Universidade de São Paulo

Instituto de Física

O potencial nucleon-nucleon e a troca de dois píons relativística

Renato Higa

Tese apresentada ao Instituto de
Física da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Doutor
em Ciências

Orientador

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Banca Examinadora

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IFUSP)

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein (IFT - UNESP)

Prof. Dr. José de Sá Borges Filho (UERJ)

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (orientador - IFUSP)

São Paulo
Agosto de 2003

Agradecimentos

- aos meus familiares, pelo apoio, compreensão e, principalmente, muita paciência,
- ao Prof. Mané, pela amizade, pela dedicada orientação ao longo desses oito anos (desde a iniciação científica) e pelos inestimáveis ensinamentos, tanto em Física, quanto na atitude e qualidades que um pesquisador deve reunir,
- ao Prof. Carlos Rocha (Carocha) da Universidade São Judas, pela grande amizade, inúmeras discussões e, principalmente, pela intensa colaboração neste trabalho,
- to Prof. José Goity (JLab), for nice discussions about infrared regularization, for all his help during my stay at JLab, and also to his family,
- to Prof. Rocco Schiavilla and Prof. Franz Gross (JLab), for valuable discussions about this work,
- à Ana Lima, Carlos Schat, Jordi Saez e Deirdre Black, por facilitarem demais a minha vida lá em Newport News, to all folks at JLab, and to guys from Coventry Blokes, soccer maniacs!
- à todo o pessoal do FINPE de modo geral, pelo ambiente agradável e descontraído,
- à Regina, pela agradável companhia e amizade desde a minha volta do exterior,
- aos Professores Celso L. Lima, José de Sá Borges, Marina Nielsen, Fernando Navarra, Fernando Brandt (linux expert), Claudio Maekawa, Isabela P. Cavalcante, Bira van Kolck e ao palmeirense, porém gente boa, Kazuo Ueta,
- à galera da física: Henady, Carla, Fábio (fabeô), Felipe, Michel, Tomás, Daniel (Hutz), André chuck e pessoal que se formou em 96, aos tranqueiras Ettore, Dimas, Baiano, Fernando e galera da UNICAMP e do IPEN, Babi e Espanha, Gadelha e Di, Valdir (xerox), Jackson Maia, Joel, Raquel (ex-FINPE), Adam Sargeant (pelas correções no Abstract e leitura parcial da tese), à galera do Metal: Alberto (Night Riders), projeto Zé: Pardal, Maurício, Blau e Claudião, Fábio e Carlão (Manthara), Fernando, Naja, Júnior sapão, Topera, Sérgio cabelo, Hevão, aos vagabundos do CEPÊ (Azeitona, Pedrinho, Vampeta & companhia, e os tios loucos de sábado),
- à Linus Torvalds, por ter inventado o Linux, e ao maior time do Brasil, o Timão,
- à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financeiro.

Resumo

No presente trabalho construímos o potencial nucleon-nucleon devido à troca de dois píons dentro do contexto relativístico da teoria de perturbação quiral, formulada por Becher e Leutwyler. No estudo do espalhamento píon-nucleon, eles desenvolveram um método que exhibe a regra de contagem de potências, mantendo a invariância relativística. Os autores também chamam a atenção para um problema presente na formulação de bárion pesado, de que sua série quiral não converge na região de baixa energia em torno de $t = 4\mu^2$, onde μ é a massa do píon. Nós mostramos que este problema é bastante relevante para o potencial nucleon-nucleon, principalmente pelo fato dessa região de energia determinar suas características assintóticas.

A dinâmica da troca de dois píons na interação nucleon-nucleon é determinada pelas sub-amplitudes píon-nucleon. Partindo da sub-amplitude de Becher e Leutwyler, obtemos diagramas classificados em três famílias, de acordo com sua topologia e constantes de acoplamento envolvidas. Na definição do potencial subtraímos, da amplitude relativística, a interação da troca de um píon, seguindo a prescrição de Blankenbecler e Sugar.

O nosso potencial até a ordem q^4 é expresso em termos de seis funções básicas, associadas a integrais de *loop*, calculadas relativisticamente. Ele mantém as propriedades assintóticas corretas, desde que as integrais básicas não sejam expandidas. Forçando tal expansão, com o objetivo de comparar com os resultados de Entem e Machleidt, observamos concordância na maioria dos termos. Algumas diferenças estão associadas à discrepância na relação de Goldberger-Treiman, indicadas por Δ_{GT} , e dois termos, a contribuições de dois *loops*. As demais, muito provavelmente estão relacionadas à interação da troca de um píon.

No espaço de configuração, comparamos os nossos resultados com a parte de médio alcance de duas versões do potencial de Argonne, AV14 e AV18. Observamos uma boa concordância apenas para o potencial central isoescalar, o canal mais importante para a fenomenologia. Para as demais componentes, temos discrepâncias inclusive entre as versões AV14 e AV18. Com base na classificação da dinâmica em três famílias e analisando suas contribuições para cada componente, apresentamos uma proposta de como evitar ambiguidades desse tipo na construção de potenciais fenomenológicos.

Abstract

This work is devoted to the construction of a two-pion exchange nucleon-nucleon potential in the framework of the relativistic chiral perturbation theory, formulated by Becher and Leutwyler. In their study of pion-nucleon scattering they developed a method to regain the power counting rules while keeping Lorentz invariance. These authors also drew attention to a problem present in the heavy baryon formulation, that its chiral series does not converge in the low-energy region around $t = 4\mu^2$, where μ is the pion mass. We have shown that this problem is rather relevant to nucleon-nucleon potential, mainly due to the fact that this range of energy determines its asymptotic properties.

The dynamics of the two-pion exchange nucleon-nucleon interaction is determined by pion-nucleon sub-amplitudes. Starting from Becher and Leutwyler's sub-amplitude, we obtain diagrams classified in three families, according to their topology and the coupling constants involved. In the definition of the potential we subtract, from the relativistic amplitude, the iteration of one-pion exchange, following the prescription of Blankenbecler and Sugar.

Our potential up to order q^4 is expressed in terms of six basic functions associated to relativistic loop integrals. It keeps the correct asymptotic properties, as long as we do not expand the basic integrals. Forcing such an expansion, in order to compare it with the results from Entem and Machleidt, we observe an agreement in the majority of terms. Some differences are associated to the Goldberger-Treiman discrepancy, indicated by Δ_{GT} , and two terms come from two loop calculations. The remaining ones are probably related to the prescription adopted for the iteration of one-pion exchange.

In configuration space we compare our results with the medium-range component of two versions of the Argonne potential, AV14 and AV18. We obtain agreement only for the central isoscalar potential, the most important to phenomenology. Regarding other channels, we observe discrepancies even between AV14 and AV18. Based on the classification of the dynamics in three families and analysing their contributions to each component, we propose a way to overcome such ambiguities in the construction of phenomenological potentials.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
1 Introdução	1
1.1 Motivação do trabalho	1
1.2 Um breve histórico	3
1.3 Características qualitativas	7
1.4 Estrutura geral	8
2 A amplitude πN	11
2.1 Cinemática	11
2.2 Características gerais	12
2.3 A abordagem quiral	15
2.4 O πN relativístico	22
3 O potencial nucleon-nucleon devido à troca de dois píons	31
3.1 Cinemática	31
3.2 A noção de potencial	33
3.3 Formulação geral	38
3.4 O potencial até ordem q^4	42
4 O potencial no espaço de momento	45
4.1 Dinâmica	45
4.2 Funções de perfil	46
4.3 Contagem de potências	48
4.4 Resultados completos	49
4.5 Resultados intermediários	53
4.6 Integrais básicas e suas expansões	58
4.7 O potencial relativístico até ordem q^4	59
4.8 Comparação com o potencial HB	64

5	O potencial no espaço de configuração	69
5.1	A aproximação local	69
5.2	A representação no espaço de configuração	71
5.3	Estudo das integrais de <i>loop</i>	74
5.3.1	As integrais em função da massa do nucleon	74
5.3.2	Relações entre integrais	77
5.3.3	A aproximação $E = m$	85
5.4	O setor nucleônico	88
5.5	Resultados para o potencial	96
6	Conclusões e perspectivas	107
A	Notação e convenções usadas neste trabalho	109
B	Integrais de um <i>loop</i>	117
B.1	Integrais no espaço de momento	122
B.2	Integrais no espaço de configuração	124
B.3	Alguns resultados explícitos no espaço de momento	127
B.4	Alguns resultados explícitos no espaço de configuração	128
B.5	Diagramas de dois <i>loops</i> no espaço de configuração	130
C	A amplitude NN	133
C.1	Setor nucleônico	134
C.2	Coeficientes HJS	135
D	Cálculo das funções de perfil	137
E	A iteração do OPEP	143
E.1	Integrais $I_A^{i\cdots}$	151
E.2	Integrais $I_B^{i\cdots}$ e $I_C^{i\cdots}$	154
E.3	Expansão até ordem q^4	157
F	Relações entre integrais de um <i>loop</i>	163
F.1	Derivando as relações	163
F.2	Formulário	168
F.3	Avaliando as aproximações	170
G	Redução dos espinores	175
H	Expansões das integrais cruzado e caixa	183

Lista de Figuras

2.1	A amplitude πN	11
2.2	A contribuição do pólo do nucleon (termo de Born) para a amplitude πN	13
2.3	Representação da auto-energia do nucleon. A linha cheia representa o propagador relativístico do nucleon, com a integral de <i>loop</i> dada por I , enquanto que as linhas duplas representam o propagador não-relativístico. As cruzes indicam inserções de $(k + r)^2$	19
2.4	Diagrama triângulo, que contribui para o fator de forma escalar do nucleon. As linhas sólida, tracejadas e ondulada representam, respectivamente, o nucleon, os píons e uma fonte externa escalar.	20
2.5	Comportamento da função $\gamma(t)$, tal como dada pela equação (2.51) (linha cheia), e as contribuições parciais: HB (tracejada), th (pontilhada) e a aproximação da equação (2.52) (ponto-tracejada).	22
2.6	Gráficos em nível de árvore.	25
2.7	Gráficos de um <i>loop</i>	26
2.8	Estrutura dinâmica da amplitude πN até $\mathcal{O}(q^3)$; as bolhas representam termos lidos diretamente das lagrangianas efetivas.	27
2.9	Conteúdo dinâmico da amplitude πN na nossa aproximação.	28
3.1	A cinemática da troca de dois píons na interação NN	32
3.2	Representação gráfica da equação de Bethe-Salpeter.	33
3.3	A equação de Bethe-Salpeter, em aproximação de escada. A segunda linha é obtida substituindo a primeira linha recursivamente, gerando diagramas com aspecto de escada.	34
3.4	Construção da amplitude NN devida à troca de dois píons.	39
4.1	Estrutura dinâmica do TPEP. Na primeira linha, temos os diagramas de um <i>loop</i> com graus de liberdade envolvendo apenas píons e nucleons (família I), na segunda, os diagramas de dois <i>loops</i> (família II) e na terceira, os diagramas de um <i>loop</i> envolvendo outros graus de liberdade, parametrizados nos coeficientes HJS (família III).	46
4.2	Representação diagramática das integrais de curto alcance, desconsideradas nas relações entre integrais de <i>loop</i>	54

5.1	(a)–(m) Razões das integrais do tipo triângulo, cruzado e caixa-iteração, para três valores da massa do nucleon, conforme indicações nos gráficos. (n) Razões das integrais do tipo bolha ($\bar{\Pi}_{cc}^{000}$ e $\bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{000}$), mais o termo dominante, na expansão de bárion pesado, da integral Π_{sc}^{000} (Π_a), que não dependem da massa do nucleon.	77
5.2	Razão das integrais do tipo caixa-iteração pela integral Π_ℓ , na aproximação usada neste trabalho ($z^2 = 0$) e na de Partovi e Lomon ($E = m$).	87
5.3	Razões das componentes do TPEP do setor nucleônico, nas aproximações do capítulo 4, divididas pela versão da seção 4.4 (resultados completos), para a massa do nucleon no seu valor físico, m .	89
5.4	Razões das componentes do TPEP do setor nucleônico, nas aproximações do capítulo 4, divididas pela versão da seção 4.4 (resultados completos). Foi utilizada como massa do nucleon um valor dez vezes maior que o seu valor experimental, $10m$.	91
5.5a	Componente central isoescalar.	97
5.5b	Componente central isovetorial.	97
5.5c	Componente spin-órbita isoescalar.	98
5.5d	Componente spin-órbita isovetorial.	98
5.5e	Componente tensor isoescalar.	99
5.5f	Componente tensor isovetorial.	99
5.5g	Componente spin-spin isoescalar.	100
5.5h	Componente spin-spin isovetorial.	100
5.6a	Contribuições do OPEP e TPEP ao potencial tensor isovetorial.	102
5.6b	Contribuições do OPEP e TPEP ao potencial spin-spin isovetorial.	102
5.7	Contribuição relativa de cada família de diagramas para o TPEP.	105
E.1	Fluxo de momentos para o cálculo do diagrama caixa e da iteração do OPEP.	143
F.1	Representação diagramática das integrais de curto alcance, desconsideradas nas relações entre integrais de <i>loop</i> .	170

Lista de Tabelas

1.1	As componentes do potencial NN	10
2.1	Valores experimentais para os coeficientes de baixa energia e contribuições dos termos de Weinberg-Tomozawa (WT) e de alcance intermediário (mr), em unidades de μ^{-n} ; os números experimentais foram extraídos da referência [68]. . . .	29
2.2	Coeficientes de baixa energia adimensionais, sem as contribuições dos termos (WT) e (mr).	30
5.1	Relação 01.	77
5.2	Relação 02.	78
5.3	Relação 03.	78
5.4	Relação 04.	79
5.5	Relação 05.	79
5.6	Relação 06.	80
5.7	Relação 07.	80
5.8	Relação 08.	81
5.9	Relação 09.	81
5.10	Relação 10.	82
5.11	Relação 11.	82
5.12	Relação 12.	83
5.13	Relação 13.	83
5.14	Relação 14.	84
5.15	Relação 15.	84
5.16	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente central isoescalar.	92
5.17	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-órbita isoescalar.	92
5.18	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente tensorial isoescalar.	92
5.19	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-spin isoescalar.	93
5.20	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente central isovetor.	93
5.21	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-órbita isovetor.	93

5.22	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente tensorial isovetor.	94
5.23	Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-spin isovetor.	94

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação do trabalho

A interação entre nucleons, sem dúvida alguma, figura entre os assuntos mais estudados em Física, desde a descoberta do núcleo atômico no início do século. Seu entendimento evoluiu consideravelmente ao longo de pouco mais de meio século de pesquisa mas, apesar disso, ainda não existe uma teoria capaz de descrever os fenômenos nucleares com a mesma simplicidade, elegância e precisão com que a eletrodinâmica quântica, QED, descreve as interações eletromagnéticas.

Atualmente, a teoria considerada fundamental para as interações fortes é a cromodinâmica quântica (QCD). No regime de altas energias, o comportamento da constante de acoplamento quark-glúon permite o tratamento perturbativo (liberdade assintótica), com previsões que estão de excelente acordo com o experimento [1]. Por outro lado, a baixas energias há um aumento da constante de acoplamento, fazendo com que o tratamento perturbativo neste parâmetro não seja mais válido. Devido à complexa estrutura matemática da teoria, ainda não existem resultados analíticos, partindo diretamente da QCD, que não recorram a algum tipo de aproximação ou modelo¹.

Na falta de resultados da QCD nesse regime, procura-se extrair informações com base em suas simetrias. No setor envolvendo apenas os quarks leves, u e d , a teoria exhibe simetria quiral aproximada, relacionada ao fato das massas desses quarks serem pequenas (da ordem de $4 \sim 7 MeV$) com relação à escala de energia envolvendo hádrons (dezenas, às vezes centenas de MeV). Essa simetria foi introduzida no início dos anos 60, fruto das hipóteses de corrente vetorial conservada (CVC) e de corrente axial parcialmente conservada (PCAC). Estudos posteriores revelaram a importância dessa simetria na dinâmica das interações fortes a baixas energias [2, 3, 4, 5, 6]. O trabalho seminal de Weinberg de 79 [6] deu origem à teoria de perturbação quiral (ChPT), sistematicamente desenvolvida por Gasser e Leutwyler [7], onde a dinâmica da QCD a baixas energias é mapeada em quantidades envolvendo os graus de liberdade relevantes (os campos dos hádrons) por meio de lagrangianas efetivas. Devido à generalidade na construção destas, à maneira organizada e sistemática com que as correções são levadas em conta e, principalmente, ao sucesso na descrição dos dados experimentais [8],

¹Uma área promissora para se obter informações numéricas diretamente da QCD é o cálculo na rede.

costuma-se considerar a ChPT como a melhor representação da QCD a baixas energias, no setor de quarks leves.

Nos processos envolvendo apenas mésons, a teoria de perturbação quiral fornece resultados únicos e sem ambiguidades. Porém, no estudo da interação pión-núcleon (πN), Gasser, Sainio e Švarc [9] perceberam que a presença de bárions torna a estrutura da teoria muito mais complexa, fato relacionado à introdução de uma nova escala de energia no problema, a massa do bárion. Existem duas abordagens para solucionar essas dificuldades. A alternativa proposta originalmente por Jenkins e Manohar [10] e amplamente usada na literatura [11] consiste numa expansão não-relativística da teoria, onde o bárion é considerado extremamente pesado (HB-ChPT). Nela, as correções relativísticas são expandidas em potências do inverso da massa do bárion, consideradas como termos de ordem superior na expansão quiral. Recentemente, Becher e Leutwyler [12, 13] propuseram um novo método que elimina as dificuldades encontradas por Gasser, Sainio e Švarc, com a vantagem de manter o caráter relativístico da teoria. Portanto, as correções relativísticas são automaticamente levadas em conta. Esses autores ainda apontam para um problema intrínseco do formalismo HBChPT, de que a série quiral apresenta problemas de convergência na região de baixa energia em torno de $t = 4\mu^2$.

Um dos objetivos desse trabalho é o de ampliar a discussão das abordagens relativística e não-relativística para o potencial núcleon-núcleon. O potencial construído surge como uma extensão de trabalhos anteriores [14, 15, 16], mas com a fundamentação teórica regida pelos trabalhos de Becher e Leutwyler. A principal motivação está na falha do formalismo HBChPT em descrever a região próxima de $t = 4\mu^2$, que acreditamos ser determinante no comportamento assintótico do potencial NN [17, 18]. Este é, no nosso conhecimento, o primeiro trabalho a considerar o potencial NN usando a teoria de perturbação quiral relativística na abordagem de Becher e Leutwyler, enquanto que a maioria dos potenciais NN existentes na literatura [19, 20, 21, 22, 23, 24] ainda se baseiam no formalismo de bárion pesado.

Este trabalho está estruturado em seis capítulos e oito apêndices. As outras seções deste capítulo foram baseadas nas referências [14, 25, 26], onde apresentamos um pequeno histórico da força nuclear, as principais características do potencial NN e sua estrutura geral no espaço de configuração.

A componente de médio alcance do potencial é fortemente determinada pela forma com que tratamos as sub-amplitudes πN que participam da sua construção. Por este motivo, apresentamos no capítulo 2 suas características gerais, assim como o tratamento recente do ponto de vista da teoria de perturbação quiral relativística [12, 13, 27, 28]. Abordamos, também, a questão relativa ao problema da convergência do formalismo HBChPT, que é automaticamente transferida ao potencial NN . Mostramos que a região de energia onde a série HB apresenta problemas determina o comportamento assintótico do potencial no espaço de configuração [17]. Por fim, discutimos como transformar a amplitude πN dada por Becher e Leutwyler [13] a uma forma mais apropriada para a construção do potencial NN .

No capítulo 3 estabelecemos uma relação entre o potencial, a ser usado em uma equação não-relativística, como a de Schrödinger, e a amplitude relativística obtida por meio de teoria de campos. Essa relação se dá através de uma redução tri-dimensional e covariante da equação de Bethe-Salpeter, proposta por Blankenbecler e Sugar [29]. Nesta etapa surge o problema da iteração do potencial devido à troca de um pión (OPEP), que deve ser subtraída da amplitude.

O capítulo 4 contém as etapas da construção do nosso potencial, até a ordem q^4 . Inicialmente

é apresentada a dinâmica, obtida esquematicamente a partir do produto de duas sub-amplitudes πN . Em seguida, exibimos as expressões das funções de perfil que dão origem ao potencial, sem efetuar qualquer aproximação. Uma etapa posterior faz uso de várias relações entre integrais de *loop*, obtidas no apêndice F, e que tem como vantagem tornar explícita a escala quiral dessas funções. O nosso resultado final é obtido ao considerarmos termos até $\mathcal{O}(q^4)$. As expressões ficam muito mais simples, escritas em termos de seis funções básicas. No final do capítulo realizamos uma expansão quiral dentro do espírito do formalismo de bárion pesado, mesmo sabendo que tal expansão não é válida para distâncias suficientemente grandes, apenas para comparar os nossos resultados com os de Entem e Machleidt [23].

O capítulo 5 é dedicado ao potencial NN no espaço de configuração. Inicialmente, comentamos a dificuldade para obtê-lo em razão da existência de termos não-locais, e como isso pode ser contornado através da aproximação local. Para a melhor compreensão de alguns aspectos do nosso potencial, como por exemplo, o ordenamento quiral e a validade das aproximações, fazemos um estudo das integrais de *loop* usadas neste trabalho na seção 5.3. A seção 5.4 é dedicada à análise o setor nucleônico. Apesar de, isoladamente, não ser capaz de reproduzir os dados experimentais [30], este setor tem uma grande importância no entendimento de como a simetria quiral atua na interação NN . Para testar a consistência do nosso potencial reproduzimos, através de aproximações bem controladas, os números da versão anterior do potencial, de Rocha e Robilotta [14, 15]. Por fim temos, na seção 5.5, os resultados numéricos do nosso potencial no espaço de configuração, que inclui o potencial devido à troca de dois píons (TPEP), principal resultado deste trabalho, assim como o potencial devido à troca de um pión (OPEP). Para efeito de comparação graficamos também os potenciais de Argonne [31, 32], caracterizados por serem locais e reproduzirem muito bem os dados experimentais.

1.2 Um breve histórico

O advento da física nuclear teve como marco a célebre experiência de Rutherford [33] em 1911, onde o espalhamento de algumas partículas α a grandes ângulos por filmes muito finos de ouro teria, como única explicação, a existência de um núcleo de carga positiva e centenas de vezes menor do que o átomo. No início, acreditava-se ser o núcleo formado por A prótons e $A - Z$ elétrons (explicando, assim, os números de massa A e de carga Z), e sua coesão, mantida por forças eletromagnéticas. Porém, tal visão não se sustentou por muito tempo, pois para confinar os elétrons em dimensões típicas dos núcleos atômicos seria necessária uma energia bem maior que o potencial eletrostático era capaz de fornecer. Além disso, havia o problema da estatística obedecida pelo núcleo do ^{14}N (Bose-Einstein) que, segundo esse modelo, obedeceria a estatística de Fermi-Dirac.

Muitos cientistas da época, entre eles o próprio Rutherford, propuseram a existência de uma partícula neutra, com a massa próxima à do próton e que constituiria, junto com este último, os núcleos atômicos. Para evitar a repulsão coulombiana entre os prótons era preciso introduzir um novo tipo de força, a chamada força nuclear ou força forte. Após a descoberta do nêutron por Chadwick em 1932 [34], o estudo desta força rapidamente tornou-se um importante segmento da física.

Wigner, em 1933 [35], fez um estudo sobre as energias de ligação dos núcleos e concluiu que

estas podem ser obtidas considerando a existência de uma força próton-nêutron do tipo poço de potencial. A largura e profundidade desse poço usadas no cálculo da energia de ligação do núcleo de Hélio indicavam duas essenciais características dessa nova força, bem mais intensa que a força eletromagnética e de curto alcance. Heisenberg [36] e Majorana [37], em seus estudos sobre a estabilidade dos núcleos, propuseram que a força nuclear baseava-se em “forças de troca”, semelhante à ligação covalente existente no H_2^+ . Heisenberg ainda sugeriu que a força próton-nêutron estaria fortemente relacionada às forças próton-próton e nêutron-nêutron, o que mais tarde levaria ao conceito de isospin e sua conservação nas interações fortes [38].

O sucesso da teoria de Fermi para o decaimento beta [39] levou alguns cientistas a crerem que a força nêutron-próton seria mediada por um par elétron-neutrino. Entretanto, esta interação não era suficiente para reproduzir as energias de ligação dos núcleos. Um passo mais ousado foi dado por Yukawa, que postulou a existência de uma nova partícula como o *quantum* da força forte em seu célebre artigo de 1935 [40], marcando profundamente a história da física nuclear. Tal partícula teria cerca de 200 vezes a massa do elétron, reproduzindo não só a intensidade, como também o curto alcance desta força. Yukawa mostrou ainda que tal partícula não tinha influência sobre o decaimento beta, e que este último tinha uma intensidade bem menor do que a força forte.

Em 1937 Anderson e Neddermeyer [41] acharam, a partir dos raios cósmicos, sinais de uma partícula muito parecida com a predita por Yukawa. Durante uma década acreditou-se ser essa a mediadora da força forte (o que rendeu muito prestígio à teoria de Yukawa) mas um grupo de pesquisadores italianos obteve resultados discrepantes ao estudar o comportamento de tais partículas, o mais espantoso, sendo que elas interagiam fracamente com a matéria, exatamente o oposto do esperado [42].

A descoberta do pión veio a se confirmar somente em 1947 [43] através de um grupo liderado por C. F. Powell, grupo este que incluía os pesquisadores Beppo Occhialini e o brasileiro César Lattes. Nos traços deixados nas câmaras de emulsão provenientes dos raios cósmicos, Lattes e Occhialini puderam identificar dois tipos de mésons: um primário, com uma massa 30% a 40% mais pesada que a observada por Anderson e Neddermeyer, e um secundário (cujo traço surgia ao término do primeiro), com as mesmas propriedades observadas pelo grupo italiano. A primeira partícula era a prevista por Yukawa, batizada de *méson pi*, e testes posteriores confirmaram que ela interagia fortemente com os núcleos. A segunda foi batizada de *méson mu* e que hoje sabemos tratar-se de um lépton, o múon. Vale a pena destacar que a importância do trabalho de Lattes não se resume somente à determinação experimental da partícula de Yukawa: o fato do *méson mu* não estar nas previsões da época iniciou uma nova área de pesquisa denominada física de partículas elementares e, em questão de meses, novas partículas foram sendo detectadas a partir dos raios cósmicos.

A comprovação da existência do pión desencadeou uma série de estudos sistemáticos, motivados principalmente pelo sucesso da eletrodinâmica quântica (QED). Neste período, merece um especial destaque o trabalho de Taketani, Nakamura e Sasaki [44], de 1951. Este trabalho propôs a divisão do alcance da interação NN em três regiões distintas: a “clássica” ou de longo alcance ($r \geq 2fm$, onde r é a distância entre os centros dos dois nucleons), a “dinâmica” ou de médio alcance ($1fm \leq r \leq 2fm$) e a “fenomenológica” ou de curto alcance ($r \leq 1fm$). Apesar de publicado há mais de cinquenta anos, as idéias contidas nesse artigo mostram-se bastante úteis até os dias atuais. Essa divisão permite abordar o problema de maneira gradual, ao invés

de atacá-lo de uma só vez, pois em cada região a dinâmica se manifesta de forma distinta. A região de longo alcance é descrita predominantemente através da troca de um pión. Já na região de médio alcance a troca de dois píons desempenha um papel fundamental, apesar de mésons pesados (como o ρ e o ω) também serem relevantes. Por fim, na região de curto alcance ocorrem trocas de muitos píons, mésons pesados de vários tipos e interações mais complexas, envolvendo inclusive quarks e glúons.

Evidências da troca de um pión no potencial NN surgiram no final dos anos 50, no estudo de algumas propriedades do dêuteron [45] e no espalhamento NN [46], firmando-se definitivamente como componente necessária para qualquer modelo realístico em meados dos anos 60, com os trabalhos de Hamada-Johnston [47], Yale [48] e Reid [49]. Por outro lado, os primeiros trabalhos analisando a contribuição de dois píons encontraram sérias dificuldades. As várias abordagens surgidas nos anos 50, dentre elas, a de Taketani, Machida e Onuma [50] e a de Brueckner e Watson [51], divergiam substancialmente entre si não apenas qualitativamente, como também quantitativamente.

O início da década de 60 foi marcado por avanços na área experimental, com o aumento da quantidade, qualidade e variedade de resultados. Pelo lado teórico, nenhum cálculo da época envolvendo a troca de dois ou mais píons era capaz de reproduzir uma componente spin-órbita suficientemente intensa [52]. A importância dessa componente foi constatada nos trabalhos de Gammel e Thaler. Uma primeira versão era composta apenas pelos potenciais central, spin-spin e tensor, e não era capaz de ajustar os dados do espalhamento NN [53]. O segundo trabalho incluía o termo spin-órbita e obteve muito sucesso na época, principalmente ao reproduzir os dados de polarização e os desdobramentos dos diferentes tripletos de onda P [54]. É importante destacar que este foi o primeiro potencial NN quantitativo na história da física nuclear. A intensidade do termo spin-órbita sugeria a existência de mésons vetoriais na interação NN [55]. A descoberta de mésons pesados, especialmente os bósons vetoriais, no começo dos anos 60 veio corroborar tal conjectura, iniciando uma nova etapa na história da interação NN : os modelos baseados na troca de um bóson (OBE, do inglês *one boson exchange*) [56]. Essa nova geração de modelos trabalhava com a hipótese de que a troca de dois e três píons não-correlacionados (ou seja, que não interagem entre si ao longo do processo de emissão e absorção) seria desprezível, enquanto que a troca de dois (ou três) píons correlacionados poderia ser substituída pela troca de um bóson. O grande mérito do OBEP foi o de fornecer uma representação simplificada da interação NN , resumida a algumas funções com poucos parâmetros. Esses parâmetros podem tanto ser extraídos de experimentos, tal como feito por de Tournelle, Rouben e Sprung [57] e pelo grupo de Nijmegen [58], como vir de uma abordagem mais detalhada, a exemplo dos primeiros trabalhos do grupo de Bonn [59] e de Tjon e colaboradores [60]. Apesar do sucesso quantitativo na reprodução dos dados, do ponto de vista conceitual tais modelos estavam longe de ser aceitos como teorias definitivas, pois desprezavam a troca simultânea de partículas não correlacionadas.

A partir dos anos 70 renovou-se o interesse em descrever mais precisamente a troca de dois píons. Dessa vez não seria cometido o mesmo erro dos anos 50 e 60: a revolução do OBEP ensinara que as correlações das partículas “em vô” deveriam ser consideradas. Ao longo dessa busca, dois tipos de abordagem foram se definindo: o uso das relações de dispersão e a abordagem no contexto da teoria de campos.

Os potenciais que utilizam as relações de dispersão tratam a troca de dois píons não-correlacionados como uma composição de duas amplitudes de espalhamento πN , com os píons

fora da camada de massa (píons virtuais). Tais amplitudes são construídas aplicando as relações de dispersão à amplitude πN para píons reais, que é obtida a partir dos dados experimentais. A troca de dois píons correlacionados é tratada de forma semelhante, com a diferença de que as interações entre os dois píons que se propagam são descritas por meio do espalhamento $\pi\pi$ para píons virtuais. Os demais termos desses potenciais correspondem à troca de um méson ω (ressonância de três píons), ao OPEP e a uma parte de curto alcance, ajustada fenomenologicamente. A principal característica desse método é incorporar todos os processos possíveis que envolvem a troca de dois píons, calculados indiretamente a partir dos dados experimentais. Dentre os potenciais que adotaram esta formulação estão o de Stony Brook [61] e o de Paris [62].

A abordagem da interação NN no contexto da teoria de campos consiste em escrever uma lagrangiana envolvendo os graus de liberdade relevantes e calcular um certo número de diagramas de Feynman. Os primeiros modelos envolviam poucos graus de liberdade, como nucleons e píons com acoplamento pseudoescalar [63] ou pseudovetorial [64]. A inclusão da troca de ressonâncias e de bárions excitados deu origem ao potencial de Bonn [26], cujo modelo para a região de médio alcance reproduz muito bem os dados experimentais.

No início desta década, alguns físicos procuraram compreender melhor a dinâmica da interação NN baseando-se na simetria quiral, hoje em dia comprovadamente um instrumento eficaz no cálculo de processos envolvendo interações fortes [65, 66, 67, 15]. Esta abordagem procura descrever a amplitude πN por meio de diagramas que respeitem a simetria quiral, o que fornece um modelo mais consistente para a troca de dois píons (TPEP). Em sua versão mais simples, o potencial quiral é baseado num sistema contendo apenas nucleons e píons. Entretanto, tal modelo não reproduz os dados experimentais da amplitude πN [68] e propostas para sanar este problema têm tido relativo sucesso, como a inclusão de outros graus de liberdade (ressonância Δ e o termo σ) [69] compatíveis com informações empíricas [70, 16, 71, 19]. Nos últimos anos temos acompanhado o debate sobre as formulações relativística e não-relativística da amplitude πN [12, 13, 72] que, por ser um ingrediente essencial, acaba sendo objeto de discussão também para o potencial NN devido à troca de dois píons [17, 18]. Vamos discutir essas questões com mais detalhes nos próximos capítulos.

Este pequeno relato teve como objetivo destacar as diferenças entre os vários modelos propostos para a interação NN ao longo de sua história. Os modelos construídos na década de 60, como os de Hamada-Johnston [47], Yale [48] e Reid [49], descrevem teoricamente apenas a região de longo alcance por meio do OPEP, ajustando fenomenologicamente as regiões de médio e curto alcances. A partir de 1970 surgiram duas linhas de pesquisa. Uma delas reúne todas as contribuições da troca de dois píons de uma maneira efetiva, através de relações de dispersão (como os potenciais de Stony-Brook [61] e Paris [62]), enquanto que a outra considera apenas os processos mais relevantes no contexto da teoria de campos (como o potencial de Bonn [26]). Hoje em dia os potenciais teóricos são construídos com base na simetria quiral [69, 16, 19, 73, 74, 75, 22, 23, 17] capazes de descrever, de maneira mais consistente, os processos relevantes envolvendo a troca de dois píons. Convém ressaltar que, paralelamente a esses modelos, outros potenciais de natureza prática foram construídos, tais como o SSC [76] (super soft core) e o potencial de Argonne [31, 32]. Esses potenciais possuem expressões relativamente simples e bem comportadas visando apenas facilitar aplicações, sem qualquer compromisso com um modelo em particular.

1.3 Características qualitativas

Uma primeira característica da interação NN é que ela é predominantemente atrativa, o que permite explicar a estabilidade dos núcleos atômicos, contrabalanceando a repulsão coulombiana entre os prótons.

Ao contrário das forças eletromagnéticas e gravitacionais, a força entre nucleons é de curto alcance. Essa afirmação decorre de uma propriedade dos núcleos, bastante conhecida em física nuclear como saturação [77] — a energia de ligação de um núcleo é aproximadamente proporcional ao seu número de massa A , relacionada ao número de nucleons existentes no núcleo. Se a interação fosse de longo alcance, a energia de ligação seria proporcional a $A(A - 1)$, ou seja, aumentaria com A^2 para núcleos pesados. Tal linearidade na energia de ligação é um forte indício de que cada nucleon interage com um número limitado de nucleons, e não com todos os nucleons existentes no núcleo. Outra evidência desse comportamento vem da observação experimental de que a densidade nuclear é aproximadamente constante em núcleos com muitos nucleons.

A constância da densidade nuclear para núcleos mais pesados aponta para outra propriedade da força nuclear, a existência de uma parte repulsiva a curtas distâncias: ao adicionarmos nucleons, o núcleo cresce de tal forma que a densidade em seu interior mantém-se aproximadamente constante (é como se cada nucleon continuasse ocupando o mesmo espaço dentro do núcleo). Uma evidência mais direta dessa propriedade é obtida através do espalhamento NN , analisando as defasagens das ondas 1S_0 (singlete) e 3S_1 (triplete): a baixas energias essas defasagens são positivas, mas acima de aproximadamente 300MeV elas mudam de sinal. Como essas ondas não possuem barreira centrífuga, a mudança de sinal na defasagem se associa à mudança de sinal no potencial. Muitos potenciais fenomenológicos supõem a existência de um caroço repulsivo agindo a uma distância de aproximadamente 0.5fm , dando-nos uma idéia das dimensões do nucleon. Com isso, podemos associar qualitativamente a imagem de um nucleon a um caroço mais ou menos duro, envolto por uma região de campo atrativo e de curto alcance.

Outra importante característica é que a forma dos potenciais mais realistas depende fortemente dos canais de spin-isospin, apesar de qualitativamente semelhantes. Temos como exemplo dessa dependência o dêuteron: trata-se de um estado ligado, constituído de um próton e um nêutron em estado singlete de isospin, com spins alinhados e componentes de onda S ($l = 0$) e D ($l = 2$), basicamente. Se a interação nucleon-nucleon não dependesse do canal de spin-isospin, deveríamos encontrar na natureza outros sistemas ligados de dois nucleons, tais como o nêutron-nêutron e próton-nêutron, em estados singlete de spin. Voltaremos a falar desta dependência na seção seguinte, ao apresentarmos a estrutura do potencial NN .

Conforme o que apresentamos na seção anterior, o potencial necessita da existência de uma componente spin-órbita, suficientemente intensa para reproduzir os dados de polarização e os desdobramentos dos diferentes tripletos de onda P nas defasagens. Essa componente ainda desempenhou um papel fundamental na construção do modelo de camadas nuclear, por Mayer e Jensen [78].

Existe também uma componente proporcional a um tensor de ordem 2 no potencial, responsável por uma variedade de efeitos em física nuclear. A principal evidência desta componente é o fato do momento de quadrupolo elétrico do dêuteron ser não nulo, indicando a existência de outras ondas além da onda S . O momento de quadrupolo do dêuteron é dado por

$$Q = \frac{1}{10} \int_0^\infty [\sqrt{2}u(r)w(r) - \sqrt{5}w^2(r)]r^2 dr, \quad (1.1)$$

onde $u(r)$ e $w(r)$ são as funções de onda correspondentes a $l = 0$ e $l = 2$, respectivamente. Ajustando os cálculos de Q com o valor medido experimentalmente, chegamos a uma contribuição de cerca de 5% de onda D na função de onda total. Tal fato pode nos levar à conclusão de que a parte tensorial é fraca com relação à parte central; entretanto, sem ela o potencial central teria que ser três vezes mais forte para poder ligar o dêuteron. Esse tipo de comportamento é também observado em sistemas mais complexos, como o 3H e o 3He .

1.4 Estrutura geral

A estrutura do potencial NN é bastante rica, envolvendo vinte termos diferentes (quatro estados de spin-isospin) $\times$ (cinco componentes). Sua forma geral provém das simetrias das interações fortes, tais como invariância por transformações de paridade e conservação do momento angular total.

Os nucleons, sendo partículas de spin e isospin iguais a $1/2$ resultam, para um sistema de dois nucleons, em estados singlete e tripleto nos espaços de spin e isospin. Usando a base dos auto-estados da terceira componente de spin (analogamente para isospin) temos

$$\begin{aligned} \text{singlete: } |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \\ \text{tripleto: } \begin{cases} |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Podemos notar que os estados singlete e tripleto são, respectivamente, ímpar e par pela troca das duas partículas.

No espaço de spin-isospin, temos os seguintes estados:

$$\begin{aligned} \text{singlete-singlete : } \Gamma^{00} &= |0, 0\rangle_\sigma |0, 0\rangle_\tau, \\ \text{singlete-tripleto : } \Gamma^{01} &= |0, 0\rangle_\sigma |1, t\rangle_\tau, \\ \text{tripleto-singlete : } \Gamma^{10} &= |1, s\rangle_\sigma |0, 0\rangle_\tau, \\ \text{tripleto-tripleto : } \Gamma^{11} &= |1, s\rangle_\sigma |1, t\rangle_\tau. \end{aligned} \quad (1.3)$$

É conveniente introduzir os operadores de projeção, dados por

$$\begin{aligned}
P_\sigma^0 &= \frac{1}{4} \left[1 - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \right], \\
P_\sigma^1 &= \frac{1}{4} \left[3 + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \right],
\end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ são as matrizes de Pauli de spin dos nucleons 1 e 2, respectivamente. Os operadores P_τ^0 e P_τ^1 são definidos de forma análoga no espaço de isospin. Com o auxílio das seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
P_\sigma^\alpha P_\tau^\beta \Gamma^{\mu\nu} &= \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \Gamma^{\alpha\beta}, \\
[P_{\sigma,\tau}^{0,1}]^2 &= P_{\sigma,\tau}^{0,1}, \\
P_{\sigma,\tau}^0 + P_{\sigma,\tau}^1 &= 1, \\
P_{\sigma,\tau}^0 P_{\sigma,\tau}^1 &= P_{\sigma,\tau}^1 P_{\sigma,\tau}^0 = 0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

podemos tornar mais evidente a dependência do potencial NN com os canais de spin-isospin:

$$V = V^{00} P_\sigma^0 P_\tau^0 + V^{01} P_\sigma^0 P_\tau^1 + V^{10} P_\sigma^1 P_\tau^0 + V^{11} P_\sigma^1 P_\tau^1 = \sum_{\alpha,\beta} V^{\alpha\beta} P_\sigma^\alpha P_\tau^\beta, \tag{1.6}$$

onde $V^{\alpha\beta}$ corresponde ao potencial com spin total α e isospin total β .

Para completar a descrição da estrutura do potencial NN , devemos analisar sua dependência espacial, e é neste ponto que as simetrias desempenham papéis fundamentais. Para que um operador comute com $\mathbf{J}^2$ e J_z é preciso que ele seja um escalar. Tal função pode ser construída a partir da coordenada relativa $\mathbf{r}$, do operador momento angular orbital $\mathbf{L}$ e dos operadores de spin $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$. Poderíamos considerar ainda o operador momento, $-i\nabla$; entretanto, derivadas levam a potenciais não-locais, dependentes da energia, e por isso não serão consideradas neste trabalho².

A paridade proíbe a presença de alguns escalares, tais como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}$ ou $\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)})$, e as demais combinações podem ser colocadas na forma dos seguintes operadores:

$$\Omega_C = \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \text{ (potencial central)}, \tag{1.7}$$

$$\Omega_{LS} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \text{ (potencial spin-órbita)}, \tag{1.8}$$

$$\Omega_T = 3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = S_{12}(\hat{\mathbf{r}}) \text{ (potencial tensor)}, \tag{1.9}$$

²No capítulo 5 apresentamos uma discussão sobre a origem dos termos não-locais.

Tabela 1.1: As componentes do potencial NN .

$SPIN$	$ISOSPIN$	$CENTRAL$	$SPIN-ÓRBITA$	$TENSOR$	$\mathbf{L}^2$	$\mathbf{Q}$
0	0	V_C^{00}	V_{LS}^{00}	$zero$	$V_{L^2}^{00}$	V_Q^{00}
1	0	V_C^{10}	V_{LS}^{10}	V_T^{10}	$V_{L^2}^{10}$	V_Q^{10}
0	1	V_C^{01}	V_{LS}^{01}	$zero$	$V_{L^2}^{01}$	V_Q^{01}
1	1	V_C^{11}	V_{LS}^{11}	V_T^{11}	$V_{L^2}^{11}$	V_Q^{11}

$$\Omega_{L^2} = \mathbf{L}^2, \quad (1.10)$$

$$\Omega_Q = 3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{L})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{L}) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \mathbf{L}^2 = \mathbf{Q}, \quad (1.11)$$

onde σ_0 é a matriz identidade 2x2.

Cada um dos potenciais $V^{\alpha\beta}$ associados aos canais de spin-isospin pode ser decomposto nesta “base” de operadores:

$$\begin{aligned} V^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = & V_C^{\alpha\beta}(r) \Omega_C + V_{LS}^{\alpha\beta}(r) \Omega_{LS} + V_T^{\alpha\beta}(r) \Omega_T \\ & + V_{L^2}^{\alpha\beta}(r) \Omega_{L^2} + V_Q^{\alpha\beta}(r) \Omega_Q. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Esta decomposição permite-nos expressar os coeficientes dos vários operadores como funções que dependem apenas do *módulo* da distância relativa entre os dois nucleons. Os dois últimos termos do potencial, proporcionais a $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{Q}$, são bem menos importantes que os demais podendo, em muitos casos, ser desprezados. Temos um total de vinte funções radiais representando a interação NN , agrupados esquematicamente na tabela 1.1.

Capítulo 2

A amplitude πN

A construção da troca de dois píons na interação NN tem como ingrediente básico a amplitude πN e sua descrição dinâmica está fortemente vinculada à forma com que tratamos essas sub-amplitudes. Devido à importância da amplitude πN , neste capítulo abordamos seus aspectos gerais, os estudos recentes do ponto de vista da Teoria de Perturbação Quiral (ChPT) e o tratamento que demos a ela, objetivando o seu uso na interação NN .

2.1 Cinemática

A figura 2.1 descreve a cinemática do processo $\pi^a(k)N(p) \rightarrow \pi^b(k')N(p')$, onde um pión com isospin a e momento k é espalhado por um nucleon com momento p , resultando em um pión com isospin b e momento k' , e um nucleon com momento p' .

Figura 2.1: A amplitude πN .

A conservação do momento total faz com que existam apenas três variáveis independentes. As mais usadas são as variáveis de Mandelstam, dadas por combinações dos momentos externos¹:

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2, \quad (2.1)$$

$$t = (k - k')^2 = (p' - p)^2, \quad (2.2)$$

$$u = (p - k')^2 = (p' - k)^2. \quad (2.3)$$

¹Nos outros capítulos, estas variáveis são acompanhadas de um sub-índice, indicando a qual sub-amplitude πN ela se refere.

A partir das definições acima é fácil mostrar que estas variáveis satisfazem a condição

$$s + t + u = p^2 + p'^2 + k^2 + k'^2. \quad (2.4)$$

Logo, se tanto os nucleons quanto os píons estiverem na camada de massa, a amplitude πN é completamente descrita por apenas duas das três variáveis de Mandelstam, relacionadas através do vínculo

$$s + t + u = 2m^2 + 2\mu^2, \quad (2.5)$$

onde m e μ são, respectivamente, as massas do nucleon e do pión.

Outras duas variáveis bastante usadas são

$$\nu = \frac{s - u}{4m} \quad \text{e} \quad \nu_B = \frac{t - k^2 - k'^2}{4m}. \quad (2.6)$$

2.2 Características gerais

A amplitude $T_{\pi N}$ para o processo da figura 2.1 tem a estrutura de isospin dada por

$$T_{\pi N}^{ab} = \delta_{ab} T^+ + i\epsilon_{bac}\tau_c T^-. \quad (2.7)$$

Para nucleons na camada de massa, as amplitudes $T^\pm$ podem ser escritas em duas formas alternativas e equivalentes:

$$T^\pm = \bar{u}(\mathbf{p}') \left[A^\pm + \frac{k + k'}{2} B^\pm \right] u(\mathbf{p}), \quad (2.8)$$

ou

$$T^\pm = \bar{u}(\mathbf{p}') \left[D^\pm - \frac{1}{4m} [k', k] B^\pm \right] u(\mathbf{p}) \quad (2.9)$$

$$= \bar{u}(\mathbf{p}') \left[D^\pm - \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu \frac{(k + k')^\nu}{2} B^\pm \right] u(\mathbf{p}), \quad (2.10)$$

onde as amplitudes $A^\pm$, $D^\pm$ e $B^\pm$ são funções invariantes de Lorentz, que dependem apenas das variáveis de Mandelstam s , t e u . A equivalência das duas formas fornece a relação $D^\pm = A^\pm + \nu B^\pm$. Apesar de muito usada na literatura, a primeira representação não deixa evidente a hierarquia quiral devido ao cancelamento do termo dominante entre as amplitudes $A^\pm$ e $B^\pm$. A segunda representação tem a vantagem de deixar explícita tal hierarquia, e é a que usamos neste trabalho.

A energias baixas e intermediárias, a amplitude πN é dada pela contribuição do pólo do nucleon, também conhecida como termo de Born, sobreposta por uma função suave de fundo, caracterizada por respeitar certas propriedades de analiticidade. Devido às diferentes estruturas matemáticas, é conveniente separar essas duas contribuições:

Figura 2.2: A contribuição do pólo do nucleon (termo de Born) para a amplitude πN .

$$T^\pm = T_{Born}^\pm + T_R^\pm. \quad (2.11)$$

A existência do pólo do nucleon é resultado de um estudo mais geral sobre as propriedades analíticas da amplitude de espalhamento [79] e sua contribuição à amplitude πN é obtida a partir do cálculo dos diagramas da figura 2.2, com uma lagrangiana capaz de descrever o acoplamento píon-nucleon. Nas décadas de 60 e 70 muito se discutiu sobre a natureza deste acoplamento, se seria do tipo pseudoescalar (ps) ou pseudovetorial (pv). O primeiro possui a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{ps} = -g \bar{\psi} i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5 \psi, \quad (2.12)$$

onde $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ são as matrizes de Pauli para isospin, g é a constante de acoplamento píon-nucleon, e ψ e $\boldsymbol{\pi}$ são respectivamente os campos do nucleon e do píon.

As regras de Feynman para o acoplamento ps fornecem, para a contribuição do pólo do nucleon,

$$i T_{ps}^{ab} = \bar{u}(\mathbf{p}') [g \tau_b \gamma_5] \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} [g \tau_a \gamma_5] u(\mathbf{p}) + \bar{u}(\mathbf{p}') [g \tau_a \gamma_5] \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} [g \tau_b \gamma_5] u(\mathbf{p}). \quad (2.13)$$

Usando a propriedade de anti-comutação da matriz γ_5 , $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$, a equação de movimento para os espiniores, $\not{p} u(\mathbf{p}) = m u(\mathbf{p})$ e $\bar{u}(\mathbf{p}') \not{p}' = \bar{u}(\mathbf{p}') m$, e as propriedades das matrizes de Pauli, $\tau_a \tau_b = \delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \tau_c$, obtemos

$$A_{ps}^\pm = 0, \quad (2.14)$$

$$B_{ps}^+ = -g^2 \left[\frac{1}{s - m^2} - \frac{1}{u - m^2} \right], \quad B_{ps}^- = -g^2 \left[\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right]. \quad (2.15)$$

Quanto ao acoplamento pseudovetorial, este assume a forma

$$\mathcal{L}_{pv} = \frac{g}{2m} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \psi. \quad (2.16)$$

Aplicando as regras de Feynman temos, para o termo de Born pv ,

$$i T_{pv} = \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\frac{g}{2m} (-\not{k}') \gamma_5 \tau_b \right] \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \left[\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_a \right] u(\mathbf{p})$$

$$+ \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_a \right] \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p - k')^2 - m^2} \left[\frac{g}{2m} (-\not{k}') \gamma_5 \tau_b \right] u(\mathbf{p}). \quad (2.17)$$

O trabalho algébrico envolvido nesta amplitude é um pouco maior do que no caso anterior, devido aos termos $\not{k}$ e $\not{k}'$ que aparecem entre o propagador do nucleon. Usando sucessivas vezes as equações de movimento para os espinores e as relações de anti-comutação das matrizes de Dirac, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$, chegamos a

$$A_{pv}^+ = \frac{g^2}{m}, \quad A_{pv}^- = 0, \quad (2.18)$$

$$B_{pv}^+ = -g^2 \left[\frac{1}{s - m^2} - \frac{1}{u - m^2} \right], \quad B_{pv}^- = -g^2 \left[\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{u - m^2} + \frac{1}{2m^2} \right]. \quad (2.19)$$

Comparando os dois resultados, vemos que a diferença entre eles são termos constantes nas amplitudes A^+ e B^- . Portanto, a opção por um ou outro acoplamento resume-se a uma simples redefinição de T_R . Porém, do ponto de vista mais fundamental, o acoplamento pv incorpora a idéia sugerida por Weinberg em 1979 [6], de que a interação com píons ocorre na forma de acoplamentos derivativos. Isso faz com que esta se anule no limite dos momentos tendendo a zero, fato com respaldo experimental e que é a base da teoria de perturbação quiral.

Em termos das amplitudes $D^\pm$ e $B^\pm$, o termo de Born pseudovetorial é expresso por

$$D_{pv}^+ = \frac{g^2}{2m} \left(\frac{k \cdot k'}{s - m^2} + \frac{k \cdot k'}{u - m^2} \right) \rightarrow \mathcal{O}(q^2), \quad (2.20)$$

$$B_{pv}^+ = -g^2 \left(\frac{1}{s - m^2} - \frac{1}{u - m^2} \right) \rightarrow \mathcal{O}(q^{-1}), \quad (2.21)$$

$$D_{pv}^- = \frac{g^2}{2m} \left(-\frac{\nu}{m} + \frac{k \cdot k'}{s - m^2} - \frac{k \cdot k'}{u - m^2} \right) \rightarrow \mathcal{O}(q^1), \quad (2.22)$$

$$B_{pv}^- = -g^2 \left(\frac{1}{2m^2} + \frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right) \rightarrow \mathcal{O}(q^0), \quad (2.23)$$

onde as setas indicam a ordem quiral de cada amplitude. Na seção 4.3 discutimos como essa hierarquia se transfere para a interação nucleon-nucleon.

A parte suave da amplitude (2.11), T_R , é essencial para reproduzir os dados do espalhamento πN . No fim da década de 60 surgiram muitos trabalhos tentando obter informações para esta parte da amplitude, por meio da álgebra de correntes [80], mas os cálculos eram, além de trabalhosos, pouco restritivos e muitas vezes recorriam a modelos, como a inclusão dos mésons ρ e a_1 . Em 1972 Höhler, Jacob e Strauss [81] apresentaram uma maneira muito útil de descrever a contribuição T_R para baixas energias. Eles a expandiram em série de potências nas variáveis ν e t em torno de $\nu = t = 0$,

$$X_R(\nu, t) = \sum_{i,j=0} x_{ij} \nu^{2i} t^j, \quad (2.24)$$

onde $X \in \{D^+, D^-/\nu, B^+/\nu, B^-\}$, e obtiveram os coeficientes desta expansão a partir dos dados experimentais do espalhamento, usando relações de dispersão.

Este trabalho teve enorme importância no estudo da interação πN , pois forneceu uma referência aos estudos teóricos da época. Antes disso, muitas previsões teóricas eram questionadas mais pela forma com que os resultados eram extrapolados para a região física do que com a própria previsão em si.

Os coeficientes de baixa energia da equação (2.24), ou coeficientes HJS, fornecem uma descrição compacta da amplitude. Entretanto, outros graus de liberdade ficam “congelados”, e sua contribuição para a dinâmica, escondida nos parâmetros da expansão. Informações mais detalhadas podem ser obtidas através de modelos incluindo explicitamente os graus de liberdade mais relevantes, como os mésons ρ , a_1 e ω , bem como a ressonância Δ . Os modelos podem diferir na forma com que tratam essas partículas, por exemplo, através da álgebra de correntes [80, 82] ou lagrangianas efetivas [83], mas devem reproduzir, em certa aproximação, os coeficientes HJS.

2.3 A abordagem quiral

Durante as décadas de 60 e 70, uma série de assim chamados “teoremas de baixa energia” [2] indicavam que os observáveis das interações fortes envolvendo mésons poderiam ser expandidos perturbativamente nos momentos das partículas envolvidas. A observação feita por Weinberg [6] deu origem à Teoria de Perturbação Quiral (ChPT), sistematicamente desenvolvida por Gasser e Leutwyler [7], cujo espírito consiste em descrever os observáveis através de uma série de potências de quantidades pequenas (as massas dos mésons e os momentos envolvidos, genericamente denominados por q) com relação a uma escala de energia abaixo da qual a teoria faz sentido (no caso, $\Lambda_\chi \sim 1$ GeV). A uma dada ordem, constrói-se a lagrangiana mais geral possível, consistente com a invariância de Poincaré e outras simetrias da QCD (paridade, reversão temporal e simetria quiral aproximada). Os gráficos em nível de árvore de uma lagrangiana de ordem n contribuem com a mesma ordem, enquanto que os gráficos envolvendo *loops* deveriam contribuir em ordem superior a n , de acordo com um esquema de contagem de potências. As divergências dos *loops* seriam absorvidas nas constantes de acoplamento das lagrangianas de ordem superior, pela generalidade na construção destas. Observamos tal esquema em processos puramente mesônicos, onde os diagramas com l *loops* contribuem em ordem $2l$ a mais do que os de árvore, desde que seja usada uma regularização “natural”, no caso, a regularização dimensional.

Na teoria de perturbação quiral relativística envolvendo bárions (RBChPT), a regularização dimensional não fornece mais um esquema definido de contagem de potências (ou seja, não é mais uma regularização natural), e a conexão entre a expansão em *loops* e a expansão nos momentos fica muito complicada. Em particular, diagramas de um *loop* contribuem na mesma ordem que diagramas de árvore. Um fenômeno similar é observado no setor mesônico se utilizarmos um esquema de regularização que não seja natural, como o de Pauli-Villars.

Uma enorme simplificação desse problema foi obtida por Jenkins e Manohar [10] no formalismo de bárions pesados (HBChPT), cuja idéia reside na expansão da teoria em torno do limite da massa do bárion infinita. O campo do bárion é decomposto em uma componente leve e outra pesada, esta última sendo integrada da teoria. Dessa forma, elimina-se a dependência do

propagador com a massa do bárion. Os vértices resultantes são submetidos a uma expansão em potências do inverso da massa do bárion, resultando em uma regra de contagem bem definida. Os cálculos ficam bastante simplificados, mas a invariância de Lorentz não é mais explícita. Ela pode ainda ser recobrada, mas é preciso ressomar uma classe de diagramas em todas as ordens.

Recentemente Becher e Leutwyler, no trabalho de 99 [12], propuseram um novo esquema de renormalização, denominado de regularização infravermelha, que restabelece a relação entre as expansões em *loops* e nos momentos externos, mantendo o caráter relativístico da teoria. Baseada nos trabalhos de Ellis e Tang [27, 28] esta nova abordagem, além de evitar as operações do formalismo de bárion pesado, o que aumenta consideravelmente o número de termos da lagrangiana na ordem seguinte (NLO), permite analisar a convergência da série quiral.

Nos trabalhos de Ellis e Tang, o ponto de partida é a mesma lagrangiana desenvolvida por Gasser, Sainio e Švarc [9]. A diferença surge no tratamento das integrais de *loop*, que são separadas em duas partes: uma envolvendo apenas momentos baixos (*soft*), da ordem da massa do pión, e eventuais divergências ultravioletas, e outra envolvendo altos momentos (*hard*), onde incluem-se contribuições dos anti-nucleons. A primeira contém toda a estrutura singular de baixa energia, e é obtida a partir do seguinte procedimento:

1. Consideram-se os momentos das integrações de *loop* como elementos de ordem q .
2. Faz-se uma expansão covariante em potências de q/m no integrando.
3. Inverte-se a ordem entre a integração e a soma da série obtida no passo 2.

