos a duas micas
- Suíte Valsungana: granodioritos perfiríticos
- Faixa de Anateixitos Ribeirão da Prata: augen gnaisses, granulitos, granitos anatélicos, metassedimentos
- Grupo Brusque: metapelitos, metapsamitos, metacarbonáticas, calcossilicáticas, metabásicas.
- Complexo Granito - Migmatítico: migmatitos, granitos.

PROTEROZÓICO INFERIOR

- Complexo Costeira: gnaisses, granulitos, migmatitos, rochas básicas e ultrabásicas.

Contatos Geológicos

Falhamentos

Figura 34: Geologia regional (compilado por RODRIGUES, 1985 a partir de CAMPOS NETO, 1984).

arenitos finos às vezes ritmicamente acamados, além de ardósias escuras e argilitos; já o topo é formado por litologias de natureza psamítico-psefítica, constituídas por ortoconglomerados polimíticos intercalados com arenitos arcoseanos, apresentando estratificações cruzadas de pequeno porte e plano-paralelas. As seqüências que constituem o Grupo Itajaí são relacionadas tectonicamente a uma fase molássica tardia no fechamento do Ciclo Brasileiro ou ao estágio de transição da Plataforma Sul-Americana (SANTOS et al. 1984). BASEI & CORDANI (1984) estimaram em 560 Ma a idade do Grupo Itajaí.

A zona central do Cinturão Dom Feliciano é uma faixa linear composta essencialmente por complexos granitóides de proporções batolíticas associados com resíduos migmatíticos (FRAGOSO CESAR 1980). Nessa faixa ocorrem as rochas graníticas pertencentes às suites São Pedro de Alcântara e Pedras Grandes.

A Suite São Pedro de Alcântara, segundo BASEI (1984), é constituída por corpos graníticos a monzoníticos com baixa densidade de megacristais de feldspatos potássicos (em geral brancos). Determinações radiométricas efetuadas por BASEI & CORDANI (1984) apresentaram idades em torno de 580 ± 20 Ma para as rochas dessa suite.

Conforme BASEI (1984), a Suite Pedras Grandes é constituída por grandes batólitos graníticos que ocorrem intrudindo o Complexo Granito-Migmático. Trata-se, de acordo com aquele autor, de granitos preferencialmente alcalinos grosseiros e porfiróides com megacristais brancos a rosados, não foliados que admitem grande variação faciológica com tipos cinza, inequigranulares com pontuações de máficos e enclaves microgranulares de composição intermediária até tipos róseos, isotropos, grosseiros e alaskíticos. Essas rochas apresentaram idades em torno de 520 ± 20 Ma (BASEI & CORDANI 1984).

A evolução do Ciclo Brasileiro na região pode ser descrita resumidamente em três etapas (FRAGOSO CESAR 1980):

- . etapa inicial: há extensiva fragmentação crustal com formação de sítios deposicionais dos sedimentos originais do Grupo Brusque e magmatismo sinsedimentar, pré-tectônico, de caráter básico (SANTOS et al. 1984);

- . etapa intermediária: as seqüências orogênicas brasileiras sofrem metamorfismo regional de baixa a média pressão (FRAGOSO

CESAR 1980), com intrusão de corpos graníticos como de Valsungana (SANTOS et al. 1984). Segundo FRAGOSO CESAR (1980), nas fases finais desta etapa o soerguimento orogênico do Cinturão Dom Feliciano deve ter sido contemporâneo à ascensão dos diápiros graníticos tardi-tectônicos e à deposição das seqüências molássicas tardi-tectônicas;

. etapa final: conforme SANTOS et al. (1984), há o fechamento da orogenia brasileira, correspondendo ao estágio de transição da Plataforma Sul-Americana (ALMEIDA 1969), representado por uma granitogênese de natureza alcalina (e.g. granitos Subida, Dona Francisca, etc.) e por seqüências vulcano-sedimentares de natureza molássica (Grupos Itajaí, Maricá e Camaguã).

Após o final do Ciclo Brasileiro, no Cambro-Ordoviciano, instala-se e desenvolve-se a sedimentação da Bacia do Paraná, durante o estágio de estabilização da Plataforma Brasileira, que inicia-se no Siluriano e perdura até o Jurássico, quando então principia-se a reativação Wealdeniana (ALMEIDA 1969). Assim, segundo HERZ (1977, apud ALMEIDA 1983), a partir do fim do Jurássico, o fraturamento crustal paralelo à costa atual teria originado os diques de diabásio e os nós de atividade do magmatismo alcalino de Jacupiranga (133 Ma) e Anitápolis (129 Ma). Ainda conforme aquele autor, nessa ocasião ter-se-iam desenvolvido junções tríplices cujos ramos teriam originado os sítios de separação das placas, determinando a configuração da costa sudeste e o terceiro ramo dirigido para o interior da Bacia do Paraná teria sido a faixa de atividade basáltica e alcalina.

A intrusão alcalina de Anitápolis assim como as de Lajes e Quarenta (Botuverá) foram classificadas por ALMEIDA (1983) como pertencentes à Província Santa Catarina. Segundo esse autor, o conceito de província alcalina por ele adotado refere-se a um agrupamento geográfico de rochas alcalinas e associadas que mantêm entre si relações petrográficas próprias e se relacionam a feições tectônicas locais reconhecíveis, tais como arcos, flexuras, zonas de falhas ou rifts.

As intrusões da Província de Santa Catarina se processaram na região de inflexão separando duas estruturas tectônicas importantes, que no Mesozóico sofreram movimentos verticais opostos de grandes magnitude: o arco de Ponta Grossa e o Sinclinal de Torres (ALMEIDA 1983).

3 GEOLOGIA LOCAL

A petrografia, a mineralogia, o quimismo, bem como a distribuição espacial dos tipos litológicos e parâmetros químicos da jazida de fosfato do complexo alcalino de Anitápolis, são hoje bem conhecidos, devido aos trabalhos de pesquisa efetuados pela ILM a partir de 1977. Segundo VERGARA (1980), constaram desses trabalhos de pesquisa: mapeamentos, poços, sondagens e galerias de pesquisa; frentes experimentais de lavra, análises químicas, mineralógicas e petrográficas; ensaios tecnológicos, geoquímicos e geofísicos e estudos geotécnicos.

Os trabalhos de pesquisa geológica, assumidos pela ILM, foram encerrados em 1979, mas os estudos sobre a petrologia do complexo, iniciados em 1978 pelo INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO (IPT 1979), foram continuados e concluídos por RODRIGUES (1985), que apresenta os resultados de estudos mineralógicos, petrográficos e químicos efetuados em amostras de rocha, bem como uma evolução petrogenética para o complexo alcalino.

O mapa geológico do complexo alcalino, apresentado na Figura 35, foi elaborado por RODRIGUES (1985), a partir da descrição dos testemunhos de sondagem e da descrição de VERGARA (1979). Nesse mapa as rochas alcalinas representam os tipos dominantes em cada furo de sonda, uma vez que não existem afloramentos na zona central do complexo, devido ao forte intemperismo que atingiu as rochas alcalinas. Os tipos petrográficos distribuem-se em quatro zonas, aproximadamente concêntricas, constituídos, preferencialmente, por rochas da série dos álcali-sienitos, dos nefelina sienitos, dos ijolitos e das ultramáficas. Carbonatitos, geralmente sovíticos, venulam todas essas rochas.

Segundo HARTMANN et al. (1980), as feições tectônicas observáveis na intrusão têm um desenvolvimento mais intenso nas zonas periféricas, no domínio da encaixante. Esses autores acreditam que os falhamentos observados tanto em superfície como nos testemunhos de sondagem e perfis geofísicos tenham sido originados na fase pré-intrusão e reativados após a formação do maciço. De acordo com VERGARA (1980), as rochas alcalinas de Anitápolis apresentam duas direções principais de lineamentos estruturais: uma aproximadamente norte-sul, representando os de maior extensão, e outro N60° E. Na Figura 35, pode-se observar

Figura 35 : Mapa geológico do Complexo Alcalino de Anitópolis (RODRIGUES, 1985).

ainda algumas estruturas (falhas prováveis) no quadrante NW. Todas estas estruturas concordam com aquelas levantadas por MELCHER & COUTINHO (1966) através da interpretação em fotografias aéreas, cujo mapa de estruturas da região da intrusão alcalina está reproduzido na Figura 36. Nela é possível observar, além dos dois sistemas predominantes (NS e N60º E), o sistema de lineamentos radiais ao centro da intrusão.

LEGENDA

Linhas	estruturas.
Contínuas	fraturas, diáclases e lineamentos.
Tracejadas	falhas.
Pontilhadas	fraturas radiais.
Interpontilhadas	fraturas concêntricas.

Figura 36 : Mapa de estruturas da região da intrusão alcalina (MELCHER & COUTINHO, 1966)

A área de Altos do Rio Pinheiros é assim caracterizada por intensa tectônica quebrável que, associada à fácil alteração das rochas alcalinas e básico-alcalinas, deve ter sido responsável pela formação da depressão que constitui propriamente o vale de Altos do Rio Pinheiros (CARRARO et al. 1967).

3.1 Aspectos petrográficos

Como exposto anteriormente os tipos petrográficos alcalinos observados no complexo foram agrupados por RODRIGUES (1985) em quatro séries, denominadas álcali-sienitos, nefelina sienitos, ijolitos e ultramáficas. A descrição a seguir, das características petrográficas de cada uma dessas séries, é baseada no trabalho desse autor:

. série do álcali-sienitos: as rochas que a compõem são álcali-sienitos, mela-álcali-sienitos e lusitanitos. Trata-se de rochas de granulação geralmente média e coloração variando de cinza claro a escuro. Constituem-se essencialmente de feldspatos potássicos e quantidades variáveis de piroxênio, podendo variar desde termos leucocráticos (álcali-sienitos) a melanocráticos (lusitanitos), em função da proporção de piroxênio. Subordinadamente ocorrem nefelina, biotita, flogopita, anfibólio sódico-cálcico, opacos, titanita, zircão, carbonato, apatita, quartzo, calcedônia e rutilo;

. série dos nefelina sienitos: nefelina sienitos, malignitos e shonkinitos compõem esta série. Apresentam granulação fina a grossa e coloração variando de cinza claro a escuro, podendo, às vezes, apresentar manchas róseas. Estas rochas são compostas, principalmente, por feldspato potássico, nefelina e piroxênio. Novamente, a variação da proporção em piroxênio dá os nomes de malignito e shonkinito para tipos enriquecidos neste mineral, enquanto os nefelina sienitos são aquelas rochas enriquecidas em nefelina e/ou feldspato potássico e, conseqüentemente, empobrecidos em piroxênios;

. série de ijolitos: compõem esta série os urtitos, ijolitos e melteigitos. Apresentam-se com granulação média e coloração cinza médio a escuro com freqüentes manchas róseas. São compostas essencialmente por nefelina e piroxênitos e subordinadamente por feldspatos alcalinos, biotita, anfibólio cálcico, opacos, zeólita, titanita, clorita, carbonato e cancrinita. Nesta série predominam os termos mesocráticos (ijolitos) sobre os leucocráticos (urtitos) e melanocráticos (melteigitos);

. série das ultramáficas: nesta série foram agrupados os piroxenitos, biotita piroxenitos, piroxênio biotititos e biotititos. Essas rochas são compostas essencialmente por piroxênios e biotita, apresentam granulação fina a média e coloração cinza escuro.

