Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Vínculos Observacionais em Modelos de
Energia Escura Interagente**

Sandro Marcio Rodrigues Micheletti

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IF-USP)
Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo (IF-USP)
Prof. Dr. Silvio Roberto de Azevedo Salinas (IF-USP)
Profa. Dra. Elisabete Maria de Gouveia Dal Pino (IAG-USP)
Prof. Dr. Reuven Opher (IAG-USP)

São Paulo
2009

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Elcio Abdalla, pela orientação e pelo incentivo à autonomia científica.

Ao Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo, pelas discussões úteis e pelas dicas no cálculo numérico.

À Maria Cecília Ribeiro, pelo apoio, compreensão e carinho, sem os quais, possivelmente, eu não teria chegado ao final deste trabalho.

Ao amigo Rone Peterson Galvão de Andrade, pelos cafés, pelos bate-papos sobre física e por me ajudar a desvendar os enigmas do sistema operacional Linux.

Aos meus pais.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho foi investigada a possibilidade de haver uma interação entre a energia e a matéria escuras. Adotamos um espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker plano e dois modelos de energia escura interagente. No primeiro, o termo de interação, presente nas equações de conservação da energia e da matéria escuras, foi obtido a partir de argumentos fenomenológicos. No segundo, esse foi derivado de primeiros princípios. Ambos os modelos foram comparados com dados observacionais recentes e, em ambos os casos, obtivemos uma estimativa da constante de acoplamento diferente de zero com um desvio padrão de confiança. Além disso, em ambos os casos o sinal da constante de acoplamento é compatível com a energia escura se convertendo em matéria escura, fornecendo um alívio para o problema da coincidência.

Abstract

In the present work the possibility of a dark energy interacting with dark matter has been investigated. We considered a flat Friedmann-Robertson-Walker space-time with two alternative interacting dark energy models. In the first, the interaction term, appearing in the energy conservation equations was introduced by purely phenomenological reasons. In the second, it has been obtained from a given Lagrangian density. In both cases we compared the results with recent observational data and obtained an estimate of the coupling constant, which is nonvanishing by one standard deviation. Moreover, in both cases the sign of the coupling constant is compatible with dark energy decaying into dark matter, providing an alleviation to the coincidence problem.

"There it must be, I think, in the vast and eternal laws of matter, and not in the daily cares and sins and troubles of men, that whatever is more than animal within us must find its solace and its hope."

*H. G. Wells
The Island of Doctor Moreau*

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Componentes do universo	6
1.1.1	Fótons	6
1.1.2	Bárions	7
1.1.3	Matéria escura	8
1.1.4	Neutrinos	9
1.1.5	Energia escura	11
2	Perturbações cosmológicas	17
2.1	Matéria escura	18
2.2	Bárions	23
2.3	Fótons	32
2.4	Neutrinos	34
2.5	Equações de Einstein linearizadas	35
2.6	Condições iniciais	40
2.7	Teoria inflacionária	42
2.8	Inomogeneidades	46
2.9	Anisotropias	47
3	Modelos de energia escura interagente	57
3.1	Modelo fenomenológico	57
3.2	Modelo lagrangiano	62
3.2.1	Formalismo das tétradas	63
3.2.2	Um modelo lagrangiano para a energia escura em interação com a matéria escura	65
4	Análise de dados	70
4.1	Método de máxima verossimilhança	70
4.2	Regiões de confiança	75
5	Resultados e conclusões	77
5.1	Modelo fenomenológico	77
5.1.1	1ª Etapa	77
5.1.2	2ª Etapa	80

5.2	Modelo lagrangiano	88
5.3	Conclusões	112
A	Derivação do tensor de energia-momento dos férmions	113
B	Programação numérica	116
B.0.1	Modelo fenomenológico	116
B.0.2	Modelo lagrangiano	117

1 Introdução

O universo, em escalas da ordem de $100Mpc$ ou maiores, parece o mesmo em qualquer direção que olhemos, ou seja, é isotrópico. Como $1pc \simeq 3.2 \text{ anos} - luz$, então a isotropia é observada a partir de distâncias de $3 \times 10^8 \text{ anos} - luz$. A radiação cósmica de fundo (RCF) fornece a melhor evidência observacional dessa isotropia. Observações recentes da RCF mostram que essa é isotrópica, até uma parte em 10^5 . Considerando que essa radiação foi gerada quando o universo tinha apenas 300000 anos e que sua idade estimada hoje, como veremos, é próxima de 14 bilhões de anos, concluímos que o universo é isotrópico em escalas suficientemente grandes. Como não há razão para crermos que haja algo de especial em nossa posição no universo, supomos que qualquer observador que se mova com a velocidade média das galáxias típicas em sua vizinhança deva observar o mesmo universo em todas as direções. Em outras palavras, as condições devem ser as mesmas, num dado instante de tempo, quando vistas de quaisquer pontos que possam ser levados um no outro por uma rotação em torno de uma dada galáxia. Como qualquer ponto pode ser levado num outro através de uma sequência de rotações em torno de várias galáxias, então o universo deve ser também homogêneo: observadores em quaisquer galáxias devem ver o mesmo universo. Observações da distribuição de galáxias fornecem evidência de que essa é homogênea em escalas maiores do que $100 Mpc$ [1]. A suposição de que o universo em grandes escalas é homogêneo e isotrópico constitui o chamado *Princípio Cosmológico*.

É possível mostrar (ver seção 13.5 de [2]) que, se o universo parece esfericamente simétrico e isotrópico a um conjunto de observadores em queda livre, então a seguinte métrica é única, a menos de uma transformação de coordenadas:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (1)$$

Essa métrica foi obtida primeiramente por Friedmann, como uma solução das equações de Einstein [3] e depois obtida a partir de argumentos de isotropia e homogeneidade por Robertson [4] e Walker [5]. A constante K pode ter os valores -1 , 0 ou $+1$. A função $a(t)$ é o chamado *fator de escala de Robertson-Walker*, ou simplesmente fator de escala.

O movimento de uma partícula em queda livre é descrito pela equação

da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\kappa}{du} = 0 , \quad (2)$$

onde u é uma variável que parametriza a trajetória da partícula ao longo do espaço-tempo. Para partículas massivas, u é proporcional ao tempo próprio s . $\Gamma_{\nu\kappa}^\mu$ é o chamado *símbolo de Christoffel*, sendo dado por

$$\Gamma_{\nu\kappa}^\mu = \frac{g^{\mu\tau}}{2} (\partial_\nu g_{\kappa\tau} + \partial_\kappa g_{\nu\tau} - \partial_\tau g_{\nu\kappa}) .$$

Com a métrica (1), temos $\Gamma_{00}^i = 0$, então uma partícula em repouso nessas coordenadas permanecerá em repouso, ou seja, essas são as chamadas *coordenadas comóveis*, pois seguem o movimento dos observadores típicos, em queda livre local, definidos acima. Como o intervalo de tempo próprio $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ para um relógio comóvel é simplesmente dt , então o tempo t é o *tempo medido no referencial de repouso de um relógio comóvel*.

Uma importante quantidade, que podemos calcular a partir de (1), é a distância comóvel percorrida por um raio de luz, na ausência de interações, desde o instante $t = 0$. Essa distância é dada por

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} , \quad (3)$$

sendo chamada de *horizonte comóvel*, pois nenhum sinal poderia ter viajado uma distância comóvel maior que essa, desde $t = 0$. η é monotonicamente crescente, sendo muitas vezes usada como variável temporal. Por essa razão, η é também chamada de *tempo conforme*.

Consideremos agora a distância própria s , medida a partir da origem, de um objeto situado no raio comóvel r . De (1), temos

$$s = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = a(t) \times \begin{cases} \arcsen(r) & \text{se } K = +1 \\ \text{arcsenh}(r) & \text{se } K = -1 \\ r & \text{se } K = 0 \end{cases}$$

Para $K = 0$, a distância própria do objeto situado no raio comóvel r será simplesmente $a(t)r$, ou seja, o caso $K = 0$ corresponderá a um espaço euclidiano. Temos nesse caso o chamado *universo plano*. Para $K = +1$ a distância será $a(t) \arcsen(r)$. Nesse caso, o espaço pode ser interpretado como uma hipersuperfície esférica, de raio $a(t)$, num espaço euclidiano de quatro dimensões. Diz-se, nesse caso, que o universo é *fechado*. Finalmente, para o caso

$K = -1$, a distância será $a(t) \operatorname{arcsenh}(r)$ e o espaço pode ser interpretado como uma hipersuperfície esférica num espaço de quatro dimensões pseudo-euclidiano, com "raio" $a(t)$. Diz-se, nesse caso, que o universo é *aberto*.

Como não há nada de especial na nossa posição no universo, então a integral s dá a distância observada entre dois objetos comóveis quaisquer, quando medida por um observador típico qualquer. Vemos que o fator de escala $a(t)$ determina, num dado instante t , qual será a distância medida por um observador típico entre dois objetos comóveis quaisquer cuja separação, em coordenadas comóveis, é r . Como veremos logo a seguir, a distância observada entre dois objetos quaisquer está aumentando com o tempo, ou seja, temos $\frac{da}{dt} > 0$.

Se o universo estiver em expansão, então as galáxias devem estar se afastando umas das outras e de nós. O comprimento de onda da radiação ou do som emitido por um objeto, quando medido por um observador que o vê se afastando, é aumentado em relação ao que é medido por um observador que vê o objeto em repouso. Aqui é conveniente definir o redshift z como

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{1}{a}, \quad (4)$$

onde a última igualdade segue diretamente da definição do fator de escala. Para baixos redshift, temos $z \simeq \frac{v}{c}$. Assim, medindo o redshift das linhas do espectro de emissão e/ou absorção de um determinado objeto, obtemos a velocidade com que esse objeto está se afastando de nós. Por outro lado, a distância do objeto é dada por $d = ax$, onde d é a distância física entre nós e o objeto e x é a distância em coordenadas comóveis. Se o objeto não possui uma velocidade intrínseca, ou seja, se sua velocidade é devida unicamente à expansão do universo, então $\frac{dx}{dt} = 0$ e sua velocidade de afastamento será dada por $v = \frac{da}{dt}x \equiv Hd$, onde definimos o parâmetro de Hubble $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$. Assim, para baixos redshift, a relação entre distância e redshift é uma reta, cuja inclinação é H . Essa relação de fato foi encontrada por Hubble, em 1929, e foi a primeira evidência de que o universo está em expansão. Hubble mediu a distância e a velocidade de objetos situados em distâncias de até $200pc$, com redshift até $z \simeq 0.003$, e obteve um valor de H uma ordem de grandeza maior do que o valor conhecido hoje. Trabalhos posteriores estenderam o diagrama de Hubble para distâncias e redshifts bem maiores. Medidas feitas pelo telescópio espacial Hubble permitiram estender o diagrama de Hubble até $400Mpc$, e forneceram $H_0 = 72 \pm 8 km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$ [6]. Aqui cabe observar que, para se medir a distância de objetos luminosos no céu, costuma-se adotar

as chamadas *velas padrão*, objetos cujo brilho intrínseco é sempre o mesmo. Assim sendo, diferenças no brilho aparente desses objetos são devidas a diferentes distâncias em que esses objetos estão situados. As velas padrão que podem ser observadas nas maiores distâncias são as supernovas do tipo Ia. A observação de supernovas do tipo Ia permitiu estender o diagrama de Hubble até redshifts $z \simeq 1.7$.

Em suma, há evidência observacional suficiente sustentando o Princípio Cosmológico, bem como de que vivemos num universo em expansão, ou seja, a geometria do universo pode ser representada pela métrica (1). Sabemos, por outro lado, que a geometria está relacionada com o conteúdo de matéria através das Equações de Einstein,

$$R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2}R = 8\pi GT^{\mu\nu} , \quad (5)$$

onde $R^{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, sendo que $R^{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$, $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu$ é o símbolo de Christoffel, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura e $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Assim, para obtermos a função $a(t)$ em (1), precisamos especificar o conteúdo de matéria do universo, ou seja, precisamos especificar $T^{\mu\nu}$. Além disso, precisamos complementar as equações de Einstein com as equações de conservação de $T^{\mu\nu}$.

É possível mostrar que o Princípio Cosmológico, discutido acima, implica que, em grandes escalas, o tensor de energia-momento que descreve o conteúdo de matéria do universo toma a mesma forma que a de um fluido ideal, ou seja, $T^{\mu\nu}(t) = (\rho(t) + P(t))U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu}P(t)$, sendo $\rho(t)$ e $P(t)$ a densidade de energia e a pressão do fluido, respectivamente e $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é a sua quadrivelocidade (ver, por exemplo, a seção 14.2 de [2]). Essa quadrivelocidade indica que o conteúdo de matéria está em repouso no sistema de coordenadas comóvel. $T^{\mu\nu}$ é conservado, no sentido de derivação covariante,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (6)$$

O símbolo ∇_μ denota derivação covariante¹. Explicitamente, temos $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\lambda\mu}$.

Inserindo a métrica (1) em $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$, obtemos $\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}Ha^2$, $\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i H$ e zero para todos os outros casos. Substituindo nas equações de Einstein (5),

¹A conservação de $T^{\mu\nu}$ no sentido covariante pode ser obtida diretamente das equações de Einstein, aplicado ∇_μ em ambos os membros de (5), e usando as identidades de Bianchi: $\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2}R \right) = 0$.

juntamente com o tensor de energia-momento de um fluido ideal, essas se reduzirão a

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \rho - \frac{K}{a^2} \quad (7)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{Pl}^2} (\rho + 3P) , \quad (8)$$

onde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ é o chamado parâmetro de Hubble e $M_{Pl} \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ é a massa de Planck reduzida. As equações acima são as *equações de Friedmann*. ρ e P são a densidade de energia e a pressão totais, respectivamente, ou seja, $\rho = \sum_i \rho_i$ e $P = \sum_i P_i$, onde o índice "i" denota o i-ésimo componente do universo. Definindo a densidade relativa de energia do i-ésimo componente como $\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{3M_{Pl}^2 H^2}$, podemos reescrever (7) como

$$\Omega - 1 = -\Omega_K , \quad (9)$$

onde $\Omega \equiv \sum_i \Omega_i$ e Ω_K é a *densidade de curvatura*, definida como $\Omega_K \equiv -\frac{K}{H^2 a^2}$.

Para um universo plano, $\Omega_K = 0$ e, de (9), teremos nesse caso $\Omega = 1$. Em outras palavras, para que o universo seja plano, a soma de todas as densidades de energia deverá ser igual a chamada *densidade crítica de energia*, definida como

$$\rho_{cr} \equiv 3M_{Pl}^2 H^2 .$$

Para um universo aberto, $\Omega_K > 0$ e, portanto, a soma das densidades deverá ser menor que ρ_{cr} . Para um universo fechado, por sua vez, $\Omega_K < 0$ e a soma das densidades deverá ser maior que ρ_{cr} .

As equações (6), por sua vez, se reduzirão a

$$\dot{\rho}_i + 3H\rho_i(1 + \omega_i) = 0 , \quad (10)$$

onde $\omega_i \equiv \frac{P_i}{\rho_i}$ é o parâmetro da equação de estado do i-ésimo componente. Por exemplo, para a radiação temos $\omega_r = 1/3$; para a matéria não-relativística $\omega_m = 0$; etc. Note-se que as equações de conservação acima resultam se supusermos que os componentes do universo não interagem. Essa suposição mudará no capítulo 3, quando apresentaremos modelos de energia escura em interação com a matéria escura.

Na verdade, somente uma das equações (7) e (8) é independente. De fato, se derivarmos (7) em relação ao tempo e substituírmos (7) e (10) no resultado,

obteremos (8). Em geral, escolhe-se (7), por ser de primeira ordem, escolha que também faremos aqui. Assim, a evolução temporal dos componentes do universo e da métrica é determinada pelo sistema formado pelas equações (7) e (10), ao menos enquanto estamos desprezando as inomogeneidades e anisotropias.

Aqui cabe observar que, se o universo estiver em expansão acelerada, ou seja, se $\ddot{a} > 0$, vemos de (8) que devemos ter $\rho + 3P < 0$, o que implica que $P < 0$, pois $\rho > 0$. Nesse caso, o universo deve ser dominado por uma forma de matéria que tem pressão negativa. Como veremos com mais detalhes na próxima seção, observações recentes mostram que, de fato, esse é o caso. Esse componente de pressão negativa foi denominado de *energia escura*. Um candidato natural a energia escura e o primeiro que foi considerado é a *constante cosmológica*. A densidade de energia da constante cosmológica é constante, o que implica, de (10), que sua equação de estado é constante e igual a -1 .

Outro componente do universo, que também será apresentado com mais detalhes na próxima seção, é a *matéria escura*, uma forma de matéria que não interage eletromagneticamente, de modo que sua existência só pode ser verificada indiretamente, via interação gravitacional.

O modelo de universo dominado por energia escura, associada à constante cosmológica, e por matéria escura é denotado por Λ CDM (Λ se referindo à constante cosmológica, e CDM querendo dizer *cold dark matter*).

Nas seções seguintes, apresentaremos os componentes de matéria do universo.