É bem sabido que inverter a ordem entre a integração e a soma de uma série só é válida se a série for absolutamente convergente, o que ocorre apenas para momentos de *loop* satisfazendo a condição 1. Desse modo, fica claro que a diferença entre a integral de *loop* completa e a obtida pelo procedimento acima são contribuições de momentos fora da região de baixa energia. Essa diferença (a parte *hard*) é justamente o termo da integral de *loop* (completa) que viola a contagem de potências e, por não conter singularidades em energias baixas, gera contribuições polinomiais quando expandida em potências de q/m . Tais polinômios funcionam como contratermos de uma segunda renormalização (a primeira apenas absorve eventuais divergências ultravioletas), fazendo com que a teoria apresente a contagem de potências usual [84].

Para entendermos com mais detalhes as idéias contidas nessa regularização relativística, consideremos o gráfico da auto-energia do nucleon², figura 2.3. A integral correspondente é dada por

$$\begin{aligned}\Sigma_{\pi N}(p) &= -\frac{3g_A^2}{4f_\pi^2} i \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{k} \gamma_5 (\not{p} + \not{k} + m) \not{k} \gamma_5}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\ &= \frac{3g_A^2}{4f_\pi^2} i \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\not{p} + m)k^2 - (2p \cdot k + k^2) \not{k}}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(2p \cdot k + p^2 - m^2 + k^2 + i\epsilon)} = I_\Sigma + R_\Sigma,\end{aligned}\tag{2.25}$$

onde Λ é a escala da regularização dimensional.

²Esta conta foi reproduzida do artigo de Tang [27].

A regra de contagem de potências nos diz que essa integral deve ser de ordem q^3 . Para calcularmos I_Σ , expandimos o propagador do nucleon de acordo com as regras 1 e 2:

$$I_\Sigma = \frac{3g_A^2}{4f_\pi^2} i \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\not{p} + m)k^2 - (2p \cdot k + k^2) \not{k}}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(2p \cdot k + p^2 - m^2 + i\epsilon)} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k^2)^n}{(2p \cdot k + p^2 - m^2 + i\epsilon)^n}. \quad (2.26)$$

Para aplicarmos a regra 3, substituímos toda a ocorrência de k^2 no numerador por $(k^2 - \mu^2) + \mu^2$ e usamos o seguinte resultado³

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^i}{(2p \cdot k + p^2 - m^2 + i\epsilon)^j} = 0, \quad (2.27)$$

para quaisquer $i, j > 0$. Isso tem, como efeito, a substituição de todo k^2 que aparece em (2.26) por μ^2 . Ressonando a série, obtemos

$$I_\Sigma = \frac{3g_A^2}{4f_\pi^2} i \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\not{p} + m)\mu^2 - (2p \cdot k + \mu^2) \not{k}}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(2p \cdot k + p^2 - m^2 + \mu^2 + i\epsilon)}. \quad (2.28)$$

A solução da equação acima é dada por

$$I_\Sigma = \hat{\Sigma}_{\pi N}(p) + \frac{3g_A^2}{4f_\pi^2} \left[\frac{p^2 - m^2}{p^2} (\mu^2 - 2\omega^2) \not{p} + \frac{2\omega\mu^2}{\sqrt{p^2}} (\not{p} + m) \right] \left(L + \frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right), \quad (2.29)$$

onde

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{p^2}} (p^2 - m^2 + \mu^2), \quad (2.30)$$

$$L = \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{2}{d-4} + \gamma - 1 - \ln 4\pi \right), \quad (2.31)$$

γ é a constante de Euler, $\gamma = 0.577 \dots$, e $\hat{\Sigma}_{\pi N}(p)$ é a auto-energia renormalizada na escala $\Lambda = \mu$, no esquema de subtração mínima modificada, $\overline{\text{MS}}$:

$$\hat{\Sigma}_{\pi N}(p) = \frac{3g_A^2}{64\pi^2 f_\pi^2} \left[\frac{p^2 - m^2}{p^2} \omega \not{p} - \frac{\mu^2}{\sqrt{p^2}} (\not{p} + m) \right] \left[\omega + 2\sqrt{\mu^2 - \omega^2} \arctan \left(\frac{\sqrt{\mu^2 - \omega^2}}{\omega} \right) \right]. \quad (2.32)$$

Vemos que $I_\Sigma(p)$ é, de fato, um objeto de ordem q^3 , obedecendo a regra de contagem de potências. Uma observação importante é que o coeficiente da parte divergente de $I_\Sigma(p)$ contém infinitas ordens em potências de $(\not{p} - m)/m$, ou seja, para cada integral de *loop* divergente

³Veja, por exemplo, a referência [17] do artigo de Tang [27].

é necessário um número infinito de contratermos de ordens superiores em q . Isso é uma característica da ChPT relativística com bárions e não significa um problema, uma vez que o truncamento da lagrangiana deve se basear nos coeficientes renormalizados [27, 85].

O cálculo de R_Σ pode ser obtido através da diferença entre a expressão exata de $\Sigma_{\pi N}$ e I_Σ :

$$\begin{aligned} R_\Sigma = & -\frac{3g_A^2}{2f_\pi^2} m^2 \left(m + \frac{p^2 + m^2}{2p^2} \not{p} \right) \left(L + \frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \\ & - \frac{3g_A^2}{64\pi^2 f_\pi^2} \left(\sqrt{p^2} - \omega \right) \left[\frac{p^2 - m^2}{p^2} \omega \not{p} - \frac{\mu^2}{\sqrt{p^2}} (\not{p} + m) \right] \\ & \times \left[32\pi^2 L + \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{2l-1} \frac{(\omega^2 - \mu^2)^l}{(\sqrt{p^2} - \omega)^{2l}} \right]. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Na expressão acima, fica evidente que R_Σ é o termo que viola a contagem de potências, pois começa a contribuir em ordem q^0 . Note que o primeiro termo, para $\not{p} = m$, é precisamente a parte divergente que obrigou Gasser, Sainio e Švarc a renormalizar a massa do nucleon⁴.

Vale a pena destacar que essa prescrição não tem influência sobre o setor puramente mesônico, pois neste caso a parte regular R , relativa a altos momentos, é nula.

Na referência [12], Becher e Leutwyler desenvolveram um método ainda mais simples de extrair a parte *soft* de uma integral de *loop*, chamada de parte infravermelha, I , bem como a parte *hard*, chamada de regular, R . Para entender o método, consideremos apenas o denominador da integral correspondente à auto-energia do nucleon:

$$H = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]} = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2}, \quad (2.34)$$

onde $D_1 = (k^2 - \mu^2 + i\epsilon)$ e $D_2 = [(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]$. Aplicando a parametrização de Feynman, temos

$$H = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 \frac{da}{[(1-a)D_1 + aD_2]^2} = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\int_0^\infty - \int_1^\infty \right] \frac{da}{[(1-a)D_1 + aD_2]^2}. \quad (2.35)$$

Na última passagem da equação acima é feita a separação entre as partes infravermelha e regular, de acordo com a prescrição de Becher e Leutwyler:

$$H = I + R,$$

$$I = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{da}{[(1-a)D_1 + aD_2]^2}, \quad (2.36)$$

$$R = -\Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_1^\infty \frac{da}{[(1-a)D_1 + aD_2]^2}. \quad (2.37)$$

⁴Equações (5.9) e (5.16) do artigo de Gasser, Sainio e Švarc [9].

Figura 2.3: Representação da auto-energia do nucleon. A linha cheia representa o propagador relativístico do nucleon, com a integral de *loop* dada por I , enquanto que as linhas duplas representam o propagador não-relativístico. As cruzes indicam inserções de $(k+r)^2$.

Podemos desfazer as integrações nos parâmetros de Feynman, usando as identidades

$$\int_0^1 \frac{da}{[(1-a)D_1 + aD_2]^2} = \frac{1}{D_1(D_2 - D_1)}, \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \frac{1}{D_1(D_2 - D_1)} - \frac{1}{D_2(D_2 - D_1)}. \quad (2.39)$$

Portanto,

$$I = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \frac{1}{[p^2 - m^2 + 2p \cdot k + \mu^2 + i\epsilon]}, \quad (2.40)$$

$$R = -\Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[p^2 - m^2 + 2p \cdot k + \mu^2 + i\epsilon]}. \quad (2.41)$$

Comparando as equações (2.40) e (2.28), constatamos que a prescrição de Becher e Leutwyler equivale à de Ellis e Tang, no caso particular da auto-energia do nucleon. Esta equivalência pode ser demonstrada para casos gerais, através do estudo das equações de Landau para diagramas de Feynman [86, 79]. Um estudo nessa linha foi feito por Goity *et. al.* [87] para diagramas de um *loop* com dois bárions, e posteriormente generalizado por Lehmann e Prezeau para um número arbitrário de partículas pesadas e leves [88].

É instrutivo discutir como o gráfico da auto-energia (escalar) do nucleon, dado por (2.40), se traduz na linguagem do formalismo de bárion pesado (HB). Dada a integral H , equação (2.34), podemos obter I através do procedimento de Ellis e Tang. Alternativamente à regra 2, fazemos uma expansão não-relativística, considerando a decomposição usual em HBChPT, $p_\mu = m v_\mu + r_\mu$ ($v^2 = 1$), e tratando r e a variável de integração k como quantidades de ordem q :

$$I = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \left[\frac{1}{2m v \cdot (k+r) + i\epsilon} - \frac{(k+r)^2}{[2m v \cdot (k+r) + i\epsilon]^2} + \dots \right]. \quad (2.42)$$

Integrando termo a termo, obtemos uma série envolvendo propagadores não-relativísticos $[2m v \cdot (k+r) + i\epsilon]^{-1}$ e inserções de $(k+r)^2$, ou seja, uma simples integral de *loop* relativística corresponde, na linguagem HB, a uma soma de classes de diagramas, em todas as ordens (figura 2.3).

Figura 2.4: Diagrama triângulo, que contribui para o fator de forma escalar do nucleon. As linhas sólida, tracejadas e ondulada representam, respectivamente, o nucleon, os píons e uma fonte externa escalar.

Este exemplo da auto-energia do nucleon apenas ilustra um resultado mais geral obtido por Ellis e Tang, de que a expansão do integrando de uma função de *loop* em potências de q/m , considerando o momento de integração como uma quantidade de ordem q , recai em uma classe de diagramas obtida através do formalismo de bárion pesado, somada em todas as ordens. No trabalho de 99, Becher e Leutwyler usaram esse resultado para analisar criticamente a convergência do HBChPT em determinada região de baixa energia. No estudo do diagrama triângulo, que contribui para o fator de forma escalar do nucleon (figura 2.4), eles mostram que a série HB deixa de valer em torno de $t = 4\mu^2$.

Tal diagrama envolve a função de *loop* escalar $\gamma(t)$, dada por

$$\gamma(t) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)[(k - q)^2 - \mu^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \quad (2.43)$$

e que pode ser resolvida usando relações de dispersão,

$$\gamma(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt'}{(t' - t)} \text{Im } \gamma(t'), \quad (2.44)$$

com a parte imaginária obtida de maneira usual, através das regras de Cutkosky,

$$\text{Im } \gamma(t) = \frac{\theta(t - 4\mu^2)}{8\pi\sqrt{t(4m^2 - t)}} \arctan \frac{\sqrt{(4m^2 - t)(t - 4\mu^2)}}{t - 2\mu^2}. \quad (2.45)$$

Desprezando correções de ordem $t/m^2 \rightarrow \mathcal{O}(q^2)$, simplificamos a parte imaginária de $\gamma(t)$,

$$\text{Im } \gamma(t) = \frac{\theta(t - 4\mu^2)}{16\pi m\sqrt{t}} \left[\arctan \frac{2m\sqrt{t - 4\mu^2}}{t - 2\mu^2} + \mathcal{O}(q^2) \right]. \quad (2.46)$$

O argumento da função arco tangente,

$$x = \frac{2m\sqrt{t - 4\mu^2}}{t - 2\mu^2}, \quad (2.47)$$

formalmente, é considerado um termo de ordem $m/q \rightarrow \mathcal{O}(q^{-1})$. Através de

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \dots \quad (2.48)$$

e considerando uma expansão ingênua de $\text{Im } \gamma(t)$ em potências de q , temos

$$\text{Im } \gamma(t) \approx \frac{\theta(t - 4\mu^2)}{16\pi m \sqrt{t}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{t - 2\mu^2}{2m\sqrt{t - 4\mu^2}} \right]. \quad (2.49)$$

O problema da expansão acima, que corresponde aos dois primeiros termos da série obtida no formalismo HB, é que ela deixa de ser válida para $|x| < 1$, condição satisfeita quando a variável t se encontra suficientemente próxima de $4\mu^2$.

Para que a equação (2.43) tenha uma representação decente em toda a região de baixa energia, Becher e Leutwyler propuseram a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dt'}{(t' - t)} \frac{1}{16\pi m \sqrt{t'}} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - \frac{(t' - 2\mu^2)}{2m\sqrt{t' - 4\mu^2}} \right]_{HB} \right. \\ & \left. + \left[\frac{\mu\sqrt{t'}}{2m\sqrt{t' - 4\mu^2}} - \frac{\sqrt{t'}}{2\mu} \arctan \frac{\mu^2}{m\sqrt{t' - 4\mu^2}} \right]_{th} \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Considerando apenas o primeiro termo entre colchetes, temos o resultado do HBChPT, até a ordem seguinte ao termo dominante (NLO). Observe que a região $t \sim 4\mu^2$ é dominada pelo extremo inferior de integração em t' , onde a aproximação de bárion pesado deixa de valer, e o segundo termo entre colchetes passa a ser importante.

Resolvendo a integral, chegamos a

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \frac{1}{32\pi m \mu} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{\tau}} \ln \frac{2 + \sqrt{\tau}}{2 - \sqrt{\tau}} + \frac{2\mu(2 - \tau)}{\pi m \sqrt{\tau(4 - \tau)}} \arcsin \frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{2\mu}{\pi m} \left(\ln \frac{\mu}{m} - 1 \right) \right]_{HB} \right. \\ & \left. + \left[\frac{\mu}{m\sqrt{4 - \tau}} - \ln \left(1 + \frac{\mu}{m\sqrt{4 - \tau}} \right) \right]_{th} \right\}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde $\tau = t/\mu^2$. Este resultado merece atenção, pois mostra claramente que, para valores de t suficientemente longe de $4\mu^2$, as contribuições dos termos entre colchetes possuem uma ordenação quiral bem definida. O segundo, th , passa a ser de ordem q^2 . Por outro lado, quando $t \sim 4\mu^2$, os dois termos se mesclam de tal forma que ocorrem cancelamentos entre eles, e a noção de ordem quiral perde o sentido. Na figura 2.5, exibimos o comportamento dos vários termos da equação (2.51) no intervalo $3.5\mu^2 \leq t \leq 4\mu^2$, onde o segundo termo entre colchetes é importante. Nesta figura, ainda mostramos o efeito de se fazer a seguinte aproximação:

$$\left[\frac{\mu}{m\sqrt{4 - \tau}} - \ln \left(1 + \frac{\mu}{m\sqrt{4 - \tau}} \right) \right]_{th} \rightarrow \frac{\mu^2}{m^2(4 - \tau)} - \frac{\mu^2}{4m^2}. \quad (2.52)$$

Figura 2.5: Comportamento da função $\gamma(t)$, tal como dada pela equação (2.51) (linha cheia), e as contribuições parciais: HB (tracejada), th (pontilhada) e a aproximação da equação (2.52) (ponto-tracejada).

Embora esta aproximação não seja precisa em torno da região em questão, ela serve como uma estimativa dos efeitos do limiar.

A discussão sobre o comportamento da integral triângulo na vizinhança de $t = 4\mu^2$ é relevante para o potencial NN pois, no espaço de configuração, esta região descreve suas propriedades de longo alcance, tal como observado numericamente em trabalhos anteriores [16, 71, 89]. Para entender melhor esse mecanismo, tomemos a representação de (2.44) no espaço de configuração:

$$\Gamma(r) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{\text{Im}\gamma(t')}{t' + \mathbf{q}^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{e^{-r\sqrt{t'}}}{r} \text{Im}\gamma(t'). \quad (2.53)$$

A exponencial no integrando claramente mostra que, para grandes valores de r , os resultados são dominados pelo extremo inferior de integração. Portanto, para obtermos uma boa descrição de $\Gamma(r)$ a grandes distâncias, é preciso uma representação decente para $\text{Im}\gamma(t')$ próximo de $t' = 4\mu^2$, o que não pode ser obtido através do formalismo HBChPT.

2.4 O πN relativístico

As lagrangianas quirais para a interação pión-nucleon são construídas seguindo a metodologia desenvolvida por Gasser e Leutwyler [7]. No setor com número bariônico igual a um e até ordem q^3 , ela foi construída por Gasser, Sainio e Švarc [9], e até ordem q^4 , tanto na forma relativística, quanto na sua versão de bárion pesado, por Fettes *et. al.* [90]. Além do campo dos mésons, agrupados na matriz $U(x) \in SU(2)$, introduz-se o campo (espinorial) do bárion $\psi(x)$, que é não-linear sob transformações quirais $SU(2)_L \times SU(2)_R$ [11, 72]. O termo de quebra de simetria quiral é representado pelo operador $\chi = 2Bm_q$, onde $m_q = \text{diag}(m_u, m_d) = \hat{m} \text{diag}(1, 1)^5$. A constante B , além de especificar a magnitude do condensado de quarks no limite quiral, determina o termo dominante da expansão quiral do quadrado da massa do pión⁶:

⁵ $\hat{m}$ é a média das massas dos quarks u e d . Na última passagem, fica implícito que estamos trabalhando no limite de isospin conservado, ou seja, $m_u = m_d$.

⁶Denotamos as quantidades no limite quiral por um círculo sobre elas.

$$\overset{\circ}{\mu}^2 = 2\hat{m}B, \quad (2.54)$$

$$\mu^2 = \overset{\circ}{\mu}^2 + \mathcal{O}(q^4). \quad (2.55)$$

A lagrangiana efetiva é composta de duas partes — uma, envolvendo apenas os campos mesônicos, e outra, descrevendo a interação destes com o bárion:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{\pi N}. \quad (2.56)$$

A primeira contém apenas números pares de derivadas e, até ordem q^4 , pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{4} \overset{\circ}{f}_\pi^2 \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U + \chi_+ \rangle + \frac{1}{8} l_4 \langle u_\mu u^\mu \rangle \langle \chi_+ \rangle + \frac{1}{16} (l_3 + l_4) \langle \chi_+ \rangle^2, \quad (2.57)$$

onde

$$u^2 = U, \quad u_\mu = i u^\dagger \partial_\mu U u^\dagger, \quad \chi_\pm = u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u. \quad (2.58)$$

O símbolo $\langle \rangle$ indica o traço no espaço $SU(2)$ e $\overset{\circ}{f}_\pi$ é a constante de decaimento do pión no limite quiral. Os dois últimos termos de (2.57) são contribuições de ordem q^4 , necessários para o cálculo da amplitude πN até $\mathcal{O}(q^4)$ [13]. No capítulo 4 veremos que, para obter o potencial nucleon-nucleon até a ordem q^4 , basta considerarmos a amplitude πN até $\mathcal{O}(q^3)$. Dessa forma, apenas o primeiro termo da equação (2.57) é relevante neste trabalho.

O campo dos mésons pode assumir várias representações, uma das mais populares sendo o modelo sigma não-linear:

$$U = \frac{1}{\overset{\circ}{f}_\pi} \left[\sqrt{\overset{\circ}{f}_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2} + i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \right], \quad (2.59)$$

onde $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ são as matrizes (de Pauli) de isospin.

Nesta representação, a lagrangiana mesônica é dada por⁷

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) - \frac{\mu^2}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2f_\pi^2} (\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) - \frac{\mu^2}{8f_\pi^2} (\boldsymbol{\pi}^2)^2 + \mathcal{O}(\boldsymbol{\pi}^6). \quad (2.60)$$

Os dois primeiros termos da equação acima correspondem à lagrangiana livre, enquanto que os terceiro e quarto são os termos de interação envolvendo quatro píons.

O segundo termo da equação (2.56) é bilinear no espinor do nucleon e, em contraste com o que ocorre no setor mesônico, encontramos também números ímpares na expansão derivativa:

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} + \mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} + \mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} + \dots. \quad (2.61)$$

Além das quantidades dadas em (2.58), este setor envolve a seguinte derivada covariante,

⁷Como, neste trabalho, basta considerarmos o setor mesônico até $\mathcal{O}(q^2)$, de agora em diante não faremos mais distinção entre a constante de decaimento do pión no limite quiral, $\overset{\circ}{f}_\pi$, e o seu valor físico, f_π . O mesmo se aplica à massa do pión, μ .

$$D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad (2.62)$$

onde

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} [u^\dagger, \partial_\mu u]. \quad (2.63)$$

É importante frisar que a derivada covariante, agindo no espinor do nucleon, conta como ordem q^0 , devido ao fato da massa do nucleon não se anular no limite quiral. Dessa forma, aparece uma escala adicional de energia na teoria, o que a torna bem mais complicada do que no setor mesônico. Quanto à combinação $(i \not{D} - \mathring{m})$, esta é contada como ordem q , pois o tri-momento do nucleon é considerado uma quantidade de ordem q .

A lagrangiana de ordem mais baixa é escrita como

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\psi} (i \not{D} - \mathring{m}) \psi + \frac{1}{2} \mathring{g}_A \bar{\psi} \not{\gamma}_5 \psi, \quad (2.64)$$

onde $\mathring{m}$ e $\mathring{g}_A$ são, respectivamente, a massa e a constante de acoplamento axial do nucleon no limite quiral. O elemento u_μ é de ordem q e, apesar de γ_5 contar como $\mathcal{O}(q)$, a combinação $\gamma^\mu \gamma_5$ conta como $\mathcal{O}(q^0)$ ⁸. Substituindo a parametrização (2.59), a lagrangiana acima assume a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\psi} (i \not{D} - \mathring{m}) \psi - \frac{1}{4f_\pi^2} \bar{\psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \psi - \frac{\mathring{g}_A}{2f_\pi} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \psi + \mathcal{O}(\pi^3). \quad (2.65)$$

O primeiro termo corresponde à lagrangiana livre. Usando a relação de Goldberger-Treiman, $\mathring{g}_A/f_\pi = \mathring{g}/\mathring{m}$, identificamos o terceiro termo da equação acima com a lagrangiana πN pseudovetorial, dada pela equação (2.16)⁹. O segundo termo é o chamado termo de Weinberg-Tomozawa [92], e contribui ao canal de isospin ímpar T^- da amplitude.

A lagrangiana de ordem q^2 é determinada por quatro constantes de acoplamento (conhecidas como LEC's, do inglês *low energy constants*),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} = & c_1 \langle \chi_+ \rangle \bar{\psi} \psi - \frac{c_2}{4\mathring{m}} \langle u_\mu u_\nu \rangle (\bar{\psi} D^\mu D^\nu \psi + h.c.) \\ & + \frac{c_3}{2} \langle u_\mu u^\mu \rangle \bar{\psi} \psi - \frac{c_4}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu [u_\mu, u_\nu] \psi. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Neste trabalho, esta lagrangiana contribui apenas em nível de árvore. A regra de contagem de potências, que é válida na nova abordagem relativística apresentada na seção 2.3, assegura que seus *loops* contribuem em ordem superior da que necessitamos. No trabalho de 2001 [13], Becher e Leutwyler tiveram que considerar esses *loops*, que contribuem em $\mathcal{O}(q^4)$, uma vez que eles estavam interessados na amplitude πN com essa precisão.

⁸Mais detalhes na construção da lagrangiana $\mathcal{L}_{\pi N}$ podem ser encontrados em [91, 9], assim como em alguns artigos de revisão, como [11, 72].

⁹A diferença de sinal surge por causa da convenção adotada pela ChPT para o fator de forma πN , com o sinal oposto à convencional. Para mais detalhes, consulte as referências [72, 2].

A lagrangiana de ordem q^3 contribui apenas em nível de árvore, independentemente de considerarmos a amplitude até ordem q^3 ou q^4 . Sua expressão é encontrada na referência [93]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} = & \bar{\psi} \left\{ -\frac{d_1 + d_2}{4\overset{\circ}{m}} \left([u_\mu, [D_\nu, u^\mu] + [D^\mu, u_\nu]] D^\nu + h.c. \right) \right. \\
& + \frac{d_3}{12\overset{\circ}{m}^3} \left([u_\mu, [D_\nu, u_\lambda]] (D^\mu D^\nu D^\lambda + \text{sym.}) + h.c. \right) + \frac{i d_5}{2\overset{\circ}{m}} ([\chi_-, u_\mu] D^\mu + h.c.) \\
& + i \frac{(d_{14} - d_{15})}{8\overset{\circ}{m}} \left(\sigma^{\mu\nu} \langle [D_\lambda, u_\mu] u_\nu - u_\mu [D_\nu, u_\lambda] \rangle D^\lambda + h.c. \right) \\
& \left. + \frac{d_{16}}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \langle \chi_+ \rangle u_\mu + \frac{d_{18}}{2} \gamma^\mu \gamma_5 [D_\mu, \chi_-] \right\} \psi.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

O cálculo relativístico da amplitude segue de acordo com o artigo de 2001 de Becher e Leutwyler [13]. As contribuições em nível de árvore possuem a seguinte estrutura:

Figura 2.6: Gráficos em nível de árvore.

As contribuições do tipo ③ surgem das partes das lagrangianas com acoplamento axial (γ_5), presentes em $\mathcal{L}_N^{(1)}$ e $\mathcal{L}_N^{(3)}$. Essas contribuições são levadas em conta ao calcularmos o vértice correspondente na lagrangiana $\mathcal{L}_N^{(1)}$ e substituímos a constante de acoplamento axial, $\overset{\circ}{g}_A$, por $g_2 = \overset{\circ}{g}_A + 2\mu^2(2d_{16} + d_{18})$. De forma análoga, a inserção de massa ② proveniente de $\mathcal{L}_N^{(2)}$ é levada em conta ao substituímos $\overset{\circ}{m}$ em $\mathcal{L}_N^{(1)}$ por $m_2 = \overset{\circ}{m} - 4c_1 \mu^2$. Por fim, o vértice do tipo ④ recebe contribuições de $\mathcal{L}_N^{(1)}$, $\mathcal{L}_N^{(2)}$ e $\mathcal{L}_N^{(3)}$, sendo polinômios em ν , t e μ^2 . As contribuições de $\mathcal{L}_N^{(1)}$,

$$D^- = \frac{\nu}{2f_\pi^2}, \quad B^- = \frac{1}{2f_\pi^2}, \tag{2.68}$$

são os termos de Weinberg-Tomozawa.

Figura 2.7: Gráficos de um *loop*.

Os gráficos de um *loop*, representados na figura 2.7, recebem contribuições apenas da lagrangiana $\mathcal{L}_N^{(1)}$, considerando a amplitude até $\mathcal{O}(q^3)$. Os gráficos (a)–(e) e (n)–(s) dão contribuições ao termo de Born pseudovetor. Tais contribuições, somadas às do tipo ② e ③ do gráfico 2.6, equivalem a descrever o termo de Born usando os valores físicos para m e g (a massa do nucleon e a constante de acoplamento píon-nucleon, respectivamente) [12, 13].

Os gráficos de um *loop* ainda contribuem (apenas os que contêm estados intermediários de duas partículas) para a parte imaginária da amplitude, que surge quando $s > (m + \mu)^2$ ou $t > 4\mu^2$. Essa parte imaginária também é obtida, a menos de um polinômio, via relações de dispersão. Dessa forma, os gráficos de *loop* podem ser escritos como um termo que contribui para g e m (termo de Born), um termo polinomial em s , u e t , e a descrição dos cortes via relações de dispersão¹⁰:

$$\begin{aligned} T_{\pi N} &= T_{\pi N}[\text{árvore}] + T_{\pi N}[\text{um loop}] \\ &= T_{\pi N}[\text{Born}(g, m)] + T_{\pi N}[\text{polinômios}] + T_{\pi N}[\text{parte imaginária}]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Figura 2.8: Estrutura dinâmica da amplitude πN até $\mathcal{O}(q^3)$; as bolhas representam termos lidos diretamente das lagrangianas efetivas.

Na referência [13], a parte imaginária é construída de tal forma que não contribui para a parte polinomial de D (B) até a ordem q^4 (q^2). Isso permite identificar a parte polinomial com os primeiros termos da série de Höhler:

$$\begin{aligned} D_{pol}^+(\nu, t) &= d_{00}^+ + d_{10}^+ \nu^2 + d_{01}^+ t + d_{20}^+ \nu^4 + d_{11}^+ \nu^2 t + d_{02}^+ t^2, \\ B_{pol}^+(\nu, t) &= b_{00}^+ \nu, \\ D_{pol}^-(\nu, t) &= d_{00}^- \nu + d_{10}^- \nu^3 + d_{01}^- \nu t, \\ B_{pol}^-(\nu, t) &= b_{00}^- + b_{10}^- \nu^2 + b_{01}^- t. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Note que para B_{pol}^+ (D_{pol}^-) o termo seguinte, devido à simetria de cruzamento, seria de ordem q^3 (q^5).

Analisando os gráficos de *loop* que não contribuem para o termo de Born, (f)–(m) e (t)–(v) da figura 2.7, percebemos que os gráficos (i)–(m) são os que apresentam uma forte dependência no canal t ¹¹. Como os gráficos (i) e (m) desenvolvem uma parte imaginária apenas em $t = 4m^2$, é possível aproximá-los por polinômios, e a contribuição deles é incorporada nos coeficientes de baixa energia (HJS). Quanto aos gráficos (k) e (l), estes apresentam um corte a partir de

¹⁰Para mais detalhes dessa formulação, consulte a equação (15.1) da referência [13].

¹¹Veja, também, as expressões explícitas desses diagramas no apêndice D da referência [13].

$t = 4\mu^2$, e dão origem a contribuições de médio alcance no espaço de configuração [17]. Além disso, uma expansão desses diagramas em potências de t apresenta os problemas mencionados na seção anterior. Por esses motivos, consideramo-os explicitamente na nossa abordagem da amplitude πN (figura 2.9), reescrevendo a equação (2.69) como

$$T_{\pi N} \approx T_{\pi N}[\text{Born}(g, m)] + T_{\pi N}[\text{HJS}] + T_{\pi N}[(k) + (l)]. \quad (2.71)$$

Figura 2.9: Conteúdo dinâmico da amplitude πN na nossa aproximação.

As relações entre os coeficientes de baixa energia (HJS) e as constantes de acoplamento da lagrangiana $\mathcal{L}_{\pi N}$ até ordem q^4 estão no trabalho de Becher e Leutwyler [13]. Na seção 4.3 veremos que para a construção do TPEP até ordem q^4 necessitaremos dos coeficientes HJS apenas até ordem q^3 . Portanto, até a ordem necessária temos

$$d_{00}^+ = -\frac{2(2c_1 - c_3)\mu^2}{f_\pi^2} + \frac{8g_A^4\mu^3}{64\pi f_\pi^4} + \left[\frac{3g_A^2\mu^3}{64\pi f_\pi^4} \right]_{mr}, \quad (2.72)$$

$$d_{10}^+ = \frac{2c_2}{f_\pi^2} - \frac{(4 + 5g_A^4)\mu}{32\pi f_\pi^4}, \quad (2.73)$$

$$d_{01}^+ = -\frac{c_3}{f_\pi^2} - \frac{48g_A^4\mu}{768\pi f_\pi^4} - \left[\frac{77g_A^2\mu}{768\pi f_\pi^4} \right]_{mr}, \quad (2.74)$$

$$d_{20}^+ = \frac{12 + 5g_A^4}{192\pi f_\pi^4\mu}, \quad (2.75)$$

$$d_{11}^+ = \frac{g_A^4}{64\pi f_\pi^4\mu}, \quad (2.76)$$

$$d_{02}^+ = \left[\frac{193g_A^2}{15360\pi f_\pi^4\mu} \right]_{mr}, \quad (2.77)$$

$$b_{00}^+ = \frac{4m(\tilde{d}_{14} - \tilde{d}_{15})}{f_\pi^2} - \frac{g_A^4 m}{8\pi^2 f_\pi^4}, \quad (2.78)$$

$$d_{00}^- = \left[\frac{1}{2f_\pi^2} \right]_{WT} + \frac{4(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 + 2\tilde{d}_5)\mu^2}{f_\pi^2} + \frac{g_A^2(-3 + g_A^2)\mu^2}{48\pi^2 f_\pi^4} + \left[\frac{3g_A^2\mu^2}{48\pi^2 f_\pi^4} \right]_{mr}, \quad (2.79)$$

Tabela 2.1: Valores experimentais para os coeficientes de baixa energia e contribuições dos termos de Weinberg-Tomozawa (WT) e de alcance intermediário (mr), em unidades de μ^{-n} ; os números experimentais foram extraídos da referência [68].

	d_{00}^+	d_{10}^+	d_{01}^+	d_{20}^+	d_{11}^+	d_{02}^+
exp	-1.46 ± 0.10	1.12 ± 0.02	1.14 ± 0.02	0.200 ± 0.005	0.17 ± 0.01	0.036 ± 0.003
mr	0.12	-	-0.25	-	-	0.032
	b_{00}^+					
exp	-3.54 ± 0.06					
	d_{00}^-	d_{10}^-	d_{01}^-			
exp	1.53 ± 0.02	-0.167 ± 0.005	-0.134 ± 0.005			
$WT + mr$	1.18	-	-0.032			
	b_{00}^-	b_{10}^-	b_{01}^-			
exp	10.36 ± 0.10	1.08 ± 0.05	0.24 ± 0.01			
$WT + mr$	-0.99	-	0.18			

$$d_{10}^- = \frac{4 \tilde{d}_3}{f_\pi^2} - \frac{15 + 7 g_A^4}{240 \pi^2 f_\pi^4}, \quad (2.80)$$

$$d_{01}^- = -\frac{2 (\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2)}{f_\pi^2} - \frac{2 g_A^4}{192 \pi^2 f_\pi^4} - \left[\frac{1 + 7 g_A^2}{192 \pi^2 f_\pi^4} \right]_{mr}, \quad (2.81)$$

$$b_{00}^- = \left[\frac{1}{2 f_\pi^2} \right]_{WT} + \frac{2 c_4 m}{f_\pi^2} - \frac{g_A^4 m \mu}{8 \pi f_\pi^4} - \left[\frac{g_A^2 m \mu}{8 \pi f_\pi^4} \right]_{mr}, \quad (2.82)$$

$$b_{10}^- = \frac{g_A^4 m}{32 \pi f_\pi^4 \mu}, \quad (2.83)$$

$$b_{01}^- = \left[\frac{g_A^2 m}{96 \pi f_\pi^4 \mu} \right]_{mr}, \quad (2.84)$$

onde os sub-índices WT e mr representam respectivamente as contribuições do termo de Weinberg-Tomozawa e termos de alcance intermediário¹² enquanto que os parâmetros c_i e $\tilde{d}_i$ são as constantes de acoplamento renormalizadas das lagrangianas $\mathcal{L}^{(2)}$ e $\mathcal{L}^{(3)}$.

Os valores dos coeficientes HJS são determinados através dos dados do espalhamento πN e, para a expansão quiral até ordem q^3 , eles são usados para determinar o valor das constantes c_i e $\tilde{d}_i$. Na nossa formulação do TPEP nós evitamos o uso dessas constantes, uma vez que os coeficientes HJS já são os ingredientes que descrevem a dinâmica do sistema. Isso permite que o nosso potencial seja expresso diretamente em termos de quantidades observáveis.

Na tabela 2.1 apresentamos os valores experimentais dos coeficientes HJS extraídos da referência [68], bem como a soma das contribuições (WT) e (mr). Os coeficientes redefinidos são

¹²Os termos de alcance intermediário são os primeiros termos da série de Taylor das funções não-polinomiais que descrevem os gráficos (k) e (l) da figura 2.7.

Tabela 2.2: Coeficientes de baixa energia adimensionais, sem as contribuições dos termos (WT) e (mr).

	$\bar{\delta}_{00}^+$	δ_{10}^+	$\bar{\delta}_{01}^+$	β_{00}^+
definição	$mf_\pi^2 d_{00}^+/\mu^2$	$mf_\pi^2 d_{10}^+$	$mf_\pi^2 d_{01}^+$	$mf_\pi^2 b_{00}^+$
valor	-4.72	3.34	4.15	-10.57
	$\bar{\delta}_{00}^-$	δ_{10}^-	$\bar{\delta}_{01}^-$	$\bar{\beta}_{00}^-$
definição	$m^2 f_\pi^2 \bar{\delta}_{00}^-/\mu^2$	$m^2 f_\pi^2 d_{10}^-$	$m^2 f_\pi^2 \bar{\delta}_{01}^-$	$f_\pi^2 \bar{\beta}_{00}^-$
valor	7.02	-3.35	-2.05	5.04

simplesmente a subtração dessas contribuições do valor experimental¹³. Convém observar que os valores para os coeficientes $\bar{d}_{02}^+$ e $\bar{b}_{01}^-$ são compatíveis com zero.

Na tabela 2.2 apresentamos os coeficientes $\delta_{mn}^\pm$ e $\beta_{mn}^\pm$ que correspondem, respectivamente, aos coeficientes HJS $d_{mn}^\pm$ e $b_{mn}^\pm$. Eles foram definidos de tal forma que sejam adimensionais e de ordem q^0 na contagem quiral.

¹³Usamos os valores numéricos apresentados no apêndice A.

Capítulo 3

O potencial nucleon-nucleon devido à troca de dois píons

Neste capítulo apresentamos as linhas gerais para se obter o potencial devido à troca de dois píons, usando a amplitude πN . Inicialmente, discutimos como definir o potencial partindo da abordagem de teoria de campos, comparando a equação relativística de Bethe-Salpeter com a não-relativística, de Lippmann-Schwinger. Em seguida mostramos, de maneira bem geral, como construir a amplitude devida à troca de dois píons empregando as sub-amplitudes píon-nucleon. A mesma estrutura espinorial resultante ocorre na iteração do OPEP que, de acordo com a definição do potencial, deve ser subtraída da amplitude NN . A redução da estrutura espinorial em termos de matrizes 2x2 permite a identificação das componentes usuais do potencial no espaço de momento. Encerramos este capítulo expandindo os fatores provenientes da estrutura espinorial até ordem q^4 .

3.1 Cinemática

A cinemática da troca de dois píons está representada na figura 3.1, onde p_1 e p'_1 são, respectivamente, os momentos inicial e final do nucleon 1, e p_2 e p'_2 , os análogos para o nucleon 2. Os momentos internos k e k' correspondem aos píons com índices de isospin a e b .

Neste trabalho usamos as variáveis W , z , q e Q , definidas como

$$W = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad W^2 = s, \quad (3.1)$$

$$z = [(p_1 + p'_1) - (p_2 + p'_2)] / 2, \quad (3.2)$$

$$q = k' - k = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2, \quad q^2 = t, \quad (3.3)$$

$$Q = (k + k') / 2, \quad (3.4)$$

A condição de camada de massa para os nucleons externos fornece as seguintes restrições:

$$W \cdot z = W \cdot q = z \cdot q = 0, \quad (3.5)$$

$$m^2 = (W^2 + z^2 + q^2) / 4. \quad (3.6)$$

Figura 3.1: A cinemática da troca de dois píons na interação NN .

As variáveis de Mandelstam das sub-amplitudes πN são identificadas com um sub-índice, correspondente ao nucleon em questão. Em termos das variáveis W , z , q e Q , escrevemo-las como

$$s_1 = m^2 + Q^2 + Q \cdot (W + z) - t/4, \quad (3.7)$$

$$u_1 = m^2 + Q^2 - Q \cdot (W + z) - t/4, \quad (3.8)$$

$$\nu_1 = Q \cdot (W + z)/2m, \quad (3.9)$$

$$s_2 = m^2 + Q^2 + Q \cdot (W - z) - t/4, \quad (3.10)$$

$$u_2 = m^2 + Q^2 - Q \cdot (W - z) - t/4, \quad (3.11)$$

$$\nu_2 = Q \cdot (W - z)/2m. \quad (3.12)$$

Outras três variáveis, mais apropriadas para o uso na equação de Bethe-Salpeter, são

$$l = \frac{p_2 - p_1}{2} = \frac{-z + q}{2}, \quad l' = \frac{p_2' - p_1'}{2} = \frac{-z - q}{2}, \quad \xi = k + \frac{p_2 - p_1}{2} = k + l. \quad (3.13)$$

No referencial do centro de massa temos

$$p_1 = (E; \mathbf{p}), \quad p_1' = (E; \mathbf{p}'), \quad (3.14)$$

$$p_2 = (E; -\mathbf{p}), \quad p_2' = (E; -\mathbf{p}'), \quad (3.15)$$

$$W = (2E; 0), \quad (3.16)$$

$$q = (0; \mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (3.17)$$

$$z = (0; \mathbf{p}' + \mathbf{p}), \quad (3.18)$$

$$l = (0; -\mathbf{p}), \quad (3.19)$$

$$l' = (0; -\mathbf{p}'). \quad (3.20)$$

3.2 A noção de potencial

Rigorosamente, em teoria quântica de campos não existe o conceito de potencial, tal como definido em mecânica quântica não-relativística. Para associá-lo a algo passível de ser calculado em teoria de campos, recorreremos ao processo de espalhamento. Dentro desse espírito, definiremos o potencial de forma que, quando usado na equação de Schrödinger, reproduza a amplitude relativística da teoria de campos, a uma ordem de aproximação pré-estabelecida. Tal definição não é única, pois depende da equação dinâmica utilizada, como discutiremos adiante.

Em mecânica quântica não relativística, o espalhamento pode ser descrito pela equação de Lippmann-Schwinger, dada por

$$T_{fi}(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) = V_{fi}(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) + \int \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3} V_{fi}(\mathbf{l}', \xi | W) \frac{m}{\mathbf{p}^2 - \xi^2 + i\epsilon} T_{fi}(\xi, \mathbf{l} | W). \quad (3.21)$$

Esta expressão é uma equação integral para T_{fi} , a matriz de transição não-relativística, e envolve o operador potencial V_{fi} , que aparece na equação de Schrödinger. A matriz T e a seção de choque relacionam-se através de

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{16\pi^2} |\langle \mathbf{l}' | T | \mathbf{l} \rangle|^2 = \frac{m^2}{16\pi^2} |T_{fi}|^2. \quad (3.22)$$

O análogo à equação de Lippmann-Schwinger na teoria de campos é a equação de Bethe-Salpeter [94], escrita como

$$\mathcal{M}(l', l | W) = \mathcal{K}(l', l | W) + \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} \mathcal{K}(l', \xi | W) G(\xi | W) \mathcal{M}(\xi, l | W), \quad (3.23)$$

ou, em notação simbólica (figura 3.2),

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} + \mathcal{K} G \mathcal{M}, \quad (3.24)$$

onde $\mathcal{M}$ é a amplitude relativística, $\mathcal{K}$ é o núcleo (kernel) da interação, que consiste no conjunto de todos os diagramas irreduzíveis¹, e G é a função de Green (livre) de duas partículas,

$$G(\xi | W) = i \left[\frac{1}{\frac{1}{2} \not{W} - \not{\xi} - m + i\epsilon} \right]^{(1)} \left[\frac{1}{\frac{1}{2} \not{W} + \not{\xi} - m + i\epsilon} \right]^{(2)}. \quad (3.25)$$

Figura 3.2: Representação gráfica da equação de Bethe-Salpeter.

¹Entende-se por diagramas irreduzíveis aqueles que não podem ser separados pelo corte de duas linhas internas, idênticas às externas.

A equação de Bethe-Salpeter, na grande maioria dos casos, só pode ser resolvida por meio de simplificações. A mais usada é a chamada aproximação de escada, onde o núcleo da interação é substituído pela troca de um bóson (figura 3.3).

Figura 3.3: A equação de Bethe-Salpeter, em aproximação de escada. A segunda linha é obtida substituindo a primeira linha recursivamente, gerando diagramas com aspecto de escada.

A abordagem que usamos neste trabalho vai além da aproximação de escada e é a mesma utilizada por Partovi e Lomon [63] que, por sua vez é uma generalização para férmions da desenvolvida por Blankenbecler e Sugar [29]. Ela consiste em reduzir a equação de Bethe-Salpeter a uma integral tridimensional, utilizando um propagador não-relativístico g que contém as mesmas singularidades de G apenas na região física². De acordo com Blankenbecler e Sugar, escrevemos o propagador relativístico como a soma de dois termos,

$$G = g + (G - g). \quad (3.26)$$

Pela própria definição de g , resulta que o segundo termo contém singularidades apenas na região não-física, já que o corte de duas partículas na região física foi cancelado. Voltaremos a discutir este aspecto ao longo deste capítulo.

A construção de g , dependente da variável $s = W^2$, é feita usando relações de dispersão, com a condição de que as estruturas singulares de G e g sejam as mesmas quando as duas partículas intermediárias estiverem na camada de massa. Isso é obtido supondo que G e g possuam a mesma descontinuidade (parte imaginária) do lado direito do plano complexo, mais precisamente, para valores físicos de s . A parte imaginária de G é obtida de maneira usual, através das regras de Cutkosky³. Esta é então colocada na relação de dispersão, conforme a expressão abaixo:

$$g(\xi | W) = 2\pi \int_0^\infty \frac{ds'}{s - s' + i\epsilon} \left[\frac{1}{2} \mathcal{W}' - \xi + m \right]^{(1)} \left[\frac{1}{2} \mathcal{W}' + \xi + m \right]^{(2)}$$

²O propagador relativístico contém, além das singularidades mencionadas, outras na região não-física, provenientes de estados com energia negativa.

³Os detalhes dessa construção são apresentados na referência [95].

$$\times \delta \left[\left(\frac{1}{2} W' - \xi \right)^2 - m^2 \right] \delta \left[\left(\frac{1}{2} W' + \xi \right)^2 - m^2 \right], \quad (3.27)$$

onde $W' = (\sqrt{s'}; 0, 0, 0)$.

A integral acima é facilmente calculável, lembrando que a função delta pode ser escrita como

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (3.28)$$

onde x_i são os zeros da função $f(x)$, com derivadas não-nulas nestes pontos. Portanto, escrevemos uma das funções delta na forma

$$\delta \left[\left(\frac{1}{2} W' - \xi \right)^2 - m^2 \right] = \frac{1}{2\beta} [\delta(\alpha - \xi_0 - \beta) + \delta(\alpha - \xi_0 + \beta)], \quad (3.29)$$

onde $\alpha = \sqrt{s'}/2$, $\beta = \sqrt{\xi_0^2 + (m^2 - \xi^2)}$, e $\xi_0 \pm \beta$ são as raízes de $\alpha^2 - 2\alpha\xi_0 - (m^2 - \xi^2) = 0$. Devido à região de integração, somente o primeiro termo do lado direito de (3.29) contribui.

A segunda função delta, após a integração, assume a forma

$$\delta \left[\left(\frac{1}{2} W' + \xi \right)^2 - m^2 \right] = \delta \left[\left(\frac{1}{2} W' - \xi \right)^2 - m^2 + 2\xi_0 \sqrt{s'} \right] \rightarrow \delta [4\xi_0 (\xi_0 + \beta)]. \quad (3.30)$$

Uma das condições para que o argumento se anule é que $\xi_0 + \beta = 0$, que só é verdade se $\xi^2 = m^2$ e $\xi_0 < 0$. Tal condição corresponde a uma região não física e, portanto, não a consideramos. A outra condição fornece

$$\delta [4\xi_0 (\xi_0 + \beta)] = \frac{\delta(\xi_0)}{4(\xi_0 + \beta)} = \frac{\delta(\xi_0)}{4\beta}. \quad (3.31)$$

Com essas informações, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} g(\xi | W) &= \frac{[\gamma_0 \bar{E}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\xi} + m]^{(1)} [\gamma_0 \bar{E}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\xi} + m]^{(2)}}{4\bar{E}(\boldsymbol{\xi}) [E^2 - \bar{E}(\boldsymbol{\xi})^2 + i\epsilon]} 2\pi \delta(\xi_0) \\ &= \frac{[\gamma_0 \bar{E}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\xi} + m]^{(1)} [\gamma_0 \bar{E}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\xi} + m]^{(2)}}{4\bar{E}(\boldsymbol{\xi}) [\mathbf{p}^2 - \boldsymbol{\xi}^2 + i\epsilon]} 2\pi \delta(\xi_0), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $\bar{E}(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\boldsymbol{\xi}^2 + m^2}$. Um detalhe importante é que g contém o propagador de Schrödinger, com a parte imaginária correta. O fator extra no denominador, $4\bar{E}(\boldsymbol{\xi})$, é necessário para a correta redução da equação de Bethe-Salpeter a uma forma do tipo Lippmann-Schwinger. As quantidades $\bar{\xi}_{\pm} = (\bar{E}(\boldsymbol{\xi}); \pm \boldsymbol{\xi})$ comportam-se como quadrivetores de partículas livres com massa m , permitindo escrever

$$\gamma_0 \bar{E}(\boldsymbol{\xi}) \mp \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\xi} + m = \bar{g}_{\pm} + m = \sum_s u(\pm \boldsymbol{\xi}, s) \bar{u}(\pm \boldsymbol{\xi}, s) = 2m \Lambda^+(\pm \boldsymbol{\xi}). \quad (3.33)$$

Na equação acima, $u(\pm \boldsymbol{\xi}, s)$ representa um espinor de energia positiva, com momento $\pm \boldsymbol{\xi}$ e spin s no referencial próprio, $\bar{u}(\pm \boldsymbol{\xi}, s)$ o seu espinor conjugado, e Λ^+ é o projetor de estados com energia positiva (apêndice A). Isso significa que, ao calcularmos o propagador g entre estados quaisquer de dois nucleons, somente contribuem as componentes de energia positiva.

O passo seguinte consiste em obter uma equação integral envolvendo g , partindo da equação de Bethe-Salpeter. Seguindo a idéia da equação (3.26), definimos um novo kernel efetivo de interação $\mathcal{U}$, tal que

$$\mathcal{M} = \mathcal{U} + \mathcal{U} g \mathcal{M}. \quad (3.34)$$

Reescrevemos a equação de Bethe-Salpeter como

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} + \mathcal{K} (G - g) \mathcal{M} + \mathcal{K} g \mathcal{M} = \mathcal{K} + \mathcal{K} (G - g) \mathcal{U} + [\mathcal{K} + \mathcal{K} (G - g) \mathcal{U}] g \mathcal{M}, \quad (3.35)$$

onde usamos a definição (3.34). A comparação entre as equações (3.34) e (3.35) permite-nos relacionar os núcleos de interação $\mathcal{U}$ e $\mathcal{K}$ através de

$$\mathcal{U} = \mathcal{K} + \mathcal{K} (G - g) \mathcal{U}, \quad (3.36)$$

que pode ser interpretado como o operador $\mathcal{U}$ evoluindo a partir de $\mathcal{K}$, por meio do propagador $G - g$.

Devido ao cancelamento do corte físico em tal propagador, é de se esperar que $\mathcal{U}$ tenha uma dependência fraca com a energia nas proximidades do limiar em $W = 2m$. No apêndice E mostramos que isso de fato ocorre, ao subtrairmos da amplitude gerada pelo diagrama do tipo caixa a iteração do OPEP (diagramas (b) e (c) da figura 4.1).

Neste ponto vamos para o sistema de centro de massa e definimos $\bar{\mathcal{M}}$ e $\bar{\mathcal{U}}$, respectivamente, os elementos de matriz dos operadores $\mathcal{M}$ e $\mathcal{U}$, entre estados de dois nucleons⁴:

$$\bar{\mathcal{M}} = \langle \bar{u}^{(1)}(-\boldsymbol{l}', s'_1) \bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{l}', s'_2) | \mathcal{M}(l', l'^0 = 0; l, l^0 = 0 | W) | u^{(1)}(-\boldsymbol{l}, s_1) u^{(2)}(\boldsymbol{l}, s_2) \rangle, \quad (3.37)$$

e analogamente para $\bar{\mathcal{U}}$. A partir das equações (3.34) e (3.33) escrevemos

$$\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{l}', \boldsymbol{l} | W) = \bar{\mathcal{U}}(\boldsymbol{l}', \boldsymbol{l} | W) + \int \frac{d^3 \boldsymbol{\xi}}{(2\pi)^3} \bar{\mathcal{U}}(\boldsymbol{l}', \boldsymbol{\xi} | W) \frac{1}{4\bar{E}(\boldsymbol{\xi})m} \frac{m}{[\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{\xi}^2 + i\epsilon]} \bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{l} | W). \quad (3.38)$$

O fator $\delta(\xi_0)$ no propagador g , equação (3.32), permitiu reduzir uma equação integral quadridimensional para uma tridimensional, parecida com a de Lippmann-Schwinger. Note que o produto $\bar{\mathcal{U}}\mathcal{M}$ dentro da integral, devido à equação (3.33), envolve apenas estados de energia positiva.

⁴As condições $l^0 = l'^0 = 0$ decorrem de estarmos no referencial de centro de massa.

Por fim definimos o potencial, comparando a equação acima com a de Lippmann-Schwinger. O lado esquerdo das equações (3.21) e (3.38), que são respectivamente as amplitudes não-relativística e relativística, relacionam-se a partir da seção de choque diferencial. No caso relativístico ela é dada, no referencial do centro de massa, por

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{C.M.} = \left| \frac{\bar{\mathcal{M}}_{fi}}{8\pi W} \right|^2 \quad (3.39)$$

Comparando com a equação (3.22) obtemos a relação

$$T_{fi} = \frac{1}{4Em} \bar{\mathcal{M}}_{fi}, \quad (3.40)$$

que é válida apenas para processos de espalhamento, quando os nucleons estão na camada de massa. De acordo com Partovi e Lomon, estabelecemos a seguinte relação entre T e $\bar{\mathcal{M}}$, para nucleons fora da camada de massa:

$$T(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) = \frac{1}{\sqrt{4\bar{E}(\mathbf{l}')m}} \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) \frac{1}{\sqrt{4\bar{E}(\mathbf{l})m}}. \quad (3.41)$$

Esta generalização permite-nos fazer uma comparação direta das equações (3.21) e (3.38), a partir da qual obtemos a definição para o potencial:

$$V(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) = \frac{1}{\sqrt{4\bar{E}(\mathbf{l}')m}} \bar{\mathcal{U}}(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) \frac{1}{\sqrt{4\bar{E}(\mathbf{l})m}}. \quad (3.42)$$

Essa equação depende crucialmente da forma como extrapolamos (3.40) para fora da camada de massa. Uma justificativa bastante convincente para usarmos (3.41) vem da condição de unitariedade elástica satisfeita por $\bar{\mathcal{M}}$:

$$i \left[\bar{\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) - \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) \right] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\xi \bar{\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{l}', \boldsymbol{\xi} | W) \frac{\delta(2\bar{E}(\boldsymbol{\xi}) - 2E)}{4\bar{E}(\boldsymbol{\xi})^2} \bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{l} | W). \quad (3.43)$$

Usando a propriedade (3.28), escrevemos a função delta como

$$\delta(2\bar{E}(\boldsymbol{\xi}) - 2E) = \bar{E}(\boldsymbol{\xi}) \delta(\boldsymbol{\xi}^2 - \mathbf{p}^2). \quad (3.44)$$

Imediatamente, vemos que a definição (3.41) fornece

$$i \left[T^\dagger(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) - T(\mathbf{l}', \mathbf{l} | W) \right] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\xi T^\dagger(\mathbf{l}', \boldsymbol{\xi} | W) \delta(\boldsymbol{\xi}^2 - \mathbf{p}^2) T(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{l} | W), \quad (3.45)$$

que é a condição de unitariedade elástica para a amplitude não-relativística.

Em resumo, com a ajuda do propagador g foi possível definir um potencial V que reproduz a amplitude relativística, quando usado na equação de Schrödinger. O objeto que faz a conexão

entre os mundos relativístico e não-relativístico é o operador $\mathcal{U}$, que aparece (como elemento de matriz) na expressão para o potencial e é obtido perturbativamente, a partir de (3.36):

$$\mathcal{U}^{(2)} = \mathcal{K}^{(2)}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{U}^{(4)} = \mathcal{K}^{(4)} + \mathcal{K}^{(2)} (G - g) \mathcal{K}^{(2)}, \quad (3.47)$$

e assim por diante. A identificação com os diagramas perturbativos da teoria de campos agora fica mais evidente: $\mathcal{U}^{(2)}$ e $\mathcal{U}^{(4)}$ geram, respectivamente, os potenciais devidos às trocas de um e dois píons. Na equação (3.47), $\mathcal{K}^{(4)}$ representa os gráficos irreduzíveis da troca de dois píons, o termo $\mathcal{K}^{(2)} G \mathcal{K}^{(2)}$ corresponde ao diagrama do tipo caixa, e $\mathcal{K}^{(2)} g \mathcal{K}^{(2)}$, à iteração da troca de um pión.

Para encerrar esta seção, apresentamos as relações entre o potencial e as amplitudes relativística e não-relativística. A substituição recursiva da equação de Lippmann-Schwinger fornece

$$T^{(2)} = V^{(2)}, \quad (3.48)$$

$$T^{(4)} = V^{(4)} + V^{(2)} g_s V^{(2)} = V^{(4)} + T^{(2)} g_s T^{(2)}, \quad (3.49)$$

onde g_s é o propagador de Schrödinger, $g_s = m [\mathbf{p}^2 - \boldsymbol{\xi}^2 + i\epsilon]^{-1}$. Da última equação temos

$$V^{(4)} = T^{(4)} - T^{(2)} g_s T^{(2)}. \quad (3.50)$$

Para a equação de Bethe-Salpeter temos

$$\mathcal{M}^{(2)} = \mathcal{K}^{(2)}, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{M}^{(4)} = \mathcal{K}^{(4)} + \mathcal{K}^{(2)} G \mathcal{K}^{(2)}. \quad (3.52)$$

Substituindo a última linha em (3.47) chegamos a

$$\mathcal{U}^{(4)} = \mathcal{M}^{(4)} - \mathcal{M}^{(2)} g \mathcal{M}^{(2)}, \quad (3.53)$$

que é consistente com (3.50) e com as definições (3.41) e (3.42).

Neste trabalho, para determinar o potencial NN devido à troca de dois píons, calculamos inicialmente a matriz $\mathcal{M}^{(4)}$, usando teoria de campos. Em seguida obtemos $\mathcal{U}^{(4)}$, usando a equação (3.53) e, finalmente, o potencial, por meio da equação (3.42).

