Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Redutibilidade em Sistemas de Dois Níveis

Gustavo B. de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Domingos H. U. Marchetti

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca examinadora:
Prof. Dr. César Rogério de Oliveira (UFSCar)
Prof. Dr. Domingos H. U. Marchetti (IFUSP)
Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IFUSP)

São Paulo

2004

Para meus pais,

José Messias de Oliveira e Anna Barbagallo.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Domingos Marchetti pela amizade durante estes dois anos, pela orientação e sugestão do tema e pela grande participação neste trabalho.

Também importantes foram todos os amigos e colegas do IFUSP. Entre eles, os mais antigos da graduação: Daniel, Eduardo, Gabriel, Gabriela, Igor, Priscila, Regina, Ricardo e Urbano; e os mais recentes: Alexei, Carlos e Kelly. Não posso esquecer também da Renata. Agradeço a todos pela amizade.

Meus agradecimentos ao professor Nelson Fiedler-Ferrara pela amizade e à professora Carla Goldman pela simpatia.

Por fim, agradeço à Universidade de São Paulo, em particular o Instituto de Física, pelas oportunidades desde a graduação e à FAPESP pelo apoio financeiro a este projeto de mestrado (processo número 01/11280-7).

Resumo

Considere o sistema $\dot{x} = (A + \varepsilon Q(t))x$, com $x \in \mathbb{C}^2$, A uma matriz constante, $Q(t)$ uma matriz quase-periódica e $|\varepsilon|$ um número "pequeno". Além disso, considere as matrizes A e $Q(t)$ anti-Hermitianas. No contexto da Física, essa é a equação de Schrödinger para um sistema quântico de dois níveis submetido a uma perturbação quase-periódica no tempo. Nesta dissertação, estudamos o problema de redutibilidade para essa equação, ou seja, investigamos sob quais condições sobre A, ε e $Q(t)$ a solução dessa equação é quase-periódica. Além da questão matemática, esse problema despertou interesse recentemente no contexto de "caos quântico". Primeiramente, vamos formular o problema de redutibilidade em um contexto geral e analisar duas situações particulares: os sistemas periódicos e as equações escalares quase-periódicas. Em seguida, vamos discutir alguns resultados de redutibilidade presentes na literatura. Por fim, vamos demonstrar dois teoremas de redutibilidade para o sistema acima, seguindo trabalhos da literatura. No primeiro, vamos utilizar um procedimento tipo KAM para controlar os pequenos denominadores. No segundo, vamos combinar o procedimento KAM com o Teorema da Aplicação Inversa.

Abstract

We consider the system $\dot{x} = (A + \varepsilon Q(t))x$, with $x \in \mathbb{C}^2$, A a constant matrix, $Q(t)$ a quasi-periodic matrix and $|\varepsilon|$ a "small" number. Moreover, A and $Q(t)$ are anti-Hermitian. From the Physics point of view this is the Schrödinger equation of a quantum two-level system under a quasi-periodic time perturbation. In this work, we study the reducibility problem for this system, that is, we search for conditions on A, ε and $Q(t)$ under which the solution of the above system is quasi-periodic. In addition to the mathematical question, there is interest in this question in the context of "quantum chaos". We begin formulating the reducibility problem in a general set up and studing two particular cases: periodic systems and quasi-periodic equations in one dimension. Next, we discuss some results about reducibility on the literature. Finally, we prove two theorems of reducibility for the above system following references on the literature. In the first one, we use a KAM procedure to control the small denominators. In the second, we combine the KAM procedure with the Inverse Function Theorem.

Conteúdo

1 Introdução **5**

1.1 O Problema de Redutibilidade 5

1.2 Estabilidade Quântica 6

1.3 Nossos Resultados e a Literatura 8

1.4 Um Roteiro de Leitura 8

2 Redutibilidade **10**

2.1 Formulação do Problema 10

2.2 Sistemas Periódicos. Teorema de Floquet 13

2.3 Equações Escalares Quase-Periódicas 14

2.4 Resultados de Redutibilidade 18

3 Teorema de Redutibilidade I **22**

3.1 Procedimento Iterativo 27

3.2 Normas e Enunciado 31

3.3 Demonstração 34

4 Teorema de Redutibilidade II **46**

4.1 Procedimento Iterativo 47

4.2 Normas e Enunciado 49

4.3 Demonstração 51

4.4 Um Problema Equivalente 63

A Resultados Auxiliares **66**

A.1 Teorema da Aplicação Inversa 66

A.2 Outros Resultados 69

Capítulo 1

Introdução

1.1 O Problema de Redutibilidade

Em sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes $\dot{x} = Ax$ o problema de valor inicial pode ser resolvido por integração direta. Se no instante inicial t_0, $x(t_0) = x_0$, a solução é dada por $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$, onde $e^{(t-t_0)A}$ é a matriz principal do problema. Embora o cálculo dessa exponencial possa ser difícil e trabalhoso, o comportamento qualitativo das soluções pode ser investigado a partir das propriedades da matriz A.

Em equações com coeficientes que dependem do tempo a análise qualitativa é uma questão mais delicada. Não se tem, em geral, uma abordagem direta como no caso de coeficientes constantes. Seria interessante, porém, se pudéssemos *reduzir* a análise qualitativa de tais sistemas ao estudo de equações com coeficientes constantes. De fato, isso é possível para uma classe importante de sistemas, a saber, as equações com coeficientes periódicos.

Considere um sistema $\dot{x} = A(t)x$ com coeficientes periódicos $A(t+T) = A(t)$. O Teorema de Floquet estabelece que qualquer sistema dessa forma pode ser reduzido a um sistema com coeficientes constantes $\dot{y} = By$, através de uma mudança de variáveis não-singular $x = P(t)y$, com $P(t)$ periódica $P(t+T) = P(t)$. Como a transformação $P(t)$ é periódica, e portanto limitada, o comportamento qualitativo das soluções é determinado pelas propriedades da matriz B.

Uma extensão natural é considerar o caso em que a matriz $A(t)$ depende quase-periodicamente do tempo. Equações desse tipo ocorrem em diversos ramos da Física, por exemplo, no estudo de sistemas clássicos Hamiltonianos e sistemas quânticos de dois níveis submetidos a campos externos que dependem quase-periodicamente do tempo. Para estudar essa classe de problemas é conveniente introduzir a seguinte definição (que será formulada de forma mais precisa posteriormente).

Seja $\dot{x} = A(t)x$ uma equação com coeficientes quase-periódicos. Esse sistema é *redutível* se existir uma mudança de variáveis quase-periódica não-singular, que transforme esse sistema em uma equação com coeficientes constantes. Caracterizar os sistemas que são redutíveis é um *problema de redutibilidade*.

Na linguagem acima o Teorema de Floquet implica que *todos* os sistemas periódicos são redutíveis. Entretanto, no caso de coeficientes quase-periódicos esse comportamento não é geral e existem exemplos de sistemas redutíveis e não-redutíveis [25].

Nesta dissertação vamos estudar o problema de redutibilidade em uma classe particular de equações:

$$\dot{x} = (A + \varepsilon Q(t))x, \tag{1.1}$$

onde A é uma matriz constante, $Q(t)$ é uma matriz quase-periódica e $|\varepsilon|$ é um número "pequeno". Em outras palavras, vamos tratar de sistemas com coeficientes constantes sob perturbações quase-periódicas. Por simplicidade, e tendo em mente a aplicação em sistemas de dois níveis, vamos nos restringir às equações em duas dimensões e supor que as matrizes A e $Q(t)$ são anti-Hermitianas.[1] Além disso, vamos supor que $Q(t)$ é quase-periódica com duas freqüências básicas.

A principal dificuldade no estudo desse problema de redutibilidade é a presença de *pequenos denominadores*. Para enfrentar essa dificuldade vamos utilizar um procedimento tipo KAM.

1.2 Estabilidade Quântica

No contexto de equações diferenciais, estudar a redutibilidade do sistema (1.1) é um problema relevante por si só. Não bastasse isso, esse problema tem motivações físicas específicas. Como veremos, se o sistema (1.1) for redutível sua solução será quase-periódica. Determinar condições para que isso aconteça é um caso particular de um problema mais geral em Mecânica Quântica.

Considere um Hamiltoniano que atua em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ e depende do tempo da seguinte forma:

$$H = H_0(x) + V(x, \theta(t)), \tag{1.2}$$

onde x representa as variáveis internas do sistema e $\theta(t) = g_t\,\theta \in \mathscr{M}$ descreve uma variável "externa" dependente do tempo, correspondente à trajetória de um sistema dinâmico clássico em uma variedade $\mathscr{M}$, com medida invariante ergódica μ.

[1] (i) Uma matriz A é anti-Hermitiana se $A^\dagger = -A$, onde $A^\dagger$ é a transposta conjugada de A; (ii) Qualquer matriz anti-Hermitiana é da forma iA', com A' uma matriz Hermitiana. Logo, os autovalores de uma matriz anti-Hermitiana são números imaginários puros.

Nos últimos anos, houve grande interesse no estudo de sistemas quânticos sob interações periódicas e quase-periódicas no tempo. Parte desse interesse se deve ao fato de que tais sistemas constituem um paradigma para o "caos quântico" pois a dinâmica de seus correspondentes clássicos é, em geral, caótica (vide [13] para uma introdução ao tema e [26] para uma revisão). Um exemplo de sistema desse tipo é o modelo para um átomo de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético externo bicromático na aproximação de dipolo [27]. No caso em que o campo externo tem polarização planar a equação de Schrödinger associada a esse sistema é da forma (1.1). Esse exemplo tem uma característica que o torna mais simples: o espaço de Hilbert onde atua o Hamiltoniano tem dimensão finita ($\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$).

Um sistema com Hamiltoniano constante no tempo e definido em um domínio limitado ou confinado por um potencial possui níveis de energia discretos (espectro discreto). Conseqüentemente, a evolução temporal desse sistema é *almost*-periódica (ou quase-periódica em casos particulares). Esse sistema, porém, quando submetido a uma perturbação dependente do tempo pode ter seu comportamento qualitativo alterado. Considerando a evolução *almost*-periódica como sendo o regime estável, podemos formular a seguinte questão de estabilidade: Sob quais condições a evolução associada ao Hamiltoniano (1.2) é estável ? No caso do sistema (1.1) as condições dizem respeito à matriz A, à intensidade ε e à função $Q(t)$. Nesse caso, a pergunta fica: Sob quais condições a solução do sistema é quase-periódica ? Ou ainda, de forma equivalente: Sob quais condições o sistema é redutível ?

O problema de estabilidade pode ser formulado em termos das propriedades espectrais do operador de quase-energia generalizado K,

$$(K\Psi)(\theta) := -i\,\frac{d}{dt}\Psi(g_t\,\theta)\bigg|_{t=0} + (H\Psi)(\theta),$$

que atua no espaço $\mathscr{K} = \mathscr{H} \otimes L^2(\mathscr{M}, d\mu)$.

No caso periódico existe uma relação *unívoca* entre o espectro do operador de quase-energia e o espectro do operador de Floquet. Esse último é definido por $U(T, 0)$, onde $U(t, t_0)$ é o propagador associado a (1.2) e T é o período do potencial. No caso quase-periódico existe uma generalização do operador de Floquet e da sua relação com o operador de quase-energia (vide [14] para uma construção detalhada).

No caso periódico, se o espectro do operador de quase-energia for puro ponto a evolução do sistema é *almost*-periódica. No caso quase-periódico, porém, essa afirmação não vale para todas as fases iniciais θ:

Teorema 1. [1] *Seja $\psi \in \mathscr{H}$ um estado inicial tal que $\psi \otimes 1$ esteja no subespaço puro ponto associado ao operador de quase-energia K. Então a evolução temporal do sistema é almost-periódica para quase todo θ.*

No caso em que o potencial $V(x, \theta(t))$ é quase-periódico com duas freqüências básicas, $\omega \in \mathbb{R}^2$, $\theta(t) = \theta + \omega t$ é uma dinâmica sobre o Toro $\mathscr{M} = \mathbb{T}^2$, com $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $d\mu = (2\pi)^{-2} d\theta_1 d\theta_2$ é uma medida de Lebesgue invariante e ergódica se ω_1/ω_2 for irracional e o operador de quase-energia é dado por

$$K = -i\,\omega \cdot \nabla + H(\theta),$$

onde ∇ é o operador gradiente e $\cdot$ denota o produto escalar: $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Quando $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$ e $H = iA + i\varepsilon Q(t)$ com $Q(t) = V(\theta + \omega t)$, obtemos o operador de quase energia associado ao sistema (1.1). Portanto, tendo em vista o Teorema 1, fixado θ, se o espectro do operador K for puro ponto não podemos afirmar que a solução do sistema (1.1) é quase-periódica. Todavia, vamos demonstrar um teorema de redutibilidade que vale para todo θ e implica evolução quase-periódica.

1.3 Nossos Resultados e a Literatura

Para relacionar nossos resultados com a literatura gostaríamos de citar três referências: o artigo de Blekher, Jauslin e Lebowitz [4], o livro de Bogoljubov, Mitropoliskii e Samoilenko [5] e o artigo de Jorba e Simó [15].

Em poucas palavras, nesta dissertação demonstramos dois resultados de redutibilidade para o sistema (1.1).[2] Primeiramente, demonstramos um teorema de diagonalização (Teorema 9, pág. 33) utilizando um procedimento tipo KAM. Exceto por algumas melhorias não essenciais, nossa demonstração segue passo a passo a referência [4]. Esse resultado estabelece o caráter puro ponto do espectro do operador de quase-energia associado ao sistema (1.1). Utilizando esse teorema, demonstramos um teorema de redutibilidade (Teorema 8, pág. 32). Esse teorema é semelhante a um resultado de [15] e análogo a um resultado de [5] para sistemas hiperbólicos (sistemas da forma (1.1) cuja matriz A tem autovalores com parte real distintas). Por fim, demonstramos outro resultado de redutibilidade combinando o procedimento KAM utilizado anteriormente com o Teorema da Aplicação Inversa para controlar os pequenos denominadores. Esse teorema faz parte de uma análise desenvolvida em [5] sobre a redutibilidade de sistemas hiperbólicos.

1.4 Um Roteiro de Leitura

No Capítulo 2, formulamos o problema de redutibilidade em um contexto geral e analisamos dois casos particulares: os sistemas periódicos e as equações escalares

[2] No Capítulo 2 faremos uma introdução ao problema de redutibilidade e voltaremos a tratar dos resultados na Seção 2.4.

quase-periódicas. No final do capítulo discutimos alguns resultados de redutibilidade presentes na literatura para sistemas da forma $\dot{x} = (A + \varepsilon V(\omega t))x$. Essa discussão serve como introdução ao Capítulo 3, onde consideramos sistemas bidimensionais com matrizes A e $V(\varphi)$ anti-Hermitianas.

No Capítulo 3, demonstramos um resultado de redutibilidade para o sistema acima utilizando um procedimento tipo KAM. Na Seção 4, demonstramos outro resultado desse tipo combinando o procedimento KAM com o Teorema da Aplicação Inversa para controlar os pequenos denominadores. Por fim, discutimos como relacionar esse problema a um problema equivalente: $\dot{y} = (\varepsilon A + V(\omega t))y$.

No apêndice encontra-se uma demonstração detalhada do Teorema da Aplicação Inversa para funções analíticas e também outros resultados auxiliares.

Capítulo 2

Redutibilidade

Primeiramente, vamos formular o problema de redutibilidade em equações diferenciais lineares com coeficientes quase-periódicos em um contexto geral. Em seguida, vamos analisar duas situações particulares: os sistemas periódicos e as equações escalares quase-periódicas. Por fim, apresentamos alguns resultados de redutibilidade para sistemas de dimensão $n \geq 2$ presentes na literatura.

2.1 Formulação do Problema

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é quase-periódica se ela puder ser representada na forma*

$$f(t) = F(\omega_1 t, \ldots, \omega_d t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

onde $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$ e $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ é uma função contínua e 2π-periódica em cada argumento. As constantes $\omega_1, \ldots, \omega_d$ são chamadas freqüências básicas de f. O vetor ω é chamado vetor de freqüências.

Observação 1. *Uma função quase-periódica com uma freqüência básica $(d = 1)$ é uma função periódica.*

Exemplo 1. *A função*

$$f(t) = \cos(t) + \cos(\pi t)$$

é quase-periódica. Nesse caso, $d = 2$, $\omega = (1, \pi)$ e $F(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$.

Definição 2. *$L(t)$ é uma matriz de Lyapunov se $L(t)$ for continuamente diferenciável, não-singular, e $L(t)$, $L^{-1}(t)$ e $\dot{L}(t)$ forem limitadas para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Considere a equação

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

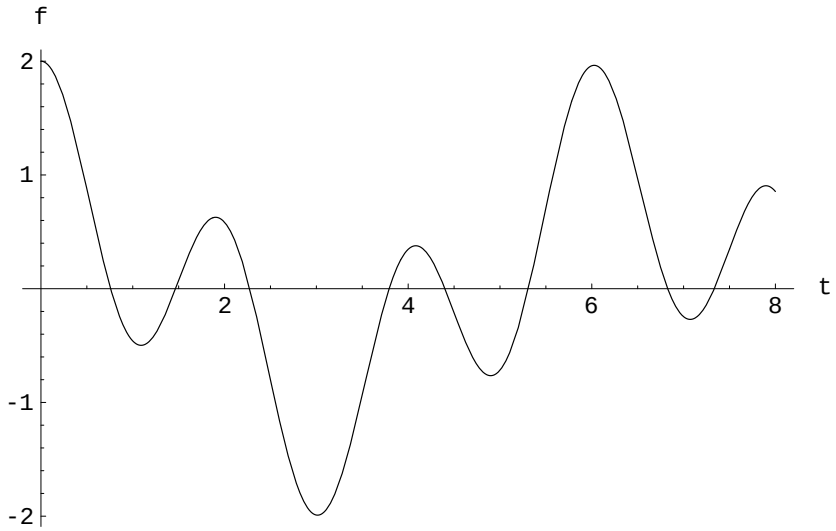

Figura 2.1: Gráfico de $f(t) = \cos(t) + \cos(\pi t)$.

onde $x \in \mathbb{C}^n$ e $A(t)$ é uma matriz quase-periódica com vetor de freqüências $\omega \in \mathbb{R}^d$. Seja

$$x = P(t)y \tag{2.2}$$

uma transformação linear com $P(t)$ uma matriz de Lyapunov $n \times n$ quase-periódica com vetor de freqüências ω (o *mesmo* de $A(t)$). Substituindo essa transformação em (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{P}y + P\dot{y} = APy, \\ \dot{y} = (P^{-1}AP - P^{-1}\dot{P})y, \\ \dot{y} = By, \end{aligned} \tag{2.3}$$

com

$$B = P^{-1}AP - P^{-1}\dot{P}. \tag{2.4}$$

Definição 3 (Redutibilidade)**.** *O sistema* (2.1) *é redutível, se existir uma matriz* $P(t)$*, Lyapunov-quase-periódica com o mesmo vetor de freqüencias de* $A(t)$*, tal que a matriz* B *dada por* (2.4) *seja constante.*

Se o sistema (2.1) for redutível uma matriz fundamental de (2.3) é dada por e^{tB}. Portanto, usando a transformação (2.2), segue que

$$X(t) = P(t)e^{tB} \tag{2.5}$$

é uma matriz fundamental de (2.1). Como $P(t)$ é quase-periódica, o comportamento qualitativo da solução de (2.1) é determinado pelos autovalores da matriz B.

O problema de redutibilidade consiste em caracterizar quais são as matrizes $A(t)$, para as quais a equação (2.4) possui uma solução $P(t)$, Lyapunov-quase-periódica com o mesmo vetor de freqüências de $A(t)$, para alguma matriz B constante. Isso equivale a caracterizar quais são os sistemas (2.1) que admitem uma matriz fundamental da forma (2.5).

A equação (2.4) é equivalente a

$$\dot{P} = A(t)P - PB. \tag{2.6}$$

Essa equação pode ser escrita de forma mais conveniente observando que o operador linear

$$\mathcal{L}(P) = AP - PB$$

pode ser representado por uma matriz em um espaço de dimensão n^2.

Proposição 1. *Seja* $Z \equiv (P_{11}, \ldots, P_{1n}, \ldots, P_{n1}, \ldots, P_{nn}) \in \mathbb{C}^{n^2}$. *A equação* (2.6) *pode ser escrita como*

$$\dot{Z} = (A(t) \otimes I - I \otimes B^T)Z, \tag{2.7}$$

onde $\otimes$ *é o produto direto (ou produto de Kronecker) [19],* I *é matriz identidade* $n \times n$ *e* B^T *é a matriz transposta de* B.

Demonstração. Notação: $A \equiv A(t)$; $I = (\delta_{ij})$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}P_{kj} - \sum_{l=1}^{n} P_{il}B_{lj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} \delta_{jl}P_{kl}\right) - \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}P_{kl}\right)B_{lj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(A_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik}B^T_{jl}\right)P_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left((A \otimes I)_{ij:kl} - (I \otimes B^T)_{ij:kl}\right)P_{kl}.
\end{aligned}$$

Ordenando as componentes P_{ij} em um vetor conforme o enunciado, segue (2.7). ■

Exemplo 2. *Quando* $n = 2$*:*

$$A \otimes I = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & A_{22} \end{pmatrix}; \qquad I \otimes B^T = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} & B_{21} \\ 0 & 0 & B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos utilizar a definição de função quase-periódica para introduzir a seguinte representação:

$$A(t) = F(\omega t), \qquad Z(t) = J(\omega t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

onde F é uma matriz e J é um vetor cujas entradas são funções contínuas de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{C}$, 2π-periódicas em cada argumento. (Note que procuramos $Z(t)$ quase-periódica com o mesmo vetor de freqüências de $A(t)$).