1.1 Componentes do universo

1.1.1 Fótons

Sendo os fótons bósons e desprezando a contribuição das anisotropias para a sua densidade de energia, podemos escrever essa como

$$\rho_\gamma = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{p/T} - 1} p.$$

O fator 2 conta a degenerescência devido ao spin. Note-se que estamos considerando o potencial químico dos fótons como sendo zero. Isso porque, no universo primitivo, o número de fótons não era conservado, devido à formação de pares. Também esperamos isso das observações da RCF. O limite observacional para o potencial químico μ dos fótons é $|\mu|/T < 9 \times 10^{-5}$ [7], sendo

T a temperatura da RCF (medida feita pelo instrumento FIRAS a bordo do satélite COBE [8] estabeleceu seu valor atual como $T_0 = 2.725 \pm 0.002K$).

A integral acima pode ser efetuada analiticamente, resultando em

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 .$$

Como veremos abaixo, a temperatura varia com o fator de escala como $T = T_0/a$. A razão entre a densidade de energia dos fótons e o valor atual da densidade crítica de energia pode ser escrita como

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_{cr0}} = \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{2.725K}{a} \right)^4 \frac{1}{8.098 \times 10^{-11} h^2 eV^4} = \frac{2.47 \times 10^{-5}}{h^2 a^4} ,$$

sendo que, na última igualdade, convertemos *Kelvin* para *elétron-volt*, $1K = \frac{1}{11605} eV$, e introduzimos $h = \frac{H_0}{2.133 \times 10^{-39} MeV}$. Substituindo o valor atual de h na expressão acima, $h \simeq 0.7$, juntamente com $a_0 = 1$, obtemos o valor da densidade relativa de energia dos fótons no tempo atual, $\Omega_{\gamma 0} \simeq 5 \times 10^{-5}$.

1.1.2 Bárions

Costuma-se referir a prótons, nêutrons e elétrons como bárions, embora elétrons sejam léptons. No entanto, no que se refere a proporção de massa, esse erro é sem importância, pois sendo prótons e nêutrons muito mais massivos que os elétrons, praticamente toda a massa do átomo é devida à massa do núcleo. Existem quatro maneiras bem estabelecidas de se medir a densidade bariônica do universo, todas parecendo concordar entre si [9].

Pode-se inferir a densidade bariônica observando bárions em galáxias, estimando-se a massa das estrelas e, principalmente, a massa de gás em grupos de galáxias. Essas medidas fornecem Ω_{b0} em torno de 0.02. Outro modo é analisando o espectro de quasares distantes. Através da quantidade de luz absorvida, pode-se estimar a densidade de hidrogênio, e portanto a densidade bariônica. Essas estimativas fornecem $\Omega_{b0} h^{1.5} \simeq 0.02$ [10], com uma incerteza grande. Outro método é através do espectro de anisotropias da RCF. Dados do 5º ano do WMAP, combinados com os de supernovas do tipo Ia e com Oscilações Acústicas de Bárions (BAO), supondo um universo Λ CDM plano, fornecem $\Omega_{b0} = 0.0456 \pm 0.0015$ [11]. Finalmente, a abundância de elementos leves é sensível à densidade bariônica. Estimativas dessas abundâncias fornecem $\Omega_{b0} h^2 = 0.0205 \pm 0.0018$ [12].

As medidas observacionais convergem portanto para uma densidade bariônica de aproximadamente 5% da densidade total do universo. Deve haver, portanto, outras formas de matéria no universo, não bariônicas.

1.1.3 Matéria escura

As estimativas da densidade de matéria bariônica apresentadas acima se baseiam na interação dessa com a radiação eletromagnética. Existem formas de estimar a densidade de matéria no universo que se baseiam na interação gravitacional. Tais medidas, que de início cobriam pequenas escalas, apontavam uma densidade de matéria muito abaixo da densidade crítica. Conforme as medidas foram atingindo grandes escalas, a densidade inferida foi aumentando. No entanto, para medidas feitas em escalas maiores do que aproximadamente $1Mpc$, a densidade de matéria estimada parece não mais aumentar, saturando em $\Omega_{m0} \simeq 0.3$ [13] [14].

Nos últimos anos, têm surgido outras técnicas para estimar a densidade de matéria no universo. Uma delas é calculando o espectro de potências da distribuição de galáxias, o qual é bastante sensível a $\Omega_{m0}h$. Por exemplo, dados da colaboração SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*) fornecem $\Omega_{m0}h = 0.213 \pm 0.023$ [15]. Os dados da colaboração 2dF (*Two Degree Field Galaxy Redshift Survey*) fornecem $\Omega_{m0}h = 0.168 \pm 0.016$. Tais medidas, quando combinadas entre si e com a medida de h do projeto HST Key (*Hubble Space Telescope Key Project*), $h = 0.72 \pm 0.08$ [6], implicam em $\Omega_{m0} = 0.28 \pm 0.04$ [16]. Outra maneira de estimar a densidade de matéria é através do campo de velocidade cósmica, o qual é relacionado com a distribuição observada de galáxias. Muitas medidas baseadas no campo de velocidade cósmica "convergem" para $\Omega_{m0} \simeq 0.3$. Outro modo de inferir a densidade de matéria é através da razão Ω_b/Ω_m . Essa razão pode ser medida, por exemplo, através da emissão de raios X em aglomerados de galáxias. Essas medidas fornecem uma razão Ω_{b0}/Ω_{m0} em torno de 20%. Estando Ω_{b0} em torno de 0.05, então Ω_{m0} está em torno de 0.25. Um exemplo importante desse tipo de estimativa é o resultado obtido para Ω_b/Ω_m , através do estudo do aglomerado de galáxias 1E0657-558, o "aglomerado da bala" (*bullet cluster*, em inglês), situado no redshift $z = 0.296$ [17]. Este é um aglomerado duplo, onde a maioria das galáxias está agrupada em dois subaglomerados, enquanto que o gás quente está concentrado na região entre os dois subaglomerados. Esse aglomerado duplo teria se formado a partir da colisão de dois aglomerados. As duas nuvens de gás quente teriam colidido, formando a nuvem de gás

na região central do aglomerado duplo, enquanto que as porções de matéria pouco interagentes, contidas nos dois aglomerados originais, teriam continuado em suas trajetórias, formando os dois subaglomerados. A densidade de matéria contida no núcleo de gás quente foi estimada através da emissão de raios X, enquanto que a densidade total de matéria foi estimada através do desvio das trajetórias da luz emitida por galáxias mais distantes, contidas na mesma linha de visada (ou seja, estimada através do *gravitational lensing*). A razão Ω_b/Ω_m estimada no aglomerado da bala é de aproximadamente 1/6. Pode-se também estimar a razão Ω_{b0}/Ω_{m0} através do espectro de potências da matéria. Dados da 2dF [18] fornecem $\Omega_{b0}/\Omega_{m0} = 0.185 \pm 0.046$.

Existe, portanto, uma grande quantidade de evidências de que a densidade dos bárions está em torno de 5% da densidade crítica, enquanto que a densidade total de matéria está em torno de 30%. Logo, aproximadamente 25% da matéria do universo é não bariônica. Essa forma de matéria, que não interage eletromagneticamente, é denominada *matéria escura*. Podemos mencionar, como mais uma evidência da matéria escura, que as anisotropias da RCF dependem também da densidade de matéria escura - explicaremos abaixo como a matéria escura entra como um ingrediente no esquema teórico para calcular o espectro de anisotropias da RCF. A partir dos dados do 5º ano do WMAP, supondo um universo Λ CDM plano, obteve-se uma densidade relativa de matéria escura [11] $\Omega_{me0} = 0.228 \pm 0.013$. Note-se que, somando com a estimativa de Ω_{b0} , obtida nessa mesma referência e já apresentada acima, obtemos uma densidade relativa total de matéria $\Omega_{m0} = 0.274$, em concordância com as outras estimativas, independentes de modelo cosmológico, apresentadas acima.

Como um último comentário, devemos enfatizar que, para que se reproduza a distribuição observada de aglomerados de galáxias, a matéria escura deve ser *fria*, no sentido de suas partículas constituintes terem velocidades não relativísticas [19] [20].

1.1.4 Neutrinos

Neutrinos perderam o contato com o plasma cósmico um pouco antes da aniquilação dos pares elétron-pósitron em fótons, quando o universo tinha uma temperatura da ordem da massa do elétron. Dessa maneira, desde essa época os neutrinos não estão mais em equilíbrio térmico com os outros componentes e, basicamente devido ao acréscimo na energia dos fótons devido à aniquilação de pares elétron-pósitron, sua temperatura se tornou menor

que a dos fótons. Assim, ao considerar neutrinos, precisamos primeiro relacionar sua temperatura com a dos fótons. Para isso, usamos o fato de que a densidade de entropia, quando vista por um observador comóvel, será a mesma antes e depois da aniquilação de pares. A contribuição de bósons sem massa para a densidade de entropia é de $2\pi^2 T^3/45$, onde T é a temperatura, enquanto que a contribuição de férmions sem massa é $7/8$ desse valor e partículas massivas dão uma contribuição desprezível². Antes da aniquilação dos pares, temos a contribuição dos elétrons, com fator de degenerescência 2, referente aos estados de spin, dos pósitrons, também com degenerescência 2, dos neutrinos, que são de 3 gerações, com um estado de spin cada, e dos antineutrinos. Temos também a contribuição dos fótons, que tem 2 estados de spin. Assim, a densidade de entropia total, em um fator de escala a_1 antes da aniquilação, será dada por

$$s(a_1) = \frac{2\pi^2}{45} T_1^3 \left[2 + \frac{7}{8} (2 + 2 + 3 + 3) \right] = \frac{43\pi^2}{90} T_1^3 .$$

Depois da aniquilação, os neutrinos e os fótons terão temperaturas diferentes, pois não estarão mais em equilíbrio térmico. A densidade de entropia total em um fator de escala a_2 depois da aniquilação será dada por

$$s(a_2) = \frac{2\pi^2}{45} \left[2T_\gamma^3 + \frac{7}{8} 6T_\nu^3 \right] ,$$

onde T_γ é a temperatura dos fótons e T_ν é a temperatura dos neutrinos. Igualando as densidades de entropia, vistas por um observador comóvel, antes e depois da aniquilação, temos

$$\frac{43}{2} (a_1^3 T_1^3) = 4 \left[\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^3 + \frac{21}{8} \right] (T_\nu a_2)^3 .$$

Como a temperatura do neutrino, antes da aniquilação dos pares, era T_1 , e a temperatura varia com a^{-1} , então $a_1 T_1 = a_2 T_\nu$. Substituindo na igualdade

²A densidade de energia de uma partícula não relativística de massa m , desprezando as flutuações de densidade, é $\rho = mn^{(0)}$, onde $n^{(0)} \simeq g(mT/2\pi)^{3/2} \exp(-m/T)$, no caso de $m \gg T$, sendo g o fator de degenerescência. Sendo a densidade de entropia dada por $s = (\rho + P)/T$, como $P = 0$ para matéria não relativística, então $s \simeq g\sqrt{m^5 T}/(2\pi)^3 \exp(-m/T)$, ou seja, s é exponencialmente pequena (ver, por exemplo, cap. 2 de [21]).

acima, obtemos

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3}. \quad (11)$$

Sendo os neutrinos férmions, considerados aqui como sendo sem massa, sua densidade de energia será dada por

$$\rho_\nu = 6 \frac{7\pi^2}{240} T_\nu^4 = \frac{7\pi^2}{40} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} T^4.$$

O fator 6, que aparece na primeira igualdade, se refere à degenerescência ($3 + 3 = 6$, três gerações de neutrinos com os respectivos antineutrinos) e, na última igualdade, substituímos (11). A densidade relativa de energia dos neutrinos sem massa no tempo de hoje será dada por

$$\Omega_{\nu 0} \simeq \frac{1,68 \times 10^{-5}}{h^2},$$

onde $h = \frac{H_0}{2.133 \times 10^{-39} \text{ MeV}}$.

Poderíamos, naturalmente, considerar neutrinos com massa. De fato, observações de neutrinos solares [22] e de neutrinos da atmosfera terrestre [23] fornecem fortes evidências de que neutrinos de diferentes gerações oscilam entre si. A oscilação de neutrinos só pode ocorrer se esses tiverem massa. Suas massas, no entanto, seriam pequenas. As observações de neutrinos atmosféricos, especificamente, sugerem que ao menos uma geração de neutrinos tem massa maior que $0,05 \text{ eV}$. Assim, em épocas onde a temperatura é muito maior que a massa estimada dos neutrinos, podemos considerá-los como sendo sem massa. Somente quando $T \sim m_\nu$, ou menor, é que a aproximação de neutrinos sem massa deixaria de ser boa. Se levarmos em conta a massa dos neutrinos, a densidade relativa de energia dos neutrinos hoje, para uma espécie de neutrino de massa m_ν , será dada por (ver, por exemplo, o cap. 2 de [21])

$$\Omega_{\nu 0} \simeq \frac{m_\nu}{94 h^2 \text{ eV}}.$$

1.1.5 Energia escura

Os componentes listados acima representam somente 30% da densidade crítica. No entanto, temos hoje diversas evidências observacionais de que a densidade de energia total do universo é muito próxima da densidade crítica.

Portanto, deve existir um componente do universo que é responsável por aproximadamente 70% da densidade de energia total e não é nenhum dos componentes listados acima. Uma dessas evidências vem da comparação da relação teórica entre distância e redshift e dados observacionais. Mais precisamente, a distância de luminosidade de objetos em altos redshift será maior em um universo dominado por energia escura do que num universo dominado por matéria escura. Consequentemente, objetos de brilho fixo parecerão mais "apagados" num universo dominado por energia escura.

Num universo em expansão, a distância que a luz percorreu até nós, em coordenadas comóveis, é dada por

$$\chi(a) = \int_{t(a)}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} , \quad (12)$$

onde $t(a)$ é o instante de tempo em que a luz foi emitida e t_0 é o instante atual. O fluxo observado de uma fonte situada a uma distância comóvel $\chi(a)$, para um universo plano, é dado por

$$F(a) = \frac{La^2}{4\pi\chi(a)^2} ,$$

onde L é a luminosidade da fonte emissora através de uma casca esférica de raio comóvel $\chi(a)$. O fator a^2 no numerador corrige a diferença entre a luminosidade L_0 hoje e na época da emissão. De fato, a energia de um fóton é inversamente proporcional ao comprimento de onda. De acordo com (4), a relação entre o comprimento de onda observado, λ_0 , e o comprimento de onda emitido, λ , será $\lambda_0 = \lambda/a$. Portanto, a relação entre a energia observada de um fóton, E_0 , e a energia desse fóton na emissão, E , será $E_0 = Ea$. Por outro lado, para um fóton temos $ds = 0$. Como no passado $a(t)$ era menor, segue de (1) que a distância comóvel percorrida por um fóton num intervalo de tempo fixo era maior no passado do que hoje. Consequentemente, o número de fótons atravessando a casca esférica de raio comóvel $\chi(a)$ é menor hoje do que no passado, por um fator de a . Sendo a luminosidade L dada pelo número de fótons de um determinado comprimento de onda vezes a energia dos fótons com esse comprimento de onda, integrado em todos os comprimentos de onda, então a luminosidade observada é menor que a luminosidade emitida por um fator a^2 , $L_0 = La^2$. Definindo a *distância de luminosidade* d_L , para um universo plano, como

$$d_L(a) = \frac{\chi(a)}{a} , \quad (13)$$

podemos escrever o fluxo como $F(a) = \frac{L}{4\pi d_L(a)^2}$. Alternativamente, podemos expressar d_L em termos da luminosidade L e do fluxo F como

$$d_L(a) = \sqrt{\frac{L}{4\pi F(a)}}. \quad (14)$$

Pode-se expressar a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M de uma fonte, denominada *distância em módulo* e denotada por μ , como

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 \text{ Mpc}} \right) + \kappa, \quad (15)$$

onde κ é uma correção para o deslocamento do espectro para dentro ou para fora do intervalo de comprimentos de onda medido, devido à expansão. Note que d_L está em unidades de megaparsec.

Podemos reescrever a distância de luminosidade d_L em termos do redshift z . Para escrevermos d_L em Mpc , devemos lembrar que de fato há um fator c multiplicando dt' em (12), o qual não aparecia porque estávamos no sistema natural de unidades. Usando a relação $dt = -\frac{dz}{(1+z)H}$ e lembrando que $a = \frac{1}{1+z}$, obtemos $\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H}$. Substituindo em (13), obtemos $d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H}$. Aqui, o parâmetro de Hubble H está em $\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, portanto, c está em $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Substituindo em (15), obtemos a distância em módulo teórica, para um universo plano,

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left[c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right] + \kappa. \quad (16)$$

Como vimos acima, o parâmetro de Hubble H depende do conteúdo de energia do universo. Para um universo plano e composto somente por matéria e por uma constante cosmológica, obtemos de (7) que $H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_{m0}(1+z)^3}$, onde Ω_Λ é a densidade relativa de energia associada com a constante cosmológica, Ω_{m0} é a densidade relativa de energia atual da matéria e H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble. Assim, comparando as distâncias em módulo de diversos objetos luminosos, em diversos redshift, com as correspondentes previsões teóricas, dadas por (16), é possível inferir o conteúdo de energia do universo. As observações de supernovas feitas por dois grupos em 1998 [24] [25] foram consistentes com $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$. Um universo dominado por matéria, com $\Omega_{m0} = 1$, e também um universo aberto, com $\Omega_{m0} = 0.3$, foram fortemente excluídos pelos dados.