Ocorrem também, nesta série, rochas constituídas essencialmente por olivina e magnetita, denominadas magnetita dunitos, que apresentam granulação grosseira e coloração cinza escuro esverdeado.

Os carbonatitos foram classificados com base na proporção entre calcita e dolomita. Segundo RODRIGUES (1985), a calcita é o carbonato dominante e, assim, a variedade mais comum de carbonatito foi denominada sovito. Essas rochas apresentam granulação fina a média e cor branco-acinzentado.

Segundo uma classificação das rochas alcalinas brasileiras, baseada em associações petrográficas (ULBRICH & GOMES 1981), o complexo alcalino de Anitápolis, assim como Araxá, Tapira, Serra Negra, Jacupiranga e Juquiá, foi enquadrado no Tipo III, que se caracteriza por uma associação máfica e ultramáfica, com glimeritos, dunitos, peridotitos e piroxenitos como rochas importantes ou dominantes. De acordo com aqueles autores, essas rochas associam-se, às vezes, com rochas mais félsicas (sienitos alcalinos, malignitos e shonkinitos) e também espécies peralcalinas e fortemente insaturadas. Conforme ULBRICH & GOMES (1981), o Tipo III é uma associação petrograficamente muito complexa e à luz dos dados disponíveis pode ser representada por três linhagens, das quais o complexo de Anitápolis pertence àquela onde as rochas principais são dunitos, peridotitos e piroxenitos, incluindo núcleos de carbonatitos. Ainda de acordo com esses autores, dados petrográficos, radiométricos e regionais foram usados como argumentos para agrupar as ocorrências de rochas alcalinas brasileiras em dez províncias petrográficas. O complexo de Anitápolis, segundo essa definição, representa a Província de Anitápolis.

3.2 Quimismo

As características químicas das rochas do complexo alcalino de Anitápolis, bem como as rochas mineralizadas em apatita, foram determinadas através de uma análise estatística exploratória efetuada por YAMAMOTO et al. (1980), a partir de um conjunto de dados de análises químicas disponíveis de 40 furos de sondagem, totalizando 396 amostras por 7 óxidos (P_2O_5 , Fe_2O_3 , CaO , Al_2O_3 , SiO_2 , K_2O e BaO). Cada uma dessas amostras representa, em média, intervalos de 5m de espessura dos testemunhos de sondagem.

Os passos dessa análise estatística exploratória foram:

. estudo da distribuição dos óxidos nas rochas, através do cálculo da média, desvio padrão e valores mínimo e máximo da distribuição dentro de cada tipo litológico. Estes dados foram lançados em diagramas do tipo ramo e folhas (DACHS 1978);

. análise de diagramas de dispersão, para estudo do grau de associação entre dois óxidos para os diversos tipos litológicos;

. análise fatorial pelo Modo R, efetuada para estudo das relações entre os óxidos. Os fatores são combinações lineares das variáveis iniciais e, dessa forma, através de um número reduzido dos mesmos, fornecem as informações essenciais contidas num conjunto de dados. Utiliza-se na estatística convencional o termo redução da dimensionalidade para justificar a análise fatorial.

RODRIGUES (1985), baseado na descrição dos testemunhos de sondagem e análises petrográficas e mineralógicas, separou do total de 396 amostras um conjunto com apenas 151 amostras representando tipos litológicos "puros". Para essas amostras (151) aquele autor acrescentou ainda análises de Na_2O e MgO , efetuadas por espectrofotometria de absorção atômica.

Para esse conjunto reduzido de amostras puras, RODRIGUES (1985) efetuou a análise estatística exploratória conforme proposição de YAMAMOTO et al. (1980), incluindo também a análise fatorial pelo Modo Q.

A Figura 37 apresenta os diagramas de ramos e folhas dos óxidos para os tipos litológicos do complexo. Dessa Figura pode-se observar claramente a relação direta da distribuição dos óxidos nas rochas com a composição mineral das mesmas. Assim, a diminuição de SiO_2 , Al_2O_3 e K_2O dos álcali-sienitos para nefelina sienitos, ijolitos e, finalmente, ultramáficas é atribuída à diminuição de feldspatos e/ou feldspatóides e gradual aumento de máficos.

Outras variações notáveis são Fe_2O_3 e MgO , que aumentam no sentido álcali-sienitos a ultramáficas, explicadas pelo aumento de minerais máficos.

Quanto à distribuição de P_2O_5 , embora a dispersão seja grande, pode-se observar uma tendência clara de aumento também dos álcali-sienitos, passando por nefelina sienitos, ijolitos e, finalmente, para as ultramáficas.

A Figura 38 apresenta o gráfico das cargas dos fatores Q1 e Q2. Segundo RODRIGUES (1985), a sequência contínua de variação

Figura 38 : Gráfico das cargas dos fatores Q₁ e Q₂ (RODRIGUES, 1985) .

química, pela qual os álcali-sienitos passam a nefelina sienitos, ijolitos e, finalmente, ultramáficas, relaciona-se ao aumento nos valores da relação $[CaO+MgO+Fe_2O_3] / [SiO_2+Al_2O_3+K_2O]$ o que reflete, principalmente, a diminuição em ortoclásio e/ou nefelina e o incremento em piroxênio.

3.3 Distribuição espacial dos tipos litológicos e parâmetros químicos

RODRIGUES (1985) apresentou uma interpretação em bloco-diagrama (Figura 39) das relações entre os tipos litológicos ilustrando a concentração das rochas alcalinas em quatro zonas, assim distribuídas:

- . zona externa, composta por rochas da série dos álcali-sienitos;
- . zona intermediária externa, formada predominantemente por rochas da série dos nefelina sienitos;
- . zona intermediária interna, onde ocorrem principalmente as rochas da série dos ijolitos;
- . zona interna, constituída essencialmente por rochas da série das ultramáficas.

Todas essas rochas acham-se irregularmente cortadas por veios de carbonatito.

YAMAMOTO (1980) aplicou a análise de hipersuperfícies de tendência para reconstituir aproximadamente a geometria do corpo mineralizado e também para estudar a variação espacial dos parâmetros químicos. Conforme esse autor, a análise de hipersuperfícies de tendência é uma extensão da análise de superfícies de tendência, que há muito vem sendo extensiva e satisfatoriamente aplicada em geologia no estudo de parâmetros distribuídos em área. As principais conclusões deste estudo foram:

- . que os teores de P_2O_5 e CaO aumentam da borda para o centro do complexo;
- . a identificação de uma zona anômala em apatita a NE do complexo, onde ocorrem as rochas ultramáficas;
- . que as anomalias de P_2O_5 e CaO encontram-se associadas, porém com os centros deslocados, indicando que a carbonatização pode ter provocado um enriquecimento secundário em apatita nas rochas afetadas pelo processo.

Figura 39: Bloco-diagrama interpretativo da distribuição espacial dos tipos litológicos, segundo RODRIGUES (1985).

3.4 Origem e evolução petrológica do complexo

Segundo opinião de CARRARO et al. (1967), o complexo de Anitápolis representa um diatrema alcalino, básico-alcalino, periférico aos derrames da Serra Geral, cuja localização deu-se em consequência do preparo tectônico (diaclasamento e falhamento) das rochas cristalinas do Escudo Catarinense.

As fraturas radiais e concêntricas (Figura 36) ao conduto são caracteristicamente associadas a corpos magmáticos centrais de intrusão forçada (MELCHER & COUTINHO, 1966).

"A estrutura anelar com sua porção interior rebaixada e a ocorrência, no campo, de numerosos blocos de tinguaito à sua volta, são as evidências disponíveis para se propor a existência eventual de dique(s) anelar(es) ou "cone sheets" cicatrizando as fraturas de um bloco em subsidência. Estas estruturas vulcânicas subsuperficiais e raros outros dados, como por exemplo a forma de ocorrência dos carbonatitos, preferencialmente em vênulas difundidas por todo o corpo alcalino, atestam a pequena

profundidade da intrusão. Em outras palavras, a erosão pós-cretácica tendo varrido tufos, lavas e rochas superficiais, escavou não mais que o topo da estruturação subvulcânica, possivelmente correspondendo ao nível da coluna plutônica superior de GARSON (1966)", in RODRIGUES (1985).

Conforme IPT (1979), a distribuição aproximadamente concêntrica das diferentes unidades litológicas, ocorrendo rochas mais máficas nas partes centrais e nas cotas mais baixas, e rochas mais ricas em minerais siálicos nas bordas em cotas mais altas poderia sugerir para o complexo uma origem magmática por diferenciação gravitativa durante a cristalização; entretanto, uma série de relações texturais e estruturais sugere uma origem metassomática, pelo menos em parte, para estas rochas.

A partir dos dados geológicos, petrográficos, mineralógicos e químicos disponíveis, RODRIGUES (1985) propõe o seguinte modelo evolutivo para as rochas do complexo;

a) falhamento, fraturamento e brechação das rochas graníticas encaixantes;

b) introdução de magma de composição ultramáfica alcalina (biotita piroxenítica) na parte central do complexo;

c) metassomatismo durante e após a intrusão, através da percolação de soluções alcalinas em rochas graníticas e ultramáficas, que fenitizaram as primeiras e afetaram as últimas. As principais reações neste processo foram:

- piroxenização gradativa do granito nas zonas mais externas, acompanhada de nefelinização dos feldspatos;

- nefelinização dos piroxênios, tanto das rochas mais intrusivas como daquelas já afetadas pelo metassomatismo;

- biotitização e/ou flogopitização parcial dos piroxênios das ultramáficas.

- mobilização geomórfica de magma alcalino, especialmente ijolítico e nefelina sienítico.

d) nos estágios finais da atividade magmática-metassomática ocorreu a injeção de material carbonatítico (em zonas fraturadas) principalmente na parte central do complexo.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES NO COMPLEXO ALCALINO DE ANITÁPOLIS, SC

Neste capítulo apresentam-se as formas gráficas espaciais obtidas com os dados de topografia da região de intrusão e, também, com os dados de análises químicas de elementos maiores das rochas do Complexo Alcalino de Anitápolis, SC. Tais gráficos foram obtidos através de programas de computação, cujos algoritmos foram elaborados a partir da metodologia descrita no Capítulo 2. Todos os programas foram escritos em linguagem FORTRAN IV, de acordo com o padrão ANSI (HEISING 1964) e, portanto, podem ser instalados em qualquer computador com compilador FORTRAN. Quanto aos comandos gráficos, ainda são dependentes do "software" gráfico disponível na instalação. A adoção de um sistema gráfico padrão, como, por exemplo, o "GRAPHIC KERNEL SYSTEM" (CUNHA et al. 1985), ou simplesmente GKS, tornariam os programas totalmente portáteis. Todos os processamentos foram efetuados no computador BURROUGHS B 6900, enquanto os desenhos foram obtidos no "plotter" BAUCH & LOMB, ambos do Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo. As rotinas gráficas utilizadas encontram-se descritas em AMOROZO & GOMIDE (1979).

Os dados de topografia da região da intrusão do Complexo Alcalino de Anitápolis, foram extraídos da Folha SG-22-Z-D-IV-4 (IBGE 1976). A Figura 40 mostra a área sobre a qual foi feita a amostragem de 100 pontos distribuídos aleatoriamente em 100 células quadradas, de acordo com a metodologia descrita no item 1.2.1. do Capítulo 2. Na Tabela 19 tem-se os dados de topografia amostrados, bem como suas coordenadas X e Y.