Substituindo (2.8) em (2.7) e usando a regra da cadeia obtemos

$$\omega \cdot \nabla J(\omega t) = (F(\omega t) \otimes I - I \otimes B^T) J(\omega t),$$

onde ∇ é o gradiente em $\mathbb{R}^d$ e $\cdot$ denota o produto escalar: $x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$. Resumindo, o problema que temos é demonstrar a existência de soluções contínuas de

$$\omega \cdot \nabla J(\varphi) = (F(\varphi) \otimes I - I \otimes B^T) J(\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{T}^d, \tag{2.9}$$

onde $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Além disso, a solução deve ser tal que a matriz $P(t)$ associada seja do tipo Lyapunov.

Vamos utilizar a formulação acima do problema de redutibilidade para estudar o sistema $\dot{x} = (A + \varepsilon Q(t))x$. Antes disso, porém, vamos analisar o problema de redutibilidade em dois casos mais simples.

2.2 Sistemas Periódicos. Teorema de Floquet

Nesta seção vamos tratar de equações com coeficientes quase-periódicos com uma freqüência básica ($d = 1$). Em outras palavras, vamos considerar o caso particular de coeficientes periódicos.

Considere a equação

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{2.10}$$

onde $x \in \mathbb{C}^n$ e $A(t)$ é uma matriz periódica de período $T = 2\pi/\omega$.

Nesse caso, a redutibilidade é garantida pelo

Teorema 2 (Floquet)**.** *Se X for uma matriz fundamental de* (2.10)*, então*

$$X_T(t) = X(t + T)$$

também é uma matriz fundamental. Além disso, para cada X existe uma matriz $P(t)$, periódica não-singular de período T, e uma matriz B constante tais que

$$X(t) = P(t)e^{tB}. \tag{2.11}$$

Demonstração. Como $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, então

$$\dot{X}_T(t) = \dot{X}(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X_T(t),$$

onde usamos que $A(t+T) = A(t)$. Como $\det X_T(t) = \det X(t+T) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que X_T é uma matriz fundamental de (2.10).

Lema 1. [6] *Se $X(t+T)$ e $X(t)$ são matrizes fundamentais de um sistema, então existe uma matriz C constante e não-singular tal que*

$$X(t+T) = X(t)C. \tag{2.12}$$

Além disso,

Lema 2. [6] *Dado uma matriz C não-singular e $T > 0$, existe uma matriz B tal que*

$$C = e^{TB}. \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13) segue que

$$X(t+T) = X(t)e^{TB}. \tag{2.14}$$

Seja

$$P(t) = X(t)e^{-tB}. \tag{2.15}$$

Usando (2.14) conclui-se que $P(t)$ é uma matriz periódica de período T:

$$P(t+T) = X(t+T)e^{-(t+T)B} = X(t)e^{TB}e^{-(t+T)B} = X(t)e^{-tB} = P(t).$$

Como $X(t)$ e e^{-tB} são matrizes não-singulares para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que $P(t)$ é uma matriz não-singular. De (2.15) segue (2.11). ■

Tendo em vista o que apresentamos na Seção 2.1, é evidente que o Teorema de Floquet implica redutibilidade para todos os sistemas periódicos. A matriz fundamental (2.11) é exatamente da forma (2.5).

2.3 Equações Escalares Quase-Periódicas

Na seção anterior consideramos equações com coeficientes periódicos ($d = 1$). Agora, vamos tratar de sistemas quase-periódicos com d freqüências. Entretanto, vamos nos restringir às equações em uma dimensão ($n = 1$).

Para estudar a redutibilidade de equações escalares quase-periódicas temos que lidar com um problema de pequenos denominadores. No entanto, em uma dimensão

esse problema é considerávelmente mais simples pois os termos da equação (2.6) comutam.

Considere a equação

$$\dot{x} = a(t)x, \tag{2.16}$$

onde $x \in \mathbb{C}$ e $a(t)$ é uma função quase-periódica com vetor de freqüências $\omega \in \mathbb{R}^d$. Essa equação pode ser integrada diretamente, entretanto, como estamos interessados em ilustrar o problema de redutibilidade, vamos proceder de outra forma.

A equação (2.6) associada a (2.16) fica

$$\dot{p} = (a(t) - b)p, \tag{2.17}$$

onde b é uma constante. Recordando, o problema é caracterizar quais são as funções $a(t)$, para as quais a solução de (2.17) é uma função quase-periódica com vetor de freqüências ω, para alguma constante b.

Escolhendo $t_0 = 0$, a solução de (2.17) é dada por

$$p(t) = \exp\left(\int_0^t (a(s) - b)\, ds\right) p(0). \tag{2.18}$$

Portanto, a solução $p(t)$ será quase-periódica se a integral

$$g(t) := \int_0^t (a(s) - b)\, ds \tag{2.19}$$

for quase-periódica.

Teorema 3 (P. Bohl)**.** [8] *A primitiva de uma função quase-periódica é quase-periódica se e somente se for limitada na reta real.*

Logo, para provar que $p(t)$ é uma função quase-periódica temos que mostrar que a integral (2.19) é limitada em $\mathbb{R}$.

Definição 4. *Seja f uma função quase-periódica. O valor médio de f é definido por*

$$\overline{f} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s)\, ds.$$

Observação 2. *O limite $\overline{f}$ existe para qualquer função quase-periódica (vide [8] para uma demonstração).*

É fácil de ver que a integral (2.19) será não-limitada se o valor médio de

$$a(s) - b$$

for diferente de zero. Nesse caso, $g(t)$ teria um termo da forma $(\overline{a} - b)t$, que é claramente não-limitado. Portanto, para que a média de $a(s) - b$ seja nula é necessário escolher

$$b = \overline{a}.$$

Contudo, essa escolha é necessária, porém não suficiente para que a integral $g(t)$ seja limitada.

Vamos supor que $a(t) = F(\omega t)$ seja uma função quase-periódica que possui uma série de Fourier convergente:

$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} F_k \, e^{ik \cdot \omega t} \qquad \forall \; t \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Conseqüentemente,

$$a(t) - b = a(t) - \overline{a} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} F_k \, e^{ik \cdot \omega t}.$$

Observando como a derivada atua na representação de Fourier,

$$\dot{a}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} ik \cdot \omega \, F_k \, e^{ik \cdot \omega t},$$

concluímos de (2.19) que

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G_k(\omega) \, e^{ik \cdot \omega t}, \tag{2.21}$$

com

$$G_k(\omega) = \begin{cases} \dfrac{F_k}{ik \cdot \omega} & \text{se } k \neq 0, \\ -\displaystyle\sum_{q \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \dfrac{F_q}{iq \cdot \omega} & \text{se } k = 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

desde que

$$k \cdot \omega \neq 0 \qquad \forall \; k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}. \tag{2.23}$$

Definição 5. *Um vetor de freqüências $\omega \in \mathbb{R}^d$ é não-ressonante se a condição* (2.23) *for satisfeita.*

Daqui em diante, vamos supor que ω é um vetor de freqüências não-ressonante.

Enfatizamos que a solução formal (2.21) com (2.22) é compatível com (2.19):

$$g(0) = 0;$$

$$\dot{g}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} F_k \, e^{ik \cdot \omega t} = a(t) - \overline{a}.$$

Todavia, mesmo que o vetor ω seja não-ressonante, é possível que o produto

$$k \cdot \omega$$

se aproxime de zero *arbitrariamente*, impedindo a convergência de (2.21). Para que $g(t)$ seja uma função quase-periódica é suficiente que a série (2.21) em valor absoluto,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \left| \frac{F_k}{k \cdot \omega} \right|,$$

convirja. Por razões óbvias, essa análise é o que se chama de um *problema de pequenos denominadores.*

Para estimar os coeficientes (2.22) temos que supor que o vetor de freqüências ω não esteja muito próximo de vetores ressonantes. No entanto, não podemos esperar que os denominadores $k \cdot \omega$ sejam uniformemente limitados inferiormente pois o conjunto $\{k \cdot \omega,\, k \in \mathbb{Z}^d\}$ é denso em $\mathbb{R}$. Contudo, vamos supor que esses denominadores sejam limitados inferiomente por potências de

$$|k| := |k_1| + \cdots + |k_d|.$$

Definição 6. *Um vetor de freqüências $\omega \in \mathbb{R}^d$ é Diophantino, se existirem constantes $\gamma > 0$ e $\sigma > d-1$ tais que*

$$|k \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|k|^\sigma} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}. \tag{2.24}$$

É possível demonstrar que todos os vetores de freqüências em $\mathbb{R}^d$, com exceção de um conjunto de medida de Lebesgue nula, satisfazem a condição Diophantina (2.24) para algum $\gamma > 0$ e $\sigma > d-1$.

Tendo em vista (2.22) e (2.24), para que a série (2.21) seja convergente é necessário que os coeficientes de Fourier F_k decaiam suficientemente rápido para vencer a potência $|k|^\sigma$. Em geral, os coeficientes de Fourier de funções quase-periódicas não têm essa propriedade. No entanto, se F for uma função suficientemente regular essa condição é satisfeita.

Suponha que F é de classe $C^r(\mathbb{T}^d)$, onde r é um número natural (satisfazendo uma cota inferior que será especificada adiante) ou ∞. Considere o conjunto

$$\mathcal{D}_r = \left\{ F \in L^2(\mathbb{T}^d) : \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |k|^r\, |F_k| < \infty \right\},$$

onde L^2 é o espaço das funções de quadrado integrável. Então (vide [22] e [25]),

$$\mathcal{D}_{r+d+1} \subset C^r(\mathbb{T}^d) \subset \mathcal{D}_r.$$

Se $F \in C^r(\mathbb{T}^d)$, segue que

$$|F_k| \leq c\, |k|^{-r} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.25}$$

para alguma constante c positiva. As desigualdades (2.24) e (2.25) implicam

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |k|^{r-\sigma} |G_k| < \sup_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |k|^{r-\sigma} \frac{|F_k|}{|k \cdot \omega|} \leq c\, \gamma^{-1} < \infty \tag{2.26}$$

se $r > \sigma$. Logo, concluímos que $G \in \mathcal{D}_{r-\sigma} \subset C^{r-\sigma-d-1}(\mathbb{T}^d)$. Além disso, (2.26) implica que a série (2.21) é convergente.

Tendo em vista esses resultados, demonstramos o seguinte

Teorema 4. *Seja $a(t) = F(\omega t)$ uma função quase-periódica. Se ω for um vetor de freqüências Diophantino com constantes γ e σ, e F for de classe $C^r(\mathbb{T}^d)$ com $r \geq \sigma + d + 1$, então a equação*

$$\dot{x} = a(t)x \tag{2.27}$$

é redutível com $b = \overline{a}$. Nesse caso, $p(t)$ é dado por (2.18).

Como vimos, mesmo em uma dimensão a questão sobre redutibilidade não é trivial e requer cuidado na análise de convergência da solução. Em geral, para funções $a(t)$ que não sejam suficientemente suaves a série (2.21) é divergente e a equação (2.27) não é redutível.

Observação 3. (Vide [22] e [25]). *Seja*

$$\mathcal{A}_r = \left\{ F \in L^2(\mathbb{T}^d) : \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{r|k|} \, |F_k| < \infty \right\}$$

o conjunto das funções de $L^2(\mathbb{T}^d)$ que são analíticas na "faixa"

$$\{z \in \mathbb{C}^d \, : \, |\mathrm{Im}\, z_j| < r, \, j = 1, \ldots, d\}.$$

Podemos tratar o caso em que $a(t) = F(\omega t)$ é analítica considerando o conjunto $\mathcal{A}_r$ no lugar do conjunto $\mathcal{D}_r$. Nesse caso, o parâmetro $r > 0$ seria contínuo e a restrição $r \geq \sigma + d + 1$ não seria necessária.

Observação 4. *O resultado do Teorema 4 não depende da norma da função $a(t)$. Isso é o que se chama de um resultado não perturbativo.*

Observação 5. *O Teorema 4 pode ser estendido diretamente para sistemas diagonais cujas entradas satisfazem as hipóteses do mesmo.*

2.4 Resultados de Redutibilidade

Agora, vamos apresentar brevemente alguns resultados de redutibilidade para sistemas de dimensão $n \geq 2$ presentes na literatura.[1] Um dos objetivos desta seção é servir de introdução para o próximo capítulo, onde vamos demonstrar dois teoremas de redutibilidade.

Historicamente, os primeiros resultados de redutibilidade surgiram no contexto de sistemas hiperbólicos sob perturbações quase-periódicas. No caso linear, esses sistemas são da forma $\dot{x} = (A + \varepsilon Q(t))x$, onde os autovalores de A têm parte real distintas:

$$|\mathrm{Re}\, a_i - \mathrm{Re}\, a_j| \geq \delta > 0 \qquad \forall \, i \neq j. \tag{2.28}$$

[1] Para uma introdução mais completa sugerimos a referência [25].

Resultados e referências nesse contexto — principalmente da literatura soviética — podem ser encontrados no livro de Bogoljubov, Mitropoliskii e Samoilenko [5]. Um desses resultados é o seguinte:

Teorema 5. [5] *Seja* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Considere o sistema*

$$\dot{x} = (A + \varepsilon V(\omega t))x. \tag{2.29}$$

Suponha que:

(*i*) $V(\varphi)$ *é uma matriz* 2π*-periódica em* φ*, real-analítica na faixa*

$$\{z \in \mathbb{C}^d : |\mathrm{Im}\, z_j| < r,\ j = 1, \ldots, d\};$$

(*ii*)

$$|k \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|k|^\sigma} \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \qquad \textit{com} \qquad \gamma, \sigma > 0;$$

(*iii*) *Os autovalores de* A *satisfazem* (2.28) *(sistema hiperbólico).*

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, se* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$*, o sistema acima é redutível para o sistema*

$$\dot{y} = By,$$

com B *uma matriz constante, através de uma mudança de variáveis*

$$x = P(t)y,$$

onde $P(t) = F(\omega t)$ *é uma matriz de Lyapunov quase-periódica com* $F(\varphi)$ *real-analítica na faixa*

$$\{z \in \mathbb{C}^d : |\mathrm{Im}\, z_j| < r/2,\ j = 1, \ldots, d\}. \tag{2.30}$$

Para demonstrar o teorema acima os autores utilizam um procedimento KAM semelhante ao que utilizamos nesta dissertação.

No Capítulo 3, vamos demonstrar um teorema de redutibilidade semelhante ao teorema acima, mas para sistemas bidimensionais cuja matriz A tem autovalores imaginários puros (sistemas não-hiperbólicos ou elípticos) (Teorema 8, pág. 32). Nesse caso, a condição (*ii*) do teorema acima não é suficiente para controlar os pequenos denominadores. Isso torna necessário excluir um conjunto "pequeno" de freqüências ω ressonantes, o que leva a um resultado que vale para um conjunto de freqüências.

Uma forma alternativa de controlar os pequenos denominadores (que é clássica no contexto de KAM) é a seguinte. Reescreva o sistema (2.29) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \varepsilon V(\omega t) + \xi - \xi)x, \\ &= (B + \varepsilon V(\omega t, \xi) - \xi)x, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde cometemos um abuso de notação pois fizemos a hipótese de que $V(\varphi)$ pode depender do parâmetro ξ. (Note que, em particular, podemos ter $V(\varphi, \xi) = V(\varphi)$). Agora, pode-se tentar encontrar quais são os ξ (de ordem ε), para os quais o sistema acima é redutível para $\dot{y} = By$. Isso equivale a determinar quais são as matrizes $A = B - \xi$ que são redutíveis para B.

Para seguir essa estratégia é necessário impor uma condição Diophantina sobre os autovalores $\{b_j\}$ da matriz B. Mais precisamente, é preciso supor que existem constantes $\gamma, \sigma > 0$ tais que

$$|ik \cdot \omega + b_i - b_j| \geq \frac{\gamma}{|k|^\sigma} \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ i, j = 1, \ldots, d. \tag{2.32}$$

Em [5], seguindo essa estratégia os autores demonstram o seguinte teorema:

Teorema 6. [5] *Considere o sistema de equações* (2.31) *com a condição Diophantina* (2.32). *Suponha que $V(\varphi, \xi)$ é real-analítica em*

$$\{z \in \mathbb{C}^d : |\mathrm{Im}\, z_j| < r,\ j = 1, \ldots, d\} \times \{\xi : \|\xi\| < s\},$$

com $\|\cdot\|$ uma norma de matrizes. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma matriz ξ_0 constante e real, com $\|\xi_0\| < 2\varepsilon_0$, tais que, se $\varepsilon < \varepsilon_0$, o sistema (2.31) *com ξ_0 é redutível para o sistema*

$$\dot{y} = By$$

através de uma mudança de variáveis

$$x = P(t)y,$$

onde $P(t) = F(\omega t)$ é uma matriz de Lyapunov quase-periódica com $F(\varphi)$ real-analítica na faixa (2.30).

O resultado acima é obtido combinando o procedimento KAM com o Teorema da Aplicação Inversa, que utiliza o parâmetro ξ para controlar os pequenos denominadores que aparecem durante o procedimento.

Na Seção 4, com base em [5] vamos demonstrar um resultado de redutibilidade semelhante ao Teorema 6, mas com pequenas diferenças nas hipóteses (voltaremos a esse ponto adiante). Em particular, nosso teorema considera matrizes ξ_0 imaginárias.

No teorema acima o sistema é reduzido para a matriz B. Logo, é interessante investigar quantos sistemas em torno do sistema não perturbado são redutíveis para B. Uma aplicação do Teorema 6 juntamente com algumas proposições métricas (resultados de medida) implicam o seguinte teorema:

Teorema 7. [5] *Seja* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Considere o sistema*

$$\dot{x} = (A + \varepsilon V(\omega t, \varepsilon))x.$$

Suponha que:

(*i*) $V(\varphi, \varepsilon)$ *é real-analítica em uma vizinhança de* $\mathbb{T}^d \times \{0\}$*;*

(*ii*) ω *é um vetor de freqüências Diophantino.*

Defina $\mathfrak{R}(\varepsilon; V)$ *como sendo o conjunto de matrizes* A*, com* $\|A\| < 1$*, para os quais o sistema acima é redutível. Considere a medida de Lebesgue* $\mathscr{L}$ *normalizada desse conjunto. Então, se* ε *for suficientemente pequeno,*

$$\mathscr{L}(\mathfrak{R}(\varepsilon; V)) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon^{\alpha}}, \tag{2.33}$$

onde $\alpha > 0$ *é uma constante adequada que depende de* V *e das constantes* γ *e* σ *da condição Diophantina sobre* ω.

Nesta dissertação, nos restringimos aos resultados análogos aos Teoremas 5 e 6 para um particular sistema do tipo (4.1). Não realizamos a análise de medida do teorema acima.

Em problemas práticos, tanto a matriz A quanto a perturbação V (dependendo de *um* parâmetro ε) estão fixas, e procura-se conhecer o conjunto de ε para os quais o sistema é redutível. (Observe que o Teorema 6 exige a modificação da matriz não perturbada, o que não se pode fazer em aplicações). Nesse ponto, depara-se com o problema de *ausência de parâmetros* na teoria KAM. Todavia, conforme [25], tornou-se evidente após os trabalho de Eliasson (vide [9] e referências adicionais em [25], pág. 99) que o controle das ressonâncias e pequenos denominadores pode ser feito utilizando apenas um parâmetro. De fato, resultados de redutibilidade utilizando apenas o parâmetro ε para sistemas da forma (4.1) foram apresentados em [15] e [16]. (Em [16] também foi melhorada a estimativa (2.33), que na verdade é exponencial em ε).

Capítulo 3

Teorema de Redutibilidade I

Na Seção 2.3, a análise que fizemos com a equação escalar foi possível pois os termos da equação (2.6) comutam em uma dimensão. No entanto, em dimensões maiores isso não ocorre. Nesse caso, o estudo do problema de redutibilidade é sensívelmente mais complicado e requér métodos mais elaborados.

Neste capítulo, vamos estudar o problema de redutibilidade para o sistema a seguir. Seja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$. Considere o sistema

$$\dot{x} = (A + \varepsilon Q(t))x, \tag{3.1}$$

onde A é uma matriz constante, $Q(t)$ é uma matriz quase-periódica com vetor de freqüências $\omega \in \mathbb{R}^2$ (consideramos $d = 1$ por simplicidade) e $|\varepsilon|$ é um número "pequeno". Além disso, vamos supor que as matrizes A e $Q(t)$ são anti-Hermitianas.

Como $Q(t)$ é quase-periódica,

$$Q(t) = V(\omega t),$$

onde $V(\varphi)$ é uma matriz 2π-periódica em cada componente de $\varphi \in \mathbb{R}^2$. Vamos supor que as entradas de V são funções analíticas na faixa

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r,\ j = 1, 2\}.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor também que a matriz A é diagonal:[1]

$$A := \operatorname{diag}\{a_1, a_2\} \equiv \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Nesta seção, vamos demonstrar um resultado de redutibilidade para o sistema (3.1) utilizando um procedimento tipo KAM. A grosso modo, o resultado obtido é válido para ε "pequeno" e para um conjunto "grande" de freqüências ω.

[1] Se A não fosse diagonal, poderíamos mudar para uma base onde A fosse diagonal e redefinir Q.

Com base no que foi feito na Seção 2.1, para estudar a redutibilidade de (3.1) vamos partir da equação (2.9) com $n = 2$, $d = 2$ e $F(\varphi) = A + \varepsilon V(\varphi)$, ou seja,

$$\omega \cdot \nabla J(\varphi) = ((A + \varepsilon V(\varphi)) \otimes I - I \otimes B^T) J(\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{T}^2, \tag{3.2}$$

onde $J(\omega t) = Z(t) = (P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22})(t)$.