Devemos mencionar também que a localização dos picos acústicos no espectro de potências angular da RCF é fortemente influenciado pela densidade de curvatura Ω_K . Assim, a posição dos picos acústicos é um teste significativo da densidade de energia total e, conseqüentemente, da densidade de energia escura. Observações do espectro de anisotropias da RCF, feitas pelos projetos TOCO [26], Boomerang [27] e Maxima [28], excluíram um universo aberto. A detecção DASI [29], juntamente com dados reanalisados de Boomerang e Maxima, reforçaram a evidência em favor de um universo plano. Finalmente, os dados do 1º ano do WMAP excluíram em mais de 7σ um universo plano, dominado por matéria escura, com $\Omega_{m0} = 1$ [30]. Os dados mais recentes, do 5º ano, em combinação com dados de supernova e de BAO [11], forneceram uma densidade relativa de energia total $\Omega = 1.0050^{+0.0060}_{-0.0061}$, supondo um universo Λ CDM.

Como já dissemos acima, o primeiro candidato à energia escura foi a constante cosmológica. Mais do que isso, o modelo de universo dominado por constante cosmológica e por matéria escura e sem curvatura, o Λ CDM plano, é de fato o mais simples - no sentido de ter o menor número de parâmetros - capaz de reproduzir os dados observacionais atuais. Outros modelos, como universos com curvatura ou com energia escura de outro tipo, não se ajustam significativamente melhor aos dados e tem mais parâmetros.

No entanto, existem alguns problemas com a constante cosmológica, que servem de motivação para que se considere outros candidatos à energia escura. O primeiro desses problemas surge quando tentamos associar a constante cosmológica com a densidade de energia do vácuo. Geralmente, supõe-se que teorias quânticas de campos, como o modelo padrão, são aptas a descrever a física de partículas somente até uma escala de comprimento mínima $1/\Lambda$. Equivalentemente, podemos dizer que Λ corresponde a uma escala de energia máxima, menor que a massa de Planck reduzida $M_{Pl} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}}$ (ver, por exemplo, [31]). Assim, a densidade de energia do vácuo será $\rho_{vac} \sim \Lambda^4 \sim M_{Pl}^4$. Sendo $M_{Pl} = 2.436 \times 10^{18} GeV$, então $\rho_{vac} \sim 10^{73} (GeV)^4$.

Por outro lado, do que foi dito acima, a densidade de energia escura é $\rho_\Lambda = 3M_{pl}^2 H_0^2 \Omega_\Lambda \sim 10^{-47} (GeV)^4$. Portanto, temos que $\rho_{vac} \sim 10^{120} \rho_\Lambda$, ou seja, existe uma diferença de 120 ordens de grandeza entre a estimativa da densidade de energia do vácuo e a densidade observada de energia escura.

Outro problema surge quando consideramos a evolução temporal dos diferentes componentes do universo. De (10), vemos que a radiação, cuja equação de estado é $\omega_r = 1/3$, tem sua densidade de energia variando com

o fator de escala como $\rho_r \propto a^{-4}$. A matéria não relativística (matéria bariônica ou matéria escura) tem equação de estado $\omega_m = 0$, o que implica que $\rho_m \propto a^{-3}$. Para a energia escura, se essa for a constante cosmológica, teremos simplesmente $\rho_\Lambda = cte$. Assim, os diferentes componentes do universo tem dependências com o fator de escala muito diferentes. No entanto, como já vimos acima, as densidades de energia observacionais de energia escura e de matéria têm a mesma ordem de grandeza hoje, o que implica que no passado essas diferiam em muitas ordens de grandeza. Então, surge a questão: por que, justamente agora, as densidades observacionais de energia escura e de matéria têm a mesma ordem de grandeza? Esse é o chamado *problema da coincidência*.

Os dois problemas expostos acima motivaram a busca de modelos alternativos de energia escura. Um caminho natural é associar a energia escura a um campo físico. Como exemplos nessa direção podemos citar modelos de quintessência, nos quais a energia escura é associada a um campo escalar canônico; modelos de phantom, nos quais têm-se um campo escalar com energia cinética negativa³; modelos de K-essência, baseados em um campo escalar com energia cinética não canônica; etc. Uma boa revisão de modelos de energia escura pode ser encontrada em [32]. No contexto dos modelos nos quais a energia escura é associada a um campo físico, uma possibilidade é considerar uma interação entre a energia e a matéria escuras. A principal motivação é que, com a interação, suas densidades de energia não mais evoluirão no tempo de modo independente e esse fato traz, se não uma solução, ao menos um alívio ao problema da coincidência. Existe, no entanto, uma razão mais básica para se considerar a interação: como a matéria e a energia escuras são ambas de naturezas ainda desconhecidas, é mais natural supor que existe alguma interação entre elas, além da gravitacional, se supusermos que a energia escura é um campo físico.

No capítulo 2, apresentaremos a teoria de perturbações cosmológicas. No capítulo 3, apresentaremos dois modelos de energia escura interagente. No capítulo 4, faremos uma breve apresentação de tópicos de teoria dos erros, necessários para a inferência de parâmetros de modelos cosmológicos a partir de dados observacionais. Finalmente, no capítulo 5 apresentaremos os resultados obtidos a partir da comparação dos dois modelos com dados

³De fato, qualquer forma de energia escura com o parâmetro da equação de estado $\omega < -1$ costuma ser chamada de phantom. Alguns modelos de phantom são baseados em branas ou em gravidade de Brans-Dicke, mas os modelos mais simples são os constituídos por um campo escalar.

observacionais recentes e as conclusões. Devido às evidências observacionais, apresentadas acima, em favor de um universo plano, consideraremos nos capítulos seguintes somente universo plano. Adotamos o sistema de unidades naturais: $\hbar = c = k_B = 1$.

2 Perturbações cosmológicas

Para explicarmos a estrutura de grande escala, precisamos considerar desvios da homogeneidade e da isotropia, supostas como válidas em escalas maiores do que 100 Mpc . De fato, é possível fazer previsões que, de um modo geral, têm boa concordância com os dados de distribuições de aglomerados de galáxias, considerando perturbações de primeira ordem na densidade de matéria, ao menos para escalas maiores do que 10 Mpc . Do mesmo modo, também considerando perturbações de primeira ordem na temperatura da RCF, podemos fazer boas previsões quantitativas acerca da distribuição de temperatura e de polarização da RCF. Como boas referências didáticas sobre a teoria de perturbações cosmológicas - e sobre cosmologia, em geral - podemos citar, por exemplo, [21], [33], [34], [35] e [36].

Naturalmente, se considerarmos perturbações nas densidades de matéria e de radiação, também teremos de considerar perturbações da métrica. Os componentes do tensor métrico serão agora dados por

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x}, t) &= 1 + 2\Psi(\vec{x}, t) \ , \\ g_{0i}(\vec{x}, t) &= 0 \ , \\ g_{ij}(\vec{x}, t) &= -\delta_{ij}a^2(1 + 2\Phi(\vec{x}, t)) \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Nas expressões acima, $\Psi(\vec{x}, t)$ é o potencial newtoniano e $\Phi(\vec{x}, t)$ é a perturbação na curvatura espacial. Aqui, é importante mencionar que o tensor métrico acima só contém perturbações escalares da métrica e está escrito no *gauge newtoniano conforme*. Nas derivações que faremos abaixo, estaremos adotando esse gauge. As quantidades observáveis, no entanto, não devem depender dessa escolha. Também não estaremos considerando perturbações vetoriais e tensoriais da métrica, uma vez que os resultados que apresentaremos no último capítulo foram obtidos considerando somente perturbações escalares.

Para desenvolver a teoria que descreve a evolução temporal de tais perturbações, poderíamos partir das equações da hidrodinâmica relativística, como fizemos acima, para obter as equações do universo homogêneo e isotrópico. No entanto, as equações da hidrodinâmica relativística podem ser obtidas dos primeiros momentos da equação de Boltzmann, da teoria cinética relativística, no limite de meios contínuos. A equação de Boltzmann é portanto mais geral. Por outro lado, no caso da radiação eletromagnética, a descrição

é feita em termos de equações para as flutuações de temperatura da radiação. Assim sendo, é mais conveniente derivarmos as equações de evolução temporal das perturbações diretamente a partir da equação de Boltzmann.

A equação de Boltzmann formaliza o conceito de que a taxa de variação na abundância de uma dada espécie de partícula deve ser igual a diferença entre as taxas de produção e de eliminação dessa espécie de partícula. Em sua forma diferencial, a equação de Boltzmann é dada por

$$\frac{df}{du} = C[f] \ , \quad (18)$$

onde f denota a função de distribuição, u parametriza a trajetória da partícula ao longo do espaço-tempo e $C[f]$ é um funcional da função de distribuição, contendo as taxas de reação dos processos que produzem ou aniquilam a espécie de partícula cuja distribuição é f . A função de distribuição é, em geral, função de u (ou, alternativamente, do tempo t), da posição $\vec{x}$ e do quadrimomento P^μ da partícula.

Derivaremos a seguir as equações que descrevem a evolução das perturbações.

2.1 Matéria escura

Para a matéria escura, que não interage com os outros componentes do universo⁴, exceto gravitacionalmente, temos $C[f] = 0$. O quadrimomento P^μ refere-se ao referencial comóvel, e se relaciona com o quadrimomento no referencial físico p^μ através da relação $P^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} p^\nu$, onde o til denota as coordenadas no referencial físico. Usando o fato de que $P^\mu P_\mu = p^\mu p_\mu$, juntamente com (17), obtemos $P^\mu = \left(\frac{E}{\sqrt{1+2\Psi}}, \frac{p^i}{a\sqrt{1+2\Phi}} \right)$. Escrevendo $\vec{p} = p\hat{p}$, onde $\hat{p}$ é o versor de $\vec{p}$, ou $p^i = p\hat{p}^i$ e expandindo os denominadores em P^μ em primeira ordem nos potenciais, temos

$$P^\mu = \left(E(1 - \Psi), \frac{p\hat{p}^i(1 - \Phi)}{a} \right) . \quad (19)$$

Os componentes de P^μ satisfazem o vínculo $P^\mu P_\mu = M^2$, onde M é a massa da partícula de matéria escura, portanto, $E = \sqrt{p^2 + M^2}$. Dessa maneira,

⁴Como já dissemos, no próximo capítulo essa suposição será mudada, quando introduziremos modelos nos quais a matéria escura interage com a energia escura.

podemos considerar que a função de distribuição f_{me} dependerá de E e $\hat{p}^i$, além de $\vec{x}$ e t . A equação de Boltzmann (18), no caso de matéria escura será simplesmente

$$\frac{df_{me}}{du} = 0 .$$

Lembrando que $\frac{df}{du} = \frac{dt}{du} \frac{df}{dt}$ e escrevendo explicitamente $\frac{df}{dt}$, temos

$$\frac{\partial f_{me}}{\partial t} + \frac{\partial f_{me}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f_{me}}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial f_{me}}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt} = 0 . \quad (20)$$

Note-se que, por um lado, como a direção de propagação de uma partícula de matéria escura somente muda se considerarmos perturbações da métrica, então $\frac{d\hat{p}^i}{dt}$ deve ser considerado um termo de primeira ordem. Por outro lado, como distribuições de equilíbrio somente dependem do módulo do momento, então $\frac{\partial f_{me}}{\partial \hat{p}^i}$ também é um termo de primeira ordem. Portanto, se considerarmos somente termos de primeira ordem em teoria de perturbações, devemos desprezar o último termo da equação acima.

Para calcular $\frac{dx^i}{dt}$, é útil usarmos a definição $P^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{ds}$. De fato, $\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{m \frac{dx^i}{ds}}{m \frac{dt}{ds}} = \frac{P^i}{P^0}$. Usando (19), obtemos, em primeira ordem,

$$\frac{dx^i}{dt} \simeq \frac{p\hat{p}^i}{aE} (1 - \Phi + \Psi) . \quad (21)$$

Para calcular $\frac{dE}{dt}$, podemos usar a equação da geodésica (2). Usando a definição $P^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{ds}$, (2) pode ser reescrita como $P^0 \frac{dP^\mu}{dt} + \Gamma_{\nu\kappa}^\mu P^\nu P^\kappa = 0$. Usando (19) e também (21), obtemos

$$\frac{dE}{dt} = - \left(H \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) . \quad (22)$$

Ao substituírmos (21) em (20), devemos notar que $\frac{\partial f_{me}}{\partial x^i}$ é de primeira ordem, pois a distribuição de equilíbrio não depende de $\vec{x}$, de modo que os termos contendo os potenciais gravitacionais desaparecerão. Substituindo também (22) em (20), obtemos

$$\frac{\partial f_{me}}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{aE} \frac{\partial f_{me}}{\partial x^i} - \frac{\partial f_{me}}{\partial E} \left(H \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) = 0 . \quad (23)$$

Para obtermos as equações que governam as perturbações na matéria escura, calcularemos os momentos de ordem zero e de ordem um da equação (23).

O momento de ordem zero, em princípio, seria obtido multiplicando (23) por $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 E}$ e integrando. No entanto, como as partículas de matéria escura são não relativísticas, então $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 E} \simeq \frac{1}{M} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$. Além disso, o segundo membro de (23) é zero, então podemos calcular o momento de ordem zero de (23) integrando simplesmente em $\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{me} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{me} \frac{p \hat{p}^i}{E} - \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{me}}{\partial E} \frac{p^2}{E} \\ - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{me}}{\partial E} p \hat{p}^i = 0 . \end{aligned} \quad (24)$$

A integral no último termo é de primeira ordem e está multiplicando outro termo de primeira ordem. Portanto o último termo é de segunda ordem e pode ser desprezado. Aqui, é conveniente lembrarmos das definições da densidade de número de partículas,

$$n_{me} = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{me} ,$$

e da velocidade média das partículas num elemento de volume situado em $\vec{x}$,

$$v_{me}^i = \frac{g}{n_{me}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{me} \frac{p \hat{p}^i}{E} ,$$

onde g é o fator de degenerescência. Com essas definições, e absorvendo g numa redefinição de f , os dois primeiros termos de (24) se tornam

$$\frac{\partial n_{me}}{\partial t}$$

e

$$\frac{1}{a} \frac{\partial (n_{me} v_{me}^i)}{\partial x^i} ,$$

respectivamente. Notando que $\frac{dE}{dp} = \frac{p}{E}$, a integral do terceiro termo de (24) resulta, após uma integração por partes, em $-3n_{me}$. Dessa maneira, (24) se torna

$$\frac{\partial n_{me}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_{me} v_{me}^i)}{\partial x^i} + 3 \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) n_{me} = 0 . \quad (25)$$

A equação acima é a equação de continuidade para a matéria escura, num espaço-tempo com métrica dada por (17) e em primeira ordem em teoria de perturbações. Vamos agora separar a parte homogênea de n_{me} da perturbação. Seja $n_{me} = n_{me}^{(0)} [1 + \delta_{me}(\vec{x}, t)]$, onde $n_{me}^{(0)}$ denota a densidade de equilíbrio. Substituindo na equação acima, a parte de ordem zero resultará em

$$\frac{\partial n_{me}^{(0)}}{\partial t} + 3H n_{me}^{(0)} = 0 .$$

Essa equação pode ser reescrita como $\frac{d(n_{me}^{(0)} a^3)}{dt} = 0$, o que implica que $n_{me}^{(0)} \propto a^{-3}$. Aqui cabe observar que, como a matéria escura é considerada um fluido não relativístico a temperatura zero, $E \simeq M$ e $\rho_{me} \simeq M n_{me}$ (note-se que, devido a isso, $\delta_{me} \simeq \delta \rho_{me} / \rho_{me}$). Nesse caso, a equação acima é equivalente a

$$\dot{\rho}_{me} + 3H \rho_{me} = 0 ,$$

ou seja, recuperamos a equação de conservação (10) para a matéria escura. A parte de ordem um, por sua vez, resultará em

$$\frac{\partial \delta_{me}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_{me}^i}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 . \quad (26)$$

Precisamos também de uma equação para os componentes da velocidade, v_{me}^i . Para obtê-la, vamos calcular o primeiro momento da equação de Boltzmann (23). Para tanto, multipliquemos por $d^3p (p/E) \hat{p}^j / (2\pi)^3$ e então integremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{me} \frac{p \hat{p}^j}{E} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{me} \frac{p \hat{p}^i \hat{p}^j}{E^2} - \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{me}}{\partial E} \frac{p^3 \hat{p}^j}{E^2} \\ - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{me}}{\partial E} \frac{p^2 \hat{p}^i \hat{p}^j}{E} = 0 . \end{aligned} \quad (27)$$

O primeiro termo é simplesmente $\frac{\partial (n_{me} v_{me}^j)}{\partial t}$. O segundo termo é de ordem $\langle (p/E)^2 \rangle$ e pode, portanto, ser desprezado. Efetuemos a integral no terceiro termo:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{me}}{\partial E} \frac{p^3 \hat{p}^j}{E^2} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{me}}{\partial p} \frac{p^2 \hat{p}^j}{E} = \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \hat{p}^j \int_0^\infty dp \frac{p^4}{E} \frac{\partial f_{me}}{\partial p} \\ &= - \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \hat{p}^j \int_0^\infty dp f_{me} \left(\frac{4p^3}{E} - \frac{p^5}{E^3} \right) \end{aligned}$$

$$= -4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{me} \frac{p \hat{p}^j}{E} + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{me} \frac{p^3}{E^3} .$$

Na primeira passagem usamos o fato de que $(p/E) \partial/\partial E = \partial/\partial p$ e na segunda linha efetuamos uma integração por partes. O último termo na expressão acima pode ser desprezado, por ser de ordem superior, portanto, a integral é simplesmente $-4n_{me}v^j$.