TABELA 19: Pontos de dados de topografia.

Ponto	Coord. X	Coord. Y	Cota (m)
1	686064	6920012	1175
2	686220	6920736	1110
3	686168	6920964	1080
4	686204	6921332	1045
5	686216	6921960	1005
6	686284	6922276	1040

(Continuação da Tabela 19)

Ponto	Coord. X	Coord. Y	Cota (m)
7	686320	6922416	1050
8	686052	6923004	1080
9	686344	6923436	1160
10	686192	6923708	1140
11	686692	6920208	1040
12	686740	6920732	1090
13	686732	6921160	920
14	686580	6921252	920
15	686764	6921876	890
16	686448	6922068	940
17	686684	6922512	1040
18	686480	6923008	1122
19	686488	6923248	1120
20	686652	6923656	1180
21	686828	6920344	978
22	686856	6920700	1050
23	687072	6921180	870
24	686832	6921288	875
25	686852	6921836	860
26	687116	6922312	792
27	687004	6922720	950
28	686912	6922804	1020
29	686804	6923292	1070
30	687124	6923600	1080
31	687316	6920080	950
32	687564	6920668	816
33	687560	6921020	820
34	687508	6921564	783
35	687276	6921872	780
36	687284	6922368	820
37	687400	6922560	960
38	687480	6923136	1160
39	687304	6923576	1155
40	687208	6923752	1100
41	687948	6920388	830
42	687824	6920528	780

(Continuação da Tabela 19)

Ponto	Coord. X	Coord. Y	Cota (m)
43	687836	6920852	768
44	687768	6921512	753
45	687992	6921616	740
46	687880	6922112	780
47	687796	6922732	1060
48	687716	6923112	1180
49	687976	6923344	1220
50	687756	6923888	1320
51	688180	6920260	780
52	688096	6920796	734
53	688184	6920856	725
54	688168	6921568	740
55	688008	6921996	776
56	688008	6922352	920
57	688152	6922648	980
58	688388	6923176	1140
59	688152	6923236	1190
60	688028	6923620	1280
61	688708	6920320	800
62	688712	6920584	810
63	688692	6921032	780
64	688428	6921544	745
65	688624	6921752	758
66	688648	6922256	850
67	688500	6922400	926
68	688540	6923028	1100
69	688464	6923488	1240
70	688516	6923664	1310
71	689132	6920160	900
72	688804	6920448	860
73	689180	6920868	860
74	688828	6921208	840
75	688916	6921692	821
76	688992	6722324	895
77	688900	6922560	900
78	689136	6922920	1088

(Continuação da Tabela 19)

Ponto	Coord. X	Coord. Y	Cota (m)
78	689136	6922920	1088
79	688884	6923596	1260
80	688980	6923896	1240
81	689396	6920064	900
82	689524	6920596	920
83	689272	6921092	900
84	689572	6921448	960
85	689332	6921628	970
86	689244	6922228	960
87	689452	6922688	1160
88	689344	6922984	1160
89	689336	6923512	1300
90	689232	6923744	1300
91	689956	6920236	915
92	689768	6920784	910
93	689608	6920944	950
94	689848	6921392	1000
95	689912	6921672	1037
96	689840	6922048	1100
97	689960	6922772	1200
98	689760	6922952	1265
99	689748	6923320	1310
100	689668	6923900	1308

Os teores de P_2O_5 , Fe_2O_3 e CaO foram utilizados para obtenção das formas gráficas tridimensionais da jazida. Os dados químicos utilizados encontram-se distribuídos ao longo de 40 furos de sondagem, conforme o mapa de distribuição dos furos de sondagem apresentado na Figura 41, totalizando 396 pontos de dados.

OBSERVAÇÕES :

+ - PONTO DE AMOSTRAGEM

BASE PLANI-ALTIMÉTRICA AMPLIADA A PARTIR
DA CARTA SG-22-Z-D-IV-4 (IBGE 1976).

Eqüidistância das curvas de nível : 20 m

Figura 40: Mapa plani-altimétrico da região do Complexo Alcalino de Anitápolis com a localização dos pontos de dados de topografia amostrados.

Figura 41: Mapa de localização dos furos de sondagem e dos perfis NS e EW.

1 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE MALHAS REGULARES BIDIMENSIONAIS

Apresenta-se neste item as representações gráficas mais usuais em geologia, para dados distribuídos em área. Essas representações são o mapa de contorno e o bloco diagrama. O mapa de contorno é a representação quantitativa da malha regular interpolada, enquanto o bloco diagrama é a representação qualitativa da mesma.

As aplicações aqui foram feitas com os dados de topografia da região da intrusão do Complexo Alcalino de Anitapólis.

1.1 Definição da área de interesse

A área de interesse ou a fronteira convexa do conjunto de dados, bem como os pontos do mesmo encontram-se representados na Figura 42. A interpolação da malha regular foi feita somente dentro do domínio da fronteira convexa.

1.2 Mapa de contorno

A figura 43 apresenta o mapa de contorno que representa, aproximadamente (em função dos 100 pontos de amostragem), a superfície topográfica na região da intrusão do Complexo.

A interpolação da malha regular de 17×17 nós foi feita através do ajuste de equações multiquadráticas locais, utilizando-se dos 16 pontos vizinhos próximos e constante C igual a 16 vezes a distância média entre os pontos de dados. Utilizou-se de constantes grandes porque os ajustes, das equações multiquadráticas, foram feitos no domínio logarítmico, de acordo com a metodologia descrita no item 1.2.3 do Capítulo 2.

O contorno automático foi efetuado pelo método do rastreamento.

Comparando-se as Figuras 40 e 43 observa-se que existem diferenças significativas entre as formas das curvas de contorno, devido aos erros de estimativa (amostragem). Teoricamente, o mapa interpolado e contornado automaticamente tenderá ao mapa original ou quando o número de pontos de dados for infinitamente grande, ou então, quando a amostragem for orientada para coletar informações das principais feições geográficas da região (vales, ravinas, colinas, etc.).

Figura 43: Mapa de contorno dos dados de topografia da região do Complexo Alcalino de Anitápolis .

1.3 Bloco-diagrama

A projeção em perspectiva da malha regular interpolada resulta no bloco-diagrama, que é a forma de representação gráfica qualitativa da mesma. Os parâmetros da perspectiva, que determinam a posição do observador em relação à superfície, das três visadas escolhidas (Figura 44), encontram-se listados na Tabela 20.

Figura 44 : Desenho esquemático mostrando a localização das visadas A, B e C.

TABELA 20: Parâmetros das perspectivas A, B e C.

Visada	α	β	γ	Distância (m)
A	61,65	37,79	112,78	10846,19
B	142,98	117,45	112,78	10846,19
C	37,02	117,45	112,78	10845,19

As Figuras 45 a 47 apresentam os bloco-diagrama das visadas A, B e C, respectivamente. Nestas Figuras pode-se observar a zona central deprimida, bem como as principais drenagens.

Figura 45 : Bloco-diagrama da topografia da região do Complexo Alcalino de Anitópolis, segundo a visada A .

Figura 46 : Bloco-diagrama da topografia da região do Complexo Alcalino de Anitápolis, segundo a visada B .

Figura 47 : Bloco-diagrama da topografia da região do Complexo Alcalino de Anitápolis, segundo a visada C .

2 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE MALHAS REGULARES TRIDIMENSIONAIS

As vantagens de se conhecer o mapa tridimensional de uma jazida ou a geometria do corpo mineralizado são claras. Por exemplo, numa fase inicial da pesquisa de um jazimento qualquer o conhecimento do mapa da variação espacial do minério poderá orientar os trabalhos futuros de pesquisa e, já na fase de exploração, poderá orientar os trabalhos de lavra, incluindo desmonte e mistura de blocos de diferentes teores.

A obtenção das representações gráficas de malhas tridimensionais como perfis e plantas, só são possíveis fazendo a interpolação de uma malha regular em 3D. A obtenção de plantas e perfis de modo manual é aproximada, porque não leva em consideração a ponderação espacial dos dados. Por exemplo, na obtenção manual de uma planta a um determinado nível da jazida, seriam consideradas somente as amostras que por ventura caíssem naquele nível e algumas que em função da proximidade seriam simplesmente projetadas no mesmo. O erro nesse caso está na simples projeção dos dados e também na interpolação de um ponto qualquer não amostrado que será feita somente com base nos pontos lançados naquela planta, enquanto, através de métodos computacionais, a interpolação é feita sempre levando em consideração a disposição espacial das amostras.

Todas as representações gráficas de malhas tridimensionais exemplificadas no presente trabalho foram obtidas a partir da interpolação de malhas regulares 3D compostas por $20 \times 17 \times 21$ nós, respectivamente nos eixos de coordenadas X, Y e Z. Estas interpolações foram feitas utilizando-se equações multiquádricas locais, ajustadas com base nos 24 pontos vizinhos ao nó e constante C igual a 0,02 vezes a distância média entre amostras.

Devido à distribuição semi-regular dos pontos de dados (ao longo dos furos de sondagem), a pesquisa dos vizinhos próximos foi feita após a subdivisão da região em torno do nó em oito setores e tomando-se os três pontos mais próximos em cada um desses, totalizando 24 pontos. Impondo-se essa restrição, muitos nós, principalmente aqueles situados no limite da fronteira convexa, não seriam interpolados, porque alguns setores estariam vazios e o critério de 24 pontos não seria satisfeito. Assim, para esses casos, adotou-se um limite mínimo de 8 pontos para que o nó pudesse ser interpolado.

Este procedimento foi adotado para garantir uma melhor distribuição espacial dos pontos e, conseqüentemente, para obter interpolações confiáveis, com base no ajuste de equações multiquádricas.

A constante utilizada foi pequena porque a "distância média" calculada no programa, de acordo com a equação (69), resultou em um valor bastante grande (1517,57m).

$$DMED = [(XMAX-XMIN)*(YMAX-YMIN)*(ZMAX-ZMIN)/N]^{1/3} \quad (69)$$

onde DMED é a distância média

XMAX e XMIN são respectivamente os limites máximo e mínimo na coordenada X

YMAX e YMIN são respectivamente os limites máximo e mínimo na coordenada Y

ZMAX e ZMIN são respectivamente os limites máximo e mínimo na coordenada Z

N é o número total de pontos de dados

Esse valor relativamente grande é devido à distribuição não homogênea dos pontos de dados dentro do volume definido pelos limites máximos e mínimos de X, Y e Z.

2.1 Plantas e perfis

As plantas e/ou perfis representam cortes segundo níveis pré-especificados da malha regular previamente interpolada. As plantas são representações de cortes horizontais, enquanto os perfis são cortes verticais orientados. Para o presente estudo foram adotadas as orientações E-W e N-S para os perfis.

Nos perfis, além das curvas de isovalores, estão representadas também as respectivas seções topográficas. O traçado suave do perfil topográfico foi obtido após interpolação, usando "splines" cúbicas ajustadas aos pontos de dados iniciais.

As plantas foram obtidas nos seguintes níveis: 745, 775, 805 e 835m.

Os perfis, cujas localizações encontram-se indicadas na Figura 41, foram denominadas NS 1200, NS 1400 para aqueles obtidos segundo a direção NS e EW 800, EW 1000 e EW 1200 para os da direção EW.