Vamos procurar uma solução $P(t)$ de (2.6) (ou $J(\varphi)$ de (3.2)) que seja unitária: $P^{-1}(t) = P^{\dagger}(t)$. Dessa forma,

$$P^{\dagger} P = I,$$

$$\frac{d}{dt}(P^{\dagger} P) = \dot{P}^{\dagger} P + P^{\dagger} \dot{P} = 0,$$

$$\dot{P}^{\dagger} P = -P^{\dagger} \dot{P}.$$

Essa identidade juntamente com (2.4) implica B anti-Hermitiana pois

$$B^{\dagger} = (P^{\dagger} A P + P^{\dagger} \dot{P})^{\dagger} = -P^{\dagger} A P + \dot{P}^{\dagger} P = -P^{\dagger} A P - P^{\dagger} \dot{P} = -B.$$

Portanto, sem perda se generalidade, vamos procurar $P(t)$ (ou $J(\varphi)$) tal que a matriz B seja diagonal:

$$B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2\}.$$

Observação 6. *Se o sistema* (3.1) *for redutível, a solução será quase-periódica pois a matriz fundamental é da forma*

$$X(t) = P(t) e^{tB} = P(t) \begin{pmatrix} e^{t\, b_1} & 0 \\ 0 & e^{t\, b_2} \end{pmatrix},$$

com $P(t)$ quase-periódica e b_1, b_2 números imaginários puros.

Observando (3.1), quando $\varepsilon \to 0$ devemos ter

$$X(t) = P(t) e^{tB} \to e^{tA},$$

ou seja,

$$B \to A \qquad \text{e} \qquad P(t) \to I.$$

Isso implica B e $P(t)$ da forma

$$B = A + \varepsilon M \qquad \text{e} \qquad P(t) = I + \varepsilon N(t),$$

onde

$$M = \operatorname{diag}\{m_1, m_2\}$$

é uma matriz diagonal, constante e anti-Hermitiana e $N(t)$ é quase-periódica (com vetor de freqüências ω). Portanto,

$$I \otimes B^T = I \otimes B = I \otimes (A + \varepsilon M), \tag{3.3}$$

pois B é diagonal.

Substituindo (3.3) em (3.2) obtemos

$$(-\omega \cdot \nabla + A \otimes I - I \otimes (A + \varepsilon M) + \varepsilon V(\varphi) \otimes I) J(\varphi) = 0. \tag{3.4}$$

Vale lembrar que essa equação está associada a

$$\left(-\frac{d}{dt} + (A + \varepsilon V(\omega t)) \otimes I - I \otimes (A + \varepsilon M) \right) Z = 0,$$

ou ainda,

$$-\dot{P} + (A + \varepsilon V(\omega t))P - P(A + \varepsilon M) = 0.$$

Seja

$$\beta := a_1 - a_2.$$

Vamos introduzir uma notação mais compacta:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= A \otimes I - I \otimes (A + \varepsilon M) = \operatorname{diag}\{-\varepsilon m_1, \beta - \varepsilon m_2, -\beta - \varepsilon m_1, -\varepsilon m_2\} \\ &\equiv \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_4\}, \end{aligned}$$

$$V_0 := \varepsilon V \otimes I = \varepsilon \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & V_{12} & 0 \\ 0 & V_{11} & 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 & V_{22} & 0 \\ 0 & V_{21} & 0 & V_{22} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

e

$$Q_0 := -\omega \cdot \nabla + \Lambda + V_0(\varphi).$$

Com essa notação a equação (3.4) fica:

$$(Q_0 J)(\varphi) = 0. \tag{3.6}$$

O operador Q_0 é a soma de um operador diferencial com um operador de multiplicação que atua sobre vetores de $\mathbb{C}^4$ cujas entradas são funções 2π-periódicas em cada argumento. Mais precisamente, Q_0 atua em

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{T}^2) \equiv \mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{T}^2).$$

Para resolver (3.6) procuramos uma mudança de variáveis que transforme Q_0 em um operador diagonal (em uma base que vamos introduzir a seguir). Nessa base a equação (3.6) pode ser resolvida facilmente.

Para representar os vetores de $\mathbb{C}^4$ vamos utilizar a base canônica

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

com o produto interno usual:

$$\langle x, y\rangle := x_1\overline{y_1} + \cdots + x_4\overline{y_4}.$$

Com isso, um vetor $J \in \mathbb{C}^4$ pode ser representado por

$$J = \sum_{m=1}^{4} J^m\, e_m, \qquad J^m = \langle J, e_m\rangle.$$

Para representar as funções de $L^2(\mathbb{T}^2)$ vamos utilizar a base de Fourier

$$\{e^{ik\cdot\varphi},\, k \in \mathbb{Z}^2\}$$

com o produto interno

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(\varphi)g^*(\varphi)\, d\varphi.$$

Dessa forma, qualquer função $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ pode ser representada por

$$f(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k\, e^{ik\cdot\varphi},$$

com

$$f_k = \langle f, e^{ik\cdot\varphi}\rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(\varphi)\, e^{-ik\cdot\varphi}\, d\varphi.$$

Em resumo, temos que

$$\{v_{m,k}\} \equiv \{e_m \otimes e^{ik\cdot\varphi},\, k \in \mathbb{Z}^2,\, m = 1, \ldots, 4\} \tag{3.7}$$

é uma base completa para $\mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{T}^2)$, ou seja, qualquer vetor $J(\varphi) \in \mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{T}^2)$ pode ser representado por

$$J(\varphi) = \sum_{m=1}^{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} J_k^m\, e_m\, e^{ik\cdot\varphi} \qquad \text{com} \qquad J_k^m = \left\langle \langle J, e_m\rangle, e^{ik\cdot\varphi}\right\rangle_{L^2}. \tag{3.8}$$

Observação 7. *Seja $D = -\omega\cdot\nabla + C$ com $C = \operatorname{diag}\{c_1, \ldots, c_4\}$.*

$$(DJ)(\varphi) = \sum_{m=1}^{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (-ik\cdot\omega + c_m)\, J_k^m\, e_m\, e^{ik\cdot\varphi}$$

pois

$$(D\, v_{m,k})(\varphi) = \eta_{m,k}\, v_{m,k}(\varphi) \qquad \textit{com} \qquad \eta_{m,k} = -ik\cdot\omega + c_m.$$

D é o que chamamos de um operador diagonal.

Vamos construir uma transformação unitária

$$R(\varphi) = e^{\mathcal{W}(\varphi)} \otimes I \equiv e^{W(\varphi)},$$

com $\mathcal{W}^\dagger(\varphi) = -\mathcal{W}(\varphi)$ (ou $W^\dagger(\varphi) = -W(\varphi)$), que transforme Q_0 em um operador diagonal na base $\{v_{m,k}\}$, ou seja, procuramos R tal que

$$RQ_0R^\dagger = -\omega \cdot \nabla + \Lambda + G, \tag{3.9}$$

com

$$G = \varepsilon M \otimes I = \varepsilon \operatorname{diag}\{m_1, m_1, m_2, m_2\} \equiv \operatorname{diag}\{g_1, \ldots, g_4\}.$$

Vamos introduzir mais uma notação:

$$\begin{aligned} S := \Lambda + G &= (A + \varepsilon M) \otimes I - I \otimes (A + \varepsilon M) \\ &= \operatorname{diag}\{0, \beta + \varepsilon(m_1 - m_2), -\beta + \varepsilon(m_2 - m_1), 0\} \equiv \operatorname{diag}\{s_1, \ldots, s_4\}. \end{aligned}$$

Seja

$$J_R(\varphi) = RJ(\varphi). \tag{3.10}$$

Aplicando R em (3.6) obtemos

$$RQ_0R^\dagger R\, J = 0, \tag{3.11}$$

$$(-\omega \cdot \nabla + S)J_R = 0. \tag{3.12}$$

Equivalentemente a (3.10),

$$Z_R(t) = R(\omega t)Z(t) \qquad \text{e} \qquad P_R(t) = e^{\mathcal{W}(\omega t)}P(t). \tag{3.13}$$

Conseqüentemente, (3.12) esta associada a

$$\left(-\frac{d}{dt} + S\right) Z_R = 0,$$

ou ainda,

$$-\dot{P}_R + (A + \varepsilon M)P_R - P_R(A + \varepsilon M) = 0.$$

A equação acima pode ser resolvida facilmente. A solução é:

$$P_R(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2\, e^{[\beta + \varepsilon(m_1 - m_2)]t} \\ -\eta_2^*\, e^{[-\beta + \varepsilon(m_2 - m_1)]t} & \eta_1^* \end{pmatrix},$$

onde $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ são constantes arbitrárias tais que $|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 = 1$. (As constantes $\{(P_R)_{ij}(0)\}$ foram escolhidas de modo que a matriz $P_R(t)$ seja unitária: $(P_R)_{11}(0) = (P_R)^*_{22}(0)$ e $(P_R)_{12}(0) = -(P_R)^*_{21}(0)$). Como $\beta + \varepsilon(m_1 - m_2)$ é um número imaginário puro, $P_R(t)$ é periódica.

Por fim, conforme (3.13), aplicando a transformação inversa $R^\dagger$ obtemos

$$P(t) = e^{-\mathcal{W}(\omega t)} P_R(t). \tag{3.14}$$

Como $e^{-\mathcal{W}(\varphi)}$ e P_R são unitárias, concluímos que $P(t)$ é uma matriz de Lyapunov quase-periódica unitária com vetor de freqüências ω.

Para construir a transformação $R(\varphi)$, vamos implementar um procedimento iterativo de diagonalização parcial no espírito de KAM.

No Teorema 8, enunciamos um resultado de redutibilidade para o sistema (3.1) que é demonstrado posteriormente. Em seguida, na Seção 4, combinando o procedimento KAM com o Teorema da Aplicação Inversa vamos demonstrar outro resultado de redutibilidade, enunciado no Teorema 10.

3.1 Procedimento Iterativo

A transformação $R(\varphi)$ unitária tal que

$$RQ_0R^\dagger = -\omega \cdot \nabla + \Lambda + G$$

será construída iterativamente:

$$R = \cdots R_n \cdots R_2 R_1.$$

Seja

$$G_n = \varepsilon M_n \otimes I \equiv \operatorname{diag}\{g_n(1), \ldots, g_n(4)\}$$

com M_n uma matriz constante anti-Hermitiana. O n-ésimo passo da iteração é definido da seguinte forma. Partimos do operador

$$Q_n := D_n + V_n, \qquad D_n := -\omega \cdot \nabla + \Lambda + G_n, \qquad n \geq 0,$$

onde $G_0 := 0$ e $V_n(\varphi)$ é uma perturbação de ordem ε^{2^n} da forma (3.5). Vamos supor também que V_n é uma matriz anti-Hermitiana.[2] A cada passo, a ordem da perturbação dependente de φ vai de ε^{2^n} para $\varepsilon^{2^{n+1}}$.

Considere a transformação unitária

$$R_{n+1} := e^{W_{n+1}}$$

com $W_{n+1}^\dagger = -W_{n+1}$. Usando a expressão

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \cdots$$

[2]Vamos demonstrar que o procedimento iterativo preserva a forma das matrizes V_n.

obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1} &:= R_{n+1} Q_n R_{n+1}^{\dagger} \\
&= e^{W_{n+1}} (D_n + V_n) e^{-W_{n+1}} \\
&= D_n + V_n + [W_{n+1}, D_n] + V_{n+1},
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
V_{n+1} &:= [W_{n+1}, V_n] + \frac{1}{2!}[W_{n+1}, [W_{n+1}, Q_n]] + \frac{1}{3!}[W_{n+1}, [W_{n+1}, [W_{n+1}, Q_n]]] + \cdots \\
&= \left[W_{n+1}, \frac{[W_{n+1}, D_n]}{2!} + V_n\right] + \left[W_{n+1}, \left[W_{n+1}, \frac{[W_{n+1}, D_n]}{3!} + \frac{V_n}{2!}\right]\right] +
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Note que, separamos em (3.15) os termos da ordem de V_n e deixamos os termos de ordem superior em V_{n+1}. Para isso, supomos que W_{n+1} é da mesma ordem do que V_n, o que será justificado *a posteriori*.

Agora, W_{n+1} será escolhido de modo que elimine de (3.15) os termos da ordem de V_n que dependem de φ, ou seja, procuramos uma matriz diagonal

$$
\Theta_n = \operatorname{diag}\{\theta_n(1), \ldots, \theta_n(4)\}
$$

não dependente de φ e W_{n+1} tais que

$$
V_n + [W_{n+1}, D_n] = \Theta_n. \tag{3.17}
$$

Para resolver a equação acima vamos representar os operadores em termos de seus elementos de matriz na base $\{v_{m,k}\}$ (vide (3.7), pág. 25). Considere o operador W_{n+1}. Vamos utilizar a seguinte notação:

$$
\begin{aligned}
W_{n+1}(m, m'; k - k') &:= \left\langle e^{ik\cdot\varphi}, \langle e_m, W_{n+1}(\varphi)\, e_{m'}\rangle\, e^{ik'\cdot\varphi} \right\rangle_{L^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \langle e_m, W_{n+1}(\varphi)\, e_{m'}\rangle^* \, e^{i(k-k')\cdot\varphi}\, d\varphi,
\end{aligned}
$$

com $m, m' \in \{1, \ldots, 4\}$ e $k, k' \in \mathbb{Z}^2$. Fazendo o mesmo para V_n e para os operadores diagonais G_n e D_n obtemos

$$
\begin{aligned}
V_n(m, m'; k - k') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} (e_m, V_n(\varphi)\, e_{m'})^* \, e^{i(k-k')\cdot\varphi}\, d\varphi, \\
G_n(m, m'; k - k') &= g_n(m)\, \delta_{k-k',0}\, \delta_{m,m'}, \\
D_n(m, m'; k, k') &= d_n(m, k)\, \delta_{k,k'}\, \delta_{m,m'},
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker e

$$
d_n(m, k) := -ik \cdot \omega + \lambda_m + g_n(m).
$$

Observação 8. *Os elementos de matriz de W_{n+1}, V_n e G_n dependem somente da diferença $k-k'$. Isso não ocorre com $D_n(m,m';k,k')$, entretanto, a diferença $d_n(m,k)-d_n(m',k') = -i(k-k')\cdot\omega+\lambda_m-\lambda_{m'}+g_n(m)-g_n(m')$ tem essa propriedade.*

Observação 9. *Seja X_n igual a V_n, G_n ou D_n. Segue de* (3.18) *que*

$$X_n(m',m;k',k)^* = -X_n(m,m';k,k'),$$

pois $g_n(m)$ e $d_n(m,k)$ são números imaginários puros e $V_n^\dagger = -V_n$. Portanto, V_n, G_n e D_n são operadores anti-Hermitianos em $\mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{T}^2)$.

Notação: $\mathcal{M} := \{1,2,3,4\}$.

$$\begin{aligned}
&[W_{n+1}, D_n](m,m';k-k') \\
&= \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} W_{n+1}(m,l;k-q)D_n(l,m';q,k') - D_n(m,l;k,q)W_{n+1}(l,m';q-k') \\
&= \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} W_{n+1}(m,l;k-q)d_n(m',k')\delta_{l,m'}\delta_{q,k'} - d_n(m,k)\delta_{l,m}\delta_{q,k}W_{n+1}(l,m';q-k') \\
&= W_{n+1}(m,m';k-k')(d_n(m',k') - d_n(m,k)). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Em termos dos elementos de matriz, a equação (3.17) fica:

$$V_n(m,m';k-k') + W_{n+1}(m,m';k-k')(d_n(m',k') - d_n(m,k)) = \theta_n(m)\,\delta_{m,m'}\,\delta_{k,k'}. \qquad (3.20)$$

Quando $k=k'$ e $m=m'$, segue de (3.20) que

$$\theta_n(m) = V_n(m,m;0).$$

Nesse caso, $W_{n+1}(m,m;0)$ é arbitrário. Em particular, vamos escolher

$$W_{n+1}(m,m;0) := 0 \qquad \forall\, m\in\mathcal{M}. \qquad (3.21)$$

Quando $k\neq k'$ ou $m\neq m'$,

$$W_{n+1}(m,m';k-k') = \frac{V_n(m,m';k-k')}{d_n(m,k)-d_n(m',k')}, \qquad (3.22)$$

ou seja,

$$W_{n+1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{V_n(1,1;k)}{-ik\cdot\omega} & 0 & \frac{V_n(1,3;k)}{-ik\cdot\omega+\beta+h_n(1,3)} & 0 \\ 0 & \frac{V_n(2,2;k)}{-ik\cdot\omega} & 0 & \frac{V_n(2,4;k)}{-ik\cdot\omega+\beta+h_n(2,4)} \\ \frac{V_n(3,1;k)}{-ik\cdot\omega-\beta+h_n(3,1)} & 0 & \frac{V_n(3,3;k)}{-ik\cdot\omega} & 0 \\ 0 & \frac{V_n(4,2;k)}{-ik\cdot\omega-\beta+h_n(4,2)} & 0 & \frac{V_n(4,4;k)}{-ik\cdot\omega} \end{pmatrix} \qquad (3.23)$$

com $h_n(m,m') := g_n(m) - g_n(m')$, desde que os denominadores não se anulem.

Observação 10. *Segue de* (3.21) *e* (3.22) *que* W_{n+1} *é anti-Hermitiano:*

$$W_{n+1}(m', m; k' - k)^* = \frac{-V_n(m, m'; k - k')}{d_n(m, k) - d_n(m', k')} = -W_{n+1}(m, m'; k - k').$$

Definindo

$$D_{n+1} := D_n + \Theta_n$$

ou, equivalentemente,

$$G_{n+1} := G_n + \Theta_n,$$

com

$$\Theta_n = \operatorname{diag} \overline{V_n} := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{diag} V_n(\varphi)\, d\varphi$$

uma matriz diagonal, constante e anti-Hermitiana, isto é, a média da parte diagonal de V_n em relação a φ, segue de (3.15) e (3.17) que

$$Q_{n+1} = D_{n+1} + V_{n+1}.$$

Para completar formalmente o n-ésimo passo da iteração resta mostrar que a forma da matriz V_n é preservada, ou seja, que V_{n+1} é anti-Hermitiana e tem a forma de (3.5).

Substituindo (3.22) e (3.21) em (3.19) segue que

$$[W_{n+1}, D_n] = \operatorname{diag} \overline{V_n} - V_n. \tag{3.24}$$

Usando a expressão acima em (3.16) obtemos

$$V_{n+1} = \left[W_{n+1}, \frac{\operatorname{diag} \overline{V_n} - V_n}{2!} + V_n\right] + \left[W_{n+1}, \left[W_{n+1}, \frac{\operatorname{diag} \overline{V_n} - V_n}{3!} + \frac{V_n}{2!}\right]\right] + \cdots \tag{3.25}$$

V_{n+1} é a soma de produtos de matrizes que têm a forma de (3.5). No entanto, afirmamos que o conjunto de matrizes que têm essa propriedade é fechado pela operação de multiplicação (basta verificar). Portanto, segue que V_{n+1} tem a mesma forma de (3.5). Agora, vamos demonstrar que V_{n+1} é anti-Hermitiana.

Sejam A e B duas matrizes anti-Hermitianas: $A^\dagger = -A$ e $B^\dagger = -B$. Então,

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A, B], \tag{3.26}$$

ou seja, $[A, B]$ é anti-Hermitiana. Além disso,

$$(A + B)^\dagger = -(A + B). \tag{3.27}$$

Conforme (3.25), V_{n+1} é a soma de comutadores de matrizes anti-Hermitianas. Logo, tendo em vista (3.26) e (3.27), V_{n+1} é anti-Hermitiana. Isso completa formalmente o n-ésimo passo da iteração. Na Seção 3.3, vamos mostrar que é possível executar essa seqüência de operações de modo que, quando $n \to \infty$,

$$R_n \cdots R_2 R_1 \to R, \qquad V_n \to 0, \qquad G_n \to G, \qquad Q_n \to -\omega \cdot \nabla + \Lambda + G.$$

3.2 Normas e Enunciado

Sejam

$$f_n(m, m'; k) := -ik \cdot \omega - \frac{m - m'}{2}\beta + g_n(m) - g_n(m')$$

e

$$\mathcal{N} := \{(m, m', k) \,:\, k \in \mathbb{Z}^2,\, m, m' \in \mathcal{M},\, m + m' \text{ é par},\, (m, m', k) \neq (m, m, 0)\}. \tag{3.28}$$

Podemos reescrever os elementos de matriz de W_{n+1} como

$$W_{n+1}(m, m'; k) = \begin{cases} \dfrac{V_n(m, m'; k)}{f_n(m, m'; k)} & \text{se } (m, m', k) \in \mathcal{N}, \\ 0 & \text{de outra forma.} \end{cases}$$

Observação 11. *No conjunto $\mathcal{N}$ definido acima, $m+m'$ ser um número par equivale às entradas de* (3.23) *que são diferentes de zero.*

O denominador $f_n(m, m'; k)$ pode ser zero ou arbitrariamente próximo de zero dependendo de $(m, m', k) \in \mathcal{N}$. Sendo assim, para garantir a existência de W_{n+1} é necessário que $f_n(m, m'; k)$ (ou melhor, ω) satisfaça a condição Diophantina

$$|f_n(m, m'; k; \omega)| \geq \frac{\gamma_{n+1}}{(|k| + 1)^\sigma} \quad \forall\, (m, m', k) \in \mathcal{N}, \tag{3.29}$$

com $\gamma_{n+1} > 0$ e $\sigma > 2$.