Para efetuarmos a integral no quarto termo de (27), devemos usar a relação $\int d\Omega \hat{p}^i \hat{p}^j = \delta^{ij} 4\pi/3$, o procedimento restante sendo semelhante ao da integral no terceiro termo. A integral do quarto termo resulta, então, em $-\delta^{ij} n_{me}$. Com isso, (27) resulta em

$$\frac{\partial (n_{me} v_{me}^j)}{\partial t} + 4H n_{me} v_{me}^j + \frac{n_{me}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0 .$$

Note-se que $n_{me} v^j = n_{me}^{(0)}(t) [1 + \delta_{me}(\vec{x}, t)] v_{me}^j \simeq n_{me}^{(0)} v_{me}^j$, em primeira ordem. Da mesma maneira, $n_{me} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \simeq n_{me}^{(0)} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j}$. Além disso, usando o resultado que $n_{me}^{(0)} \propto a^{-3}$, obtido acima, obtemos

$$\frac{\partial v_{me}^j}{\partial t} + H v_{me}^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0 . \quad (28)$$

As equações (26) e (28) são as equações para as perturbações na matéria escura. essas formam um sistema de equações diferenciais parciais acopladas. Podemos transformá-lo em um sistema de equações diferenciais ordinárias, passando para o espaço de Fourier. Se, além disso, reescrevermos essas equações em termos do tempo conforme η , obtemos

$$\frac{d\tilde{\delta}_{me}}{d\eta} + ik\tilde{v}_{me} + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 \quad (29)$$

e

$$\frac{d\tilde{v}_{me}}{d\eta} + \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \tilde{v}_{me} + ik\tilde{\Psi} = 0 , \quad (30)$$

onde o til denota a respectiva quantidade no espaço de Fourier e k é o "k-ésimo" modo de Fourier. Estamos supondo que o campo de velocidades é irrotacional, então $\tilde{v}^i = \tilde{v} \left(\frac{k^i}{k} \right)$.

2.2 Bárions

Consideraremos agora a evolução das variáveis perturbativas de prótons e de elétrons. Embora elétrons sejam léptons, costuma-se agrupar elétrons com prótons chamando-os de bárions. Prótons e elétrons são acoplados através do espalhamento Coulomb ($e + p \rightarrow e + p$). Para todas as épocas de interesse, a taxa de espalhamento Compton é muito maior que a taxa de expansão do universo. Devido a isso, os contrastes de densidade dos prótons e dos elétrons se tornam iguais, bem como suas velocidades. Assim podemos fazer a identificação

$$\begin{aligned}\delta_e &= \delta_p \equiv \delta_b , \\ \vec{v}_e &= \vec{v}_p \equiv \vec{v}_b ,\end{aligned}$$

onde o subscrito b significa "bárions". No caso dos elétrons, temos de considerar também o espalhamento Compton ($e(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \rightarrow e(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}')$). Lembrando que, para partículas massivas, o parâmetro da trajetória das partículas u é proporcional ao tempo próprio s e usando a definição de P^μ , obtemos que $\frac{df}{du} = \frac{E}{\sqrt{1+2\Psi}} \frac{df}{dt} \simeq m \frac{df}{dt}$, tanto para os elétrons quanto para os prótons, sendo que, na última passagem, usamos que $E \simeq m$, para partículas não relativísticas, e desprezamos o potencial newtoniano Ψ , pois esse levaria a termos de ordem superior na expansão perturbativa. As equações de Boltzmann para elétrons e prótons são

$$m_e \frac{df_e(\vec{x}, \vec{q}, t)}{dt} = \langle c_{ep} \rangle_{QQ'q'} + \langle c_{e\gamma} \rangle_{pp'q'} \quad (31)$$

e

$$m_p \frac{df_p(\vec{x}, \vec{Q}, t)}{dt} = \langle c_{ep} \rangle_{qq'Q'} , \quad (32)$$

onde m_e é a massa do elétron e m_p é a massa do próton e

$$\begin{aligned}\langle c_{ep} \rangle_{QQ'q'} &= \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \\ &\times \left\{ (2\pi)^4 \delta^4(Q + q - Q' - q') \frac{|M_{ep}|^2}{8E_p(Q)E_p(Q')E_e(q')} \right. \\ &\quad \left. \times [f_e(q')f_p(Q') - f_e(q)f_p(Q)] \right\} ,\end{aligned}$$

$$\langle c_{e\gamma} \rangle_{pp'q'} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \\ \times \left\{ (2\pi)^4 \delta^4(p + q - p' - q') \frac{|M_{e\gamma}|^2}{8E(p)E(p')E_e(q')} \right. \\ \left. \times [f_e(q') f_\gamma(p') - f_e(q) f_\gamma(p)] \right\}$$

e

$$\langle c_{ep} \rangle_{qq'Q'} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \\ \times \left\{ (2\pi)^4 \delta^4(q + Q - q' - Q') \frac{|M_{ep}|^2}{8E_p(Q')E_e(q)E_e(q')} \right. \\ \left. \times [f_e(q') f_p(Q') - f_e(q) f_p(Q)] \right\}.$$

Nos termos de colisão acima, $|M_{ep}|^2$ e $|M_{e\gamma}|^2$ são as amplitudes para os espalhamentos Coulomb e Compton, respectivamente. Note-se que denotamos os momentos do elétron antes e depois do espalhamento por q e q' , respectivamente, do próton por Q e Q' e do fóton por p e p' . Aqui cabe observar que, em (32), não estamos considerando o espalhamento de prótons por fótons, pois, sendo a seção de choque inversamente proporcional ao quadrado da massa, então a razão entre as seções de choque do espalhamento de prótons por fótons e do espalhamento Compton será da ordem de $\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \sim 10^{-7}$. Também deve-se observar que estamos desprezando os fatores quânticos $1 + f$ e $1 - f$, que correspondem à emissão estimulada e ao Princípio de Exclusão de Pauli, respectivamente, e deveriam estar multiplicando as funções de distribuição nos integrandos acima. Em primeira ordem em teoria de perturbações, no entanto, esses fatores podem ser desprezados. Devemos também mencionar que estamos considerando todos os elétrons como ionizados, ou seja, estamos desprezando termos de ionização e de recombinação.

Tomando o momento de ordem zero de (31) (o que significa multiplicar ambos os membros por $\frac{d^3q}{(2\pi)^3 E_e(q)}$ e integrar), o primeiro membro será idêntico ao de (25), de modo que obtemos

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_e v_e^i)}{\partial x^i} + 3 \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) n_e = \langle c_{ep} \rangle_{qQQ'q'} + \langle c_{e\gamma} \rangle_{ppq'q'},$$

onde o índice adicional q nos termos de colisão indica integração em d^3q . Ambos os termos do segundo membro dão zero. Isso porque a medida de integração em ambos é simétrica pela troca dos momentos iniciais (q e Q ,

no caso do espalhamento Coulomb, p e q , para o espalhamento Compton) pelos momentos finais, enquanto que o integrando é antisimétrico, devido às funções de distribuição. Fisicamente, isso corresponde à conservação do número de elétrons: no caso do espalhamento Coulomb, quando integramos o termo proporcional a $f_e(q') f_p(Q')$, obtemos o número de elétrons após o espalhamento, que deve ser igual ao número de elétrons antes do espalhamento, que é obtido ao integramos o termo proporcional a $f_e(q) f_p(Q)$. O mesmo argumento vale para o espalhamento Compton. Portanto, a equação acima será idêntica à correspondente para a matéria escura, (25). Desse modo, separando n_e nas partes homogênea e perturbada, $n_e = n_e^{(0)}(t) [1 + \delta_b(\vec{x}, t)]$, obtemos, assim como no caso da matéria escura, que $n_e^{(0)} \propto a^{-3}$, enquanto a parte perturbada obedecerá a uma equação idêntica a equação (26). No espaço de Fourier, teremos

$$\frac{d\tilde{\delta}_b}{d\eta} + ik\tilde{v}_b + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 . \quad (33)$$

A equação (32) daria um resultado idêntico.

Precisamos agora de uma equação para v_b , a velocidade dos bárions. Para isso, vamos tomar os primeiros momentos de (31) e (32). Multiplicando (32) por $\frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{Q^j}{E_p(Q)}$ e integrando, o primeiro membro será idêntico ao de (27), multiplicado pela massa do próton m_p . Além disso, aqui haverá um termo adicional: em (27) desprezamos o segundo termo, mas agora teremos de considerá-lo, pois esse, embora pequeno em geral, será importante para valores de k suficientemente grandes. Calculemos então esse termo,

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E^2} \hat{Q}^i \hat{Q}^j = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{1}{3} \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{3E^2} \right] ,$$

onde usamos que $\hat{Q}^i \hat{Q}^j = \delta^{ij}/3$. Mas $P \equiv \frac{T_j^j}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E} \hat{Q}^j \hat{Q}_j = \frac{1}{3} \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E}$. Então

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E^2} \hat{Q}^i \hat{Q}^j \simeq \frac{1}{m_p a} \frac{\partial P}{\partial x^j} .$$

Mas a pressão também pode ser dividida em uma parte homogênea e em uma perturbação, e somente a perturbação depende de $\vec{x}$, $P = P^{(0)}(t) + \delta P(\vec{x}, t)$.

Desse modo, $\frac{\partial P}{\partial x^j} = \frac{\partial(\delta P)}{\partial x^j}$. Como $\delta P = c_s^2 \delta \rho$, onde $c_s^2 \equiv \frac{1}{3(1+R)}$ é o quadrado da velocidade do som, sendo $R \equiv \frac{3\rho_b^{(0)}}{4\rho_\gamma^{(0)}}$, então $\frac{\partial P}{\partial x^j} = \rho_b^{(0)} c_s^2 \frac{\partial(\delta_b)}{\partial x^j}$. Assim, obtemos

$$m_p \frac{\partial (n_b v_b^j)}{\partial t} + \frac{1}{a} \rho_b^{(0)} c_s^2 \frac{\partial (\delta_b)}{\partial x^j} + 4H \rho_b^{(0)} v_b^j + \frac{\rho_b^{(0)}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \langle c_{ep} Q^j \rangle_{qQ'q'} .$$

Na equação acima, usamos que $\rho_b^{(0)} \simeq m_b n_b^{(0)}$.

Calculando o primeiro momento de (31), obtemos uma equação cujo primeiro membro é idêntico ao da equação acima. Como $m_p \gg m_e$, ao somarmos com a equação acima, obtemos

$$m_p \frac{\partial (n_b v_b^j)}{\partial t} + \frac{1}{a} \rho_b^{(0)} c_s^2 \frac{\partial (\delta_b)}{\partial x^j} + 4H \rho_b^{(0)} v_b^j + \frac{\rho_b^{(0)}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \langle c_{ep} (q^j + Q^j) \rangle_{qQ'q'} + \langle c_{e\gamma} q^j \rangle_{pp'q'} .$$

O primeiro termo do segundo membro é igual a zero, devido à conservação de momento. No primeiro termo do primeiro membro, podemos substituir $n_b v_b^j = n_b^{(0)} v_b^j$, pois v_b^j já é de primeira ordem. Como $n_b^{(0)} \propto a^{-3}$,

$$\rho_b^{(0)} \left[\frac{\partial v_b^j}{\partial t} + \frac{1}{a} c_s^2 \frac{\partial (\delta_b)}{\partial x^j} + H v_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] = \langle c_{e\gamma} q^j \rangle_{pp'q'} . \quad (34)$$

Calculemos agora o termo de colisão. Primeiro vamos calcular $\langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'}$:

$$\begin{aligned} \langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_\gamma(p')} \\ &\times |M_{e\gamma}|^2 (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}') \delta[E_\gamma(p) + E_e(q) - E_\gamma(p') - E_e(q')] \\ &\times [f_e(\vec{q}') f_\gamma(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f_\gamma(\vec{p})] . \end{aligned} \quad (35)$$

A energia dos fótons é simplesmente $E_\gamma(p) = p$ e a dos elétrons é não-relativística, $E_e(q) \simeq m_e + \frac{\vec{q}^2}{2m_e}$. Substituindo na equação acima e eliminando uma das integrais através da delta nos momentos,

$$\begin{aligned} \langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} &= \frac{\pi}{4m_e^2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \delta \left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e} \right] \\ &\times |M_{e\gamma}|^2 [f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') f_\gamma(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f_\gamma(\vec{p})] . \end{aligned}$$

Note-se que, nos denominadores, substituímos simplesmente $E_e \simeq m_e$. Antes de prosseguirmos no cálculo, façamos algumas considerações. No espalhamento Compton não relativístico, $p \simeq p'$, ou seja, o espalhamento é aproximadamente elástico. Desse modo, $\vec{p}' - \vec{p}$ é da ordem de p , que por sua vez é da ordem da temperatura T . Como a energia cinética típica dos elétrons é também da ordem de T , então q é muito maior que p e p' . Assim, na energia cinética final do elétron, $\frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e}$, podemos desprezar o termo quadrático em $(\vec{p} - \vec{p}')$, de modo que obtemos

$$E_e(q) - E_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') = \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e} \simeq \frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{q}}{m_e}.$$

Vale observar também que, como $\frac{q}{m_e} \sim v_b$, então $\frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{q}}{m_e} \sim T v_b$, ou seja, a variação relativa na energia do elétron devido a um espalhamento Compton será, de fato, pequena, da ordem de v_b . Portanto, podemos expandir a delta de Dirac como:

$$\begin{aligned} & \delta \left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e} \right] \simeq \delta(p - p') \\ & + (E_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') - E_e(q)) \frac{\partial \delta(p + E_e(q) - p' - E_e(q'))}{\partial E_e(q')} \Big|_{E_e(q) = E_e(q')} \\ & = \delta(p - p') + \frac{(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{q}}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos que $\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} = -\frac{\partial f(x-y)}{\partial y}$. Usando a expressão acima e também fazendo a aproximação $f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') \simeq f_e(\vec{q})$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} &= \frac{\pi}{4m_e^2} \int d^3q \frac{f_e(\vec{q})}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \\ & \times |M_{e\gamma}|^2 \left[\delta(p - p') + \frac{(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{q}}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] \\ & \times [f_\gamma(\vec{p}') - f_\gamma(\vec{p})]. \end{aligned} \quad (36)$$

Para prosseguir no cálculo, consideremos explicitamente a amplitude do espalhamento Compton $|M_{\text{Compton}}|^2$, que é dada por

$$|M_{\text{Compton}}|^2 = 12\pi\sigma_T m_e^2 (\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}')^2, \quad (37)$$

onde σ_T é a seção de choque de Thomson, $\hat{\epsilon}$ é vetor de polarização do fóton incidente e $\hat{\epsilon}'$ é o vetor de polarização do fóton espalhado. A amplitude $|M_{e\gamma}|^2$ se refere ao caso de luz incidente não polarizada. Nesse caso, será a média da amplitude do espalhamento Compton (37) sobre todas as possíveis direções do vetor de polarização incidente $\hat{\epsilon}$. Escrevendo $\hat{\epsilon}$ como $\hat{\epsilon} = \cos \varphi \hat{\epsilon}_1 + \sin \varphi \hat{\epsilon}_2$, onde $\hat{\epsilon}_1$ e $\hat{\epsilon}_2$ são dois versores ortogonais entre si e o ângulo φ é o ângulo entre $\hat{\epsilon}'$ e o plano de espalhamento, temos

$$|M_{e\gamma}|^2 = 12\pi\sigma_T m_e^2 \frac{1}{2\pi} \int d\varphi [(\cos \varphi \hat{\epsilon}_1 + \sin \varphi \hat{\epsilon}_2) \cdot \hat{\epsilon}']^2 . \quad (38)$$

Para obtermos o termo de colisão correto, deveríamos considerar a amplitude de espalhamento (38), mas na derivação abaixo não consideraremos o estado de polarização do fóton espalhado. Nesse caso, a amplitude (38) deve ser substituída por

$$|M_{e\gamma}|^2 = 12\pi\sigma_T m_e^2 \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \sum_{i=1}^2 [(\cos \varphi \hat{\epsilon}_1 + \sin \varphi \hat{\epsilon}_2) \cdot \hat{\epsilon}'_i]^2 ,$$

onde os $\hat{\epsilon}'_i$ formam uma base de estados de polarização finais. Efetuando a integração em φ , obtemos

$$|M_{e\gamma}|^2 = 6\pi\sigma_T m_e^2 \sum_{i=1}^2 [(\hat{\epsilon}_1 \cdot \hat{\epsilon}'_i)^2 + (\hat{\epsilon}_2 \cdot \hat{\epsilon}'_i)^2] .$$

Levando-se em conta que $\hat{\epsilon}_1$, $\hat{\epsilon}_2$ e $\hat{p}$ são ortonormais, o que, naturalmente, também é verdade para os correspondentes versores do fóton espalhado, $\hat{\epsilon}'_1$, $\hat{\epsilon}'_2$ e $\hat{p}'$, obtemos

$$|M_{e\gamma}|^2 = 6\pi\sigma_T m_e^2 [1 + (\hat{p} \cdot \hat{p}')^2] . \quad (39)$$

Substituindo (39) em (36), temos

$$\begin{aligned}
\langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} &= \frac{3\pi^2\sigma_T}{2} \int d^3q \frac{f_e(\vec{q})}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} \left[1 + (\hat{p} \cdot \hat{p}')^2 \right] \\
&\quad \times \left[\delta(p - p') + \frac{(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{q}}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] [f_\gamma(\vec{p}') - f_\gamma(\vec{p})] \\
&= \frac{3\pi^2\sigma_T n_e}{2} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} \left[1 + (\hat{p} \cdot \hat{p}')^2 \right] \\
&\quad \times \left[\delta(p - p') + (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{v}_b \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] [f_\gamma(\vec{p}') - f_\gamma(\vec{p})] .
\end{aligned} \tag{40}$$

Na última passagem usamos as definições $n_e = \int d^3q \frac{f_e(\vec{q})}{(2\pi)^3}$ e $\vec{v}_b = \frac{1}{n_e} \int d^3q \frac{f_e(\vec{q})}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}}{m_e}$.