3.3 Formulação geral

A amplitude πN é o ingrediente básico na construção do potencial NN devido à troca de dois píons, conforme discutido anteriormente. A possibilidade de usar os parâmetros da amplitude

πN para descrever essa componente do potencial foi mostrada na década de 70, independentemente, pelos grupos de Paris [62] e Stony Brook [61], usando relações de dispersão. Nesta seção apresentamos, de forma bastante genérica, como construir o TPEP partindo dessas idéias. Seu conteúdo dinâmico, a ser discutido no capítulo 4, é determinado pela forma como tratamos a amplitude πN (seção 2.3).

O potencial NN devido ao TPE está esquematicamente representado na figura abaixo, de acordo com a equação (3.53).

Figura 3.4: Construção da amplitude NN devida à troca de dois píons.

A amplitude $\mathcal{M}^{(4)}$ tem a forma geral dada por

$$\mathcal{M}^{(4)} = -\frac{i}{2!} \int [\cdots] [T_{\pi N}]^{(1)} [T_{\pi N}]^{(2)}, \quad (3.54)$$

onde

$$\int [\cdots] = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \frac{1}{(k'^2 - \mu^2)}. \quad (3.55)$$

A variável de integração Q , bem como as quantidades W , z e q que usaremos no trabalho, estão definidas na seção 3.1.

A estrutura de isospin da amplitude πN , dada por (2.7), permite-nos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(4)} &= -\frac{i}{2!} \int [\cdots] \left\{ 3 [T^+]^{(1)} [T^+]^{(2)} + 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} [T^-]^{(1)} [T^-]^{(2)} \right\} \\ &= 3 \mathcal{M}^{(4)+} + 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \mathcal{M}^{(4)-}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

A estrutura de spin é dada por (2.10),

$$T^\pm = \bar{u}(\mathbf{p}') \left\{ D^\pm - i \sigma_{\rho\lambda} \frac{(p' - p)^\rho}{2m} Q^\lambda B^\pm \right\} u(\mathbf{p}), \quad (3.57)$$

o que nos permite escrever as amplitudes $\mathcal{M}^{(4)\pm}$ como

$$\mathcal{M}^{(4)\pm} = [\bar{u}u]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \mathcal{I}_{DD}^\pm$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ [\bar{u}u]^{(1)} \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(2)} \mathcal{I}_{DB}^{\lambda\pm} + \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \mathcal{I}_{DB}^{\lambda\pm} \right\} \\
& + \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(1)} \left[\bar{u} i \sigma_{\nu\rho} \frac{(p' - p)^\nu}{2m} u \right]^{(2)} \mathcal{I}_{BB}^{\lambda\rho\pm}, \tag{3.58}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{DD}^\pm &= -\frac{i}{2} \int[\dots] D^{(1)\pm} D^{(2)\pm}, & \mathcal{I}_{DB}^{\lambda\pm} &= -\frac{i}{2} \int[\dots] Q^\lambda D^{(1)\pm} B^{(2)\pm}, \\
\mathcal{I}_{BD}^{\lambda\pm} &= -\frac{i}{2} \int[\dots] Q^\lambda B^{(1)\pm} D^{(2)\pm}, & \mathcal{I}_{BB}^{\lambda\rho\pm} &= -\frac{i}{2} \int[\dots] Q^\lambda Q^\rho B^{(1)\pm} B^{(2)\pm}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

A decomposição tensorial das funções acima é feita em termos das variáveis q , z e W , que são combinações dos momentos externos. Usando a condição da camada de massa para os nucleons externos ($\bar{u} \not{q} u = 0$), as igualdades $(p'_1 - p_1) = -(p'_2 - p_2) = q$ e a anti-simetria de $\sigma_{\mu\nu}$, notamos que termos proporcionais a q^λ e $q^\lambda q^\rho$ não contribuem para a amplitude $\mathcal{M}^{(4)}$. Escrevemos, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{DB}^{\lambda\pm} &= \frac{W^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(w)\pm} + \frac{z^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(z)\pm}, \\
\mathcal{I}_{BD}^{\lambda\pm} &= \frac{W^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(w)\pm} - \frac{z^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(z)\pm}, \\
\mathcal{I}_{BB}^{\lambda\rho\pm} &= \frac{W^\lambda W^\rho}{4m^2} \mathcal{I}_{BB}^{(w)\pm} + \frac{z^\lambda z^\rho}{4m^2} \mathcal{I}_{BB}^{(z)\pm} + g^{\lambda\rho} \mathcal{I}_{BB}^{(g)\pm}, \tag{3.60}
\end{aligned}$$

e a amplitude relativística passa a ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(4)\pm} &= [\bar{u}u]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \mathcal{I}_{DD}^\pm \\
& - \left\{ [\bar{u}u]^{(1)} \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(2)} + \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \right\} \frac{W^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(w)\pm} \\
& - \left\{ [\bar{u}u]^{(1)} \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(2)} - \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \right\} \frac{z^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(z)\pm} \\
& + \left[\bar{u} i \sigma_{\mu\lambda} \frac{(p' - p)^\mu}{2m} u \right]^{(1)} \left[\bar{u} i \sigma_{\nu\rho} \frac{(p' - p)^\nu}{2m} u \right]^{(2)} \\
& \times \left\{ \frac{W^\lambda W^\rho}{4m^2} \mathcal{I}_{BB}^{(w)\pm} + \frac{z^\lambda z^\rho}{4m^2} \mathcal{I}_{BB}^{(z)\pm} + g^{\lambda\rho} \mathcal{I}_{BB}^{(g)\pm} \right\}. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Neste ponto ressaltamos que esta expressão é covariante, pois as integrais de *loop*, definidas em (3.60), são calculadas relativisticamente. Os passos subsequentes quebram essa covariância,

mas o resultado final ainda pode ser expresso em termos das integrais de *loop* relativísticas. Temos, assim, um controle maior sobre as expansões não-relativísticas, ao contrário do que acontece no formalismo de bárion pesado, que é essencialmente não-relativístico.

Para obtermos o potencial no espaço de momento, $V^\pm(\mathbf{q})$, particularizamos os resultados para o sistema de centro de massa e subtraímos a iteração do OPEP, dada por $\mathcal{M}^{(2)} g \mathcal{M}^{(2)}$. Como discutimos no apêndice E, esta contribuição também pode ser decomposta tensorialmente como $\mathcal{M}^{(4)}$, o que define as funções $\mathcal{I}_{it}$. Isso nos permite expressar $\mathcal{U}^{(4)}$ numa forma totalmente análoga à equação (3.61), onde as funções de perfil $\mathcal{I}$ são substituídas por $\hat{\mathcal{I}} = \mathcal{I} - \mathcal{I}_{it}$.

Em seguida, reescrevemos esta expressão em termos de matrizes 2x2 sem efetuar aproximações, usando os resultados do apêndice G, e dividimos pelo fator $4Em$, presente na definição do potencial (equação (3.42)). O resultado é então escrito em termos dos operadores

$$\Omega_C = \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)}, \quad (3.62)$$

$$\Omega_{LS} = \frac{i}{4} (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}), \quad (3.63)$$

$$\Omega_T = \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - 3 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{q} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{q}, \quad (3.64)$$

$$\Omega_{SS} = \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \quad (3.65)$$

$$\Omega_Q = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}). \quad (3.66)$$

Os coeficientes destes operadores são identificados com as componentes do potencial no espaço de momento, de acordo com a seguinte equação:

$$V^\pm(\mathbf{q}) = \tau^\pm \frac{\mathcal{U}^{(4)\pm}}{4E^2} = V_C^\pm(q) \Omega_C + V_{LS}^\pm(q) \frac{\Omega_{LS}}{m^2} + V_T^\pm(q) \frac{\Omega_T}{m^2} + V_{SS}^\pm(q) \frac{\Omega_{SS}}{m^2} + V_Q^\pm(q) \frac{\Omega_Q}{m^4}, \quad (3.67)$$

onde $\tau^+ = 3$ e $\tau^- = 2$ são os fatores de isospin, q no argumento é o módulo do trivetor $\mathbf{q}$, e V_C , V_{LS} , V_T , V_{SS} e V_Q são, respectivamente, as componentes central, spin-órbita, tensor, spin-spin e spin-órbita ao quadrado.

A redução dos espinores está apresentada com detalhes no apêndice G. Comparando o resultado (G.46) com a equação acima identificamos as componentes do TPEP no espaço de momento:

$$\begin{aligned} V_C^\pm(q) = & \tau^\pm \frac{m}{E} \left\{ \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right)^2 \hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm - \frac{\mathbf{q}^2}{2m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right) \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} \right. \\ & - \frac{\mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2}{2m^2 \lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} + \frac{(\mathbf{q}^2)^2}{16m^4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right)^2 \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)\pm} - \frac{(\mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2)^2}{16m^4 \lambda^4} \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(z)\pm} \\ & \left. + \frac{(\mathbf{q}^2)^2}{16m^4} \left(1 + \frac{4m^2 \mathbf{z}^2}{\lambda^4}\right) \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} \right\}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
V_{LS}^{\pm}(q) = & \tau^{\pm} \frac{m}{E} \left\{ -\frac{4m^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} \right) \hat{\mathcal{I}}_{DD}^{\pm} + \left(1 + \frac{2\mathbf{q}^2}{\lambda^2} \right) \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \right) \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} \right. \\
& + \left[\left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} \right) + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{2\mathbf{q}^2}{\lambda^2} \right) \right] \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} - \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \right)^2 \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)\pm} \\
& \left. + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \right) \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(z)\pm} - \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \left[1 + \frac{4m^2}{\lambda^2} \left(\frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} + 1 \right) \right] \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} \right\}, \quad (3.69)
\end{aligned}$$

$$V_T^{\pm}(q) = \tau^{\pm} \frac{m}{E} \left\{ -\frac{1}{12} \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} \right\}, \quad (3.70)$$

$$V_{SS}^{\pm}(q) = \tau^{\pm} \frac{m}{E} \left\{ -\frac{1}{6} \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} \right\}, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}
V_Q^{\pm}(q) = & \tau^{\pm} \frac{m}{E} \left\{ -\frac{m^4}{\lambda^4} \hat{\mathcal{I}}_{DD}^{\pm} + \frac{m^2}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \right) \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} + \frac{m^2}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \right) \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} \right. \\
& - \frac{1}{16} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \right)^2 \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)\pm} + \frac{1}{16} \left(1 + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \right)^2 \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(z)\pm} \\
& \left. - \frac{1}{16} \left[1 + \frac{4m^2}{\lambda^2} \left(\frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} + 2 \right) \right] \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} \right\}, \quad (3.72)
\end{aligned}$$

onde $\lambda^2 = 4m(E + m)$.

3.4 O potencial até ordem q^4

As componentes do nosso TPEP são dadas pelas equações (3.68)-(3.72). Como pode ser observado no apêndice G, estas expressões não envolvem aproximações. Portanto, se mantivermos o cálculo original das funções de perfil $\hat{\mathcal{I}}_{XY}^{\pm}$ (resultados completos), teremos um potencial incluindo todas as correções relativísticas. Neste trabalho consideramos o potencial até $\mathcal{O}(q^4)$. Para tanto, expandimos o fator λ^2 , proveniente dos espinores, em potências nas variáveis $\mathbf{p}$ e $\mathbf{z}$. Para obtemos as expressões finais do nosso potencial fazemos ainda algumas considerações, que envolvem apenas as funções de perfil. Por ser bem geral e não depender de modelos, apresentamos a seguir a expansão dos termos espinoriais, deixando o tratamento das funções de perfil para o capítulo 4.

Nas expressões (3.62)-(3.66) observamos que os operadores Ω_C , $\{\Omega_{SS}, \Omega_T, \Omega_{LS}\}$ e Ω_Q contribuem, respectivamente, em ordem q^0 , q^2 e q^4 . Portanto, para obtermos um potencial até ordem q^n , basta considerarmos $V_C^{\pm}$, $\{V_{SS}^{\pm}, V_T^{\pm}, V_{LS}^{\pm}\}$ e $V_Q^{\pm}$ até ordem q^n , q^{n-2} e q^{n-4} que, no nosso trabalho, resume-se a $V_C^{\pm} \rightarrow \mathcal{O}(q^4)$, $\{V_{SS}^{\pm}, V_T^{\pm}, V_{LS}^{\pm}\} \rightarrow \mathcal{O}(q^2)$ e $V_Q^{\pm} \rightarrow \mathcal{O}(q^0)$. Expandindo as partes espinoriais até as respectivas ordens temos

$$\begin{aligned}
V_C^\pm = & \tau^\pm \frac{m}{E} \left\{ \hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm + \frac{q^2}{4m^2} \left[2\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} - \hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm \right] \right. \\
& \left. + \frac{q^2}{4m^2} \left[\frac{q^2}{4m^2} \left(\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)\pm} - 2\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} + \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} \right) - \frac{z^2}{4m^2} \left(\frac{1}{4}\hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm + \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} + \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} \right) \right] \right\}, \quad (3.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{LS}^\pm = & \tau^\pm \frac{m}{E} \left\{ -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm + \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} + \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} \right. \\
& + \frac{q^2}{4m^2} \left[-\frac{1}{2}\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} + \frac{3}{2}\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} - \frac{3}{2}\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} + \frac{1}{8}\hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm + \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)\pm} \right] \\
& \left. - \frac{z^2}{4m^2} \left[\frac{1}{2}\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} + \frac{1}{8}\hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm \right] \right\}, \quad (3.74)
\end{aligned}$$

$$V_T^\pm = \frac{1}{2} V_{SS}^\pm = \tau^\pm \frac{m}{E} \left[-\frac{1}{12} \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} \right], \quad (3.75)$$

$$V_Q^\pm = \tau^\pm \frac{m}{E} \left\{ -\frac{1}{64} \hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm + \frac{1}{16} \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)\pm} - \frac{1}{8} \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)\pm} + \frac{1}{16} \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} + \frac{1}{16} \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(z)\pm} - \frac{1}{16} \hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)\pm} \right\}. \quad (3.76)$$

As expressões acima são bem gerais, dependendo apenas das definições das funções $\hat{\mathcal{I}}_{XY}^\pm$. Estas dependem essencialmente das sub-amplitudes D e B , revelando a importância do processo πN na descrição dinâmica do TPEP. Por ser um elemento fundamental do nosso trabalho, o tratamento das funções $\mathcal{I}_{XY}^\pm$ é apresentado em detalhe no próximo capítulo.

Capítulo 4

O potencial no espaço de momento

No capítulo anterior, chegamos às expressões para as componentes do potencial até $\mathcal{O}(q^4)$, em termos das funções de perfil $\hat{\mathcal{I}}_{XY}^\pm$, que incorporam a dinâmica do TPEP. O tratamento destas funções é feito em quatro etapas. Inicialmente, obtemos a expressão de cada integral partindo diretamente das equações (3.59), que chamaremos de resultados completos. Em seguida, utilizamos várias relações entre integrais de *loop* para obter os resultados intermediários, mais simples, e que exibem explicitamente a escala quiral apropriada. Numa terceira etapa, simplificamos ainda mais os resultados intermediários, considerando o potencial até $\mathcal{O}(q^4)$. Desta forma obtemos, pela primeira vez na literatura, o potencial até ordem q^4 calculado por meio de perturbação quiral relativística. Por fim, expandimos as integrais de *loop* usando os resultados da seção 4.6, o que permite uma comparação direta com os resultados do formalismo de bárion pesado.

4.1 Dinâmica

A dinâmica do TPEP é determinada a partir da sub-amplitude πN , representada na figura 2.9. A multiplicação das duas sub-amplitudes, tal como esquematizada na figura 3.1, resulta nos diagramas da figura 4.1, classificados em três famílias distintas.

A primeira família corresponde à realização mínima da simetria quiral, envolvendo integrais de um *loop*, e completamente determinada pelas constantes (nos seus valores físicos) m , g e f_π . Os dois primeiros gráficos da figura 4.1 (cruzado e caixa, respectivamente) correspondem aos produtos dos termos de Born pseudovetorial e contêm dois propagadores nucleônicos, além dos dois piônicos. O terceiro diagrama representa a subtração do OPEP iterado, apresentado e discutido em detalhes no apêndice E. Os demais diagramas da primeira linha são do tipo triângulo e bolha, contendo um ou nenhum propagador nucleônico, devido à presença do termo (de contato) de Weinberg-Tomozawa.

A segunda família, também determinada por m , g e f_π , envolve diagramas de dois *loops*, resultantes da combinação dos três primeiros diagramas com o quarto e o quinto da figura 2.9. Essa família surge por considerarmos as contribuições não-polinomiais em t dos gráficos (k) e (l) da figura 2.7 que, no espaço de configuração, dão origem a termos com alcance médio, conforme discutido no capítulo 2.

Figura 4.1: Estrutura dinâmica do TPEP. Na primeira linha, temos os diagramas de um *loop* com graus de liberdade envolvendo apenas píons e nucleons (família I), na segunda, os diagramas de dois *loops* (família II) e na terceira, os diagramas de um *loop* envolvendo outros graus de liberdade, parametrizados nos coeficientes HJS (família III).

Por fim, temos a terceira família, envolvendo os coeficientes HJS, e que é formada pela combinação do último com os três primeiros diagramas da figura 2.9, bem como com ele mesmo. Como podemos observar na terceira linha da figura 4.1, essa família só envolve diagramas do tipo triângulo e bolha.

As outras combinações possíveis (por exemplo, dois *loops* com os coeficientes HJS) não foram levadas em conta, por contribuírem em ordem superior à que estamos considerando nesse trabalho, $\mathcal{O}(q^4)$.

4.2 Funções de perfil

As funções de perfil $\mathcal{I}_{XY}^\pm$ são calculadas a partir das equações (3.59), usando as sub-amplitudes πN dadas pelas equações (C.11)-(C.18), e a multiplicação resultante é expressa em termos de integrais de *loop*. Tomemos, como exemplo, a componente $\mathcal{I}_{DD}^+$ da família I, escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{DD}^+ &= -\frac{i}{2} \frac{g^4}{4m^2} \int [\dots] \left[2 + \frac{Q \cdot (W+z)}{u_1 - m^2} - \frac{Q \cdot (W+z)}{s_1 - m^2} \right] \left[2 + \frac{Q \cdot (W-z)}{u_2 - m^2} - \frac{Q \cdot (W-z)}{s_2 - m^2} \right] \\ &= -\frac{ig^4}{8m^2} \left\{ 4I_{cc} + 2 \frac{(W+z)_\mu}{2m} [I_{uc}^\mu - I_{sc}^\mu] + 2 \frac{(W-z)_\mu}{2m} [I_{cu}^\mu - I_{cs}^\mu] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(W+z)_\mu}{2m} \frac{(W-z)_\nu}{2m} \left[I_{uu}^{\mu\nu} - I_{us}^{\mu\nu} - I_{su}^{\mu\nu} + I_{ss}^{\mu\nu} \right] \Big\}, \quad (4.1)$$

onde as funções I são integrais de *loop*, definidas no apêndice B, equações (B.1)-(B.4). Na notação empregada, a primeira letra no subíndice corresponde ao nucleon 1, e a segunda, ao nucleon 2. Usamos as letras u e s para representar termos contendo um propagador nucleônico no respectivo canal, e a letra c (de contato), para indicar a ausência de propagador. Por exemplo, I_{uc} indica uma integral de *loop*, com um propagador do nucleon 1 no canal u , e sem o propagador do nucleon 2. Pode-se constatar que as integrais $[I_{uc}, I_{uu}, I_{su}]$ são obtidas a partir das integrais $[I_{sc}, I_{ss}, I_{us}]$ trocando os sinais de z e W , e que a permutação dos nucleons 1 e 2 (por exemplo, $I_{sc} \rightarrow I_{cs}$) corresponde à troca de sinal apenas da variável z .

Quanto aos índices de Lorentz, representam componentes do quadrivetor Q/μ no numerador do integrando. Tal estrutura é escrita em termos dos momentos externos, de acordo com as expressões abaixo:

$$I = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi^{000}, \quad (4.2)$$

$$I^\mu = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{z^\mu}{2m} \Pi^{010} + \frac{W^\mu}{2m} \Pi^{001} \right], \quad (4.3)$$

$$I^{\mu\nu} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{q^\mu q^\nu}{\mu^2} \Pi^{200} + \frac{z^\mu z^\nu}{4m^2} \Pi^{020} + \left[\frac{z^\mu W^\nu}{4m^2} + \frac{W^\mu z^\nu}{4m^2} \right] \Pi^{011} + \frac{W^\mu W^\nu}{4m^2} \Pi^{002} + g^{\mu\nu} \bar{\Pi}^{000} \right\}, \quad (4.4)$$

e assim por diante. As funções Π são integrais de Feynman, adimensionais, e que variam relativamente pouco quando aumentamos, de várias ordens de magnitude, o valor da massa do nucleon. Isso permite que elas sejam computadas como objetos de ordem q^0 na contagem quiral, pois dependem apenas das combinações $\{q/\mu, z/\mu\} \rightarrow \mathcal{O}(q^0)$ e $\mu/m \rightarrow \mathcal{O}(q)$.

Nas decomposições acima, levamos em conta o fato do integrando ser simétrico pela troca $q \rightarrow -q$, excluindo potências ímpares dessa variável. Existem, ainda, outras simplificações para casos particulares. Como as integrais do tipo bolha não dependem de W ou z , temos que $\Pi_{cc}^{lmn} = 0$, para quaisquer m e n diferentes de zero. A decomposição tensorial de I_{cc} é, portanto, dada pelas equações (B.42)-(B.44). Para as integrais do tipo triângulo, a dependência nas variáveis W e z ocorre apenas nas combinações $W \pm z$, resultando nas estruturas (B.45)-(B.47). Por fim, as integrais do tipo cruzado e caixa são, respectivamente, simétricas pela troca $z \rightarrow -z$ e $W \rightarrow -W$, fornecendo as decomposições tensoriais (B.48)-(B.50) e (B.51)-(B.53). As integrais escalares Π^{lmn} são calculadas via parametrização de Feynman, tal como apresentada no apêndice B.

Com auxílio das decomposições tensoriais das integrais de *loop*, as funções de perfil são escritas em termos das integrais Π^{lmn} . No nosso exemplo, a equação (4.1) fica

$$\mathcal{I}_{DD}^+ = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{4m^2} \left\{ 2\Pi_{cc}^{000} + 4 \frac{W^2 + z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{001} + \left(\frac{W^2}{4m^2} \right)^2 \left[\Pi_{ss}^{002} - \Pi_{us}^{002} \right] \right\}$$

$$-\left(\frac{z^2}{4m^2}\right)^2 \left[\Pi_{ss}^{020} - \Pi_{us}^{020} \right] + \frac{W^2 - z^2}{4m^2} \left[\bar{\Pi}_{ss}^{000} - \bar{\Pi}_{us}^{000} \right] \Big\}. \quad (4.5)$$

4.3 Contagem de potências

Vimos, na seção 3.4, que o potencial até $\mathcal{O}(q^n)$ é determinado por

$$V_C^\pm \rightarrow \mathcal{O}(q^n), \quad (4.6)$$

$$\{V_{SS}^\pm, V_T^\pm, V_{LS}^\pm\} \rightarrow \mathcal{O}(q^{n-2}), \quad (4.7)$$

$$V_Q^\pm \rightarrow \mathcal{O}(q^{n-4}). \quad (4.8)$$

Isto significa que precisamos de

$$\mathcal{I}_{DD}^\pm \rightarrow \mathcal{O}(q^n), \quad (4.9)$$

$$\{\mathcal{I}_{DB}^{(w)\pm}, \mathcal{I}_{DB}^{(z)\pm}, \mathcal{I}_{BB}^{(g)\pm}\} \rightarrow \mathcal{O}(q^{n-2}), \quad (4.10)$$

$$\{\mathcal{I}_{BB}^{(w)\pm}, \mathcal{I}_{BB}^{(z)\pm}\} \rightarrow \mathcal{O}(q^{n-4}). \quad (4.11)$$

Um aspecto interessante de se analisar é a partir de que ordem as funções $\mathcal{I}_{XY}^\pm$ começam a contribuir. Discutiremos, agora, como as ordens quirais destas funções estão conectadas com as da amplitude πN . Isso envolve uma sutileza, relacionada ao fato de que D_{pv}^+ e B_{pv}^- contêm cancelamentos quirais.

Uma sub-amplitude genérica $\mathcal{I}_{XY}^\pm$ é dada pelo produto das contribuições πN correspondentes e temos

$$\mathcal{I}_{XY}^\pm = \int [\cdots] \left\{ [X_{pv}^\pm]^{(1)} [Y_{pv}^\pm]^{(2)} + [X_{pv}^\pm]^{(1)} [Y_R^\pm]^{(2)} + [X_R^\pm]^{(1)} [Y_{pv}^\pm]^{(2)} + [X_R^\pm]^{(1)} [Y_R^\pm]^{(2)} \right\}. \quad (4.12)$$

O elemento de volume na integração de *loop*, combinado com os dois propagadores piônicos, não interfere na contagem quiral, uma vez que $\int [\cdots] \rightarrow \mathcal{O}(q^0)$. Este permanece simétrico na troca $Q \rightarrow -Q$, resultando na troca $s \leftrightarrow u$ nos termos de Born. No caso $[X_{pv}^\pm]^{(1)} [Y_{pv}^\pm]^{(2)}$, isto nos permite usar

$$\left(\frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2} \right)^{(i)} \left(\frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2} \right)^{(j)} \rightarrow 2 \left(\frac{1}{s-m^2} \right)^{(i)} \left(\frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2} \right)^{(j)} \quad (4.13)$$

no integrando. Para componentes específicas isso resulta em

$$[D_{pv}^+]^{(i)} [D_{pv}^+]^{(j)} \rightarrow \mathcal{O}(q^3), \quad [D_{pv}^-]^{(i)} [D_{pv}^-]^{(j)} \rightarrow \mathcal{O}(q^2),$$

$$\begin{aligned} [D_{pv}^+]^{(i)} [QB_{pv}^+]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q), & [D_{pv}^-]^{(i)} [QB_{pv}^-]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q), \\ [QB_{pv}^+]^{(i)} [QB_{pv}^+]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q^0), & [QB_{pv}^-]^{(i)} [QB_{pv}^-]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q). \end{aligned}$$

Estes resultados mostram que, dentro da integral, D_{pv}^+ e B_{pv}^- não podem ser sempre contados como $\mathcal{O}(q^2)$ e $\mathcal{O}(q^0)$ respectivamente. Para os produtos $[X_R^\pm]^{(i)} [Y_R^\pm]^{(j)}$ e $[X_R^\pm]^{(i)} [Y_{pv}^\pm]^{(j)}$, usamos

$$\left(\frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2} \right)^{(i)} \rightarrow 2 \left(\frac{1}{s-m^2} \right)^{(i)} \quad (4.14)$$

e temos $D_{pv}^\pm \rightarrow \mathcal{O}(q)$ and $B_{pv}^\pm \rightarrow \mathcal{O}(q^{-1})$. Supondo que $[X_R^\pm]^{(i)}, [Y_R^\pm]^{(j)} \rightarrow \mathcal{O}(q^r)$, obtemos

$$\begin{aligned} [D_{pv}^\pm]^{(i)} [D_R^\pm]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q^{1+r}), & [D_{pv}^\pm]^{(i)} [QB_R^\pm]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q^{2+r}), \\ [D_R^\pm]^{(i)} [QB_{pv}^\pm]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q^r), & [QB_{pv}^\pm]^{(i)} [QB_R^\pm]^{(j)} &\rightarrow \mathcal{O}(q^{1+r}). \end{aligned}$$

Finalmente, para o caso $[X_R^\pm]^{(i)} [Y_R^\pm]^{(j)}$, simplesmente adicionamos as potências quirais correspondentes.

Neste trabalho consideramos a expansão do potencial até $\mathcal{O}(q^4)$, logo necessitamos nossas integrais até as seguintes ordens:

$$\mathcal{I}_{DD}^\pm \rightarrow \mathcal{O}(q^4), \quad (4.15)$$

$$\{\mathcal{I}_{DB}^{(w)\pm}, \mathcal{I}_{DB}^{(z)\pm}, \mathcal{I}_{BB}^{(g)\pm}\} \rightarrow \mathcal{O}(q^2), \quad (4.16)$$

$$\{\mathcal{I}_{BB}^{(w)\pm}, \mathcal{I}_{BB}^{(z)\pm}\} \rightarrow \mathcal{O}(q^0). \quad (4.17)$$

Isto significa que, para a amplitude intermediária πN , basta considerarmos $D_R^\pm$ até $\mathcal{O}(q^3)$ e $B_R^\pm$ até $\mathcal{O}(q)$, conforme citado no capítulo 2.

4.4 Resultados completos

Nesta seção, apresentamos os resultados completos para as funções de perfil $\mathcal{I}_{XY}^\pm$, obtidos pela multiplicação direta das subamplitudes πN , tal como discutido nas seções anteriores. Os cálculos estão indicados no apêndice D, e os resultados, escritos abaixo:

família I (diagramas a+b+c+d+e+f)

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^+ &= \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ 2 \Pi_{cc}^{(000)} - 4 \frac{W^2+z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{z^4}{16m^4} \Pi_{ss}^{(020)} + \frac{W^4}{16m^4} \Pi_{ss}^{(002)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{W^2-z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} - \frac{z^4}{16m^4} \Pi_{reg}^{(020)} + \frac{W^4}{16m^4} \Pi_{reg}^{(002)} + \frac{W^2-z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{q^2}{2\mu^2}\right) \left(1 + \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{q^2}{8m^2} + \frac{z^2}{8m^2}\right) \Pi_a \Big\} , \quad (4.18)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ -2 \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(002)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(002)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right\} , \quad (4.19)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(z)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ 2 \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(020)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(020)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right. \\ \left. - \frac{\mu}{2m} \left(\frac{3}{2} - \frac{5q^2}{8\mu^2} \right) \Pi_a \right\} , \quad (4.20)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{q^2}{4\mu^2}\right) \Pi_a \right\} , \quad (4.21)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(w)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ \Pi_{ss}^{(002)} + \Pi_{reg}^{(002)} \right\} , \quad (4.22)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(z)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ \Pi_{ss}^{(020)} + \Pi_{reg}^{(020)} \right\} , \quad (4.23)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^- = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu^2}{2m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \frac{W^2 - z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\ + \frac{2\mu}{m} \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \frac{W^2 - z^2}{4m^2} \left[\frac{W^2 + z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right] \\ + \frac{g^4}{m^4} \left[-\frac{z^4}{16m^4} \Pi_{ss}^{(020)} + \frac{W^4}{16m^4} \Pi_{ss}^{(002)} + \frac{W^2 - z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} \right. \\ + \frac{z^4}{16m^4} \Pi_{reg}^{(020)} - \frac{W^4}{16m^4} \Pi_{reg}^{(002)} - \frac{W^2 - z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \\ \left. \left. + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{q^2}{2\mu^2}\right) \left(1 + \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{q^2}{8m^2} + \frac{z^2}{8m^2}\right) \Pi_a \right] \right\} , \quad (4.24)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu^2}{2m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{2\mu}{m} \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left[\frac{W^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right] \right. \\ \left. + \frac{g^4}{m^4} \left[\frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(002)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} - \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(002)} - \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right] \right\} , \quad (4.25)$$

- $\mathcal{I}_{DB}^{(z)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu^2}{2m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{2\mu}{m} \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left[\frac{z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right] \right.$
 $\left. + \frac{g^4}{m^4} \left[\frac{z^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(020)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} - \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(020)} - \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(\frac{3}{2} - \frac{5q^2}{8\mu^2} \right) \Pi_a \right] \right\} , \quad (4.26)$

- $\mathcal{I}_{BB}^{(g)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu^2}{2m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{2\mu}{m} \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right.$
 $\left. + \frac{g^4}{m^4} \left[\bar{\Pi}_{ss}^{(000)} - \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{q^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a \right] \right\} , \quad (4.27)$

- $\mathcal{I}_{BB}^{(w)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \frac{2\mu}{m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \Pi_{sc}^{(002)} + \frac{g^2}{m^2} \left[\Pi_{ss}^{(002)} - \Pi_{reg}^{(002)} \right] \right\} , \quad (4.28)$

- $\mathcal{I}_{BB}^{(z)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \frac{2\mu}{m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \Pi_{sc}^{(020)} + \frac{g^2}{m^2} \left[\Pi_{ss}^{(020)} - \Pi_{reg}^{(020)} \right] \right\} . \quad (4.29)$

família II (diagramas g+h+i+j)

- $\mathcal{I}_{DD}^+ = -\frac{\mu^2/4f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^4}{m^2} (1 - 2q^2/\mu^2) \left[\Pi_{cc}^{(000)} - \Pi_{sc}^{(001)} + 1 \right]^2 , \quad (4.30)$

- $\mathcal{I}_{DD}^- = -\frac{\mu^2/f_\pi^2}{(4\pi)^4} m^2 \left\{ \frac{W^2}{4m^2} \left[\frac{g^2}{m^2} \left(\frac{W^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right) + \frac{\mu}{2m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right]^2 \right.$
 $\left. - \frac{z^2}{4m^2} \left[\frac{g^2}{m^2} \left(\frac{z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right) + \frac{\mu}{2m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right]^2 \right\} , \quad (4.31)$

- $\mathcal{I}_{DB}^{(w)-} = -\frac{\mu^2/f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^4}{m^2} \left[\frac{W^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{m^2}{g^2 f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right]^2 , \quad (4.32)$

- $\mathcal{I}_{DB}^{(z)-} = -\frac{\mu^2/f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^4}{m^2} \left[\frac{z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{m^2}{g^2 f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right]^2 , \quad (4.33)$

- $\mathcal{I}_{BB}^{(g)-} = -\frac{\mu^2/f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^4}{m^2} \left[\bar{\Pi}_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{m^2}{g^2 f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right]^2 , \quad (4.34)$

- $\mathcal{I}_{BB}^{(w)-} = -\frac{\mu^2/f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^4}{m^2} \left\{ \frac{W^2}{4m^2} \left[\Pi_{sc}^{(002)} \right]^2 \right.$

$$+2 \Pi_{sc}^{(002)} \left[\bar{\Pi}_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{m^2}{g^2 f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right] \Big\} , \quad (4.35)$$

$$\bullet \mathcal{I}_{BB}^{(z)-} = -\frac{\mu^2/f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^4}{m^2} \left\{ \frac{z^2}{4m^2} [\Pi_{sc}^{(002)}]^2 + 2 \Pi_{sc}^{(002)} \left[\bar{\Pi}_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{m^2}{g^2 f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right] \right\} , \quad (4.36)$$

família III (diagramas (k+l+m+n+o))

$$\bullet \mathcal{I}_{DD}^+ = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ m \left(\bar{d}_{00}^+ + q^2 d_{01}^+ \right) \left[\Pi_{cc}^{(000)} - \frac{W^2 + z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} \right] + \frac{\mu^3}{2} \left(1 - q^2/2\mu^2 \right) \left(d_{10}^+ + q^2 d_{11}^+ \right) \left[\frac{(W^2 + z^2)^2}{16m^4} \Pi_{sc}^{(002)} + \frac{W^2 + z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right] \right\} + \frac{1/2}{(4\pi)^2} \left\{ \left(\bar{d}_{00}^+ + q^2 d_{01}^+ \right)^2 \Pi_{cc}^{(000)} + 2\mu^2 \left(\bar{d}_{00}^+ + q^2 d_{01}^+ \right) d_{10}^+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + 3\mu^4 \left(d_{10}^+ \right)^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} , \quad (4.37)$$

$$\bullet \mathcal{I}_{DB}^{(w)+} = -\frac{m/2}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \left(\bar{d}_{00}^+ + q^2 d_{01}^+ \right) \Pi_{sc}^{(001)} + \mu^2 \left(d_{10}^+ + q^2 d_{11}^+ \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} , \quad (4.38)$$

$$\bullet \mathcal{I}_{DB}^{(z)+} = \frac{m/2}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \left(\bar{d}_{00}^+ + q^2 d_{01}^+ \right) \Pi_{sc}^{(001)} - 3\mu^2 \left(d_{10}^+ + q^2 d_{11}^+ \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} , \quad (4.39)$$

$$\bullet \mathcal{I}_{BB}^{(g)+} = -\frac{\mu^2 m}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} b_{00}^+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} , \quad (4.40)$$

$$\bullet \mathcal{I}_{DD}^- = -\frac{\mu m}{(4\pi)^2} \frac{W^2 - z^2}{4m^2} \left(\bar{d}_{00}^- + q^2 \bar{d}_{01}^- \right) \left\{ \frac{\mu}{2m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} - \bar{d}_{00}^- - q^2 \bar{d}_{01}^- \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{g^2}{m^2} \left[\frac{W^2 + z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right] \right\} + \frac{\mu^4/2}{(4\pi)^2} \left\{ \bar{d}_{10}^- \left[-3 \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{g^2}{m^2} \left(1 - q^2/2\mu^2 \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right] \right\} , \quad (4.41)$$

$$\bullet \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} = -\frac{\mu m/2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu}{2m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \bar{b}_{00}^- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{g^2}{m^2} \bar{b}_{00}^- \left[\frac{W^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right] \right\} , \quad (4.42)$$

$$\bullet \mathcal{I}_{DB}^{(z)-} = \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} , \quad (4.43)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)-} = -\frac{\mu m}{(4\pi)^2} \bar{b}_{00}^- \left\{ \frac{\mu}{2m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} - \bar{b}_{00}^- \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{g^2}{m^2} \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right\}. \quad (4.44)$$

4.5 Resultados intermediários

As funções de perfil apresentadas na seção anterior são expressas em termos de 13 integrais de *loop* diferentes e não envolvem aproximações. Entretanto, elas não exibem explicitamente as escalas quirais apropriadas. Este problema pode ser resolvido usando relações entre as várias integrais de *loop*, apresentadas com detalhes no apêndice F. A idéia consiste em manipular apenas o numerador dos integrandos, sem fazer qualquer tipo de expansão nos propagadores. Tomemos como exemplo a integral

$$\begin{aligned} I_{ss}^{\sigma\rho} &= \int[\dots] \frac{Q^\sigma}{\mu} \frac{Q^\rho}{\mu} \frac{2m\mu}{s_1 - m^2} \frac{2m\mu}{s_2 - m^2} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{4m^2} \left[q^\sigma q^\rho \Pi_{ss}^{200} + z^\sigma z^\rho \Pi_{ss}^{020} + W^\sigma W^\rho \Pi_{ss}^{002} \right] + g^{\sigma\rho} \bar{\Pi}_{ss}^{000} \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Multiplicando por $(W + z)_\rho$ temos, de um lado,

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ z^\sigma \left[\frac{z^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{020} + \bar{\Pi}_{ss}^{000} \right] + W^\sigma \left[\frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{002} + \bar{\Pi}_{ss}^{000} \right] \right\}, \quad (4.46)$$

enquanto que o outro fornece

$$\begin{aligned} &\int[\dots] \frac{Q^\sigma}{\mu} \frac{2m}{s_1 - m^2} \frac{Q \cdot (W + z)}{s_2 - m^2} \frac{2m\mu}{s_2 - m^2} \\ &= \int[\dots] \frac{Q^\sigma}{\mu} \frac{2m\mu}{s_2 - m^2} \left[2m - \frac{2m(Q^2 - t/4)}{s_1 - m^2} \right] \\ &\cong \int[\dots] \frac{Q^\sigma}{\mu} \frac{2m\mu}{s_2 - m^2} \left[2m - \frac{2m\mu^2(1 - t/2\mu^2)}{s_1 - m^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Na última passagem, efetuamos uma aproximação, que consiste em substituir Q^2 por $\mu^2 - t/4$ no numerador. Ela corresponde a desprezar uma integral do tipo

$$\int[\dots] (k^2 - \mu^2)^m (k'^2 - \mu^2)^n \frac{2m\mu}{(s_1 - m^2)} \frac{2m\mu}{(s_2 - m^2)}, \quad (4.48)$$

com m e n inteiros maiores que zero, que envolvem um ou nenhum propagador piônico (figura 4.2). No espaço de configuração elas dão contribuições de curto alcance¹, conforme discutido na seção F.3.

¹A maioria delas são contribuições polinomiais. Incluímos no nosso potencial apenas os termos não-polinomiais em q^2 . No espaço de momento, os termos polinomiais são definidos sem ambiguidades após um processo bem definido de regularização e renormalização. Alternativamente, tais polinômios são ajustados de forma a reproduzir os dados experimentais. No espaço de configuração, não precisamos ter essa preocupação, pois tais termos transformam-se em funções delta de Dirac e suas derivadas, de alcance nulo.

Figura 4.2: Representação diagramática das integrais de curto alcance, desconsideradas nas relações entre integrais de *loop*.

Com esta aproximação, a equação (4.47) fica igual a

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ (W - z)^\sigma \Pi_{sc}^{001} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) W^\sigma \Pi_{ss}^{001} \right\}. \quad (4.49)$$

Como as variáveis W , z e q são linearmente independentes, obtemos as relações

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{020} + \bar{\Pi}_{ss}^{000} &\cong -\Pi_{sc}^{001}, \\ \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{002} + \bar{\Pi}_{ss}^{000} &\cong \Pi_{sc}^{001} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{ss}^{001}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Aplicando as demais relações, (F.36)-(F.52), nos resultados completos, eqs. (4.18)-(4.44), obtemos

família I (diagramas a+b+c+d+e+f)

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^+ = \frac{\mu^2/8}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ \frac{1}{2} (1-t/2\mu^2)^2 \left[\Pi_{ss}^{(000)} - \Pi_{reg}^{(000)} \right] - \frac{\mu}{m} (1-t/2\mu^2) \Pi_a \right\}, \quad (4.51)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)+} = - \frac{\mu m/8}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} (1-t/2\mu^2) \Pi_{ss}^{(001)}, \quad (4.52)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(z)+} = \frac{\mu m/8}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ (1-t/2\mu^2) \Pi_{reg}^{(010)} - (3/2 - 5t/8\mu^2) \Pi_a \right\}, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)+} &= \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ (1-t/4\mu^2) \left(\Pi_{ss}^{(000)} + \Pi_{reg}^{(000)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{2m} \left[(1-t/2\mu^2) \left(\Pi_{ss}^{(001)} - \Pi_{reg}^{(010)} \right) + (1-t/4\mu^2) \Pi_a \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(w)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ \Pi_{ss}^{(002)} + \Pi_{reg}^{(002)} \right\}, \quad (4.55)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(z)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left\{ \Pi_{ss}^{(020)} + \Pi_{reg}^{(020)} \right\} , \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^- &= \frac{\mu^2/8}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \left[1 - \frac{\mu^2}{m^2} (t/4\mu^2 + z^2/2\mu^2) \right] (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right. \\ &\quad - 2 \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left[1 - \frac{\mu^2}{m^2} (t/4\mu^2 + z^2/2\mu^2) \right] (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} \\ &\quad \left. + \frac{g^4}{m^4} \left[\frac{1}{2} (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_{ss}^{(000)} + \Pi_{reg}^{(000)}) + \frac{\mu}{m} (1-t/2\mu^2) \Pi_a \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} &= \frac{\mu m/8}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} - \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \right. \\ &\quad \times \frac{\mu}{m} \left[2 (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{m} (z^2/\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} \right] - \frac{g^4}{m^4} (1-t/2\mu^2) \Pi_{ss}^{(001)} \left. \right\} , \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(z)-} &= \frac{\mu m/8}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} + \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \right. \\ &\quad \times \left[2 (1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu^2}{m^2} (z^2/\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} \right] \\ &\quad \left. - \frac{g^4}{m^4} \left[(1-t/2\mu^2) \Pi_{reg}^{(010)} - (3/2 - 5t/8\mu^2) \Pi_a \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)-} &= \frac{\mu m/8}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right. \\ &\quad + \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left[2 (1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} \right] \\ &\quad \left. - \frac{g^4}{m^4} \left[(1-t/2\mu^2) \Pi_{reg}^{(010)} + (1-t/4\mu^2) \Pi_a + \frac{\mu}{m} (z^2/2\mu^2) (\Pi_{ss}^{(020)} - \Pi_{reg}^{(020)}) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(w)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \frac{2\mu}{m} \left(\frac{g^2}{f_\pi^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \Pi_{sc}^{(002)} + \frac{g^2}{m^2} [\Pi_{ss}^{(002)} - \Pi_{reg}^{(002)}] \right\} , \quad (4.61)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(z)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \frac{2\mu}{m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \Pi_{sc}^{(020)} + \frac{g^2}{m^2} [\Pi_{ss}^{(020)} - \Pi_{reg}^{(020)}] \right\} . \quad (4.62)$$

família II (diagramas g+h+i+j)

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^+ = -\frac{\mu^4/16f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^4}{m^4} (1 - 2t/\mu^2) \left[(1 - t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} - 2\pi \right]^2, \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^- = & -\frac{\mu^4/4f_\pi^2}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{W^2}{4m^2} \left[-\frac{g^2}{m^2} \left((1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{m} (z^2/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} + 1 - t/3\mu^2 \right) \right. \right. \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left((1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} + 2 - t/4\mu^2 \right) \left. \right]^2 \\ & - \frac{z^2}{4\mu^2} \left[\frac{g^2}{m^2} \left((1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu^2}{m^2} (z^2/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} - \pi \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right]^2 \right\}, \quad (4.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} = & -\frac{\mu^4/4f_\pi^2}{(4\pi)^4} \left[-\frac{g^2}{m^2} \left((1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{m} (z^2/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} + 1 - t/3\mu^2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left((1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} + 2 - t/4\mu^2 \right) \right]^2, \quad (4.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(z)-} = & -\frac{\mu^2 m^2/4f_\pi^2}{(4\pi)^4} \left[\frac{g^2}{m^2} \left((1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mu^2}{m^2} (z^2/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} - \pi \right) + \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right]^2, \quad (4.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)-} = & -\frac{\mu^2 m^2/4f_\pi^2}{(4\pi)^4} \left[\frac{g^2}{m^2} \left((1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} - \pi \right) \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right]^2, \quad (4.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(w)-} = & -\frac{\mu^2 m^2/2f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^2}{m^2} \Pi_{sc}^{(002)} \left[\frac{g^2}{m^2} \left((1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mu^2}{m^2} (z^2/\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} \right) + \frac{2\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right], \quad (4.68) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(z)-} = -\frac{\mu^2 m^2/f_\pi^2}{(4\pi)^4} \frac{g^2}{m^2} \Pi_{sc}^{(002)} \left[\frac{g^2}{m^2} \left((1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} \right. \right.$$

$$+ \frac{\mu^2}{m^2} (z^2/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)}) + \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \Big] . \quad (4.69)$$

família III (diagramas k+l+m+n+o)

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^+ &= \frac{\mu^3/2mf_\pi^2}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \left(\bar{\delta}_{00}^+ + t/\mu^2 \delta_{01}^+ \right) (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{2m} \delta_{10}^+ (1-t/2\mu^2)^2 \Pi_{sc}^{(001)} \right\} + \frac{\mu^4/2m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{f_\pi^4} \left\{ \left(\bar{\delta}_{00}^+ + t/\mu^2 \delta_{01}^+ \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \left(\bar{\delta}_{00}^+ + t/\mu^2 \delta_{01}^+ \right) \delta_{10}^+ (1-t/4\mu^2) + \frac{1}{5} \left(\delta_{10}^+ \right)^2 (1-t/4\mu^2)^2 \right\} \Pi_{cc}^{(000)} , \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)+} = - \frac{\mu^2/2f_\pi^2}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \left[\bar{\delta}_{00}^+ + (t/\mu^2) \delta_{01}^+ \right] \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{1}{3} \delta_{10}^+ (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right\} , \quad (4.71)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(z)+} = \frac{\mu^2/2f_\pi^2}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \left\{ \left[\bar{\delta}_{00}^+ + (t/\mu^2) \delta_{01}^+ \right] \Pi_{sc}^{(001)} - \delta_{10}^+ (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right\} , \quad (4.72)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)+} = - \frac{\mu^2/f_\pi^2}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{m^2} \frac{1}{3} \beta_{00}^+ (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} , \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^- &= - \frac{\mu^4/2m^2f_\pi^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left[\bar{\delta}_{00}^- + (t/\mu^2) \bar{\delta}_{01}^- + \frac{3}{5} (1-t/4\mu^2) \delta_{10}^- \right] (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{m^2} (1-t/2\mu^2) \left[\left(\bar{\delta}_{00}^- + (t/\mu^2) \bar{\delta}_{01}^- \right) \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{1}{3} \delta_{10}^- (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} &= - \frac{\mu^2/4f_\pi^2}{(4\pi)^2} \bar{\beta}_{00}^- \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{m^2} \left[(1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{2m} (z^2/\mu^2) \Pi_{sc}^{(002)} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(z)-} = \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} , \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)-} &= - \frac{\mu m/2f_\pi^2}{(4\pi)^2} \bar{\beta}_{00}^- \left\{ \frac{\mu}{3m} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1+\bar{\beta}_{00}^-}{f_\pi^2} \right) (1-t/4\mu^2) \Pi_{cc}^{(000)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^2}{m^2} \left[(1-t/4\mu^2) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} (1-t/2\mu^2) \Pi_{sc}^{(001)} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Na tabela 2.2 se encontram as definições dos parâmetros $\delta_{mn}^\pm$ e $\beta_{mn}^\pm$.

Neste estágio, os resultados apresentam um grande avanço com relação aos completos, pois podemos ter uma idéia da escala quiral de cada função de perfil. Na seção 4.7 simplificamos estes resultados, escrevendo o potencial em termos de seis integrais básicas, discutidas a seguir.

4.6 Integrais básicas e suas expansões

Os nossos resultados finais para o TPEP até ordem q^4 , a serem apresentados na próxima seção, são escritos em termos de seis funções associadas a integrais de *loop* (apêndice B), representadas por Π_ℓ , Π_t , $\Pi_\times$, Π_b , $\tilde{\Pi}_b$ e Π_a . As cinco primeiras correspondem a novas notações para as integrais Π_{cc}^{000} , Π_{sc}^{000} , Π_{ss}^{000} , Π_{reg}^{000} e Π_{reg}^{010} respectivamente.

A integral Π_ℓ , do tipo bolha, é dada por

$$I_{cc} = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(Q-q/2)^2 - \mu^2][(Q+q/2)^2 - \mu^2]} = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_\ell, \quad (4.78)$$

e pode ser resolvida explicitamente (seção B.3). Sua parte não polinomial é escrita como

$$\Pi_\ell = -2 \frac{\sqrt{1-t/4\mu^2}}{\sqrt{-t/4\mu^2}} \ln \left(\sqrt{1-t/4\mu^2} + \sqrt{-t/4\mu^2} \right). \quad (4.79)$$

Sabendo que, no referencial do centro de massa, $t = -\mathbf{q}^2$, e usando $q = |\mathbf{q}|$, percebemos que a função Π_ℓ é proporcional à função $L(q)$ da referência [19]:

$$\Pi_\ell = -2 L(q). \quad (4.80)$$

A função Π_t , associada à integral triângulo, é dada por²

$$I_{sc} = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(Q-q/2)^2 - \mu^2][(Q+q/2)^2 - \mu^2]} \frac{2m\mu}{[Q^2 + Q \cdot (W+z) - t/4]} = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_t \quad (4.81)$$

e contribui ao fator de forma escalar do nucleon. Na seção 2.3 discutimos suas propriedades analíticas, bem como sua expansão no formalismo HBChPT, que apresenta problemas em torno de $t = 4\mu^2$. Na comparação dos nossos resultados expandidos com o formalismo HBChPT, a ser feita na seção 4.8, substituímos Π_t por uma expressão análoga à equação (2.49):

$$\Pi_t \rightarrow \Pi_a + \frac{\mu}{2m} \Pi_t^{\mathcal{N}}, \quad (4.82)$$

onde

$$\Pi_a = - \frac{\pi}{\sqrt{-t/4\mu^2}} \tan^{-1} \sqrt{-t/4\mu^2}, \quad (4.83)$$

$$\Pi_t^{\mathcal{N}} = (1-t/2\mu^2) \Pi_\ell', \quad (4.84)$$

²O diagrama triângulo da referência [12], é dado pela equação (2.43) e, na nossa notação, temos $\Pi_t = -2m\mu(4\pi)^2\gamma(t)$.

e $\Pi' = \mu (d\Pi/d\mu)$.

A função Π_a é a mesma que aparece na iteração do OPEP (seção E.3), e relaciona-se à função $A(q)$ da referência [19] através de

$$\Pi_a = -4\pi\mu A(q). \quad (4.85)$$

As expressões completas para as integrais $\Pi_\times$, Π_b e $\bar{\Pi}_b$, associadas a integrais do tipo cruzado e caixa, são dadas pelas equações (B.59) e (B.61). A expansão de bárion pesado destas é feita de forma análoga à integral Π_t . Os cálculos do apêndice H fornecem

$$\begin{aligned} \Pi_\times \rightarrow -\Pi'_\ell - \left[\frac{\mu}{m}\right] \frac{\pi/2}{(1-t/4\mu^2)} - \left[\frac{\mu}{m}\right]^2 \frac{1}{4} \left[(1-t/2\mu^2)^2 (2\Pi'_\ell - \Pi''_\ell) + (2z^2/3\mu^2) \Pi'_\ell \right] \\ + \dots \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\Pi_b \rightarrow \Pi_\times + \left[\frac{\mu}{m}\right] \frac{\pi/4}{(1-t/4\mu^2)} + \left[\frac{\mu}{m}\right]^2 \frac{1}{6} \left[(1-t/2\mu^2)^2 (2\Pi'_\ell - \Pi''_\ell) \right] + \dots \quad (4.87)$$

$$\bar{\Pi}_b \rightarrow -\frac{1}{2} \Pi_a - \left[\frac{\mu}{m}\right] \frac{1}{3} (1-t/2\mu^2) \Pi'_\ell + \dots \quad (4.88)$$

As expansões (4.82), (4.86), (4.87) e (4.88), aplicadas aos resultados da seção 4.7, permitem uma comparação direta com os resultados do HBChPT. Vale lembrar que estas expansões apresentam problemas em uma certa região de baixa energia, tal como discutido na seção 2.3.

Para encerrar esta seção apresentamos as seguintes relações, muito úteis na expansão de bárion pesado do nosso potencial:

$$\Pi'_\ell = 2 + \Pi_\ell/(1-t/4\mu^2), \quad (4.89)$$

$$\Pi''_\ell = 2/(1-t/4\mu^2) + \left[2/(1-t/4\mu^2) - 1/(1-t/4\mu^2)^2 \right] \Pi_\ell, \quad (4.90)$$

$$\Pi'_a = \Pi_a - \pi t/(1-t/4\mu^2). \quad (4.91)$$

4.7 O potencial relativístico até ordem q^4

O potencial até a ordem q^4 é obtido simplificando ainda mais os resultados intermediários da seção 4.5, permitindo que eles sejam reescritos em termos das cinco funções básicas apresentadas na seção anterior. Tais simplificações consistem em usar novamente algumas relações entre integrais, desprezando os termos que não contribuem até a ordem desejada. Como exemplo, temos a função $\mathcal{I}_{DB}^{(w)+}$ da família I:

$$\mathcal{I}_{DB}^{(w)+} = -\frac{\mu/8}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{ss}^{001}.$$

Sabemos que essa função deve ser considerada até $\mathcal{O}(q^2)$ (seção 4.3). Se utilizarmos a relação (F.41) e truncarmos nessa ordem, teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{DB}^{(w)+} &= -\frac{\mu/8}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \left[\Pi_{sc}^{000} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{000} + \frac{\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{001} \right] \\
&= -\frac{\mu/8}{(4\pi)^2} \frac{g^4}{m^4} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \left[\Pi_{sc}^{000} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{000} \right] + \mathcal{O}(q^3).
\end{aligned}$$

Os nossos resultados truncados são escritos em termos da constante de acoplamento axial g_A , relacionada à constante de acoplamento πN através de $g = (1 + \Delta_{GT})m g_A/f_\pi$, onde Δ_{GT} representa a discrepância na relação de Goldberger-Treiman, proporcional a μ^2 [13].