Como $f_n(m, m'; k)$ depende dos parâmetros ω, β e ε, é necessário estabelecer a existência de um conjunto de parâmetros para os quais a condição Diophantina (3.29) seja satisfeita em todos os passos da iteração. Para fazer essa análise, vamos fixar inicialmente os parâmetros ω_1, β e ε, satisfazendo certas condições, e a cada passo da iteração excluir um conjunto pequeno, no sentido da medida de Lebesgue, de freqüências ω_2.[3] Fazendo isso, vamos mostrar que o conjunto de freqüências que precisam ser excluídas — para as quais o resultado não pode ser verificado — é pequeno em relação ao conjunto de freqüências inicial. Para tanto, fixado $\omega_1 > 0$, vamos introduzir o parâmetro

$$\alpha := \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

e nos restringir ao caso em que $\alpha > 1$.

A cada passo da iteração vamos reter apenas os valores de α pertencentes ao conjunto

$$\Omega_{n+1}(\gamma_{n+1}) := \left\{\alpha \in \Omega_n(\gamma_n) : |f_n(m, m'; k; \alpha)| \geq \frac{\gamma_{n+1}}{(|k| + 1)^\sigma} \quad \forall\, (m, m', k) \in \mathcal{N}\right\}, \tag{3.30}$$

[3] Daqui em diante, qualquer referência ao tamanho de um conjunto deve ser entendida no sentido da medida de Lebesgue.

onde $\Omega_0 := (1, \infty)$, $\sigma > 2$ está fixo e γ_{n+1} é uma constante que será escolhida a cada passo da iteração. Como f_n depende de g_n, que por sua vez depende de α, para obter estimativas do tipo Diophantino é necessário controlar o tamanho de g_n, bem como sua variação em função de α. Isso nos motiva a definir a seguinte norma de operadores. Seja A uma matriz cujas entradas são funções de $L^2(\mathbb{T}^2)$ que dependem de um parâmetro α,

$$\|A\|_{r,\Omega} := \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{\substack{\alpha,\alpha'\in\Omega\\ m\in\mathcal{M}}} \left(|A(m,m';k;\alpha)| + \frac{|A(m,m';k;\alpha) - A(m,m';k;\alpha')|}{|\alpha-\alpha'|} \right), \tag{3.31}$$

com $\Omega \subseteq \Omega_0$ e $r > 0$. Não é difícil verificar que essa norma está bem definida para qualquer matriz cujas entradas são funções analíticas na faixa

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r,\ j = 1, 2\}.$$

Além disso, essa norma exige que os elementos de matriz do operador sejam Lipschitz em relação ao parâmetro α.

Por simplicidade, vamos utilizar a seguinte notação:

$$\|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{r_n,\Omega_n}.$$

Como veremos, essa norma tem as seguintes propriedades:

$$\|\cdot\|_{n+1} \leq \|\cdot\|_n \quad \text{se} \quad r_{n+1} \leq r_n \quad \text{ou} \quad \Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n;$$

$$\|AB\|_n \leq \|A\|_n \|B\|_n.$$

Enunciamos a seguir, um resultado sobre a redutibilidade do sistema (3.1) cuja demonstração baseia-se essencialmente no Teorema 9 (que vem logo em seguida). A demonstração desse lema segue passo a passo a demonstração de Blekher, Jauslin e Lebowitz [4], que foi influenciada pelo trabalho de Combescure [7]. Nesta dissertação, introduzimos algumas melhorias não essenciais na demonstração do Teorema 9 e utilizamos o mesmo para demonstrar o Teorema 8.

Teorema 8 (Redutibilidade I)**.** *Seja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$. Considere o sistema*

$$\dot{x} = (A + \varepsilon V(\omega t))x, \tag{3.32}$$

com $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2\}$ uma matriz diagonal, constante e anti-Hermitiana; $V(\varphi)$ uma matriz anti-Hermitiana cujas entradas são funções 2π-periódicas e analíticas na faixa $\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r,\ j = 1, 2\}$; $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Seja $\beta = a_1 - a_2$. Dado $0 < \zeta < 1/2$, fixe as constantes σ, ω_1, γ e ρ de modo que: $\sigma > 2$,

$\omega_1 > 0$, $0 < \gamma < 2\omega_1\zeta < 1$ *e* $0 < \rho < r$. *Fixe também a matriz* V. *Assuma que* $\alpha = \omega_2/\omega_1 > 1$. *Se*

$$\inf_{j\in\mathbb{Z}} |i\beta/\omega_1 - j| > \zeta$$

e $\|\varepsilon V \otimes I\|_{\Omega_0,r} < \varepsilon_c$, *onde* $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\sigma,\gamma,\rho,\omega_1,\zeta)$, *então existe um subconjunto* $\Omega \subset \Omega_0 = (1,\infty)$, *que depende de* ε, *com medida de Lebesgue* $\mathscr{L}(\Omega) < a(\sigma,\omega_1)\,\gamma$, *tal que, se* $\alpha \in \Omega_0\backslash\Omega$, *o sistema* (3.32) *é redutível com* $B = A+\varepsilon M$, *onde* $M = \operatorname{diag}\{m_1, m_2\}$ *é uma matriz anti-Hermitiana construída recursivamente a partir de* A *e* εV. (As constantes ε_c e a são dadas por (3.46) e (3.57)).

Observação 12. *No Teorema 8, o conjunto* Ω *de freqüências "ruins" depende do particular valor de* ε. *Todavia, a medida desse conjunto não pois a constante* $a(\sigma,\omega_1)\,\gamma$ *não depende de* ε. *Portanto, o resultado não é válido para qualquer* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_c)$ *com o mesmo conjunto de freqüências* $\Omega_0 \setminus \Omega$. *Além disso, observe que a matriz* V *está fixa inicialmente.*

Observação 13. *É possível formular uma versão do Teorema 8 fixando a freqüência* α *e excluíndo um conjunto pequeno de* ε *"ruins". Isso foi feito em [15] com pequenas diferenças nas hipóteses.*

Teorema 9 (Diagonalização I)**.** *Considere o operador*

$$Q_0 = -\omega\cdot\nabla + \Lambda + V_0(\varphi) \tag{3.33}$$

que atua em $\mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{T}^2)$, *com* $\Lambda = \operatorname{diag}\{-\varepsilon m_1, \beta-\varepsilon m_2, -\beta-\varepsilon m_1, -\varepsilon m_2\}$; m_1, m_2 *e* β *números imaginários puros;* $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $\omega = (\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{R}^2$; $V_0 = \varepsilon V \otimes I$, *onde* $V(\varphi)$ *é uma matriz anti-Hermitiana cujas entradas são funções* 2π*-periódicas e analíticas na faixa* $\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r,\ j = 1,2\}$. *Dado* $0 < \zeta < 1/2$, *fixe as constantes* σ, ω_1, γ *e* ρ *de modo que:* $\sigma > 2$, $\omega_1 > 0$, $0 < \gamma < 2\omega_1\zeta < 1$ *e* $0 < \rho < r$. *Fixe também a matriz* V. *Assuma que* $\alpha = \omega_2/\omega_1 > 1$. *Se* $\inf_{j\in\mathbb{Z}} |i\beta/\omega_1 - j| > \zeta$ *e* $\|V_0\|_{\Omega_0,r} < \varepsilon_c$, *onde* $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\sigma,\gamma,\rho,\omega_1,\zeta)$, *então existe um subconjunto* $\Omega \subset \Omega_0 = (1,\infty)$, *que depende de* ε, *com medida de Lebesgue* $\mathscr{L}(\Omega) < a(\sigma,\omega_1)\,\gamma$, *tal que, se* $\alpha \in \Omega_0 \setminus \Omega$, *existe uma transformação* $R(\varphi) = R'(\varphi) \otimes I$ *unitária cujas entradas são funções* 2π*-periódicas e analíticas na faixa* $\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r-\rho,\ j = 1,2\}$ *tal que*

$$RQ_0R^\dagger = -\omega\cdot\nabla + \Lambda + \varepsilon M \otimes I,$$

onde $M = \operatorname{diag}\{m_1, m_2\}$ *é uma matriz constante anti-Hermitiana determinada recursivamente a partir de* β *e* V_0. (As constantes ε_c e a são dadas por (3.46) e (3.57)).

Observação 14. *A Observação 12 também se aplica ao Teorema 9.*

Observação 15. *Conforme a Seção 1.2,* (3.33) *é o operador de quase-energia associado ao sistema* (3.32)*. O Teorema 9 estabelece condições para que o espectro desse operador seja puro ponto. Todavia, pelo Teorema 1, pág. 7, isso implica que a solução de* (3.32) *é quase-periódica para quase todo θ (fase inicial). Em* (3.32)*, porém, fixamos $\theta = 0$. Nesse caso, o Teorema 9 não garante que a solução é quase-periódica. Por outro lado, o Teorema 8 é verdadeiro para qualquer θ e implica que a solução de* (3.32) *é quase-periódica.*

3.3 Demonstração

Vamos demonstrar o Teorema 9 primeiramente e depois o Teorema 8. A demonstração do Teorema 9 será divida em outros lemas que serão demonstrados posteriormente.

Demonstração do Teorema 9. A idéia é implementar um procedimento iterativo de diagonalização parcial no espírito de KAM. Vamos partir do passo $n = 0$ e tomar o limite para $n \to \infty$; a demonstração será indutiva. Para que isso funcione, é necessário que a cada passo certas desigualdades sejam satisfeitas, ou seja, que a iteração preserve certas propriedades. Demonstrado isso, vamos verificar que o passo inicial satisfaz as condições necessárias e que o procedimento converge.

O lema a seguir nos diz que, sob certas condições, a cada passo é possível excluir um conjunto pequeno de freqüências de modo que a condição Diophantina (3.29) seja satisfeita.

Lema 3 (Estimativa Diophantina)**.** *Sejam $0 < \zeta < 1/2$ e $\sigma > 2$. Se*

$$\inf_{j\in\mathbb{Z}} |i\beta/\omega_1 - j| > \zeta, \tag{3.34}$$

$$\|G_n\|_n < \frac{\omega_1}{4}\zeta \tag{3.35}$$

e

$$\gamma_{n+1} < \frac{\omega_1}{2}\zeta, \tag{3.36}$$

então a medida de Lebesgue $\mathscr{L}$ de $\Omega_n \setminus \Omega_{n+1}$ é limitada por

$$\mathscr{L}(\Omega_n \setminus \Omega_{n+1}) < a\,\gamma_{n+1}, \tag{3.37}$$

onde $a = a(\sigma, \omega_1)$ é uma constante dada por (3.57)*.*

A condição (3.34) é satisfeita por hipótese. A validade de (3.35) e (3.36) será verificada mais adiante.

A estimativa do lema a seguir para W_{n+1}, solução da equação (3.17), garante a existência tanto de $R_{n+1} = e^{W_{n+1}}$ quanto da sua inversa $R_{n+1}^{\dagger} = e^{-W_{n+1}}$.

Vamos utilizar a seguinte notação: $\varepsilon_n := \|V_n\|_n$.

Lema 4 (Estimativa para $\|W_{n+1}\|_{n+1}$)**.** *Sejam $r_{n+1} < r_n$ e $\gamma_{n+1} < 1$ constantes positivas, então*

$$\|W_{n+1}\|_{n+1} < b_n \varepsilon_n \tag{3.38}$$

com

$$b_n = b_n(\sigma, \rho_{n+1}, \gamma_{n+1}) := \frac{5e^{\rho_{n+1}}}{2\gamma_{n+1}^2} \left(\frac{2\sigma + 1}{e\, \rho_{n+1}} \right)^{2\sigma+1} \tag{3.39}$$

e $\rho_{n+1} = r_n - r_{n+1}$.

A quantidade ρ_{n+1} é o decréscimo da faixa de analiticidade de W_{n+1} e de V_n a cada passo da iteração. Essa analiticidade está associada ao decaimento exponencial dos elementos de matriz desses operadores em função de $k - k'$. Como veremos, tais decréscimos são somáveis e a soma é menor do que r (tamanho da faixa de analiticidade de V_0).

Observação 16. *Nos dois lemas anteriores, Lemas 3 e 4, as estimativas dependem fracamente do parâmetro ζ. Isso pode ser visto nas demonstrações onde utilizamos a desigualdade $\zeta < 1/2$ para remover a dependência em ζ das constantes a e b_n.*

Precisamos demonstrar que a composição de transformações $\mathcal{R}_n := R_n \cdots R_2 R_1$ converge. O lema a seguir estabelece uma condição para que isso aconteça.

Lema 5 (Convergência de $\mathcal{R}_n = R_n \cdots R_2 R_1$)**.** *Se*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|W_j\|_j < M < \infty, \tag{3.40}$$

então $\mathcal{R}_n$ converge para a transformação unitária $R = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_n$.

Como ocorre com (3.35) e (3.36), a validade de (3.40) será verificada adiante.

O termo V_{n+1} em (3.15) será estimado no lema a seguir.

Lema 6 (Estimativa de $\varepsilon_{n+1} = \|V_{n+1}\|_{n+1}$)**.**

$$\varepsilon_{n+1} < 4\varepsilon_n \|W_{n+1}\|_{n+1} \exp(2\|W_{n+1}\|_{n+1}). \tag{3.41}$$

Essa desigualdade é fundamental para o procedimento indutivo. Ela implica a convergência super-exponencial da seqüência $\{\|V_n\|_n\}$, característica típica de procedimentos tipo KAM.

Agora, vamos escolher convenientemente as constantes $\{\gamma_n\}$ e $\{\rho_n\}$.

Corolário 1. *Sejam γ e ρ constantes positivas. As estimativas* (3.38) *e* (3.41) *com*

$$\gamma_{n+1} := \frac{\gamma}{2^{n+2}}, \qquad \gamma < 2\omega_1\zeta < 1, \tag{3.42}$$

$$\rho_{n+1} := \frac{\rho}{2^{n+2}}, \tag{3.43}$$

implicam

$$\varepsilon_{n+1} < 4c_n\varepsilon_n^2 \exp\left(2c_n\varepsilon_n\right), \tag{3.44}$$

onde

$$c_n := c\,2^{(2\sigma+3)n} \qquad e \qquad c = c(\sigma,\gamma,\rho) := \frac{40\,e^{\rho/4}}{\gamma^2}\left(\frac{8\sigma+4}{e\,\rho}\right)^{2\sigma+1}. \tag{3.45}$$

A escolha de γ_{n+1} e a condição sobre γ em (3.42), essa última satisfeita por hipótese no Torema 9, implicam que (3.36) é verdadeira. Além disso, tanto $\{\gamma_n\}$ quanto $\{\rho_n\}$ são somáveis.

O lema a seguir completa o argumento de indução. Ele nos diz que o procedimento converge e que as desigualdades necessárias para a validade dos lemas anteriores são satisfeitas.

Lema 7 (Indução)**.** *Se*

$$\varepsilon_0 < \min\left\{\omega_1\zeta\frac{2^{2\sigma+3}-1}{2^{2\sigma+5}},\ \frac{1}{2^{2\sigma+5}e\,c}\right\} =: \varepsilon_c(\sigma,\gamma,\rho,\omega_1,\zeta), \tag{3.46}$$

então:

$$(i) \quad \varepsilon_n < \nu^{-1}\,2^{-(2\sigma+3)n}(\nu\varepsilon_0)^{2^n};$$

$$(ii) \quad \|W_{n+1}\|_{n+1} < c\,\nu^{-1}\,(\nu\varepsilon_0)^{2^n};$$

$$(iii) \quad \|G_n\|_n < \frac{\omega_1}{4}\zeta;$$

onde c e ν são constantes que dependem de σ, γ e ρ, e são dadas por (3.45) *e* (3.74)*.*

As desigualdades (i) e (ii) do lema anterior garantem que a iteração converge com

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\|W_n\|_n = 0.$$

A propriedade (ii) implica que a seqüência $\{\|W_n\|_n\}$ é somável, condição necessária no Lema 5 para a convergência da transformação R. A propriedade (iii) é a condição (3.35) do Lema 3, necessária para a estimativa da medida de Lebesgue do conjunto $\Omega_n \setminus \Omega_{n+1}$. Por fim, a medida total do conjunto de freqüências que precisa ser excluído pode ser estimada por

$$\mathscr{L}(\Omega) = \mathscr{L}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(1,\infty)\setminus\Omega_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{L}((1,\infty)\setminus\Omega_n) < a(\sigma,\omega_1)\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n = a(\sigma,\omega_1)\gamma.$$

Acima, utilizamos (3.37), (3.42) e a propriedade de sub-aditividade da medida de Lebesgue. Isso completa a demonstração do Teorema 9. ■

Demonstração do Teorema 8. Essencialmente, vamos repetir o argumento apresentado nas páginas 26 e 27. Desta vez, porém, temos o Teorema 9 para justificar as passagens. As hipóteses desse Teorema são as mesmas do Teorema 8.

Considere a transformação $R(\varphi)$ do Teorema 9. Essa transformação é unitária e analítica, logo, $R(\omega t)$ é uma matriz de Lyapunov quase-periódica unitária. Seja

$$J_R(\varphi) = RJ(\varphi). \tag{3.47}$$

Aplicando R em (3.6) obtemos

$$\begin{aligned} RQ_0R^\dagger R\, J &= 0, \\ (-\omega\cdot\nabla + S)J_R &= 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Equivalentemente a (3.47),

$$P_R(t) = e^{\mathcal{W}(\omega t)}P(t), \tag{3.49}$$

onde $e^{\mathcal{W}(\varphi)}$ é tal que $e^{\mathcal{W}(\varphi)} \otimes I = R(\varphi)$. Conseqüentemente, (3.48) esta associada a

$$-\dot{P}_R + (A+\varepsilon M)P_R - P_R(A+\varepsilon M) = 0.$$

A solução da equação acima é:

$$P_R(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2\, e^{[\beta+\varepsilon(m_1-m_2)]t} \\ -\eta_2^*\, e^{[-\beta+\varepsilon(m_2-m_1)]t} & \eta_1^* \end{pmatrix},$$

onde $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ são constantes arbitrárias tais que $|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 = 1$. (As constantes $\{(P_R)_{ij}(0)\}$ foram escolhidas de modo que a matriz $P_R(t)$ seja unitária: $(P_R)_{11}(0) = (P_R)^*_{22}(0)$ e $(P_R)_{12}(0) = -(P_R)^*_{21}(0)$). Como $\beta+\varepsilon(m_1-m_2)$ é um número imaginário puro, $P_R(t)$ é periódica.

Por fim, conforme (3.49), aplicando a transformação inversa $R^\dagger$ obtemos

$$P(t) = e^{-\mathcal{W}(\omega t)}P_R(t).$$

Como $e^{\mathcal{W}(\varphi)}$ e P_R são unitárias, concluímos que $P(t)$ é uma matriz de Lyapunov quase-periódica unitária com vetor de freqüências ω, que é solução da equação

$$\dot{P} = (A+\varepsilon V(\omega t))P - PB,$$

com $B = A + \varepsilon M$. ■

Demonstração dos Lemas Auxiliares

Demonstração do Lema 3. Seja

$$f_n(m,m';k;\alpha) = -ik\cdot\omega - \frac{m-m'}{2}\beta + h_n(m,m';\alpha),$$

com $h_n(m,m';\alpha) = g_n(m) - g_n(m')$. Fixado k, considere o conjunto

$$\mathcal{I}_k(\eta) := \{\alpha \in \Omega_n : |f_n(m,m';k;\alpha)| < \eta, \text{ para algum } (m,m',k) \in \mathcal{N}\}. \tag{3.50}$$

Se

$$\eta < \frac{\omega_1}{2}\zeta, \tag{3.51}$$

vamos mostrar que

$$\mathscr{L}(\mathcal{I}_k(\eta)) < \frac{2\eta}{\omega_1}\frac{1}{|k_2| - \zeta/2}.$$

Vamos dividir o conjunto $\mathcal{N}$ em duas partes e analisar (3.50) em cada uma delas separadamente. Temos duas situações a considerar (vide (3.28)): (i) $k_2 = 0$, $\forall\, m, m', k_1$, com $m+m'$ par, desde que $m-m'$ e k_1 não sejam nulos simultaneamente; (ii) $k_2 \neq 0$, $\forall\, m, m', k_1$, com $m+m'$ par. No primeiro caso, segue de (3.50) e (3.51) que os elementos de $\mathcal{I}_{(k_1,0)}(\eta)$ devem satisfazer

$$\left|-ik_1 - \frac{m-m'}{2}\frac{\beta}{\omega_1} + \frac{h_n}{\omega_1}\right| < \frac{\zeta}{2}, \tag{3.52}$$

com $m+m'$ par. Pela Definição (3.31) e pela hipótese (3.35), é fácil de ver que

$$|h_n| < 2\|G_n\|_n < \omega_1\zeta/2.$$

Usando isso, a condição (3.34), e o fato de que $|x-y| \geq |x| - |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, segue que

$$\left|-ik_1 + \frac{m-m'}{2}\frac{\beta}{\omega_1} + \frac{h_n}{\omega_1}\right| \geq \left|-ik_1 + \frac{m-m'}{2}\frac{\beta}{\omega_1}\right| - \left|\frac{h_n}{\omega_1}\right| > \zeta - \frac{\zeta}{2} = \frac{\zeta}{2},$$

pois $m, m' \in \mathcal{M}$ com $m+m'$ par implica $m-m' \in \{-2,0,2\}$. Essa desigualdade contradiz (3.52) e mostra que o conjunto $\mathcal{I}_{(k_1,0)}(\eta)$ é vazio.