A distribuição de equilíbrio dos fótons é a distribuição de Bose-Einstein. Podemos caracterizar a perturbação na função de distribuição através da flutuação de temperatura θ , definida por $T(\vec{x}, \hat{p}, t) = T(t) [1 + \theta(\vec{x}, \hat{p}, t)]$. Note que tomamos a perturbação de temperatura como independente do módulo do momento dos fótons p . Isso segue do fato, já mencionado acima, de que no espalhamento Compton não-relativístico a magnitude do momento do fóton muda muito pouco. A função de distribuição dos fótons é dada por

$$f_\gamma(\vec{x}, p, \hat{p}, t) = \left\{ \exp \left[\frac{p}{T(t) [1 + \theta(\vec{x}, \hat{p}, t)]} \right] - 1 \right\}^{-1} . \tag{41}$$

Expandindo em primeira ordem, temos

$$\begin{aligned}
f_\gamma(\vec{x}, p, \hat{p}, t) &\simeq f_\gamma(\vec{x}, p, \hat{p}, t) |_{\theta=0} + \left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial T} \right) |_{\theta=0} T(t) \theta(\vec{x}, \hat{p}, t) \\
&= f_\gamma^{(0)}(p, t) - p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}(p, t)}{\partial p} \theta(\vec{x}, \hat{p}, t) .
\end{aligned}$$

Substituindo a aproximação acima em (40) e retendo somente os termos de primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} &= \frac{3\pi^2\sigma_T n_e}{2} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} \left[1 + (\hat{p} \cdot \hat{p}')^2 \right] \\
&\quad \times \left\{ \delta(p - p') \left[p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \theta(\vec{x}, \hat{p}, t) - p' \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p'} \theta(\vec{x}, \hat{p}', t) \right] \right. \\
&\quad \left. + (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{v}_b \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} [f_\gamma^{(0)}(p') - f_\gamma^{(0)}(p)] \right\} .
\end{aligned}$$

O elemento de volume na integral acima é, em coordenadas esféricas, $d^3p' = p'^2 dp' d\Omega'$ e $(\hat{p} \cdot \hat{p}')^2 = \frac{2P_2(\hat{p} \cdot \hat{p}') + 1}{3}$, sendo P_2 o polinômio de Legendre de ordem 2. Substituindo na expressão acima e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} &= \sigma_T n_e \left\{ p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} [\theta(\vec{x}, \hat{p}, t) - \theta_0(\vec{x}, t)] - \vec{p} \cdot \vec{v}_b \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \right\} \\ &+ \frac{\sigma_T n_e}{8\pi} \int dp' p' \int d\Omega' P_2(\hat{p} \cdot \hat{p}') \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\delta(p - p') \left[p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \theta(\vec{x}, \hat{p}, t) - p' \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p'} \theta(\vec{x}, \hat{p}', t) \right] \\ &+ (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{v}_b \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \left[f_\gamma^{(0)}(p') - f_\gamma^{(0)}(p) \right] \end{aligned} \right\} , \end{aligned}$$

onde $\theta_0(\vec{x}, t)$ aparece quando substituímos $l = 0$ na definição de $\theta_l(\vec{x}, t)$,

$$\theta_l(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi (-i)^l} \int d\Omega' P_l(\hat{p}') \theta(\vec{x}, \hat{p}', t) ,$$

e usamos integração por partes para eliminar a derivada da função delta de Dirac. Para efetuar a última integral, é útil expandirmos $P_2(\hat{p} \cdot \hat{p}')$ em harmônicos esféricos, $P_2(\hat{p} \cdot \hat{p}') = \frac{4\pi}{5} \sum_{m=-2}^2 Y_{2m}(\hat{p}) Y_{2m}^*(\hat{p}')$. A integral angular dos harmônicos esféricos resulta em zero, exceto para $m = 0$. Com isso e também notando que $Y_{20}(\hat{p}) Y_{20}^*(\hat{p}') = \frac{5}{4\pi} P_2(\hat{p}) P_2(\hat{p}')$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} &= \sigma_T n_e p^2 \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} [\theta(\vec{x}, \hat{p}, t) - \theta_0(\vec{x}, t) - \hat{p} \cdot \vec{v}_b] \\ &- \frac{\sigma_T n_e p^2}{2} P_2(\hat{p}) \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \theta_2(\vec{x}, t) . \end{aligned} \quad (42)$$

Para obter a expressão acima, usamos que $\int d\Omega' P_2(\hat{p}') = 0$ e $\int d\Omega' P_2(\hat{p}') \hat{p}' = 0$ e novamente a definição de $\theta_l(\vec{x}, t)$, com $l = 2$.

Consideremos que $\langle c_{e\gamma} q^j \rangle_{pp'q'} = -\langle c_{e\gamma} p^j \rangle_{pp'q'}$, de modo que o cálculo feito aqui poderá ser aproveitado quando derivarmos a equação de Boltzmann para os fótons. Multiplicando $\langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'}$ por $\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^j}{p}$ e integrando, obtemos

$$-\langle c_{e\gamma} p^j \rangle_{pp'q'} = -\sigma_T n_e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^j p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} [\theta(\vec{x}, \hat{p}, t) - \theta_0(\vec{x}, t) - \hat{p} \cdot \vec{v}_b] .$$

Passando para o espaço de Fourier e multiplicando por $\hat{k}^j$, teremos

$$\begin{aligned}
& -\langle c_{e\gamma} p \cos \alpha \rangle_{pp'q'} = \\
& -\sigma_T n_e \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \cos \alpha \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \left[\tilde{\theta}(\vec{k}, \hat{p}, t) - \tilde{\theta}_0(\vec{k}, t) - \tilde{v}_b \cos \alpha \right] \\
& = -\sigma_T n_e \int_0^\infty \frac{dp}{4\pi^2} p^4 \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \left[\begin{aligned} & \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \cos \alpha \tilde{\theta}(\vec{k}, \hat{p}, t) \\ & - \tilde{\theta}_0(\vec{k}, t) \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \cos \alpha \\ & - \tilde{v}_b \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned} \right],
\end{aligned}$$

onde usamos que $\vec{p} \cdot \hat{k} = p \cos \alpha$, ou seja, definimos o eixo z como sendo paralelo ao modo de Fourier $\vec{k}$. Além disso, estamos também supondo que a velocidade seja sempre paralela a $\vec{k}$ (velocidade irrotacional), ou seja, $\hat{p} \cdot \vec{v}_b = \tilde{v}_b \cos \alpha$. No segundo termo, a integral angular resulta em zero, enquanto que no terceiro termo resulta em $2/3$. Usando a definição de $\tilde{\theta}_l$,

$$\tilde{\theta}_l(\vec{k}, t) = \frac{1}{2(-i)^l} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha) P_l(\cos \alpha) \tilde{\theta}(\vec{k}, \cos \alpha, t),$$

a integral angular do primeiro termo resulta em $-2i\tilde{\theta}_1(\vec{k}, t)$. A integral em p pode ser efetuada usando integração por partes, e resulta em $-4\rho_\gamma^{(0)}$. Portanto, o termo de colisão será

$$-\langle c_{e\gamma} p \cos \alpha \rangle_{pp'q'} = -\sigma_T n_e \frac{4\rho_\gamma^{(0)}(t)}{3} \left[3i\tilde{\theta}_1(\vec{k}, t) - \tilde{v}_b(\vec{k}, t) \right].$$

Passando agora o primeiro membro de (34) para o espaço de Fourier, multiplicando por $\hat{k}^j$ e substituindo o termo de colisão acima, obtemos, finalmente

$$\frac{d\tilde{v}_b}{d\eta} + \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \tilde{v}_b + ikc_s^2 \tilde{\delta}_b + ik\tilde{\Psi} = \frac{d\tau}{d\eta} \frac{1}{R} \left[3i\tilde{\theta}_1 - \tilde{v}_b \right], \quad (43)$$

onde usamos que $\tilde{\vec{v}}_b = \hat{k}\tilde{v}_b$ e $\frac{d\tau}{d\eta} \equiv -\sigma_T n_e a$. Note também que mudamos da variável t para o tempo conforme η . Devemos observar que a taxa de espalhamento, $\frac{d\tau}{d\eta}$, foi definida supondo que 100 % dos elétrons estão livres. A taxa de espalhamento pode ser escrita de modo mais realista, levando-se em

conta que somente uma fração x_e dos elétrons está ionizada: $\frac{d\tau}{d\eta} = -\sigma_T x_e n_e a$. A quantidade

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' \sigma_T x_e n_e a , \quad (44)$$

sendo η_0 o tempo conforme atual, é a chamada *profundidade ótica*. Antes da recombinação, quando a fração de ionização x_e é alta, temos $\tau \gg 1$. Em tempos mais recentes, quando x_e é baixa, temos $\tau \ll 1$.

2.3 Fótons

Vamos agora derivar a equação de evolução das flutuações de temperatura dos fótons. A equação de Boltzmann é dada por

$$p \frac{df_{\gamma}}{dt} = \langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} .$$

O segundo membro já foi calculado, e é dado pela equação (42). A função de distribuição dos fótons é dada por (41), portanto, explicitamente,

$$\frac{df_{\gamma}}{dt} = \frac{\partial f_{\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial f_{\gamma}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f_{\gamma}}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f_{\gamma}}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt} .$$

O cálculo de cada termo é análogo ao que já foi feito para o caso da matéria escura. O último termo deve ser desprezado, pois é de segunda ordem. Usando o quadrimomento dos fótons, dado por $P^{\mu} = \left(p(1 - \Psi), \frac{p\hat{p}^i(1 - \Phi)}{a} \right)$, obtemos

$$\frac{df_{\gamma}}{dt} = \frac{\partial f_{\gamma}}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f_{\gamma}}{\partial x^i} - p \frac{\partial f_{\gamma}}{\partial p} \left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] .$$

Substituindo (41) e separando os termos de ordem zero dos termos de primeira ordem, obtemos para a parte de ordem zero

$$\frac{\partial f_{\gamma}^{(0)}}{\partial t} - Hp \frac{\partial f_{\gamma}^{(0)}}{\partial p} = 0 , \quad (45)$$

onde $f_{\gamma}^{(0)}$ é a distribuição de Bose-Einstein, enquanto que para a parte de primeira ordem obtemos

$$-p^2 \frac{\partial f_{\gamma}^{(0)}}{\partial p} \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = \langle c_{e\gamma} \rangle_{qp'q'} .$$

Substituindo (42) no segundo membro, mudando da variável t para o tempo conforme η e passando para o espaço de Fourier, obtemos

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + ik \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \tilde{\theta} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + ik \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \tilde{\Psi} = -\frac{d\tau}{d\eta} \left[\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta} + \tilde{v}_b \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \right] .$$

Aqui, devemos lembrar que, na derivação de (42), usamos a amplitude (39), que não considera o estado de polarização do fóton espalhado. Se, ao invés disso, usarmos a amplitude correta, dada por (38), obtemos [37]

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + ik \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \tilde{\theta} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + ik \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \tilde{\Psi} = \\ -\frac{d\tau}{d\eta} \left[\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta} + \tilde{v}_b \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) - \frac{P_2 \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right)}{2} \Pi \right] , \end{aligned} \quad (46)$$

onde $\Pi = \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_{P2} + \tilde{\theta}_{P0}$, sendo $\tilde{\theta}_{P0}$ e $\tilde{\theta}_{P2}$ os momentos de monopolo e de quadrupolo, respectivamente, da intensidade da polarização no espaço de Fourier, $\tilde{\theta}_P$, que por sua vez é dada por⁵

$$\tilde{\theta}_P \left(\vec{k}, \hat{p}, \eta \right) = Q \left(\vec{k}, \hat{p}, \eta \right) , \quad (47)$$

onde

$$Q \left(\vec{k}, \hat{p}, \eta \right) = C \int d\Omega' f \left(\hat{p}' \right) \sum_{i=1}^2 \left(\left| \hat{\epsilon}_1 \left(\hat{p} \right) \cdot \hat{\epsilon}'_i \left(\hat{p}' \right) \right|^2 - \left| \hat{\epsilon}_2 \left(\hat{p} \right) \cdot \hat{\epsilon}'_i \left(\hat{p}' \right) \right|^2 \right) ,$$

onde C é uma constante de normalização, $f \left(\hat{p}' \right)$ é a intensidade da radiação incidindo na direção $\hat{p}'$ e $d\Omega'$ denota integração sobre todas as direções de incidência.

Embora essa não tenha sido derivada aqui, há também a equação para a intensidade da polarização $\tilde{\theta}_P$ (ver, por exemplo, [21]):

$$\frac{d\tilde{\theta}_P}{d\eta} + ik \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \tilde{\theta}_P = -\frac{d\tau}{d\eta} \left[-\tilde{\theta}_P + \frac{\left(1 - P_2 \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \right)}{2} \Pi \right] . \quad (48)$$

⁵Essa igualdade vale somente quando definimos o eixo z como sendo paralelo ao modo de Fourier $\vec{k}$, como fizemos aqui. No caso geral, θ_P dependerá de Q e de U , sendo essas duas das variáveis de Stokes, usadas para descrever a polarização (ver, por exemplo, [21] e [33]).

Vale comentar que a equação de ordem zero para os fótons (45), pode ser facilmente resolvida para dar a dependência da temperatura em ordem zero, $T(t)$, com o fator de escala $a(t)$. De fato, como $\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial t} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}$, (45) se torna

$$-\left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + H\right) p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = 0 ,$$

que será verdadeira se $\frac{dT}{T} = -\frac{da}{a}$, ou seja, se $T \propto \frac{1}{a}$. Alternativamente, poderíamos ter calculado o primeiro momento de (45)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p f_\gamma^{(0)} - H \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = 0 .$$

Usando que $-p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = T \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial T}$ e lembrando que a pressão dos fótons é dada por $P_\gamma = \frac{1}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p f_\gamma^{(0)}$, obtemos

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + 3HT \frac{\partial P_\gamma}{\partial T} = 0 .$$

Usando a relação $T \frac{\partial P}{\partial T} = \rho + P = \rho(1 + \omega)$, recuperamos a equação de conservação para os fótons no caso homogêneo,

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + 3H\rho_\gamma(1 + \omega_\gamma) = 0 .$$

Como $\omega_\gamma = 1/3$ (como fica evidente quando comparamos a definição de P_γ com a de ρ_γ), a equação acima fornece $\rho_\gamma \propto a^{-4}$.

2.4 Neutrinos

Podemos facilmente estender o sistema de equações de Boltzmann para incluir neutrinos. Considerando os neutrinos sem massa e denotando a flutuação na temperatura dos neutrinos no espaço de Fourier por $\tilde{N}(\vec{k}, \hat{p}, \eta)$, a equação de evolução será idêntica à dos fótons, sem o termo de colisão,

$$\frac{d\tilde{N}}{d\eta} + ik(\hat{k} \cdot \hat{p}) \tilde{N} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + ik(\hat{k} \cdot \hat{p}) \tilde{\Psi} = 0 . \quad (49)$$

Naturalmente, para o caso de pelo menos uma geração de neutrinos possuir massa, a (49) teria de ser modificada [37]. No entanto, como não consideramos neutrinos massivos neste trabalho, não incluiremos aqui a equação para a perturbação de temperatura dos neutrinos para o caso com massa.