Nas expressões abaixo exibimos os resultados truncados das três famílias somadas:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \mathcal{I}_{DD}^+ &= \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left\{ \frac{g_A^4}{16} (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times - \Pi_b) + \Delta_{GT} \frac{g_A^4}{4} (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times - \Pi_b) \right. \\
&+ \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{g_A^2}{8} (1-t/2\mu^2) \left[-g_A^2 \Pi_a + 4 \left(\bar{\delta}_{00}^+ + \bar{\delta}_{01}^+ t/\mu^2 \right) \Pi_t \right] + \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left[-\frac{g_A^2}{4} \delta_{10}^+ (1-t/2\mu^2)^2 \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left(\bar{\delta}_{00}^+ + \bar{\delta}_{01}^+ t/\mu^2 + \frac{1}{3} \delta_{10}^+ (1-t/4\mu^2) \right)^2 + \frac{2}{45} \left(\delta_{10}^+ \right)^2 (1-t/4\mu^2)^2 \left. \right] \Pi_\ell \\
&\left. - \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \frac{m^2}{256 \pi^2 f_\pi^2} g_A^4 (1-2t/\mu^2) \left[(1-t/2\mu^2) \Pi_t - 2\pi \right]^2 \right\}, \tag{4.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(w)+} &= \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ -\frac{g_A^4}{8} (1-t/2\mu^2) \Pi_t \right. \\
&+ \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[\frac{g_A^4}{16} (1-t/2\mu^2)^2 \Pi_\times - \frac{g_A^2}{2} \left(\bar{\delta}_{00}^+ + \bar{\delta}_{01}^+ t/\mu^2 + \frac{1}{3} \delta_{10}^+ (1-t/4\mu^2) \right) \Pi_\ell \right] \left. \right\}, \tag{4.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \mathcal{I}_{DB}^{(z)+} &= \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ \frac{g_A^4}{8} \left[(1-t/2\mu^2) \tilde{\Pi}_b - (3/2 - 5t/8\mu^2) \Pi_a \right] \right. \\
&+ \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{g_A^2}{2} \left(\bar{\delta}_{00}^+ + \bar{\delta}_{01}^+ t/\mu^2 - \delta_{10}^+ (1-t/4\mu^2) \right) \Pi_\ell \left. \right\}, \tag{4.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)+} &= \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \left\{ \frac{g_A^4}{4} (1-t/4\mu^2) (\Pi_\times + \Pi_b) + \Delta_{GT} g_A^4 (1-t/4\mu^2) (\Pi_\times + \Pi_b) \right. \\
&+ \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{g_A^4}{8} \left[(1-t/2\mu^2) (\Pi_t - \tilde{\Pi}_b) + (1-t/4\mu^2) \Pi_a \right] \\
&\left. - \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 g_A^2 \left[\frac{g_A^2}{16} (1-t/2\mu^2)^2 \Pi_\times + \frac{1}{3} \beta_{00}^+ (1-t/4\mu^2) \Pi_\ell \right] \right\}, \tag{4.95}
\end{aligned}$$

- $\mathcal{I}_{BB}^{(w)+} = \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} g_A^4 \Pi_\ell$, (4.96)

- $\mathcal{I}_{BB}^{(z)+} = \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \frac{g_A^4}{3} \Pi_\ell$, (4.97)

- $\mathcal{I}_{DD}^- = \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left\{ \frac{g_A^4}{16} (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times + \Pi_b) - \frac{g_A^2}{4} (g_A^2 - 1) (1-t/2\mu^2) \Pi_\ell \right.$
 $+ \frac{1}{24} (g_A^2 - 1)^2 (1-t/4\mu^2) \Pi_\ell + \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{g_A^2}{8} (1-t/2\mu^2) [g_A^2 \Pi_a + (g_A^2 - 1) (1-t/2\mu^2) \Pi_t]$
 $+ \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left[\frac{g_A^2}{2} (1-t/2\mu^2) \left((g_A^2 - 1) z^2/4\mu^2 + \bar{\delta}_{00}^- + \bar{\delta}_{01}^- t/\mu^2 + \frac{1}{3} \delta_{10}^- (1-t/4\mu^2) \right) \right.$
 $- \frac{(g_A^2 - 1)}{6} (1-t/4\mu^2) \left((g_A^2 - 1) (t/16\mu^2 + z^2/8\mu^2) + \bar{\delta}_{00}^- + \bar{\delta}_{01}^- t/\mu^2 + \frac{3}{5} \delta_{10}^- (1-t/4\mu^2) \right) \Big] \Pi_\ell$
 $- \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \frac{m^2}{64 \pi^2 f_\pi^2} [-g_A^2 ((1-t/2\mu^2) \Pi_\ell + 1 - t/3\mu^2)$
 $+ \frac{1}{3} (g_A^2 - 1) ((1-t/4\mu^2) \Pi_\ell + 2 - t/4\mu^2)]^2$
 $+ \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \frac{m^2}{64 \pi^2 f_\pi^2} (z^2/4\mu^2) g_A^4 [(1-t/4\mu^2) \Pi_t - \pi]^2$
 $+ \Delta_{GT} \left[\left(\frac{1}{6} (1-t/4\mu^2) g_A^2 (g_A^2 - 1) - (1-t/2\mu^2) g_A^2 (g_A^2 - 1/2) \right) \Pi_\ell \right.$
 $\left. + \frac{g_A^4}{4} (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times + \Pi_b) \right\}$, (4.98)

- $\mathcal{I}_{DB}^{(w)-} = \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ \left[-\frac{g_A^4}{8} (1-t/2\mu^2) \Pi_t \right] \right.$
 $+ \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[\frac{1}{24} (g_A^2 - 1) (g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-) (1-t/4\mu^2) - \frac{g_A^2}{4} (g_A^2 - 1 - \bar{\beta}_{00}^-) (1-t/2\mu^2) \right] \Pi_\ell$
 $\left. + \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[\frac{g_A^4}{16} (1-t/2\mu^2)^2 \Pi_\times \right] \right\}$, (4.99)

- $\mathcal{I}_{DB}^{(z)-} = \frac{m^2}{16 \pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ \left[\frac{g_A^2}{4} (g_A^2 - 1) (1-t/4\mu^2) \Pi_t - \frac{g_A^4}{8} ((1-t/2\mu^2) \tilde{\Pi}_b - \right. \right.$

$$-(3/2-5t/8\mu^2) \Pi_a)] + \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[\frac{1}{24} (g_A^2 - 1)(g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-) (1-t/4\mu^2) \right. \\ \left. + \frac{g_A^2}{8} (g_A^2 - 1 + 2\bar{\beta}_{00}^-) (1-t/2\mu^2) \right] \Pi_\ell - \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{m^2}{64\pi^2 f_\pi^2} g_A^4 \left[(1-t/4\mu^2)\Pi_t - \pi \right]^2 \Big\} , \quad (4.100)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(g)-} = \frac{m^2}{16\pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ \frac{g_A^2}{4} (g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-) (1-t/4\mu^2) \Pi_t - \frac{g_A^4}{8} \left[(1-t/2\mu^2) \tilde{\Pi}_b \right. \right. \\ \left. \left. + (1-t/4\mu^2) \Pi_a \right] + \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[\frac{1}{24} (g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-)^2 (1-t/4\mu^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g_A^2}{8} (g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-) (1-t/2\mu^2) \right] \Pi_\ell - \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{m^2}{64\pi^2 f_\pi^2} g_A^4 \left[(1-t/4\mu^2)\Pi_t - \pi \right]^2 \right\} , \quad (4.101)$$

$$\bullet \quad \mathcal{I}_{BB}^{(w)-} \simeq \mathcal{I}_{BB}^{(z)-} \simeq 0 . \quad (4.102)$$

As contribuições de cada família podem ser facilmente identificadas: as da família III são proporcionais aos coeficientes (adimensionais) HJS, enquanto que as da família II são caracterizadas pelo fator $\pi^2 f_\pi^2$ a mais no denominador (o π^2 vem da integral de *loop* a mais, e o f_π^2 vem da interação $\pi\pi$ intermediária). As demais contribuições pertencem à família I.

Substituindo as expressões (4.92)-(4.102) em (3.73)-(3.76) temos as componentes do nosso potencial, até $\mathcal{O}(q^4)$, no espaço de momento:

$$V_C^+ = \frac{m}{E} \frac{3m^2}{256\pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left\{ g_A^4 (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times - \Pi_b) \right. \\ + \left[\frac{\mu}{m} \right] g_A^2 (1-t/2\mu^2) \left[-g_A^2 (2\Pi_a + \Pi_t t/\mu^2) + 8 (\bar{\delta}_{00}^+ + \bar{\delta}_{01}^+ t/\mu^2) \Pi_t \right] \\ + \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left[-\frac{m^2 g_A^4}{16\pi^2 f_\pi^2} (1-2t/\mu^2) \left((1-t/2\mu^2)\Pi_t - 2\pi \right)^2 + \frac{g_A^4}{4} \frac{t}{\mu^2} (\Pi_\times + \Pi_b) \right] \\ + \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left[g_A^4 \frac{t^2}{\mu^4} - 4g_A^2 \left((\bar{\delta}_{00}^+ + \bar{\delta}_{01}^+ t/\mu^2) t/\mu^2 + \bar{\delta}_{10}^+ (1-2t/3\mu^2 + t^2/6\mu^4) \right) \right. \\ \left. + 8 (\bar{\delta}_{00}^+ + \bar{\delta}_{01}^+ t/\mu^2 + (\bar{\delta}_{10}^+/3)(1-t/4\mu^2))^2 + \frac{32}{45} (\bar{\delta}_{10}^+)^2 (1-t/4\mu^2)^2 \right] \Pi_\ell \\ \left. + 4 \Delta_{GT} g_A^4 (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times - \Pi_b) \right\} , \quad (4.103)$$

$$V_T^+ = V_{SS}^+/2 = \frac{m}{E} \frac{m^2 g_A^2}{256\pi^2 f_\pi^4} \left\{ -g_A^2 (1-t/4\mu^2) [\Pi_\times + \Pi_b] \right. \\ \left. - \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{g_A^2}{2} \left[(1-t/2\mu^2)(\Pi_t - \tilde{\Pi}_b) + (1-t/4\mu^2)\Pi_a \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left[\frac{g_A^2}{4} (1-t/2\mu^2)^2 \Pi_\times + \frac{4}{3} \beta_{00}^+ (1-t/4\mu^2) \Pi_\ell \right] \\
& - 4 \Delta_{GT} g_A^2 (1-t/4\mu^2) [\Pi_\times + \Pi_b] \Big\} , \tag{4.104}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{LS}^+ = & \frac{m}{E} \frac{3m^2 g_A^2}{128\pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ g_A^2 \left[(1-t/2\mu^2)(\tilde{\Pi}_b - \Pi_t) - (3/2 - 5t/8\mu^2) \Pi_a \right] \right. \\
& \left. + \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[\frac{g_A^2}{4} (1+2t/\mu^2 - t^2/2\mu^4)(\Pi_\times + \Pi_b) + \left(2g_A^2 t/\mu^2 - \frac{16}{3} \delta_{10}^+ (1-t/4\mu^2) \right) \Pi_\ell \right] \right\} , \tag{4.105}
\end{aligned}$$

$$V_Q^+ = \frac{m}{E} \frac{m^2 g_A^4}{256\pi^2 f_\pi^4} \Pi_\ell . \tag{4.106}$$

e

$$\begin{aligned}
V_C^- = & \frac{m}{E} \frac{\mu^2}{8\pi^2 f_\pi^4} \left\{ \frac{g_A^4}{16} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right)^2 (\Pi_\times + \Pi_b) - \frac{g_A^2}{4} (g_A^2 - 1) \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_\ell \right. \\
& + \frac{1}{24} (g_A^2 - 1)^2 \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_\ell \\
& + \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{g_A^2}{8} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \left[g_A^2 \left(\Pi_a - \frac{t}{2\mu^2} \Pi_t \right) + (g_A^2 - 1) \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_t \right] \\
& + \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \left\{ \frac{g_A^2}{2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \left[(g_A^2 - 1) \left(-\frac{t}{8\mu^2} + \frac{z^2}{4\mu^2} \right) + \bar{\delta}_{00}^- + \bar{\delta}_{01}^- \frac{t}{\mu^2} + \frac{1}{3} \delta_{10}^- \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) + \bar{\beta}_{00}^- \frac{t}{4\mu^2} \right] \right. \\
& \left. - \frac{(g_A^2 - 1)}{6} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \left[(g_A^2 - 1) \frac{z^2}{8\mu^2} + \bar{\delta}_{00}^- + \bar{\delta}_{01}^- \frac{t}{\mu^2} + \frac{3}{5} \delta_{10}^- \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) + \bar{\beta}_{00}^- \frac{t}{4\mu^2} \right] \right\} \Pi_\ell \\
& - \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \frac{m^2}{64\pi^2 f_\pi^2} \left[-g_A^2 \left((1-t/2\mu^2) \Pi_\ell + 1 - \frac{t}{3\mu^2} \right) + \frac{1}{3} (g_A^2 - 1) \left((1-t/4\mu^2) \Pi_\ell + 2 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \right]^2 \\
& + \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \frac{m^2}{256\pi^2 f_\pi^2} \frac{z^2}{\mu^2} g_A^4 \left[\left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_a - \pi \right]^2 + \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \frac{g_A^4}{16} (1-t/2\mu^2)^2 \frac{t}{4\mu^2} (\Pi_\times - \Pi_b) \\
& + \Delta_{GT} \left[\left(\frac{1}{6} (1-t/4\mu^2) g_A^2 (g_A^2 - 1) - (1-t/2\mu^2) g_A^2 (g_A^2 - 1/2) \right) \Pi_\ell \right. \\
& \left. + \frac{g_A^4}{4} (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times + \Pi_b) \right] \Big\} , \tag{4.107}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_T^- = V_{SS}^-/2 = & \frac{m}{E} \frac{m^2}{768\pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ g_A^4 \left[(1-t/2\mu^2) \tilde{\Pi}_b + (1-t/4\mu^2) \Pi_a \right] \right. \\
& - 2g_A^2 (g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-) (1-t/4\mu^2) \Pi_t \\
& + \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[-g_A^2 (g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-) (1-t/2\mu^2) - \frac{1}{3} (g_A^2 - 1 - 2\bar{\beta}_{00}^-)^2 (1-t/4\mu^2) \right] \Pi_\ell \\
& \left. + \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{m^2 g_A^4}{8\pi^2 f_\pi^2} \left[(1-t/4\mu^2) \Pi_t - \pi \right]^2 \right\} , \tag{4.108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{LS}^- = & \frac{m}{E} \frac{m^2}{64\pi^2 f_\pi^4} \left[\frac{\mu}{m} \right] \left\{ g_A^4 \left[(3/2 - 5t/8\mu^2) \Pi_a - (1-t/2\mu^2) (\Pi_t + \tilde{\Pi}_b) \right] \right. \\
& + 2g_A^2 (g_A^2 - 1) (1-t/4\mu^2) \Pi_t \\
& + \left[\frac{\mu}{m} \right] \left[\frac{1}{2} (g_A^2 - 1)^2 (1-t/4\mu^2) + 4g_A^2 \bar{\beta}_{00}^- (1-t/2\mu^2) - \frac{4}{3} (g_A^2 - 1) \bar{\beta}_{00}^- (1-t/4\mu^2) \right] \Pi_\ell \\
& \left. + \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{g_A^4}{4} (1-t/2\mu^2)^2 (\Pi_\times - \Pi_b) - \left[\frac{\mu}{m} \right] \frac{m^2 g_A^4}{8\pi^2 f_\pi^2} \left[(1-t/4\mu^2) \Pi_t - \pi \right]^2 \right\} , \tag{4.109}
\end{aligned}$$

$$V_Q^- \simeq 0 . \tag{4.110}$$

Estas expressões descrevem o potencial de ordem q^4 obtido no contexto da perturbação quiral relativística e representam um dos principais resultados deste trabalho. No capítulo seguinte apresentamos e discutimos suas principais características no espaço de configuração.

4.8 Comparação com o potencial HB

Nesta seção, comparamos a expansão dos nossos resultados com os obtidos através do formalismo de bárion pesado. Este último foi construído em uma série de trabalhos [19, 20, 21], incluindo correções relativísticas, e organizado no trabalhos de Entem e Machleidt [23]. É importante deixar claro que o nosso potencial, apresentado na seção anterior, não é equivalente ao HB, uma vez que não expandimos as integrais básicas. De acordo com o que foi discutido no capítulo 2 e nas referências [28, 12, 13],

- a expansão das integrais de *loop* relativísticas em potências de q devem, em princípio, reproduzir os resultados do formalismo HB, mas
- esse tipo de expansão, para alguns diagramas, não é permitido em certas regiões de baixa energia.

Cientes da segunda afirmação, e somente com o objetivo de testar a primeira, substituímos as expansões da seção 4.6 nas expressões do nosso potencial, considerando apenas os termos que contribuem em $\mathcal{O}(q^4)$. A seguir apresentamos o resultado destas expansões e a sua relação

com o potencial HB padrão. Seguindo a notação dos trabalhos de Kaiser, e Entem e Machleidt, escrevemos V_X para as componentes isoescalares, e W_X , para as componentes isovetoriais do potencial, onde $X = \{C, T, LS, \sigma L\}$. Os termos presentes somente no nosso potencial são indicados por [...]*.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad V_C = V_C^+ = & \frac{3g_A^2}{16\pi f_\pi^4} \left\{ -\frac{g_A^2 \mu^5}{16m(4\mu^2 + \mathbf{q}^2)} + [2\mu^2(2c_1 - c_3) - \mathbf{q}^2 c_3] (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) A(q) \right. \\
& + \frac{g_A^2 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) A(q)}{16m} [-3\mathbf{q}^2 + (4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^*] \Big\} \\
& + \frac{g_A^2 L(q)}{32\pi^2 f_\pi^4 m} \left\{ \frac{24\mu^6}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} (2c_1 + c_3) + 6\mu^4(c_2 - 2c_3) + 4\mu^2 \mathbf{q}^2 (6c_1 + c_2 - 3c_3) + \mathbf{q}^4(c_2 - 6c_3) \right\} \\
& - \frac{3L(q)}{16\pi^2 f_\pi^4} \left\{ [-4\mu^2 c_1 + c_3(2\mu^2 + \mathbf{q}^2) + c_2(4\mu^2 + \mathbf{q}^2)/6]^2 + \frac{1}{45} (c_2)^2 (4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^2 \right\} \\
& + \frac{g_A^4}{32\pi^2 f_\pi^4 m^2} \left\{ L(q) \left[\frac{2\mu^8}{(4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^2} + \frac{8\mu^6}{(4\mu^2 + \mathbf{q}^2)} - 2\mu^4 - \mathbf{q}^4 \right] + \frac{\mu^6/2}{(4\mu^2 + \mathbf{q}^2)} \right\} \\
& - \frac{3g_A^4 [A(q)]^2}{1024\pi^2 f_\pi^6} (\mu^2 + 2\mathbf{q}^2) (2\mu^2 + \mathbf{q}^2)^2 \\
& - \frac{3g_A^4 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) A(q)}{1024\pi^2 f_\pi^6} \left\{ 4\mu g_A^2 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) + 2\mu (\mu^2 + 2\mathbf{q}^2) \right\} , \tag{4.111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad V_T = -\frac{3 V_T^+}{m^2} = & \frac{3g_A^4 L(q)}{64\pi^2 f_\pi^4} - \frac{g_A^4 A(q)}{512\pi f_\pi^4 m} [9(2\mu^2 + \mathbf{q}^2) + 3(4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^*] \\
& - \frac{g_A^4 L(q)}{32\pi^2 f_\pi^4 m^2} \left[\mathbf{z}^2/4 + [5/8 - (3/8)^*] \mathbf{q}^2 + \frac{\mu^4}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} \right] \\
& + \frac{g_A^2 (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) L(q)}{32\pi^2 f_\pi^4} \left[(\tilde{d}_{14} - \tilde{d}_{15}) - (g_A^4/32 \pi^2 f_\pi^2)^* \right] + \left[3 \Delta_{GT} \frac{g_A^4 L(q)}{16\pi^2 f_\pi^4} \right]^* , \tag{4.112}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad V_{LS} = -\frac{V_{LS}^+}{m^2} = & -\frac{3g_A^4 A(q)}{32\pi f_\pi^4 m} [(2\mu^2 + \mathbf{q}^2) + (\mu^2 + 3\mathbf{q}^2/8)^*] \\
& - \frac{g_A^4 L(q)}{4\pi^2 f_\pi^4 m^2} \left[\frac{\mu^4}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} + \frac{11}{32} \mathbf{q}^2 \right] - \frac{g_A^2 c_2 L(q)}{8\pi^2 f_\pi^4 m} (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) , \tag{4.113}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad V_{\sigma L} = \frac{4 V_Q^+}{m^4} = -\frac{g_A^4 L(q)}{32\pi^2 f_\pi^4 m^2} , \tag{4.114}$$

e

$$\begin{aligned}
\bullet \quad W_C = V_C^- = & \frac{L(q)}{384\pi^2 f_\pi^4} \left[4\mu^2 (5g_A^4 - 4g_A^2 - 1) + \mathbf{q}^2 (23g_A^4 - 10g_A^2 - 1) + \frac{48g_A^4 \mu^4}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} \right] \\
& - \frac{g_A^2}{128\pi f_\pi^4 m} \left\{ 3g_A^2 \frac{\mu^5}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} + A(q) (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) \left[g_A^2 (4\mu^2 + 3\mathbf{q}^2) - 2 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + g_A^2 (4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^* \right] \right\} + \frac{\mathbf{q}^2 c_4 L(q)}{192\pi^2 f_\pi^4 m} \left[g_A^2 (8\mu^2 + 5\mathbf{q}^2) + (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right] \\
& - \frac{L(q)}{768\pi^2 f_\pi^4 m^2} \left\{ (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \mathbf{z}^2 + g_A^2 \left[\frac{48\mu^6}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} - 24\mu^4 - 12 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) \mathbf{q}^2 + (16\mu^2 + 10\mathbf{q}^2) \mathbf{z}^2 \right] \right. \\
& \left. + g_A^4 \left[\mathbf{z}^2 \left(\frac{16\mu^4}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} - 7\mathbf{q}^2 - 20\mu^2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{64\mu^8}{(4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^2} - \frac{48\mu^6}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} + \frac{[16 - (24)^*] \mu^4 \mathbf{q}^2}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} + [20 - (6)^*] \mathbf{q}^4 + 24\mu^2 \mathbf{q}^2 + 24\mu^4 \right] \right\} \\
& + \frac{16g_A^4 \mu^6}{768\pi^2 f_\pi^4 m^2} \frac{1}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} \\
& - \frac{L(q)}{18432\pi^4 f_\pi^6} \left\{ 192\pi^2 f_\pi^2 (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \tilde{d}_3 \left[2g_A^2 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) - 3/5 (g_A^2 - 1) (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right] \right. \\
& + \left[6g_A^2 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) - (g_A^2 - 1) (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right] \left[384\pi^2 f_\pi^2 \left((2\mu^2 + \mathbf{q}^2) (\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2) + 4\mu^2 \tilde{d}_5 \right) \right. \\
& + L(q) \left(4\mu^2 (1 + 2g_A^2) + \mathbf{q}^2 (1 + 5g_A^2) \right) - \left(\frac{\mathbf{q}^2}{3} (5 + 13g_A^2) + 8\mu^2 (1 + 2g_A^2) \right) \\
& \left. \left. + \left(2g_A^4 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) + \frac{2}{3} \mathbf{q}^2 (1 + 2g_A^2) \right)^* \right] \right\} \\
& - \frac{1}{25} (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) (15 + 7g_A^4) \left[10g_A^2 (2\mu^2 + \mathbf{q}^2) - 3(g_A^2 - 1) (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right]^* \left\{ \right. \\
& - \frac{\mathbf{z}^2 g_A^4}{2048\pi^2 f_\pi^6} \left\{ \left[(4\mu^2 + \mathbf{q}^2) A(q) \right]^2 + 2\mu (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) A(q) \right\}^* \\
& \left. + \Delta_{GT} \frac{g_A^2 L(q)}{96\pi^2 f_\pi^4} \left[g_A^2 \left(\frac{48\mu^4}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} + 20\mu^2 + 23\mathbf{q}^2 \right) - 8\mu^2 - 5\mathbf{q}^2 \right]^* \right\}, \tag{4.115}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad W_T = -\frac{3}{m^2} V_T^- = \frac{g_A^2 A(q)}{32\pi f_\pi^4} \left[\left(c_4 + \frac{1}{4m} \right) (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) - \frac{g_A^2}{8m} [10\mu^2 + 3\mathbf{q}^2 - (4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^*] \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_4^2 L(q)}{96\pi^2 f_\pi^4} (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) + \frac{c_4 L(q)}{192\pi^2 f_\pi^4 m} \left[g_A^2 (16\mu^2 + 7\mathbf{q}^2) - (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right] \\
& -\frac{L(q)}{1536\pi^2 f_\pi^4 m^2} \left[g_A^4 \left(28\mu^2 + 17\mathbf{q}^2 + \frac{16\mu^4}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} \right) - g_A^2 (32\mu^2 + 14\mathbf{q}^2) + (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right] \\
& -\frac{[A(q)]^2 g_A^4 (4\mu^2 + \mathbf{q}^2)^2}{2048\pi^2 f_\pi^6} - \frac{A(q) g_A^4 (4\mu^2 + \mathbf{q}^2)}{1024\pi^2 f_\pi^6} \mu (1 + 2g_A^2) , \tag{4.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad W_{LS} &= -\frac{1}{m^2} V_{LS}^- = \frac{A(q)}{32\pi f_\pi^4 m} \left[g_A^2 (g_A^2 - 1) (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) + g_A^4 (2\mu^2 + 3\mathbf{q}^2/4)^* \right] \\
& + \frac{c_4 L(q)}{48\pi^2 m f_\pi^4} \left[g_A^2 (8\mu^2 + 5\mathbf{q}^2) + (4\mu^2 + \mathbf{q}^2) \right] \\
& + \frac{L(q)}{256\pi^2 m^2 f_\pi^4} \left[(4\mu^2 + \mathbf{q}^2) - 16g_A^2 (\mu^2 + 3\mathbf{q}^2/8) + \frac{4g_A^4}{3} \left(9\mu^2 + 11\mathbf{q}^2/4 - \frac{4\mu^4}{4\mu^2 + \mathbf{q}^2} \right) \right] \\
& + \frac{g_A^4}{512\pi^2 f_\pi^6} \left\{ \left[(4\mu^2 + \mathbf{q}^2) A(q) \right] \left[(4\mu^2 + \mathbf{q}^2) A(q) + 2\mu \right] \right\}^* , \tag{4.117}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad W_{\sigma L} \simeq 0 . \tag{4.118}$$

Podemos observar que o número de termos diferentes das expressões do HBChPT é relativamente pequeno. Algumas diferenças estão relacionadas à discrepância na relação de Goldberger-Treiman, indicadas por Δ_{GT} . Duas diferenças, na penúltima linha de (4.115) e na última linha de (4.117), provêm dos diagramas de dois *loops*. Quanto às demais diferenças, muito provavelmente, decorrem das diferentes prescrições adotadas para a iteração do OPEP.

Capítulo 5

O potencial no espaço de configuração

5.1 A aproximação local

Os processos a baixas energias em física nuclear são geralmente calculados por meio da equação de Schödinger e, na maioria dos casos, no espaço de configuração. Como uma das finalidades do nosso potencial é a sua aplicação em processos desse tipo, é útil representá-lo neste espaço. Este procedimento envolve algumas dificuldades técnicas, associadas a não-localidades, devidas à dependência do potencial com a energia. Para contornar essas dificuldades fazemos a aproximação local, que consiste numa expansão do potencial nos termos não-locais. Esta aproximação não tem uma justificativa teórica rigorosa. Entretanto, potenciais fenomenológicos, que consideram apenas termos lineares e quadráticos nas não-localidades, reproduzem satisfatoriamente a dependência dos observáveis com a energia, quando seus valores são baixos [62, 63].

Suprimindo os índices de spin e isospin, o potencial no espaço de configuração é definido como¹

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \mathbf{r} \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}' - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p} \rangle,\end{aligned}\quad (5.1)$$

onde $\hat{V}$, $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são, respectivamente, o operador potencial, e as posições relativas dos nucleons iniciais e finais. Em termos das variáveis $\mathbf{z}$ e $\mathbf{q}$ temos

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{z} \cdot \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{2}} e^{i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}}{2}} \left\langle \frac{\mathbf{z} + \mathbf{q}}{2} \left| \hat{V} \right| \frac{\mathbf{z} - \mathbf{q}}{2} \right\rangle. \quad (5.2)$$

A variável $\mathbf{z}$ é a responsável pelos termos não-locais no espaço de configuração, de acordo com os exemplos que seguem.

A ação do operador potencial sobre um estado ψ , no espaço de configuração, é dada por

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi \rangle = \int d^3 r \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = V(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \quad (5.3)$$

¹As convenções para a normalização dos estados são dadas no apêndice A.

Consideremos o caso de um potencial que dependa apenas de $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. A integração na variável $\mathbf{z}$ em (5.2) fornece

$$\frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} e^{i \frac{\mathbf{z}}{2} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} = \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} e^{i \mathbf{z} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} = \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (5.4)$$

o que permite escrever (5.2) como

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \mathbf{r} \rangle = V(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \langle \mathbf{q} | \hat{V} | \mathbf{q} \rangle = \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) V(\mathbf{r}). \quad (5.5)$$

Portanto, neste caso específico, o elemento de matriz definido em (5.3) assume a bem conhecida forma

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi \rangle = V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'). \quad (5.6)$$

Para potenciais que dependem de $\mathbf{z}$, a relação não é tão simples. Considerando um potencial linear em $\mathbf{z}$, escrevemos a equação (5.2) como

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i \mathbf{z} \cdot \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{2}} e^{i \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}}{2}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot (2i \nabla_r) \frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} e^{i \mathbf{z} \cdot \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{2}} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot (2i \nabla_r) \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{q}). \quad (5.8)$$

Substituindo (5.7) em (5.3) temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi \rangle &= \int d^3 r \psi(\mathbf{r}) \mathbf{f} \left(\frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}}{2} \right) \cdot (2i \nabla_r) \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= \int d^3 r \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \left(-2i \nabla_r \right) \cdot \left[\psi(\mathbf{r}) \mathbf{f} \left(\frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}}{2} \right) \right] \\ &= \int d^3 r \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{R}) \cdot \left[-2i \nabla_r \psi(\mathbf{r}) \right] + \psi(\mathbf{r}) \frac{1}{2} \left[-2i \nabla_R \cdot \mathbf{f}(\mathbf{R}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde, por conveniência, usamos $\mathbf{R} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r})/2$. A integração em $d^3 r$ fornece

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi \rangle &= \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \left[-2i \nabla_{\mathbf{r}'} \psi(\mathbf{r}') \right] + \psi(\mathbf{r}') \left[-i \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}') \right] \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \left[-i \nabla_{\mathbf{r}'} \psi(\mathbf{r}') \right] + \left(-i \nabla_{\mathbf{r}'} \right) \cdot \left[\mathbf{f}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \right] \\
&= \left[\mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}') \right] \psi(\mathbf{r}'), \tag{5.10}
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{P} = -i \nabla_{\mathbf{r}'}$. Portanto, uma dependência linear em $\mathbf{z}$ leva a um potencial proporcional ao operador momento $\mathbf{P}$ no espaço de configuração. De um modo geral, existe uma equivalência entre as expansões do potencial no espaço de momento em torno de $\mathbf{z} = 0$, e no espaço de configuração, em termos do operador $\mathbf{P}$ [63]. Os potenciais dependentes de $\mathbf{P}$ são conhecidos como não-locais.

Neste trabalho usamos a aproximação local, exceto para o termo spin-órbita, cujo operador é linear em $\mathbf{z}$. Portanto, o operador Ω_Q , por ser quadrático em $\mathbf{z}$ (equação (3.66)), não será considerado.

5.2 A representação no espaço de configuração

O potencial local no espaço de configuração, de um modo geral, é dado pela transformada de Fourier

$$V^\pm(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V^\pm(\mathbf{q}) = \mu^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V^\pm(\mu\mathbf{k}), \tag{5.11}$$

onde $\mathbf{k} = \mathbf{q}/\mu$, $\mathbf{x} = \mu\mathbf{r}$ e $V^\pm(\mathbf{q})$ é definido na equação (3.67). Por conveniência, introduzimos as seguintes funções:

$$U_I^\pm(x) = \mu^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V_I^\pm(k), \quad I = \{C, SS, T, LS\}, \tag{5.12}$$

onde $V_I^\pm(k)$ são as componentes do potencial no espaço de momento, dadas na equação (3.67). Por definição, as funções $U_I^\pm$ dependem apenas de $x = |\mathbf{x}|$.

A transformação relativa à componente central é, então, dada por

$$V^\pm(\mathbf{r})|_C = \mu^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V_C^\pm(k) \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} = U_C^\pm(x) \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)}. \tag{5.13}$$

Para o termo spin-spin, a transformada de Fourier resulta em

$$\begin{aligned}
V^\pm(\mathbf{r})|_{SS} &= \mu^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V_{SS}^\pm(k) \frac{\mu^2}{m^2} \mathbf{k}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \\
&= \frac{\mu^2}{m^2} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \left[-\nabla_x^2 \right] \mu^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V_{SS}^\pm(k)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu^2}{m^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_{SS}^\pm(x) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}. \quad (5.14)$$

A transformada de Fourier da parte tensorial é feita de maneira análoga, mas envolvendo um pouco mais de álgebra:

$$\begin{aligned} V^\pm(\mathbf{r})|_T &= \mu^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V_T^\pm(k) \frac{\mu^2}{m^2} \left[\mathbf{k}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - 3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{k}) \right] \\ &= \frac{\mu^2}{m^2} \left[-\delta_{ij} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + 3\sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} U_T^\pm(x). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como $U^\pm$ são funções de $|\mathbf{x}|$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U(x) = x_i \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} U(x), \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} U^\pm(x) = \left[\delta_{ij} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_i x_j}{x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] U(x). \quad (5.17)$$

O primeiro termo da relação acima se anula em (5.15). Portanto,

$$\begin{aligned} V^\pm(\mathbf{r})|_T &= \frac{\mu^2}{m^2} \left[-\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + 3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{x}})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_T^\pm(x) \\ &= \frac{\mu^2}{m^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_T^\pm(x) \left[3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

No caso do termo spin-órbita, vemos que $\boldsymbol{\Omega}_{LS}$ é linear em $\mathbf{z}$:

$$\boldsymbol{\Omega}_{LS} = \frac{i}{2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) = \frac{i}{2} \mathbf{z} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{q}), \quad (5.19)$$

onde $\mathbf{s} = (\mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)})/2$ é o spin total do sistema nucleon-nucleon. Devido à linearidade em $\mathbf{z}$, o potencial spin-órbita é definido pela equação (5.10). O cálculo da função $\mathbf{f}$, definida em (5.8), é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{LS}(\mathbf{r}) &= \mu^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V_{LS}^\pm(k) \frac{\mu}{m^2} \frac{i}{2} \mathbf{s} \times \mathbf{k} \\ &= \frac{\mu}{m^2} \frac{1}{2} \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nabla}_x U_{LS}^\pm(x). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Usando (5.16), obtemos

$$\mathbf{f}_{LS}(\mathbf{r}) = \frac{\mu^2}{m^2} \frac{1}{2} \mathbf{s} \times \mathbf{r} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} U_{LS}^\pm(x). \quad (5.21)$$

Vamos agora trabalhar a estrutura vetorial de (5.10). O produto simetrizado de $\mathbf{P}$ com $\mathbf{s} \times \mathbf{r}$ fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [(\mathbf{s} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{r})] &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [s_j r_k P_i + P_i s_j r_k] = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [s_i r_j P_k + P_k s_i r_j] \\ &= s_i \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [r_j P_k + P_k r_j] = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde $\mathbf{L}$ é o operador spin-órbita. A representação do termo spin-órbita no espaço de configuração é, portanto, escrita como

$$V^\pm(\mathbf{r})|_{LS} = \frac{\mu^2}{m^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} U_{LS}^\pm \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}. \quad (5.23)$$

Para resumir, escrevemos o potencial no espaço de configuração, contendo apenas termos locais e lineares nas não-localidades, como

$$V^\pm(\mathbf{r}) = V_C^\pm \Omega_C + V_{LS}^\pm \Omega_{LS} + V_T^\pm \Omega_T + V_{SS}^\pm \Omega_{SS}, \quad (5.24)$$

onde

$$\Omega_C = \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)}, \quad (5.25)$$

$$\Omega_{LS} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}, \quad (5.26)$$

$$\Omega_T = 3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \quad (5.27)$$

$$\Omega_{SS} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}. \quad (5.28)$$

As funções radiais que multiplicam os operadores Ω são dadas por

$$V_C^\pm(r) = U_C^\pm(x), \quad (5.29)$$

$$V_{LS}^\pm(r) = \frac{\mu^2}{m^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} U_{LS}^\pm(x), \quad (5.30)$$

$$V_T^\pm(r) = \frac{\mu^2}{m^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_T^\pm(x), \quad (5.31)$$

$$V_{SS}^\pm(r) = -\frac{\mu^2}{m^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_{SS}^\pm(x). \quad (5.32)$$

De acordo com a definição (5.12), as funções $U_I^\pm(x)$ são as transformadas de Fourier das componentes do potencial no espaço de momento, dadas em (3.67). As expressões para estas funções são obtidas substituindo $t = q^2 = -\mathbf{q}^2$ por $\mu^2 \nabla_x^2$ e fazendo $z^2 = 0$ nas equações (3.73)-(3.75). Nas funções $\mathcal{I}_{XY}^\pm$, além desse procedimento, substituímos as integrais de *loop* no espaço de momento Π pelas correspondentes no espaço de configuração, S (apêndice B).

5.3 Estudo das integrais de *loop*

Nesta seção, apresentamos um breve estudo sobre as integrais de *loop*, necessário para o entendimento de alguns aspectos do nosso potencial. Inicialmente, exibimos a dependência delas com variações na massa do nucleon. Em seguida, analisamos os resultados numéricos das relações entre integrais, apresentadas no apêndice F. Encerramos esta seção discutindo uma sutil diferença entre as nossas integrais do tipo caixa-iteração com as de Partovi e Lomon [63].

5.3.1 As integrais em função da massa do nucleon

No capítulo anterior, afirmamos que nossas integrais de *loop*, definidas no apêndice B, começam em ordem q^0 na escala quiral, por variarem pouco com grandes mudanças na massa do nucleon. Nesta seção, mostramos esta característica no espaço de configuração. Devido ao comportamento exponencial destas integrais para r grande, todas foram normalizadas pela integral $\Pi_\ell = \Pi_{cc}^{000}$. Nas figuras 5.1a–5.1m temos as integrais de *loop* utilizadas neste trabalho, onde as linhas cheias correspondem à massa do nucleon no seu valor físico, enquanto que as tracejadas e pontilhadas, respectivamente, a 10 e 100 vezes este valor. As figuras (a)–(d) são integrais do tipo triângulo, (e)–(h), do tipo cruzado, e (i)–(m), do tipo caixa-iteração. As integrais do tipo bolha e a integral Π_a , que não dependem da massa do nucleon, são apresentadas na figura 5.1n.

Além da pequena variação com a massa do nucleon, observamos que as integrais Π_{sc}^{001} , Π_{ss}^{002} , $\bar{\Pi}_{ss}^{000}$, Π_{reg}^{002} , Π_{reg}^{020} e $\bar{\Pi}_{reg}^{000}$ são aproximadamente proporcionais a Π_{cc}^{000} , e as demais, como se diferissem apenas por um polinômio em r , para distâncias maiores que $2fm$. Isso vale também para as integrais da figura 5.1n, a partir de aproximadamente $3fm$. Tais comportamentos sugerem uma interdependência entre elas, o que nos motivou a desenvolver as relações do apêndice F.

(g) Π_{ss}^{002} / Π_l (h) $\bar{\Pi}_{ss}^{000} / \Pi_l$ (i) Π_{reg}^{000} / Π_l (k) Π_{reg}^{010} / Π_l (j) Π_{reg}^{002} / Π_l (l) Π_{reg}^{020} / Π_l

Figura 5.1: (a)–(m) Razões das integrais do tipo triângulo, cruzado e caixa-iteração, para três valores da massa do nucleon, conforme indicações nos gráficos. (n) Razões das integrais do tipo bolha ($\bar{\Pi}_{cc}^{000}$ e $\bar{\Pi}_{cc}^{000}$), mais o termo dominante, na expansão de bárion pesado, da integral Π_{sc}^{000} (Π_a), que não dependem da massa do nucleon.

5.3.2 Relações entre integrais

A seguir, exibimos alguns resultados numéricos, que mostram a qualidade das aproximações feitas na obtenção das relações entre integrais do apêndice F, onde desconsideramos funções de curto alcance. Nas tabelas abaixo, as colunas referem-se, respectivamente, aos lados esquerdo e direito das equações, e às diferenças absoluta e relativa (em módulo). Como usamos a aproximação local, fazemos $z^2 = 0$ e $W^2 = 4m^2 - t$.

$$\text{Relação 01: } \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{cc}^{(000)}$$

Tabela 5.1: Relação 01.

r (fm)	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. percentual
0.10	-4.72776588E+04	-4.72767478E+04	9.10968070E-01	0.0019 %
0.20	-1.45675912E+03	-1.45676435E+03	5.23525200E-03	0.0004 %
0.30	-1.87562601E+02	-1.87562560E+02	4.12196667E-05	0.0000 %
0.40	-4.31883101E+01	-4.31883019E+01	8.15266667E-06	0.0000 %
0.50	-1.36386098E+01	-1.36386105E+01	6.76899999E-07	0.0000 %
0.60	-5.25006020E+00	-5.25006027E+00	7.43666664E-08	0.0000 %
0.70	-2.31391294E+00	-2.31391293E+00	1.09100001E-08	0.0000 %
0.80	-1.12501007E+00	-1.12501007E+00	2.56666673E-09	0.0000 %
0.90	-5.89144330E-01	-5.89144330E-01	1.26666634E-10	0.0000 %
1.00	-3.26965031E-01	-3.26965031E-01	1.14999982E-10	0.0000 %
1.50	-3.00526317E-02	-3.00526317E-02	3.33331664E-13	0.0000 %

$$\text{Relação 02: } \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} = \frac{1}{15} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right)^2 \Pi_{cc}^{(000)}$$

Tabela 5.2: Relação 02.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	9.68460730E+06	9.68457113E+06	3.61661690E+01	0.0004 %
0.20	7.51108682E+04	7.51106477E+04	2.20477484E-01	0.0003 %
0.30	4.34337591E+03	4.34339541E+03	1.94970946E-02	0.0004 %
0.40	5.70180611E+02	5.70179854E+02	7.57546167E-04	0.0001 %
0.50	1.17075044E+02	1.17075011E+02	3.28787467E-05	0.0000 %
0.60	3.18540247E+01	3.18540304E+01	5.72752000E-06	0.0000 %
0.70	1.05132534E+01	1.05132539E+01	4.98242000E-07	0.0000 %
0.80	3.99311216E+00	3.99311208E+00	7.97166667E-08	0.0000 %
0.90	1.68719251E+00	1.68719249E+00	1.99360000E-08	0.0000 %
1.00	7.74941014E-01	7.74941014E-01	9.93333226E-11	0.0000 %
1.50	3.53675842E-02	3.53675842E-02	2.80000049E-12	0.0000 %

$$\text{Relação 03: } \left(1 - \frac{t}{4m^2}\right) \Pi_{sc}^{(001)} = \Pi_{cc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)}$$

Tabela 5.3: Relação 03.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	-1.99250277E+02	-1.98399099E+02	8.51177528E-01	0.4272 %
0.20	3.27728247E-01	3.22440650E-01	5.28759615E-03	1.6134 %
0.30	3.12739684E+00	3.12743819E+00	4.13558127E-05	0.0013 %
0.40	1.90922160E+00	1.90922916E+00	7.56547706E-06	0.0004 %
0.50	1.10938194E+00	1.10938135E+00	5.94446108E-07	0.0001 %
0.60	6.64812346E-01	6.64812278E-01	6.76965587E-08	0.0000 %
0.70	4.13727096E-01	4.13727104E-01	8.01211214E-09	0.0000 %
0.80	2.66373699E-01	2.66373702E-01	2.23811291E-09	0.0000 %
0.90	1.76538733E-01	1.76538733E-01	5.25226095E-12	0.0000 %
1.00	1.19893042E-01	1.19893042E-01	9.83167154E-11	0.0000 %
1.50	2.24051432E-02	2.24051432E-02	7.98299981E-13	0.0000 %

$$\text{Relação 04: } \left(1 - \frac{t}{4m^2}\right) \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = -\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(001)}$$

Tabela 5.4: Relação 04.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	2.07220310E+03	2.07130643E+03	8.96676116E-01	0.0433 %
0.20	1.31338544E+02	1.31343146E+02	4.60201339E-03	0.0035 %
0.30	2.39837476E+01	2.39836567E+01	9.08720953E-05	0.0004 %
0.40	6.85319127E+00	6.85319068E+00	5.93021228E-07	0.0000 %
0.50	2.51538728E+00	2.51538772E+00	4.41953280E-07	0.0000 %
0.60	1.08397165E+00	1.08397164E+00	1.26799246E-08	0.0000 %
0.70	5.22338771E-01	5.22338766E-01	5.80549287E-09	0.0000 %
0.80	2.73272737E-01	2.73272737E-01	6.46644250E-11	0.0000 %
0.90	1.52264825E-01	1.52264825E-01	1.48298457E-10	0.0000 %
1.00	8.91689411E-02	8.91689411E-02	2.22025015E-11	0.0000 %
1.50	9.97782848E-03	9.97782848E-03	2.07905075E-13	0.0000 %

$$\text{Relação 05: } \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{4m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(001)}$$

Tabela 5.5: Relação 05.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	1.16870600E+03	1.16581032E+03	2.89568503E+00	0.2478 %
0.20	1.12478243E+02	1.12496258E+02	1.80150804E-02	0.0160 %
0.30	2.65700744E+01	2.65699343E+01	1.40021338E-04	0.0005 %
0.40	9.12642232E+00	9.12639635E+00	2.59681870E-05	0.0003 %
0.50	3.85735158E+00	3.85735362E+00	2.04424995E-06	0.0001 %
0.60	1.86060079E+00	1.86060102E+00	2.31807549E-07	0.0000 %
0.70	9.83517651E-01	9.83517624E-01	2.78460135E-08	0.0000 %
0.80	5.56020617E-01	5.56020610E-01	7.69269149E-09	0.0000 %
0.90	3.30915007E-01	3.30915007E-01	1.41496943E-11	0.0000 %
1.00	2.05095036E-01	2.05095036E-01	3.40898569E-10	0.0000 %
1.50	2.78650222E-02	2.78650222E-02	1.69184099E-13	0.0000 %

$$\text{Relação 06: } \left(1 - \frac{t}{4m^2}\right) \Pi_{ss}^{(001)} = \Pi_{sc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(000)}$$

Tabela 5.6: Relação 06.

r (fm)	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	9.85600933E+00	9.30318082E+00	5.52828512E-01	5.6091 %
0.20	-5.93430624E+00	-5.92552482E+00	8.78141966E-03	0.1480 %
0.30	-3.41136431E+00	-3.41124555E+00	1.18762080E-04	0.0035 %
0.40	-1.94822191E+00	-1.94825969E+00	3.77784105E-05	0.0019 %
0.50	-1.17771237E+00	-1.17771027E+00	2.10327069E-06	0.0002 %
0.60	-7.48293381E-01	-7.48293055E-01	3.25420977E-07	0.0000 %
0.70	-4.94558619E-01	-4.94558654E-01	3.54719409E-08	0.0000 %
0.80	-3.37199783E-01	-3.37199792E-01	8.99558129E-09	0.0000 %
0.90	-2.35727375E-01	-2.35727375E-01	2.76276576E-10	0.0000 %
1.00	-1.68188947E-01	-1.68188946E-01	3.65646638E-10	0.0000 %
1.50	-3.83125516E-02	-3.83125516E-02	5.49680811E-14	0.0000 %

$$\text{Relação 07: } \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = -\Pi_{sc}^{(001)}$$

Tabela 5.7: Relação 07.

r (fm)	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	-1.06415344E+02	-1.06415344E+02	0.00000000E+00	0.0000 %
0.20	-1.98518350E+01	-1.98518350E+01	0.00000000E+00	0.0000 %
0.30	-6.72607078E+00	-6.72607078E+00	0.00000000E+00	0.0000 %
0.40	-2.94861701E+00	-2.94861701E+00	0.00000000E+00	0.0000 %
0.50	-1.49534470E+00	-1.49534470E+00	0.00000000E+00	0.0000 %
0.60	-8.33177791E-01	-8.33177791E-01	0.00000000E+00	0.0000 %
0.70	-4.95878255E-01	-4.95878255E-01	0.00000000E+00	0.0000 %
0.80	-3.09898253E-01	-3.09898253E-01	0.00000000E+00	0.0000 %
0.90	-2.01097365E-01	-2.01097365E-01	0.00000000E+00	0.0000 %
1.00	-1.34455365E-01	-1.34455365E-01	0.00000000E+00	0.0000 %
1.50	-2.41328465E-02	-2.41328465E-02	0.00000000E+00	0.0000 %

Relação 08: $\left(1 - \frac{t}{4m^2}\right) \Pi_{ss}^{(002)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(001)}$

Tabela 5.8: Relação 08.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	-2.39689758E+02	-2.38370925E+02	1.31883295E+00	0.5502 %
0.20	-1.40262801E+01	-1.40392322E+01	1.29521451E-02	0.0923 %
0.30	-1.42518999E+00	-1.42508079E+00	1.09203827E-04	0.0077 %
0.40	9.10648095E-02	9.10886004E-02	2.37909281E-05	0.0261 %
0.50	2.61249707E-01	2.61247068E-01	2.63854197E-06	0.0010 %
0.60	2.24517523E-01	2.24517413E-01	1.10378610E-07	0.0000 %
0.70	1.66781633E-01	1.66781680E-01	4.62431059E-08	0.0000 %
0.80	1.19566366E-01	1.19566369E-01	3.30439473E-09	0.0000 %
0.90	8.52174582E-02	8.52174570E-02	1.20500534E-09	0.0000 %
1.00	6.09936362E-02	6.09936360E-02	2.24861513E-10	0.0000 %
1.50	1.30030660E-02	1.30030660E-02	7.62321080E-13	0.0000 %

Relação 09: $\left(1 - \frac{t}{4m^2}\right)^2 \Pi_{ss}^{(002)} + \left(1 - \frac{t}{4m^2}\right) \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} =$
 $\frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right)^2 \Pi_{ss}^{(000)} + \left(1 - \frac{t}{4m^2}\right) \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)}$

Tabela 5.9: Relação 09.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	2.22373984E+03	3.05151532E+03	8.27775476E+02	27.1267 %
0.20	4.25344343E+01	3.97706480E+01	2.76378635E+00	6.4978 %
0.30	3.86012945E+00	3.93274357E+00	7.26141171E-02	1.8464 %
0.40	9.37413412E-01	9.35633873E-01	1.77953874E-03	0.1898 %
0.50	4.32344033E-01	4.32194132E-01	1.49900871E-04	0.0347 %
0.60	2.59202871E-01	2.59220400E-01	1.75294151E-05	0.0068 %
0.70	1.70250875E-01	1.70252561E-01	1.68557870E-06	0.0010 %
0.80	1.16217791E-01	1.16217551E-01	2.39594616E-07	0.0002 %
0.90	8.11151256E-02	8.11150703E-02	5.52901155E-08	0.0001 %
1.00	5.75394149E-02	5.75394157E-02	7.58852621E-10	0.0000 %
1.50	1.22543506E-02	1.22543506E-02	5.73465006E-12	0.0000 %

Relação 10: $\bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(001)}$

Tabela 5.10: Relação 10.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	-1.06415344E+02	-1.02703497E+02	3.71184688E+00	3.4881 %
0.20	-1.98518350E+01	-1.99109135E+01	5.90785112E-02	0.2967 %
0.30	-6.72607078E+00	-6.72691887E+00	8.48090615E-04	0.0126 %
0.40	-2.94861701E+00	-2.94835768E+00	2.59331017E-04	0.0088 %
0.50	-1.49534470E+00	-1.49535886E+00	1.41538178E-05	0.0009 %
0.60	-8.33177791E-01	-8.33180057E-01	2.26577031E-06	0.0003 %
0.70	-4.95878255E-01	-4.95878015E-01	2.39530586E-07	0.0000 %
0.80	-3.09898253E-01	-3.09898190E-01	6.29308308E-08	0.0000 %
0.90	-2.01097365E-01	-2.01097367E-01	1.71865429E-09	0.0000 %
1.00	-1.34455365E-01	-1.34455367E-01	2.58637868E-09	0.0000 %
1.50	-2.41328465E-02	-2.41328465E-02	3.66794245E-13	0.0000 %

Relação 11: $-\Pi_{sc}^{(000)} = +\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(000)} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{4m^2}}} \Pi_a$

Tabela 5.11: Relação 11.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	5.78238334E+01	1.38668499E+03	1.32886116E+03	95.8301 %
0.20	1.42882110E+01	4.79904747E+01	3.37022637E+01	70.2270 %
0.30	5.82182262E+00	9.94460512E+00	4.12278250E+00	41.4575 %
0.40	2.93071782E+00	3.71438215E+00	7.83664325E-01	21.0981 %
0.50	1.66024799E+00	1.83694299E+00	1.76694999E-01	9.6190 %
0.60	1.01446690E+00	1.05725783E+00	4.27909268E-02	4.0474 %
0.70	6.53439387E-01	6.63905371E-01	1.04659838E-02	1.5764 %
0.80	4.37586403E-01	4.39983188E-01	2.39678556E-03	0.5447 %
0.90	3.01927464E-01	3.02346511E-01	4.19047508E-04	0.1386 %
1.00	2.13320521E-01	2.13304358E-01	1.61634005E-05	0.0076 %
1.50	4.74250216E-02	4.74102074E-02	1.48141638E-05	0.0312 %

$$\text{Relação 12: } \left(1 - \frac{t}{4m^2}\right) \Pi_{reg}^{(002)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \Pi_{sc}^{(001)}$$

Tabela 5.12: Relação 12.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	1.06405181E+02	1.06415344E+02	1.01628776E-02	0.0096 %
0.20	1.98498730E+01	1.98518350E+01	1.96200526E-03	0.0099 %
0.30	6.72556575E+00	6.72607078E+00	5.05029791E-04	0.0075 %
0.40	2.94847076E+00	2.94861701E+00	1.46246537E-04	0.0050 %
0.50	1.49529953E+00	1.49534470E+00	4.51727844E-05	0.0030 %
0.60	8.33163257E-01	8.33177791E-01	1.45343779E-05	0.0017 %
0.70	4.95873445E-01	4.95878255E-01	4.81006166E-06	0.0010 %
0.80	3.09896628E-01	3.09898253E-01	1.62504302E-06	0.0005 %
0.90	2.01096807E-01	2.01097365E-01	5.57730370E-07	0.0003 %
1.00	1.34455171E-01	1.34455365E-01	1.93810401E-07	0.0001 %
1.50	2.41328454E-02	2.41328465E-02	1.10862551E-09	0.0000 %

$$\text{Relação 13: } \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = -\Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(010)}$$

Tabela 5.13: Relação 13.

$r \text{ (fm)}$	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	-2.01228302E+02	-2.90871054E+01	1.72141196E+02	85.5452 %
0.20	-4.51498200E+01	-2.08973618E+01	2.42524581E+01	53.7155 %
0.30	-1.47339450E+01	-9.57732049E+00	5.15662447E+00	34.9983 %
0.40	-5.86175186E+00	-4.56074738E+00	1.30100447E+00	22.1948 %
0.50	-2.68310406E+00	-2.32234825E+00	3.60755815E-01	13.4455 %
0.60	-1.36892979E+00	-1.26270688E+00	1.06222907E-01	7.7596 %
0.70	-7.60508321E-01	-7.27904246E-01	3.26040753E-02	4.2871 %
0.80	-4.51461036E-01	-4.41143714E-01	1.03173217E-02	2.2853 %
0.90	-2.82119473E-01	-2.78777574E-01	3.34189890E-03	1.1846 %
1.00	-1.83473678E-01	-1.82371067E-01	1.10261127E-03	0.6010 %
1.50	-3.08207690E-02	-3.08156061E-02	5.16289327E-06	0.0168 %

Relação 14:
$$-\frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right)^2 \Pi_{reg}^{(000)} =$$

$$\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{4m^2}}} \Pi_b^{(000)}$$

Tabela 5.14: Relação 14.

r (fm)	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	1.96049397E+03	-2.63608724E+05	2.65569217E+05	100.7437 %
0.20	1.28329924E+02	-1.18480684E+03	1.31313676E+03	110.8313 %
0.30	1.69305298E+01	-5.87058171E+01	7.56363469E+01	128.8396 %
0.40	2.49905362E+00	-7.99051262E+00	1.04895662E+01	131.2753 %
0.50	1.98116005E-01	-1.87585066E+00	2.07396666E+00	110.5614 %
0.60	-1.27374634E-01	-6.10303768E-01	4.82929134E-01	79.1293 %
0.70	-1.22730335E-01	-2.44846559E-01	1.22116223E-01	49.8746 %
0.80	-8.12205169E-02	-1.13294084E-01	3.20735666E-02	28.3100 %
0.90	-4.96135664E-02	-5.80604279E-02	8.44686146E-03	14.5484 %
1.00	-2.99791608E-02	-3.21111004E-02	2.13193962E-03	6.6393 %
1.50	-3.31127710E-03	-3.28997787E-03	2.12992272E-05	0.6432 %

Relação 15:
$$\bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(010)}$$

Tabela 5.15: Relação 15.

r (fm)	lado esquerdo	lado direito	diferença	dif. relativa
0.10	-2.01228302E+02	3.62725778E+02	5.63954080E+02	155.4767 %
0.20	-4.51498200E+01	3.20417702E+01	7.71915901E+01	170.9677 %
0.30	-1.47339450E+01	1.47130766E+00	1.62052526E+01	109.9858 %
0.40	-5.86175186E+00	-1.80199356E+00	4.05975830E+00	69.2584 %
0.50	-2.68310406E+00	-1.56249259E+00	1.12061147E+00	41.7655 %
0.60	-1.36892979E+00	-1.04002161E+00	3.28908175E-01	24.0267 %
0.70	-7.60508321E-01	-6.59790567E-01	1.00717754E-01	13.2435 %
0.80	-4.51461036E-01	-4.19647267E-01	3.18137693E-02	7.0468 %
0.90	-2.82119473E-01	-2.71829417E-01	1.02900553E-02	3.6474 %
1.00	-1.83473678E-01	-1.80082586E-01	3.39109250E-03	1.8483 %
1.50	-3.08207690E-02	-3.08049476E-02	1.58214167E-05	0.0513 %

Estas tabelas mostram claramente que as integrais desprezadas são de curto alcance. Os maiores erros ocorrem nas tabelas 11, 13, 14 e 15, e são menores do que 1% a partir de $r = 1.5fm$.

Observamos que as relações para as integrais bolha (1 e 2) são mais precisas, seguidas das que envolvem as integrais triângulo (3–5), cruzado (6–10) e caixa-iteração (11–15). De acordo com a discussão feita na seção F.3, deveríamos esperar a mesma precisão nas relações para as integrais bolha, triângulo e cruzado. A diferença obtida pode ser atribuída a erros numéricos, pois é difícil manter a precisão para distâncias muito pequenas². Como no cálculo das integrais triângulo e cruzado necessitamos de duas integrações³, o erro numérico aumenta com relação ao das integrais bolha. Em ambos os casos, as diferenças caem rapidamente com a distância, sendo menores que 1% para $r > 0.2fm$, exceto para a relação 9, que é menor a partir de $0.4fm$.

Para as relações 11–15, que envolvem as integrais caixa-iteração, observamos discrepâncias muito grandes para pequenas distâncias. Além do problema de precisão numérica, que é maior devido à integração tripla, existe a contribuição dos termos mencionados na seção F.3, que se comportam, grosso modo, como $\exp(-2mr)$. Vemos que as diferenças são menores do que 2% a partir de $1fm$, e do que 1%, a partir de $1.5fm$.

Existem duas particularidades nas relações 11 e 14. Uma delas é que as relações originais, (F.46) e (F.49), se anulam do lado esquerdo, dificultando os seus testes numéricos. A alternativa foi usar as equações indicadas acima das respectivas tabelas. Outro detalhe diz respeito à raiz quadrada que multiplica a integral Π_a . Para tratarmos esse termo no espaço de configuração, fazemos uma expansão da raiz quadrada, em potências de $t/4m^2$. Nas tabelas 5.11 e 5.14, os números referem-se à expansão até segunda ordem, $(t/4m^2)^2$. Ao considerarmos o termo de terceira ordem, constatamos uma diminuição sensível das diferenças, o que indica a validade desta relação para os nossos propósitos.

Por fim, chamamos a atenção para os números das tabelas 5.7 e 5.12. As relações correspondentes não envolvem aproximações, além da aproximação local ($z^2 = 0$), como pode ser verificado na seção F.1. Isso justifica a boa precisão obtida na relação 12, comparada às demais que englobam as integrais caixa-iteração.