Vamos considerar agora o caso (ii). Suponha que $\alpha, \alpha' \in \mathcal{I}_k(\eta)$, ou seja, que ambos satisfazem a desigualdade

$$\left|-ik_1 - ik_2x - \frac{m-m'}{2}\frac{\beta}{\omega_1} + \frac{h_n(x)}{\omega_1}\right| < \frac{\eta}{\omega_1}, \qquad x = \alpha \text{ ou } \alpha',$$

com $m+m'$ par. Usando essa desigualdade para α e α' (subtraindo) segue que

$$|\alpha - \alpha'| < \frac{2\eta}{\omega_1}\left|-ik_2 + \frac{h_n(\alpha) - h_n(\alpha')}{(\alpha-\alpha')\omega_1}\right|^{-1}. \tag{3.53}$$

Por outro lado, a Definição (3.31) e a hipótese (3.35) implicam

$$\left|\frac{h_n(\alpha)-h_n(\alpha')}{\alpha-\alpha'}\right| < 2\|G_n\|_n < \frac{\omega_1}{2}\zeta. \tag{3.54}$$

Usando (3.54) em (3.53) obtemos

$$|\alpha-\alpha'| < \frac{2\eta}{\omega_1}\frac{1}{|k_2|-\zeta/2}. \tag{3.55}$$

Note que essa desigualdade também é válida no caso em que $m-m'=0$. Isso pode ser visto fazendo $m-m'=0$ em (3.53). Nesse caso,

$$|\alpha-\alpha'| < \frac{2\eta}{\omega_1}\frac{1}{|k_2|},$$

onde o lado direito é menor do que o lado direito de (3.55), o que implica que (3.55) é uma cota superior para os dois casos.

Supondo que α e α' estejam nos extremos de $\mathcal{I}_k(\eta)$ a desigualdade (3.55) nos fornece uma cota superior para a medida de Lebesgue desse conjunto.

Seja $\Gamma(N) := \{k \in \mathbb{Z}^2 : |k| = N\}$ com $N > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\Gamma(N)} \mathscr{L}(\mathcal{I}_k(\eta)) &< \frac{2\eta}{\omega_1}\sum_{\substack{k_2=-N\\ k_2\neq 0}}^{N}\frac{1}{|k_2|-\zeta/2} < \frac{4\eta}{\omega_1}\sum_{k_2=1}^{N}\frac{1}{|k_2|-1/2}\\ &< \frac{8\eta}{\omega_1}\int_1^{N+1}\frac{dx}{x-1/2} = \frac{8\eta}{\omega_1}\log(2N+1).\end{aligned} \tag{3.56}$$

Escolhendo

$$\eta = \frac{\gamma_{n+1}}{(|k|+1)^\sigma},$$

com γ_{n+1} conforme a hipótese (3.36), o que por sua vez satisfaz (3.51), a desigualdade (3.56) fornece uma cota superior para a medida do conjunto

$$\mathcal{I}_{\Gamma(N)} := \left\{\alpha \in \Omega_n : |f_n| \le \frac{\gamma_{n+1}}{(|k|+1)^\sigma} \text{ para algum } k \in \Gamma(N),\ m+m' \text{ par}\right\},$$

onde $f_n \equiv f_n(m, m'; k; \alpha)$. Em outras "palavras",

$$\mathscr{L}(\mathcal{I}_{\Gamma(N)}) < \frac{8\gamma_{n+1}}{\omega_1}\frac{\log(2N+1)}{(N+1)^\sigma}.$$

Somando sobre N concluímos que

$$\mathscr{L}(\Omega_n \setminus \Omega_{n+1}) = \sum_{N=1}^{\infty}\mathscr{L}(\mathcal{I}_{\Gamma(N)}) < \frac{8\gamma_{n+1}}{\omega_1}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\log(2N+1)}{(N+1)^\sigma} = a\,\gamma_{n+1},$$

onde a última soma converge se $\sigma > 1$ e

$$a = a(\sigma,\omega_1) := \frac{8}{\omega_1}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\log(2N+1)}{(N+1)^\sigma}. \tag{3.57}$$

■

Demonstração do Lema 4. Notação: $f \equiv f_n(m, m'; k; \alpha)$; $h \equiv h_n(m, m'; \alpha)$; $V \equiv V_n(m, m'; k; \alpha)$; $W \equiv W_{n+1}(m, m'; k; \alpha)$; f', V', W' e h' são as mesmas quantidades, mas calculadas em α'.

A condição (3.30) implica $|f|^{-1} < (|k|+1)^\sigma/\gamma_{n+1}$. Usando isso em (3.22) e observando que $W_{n+1}(m, m; 0) = 0$, segue que

$$|W| = \frac{|V|}{|f|} < \frac{(|k|+1)^\sigma}{\gamma_{n+1}}|V| \tag{3.58}$$

para quaisquer $m, m' \in \mathcal{M}$ e $k \in \mathbb{Z}^2$.

A diferença $W - W'$ pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |W - W'| &= \left|\frac{V}{f} - \frac{V'}{f'}\right| = \left|V\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}\right) + \frac{V - V'}{f'}\right| \\ &\leq \left|\frac{f - f'}{ff'}\right||V| + \frac{|V - V'|}{|f|}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Para o primeiro termo escrevemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{f - f'}{ff'}\right| &= \left|\frac{i(\alpha' - \alpha)k_2 - (h - h')\omega_1^{-1}}{ff'}\right| \\ &< \frac{(|k|+1)^{2\sigma}}{\gamma_{n+1}^2}\left(|\alpha - \alpha'||k_2| + \frac{|h - h'|}{\omega_1}\right) \\ &< \frac{(|k|+1)^{2\sigma+1}}{\gamma_{n+1}^2}\left(|\alpha - \alpha'| + \frac{|h - h'|}{\omega_1}\right) \\ &< \frac{5}{4}\frac{(|k|+1)^{2\sigma+1}}{\gamma_{n+1}^2}|\alpha - \alpha'|, \end{aligned} \tag{3.60}$$

onde aplicamos (3.54) e o fato de que $\zeta < 1/2$ na última desigualdade. Usando (3.59), (3.58) e a hipótese de que $\gamma_{n+1} < 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{|W - W'|}{|\alpha - \alpha'|} &< \frac{5}{4}\frac{(|k|+1)^{2\sigma+1}}{\gamma_{n+1}^2}|V| + \frac{(|k|+1)^\sigma}{\gamma_{n+1}}\frac{|V - V'|}{|\alpha - \alpha'|} \\ &< \frac{5}{4}\frac{(|k|+1)^{2\sigma+1}}{\gamma_{n+1}^2}\left(|V| + \frac{|V - V'|}{|\alpha - \alpha'|}\right). \end{aligned} \tag{3.61}$$

De (3.58) e (3.61) segue que

$$\begin{aligned} |W| + \frac{|W - W'|}{|\alpha - \alpha'|} &< \frac{(|k|+1)^\sigma}{\gamma_{n+1}}|V| + \frac{5}{4}\frac{(|k|+1)^{2\sigma+1}}{\gamma_{n+1}^2}\left(|V| + \frac{|V - V'|}{|\alpha - \alpha'|}\right) \\ &< \frac{5}{2}\frac{(|k|+1)^{2\sigma+1}}{\gamma_{n+1}^2}\left(|V| + \frac{|V - V'|}{|\alpha - \alpha'|}\right). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Usando (3.31), (3.62) e introduzindo $r_{n+1} = r_n - \rho_n$ obtemos

$$\|W\|_{n+1} < b_n\|V\|_n = b_n\varepsilon_n,$$

com

$$b_n = b_n(\sigma, \rho_{n+1}, \gamma_{n+1}) = \frac{5}{2\gamma_{n+1}^2} \sup_{|k|\geq 0} e^{-\rho_{n+1}|k|}(|k|+1)^{2\sigma+1}$$

$$= \frac{5e^{\rho_{n+1}}}{2\gamma_{n+1}^2}\left(\frac{2\sigma+1}{e\,\rho_{n+1}}\right)^{2\sigma+1}. \tag{3.63}$$

■

A proposição a seguir estabelece algumas propriedades da norma (3.31) que serão utilizadas nas próximas demonstrações.

Proposição 2 (Propriedades de $\|\cdot\|_{r,\Omega}$)**.** *Sejam* $0 < r' < r$ *e* $\Omega' \subset \Omega$. *A norma* (3.31) *satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} \|A\|_{r-r',\Omega} &\leq \|A\|_{r,\Omega}, \\ \|A\|_{r,\Omega'} &\leq \|A\|_{r,\Omega}, \\ \|AB\|_{r,\Omega} &\leq \|A\|_{r,\Omega}\|B\|_{r,\Omega}, \\ \|[A,B]\|_{r,\Omega} &\leq 2\|A\|_{r,\Omega}\|B\|_{r,\Omega}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Demonstração. Notação: $a \equiv A(m,m';k;\alpha)$; $b \equiv B(m,m';k;\alpha)$; a' e b' são as mesmas quantidades, mas calculadas em α';

$$\|a\|_\Omega \equiv \sup_{\alpha,\alpha'\in\Omega}\left(|a| + \frac{|a-a'|}{|\alpha-\alpha'|}\right).$$

A demonstração das duas primeiras desigualdades é imediata:

$$\|A\|_{r-r',\Omega} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|k|}e^{-r'|k|} \sup_{m\in\mathcal{M}} \|a\|_\Omega \leq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{m\in\mathcal{M}} \|a\|_\Omega = \|A\|_{r,\Omega};$$

$$\|A\|_{r,\Omega'} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{m\in\mathcal{M}} \|a\|_{\Omega'} \leq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{m\in\mathcal{M}} \|a\|_\Omega = \|A\|_{r,\Omega},$$

onde usamos que $\|a\|_{\Omega'} \leq \|a\|_\Omega$ pois $\Omega' \subset \Omega$.

Para provar a terceira desigualdade vamos utilizar a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \|ab\|_\Omega &= \sup_{\alpha,\alpha'\in\Omega}\left(|ab| + \frac{|ab-ab'+ab'-a'b+a'b-a'b'|}{|\alpha-\alpha'|}\right) \\ &\leq \sup_{\alpha,\alpha'\in\Omega}\left(|a||b| + \frac{1}{2}(|a|+|a'|)\frac{|b-b'|}{|\alpha-\alpha'|} + \frac{1}{2}(|b|+|b'|)\frac{|a-a'|}{|\alpha-\alpha'|}\right) \\ &\leq \sup_{\alpha,\alpha'\in\Omega}\left(|a||b| + |a|\frac{|b-b'|}{|\alpha-\alpha'|} + |b|\frac{|a-a'|}{|\alpha-\alpha'|} + \frac{|a-a'|}{|\alpha-\alpha'|}\frac{|b-b'|}{|\alpha-\alpha'|}\right) \\ &\leq \|a\|_\Omega\|b\|_\Omega. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Os elementos de matriz de AB são dados por

$$AB(m,m';k;\alpha) = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} A(m,l;k-q;\alpha)B(l,m';q;\alpha).$$

Logo,

$$\|AB(m,m';k;\alpha)\|_\Omega \leq \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} \|A(m,l;k-q;\alpha)\|_\Omega \|B(l,m';q;\alpha)\|_\Omega,$$

onde aplicamos (3.65) e a desigualdade triangular. Escrevendo $kr = (k-q)r + qr$ e usando a desigualdade triangular segue que $e^{r|k|} \leq e^{r|k-q|}e^{r|q|}$. Usando isso e a desigualdade anterior obtemos

$$e^{r|k|}\|AB(m,m';k;\alpha)\|_\Omega \leq \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} e^{r|k-q|}\|A(m,l;k-q;\alpha)\|_\Omega e^{r|q|}\|B(l,m';q;\alpha)\|_\Omega,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} & e^{r|k|}\|AB(m,m';k;\alpha)\|_\Omega \\ &\leq \sup_{j\in\mathcal{M}} \sum_{q\in\mathbb{Z}^2} e^{r|q|}\|B(j,m';q;\alpha)\|_\Omega \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} e^{r|k-q|}\|A(m,l;k-q;\alpha)\|_\Omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{m\in\mathcal{M}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} & e^{r|k|}\|AB(m,m';k;\alpha)\|_\Omega \\ &\leq \sup_{j\in\mathcal{M}} \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|q|}\|B(j,m';q;\alpha)\|_\Omega \sup_{m\in\mathcal{M}} \sum_{\substack{k'\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} e^{r|k'|}\|A(m,l;k';\alpha)\|_\Omega.\end{aligned}$$

Comparando a desigualdade anterior com a Definição (3.31) concluímos que

$$\|AB\|_{r,\Omega} \leq \|A\|_{r,\Omega}\|A\|_{r,\Omega}.$$

Isso mostra a terceira desigualdade da Proposição. A quarta desigualdade é imediata usando a propriedade acima e a desigualdade triangular. ■

Demonstração do Lema 5. A condição (3.40) implica $\|W_n\|_n < M$. Vamos usar a desigualdade

$$\begin{aligned}\|R_n - I\|_n = \|e^{W_n} - I\|_n &= \left\| W_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{W_n^{j-1}}{j!} \right\|_n \\ &\leq \|W_n\|_n e^{\|W_n\|_n} \leq e^M \|W_n\|_n. \qquad (3.66)\end{aligned}$$

Podemos escrever $\mathcal{R}_n = R_n\mathcal{R}_{n-1}$ e estimar a diferença

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n-1}\|_n &= \|(R_n - I)\mathcal{R}_{n-1}\|_n \leq \|R_n - I\|_n\|\mathcal{R}_{n-1}\|_n \\ &\leq e^M\|W_n\|_n\|\mathcal{R}_{n-1}\|_n. \end{aligned} \tag{3.67}$$

O último fator é limitado por

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_{n-1}\|_n &= \left\|\prod_{j=1}^{n-1} R_j\right\|_n \leq \prod_{j=1}^{n-1}\|R_j - I + I\|_j \\ &\leq \prod_{j=1}^{n-1}(e^M\|W_j\|_j + I) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\ln(e^M\|W_j\|_j + I)\right\} \\ &\leq \exp\left\{e^M\sum_{j=1}^{n-1}\|W_j\|_j\right\} < \exp(e^M M), \end{aligned} \tag{3.68}$$

onde usamos que $\|R_j\|_n \leq \|R_j\|_j$ devido à (3.64) na primeira desigualdade.

De (3.67) e (3.68) segue que

$$\|\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n-1}\|_n < e^M\exp(e^M M)\|W_n\|_n.$$

A hipótese (3.40) implica $\lim_{n\to\infty}\|W_n\|_n = 0$. Usando isso e a desigualdade anterior concluímos que $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n-1}\|_n = 0$. Além disso, (3.40) implica $\lim_{n\to\infty}\sum_{j\geq n}\|W_j\|_j = 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$\|\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_j\|_\infty \leq \|\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n-1}\|_n + \cdots + \|\mathcal{R}_{j+1} - \mathcal{R}_j\|_{j+1} \leq e^M\exp(e^M M)\sum_{j\geq n}\|W_j\|_j < \varepsilon$$

se $n, j \geq n_0$. Isso mostra que a seqüência $\{\mathcal{R}_n\}$ é de Cauchy e portanto converge para a transformação $R = \lim_{n\to\infty}\mathcal{R}_n$. Além disso, R é unitária pois

$$\begin{aligned}\|RR^\dagger - I\|_\infty &= \|RR^\dagger - R_nR_n^\dagger\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|R^\dagger - R_n^\dagger\|_\infty(\|R\|_\infty + \|R_n\|_n) + \|R - R_n\|_\infty(\|R^\dagger\|_\infty + \|R_n^\dagger\|_n\right) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

■

Demonstração do Lema 6. Considere a expressão (3.25). Usando as propriedades da norma segue que

$$\begin{aligned}\|V_{n+1}\|_{n+1} &< \|V_n\|_{n+1}\sum_{j=1}^{\infty}2^j\left(\frac{1}{(j+1)!} + \frac{1}{j!}\right)\|W_{n+1}\|_{n+1}^j \\ &< 2\|V_n\|_n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{j!}\|W_{n+1}\|_{n+1}^j < 4\|V_n\|_n\|W_{n+1}\|_{n+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{j!}\|W_{n+1}\|_{n+1}^j \\ &= 4\|V_k\|_k\|W_{k+1}\|_{k+1}\exp(2\|W_{k+1}\|_{k+1}). \end{aligned}$$

■

Demonstração do Corolário 1. Usando (3.43) e (3.42) em (3.39) obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{40}{\gamma^2}\left(\frac{8\sigma+4}{e\rho}\right)^{2\sigma+1} e^{\rho 2^{-n-2}} 2^{(2\sigma+3)n} \\ &\leq \frac{40\, e^{\rho/4}}{\gamma^2}\left(\frac{8\sigma+4}{e\rho}\right)^{2\sigma+1} 2^{(2\sigma+3)n} = c\, 2^{(2\sigma+3)n} = c_n. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Usando essa desigualdade, (3.38) e (3.41) segue o Corolário 1. ■

Demonstração do Lema 7. Introduzindo a notação $x_n := 2c_n\varepsilon_n$ e observando que $c_{n+1} = 2^{2\sigma+3}c_n$, a desigualdade (3.44) assume a forma

$$x_{n+1} < 2^{2\sigma+4} x_n^2 e^{x_n}. \tag{3.70}$$

Vamos proceder em duas etapas. Primeiro, vamos mostrar por indução que se uma seqüência $\{x_n\}$ satisfaz (3.70) e $x_0 < \eta$ para algum η satisfazendo a condição

$$2^{2\sigma+4}\eta\, e^{\eta} < 1, \tag{3.71}$$

então $x_n < \eta$ para todo $n \geq 0$. Assuma que $x_n < \eta$. De (3.70) e (3.71) segue que

$$x_{n+1} < 2^{2\sigma+4} x_n^2 e^{x_n} < 2^{2\sigma+4}\eta^2 e^{\eta} < \eta.$$

Uma possível escolha de η que satisfaz (3.71) é $\eta = (2^{2\sigma+4}e)^{-1}$. Em uma segunda etapa, vamos melhorar a estimativa. A desigualdade $x_k < \eta$ e (3.70) implicam

$$x_{n+1} < \vartheta\, x_n^2, \qquad \vartheta := 2^{2\sigma+4}e^{\eta}. \tag{3.72}$$

Recursivamente, segue dessa desigualdade que $x_n < \vartheta^{-1}(\vartheta x_0)^{2^n}$. Isso implica que para haver convergência é necessário que $\vartheta x_0 < 1$, ou seja, $x_0 < \vartheta^{-1} = (2^{2\sigma+4}e^{\eta})^{-1}$. Mas a condição (3.71) que impusemos no primeiro passo exige que $\eta < (2^{2\sigma+4}e^{\eta})^{-1}$. Portanto, concluímos que a condição $x_0 < \eta = (2^{2\sigma+4}e)^{-1}$, que equivale a

$$\varepsilon_0 < (2^{2\sigma+5} e\, c)^{-1}, \tag{3.73}$$

garante que

$$\varepsilon_n < \nu^{-1}\, 2^{-(2\sigma+3)n}(\nu\varepsilon_0)^{2^n} \qquad \text{com} \qquad \nu := c\, 2^{2\sigma+5}\exp(2^{-2\sigma-4}e^{-1}), \tag{3.74}$$

para todo $n \geq 1$. Isso mostra (i).

As desigualdades (3.38), (3.69) e (3.74) implicam

$$\|W_{n+1}\|_{n+1} < b_n\varepsilon_n < c_n\varepsilon_n < c\,\nu^{-1}\,(\nu\varepsilon_0)^{2^n}.$$

Isso mostra (ii).

Visto que $G_0 = 0$, segue por indução que

$$G_n = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{diag} \overline{V_j}, \qquad n \geq 1.$$

Para demonstrar (iii) temos que impor uma condição adicional sobre η, de modo que a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$\|G_n\|_n \leq \sum_{j=1}^{n} \| \operatorname{diag} \overline{V_j} \|_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \frac{\omega_1}{4}\zeta.$$

A condição $x_n < \eta$ implica $\varepsilon_n < \eta(2c)^{-1}\, 2^{-(2\sigma+3)n}$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \frac{\eta}{2c} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(2\sigma+3)j} = \frac{\eta}{2c} \frac{2^{2\sigma+3}}{2^{2\sigma+3} - 1}$$

é menor do que $\omega_1\zeta/4$ se

$$\eta < 2c\,\omega_1\zeta(2^{2\sigma+3} - 1)2^{-(2\sigma+5)}.$$

Como $x_0 < \eta$, isso equivale a

$$\varepsilon_0 < \omega_1\zeta\, \frac{2^{2\sigma+3} - 1}{2^{2\sigma+5}}. \tag{3.75}$$

Concluíndo, ε_c é o mínimo entre (3.73) e (3.75). ■

Capítulo 4

Teorema de Redutibilidade II

No capítulo anterior, demonstramos que o sistema

$$\dot{x} = (A + \varepsilon Q(t))x$$

pode ser reduzido ao sistema

$$\dot{y} = By,$$

com $B = A + \varepsilon M$, através da transformação $x = P(t)y$, onde $P(t)$ é uma matriz de Lyapunov quase-periódica com o mesmo vetor de freqüências de $Q(t)$. No esquema que utilizamos, não se tem conhecimento *a priori* da matriz B pois a matriz M é construída recursivamente. Dessa forma, para controlar os pequenos denominadores é necessário excluir um conjunto pequeno de freqüências ω ressonantes, o que leva a um resultado que vale para um conjunto de freqüências.

Nesta seção, vamos fixar a matriz B e tentar encontrar quais são as matrizes M para as quais o sistema é redutível para B. Para isso, vamos introduzir o parâmetro M da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \varepsilon Q(t) + \varepsilon M - \varepsilon M)x, \\ &= (B + \varepsilon Q(t, \varepsilon M) - \varepsilon M)x, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde fizemos a hipótese de que $Q(t)$ pode depender de εM. (Note que, em particular, podemos ter $Q(t, \varepsilon M) = Q(t)$). Além disso, vamos supor que os autovalores $\{b_j\}$ de B juntamente com ω satisfazem

$$| - ik \cdot \omega + b_l - b_j| \geq \frac{\gamma}{(1 + |k|)^\sigma}, \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}^2,\ i, j = 1, 2, \tag{4.2}$$

com $\gamma, \sigma > 0$.