Nas Figuras 48 a 51 tem-se as curvas de isovalores de P_2O_5 representadas em plantas, enquanto nas Figuras 52 e 53 as mesmas estão em perfis segundo a direção NS e, finalmente, nas Figuras 54 a 56 essas curvas estão em perfis segundo a direção EW. As plantas mostram o aumento dos teores para cotas mais baixas, onde ocorrem as rochas da série das ultramáficas. A planta do nível 745m. (Figura 48) mostra bem como os teores de P_2O_5 aumentam para nordeste. Nessa mesma figura verifica-se uma anomalia em torno do furo 42, onde há curvas indicando teores de 10% P_2O_5 . Na listagem dos dados verificou-se que somente as amostras em torno do nível 745 m. desse furo apresentam teores entre 10 e 12%. Os perfis NS mostram tendência geral de aumento de sul para norte, entretanto, pode-se observar neles um vazio entre as porções sul e norte. Isto está bem representado na Figura 53, onde na porção sul (até 700m na coordenada Y) ocorrem teores entre 4 e 6% e uma anomalia em torno do furo 42 com mais de 8% de P_2O_5 , enquanto na porção norte os teores apresentam-se entre 6 e 10% de P_2O_5 e, separando essas duas porções do perfil ocorre o vazio em torno de 1000m na coordenada Y com teores menores que 2%. O perfil EW800 (Figura 54) apresenta-se com altos teores (maiores que 6%) a oeste, junto ao furo 42. Já os outros dois (Figuras 55 e 56) os altos teores ocorrem a leste associados com as rochas da série das ultramáficas.

Figura 48 : Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 745m

Figura 49 : Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 775m

Figura 50 : Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 805m

Figura 51: Curvas de isovalores de % P_2O_5 na planta do nível 835 m

Figura 52 : Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil NS1200

Figura 53 : Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil NSI400

Figura 54 : Curvas de isovalores de $\% P_2O_5$ no perfil EW800

Figura 55: Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil EW1000

Figura 56: Curvas de isovalores de % P_2O_5 no perfil. EW1200

As Figuras 57 a 60 apresentam as curvas de isovalores de Fe_2O_3 em plantas, as Figuras 61 e 62 mostram essas curvas segundo perfis NS e as Figuras 63 a 65 em perfis EW. Os teores de Fe_2O_3 apresentam claramente, segundo as plantas, tendência de aumento para as cotas mais baixas, a exemplo dos teores de P_2O_5 . Embora os altos teores de P_2O_5 estejam associados às rochas da série das ultramáficas, verifica-se que nem sempre altos teores de P_2O_5 associam-se a altos teores de Fe_2O_3 , como pode ser observado nas Figuras 48 e 57, onde em torno do furo 46, altos teores de P_2O_5 correspondem a baixos teores de Fe_2O_3 (correlação linear negativa), entretanto, no extremo norte dessas Figuras (nordeste do Complexo) há uma correlação linear positiva entre esses elementos. Provavelmente esta seja a causa dos baixos coeficientes de correlação linear obtidos para esses elementos, ou seja, 0,29 por YAMAMOTO et al. (1980) e 0,40 por RODRIGUES (1985). Comparando-se as regiões de baixos teores de P_2O_5 , junto aos perfis NS, com as mesmas nos perfis NS de Fe_2O_3 , verifica-se que no perfil NS1200 (Figuras 52 e 61) baixos teores de P_2O_5 correspondem a baixos teores de Fe_2O_3 , enquanto no perfil NS1400 (Figuras 53 e 62) os baixos teores de P_2O_5 correspondem a altos teores de Fe_2O_3 aumentando de oeste para leste. Um padrão mais complexo com vários altos e baixos Fe_2O_3 pode ser observado no perfil EW1000 (Figura 64).

Figura 57: Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 745 m

Figura 58 : Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 775 m

Figura 59: Curva de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 805 m

Figura 60 : Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 na planta do nível 835 m

Figura 61: Curvas de isovalores de $\% \text{Fe}_2\text{O}_3$ no perfil NSI200

Figura 62 : Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil NS1400

Figura 63: Curvas de isovalores de $\% \text{Fe}_2\text{O}_3$ no perfil EW800

Figura 64 : Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil EW1000

Figura 65 : Curvas de isovalores de % Fe_2O_3 no perfil EW1200

A variação dos teores de CaO está representada em plantas nas Figuras 66 a 69, em perfis NS nas Figuras 70 e 71 e em perfis EW nas Figuras 72 a 74. Observando-se as plantas da variação de $\% \text{CaO}$, verifica-se que, ao contrário da tendência observada para P_2O_5 e Fe_2O_3 , há uma tendência de aumento de veios carbonatíticos para as cotas mais altas. Na planta do nível 835m observa-se bem a grande incidência de veios carbonatíticos, onde em aproximadamente 50% da área mostrada ocorrem teores maiores que 30%. Comparando-se as plantas dos três elementos constata-se que, altos teores de CaO estão relacionados a baixos teores de Fe_2O_3 , que pode ser observado nas plantas do nível 745m (Figuras 57 e 66) e, como constatado anteriormente, nem sempre os altos teores de Fe_2O_3 estão relacionados a altos teores de P_2O_5 . É interessante observar o comportamento dos teores de CaO junto aos perfis NS1200 e NS1400 (Figuras 70 e 71, respectivamente), onde no primeiro de modo geral mostra a predominância de teores bem mais altos que aqueles do último, o que coincide perfeitamente com o mapa geológico do Complexo, elaborado por RODRIGUES (1985), pois o perfil NS1200 está justamente sobre a mancha de grande incidência de veios carbonatíticos, enquanto NS1400 já está fora da mesma. Quando os perfis NS dos três elementos são comparados, observa-se novamente a relação entre altos teores de CaO e baixos teores de Fe_2O_3 e, aparentemente, não existe uma boa correlação entre CaO e P_2O_5 . Os perfis EW (Figuras 72 a 74), principalmente EW1000 e EW1200, mostram como há maior incidência de veios carbonatíticos nas partes superiores do Complexo. Finalmente, comparando-se os perfis EW dos três elementos, observa-se que, além das constatações junto ao furo 29 no perfil EW800, tem-se uma correlação boa entre o aumento dos teores de CaO com aqueles de P_2O_5 .

Figura 66: Curvas de isovalores de % CaO na planta do nível 745m

Figura 67: Curva de isovalores de % CaO na planta do nível 775m

Figura 68 : Curvas de isovalores de % CaO na planta de nível 805 m

Figura 69 : Curvas de isovalores de % CaO na planta do nível 835 m

Figura 70: Curvas de isovalores de % CaO no perfil NS1200

Figura 71: Curvas de isovalores de % CaO no perfil NS1400

Figura 72: Curvas de isovalores de % CaO no perfil EW800

Figura 73: Curvas de isovalores de % CaO no perfil EW1000

Figura 74 : Curvas de isovalores de % CaO no perfil EWI200

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma metodologia básica para obtenção automática de representações gráficas espaciais em geologia.

A pesquisa das principais técnicas e conceitos matemáticos da computação gráfica e da ciência da computação, bem como a posterior aplicação dos mesmos no desenvolvimento dos programas, permitiram ao autor adquirir um razoável aperfeiçoamento nessas disciplinas aplicadas à geologia.

Uma série de simulações demonstraram que é viável a utilização de equações multiquádricas, como método local, para interpolação de dados dispersos em duas e três variáveis independentes. Quanto ao número de pontos a ser utilizado nesses ajustes, verificou-se que a utilização de algo entre 12 e 24 é um bom compromisso entre a precisão e o tempo de computação requerido. Quanto à escolha da constante C, verificou-se que, tanto para ajustes globais como para ajustes locais, deve-se evitar o uso de constante nula e que o seu valor deve ser escolhido em função da ordem de grandeza da distância média entre os pontos de dados. Em outras palavras, o ajuste de equações multiquádricas é bastante dependente do sistema de coordenadas escolhido na localização dos pontos de dados (coordenadas numericamente grandes, como, por exemplo, aquelas do sistema UTM, devem ser evitadas e substituídas por valores transformados).

A utilização de equações multiquádricas para interpolação de dados em três variáveis independentes, mostrou-se satisfatória e, portanto, torna-se um método alternativo aos demais existentes (ponderação pelo inverso da distância e krigagem) para estudo da variação espacial de um determinado parâmetro numa jazida.

A elaboração das plantas e perfis da variação dos teores de P_2O_5 , Fe_2O_3 e CaO , a partir das respectivas malhas regulares interpoladas, e a posterior interpretação dos mesmos, melhorou o nível de conhecimento sobre a variação espacial desses elementos ao longo da jazida. As principais conclusões sobre essas aplicações foram que:

. a incidência dos veios carbonatíticos se dá predominantemente a cotas mais altas;

. os altos teores de P_2O_5 mostram tendência geral de aumento para nordeste junto às rochas da série das ultramáficas, embora tenha se observado que nem sempre existe uma correlação linear positiva entre os teores de P_2O_5 e Fe_2O_3 ;

. altos teores de CaO estão relacionados a baixos teores de Fe_2O_3 .

Durante o desenvolvimento das aplicações com dados reais do Complexo Alcalino de Anitápolis, constatou-se que a metodologia básica ora descrita é passível de aperfeiçoamentos a partir de estudos futuros, principalmente nos seguintes tópicos:

- . determinação do número de pontos vizinhos e da constante C, que minimizam o erro de estimação;
- . suavização das curvas de isovalores, através da utilização de "splines" tensionados;
- . otimização do programa para desenho de blocos-diagrama no sentido de reduzir o tempo de plotagem;
- . pesquisa de uma técnica para definição de fronteiras convexas para dados em três variáveis independentes, bem como um algoritmo para determinação da posição de um ponto em relação àquelas.

Finalmente, confirmou-se que as grandes vantagens na produção automática de desenhos são a versatilidade e a rapidez. A versatilidade está na possibilidade de alteração dos parâmetros (como por exemplo, a abertura da malha regular e o intervalo entre curvas de contorno) até se conseguir um desenho final satisfatório tanto em termos de precisão como também em termos estéticos. E o tempo gasto nestas tentativas é aquele efetivamente consumido na submissão e execução do processamento e na "plotagem".

APÊNDICE 1

CONCEITOS BÁSICOS DE GEOESTATÍSTICA

1 VARIÁVEIS REGIONALIZADAS

Uma variável regionalizada é qualquer função numérica com uma distribuição espacial, que varia de um lugar a outro com continuidade aparente, mas cujas variações não podem ser representadas por uma função determinística (BLAIS & CARLIER, 1968 apud OLEA, 1975). O termo variáveis regionalizadas foi escolhido por MATHERON (1965, apud HUIJBREGTS, 1975) para enfatizar as feições particulares dessas variáveis.

Em geologia, todas as observações quantitativas feitas em duas ou três variáveis independentes (área ou volume, respectivamente), sejam elas geoquímicas, geofísicas, sedimentológicas, estruturais, etc., podem ser consideradas como exemplos de variáveis regionalizadas.