2.5 Equações de Einstein linearizadas

Precisamos agora de equações para as perturbações da métrica $\Phi(\vec{x}, t)$ e $\Psi(\vec{x}, t)$. Naturalmente, obteremos essas equações a partir das equações de Einstein, substituindo nessas a métrica perturbada (17), e retendo somente os termos de primeira ordem. Consideremos primeiro a equação tempo-tempo:

$$G^0_0 = 8\pi G T^0_0 , \quad (50)$$

onde $G^0_0 = g^{0\nu} G_{\nu 0} = g^{0\nu} (R_{\nu 0} - \frac{1}{2} g_{\nu 0} R) = (1 - 2\Psi(\vec{x}, t)) [R_{00} - \frac{R}{2}]$, sendo $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij}$. R_{00} e R_{ij} são dados por

$$R_{00} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\mu_{\nu 0} \Gamma^\nu_{0\mu} \quad (51)$$

e

$$R_{ij} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{ij} - \partial_i \Gamma^\mu_{j\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{ij} - \Gamma^\mu_{\nu i} \Gamma^\nu_{j\mu} . \quad (52)$$

Substituindo a métrica (17) e retendo somente os termos de primeira ordem, obtemos, já passando para o espaço de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^0_{00} &= \partial_0 \tilde{\Psi} , \\ \tilde{\Gamma}^0_{0i} &= \tilde{\Gamma}^0_{i0} = ik_i \tilde{\Psi} , \\ \tilde{\Gamma}^0_{ij} &= \delta_{ij} a^2 \left\{ H \left[1 + 2 \left(\tilde{\Phi} - \tilde{\Psi} \right) \right] + \partial_0 \tilde{\Phi} \right\} , \\ \tilde{\Gamma}^i_{00} &= \frac{ik^i}{a^2} \tilde{\Psi} , \\ \tilde{\Gamma}^i_{j0} &= \tilde{\Gamma}^i_{0j} = \delta_{ij} \left(H + \partial_0 \tilde{\Phi} \right) \end{aligned}$$

e

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = i\tilde{\Phi} (\delta_{ij} k_k + \delta_{ik} k_j - \delta_{jk} k_i) . \quad (53)$$

Precisamos agora calcular as derivadas dos símbolos de Christoffel. Calculando-as e passando para o espaço de Fourier (lembrando que ao passar para o espaço de Fourier temos $\partial_i \rightarrow ik_i$) temos

$$\begin{aligned} \partial_0 \tilde{\Gamma}^i_{0j} &= \delta_{ij} \left(\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - H^2 + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} \right) , \\ \partial_0 \tilde{\Gamma}^0_{ij} &= \delta_{ij} a^2 \left\{ \left(H^2 + \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \right) \left[1 + 2 \left(\tilde{\Phi} - \tilde{\Psi} \right) \right] + 2H \left(2\partial_0 \tilde{\Phi} - \partial_0 \tilde{\Psi} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} \right\} , \end{aligned}$$

$$ik_i \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \tilde{\Phi} (\delta_{jk} k^2 - 2k_j k_k) ,$$

$$ik_i \tilde{\Gamma}_{00}^i = -\frac{k^2}{a^2} \tilde{\Psi}$$

e

$$ik_j \tilde{\Gamma}_{i0}^0 = -k_i k_j \tilde{\Psi} . \quad (54)$$

Substituindo (53) e (54) em (51) e (52) e desprezando os termos de segunda ordem que aparecem devido aos produtos de símbolos de Christoffel no terceiro e quarto termos, obtemos

$$\tilde{R}_{00} = -\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2} \tilde{\Psi} - 3 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + 3H (\partial_0 \tilde{\Psi} - 2\partial_0 \tilde{\Phi}) \quad (55)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij} = & \delta_{ij} \left[\left(2a^2 H^2 + a \frac{d^2 a}{dt^2} \right) (1 + 2\tilde{\Phi} - 2\tilde{\Psi}) \right. \\ & \left. + a^2 H (6\partial_0 \tilde{\Phi} - \partial_0 \tilde{\Psi}) + a^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + k^2 \tilde{\Phi} \right] \\ & + k_i k_j (\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}) . \end{aligned} \quad (56)$$

Usando (55) e (56), obtemos também

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & (1 - 2\tilde{\Psi}) \left[-\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2} \tilde{\Psi} - 3 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + 3H (\partial_0 \tilde{\Psi} - 2\partial_0 \tilde{\Phi}) \right] \\ & + \left(\frac{-1 + 2\tilde{\Phi}}{a^2} \right) \left\{ 3 \left[\begin{aligned} & \left(2a^2 H^2 + a \frac{d^2 a}{dt^2} \right) (1 + 2\tilde{\Phi} - 2\tilde{\Psi}) \\ & + a^2 H (6\partial_0 \tilde{\Phi} - \partial_0 \tilde{\Psi}) + a^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + k^2 \tilde{\Phi} \end{aligned} \right] \right. \\ & \left. + k^2 (\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}) \right\} . \end{aligned} \quad (57)$$

Precisamos agora calcular T_0^0 . Este será a soma das densidades de energia de bárions, matéria escura, energia escura, fótons e neutrinos. Para bárions e matéria escura, as densidades de energia são dadas por $\rho_b^{(0)} [1 + \delta_b]$ e $\rho_{me}^{(0)} [1 + \delta_{me}]$. Para a energia escura temos simplesmente $\rho_{ee} = \rho_{ee}^{(0)}$, pois estamos considerando que essa é homogênea. Para os fótons, temos

$$T_0^{0(\gamma)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \left(f_\gamma^{(0)} - p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \theta \right) = \rho_\gamma^{(0)} (1 + 4\theta_0) ,$$

lembrando que o fator de degenerescência foi absorvido em $f_\gamma^{(0)}$. Para os neutrinos, a densidade de energia é idêntica,

$$T_0^{0(\nu)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \left(f_\nu^{(0)} - p \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial p} N \right) = \rho_\nu^{(0)} (1 + 4N_0) .$$

Somando as densidades de energia da matéria escura, da energia escura, dos bárions, dos fótons e dos neutrinos e passando para o espaço de Fourier, obtemos

$$\tilde{T}_0^0 = \rho_{ee} + \rho_\gamma^{(0)} (1 + 4\tilde{\theta}_0) + \rho_{me}^{(0)} [1 + \tilde{\delta}_{me}] + \rho_b^{(0)} [1 + \tilde{\delta}_b] + \rho_\nu^{(0)} (1 + 4\tilde{N}_0) .$$

Substituindo a expressão acima, juntamente com (57) e (55), em (50) e agrupando os termos de ordem zero e de ordem um, obtemos, respectivamente,

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left(\rho_{ee} + \rho_\gamma^{(0)} + \rho_{me}^{(0)} + \rho_b^{(0)} + \rho_\nu^{(0)} \right)$$

e

$$3H \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - 3H^2 \tilde{\Psi} + \frac{k^2}{a^2} \tilde{\Phi} = \frac{1}{2M_{pl}^2} \left(4\rho_\gamma^{(0)} \tilde{\theta}_0 + \rho_{me}^{(0)} \tilde{\delta}_{me} + \rho_b^{(0)} \tilde{\delta}_b + 4\rho_\nu^{(0)} \tilde{N}_0 \right) .$$

A primeira das equações acima é a equação de Friedmann (7) para um universo plano ($K = 0$). Reescrevendo a última em termos do tempo conforme η , temos

$$3 \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \tilde{\Psi} \right) + k^2 \tilde{\Phi} = \frac{a^2}{2M_{pl}^2} \left(4\rho_\gamma^{(0)} \tilde{\theta}_0 + \rho_{me}^{(0)} \tilde{\delta}_{me} + \rho_b^{(0)} \tilde{\delta}_b + 4\rho_\nu^{(0)} \tilde{N}_0 \right) . \quad (58)$$

Precisamos agora de uma segunda equação. Para tanto, consideremos a parte espacial das equações de Einstein (no espaço de Fourier),

$$\tilde{G}_j^i = 8\pi G \tilde{T}_j^i ,$$

sendo $\tilde{G}_j^i = \frac{\delta^{ik}(1-2\tilde{\Phi})}{a^2} \tilde{R}_{kj} - \frac{\delta_j^i}{2} \tilde{R}$. Dessa expressão para $\tilde{G}_j^i$ e de (56), vemos que grande parte dos termos de $\tilde{G}_j^i$ serão proporcionais a δ_j^i , de modo que é conveniente tomarmos a projeção longitudinal da equação acima, obtida

contraindo ambos os membros com o operador $\hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3) \delta_i^j$. Contraindo o primeiro membro, obtemos

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3) \delta_i^j \right) \tilde{G}^i_j = \frac{2}{3a^2} k^2 \left(\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi} \right) . \quad (59)$$

Contraindo o segundo membro, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3) \delta_i^j \right) \tilde{T}^i_j &= \sum_{\text{espécies } l} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right)^2 - (1/3)}{E_l(p)} f_l(\vec{p}) \\ &= \frac{2}{3} \sum_{\text{espécies } l} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{P_2 \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right)}{E_l(p)} f_l(\vec{p}) . \end{aligned}$$

Como aparece $P_2 \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right)$ no integrando, a expressão acima será proporcional aos momentos de quadrupolo das distribuições. As partículas não relativísticas, como as de matéria escura e os bárions, tem momentos de quadrupolo desprezíveis. Assim sendo, somente fótons e neutrinos contribuirão para o último membro da igualdade acima. Calculando a contribuição dos fótons, temos

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \int \frac{dp}{4\pi^2} p^4 \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \int_0^\pi d(\cos \alpha) P_2(\cos \alpha) \tilde{\theta}(\cos \alpha) \\ &= \frac{2\tilde{\theta}_2}{3} \int \frac{dp}{2\pi^2} p^4 \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = -\frac{8\rho_\gamma^{(0)}}{3} \tilde{\theta}_2 , \end{aligned}$$

onde $\cos \alpha = \hat{k} \cdot \hat{p}$. O fator 2, em evidência no lado esquerdo na igualdade acima, é o fator de degenerescência dos fótons. A contribuição dos neutrinos terá uma expressão idêntica. Calculando-a e adicionando ao termo acima, temos

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3) \delta_i^j \right) \tilde{T}^i_j = -\frac{8}{3} \left(\rho_\gamma^{(0)} \tilde{\theta}_2 + \rho_\nu^{(0)} \tilde{N}_2 \right) .$$

Dividindo por M_{pl}^2 e igualando a (59), obtemos

$$k^2 \left(\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi} \right) = -\frac{4a^2}{M_{pl}^2} \left(\rho_\gamma^{(0)} \tilde{\theta}_2 + \rho_\nu^{(0)} \tilde{N}_2 \right) . \quad (60)$$

Existe também a possibilidade de perturbações vetoriais e tensoriais da métrica. Não há, no entanto, evidência em favor de perturbações tensoriais

(ver, por exemplo, [38] e [39]). As perturbações escalares são as únicas que se acoplam com as perturbações na densidade da matéria, sendo portanto as únicas associadas com a formação de estrutura. São também as mais importantes a se acoplarem com as perturbações de temperatura dos fótons. Por outro lado, graças ao *teorema da decomposição* (ver, por exemplo, [21]), perturbações escalares, vetoriais e tensoriais não são acopladas. Neste trabalho foram consideradas somente perturbações escalares da métrica.

Em suma, as equações que descrevem a evolução das perturbações em torno da homogeneidade e da isotropia são

$$\frac{d\tilde{\delta}_{me}}{d\eta} + ik\tilde{v}_{me} + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 \quad (29),$$

$$\frac{d\tilde{v}_{me}}{d\eta} + \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}\tilde{v}_{me} + ik\tilde{\Psi} = 0 \quad (30),$$

$$\frac{d\tilde{\delta}_b}{d\eta} + ik\tilde{v}_b + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 \quad (33),$$

$$\frac{d\tilde{v}_b}{d\eta} + \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}\tilde{v}_b + ikc_s^2\tilde{\delta}_b + ik\tilde{\Psi} = \frac{d\tau}{d\eta}\frac{1}{R}\left[3i\tilde{\theta}_1 - \tilde{v}_b\right] \quad (43),$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + ik\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)\tilde{\theta} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + ik\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)\tilde{\Psi} \\ &= \frac{d\tau}{d\eta}\left[-\tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta} - \tilde{v}_b\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right) + \frac{P_2\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)}{2}\Pi\right] \quad (46), \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_P}{d\eta} + ik\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)\tilde{\theta}_P = \frac{d\tau}{d\eta}\left[\tilde{\theta}_P - \frac{\left(1 - P_2\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)\right)}{2}\Pi\right] \quad (48),$$

$$\text{onde } \Pi = \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_{P2} + \tilde{\theta}_{P0},$$

$$\frac{d\tilde{N}}{d\eta} + ik\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)\tilde{N} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + ik\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)\tilde{\Psi} = 0 \quad (49),$$

$$3\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\eta} - \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}\tilde{\Psi}\right) + k^2\tilde{\Phi} = \frac{a^2}{2M_{pl}^2}\begin{pmatrix} 4\rho_\gamma^{(0)}\tilde{\theta}_0 + \rho_{me}^{(0)}\tilde{\delta}_{me} \\ +\rho_b^{(0)}\tilde{\delta}_b + 4\rho_\nu^{(0)}\tilde{N}_0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

e

$$k^2\left(\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}\right) = -\frac{4a^2}{M_{pl}^2}\left(\rho_\gamma^{(0)}\tilde{\theta}_2 + \rho_\nu^{(0)}\tilde{N}_2\right) \quad (60).$$

2.6 Condições iniciais

Temos acima nove equações diferenciais de primeira ordem. Precisáramos, em princípio, especificar nove quantidades como condições iniciais. No entanto, no universo primordial, podemos relacionar todas as quantidades com a perturbação da métrica inicial, $\tilde{\Phi}_I$. Portanto, só precisamos especificar uma quantidade para resolver o sistema de nove equações acima. Veremos agora como relacionar todas as demais condições iniciais com $\tilde{\Phi}_I$.

Começamos considerando uma época tão primitiva que, para qualquer modo de Fourier k de interesse, temos $k\eta \ll 1$. Fisicamente, essa suposição significa que o horizonte comóvel η é muito menor que o comprimento de onda dos modos de Fourier de interesse, ou seja, esses são muito maiores do que a escala onde a física causal opera. Isso implica que as distribuições de temperatura dos fótons e dos neutrinos serão dominadas pelos momentos de monopolo: $\tilde{\theta} \sim \tilde{\theta}_0$ e $\tilde{N} \sim \tilde{N}_0$, todos os demais momentos de multipolo sendo desprezíveis. As velocidades da matéria escura e dos bárions são da mesma ordem de magnitude do momento de dipolo da distribuição de temperatura (ver equação (72), abaixo) e podem ser desprezadas, inicialmente. A polarização é também tomada como zero. Nas equações de Boltzmann, os termos que contém derivadas em relação ao tempo conforme η serão maiores que os termos multiplicados por k por um fator $(k\eta)^{-1} \gg 1$, portanto todos os termos proporcionais a k podem ser desprezados. Com essas considerações, as equações (29), (33), (46) e (49) se reduzem, respectivamente, a

$$\frac{d\tilde{\delta}_{me}}{d\eta} + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 , \quad (61)$$

$$\frac{d\tilde{\delta}_b}{d\eta} + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 , \quad (62)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_0}{d\eta} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 \quad (63)$$

e

$$\frac{d\tilde{N}_0}{d\eta} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 . \quad (64)$$

Na equação de Einstein (58), o termo proporcional a k^2 no primeiro membro pode ser desprezado. Considerando que o universo primordial era dominado por radiação, podemos desprezar as perturbações de matéria no segundo

membro. Assim, temos

$$3 \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \tilde{\Psi} \right) = \frac{2a^2}{M_{pl}^2} \left(\rho_\gamma^{(0)} \tilde{\theta}_0 + \rho_\nu^{(0)} \tilde{N}_0 \right) . \quad (65)$$

Como a radiação domina, da equação de Friedmann (7), obtemos $a \propto \eta$. Substituindo em (65), obtemos

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - \frac{\tilde{\Psi}}{\eta^2} = \frac{2a^2}{3M_{pl}^2} \left(\rho_\gamma^{(0)} \tilde{\theta}_0 + \rho_\nu^{(0)} \tilde{N}_0 \right) = \frac{2}{\eta^2} \left(\frac{\rho_\gamma^{(0)}}{\rho} \tilde{\theta}_0 + \frac{\rho_\nu^{(0)}}{\rho} \tilde{N}_0 \right) . \quad (66)$$

Na última passagem, usamos novamente a equação de Friedmann (7). Derivando ambos os membros da equação acima em relação ao tempo conforme η , usando (63) e (64) e lembrando que tanto para os neutrinos quanto para os fótons temos $\rho \propto a^{-4}$, obtemos

$$\eta \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{d\eta^2} - \frac{d\tilde{\Psi}}{d\eta} = -3 \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} . \quad (67)$$

Desprezando o segundo membro de (60), que é proporcional a momentos de quadrupolo, obtemos

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_I) = -\tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_I) . \quad (68)$$

Usando (68), (67) se torna

$$\eta \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{d\eta^2} + 4 \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0 ,$$

a qual tem solução $\tilde{\Phi} = A + B\eta^{-3} \rightarrow A = cte$, pois o segundo termo decai. Com isso, as equações (63) e (64) implicam que $\tilde{\theta}_0$ e $\tilde{N}_0$ também são constantes. Em muitos modelos de formação de estrutura, toma-se

$$\tilde{\theta}_0(\vec{k}, \eta_I) = \tilde{N}_0(\vec{k}, \eta_I) , \quad (69)$$

onde η_I denota o tempo conforme inicial. Substituindo (69), (68) e também $\tilde{\Phi} = cte$ em (66), obtemos

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_I) = 2\tilde{\theta}_0(\vec{k}, \eta_I) . \quad (70)$$

Combinando (63) com (61) e (62), obtemos

$$\tilde{\delta}_{me} + 3\tilde{\theta}_0 = cte$$

e

$$\tilde{\delta}_b + 3\tilde{\theta}_0 = cte .$$

Se as constantes acima forem diferentes de zero, temos condições iniciais de *isocurvatura* e se forem zero, temos condições iniciais *adiabáticas*. Aqui tomaremos condições iniciais adiabáticas. Portanto

$$\tilde{\delta}_{me}(\vec{k}, \eta_I) = \tilde{\delta}_b(\vec{k}, \eta_I) = -3\tilde{\theta}_0(\vec{k}, \eta_I) . \quad (71)$$

Finalmente, existem situações onde precisamos dar condições iniciais para as velocidades e momentos de dipolo. Nesse caso, usando (30), (43), (46) e (49), obtemos que as condições iniciais adequadas são

$$\tilde{\theta}_1(\vec{k}, \eta_I) = \tilde{N}_1(\vec{k}, \eta_I) = \frac{i\tilde{v}_{me}(\vec{k}, \eta_I)}{3} = \frac{i\tilde{v}_b(\vec{k}, \eta_I)}{3} = -\frac{k\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_I)}{6aH} . \quad (72)$$

Em suma, as equações (68), (69), (70), (71) e (72) relacionam $\tilde{\Psi}$, $\tilde{N}_0$, $\tilde{\theta}_0$, $\tilde{\delta}_{me}$, $\tilde{\delta}_b$, $\tilde{v}_{me}$ e $\tilde{v}_b$ com $\tilde{\Phi}$ num dado tempo conforme inicial η_I . O valor inicial de $\tilde{\theta}_P$ é tomado como zero. Portanto, temos todas as condições iniciais associadas com a perturbação inicial $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_I)$. Mas como essa perturbação inicial foi gerada? Essa perturbação foi gerada no período inflacionário, que discutiremos a seguir.