Vamos utilizar um esquema muito semelhante ao esquema da seção anterior para reduzir a equação (4.1). A menos que o contrário seja dito, vamos utilizar a mesma

notação. Além disso, alguns comentários não essenciais feitos na seção anterior (e que valem para esta seção) serão omitidos.

Considere o operador Q_0 associado a (4.1):

$$Q_0 = -\omega \cdot \nabla + S + V_0(\varphi, G_0) - G_0,$$

onde $G_0 = \varepsilon M \otimes I$. Sejam

$$X = \operatorname{diag}\{x_1, \ldots, x_4\}$$

uma matriz diagonal anti-Hermitiana e

$$\|X\| := |x_1| + \cdots + |x_4|.$$

Vamos supor que $V_0(\varphi, X)$ é analítica em

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r,\ j = 1, 2\} \times \{X : \|X - G_0\| < s_0\}. \tag{4.3}$$

Introduzindo

$$Q_\infty := -\omega \cdot \nabla + S$$

podemos escrever Q_0 como

$$Q_0 = Q_\infty + V_0 - G_0.$$

4.1 Procedimento Iterativo

Como fizemos na seção anterior, vamos construir iterativamente uma transformação $R = \cdots R_n \cdots R_2 R_1$ unitária tal que

$$R Q_0 R^\dagger = Q_\infty.$$

Seja

$$G_n = \varepsilon M_n \otimes I \equiv \operatorname{diag}\{g_n(1), \ldots, g_n(4)\},$$

com M_n uma matriz constante anti-Hermitiana. O n-ésimo passo da iteração é definido da seguinte forma. Partimos do operador

$$Q_n := Q_\infty + V_n - G_n, \qquad n \geq 0, \tag{4.4}$$

onde $V_n(\varphi)$ é uma perturbação de ordem ε^{2^n} anti-Hermitiana da forma (3.5). Note que, desta vez, Q_n tem um termo Q_∞ que é constante ao longo da iteração. Isso permite tratar a perturbação sempre em relação a Q_∞, exigindo somente a condição

Diophantina (4.2). A cada passo, a ordem da perturbação dependente de φ vai de ε^{2^n} para $\varepsilon^{2^{n+1}}$.

Considere a transformação unitária

$$R_{n+1} := e^{W_{n+1}}$$

com $W_{n+1}^{\dagger} = -W_{n+1}$. Temos que

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &:= R_{n+1} Q_n R_{n+1}^{\dagger} \\ &= e^{W_{n+1}}(Q_\infty + V_n - G_n)e^{-W_{n+1}} \\ &= Q_\infty + V_n - G_n + [W_{n+1}, Q_\infty] + V_{n+1}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde

$$\begin{aligned} V_{n+1} &:= [W_{n+1}, V_n - G_n] + \frac{1}{2!}[W_{n+1}, [W_{n+1}, Q_n]] + \frac{1}{3!}[W_{n+1}, [W_{n+1}, [W_{n+1}, Q_n]]] + \\ &= \left[W_{n+1}, \frac{[W_{n+1}, Q_\infty]}{2!} + V_n - G_n\right] + \left[W_{n+1}, \left[W_{n+1}, \frac{[W_{n+1}, Q_\infty]}{3!} + \frac{V_n - G_n}{2!}\right]\right] + \end{aligned} \tag{4.6}$$

Vamos supor que V_n seja uma função de φ e G_n:

$$V_n = \mathcal{V}_n(\varphi, G_n). \tag{4.7}$$

Logo, $V_{n+1} = V_{n+1}(\varphi, G_n)$, pois, como veremos, W_{n+1} também depende de φ e G_n.

Procuramos uma matriz diagonal G_{n+1} não dependente de φ e W_{n+1} tais que

$$Q_{n+1} = Q_\infty + V_{n+1} - G_{n+1}. \tag{4.8}$$

De (4.5), (4.7) e (4.8), segue que W_{n+1} e G_{n+1} devem satisfazer a equação

$$[W_{n+1}, Q_\infty] + \mathcal{V}_n - G_n = -G_{n+1}. \tag{4.9}$$

Como fizemos na seção anterior, essa equação será resolvida em termos dos elementos de matriz na base $\{v_{m,k}\}$. (Vide (3.18), (3.19) e (3.20)).

Os elementos de matriz de Q_∞ são dados por

$$Q_\infty(m, m'; k - k') = d(m, k)\delta_{k,k'}\delta_{m,m'},$$

com

$$d(m, k) := -ik \cdot \omega + s_m.$$

Observação 17. *As Observações 8, 9 e 10 também se aplicam nesta seção.*

Quando $m = m'$ e $k = k'$, segue de (4.9) que

$$G_{n+1}(m, m; 0) = G_n(m, m; 0) - \mathcal{V}_n(m, m; 0; G_n). \tag{4.10}$$

Nessa situação, $W_{n+1}(m, m; 0)$ é arbitrário. Em particular, vamos escolher

$$W_{n+1}(m, m; 0) := 0 \qquad \forall\ m \in \mathcal{M}.$$

Quando $m \neq m'$ ou $k \neq k'$,

$$W_{n+1}(m, m'; k - k'; G_n) = \frac{\mathcal{V}_n(m, m'; k - k'; G_n)}{d(m, k) - d(m', k')}. \tag{4.11}$$

Compare essa expressão com (3.22) e observe que, desta vez, o denominador de (4.11) não depende de n. Dessa forma, a condição Diophantina (4.2) será suficiente para demonstrar a existência de W_{n+1} para todo $n \geq 0$.

Sejam

$$f(m, m'; k) := -ik \cdot \omega + b_m - b_{m'}$$

e $\mathcal{N}$ conforme (3.28). Podemos reescrever os elementos de matriz de W_{n+1} como

$$W_{n+1}(m, m'; k) = \begin{cases} \dfrac{P_n(m, m'; k)}{f(m, m'; k)} & \text{se } (m, m', k) \in \mathcal{N}, \\ 0 & \text{de outra forma.} \end{cases}$$

Como G_n e G_{n+1} são diagonais, (4.10) equivale a

$$G_{n+1} = G_n - \operatorname{diag} \overline{\mathcal{V}_n(G_n)} =: T_n(G_n). \tag{4.12}$$

Vamos supor que T_n seja invertível. Com isso, $G_n = T_n^{-1}(G_{n+1})$. Logo, podemos escrever V_{n+1} como função de G_{n+1}:

$$V_{n+1} = V_{n+1}(\varphi, T_n^{-1}(G_{n+1})) =: \mathcal{V}_{n+1}(\varphi, G_{n+1}).$$

Podemos usar o mesmo argumento da seção anterior para concluir que a forma das matrizes V_n é preservada (vide pág. 30). Com isso, completamos formalmente o n-ésimo passo da iteração. Na seção 4.3, vamos mostrar que é possível executar essa seqüência de operações de modo que, quando $n \to \infty$,

$$R_n \cdots R_2 R_1 \to R, \qquad V_n \to 0, \qquad G_n \to 0, \qquad Q_n \to Q_\infty.$$

4.2 Normas e Enunciado

Notação: $B(X_0, s) := \{X : \|X - X_0\| < s\}$.

Seja $A(\varphi, X)$ uma matriz cujas entradas são funções de $L^2(\mathbb{T}^2)$ que dependem de um parâmetro X,

$$\|A\|_{r,s} := \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{\substack{m\in\mathcal{M}\\ X\in B(X_0,s)}} |A(m,m';k;X)|, \tag{4.13}$$

onde os parâmetros $r, s > 0$ representam a região de analiticidade em φ e em X, respectivamente. Não é difícil verificar que essa norma esta bem definida para qualquer matriz cujas entradas são funções analíticas em (4.3).

Daqui em diante, vamos utilizar a seguinte notação simplificada:

$$\|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{r_n,s_n}.$$

Como veremos, essa norma tem as seguintes propriedades:

$$\|\cdot\|_{n+1} \leq \|\cdot\|_n \quad \text{se} \quad r_{n+1} \leq r_n \quad \text{ou} \quad s_{n+1} \leq s_n;$$

$$\|AB\|_n \leq \|A\|_n \|B\|_n.$$

Enunciamos a seguir, um resultado de redutibilidade cuja demonstração baseia-se no trabalho de Bogoljubov, Mitropoliskii e Samoilenko [5].

Teorema 10 (Redutibilidade II)**.** *Seja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$. Considere o sistema*

$$\dot{x} = (B + \varepsilon V(\omega t, \xi) - \xi)x, \tag{4.14}$$

com $B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2\}$ e $\xi = \varepsilon M = \operatorname{diag}\{\varepsilon m_1, \varepsilon m_2\}$ matrizes constantes anti-Hermitianas; V uma matriz anti-Hermitiana cujas entradas são funções 2π-periódicas em φ e analíticas em $\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r,\ j = 1, 2\} \times \{X : \|X - \xi\| < s_0\}$; $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Fixe a matriz V e a constante $0 < \rho < r$. Se

$$|-ik\cdot\omega + b_i - b_j| \geq \frac{\gamma}{(1+|k|)^\sigma} \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}^2,\ i, j = 1, 2,$$

com $\gamma > 0$ e $\sigma > 1$, então existe um $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\sigma, \gamma, \rho, s_0)$ tal que, se $\|\varepsilon V \otimes I\|_{s_0,r} < \varepsilon_c$, existe $\xi = \varepsilon M$ tal que $G_0 = \xi \otimes I$ satisfaz a equação

$$G_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{diag} \overline{\mathcal{V}_j(G_j(G_0))}, \tag{4.15}$$

onde $\mathcal{V}_j$ e G_j são construídos recursivamente a partir de (4.14)*, para o qual o sistema* (4.14) *é redutível para o sistema*

$$\dot{y} = By$$

através de uma mudança de variáveis

$$x = P(t)y,$$

onde $P(t) = F(\omega t)$ é uma matriz de Lyapunov quase-periódica unitária com $F(\varphi)$ analítica na faixa $\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r - \rho,\ j = 1, 2\}$.

Como na seção anterior, a demonstração do Teorema 10 depende da existência da transformação unitária R estabelecida no lema a seguir.

Teorema 11 (Diagonalização II)**.** *Seja $G_0 = \varepsilon M \otimes I$ uma matriz diagonal, constante e anti-Hermitiana. Considere o operador*

$$Q_0 = -\omega \cdot \nabla + S + V_0(\varphi, G_0) - G_0$$

que atua em $\mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{T}^2)$, com $S = \operatorname{diag}\{0, b_1 - b_2, b_2 - b_1, 0\}$; b_1, b_2 números imaginários puros; $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$; V_0 uma matriz anti-Hermitiana cujas entradas são funções 2π-periódicas em φ e analíticas em

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r,\ j = 1, 2\} \times \{X : \|X - G_0\| < s_0\}.$$

Fixe a matriz V_0 e a constante $0 < \rho < r$. Se

$$|-ik \cdot \omega + b_m - b_{m'}| \geq \frac{\gamma}{(1 + |k|)^\sigma} \qquad \forall\ (m, m', k) \in \mathcal{N}$$

com $\gamma > 0$ e $\sigma > 1$, então existe um $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\sigma, \gamma, \rho, s_0)$ tal que, se $\|V_0\|_{s_0,r} < \varepsilon_c$, existe $G_0 = \varepsilon M \otimes I$ que satisfaz a equação

$$G_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{diag} \overline{\mathcal{V}_j(G_j(G_0))}, \tag{4.16}$$

onde $\mathcal{V}_j$ e G_j são construídos recursivamente a partir de Q_0, e uma transformação $R(\varphi) = R'(\varphi) \otimes I$ unitária cujas entradas são funções 2π-periódicas e analíticas na faixa

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r - \rho,\ j = 1, 2\}$$

tal que

$$RQ_0R^\dagger = -\omega \cdot \nabla + S.$$

4.3 Demonstração

Demonstração do Teorema 10. É idêntica à demonstração do Teorema 8, pág. 37. ■

Demonstração do Teorema 11. Vamos utilizar dois elementos: (i) o procedimento tipo KAM utilizado na seção anterior para demonstrar o Teorema 9; (ii) o Teorema da aplicação inversa para controlar os pequenos denominadores (idéia utilizada por Bogoljubov, Mitropoliskii e Samoilenko em [5]).

O lema a seguir nos diz que a cada passo existe a aplicação inversa à direita T_n^{-1}. Além disso, essa aplicação é analítica.

Notação: $\mathcal{P}_n := \operatorname{diag} \overline{\mathcal{V}_n}$.

Lema 8 (Existência de T_n^{-1}). *Sejam $\sigma > 2$, r_n e s_n constantes positivas. Considere a aplicação*

$$Y = T_n(X) = X - \mathcal{P}_n(X), \tag{4.17}$$

com $\mathcal{V}_n(\varphi, X)$ uma matriz anti-Hermitiana, 2π-periódica em φ e analítica em

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} z_j| < r_n,\ j = 1, 2\} \times \{X : \|X - G_n\| < s_n\}.$$

Se

$$\|\mathcal{P}_n(X)\|_n < \frac{s_n}{20} \tag{4.18}$$

para todo $X \in B(G_n, s_n/2)$, então existe uma aplicação T_n^{-1} definida e analítica em

$$\left\{Y : \|Y - G_{n+1}\| < \frac{s_n}{2^{2\sigma+2}} =: s_{n+1}\right\} \tag{4.19}$$

tal que $Y = T_n \circ T_n^{-1}(Y)$.

A validade da condição (4.18) será verificada adiante.

Observação 18. *O Lema 8 faz o papel do Lema 3 da seção anterior. Esses dois lemas controlam os pequenos denominadores; o primeiro, excluído freqüências; o segundo, implicitamente.*

Notação: $B_n := B(G_n, s_n)$.

Conforme o Lema 8, para todo ponto em B_{n+1} podemos retornar ao conjunto de partida através da inversa T_n^{-1}. Note que, isso não é válido na direção contrária. Considere um ponto em B_n e aplique T_n. A inversa pode não existir. Apesar disso, o importante é que o lema é válido na direção que precisamos.

A idéia é aplicar esse lema iterativamente de modo que, no final, possamos mapear a matriz nula $0 \in B_\infty = B(0, 0)$ na matriz inicial G_0, ou seja,

$$G_0 = \lim_{n\to\infty} T_0^{-1} \circ T_1^{-1} \circ \cdots \circ T_n^{-1}(0).$$

Observação 19. *Queremos implementar um procedimento tal que, quando $n \to \infty$, $s_n \to 0$ e $G_n \to 0$ de modo que a bola B_n sempre contenha a origem para todo $n > n_0$. Em outras palavras, dado $\delta > 0$, queremos que exista $n_0 = n_0(\delta)$ tal que $\|G_n\| < s_n < \delta$ para todo $n > n_0$.*

A estimativa do lema a seguir para W_{n+1}, solução da equação (4.9), garante a existência tanto de $R_{n+1} = e^{W_{n+1}}$ quanto da sua inversa $R_{n+1}^{-1} = e^{-W_{n+1}}$.

Lema 9 (Estimativa para $\|W_{n+1}\|_{n+1}$). *Sejam $r_{n+1} < r_n$ e $s_{n+1} < s_n$ constantes positivas. Suponha que $B_{n+1} \subset B_n$. Então,*

$$\|W_{n+1}\|_{n+1} < b_n \|\mathcal{V}_n\|_n, \tag{4.20}$$

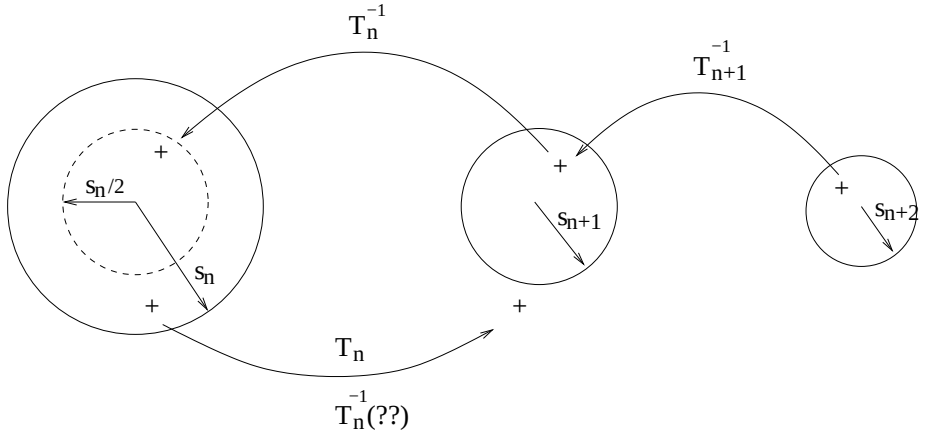

Figura 4.1: Ilustração do Lema 8.

com

$$b_n = b_n(\sigma, \gamma, \rho_{n+1}) := \frac{5e^{\rho_{n+1}}}{2\gamma^2} \left(\frac{2\sigma + 1}{e\, \rho_{n+1}} \right)^{2\sigma+1} \tag{4.21}$$

e $\rho_{n+1} = r_n - r_{n+1}$.

Precisamos demonstrar que a composição de transformações $\mathcal{R}_n := R_n \cdots R_2 R_1$ converge. O lema a seguir estabelece uma condição para que isso aconteça.

Lema 10 (Convergência de $\mathcal{R}_n = R_n \cdots R_2 R_1$)**.** *Se*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|W_j\|_j < M < \infty, \tag{4.22}$$

então $\mathcal{R}_n$ *converge para a transformação unitária* $R = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_n$.

Como ocorre com (4.18), a validade de (4.22) será verificada adiante.

O termo

$$V_{n+1} = V_{n+1}(\varphi, G_n) = V_{n+1}(\varphi, T_n^{-1}(G_{n+1})) = \mathcal{V}_{n+1}(\varphi, G_{n+1})$$

em (4.5) será estimado no lema a seguir. Note que, pelo lema 8, podemos usar livremente a igualdade acima pois T_n^{-1} está bem definida em B_{n+1}.

Lema 11 (Estimativa de $\|P_{n+1}\|_{n+1}$)**.**

$$\|\mathcal{V}_{n+1}\|_{n+1} < 4(\|\mathcal{V}_n\|_n + \|G_n\|_n)\|W_{n+1}\|_{n+1} \exp(2\|W_{n+1}\|_{n+1}). \tag{4.23}$$

Essa desigualdade é fundamental para o procedimento indutivo. Ela implica a convergência super-exponencial para a seqüência $\{\|\mathcal{V}_n\|_n\}$, característica típica de procedimentos tipo KAM.

Agora, vamos escolher convenientemente as constantes $\{\rho_n\}$.

Corolário 2. *Seja $\rho < r$ uma constante positiva. As estimativas* (4.20) *e* (4.23) *com*

$$\rho_{n+1} := \frac{\rho}{2^{n+2}} \tag{4.24}$$

implicam

$$\|\mathcal{V}_{n+1}\|_{n+1} < 4c_n(\|\mathcal{V}_n\|_n + \|G_n\|_n)\|\mathcal{V}_n\|_n \exp(2c_n\|\mathcal{V}_n\|_n), \tag{4.25}$$

onde

$$c_n := c\,2^{(2\sigma+1)n} \qquad e \qquad c = c(\sigma,\gamma,\rho) := \frac{5e^{\rho/4}}{2\gamma^2}\left(\frac{8\sigma+4}{e\,\rho}\right)^{2\sigma+1}. \tag{4.26}$$

Proposição 3. *Se G_0 satisfaz a equação* (4.16)*, então*

$$\|G_n\|_n \leq \sum_{j=n}^{\infty} \|\mathcal{V}_j\|_j, \qquad n \geq 0. \tag{4.27}$$

O lema a seguir completa o argumento de indução. Ele nos diz que o procedimento converge e que as desigualdades necessárias para a validade dos lemas anteriores são satisfeitas.

Lema 12 (Indução)**.** *Suponha que G_0 satisfaz a equação* (4.16)*. Se*

$$\|V_0\|_{r,s_0} < \varepsilon_c,$$

onde $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\sigma,\gamma,\rho,s_0)$ é a maior constante positiva que satisfaz

$$\varepsilon_c < (3\cdot 2^{2\sigma+3} e\,c)^{-1};$$

e

$$-\frac{20(\nu\varepsilon_c)^{-(\log(\nu\varepsilon_c))^{-1}}}{\nu\log(\nu\varepsilon_c)} < s_0.$$

simultâneamente. Então:

$$(i)\ \|\mathcal{V}_n\|_n < \nu^{-1}2^{-(2\sigma+1)n}(\nu\|V_0\|_{s_0,r})^{2^n} < s_n/20;$$

$$(ii)\ \|W_{n+1}\|_{n+1} < c\,\nu^{-1}(\nu\|V_0\|_{s_0,r})^{2^n};$$

$$(iii)\ \|G_n\|_n < 2\|\mathcal{V}_n\|_n;$$

onde c e ν são constantes que dependem de σ, γ e ρ e são dadas por (4.26) *e* (4.45)*.*

As desigualdades (i), (ii) e (iii) do lema anterior garantem que a iteração converge com

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{V}_n\|_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\|W_n\|_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\|G_n\|_n = 0.$$

Além disso, como $\|\mathcal{P}_n\|_n < \|\mathcal{V}_n\|_n$, a desigualdade (i) implica que a condição (4.18) do Lema 8 é satisfeita. A propriedade (ii) implica que a seqüência $\{\|W_n\|_n\}$ é

somável, condição necessária no Lema 10 para a convergência da transformação unitária R. De (4.38) segue que $\|G_n\| = \|G_n\|_n$. Usando isso e as desigualdades (i) e (iii) concluímos que $\|G_n\| < s_n/10 < s_n$. Isso garante que a bola B_n contém a origem para todo $n \geq 0$.