As principais características de uma variável regionalizadas são (OLEA 1975, OLEA 1977):

- . localização: uma variável regionalizada é numericamente definida pelo valor de uma função, cujos argumentos contêm as coordenadas geográficas, onde as observações foram feitas, bem como as características da amostra como tamanho, forma e orientação;

- . anisotropia: algumas variáveis regionalizadas são anisotrópicas, quando apresentam variações graduais numa direção e rápida ou irregular em outra;

- . continuidade: a variação espacial de uma variável regionalizada pode ser, dependendo do fenômeno, grande ou pequena, mas deve existir uma continuidade de ponto a ponto. OLEA (1975) exemplifica a continuidade de variáveis regionalizadas através de duas séries diferentes de amostras, chamadas A e B:

Série A:	5	10	15	20	25	20	15	10	5
Série B:	10	25	15	10	20	5	15	5	20

Os valores individuais nessas duas série são exatamente iguais, porém as duas séries apresentam distribuições espaciais distintas (a Série A é contínua e regular, enquanto a B é errática). Assim, torna-se necessário levar em consideração a posição espacial relativa de cada uma das amostras na série, para

que as mesmas sejam diferenciadas. É justamente neste aspecto que a Geoestatística difere da Estatística Clássica, porque a primeira assume que há uma dependência entre amostras, pelo menos segunda determinada distribuição espacial, enquanto a última considera as amostras independentes entre si.

A correlação espacial, que mede a continuidade espacial da variável regionalizada, pode ser expressa matematicamente através de um correlograma ou variograma.

2 VARIOGRAMA

O variograma é a ferramenta básica, que permite descrever quantitativamente a variação no espaço de um fenômeno regionalizado (HUIJBREGTS 1975).

A natureza estrutural de um conjunto de dados (assumido pela variável regionalizada) é definida a partir da comparação de valores tomados simultaneamente em dois pontos, segundo uma determinada direção.

A função variograma $2\gamma(h)$ é definida como sendo a esperança matemática do quadrado da diferença entre os valores de pontos no espaço, separados por uma distância h , conforme a seguinte equação:

$$2\gamma(h) = E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} \quad (A-1)$$

ou em termos computacionais:

$$2\gamma(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Z(x+h) - Z(x)]^2 \quad (A-2)$$

onde: $2\gamma(h)$ é a função variograma;

n é o número de pares de pontos separados por uma distância h ;

$Z(x+h)$ é o valor da variável regionalizada no ponto $x+h$;

$z(x)$ é o valor da variável regionalizada no ponto x .

Como na Estatística Clássica, pode-se definir a média e a variância de uma variável regionalizada, de acordo com as relações (A-3) e (A-4), respectivamente:

$$m = E[Z(x)] \quad (A-3)$$

$$\text{VAR}[Z(x)] = E\{[Z(x)-m]^2\} \quad (\text{A-4})$$

A variância é conhecida em notação geoestatística como $C(0)$.

Da mesma forma pode-se definir a covariância $C(h)$, entre pontos separados por uma distância h :

$$C(h) = E[Z(x+h) \cdot Z(x)] - m^2 \quad (\text{A-5})$$

A função variograma $2\gamma(h)$ pode também ser expressa em termos da variância $C(0)$ e da covariância $C(h)$, de acordo com o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= E\{[Z(x+h)-Z(x)]^2\} \\ \gamma(h) &= \frac{1}{2}E[Z^2(x+h) - 2Z(x+h) \cdot Z(x) + Z^2(x)] \\ \gamma(h) &= \frac{1}{2}\{E[Z^2(x+h)] - 2E[Z(x+h) \cdot Z(x)] + E[Z^2(x)]\} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

desenvolvendo a expressão da variância, tem-se:

$$\begin{aligned} C(0) &= E[Z(x)-m]^2 \\ C(0) &= E[Z^2(x) - 2Z(x) \cdot m + m^2] \\ C(0) &= E[Z^2(x)] - 2m \cdot E[Z(x)] + m^2 \quad \text{como } E[Z(x)] = m \\ C(0) &= E[Z^2(x)] - 2mm + m^2 \\ C(0) &= E[Z^2(x)] - m^2 \quad \text{ou} \\ E[Z^2(x)] &= C(0) + m^2 \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

Como há estacionaridade tem-se que:

$$E[Z^2(x)] = E[Z^2(x+h)] \quad (\text{A-8})$$

Substituindo (A-5), (A-7) e (A-8) em (A-6), a função $\gamma(h)$ fica:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \frac{1}{2}\{C(0) - m^2 - 2[C(h)-m^2] + C(0) - m^2\} \\ \gamma(h) &= \frac{1}{2}[2C(0) - 2C(h)] \quad \text{portanto} \\ \gamma(h) &= C(0) - C(h) \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

$\gamma(h)$ é denominada função semi-variograma, que é a metade da função variograma; entretanto, segundo CLARK (1979), muitos autores usam simplesmente o termo função variograma.

A função variograma é usualmente representada sob forma gráfica, denominada variograma, conforme exemplos mostrados na Figura A1.

Figura A1: Exemplos de variogramas (PARKER, 1979)

Como a função variograma é uma variância da distribuição das diferenças nos valores da variável regionalizada entre pontos separados por uma distância h , pontos mais próximos, por estarem mais relacionados, terão essa variância pequena, aumentando à medida que os pontos se distanciam.

Algumas propriedades do variograma, podem ser mostrados diretamente na Figura A1:

. zona de influência: é a distância a partir da qual as amostras passam a ser independentes. Nesse sentido, conforme MATHERON (1971), o variograma dá um significado preciso da noção tradicional de zona de influência.

Define-se a amplitude (a) como sendo a distância dentro da qual as amostras apresentam-se correlacionadas espacialmente. A partir dessa distância a função variograma torna-se constante, cujo valor é chamado patamar e é igual à variância de todas as amostras usadas no cálculo do variograma (C_{sill} ou $C(0)$).

No exemplo da Figura A1 tem-se:

$a_{\text{vertical}} = 60\text{m}$

$a_{\text{horizontal}} = 240\text{m}$

. efeito pepita: é o valor da função variograma na origem ($h=0$). Teoricamente esse valor deveria ser zero, pois duas amostras tomadas no mesmo ponto ($h=0$) deveriam ter os mesmos valores; entretanto quando não é assim, atribui-se, geralmente, a erros de amostragem e/ou análise.

Na Figura A1 o efeito pepita (C_0) é igual a 0,014 (ton/m^2) e igual nos dois variogramas, porque as amostras para ambos foram as mesmas;

. anisotropia: os variogramas da Figura A1 mostram uma anisotropia zonal, de acordo com HUIJBREGTS (1975), pois apresentam-se com variações diferentes ao longo das duas direções principais da jazida.

. efeito pepita puro: o variograma pode também refletir a variação espacial de um fenômeno totalmente aleatório, chamado efeito pepita puro, e nesse caso não se deve utilizar o método geoestatístico de estimação. Esse termo tem origem na mineração de ouro, onde a inclusão de uma pepita de ouro em uma pequena amostra de um testemunho de sondagem é um evento aleatório (BURGUES & WEBSTER, 1980a).

Um exemplo de variograma aleatório teórico é mostrado na Figura A2.

O variograma como ferramenta básica será utilizado para inferir os valores de variância e covariância, que serão necessários para estimação ótima através da krigagem. Entretanto, o variograma de pontos, dito experimental, não serve para esse fim, porque há necessidade de interpolação e, invariavelmente, os pontos apresentar-se-ão com uma certa dispersão, principalmente para distâncias grandes, quando o número de pares de amostras vai diminuindo. Assim procede-se ao ajuste de modelos teóricos, que aproximam o comportamento das variáveis regionalizadas.

Segundo CLARK (1979), existem poucos modelos de variogramas teóricos, assim como são poucas as distribuições disponíveis da Estatística Clássica. Ainda conforme o mesmo autor, existem dois grupos de modelos teóricos:

Figura A2: Variograma aleatório teórico, mostrando o fenômeno efeito pepita puro (OLEA 1977).

a) modelos sem patamar (Figura A3)

. linear

$$\gamma(h) = p \cdot h$$

(A-10)

. linear generalizada

$$\gamma(h) = p \cdot h^\lambda$$

(A-11)

. De Wijs

$$\gamma(h) = 3\alpha \ln(h)$$

(A-12)

Figura A3: Modelos de variogramas teóricos, sem patamar (CLARK 1979).

b) modelos com patamar (Figura A4)

. exponencial $\gamma(h) = C(0) [1 - \exp(-h/a)]$ (A-13)

. esférico (MATHERON) $\begin{cases} \gamma(h) = C(0) [3h/2a - h^3/2a^3], & p/h < a \\ \gamma(h) = C(0), & p/h > a \end{cases}$ (A-14)

. efeito pepita puro $\begin{cases} \gamma(h) = 0, & p/h = 0 \\ \gamma(h) = C(0), & p/h > 0 \end{cases}$ (A-15)

onde: h é a distância;

p é o coeficiente angular;

λ é o expoente;

α é a constante de proporcionalidade;

$C(0)$ é o patamar;

a é a amplitude.

Figura A4 : Modelos de variogramas teóricos, com patamar (CLARK 1979)

O ajuste de um modelo teórico ao variograma experimental não é direto e automático, como por exemplo numa regressão, mas sim interativo, pois nesse processo o intérprete faz um primeiro ajuste de modo manual (encontra os valores de $C(0)$ e a), verifica a resposta do modelo teórico e, dependendo do ajuste obtido, pode ou não reinterpretar para conseguir um modelo considerado satisfatório pelo pesquisador. Nesse sentido é muito boa a proposição de PEREIRA JR & SUSLICK (1982) de se fazer o ajuste interativo de variogramas, através de um programa de computação com saída gráfica tanto em "plotter" como em vídeo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKIMA, H. 1978. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distributed data points. ACM Transactions on Mathematical Software, 4(2):148-159.
- ALMEIDA, F. F. M. de 1969. Diferenciação tectônica da plataforma Brasileira. In: CONGR. BRAS. GEOL., 23, Salvador, 1969, Anais... Salvador, SBG, p.29-46.
- ALMEIDA, F. F. M. de 1983. Relações tectônicas das rochas alcalinas mesozóicas da região meridional da plataforma Sul-Americana. Rev. Bras. Geoc., 13(3):139-158.
- ALMEIDA, F. F. M. de; HASUI, Y; BRITO NEVES, B. B. de; FUCK, R. A. 1981. Brazilian structural provinces: an introduction. Earth Sci. Rev., 17:1-29.
- AMARAL, G. 1976. Teste de análise de superfícies de tendência para distribuições aleatórias. In: CONGR. BRAS. GEOL., 29, Ouro Preto, 1976. Anais... Ouro Preto, SBG, V.3, p.233-237.
- AMOROZO, M.C. de M. & GOMIDE, A.C. 1979. Rotinas para uso do "plotter". São Paulo. Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo. 55 p.
- ANDERSON, D. P. 1982. Hidden line elimination in projected grided surfaces. ACM Transactions on Graphics, 1(4):274-288.
- ANDERSON, K. R. 1976. Simple algorithm for positioning a point close to a boundary. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 8(1):105-106.
- BARNHILL, R. E. 1983. A survey of the representation and design of surfaces. IEEE Computer Graphics Applications, 3(7):9-16.
- BASEI, M. A. S. 1984. O Cinturão Don Feliciano em Santa Catarina. São Paulo, FAPESP. 50p. (Relatório FAPESP).
- BASEI, M. A. S. & CORDANI, U. G. 1984. Evolução geológica do Cinturão Don Feliciano em Santa Catarina. In: CONGR. BRAS. GEOL., 33, Rio de Janeiro. Boletim de Resumos... Rio de Janeiro, SBG. p.184.