2.7 Teoria inflacionária

As observações da RCF têm demonstrado que sua distribuição de temperatura é uniforme, a menos de flutuações da ordem de uma parte em 10^5 , as anisotropias. No entanto, radiação chegando até nós hoje, vindo de direções muito diferentes estavam, na época da recombinação, separadas por distâncias muito maiores que o nosso horizonte. Como o horizonte é a maior distância que a luz que chega até nós hoje poderia ter viajado desde o início do universo, então radiação chegando até nós vinda de regiões separadas por distâncias maiores que o horizonte não poderiam ter estado em contato causal. Mais precisamente, um determinado modo de Fourier k só começa a ser afetado pela física causal quando esse se torna menor que o horizonte η .

Os menores modos (correspondentes aos maiores comprimentos de onda) só "entraram" no horizonte muito recentemente, após a recombinação, de modo que os fótons fluíram livremente até nós. Uma determinada separação angular θ é relacionada com um modo k por $\theta \simeq (k\eta_0)^{-1}$, onde η_0 é o raio do horizonte atual. Portanto, grandes ângulos estão associados a perturbações de grandes comprimentos de onda, de modo que nesses ângulos não deveria ser observada uma distribuição uniforme de temperatura, como acontece. Esse é o chamado *problema do horizonte*. Uma solução para esse problema é fornecido pela teoria da inflação. Essa teoria é apresentada e discutida, de forma didática, em [40], por exemplo.

Na teoria da inflação, supõe-se que o universo, em épocas muito antigas, era dominado não por matéria ou radiação, mas por algum componente que forçava a sua expansão acelerada, de modo que, nesse período, o raio de Hubble comóvel $1/aH$ decrescia. Se o raio de Hubble comóvel decrescer de modo suficientemente rápido, escalas hoje causalmente separadas estariam em contato físico no passado, explicando a homogeneidade observada hoje. Em muitos modelos inflacionários, a inflação ocorre em escalas de energia da ordem de 10^{15} GeV, ou maiores. Vamos estimar qual era o raio de Hubble comóvel, quando a temperatura era da ordem de 10^{15} GeV. Para isso, devemos considerar duas etapas da evolução do universo: o período de domínio da matéria e o período de domínio da radiação. Para épocas muito anteriores à da igualdade entre as densidades de energia de matéria e de radiação, a equação de Friedmann (7) é dada aproximadamente por $H \simeq \frac{1}{\sqrt{3}M_{pl}} \frac{\sqrt{\rho_{r0}}}{a^2} = H_0 \frac{\sqrt{\Omega_{r0}}}{a^2}$, sendo H_0 e Ω_{r0} os valores atuais do parâmetro de Hubble e da densidade relativa de radiação, respectivamente. Então, a razão entre o raio de Hubble comóvel atual e o do final da inflação, $\frac{1}{a_f H_f}$, será $\frac{a_0 H_0}{a_f H_f} \simeq \frac{a_f}{\sqrt{\Omega_{r0}}}$. Conforme deduzimos acima, a temperatura varia com o fator de escala como $T \propto a^{-1}$. Portanto, se a temperatura no final da inflação for de 10^{15} GeV, o fator de escala será $a_f \simeq \frac{T_0}{10^{15} \text{ GeV}} \sim 10^{-28}$, onde T_0 denota a temperatura hoje. Considerando que $\Omega_{r0} \simeq 5 \times 10^{-5}$, obtemos então que $\frac{a_0 H_0}{a_f H_f} \sim 10^{-26}$. Portanto, no final da inflação o raio de Hubble comóvel era 26 ordens de grandeza menor do que é hoje. Assim sendo, no início da inflação, o raio de Hubble comóvel deve ser pelo menos 26 ordens de grandeza maior do que no final da inflação, para que seja maior do que é hoje. Comumente, em modelos inflacionários o parâmetro de Hubble permanece constante, de modo que o decréscimo do raio de Hubble comóvel se deve exclusivamente ao crescimento do fator de escala $a(t)$. Se H é constante, então o fator de

escala varia exponencialmente com o tempo

$$a(t) = a_f e^{H(t-t_f)}, t < t_f ,$$

onde o subescrito f denota o final do período inflacionário. Da expressão acima, vemos que para o fator de escala crescer 26 ordens de grandeza, o argumento da exponencial deve ser $\ln(10^{26}) \simeq 60$. Definindo *1 e-fold* como o intervalo de tempo, em unidades de H ($H = cte$), após o qual o fator de escala cresceu por um fator de e , então para a inflação resolver o problema do horizonte, o universo deve se expandir exponencialmente por mais de 60 e-folds.

Outro problema que é resolvido pela teoria da inflação é o *problema da planura*. Tal problema se constitui no fato de que, para que a densidade relativa total de energia do universo seja da ordem de 1 hoje, essa deve, no passado, diferir de 1 por uma quantidade muito pequena. Substituindo $H \simeq H_0 \frac{\sqrt{\Omega_{r0}}}{a^2}$ em (9), obtemos⁶

$$\Omega(t) - 1 \simeq \frac{\Omega_{m0} + \Omega_{r0} - 1}{\Omega_{r0}} a^2 \simeq -\frac{0.7}{\Omega_{r0}} a^2 .$$

Se considerarmos, por exemplo, um tempo t_{Pl} em que a energia total do universo se aproxima da energia de Planck, então o fator de escala, num universo sem inflação, será $a \sim 10^{-32}$, de modo que

$$\Omega(t_{Pl}) - 1 \sim -10^{-60} .$$

Portanto, para que a densidade de energia total seja da ordem da densidade crítica hoje, temos de fazer um ajuste fino na densidade de energia no passado, no caso de um universo sem inflação. Consideremos agora um universo com um período inicial de inflação. Nesse caso, o fator de escala no início da inflação, a_i , será pelo menos 26 ordens de grandeza menor do que no final da inflação, conforme estimamos acima, ou seja $a_i \sim 10^{-26} a_f \simeq \frac{a_f^2}{\sqrt{\Omega_{r0}}}$. O parâmetro de Hubble permanece constante durante a inflação, portanto $H_i = H_f \simeq H_0 \frac{\sqrt{\Omega_{r0}}}{a_f^2}$. Substituindo a_i e H_i em (9), obtemos

$$\Omega(t_i) - 1 = \Omega(t_0) - 1 ,$$

⁶Note-se que $H \simeq H_0 \frac{\sqrt{\Omega_{r0}}}{a^2}$ na época da radiação continua sendo uma aproximação válida, mesmo para um universo com curvatura.

onde t_i denota o tempo no qual a inflação tem início e t_0 é o tempo atual.

Como dissemos, em modelos inflacionários supõe-se que o universo não seja dominado nem por matéria nem por radiação. Isso porque, de (8), vemos que para termos expansão acelerada ($\frac{d^2 a}{dt^2} > 0$), devemos ter

$$P < -\frac{\rho}{3} ,$$

ou seja, precisamos de um componente com pressão negativa, portanto o fluido dominante não pode ser nem matéria nem radiação. Na grande maioria dos modelos inflacionários, esse componente responsável pela expansão acelerada é um campo escalar. Existem alternativas, onde se adota um campo vetorial ou um conjunto de campos fermiônicos, mas essas últimas constituem modelos mais complicados.

Não entraremos aqui nos detalhes de um modelo inflacionário qualquer. Para os nossos propósitos, é suficiente dizer apenas que, na época da inflação, as flutuações quânticas no campo físico no qual se baseia o modelo inflacionário, por exemplo, um campo escalar, produzem as flutuações na densidade de energia, que por sua vez geram as perturbações da métrica. As perturbações produzidas pelas flutuações quânticas no período inflacionário ocorrem quando todas as escalas de interesse ainda estão causalmente conectadas. À medida que o horizonte comóvel diminui, essas escalas passam para fora do horizonte e, muito tempo depois do término da inflação, entrarão novamente no horizonte, servindo como condições iniciais para as equações de evolução das inomogeneidades e anisotropias, apresentadas acima. Conforme já explicamos, basta termos a condição inicial para a perturbação na curvatura Φ , para conhecermos todas as outras condições iniciais. A perturbação Φ terá uma distribuição gaussiana com média zero. Mais precisamente, um dado modo de Fourier $\tilde{\Phi}(\vec{k})$ terá média zero,

$$\langle \tilde{\Phi}(\vec{k}) \rangle = 0 ,$$

e variância dada por

$$\langle \tilde{\Phi}(\vec{k}) \tilde{\Phi}^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P_{\Phi}(k) \delta(\vec{k} - \vec{k}') .$$

O delta de Dirac garante a independência de diferentes modos de Fourier. $P_{\Phi}(k)$ é o espectro de potências das flutuações Φ . Se $P_{\Phi}(k)$ for tal que $k^3 P_{\Phi}(k) = cte$, o espectro é chamado de *invariante de escala*.

2.8 Inomogeneidades

Assim como a perturbação de curvatura Φ , também o contraste de densidade da matéria terá uma distribuição gaussiana de média zero. Mais precisamente, teremos

$$\left\langle \tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta_I \right) \right\rangle = 0$$

e

$$\left\langle \tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta_I \right) \tilde{\delta}_m^* \left(\vec{k}', \eta_I \right) \right\rangle = (2\pi)^3 P(k, \eta_I) \delta \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) ,$$

onde $P(k, \eta_I)$ é o espectro de potências inicial da matéria e $\tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta_I \right)$ é o contraste na densidade de matéria no espaço de Fourier, em um tempo conforme inicial η_I . O contraste de densidade num tempo conforme η se relaciona com $\tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta_I \right)$ por

$$\tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta \right) = T_k(\eta, \eta_I) \tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta_I \right) ,$$

onde $T_k(\eta, \eta_I)$ é denominada *função de transferência* e depende somente da dinâmica, e não das condições iniciais. Da expressão acima temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta \right) \tilde{\delta}_m^* \left(\vec{k}', \eta \right) \right\rangle &= T_k(\eta, \eta_I) T_{k'}^*(\eta, \eta_I) \left\langle \tilde{\delta}_m \left(\vec{k}, \eta_I \right) \tilde{\delta}_m^* \left(\vec{k}', \eta_I \right) \right\rangle \\ &= (2\pi)^3 |T_k(\eta, \eta_I)|^2 P(k, \eta_I) \delta \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) . \end{aligned}$$

Assim, podemos relacionar o espectro de potências atual com o primordial por

$$P(k, \eta) = |T_k(\eta, \eta_I)|^2 P(k, \eta_I) .$$

A teoria inflacionária prevê um espectro primordial da forma

$$P(k, \eta_I) = A \left(\frac{k}{k_0} \right)^n , \quad (73)$$

onde n é o *índice espectral escalar*. O caso $n = 1$ corresponderá ao espectro invariante de escala das perturbações da métrica, mencionado acima. Para ver isso, considere (58), no limite de grandes k e para universo dominado por matéria,

$$k^2 \tilde{\Phi} = \frac{a^2}{2M_{pl}^2} \rho_m^{(0)} \tilde{\delta}_m .$$

Isolando $\tilde{\delta}_m$ e lembrando que $\rho_m^{(0)} = 3M_{pl}^2 H_0^2 \Omega_{m0}/a^3$, temos

$$\tilde{\delta}_m = \frac{2ak^2\tilde{\Phi}}{3H_0^2\Omega_{m0}} .$$

Tomando a variância de ambos os membros, temos

$$P(k, \eta) \propto k^4 P_\Phi(k, \eta) .$$

Relacionando os espectros no tempo conforme η com os espectros primordiais, através da função de transferência, obtemos

$$P(k, \eta_I) \propto k^4 P_\Phi(k, \eta_I) .$$

Se $P(k, \eta_I)$ for da forma (73), então

$$P_\Phi(k, \eta_I) \propto k^{n-4} .$$

Portanto, se $n = 1$, $k^3 P_\Phi(k, \eta_I)$ será independente de k .

Uma observação adicional à respeito de n é que, embora esse seja geralmente tomado como constante, muitas vezes considera-se n da forma

$$n(k) = n(k_0) + \frac{dn}{d \ln k} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) .$$

$\frac{dn}{d \ln k}$ é chamada de *running*. No entanto, em trabalhos recentes (por exemplo, em [38], [41] e [42]), não foi encontrada evidência de *running*.

2.9 Anisotropias

Apresentaremos agora como se obtém predições teóricas sobre o perfil das anisotropias na temperatura da RCF. Antes, porém, vamos mostrar como transformar (46) em uma hierarquia de equações diferenciais acopladas. Para isso, comecemos por substituir em (46) a expansão de $\tilde{\theta}$ em polinômios de Legendre:

$$\tilde{\theta}(\vec{k}, \hat{p}, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l \tilde{\theta}_l(\vec{k}, \eta) P_l(\hat{k} \cdot \hat{p}) . \quad (74)$$

Fazendo essa substituição, usando a propriedade $(2l+1)\mu P_l(\hat{k} \cdot \hat{p}) = (l+1)P_{l+1}(\hat{k} \cdot \hat{p}) + lP_{l-1}(\hat{k} \cdot \hat{p})$ no segundo termo do primeiro membro e

agrupando os termos proporcionais a $P_l(\hat{k} \cdot \hat{p})$, obtemos, como consequência da ortogonalidade dos $P_l(\hat{k} \cdot \hat{p})$, que a equação só será verdadeira se esses termos multiplicando um dado $P_l(\hat{k} \cdot \hat{p})$ em ambos os membros se igualarem. Dessa maneira, obtemos a seguinte hierarquia de equações:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\theta}_0}{d\eta} &= -k\tilde{\theta}_1 - \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} , \\ \frac{d\tilde{\theta}_1}{d\eta} &= \frac{k}{3} \left(\tilde{\theta}_0 - 2\tilde{\theta}_2 + \tilde{\Psi} \right) + \frac{d\tau}{d\eta} \left(\tilde{\theta}_1 - \frac{i}{3}\tilde{v}_b \right) , \\ \frac{d\tilde{\theta}_2}{d\eta} &= \frac{k}{5} \left(2\tilde{\theta}_1 - 3\tilde{\theta}_3 \right) + \frac{d\tau}{d\eta} \left(\tilde{\theta}_2 - \frac{\Pi}{10} \right) , \\ \frac{d\tilde{\theta}_l}{d\eta} &= -\frac{k}{2l+1} \left[(l+1)\tilde{\theta}_{l+1} - l\tilde{\theta}_{l-1} \right] + \frac{d\tau}{d\eta}\tilde{\theta}_l, \text{ para } l > 2 .\end{aligned}\quad (75)$$

Até o início dos anos 90, os códigos que calculavam as anisotropias teóricas resolviam o sistema de equações acopladas acima. Assim, para testar predições numa escala angular $\theta \approx 1/l$ pequena, era necessário resolver um sistema com milhares de equações diferenciais acopladas. Além disso, as soluções são funções que oscilam rapidamente com o tempo, de modo que a integração tinha que ser feita em pequenos incrementos de tempo, para se conseguir uma precisão numérica satisfatória. Os códigos atuais não utilizam mais a decomposição acima, baseando-se num outro método para calcular os momentos de multipolo teóricos, o chamado *método da linha de visada*⁷ (*line of sight approach*, em inglês), que apresentaremos abaixo.