5.3.3 A aproximação $E = m$

As nossas integrais do tipo bolha, triângulo e cruzado correspondem às usadas por Partovi e Lomon. Porém, nas integrais do tipo caixa-iteração, esses autores aproximaram todas as ocorrências da energia E pela massa do nucleon, m . A mesma aproximação foi utilizada nos trabalhos de Rocha e Robilotta [14, 15, 30]. Na seção seguinte mostramos que, dependendo da componente do potencial, isso gera diferenças significativas com relação ao tratamento mais preciso, usado neste trabalho. Para entendê-las, analisemos o denominador das integrais (B.61) e (B.62), que pode ser escrito como

²O porquê deste fato pode ser entendido através da análise do integrando destas funções, dadas na seção B.2.

³É fácil mostrar que, quando $z^2 = 0$, a integração tripla das funções cruzado se reduz a uma dupla.

$$\begin{aligned}
P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2 &= C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 + C_c^2 W^2 - (1 - 2ab) q^2/4 + (1 - ab) \mu^2 \\
&= -a(1 - a)(1 - b) q^2 + \frac{a^2 b^2}{4} q^2 + \frac{a^2 b^2}{4} z^2 + \frac{a^2 b^2 c^2}{4} W^2 + (1 - ab) \mu^2. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Como as variáveis q^2 , z^2 e W^2 são linearmente independentes, usamos a relação (3.6) para eliminar uma delas – no nosso caso, a variável W^2 . Isso fornece

$$P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2 = - \left[a(1 - a)(1 - b) - \frac{a^2 b^2}{4} (1 - c^2) \right] q^2 + \frac{a^2 b^2}{4} (1 - c^2) z^2 + a^2 b^2 c^2 m^2 + (1 - ab) \mu^2. \quad (5.34)$$

No trabalho de Partovi e Lomon, assim como nos de Rocha e Robilotta, a variável eliminada foi z^2 , resultando na expressão

$$P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2 = -a(1 - a)(1 - b) q^2 + a^2 b^2 m^2 - \frac{a^2 b^2}{4} (1 - c^2) W^2 + (1 - ab) \mu^2. \quad (5.35)$$

Até o estágio da subtração do OPEP iterado, que não altera o denominador, apenas os extremos de integração⁴, as duas abordagens são equivalentes. As diferenças surgem na passagem para o espaço de configuração. Neste trabalho, devido à aproximação local, fazemos apenas $z^2 = 0$. Já no trabalho de Partovi e Lomon, é feita a aproximação $W^2 = 4m^2$ (equivalente a $E = m$), sob a justificativa de q^2/m^2 e z^2/m^2 serem correções pequenas. Entretanto, essas correções não são desprezíveis, comparadas ao termo $-a(1 - a)(1 - b) q^2$, em certas regiões do espaço de integração.

A transformada de Fourier envolvendo o denominador $P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2$ dá origem à exponencial $\exp(-\theta_{us} x)$. Neste trabalho, θ_{us} é dado por

$$\theta_{us}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 m^2 / \mu^2 + (1 - ab)}{a(1 - a)(1 - b) - \frac{a^2 b^2}{4} (1 - c^2)}, \quad (5.36)$$

enquanto que, na aproximação $E = m$, torna-se

$$\theta_{us}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 m^2 / \mu^2 + (1 - ab)}{a(1 - a)(1 - b)}. \quad (5.37)$$

Nas figuras seguintes apresentamos as diferenças entre essas duas abordagens. As linhas cheias correspondem ao nosso tratamento, enquanto que as tracejadas, à aproximação de Partovi e Lomon. As diferenças relativas são pequenas mas, caso existam cancelamentos do tipo $\Pi_{reg} - \Pi_{ss}$, como ocorre em algumas componentes do potencial, elas podem se tornar significativas.

⁴Vide apêndice E.

Figura 5.2: Razão das integrais do tipo caixa-iteração pela integral Π_ℓ , na aproximação usada neste trabalho ($z^2 = 0$) e na de Partovi e Lomon ($E = m$).

5.4 O setor nucleônico

O conjunto dos diagramas da família I é também chamado de setor nucleônico, por envolver apenas um *loop*, e ser completamente determinado pelas constantes μ , m , g_A e f_π . Apesar de não ser capaz de reproduzir os dados experimentais [30], este setor tem importância por representar a implementação mínima da simetria quiral na interação NN . Além disso, sua contribuição numérica para o potencial é bem definida, ou seja, existe uma margem muito restrita sobre a qual seus números podem variar, devido à precisão experimental com que são obtidos seus parâmetros. Como veremos na seção 5.5, algumas componentes do potencial são dominadas pelos processos da família I.

No setor nucleônico, é importante avaliarmos as várias aproximações feitas no capítulo anterior. Já adiantamos que o estudo dessas aproximações para as famílias II e III não são necessárias pois, para estas, usamos somente as relações 1–5, que são numericamente exatas.

Nas figuras 5.3a–5.3h apresentamos as três etapas na construção do potencial. A linha tracejada corresponde aos resultados da seção 4.5 (resultados intermediários), enquanto que a pontilhada, aos da seção 4.7 (potencial até $\mathcal{O}(q^4)$). Ambos foram divididos pelos resultados completos, apresentados na seção 4.4.

Podemos observar a qualidade das relações entre integrais, com as linhas tracejada e pontilhada praticamente coincidindo para as componentes $V_{LS}^\pm$, $V_T^\pm$ e $V_{SS}^\pm$. Para os potenciais centrais, $V_C^\pm$, a qualidade diminui um pouco com relação aos demais, devido a um número maior de cancelamentos que ocorrem entre integrais de *loop*.

Figura 5.3: Razões das componentes do TPEP do setor nucleônico, nas aproximações do capítulo 4, divididas pela versão da seção 4.4 (resultados completos), para a massa do nucleon no seu valor físico, m .

É interessante notar o efeito de truncarmos o potencial até $\mathcal{O}(q^4)$. Em alguns casos ele é bastante significativo, como para a componente V_{LS}^- , que apresenta uma diferença maior do que 15% em $2fm$. Esses efeitos dependem da distância, e correspondem a termos de ordem superior à que estamos considerando neste trabalho. Para nos certificarmos disso, apresentamos estas mesmas razões nas figuras 5.4 (a)–(h), usando para o nucleon uma massa dez vezes maior que a sua massa física. Observamos uma queda nas diferenças de aproximadamente cem vezes para as componentes V_C^+ , V_{LS}^- , V_T^- e V_{SS}^- , e de mil vezes para V_C^- , V_{LS}^+ , V_T^+ e V_{SS}^+ . Isso sugere que os erros cometidos no truncamento são de ordem q^2 e q^3 , respectivamente, com relação ao termo dominante da componente em questão. Podemos entender essa afirmação, representando o resultado completo pela série $a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + \dots$, e o resultado truncado por $b_0 + b_1 \epsilon + b_2 \epsilon^2 + \dots$, por exemplo. A razão que estamos observando é

$$R = \frac{b_0 + b_1 \epsilon + b_2 \epsilon^2 + \dots}{a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + \dots} = 1 + \frac{(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)\epsilon + (b_2 - a_2)\epsilon^2 + \dots}{a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + \dots}. \quad (5.38)$$

Se a diferença percentual cair com ϵ , então teremos $b_0 = a_0$, com diferença a partir de b_1 ; se cair com ϵ^2 , teremos $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1$, com diferença a partir de b_2 , e assim por diante.

De acordo com a contagem da seção 4.3, e usando essa informação em (3.73)–(3.76), constatamos que os termos dominantes em V_C^+ e $\{V_{LS}^-, V_T^-, V_{SS}^-\}$ são, respectivamente, de ordem q^3 e q^1 , enquanto que os dominantes em V_C^- , V_{LS}^+ e $\{V_T^+, V_{SS}^+\}$, de ordem q^2 , q^1 e q^0 . Os dois conjuntos de figuras 5.3 e 5.4 mostram que as diferenças entre os resultados completos e truncados são de ordem

$$q^{3+2} = q^5 \quad \text{para} \quad V_C^+, \quad (5.39)$$

$$q^{1+2} = q^3 \quad \text{para} \quad \{V_{LS}^-, V_T^-, V_{SS}^-\}, \quad (5.40)$$

$$q^{2+3} = q^5 \quad \text{para} \quad V_C^-, \quad (5.41)$$

$$q^{1+3} = q^4 \quad \text{para} \quad V_{LS}^+, \quad (5.42)$$

$$\text{e } q^{0+3} = q^3 \quad \text{para} \quad \{V_T^+, V_{LS}^+\}. \quad (5.43)$$

Esta análise é apenas uma comprovação numérica de que os termos desprezados na expressão final do nosso TPEP são de ordem superior à que estamos considerando neste trabalho, $\mathcal{O}(q^4)$.

Encerramos esta seção efetuando certas aproximações no nosso resultado completo, com o objetivo de reproduzir os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30]. Na primeira delas, truncamos o potencial até a ordem $q^2/4m^2$ (inclusive), obtendo os números da segunda coluna das tabelas 5.16 – 5.23. Em seguida, efetuamos as integrais do tipo caixa-iteração usando a prescrição de Partovi e Lomon ($E = m$), discutida na seção 5.3.3 e exibidas na terceira coluna. Por fim, desprezamos termos proporcionais a $(g_A^2 - 1)$, chegando numericamente ao potencial de Rocha e Robilotta⁵.

⁵O controle dessas aproximações foi realizado em colaboração com o Prof. C. A. da Rocha.

Figura 5.4: Razões das componentes do TPEP do setor nucleônico, nas aproximações do capítulo 4, divididas pela versão da seção 4.4 (resultados completos). Foi utilizada como massa do nucleon um valor dez vezes maior que o seu valor experimental, $10m$.

Tabela 5.16: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente central isoescalar.

V_C^+	r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
	1.00	7.35876992E+00	-1.17764287E+01	-8.10731697E+00	-8.10731697E+00
	2.00	1.61826983E-01	-1.86934184E-01	-1.06030733E-01	-1.06030733E-01
	3.00	1.08476615E-02	-1.17621595E-02	-4.70229792E-03	-4.70229792E-03
	4.00	1.16968364E-03	-1.09619075E-03	-3.26501958E-04	-3.26501958E-04
	5.00	1.60100150E-04	-1.24232474E-04	-2.66265717E-05	-2.66265717E-05
	6.00	2.51741651E-05	-1.56993929E-05	-2.00663799E-06	-2.00663799E-06
	7.00	4.32782237E-06	-2.10529599E-06	-4.51478531E-08	-4.51478531E-08
	8.00	7.91281785E-07	-2.88814022E-07	3.70384428E-08	3.70384428E-08
	9.00	1.51297706E-07	-3.90263193E-08	1.44182765E-08	1.44182765E-08
	10.00	2.99245657E-08	-4.89364444E-09	4.10504641E-09	4.10504641E-09

Tabela 5.17: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-órbita isoescalar.

V_{LS}^+	r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
	1.00	-1.73945896E+01	-1.73773081E+01	-1.55702107E+01	-1.55702107E+01
	2.00	-2.02155139E-01	-1.91220288E-01	-1.80394573E-01	-1.80394573E-01
	3.00	-9.09562987E-03	-8.61646776E-03	-8.31943527E-03	-8.31943527E-03
	4.00	-7.11955239E-04	-6.77716837E-04	-6.60484856E-04	-6.60484856E-04
	5.00	-7.44891015E-05	-7.12165924E-05	-6.97274986E-05	-6.97274986E-05
	6.00	-9.29543672E-06	-8.91966090E-06	-8.75590619E-06	-8.75590619E-06
	7.00	-1.30465668E-06	-1.25577189E-06	-1.23467504E-06	-1.23467504E-06
	8.00	-1.99087460E-07	-1.92129678E-07	-1.89094944E-07	-1.89094944E-07
	9.00	-3.23357266E-08	-3.12760707E-08	-3.08030332E-08	-3.08030332E-08
	10.00	-5.51147157E-09	-5.34135311E-09	-5.26301155E-09	-5.26301155E-09

Tabela 5.18: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente tensorial isoescalar.

V_T^+	r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
	1.00	-9.52186482E+00	-9.52186482E+00	-9.30642265E+00	-9.30642265E+00
	2.00	-1.79156602E-01	-1.79156602E-01	-1.76345231E-01	-1.76345231E-01
	3.00	-1.07344396E-02	-1.07344396E-02	-1.05983135E-02	-1.05983135E-02
	4.00	-1.01459016E-03	-1.01459016E-03	-1.00325875E-03	-1.00325875E-03
	5.00	-1.21886377E-04	-1.21886377E-04	-1.20631326E-04	-1.20631326E-04
	6.00	-1.69512450E-05	-1.69512450E-05	-1.67860644E-05	-1.67860644E-05
	7.00	-2.60030976E-06	-2.60030976E-06	-2.57594545E-06	-2.57594545E-06
	8.00	-4.27789482E-07	-4.27789482E-07	-4.23895427E-07	-4.23895427E-07
	9.00	-7.41556233E-08	-7.41556233E-08	-7.34952555E-08	-7.34952555E-08
	10.00	-1.33857759E-08	-1.33857759E-08	-1.32685877E-08	-1.32685877E-08

Tabela 5.19: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-spin isoescalar.

V_{SS}^+	r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
	1.00	8.58858476E+00	8.58858476E+00	8.37562623E+00	8.37562623E+00
	2.00	1.99467891E-01	1.99467891E-01	1.96162960E-01	1.96162960E-01
	3.00	1.35123837E-02	1.35123837E-02	1.33359694E-02	1.33359694E-02
	4.00	1.38468968E-03	1.38468968E-03	1.36896767E-03	1.36896767E-03
	5.00	1.76126052E-04	1.76126052E-04	1.74294343E-04	1.74294343E-04
	6.00	2.55559914E-05	2.55559914E-05	2.53053735E-05	2.53053735E-05
	7.00	4.05061406E-06	4.05061406E-06	4.01249920E-06	4.01249920E-06
	8.00	6.83917182E-07	6.83917182E-07	6.77673315E-07	6.77673315E-07
	9.00	1.21083135E-07	1.21083135E-07	1.20002602E-07	1.20002602E-07
	10.00	2.22421836E-08	2.22421836E-08	2.20471607E-08	2.20471607E-08

Tabela 5.20: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente central isovetor.

V_C^-	r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
	1.00	-1.17149558E+01	-8.86777441E+00	-1.13138489E+01	-8.89457428E+00
	2.00	-3.32657332E-01	-3.11053835E-01	-3.64989469E-01	-3.10985211E-01
	3.00	-2.62522179E-02	-2.50596742E-02	-2.97662486E-02	-2.62938094E-02
	4.00	-3.11462767E-03	-3.01052388E-03	-3.52364975E-03	-3.18295169E-03
	5.00	-4.53439078E-04	-4.41910853E-04	-5.06981454E-04	-4.65133523E-04
	6.00	-7.43854771E-05	-7.29185789E-05	-8.20470822E-05	-7.61445149E-05
	7.00	-1.31794535E-05	-1.29758770E-05	-1.43493091E-05	-1.34353950E-05
	8.00	-2.46289057E-06	-2.43303845E-06	-2.65027342E-06	-2.49897554E-06
	9.00	-4.78475323E-07	-4.73951466E-07	-5.09581197E-07	-4.83242846E-07
	10.00	-9.57347775E-08	-9.50391710E-08	-1.01038298E-07	-9.62705080E-08

Tabela 5.21: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-órbita isovetor.

V_{LS}^-	r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
	1.00	5.64201879E+00	6.15147582E+00	4.94674428E+00	3.14274078E+00
	2.00	5.95703511E-02	6.05191201E-02	5.33019769E-02	3.77506430E-02
	3.00	2.48692710E-03	2.50082324E-03	2.30280158E-03	1.72189630E-03
	4.00	1.84989997E-04	1.85519759E-04	1.74031772E-04	1.35194300E-04
	5.00	1.86725360E-05	1.87049049E-05	1.77121758E-05	1.41698136E-05
	6.00	2.27064279E-06	2.27333319E-06	2.16416339E-06	1.77252873E-06
	7.00	3.12728050E-07	3.13011575E-07	2.98947008E-07	2.49611056E-07
	8.00	4.70623973E-08	4.70987817E-08	4.50756255E-08	3.82462328E-08
	9.00	7.56601600E-09	7.57149650E-09	7.25613819E-09	6.24101522E-09
	10.00	1.27998520E-09	1.28091742E-09	1.22868972E-09	1.06916901E-09

Tabela 5.22: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente tensorial isovetor.

r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
1.00	6.73858011E-01	6.73858011E-01	5.30229893E-01	-2.76125308E-01
2.00	1.01817826E-02	1.01817826E-02	8.30753558E-03	-2.51641075E-04
3.00	5.83891469E-04	5.83891469E-04	4.93140724E-04	1.15131694E-04
4.00	5.55682402E-05	5.55682402E-05	4.80139652E-05	1.88405152E-05
5.00	6.84535186E-06	6.84535186E-06	6.00865132E-06	2.99122938E-06
6.00	9.82788315E-07	9.82788315E-07	8.72667952E-07	4.99636494E-07
7.00	1.55947021E-07	1.55947021E-07	1.39704150E-07	8.77483836E-08
8.00	2.65377825E-08	2.65377825E-08	2.39417456E-08	1.60638100E-08
9.00	4.75397765E-09	4.75397765E-09	4.31373244E-09	3.04102974E-09
10.00	8.85656167E-10	8.85656167E-10	8.07530714E-10	5.91588204E-10

Tabela 5.23: Aproximações feitas no nosso potencial para obter os resultados de Rocha e Robilotta [14, 15, 30] — componente spin-spin isovetor.

r (fm)	completo	$q^2/4m^2 = 0$	$E = m$	$(g_A^2 - 1) = 0$
1.00	-6.54442548E-01	-6.54442548E-01	-5.12470195E-01	3.29993495E-01
2.00	-1.15047892E-02	-1.15047892E-02	-9.30150226E-03	9.62276211E-04
3.00	-7.34424629E-04	-7.34424629E-04	-6.16815116E-04	-1.19509209E-04
4.00	-7.54575123E-05	-7.54575123E-05	-6.49761673E-05	-2.39888326E-05
5.00	-9.83350170E-06	-9.83350170E-06	-8.61236235E-06	-4.16219940E-06
6.00	-1.47329511E-06	-1.47329511E-06	-1.30621657E-06	-7.35260697E-07
7.00	-2.41679803E-07	-2.41679803E-07	-2.16269892E-07	-1.34390171E-07
8.00	-4.22333657E-08	-4.22333657E-08	-3.80707877E-08	-2.53597419E-08
9.00	-7.73121865E-09	-7.73121865E-09	-7.01086311E-09	-4.91720652E-09
10.00	-1.46641413E-09	-1.46641413E-09	-1.33639881E-09	-9.75364014E-10

As componentes tensor e spin-spin não dependem da aproximação $q^2/4m^2 = 0$, o que é evidente na equação (3.75). É interessante entender como essa aproximação atua nas demais componentes. Começando pela spin-órbita, de acordo com a equação (3.74), os termos desprezados são

$$\frac{q^2}{4m^2} \left[\frac{1}{8} \mathcal{I}_{DD}^{\pm} - \frac{1}{2} \mathcal{I}_{DB}^{(z)\pm} - \frac{3}{2} \mathcal{I}_{DB}^{(w)\pm} + \frac{3}{2} \mathcal{I}_{BB}^{(g)\pm} + \mathcal{I}_{BB}^{(w)\pm} \right] + \mathcal{O}(q^4). \quad (5.44)$$

Os três primeiros termos dentro dos colchetes começam a contribuir em ordem q^1 ou superior, e o último, em ordem q^0 . Já para o penúltimo termo, temos $\mathcal{I}_{BB}^{(g)-} \rightarrow \mathcal{O}(q^1)$ e $\mathcal{I}_{BB}^{(g)+} \rightarrow \mathcal{O}(q^0)$. É razoável esperar que a expressão acima seja maior no canal isoescalar fazendo, portanto, com que a diferença desta aproximação seja maior em V_{LS}^+ . Isso pode ser constatado, comparando as duas primeiras colunas das tabelas 5.17 e 5.21.

Uma análise semelhante pode ser feita para a componente central, dada pela equação (3.73),

$$V_C^\pm = \tau^\pm \frac{m}{E} \left\{ \hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm + \frac{q^2}{4m^2} \left[2\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)\pm} - \hat{\mathcal{I}}_{DD}^\pm \right] \right\} + \mathcal{O}(q^4). \quad (5.45)$$

Como o termo entre colchetes começa a contribuir em ordem q^1 , o termo a ser desprezado na aproximação $q^2/4m^2 = 0$ é de ordem q^3 . Entretanto, sabemos que $\mathcal{I}_{DD}^- \rightarrow \mathcal{O}(q^2)$, mas $\mathcal{I}_{DD}^+ \rightarrow \mathcal{O}(q^3)$. Percebemos que, dentro de uma certa tolerância, essa aproximação é válida no canal isovetorial, mas perde o sentido no canal isoescalar. Os números da tabela 5.16 são um reflexo desse fato onde, inclusive, o sinal se altera.

Na terceira coluna, podemos notar a diferença da aproximação $E = m$ nas integrais do tipo caixa-iteração. Ela gira em torno de 5% para as componentes V_{LS}^+ , V_T^+ e V_{SS}^+ , por volta de 15% para V_C^- , V_{LS}^- , V_T^- e V_{SS}^- , e acima disso para V_C^+ . A diferença de 5% é mais ou menos a observada nas figuras 5.2. Quanto às outras, surgem devido a cancelamentos entre integrais de *loop*. Para entender esse mecanismo, observemos as expressões para $\mathcal{I}_{BB}^{(g)\pm}$, equações (4.21) e (4.27):

$$\mathcal{I}_{BB}^{(g)+} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left(\frac{g}{m} \right)^4 \left\{ \bar{\Pi}_{ss}^{000} + \bar{\Pi}_{reg}^{000} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_a \right\}, \quad (5.46)$$

$$\mathcal{I}_{BB}^{(g)-} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left\{ (g_A^2 - 1)^2 \dots + \left(\frac{g}{m} \right)^4 \left[\bar{\Pi}_{ss}^{000} - \bar{\Pi}_{reg}^{000} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_a \right] \right\}. \quad (5.47)$$

Como as integrais $\bar{\Pi}_{ss}^{000}$ e $\bar{\Pi}_{reg}^{000}$ têm comportamentos e magnitudes semelhantes (figuras 5.1h e 5.1m), a diferença da aproximação $E = m$ é pouco percebida em $\mathcal{I}_{BB}^{(g)+}$ mas, devido à subtração entre elas em $\mathcal{I}_{BB}^{(g)-}$, a diferença torna-se mais relevante. Isso explica as diferenças das componentes $V_T^\pm$ e $V_{SS}^\pm$, que são proporcionais a $\mathcal{I}_{BB}^{(g)\pm}$. Em V_C^+ , esses cancelamentos ocorrem de maneira análoga, só que com mais intensidade, tornando mais evidente essa diferença.

A última aproximação para se chegar ao potencial de Rocha e Robilotta é considerar nulos, nas nossas expressões, os termos proporcionais a $(g_A^2 - 1)$. Este tipo de aproximação altera apenas as componentes isovetoriais. O erro cometido é bastante significativo, principalmente nos potenciais tensor e spin-spin. Como, no canal isovetorial, as integrais do tipo bolha e triângulo são proporcionais a $(g_A^2 - 1)$, podemos usar esses resultados para avaliar a importância relativa dessas integrais.

5.5 Resultados para o potencial

A parte de longo e médio alcances do potencial nuclear é dominada pela superposição das interações devidas às trocas de um e dois píons. Processos envolvendo três píons no canal t foram considerados por Joel C. Pupin [96], mas são relativamente fracos e de alcance mais curto.

A troca de um pión corresponde ao OPEP, que somente possui as componentes V_T^- e V_{SS}^- , dadas por

$$V_T^-|_{OPEP} = -\frac{m}{E} \frac{g^2 \mu^3}{48\pi m^2} (x^2 + 3x + 3) \frac{e^{-x}}{x^3}, \quad (5.48)$$

$$V_{SS}^-|_{OPEP} = \frac{m}{E} \frac{g^2 \mu^3}{48\pi m^2} \frac{e^{-x}}{x}. \quad (5.49)$$

Isso significa que, para todas as demais componentes, a parte mais externa do potencial é dominada por processos devidos à troca de dois píons. Os nossos resultados para o TPEP quiral em ordem q^4 são dados pelas expressões da seção 4.7 e seus valores numéricos são representados pelas curvas cheias das figuras 5.5. Para produzir uma indicação das suas implicações fenomenológicas, nas figuras também graficamos duas versões do potencial de Argonne: a versão 14 [31] (linha pontilhada) e a versão 18 [32] (linha tracejada). Os potenciais de Argonne foram escolhidos por serem locais no espaço de configuração e reproduzem bastante bem os dados empíricos do espalhamento NN elástico. Esse potencial é composto por três classes diferentes de funções, representando os três diferentes alcances:

$$\begin{array}{ll} V_{OPEP}, & \text{dado pela troca de um pión,} \\ V_I, & \text{descrevendo a região de médio alcance, e} \\ V_{curto\ alcance}, & \text{parametrizando os efeitos de curto alcance.} \end{array}$$

Em cada classe, as funções possuem formas características para descrever a região correspondente. A primeira classe envolve funções proporcionais a $\exp(-\mu r)$, a segunda, proporcionais a $\exp(-2\mu r)$ e a terceira, do tipo Woods-Saxon. Estas funções são multiplicadas por coeficientes, determinados de tal maneira que forneçam o melhor ajuste aos dados experimentais. A comparação nas figuras que seguem é feita apenas considerando a segunda classe, V_I . É importante notar que as escalas das várias figuras são bastante diferentes, indicando a importância relativa de cada componente.

Figura 5.5a: Componente central isoescalar.

Figura 5.5b: Componente central isovetorial.

Figura 5.5c: Componente spin-órbita isoescalar.

Figura 5.5d: Componente spin-órbita isovetorial.

Figura 5.5e: Componente tensor isoescalar.

Figura 5.5f: Componente tensor isovetorial.

Figura 5.5g: Componente spin-spin isoescalar.

Figura 5.5h: Componente spin-spin isovetorial.

Nas figuras 5.6a e 5.6b apresentamos as contribuições do OPEP e do TPEP nos potenciais V_T^- e V_{SS}^- . Elas deixam evidente a dominância do OPEP para grandes distâncias. Para V_T^- , a contribuição do TPEP à soma total é praticamente desprezível para distâncias maiores que $\sim 2.5 fm$. Em V_{SS}^- , a influência do TPEP se estende por uma distância um pouco maior, tornando-se insignificante a partir de $3.5 fm$.

Figura 5.6a: Contribuições do OPEP e TPEP ao potencial tensor isovetorial.

Figura 5.6b: Contribuições do OPEP e TPEP ao potencial spin-spin isovetorial.

As figuras 5.5 mostram que a única componente que apresenta valores consistentes para os três casos é a central isoescalar, figura 5.5a, a mais importante para a fenomenologia da física nuclear de poucos corpos. Isso não ocorre para as demais pois, nestes casos, as versões do TPEP de Argonne comportam-se de maneira distinta. Para as componentes V_T^+ e V_{SS}^- , figuras 5.5e e 5.5h, temos um comportamento semelhante ao Argonne v14 sendo que, para esta última, a concordância é praticamente total. As componentes V_{LS}^+ , V_{SS}^+ , V_C^- e V_T^- , por outro lado, comportam-se mais como o Argonne v18, mas apenas V_T^- parece se aproximar deste em valores absolutos. Na figura 5.5d, nenhuma das três curvas de V_{LS}^- parece ter o mesmo comportamento assintótico.

O fato dessas duas versões do TPEP de Argonne serem bem distintas para algumas componentes é intrigante, pois a versão 18 difere da 14 apenas por considerar a dependência de carga no potencial. A explicação é que, ao introduzir operadores adicionais que representam tal dependência, o grupo de Argonne teve que readaptar seus parâmetros para reproduzir os dados experimentais. Como o compromisso deles é de construir um potencial que ajuste bem os dados, eles não analisaram a fundo este aspecto do problema.

Um dos objetivos da construção de um potencial quiral é eliminar ambiguidades desse tipo, apresentando a proposta de um potencial único, com propriedades assintóticas bem definidas, e baseadas na teoria que rege as interações fortes, a QCD. Porém, um potencial com uma sólida base teórica é inútil se não for capaz de reproduzir o experimento. Na última década, os potenciais quirais foram se mostrando capazes de preencher este requisito. Entretanto, ainda persiste uma incerteza grande na determinação das constantes de baixa energia (LEC's) relevantes, que são obtidas, na maior parte dos casos, através do estudo da interação πN . Ultimamente têm se falado muito sobre o caminho inverso, ou seja, na determinação de algumas LEC's através dos dados do espalhamento NN [24], mas ainda existem controvérsias sobre o assunto na comunidade [97].

Diante do problema das LEC's, é conveniente identificar sua contribuição no nosso potencial. De acordo com a classificação da dinâmica feita na seção 4.1 e com as relações (2.72)–(2.84), essa contribuição está contida nos diagramas da família III. As outras duas são completamente determinadas apenas por μ , m , g_A e f_π , cujos valores experimentais são conhecidos com boa precisão. Para avaliarmos a importância relativa de cada família apresentamos, nas figuras 5.7, a razão de cada contribuição pelo TPEP total, para cada componente. Uma característica geral observada nestes gráficos é que a contribuição dos diagramas de dois *loops* (família II) é bem pequena. Em particular, ela é nula para as componentes V_{LS}^+ , V_{SS}^+ e V_T^+ . Quanto à contribuição do setor nucleônico (família I), ele mostra-se predominante nas componentes V_C^- , V_{LS}^+ , V_{SS}^+ e V_T^+ . É importante salientar que, devida a tal predominância, uma modificação no valor das LEC's dificilmente seria capaz de alterar o comportamento dessas componentes, atuando como um vínculo na construção de potenciais fenomenológicos. Isso não se aplica às demais componentes, que apresentam uma forte dependência dos diagramas da família III. Na figura 5.7a observamos que ela é responsável por aproximadamente 90% do potencial central isoescalar, fato já observado por Rocha e Robilotta em 97 [16]. Nos canais V_T^- e V_{SS}^- , essa proporção gira em torno de 80% para distâncias intermediárias, diminuindo um pouco para distâncias maiores. Para a componente V_{LS}^- , figura 5.7d, as contribuições das famílias I e III ocorrem aproximadamente na mesma proporção, principalmente entre 2 e 3 fm, mas com sinais opostos, resultando num potencial com intensidade menor que cada uma delas separadamente.

Nessa região, a diferença torna-se comparável à contribuição da família II, que é cerca de cinco vezes menor que as demais. Por causa deste cancelamento, uma pequena variação vinda da família III pode alterar significativamente o comportamento dessa componente, inclusive fazendo com que ela se aproxime de uma das duas versões do potencial de Argonne (figura 5.5d). O padrão formado nessa figura indica uma mudança de sinal do potencial V_{LS}^- em torno de $2.5 fm$.

Figura 5.7: Contribuição relativa de cada família de diagramas para o TPEP.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho construímos a componente de médio alcance do potencial NN , devida à troca de dois píons, com base na teoria de perturbação quiral relativística desenvolvida por Becher e Leutwyler. Este potencial é definido após uma redução tridimensional da equação de Bethe-Salpeter [94], através da prescrição de Blankenbecler e Sugar [29], e tem como ingrediente básico a amplitude πN , responsável pela dinâmica do problema. A multiplicação das sub-amplitudes resulta nos diagramas da figura 3.1, organizados em três famílias distintas. A primeira corresponde ao setor nucleônico, envolvendo diagramas de um *loop* e dependendo apenas dos parâmetros μ , m , g e f_π . Este setor ainda contém a subtração da iteração do OPEP, presente na definição do potencial. A segunda envolve o cálculo de dois *loops*, uma consequência por considerarmos explicitamente os sub-diagramas (k) e (l) da figura 2.7, que fornecem contribuições de alcance intermediário. A terceira engloba as constantes de acoplamento (LEC's) das lagrangianas $\mathcal{L}^{(2)}$ e $\mathcal{L}^{(3)}$, por meio dos coeficientes de baixa energia (HJS).

O cálculo do potencial é feito em três etapas distintas, descritas no capítulo 4. Na primeira, efetuamos as contas sem aproximações, partindo diretamente das definições (3.59). Na segunda, usamos as relações entre integrais desenvolvidas no apêndice F, que ignoram apenas termos de curto alcance. As tabelas 5.1–5.15 e as figuras 5.3 mostram a qualidade dessas aproximações, na maioria dos casos, desprezíveis a partir de $2fm$. Na terceira etapa os resultados são truncados em ordem q^4 , o que permite escrevê-los em termos de seis funções básicas (seção 4.7). Este é o principal resultado deste trabalho. Com o objetivo de compará-lo aos resultados de Entem e Machleidt, realizamos uma expansão dentro do espírito de bárion pesado, onde encontramos algumas poucas diferenças. De acordo com os comentários no final do capítulo 4, uma delas diz respeito à discrepância de Goldberger-Treiman, indicada por Δ_{GT} . Temos ainda dois termos provenientes dos diagramas de dois *loops*. Quanto às demais, é bem provável que tenham origem na iteração do OPEP, mas é algo que ainda precisa ser verificado. Convém deixar bem claro que, em princípio, de acordo com os argumentos de Becher e Leutwyler [12, 13, 27, 28], a expansão dos nossos resultados deveria ser equivalente ao resultado de Entem e Machleidt, mas os nossos resultados sem expandir, não. O problema está justamente na expansão, que deixa de valer para potencial a grandes distâncias, dominada pela região em torno de $t = 4\mu^2$, de acordo com a idéia apresentada no capítulo 2.

Os nossos resultados numéricos, apresentados no capítulo 4, foram comparados com duas versões do potencial de Argonne, a versão 14 [31] e a versão 18 [32]. Observamos uma con-

cordância satisfatória, envolvendo os três potenciais, apenas no canal central isoescalar. Para os outros canais, a comparação é pouco conclusiva onde observamos, inclusive, discrepâncias nas duas versões do potencial de Argonne.

Para eliminar ambiguidades desse tipo, e com a proposta de estabelecer um potencial único para a parte de médio alcance, tal como o que ocorreu com a troca de um pión na década de 60, analisamos a contribuição de cada família na composição do nosso TPEP. Constatamos que os diagramas de dois *loops* apresentam uma contribuição praticamente desprezível para a maioria das componentes. O setor nucleônico (família I) tem o predomínio sobre as componentes V_C^- , V_{LS}^+ , V_{SS}^+ e V_T^+ , e influencia bastante o comportamento de V_{LS}^- , conforme a discussão apresentada no final do capítulo 5. Como este setor depende apenas de μ , m , g e f_π , grandezas com valores experimentais bem determinados, os potenciais por ele dominados encontram pouco espaço para mudar de comportamento, atuando como um vínculo na construção de potenciais fenomenológicos. Quanto às demais componentes, estas possuem uma liberdade maior de alterar seu comportamento, pelo fato das incertezas nas LEC's ainda não se encontrarem num nível satisfatório.

Na comparação do nosso potencial expandido com os resultados do formalismo HB, a concordância da maior parte dos termos parece indicar que estamos perto de obter um potencial NN devido à troca de dois pions que seja independente de modelos. Entretanto, para que este potencial respeite a estrutura analítica em toda a região de baixa energia, é necessário que ele seja construído dentro do formalismo relativístico da teoria de perturbação quiral. Talvez este seja o último tópico que gere discussão na construção do TPEP envolvendo apenas os campos piônicos e nucleônicos.

O passo seguinte mais natural a ser dado para o aperfeiçoamento do TPEP é considerar a ressonância Δ . A inclusão desse grau de liberdade extra deve influenciar significativamente o comportamento do potencial em regiões um pouco mais internas, assim como melhorar o ajuste fenomenológico.

Apêndice A

Notação e convenções usadas neste trabalho

Neste apêndice estabelecemos as convenções usadas para as quantidades físicas relevantes neste trabalho. Adotamos o sistema de unidades naturais, amplamente usado em física de partículas, onde $\hbar = c = 1$.

Nos nossos cálculos, usamos os seguintes valores¹:

$$\hbar c = 197.32705 MeV \cdot fm, \quad (A.1)$$

$$m_p = 938.27231 MeV \text{ (massa do próton)}, \quad (A.2)$$

$$m_n = 939.56563 MeV \text{ (massa do nêutron)}, \quad (A.3)$$

$$\mu_c = 139.5675 MeV \text{ (massa do pión carregado)}, \quad (A.4)$$

$$\mu_n = 134.9739 MeV \text{ (massa do pión neutro)}, \quad (A.5)$$

$$g = 13.4 \text{ (constante de acoplamento pión-nucleon)}, \quad (A.6)$$

$$f_\pi = 92.4 MeV \text{ (constante de decaimento do pión)}. \quad (A.7)$$

Para as massas do nucleon e do pión, usamos

$$m = (m_p + m_n)/2, \quad (A.8)$$

$$\mu = (2\mu_c + \mu_n)/3. \quad (A.9)$$

¹Estes valores são os mesmos utilizados no potencial de Argonne v18 [32].

Mecânica quântica não-relativística

Em mecânica quântica não-relativística, definimos os estados de tal forma que

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{A.10})$$

$$\int d^3x \langle \mathbf{p}' | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (\text{A.11})$$

Com isso, as ondas planas são “normalizadas” de acordo com

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{A.12})$$

Espinores de Pauli

Os espinores de Pauli são vetores, com duas componentes, representando o auto-estado da terceira componente de spin:

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2, 1/2\rangle, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2, -1/2\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Os operadores de spin, que agem nesses estados, são escritos em termos das matrizes de Pauli,

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.14})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Essas matrizes satisfazem

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \sigma_c, \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} +1 & \text{para } (a, b, c) = (1, 2, 3) \text{ e permutações pares,} \\ -1 & \text{para permutações ímpares do caso acima.} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

O produto escalar das matrizes de Pauli com trivetores é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3. \quad (\text{A.19})$$

Através da propriedade (A.17) obtemos o importante resultado:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (\text{A.20})$$

Mecânica quântica relativística

Em relatividade, as quantidades físicas são representadas por meio de tensores, com propriedades de transformações bem definidas. Os tensores de posto (rank) zero são os escalares, e possuem a mesma forma em qualquer referencial inercial. Os tensores de posto um são chamados de quadrivetores, representados por

$$a^\mu = (a^0; \mathbf{a}). \quad (\text{A.21})$$

Os índices de Lorentz são representados por letras gregas, e variam de 0 a 3. Os trivetores são identificados por letras em negrito, e quando nos referirmos às suas componentes, usamos letras latinas.

Dizemos que o quadrivetor acima está representado na forma contra-variante, com o índice na parte superior. Quando o índice estiver na parte inferior, o quadrivetor é dado na representação covariante,

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (\text{A.22})$$

onde a repetição de índices deixa implícita a soma (convenção de Einstein). O tensor de posto dois que surge na equação acima é conhecido como tensor métrico. Na convenção adotada temos

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Imediatamente percebemos que

$$a_\mu = (a^0; -\mathbf{a}). \quad (\text{A.24})$$

O produto escalar entre dois quadrivetores é definido como

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{A.25})$$

Neste espaço quadridimensional, também conhecido como espaço de Minkowsky em 3+1 dimensões, definimos as derivadas covariantes e contravariantes como

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (\text{A.26})$$

Quando aplicados em campos escalares temos o quadrigradiente, que se transforma como um quadrivetor:

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_0}; -\nabla \phi \right), \quad \partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_0}; \nabla \phi \right). \quad (\text{A.27})$$

Em geral, quando aplicados em um tensor de posto r , geram um novo tensor de posto $r+1$. Podemos ainda usá-los na contração com um dos índices do tensor sobre o qual agem, resultando em um tensor de posto $r-1$. No caso de um tensor de posto um (quadrivetor) temos o chamado quadridivergente,

$$\partial_\mu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V_0}{\partial x_0} - \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (\text{A.28})$$

Campos bosônicos

A quantização de campos bosônicos é feita impondo a seguinte regra de comutação:

$$[\pi(x), \phi(y)]_{x_0=y_0} = -i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{A.29})$$

onde $\pi(x)$ é o momento conjugado do campo escalar ϕ :

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \partial_0 \phi(x). \quad (\text{A.30})$$

Na última igualdade da equação acima, usamos o fato de estarmos quantizando campos livres. Salientamos que alguns cálculos considerando campos livres são necessários, pois no estudo dos campos em interação, as funções de Green da teoria são expressas em termos de campos livres através da fórmula de Gell-Mann-Low.

A representação do campo bosônico em termos dos operadores de criação ($a(\mathbf{k})$) e aniquilação ($a^\dagger(\mathbf{k})$) é escrita como

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right], \quad (\text{A.31})$$

onde $k_0 \equiv \omega \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$ e μ é a massa do bóson. Isso permite obter relações de comutação para esses operadores,

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0, \quad (\text{A.32})$$

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{A.33})$$

O estado de vácuo é normalizado a um:

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad (\text{A.34})$$

e definimos o estado de uma partícula através de

$$|\mathbf{k}\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle. \quad (\text{A.35})$$

Da relação de comutação (A.33) segue a normalização desses estados,

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{A.36})$$

O propagador é definido como o valor esperado, no vácuo, do produto temporalmente ordenado de dois campos,

$$\begin{aligned} \Delta_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ &+ \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde $\theta(x)$ é a função escada de Heavyside,

$$\theta(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x_0 > 0, \\ 0 & \text{para } x_0 < 0. \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

Podemos demonstrar, usando a decomposição de Fourier do campo, que

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{A.39})$$

Uma pequena dificuldade surge quando os bósons aparecem na teoria com acoplamentos derivativos. Em geral, temos que lidar com funções de Green do tipo

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \partial_\mu^j \phi(x_j) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle. \quad (\text{A.40})$$

Neste caso, na prática, usamos um novo operador de ordenação temporal T^* , definido de tal forma que

$$\langle 0 | T^* \{ \phi(x_1) \cdots \partial_\mu^j \phi(x_j) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \partial_\mu^j \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_j) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle. \quad (\text{A.41})$$

A diferença entre o uso desses dois operadores são termos instantâneos, resultantes da derivação sobre a função de Heavyside, $\partial_\mu^x \theta(x_0 - y_0) = \delta(x_0 - y_0)$, e não têm influência sobre a dinâmica. Com a derivada “para fora” do valor esperado, fazemos a contração dos campos de maneira usual, através do teorema de Wick. O resultado é uma soma, sobre todas as contrações possíveis, de um produto de propagadores:

$$\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) \cdots \Delta_F(x_i - x_{i+1}) \cdots \Delta_F(x_{n-1} - x_n) + \text{permutações}. \quad (\text{A.42})$$

A derivada, portanto, agirá em apenas um² desses propagadores. O efeito dessa derivada pode ser entendido através da representação de Δ_F em termos da transformada de Fourier,

$$\partial_\mu^x \Delta_F(x - y) = \partial_\mu^x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \Delta_F(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(-ik_\mu)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (\text{A.43})$$

Em um cálculo de amplitude tal operação, na prática, faz surgir o fator $-ik^\mu$ (ik^μ) nas regras de Feynman, para partículas incidentes (emergentes).

²No caso de uma única derivada.

Espaço espinorial

No tratamento de partículas de spin 1/2 temos que considerar um espaço além do espaço-tempo de Minkowsky, conhecido como espaço espinorial. Nele são definidas as matrizes de Dirac, tais que satisfaçam

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.44})$$

Com esta condição, temos que a dimensionalidade mínima deste espaço é quatro³. Adotamos a convenção mais utilizada,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} = \gamma_0, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} = \gamma_k, \quad (\text{A.45})$$

onde σ_0 é a matriz identidade no sub-espaço de matrizes 2x2, os zeros são entendidos como matrizes nulas 2x2 e σ_k são as matrizes de Pauli.

As matrizes de Dirac podem ser contraídas com quadrivetores,

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma_0 a_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{A.46})$$

A partir da propriedade (A.44), obtemos o importante resultado,

$$\not{a} \not{b} = 2a \cdot b - \not{b} \not{a}. \quad (\text{A.47})$$

Existem duas combinações das matrizes de Dirac particularmente importantes,

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{A.49})$$

A matriz γ_5 obedece as seguintes propriedades,

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (\gamma_5)^2 = \mathbf{I}. \quad (\text{A.50})$$

Nesta representação, temos que as matrizes γ_0 e γ_5 são hermiteanas, enquanto que γ^1 , γ^2 e γ^3 são anti-hermiteanas. Também temos, para as matrizes transpostas,

$$(\gamma^\mu)^T = \gamma^\mu \text{ para } \mu=0, 2 \text{ e } 5, \quad (\text{A.51})$$

$$(\gamma^\mu)^T = -\gamma^\mu \text{ para } \mu=1 \text{ e } 3. \quad (\text{A.52})$$

³Pode-se mostrar que a dimensionalidade mínima do espaço espinorial, num espaço-tempo de dimensão d , é dada por $2^{d/2}$.

Campos fermiônicos

A quantização de partículas de spin $1/2$ é feita por meio da seguinte regra de anti-comutação:

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}_{x_0=y_0} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{A.53})$$

onde $\psi(x)$ representa o campo do férmion, composto de quatro componentes no espaço espinorial. Sua decomposição de Fourier é dada por

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left[a_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (\text{A.54})$$

onde s é o índice que determina a projeção do spin, $E \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ é a energia de um férmion com massa m , $u_s(\mathbf{p})$ e $v_s(\mathbf{p})$ são, respectivamente, os espinores da partícula e anti-partícula. Adotamos neste trabalho a seguinte normalização:

$$u_s^\dagger(\mathbf{p}) u_{s'}(\mathbf{p}) = v_s^\dagger(\mathbf{p}) v_{s'}(\mathbf{p}) = 2E \delta_{ss'}. \quad (\text{A.55})$$

Pode-se mostrar que os operadores de aniquilação de uma partícula, $a_s(\mathbf{p})$, e de uma anti-partícula, $b_s(\mathbf{p})$, devido à equação (A.53), obedecem as seguintes relações de anti-comutação:

$$\{a_s(\mathbf{p}), a_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = (2\pi)^3 2E \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (\text{A.56})$$

e zero para as demais combinações.

Tal como no caso de bósons, definimos os estados de uma partícula e uma anti-partícula como

$$|\mathbf{p}, s\rangle = a_s^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad |\overline{\mathbf{p}}, \overline{s}\rangle = b_s^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad (\text{A.57})$$

e possuem a seguinte norma,

$$\langle \mathbf{p}, s | \mathbf{p}', s' \rangle = \langle \overline{\mathbf{p}}, \overline{s} | \overline{\mathbf{p}'}, \overline{s'} \rangle = (2\pi)^3 2E \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (\text{A.58})$$

O propagador fermiônico é definido como

$$S_F(x - y, m) = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle \quad (\text{A.59})$$

onde

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma_0. \quad (\text{A.60})$$

Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} S_F(x) = (i \not{\partial} + m) \Delta_F(x, m) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot x} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-ip \cdot x}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Espinores e a equação de Dirac

Os espinores, introduzidos em (A.54), satisfazem a equação de Dirac,

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u(\mathbf{p}) &= 0, & (\not{p} + m) v(\mathbf{p}) &= 0, \\ \bar{u}(\mathbf{p}) (\not{p} - m) &= 0, & \bar{v}(\mathbf{p}) (\not{p} + m) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

onde $\bar{u}(\mathbf{p}) = u^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0$ e $\bar{v}(\mathbf{p}) = v^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0$. Os espinores u e v relacionam-se através de

$$v = i\gamma^2 u^*. \quad (\text{A.63})$$

A forma do espinor u , com momento não-nulo, é dada por

$$u_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} (E + m) \chi_s \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (\text{A.64})$$

onde χ_s é o espinor de Pauli de duas componentes. Esta definição é compatível com a normalização (A.55).

As relações de completeza, escritas como

$$\sum_s u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_s v_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) = \not{p} - m, \quad (\text{A.65})$$

permite-nos definir os operadores de projeção, $\Lambda^\pm(\mathbf{p})$:

$$\Lambda^+(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \sum_s u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad (\text{A.66})$$

$$\Lambda^-(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2m} \sum_s v_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) = \frac{-\not{p} + m}{2m}. \quad (\text{A.67})$$

Esses operadores satisfazem

$$\left[\Lambda^\pm\right]^2 = \Lambda^\pm, \quad \Lambda^+ \Lambda^- = \Lambda^- \Lambda^+ = 0, \quad \Lambda^+ + \Lambda^- = \mathbf{I}, \quad (\text{A.68})$$

e, a partir de suas formas explícitas, vemos que Λ^+ (Λ^-) projeta a parte de energia positiva (negativa) de um espinor genérico.

Apêndice B

Integrais de um *loop*

As integrais de *loop* usadas nesse trabalho são classificadas em quatro categorias:

- tipo bolha,

$$I_{cc}^{\rho_1 \rho_2 \dots} = \int [\dots] \left(\frac{Q^{\rho_1}}{\mu} \right) \left(\frac{Q^{\rho_2}}{\mu} \right) \dots \quad (\text{B.1})$$

- tipo triângulo,

$$I_{sc}^{\rho_1 \rho_2 \dots} = \int [\dots] \frac{2m\mu}{(s_1 - m^2)} \left(\frac{Q^{\rho_1}}{\mu} \right) \left(\frac{Q^{\rho_2}}{\mu} \right) \dots \quad (\text{B.2})$$

- tipo cruzado,

$$I_{ss}^{\rho_1 \rho_2 \dots} = \int [\dots] \frac{2m\mu}{(s_1 - m^2)} \frac{2m\mu}{(s_2 - m^2)} \left(\frac{Q^{\rho_1}}{\mu} \right) \left(\frac{Q^{\rho_2}}{\mu} \right) \dots \quad (\text{B.3})$$

- e tipo caixa,

$$I_{us}^{\rho_1 \rho_2 \dots} = \int [\dots] \frac{2m\mu}{(u_1 - m^2)} \frac{2m\mu}{(s_2 - m^2)} \left(\frac{Q^{\rho_1}}{\mu} \right) \left(\frac{Q^{\rho_2}}{\mu} \right) \dots \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\int [\dots] = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(Q - q/2)^2 - \mu^2]} \frac{1}{[(Q + q/2)^2 - \mu^2]}. \quad (\text{B.5})$$

A notação para essas integrais está explicada na seção 4.2.

A parametrização de Feynman, aplicada às situações que nos interessam, pode ser escrita como

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \Gamma(2) \int_0^1 da \frac{1}{[(1-a)D_1 + aD_2]^2}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{D_1 D_2 D_3} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{a}{[(1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + abD_3]^3}, \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} &= \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\ &\times \frac{a^2 b}{[(1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + ab(1-c)D_3 + abcD_4]^4} \\ &= \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \\ &\times \frac{a^2 b}{[(1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + ab(1+c)D_3/2 + ab(1-c)D_4/2]^4}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Com isso temos

- bolha:

$$\frac{1}{[k^2 - \mu^2][k'^2 - \mu^2]} = \Gamma(2) \int_0^1 da \frac{1}{[Q^2 + 2P_{cc} \cdot Q - \Sigma_{cc}^2]^2}, \quad (\text{B.9})$$

$$P_{cc}^\mu = C_a q^\mu, \quad (\text{B.10})$$

$$C_a = (2a - 1)/2, \quad (\text{B.11})$$

$$\Sigma_{cc}^2 = -q^2/4 + \mu^2, \quad (\text{B.12})$$

- triângulo:

$$\frac{1}{[k^2 - \mu^2][k'^2 - \mu^2][s_1 - m^2]} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{a}{[Q^2 + 2P_{sc} \cdot Q - \Sigma_{sc}^2]^3}, \quad (\text{B.13})$$

$$P_{sc}^\mu = C_q q^\mu + C_b (W + z)^\mu, \quad (\text{B.14})$$

$$C_q = (2a - 1 - ab)/2 = C_a - C_b, \quad (\text{B.15})$$

$$C_b = ab/2, \quad (\text{B.16})$$

$$\Sigma_{sc}^2 = -(1 - 2ab)q^2/4 + (1 - ab)\mu^2, \quad (\text{B.17})$$

- cruzado:

$$\frac{1}{[k^2 - \mu^2][k'^2 - \mu^2][s_1 - m^2][s_2 - m^2]} = \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{ss} \cdot Q - \Sigma_{ss}^2]^4} , \quad (\text{B.18})$$

$$P_{ss}^\mu = C_q q^\mu + C_c z^\mu + C_b W^\mu , \quad (\text{B.19})$$

$$C_c = abc/2 , \quad (\text{B.20})$$

$$\Sigma_{ss}^2 = -(1 - 2ab)q^2/4 + (1 - ab)\mu^2 = \Sigma_{sc}^2 , \quad (\text{B.21})$$

- caixa:

$$\frac{1}{[k^2 - \mu^2][k'^2 - \mu^2][u_1 - m^2][s_2 - m^2]} = \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{us} \cdot Q - \Sigma_{us}^2]^4} , \quad (\text{B.22})$$

$$P_{us}^\mu = C_q q^\mu - C_b z^\mu - C_c W^\mu , \quad (\text{B.23})$$

$$\Sigma_{us}^2 = -(1 - 2ab)q^2/4 + (1 - ab)\mu^2 = \Sigma_{sc}^2 . \quad (\text{B.24})$$

A integração nos momentos, nas equações (B.1)–(B.4), é feita utilizando as técnicas de regularização dimensional. Para as integrais escalares temos

$$\int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \frac{(-1)^A \Gamma(A - \omega)}{[P^2 + \Sigma^2]^{A-\omega}} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} F_A(P^2, \Sigma^2) , \quad (\text{B.25})$$

onde, por conveniência, definimos

$$F_A(P^2, \Sigma^2) = \frac{(-1)^A \Gamma(A - \omega)}{[P^2 + \Sigma^2]^{A-\omega}} . \quad (\text{B.26})$$

As outras integrais são obtidas através de derivadas nos momentos externos:

$$\int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} \dots Q^{\rho_n}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_{\rho_1}} \right) \dots \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_{\rho_n}} \right) F_{A-n}(P^2, \Sigma^2) . \quad (\text{B.27})$$

A ação das derivadas fornece

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^m F_n(\alpha, \Sigma^2) = F_{n+m}(\alpha, \Sigma^2), \quad (\text{B.28})$$

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P_{\rho_1}}\right) F_n(P^2, \Sigma^2) = (-g^{\sigma\rho_1} P_\sigma) F_{n+1}(P^2, \Sigma^2), \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P_{\rho_1}}\right) \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P_{\rho_2}}\right) F_n(P^2, \Sigma^2) = \\ \frac{1}{2} g^{\rho_1\rho_2} F_{n+1}(P^2, \Sigma^2) + (-P^{\rho_1})(-P^{\rho_2}) F_{n+2}(P^2, \Sigma^2), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

e assim por diante. Portanto,

$$\int \frac{d^2\omega Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} (-P^{\rho_1}) F_A(P^2, \Sigma^2), \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\omega Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left[\frac{1}{2} g^{\rho_1\rho_2} F_{A-1}(P^2, \Sigma^2) + (-P^{\rho_1})(-P^{\rho_2}) F_A(P^2, \Sigma^2) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\omega Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2} Q^{\rho_3}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\rho_2\rho_3}(-P_1^\rho) + g^{\rho_1\rho_3}(-P_2^\rho) + g^{\rho_1\rho_2}(-P_3^\rho)] F_{A-1}(P^2, \Sigma^2) \right. \\ \left. + (-P^{\rho_1})(-P^{\rho_2})(-P^{\rho_3}) F_A(P^2, \Sigma^2) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\omega Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2} Q^{\rho_3} Q^{\rho_4}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{4} [g^{\rho_1\rho_2} g^{\rho_3\rho_4} + g^{\rho_2\rho_3} g^{\rho_1\rho_4} + g^{\rho_1\rho_3} g^{\rho_2\rho_4}] F_{A-2}(P^2, \Sigma^2) \right. \\ + \frac{1}{2} [g^{\rho_1\rho_2}(-P^{\rho_3})(-P^{\rho_4}) + g^{\rho_2\rho_4}(-P^{\rho_1})(-P^{\rho_3}) + g^{\rho_3\rho_4}(-P^{\rho_1})(-P^{\rho_2}) \\ + g^{\rho_1\rho_3}(-P^{\rho_2})(-P^{\rho_4}) + g^{\rho_2\rho_3}(-P^{\rho_1})(-P^{\rho_4}) + g^{\rho_1\rho_4}(-P^{\rho_2})(-P^{\rho_3})] F_{A-1}(P^2, \Sigma^2) \\ \left. + (-P^{\rho_1})(-P^{\rho_2})(-P^{\rho_3})(-P^{\rho_4}) F_A(P^2, \Sigma^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

As divergências das integrais ficam localizadas nas funções F_A (mais especificamente nas funções Γ) e, como era de se esperar, dependem do número de dimensões, além de A . O grau de divergência superficial das integrais de *loop* pode ser entendido a partir dessas funções.

- exemplo 1: O grau de divergência superficial de (B.31) é dado por $G = 2A - 2\omega - 1$ e, uma vez que A e ω são números inteiros¹ basta a condição $A > \omega$ para que a integral seja convergente. Tal fato fica evidente na expressão de F_A , que contém o fator $\Gamma(A - \omega)$.
- exemplo 2: O grau de divergência superficial de (B.32) é $G = 2A - 2\omega - 2$ e para que a integral seja convergente devemos ter $A - 1 - \omega > 0$. Assim vemos em (B.32) que a condição de convergência não é determinada por F_A , mas sim por F_{A-1} , que contém o fator $\Gamma(A - 1 - \omega)$. Podemos notar também que no caso de divergência logarítmica ($A - 1 - \omega = 0$) a divergência localiza-se apenas em F_{A-1} e para $A - \omega \leq 0$ F_A passa a carregar parte da divergência.

Para tomarmos o limite $\omega \rightarrow 2$, usamos $\omega = 2 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) e fazemos $\epsilon \rightarrow 0$. Para a função Γ temos

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(n+1) + \frac{1}{2}\epsilon \left[\frac{\pi^2}{3} + \Psi^2(n+1) - \Psi'(n+1) \right] + \epsilon^2 \dots \right\}, \quad (\text{B.35})$$

onde $\Psi(x)$ é a função de Euler.