- BATCHA, J. P. & REESE, J. R. 1964. Surface determination and automatic contouring for mineral exploration, extraction, and processing. Quarterly of the Colorado School of Mines, 59(1): 1-14.
- BENGTSSON, B. & NORDBECK, S. 1964. Construction of isarithms and isarithmic maps by computer. BIT, 4:87-105.
- BLAIS, R.A. & CARLIER, P.A. 1968. Applications of geostatistics in ore valuation. "Apud" OLEA, R.A. 1975. Optimum mapping techniques using regionalized variable theory. Kansas, Kansas Geological Survey. 137p. (Series on Spatial Analysis, 2).
- BOUKNIGHT, W. J. 1970. A procedure for generation of three-dimensional halftoned computer graphics presentations. Communications of the ACM, 13(9):527-536.
- BROOKER, P. I. 1979. Kriging. Engineering & Mining Journal, 180 (9):148-153.
- BURGUESS, T. M. & WEBSTER, R. 1980a. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, I: The semivariogram and punctual kriging. Journal of Soil Science, 31:315-331.
- BURGUESS, T. M. & WEBSTER, R. 1980b. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, II: Block Kriging. Journal of Soil Science, 31:333-341.
- BYKAT, A. 1978. Convex hull of a finite set of points in two dimensions. Information Processing Letters, 7(6):296-298.
- CAMPOS NETO, M. C. 1984. Observações estruturais e estratigráficas no Cinturão Don Feliciano, Santa Catarina. São Paulo, FAPESP. 34p. (Relatório FAPESP).
- CARRARO, C. C.; ISSLER, R. S.; FORMOSO, M. L. L. 1967. Mapeamento do distrito alcalino de Altos do Rio Pinheiros, Município de Anitápolis, Estado de Santa Catarina. Porto Alegre, UFRGS. 45p. (Pub. Esp., 16).
- CLARK, I. 1979. The semivariogram - part I. Engineering & Mining Journal, 180 (7): 90-94.
- CONVERSE, A. O. 1970. Otimização. trad. de A. RIOS NETO. São Paulo. EDART e EDUSP. 262p.

- COONS, R.L.; WOOLLARD, G.P.; HERSHEY, G. 1967. Structural significance and analysis of mid-continent gravity high. "Apud" DOBRIN, M.B. 1981. Introduction to geophysical prospecting. Tokyo, McGraw Hill. 630p.
- COTTAFAVA, G. & LE MOLI, G. 1969. Automatic contour map. Communications of the ACM, 12(7):386-391.
- CUNHA G. J. da; BATTIOLA, A. L.; BARREIROS, F. P. 1985. Padronização em computação gráfica: proposta e tendências. In: CONGRESSO NACIONAL DE INFORMATICA, 18, São Paulo, 1985. Anais... São Paulo, SUCEU. V.1,p.569-575.
- DACHS, J. N. W. 1978. Análise de dados e regressão. São Paulo.125p. (Apostila do Minicurso ministrado no SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 3, São Paulo, 1978).
- DAVIS, J. C. 1973. Statistics and data analysis in geology. New York, John Wiley. 550p.
- DAVIS, J. C. 1976. Contouring algorithms. "Apud" HARBAUGH, J.W.; DOVETON, J.H.; DAVIS, J.C. 1977. Probability methods in oil exploration. New York, John Wiley. 269p.
- DAYHOFF, M. O. 1963. A contour-map program for X-ray crystallography. Communications of the ACM, 6(10):620-622.
- DELFINER, P. & DELHOMME, J. P. 1975. Optimum interpolation by kriging. In: DAVIS, J.C. & MCCullagh, M.J.(ed) Display and analysis of spatial data. New York, John Wiley. 378p.
- DORN, W. S. & MCCRAKEN, D. D. 1978. Cálculo numérico com estudos de casos em FORTRAN IV. trad. de J. A. R. dos SANTOS e A. L. S de ALMEIDA. Rio de Janeiro, CAMPUS e EDUSP. 568p.
- DOUGENICK, J. A. & SHEEHAN, D. E. 1975. SYMAP user's reference manual. Massachusetts, Laboratory for Computer Graphics and Spatial Analysis.
- EDDY, W. F. 1977. A new convex hull algorithm for planar sets. ACM Transactions on Mathematical Software, 3(4):398-403.
- FADDEVA, V. N. 1959. Computational methods of linear algebra. New York, Dover Publications. 252p.

- FRAGOSO CESAR, A. R. S. 1980. O cráton do Rio de La Plata e o Cinturão Dom Feliciano no Escudo Uruguaio-Sul-Riograndense. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. Anais...Camboriú, SBG. v.5, p.2879-2892.
- FRANKE, R. 1977. Locally determinad smooth interpolation at irregularly spaced points in several variables. J. Inst. Maths. Applics. 19:471-482.
- FRANKE, R. 1982. Scattered data interpolation: Test of some methods. Mathematics of Computation, 38(157):181-200.
- FRANKE, R. & NIELSON, G. 1980. Smooth interpolation of large sets of scattered data. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1691-1704.
- GIANNINI, P. C. F. & FERNANDES, H. G. 1984. Aplicação de análise de tendências por regressão múltipla a parâmetros sedimentológicos em duas áreas da costa sudoeste paulista. In: CONGR. BRAS. GEOL., 32, Rio de Janeiro, 1984. Anais...Rio de Janeiro, SBG, v.1, p.145-158.
- GOLD, C. M.; CHARTERS, T. D.; RAMSDEN, J. 1977. Automated contour mapping using triangular element data structures and an interpolant over each irregular domain. Computer Graphics, 11: 170-175.
- GRAHAM, R. L. 1972. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. Information Processing Letters, 1:132-133.
- GREEN, P. J. & SILVERMAN, B. W. 1979. Constructing the convex hull of a set of points in the plane. The Computer Journal, 22(3): 262-266.
- HALL, J. K. 1975. PTLOC - A FORTRAN subroutine for determining the position of a point relative to a closed boundary. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 7(1):75-79.
- HARBAUGH, J. W. & MERRIAM, D. F. 1968. Computer applications in stratigraphic analysis. New York, John Wiley. 282p.

- HARBAUGH, J. W.; DOVETON, J. H.; DAVIS, J. C. 1977. Probability methods in oil exploration. New York, John Wiley. 269p.
- HARDY, R. L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. Journal of Geophysical Research, 76(8):1905-1915.
- HARDY, R. L. 1972. Analytical topographic surfaces by spatial intersection. Photogrametric Engineering, 38(5):452-458.
- HARDY, R. L. 1977. Least squares prediction. Photogrametric Engineering and Remote Sensing, 43(4):475-492.
- HARDY, R. L. 1985. Comunicação pessoal recebida pelo autor.
- HARTMANN, J. R.; FELIN, P. P.; VERGARA, V. D. 1980. Jazida de fosfato de Anitápolis-SC. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. Boletim de Excursões...Camboriú, SBG. p.18-24.
- HEISING, W. P. 1964. History and summary of FORTRAN standartization for the ASA. Communications of the ACM, 7(10):590-625.
- HERZ, N. 1977. Time spreading in the South Atlantic; information from brazilian alkalic rocks. "Apud" ALMEIDA, F. F. M. de 1983. Relações Tectônicas das rochas alcalinas mesozóicas da região meridional da Plataforma Brasileira. Rev. Bras. Geoc., 13(3): 139-158.
- HOWARTH, R. J. 1983. Mapping. In: HOWARTH, R. J.(ed) Statistics and data analysis in geochemical prospecting. Amsterdam, Elsevier. 437p.
- HUIJBREGTS, C. J. 1975. Regionalized variables and quantitative analysis of spatial data. In: DAVIS, J. C. & MCCULLAGH, M. J. (ed). Display and analysis of spatial data. New York, John Wiley. p. 38-53.
- IBM. 1965. Numerical surface techniques and contour map plotting. New York, IBM Data Processing Application. 36p.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA . 1976. Carta do Brasil; Anitápolis, SC, folha SG-22-2-D-IV-4. sL., DSG. escala 1:50.000.

- INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. 1979. Estudo petrológico do complexo alcalino de Anitápolis-SC. São Paulo. 20p. (IPT. Relatório 11.945).
- INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. 1980. Tectônica da Bacia do Paraná no Brasil. São Paulo. 187p. (IPT. Relatório 14.091).
- JARVIS, R. A. 1973. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane. Information Processing Letters, 2:18-21.
- JOST, H. & HARTMANN, L. A. 1984. Província Mantiqueira; setor meridional. In: ALMEIDA, F. F. M. de & HASUI, Y. (coord). O Pré Cambriano do Brasil. São Paulo, Edgard Blucher. p.345-368.
- JOURNEL A. G. & HUIJBREGTS, C. J. 1978. Mining geostatistics. London, Academic Press. 600p.
- KNUTH, D. E. 1973. The art of computer programming. Vol 3-Sorting. Massachusetts, Addison Wesley. 723p.
- KUBERT, B.; SZABO, J.; GIULIERI, S. 1968. The perspective representation of functions of two variables. Journal of the ACM, 15(2): 193-204.
- MARTIN, W. A. 1971. Sorting. Computing Surveys, 3(4):147-174.
- MATHERON, G. 1965. Les variables régionalisées et leur estimation. "Apud" HUIJBREGTS, C. J. 1975. Regionalized variables and quantitative analysis of spatial data.
- MATHERON, G. 1971. The theory of regionalized variables and its applications. Fontainebleau, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. 211p. (Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, 5).
- MCLAIN, D. H. 1974. Drawing contours from arbitrary data points. The Computer Journal, 17(4):318-324.
- MCLAIN, D. H. 1976. Two dimensional interpolation from random data. The Computer Journal, 19(2):178-181.

- MCCALLUM, D. & AVIS, D. 1979. A linear algorithm for finding the convex hull of a simple polygon. Information Processing Letters, 9(5):201-206.
- MELCHER, G. C. & COUTINHO, J. M. V. 1966. Rochas alcalinas e carbonatito de Anitápolis, Estado de Santa Catarina. Bol. Soc. Bras. Geol., 15(1):59-93.
- MOORE, I. G. 1977. Automatic contouring of geological data. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON THE APPLICATION OF COMPUTERS AND MATHEMATICS IN THE MINERAL INDUSTRIES, 15, Brisbane, 1977. Proceedings. Brisbane. p.209-220.
- OLEA, R. A. 1975. Optimum mapping techniques using regionalized variable theory. Kansas, Kansas Geological Survey. 137p. (Series on Spatial Analysis, 2).
- OLEA, R. A. 1977. Measuring spatial dependence with semivariograms. Kansas, Kansas Geological Survey. 29p. (Series on Spatial Analysis, 3).
- PALMER, J. A. B. 1970. An economical method of plotting contours. The Australian Computer Journal, 2(1):27-31.
- PARKER, H. 1979. The volume-variance relationship: a useful tool for mine planning. Engineering & Mining Journal, 180(10): 106-123.
- PEREIRA, J. S. C. & BUSSAB, W. O. 1976. Tábuas de estatística e matemática. São Paulo, Editora Brasiliense, 66p.
- PEREIRA JR, G. G. & SUSLICK, S. B. 1982. Variogramas: ajuste interativo. In: CONGR. BRAS. GEOL., 32, Salvador, 1982. Anais... Salvador, SBG. v.4, p. 1745-1754.
- PETTINATI, F. 1983. Modelamento digital e representação gráfica de superfícies. São Paulo. 177 p. (Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Politécnica da USP).
- PREPARATA, F. P. 1979. An optimal real-time algorithm for planar convex hulls. Communications of the ACM, 22(7):402-405.