Agora, vamos mostrar que $B_{n+1} \subset B_n$. Como $s_{n+1} < s_n$, basta verificar que

$$\|G_{n+1} - G_n\| = \|\mathcal{P}_n\| < s_n - s_{n+1} = (1 - 2^{-2\sigma-2})s_n. \tag{4.28}$$

A desigualdade (i) e o fato de que $\sigma > 2$ implicam

$$\|\mathcal{P}_n\| < \frac{s_n}{20} < (1 - 2^{-2\sigma-2})s_n.$$

Isso mostra (4.28).

Nos resta mostrar que

$$G_0 = \lim_{n\to\infty} T_0^{-1} \circ T_2^{-1} \circ \cdots \circ T_n^{-1}(G_{n+1})$$

existe. Observe que esse limite coincide com

$$\lim_{n\to\infty} T_0^{-1} \circ T_2^{-1} \circ \cdots \circ T_n^{-1}(0),$$

pois $\lim_{n\to\infty} G_n = 0$.

Seja $\mathcal{T}_n := T_0^{-1} \circ T_2^{-1} \circ \cdots \circ T_n^{-1}$. Aplicando o Lema 8 recursivamente concluímos que $\mathcal{T}_n$ é uma aplicação analítica em B_{n+1}. Além disso, já demonstramos que $0 \in B_n$ para todo $n \geq 0$. Usando a desigualdade do valor médio (Teorema 13, pág. 69), segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_n(G_{n+2}) - \mathcal{T}_{n+1}(G_{n+2})\| &= \|\mathcal{T}_n(G_{n+2}) - \mathcal{T}_n(G_{n+1})\| \\
&\leq \sup_{X\in B_{n+1}} |||D\mathcal{T}_n(X)||| \, \|\mathcal{P}_{n+1}(G_{n+1})\| \\
\leq \sup_{X\in B_1} |||DT_0^{-1}(X)||| \cdots \sup_{X\in B_n} |||DT_{n-1}^{-1}(X)||| \sup_{X\in B_{n+1}} |||DT_n^{-1}(X)||| \, \|\mathcal{P}_{n+1}(G_{n+1})\|,
\end{aligned}$$

onde usamos a regra da cadeia. Conforme o Teorema 12, pág. 67,

$$Df^{-1}(w) = Df(f^{-1}(w))^{-1}.$$

Usando isso na desigualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{T}_n(G_{n+2}) - \mathcal{T}_{n+1}(G_{n+2})\| \\
&\leq \sup_{X\in B_0} |||DT_0(X)^{-1}||| \cdot\cdot \sup_{X\in B_{n-1}} |||DT_{n-1}(X)^{-1}||| \sup_{X\in B_n} |||DT_n(X)^{-1}||| \, \|\mathcal{P}_{n+1}(G_{n+1})\|.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Agora, vamos usar a desigualdade (4.33). Antes disso, vamos melhorar essa estimativa utilizando (4.32) e a desigualdade (i) do Lema 12. Fazendo isso obtemos

$$\begin{aligned}|||DT_k(X)^{-1}||| &\leq (1 - |||D\mathcal{P}_n(X)|||)^{-1} < (1 - 4s_n^{-1}\|\mathcal{P}_n\|_n)^{-1} < 1 + 8s_n^{-1}\|\mathcal{V}_n\|_n \\ &< 1 + (s_0\nu)^{-1}\, 2^{n+3}(\nu\|V_0\|_{s_0,r})^{2^n}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

para todo $X \in B(G_n, s_n/2)$.

A Proposição 6 e (4.32) garantem que podemos substituir

$$\sup_{X\in B_n} \quad \text{por} \quad \sup_{X\in B(G_n,s_n/2)}$$

em (4.29) para todo $n \geq 0$. Fazendo isso e usando (4.30) concluímos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_n(G_{n+2}) - \mathcal{T}_{n+1}(G_{n+2})\| &\leq \prod_{j=0}^{\infty}\left\{1 + (s_0\nu)^{-1}\, 2^{j+3}(\nu\|V_0\|_{s_0,r})^{2^j}\right\}\|\mathcal{P}_{n+1}\| \\ &\leq M\,\|\mathcal{V}_{n+1}\|_{n+1},\end{aligned}$$

onde M é uma constante. Isso mostra que

$$G_0 = \lim_{n\to\infty} J_n(G_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} J_n(0)$$

existe e completa a demonstração do Lema. ■

Demonstração dos Lemas Auxiliares

Demonstração do Lema 8. Vamos utilizar o Teorema da aplicação inversa (Teorema 12, pág. 67). Para isso, considere as matrizes 4×4 diagonais com entradas complexas como se fossem elementos de $\mathbb{C}^4$.

Notação: seja f uma aplicação, Df denota a matriz Jacobiana de f; $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_n$.

A aplicação $T_n : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ é analítica em B_n. Para verificar que

$$\det(DT_n(G_n)) \neq 0,$$

vamos utilizar o Teorema de Geršgorin (Teorema 15, pág. 70).

Da definição de T_n segue que

$$\rho_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4} |DT_n(G_n)_{ij}| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\left|\delta_{ij} - \frac{\partial\mathcal{P}_i(G_n)}{\partial X_j}\right| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\left|\frac{\partial\mathcal{P}_i(G_n)}{\partial X_j}\right|.$$

Pelo Teorema 15, os autovalores de $DT_n(G_n)$ estão localizados nos discos

$$\left\{w : |w - DT_n(G_n)_{ii}| = \left|w - 1 + \frac{\partial\mathcal{P}_i(G_n)}{\partial X_i}\right| \leq \rho_i\right\},\ i = 1, \ldots, 4.$$

Para que nenhum disco contenha a origem devemos ter

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\left|\frac{\partial\mathcal{P}_i(G_n)}{\partial X_j}\right| < \left|1-\frac{\partial\mathcal{P}_i(G_n)}{\partial X_i}\right|, \qquad i=1,\dots,4.$$

Essa desigualdade é satisfeita se

$$\left|\frac{\partial\mathcal{P}_i(G_n)}{\partial X_j}\right| < \frac{1}{4}, \qquad i,j=1,\dots,4. \tag{4.31}$$

Usando (A.4) e a estimativa de Cauchy (A.11) com $\xi = s_n$ e $\xi_1 = s_n/2$ segue que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\mathcal{P}_i(X)}{\partial X_j}\right| &\leq \max_{1\leq j\leq 4}\sum_{i=1}^{4}\left|\frac{\partial\mathcal{P}_i(X)}{\partial X_j}\right| \equiv |||D\mathcal{P}(X)|||\\ &\leq 4s_n^{-1}\sum_{m'\in\mathcal{M}}\sup_{\substack{m\in\mathcal{M}\\ X\in B_n}}|\mathcal{V}_n(m,m';0;X)|\delta_{m,m'} = 4s_n^{-1}\|\mathcal{P}(X)\|_n < \frac{1}{5}\end{aligned} \tag{4.32}$$

para todo $X \in B(G_n, s_n/2)$, onde a última desigualdade é satisfeita por hipótese. Em particular, isso satisfaz (4.31) e implica que $DT_n(G_n)$ não tem autovalores nulos, portanto, $\det(DT_n(G_n)) \neq 0$.

Feito isso, podemos aplicar o Teorema da aplicação inversa (Teorema 12, pág. 67) e obter o resultado levando em conta as duas próximas observações: (i) (4.32) e a Proposição 6 nos permitem escolher $s_2 = s_n/2$ no Teorema 12; (ii)

$$\begin{aligned}|||DT_n(G_n)^{-1}||| &= |||(1-D\mathcal{P}(G_n))^{-1}|||\\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty}|||D\mathcal{P}(G_n)|||^j = (1-|||D\mathcal{P}(G_n)|||)^{-1} < 5/4,\end{aligned} \tag{4.33}$$

o que implica

$$\left\{Y : \|Y-G_{n+1}\| < \frac{s_n}{5}\right\} \subset \left\{Y : \|Y-G_{n+1}\| < \frac{s_n/2}{2\,|||\,DT_n(G_n)^{-1}|||}\right\}.$$

Além disso,

$$\left\{Y : \|Y-G_{n+1}\| < \frac{s_n}{2^{2\sigma+2}} = s_{n+1}\right\} \subset \left\{Y : \|Y-G_{n+1}\| < \frac{s_n}{5}\right\},$$

pois $\sigma > 2$ por hipótese. ■

Demonstração do Lema 9. Notação: $f \equiv d(m,k) - d(m',k')$; $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_n(m,m';k;X)$; $W := W_{n+1}(m,m';k;X)$.

A condição (4.2) implica $|f|^{-1} < (|k|+1)^\sigma/\gamma$. Usando isso em (4.11) e observando que $W_{m+1}(m,m;0;X) = 0$, segue que

$$|W| = \frac{|\mathcal{V}|}{|f|} < \frac{(|n|+1)^\sigma}{\gamma}|\mathcal{V}|$$

para quaisquer $m, m' \in \mathcal{M}$ e $k \in \mathbb{Z}^2$.

Calculando a norma (4.13), observando que

$$\sup_{X \in B_{n+1}} |\mathcal{V}(X)| < \sup_{X \in B_n} |\mathcal{V}(X)|$$

pois $B_{n+1} \subset B_n$ por hipótese, e introduzindo $r_{n+1} = r_n - \rho_n$ obtemos

$$\|W\|_{n+1} < b_n \|\mathcal{V}\|_n,$$

com

$$\begin{aligned} b_n = b_n(\sigma, \gamma, \rho_{n+1}) &= \frac{5}{2\gamma^2} \sup_{|k| \geq 0} e^{-\rho_{n+1}|k|}(|k|+1)^{2\sigma+1} \\ &= \frac{5e^{\rho_{n+1}}}{2\gamma^2} \left(\frac{2\sigma+1}{e\,\rho_{n+1}} \right)^{2\sigma+1}. \end{aligned}$$

■

A proposição a seguir estabelece algumas propriedades da norma (4.13).

Proposição 4 (Propriedades de $\|\cdot\|_{r,s}$)**.** *Sejam $r' < r$ e $s' < s$ constantes positivas. A norma* (4.13) *satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} \|A\|_{r-r',s} &\leq \|A\|_{r,s}, \\ \|A\|_{r,s-s'} &\leq \|A\|_{r,s}, \\ \|AB\|_{r,s} &\leq \|A\|_{r,s}\|B\|_{r,s}, \\ \|[A,B]\|_{r,s} &\leq 2\|A\|_{r,s}\|B\|_{r,s}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Demonstração. Notação: $a := A(m, m'; k; X)$; $b := B(m, m'; k; X)$;

$$\|a\|_s := \sup_{X \in B(X_0, s)} |a|.$$

A demonstração das duas primeiras desigualdades é imediata:

$$\|A\|_{r-r',s} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ m' \in \mathcal{M}}} e^{r|k|} e^{-r'|k|} \sup_{m \in \mathcal{M}} \|a\|_s \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ m' \in \mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{m \in \mathcal{M}} \|a\|_s = \|A\|_{r,s};$$

$$\|A\|_{r,s-s'} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ m' \in \mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{m \in \mathcal{M}} \|a\|_{s-s'} \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ m' \in \mathcal{M}}} e^{r|k|} \sup_{m \in \mathcal{M}} \|a\|_s = \|A\|_{r,s},$$

onde usamos que $B(X_0, s - s') \subset B(X_0, s)$.

Para provar a terceira desigualdade vamos usar a propriedade:

$$\|ab\|_s = \sup_{X \in B(X_0,s)} |ab| \leq \sup_{X \in B(X_0,s)} |a| \sup_{X \in B(X_0,s)} |b| = \|a\|_s \|b\|_s. \tag{4.35}$$

Os elementos de matriz de AB são dados por

$$AB(m,m';k;X) = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} A(m,l;k-q;X)B(l,m';q;X).$$

Logo,

$$\|AB(m,m';k;X)\|_s \leq \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} \|A(m,l;k-q;X)\|_s \|B(l,m';q;X)\|_s,$$

onde aplicamos (4.35) e a desigualdade triangular. Escrevendo $nr = (n-k)r + kr$ e usando a desigualdade triangular, segue que $e^{r|k|} \leq e^{r|k-q|}e^{r|q|}$. Usando isso e a desigualdade acima obtemos

$$e^{r|k|}\|AB(m,m';k;X)\|_s \leq \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} e^{r|k-q|}\|A(m,l;k-q;X)\|_s e^{r|q|}\|B(l,m';q;X)\|_s,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} & e^{r|k|}\|AB(m,m';k;X)\|_s \\ &\leq \sup_{j\in M}\sum_{q\in\mathbb{Z}^2} e^{r|q|}\|B(j,m';q;X)\|_s \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} e^{r|k-q|}\|A(m,l;k-q;X)\|_s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{m\in\mathcal{M}}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} & e^{r|k|}\|AB(m,m';k;X)\|_s \\ &\leq \sup_{j\in\mathcal{M}}\sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^2\\ m'\in\mathcal{M}}} e^{r|q|}\|B(j,m';q;X)\|_s \sup_{m\in\mathcal{M}}\sum_{\substack{k'\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathcal{M}}} e^{r|k'|}\|A(m,l;k';X)\|_s.\end{aligned}$$

Comparando a desigualdade anterior com a Definição (4.13) concluímos que

$$\|AB\|_{r,s} \leq \|A\|_{r,s}\|A\|_{r,s}.$$

Isso mostra a terceira desigualdade da Proposição. A quarta desigualdade é imediata usando a propriedade acima e a desigualdade triangular. ■

Demonstração do Lema 10. É idêntica à demonstração do Lema 5, pág. 53. ■

Demonstração do Lema 11. A expressão (4.9) implica

$$\begin{aligned}|[W_{n+1},Q_\infty](m,m';k;X)| &= |\mathcal{V}_n(m,m';k;X) - \mathcal{V}_n(m,m';0;X)\delta_{k,0}\delta_{m,m'}| \\ &\leq |\mathcal{V}_n(m,m';k;X)| \qquad (4.36)\end{aligned}$$

para quaisquer $m, m' \in \mathcal{M}$ e $k \in \mathbb{Z}^2$.

Por definição, $\mathcal{V}_{n+1}(\varphi, G_{n+1}) = V_n(\varphi, T_n^{-1}(G_{n+1})) = V_n(\varphi, G_n)$. Pelo Lema 8, essa igualdade está bem definida em G_{n+1} e na sua vizinhança B_{n+1}. Usando (4.6), (4.36) e as propriedades da norma obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{V}_{n+1}\|_{n+1} &< \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(\frac{\|\mathcal{V}_n + G_n\|_{n+1}}{j!} + \frac{\|\mathcal{V}_n\|_{n+1}}{(j+1)!} \right) \|W_{n+1}\|_{n+1}^j \\
&< (\|\mathcal{V}_n\|_n + \|G_n\|_n) \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(\frac{1}{j!} + \frac{1}{(j+1)!} \right) \|W_{n+1}\|_{n+1}^j \\
&< 2(\|\mathcal{V}_n\|_n + \|G_n\|_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \|W_{n+1}\|_{n+1}^j \\
&< 4(\|\mathcal{V}_n\|_n + \|G_n\|_n)\|W_{n+1}\|_{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \|W_{n+1}\|_{n+1}^j \\
&= 4(\|\mathcal{V}_n\|_n + \|G_n\|_n)\|W_{n+1}\|_{n+1} \exp(2\|W_{n+1}\|_{n+1}).
\end{aligned}$$

■

Demonstração do Corolário 2. Usando (4.24) em (4.21) obtemos

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{5}{2\gamma^2} \left(\frac{8\sigma + 4}{e\,\rho} \right)^{2\sigma+1} e^{\rho 2^{-n-2}} 2^{(2\sigma+1)n} \\
&< \frac{5e^{\rho/4}}{2\gamma^2} \left(\frac{8\sigma + 4}{e\,\rho} \right)^{2\sigma+1} 2^{(2\sigma+1)n} = c\, 2^{(2\sigma+1)n} = c_n. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Usando essa desigualdade, (4.20) e (4.23), segue o Corolário 2. ■

Proposição 5. *Seja A uma matriz 4×4 diagonal e constante. Então,*

$$\|A\|_n = \|A\|, \qquad n \geq 0. \qquad (4.38)$$

Demonstração.

$$\|A\|_n = \sum_{m' \in \mathcal{M}} \sup_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ X \in B_n}} |A(m, m')| \delta_{m,m'} = \sum_{m' \in \mathcal{M}} |A(m', m')| = \|A\|.$$

■

Demonstração da Proposição 3. (Vale lembrar que $\mathcal{P}_n \equiv \operatorname{diag} \overline{\mathcal{V}_n}$).

De (4.12) segue que

$$G_n = G_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{P}_j(G_j), \qquad n \geq 1.$$

Usando a hipótese (4.16) na expressão anterior obtemos

$$G_n = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{P}_j(G_j) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{P}_j(G_j) = \sum_{j=n}^{\infty} \mathcal{P}_j(G_j). \tag{4.39}$$

Por fim, (4.38) implica

$$\|\mathcal{P}_j(G_j)\|_n = \|\mathcal{P}_j(G_j)\|_j,$$

para quaisquer $n, j \geq 0$. Usando essa propriedade, a desigualdade triangular e o fato de que

$$\|\mathcal{P}_j(G_j)\|_j \equiv \|\mathrm{diag}\,\overline{\mathcal{V}_j}\|_j \leq \|\overline{\mathcal{V}_j}\|_j \leq \|\mathcal{V}_j\|_j,$$

segue de (4.39)

$$\|G_n\|_n \leq \sum_{j=n}^{\infty} \|\mathcal{P}_j(G_j)\|_j \leq \sum_{j=n}^{\infty} \|\mathcal{V}_j\|_j, \qquad n \geq 0.$$

■

Demonstração do Lema 12. Primeiramente, vamos supor que

$$\sum_{j=n}^{\infty} \|\mathcal{V}_j\|_j \leq 2\|\mathcal{V}_n\|_n. \tag{4.40}$$

Usando isso em (4.27) segue que $\|G_n\|_n < 2\|\mathcal{V}_n\|_n$. Introduzindo a notação $\varepsilon_n := \|\mathcal{V}_n\|_n$, $x_n := 2c_n\varepsilon_n$, e observando que $c_{n+1} = 2^{2\sigma+1}c_n$, a desigualdade (4.25) assume a forma

$$x_{n+1} < 3 \cdot 2^{2\sigma+2} x_n^2 e^{x_n}. \tag{4.41}$$

Vamos demonstrar que a condição (4.40) é consistente com (4.41), ou seja, que a seqüência que satisfaz (4.41) satisfaz (4.40).

Analogamente à demonstração do Lema 7, vamos proceder em duas etapas. Primeiro, vamos mostrar por indução que se uma seqüência $\{x_n\}$ satisfaz (4.41) e $x_0 < \eta$ para algum η satisfazendo a condição

$$3 \cdot 2^{2\sigma+2}\eta e^{\eta} < 1, \tag{4.42}$$

então $x_n < \eta$ para todo $n \geq 0$. Assuma que $x_n < \eta$. De (4.41) e (4.42) segue que

$$x_{n+1} < 3 \cdot 2^{2\sigma+2} x_n^2 e^{x_n} < 3 \cdot 2^{2\sigma+2}\eta^2 e^{\eta} < \eta.$$

Uma possível escolha de η que satisfaz (4.42) é $\eta = (3 \cdot 2^{2\sigma+2}e)^{-1}$. Em uma segunda etapa, vamos melhorar a estimativa. A desigualdade $x_n < \eta$ e (4.41) implicam

$$x_{n+1} < \vartheta\, x_n^2, \qquad \vartheta := 3 \cdot 2^{2\sigma+2}e^{\eta}. \tag{4.43}$$

Recursivamente, segue dessa desigualdade que $x_n < \vartheta^{-1}(\vartheta x_0)^{2^n}$. Isso implica que para haver convergência é necessário que $\vartheta x_0 < 1$, ou seja, $x_0 < \vartheta^{-1} = (3{\cdot}2^{2\sigma+2}e^{\eta})^{-1}$. Mas a condição (4.42) que impusemos no primeiro passo exige que $\eta < (3{\cdot}2^{2\sigma+2}e^{\eta})^{-1}$. Portanto, concluímos que a condição $x_0 < \eta = (3 \cdot 2^{2\sigma+2}e)^{-1}$, que equivale a

$$\varepsilon_0 < (3 \cdot 2^{2\sigma+3} e\, c)^{-1}, \tag{4.44}$$

garante que

$$\varepsilon_n < \nu^{-1}\, 2^{-(2\sigma+1)n}(\nu\varepsilon_0)^{2^n} \qquad \text{com} \qquad \nu := c\, 3 \cdot 2^{2\sigma+3} \exp\{(3 \cdot 2^{2\sigma+2}e)^{-1}\}, \tag{4.45}$$

para todo $n \geq 1$.

Para demonstrar (i) ainda temos que verificar que

$$\nu^{-1}\, 2^{-(2\sigma+1)n}(\nu\varepsilon_0)^{2^n} < 20^{-1}s_n = 20^{-1}s_0\, 2^{-(2\sigma+2)n}$$

para todo $n \geq 0$. Isso equivale à condição

$$f(x) := 20(\nu s_0)^{-1}2^x(\nu\varepsilon_0)^{2^x} < 1 \tag{4.46}$$

para todo $x \geq 0$. A função $f(x)$ tem um máximo em $\bar{x} \in (0, \infty)$, logo, se (4.46) for satisfeita em $\bar{x}$, será satisfeita para todo $x \geq 0$. Calculando o máximo de $f(x)$ conclui-se que (4.46) é verdadeira se

$$-\frac{20(\nu\varepsilon_0)^{-(\log(\nu\varepsilon_0))^{-1}}}{\nu \log(\nu\varepsilon_0)} < s_0,$$

o que é garantido por hipótese. Isso mostra (i).