O limite $\epsilon \rightarrow 0$ fornece

$$F_5(P^2, \Sigma^2) = -\frac{\Gamma(5 - \omega)}{(P^2 + \Sigma^2)^{5-\omega}} \rightarrow -\frac{2}{(P^2 + \Sigma^2)^3}, \quad (\text{B.36})$$

$$F_4(P^2, \Sigma^2) = \frac{\Gamma(4 - \omega)}{(P^2 + \Sigma^2)^{4-\omega}} \rightarrow \frac{1}{(P^2 + \Sigma^2)^2}, \quad (\text{B.37})$$

$$F_3(P^2, \Sigma^2) = -\frac{\Gamma(3 - \omega)}{(P^2 + \Sigma^2)^{3-\omega}} \rightarrow -\frac{1}{(P^2 + \Sigma^2)}, \quad (\text{B.38})$$

$$F_2(P^2, \Sigma^2) = \frac{\Gamma(2 - \omega)}{(P^2 + \Sigma^2)^{2-\omega}} \rightarrow \rho_0 - \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{\Lambda^2} \right), \quad (\text{B.39})$$

$$F_1(P^2, \Sigma^2) = -\frac{\Gamma(1 - \omega)}{(P^2 + \Sigma^2)^{1-\omega}} \rightarrow (P^2 + \Sigma^2) \left[\rho_1 - \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (\text{B.40})$$

$$F_0(P^2, \Sigma^2) = \frac{\Gamma(-\omega)}{(P^2 + \Sigma^2)^{-\omega}} \rightarrow (P^2 + \Sigma^2)^2 \left[\rho_2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (\text{B.41})$$

onde os termos polinomiais nos momentos externos, que contém as divergências ultravioletas (absorvidas nas constantes $\rho_0, \rho_1, \dots$) foram isolados dos termos não-polinomiais (finitos). Nas equações acima, Λ é a escala de energia introduzida pela regularização dimensional.

¹ ω poderia assumir valores semi-inteiros, o que não invalidaria a afirmação.

B.1 Integrais no espaço de momento

As integrais usadas neste trabalho foram tomadas adimensionais por meio de potências convenientes de μ e m e são definidas a partir da decomposição da estrutura tensorial das equações (B.1)–(B.4):

$$I_{cc} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \Pi_{cc}^{(000)} \right\}, \quad (B.42)$$

$$I_{cc}^{\rho_1 \rho_2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\mu^2} \left[q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{cc}^{(200)} \right] + g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\}, \quad (B.43)$$

$$\begin{aligned} I_{cc}^{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} = & \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\mu^4} \left[q^{\rho_1} q^{\rho_2} q^{\rho_3} q^{\rho_4} \Pi_{cc}^{(400)} \right] + \frac{1}{\mu^2} \left[\left(g^{\rho_1 \rho_2} q^{\rho_3} q^{\rho_4} + g^{\rho_2 \rho_3} q^{\rho_4} q^{\rho_1} \right. \right. \right. \\ & + g^{\rho_3 \rho_4} q^{\rho_1} q^{\rho_2} + g^{\rho_1 \rho_3} q^{\rho_2} q^{\rho_4} + g^{\rho_1 \rho_4} q^{\rho_3} q^{\rho_2} + g^{\rho_2 \rho_4} q^{\rho_1} q^{\rho_3} \Big) \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \Big] \\ & \left. + \left[\left(g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_4} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_4} + g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_2 \rho_3} \right) \bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{(000)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (B.44)$$

$$I_{sc} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \Pi_{sc}^{(000)} \right\}, \quad (B.45)$$

$$I_{sc}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2m} \left[(W + z)^{\rho_1} \Pi_{sc}^{(001)} \right] \right\}, \quad (B.46)$$

$$\begin{aligned} I_{sc}^{\rho_1 \rho_2} = & \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\mu^2} \left[q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{sc}^{(200)} \right] + \frac{1}{4m^2} \left[(W + z)^{\rho_1} (W + z)^{\rho_2} \Pi_{sc}^{(002)} \right] \right. \\ & \left. + g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (B.47)$$

$$I_{ss} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \Pi_{ss}^{(000)} \right\}, \quad (B.48)$$

$$I_{ss}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2m} \left[z^{\rho_1} \Pi_{ss}^{(010)} + W^{\rho_1} \Pi_{ss}^{(001)} \right] \right\}, \quad (B.49)$$

$$\begin{aligned} I_{ss}^{\rho_1 \rho_2} = & \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\mu^2} \left[q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{ss}^{(200)} \right] + \frac{1}{4m^2} \left[z^{\rho_1} z^{\rho_2} \Pi_{ss}^{(020)} + W^{\rho_1} W^{\rho_2} \Pi_{ss}^{(002)} \right] \right. \\ & \left. + g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (B.50)$$

$$I_{us} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \Pi_{us}^{(000)} \right\}, \quad (B.51)$$

$$I_{us}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2m} \left[z^{\rho_1} \Pi_{us}^{(010)} + W^{\rho_1} \Pi_{us}^{(001)} \right] \right\}, \quad (B.52)$$

$$\begin{aligned} I_{us}^{\rho_1 \rho_2} = & \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\mu^2} \left[q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{us}^{(200)} \right] + \frac{1}{4m^2} \left[z^{\rho_1} z^{\rho_2} \Pi_{us}^{(020)} + W^{\rho_1} W^{\rho_2} \Pi_{us}^{(002)} \right] \right. \\ & \left. + g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{us}^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (B.53)$$

onde listamos apenas as contribuições não-nulas. Portanto,

$$\Pi_{cc}^{(n00)} = \int_0^1 da \ (-C_a)^n \left[\rho_0 - \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (\text{B.54})$$

$$\bar{\Pi}_{cc}^{(n00)} = \frac{1}{2\mu^2} \int_0^1 da \ (-C_a)^n (P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2) \left[\rho_1 - \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (\text{B.55})$$

$$\bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{(n00)} = \frac{1}{(2\mu^2)^2} \int_0^1 da \ (-C_a)^n (P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2)^2 \left[\rho_2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (\text{B.56})$$

$$\Pi_{sc}^{(lmn)} = -(2m\mu) \left(\frac{2m}{\mu} \right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \ (-C_q)^l (-C_b)^{m+n} \frac{a}{(P_{sc}^2 + \Sigma_{sc}^2)}, \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{sc}^{(lmn)} &= \frac{(2m\mu)}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu} \right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \\ &\quad \times (-C_q)^l (-C_b)^{m+n} a \left[\rho_0 - \ln \left(\frac{P_{sc}^2 + \Sigma_{sc}^2}{\Lambda^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ss}^{(lmn)} &= (2m\mu)^2 \left(\frac{2m}{\mu} \right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\ &\quad \times (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \frac{a^2 b}{(P_{ss}^2 + \Sigma_{sc}^2)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{ss}^{(lmn)} &= -\frac{(2m\mu)^2}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu} \right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\ &\quad \times (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \frac{a^2 b}{(P_{ss}^2 + \Sigma_{sc}^2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned} \Pi_{us}^{(lmn)} &= (2m\mu)^2 \left(\frac{2m}{\mu} \right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\ &\quad \times (-C_q)^l (C_b)^m (C_c)^n \frac{a^2 b}{(P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{us}^{(lmn)} &= -\frac{(2m\mu)^2}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu} \right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\ &\quad \times (-C_q)^l (C_b)^m (C_c)^n \frac{a^2 b}{(P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

B.2 Integrais no espaço de configuração

Para obter as integrais de um *loop* no espaço de configuração escrevemos as funções Π no referencial do centro de massa e realizamos a transformada de Fourier no momento $\mathbf{q}$ trocado entre os nucleons. Convém escrever $P^2 + \Sigma^2$ em termos de λ e θ , de tal maneira que

$$P^2 + \Sigma^2 = \lambda^2 \left(-\frac{q^2}{\mu^2} + \theta^2 \right) = \lambda^2 \left(\frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} + \theta^2 \right) = \lambda^2 (\mathbf{k}^2 + \theta^2). \quad (\text{B.63})$$

Assim temos

- bolha:

$$P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2 = -a(1-a)q^2 + \mu^2, \quad (\text{B.64})$$

$$\lambda_{cc}^2 = a(1-a)\mu^2, \quad \theta_{cc}^2 = \frac{1}{a(1-a)}, \quad (\text{B.65})$$

- triângulo:

$$\begin{aligned} P_{sc}^2 + \Sigma_{sc}^2 &= C_q^2 q^2 + C_b^2 (W^2 + z^2) + \Sigma_{sc}^2 \\ &= -a(1-a)(1-b)q^2 + (1-ab)\mu^2 + a^2 b^2 m^2, \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

$$\lambda_{sc}^2 = a(1-a)(1-b)\mu^2, \quad \theta_{sc}^2 = \frac{(1-ab)\mu^2 + a^2 b^2 m^2}{a(1-a)(1-b)\mu^2}, \quad (\text{B.67})$$

- cruzado:

$$\begin{aligned} P_{ss}^2 + \Sigma_{ss}^2 &= C_q^2 q^2 + C_c^2 z^2 + C_b^2 W^2 + \Sigma_{ss}^2 \\ &= -a(1-a)(1-b)q^2 + (1-ab)\mu^2 + a^2 b^2 [m^2 - (1-c^2)z^2/4], \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

$$\lambda_{ss}^2 = a(1-a)(1-b)\mu^2, \quad \theta_{ss}^2 = \frac{(1-ab)\mu^2 + a^2 b^2 [m^2 - (1-c^2)z^2/4]}{a(1-a)(1-b)\mu^2}, \quad (\text{B.69})$$

- caixa:

$$\begin{aligned} P_{us}^2 + \Sigma_{us}^2 &= C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 + C_c^2 W^2 + \Sigma_{us}^2 \\ &= - \left[a(1-a)(1-b) - \frac{a^2 b^2}{4} (1-c^2) \right] q^2 + (1-ab)\mu^2 + a^2 b^2 [c^2 m^2 + (1-c^2)z^2/4], \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

$$\lambda_{us}^2 = \left[a(1-a)(1-b) - \frac{a^2 b^2}{4} (1-c^2) \right] \mu^2, \quad \theta_{us}^2 = \frac{(1-ab)\mu^2 + a^2 b^2 [c^2 m^2 + (1-c^2)z^2/4]}{\left[a(1-a)(1-b) - \frac{a^2 b^2}{4} (1-c^2) \right] \mu^2}. \quad (\text{B.71})$$

A expressão para as integrais de um *loop* no espaço de configuração são dadas por

$$[S] = \frac{1}{\mu^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} [\Pi] = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} [\Pi] . \quad (\text{B.72})$$

onde $\mathbf{x} = \mu \mathbf{r}$ e $\mathbf{k} = \mathbf{q}/\mu$. Como as integrais no espaço de momento dependem de $\mathbf{k}$ apenas na forma $k^2 = \mathbf{k}^2$ convém fazer a integração angular na equação acima:

$$[S] = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{x} \int_0^\infty dk \, k \sin(kx) [\Pi] . \quad (\text{B.73})$$

A seguir reescrevemos a eq.(B.28) como

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right)^m F_n(\beta, \theta^2, \lambda^2) = F_{n+m}(\beta, \theta^2, \lambda^2) . \quad (\text{B.74})$$

onde $\beta = k^2$.

Definindo

$$\begin{aligned} f_A(x, \theta^2, \lambda^2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{x} \int_0^\infty dk \, k \sin(kx) F_A(\beta, \theta^2, \lambda^2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_0^\infty d\beta \sin\left(x\sqrt{\beta}\right) F_A(\beta, \theta^2, \lambda^2) \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

e usando a eq.(B.74) obtemos a relação

$$f_{A-1}(x, \theta^2, \lambda^2) = \left(\frac{2\lambda^2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_A(x, \theta^2, \lambda^2) . \quad (\text{B.76})$$

Basta agora calcularmos f_5 explicitamente:

$$\begin{aligned} f_5(x, \theta^2, \lambda^2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ix} \int_0^\infty k \, dk \left(e^{ikx} - e^{-ikx} \right) F_5(k^2, \theta^2, \lambda^2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^\infty k \, dk \, e^{ikx} F_5(k^2, \theta^2, \lambda^2) , \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

e por resíduos temos

$$f_5(x, \theta^2, \lambda^2) = -\frac{e^{-\theta x}}{16\pi\lambda^6\theta^3} (1 + \theta x) . \quad (\text{B.78})$$

Para outros valores de A usamos a eq.(B.76):

$$f_4(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{1}{8\pi\lambda^4\theta} e^{-\theta x}, \quad (\text{B.79})$$

$$f_3(x, \theta^2, \lambda^2) = -\frac{1}{4\pi\lambda^2} \frac{e^{-\theta x}}{x}, \quad (\text{B.80})$$

$$f_2(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta x}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\theta x}\right), \quad (\text{B.81})$$

$$f_1(x, \theta^2, \lambda^2) = -\frac{\theta^2\lambda^2}{\pi} \frac{e^{-\theta x}}{x^3} \left(1 + \frac{3}{\theta x} + \frac{3}{(\theta x)^2}\right), \quad (\text{B.82})$$

$$f_0(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{2\theta^3\lambda^4}{\pi} \frac{e^{-\theta x}}{x^4} \left(1 + \frac{6}{\theta x} + \frac{15}{(\theta x)^2} + \frac{15}{(\theta x)^3}\right). \quad (\text{B.83})$$

Com as expressões acima podemos escrever as integrais de *loop* no espaço de configuração:

$$S_{cc}^{(n00)} = \int_0^1 da \, (-C_a)^n \frac{\theta_{cc}}{2\pi} \frac{e^{-\theta_{cc}x}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\theta_{cc}x}\right), \quad (\text{B.84})$$

$$\bar{S}_{cc}^{(n00)} = -\frac{1}{2\mu^2} \int_0^1 da \, (-C_a)^n \frac{\theta_{cc}^2\lambda_{cc}^2}{\pi} \frac{e^{-\theta_{cc}x}}{x^3} \left(1 + \frac{3}{\theta_{cc}x} + \frac{3}{(\theta_{cc}x)^2}\right), \quad (\text{B.85})$$

$$\bar{\bar{S}}_{cc}^{(n00)} = \frac{1}{(2\mu^2)^2} \int_0^1 da \, (-C_a)^n \frac{2\theta_{cc}^3\lambda_{cc}^4}{\pi} \frac{e^{-\theta_{cc}x}}{x^4} \left(1 + \frac{6}{\theta_{cc}x} + \frac{15}{(\theta_{cc}x)^2} + \frac{15}{(\theta_{cc}x)^3}\right), \quad (\text{B.86})$$

$$S_{sc}^{(lmn)} = -(2m\mu) \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \, (-C_q)^l (-C_b)^{m+n} \frac{a}{4\pi\lambda_{sc}^2} \frac{e^{-\theta_{sc}x}}{x}, \quad (\text{B.87})$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{sc}^{(lmn)} &= \frac{(2m\mu)}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \\ &\quad \times (-C_q)^l (-C_b)^{m+n} \frac{a\theta_{sc}}{2\pi} \frac{e^{-\theta_{sc}x}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\theta_{sc}x}\right), \quad (\text{B.88}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{ss}^{(lmn)} &= (2m\mu)^2 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\
&\quad \times (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \frac{a^2 b}{8\pi\lambda_{ss}^4} \frac{e^{-\theta_{ss}x}}{\theta_{ss}}, \quad (\text{B.89})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{ss}^{(lmn)} &= -\frac{(2m\mu)^2}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\
&\quad \times (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \frac{a^2 b}{4\pi\lambda_{ss}^2} \frac{e^{-\theta_{ss}x}}{x}, \quad (\text{B.90})
\end{aligned}$$

$$S_{us}^{(lmn)} = (2m\mu)^2 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc (-C_q)^l (C_b)^m (C_c)^n \frac{a^2 b}{8\pi\lambda_{us}^4} \frac{e^{-\theta_{us}x}}{\theta_{us}}, \quad (\text{B.91})$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{us}^{(lmn)} &= -\frac{(2m\mu)^2}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \\
&\quad \times (-C_q)^l (C_b)^m (C_c)^n \frac{a^2 b}{4\pi\lambda_{us}^2} \frac{e^{-\theta_{us}x}}{x}. \quad (\text{B.92})
\end{aligned}$$

B.3 Alguns resultados explícitos no espaço de momento

Como vimos na seção 4.6 podemos obter analiticamente a integral Π_{cc}^{000} . Para efetuar a integração usamos a mudança de variável $a = (1 + y)/2$, que nos leva a

$$\begin{aligned}
\Pi_{cc}^{000} &= \left[\rho_0 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right] - \int_{-1}^1 \frac{dy}{2} \ln \left[\frac{1-y^2}{4} \frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} + 1 \right] \\
&= \left[\rho_0 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right] - \int_0^1 dy \ln(\omega^2 - y^2 \epsilon^2), \quad (\text{B.93})
\end{aligned}$$

onde

$$\epsilon^2 = \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}, \quad \omega^2 = 1 + \epsilon^2, \quad (\text{B.94})$$

e na última passagem usamos o fato do integrando ser uma função par em y .

Levando a conta adiante,

$$\Pi_{cc}^{000} = \left[\rho_0 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right] - \int_0^1 dy [\ln(\omega + y\epsilon) + \ln(\omega - y\epsilon)]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\rho_0 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right] - \left\{ \left(\frac{\omega}{\epsilon} + y \right) \ln(\omega + y\epsilon) - \left(\frac{\omega}{\epsilon} - y \right) \ln(\omega - y\epsilon) - 2y \right\}_0^1 \\
&= \left[\rho_0 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + 2 \right] - \left\{ \frac{\omega}{\epsilon} \ln \left[\frac{\omega + \epsilon}{\omega - \epsilon} \right] + \ln(\omega^2 - \epsilon^2) \right\} \\
&= \rho_0 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + 2 - \frac{\omega}{\epsilon} \ln \left[\frac{(\omega + \epsilon)^2}{\omega^2 - \epsilon^2} \right] \\
&= \rho_0 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + 2 - 2 \frac{\omega}{\epsilon} \ln(\omega + \epsilon), \tag{B.95}
\end{aligned}$$

chegamos, desprezando os termos constantes, à equação (4.79),

$$\Pi_{cc}^{000} = -2 \frac{\sqrt{1 + \mathbf{q}^2/4\mu^2}}{\sqrt{\mathbf{q}^2/4\mu^2}} \ln \left(\sqrt{1 + \mathbf{q}^2/4\mu^2} + \sqrt{\mathbf{q}^2/4\mu^2} \right). \tag{B.96}$$

Outra integral que pode ser obtida analiticamente é Π_a , o primeiro termo da expansão da integral triângulo, apresentada na seção 4.6. Partindo das equações (2.49), (2.44) e usando a definição (4.82), temos

$$\begin{aligned}
\Pi_a &= - \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' + \mathbf{q}^2} \frac{2\mu}{\sqrt{t'}} \frac{\pi}{2} = -\mu\pi \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{t'}} \frac{1}{t' + \mathbf{q}^2} = -\frac{2\mu\pi}{\sqrt{\mathbf{q}^2}} \int_{2\mu}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\mathbf{q}^2}} \frac{1}{1 + z^2/\mathbf{q}^2} \\
&= -\frac{\pi}{\epsilon} \int_{1/\epsilon}^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = -\frac{\pi}{\epsilon} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right] = -\frac{\pi}{\epsilon} \tan^{-1} \epsilon. \tag{B.97}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Pi_a = -\frac{\pi}{\sqrt{\mathbf{q}^2/4\mu^2}} \tan^{-1} \sqrt{\mathbf{q}^2/4\mu^2}. \tag{B.98}$$

B.4 Alguns resultados explícitos no espaço de configuração

Podemos obter resultados explícitos para as integrais Π_{cc}^{000} e $\bar{\Pi}_{cc}^{000}$, no espaço de configuração, em termos das funções de Bessel K_ν . Uma das fórmulas para essa função é dada por²

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \int_1^\infty e^{-z\alpha} (\alpha^2 - 1)^{\nu-1/2} d\alpha, \quad \nu > -1/2. \tag{B.99}$$

Com a mudança de variável

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}; \quad \int_1^\infty d\alpha = \int_0^1 \frac{y dy}{(1 - y^2)^{3/2}} \tag{B.100}$$

²Página 616, equação (11.122) do livro de Arfken [98].

temos

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^1 dy e^{-z/\sqrt{1-y^2}} y^{2\nu} (1-y^2)^{-1-\nu}. \quad (\text{B.101})$$

Para ν inteiro o integrando é uma função par, o que permite escrever $\int_0^1 dy = \int_{-1}^1 dy/2$. Fazendo $a = (1+y)/2$ e usando (B.11) e (B.65) temos

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^1 da e^{-\theta z/2} (2C_a)^{2\nu} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2\nu+2}, \quad (\text{B.102})$$

$$K_\nu(2z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)} z^\nu \int_0^1 da e^{-\theta z} (\theta C_a)^{2\nu} \frac{\theta^2}{4}. \quad (\text{B.103})$$

Adiante faremos uso das seguintes relações:

$$\frac{d\theta}{da} = C_a \theta^3, \quad \frac{dC_a}{da} = 1, \quad C_a^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{\theta^2}. \quad (\text{B.104})$$

Para obter Π_{cc}^{000} usamos o seguinte truque:

$$\begin{aligned} \int_0^1 da e^{-\theta x} &= C_a e^{-\theta x} \Big|_0^1 - \int_0^1 da C_a (-x) e^{-\theta x} \frac{d\theta}{da} = x \int_0^1 da C_a^2 \theta^3 e^{-\theta x} \\ &= -x \frac{d}{dx} \int_0^1 da C_a^2 \theta^2 e^{-\theta x} = -x \frac{d}{dx} \int_0^1 da \left(\frac{\theta^2}{4} - 1\right) e^{-\theta x} \\ &= -x \frac{d}{dx} K_0(2x) - \int_0^1 da \theta x e^{-\theta x} \end{aligned} \quad (\text{B.105})$$

o que fornece

$$\int_0^1 da (1 + \theta x) e^{-\theta x} = -x \frac{d}{dx} K_0(2x) = -2x K_0'(2x) = 2x K_1(2x). \quad (\text{B.106})$$

Portanto,

$$\Pi_{cc}^{000} = \frac{1}{\pi x^2} K_1(2x). \quad (\text{B.107})$$

Para $\bar{\Pi}_{cc}^{000}$ fazemos integrações por partes, semelhantes à usada em (B.105), nas integrais

$$\int_0^1 da \frac{e^{-\theta x}}{\theta}, \quad \int_0^1 da \frac{e^{-\theta x}}{\theta^2}. \quad (\text{B.108})$$

Com o auxílio das relações em (B.104) a primeira integral fornece a relação

$$\int_0^1 da \left(\frac{2}{\theta} + x\right) e^{-\theta x} = \frac{1}{4} \int_0^1 da (\theta + \theta^2 x) e^{-\theta x}, \quad (\text{B.109})$$

enquanto que da segunda extraímos

$$\int_0^1 da \left(\frac{3}{\theta^2} + \frac{x}{\theta} \right) e^{-\theta x} = \frac{1}{4} \int_0^1 da (2 + \theta x) e^{-\theta x}. \quad (\text{B.110})$$

Combinando as duas adequadamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 da \left(\frac{3}{\theta^2} + \frac{3x}{\theta} + x^2 \right) e^{-\theta x} &= \frac{1}{2} \int_0^1 da (1 + \theta x) e^{-\theta x} + x^2 \int_0^1 da \frac{\theta^2}{4} e^{-\theta x} \\ &= x [K_1(2x) + x K_0(2x)]. \end{aligned} \quad (\text{B.111})$$

Logo,

$$\bar{\Pi}_{cc}^{000} = -\frac{1}{2\pi x^4} [K_1(2x) + x K_0(2x)]. \quad (\text{B.112})$$

Outra integral que pode ser obtida explicitamente é a que descreve o termo dominante da integral triângulo na expansão de bárion pesado, Π_a . No espaço de configuração temos

$$\begin{aligned} S_a &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' + \mu^2 \mathbf{k}^2} \left[-\frac{2\mu}{\sqrt{t'}} \right] \frac{\pi}{2} = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_4^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{y}} \frac{dy}{y + \mathbf{k}^2} \\ &= - \int_4^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{y}} dy \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sqrt{y}x}}{x} = -\frac{1}{2} \int_2^{\infty} dz \frac{e^{-zx}}{x}. \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

Portanto,

$$S_a = -\frac{e^{-2x}}{2x^2}. \quad (\text{B.114})$$

B.5 Diagramas de dois *loops* no espaço de configuração

No espaço de momento, os diagramas de dois *loops* podem ser expressos como produtos das integrais de um *loop* (apêndice D). Porém, a transformada de Fourier do produto de duas funções envolve uma convolução das transformadas de cada uma delas. Se do ponto de vista matemático isso é feito de maneira simples, do ponto de vista prático torna-se bastante complicado, aumentando a dimensão do espaço de integração. É possível reduzir a dimensão da integração na convolução de três para uma, mas isso não é uma vantagem significativa. Por exemplo, o produto de duas integrais do tipo bolha envolveriam três interações: duas da própria definição de cada integral, e uma da convolução. No produto de duas integrais do tipo triângulo, a dimensão do espaço de integração seria cinco.

Para contornar esse problema, levamos a vantagem dos diagramas de dois *loops* envolverem apenas os produtos Π_ℓ^2 e Π_t^2 , equações (4.92)–(4.102). Vamos denotar suas transformadas de Fourier por $S_{\ell\ell}$ e S_{tt} :

$$S_{\ell\ell} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \Pi_\ell^2, \quad (\text{B.115})$$

$$S_{tt} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Pi_t^2. \quad (\text{B.116})$$

Começando por $S_{\ell\ell}$, é conveniente escrever Π_l em termos da integral (B.93),

$$\Pi_\ell = - \int_0^1 dy \left\{ \ln \left[(4 + k^2) - k^2 y^2 \right] - \ln 4 \right\}, \quad (\text{B.117})$$

onde $k = |\mathbf{k}|$.

Manipulando a expressão acima,

$$\begin{aligned} \Pi_\ell &= \ln 4 - \int_0^1 dy \ln \left[4 + (1 - y^2)k^2 \right] = \ln 4 - \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}} \ln \left[4 + z^2 k^2 \right] \\ &= \ln 4 - \int_0^1 \frac{da}{2\sqrt{1 - a}} \ln \left[4 + ak^2 \right] = \ln 4 + \int_0^1 \left(-\frac{da}{2\sqrt{1 - a}} \right) \ln \left[4 + ak^2 \right] \\ &= \ln 4 + \left\{ \left[\sqrt{1 - a} \ln(4 + ak^2) \right]_0^1 - \int_0^1 k^2 \sqrt{1 - a} \frac{da}{4 + ak^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

chegamos a

$$\Pi_\ell = - \int_0^1 k^2 \sqrt{1 - a} \frac{da}{4 + ak^2}. \quad (\text{B.119})$$

Substituindo em $S_{\ell\ell}$, temos

$$\begin{aligned} S_{\ell\ell} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} k^4 \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{\sqrt{(1 - a)(1 - b)}}{(4 + ak^2)(4 + bk^2)} \\ &= (-\nabla^2) \int_0^1 da \int_0^1 db \sqrt{(1 - a)(1 - b)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{k^2}{(4 + ak^2)(4 + bk^2)} \\ &= (-\nabla^2) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{\sqrt{(1 - a)(1 - b)}}{(b - a)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{1}{4 - ak^2} - \frac{1}{4 - bk^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} (-\nabla^2) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{\sqrt{(1 - a)(1 - b)}}{(b - a)} \left[\frac{1}{a} \frac{e^{-2x/\sqrt{a}}}{x} - \frac{1}{b} \frac{e^{-2x/\sqrt{b}}}{x} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.120})$$

Com a atuação do laplaciano e as substituições $a \rightarrow a^2$ e $b \rightarrow b^2$, chegamos em um resultado relativamente simples:

$$S_{\ell\ell} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{\sqrt{(1 - a)(1 - b)}}{(b + a)} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left[\left(\frac{4}{a^2} \right)^2 \frac{e^{-2x/a}}{x} - \left(\frac{4}{b^2} \right)^2 \frac{e^{-2x/b}}{x} \right]. \quad (\text{B.121})$$

Para Π_t , convém usarmos a representação espectral, dada por (2.44):

$$\Pi_t = -2m\mu \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dt'}{(t' + \mathbf{q}^2)} G(t'), \quad (\text{B.122})$$

onde $G(t') = 16\pi \text{Im}\gamma(t')$, e $\text{Im}\gamma(t')$ é dado pela equação (2.45). Uma simples mudança de variáveis permite escrever Π_t na forma

$$\Pi_t = -8m\mu \int_0^1 \frac{da}{a^2} \frac{G(4\mu^2/a)}{(k^2 + 4/a)}. \quad (\text{B.123})$$

Substituindo em S_{tt} obtemos

$$S_{tt} = (8m\mu)^2 \int_0^1 \frac{da}{a^2} \int_0^1 \frac{db}{b^2} G(4\mu^2/a) G(4\mu^2/b) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{(k^2 + 4/a)(k^2 + 4/b)}. \quad (\text{B.124})$$

Usando do mesmo truque em $S_{\ell\ell}$, chegamos a

$$S_{tt} = -\frac{(4m\mu)^2}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{G(4\mu^2/a)G(4\mu^2/b)}{a^2b^2(a+b)} \frac{1}{x} \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \left[e^{-2x/a} - e^{-2x/b} \right]. \quad (\text{B.125})$$

Apêndice C

A amplitude NN

Para utilizarmos a expressão (3.56) para a amplitude $\mathcal{T}_{\pi\pi}$ devemos adotar certas convenções. A amplitude πN no nucleon 1 é definida como

$$T_{\pi N}^{(1)ab} = \delta_{ab} T^{(1)+}(k, k') - i \epsilon_{bac} \tau_c T^{(1)-}(k, k'), \quad (\text{C.1})$$

e para o nucleon 2,

$$T_{\pi N}^{(2)ab} = \delta_{ab} T^{(2)+}(k, k') + i \epsilon_{bac} \tau_c T^{(2)-}(k, k'), \quad (\text{C.2})$$

lembrando sempre que a amplitude πN é genericamente dada por (2.7),

$$T_{\pi N}^{ab} = \delta_{ab} T^+(k, k', p, p') + i \epsilon_{bac} \tau_c T^-(k, k', p, p'). \quad (\text{C.3})$$

Observando a figura 3.1 vemos que para o nucleon 2 temos

$$T^{(2)\pm}(k, k') = T^{\pm}(k, k', p_2, p'_2). \quad (\text{C.4})$$

Já para o nucleon 1 vemos que

$$T^{(1)+}(k, k') = T^+(-k, -k', p_1, p'_1), \quad T^{(1)-}(k, k') = -T^-(-k, -k', p_1, p'_1). \quad (\text{C.5})$$

Em termos das amplitudes D e B definidas através da equação (2.10) podemos constatar que

$$\begin{aligned} D^{(2)\pm}(k, k') &= D^{\pm}(k, k', p_2, p'_2), & B^{(2)\pm}(k, k') &= B^{\pm}(k, k', p_2, p'_2), \\ D^{(1)+}(k, k') &= D^+(-k, -k', p_1, p'_1), & B^{(1)+}(k, k') &= -B^+(-k, -k', p_1, p'_1), \\ D^{(1)-}(k, k') &= -D^-(-k, -k', p_1, p'_1), & B^{(1)-}(k, k') &= B^-(-k, -k', p_1, p'_1). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

C.1 Setor nucleônico

As amplitudes D e B que definem o setor nucleônico são dadas por (2.20)–(2.23) e (2.68):

$$D^+ = \frac{m g_A^2}{2f_\pi^2} \left[\frac{k \cdot k'}{s - m^2} + \frac{k \cdot k'}{u - m^2} \right], \quad (\text{C.7})$$

$$B^+ = -\frac{m^2 g_A^2}{f_\pi^2} \left[\frac{1}{s - m^2} - \frac{1}{u - m^2} \right], \quad (\text{C.8})$$

$$D^- = \frac{m g_A^2}{2f_\pi^2} \left[-\frac{\nu}{m} \left(1 - \frac{1}{g_A^2} \right) + \frac{k \cdot k'}{s - m^2} - \frac{k \cdot k'}{u - m^2} \right], \quad (\text{C.9})$$

$$B^- = -\frac{m^2 g_A^2}{f_\pi^2} \left[\frac{1}{2m^2} \left(1 - \frac{1}{g_A^2} \right) + \frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right]. \quad (\text{C.10})$$

De acordo com o que expomos acima e fazendo uso das definições das variáveis de Mandelstam (2.1-2.3) obtemos

$$D^{(1)+} = \frac{m g_A^2}{2f_\pi^2} \left[\frac{k \cdot k'}{u_1 - m^2} + \frac{k \cdot k'}{s_1 - m^2} \right], \quad (\text{C.11})$$

$$B^{(1)+} = \frac{m^2 g_A^2}{f_\pi^2} \left[\frac{1}{u_1 - m^2} - \frac{1}{s_1 - m^2} \right], \quad (\text{C.12})$$

$$D^{(1)-} = -\frac{m g_A^2}{2f_\pi^2} \left[\frac{\nu_1}{m} \left(1 - \frac{1}{g_A^2} \right) + \frac{k \cdot k'}{u_1 - m^2} - \frac{k \cdot k'}{s_1 - m^2} \right], \quad (\text{C.13})$$

$$B^{(1)-} = -\frac{m^2 g_A^2}{f_\pi^2} \left[\frac{1}{2m^2} \left(1 - \frac{1}{g_A^2} \right) + \frac{1}{u_1 - m^2} + \frac{1}{s_1 - m^2} \right]. \quad (\text{C.14})$$

$$D^{(2)+} = \frac{m g_A^2}{2f_\pi^2} \left[\frac{k \cdot k'}{s_2 - m^2} + \frac{k \cdot k'}{u_2 - m^2} \right], \quad (\text{C.15})$$

$$B^{(2)+} = -\frac{m^2 g_A^2}{f_\pi^2} \left[\frac{1}{s_2 - m^2} - \frac{1}{u_2 - m^2} \right], \quad (\text{C.16})$$

$$D^{(2)-} = \frac{m g_A^2}{2f_\pi^2} \left[-\frac{\nu_2}{m} \left(1 - \frac{1}{g_A^2} \right) + \frac{k \cdot k'}{s_2 - m^2} - \frac{k \cdot k'}{u_2 - m^2} \right], \quad (\text{C.17})$$

$$B^{(2)-} = -\frac{m^2 g_A^2}{f_\pi^2} \left[\frac{1}{2m^2} \left(1 - \frac{1}{g_A^2} \right) + \frac{1}{s_2 - m^2} + \frac{1}{u_2 - m^2} \right]. \quad (\text{C.18})$$

C.2 Coeficientes HJS

Vimos no capítulo 2 que as amplitudes $D_R^\pm$ e $B_R^\pm$ podem ser expandidas em séries de ν e t em baixa energia. Vimos também que as amplitudes D_R^+ e B_R^- contêm somente potências pares, e as amplitudes B_R^+ e D_R^- , somente potências ímpares da variável ν . Pela definição de ν temos

$$\nu(k, k', p, p') = \frac{[(p+k)^2 - (p-k')^2]}{4m} \quad (\text{C.19})$$

resultando em

$$\nu(k, k', p_2, p'_2) = \nu_2 \quad \text{e} \quad \nu(-k, -k', p_1, p'_1) = -\nu_1. \quad (\text{C.20})$$

Com essas informações e de acordo com a equação (C.6) temos

$$X^{(i)} = \sum x_{mn} \nu_i^{2m} t^n, \quad (\text{C.21})$$

onde

$$X^{(i)} \in \left\{ D_R^{(i)+}, \frac{D_R^{(i)-}}{\nu_i}, \frac{B_R^{(i)+}}{\nu_i}, B_R^{(i)-} \right\} \quad \text{e} \quad i = 1, 2. \quad (\text{C.22})$$

Apêndice D

Cálculo das funções de perfil

Os cálculos para obter os resultados apresentados na seção 4.4 são feitos sem dificuldades, apesar de bastante extensos. As funções de perfil das famílias I e III são obtidas de maneira muito parecida e, como ilustração, apresentamos o cálculo de $\mathcal{I}_{DB}^{\lambda-}$ do setor nucleônico, sem a subtração da iteração do OPEP. Para isso, usamos as relações¹

$$k \cdot k' = Q^2 - q^2/4 = (s_1 - m^2) - 2m Q \cdot (W + z), \quad (\text{D.1})$$

$$= (u_1 - m^2) + 2m Q \cdot (W + z), \quad (\text{D.2})$$

para escrever $D^{(1)-}$ como

$$D^{(1)-} = -\nu_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) + g^2 \left(\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right) \right]. \quad (\text{D.3})$$

Para $B^{(1)-}$, temos

$$B^{(1)-} = - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) + g^2 \left(\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right) \right]. \quad (\text{D.4})$$

De acordo com as definições das funções de perfil, equações (3.59), $\mathcal{I}_{DB}^{\lambda-}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{DB}^{\lambda-} = & -\frac{i}{2} \int [\cdot \cdot \cdot] \nu_1 Q^\lambda \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \right. \\ & + \frac{g^2}{2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left(\frac{1}{s_1 - m^2} + \frac{1}{u_1 - m^2} + \frac{1}{s_2 - m^2} + \frac{1}{u_2 - m^2} \right) \\ & + g^4 \left[\frac{1}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} + \frac{1}{(s_1 - m^2)(u_2 - m^2)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} + \frac{1}{(u_1 - m^2)(u_2 - m^2)} \right] \right\} \end{aligned}$$

¹As variáveis cinemáticas estão definidas na seção 3.1.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2} \frac{(W+z)_\mu}{2m} \int[\dots] Q^\mu Q^\lambda \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \right. \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left(\frac{1}{s_1 - m^2} + \frac{1}{u_1 - m^2} + \frac{1}{s_2 - m^2} + \frac{1}{u_2 - m^2} \right) \\
&\quad + g^4 \left[\frac{1}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} + \frac{1}{(s_1 - m^2)(u_2 - m^2)} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} + \frac{1}{(u_1 - m^2)(u_2 - m^2)} \right] \right\}. \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Notamos que o numerador é simétrico pela troca $Q \leftrightarrow -Q$, e para os denominadores, temos $(s_i - m^2) \leftrightarrow (u_i - m^2)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{DB}^{\lambda-} &= -i \frac{(W+z)_\mu}{2m} \frac{\mu^2}{2} \int[\dots] \frac{Q^\mu}{\mu} \frac{Q^\lambda}{\mu} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \right. \\
&\quad + g^2 \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left(\frac{1}{s_1 - m^2} + \frac{1}{s_2 - m^2} \right) \\
&\quad \left. + 2g^4 \left[\frac{1}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} + \frac{1}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \right] \right\} \\
&= -i \frac{(W+z)_\mu}{2m} \frac{\mu^2}{2} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 I_{cc}^{\mu\lambda} \right. \\
&\quad \left. + g^2 \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \frac{1}{2m\mu} (I_{sc}^{\mu\lambda} + I_{cs}^{\mu\lambda}) + 2g^4 \frac{1}{(2m\mu)^2} (I_{ss}^{\mu\lambda} + I_{us}^{\mu\lambda}) \right\} \\
&= -i \frac{(W+z)_\mu}{2m} \frac{m^2}{4} \left\{ \frac{\mu^2}{2m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 I_{cc}^{\mu\lambda} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu}{m} \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) (I_{sc}^{\mu\lambda} + I_{cs}^{\mu\lambda}) + \frac{g^4}{m^4} (I_{ss}^{\mu\lambda} + I_{us}^{\mu\lambda}) \right\} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(W+z)_\mu}{2m} \frac{m^2}{4} \left\{ \frac{\mu^2}{2m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 g^{\mu\lambda} \bar{\Pi}_{cc}^{000} + \frac{2\mu}{m} \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) g^{\mu\lambda} \bar{\Pi}_{sc}^{000} \right. \\
&\quad + \frac{\mu}{m} \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \left[\frac{(W+z)^\mu (W+z)^\lambda}{4m^2} + \frac{(W-z)^\mu (W-z)^\lambda}{4m^2} \right] \Pi_{sc}^{002} \\
&\quad \left. + \frac{g^4}{m^4} \left[\frac{z^\mu z^\lambda}{4m^2} (\Pi_{ss}^{020} + \Pi_{us}^{020}) + \frac{W^\mu W^\lambda}{4m^2} (\Pi_{ss}^{002} + \Pi_{us}^{002}) + g^{\mu\lambda} (\bar{\Pi}_{ss}^{000} + \bar{\Pi}_{us}^{000}) \right] \right\}. \tag{D.6}
\end{aligned}$$

A contração envolvendo $(W+z)_\mu/2m$ resulta em

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{DB}^{-\lambda} &= \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left\{ \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right)^2 \frac{\mu^2}{2m^2} \frac{(W+z)^\lambda}{2m} \bar{\Pi}_{cc}^{000} \right. \\
&\quad + \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{g^2}{m^2} - \frac{1}{f_\pi^2} \right) \frac{2\mu}{m} \left[\left(\frac{W^2}{4m^2} \frac{W^\lambda}{2m} + \frac{z^2}{4m^2} \frac{z^\lambda}{2m} \right) \Pi_{sc}^{002} + \frac{(W+z)^\lambda}{2m} \bar{\Pi}_{sc}^{000} \right] \\
&\quad \left. + \frac{g^4}{m^4} \left[\frac{W^2}{4m^2} \frac{W^\lambda}{2m} (\Pi_{ss}^{002} + \Pi_{us}^{002}) + \frac{z^2}{4m^2} \frac{z^\lambda}{2m} (\Pi_{ss}^{020} + \Pi_{us}^{020}) + \frac{(W+z)^\lambda}{2m} (\bar{\Pi}_{ss}^{000} + \bar{\Pi}_{us}^{000}) \right] \right\} \\
&= \frac{W^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(w)-} + \frac{z^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(z)-}, \tag{D.7}
\end{aligned}$$

com $\mathcal{I}_{DB}^{(w)-}$ e $\mathcal{I}_{DB}^{(z)-}$ dados, respectivamente, pelas equações (4.25) e (4.26).

Família II

Aqui deixamos indicado como obter as funções de perfil da família II, que contêm diagramas de dois *loops* com uma interação pión-pión intermediária, conforme ilustra a figura abaixo.

A amplitude intermediária é obtida através da lagrangiana $\mathcal{L}_\pi$, equação (2.60):

$$\begin{aligned}
M_{abcd} &= \frac{i}{f_\pi^2} \left\{ \delta_{ab} \delta_{cd} [(k_1 + k_2)^2 - \mu^2] + \delta_{ac} \delta_{bd} [(k_1 + k_3)^2 - \mu^2] + \delta_{ad} \delta_{bc} [(k_1 + k_4)^2 - \mu^2] \right\} \\
&= \delta_{ab} \delta_{cd} M_A + \delta_{ac} \delta_{bd} M_B + \delta_{ad} \delta_{bc} M_C. \tag{D.8}
\end{aligned}$$

A amplitude relativa aos gráficos da família II é dada genericamente por

$$i^3 \mathcal{T} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \bar{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(k'^2 - \mu^2)} \frac{1}{(\bar{k}^2 - \mu^2)(\bar{k}'^2 - \mu^2)} T_{ab}^{(1)} M_{abcd} T_{cd}^{(2)}, \tag{D.9}$$

onde $T_{ab}^{(1)}$ e $T_{cd}^{(2)}$ são dados de acordo com as convenções do apêndice C, equações (C.1) e (C.2). Resolvendo a estrutura de isospin, temos

$$\begin{aligned}
T_{ab}^{(1)} M_{abcd} T_{cd}^{(2)} &= \left[\delta_{ab} T^{(1)+} - i \epsilon_{bae} \tau_e^{(1)} T^{(1)-} \right] \left[\delta_{ab} \delta_{cd} M_A + \delta_{ac} \delta_{bd} M_B + \delta_{ad} \delta_{bc} M_C \right] \\
&\times \left[\delta_{cd} T^{(2)+} + i \epsilon_{dcf} \tau_f^{(2)} T^{(2)-} \right] \\
&= \left[T^{(1)+} \left(3M_A + M_B + M_C \right) \delta_{cd} - i T^{(1)-} \left(\epsilon_{dce} M_B + \epsilon_{cde} M_C \right) \tau_e^{(1)} \right] \\
&\times \left[\delta_{cd} T^{(2)+} + i \epsilon_{dcf} \tau_f^{(2)} T^{(2)-} \right] \\
&= \left[T^{(1)+} \left(3M_A + M_B + M_C \right) \delta_{cd} - i \epsilon_{dce} \tau_e^{(1)} T^{(1)-} \left(M_B - M_C \right) \right] \\
&\times \left[\delta_{cd} T^{(2)+} + i \epsilon_{dcf} \tau_f^{(2)} T^{(2)-} \right] \\
&= 3 T^{(1)+} T^{(2)+} (3M_A + M_B + M_C) + 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} T^{(1)-} T^{(2)-} (M_B - M_C).
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Assim, escrevemos $\mathcal{T}$ como

$$\mathcal{T} = 3 \mathcal{T}^+ + 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \mathcal{T}^-, \tag{D.11}$$

onde

$$\mathcal{T}^+ = i \int [\dots] \int [\bar{\dots}] T^{(1)+} T^{(2)+} (3M_A + M_B + M_C), \tag{D.12}$$

$$\mathcal{T}^- = i \int [\dots] \int [\bar{\dots}] T^{(1)-} T^{(2)-} (M_B - M_C), \tag{D.13}$$

$$\int [\dots] = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(Q - q/2)^2 - \mu^2][(Q + q/2)^2 - \mu^2]}, \tag{D.14}$$

$$\int [\bar{\dots}] = \int \frac{d^4 \bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(\bar{Q} - q/2)^2 - \mu^2][(\bar{Q} + q/2)^2 - \mu^2]}. \tag{D.15}$$

Podemos notar que, no que se refere à integração de *loop*, a amplitude $T^{(1)\pm}$ depende apenas de Q , enquanto que $T^{(2)\pm}$, apenas de $\bar{Q}$. Isso permite que as amplitudes $\mathcal{T}^\pm$ sejam expressas em termos de produtos das integrais de um *loop*, definidas no apêndice B.

Através das figuras, identificamos os momentos que fluem na amplitude $\pi\pi$ intermediária:

$$k_1 = k, \quad k_2 = -k', \quad k_3 = -\bar{k}, \quad k_4 = \bar{k}'. \quad (\text{D.16})$$

Usando

$$Q = (k + k')/2, \quad \bar{Q} = (\bar{k} + \bar{k}')/2, \quad q = k' - k = \bar{k}' - \bar{k} = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2, \quad (\text{D.17})$$

$$k = Q - q/2, \quad k' = Q + q/2, \quad \bar{k} = \bar{Q} - q/2, \quad \bar{k}' = \bar{Q} + q/2, \quad (\text{D.18})$$

temos

$$M_A = \frac{i}{f_\pi^2} [(k - k')^2 - \mu^2] = \frac{i}{f_\pi^2} (q^2 - \mu^2), \quad (\text{D.19})$$

$$M_B = \frac{i}{f_\pi^2} [(k - \bar{k})^2 - \mu^2] = \frac{i}{f_\pi^2} (Q^2 + \bar{Q}^2 - 2Q \cdot \bar{Q} - \mu^2), \quad (\text{D.20})$$

$$M_C = \frac{i}{f_\pi^2} [(k + \bar{k}')^2 - \mu^2] = \frac{i}{f_\pi^2} (Q^2 + \bar{Q}^2 + 2Q \cdot \bar{Q} - \mu^2), \quad (\text{D.21})$$

$$3M_A + M_B + M_C = \frac{i}{f_\pi^2} [2Q^2 + 2\bar{Q}^2 + (3q^2 - 5\mu^2)] \approx -\frac{i}{f_\pi^2} (\mu^2 - 2q^2), \quad (\text{D.22})$$

$$M_B - M_C = -\frac{i}{f_\pi^2} 4Q \cdot \bar{Q}. \quad (\text{D.23})$$

Definindo as integrais auxiliares

$$J_{(i)\pm}^{\mu_1\mu_2\cdots} = \int[\cdots] Q^{\mu_1} Q^{\mu_2} \cdots D^{(i)\pm}, \quad (\text{D.24})$$

$$K_{(i)\pm}^{\mu_1\mu_2\cdots} = \int[\cdots] Q^{\mu_1} Q^{\mu_2} \cdots B^{(i)\pm}, \quad (\text{D.25})$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \int[\cdots] Q^{\mu_1} Q^{\mu_2} \cdots T^{(i)\pm} &= \int[\cdots] Q^{\mu_1} Q^{\mu_2} \cdots \left[D^{(i)\pm} - \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\mu_0} (p'_i - p_i)^\lambda Q^{\mu_0} B^{(i)\pm} \right] \\ &= J_{(i)\pm}^{\mu_1\mu_2\cdots} - \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\mu_0} (p'_i - p_i)^\lambda K_{(i)\pm}^{\mu_0\mu_1\mu_2\cdots}. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Essas integrais auxiliares permitem-nos definir as funções de perfil para os diagramas da família II de forma bastante simples:

$$\mathcal{I}_{DD}^+ = \frac{1}{f_\pi^2} (\mu^2 - 2q^2) J_{(1)+} J_{(2)+}, \quad (\text{D.27})$$

$$\mathcal{I}_{DB}^{+\lambda} = \frac{1}{f_\pi^2} (\mu^2 - 2q^2) J_{(1)+} K_{(2)+}^\lambda, \quad (\text{D.28})$$

$$\mathcal{I}_{BD}^{+\lambda} = \frac{1}{f_\pi^2} (\mu^2 - 2q^2) K_{(1)+}^\lambda J_{(2)+}, \quad (\text{D.29})$$

$$\mathcal{I}_{BB}^{+\lambda\rho} = \frac{1}{f_\pi^2} (\mu^2 - 2q^2) K_{(1)+}^\lambda K_{(2)+}^\rho, \quad (\text{D.30})$$

$$\mathcal{I}_{DD}^- = \frac{4}{f_\pi^2} g_{\mu\nu} J_{(1)-}^\mu J_{(2)-}^\nu, \quad (\text{D.31})$$

$$\mathcal{I}_{DB}^{-\lambda} = \frac{4}{f_\pi^2} g_{\mu\nu} J_{(1)-}^\mu K_{(2)-}^{\lambda\nu}, \quad (\text{D.32})$$

$$\mathcal{I}_{DB}^{-\lambda} = \frac{4}{f_\pi^2} g_{\mu\nu} K_{(1)-}^{\lambda\mu} J_{(2)-}^\nu, \quad (\text{D.33})$$

$$\mathcal{I}_{BB}^{-\lambda\rho} = \frac{4}{f_\pi^2} g_{\mu\nu} K_{(1)-}^{\lambda\mu} K_{(2)-}^{\rho\nu}. \quad (\text{D.34})$$

As integrais $J_{(i)\pm}^{\mu_1\mu_2\cdots}$ e $K_{(i)\pm}^{\mu_1\mu_2\cdots}$ são calculadas a partir de suas definições, equações (D.24) e (D.25), de forma análoga às funções de perfil das famílias I e III. Os resultados, truncados de acordo com a ordem que estamos considerando para o potencial, são exibidos nas equações (4.30)–(4.36).

Apêndice E

A iteração do OPEP

Vimos, na seção 3.2, como o potencial se relaciona com uma amplitude calculável em teoria de campos. Em particular, as contribuições relativas ao diagrama do tipo caixa e a iteração do OPEP são dadas, respectivamente, por $\mathcal{M}^{(2)} G \mathcal{M}^{(2)}$ e $\mathcal{M}^{(2)} g \mathcal{M}^{(2)}$. O cálculo da última é feito usando as regras de Feynman aplicadas à primeira, mas substituindo o propagador G , definido em (3.25), por g , equação (3.32).

Figura E.1: Fluxo de momentos para o cálculo do diagrama caixa e da iteração do OPEP.

Com um acoplamento pseudoescalar, o diagrama caixa assume a seguinte forma¹:

$$\mathcal{M}^{(2)} G \mathcal{M}^{(2)} \Big|_{ps} = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{[(k-l)^2 - \mu^2]} \frac{i}{[(k-l')^2 - \mu^2]} \\ \times \left\{ \bar{u} g_{\pi N} \tau_b \gamma_5 \left[\frac{1}{2} \not{W} - \not{k} - m \right] g_{\pi N} \tau_a \gamma_5 u \right\}^{(1)} \left\{ \bar{u} g_{\pi N} \tau_b \gamma_5 \left[\frac{1}{2} \not{W} + \not{k} - m \right] g_{\pi N} \tau_a \gamma_5 u \right\}^{(2)}$$

¹Para evitar confusão com o propagador não-relativístico g usamos, apenas neste apêndice, $g_{\pi N}$ para a constante de acoplamento píon-núcleon.

$$\begin{aligned}
&= -g_{\pi N}^4 \left(3 - 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-l)^2 - \mu^2]} \frac{1}{[(k-l')^2 - \mu^2]} \\
&\times \bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)} \gamma_5^{(1)} \gamma_5^{(2)} G(k|W) \gamma_5^{(1)} \gamma_5^{(2)} u^{(1)} u^{(2)}
\end{aligned} \tag{E.1}$$

$$= \left(3 - 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) \mathcal{M}_{box}^{ps}. \tag{E.2}$$

Usando a equação de movimento para os espinores, a propriedade de anti-comutação da matriz γ_5 e fazendo a mudança $k \rightarrow k+l$, escrevemos $\mathcal{M}_{box}^{ps}$ como

$$\mathcal{M}_{box}^{ps} = i g_{\pi N}^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \mu^2]} \frac{1}{[(k+l-l')^2 - \mu^2]} \frac{[\bar{u} \not{k} u]^{(1)}}{[(p_1 - k)^2 - m^2]} \frac{[\bar{u} \not{k} u]^{(2)}}{[(p_2 + k)^2 - m^2]}. \tag{E.3}$$

Para a iteração do OPEP, usamos a expressão (E.1), substituindo G por g :

$$\mathcal{M}^{(2)} g \mathcal{M}^{(2)} = \left(3 - 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) \mathcal{M}_{it}, \tag{E.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{it} &= -g_{\pi N}^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-l)^2 - \mu^2]} \frac{1}{[(k-l')^2 - \mu^2]} \bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)} \gamma_5^{(1)} \gamma_5^{(2)} g(k|W) \gamma_5^{(1)} \gamma_5^{(2)} u^{(1)} u^{(2)} \\
&= -g_{\pi N}^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-l)^2 - \mu^2]} \frac{1}{[(k-l')^2 - \mu^2]} \\
&\times \frac{2\pi \delta(k_0)}{4\bar{E}(\mathbf{k})[E^2 - \bar{E}(\mathbf{k})^2 + i\epsilon]} \left\{ \bar{u} \gamma_5 [\not{\vec{k}}_- + m] \gamma_5 u \right\}^{(1)} \left\{ \bar{u} \gamma_5 [\not{\vec{k}}_+ + m] \gamma_5 u \right\}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Integrando em dk_0 e passando para o referencial do centro de massa, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{it} &= \frac{g_{\pi N}^4}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + \mu^2]} \frac{1}{[(\mathbf{k} - \mathbf{l}')^2 + \mu^2]} \frac{1}{\bar{E}(\mathbf{k})[\bar{E}(\mathbf{k})^2 - E^2 - i\epsilon]} \\
&\times \left\{ \bar{u} [\gamma_0 \bar{E}(\mathbf{k}) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - m] u \right\}^{(1)} \left\{ \bar{u} [\gamma_0 \bar{E}(\mathbf{k}) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - m] u \right\}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Este resultado é praticamente idêntico² ao de Partovi e Lomon.

No nosso TPEP usamos, nas sub-amplitudes πN , o acoplamento pseudovetorial, caracterizado por ser um acoplamento derivativo, de acordo com as idéias básicas da teoria de perturbação quiral. A diferença deste com relação ao acoplamento pseudoescalar (ps), apresentada no capítulo 2, é transferida para o TPEP, como mostra o cálculo do diagrama caixa- pv :

²As diferenças são a constante multiplicativa (dependente da definição da constante de acoplamento pión-núcleon) e a troca nos índices que identificam os núcleons.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(2)} G \mathcal{M}^{(2)} \Big|_{pv} &= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{[(k-l)^2 - \mu^2]} \frac{i}{[(k-l')^2 - \mu^2]} \\
&\times \left\{ \bar{u} \left[-\frac{g_{\pi N}}{2m} (\not{k} - \not{l}') \tau_b \gamma_5 \right] \frac{i}{\left[\frac{1}{2} \not{W} - \not{k} - m \right]} \left[\frac{g_{\pi N}}{2m} (\not{k} - \not{l}) \tau_a \gamma_5 \right] u \right\}^{(1)} \\
&\times \left\{ \bar{u} \left[\frac{g_{\pi N}}{2m} (\not{k} - \not{l}') \tau_b \gamma_5 \right] \frac{i}{\left[\frac{1}{2} \not{W} + \not{k} - m \right]} \left[-\frac{g_{\pi N}}{2m} (\not{k} - \not{l}) \tau_a \gamma_5 \right] u \right\}^{(2)} \\
&= (3 - 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \mathcal{M}_{box}^{pv}.
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Analogamente ao que fizemos para $\mathcal{M}_{box}^{ps}$, mas com um pouco mais de álgebra, chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{box}^{pv} &= i \left[\frac{g_{\pi N}}{2m} \right]^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \mu^2]} \frac{1}{[(k+l-l')^2 - \mu^2]} \\
&\times \left\{ \bar{u} \left[(\not{k} + 2m) + \frac{4m^2}{(p_1 - k)^2 - m^2} \not{k} \right] u \right\}^{(1)} \left\{ \bar{u} \left[(\not{k} - 2m) + \frac{4m^2}{(p_2 + k)^2 - m^2} \not{k} \right] u \right\}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{E.8}$$

A multiplicação dos termos com os propagadores pesados, $[(p_1 - k)^2 - m^2]^{-1}$ e $[(p_2 + k)^2 - m^2]^{-1}$, resulta em $\mathcal{M}_{box}^{ps}$, equação (E.3). A diferença, portanto, decorre das outras multiplicações, envolvendo integrais com nenhum ou um propagador pesado. Neste trabalho o cancelamento do corte de duas partículas, com limiar em $W = 2m$, envolve somente as integrais com dois propagadores pesados. Portanto, para falar deste cancelamento, usamos apenas $\mathcal{M}_{box}^{ps}$ (que, a partir de agora, será escrito como $\mathcal{M}_{us}$), mas deve ficar claro que tal amplitude tem suas origens no diagrama caixa- pv , e não que tenhamos calculado o diagrama caixa com acoplamento ps .

No caso da iteração do OPEP, usamos o acoplamento ps , resultando na equação (E.6). Embora fosse mais consistente usar o acoplamento pv , o cálculo com este ficaria mais complicado, e as diferenças seriam termos que se anulam quando o momento de integração for tal que $\mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = \mathbf{p}^2$, ou seja, quando os nucleons correspondentes a g estiverem na camada de massa. Alguns trabalhos afirmam que elas são pequenas³ [64], o que, de certa forma, justificaria o uso de (E.6) no nosso problema. O outro motivo de usarmos o acoplamento ps para o OPEP iterado é permitir a comparação numérica dos nossos resultados com o trabalho de Rocha e Robilotta [14], que usaram o mesmo procedimento.