- RIGOTTI, A. 1985. Reduction of ambiguity in geoelectric models using multiple data sets. Montreal, 202 p. (Dissertação de mestrado apresentada ao Department of Mining and Metallurgical Engineering da McGill University).
- RODRIGUES, E. P. 1985. O complexo alcalino de Anitápolis - um estudo petrológico. São Paulo. 169p. (Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências da USP).
- SAMPSON, R. J. 1975. SURFACE II graphics system. Kansas, Kansas Geological Survey. 240p. (Series on Spatial Analysis, 1).
- SANTOS, E. L. dos; SILVA, L. C. da; ORLANDI FILHO, V.; COUTINHO, M. G. N.; ROISENBERG, A.; RAMALHO, R.; HARTMANN, L. A. 1984. Os escudos Sul-Rio-Grandense e Catarinense e a Bacia do Paraná. In: SCHOBENHAUS, C.; CAMPOS, D. A.; DERZE, G. R.; ASMUS, H. E. (coord.). Geologia do Brasil; texto explicativo do mapa geológico do Brasil e da área oceânica adjacente incluindo depósitos minerais; escala 1:2 500 000. Brasília, DNPM. 501p.
- SHEPARD, D. 1968. A two dimensional interpolation function for irregularly spaced data. In: AMERICAN ASSOCIATION FOR COMPUTING MACHINERY NATIONAL CONFERENCE, 23, 1968. Proceedings...p.517-524.
- SNYDER, W. V. 1978. Contour plotting. ACM Transactions on Mathematical Software, 4(3):290-294.
- ULBRICH, H. H. G. J. & GOMES, C. B. 1981. Alkaline rocks from continental Brazil. Earth Sci. Rev., 17:135-154.
- VERGARA, V. D. 1979. Pesquisa de fosfato em Anitápolis; fase preliminar. Porto Alegre, ILM. (inédito).
- VERGARA, V. D. 1980. Pesquisa geológica desenvolvida no complexo alcalino de Anitápolis. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. Anais...Camboriú, SBG. v.4, p.2502-2517.
- WATSON, D. F. 1982. ACORD: Automatic contouring of raw data. Computers & Geosciences, 8(1):97-101.
- WEBSTER, R. & BURGUESS, T. M. 1980. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, III: Changing drift and universal kriging. Journal of Soil Science, 31:505-524.

- WILLIAMSON, H. 1972. Algorithm 420-Hidden-line plotting program. Collected Algorithms from CACM. p.1-7.
- WRIGHT, T. J. 1973. A two space solution to the hidden line problem for plotting functions of two variables. IEEE Transactions on Computers, C-22(1):28-33.
- YAMAMOTO, J. K. 1980. Análise de hipersuperfície de tendência aplicada aos parâmetros químicos do complexo alcalino de Anitápolis, SC. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. Anais...Camboriú, SBG. v.2, p.1258-1271.
- YAMAMOTO, J. K.; GOULART, E.P.; HASUI, Y. 1980. Análise estatística dos dados químicos do complexo alcalino de Anitápolis, SC. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. Anais...Camboriú, SBG. v.2, p.1272-1283.

BIBLIOGRAFIA

- AGTERBERG, F.P. 1969. Interpolation of areally distributed data. Quarterly of the Colorado School of Mines, 64:217-237.
- AGTERBERG, F.P. 1974. Geomathematics-mathematical background and geo-science applications. Amsterdam, Elsevier. 596 p.
- AKIMA, H. 1970. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. Communications of the ACM, 17(4):589-602.
- AKIMA, H. 1974. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedures. Communications of the ACM, 17(1):18-20.
- AKIMA, H. 1974. Algorithm 474-bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedures. Communications of the ACM, 17(1):26-31.
- AKIMA, H. 1975. Comments on optimal contour mapping using universal kriging by R.A. Olea. Journal of Geophysical Research, 80(5): 832-834.
- AKIMA, H. 1984. On estimating partial derivatives for bivariate interpolation of scattered data. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 14(1):41-52.
- ANDERSON, D.P. 1983. Techniques for reducing pen plotting time. ACM Transactions on Graphics, 2(3):197-212.
- ANTOY, S. 1983. Contour plotting for function specified at nodal points of a mesh on a set of irregular profiles. Computers & Geosciences, 9(2):235-244.
- ARTHUR, W.G. 1973. Interpolation of a function of many variables II. Photogrametric Engineering, 39: 261-266.
- AYENI, O.O. 1982. Optimum sampling for digital terrain models: a trend towards automation. Photogrametric Engineering & Remote Sensing, 48(11): 1687-1694.
- BAAFI, E.Y. & KIM, Y.C. 1983. Comparison of different ore reserve estimation methods using conditional simulation. Mining Engineering, 35(12):1646-1650.

- BARNHILL, R.E. 1977. Representation and approximation of surfaces. In: RICE, J.R. (ed) Mathematical Software III. New York, Academic Press. p.69-120.
- BARNHILL, R.E. & LITTLE, F.F. 1984. Three and four dimensional surfaces. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 14(1): 77-102.
- BARNHILL, R.E. & STEAD, S.E. 1984. Multistage trivariate surfaces. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 14(1):103-118.
- BAUMANN, P.R. 1978. A FORTRAN IV program for generating isopleth maps on small computers. Computers & Geosciences, 4(1):23-32.
- BHATTACHARYYA, B.K. 1969. Bicubic spline interpolation as a method for treatment of potential field data. Geophysics, 34(3): 402-423.
- BHATTACHARYYA, B.K. & HOLROYD, M.T.. 1971. Numerical treatment and automatic mapping of two-dimensional data in digital form. The Canadian Institute of Mining and Metallurgy, special volume 12: 148-158.
- BLINN, J.F. 1982. A generalization of algebraic surface drawing. ACM Transactions on Graphics, 1(3):235-256.
- BOLONDI, G.; ROCCA, F.; ZANOLETTI, S. 1976. Automatic contouring of faulted subsurfaces. Geophysics, 41(6):1377-1393.
- BOLONDI, G.; ROCCA, F.; ZANOLETTI, S. 1977. Methods for contouring irregularly spaced data. Geophysical Prospecting, 25:96-119.
- BRIGGS, I.C. 1974. Machine contouring using minimum curvature. Geophysics, 39(1):39-48.
- BUTLAND, J. 1979. Surface drawing made simple. Computer Aided Design, 11(1):19-22.
- CATMULL, E. 1978. A hidden-surface algorithm with anti-aliasing. Computer Graphics, 12:6-11.
- CINTRA, J. P. 1984. Contribuições ao estudo de representação de superfícies com o auxílio de computador. São Paulo. 280p. (Tese de Doutorado apresentada à Escola Politécnica da USP).

- CLARK, I. 1977. Practical kriging in three dimensions. Computers & Geosciences, 3:173-180.
- CLARK, I. 1979. The semivariogram - Part 2. Engineering & Mining Journal, 180(8):92-97.
- CLARK, I. 1983. Regression revisited. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 15(4):517-536.
- CLINE, A.K. 1974. Scalar and planar valued curve fitting using splines under tension. Communications of the ACM, 17(4):218-223.
- COLE, A.J. 1968. Algorithm for the production of contour maps from scattered data. Nature, 220:92-94.
- COMBA, P.G. 1968. A procedure for detecting of intersections of three dimensional objects. Journal of the ACM, 15(3):354-366.
- CRAIN, I.K. 1970. Computer interpolation and contouring of two dimensional data: a review. Geoexploration, 8:71-86.
- CRAIN, I.K. & BHATTACHARYYA, B.K. 1967. Treatment of non-equispaced two-dimensional data with a digital computer. Geoexploration, 5:173-194.
- CRANE, C.M. 1972. Algorithm 75: Contour plotting for function specified at nodal points of an irregular mesh based on an arbitrary two parameter coordinate system. The Computer Journal, 15(4):382-384.
- CRESSIE, N. 1985. Fitting variogram models by weighted least squares. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 17(5):563-586.
- CZEGLEDY, P.F. 1972. Efficiency of local polynomial in contour mapping. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 4(4):291-306.
- DAGBERT, M. & DAVID, M. 1976. Universal kriging for ore-reserve estimation - Conceptual Background and application to the Navan Deposit. Canadian Institute Mining and Metall. Bull., 69(766):80-92.
- DAVID, M. 1977. Geostatistical ore reserve estimation. New York, Elsevier. 364p.

- DAVIS, J.C. 1969. Distribution of hydrocarbons in three dimensions In: MERRIAM, D.F. (ed) Symposium on computer applications on Petroleum exploration. Kansas, Kansas Geological Survey. 4lp. (Computer Contribution, 40).
- DAVIS, M.W.D. & DAVID, M. 1980. An algorithm for finding the position of a point relative to a fixed polygonal boundary. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 12(1):61-68.
- DAVIS, M.W.D. & DAVID, M. 1980. Generating bicubic spline coefficients on a large regular grid. Computers & Geosciences, 6(1): 1-6.
- DAVIS, M. W. & GRIVET, C. 1984. Kriging in a global neighborhood. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 16(3):249-265.
- DUBRULE, O. 1983. Two methods with different objectives: splines and kriging. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 15(2):245-258.
- ERRICO, J.C.D. 1984. Introdução à geoestatística. Belo Horizonte. 38p. (Apostila do curso Planejamento de Lavra - Uso do computador, promovido pela IBRAM, Belo Horizonte, 1984).
- FALCONER, K.J. 1971. A general purpose algorithm for contouring over scattered data points. Teddington, National Physical Laboratory. 30p. (Report NAC 6).
- FERGUSON, J. 1964. Multivariable curve interpolation. Journal of the ACM, 11(2):221-228.
- FORREST, A.R. 1972. On coons and other methods for the representation of curved surfaces. Computer Graphics and Image Processing, 1:341-359.
- FORREST, A.R. 1972. Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials. The Computer Journal, 15(1):71-75.
- FOWLER, R.J. & LITTLE, J.J. 1979. Automatic extraction of irregular network digital terrain models. Computer Graphics, 13:199-207.
- FRANKLIN, W.R. 1980. A linear time exact hidden surface algorithm. Computer Graphics, 14(3):117-123.

- FREEMAN, H. & LOUTREC, P.P. 1967. An algorithm for the solution of the two-dimensional hidden-line problem. IEEE Transactions on Electronic Computers, EC-16(6):784-790.
- FREEMAN, H. & MORSE, S.P. 1967. On searching a contour map for a given terrain elevation profile. Journal of the Franklin Institute, 284(1):1-25.
- GALIMBERTI, R. & MONTANARI, U. 1969. An algorithm for hidden line elimination. Communications of the ACM, 12(4): 206-211.
- GARG, O. 1984. Geological modeling including the use of geostatistics. In: COMPUTER BASED MINE PLANNING SEMINAR. Rio de Janeiro, 1984.
- GORDON, W.J. 1971. Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation. SIAM. J. Numer. Anal., 8(1):158-177.
- GORDON, W.J. & WIXOM, J.A. 1978. Shepard's method of metric interpolation. Mathematics of Computation, 32(141):253-264.
- GRAHAM, N.Y. 1972. Perspective drawing of surfaces with hidden line elimination. The Bell System Technical Journal, 51(4):843-861.
- GRAY, W.H. & AKIN, J.E. 1979. An improved method for contouring on isoparametric surfaces. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 14:451-472.
- GRENDER, G.C. 1976. Topo III: A FORTRAN program for terrain analysis. Computers & Geosciences, 2(2):195-209.
- HAAS, A.G. & VIALIX, J.R. 1976. Krigage applied to Geophysics. The answer to the problem of estimates and contouring. Geophysical Prospecting, 24:49-69.
- HARBAUGH, J.W. 1964. A computer method for four-variable trend analysis illustrated by a study of oil-gravity variations in southeastern Kansas, Kansas Geological Survey. 58p. (Bulletin, 171).
- HARDY, R.L. & GOPFERT, W.M. 1975. Least squares prediction of gravity anomalies, geoidal undulations and deflections of the vertical with multiquadric harmonic functions. Geophysical Research Letters, 2(10):423-426.