As desigualdades (4.20), (4.37) e (4.45) implicam

$$\|W_{n+1}\|_{n+1} < b_n\varepsilon_n < c_n\varepsilon_n < c\,\nu^{-1}(\nu\varepsilon_0)^{2^n}.$$

Isso mostra (ii).

Agora, vamos verificar que a condição (4.40) é satisfeita. Usando (4.43), (4.42) e o fato de que $x_j < \eta$ para todo $j \geq 0$, segue que $x_{j+1} < x_j$. Isso implica $\varepsilon_{j+1} < 2^{-(2\sigma+1)}\varepsilon_j$ e conseqüentemente $\|\mathcal{V}_j\|_j \leq 2^{-(2\sigma+1)(j-n)}\|\mathcal{V}_n\|_n$. Usando esse fato segue que

$$\sum_{j=n}^{\infty} \|\mathcal{V}_j\|_j = \|\mathcal{V}_n\|_n \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\|\mathcal{V}_j\|_j}{\|\mathcal{V}_n\|_n} \leq \|\mathcal{V}_n\|_n \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-(2\sigma+1)(j-n)} = \frac{\|\mathcal{V}_n\|_n}{1 - 2^{-2\sigma-2}} < 2\|\mathcal{V}_n\|_n,$$

pois $\sigma > 1$ por hipótese no Teorema 11. Usando (4.27) obtemos (iii). ■

4.4 Um Problema Equivalente

Seja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$. Considere o sistema

$$\dot{y} = (\varepsilon A + Q(t))y, \tag{4.47}$$

com matrizes A e $Q(t)$ conforme a seção anterior (sob as mesmas hipóteses).

Seja

$$H(t) = \int_0^t (\overline{Q} - Q(s))\, ds.$$

Pode-se demonstrar que $H(t)$ é uma matriz anti-Hermitiana e quase-periódica com o mesmo vetor de freqüências de $Q(t)$, com coeficientes de Fourier que dependem de ω:

$$H(t) = F_\omega(\omega t),$$

onde $F_\omega(\varphi)$ é uma função periódica. Para fazer isso, basta repetir a análise que fizemos na Seção 2.3 com a equação escalar e observar que $Q(t)$ é uma matriz anti-Hermitiana.

Considere a transformação linear

$$x = e^{H(t)}y. \tag{4.48}$$

Essa transformação é quase-periódica e unitária pois

$$\left(e^{H(t)}\right)^{-1} = e^{-H(t)} = e^{H(t)^\dagger} = \left(e^{H(t)}\right)^\dagger.$$

Agora, vamos supor que

$$[H(t), \dot{H}(t)] = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{4.49}$$

Dessa forma, derivando (4.48) obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{H}(t)e^{H(t)}y + e^{H(t)}\dot{y} \\
&= \dot{H}(t)x + e^{H(t)}(\varepsilon A + Q(t))e^{-H(t)}x \\
&= (\overline{Q} - Q(t) + e^{H(t)}(\varepsilon A + Q(t))e^{-H(t)})x.
\end{aligned}$$

Vamos supor também que

$$[H(t), Q(t)] = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{4.50}$$

Com isso, a equação anterior fica

$$\dot{x} = (\overline{Q} + \varepsilon\, e^{H(t)}Ae^{-H(t)})x.$$

Introduzindo a notação

$$\overline{Q} \equiv A' \qquad \text{e} \qquad e^{H(t)} A e^{-H(t)} \equiv Q'(t),$$

obtemos

$$\dot{x} = (A' + \varepsilon Q'(t))x. \tag{4.51}$$

Portanto, sob as hipóteses (4.49) e (4.50) é possível transformar o sistema (4.47) no sistema (4.51) através da mudança de variáveis (4.48). Essa transformação de variáveis é unitária e quase-periódica com o mesmo vetor de freqüências de $Q(t)$.

Todavia, diferentemente de $Q(t)$ no sistema (4.47), os coeficientes de Fourier de $Q'(t)$ dependem de ω pois $H(t) = F_\omega(\omega t)$. Portanto, a perturbação $Q'(t)$ em (4.51) é diferente da perturbação $Q(t)$ em (3.1). Como observado em [26], para aplicar o Teorema de redutibilidade I (Teorema 8, pág. 32) ao sistema (4.51) para inferir sobre o sistema (4.47), devemos observar que os coeficientes de Fourier de $Q'(t)$ dependem de ω. Seja $Q'(t) = G_\omega(\omega t)$. No Teorema 8 temos que verificar a hipótese $\|\varepsilon G_\omega \otimes I\|_{\Omega_0,r} < \varepsilon_c$ com a norma (3.31).

Observação 20. *As hipóteses* (4.49) *e* (4.50) *são equivalentes a*

$$[H(t), Q(t)] = 0 \qquad e \qquad [H(t), \overline{Q}] = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{4.52}$$

Observação 21. *Se a matriz $Q(t)$ for da forma*

$$Q(t) = f(t)M,$$

com $f(t)$ uma função quase-periódica e M uma matriz constante e anti-Hermitiana, então a condição (4.52) *é satisfeita.*

Exemplo 3. *Seja*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A equação

$$i\dot{\psi} = (\varepsilon\sigma_3 + f(t)\sigma_1)\psi \tag{4.53}$$

pode ser transformada em

$$i\dot{\phi} = (\overline{f}\sigma_1 + \varepsilon\, e^{-ih(t)\sigma_1}\sigma_3 e^{ih(t)\sigma_1})\phi$$

através da mudança de variável

$$\phi = e^{-ih(t)\sigma_1}\psi,$$

onde

$$h(t) = \int_0^t (\overline{f} - f(s))\, ds.$$

Observe que $h(t) = g_\omega(\omega t)$, onde $g_\omega(\varphi)$ é uma função periódica.

Observação 22. *Na referência [3] (vide também [2]), foi investigado o problema de existência de soluções quase-periódicas para a equação* (4.53)*. Em particular, foram encontradas soluções quase-periódicas dessa equação na forma de séries formais de potências e foi argumentado que tais séries são, em geral, divergentes. Em [11] (vide também [12]), foi demonstrado que tais soluções quase-periódicas de fato existem e não são analíticas no parâmetro* ε*, de acordo com uma conjectura proposta em [3].*

Apêndice A

Resultados Auxiliares

A.1 Teorema da Aplicação Inversa

Seja $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Definimos a norma de z por

$$\|z\| := \sum_{i=1}^{n} |z_i|, \tag{A.1}$$

onde $|z_i|$ denota o valor absoluto do número complexo z_i.

A bola de raio s centrada em $z_0 \in \mathbb{C}^n$ será denotada por

$$B(z_0, s) := \{z : \|z - z_0\| < s\}.$$

O fecho de $B(z_0, s)$ é bola fechada $\overline{B}(z_0, s) := \{z : \|z - z_0\| \leq s\}$.

Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. A derivada $f' : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação linear cuja matriz Jacobiana $Df \in \mathbb{C}^{n \times n}$ na base canônica é dada por

$$Df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right).$$

Seja A um operador linear que atua em $\mathbb{C}^n$. Definimos a norma de A por

$$|||A||| := \sup_{z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Az\|}{\|z\|} = \sup_{\substack{z \in \mathbb{C}^n \\ \|z\|=1}} \|Az\|. \tag{A.2}$$

Conforme [19], essa norma satisfaz

$$|||AB||| \leq |||A||| \, |||B|||, \tag{A.3}$$

e as definições (A.1) e (A.2) implicam

$$|||A||| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|. \tag{A.4}$$

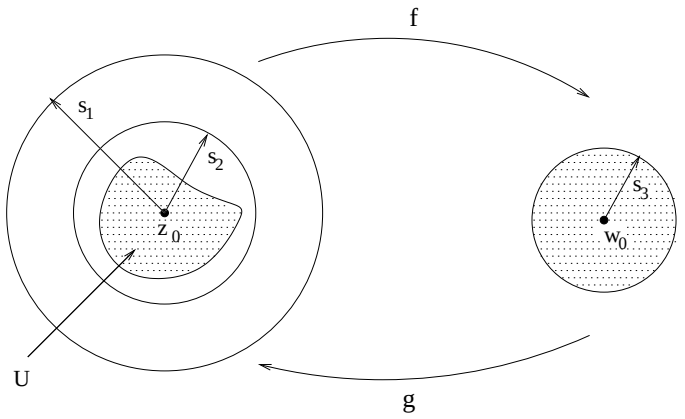

Figura A.1: Ilustração do Teorema da aplicação inversa.

Teorema 12 (Aplicação Inversa)**.** *Sejam* $B(z_0, s_1) \subset \mathbb{C}^n$ *e* $f : B(z_0, s_1) \to \mathbb{C}^n$ *uma aplicação analítica tal que* $\det(Df(z_0)) \neq 0$*. Se* $f(z_0) = w_0$*, então existe* s_2 *e* s_3*, com* $0 < s_2 < s_1$ *e* $s_3 = s_2/(2 \,|||\, Df(z_0)^{-1} |||)$*, e uma aplicação analítica* $g : B(w_0, s_3) \to U \subseteq B(z_0, s_2)$ *tal que* $f \circ g(w) = w$*. Além disso,* $Dg(w) = Df(g(w))^{-1}$*.*

Proposição 6. *Seja* $f(z) = z + h(z)$ *uma função analítica de* $B(z_0, s_1) \subset \mathbb{C}^2$ *em* $\mathbb{C}^2$ *tal que* $\det(Df(z_0)) \neq 0$*. Se* $|||Dh(z)||| < 1/5$ *para qualquer* $z \in B(z_0, s^*)$*, então podemos escolher* $s_2 = s^*$ *no Teorema 12.*

Demonstração do Teorema 12. Seja

$$\Phi_w(z) := z + Df(z_0)^{-1}(w - f(z)). \tag{A.5}$$

Observa-se: (i) $\Phi_{w_0}(z_0) = z_0$; (ii) $\Phi_w(z)$ e $D\Phi_w(z)$ são contínuas, pois f é analítica por hipótese; (iii) $D\Phi_w(z_0) = 0$.

Por continuidade, dado $\delta = 1/2$, existe s_2, com $0 < s_2 < s_1$, tal que

$$|||D\Phi_w(z)||| \leq 1/2 \qquad \text{para} \qquad \|z - z_0\| \leq s_2. \tag{A.6}$$

Pela desigualdade do valor médio (Teorema 13, pág. 69) isso implica

$$\|\Phi_w(x) - \Phi_w(y)\| \leq 1/2 \, \|x - y\| \tag{A.7}$$

para quaisquer $x, y \in \overline{B}(z_0, s_2)$. Além disso, supondo que

$$\|w - w_0\| \leq s_2/(2 \,|||\, Df(z_0)^{-1} |||) \equiv s_3,$$

ou seja, que $w \in \overline{B}(w_0, s_3)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|z_0 - \Phi_w(z)\| &= \|\Phi_{w_0}(z_0) - \Phi_w(z)\| = \|\Phi_w(z_0) - \Phi_w(z) + Df(z_0)^{-1}(w - w_0)\| \\
&\leq 1/2 \, \|z - z_0\| + |||Df(z_0)^{-1} ||| \, \|w - w_0\| \\
&\leq \frac{s_2}{2} + \frac{s_2}{2} = s_2
\end{aligned}$$

para qualquer $z \in \overline{B}(z_0, s_2)$. Isso mostra que $\Phi(\overline{B}(z_0, s_2)) \subseteq \overline{B}(z_0, s_2)$ e juntamente com (A.7) implica que $\Phi_w : \overline{B}(z_0, s_2) \to \overline{B}(z_0, s_2)$ é uma contração. Pelo Teorema do ponto fixo (Teorema 14, pág. 70), concluímos que $\Phi_w(z)$ tem um único ponto fixo $g(w)$ para cada $w \in B(w_0, s_3)$, ou seja,

$$\Phi_w(g(w)) = g(w) + Df(z_0)^{-1}(w - f \circ g(w)) = g(w).$$

Isso implica $f \circ g(w) = w$.

Nos resta mostrar que a função g é diferenciável e conseqüentemente analítica em $B(w_0, s_3)$. Introduzindo a notação $\lambda := Df(z_0)^{-1}$ e usando (A.7) segue que

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x + \lambda(w - f(x)) - y - \lambda(w - f(y)) + \lambda(f(x) - f(y))\| \\
&= \|\Phi_w(x) - \Phi_w(y) + \lambda(f(x) - f(y))\| \\
&\leq \|\Phi_w(x) - \Phi_w(y)\| + |||\lambda||| \, \|f(x) - f(y)\| \\
&\leq 1/2 \, \|x - y\| + |||\lambda||| \, \|f(x) - f(y)\|,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\|x - y\| \leq 2 \, ||| Df(z_0)^{-1} ||| \, \|f(x) - f(y)\|. \tag{A.8}$$

Sejam $u, v \in B(w_0, s_3)$ tais que $u = f(x)$ e $v = f(y)$, com $x, y \in B(z_0, s_2)$. Então

$$\|g(u) - g(v) - Df(y)^{-1}(u - v)\| = \|x - y - Df(y)^{-1}(f(x) - f(y))\|. \tag{A.9}$$

Como f é analítica, segue que

$$f(x) - f(y) = Df(y)(x - y) + o(x - y). \tag{A.10}$$

Substituindo (A.10) em (A.9) e usando (A.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\|g(u) - g(v) - Df(y)^{-1}(u - v)\| &= \|Df(y)^{-1} o(x - y)\| \\
&\leq 2 \, ||| Df(z_0)^{-1} ||| \, |||Df(y)^{-1} ||| \, \|o(u - v)\| =: r(u - v).
\end{aligned}$$

Como $Df(z_0)^{-1}$ e $Df(y)^{-1}$ são limitadas, segue que

$$\lim_{u \to v} \frac{r(u - v)}{\|u - v\|} = 0.$$

Pela definição de diferenciabilidade concluímos que g é diferenciável em $B(w_0, s_3)$ e que sua derivada no ponto v é dada por

$$Dg(v) = Df(y)^{-1} = Df(g(v))^{-1}.$$

Isso completa a demonstração. ■

Demonstração da Proposição 6. Vamos usar a propriedade (A.3) e a expansão em série geométrica para $(1+Dh(z_0))^{-1}$ que é convergente pois $|||Dh(z_0)||| < 1/5$. Temos que mostrar que a condição (A.6) é satisfeita pelas hipóteses da proposição. De (A.5) segue que

$$\begin{aligned}
|||D\Phi_w(z)||| &= |||1-(1+Dh(z_0))^{-1}(1+Dh(z))||| \\
&= |||1-\sum_{k=0}^{\infty}(-Dh(z_0))^k(1+Dh(z))||| \\
&= |||Dh(z)-\sum_{k=1}^{\infty}(-Dh(z_0))^k(1+Dh(z))||| \\
&\leq |||Dh(z)\,||| + (1+|||Dh(z)|||)\sum_{k=1}^{\infty}|||Dh(z_0)|||^k \\
&= |||Dh(z)\,||| + \frac{(1+|||Dh(z)|||)\,|||\,Dh(z_0)|||}{1-|||Dh(z_0)|||} < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

para qualquer $z \in B(z_0, s^*)$. ■

A.2 Outros Resultados

Seja $\overline{D}(z_0,\xi) := \{z : |z-z_0| \leq \xi\} \subset \mathbb{C}$ o disco fechado de raio ξ centrado em z_0.

Proposição 7. [20] *Sejam $f : \overline{D}(z_0,\xi) \to \mathbb{C}$ uma função analítica e ξ_1 uma constante tal que $0 < \xi_1 < \xi$, então*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!\,\xi}{(\xi-\xi_1)^{n+1}} \sup_{w\in\overline{D}(z_0,\xi)} |f(w)| \tag{A.11}$$

para qualquer $z \in \overline{D}(z_0,\xi_1)$.

Teorema 13 (Desigualdade do Valor Médio)**.** *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto e convexo. Se $f : U \to \mathbb{C}^n$ é analítica, então*

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \sup_{z\in U} |||Df(z)\,|||\ \|x-y\|$$

para quaisquer $x, y \in U$.

Demonstração. Vamos usar a identidade

$$f_i(y)-f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} f_i(y_1,\ldots,y_j,x_{j+1},\ldots,x_n) - f_i(y_1,\ldots,y_{j-1},x_j,\ldots,x_n).$$

Seja $\gamma \subset U$ a linha reta que conecta x_j a y_j temos que

$$\begin{aligned}
&f_i(y_1,\ldots,y_j,x_{j+1},\ldots,x_n) - f_i(y_1,\ldots,y_{j-1},x_j,\ldots,x_n) \\
&\qquad = \int_\gamma \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(y_1,\ldots,z_j,x_{j+1},\ldots,x_n)dz_j.
\end{aligned}$$

Isso implica

$$|f_i(y_1,\ldots,y_j,x_{j+1},\ldots,x_n) - f_i(y_1,\ldots,y_{j-1},x_j,\ldots,x_n)| \leq \sup_{z\in U} |Df(z)_{ij}|\,|y_j - x_j|$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned}\|f(y) - f(x)\| &= \sum_{i=1}^{n} |f_i(y) - f_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sup_{z\in U} |Df(z)_{ij}|\,|y_j - x_j| \\ &\leq \sup_{z\in U}\left(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n} |Df(z)_{ij}|\right)\sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j| = \sup_{z\in U} |||Df(z)\,|||\;\|y - x\|,\end{aligned}$$

onde usamos (A.4). ■

Teorema 14 (Ponto Fixo)**.** [21] *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto fechado. Se $f : U \to U$ é uma contração, ou seja, se existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$, tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq c\,\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in U$, então f possui um único ponto fixo em U.*

Teorema 15 (Geršgorin)**.** [19] *Seja $A = (A_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com entradas complexas e*

$$\rho_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |A_{ij}|,$$

onde $|A_{ij}|$ é o valor absoluto do número complexo A_{ij}. Então qualquer autovalor de A pertence a pelo menos um dos discos

$$\{z : |z - A_{ii}| \leq \rho_i\}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

contidos no plano complexo. Além disso, um conjunto de m discos com nenhum ponto em comum aos $n - m$ discos restantes contém m e somente m autovalores de A.

Bibliografia

[1] L. Amerio e G. Prouse, *Almost-Periodic Functions and Functional Equations*, van Nostrand Reinhold, 1971.

[2] J. C. A. Barata, *Expansões Perturbativas para uma Classe de Sistemas Quânticos de Dois Níveis sob Interações Periodicamente e Quasi-Periodicamente Dependentes do Tempo*, Tese de Livre-Docência, IFUSP, 1999.

[3] J. C. A. Barata, *On Formal Quasi-Periodic Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level System with a Hamiltonian Depending Quasi-Periodically on Time*, Rev. Math. Phys. **12**, 25-64 (2000).

[4] P. M. Blekher, H. R. Jauslin e J. L. Lebowitz, *Floquet Spectrum for Two-Level Systems in Quasiperiodic Time-Dependent Fields*, J. Stat. Phys. **68**, 271-310 (1992).

[5] N. N. Bogoljubov, Ju. A. Mitropoliskii e A. M. Samoilenko, *Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*, Springer-Verlag, 1976.

[6] E. A. Coddington e N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.

[7] M. Combescure, *The Quantum Stability Problem for Time-Periodic Perturbations of the Harmonic Oscillator*, Ann. Inst. H. Poincaré **47**, 63-83 (1987). Errata: Ann. Inst. H. Poincaré **47**, 451-454 (1987).

[8] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, 1989.

[9] L. H. Eliasson, *Perturbations of Stable Invariant Tori for Hamiltonian Systems*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4) **15(1)**, 115-147 (1988).

[10] N. P. Erugin, *Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Periodic and Quasi-Periodic Coefficients*, Academic Press, 1966.

[11] G. Gentile, *Quasi-Periodic Solutions for Two-Level Systems*, Comm. Math. Phys. **242**, 221-250 (2003).

[12] G. Gentile, *Pure Point Spectrum for Two-Level Systems in a Strong Quasi-Periodic Field*, J. Stat. Phys. **115**, 1605-1620 (2004).

[13] H. R. Jauslin, *Stability and Chaos in Classical and Quantum Hamiltonian Systems* em: II Granada Seminar on Computational Physics, editado por P. Garrido e J. Marro, World Scientific, 1993.

[14] H. R. Jauslin e J. L. Lebowitz, *Spectral and Stability Aspects of Quantum Chaos*, Chaos **1** (1), 114-121 (1991).

[15] A. Jorba e C. Simó, *On the Reducibility of Linear Differential Equations with Quasiperiodic Coefficients*, J. Differential Equations **98**, 111-124 (1992).

[16] A. Jorba e C. Simó, *On Quasi-Periodic Perturbations of Elliptic Equilibrium Points*, SIAM J. Math. Anal. **27**, 1704-1737 (1996).

[17] A. Jorba, R. Ramirez-Ros e J. Villanueva, *Effective Reducibility of Quasi-Periodic Linear Equations Close to Constant Coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **28**, 178-188 (1997).

[18] S. G. Krantz e H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem: History, Theory and Applications*, Birkhäuser, 2002.

[19] P. Lancaster e M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, Academic Press, 1985.

[20] S. Lang, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, 1999.

[21] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.

[22] R. de la Llave, *A Tutorial on KAM Theory*, mp_arc preprint (2001).

[23] J. Moser, *On the Theory of Quasiperiodic Motions*, SIAM Review **8** (2), 145-172 (1966).

[24] V. V. Nemytskii e V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, 1960.

[25] J. Puig, *Reducibility of Linear Equations with Quasi-Periodic Coefficients: A Survey*, mp_arc preprint (2002).

[26] W. F. Wreszinski, *Atoms and Oscillators in Quasi-Periodic External Fields*, Helv. Phys. Acta **70**, 109-123 (1997).

[27] W. F. Wreszinski e S. Casmeridis, *Models of Two-Level Atoms in Quasiperiodic External Fields*, J. Stat. Phys. **90**, 1061-1059 (1998).