A parte relevante no cancelamento da iteração no TPEP, representada pela amplitude $\mathcal{M}^{(2)}(G - g)\mathcal{M}^{(2)}$, é dada por

³Uma discussão sobre o assunto é feita na referência [95].

$$\hat{\mathcal{M}}_{us} = \left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) [\mathcal{M}_{us} - \mathcal{M}_{it}] . \quad (\text{E.9})$$

A amplitude $\mathcal{M}_{us}$ é escrita em termos de integrais do tipo caixa⁴. Estas, por sua vez, são integrais que contêm singularidades na região de integração. O denominador dessas integrais (equações (B.61) e (B.62)) é dado por (B.70),

$$P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2 = \left[a(1-a)(1-b) - \frac{a^2 b^2}{4} (1-c^2) \right] \mathbf{q}^2 + (1-ab)\mu^2 + a^2 b^2 \left[c^2 m^2 - (1-c^2) \mathbf{z}^2/4 \right] , \quad (\text{E.10})$$

onde a , b e c são parâmetros de Feynman, com a e b variando entre 0 e 1. Nas integrais do tipo caixa, c varia entre 0 e 1 e, dependendo dos valores de a e b , existe um valor para c tal que este denominador se anula. Tal singularidade é responsável pela dependência abrupta do diagrama caixa com a energia, na região próxima do limiar $W = 2m$. Adiante mostramos que $\mathcal{M}_{it}$ também contém integrais com essa característica (chamadas de Π_A , seção E.1), mas com o parâmetro c variando de 0 a ∞ . O efeito da subtração (E.9) é de cancelar a integração em c de 0 a 1, restando apenas o intervalo de 1 a ∞ , que não contém a singularidade mencionada.

Antes de observarmos o cancelamento, convém colocar as amplitudes $\mathcal{M}_{us}$ e $\mathcal{M}_{it}$ na forma da equação (3.61). Usando as variáveis definidas na seção 3.1, reescrevemos (E.3) como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{us} &= i \left[\frac{g_{\pi N}}{m} \right]^4 \frac{m^2}{4} \int [\dots] \frac{Q^\mu Q^\nu}{\mu^2} \left[\frac{2m\mu}{u-m^2} \bar{u} \gamma_\mu u \right]^{(1)} \left[\frac{2m\mu}{s-m^2} \bar{u} \gamma_\nu u \right]^{(2)} \\ &= [\bar{u} \gamma_\mu u]^{(1)} [\bar{u} \gamma_\nu u]^{(2)} I_{us}^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Usando a relação abaixo,

$$\bar{u} \gamma_\nu u = \bar{u} \left\{ \frac{(p' + p)_\nu}{2m} - \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu \right\} u \quad (\text{E.12})$$

obtemos

$$\mathcal{I}_{DD}]_{us} = -\frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g_{\pi N}}{m} \right]^4 \left[-\frac{z^4}{16m^4} \Pi_{us}^{(020)} + \frac{W^4}{16m^4} \Pi_{us}^{(002)} + \frac{W^2 - z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{us}^{(000)} \right] , \quad (\text{E.13})$$

$$\mathcal{I}_{DB}^{(w)}]_{us} = -\frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g_{\pi N}}{m} \right]^4 \left[\frac{W^2}{4m^2} \Pi_{us}^{(002)} + \bar{\Pi}_{us}^{(000)} \right] , \quad (\text{E.14})$$

$$\mathcal{I}_{DB}^{(z)}]_{us} = -\frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g_{\pi N}}{m} \right]^4 \left[\frac{z^2}{4m^2} \Pi_{us}^{(020)} + \bar{\Pi}_{us}^{(000)} \right] , \quad (\text{E.15})$$

⁴Neste trabalho diferenciamos os diagramas do tipo bolha, triângulo, cruzado e caixa, das integrais com o mesmo nome. As integrais são classificadas de acordo com os denominadores que aparecem no integrando, tal como feito no apêndice B.

$$\mathcal{I}_{BB}^{(g)}\Big|_{us} = -\frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g_{\pi N}}{m} \right]^4 \left[\bar{\Pi}_{us}^{(000)} \right] , \quad (\text{E.16})$$

$$\mathcal{I}_{BB}^{(w)}\Big|_{us} = -\frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g_{\pi N}}{m} \right]^4 \left[\Pi_{us}^{(002)} \right] , \quad (\text{E.17})$$

$$\mathcal{I}_{BB}^{(z)}\Big|_{us} = -\frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g_{\pi N}}{m} \right]^4 \left[\Pi_{us}^{(020)} \right] . \quad (\text{E.18})$$

Quanto à iteração do OPEP, dada por (E.6), usamos

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k} + \mathbf{z}/2 , \quad (\text{E.19})$$

$$\bar{E} = \sqrt{(\mathbf{Q} - \mathbf{z}/2)^2 + m^2} \quad (\text{E.20})$$

e as relações

$$(\bar{u}\gamma^0 u)^{(1)} = \frac{m}{E} \left[(\bar{u}u)^{(1)} + \frac{\gamma^i}{2m} (\bar{u} z^i u)^{(1)} \right] , \quad (\text{E.21})$$

$$(\bar{u}\gamma^0 u)^{(2)} = \frac{m}{E} \left[(\bar{u}u)^{(2)} - \frac{\gamma^i}{2m} (\bar{u} z^i u)^{(2)} \right] , \quad (\text{E.22})$$

para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{it} &= -\frac{i}{4} \left(\frac{g_{\pi N}^2}{m} \right)^2 m^2 \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{i}{[(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2][(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2][\bar{E}^2 - E^2] \bar{E}} \\ &\times \left\{ \bar{u} \left[\bar{E} \frac{m}{E} \left(1 + \frac{1}{2m} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{z} \right) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\mathbf{Q} - \frac{\mathbf{z}}{2} \right) - m \right] u \right\}^{(1)} \\ &\times \left\{ \bar{u} \left[\bar{E} \frac{m}{E} \left(1 - \frac{1}{2m} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{z} \right) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\mathbf{Q} - \frac{\mathbf{z}}{2} \right) - m \right] u \right\}^{(2)} \\ &= -\frac{i}{4} \left(\frac{g_{\pi N}^2}{m} \right)^2 m^4 \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{i}{[(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2][(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2][\bar{E}^2 - E^2] \bar{E}} \\ &\times \left\{ \bar{u} \left[\left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\frac{\mu}{m} \frac{\mathbf{Q}}{\mu} + \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right) \frac{\mathbf{z}}{2m} \right) \right] u \right\}^{(1)} \\ &\times \left\{ \bar{u} \left[\left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\frac{\mu}{m} \frac{\mathbf{Q}}{\mu} + \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right) \frac{\mathbf{z}}{2m} \right) \right] u \right\}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{4} \left(\frac{g_{\pi N}^2}{m} \right)^2 \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{im}{[(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2][(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2]} \frac{m^3}{[\bar{E}^2 - E^2] \bar{E}} \\
&\times \left\{ (\bar{u}u)^{(1)}(\bar{u}u)^{(2)} \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right)^2 \right. \\
&- \left[(\bar{u}u)^{(1)}(\bar{u}\gamma^i u)^{(2)} - (\bar{u}\gamma^i u)^{(1)}(\bar{u}u)^{(2)} \right] \left[\frac{\mu}{m} \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right) \frac{\mathbf{Q}^i}{\mu} + \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right)^2 \frac{\mathbf{z}^i}{2m} \right] \\
&- (\bar{u}\gamma^i u)^{(1)}(\bar{u}\gamma^j u)^{(2)} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 \frac{Q^i Q^j}{\mu^2} + \frac{\mu}{m} \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right) \left(\frac{Q^i z^j + z^i Q^j}{2m\mu} \right) \right. \\
&\left. \left. + \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right)^2 \frac{z^i z^j}{(2m)^2} \right] \right\} . \tag{E.23}
\end{aligned}$$

Agora definimos

$$\int(\cdots) = \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{m}{[(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2][(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2]} , \tag{E.24}$$

$$I_A^{i\cdots} = i \int(\cdots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{m^3}{E[\bar{E}^2 - E^2]} , \tag{E.25}$$

$$I_B^{i\cdots} = i \int(\cdots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{m^3}{E^2 \bar{E}} , \tag{E.26}$$

$$I_C^{i\cdots} = i \int(\cdots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{m^3}{E \bar{E}[\bar{E} + E]} = I_A^{i\cdots} - I_D^{i\cdots} , \tag{E.27}$$

$$I_D^{i\cdots} = i \int(\cdots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{m^3}{\bar{E}[\bar{E}^2 - E^2]} , \tag{E.28}$$

$$i \int(\cdots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{m^3}{[\bar{E}^2 - E^2] \bar{E}} \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right)^2 = I_B^{i\cdots} - 2 I_C^{i\cdots} , \tag{E.29}$$

$$i \int(\cdots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{m^3}{[\bar{E}^2 - E^2] \bar{E}} \left(\frac{\bar{E}}{E} - 1 \right) = I_C^{i\cdots} , \tag{E.30}$$

$$i \int(\cdots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{m^3}{[\bar{E}^2 - E^2] \bar{E}} \frac{\bar{E}}{E} = I_A^{i\cdots} . \tag{E.31}$$

Note que as integrais $I_A^{i\cdots}$ e $I_D^{i\cdots}$ possuem uma singularidade na região de integração que satisfaz

($\bar{E} = E$).

Escrevemos $\mathcal{M}_{it}$ em função das integrais acima,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{it} = & -\frac{i}{4} \left(\frac{g_{\pi N}^2}{m} \right)^2 \left\{ (\bar{u}u)^{(1)}(\bar{u}u)^{(2)}(I_B - 2I_C) \right. \\
& - \left[(\bar{u}u)^{(1)}(\bar{u}\gamma^i u)^{(2)} - (\bar{u}\gamma^i u)^{(1)}(\bar{u}u)^{(2)} \right] \left[\frac{\mu}{m} I_C^i + \frac{z^i}{2m} (I_B - 2I_C) \right] \\
& - (\bar{u}\gamma^i u)^{(1)}(\bar{u}\gamma^j u)^{(2)} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 (I_A^{ij} - I_C^{ij}) + \frac{\mu}{m} \left(\frac{z^i}{2m} I_C^j + \frac{z^j}{2m} I_C^i \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{z^i z^j}{(2m)^2} (I_B - 2I_C) \right] \right\}. \tag{E.32}
\end{aligned}$$

As integrais $I_A^{i\cdots}$, $I_B^{i\cdots}$, $I_C^{i\cdots}$ e $I_D^{i\cdots}$ obedecem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi^{000}, \\
I^i &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{q^i}{\mu} \Pi^{100} + \frac{z^i}{2m} \Pi^{010} \right], \\
I^{ij} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{q^i q^j}{\mu^2} \Pi^{200} + \frac{(q^i z^j + z^i q^j)}{2m\mu} \Pi^{110} + \frac{z^i z^j}{4m^2} \Pi^{020} + g^{ij} \bar{\Pi}^{000} \right\}. \tag{E.33}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{it} = & \frac{g_{\pi N}^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(2m)^2} \left\{ (\bar{u}u)^{(1)}(\bar{u}u)^{(2)}(\Pi_B^{000} - 2\Pi_C^{000}) \right. \\
& + \frac{1}{2m} \left[(\bar{u}u)^{(1)}(\bar{u} \not{z} u)^{(2)} - (\bar{u} \not{z} u)^{(1)}(\bar{u}u)^{(2)} \right] \left[\frac{\mu}{m} \Pi_C^{010} + (\Pi_B^{000} - 2\Pi_C^{000}) \right] \\
& - \frac{1}{(2m)^2} (\bar{u} \not{z} u)^{(1)}(\bar{u} \not{z} u)^{(2)} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 (\Pi_A^{020} - \Pi_C^{020}) + \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{010} + (\Pi_B^{000} - 2\Pi_C^{000}) \right] \\
& \left. + \left[(\bar{u}\gamma^0 u)^{(1)}(\bar{u}\gamma^0 u)^{(2)} - (\bar{u}\gamma^\mu u)^{(1)}(\bar{u}\gamma_\mu u)^{(2)} \right] \left(\frac{\mu}{m} \right)^2 (\bar{\Pi}_A^{000} - \bar{\Pi}_C^{000}) \right\}. \tag{E.34}
\end{aligned}$$

Para escrevermos $\mathcal{M}_{it}$ na mesma forma dada por (3.61), usamos (E.12) e as relações abaixo,

$$\frac{i}{2m} [\bar{u}u]^{(1)} [\bar{u}\sigma_{\mu\lambda}(p' - p)^\mu u]^{(2)} \frac{(W - z)^\lambda}{2m}$$

$$= \frac{i}{2m} [\bar{u} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \frac{(W + z)^\lambda}{2m} = -\frac{q^2}{4m^2} [\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)}, \quad (\text{E.35})$$

$$\begin{aligned} (\bar{u} \gamma_0 u)^{(1)} (\bar{u} \gamma_0 u)^{(2)} &= \frac{W^\mu W^\nu}{W^2} (\bar{u} \gamma_\mu u)^{(1)} (\bar{u} \gamma_\nu u)^{(2)} \\ &= [\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \left[\frac{W^2}{4m^2} + 2 \frac{q^2}{4m^2} \right] \\ &\quad - \frac{i}{2m} \left\{ [\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u]^{(2)} - [\bar{u} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \right\} \frac{z^\lambda}{2m} \\ &\quad - \frac{1}{4m^2} [\bar{u} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u]^{(1)} [\bar{u} \sigma_{\nu\rho} (p' - p)^\nu u]^{(2)} \frac{W^\lambda W^\rho}{4m^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Assim, dado $\mathcal{M}_{it}$ na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{it} &= (\bar{u} u)^{(1)} (\bar{u} u)^{(2)} A_1 + \left[(\bar{u} u)^{(1)} (\bar{u} \gamma_\mu u)^{(2)} - (\bar{u} \gamma_\mu u)^{(1)} (\bar{u} u)^{(2)} \right] \frac{z^\mu}{2m} A_2 \\ &\quad + (\bar{u} \gamma_\mu u)^{(1)} (\bar{u} \gamma_\nu u)^{(2)} \frac{z^\mu z^\nu}{4m^2} A_3 + \left[(\bar{u} \gamma^\mu u)^{(1)} (\bar{u} \gamma_\mu u)^{(2)} - (\bar{u} \gamma_0 u)^{(1)} (\bar{u} \gamma_0 u)^{(2)} \right] A_4, \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{it} &= [\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \left[A_1 - 2 \frac{z^2}{4m^2} A_2 - \left(\frac{z^2}{4m^2} \right)^2 A_3 - \frac{z^2}{4m^2} A_4 \right] \\ &\quad - \frac{i}{2m} \left\{ [\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u]^{(2)} - [\bar{u} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \right\} \frac{z^\lambda}{2m} \left[A_2 + \frac{z^2}{4m^2} A_3 + A_4 \right] \\ &\quad - \frac{1}{4m^2} [\bar{u} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u]^{(1)} [\bar{u} \sigma_{\nu\rho} (p' - p)^\nu u]^{(2)} \left[\frac{z^\lambda z^\rho}{4m^2} A_3 + \left(g^{\lambda\rho} - \frac{W^\lambda W^\rho}{4m^2} \frac{4m^2}{W^2} \right) A_4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

Comparando com a equação (3.61) e usando as equações (E.34) e (E.38) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{DD}]_{it} &= \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \frac{\mu^2}{m^2} \left(\frac{z^4}{16m^4} \Pi_A^{(020)} + \frac{z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_A^{(000)} \right) + \left(1 - \frac{z^2}{4m^2} \right)^2 \left(\Pi_B^{(000)} - 2 \Pi_C^{(000)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z^2}{4m^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \bar{\Pi}_C^{(000)} + \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)} \right) - \frac{z^4}{16m^4} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \Pi_C^{(020)} - \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)} \right) \right\}, \quad (\text{E.39}) \\ \mathcal{I}_{DB}^{(z)}]_{it} &= \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ -\frac{\mu^2}{m^2} \left(\frac{z^2}{4m^2} \Pi_A^{(020)} + \bar{\Pi}_A^{(000)} \right) + \frac{\mu^2}{m^2} \bar{\Pi}_C^{(000)} + \frac{\mu}{m} \Pi_C^{(010)} \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(1 - \frac{z^2}{4m^2}\right) \left(\Pi_B^{(000)} - 2 \Pi_C^{(000)}\right) + \frac{z^2}{4m^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \Pi_C^{(020)} - \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)}\right) \Bigg\} , \quad (\text{E.40})$$

$$\mathcal{I}_{BB}^{(g)}]_{it} = -\frac{W^2}{4m^2} \mathcal{I}_{BB}^{(w)}]_{it} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m}\right]^4 \left\{ \frac{\mu^2}{m^2} [-\bar{\Pi}_A^{(000)} + \bar{\Pi}_C^{(000)}] \right\} , \quad (\text{E.41})$$

$$\mathcal{I}_{BB}^{(z)}]_{it} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m}\right]^4 \left\{ -\frac{\mu^2}{m^2} \Pi_A^{(020)} + \frac{\mu^2}{m^2} \Pi_C^{(020)} - \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)} - \Pi_B^{(000)} + 2 \Pi_C^{(000)} \right\} . \quad (\text{E.42})$$

As integrais acima são obtidas aplicando a parametrização de Feynman nas equações (E.25)–(E.28), tal como feito no apêndice C para as integrais de um *loop*. Devido às diferentes estruturas e importâncias na subtração vamos tratar cada uma delas separadamente.

E.1 Integrais $I_A^{i\cdots}$

Para as integrais desse tipo temos

$$I_A^{i\cdots} = i \frac{m^4}{E} \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{a}{[Q^2 + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Q} + \Sigma_A^2]^3} , \quad (\text{E.43})$$

$$\mathbf{P}_I = C_q \mathbf{q} - C_b \mathbf{z} , \quad (\text{E.44})$$

$$\Sigma_A^2 = (1 - ab) \left[\frac{\mathbf{q}^2}{4} + \mu^2 \right] + ab \left[\frac{\mathbf{z}^2}{4} + m^2 - E^2 \right] = \Sigma_{sc}^2 . \quad (\text{E.45})$$

Inicialmente fazemos a integração angular, que nos fornece

$$\int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[Q^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \Sigma^2]^n} = \frac{8}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma^2 - \mathbf{P}^2]^n} , \quad (\text{E.46})$$

$$\int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{Q^i}{[Q^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \Sigma^2]^n} = \frac{8}{(4\pi)^2} (-P^i) \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma^2 - \mathbf{P}^2]^n} , \quad (\text{E.47})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{Q^i Q^j}{[Q^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \Sigma^2]^n} &= \frac{8}{(4\pi)^2} \left[-g^{ij} \frac{\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma^2 - \mathbf{P}^2]^{n-1}} \right. \\ &\quad \left. + (-P^i)(-P^j) \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma^2 - \mathbf{P}^2]^n} \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

Logo,

$$\Pi_A^{mn0} = \frac{4m^4}{E} \left(\frac{2m}{\mu} \right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ (-C_q)^m (C_b)^n \frac{a}{[Q^2 + \Sigma_{sc}^2 - \mathbf{P}_I^2]^2} , \quad (\text{E.49})$$

Para a integral $\bar{\Pi}_A^{mn0}$ usamos

$$\int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma^2 - \mathbf{P}^2]^n} = \frac{\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{dQ}{[Q^2 + \Sigma^2 - \mathbf{P}^2]^{n-1}}, \quad (\text{E.50})$$

que nos permite escrevê-la de duas maneiras,

$$\bar{\Pi}_A^{mn0} = -\frac{1}{2\mu^2} \frac{4m^4}{E} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ (-C_q)^m (C_b)^n \frac{a}{[Q^2 + \Sigma_{sc}^2 - \mathbf{P}_I^2]} \quad (\text{E.51})$$

$$= -\frac{1}{2\mu^2} \frac{8m^4}{E} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ (-C_q)^m (C_b)^n \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_{sc}^2 - \mathbf{P}_I^2]^2}. \quad (\text{E.52})$$

Fazendo a mudança de variável $Q = (abE)c$ temos

$$Q^2 - \mathbf{P}_I^2 = 4C_c^2 E^2 - C_q^2 \mathbf{q}^2 - C_b^2 \mathbf{z}^2 = C_c^2 W^2 + C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 = P_{us}^2 \quad (\text{E.53})$$

e

$$\Pi_A^{mn0} = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 (2m\mu)^2 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc (-C_q)^m (C_b)^n \frac{a^2 b}{[P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2]^2}, \quad (\text{E.54})$$

$$\bar{\Pi}_A^{mn0} = -\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{(2m\mu)^2}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc (-C_q)^m (C_b)^n \frac{a^2 b}{[P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2]} \quad (\text{E.55})$$

$$= -\left(\frac{E}{\mu}\right)^2 (2m\mu)^2 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{n+2} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \times (-C_q)^m (C_b)^n (C_c)^2 \frac{a^2 b}{[P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2]^2}. \quad (\text{E.56})$$

Observe que as integrais acima têm a mesma estrutura que as integrais do tipo caixa, eqs. (B.61) e (B.62), a diferença sendo os extremos de integração na variável c .

É mais conveniente escrevermos as integrais acima como

$$\Pi_A^{lmn} = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 [\Pi_{us}^{lmn} + \Pi_{reg}^{lmn}], \quad \bar{\Pi}_A^{lmn} = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 [\bar{\Pi}_{us}^{lmn} + \bar{\Pi}_{reg}^{lmn}], \quad (\text{E.57})$$

onde

$$\Pi_{reg}^{lmn} = (2m\mu)^2 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_1^\infty dc (-C_q)^l (C_b)^m (C_c)^n \frac{a^2 b}{[P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2]^2}, \quad (\text{E.58})$$

$$\bar{\Pi}_{reg}^{lmn} = -\frac{(2m\mu)^2}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^{m+n} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_1^\infty dc (-C_q)^l (C_b)^m (C_c)^n \frac{a^2 b}{[P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2]}. \quad (\text{E.59})$$

Convém agora observar que, ao contrário das integrais Π_{us} e Π_A , em Π_{reg} o denominador do integrando não se anula na região de integração. Podemos escrever a equação (B.70) como

$$P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2 = -a(1-a)(1-b)q^2 + (1-ab)\mu^2 + a^2b^2c^2m^2 - a^2b^2(1-c^2) \left(\frac{W^2}{4} - m^2 \right), \quad (\text{E.60})$$

que no referencial do centro de massa fica

$$P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2 = a(1-a)(1-b)\mathbf{q}^2 + (1-ab)\mu^2 + a^2b^2c^2m^2 - a^2b^2(1-c^2) (E^2 - m^2). \quad (\text{E.61})$$

Na equação acima fica evidente que o denominador se anula para um determinado valor de c entre 0 e 1 pois $E \leq m$. Tal singularidade do integrando surge no diagrama caixa e na iteração do OPEP. A subtração do OPEP na amplitude de espalhamento tem o efeito de remover a singularidade do diagrama caixa na obtenção do potencial, tal como feito no trabalho de Partovi e Lomon.

Comparando as equações (E.55) e (E.56) notamos que

$$\frac{\mu^2}{m^2} \left[\frac{W^2}{4m^2} \Pi_A^{002} + \bar{\Pi}_A^{000} \right] = \frac{W^2}{4m^2} (\Pi_{us}^{002} + \Pi_{reg}^{002}) + (\bar{\Pi}_{us}^{000} + \bar{\Pi}_{reg}^{000}) = 0. \quad (\text{E.62})$$

Com essas informações obtemos as integrais $\hat{\mathcal{I}}_{xx}]_{us} = \mathcal{I}_{xx}]_{us} - \mathcal{I}_{xx}]_{it}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}_{DD}]_{us} &= \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ - \left(\frac{z^2}{4m^2} \right)^2 \Pi_{reg}^{(020)} - \frac{z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} + \left(\frac{W^2}{4m^2} \right)^2 \Pi_{reg}^{(002)} + \frac{W^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right. \\ &\quad - \left(1 - \frac{z^2}{4m^2} \right)^2 (\Pi_B^{(000)} - 2 \Pi_C^{(000)}) + \frac{z^2}{4m^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \bar{\Pi}_C^{(000)} + \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)} \right) \\ &\quad \left. + \frac{z^4}{16m^4} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \Pi_C^{(020)} - \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.63})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(002)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right\}, \quad (\text{E.64})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)}]_{us} &= \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(020)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} - \frac{\mu^2}{m^2} \bar{\Pi}_C^{(000)} - \frac{\mu}{m} \Pi_C^{(010)} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{z^2}{4m^2} \right) (\Pi_B^{(000)} - 2 \Pi_C^{(000)}) - \frac{z^2}{4m^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \Pi_C^{(020)} - \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.65})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} - \frac{\mu^2}{m^2} \bar{\Pi}_C^{(000)} \right\}, \quad (\text{E.66})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \Pi_{reg}^{(002)} + \frac{\mu^2}{m^2} \frac{4m^2}{W^2} \bar{\Pi}_C^{(000)} \right\}, \quad (\text{E.67})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(z)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \Pi_{reg}^{(020)} - \frac{\mu^2}{m^2} \Pi_C^{(020)} + \frac{2\mu}{m} \Pi_C^{(010)} + \Pi_B^{(000)} - 2 \Pi_C^{(000)} \right\}. \quad (\text{E.68})$$

E.2 Integrais $I_B^{i\cdots}$ e $I_C^{i\cdots}$

As integrais do tipo $I_C^{i\cdots}$ são obtidas a partir das integrais $I_D^{i\cdots}$, equação (E.27), onde podemos usar a parametrização de Feynman mais facilmente. Como $\bar{E}$ envolve uma raiz quadrada, contornamos essa dificuldade com o seguinte truque:

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E d\epsilon}{(\mathbf{Q} - \mathbf{z}/2)^2 + m^2 + E^2 \epsilon^2}. \quad (\text{E.69})$$

Logo as integrais $I_B^{i\cdots}$ e $I_C^{i\cdots}$ podem ser expressas como

$$I_B^{i\cdots} = i \frac{m^4 \Gamma(3)}{\pi E} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{a}{[\mathbf{Q}^2 + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Q} + \Sigma_B^2]^3}, \quad (\text{E.70})$$

$$I_D^{i\cdots} = i \frac{m^4 E \Gamma(4)}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \times \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \left(\frac{Q^i}{\mu} \cdots \right) \frac{a^2 b}{[\mathbf{Q}^2 + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Q} + \Sigma_D^2]^4}, \quad (\text{E.71})$$

onde $\mathbf{P}_I$ está definido na equação (E.44) e

$$\Sigma_B^2 = (1 - ab) \left[\frac{\mathbf{q}^2}{4} + \mu^2 \right] + ab \left[\frac{\mathbf{z}^2}{4} + m^2 + E^2 \epsilon^2 \right] = \Sigma_{sc}^2 + ab E^2 (1 + \epsilon^2), \quad (\text{E.72})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_D^2 &= (1 - ab) \left[\frac{\mathbf{q}^2}{4} + \mu^2 \right] + ab \left[\frac{\mathbf{z}^2}{4} + m^2 - E^2 \right] + ab \lambda E^2 (1 + \epsilon^2) \\ &= \Sigma_{sc}^2 + ab \lambda E^2 (1 + \epsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{E.73})$$

Fazendo a integração angular e comparando com a equação (E.33) temos

$$\Pi_B^{mn0} = \frac{4m^4}{\pi E} \left(\frac{2m}{\mu} \right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (-C_q)^m (C_b)^n \frac{a}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^2}, \quad (\text{E.74})$$

$$\begin{aligned} \Pi_D^{mn0} &= 4\Gamma(3) \frac{m^4 E}{\pi} \left(\frac{2m}{\mu} \right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \\ &\quad \times (-C_q)^m (C_b)^n \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \mathbf{P}_I^2]^3}, \end{aligned} \quad (\text{E.75})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_D^{mn0} = & -\frac{4\Gamma(2)}{2\mu^2} \frac{m^4 E}{\pi} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \\ & \times (-C_q)^m (C_b)^n \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \mathbf{P}_I^2]^2} . \quad (\text{E.76}) \end{aligned}$$

Para Π_D e $\bar{\Pi}_D$ a integração em λ resulta em

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^1 \frac{d\lambda}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \mathbf{P}_I^2]^n} \\ &= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{d\epsilon}{ab E^2 (1+\epsilon^2)} \left[\frac{1}{[Q^2 + \Sigma_A^2 - \mathbf{P}_I^2]^{n-1}} - \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^{n-1}} \right] \\ &= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} \frac{1}{ab E^2} \left[\frac{\pi}{[Q^2 + \Sigma_A^2 - \mathbf{P}_I^2]^{n-1}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(1+\epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^{n-1}} \right] . \quad (\text{E.77}) \end{aligned}$$

Na última passagem usamos o fato de Σ_A^2 não depender de ϵ .

O resultado acima permite-nos escrever

$$\begin{aligned} \Pi_D^{mn0} = & \frac{4m^4}{\pi E} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^{\infty} dQ (-C_q)^m (C_b)^n \\ & \times \left[\frac{\pi a}{[Q^2 + \Sigma_A^2 - \mathbf{P}_I^2]^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(1+\epsilon^2)} \frac{a}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^2} \right] , \quad (\text{E.78}) \end{aligned}$$

e de maneira análoga para $\bar{\Pi}_D^{mn0}$.

Comparando com as equações (E.49) e (E.51) podemos usar a relação (E.27) para obter as seguintes expressões para os Π_C 's:

$$\begin{aligned} \Pi_C^{mn0} = & \frac{4m^4}{\pi E} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^{\infty} dQ (-C_q)^m (C_b)^n \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(1+\epsilon^2)} \frac{a}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^2} , \quad (\text{E.79}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_C^{mn0} = & -\frac{1}{2\mu^2} \frac{4m^4}{\pi E} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^{\infty} dQ (-C_q)^m (C_b)^n \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(1+\epsilon^2)} \frac{a}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^2} . \quad (\text{E.80}) \end{aligned}$$

Para simplificar as expressões das integrais Π_B e Π_C temos que manipular a seguinte integral,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\pi E} \int_0^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(1 + \alpha^2 \epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^n} \\
&= \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(1 + \alpha^2 \epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^n} \quad (\alpha = 0 \text{ ou } 1) . \quad (E.81)
\end{aligned}$$

Primeiro usamos $Q = \sqrt{ab} E \sigma$:

$$I = \frac{\sqrt{ab}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\sigma \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(1 + \alpha^2 \epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_B^2 - \mathbf{P}_I^2]^n} . \quad (E.82)$$

Em seguida mudamos para coordenadas polares,

$$I = \frac{\sqrt{ab}}{2\pi} \int_0^\infty y dy \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \alpha^2 y^2 \cos^2 \theta)} \frac{1}{D^n} \quad (E.83)$$

onde

$$\begin{aligned}
D &= ab E^2 y^2 \sin^2 \theta + \Sigma_{sc}^2 + ab E^2 (1 + y^2 \cos^2 \theta) - C_q^2 \mathbf{q}^2 - C_b^2 \mathbf{z}^2 \\
&= \Sigma_{sc}^2 + ab E^2 (1 + y^2) + C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 . \quad (E.84)
\end{aligned}$$

A integração sobre θ pode ser feita por resíduos. O resultado

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \alpha^2 y^2 \cos^2 \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \alpha^2 y^2}} \quad (E.85)$$

permite-nos escrever

$$I = \sqrt{ab} \int_0^\infty dy \frac{y}{\sqrt{1 + \alpha^2 y^2}} \frac{1}{D^n} . \quad (E.86)$$

Com a seguinte mudança de variável,

$$y^2 + 1 = \frac{ab}{u^2}, \quad \int_0^\infty y dy = \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{ab}{u^3} du, \quad (E.87)$$

obtemos

$$I = ab \int_0^{\sqrt{ab}} \sqrt{\frac{ab}{(1 - \alpha^2) + \alpha^2 ab/u^2}} \frac{du}{u^3 D^n} . \quad (E.88)$$

Com isso, D torna-se igual a $P_{us}^2 + \Sigma_{sc}^2$, substituindo $1/u$ no lugar da variável c . Por fim chegamos aos resultados

$$\Pi_B^{mn0} = 4m^4 \left(\frac{2m}{\mu} \right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db a^2 b (-C_q)^m (C_b)^n \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{du}{D^2} \frac{\sqrt{ab}}{u^3}, \quad (\text{E.89})$$

$$\Pi_C^{mn0} = 4m^4 \left(\frac{2m}{\mu} \right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db a^2 b (-C_q)^m (C_b)^n \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{du}{D^2} \frac{1}{u^2}, \quad (\text{E.90})$$

$$\bar{\Pi}_C^{mn0} = -\frac{4m^4}{2\mu^2} \left(\frac{2m}{\mu} \right)^n \int_0^1 da \int_0^1 db a^2 b (-C_q)^m (C_b)^n \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{du}{D} \frac{1}{u^2}. \quad (\text{E.91})$$

E.3 Expansão até ordem q^4

As expressões dadas em (E.63)–(E.68) são simplesmente os resultados de Partovi e Lomon reescritos na nossa notação, sem aproximações. Neste trabalho fazemos a expansão da iteração até ordem q^4 (mais especificamente, das integrais Π_B e Π_C), o que nos leva a expressões mais simples.

Antes de apresentarmos a expansão mostraremos algumas relações necessárias para a simplificação do resultado. Essas relações são análogas às apresentadas no apêndice F, onde desprezamos integrais de curto alcance. Estas últimas são integrais do tipo

$$\int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \dots \right) \left[(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2 \right]^m \left[(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2 \right]^n \quad (\text{E.92})$$

com m e n inteiros maiores que zero. Uma vez que

$$\mathbf{Q}^2 = \frac{1}{2} \left\{ [(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2] + [(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2] \right\} - \frac{\mathbf{q}^2}{4} - \mu^2, \quad (\text{E.93})$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \left\{ [(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2] - [(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2] \right\}, \quad (\text{E.94})$$

podemos fazer as seguintes aproximações:

$$\int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \dots \right) (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{q}^2/4)^n \approx (-1)^n \left(\mu^2 + \frac{\mathbf{q}^2}{2} \right)^n \int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \dots \right), \quad (\text{E.95})$$

$$\int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \dots \right) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q})^n \approx 0. \quad (\text{E.96})$$

Note ainda que, devido à simetria $\mathbf{Q} \rightarrow -\mathbf{Q}$ do denominador,

$$\int(\dots) \left(\frac{Q^{i_1}}{\mu} \frac{Q^{i_2}}{\mu} \dots \frac{Q^{i_n}}{\mu} \right) = 0 \quad \text{para } n \text{ ímpar.} \quad (\text{E.97})$$

Para obtermos as relações, vamos analisar a decomposição tensorial da seguinte integral:

$$\begin{aligned}
-i(4\pi)^2 I_a^{ijkl} &= (4\pi)^2 \left(-\frac{\mu}{2m}\right) \int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \frac{Q^j}{\mu} \frac{Q^k}{\mu} \frac{Q^l}{\mu}\right) = \\
&\left[\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}\right] \bar{\bar{\Pi}}_a^{000} \\
&+ \frac{1}{\mu^2} \left[\delta_{ij} q^k q^l + \delta_{ik} q^j q^l + \delta_{il} q^j q^k + \delta_{jk} q^i q^l + \delta_{jl} q^i q^k + \delta_{kl} q^i q^j\right] \bar{\Pi}_a^{200} \\
&+ \frac{1}{\mu^4} q^i q^j q^k q^l \Pi_a^{400}.
\end{aligned} \tag{E.98}$$

Contraindo com q^k/μ e q^l/μ temos

$$\begin{aligned}
(4\pi)^2 \left(-\frac{\mu}{2m}\right) \frac{q^k}{\mu} \frac{q^l}{\mu} \int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \frac{Q^j}{\mu} \frac{Q^k}{\mu} \frac{Q^l}{\mu}\right) = \\
\delta_{ij} \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} \bar{\bar{\Pi}}_a^{000} + \left(\frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2}\right)^2 \bar{\Pi}_a^{200}\right] + \frac{q^i q^j}{\mu^2} \left[2 \bar{\bar{\Pi}}_a^{000} + 5 \frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} \bar{\Pi}_a^{200} + \left(\frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2}\right)^2 \Pi_a^{400}\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{E.99}$$

Portanto,

$$\frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} \bar{\Pi}_a^{200} = -\bar{\bar{\Pi}}_a^{000} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} \Pi_a^{400} = -\bar{\Pi}_a^{200}. \tag{E.100}$$

Por outro lado, a contração com δ_{kl} fornece

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} \left[5 \bar{\bar{\Pi}}_a^{000} + \frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} \bar{\Pi}_a^{200}\right] + \frac{q^i q^j}{\mu^2} \left[7 \bar{\Pi}_a^{200} + \frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} \Pi_a^{400}\right] \approx \\
- \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \left[\delta_{ij} \bar{\Pi}_a^{000} + \frac{q^i q^j}{\mu^2} \Pi_a^{200}\right].
\end{aligned} \tag{E.101}$$

Combinando com o resultado anterior, obtemos

$$\bar{\bar{\Pi}}_a^{000} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \bar{\Pi}_a^{000} \quad \text{e} \quad \bar{\Pi}_a^{200} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \Pi_a^{200}. \tag{E.102}$$

Fazendo as mesmas contrações na integral I_a^{ij} , chegamos a

$$\bar{\Pi}_a^{000} = -\frac{\mathbf{q}^2}{\mu^2} \Pi_a^{200} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \Pi_a^{000} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \Pi_a. \tag{E.103}$$

onde escrevemos Π_a em lugar de Π_a^{000} . Portanto,

$$\begin{aligned}
-i(4\pi)^2 I_a^{ijkl} &= \left\{ \left[\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \right. \\
&- \frac{1}{\mathbf{q}^2} \left[\delta_{ij} q^k q^l + \delta_{ik} q^j q^l + \delta_{il} q^j q^k + \delta_{jk} q^i q^l + \delta_{jl} q^i q^k + \delta_{kl} q^i q^j \right] \\
&\left. + \frac{3}{(\mathbf{q}^2)^2} q^i q^j q^k q^l \right\} \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} \right)^2 \Pi_a, \tag{E.104}
\end{aligned}$$

$$-i(4\pi)^2 I_a^{ij} = -\frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{q^i q^j}{\mathbf{q}^2} \right) \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a. \tag{E.105}$$

Ainda faremos uso dos seguintes resultados:

$$(4\pi)^2 \left(-\frac{\mu}{2m} \right) \int(\dots) \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}}{2m\mu} \right]^2 = \frac{\mathbf{z}^2}{4m^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a, \tag{E.106}$$

$$\begin{aligned}
(4\pi)^2 \left(-\frac{\mu}{2m} \right) \int(\dots) \frac{Q^i Q^j}{\mu^2} \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}}{2m\mu} \right]^2 &= \\
\frac{z^i z^j}{4m^2} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a &+ \left(\delta_{ij} - \frac{q^i q^j}{\mathbf{q}^2} \right) \frac{\mathbf{z}^2}{4m^2} \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a. \tag{E.107}
\end{aligned}$$

Nas expressões (E.26) e (E.27) expandimos o integrando até ordem q^4 , de tal maneira a eliminar a raiz quadrada em $\bar{E}$, resultando em

$$\begin{aligned}
I_B^{\dots} &\approx i \frac{m^3}{E^3} \int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \dots \right) \\
&\times \left[1 - \frac{(\mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{q}^2/4)}{2E^2} + 3 \frac{(\mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{q}^2/4)^2}{8E^4} \right], \tag{E.108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_C^{\dots} &\approx i \frac{m^3}{2E^3} \int(\dots) \left(\frac{Q^i}{\mu} \dots \right) \\
&\times \left[1 - 3 \frac{(\mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{q}^2/4)}{4E^2} + 5 \frac{(\mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{q}^2/4)^2}{8E^4} \right]. \tag{E.109}
\end{aligned}$$

Utilizando (E.95), (E.96), (E.97), (E.105), (E.106), (E.107) e expandindo a energia E no denominador temos

$$I_B \approx \frac{i}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2m}{\mu} \right) \frac{m^3}{E^3} \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{2m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2} \right) - \frac{\mu^2}{2m^2} \frac{(\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2)}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2} \right) \right\}$$

$$+ \frac{3\mu^4}{8m^4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right)^2 - \frac{3\mu^2}{4m^2} \frac{\mathbf{z}^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \Big\} \Pi_a, \quad (\text{E.110})$$

$$I_C \approx \frac{i}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2m}{\mu}\right) \frac{m^3}{2E^3} \left\{ 1 + \frac{3\mu^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) - \frac{3\mu^2}{4m^2} \frac{(\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2)}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) \right. \\ \left. + \frac{5\mu^4}{8m^4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right)^2 - \frac{5\mu^2}{4m^2} \frac{\mathbf{z}^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \right\} \Pi_a, \quad (\text{E.111})$$

$$I_C^i \approx \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{m^3}{E^3} \frac{z^i}{2m} \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{(\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2)}{4m^2} + \frac{5\mu^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) \right\} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \Pi_a, \quad (\text{E.112})$$

$$I_C^{ij} \approx \frac{i}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2m}{\mu}\right) \frac{m^3}{2E^3} \left\{ \frac{z^i z^j}{4m^2} \frac{5\mu^2}{8m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{q^i q^j}{\mathbf{q}^2}\right) \left[1 + \frac{3\mu^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) - \frac{3\mu^2}{4m^2} \frac{(\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2)}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5\mu^4}{8m^4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right)^2 - \frac{5\mu^2}{4m^2} \frac{\mathbf{z}^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \right] \right\} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \Pi_a. \quad (\text{E.113})$$

Olhando para as equações (E.63)-(E.68) podemos verificar que as integrais Π_B e Π_C devem ser obtidas até as ordens

$$\Pi_B^{000} \rightarrow \mathcal{O}(q^4), \quad (\text{E.114})$$

$$\Pi_C^{000} \rightarrow \mathcal{O}(q^4), \quad (\text{E.115})$$

$$\Pi_C^{010} \rightarrow \mathcal{O}(q^1), \quad (\text{E.116})$$

$$\Pi_C^{020} \rightarrow \mathcal{O}(q^0), \quad (\text{E.117})$$

$$\bar{\Pi}_C^{000} \rightarrow \mathcal{O}(q^0). \quad (\text{E.118})$$

Portanto,

$$\Pi_B^{000} = -\frac{2m}{\mu} \frac{m^3}{E^3} \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{2m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) - \frac{\mu^2}{2m^2} \frac{(\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2)}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) \right. \\ \left. + \frac{3\mu^4}{8m^4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right)^2 - \frac{3\mu^2}{4m^2} \frac{\mathbf{z}^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \right\} \Pi_a, \quad (\text{E.119})$$

$$\Pi_C^{000} = -\frac{m}{\mu} \frac{m^3}{E^3} \left\{ 1 + \frac{3\mu^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) - \frac{3\mu^2}{4m^2} \frac{(\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2)}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right) \right. \\ \left. + \frac{5\mu^4}{8m^4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu^2}\right)^2 - \frac{5\mu^2}{4m^2} \frac{\mathbf{z}^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) \right\} \Pi_a, \quad (\text{E.120})$$

$$\Pi_C^{010} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a, \quad (\text{E.121})$$

$$\Pi_C^{020} = 0, \quad (\text{E.122})$$

$$\bar{\Pi}_C^{000} = -\frac{m}{2\mu} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a. \quad (\text{E.123})$$

Com estas expansões, as equações (E.63)-(E.68) são escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}_{DD}]_{us} = & \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ - \left(\frac{z^2}{4m^2} \right)^2 \Pi_{reg}^{(020)} - \frac{z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} + \left(\frac{W^2}{4m^2} \right)^2 \Pi_{reg}^{(002)} + \frac{W^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right. \\ & \left. - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{q^2}{2\mu^2} \right) \left(1 + \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{q^2}{8m^2} + \frac{z^2}{8m^2} \right) \Pi_a \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.124})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(w)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(002)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \right\}, \quad (\text{E.125})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{DB}^{(z)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(020)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(\frac{3}{2} - \frac{5q^2}{8\mu^2} \right) \Pi_a \right\}, \quad (\text{E.126})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(g)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{q^2}{4\mu^2} \right) \Pi_a \right\}, \quad (\text{E.127})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(w)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \Pi_{reg}^{(002)} \right\}, \quad (\text{E.128})$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{BB}^{(z)}]_{us} = \frac{m^2/4}{(4\pi)^2} \left[\frac{g}{m} \right]^4 \left\{ \Pi_{reg}^{(020)} \right\}. \quad (\text{E.129})$$

Podemos mostrar que a integral Π_a é a mesma que aparece na expansão de bárion pesado da integral triângulo, equação (B.98). Partindo de sua definição⁵,

$$\Pi_a = (4\pi)^2 \left(-\frac{\mu}{2m} \right) \int (\cdots) = (4\pi)^2 \left(-\frac{\mu}{2m} \right) \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{m}{[(\mathbf{Q} - \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2][(\mathbf{Q} + \mathbf{q}/2)^2 + \mu^2]}, \quad (\text{E.130})$$

e com o auxílio da parametrização de Feynman, temos

$$\Pi_a = -\frac{\mu}{\pi} \int_0^1 da \int \frac{d^3Q}{[\mathbf{Q}^2 + a(1-a)\mathbf{q}^2 + \mu^2]^2}. \quad (\text{E.131})$$

Integrando nos ângulos,

⁵Observe como foi definida a equação (E.98).

$$\Pi_a = -4\mu \int_0^1 da \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + a(1-a)\mathbf{q}^2 + \mu^2]^2} = -2\mu \int_0^1 da \int_0^\infty \frac{dQ}{[Q^2 + a(1-a)\mathbf{q}^2 + \mu^2]}, \quad (\text{E.132})$$

e usando o resultado

$$\int_0^\infty \frac{dQ}{[Q^2 + A^2]} = \frac{\pi}{2A}, \quad (\text{E.133})$$

obtemos

$$\Pi_a = -\mu\pi \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{a(1-a)\mathbf{q}^2 + \mu^2}} = -\pi \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2} - y^2 \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}}}, \quad (\text{E.134})$$

onde usamos $a = (1 + y)/2$ e o fato do integrando ser uma função par em y . Resolvendo a integral, chegamos a

$$\Pi_a = -\frac{\pi}{\sqrt{\mathbf{q}^2/4\mu^2}} \tan^{-1} \sqrt{\mathbf{q}^2/4\mu^2}, \quad (\text{E.135})$$

que é igual a equação (B.98).

Apêndice F

Relações entre integrais de um *loop*

Neste apêndice derivamos as relações entre integrais utilizadas neste trabalho, e posteriormente mostraremos que os termos desprezados nessas relações são de curto alcance. As definições das integrais utilizadas para obter tais relações encontram-se nos apêndices B e E.

F.1 Derivando as relações

Para cancelarmos um dos propagadores piônicos usamos diversas vezes as seguintes expressões:

$$(k'^2 - \mu^2)/2 + (k^2 - \mu^2)/2 = Q^2 + t/4 - \mu^2 , \quad (\text{F.1})$$

$$(k'^2 - \mu^2)/2 - (k^2 - \mu^2)/2 = Q \cdot q . \quad (\text{F.2})$$

Contraindo $I_{cc}^{\mu\nu}$ com q_μ/μ e $g_{\mu\nu}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{q_\mu}{\mu} I_{cc}^{\mu\nu} &= \int [\dots] \left(\frac{Q^\nu}{\mu} \right) \frac{Q \cdot q}{\mu^2} \approx 0 \rightarrow \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{cc}^{(200)} + \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} = 0 , \\ g_{\mu\nu} I_{cc}^{\mu\nu} &= \int [\dots] \frac{Q^2}{\mu^2} \approx \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) I_{cc} \\ &\rightarrow \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{cc}^{(200)} + 4 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{cc}^{(000)} . \end{aligned}$$

A combinação dessas contrações resulta em

$$\bullet \quad \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{cc}^{(000)} . \quad (\text{F.3})$$

Fazendo o mesmo com a integral $I_{cc}^{\mu\nu\lambda\rho}$ obtemos

$$\frac{q_\mu q_\nu}{\mu^2} I_{cc}^{\mu\nu\lambda\rho} = \int [\dots] \left(\frac{Q^\mu Q^\nu}{\mu^2} \right) \left[\frac{Q \cdot q}{\mu^2} \right]^2 \approx 0$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \frac{q^\lambda q^\rho}{\mu^2} \left[\left(\frac{q^2}{\mu^2} \right)^2 \Pi_{cc}^{400} + 5 \frac{q^2}{\mu^2} \bar{\Pi}_{cc}^{200} + 2 \bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{000} \right] + g^{\lambda\rho} \left[\left(\frac{q^2}{\mu^2} \right)^2 \bar{\Pi}_{cc}^{200} + \frac{q^2}{\mu^2} \bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{000} \right] = 0, \\
& g_{\lambda\rho} I_{cc}^{\mu\nu\lambda\rho} = \int[\dots] \left(\frac{Q^\mu Q^\nu}{\mu^2} \right) \frac{Q^2}{\mu^2} \approx \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) I_{cc}^{\mu\nu} \\
& \rightarrow \frac{q^\lambda q^\rho}{\mu^2} \left[\frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{cc}^{400} + 8 \bar{\Pi}_{cc}^{200} \right] + g^{\lambda\rho} \left[\frac{q^2}{\mu^2} \bar{\Pi}_{cc}^{200} + 6 \bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{000} \right] = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \left[\frac{q^\lambda q^\rho}{\mu^2} \Pi_{cc}^{200} + g^{\lambda\rho} \bar{\Pi}_{cc}^{000} \right].
\end{aligned}$$

Nas expressões acima a única integral que nos interessa é $\bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{000}$. Combinando com o resultado anterior temos

$$\bullet \quad \bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{(000)} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} = \frac{1}{15} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right)^2 \Pi_{cc}^{(000)}. \quad (\text{F.4})$$

Contraindo I_{sc}^μ com $(W+z)_\mu/2m$ e com a ajuda da definição de s_1 (3.7) temos

$$\begin{aligned}
\frac{(W+z)_\mu}{2m} I_{sc}^\mu &= \int[\dots] \frac{Q \cdot (W+z)}{(s_1-m^2)} = \int[\dots] \left[1 - \frac{(Q^2-q^2/4)}{(s_1-m^2)} \right] \approx I_{cc} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) I_{sc} \\
&\rightarrow \bullet \quad \frac{W^2+z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} = \Pi_{cc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{sc}^{(000)}. \quad (\text{F.5})
\end{aligned}$$

Explorando as contrações que podem ser feitas em $I_{sc}^{\mu\nu}$ chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{(W+z)_\mu}{2m} I_{sc}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{Q \cdot (W+z) Q^\nu / \mu}{(s_1-m^2)} \approx -\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) I_{sc}^\nu \\
&\rightarrow \bullet \quad \frac{W^2+z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = -\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{sc}^{(001)}, \quad (\text{F.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{q^\mu}{2m} I_{sc}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \left(\frac{Q^\nu}{\mu} \right) \frac{Q \cdot q}{(s_1-m^2)} \approx 0 \rightarrow \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{sc}^{(200)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = 0, \\
g_{\mu\nu} I_{sc}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{2m Q^2}{\mu(s_1-m^2)} \approx \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) I_{sc} \\
&\rightarrow \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{sc}^{(200)} + \frac{W^2+z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + 4 \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{sc}^{(000)}, \\
&\bullet \quad \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{4m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{sc}^{(001)}. \quad (\text{F.7})
\end{aligned}$$

Para as integrais do tipo cruzado temos

$$\begin{aligned}
\frac{W_\mu}{2m} I_{ss}^\mu &= \int[\dots] \frac{2m\mu Q \cdot W}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} = \int[\dots] \left[\frac{m\mu}{(s_1 - m^2)} + \frac{m\mu}{(s_2 - m^2)} - \frac{2m\mu (Q^2 - t/4)}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \right] \\
&\approx \frac{1}{2} (I_{cs} + I_{sc}) - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) I_{ss} \\
&\rightarrow \bullet \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(001)} = \Pi_{sc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{ss}^{(000)}, \tag{F.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_\mu}{2m} I_{ss}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{2m Q \cdot z Q^\nu}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} = \int[\dots] \left[\frac{m Q^\nu}{(s_2 - m^2)} - \frac{m Q^\nu}{(s_1 - m^2)} \right] = \frac{1}{2} (I_{cs}^\nu - I_{sc}^\nu) \\
&\rightarrow \bullet \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(020)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = -\Pi_{sc}^{(001)}, \tag{F.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{W_\mu}{2m} I_{ss}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{2m Q \cdot W Q^\nu}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \approx \frac{1}{2} (I_{cs}^\nu + I_{sc}^\nu) - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) I_{ss}^\nu \\
&\rightarrow \bullet \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(002)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{ss}^{(001)}, \tag{F.10}
\end{aligned}$$

$$\frac{q_\mu}{\mu} I_{ss}^{\mu\nu} = \int[\dots] \frac{2m Q \cdot q Q^\nu}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \approx 0 \rightarrow \bullet \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{ss}^{(200)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = 0, \tag{F.11}$$

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} I_{ss}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{4m^2 Q^2}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \approx \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) I_{ss} \\
&\rightarrow \bullet \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{ss}^{(200)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(020)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(002)} + 4 \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{ss}^{(000)}. \tag{F.12}
\end{aligned}$$

Combinando os resultados acima chegamos a

$$\begin{aligned}
&\bullet \frac{W^4}{16m^4} \Pi_{ss}^{(002)} + \frac{W^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \\
&\frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right)^2 \Pi_{ss}^{(000)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{sc}^{(000)}, \tag{F.13}
\end{aligned}$$

$$\bullet \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{ss}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{ss}^{(001)}. \tag{F.14}$$

Para as integrais do tipo caixa temos

$$\begin{aligned}
\frac{z_\mu}{2m} I_{us}^\mu &= \int[\dots] \frac{2m\mu Q \cdot z}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} = \int[\dots] \left[-\frac{m\mu}{(u_1 - m^2)} - \frac{m\mu}{(s_2 - m^2)} + \frac{2m\mu (Q^2 - t/4)}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \right] \\
&\approx -\frac{1}{2} (I_{uc} + I_{cs}) + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) I_{us} \\
&\rightarrow \bullet \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{us}^{(010)} = -\Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{us}^{(000)}, \tag{F.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{W_\mu}{2m} I_{us}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{2m Q \cdot W Q^\nu}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} = \int[\dots] \left[\frac{m Q^\nu}{(u_1 - m^2)} - \frac{m Q^\nu}{(s_2 - m^2)} \right] = \frac{1}{2} (I_{uc}^\nu - I_{cs}^\nu) \\
&\rightarrow \bullet \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{us}^{(002)} + \bar{\Pi}_{us}^{(000)} = -\Pi_{sc}^{(001)}, \tag{F.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_\mu}{2m} I_{us}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{2m Q \cdot z Q^\nu}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \approx -\frac{1}{2} (I_{uc}^\nu + I_{cs}^\nu) + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) I_{us}^\nu \\
&\rightarrow \bullet \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{us}^{(020)} + \bar{\Pi}_{us}^{(000)} = \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{us}^{(010)}, \tag{F.17}
\end{aligned}$$

$$\frac{q_\mu}{\mu} I_{us}^{\mu\nu} = \int[\dots] \frac{2m Q \cdot q Q^\nu}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \approx 0 \rightarrow \bullet \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{us}^{(200)} + \bar{\Pi}_{us}^{(000)} = 0, \tag{F.18}$$

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} I_{us}^{\mu\nu} &= \int[\dots] \frac{4m^2 Q^2}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)} \approx \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) I_{us} \\
&\rightarrow \bullet \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{us}^{(200)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{us}^{(020)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{us}^{(002)} + 4 \bar{\Pi}_{us}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{us}^{(000)}. \tag{F.19}
\end{aligned}$$

Combinando os resultados acima chegamos a

$$\begin{aligned}
&\bullet \frac{z^4}{16m^4} \Pi_{us}^{(020)} + \frac{z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{us}^{(000)} = \\
&\frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right)^2 \Pi_{us}^{(000)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{sc}^{(000)}, \tag{F.20}
\end{aligned}$$

$$\bullet \bar{\Pi}_{us}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2} \right) \Pi_{us}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_{us}^{(010)}. \tag{F.21}$$

Para a integral I_A^i da iteração do OPEP temos

$$\begin{aligned}
\frac{z^i}{2m} I_A^i &= i \int (\dots) \frac{m^2 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}}{2\mu E[E_Q^2 - E^2]} = i \int (\dots) \frac{m^2}{2\mu E[E_Q^2 - E^2]} \{(\mathbf{Q}^2 - \mathbf{q}^2/4) - [E_Q^2 - E^2]\} \\
&\approx -\frac{\mu^2}{2m\mu} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) i \int (\dots) \frac{m^3}{E[E_Q^2 - E^2]} + \frac{m^3}{\mu^2 E} \left(-\frac{\mu}{2m}\right) i \int (\dots) \\
&\rightarrow \bullet \frac{z^2}{4m^2} \Pi_A^{(010)} = \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_A^{(000)} - \frac{m^3}{\mu^2 E} \Pi_a.
\end{aligned} \tag{F.22}$$

Sabemos da equação (E.62) que

$$\bullet \frac{W^2}{4m^2} \Pi_A^{(002)} + \bar{\Pi}_A^{(000)} = 0, \tag{F.23}$$

A partir de I_A^{ij} obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{z^i}{2m} I_A^{ij} &= \frac{i}{2m\mu} \int (\dots) \frac{Q^j}{\mu} \left[\frac{m^3 (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{q}^2/4)}{E[E_Q^2 - E^2]} - \frac{m^3}{E} \right] \approx -\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) i \int (\dots) \frac{Q^j m^3}{\mu E[E_Q^2 - E^2]} \\
&\rightarrow \bullet \frac{z^2}{4m^2} \Pi_A^{(020)} + \bar{\Pi}_A^{(000)} = \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_A^{(010)},
\end{aligned} \tag{F.24}$$

$$\frac{q^i}{\mu} I_A^{ij} = i \int (\dots) \frac{m^3 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} Q^j}{\mu^3 E[E_Q^2 - E^2]} \approx 0 \rightarrow \bullet \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_A^{(200)} + \bar{\Pi}_A^{(000)} = 0, \tag{F.25}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} I_A^{ij} &= i \int (\dots) \frac{m^3 \mathbf{Q}^2}{\mu^2 E[E_Q^2 - E^2]} \approx -\left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) i \int (\dots) \frac{m^3}{E[E_Q^2 - E^2]} \\
&\rightarrow \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_A^{(200)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_A^{(020)} + 3 \bar{\Pi}_A^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_A^{(000)}.
\end{aligned}$$

Combinando os resultados acima chegamos a

$$\bullet \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_A^{(200)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_A^{(020)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_A^{(002)} + 4 \bar{\Pi}_A^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_A^{(000)}, \tag{F.26}$$

$$\bullet \frac{z^4}{16m^4} \Pi_A^{(020)} + \frac{z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_A^{(000)} = \frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right)^2 \Pi_A^{(000)} - \frac{m^2}{2\mu E} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_a, \tag{F.27}$$

$$\bullet \bar{\Pi}_A^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_A^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_A^{(010)}. \tag{F.28}$$

As relações envolvendo as integrais Π_A podem ser combinadas com as que envolvem Π_{us} para obter as relações para as integrais Π_{reg} (veja a equação (E.57)). Multiplicando (F.22)-(F.28) por μ^2/m^2 e subtraindo de (F.15)-(F.21) obtemos

$$\bullet \quad \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(010)} = \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(000)} - \frac{m}{E} \Pi_a, \quad (\text{F.29})$$

$$\bullet \quad \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(002)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \Pi_{sc}^{(001)}, \quad (\text{F.30})$$

$$\bullet \quad \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(020)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = -\Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(010)}, \quad (\text{F.31})$$

$$\bullet \quad \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{reg}^{(200)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = 0, \quad (\text{F.32})$$

$$\bullet \quad \frac{q^2}{\mu^2} \Pi_{reg}^{(200)} + \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(020)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(002)} + 4 \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(000)}, \quad (\text{F.33})$$

$$\bullet \quad \frac{z^4}{16m^4} \Pi_{reg}^{(020)} + \frac{z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right)^2 \Pi_{reg}^{(000)} \\ - \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)} - \frac{\mu}{2E} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_b^{(000)}, \quad (\text{F.34})$$

$$\bullet \quad \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(010)}. \quad (\text{F.35})$$

F.2 Formulário

Para a comodidade do leitor enumeramos, nesta seção, as relações mais relevantes para este trabalho, obtidas na seção anterior.

$$\text{Relação 01:} \quad \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{cc}^{(000)}, \quad (\text{F.36})$$

$$\text{Relação 02:} \quad \bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{(000)} = \frac{1}{15} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right)^2 \Pi_{cc}^{(000)}, \quad (\text{F.37})$$

$$\text{Relação 03:} \quad \frac{W^2 + z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} = \Pi_{cc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)}, \quad (\text{F.38})$$

$$\text{Relação 04: } \frac{W^2+z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(002)} + \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = -\frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(001)}, \quad (\text{F.39})$$

$$\text{Relação 05: } \bar{\Pi}_{sc}^{(000)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{4m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(001)}, \quad (\text{F.40})$$

$$\text{Relação 06: } \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(001)} = \Pi_{sc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(000)}, \quad (\text{F.41})$$

$$\text{Relação 07: } \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(020)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = -\Pi_{sc}^{(001)}, \quad (\text{F.42})$$

$$\text{Relação 08: } \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{ss}^{(002)} + \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(001)}, \quad (\text{F.43})$$

$$\begin{aligned} \text{Relação 09: } \frac{W^4}{16m^4} \Pi_{ss}^{(002)} + \frac{W^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \\ \frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right)^2 \Pi_{ss}^{(000)} + \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)}, \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

$$\text{Relação 10: } \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{ss}^{(001)}, \quad (\text{F.45})$$

$$\text{Relação 11: } \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(010)} = \Pi_{sc}^{(000)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(000)} - \frac{m}{E} \Pi_a, \quad (\text{F.46})$$

$$\text{Relação 12: } \frac{W^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(002)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \Pi_{sc}^{(001)}, \quad (\text{F.47})$$

$$\text{Relação 13: } \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{reg}^{(020)} + \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = -\Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(010)}, \quad (\text{F.48})$$

$$\begin{aligned} \text{Relação 14: } \frac{z^4}{16m^4} \Pi_{reg}^{(020)} + \frac{z^2}{4m^2} \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \frac{\mu^2}{4m^2} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right)^2 \Pi_{reg}^{(000)} \\ - \frac{z^2}{4m^2} \Pi_{sc}^{(001)} + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{sc}^{(000)} - \frac{\mu}{2E} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_a, \end{aligned} \quad (\text{F.49})$$

$$\text{Relação 15: } \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = \left(1 - \frac{t}{4\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2}\right) \Pi_{reg}^{(010)}. \quad (\text{F.50})$$

Outras duas relações envolvendo $\Pi_{ss}^{(000)}$ e $\bar{\Pi}_{reg}^{(000)}$ podem ser obtidas, derivando com relação a μ as equações (B.60) e (E.59):

$$\text{Relação 16: } \mu \frac{d \bar{\Pi}_{ss}^{(000)}}{d\mu} = \Pi_{ss}^{(000)} + \frac{\mu}{m} \Pi_{ss}^{(001)}, \quad (\text{F.51})$$

$$\text{Relação 17: } \mu \frac{d \bar{\Pi}_{reg}^{(000)}}{d\mu} = \Pi_{reg}^{(000)} - \frac{\mu}{m} \Pi_{reg}^{(010)}. \quad (\text{F.52})$$

F.3 Avaliando as aproximações

É importante entender qualitativamente o erro que estamos cometendo com o uso das relações derivadas nas seções anteriores. Vimos que a aproximação consiste em desprezar integrais do tipo

$$\int [\dots] (k^2 - \mu^2)^m (k'^2 - \mu^2)^n, \quad (\text{F.53})$$

$$\int [\dots] (k^2 - \mu^2)^m (k'^2 - \mu^2)^n \frac{2m\mu}{(s_i - m^2)}, \quad (\text{F.54})$$

$$\int [\dots] (k^2 - \mu^2)^m (k'^2 - \mu^2)^n \frac{2m\mu}{(s_1 - m^2)} \frac{2m\mu}{(s_2 - m^2)}, \quad (\text{F.55})$$

$$\int [\dots] (k^2 - \mu^2)^m (k'^2 - \mu^2)^n \frac{2m\mu}{(u_1 - m^2)} \frac{2m\mu}{(s_2 - m^2)}, \quad (\text{F.56})$$

com m e n inteiros maiores que zero. Essas integrais envolvem um ou nenhum propagador piônico (figura F.1) e, no espaço de configuração, dão contribuições de curto alcance, como veremos a seguir.