- HEAP, B.R. & PINK, M.G. 1969. Three contouring algorithms. Teddington, National Physical Laboratory. 12p. (Report DNAM 81).
- HEISKANEN, W.A. & MORITZ, H. 1967. Physical Geodesy. San Francisco, W.H. Freeman. 364 p.
- HESSING, R.C.; LEE, H.K.; PIERCE, A.; POWERS, E.N. 1972. Automatic contouring using bicubic functions. Geophysics, 37(4):669-674.
- HSU, M.L. 1975. Filtering process in surface generalization and isopleth mapping. In: DAVIS, J.C. & MCCULLAGH, M.J. (ed). Display and analysis of spatial data. New York, John Wiley. p. 115-129.
- HUIJBREGTS, C. & MATHERON, G. 1970. Universal kriging (An optimal method for estimating and contouring in trend surface analysis). The Canadian Mining and Metallurgical Bulletin, special volume 12: 159-169.
- JANCAITIS, J.R. & JUNKINS, J.L. 1974. Modeling in n dimensions using a weighting function approach. Journal of Geophysical Research, 79(23):3361-3366.
- JOURNEL, A.G. 1977. Kriging in terms of projections. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 9(6):563-586.
- JOURNEL, A.G. 1979. Geostatistical simulation methods for exploration and mine planning. Engineering & Mining Journal, 180(12):86-91.
- JUNKINS, J.L.; MILLER, G.W.; JANCAITIS, J.R. 1973. A weighting function approach to modeling of irregular surfaces. Journal of Geophysical Research, 78(11):1794-1803.
- KLUCEWICZ, I.M. 1978. A piecewise C1 interpolant to arbitrary spaced data. Computer Graphics and Image Processing, 8:92-112.
- KNUDSEN, H.P.; KIM, Y.C.; MUELLER, E. 1978. Comparative study of the geostatistical ore reserve estimation method over the conventional method. Mining Engineering, 30(1):54-58.
- KOCH, G.S. & LINK, R.F. 1970. Statistical analysis of geological data - Volume I. New York, John Wiley. 375 p.

- KOCH, G. S. & LINK, R. F. 1971. Statistical analysis of geological data - Volume II. New York, John Wiley. 438p.
- KRAUS, K. & MIKHAIL, E.M. 1972. Linear least-squares interpolation. Photogrametric Engineering, 38(10): 1016-1029.
- KRIGE, D.G. 1964. A brief review of the development in the application of mathematical statistics to ore valuation in the south african gold mining industry. Quarterly of the Colorado School of Mines, 59(4):785-809.
- KRUMBEIN, W.C. & GRAYBILL, F.A. 1965. An introduction to statistical models in geology. New York, Mcraw Hill. 475p.
- LAWSON, C.L. 1977. Software for Cl surface interpolation. In: RICE, J.R. (ed) Mathematical software III. New York, Academic Press. p. 69-120.
- LEE, D.T. & SCHACHTER, B.J. 1980. Two algorithms for constructing a Delaunay Triangulation. International Journal of Computer and Information Science. 9(3):219-242.
- LIU, M.L. 1976. Spline fit made easy. IEEE Transactions on Computers, C-25(5):522-527.
- LOUTREL, P.P. 1970. A solution of the hidden-line problem for computer drawn polyhedra. IEEE Transactions on Computers, C-19(3): 205- 213.
- MATHERON, G. 1963. Principles of Geostatistics. Economic Geology, 58:1246-1266.
- MATHERON, G. 1967. Kriging or Polynomial Interpolation procedures. The Canadian Mining and Metallurgical Bulletin, 60(665): 1041-1045.
- MCCONALOGUE, D.J. 1971. An automatic french-curve procedure for use with an incremental plotter. The Computer Journal, 14(2):207-209.
- MCINTRE, D.B. & POLLARD, D.P. 1968. Computer programs for automatic contouring. Kansas, Kansas Geological Survey. 75p. (Computer Contribution, 23).

- MEEK, J.L. & BEER, G. 1975. Contour plotting of data using isoparametric element representation. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 10:945-957.
- MEINGUET, J. 1979. Multivariate interpolation at arbitrary points made simple. Journal of Applied Mathematics and Physics, 30: 292-304.
- MERRIAM, D.F. & SNEATH, P.H.A. 1966. Quantitative comparison of contour maps. Journal of Geophysical Research, 71(4): 1105-1115.
- MERRIL, R.D. 1973. Representation of contours and regions for efficient computer search. Communications of the ACM, 16(2): 69-82.
- MILLER, V.J. & HOE, H.L. 1982. Mineralization modeling and ore reserve estimation. Engineering & Mining Journal, 183(6):66-74.
- MONMONIER, M.S.; PFALTZ, J.L.; ROSENFELD, A. 1966. Surface area from contour maps. Photogrametric Engineering, 32(3):476-482.
- MONTGOMERY, D.C. & PECK, E.A. 1982. Introduction to linear regression analysis. New York, John Wiley. 504 p.
- MORSE, S.P. 1968. A mathematical model for the analysis of contour line data. Journal of the ACM, 15(2):205-220.
- MORSE, S.P. 1969. Concepts of use in contour map processing. Communications of the ACM, 12(2):147-152.
- NIELSON, G.M. 1983. A method for interpolating scattered data based upon a minimum norm network. Mathematics of Computation, 40(161): 253-271.
- NIELSON, G.M. & FRANKE, R. 1984. A method for construction of surfaces under tension. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 14(1):203-221.
- OLEA, R.A. 1974. Optimal contour mapping using universal kriging. Journal of Geophysical Research, 79(5):695-702.
- PAP0, H.P. & GELBMAN, E. 1984. Digital terrain models for slopes and curvatures. Photogrametric Engineering & Remote Sensing, 50 (6): 695-701.

- PARKER, H. 1979. The volume variance relationship: a useful tool for mine planning. Engineering & Mining Journal, 180(10): 106-123.
- PETERSEN, C.S. 1984. Adaptive contouring of three-dimensional surfaces. Computer Aided Geometric Design, 1:61-74.
- POUZET, J. 1980. Estimation of a surface with known discontinuities for automatic contouring purposes. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 12(6):559-576.
- PREPARATA, F.P. & HONG, S.J. 1977. Convex hull of finite sets of points in two and three dimensions. Communications of the ACM, 20(2):87-93.
- RENDU, J.M. 1980. A case study: kriging for ore valuation and mine planning. Engineering & Mining Journal, 181(1): 114-120.
- RENKA, R.L. & CLINE, A.K. 1984. A triangle-based C1 interpolation method. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 14(1): 223-237.
- RICCI, A. 1971. An algorithm for the removal of hidden lines in 3D scenes. The Computer Journal, 14(4): 375-377.
- RICE, J.R. 1978. Algorithm 525, ADAPT, Adaptive smooth curve fitting [E2]. Software, 4(1): 82-94.
- ROGERS, D.F. & ADAMS, J.A. 1976. Mathematical elements for computer graphics. New York, Mcraw Hill. 239p.
- SALKAUSKAS, K. 1984. C1 splines for interpolation of rapidly varying data. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 14(1):239-250.
- SAMPSON, R.J. 1975. The SURFACE II Graphics System. In: DAVIS, J.C. & MCCULLAGH, M.J. (ed). Display and analysis of spatial data. New York, John Wiley. p.244-266.
- SANDEFUR, R.L. & GRANT, D.C. 1980. Applying geostatistics to roll front uranium in Wyoming. Engineering & Mining Journal, 181(2):90-96.
- SCHACHTER, B. 1978. A nonlinear mapping algorithm for large data sets. Computer Graphics and Image Processing, 8:271-276.

- SCHAGEN, I.P. 1979. Interpolation in two-dimensions a new technique J. Inst. Mathe. Applies. 23:53-59.
- SCHAGEN, I.P. 1982. Automatic contouring from scattered data points. The Computer Journal, 25(1):7-11.
- SCHUT, G.H. 1974. Two interpolation methods. Photogrametric Engineering, 40:1447-1453.
- SIBSON, R. 1978. Locally equiangular triangulations. The Computer Journal. 21(3):243-245.
- SLOAN JR, K.R. & BROWN, C.M. 1979. Color map techniques. Computer Graphics & Image Processing, 10:297-317.
- SMITH, F.G. 1968. Three computer programs for contouring map data. Canadian Journal of Earth Sciences, 5:324-327.
- SPITAL, G. 1979. Hidden line elimination and topographic representation. Computer Graphics, 13:20-54.
- SPRUNT, B.F. 1975. Relief representation in automatic cartography: an algorithmic approach. In: DAVIS, J.C. & MCCULLAGH, M.J. (ed) Display and analysis of spatial data. New York, John Wiley. p. 173-186.
- SPRUNT, B.F. 1975. Hidden-line removal from three dimensional maps and diagrams. In: DAVIS, J.C. & MCCULLAGH, M.J. (ed) Display and analysis of spatial data. New York, John Wiley. p. 198-209.
- TORELLI, L. & TOMASI, P. 1977. Interpolation and trend analysis two geohydrological applications. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 9(5): 529-542.
- WALTERS, R.F. 1969. Contouring by machine: a user's guide. The AAPG Bulletin, 53(11):2324-2340.
- WATSON, D.F. 1981. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. The Computer Journal, 24(2):167-172.
- WATSON, D.F. & PHILIP, G.M. 1984. Triangle based interpolation. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 16(8):779-795.

- WEBSTER, R. 1978. Optimally partitioning soil transects. Journal of Soil Science, 29(3): 388-402.
- WEISS, R.A. 1966. Be vision, a package of IBM 7090 FORTRAN Programs to draw topographic views of combinations of plane and quadric surfaces. Journal of the ACM, 13(2):194-204.
- WHITTEN, E.H.T. & KOELLING, M.E.V. 1973. Spline-surface interpolation, spatial filtering, and trend surfaces for geological mapped variables. Journal of the International Association for Mathematical Geology, 5(2):111-126.
- WHITTEN, E.H.T. 1975. The practical use of trend-surface analyses in the geological sciences. In: DAVIS, J.C. & MCCULLAGH, M.J. (ed) Display and analysis of spatial data. New York, John Wiley. p. 282-297.
- WRAY JR., W.B. 1970. FORTTRAN IV CDC 6400 Computer program for constructing isometric diagrams. Kansas, Kansas Geological Survey. 50p. (Computer Contribution, 44).
- WREN, A.E. 1975. Contouring and the contour map a new perspective. Geophysical Prospecting, 23:1-17.
- WRIGHT, T. 1974. Visible surface plotting program. Communications of the ACM, 17(3):152-155.
- WRIGHT, T. & HUMBRECHT, J. 1979. ISOSRF - An algorithm for plotting iso-valued surfaces of a function of three variables. Computer Graphics, 13:182-189.