Figura F.1: Representação diagramática das integrais de curto alcance, desconsideradas nas relações entre integrais de *loop*.

As integrais do tipo (F.53) não dependem dos momentos externos, o que pode ser provado com uma simples mudança na variável de integração; logo, não contribuem para o potencial no espaço de configuração. Para analisar as integrais (F.54) e (F.55), usamos a parametrização de Feynman,

$$\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[Q^2 \pm q \cdot Q + q^2/4 - \mu^2]} \frac{1}{[Q^2 + 2 P \cdot Q - \Sigma^2]^n} =$$

$$n \int_0^1 da \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{a^{n-1}}{[Q^2 + 2 \tilde{P} \cdot Q - \tilde{\Sigma}^2]^{n+1}}, \quad (\text{F.57})$$

onde

$$\tilde{P} = aP \pm (1-a)q/2 \quad \text{e} \quad \tilde{\Sigma}^2 = a\Sigma^2 + (1-a)(\mu^2 - q^2/4). \quad (\text{F.58})$$

Após a integração quadridimensional, a expressão (F.57) depende dos momentos externos na seguinte combinação¹,

$$\tilde{P}^2 + \tilde{\Sigma}^2 = a^2 P^2 + a\Sigma^2 - a(1-a)q^2/4 + (1-a)\mu^2 + a(1-a)P \cdot q/2. \quad (\text{F.59})$$

As integrais (F.54) correspondem a $n = 1$, $P = P_t = \pm(W \pm z)/2$ e $\Sigma^2 = \Sigma_t^2 = q^2/4$. Com estes valores, temos

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t^2 + \tilde{\Sigma}_t^2 &= \frac{a^2}{4} (W^2 + z^2) + a q^2/4 - a(1-a)q^2/4 + (1-a)\mu^2 \\ &= \frac{a^2}{4} (4m^2 - q^2) + a q^2/4 - a q^2/4 + a^2 q^2/4 + (1-a)\mu^2 \\ &= (1-a)\mu^2 + a^2 m^2, \end{aligned} \quad (\text{F.60})$$

ou seja, integrais do tipo (F.54) são constantes.

Para o caso (F.55), a situação é semelhante. Na determinação P e Σ^2 , necessitamos de outra parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{(s_1 - m^2)(s_2 - m^2)} = \int_0^1 \frac{db}{[(1-b)(s_1 - m^2) + b(s_2 - m^2)]^2} = \int_0^1 \frac{db}{[Q^2 + 2Q \cdot P_\times - \Sigma_\times^2]^2}, \quad (\text{F.61})$$

o que permite identificar $P_\times$ e $\Sigma_\times^2$:

$$P_\times = \frac{1}{2} [W + (1-2b)z] \quad \text{e} \quad \Sigma_\times^2 = q^2/4. \quad (\text{F.62})$$

Substituindo (F.62) em (F.59) chegamos a

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\times^2 + \tilde{\Sigma}_\times^2 &= \frac{a^2}{4} [W^2 + (1-2b)^2 z^2] + a q^2/4 - a(1-a)q^2/4 + (1-a)\mu^2 \\ &= \frac{a^2}{4} [4m^2 - q^2 - 4b(1-b)z^2] + a^2 q^2/4 + (1-a)\mu^2 \\ &= a^2 m^2 - a^2 b(1-b)z^2 + (1-a)\mu^2. \end{aligned} \quad (\text{F.63})$$

Na aproximação local, temos que esse denominador é uma constante e, como no caso anterior, não contribui para o potencial no espaço de configuração.

Quanto às integrais do tipo (F.56), nas relações entre integrais elas são desconsideradas juntamente com integrais do tipo

¹Veja, por exemplo, a equação (B.25).

$$i \frac{\mu^2}{m^2} \int (\dots) (\mathbf{k}^2 + \mu^2)^m (\mathbf{k}'^2 + \mu^2)^n \frac{m^3}{E[E_Q^2 - E^2]}, \quad (\text{F.64})$$

que são provenientes da iteração do OPEP. Para entender como elas se comportam, consideremos as integrais

$$H_{us} = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q \pm q)^2 - \mu^2} \frac{(2m\mu)^2}{(u_1 - m^2)(s_2 - m^2)}, \quad (\text{F.65})$$

$$H_{it} = \frac{i\mu^2}{m^2} \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{m}{(\mathbf{Q} \pm \mathbf{q})^2 - \mu^2} \frac{m^3}{E[(\mathbf{Q} - \mathbf{z}/2)^2 + m^2 - (m^2 + \frac{\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2}{4})]}. \quad (\text{F.66})$$

A integral H_{us} é resolvida como no caso (F.55), usando uma parametrização de Feynman para combinar os dois propagadores pesados, e outra para unir este resultado com o propagador leve, como em (F.57).

Resolvendo a integração em $d^4 Q$, temos

$$H_{us} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{(2m\mu)^2}{\tilde{P}_b^2 + \tilde{\Sigma}_b^2}, \quad (\text{F.67})$$

onde

$$P_b = \frac{1}{2} [z + (1 - 2b)W] \quad \text{e} \quad \Sigma_b^2 = q^2/4. \quad (\text{F.68})$$

Substituindo P_b e Σ_b^2 em (F.59), obtemos o denominador da integral H_{us} :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_b^2 + \tilde{\Sigma}_b^2 &= \frac{a^2}{4} [W^2 + z^2 - 4b(1 - b)W^2] + a q^2/4 - a(1 - a) q^2/4 + (1 - a)\mu^2 \\ &= -a^2 b(1 - b)W^2 + (1 - a)\mu^2 + a^2 m^2. \end{aligned} \quad (\text{F.69})$$

Usando $b = (1 + y)/2$ e o fato do integrando ser uma função par em y , chegamos à expressão

$$H_{us} = -\frac{i}{(4\pi)^2} (2m\mu)^2 \int_0^1 da \int_0^1 dy \frac{a}{a^2(y^2 - 1)\frac{W^2}{4} + (1 - a)\mu^2 + a^2 m^2}. \quad (\text{F.70})$$

Vamos agora manipular a integral H_{it} . Com uma simples parametrização de Feynman temos

$$H_{it} = \frac{i\mu^2 m^2}{E} \int_0^1 da \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{D^2}, \quad (\text{F.71})$$

onde

$$\begin{aligned}
D &= (1-a) \left[\mathbf{Q}^2 \pm \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2/4 + \mu^2 \right] + a \left[\mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{q}^2/4 \right] \\
&= \mathbf{Q}^2 + 2 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_{it} + \Sigma_{it}^2,
\end{aligned} \tag{F.72}$$

$$\mathbf{P}_{it} = \frac{1}{2} \left[\pm (1-a) \mathbf{q} - a \mathbf{z} \right], \tag{F.73}$$

$$\Sigma_{it}^2 = (1-a) \mu^2 + (1-2a) \mathbf{q}^2/4. \tag{F.74}$$

Fazendo a integração angular obtemos

$$H_{it} = \frac{i\mu^2 m^2}{E} \int_0^1 da \frac{4\pi}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{\left[Q^2 + \Sigma_{it}^2 - \mathbf{P}_{it}^2 \right]^2} = \frac{i\mu^2 m^2}{E} \int_0^1 da \int_0^\infty \frac{dQ}{\left[Q^2 + \Sigma_{it}^2 - \mathbf{P}_{it}^2 \right]}. \tag{F.75}$$

Com a mudança de variável $Q = ayE$ escrevemos o denominador de H_{it} como

$$\begin{aligned}
D &= a^2 y^2 E^2 + \Sigma_{it}^2 - \mathbf{P}_{it}^2 = a^2 y^2 E^2 + (1-a) \mu^2 - \frac{a^2}{4} (\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2) \\
&= a^2 (y^2 - 1) E^2 + (1-a) \mu^2 + a^2 m^2,
\end{aligned} \tag{F.76}$$

que é exatamente o mesmo denominador da equação (F.70). Quanto à integral,

$$\begin{aligned}
H_{it} &= \frac{i4\mu^2 m^2}{(4\pi)^2 E} \int_0^1 da \int_0^\infty \frac{a E dy}{a^2 (y^2 - 1) E^2 + (1-a) \mu^2 + a^2 m^2} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} (2m\mu)^2 \int_0^1 da \int_0^\infty dy \frac{a}{a^2 (y^2 - 1) \frac{W^2}{4} + (1-a) \mu^2 + a^2 m^2}.
\end{aligned} \tag{F.77}$$

Note que, combinando as integrais H_{us} e H_{it} , ocorre uma subtração semelhante à da iteração do OPEP (seção E.1). O resultado apresenta a seguinte estrutura matemática:

$$\int_1^\infty \frac{dy}{\left[a^2 (y^2 - 1) \frac{s}{4} + (1-a) \mu^2 + a^2 m^2 \right]} = \int_1^\infty \frac{dy}{\frac{a^2}{4} (y^2 - 1) [\mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2 + \mu^2 \theta_H^2]} \tag{F.78}$$

onde $s = W^2 = 4m^2 + \mathbf{q}^2 + \mathbf{z}^2$ e

$$\theta_H^2 = 4 \frac{(1-a)}{a^2 (y^2 - 1)} + 4 \frac{y^2}{(y^2 - 1)} \frac{m^2}{\mu^2}. \tag{F.79}$$

A equação (F.78) mostra que essas integrais dependem apenas de s (que, no centro de masa, é igual a $4E^2$) e, portanto, tem um alcance menor do que integrais com dois propagadores piônicos, que dependem simultaneamente de s e t , ou somente de t .

Para nos convenceremos disso olhemos para o lado direito de (F.78): a sua transformada de Fourier é proporcional a $\exp(-\mu\theta_H r)$. Toda a dependência de θ_H na variável a está no primeiro termo da equação (F.79), e este assume o mínimo valor possível para $a = 1$. Quanto ao segundo termo, atingimos o menor valor quando $y \rightarrow \infty$. Em toda a região de integração o menor valor que θ_H pode assumir é $\theta_H(a = 1, y \rightarrow \infty) = 2m/\mu$. Portanto, vemos que a combinação das integrais (F.56) e (F.64) têm um alcance máximo limitado por $\exp(-2mr)$, o que mostra o curto alcance desses termos.

Apêndice G

Redução dos espinores

Vimos, na seção 3.3, que a amplitude $\mathcal{T}_{\pi\pi}$ é dada pela equação (3.61),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{\pi\pi} = & [\bar{u}u]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \mathcal{I}_{DD} \\
 & - \left\{ [\bar{u}u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} + \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \right\} \frac{W^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(w)} \\
 & - \left\{ [\bar{u}u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} - \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u}u]^{(2)} \right\} \frac{z^\lambda}{2m} \mathcal{I}_{DB}^{(z)} \\
 & + \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\lambda} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\nu\rho} (p' - p)^\nu u \right]^{(2)} \\
 & \times \left\{ \frac{W^\lambda W^\rho}{4m^2} \mathcal{I}_{BB}^{(w)} + \frac{z^\lambda z^\rho}{4m^2} \mathcal{I}_{BB}^{(z)} + g^{\lambda\rho} \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \right\}. \tag{G.1}
 \end{aligned}$$

onde as funções $\mathcal{I}$ representam integrais escalares.

Neste apêndice apresentamos a transformação dos operadores que multiplicam essas integrais para o espaço de duas dimensões.

No referencial do centro de massa, usamos as variáveis definidas na seção 3.1 para escrever

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{q}^2}{2}, \quad \mathbf{p}' \times \mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \times \mathbf{z}. \tag{G.2}$$

O espinor quadridimensional $u(\mathbf{p})$ é proporcional a χ , o espinor em duas dimensões e os sanduíches da forma $[\bar{u} \cdots u]^{(a)}$, onde $a = 1, 2$, podem ser escritos em função dos operadores

$$[\chi^\dagger \chi]^{(a)} = 1^{(a)} \quad \text{e} \quad [\chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi]^{(a)} = \boldsymbol{\sigma}^{(a)}. \tag{G.3}$$

Com isso a redução do operador $[\bar{u}(\mathbf{p}') u(\mathbf{p})]^a$ em termos das matrizes de Pauli (2x2) é facilmente calculada,

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(\mathbf{p}') u(\mathbf{p})] &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{(E' + m)(E + m)}} \left[\chi^\dagger(E' + m), -\chi^\dagger \mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \begin{pmatrix} (E + m) \chi \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi \end{pmatrix} \right\}^{(a)} \\
&= \left\{ \frac{1}{\sqrt{(E' + m)(E + m)}} \chi^\dagger \left[(E' + m)(E + m) - (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right] \chi \right\}^{(a)} \\
&= \left\{ \frac{1}{\sqrt{(E' + m)(E + m)}} \chi^\dagger \left[(E' + m)(E + m) - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} - i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \right] \chi \right\}^{(a)} \\
&\stackrel{C.M.}{=} \frac{1}{(E + m)} \left\{ \chi^\dagger \left[(\mathbf{p}^2 + m^2) + 2mE + m^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} - i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \right] \chi \right\}^{(a)} \\
&= \chi^{(a)\dagger} \left\{ 2m + \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{(E + m)} - \frac{i}{(E + m)} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \right\} \chi^{(a)} \\
&= 2m + \frac{1}{2(E + m)} \left[\mathbf{q}^2 - i \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right], \tag{G.4}
\end{aligned}$$

De forma análoga calculamos os operadores $[\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^0 u(\mathbf{p}_a)]$ e $[\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_j u(\mathbf{p}_a)]$:

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^0 u(\mathbf{p}_a)] &= \frac{1}{(E + m)} \chi^{(a)\dagger} \left\{ 2E^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2) + 2mE + m^2 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \right\} \chi^{(a)} \\
&= \chi^{(a)\dagger} \left\{ 2E + \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{(E + m)} + \frac{i}{(E + m)} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \right\} \chi^{(a)} \\
&= 2E - \frac{1}{2(E + m)} \left[\mathbf{q}^2 - i \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right], \tag{G.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_j u(\mathbf{p}_a)] &= s(a) \chi^{(a)\dagger} \left\{ (\mathbf{p}' + \mathbf{p}) + i \boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right\}_j \chi^{(a)} \\
&= s(a) \left[\mathbf{z} + i \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \times \mathbf{q} \right]_j, \quad \begin{cases} s(a) = 1 & \text{se } a = 1, \\ s(a) = -1 & \text{se } a = 2. \end{cases} \tag{G.6}
\end{aligned}$$

Com o uso da equação (E.12),

$$\bar{u}(\mathbf{p}') \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\frac{(p' + p)_\nu}{2m} - \gamma_\nu \right] u(\mathbf{p}), \tag{G.7}$$

temos

$$\bar{u}(\mathbf{p}'_a) \frac{i}{2m} \sigma_{\mu 0} (p'_a - p_a)^\mu u(\mathbf{p}_a) = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{q}^2 - i \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right], \quad (\text{G.8})$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}'_a) \frac{i}{2m} \sigma_{\mu j} (p'_a - p_a)^\mu u(\mathbf{p}_a) = \\ s(a) \left\{ \frac{\mathbf{z}}{4m(E+m)} \left[\mathbf{q}^2 - i \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right] - i(\boldsymbol{\sigma}^{(a)} \times \mathbf{q}) \right\}_j. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Para facilitar a álgebra usamos

$$\lambda^2 = 4m(E+m), \quad \mathcal{Q}^{(a)} = \frac{1}{\lambda^2} \left[\mathbf{q}^2 - i \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right]. \quad (\text{G.10})$$

Logo,

$$[\bar{u} u]^{(a)} = 2m \left[1 + \mathcal{Q}^{(a)} \right], \quad (\text{G.11})$$

$$\left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu 0} (p' - p)^\mu u \right]^{(a)} = \frac{\lambda^2}{2m} \mathcal{Q}^{(a)}, \quad (\text{G.12})$$

$$\left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu j} (p' - p)^\mu u \right]^{(a)} = s(a) \left[\mathbf{z} \mathcal{Q}^{(a)} - i \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q} \right]_j, \quad (\text{G.13})$$

$$[\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} = 4m^2 \left[1 + \mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(2)} + \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \right], \quad (\text{G.14})$$

$$[\bar{u} u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} \frac{W^\nu}{2m} = \frac{E}{m} \lambda^2 \left[\mathcal{Q}^{(2)} + \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \right], \quad (\text{G.15})$$

$$\left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \frac{W^\nu}{2m} = \frac{E}{m} \lambda^2 \left[\mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \right], \quad (\text{G.16})$$

$$\begin{aligned} [\bar{u} u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} \frac{z^\nu}{2m} = - [\bar{u} u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu j} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} \frac{z^j}{2m} = \\ \left[\mathbf{z}^2 \mathcal{Q}^{(2)} - i \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) + \mathbf{z}^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} - i \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

$$\begin{aligned} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \frac{z^\nu}{2m} = - \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu j} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \frac{z^j}{2m} = \\ - \left[\mathbf{z}^2 \mathcal{Q}^{(1)} - i \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) + \mathbf{z}^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} - i \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

$$\left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} \frac{W^\nu W^\rho}{4m^2} = \left[E \frac{\lambda^2}{2m^2} \right]^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)}, \quad (\text{G.19})$$

$$\left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} \frac{z^\nu z^\rho}{4m^2} = -\frac{1}{4m^2} \left[(z^2)^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} - z^2 i \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} - z^2 i \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} - \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right], \quad (\text{G.20})$$

$$\begin{aligned} & \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} g^{\nu\rho} = \frac{\lambda^4}{4m^2} \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \\ & + \left[z^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} - i \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} - i \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} - (\sigma^{(1)} \times \mathbf{q}) \cdot (\sigma^{(2)} \times \mathbf{q}) \right] \\ & = \left[\frac{\lambda^4}{4m^2} + z^2 \right] \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} - i \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} - i \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} \\ & - \mathbf{q}^2 \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} + (\sigma^{(1)} \cdot \mathbf{q})(\sigma^{(2)} \cdot \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

Com isso os operadores que multiplicam as integrais $\mathcal{I}$'s são escritos como

$$[\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} = 4m^2 \left[1 + \mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(2)} + \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \right], \quad (\text{G.22})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [\bar{u} u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} + \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \right\} \frac{W^\nu}{2m} = \\ & \frac{E}{m} \lambda^2 \left[\mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(2)} + 2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [\bar{u} u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} - \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \right\} \frac{z^\nu}{2m} = z^2 (\mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(2)}) \\ & - i (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) + 2 z^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} - i \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} - i \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

$$\left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} \frac{W^\nu W^\rho}{4m^2} = \left[E \frac{\lambda^2}{2m^2} \right]^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)}, \quad (\text{G.25})$$

$$\begin{aligned} & \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} \frac{z^\nu z^\rho}{4m^2} = -\frac{1}{4m^2} \left[(z^2)^2 \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} - z^2 i \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} - z^2 i \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} - \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right], \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

$$\begin{aligned} & \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} g^{\nu\rho} = \left[\frac{\lambda^4}{4m^2} + z^2 \right] \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \\ & - i \sigma^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} - i \sigma^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} - \mathbf{q}^2 \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} + (\sigma^{(1)} \cdot \mathbf{q})(\sigma^{(2)} \cdot \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

Substituindo as definições da equação (G.10) temos

$$\mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} = \frac{1}{\lambda^4} \left\{ (\mathbf{q}^2)^2 - \mathbf{q}^2 i(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right\}, \quad (\text{G.28})$$

$$\begin{aligned} i \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} + i \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} = \\ \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \mathbf{q}^2 i(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) + 2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

$$\mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(2)} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 2 \mathbf{q}^2 - i(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \right\}. \quad (\text{G.30})$$

Em termos dos operadores abaixo,

$$\Omega_{SS} = \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \quad (\text{G.31})$$

$$\Omega_T = \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - 3 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{q} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{q}, \quad (\text{G.32})$$

$$\Omega_{LS} = \frac{i}{4} (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}), \quad (\text{G.33})$$

$$\Omega_Q = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}), \quad (\text{G.34})$$

reescrevemos as equações (G.28)–(G.30) e (G.22)–(G.27):

$$\mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} = \frac{1}{\lambda^4} \left\{ (\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \Omega_{LS} - \Omega_Q \right\}, \quad (\text{G.35})$$

$$i \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(2)} + i \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{z}) \mathcal{Q}^{(1)} = \frac{2}{\lambda^2} \left\{ 2 \mathbf{q}^2 \Omega_{LS} + \Omega_Q \right\}, \quad (\text{G.36})$$

$$\mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(2)} = \frac{2}{\lambda^2} \left\{ \mathbf{q}^2 - 2 \Omega_{LS} \right\}, \quad (\text{G.37})$$

$$\begin{aligned} [\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} &= \frac{4m^2}{\lambda^4} \left[\lambda^4 + 2\lambda^2(\mathbf{q}^2 - 2 \Omega_{LS}) + (\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \Omega_{LS} - \Omega_Q \right] \\ &= \frac{4m^2}{\lambda^4} \left\{ (\lambda^2 + \mathbf{q}^2)^2 - 4 (\lambda^2 + \mathbf{q}^2) \Omega_{LS} - \Omega_Q \right\}, \end{aligned} \quad (\text{G.38})$$

$$\begin{aligned} &\left\{ [\bar{u} u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} + \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \right\} \frac{W^\nu}{2m} \\ &= \frac{E}{m} \frac{2}{\lambda^2} \left[\lambda^2 (\mathbf{q}^2 - 2 \Omega_{LS}) + (\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \Omega_{LS} - \Omega_Q \right] \\ &= \frac{E}{m} \frac{2}{\lambda^2} \left\{ \mathbf{q}^2 (\lambda^2 + \mathbf{q}^2) - 2 (\lambda^2 + 2 \mathbf{q}^2) \Omega_{LS} - \Omega_Q \right\}, \end{aligned} \quad (\text{G.39})$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ [\bar{u} u]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(2)} - \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \right\} \frac{z^\nu}{2m} \\
&= \frac{2}{\lambda^4} \left\{ \lambda^2 z^2 (\mathbf{q}^2 - 2 \boldsymbol{\Omega}_{LS}) - 2 \lambda^4 \boldsymbol{\Omega}_{LS} + z^2 [(\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \boldsymbol{\Omega}_Q] - \lambda^2 (2 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} + \boldsymbol{\Omega}_Q) \right\} \\
&= \frac{2}{\lambda^4} \left\{ z^2 \mathbf{q}^2 (\lambda^2 + \mathbf{q}^2) - 2 \left[\lambda^2 (\lambda^2 + \mathbf{q}^2) + z^2 (\lambda^2 + 2 \mathbf{q}^2) \right] \boldsymbol{\Omega}_{LS} - (\lambda^2 + z^2) \boldsymbol{\Omega}_Q \right\}, \quad (\text{G.40})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} \frac{W^\nu W^\rho}{4m^2} = \\
& \frac{E^2}{4m^4} \left\{ (\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \boldsymbol{\Omega}_Q \right\}, \quad (\text{G.41})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} \frac{z^\nu z^\rho}{4m^2} = \\
& - \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left\{ (z^2)^2 [(\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \boldsymbol{\Omega}_Q] - 2 \lambda^2 z^2 (2 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} + \boldsymbol{\Omega}_Q) - \lambda^4 \boldsymbol{\Omega}_Q \right\} \\
&= - \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left\{ (z^2 \mathbf{q}^2)^2 - 4 z^2 \mathbf{q}^2 (\lambda^2 + z^2) \boldsymbol{\Omega}_{LS} - (\lambda^2 + z^2)^2 \boldsymbol{\Omega}_Q \right\}, \quad (\text{G.42})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\mu u \right]^{(1)} \left[\bar{u} \frac{i}{2m} \sigma_{\lambda\rho} (p' - p)^\lambda u \right]^{(2)} g^{\nu\rho} = \\
& \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left\{ (\lambda^4 + 4m^2 z^2) [(\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \boldsymbol{\Omega}_Q] \right. \\
& \quad \left. - 8m^2 \lambda^2 [2 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} + \boldsymbol{\Omega}_Q] - \frac{4m^2 \lambda^4}{3} [2 \boldsymbol{\Omega}_{SS} + \boldsymbol{\Omega}_T] \right\} \\
&= \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left\{ (\lambda^4 + 4m^2 z^2) (\mathbf{q}^2)^2 - 4 \mathbf{q}^2 [\lambda^4 + 4m^2 (z^2 + \lambda^2)] \boldsymbol{\Omega}_{LS} \right. \\
& \quad \left. - [\lambda^4 + 4m^2 (z^2 + 2\lambda^2)] \boldsymbol{\Omega}_Q - \frac{4m^2 \lambda^4}{3} [2 \boldsymbol{\Omega}_{SS} + \boldsymbol{\Omega}_T] \right\}. \quad (\text{G.43})
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (G.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\pi\pi} = & \frac{4m^2}{\lambda^4} \left\{ \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right)^2 - 4 \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \boldsymbol{\Omega}_Q \right\} \mathcal{I}_{DD} \\
& - \frac{E}{m} \frac{2}{\lambda^2} \left\{ \mathbf{q}^2 \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) - 2 \left(\lambda^2 + 2 \mathbf{q}^2 \right) \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \boldsymbol{\Omega}_Q \right\} \mathcal{I}_{DB}^{(w)} \\
& - \frac{2}{\lambda^4} \left\{ \mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2 \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) - 2 \left[\lambda^2 \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) + \mathbf{z}^2 \left(\lambda^2 + 2 \mathbf{q}^2 \right) \right] \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \left(\lambda^2 + \mathbf{z}^2 \right) \boldsymbol{\Omega}_Q \right\} \mathcal{I}_{DB}^{(z)} \\
& + \frac{E^2}{4m^4} \left\{ \left(\mathbf{q}^2 \right)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \boldsymbol{\Omega}_Q \right\} \mathcal{I}_{BB}^{(w)} \\
& - \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left\{ \left(\mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2 \right)^2 - 4 \mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2 \left(\lambda^2 + \mathbf{z}^2 \right) \boldsymbol{\Omega}_{LS} - \left(\lambda^2 + \mathbf{z}^2 \right)^2 \boldsymbol{\Omega}_Q \right\} \mathcal{I}_{BB}^{(z)} \\
& + \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left\{ \left(\lambda^4 + 4m^2 \mathbf{z}^2 \right) \left(\mathbf{q}^2 \right)^2 - 4 \mathbf{q}^2 \left[\lambda^4 + 4m^2 (\mathbf{z}^2 + \lambda^2) \right] \boldsymbol{\Omega}_{LS} \right. \\
& \left. - \left[\lambda^4 + 4m^2 (\mathbf{z}^2 + 2\lambda^2) \right] \boldsymbol{\Omega}_Q - \frac{4m^2 \lambda^4}{3} [2 \boldsymbol{\Omega}_{SS} + \boldsymbol{\Omega}_T] \right\} \mathcal{I}_{BB}^{(g)}. \tag{G.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\pi\pi} = & \left\{ \frac{4m^2}{\lambda^4} \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right)^2 \mathcal{I}_{DD} - \frac{E}{m} \frac{2}{\lambda^2} \mathbf{q}^2 \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) \mathcal{I}_{DB}^{(w)} - \frac{2}{\lambda^4} \mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2 \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) \mathcal{I}_{DB}^{(z)} \right. \\
& \left. + \frac{E^2}{4m^4} \left(\mathbf{q}^2 \right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(w)} - \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left(\mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2 \right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(z)} + \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left(\lambda^4 + 4m^2 \mathbf{z}^2 \right) \left(\mathbf{q}^2 \right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \right\} \\
& - \left\{ \frac{16m^2}{\lambda^4} \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) \mathcal{I}_{DD} - \frac{E}{m} \frac{4}{\lambda^2} \left(\lambda^2 + 2 \mathbf{q}^2 \right) \mathcal{I}_{DB}^{(w)} \right. \\
& - \frac{4}{\lambda^4} \left[\lambda^2 \left(\lambda^2 + \mathbf{q}^2 \right) + \mathbf{z}^2 \left(\lambda^2 + 2 \mathbf{q}^2 \right) \right] \mathcal{I}_{DB}^{(z)} + \frac{E^2 \mathbf{q}^2}{m^4} \mathcal{I}_{BB}^{(w)} - \frac{\mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2}{m^2 \lambda^4} \left(\lambda^2 + \mathbf{z}^2 \right) \mathcal{I}_{BB}^{(z)} \\
& \left. + \frac{\mathbf{q}^2}{m^2 \lambda^4} \left[\lambda^4 + 4m^2 (\mathbf{z}^2 + \lambda^2) \right] \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \right\} \boldsymbol{\Omega}_{LS} \\
& - \left\{ \frac{4m^2}{\lambda^4} \mathcal{I}_{DD} - \frac{E}{m} \frac{2}{\lambda^2} \mathcal{I}_{DB}^{(w)} - \frac{2}{\lambda^4} \left(\lambda^2 + \mathbf{z}^2 \right) \mathcal{I}_{DB}^{(z)} + \frac{E^2}{4m^4} \mathcal{I}_{BB}^{(w)} \right. \\
& - \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left(\lambda^2 + \mathbf{z}^2 \right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(z)} + \frac{1}{4m^2 \lambda^4} \left[\lambda^4 + 4m^2 (\mathbf{z}^2 + 2\lambda^2) \right] \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \right\} \boldsymbol{\Omega}_Q \\
& - \frac{2}{3} \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \boldsymbol{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \boldsymbol{\Omega}_T. \tag{G.45}
\end{aligned}$$

Podemos alternativamente usar a igualdade $E/m = (1 + \mathbf{q}^2/\lambda^2 + \mathbf{z}^2/\lambda^2)$ e com isso escrever $\mathcal{T}_{\pi\pi}$ como

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\pi\pi} = & 4m^2 \left\{ \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right)^2 \mathcal{I}_{DD} - \frac{\mathbf{q}^2}{2m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right) \mathcal{I}_{DB}^{(w)} - \frac{\mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2}{2m^2 \lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) \mathcal{I}_{DB}^{(z)} \right. \\
& + \frac{(\mathbf{q}^2)^2}{16m^4} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(w)} - \frac{(\mathbf{z}^2 \mathbf{q}^2)^2}{16m^4 \lambda^4} \mathcal{I}_{BB}^{(z)} + \frac{(\mathbf{q}^2)^2}{16m^4} \left(1 + \frac{4m^2 \mathbf{z}^2}{\lambda^4}\right) \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \Big\} \\
& - 4 \left\{ \frac{4m^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) \mathcal{I}_{DD} - \left(1 + \frac{2\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right) \mathcal{I}_{DB}^{(w)} \right. \\
& - \left[\left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{2\mathbf{q}^2}{\lambda^2}\right) \right] \mathcal{I}_{DB}^{(z)} + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(w)} \\
& - \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right) \mathcal{I}_{BB}^{(z)} + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \left[1 + \frac{4m^2}{\lambda^2} \left(\frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} + 1\right) \right] \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \Big\} \Omega_{LS} \\
& - \frac{4}{m^2} \left\{ \frac{m^4}{\lambda^4} \mathcal{I}_{DD} - \frac{m^2}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right) \mathcal{I}_{DB}^{(w)} - \frac{m^2}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right) \mathcal{I}_{DB}^{(z)} \right. \\
& + \frac{1}{16} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(w)} - \frac{1}{16} \left(1 + \frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2}\right)^2 \mathcal{I}_{BB}^{(z)} \\
& + \frac{1}{16} \left[1 + \frac{4m^2}{\lambda^2} \left(\frac{\mathbf{z}^2}{\lambda^2} + 2\right) \right] \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \Big\} \Omega_Q \\
& - \frac{2}{3} \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \Omega_{SS} - \frac{1}{3} \mathcal{I}_{BB}^{(g)} \Omega_T .
\end{aligned} \tag{G.46}$$

Apêndice H

Expansões das integrais cruzado e caixa

Na seção 2.3, apresentamos a proposta de Becher e Leutwyler para a expansão da função $\gamma(t)$ capaz de descrever corretamente a região $t \sim 4\mu^2$, ao contrário da expansão de bárion pesado. Neste apêndice, mostramos como seus resultados podem ser usados para produzir as expansões das integrais do tipo caixa e cruzado.

As integrais $\bar{\Pi}_{ss}^{(000)}$ e $\bar{\Pi}_{reg}^{(000)}$, dadas respectivamente pelas equações (B.60) e (E.59), podem ser escritas como

$$\bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = - \int_0^1 dc \Pi_{sc}^{(001)}(\mathcal{M}_{ss}) , \quad (\text{H.1})$$

$$\bar{\Pi}_{reg}^{(000)} = - \int_1^\infty dc \Pi_{sc}^{(001)}(\mathcal{M}_{us}) , \quad (\text{H.2})$$

onde $\Pi_{sc}^{(00n)}(\mathcal{M})$ é a integral triângulo generalizada, dada por

$$\Pi_{sc}^{(00n)}(\mathcal{M}) = \left(- \frac{2m}{\mu} \right)^{n+1} \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{\mu^2 (ab/2)^n}{D(\mathcal{M})} \quad (\text{H.3})$$

com o denominador $D(\mathcal{M})$ sendo

$$D(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^2 a^2 b^2 - a(1-a)(1-b) q^2 + (1-ab) \mu^2 . \quad (\text{H.4})$$

Quando $\mathcal{M} = m$, recobramos a integral triângulo, definida em (B.57). Por outro lado, com $\mathcal{M}_{ss}^2 = (W^2 + q^2 + c^2 z^2)/4$ e $\mathcal{M}_{us}^2 = (c^2 W^2 + q^2 + z^2)/4$ temos (H.1) e (H.2).

Fazendo uma integração por partes na equação (H.3), obtemos a generalização da relação 03, equação (F.38):

$$\left(1 - t/4\mathcal{M}^2 \right) \Pi_{sc}^{(001)}(\mathcal{M}) = \frac{m^2}{\mathcal{M}^2} \left[\Pi_{cc}^{(000)} - \frac{\mu}{2m} \left(1 - t/2\mu^2 \right) \Pi_{sc}^{(000)}(\mathcal{M}) + \Pi_L(\mathcal{M}) \right] , \quad (\text{H.5})$$

com

$$\Pi_L(\mathcal{M}) = \left(1 - \frac{\mu^2}{\mathcal{M}^2} \right) \left(\ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2} - 2 \right) + 2 \frac{\mu}{\mathcal{M}} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4\mathcal{M}^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\mathcal{M}}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu/2\mathcal{M}}{1 + \mu/2\mathcal{M}}} \right) . \quad (\text{H.6})$$

Em qualquer caso, $\mathcal{M}$ é um parâmetro grande, o que permite usar a expansão de Becher e Leutwyler para $\gamma(t)$, relacionada à nossa integral triângulo através de $\Pi_{sc}^{(000)} = -2m\mu(4\pi)^2 \gamma(t)$. Portanto,

$$\Pi_{sc}^{(000)}(\mathcal{M}) = \frac{m}{\mathcal{M}} \left\{ \Pi_a + \frac{\mu}{2\mathcal{M}} \Pi_t^{NL} + \frac{\pi}{2} \left[-\frac{\mu}{\mathcal{M}\sqrt{1-t/4\mu^2}} + 2 \ln \left(1 + \frac{\mu}{2\mathcal{M}\sqrt{1-t/4\mu^2}} \right) \right] \right\}, \quad (\text{H.7})$$

com Π_a e Π_t^{NL} dados pelas equações (4.83) e (4.84). É importante mencionar que a mesma discussão feita para a integral triângulo se aplica nesse caso, ou seja, perto do limiar $t = 4\mu^2$ ocorrem cancelamentos entre o termo entre colchetes e os demais, e a ordem quiral desses objetos fica indefinida. Por outro lado, longe do limiar esses termos se desacoplam, e o termo entre colchetes passa a ser de ordem q^2 . O formalismo HB pressupõe a validade do último caso em toda a região de baixa energia.

Lembrando que $\Pi_{cc}^{(000)} = \Pi_\ell$, e substituindo estes resultados em (H.1) e (H.2), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{(000)} = & - \int dc \frac{m^2}{\mathcal{M}^2 - t/4} \left\{ \Pi_\ell + \Pi_L(\mathcal{M}) - \frac{\mu}{2\mathcal{M}} (1 - t/2\mu^2) \right. \\ & \times \left. \left[\Pi_a + \frac{\mu}{2\mathcal{M}} \Pi_t^{NL} + \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\mu}{\mathcal{M}\sqrt{1-t/4\mu^2}} + 2 \ln \left(1 + \frac{\mu}{2\mathcal{M}\sqrt{1-t/4\mu^2}} \right) \right) \right] \right\}. \quad (\text{H.8}) \end{aligned}$$

No limite quiral, $\mu \rightarrow 0$, temos

$$\bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = \bar{\Pi}_{reg}^{(000)} \rightarrow -(1 + z^2/6m^2) \Pi_\ell \quad (\text{H.9})$$

e usando as relações 06, 07, 08, 16 e 11, 12, 13 e 17 (respectivamente, as equações (F.41), (F.42), (F.43), (F.51) e (F.46), (F.47), (F.48), (F.52)) achamos as seguintes relações, válidas nesse limite:

$$\Pi_{ss}^{(001)} = -2 \Pi_{reg}^{(001)} \rightarrow \Pi_a, \quad (\text{H.10})$$

$$\Pi_{ss}^{(020)} = \Pi_{reg}^{(020)} \rightarrow 2 \Pi_\ell/3, \quad (\text{H.11})$$

$$\Pi_{ss}^{(002)} = \Pi_{reg}^{(002)} \rightarrow 2 \Pi_\ell, \quad (\text{H.12})$$

$$\Pi_{ss}^{(000)} = \Pi_{reg}^{(000)} \rightarrow -\Pi'_\ell. \quad (\text{H.13})$$

Estes resultados podem ainda ser combinados com os apresentados no apêndice F, de forma a produzir as expansões das integrais $\Pi_\times = \Pi_{ss}^{000}$, $\Pi_b = \Pi_{reg}^{000}$ e $\tilde{\Pi}_b = \Pi_{reg}^{010}$ até a ordem nas quais necessitamos, $\mathcal{O}(q^2)$. As relações (F.42) e (F.38), juntamente com a equação (H.13), fornecem

$$\bullet \quad \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} = - \left(1 + \frac{t}{4m^2} + \frac{z^2}{6m^2} \right) \Pi_\ell + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \Pi_t \quad (\text{H.14})$$

e, usando as relações 16 (F.51) e 06 (F.41), temos

$$\Pi_{ss}^{(000)} = - \left(1 + \frac{\mu^2}{2m^2} + \frac{z^2}{6m^2} \right) \Pi'_\ell - \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) [\Pi_t - \Pi'_t] . \quad (\text{H.15})$$

Usando $\Pi' = \mu(d\Pi/d\mu)$ obtemos a expansão de bárion pesado da integral do tipo cruzado,

$$\bullet \quad \Pi_\times^{HB} = -\Pi'_\ell - \frac{\mu}{m} \frac{\pi/2}{(1-t/4\mu^2)} - \frac{\mu^2}{4m^2} \left[(1-t/2\mu^2)^2 (2\Pi'_\ell - \Pi''_\ell) + (2z^2/3\mu^2) \Pi'_\ell \right] + \dots \quad (\text{H.16})$$

onde as elipses denotam termos de ordens superiores e polinômios em t .

Para as integrais do tipo caixa, integramos (H.8) diretamente e obtemos

$$\bullet \quad [\bar{\Pi}_{reg}^{(000)}]^{HB} = - \left(1 + \frac{t}{4m^2} + \frac{z^2}{6m^2} \right) \Pi_\ell + \frac{\mu}{2m} \left(1 - \frac{t}{2\mu^2} \right) \left[\frac{1}{2} \Pi_a + \frac{\mu}{6m} \Pi_t^{NL} \right] . \quad (\text{H.17})$$

Comparando com a relação 13 (F.48) e usando a relação 03 (F.38), obtemos a expansão para $\tilde{\Pi}_b$:

$$\bullet \quad \tilde{\Pi}_b^{HB} = - \frac{1}{2} \left[\Pi_a + \frac{2\mu}{3m} \Pi_t^{NL} \right] , \quad (\text{H.18})$$

Finalmente, fazendo uso da relação 17 (F.52) chegamos a

$$\bullet \quad \Pi_b^{HB} = -\Pi'_\ell - \frac{\mu}{m} \frac{\pi/4}{(1-t/4\mu^2)} - \frac{\mu^2}{12m^2} \left[(1-t/2\mu^2)^2 (2\Pi'_\ell - \Pi''_\ell) + (2z^2/\mu^2) \Pi'_\ell \right] + \dots \quad (\text{H.19})$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. Leader e E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, Cambridge University Press (1996).
- [2] S. L. Adler e R. F. Dashen, *Current Algebras and Applications to Particle Physics*, Benjamin, New York (1968).
- [3] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan e C. Rosseti, *Currents in Hadron Physics*, North-Holland, Amsterdam (1973).
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18**, 188 (1967).
- [5] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **166**, 1568 (1968).
- [6] S. Weinberg, Physica **96 A**, 327 (1979).
- [7] J. Gasser e H. Leutwyler, *Ann. Phys.* **158** (1984), 142; *Nucl. Phys.* **B** 250 (1985), 465.
- [8] A. M. Bernstein e B. R. Holstein, *Chiral Dynamics: Theory and Experiment*, Proceedings, Workshop, Cambridge, USA, 25-29 July, 1994 (Springer, Berlin, 1995, Lecture Notes in Physics, Vol. 452).
- [9] J. Gasser, M. E. Sainio e A. Švarc, *Nucl. Phys.* **B** 307 (1988), 779.
- [10] E. Jenkins e A. V. Manohar, *Phys. Lett.* **255** (1991), 558.
- [11] V. Bernard, N. Kaiser e Ulf-G. Meißner, *Int. J. Mod. Phys. E* **4**, 193 (1995).
- [12] T. Becher e H. Leutwyler, *Eur. Phys. Journal C* **9**, 643 (1999).
- [13] T. Becher e H. Leutwyler, *JHEP* **106**, 17 (2001).
- [14] C. A. da Rocha, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (1993).
- [15] M. R. Robilotta e C.A. da Rocha, *Phys. Rev. C* **49**, 1818 (1994).
- [16] M. R. Robilotta e C.A. da Rocha, *Nucl. Phys. A* **615**, 391 (1997).
- [17] R. Higa e M. R. Robilotta, *Phys. Rev. C* **68**, 024004 (2003).
- [18] R. Higa, M. R. Robilotta e C. A. da Rocha, *Relativistic chiral nucleon-nucleon potential: configuration space*, trabalho em andamento.

- [19] N. Kaiser, R. Brockman e W. Weise, *Nucl. Phys. A* **625**, 758 (1997).
- [20] N. Kaiser, *Phys. Rev. C* **64**, 057001 (2001).
- [21] N. Kaiser, *Phys. Rev. C* **65**, 017001 (2001).
- [22] E. Epelbaum, W. Glöckle e Ulf-G. Meißner, *Nucl. Phys. A* **671** (2000), 295.
- [23] D. R. Entem e R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **66**, 014002 (2002).
- [24] M. C. M. Rentmeester, R. G. E. Timmermans e J. J. de Swart, *Phys. Rev. C* **67**, 044001 (2003).
- [25] R. Higa, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo (1999).
- [26] R. Machleidt, K. Holinde e Ch. Elster, *Phys. Lett. C* **149**, 1 (1987).
- [27] H.-B. Tang, hep-ph/9607436.
- [28] P. J. Ellis e H.-B. Tang, *Phys. Rev. C* **57**, 3356 (1998); K. Torikoshi e P. Ellis, *Phys. Rev. C* **67**, 015208 (2003).
- [29] R. Blankenbecler e R. Sugar, *Phys. Rev.* **142**, 1051 (1966).
- [30] M. R. Robilotta e C.A. da Rocha, *Phys. Rev. C* **52**, 531 (1995).
- [31] R.B. Wiringa, R.A. Smith and T.L. Ainsworth, *Phys. Rev. C* **29**, 1207 (1984).
- [32] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks and R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51**, 38 (1995).
- [33] E. Rutherford, *Phyl. Mag.* **21**, 669 (1911).
- [34] J. Chadwick, *Proc. R. Soc. (London)* **A 136**, 692 (1932).
- [35] E. Wigner, *Phys. Rev.* **43**, 252 (1933).
- [36] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **77**, 1 (1932); *Z. Phys.* **78**, 156 (1932).
- [37] E. Majorana, *Z. Phys.* **82**, 137 (1933).
- [38] G. Breit, E. Condon e R. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1936); G. Breit e E. Feenberg, *Phys. Rev.* **50**, 850 (1936); M. Tuve, N. Heydenburg e L. Hafstad, *Phys. Rev.* **50**, 806 (1936).
- [39] E. Fermi, *Z. Phys.* **88**, 161 (1934).
- [40] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **17**, 48 (1935).
- [41] S. H. Neddermeyer e C. D. Anderson, *Phys. Rev.* **51**, 884 (1937).
- [42] M. Conversi, E. Pancini e O. Piccioni, *Phys. Rev.* **71**, 209, 557 (1947).
- [43] C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini e C. F. Powell, *Nature* **160**, 453, 486 (1947); E. Gardner e C. M. Lattes, *Science* **107**, 270 (1948).
- [44] M. Taketani, S. Nakamura e M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **6**, 581 (1951).

- [45] J. Iwadare, S. Otsuki, R. Tamagaki e W. Watari, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **15**, 86 (1956); **16**, 455 (1956).
- [46] P. Cziffra, M. H. MacGregor, M. J. Moravcsik e H. P. Stapp, Phys. Rev. **114**, 880 (1959); G. Breit, Rev. Mod. Phys. **34**, 766 (1962).
- [47] T. Hamada e J. D. Johnston, Nucl. Phys. **34**, 382 (1962); T. Hamada, Y. Nakamura e R. Tamagaki, Prog. Theor. Phys. **33**, 769 (1965).
- [48] K. E. Lassila, M. H. Hull, H. M. Ruppel, F. A. MacDonald e G. Breit, Phys. Rev. **126** 881 (1962).
- [49] R. V. Reid, Ann. Phys. (N.Y.) **50**, 441 (1968).
- [50] M. Taketani, S. Machida e S. Onuma, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **7**, 45 (1952).
- [51] K. A. Brueckner e K. M. Watson, Phys. Rev. **90**, 699 (1953); **92**, 1023 (1953).
- [52] N. Hoshizaki e S. Machida, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **27**, 288 (1962); M. J. Moravcsik, *The Two-Nucleon Interaction* (Clarendon Press. Oxford, 1963); R. J. N. Phillips, Rep. Prog. Phys. **22**, 562 (1959).
- [53] J. L. Gammel, R. S. Christian e R. M. Thaler, Phys. Rev. **105**, 311 (1957).
- [54] J. L. Gammel e R. M. Thaler, Phys. Rev. **107**, 291, 1339 (1957).
- [55] G. Breit, Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.) **46**, 746 (1960); Phys. Rev. **120**, 287 (1960); Y. Nambu, Phys. Rev. **106**, 1366 (1957); W. R. Frazer e J. R. Fulgo, Phys. Rev. Lett. **2**, 365 (1959); J. J. Sakurai, Ann. Phys. (N.Y.) **11**, 1 (1960); Phys. Rev. **119**, 1784 (1960).
- [56] P. Signell, Advances in Nucl. Phys. **2**, 223 (1969).
- [57] R. de Tourreil, B. Rouben e D. W. L. Sprung, Nucl. Phys. A **242**, 445 (1975).
- [58] M. M. Nagels, T. A. Rijken e J. J. de Swart, Phys. Rev. D **17**, 768 (1978).
- [59] K. Erkelenz, Phys. Rep. C **13**, 191 (1974); K. Holinde e R. Machleidt, Nucl. Phys. A **247**, 495 (1975); **256**, 479, 497 (1976).
- [60] J. Fleischer e J. A. Tjon, Nucl. Phys. B **84**, 375 (1975); Phys. Rev. D **15**, 2537 (1977).
- [61] M. Chemtob, J. W. Durso e D. O. Riska, Nucl. Phys. B **38**, 141 (1972); A. D. Jackson, D. O. Riska e B. Verwest, Nucl. Phys. A **249**, 397 (1975); G. E. Brown e A. D. Jackson, *The Nucleon-Nucleon Interaction* (North-Holland, Amsterdam, 1976).
- [62] M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. Vinh Mau, P. Pires e R. de Tourreil, Phys. Rev. D **12**, 1495 (1975); R. Vinh Mau, em: *Mesons in Nuclei, vol I*, eds. M. Rho and D. H. Wilkinson (North-Holland, Amsterdam, 1979) p.151; M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. Vinh Mau, J. Côté, P. Pires e R. de Tourreil, Phys. Rev. C **21**, 861 (1980).
- [63] M. H. Partovi e E. Lomon, Phys. Rev. D **2**, 1999 (1970).

- [64] J. Fleischer e J. A. Tjon, Phys. Rev. D **21**, 87 (1980); M. J. Zuilhof e J. A. Tjon, Phys. Rev. C **24**, 736 (1981); **26**, 1277 (1982).
- [65] C. Ordóñez e U. van Kolck, Phys. Lett. B **291**, 459 (1994);
- [66] L. S. Celenza, A. Pantziris e C. M. Shakin, Phys. Rev. C **46**, 2213 (1992).
- [67] J. L. Friar e S. A. Coon, Phys. Rev. C **49**, 1272 (1994).
- [68] G. Höhler, group I, vol.9, subvol.b, part 2 de *Landölt-Bornstein Numerical data and Functional Relationships in Science and Technology*, ed. H.Schopper, 1983.
- [69] C. Ordóñez, L. Ray e U. van Kolck, Phys. Rev. Lett. **72**, 1982 (1994).
- [70] M. R. Robilotta, Nucl. Phys. A **595** 171 1995.
- [71] J-L. Ballot, C. A. da Rocha e M. R. Robilotta, Phys. Rev. C **57**, 1574 (1998).
- [72] Stefan Scherer, *Advances in Nuclear Physics, Vol. 27*, editado por J. W. Negele e E. W. Vogt (Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002).
- [73] N. Kaiser, S. Gerstendörfer e W. Weise, Nucl. Phys. A **637**, 395 (1998).
- [74] C. Ordoñez e U. van Kolck, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994), 1982; *Phys. Rev. C* **53** (1996), 2086;
- [75] M. C. M. Rentmeester, R. G. E. Timmermans, J. L. Friar e J. J. de Swart, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999), 4992;
- [76] R. de Tournell e D. W. L. Sprung, Nucl. Phys. A **201**, 193 (1973).
- [77] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons Inc. (1988), cap. 5.
- [78] M. G. Mayer, Phys. Rev. **75**, 1969 (1949); O. Haxel, J. H. D. Jensen e H. E. Suess, Phys. Rev. **75**, 1766 (1949); M. G. Mayer e J. H. D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, Wiley, New York (1955).
- [79] R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive e J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, Cambridge Univ. Press (1966).
- [80] B. Carreras e A. de Rújula, Nuovo Cim. **64**, 1014 (1969); D. A. Wray, Ann. of Phys. **51**, 162 (1969); E. T. Osypowski, Nucl. Phys. B **21**, 615 (1970); M. G. Olsson e E. T. Osypowski, Nucl. Phys. B **101**, 136 (1975).
- [81] G. Höhler, H. P. Jacob e R. Strauss, Nucl. Phys. **B 39**, 237 (1972).
- [82] L. S. Brown, W. J. Pardee e R. D. Peccei, Phys. Rev. D **4**, 2801 (1971).
- [83] A. M. M. Menezes, *Dissertação de Mestrado*, Universidade de São Paulo (1985).
- [84] S. Weinberg, Phys. Lett. **B 251**, 288 (1990), Nucl. Phys. **B 363**, 3 (1991).
- [85] A. V. Manohar e H. Georgi, Nucl. Phys. B **234**, 189 (1984); H. Georgi, Phys. Lett. B **298**, 187 (1993).

- [86] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [87] J. L. Goity, D. Lehmann, G. Prezeau e J. Saez, Phys. Lett. **B** 504, 21-27 (2001).
- [88] D. Lehmann, G. Prezeau, Phys. Rev. D 65, 016001 (2002).
- [89] M. R. Robilotta, M. R. Robilotta, Phys. Rev. C **63**, 044004 (2001).
- [90] N. Fettes, Ulf-G. Meißner, M. Mojžiš e S. Steininger, Ann. Phys. **283**, 273 (2000).
- [91] A. Krause, Helv. Phys. Acta **63**, 3 (1990).
- [92] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966); Y. Tomozawa, N. Cim. A **46**, 707 (1966).
- [93] N. Fettes, Ulf-G. Meißner e S. Steininger, Nucl. Phys. A **640**, 199 (1998).
- [94] E. E. Salpeter e H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [95] R. Brockmann e R. Machleidt, Phys. Rev. C **42**, 1965 (1990).
- [96] J. C. Pupin e M. R. Robilotta, Phys. Rev. C **60**, 014003 (1999); J. C. Pupin, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista (2002).
- [97] D. R. Entem e R. Machleidt, nucl-th/0303017 (2003).
- [98] G. Arfken, *Mathematical Method for Physicists*, terceira edição, Academic Press (1985).