Subtraindo $\frac{d\tau}{d\eta}\tilde{\theta}$ de ambos os membros de (46) e reescrevendo o primeiro membro, obtemos

$$\begin{aligned}& e^{-ik(\hat{k} \cdot \hat{p})\eta + \tau} \frac{d}{d\eta} \left(\tilde{\theta} e^{ik(\hat{k} \cdot \hat{p})\eta - \tau} \right) \\ &= -\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} - ik(\hat{k} \cdot \hat{p})\tilde{\Psi} - \frac{d\tau}{d\eta} \left[\tilde{\theta}_0 + \tilde{v}_b(\hat{k} \cdot \hat{p}) - \frac{P_2(\hat{k} \cdot \hat{p})}{2}\Pi \right] .\end{aligned}$$

⁷De fato, códigos como o CMBFAST [43] ainda usam a hierarquia para calcular os momentos de multipolo $l < 4$. Para $l \geq 4$, o programa usa o método da linha de visada.

Multiplicando ambos os membros da equação acima por $e^{ik(\hat{k} \cdot \hat{p})(\eta - \eta_0) - \tau}$ e integrando de um tempo conforme inicial η_i até o tempo presente η_0 , temos

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} \left(\vec{k}, \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right), \eta_0 \right) &= \tilde{\theta}(\eta_i) e^{ik(\hat{k} \cdot \hat{p})(\eta_i - \eta_0)} e^{-\tau(\eta_i)} \\ &+ \int_{\eta_i}^{\eta_0} d\eta e^{ik(\hat{k} \cdot \hat{p})(\eta - \eta_0) - \tau} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} - ik \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \tilde{\Psi} \\ &-\frac{d\tau}{d\eta} \left[\tilde{\theta}_0 + \tilde{v}_b \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) - \frac{P_2(\hat{k} \cdot \hat{p})}{2} \Pi \right] \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

onde usamos que $\tau(\eta_0) = 0$. Se o tempo conforme inicial η_i for suficientemente pequeno, então a profundidade ótica $\tau(\eta_i)$ será muito grande, de modo que podemos desprezar o primeiro termo no segundo membro acima. Fisicamente, isso significa que qualquer anisotropia será eliminada pelo espalhamento Compton nesse período. Pelo mesmo argumento, podemos substituir o limite de integração η_i por zero. Assim temos

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} \left(\vec{k}, \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right), \eta_0 \right) &= \int_0^{\eta_0} d\eta e^{ik(\hat{k} \cdot \hat{p})(\eta - \eta_0) - \tau} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &-\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} - ik \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) \tilde{\Psi} \\ &-\frac{d\tau}{d\eta} \left[\tilde{\theta}_0 + \tilde{v}_b \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right) - \frac{P_2(\hat{k} \cdot \hat{p})}{2} \Pi \right] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

O termo entre chaves pode ser modificado, notando que podemos trocar $\left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right)$ por $\frac{1}{ik} \frac{d[\exp(ik(\hat{k} \cdot \hat{p})(\eta - \eta_0))]}{d\eta}$ e efetuando integração por partes. Os termos de superfície que aparecerão poderão ser eliminados, pois os termos correspondentes a $\eta = 0$ serão desprezíveis, devido à exponencial $\exp(-\tau(0))$. Os termos correspondentes à $\eta = \eta_0$ não serão desprezíveis, mas esses só afetam o monopolo, e essa alteração não é observável [43]. Com isso, a eq. (76) se torna

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} \left(\vec{k}, \left(\hat{k} \cdot \hat{p} \right), \eta_0 \right) &= \int_0^{\eta_0} d\eta e^{ik(\hat{k} \cdot \hat{p})(\eta - \eta_0) - \tau} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{d\eta} \left[e^{-\tau} \left(\tilde{\Psi} - \frac{i\tilde{v}_b}{k} \frac{d\tau}{d\eta} \right) \right] \\ &-e^{-\tau} \left[\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + \frac{d\tau}{d\eta} \left(\tilde{\theta}_0 + \frac{\Pi}{4} \right) \right] - \frac{3}{4k^2} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(e^{-\tau} \frac{d\tau}{d\eta} \Pi \right) \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Vamos agora transformar a equação acima numa equação para os momentos de multipolo. Para isso, basta multiplicarmos ambos os membros

por $P_l(\hat{k} \cdot \hat{p})$ e integrarmos em $d(\cos \alpha)$, onde $\cos \alpha = \hat{k} \cdot \hat{p}$. Efetuando a integração, e usando a relação

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha) P_l(\cos \alpha) e^{ik \cos \alpha (\eta - \eta_0)} = \frac{1}{(-i)^l} j_l[k(\eta - \eta_0)] ,$$

bem como a definição de $\tilde{\theta}_l$, obtemos

$$\tilde{\theta}_l(\vec{k}, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta j_l[k(\eta_0 - \eta)] \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\eta} \left[e^{-\tau} \left(\tilde{\Psi} - \frac{i\tilde{v}_b}{k} \frac{d\tau}{d\eta} \right) \right] \\ -e^{-\tau} \left[\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + \frac{d\tau}{d\eta} \left(\tilde{\theta}_0 + \frac{\Pi}{4} \right) \right] \\ -\frac{3}{4k^2} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(e^{-\tau} \frac{d\tau}{d\eta} \Pi \right) \end{array} \right\} . \quad (78)$$

Na última expressão, foi usada a propriedade $(-i)^l j_l(-x) = j_l(x)$.

Vamos agora expandir a flutuação de temperatura em harmônicos esféricos

$$\theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\vec{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{p}) .$$

A expressão acima pode ser invertida, usando a relação de ortonormalidade dos harmônicos esféricos

$$\int d\Omega Y_{lm}(\hat{p}) Y_{l'm'}^*(\hat{p}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} ,$$

resultando em

$$a_{lm}(\vec{x}, \eta) = \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) . \quad (79)$$

As flutuações de temperatura, assim como as de densidade, foram geradas pelas flutuações quânticas que ocorriam na época da inflação. Tais flutuações tinham uma distribuição gaussiana, então as flutuações na temperatura e na densidade têm também distribuições gaussianas, pois estamos considerando somente perturbações lineares. Desse modo, não podemos fazer previsões sobre os a_{lm} , somente sobre a distribuição da qual eles são tirados. A distribuição dos $a_{lm}(\vec{x}, \eta)$ terá média zero,

$$\langle a_{lm}(\vec{x}, \eta) \rangle = 0 ,$$

e variância denotada por C_l , obtida de

$$\langle a_{lm}(\vec{x}, \eta) a_{l'm'}^*(\vec{x}, \eta) \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l . \quad (80)$$

Note-se que, para um dado l , todos os $a_{lm}(\vec{x}, \eta)$ terão a mesma variância. Com isso, para valores grandes de l , o valor de C_l será bem definido, pois como teremos $2l + 1$ valores de a_{lm} para medir, a distribuição dos a_{lm} ficará bem amostrada, e teremos consequentemente uma noção bastante precisa de sua variância C_l . Para baixos valores de l , por outro lado, a distribuição dos a_{lm} será amostrada pobremente, de modo que o valor de C_l ficará mal definido. Essa incerteza intrínseca nos C_l é a chamada *variância cósmica*, e será mais significativa para baixos valores de l . Mais precisamente, denotando essa incerteza por ΔC_l , teremos

$$\frac{\Delta C_l}{C_l} = \sqrt{\frac{2}{2l + 1}} .$$

Com o intuito de obter uma expressão explícita para os C_l , substituímos (79) em (80),

$$\begin{aligned} C_l &= \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \int d\Omega' Y_{lm}(\hat{p}') \langle \theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) \theta^*(\vec{x}, \hat{p}', \eta) \rangle \\ &= \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \int d\Omega' Y_{lm}(\hat{p}') \\ &\quad \times \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \left\langle \tilde{\theta}(\vec{k}, \hat{p}, \eta) \tilde{\theta}^*(\vec{k}', \hat{p}', \eta) \right\rangle . \end{aligned} \quad (81)$$

Na última igualdade, passamos as flutuações de temperatura para o espaço de Fourier. Usando a expansão (74) obtemos

$$\begin{aligned} &\left\langle \tilde{\theta}(\vec{k}, \hat{p}, \eta) \tilde{\theta}^*(\vec{k}', \hat{p}', \eta) \right\rangle \\ &= \sum_{n,p=0}^{\infty} (-i)^n (+i)^p (2n + 1) (2p + 1) P_n(\mu) P_p^*(\mu') \left\langle \tilde{\theta}_n(\vec{k}, \eta) \tilde{\theta}_p^*(\vec{k}', \eta) \right\rangle . \end{aligned} \quad (82)$$

De (78), vemos que a evolução temporal dos $\tilde{\theta}_l$ não depende de $\hat{k}$. Usando esse fato, e também que estamos associando todas as perturbações iniciais, conforme já discutido acima, com a perturbação espacial Φ inicial ou, equivalentemente, com o potencial newtoniano Ψ inicial, podemos escrever

$$\tilde{\theta}_n(\vec{k}, \eta) = \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_I) \tilde{\theta}_n(k, \eta) . \quad (83)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\theta}_n(\vec{k}, \eta) \tilde{\theta}_p^*(\vec{k}', \eta) \right\rangle &= \tilde{\theta}_n(k, \eta) \tilde{\theta}_p(k', \eta) \left\langle \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_I) \tilde{\Psi}^*(\vec{k}', \eta_I) \right\rangle \\ &= \tilde{\theta}_n(k, \eta) \tilde{\theta}_p(k', \eta) (2\pi)^3 P_\Psi(k, \eta_I) \delta(\vec{k} - \vec{k}') , \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos a definição do espectro de potências inicial da perturbação gravitacional, $P_\Psi(k, \eta_I)$. Substituindo a expressão acima em (82) e essa em (81), obtemos

$$\begin{aligned} C_l &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\Psi(k, \eta_I) \sum_{n,p=0}^{\infty} (2n+1)(2p+1) \tilde{\theta}_n(k, \eta) \tilde{\theta}_p(k, \eta) \\ &\quad \times \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) P_n(\mu) \int d\Omega' Y_{lm}(\hat{p}') P_p^*(\mu') . \end{aligned} \quad (84)$$

Usando a expansão de $P_n(\mu)$ em harmônicos esféricos, $P_l(\mu) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\hat{p}) Y_{lm}^*(\hat{k})$, verificamos facilmente que $\int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) P_n(\mu) = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{nm}^*(\hat{k}) \delta_{nl}$ e também que $\int d\Omega' Y_{lm}(\hat{p}') P_p^*(\mu') = \frac{4\pi}{2p+1} Y_{pm}(\hat{k}) \delta_{pl}$. Substituindo em (84), obtemos

$$\begin{aligned} C_l &= (4\pi)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\Psi(k, \eta_I) \left| \tilde{\theta}_l(k, \eta) \right|^2 \left| Y_{lm}(\hat{k}) \right|^2 \\ &= (4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 P_\Psi(k, \eta_I) \left| \tilde{\theta}_l(k, \eta) \right|^2 \int d\Omega \left| Y_{lm}(\hat{k}) \right|^2 . \end{aligned}$$

Usando que $\int d\Omega \left| Y_{lm}(\hat{k}) \right|^2 = 1$, obtemos

$$C_l = (4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 P_\Psi(k, \eta_I) \left| \tilde{\theta}_l(k, \eta) \right|^2 .$$

Como o integrando não depende de $\hat{k}$, podemos escrever a integral acima como

$$C_l = (4\pi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\Psi(k, \eta_I) \left| \tilde{\theta}_l(k, \eta) \right|^2 . \quad (85)$$

A expressão acima reproduz, a menos do fator $(2\pi)^{-3}$, a equação (90) de [37] e também a equação (9) de [43]. O fator $(2\pi)^{-3}$ aparece devido à diferença

na definição da transformada de Fourier de θ_l , que nessas referências não tem o fator $(2\pi)^{-3}$, e também devido à diferença na definição de $P_\Psi(k)$, que não tem o fator (2π) .

Com o intuito de compreendermos as propriedades do espectro de anisotropias da RCF, apresentaremos algumas soluções analíticas aproximadas das equações de Boltzmann. Não entraremos aqui nos detalhes da derivação dessas soluções aproximadas. É suficiente para nossos propósitos apresentá-las e discutir suas implicações para a forma do espectro de anisotropias. Uma solução aproximada para (78) é dada por [44] [45]

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_l(\vec{k}, \eta_0) \simeq & \left[\tilde{\theta}_0(\vec{k}, \eta_*) + \tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_*) \right] j_l[k(\eta_0 - \eta_*)] \\ & + 3\tilde{\theta}_1(\vec{k}, \eta_*) \left\{ j_{l-1}[k(\eta_0 - \eta_*)] - \frac{(l+1)j_l[k(\eta_0 - \eta_*)]}{k(\eta_0 - \eta_*)} \right\} \\ & + \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} \left[\frac{d\Psi(\vec{k}, \eta)}{d\eta} - \frac{d\Phi(\vec{k}, \eta)}{d\eta} \right] j_l[k(\eta_0 - \eta)] . \quad (86) \end{aligned}$$

O último termo na equação acima é o *termo de Sachs-Wolfe integrado*, sendo importante depois da recombinação. A solução aproximada (86) foi obtida desprezando-se o termo de polarização Π em (78). Foi também levado em conta que a função de visibilidade, $g(\eta) = -\frac{d\tau}{d\eta}e^{-\tau}$ (note-se que podemos reescrever o integrando de (78) em termos de $g(\eta)$), varia rapidamente com η , de modo que podemos passar $\tilde{\theta}_0$, $j_l[k(\eta_0 - \eta)]$ e as perturbações da métrica para fora da integral, com seus valores calculados no tempo conforme η_* , correspondente ao pico de $g(\eta)$ (para mais detalhes, ver por exemplo [21]). Precisamos agora de uma expressão para os momentos de monopolo e de dipolo, na época da recombinação. Consideremos a chamada aproximação de acoplamento firme (*tight-coupling approximation*). Antes da recombinação, quando todos os elétrons estavam ionizados, a taxa de espalhamento Compton era muito alta, de modo que o caminho livre médio dos fótons era muito menor que o horizonte. Nesse limite, somente os momentos de monopolo θ_0 e de dipolo θ_1 da distribuição de temperatura não são desprezíveis⁸ e são dados aproximadamente por

⁸Nesse sentido os fótons se comportam como um fluido, que pode ser descrito somente com a densidade de energia ρ e a velocidade $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0(\vec{k}, \eta) + \tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta) &= \left[\tilde{\theta}_0(\vec{k}, 0) + \tilde{\Phi}(\vec{k}, 0) \right] \cos(kr_s) \\ &+ \frac{k}{\sqrt{3}} \int_0^\eta d\eta' \left[\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta') - \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta') \right] \text{sen}[k(r_s(\eta) - r_s(\eta'))], \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(\vec{k}, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tilde{\theta}_0(\vec{k}, 0) + \tilde{\Phi}(\vec{k}, 0) \right] \text{sen}(kr_s) \\ &- \frac{k}{3} \int_0^\eta d\eta' \left[\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta') - \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta') \right] \cos[k(r_s(\eta) - r_s(\eta'))], \end{aligned} \quad (88)$$

onde $r_s(\eta)$ é o *horizonte sonoro*, definido como

$$r_s(\eta) = \int_0^\eta d\eta' c_s(\eta'),$$

sendo c_s a velocidade do som, definida como $c_s^2 \equiv \frac{1}{3(1+R)}$. As soluções analíticas acima foram primeiramente obtidas por Hu e Sugiyama em 1995 [45]. $\tilde{\theta}_0(\vec{k}, 0)$ e $\tilde{\Phi}(\vec{k}, 0)$ são as condições iniciais, geradas na época da inflação (note-se que tomamos $\eta_I \simeq 0$). Essas soluções nos permitem avaliar a forma do espectro de anisotropias da RCF. Do primeiro termo de (87), vemos que o espectro terá picos, cuja localização será aproximadamente nos picos de $\cos(kr_s)$, ou seja, teremos picos situados em $kr_s = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Em outras palavras, se substituirmos (87) em (86) e essa, por sua vez, em (85), o espectro de anisotropias terá picos em $kr_s = n\pi$, ou, como $l \simeq k\eta_0$, em $\frac{n\pi\eta_0}{r_s}$. Estes são os chamados *picos acústicos*. De fato, a posição exata desses picos ocorre em valores de l ligeiramente menores que $\frac{n\pi\eta_0}{r_s}$ e as soluções acima fornecem uma aproximação razoável somente até $l \simeq 500$. Para $l > 500$, o momento de dipolo não será desprezível e terá um efeito de amortecimento nos picos acústicos.

É possível também obter uma expressão analítica para os C_l na região de baixos multipolos, ou grandes ângulos. As anisotropias em grandes ângulos estavam fora do horizonte na época da recombinação, não sendo, portanto, afetadas por processos causais. Para essas anisotropias, e considerando condições iniciais adiabáticas, é válida a aproximação $\tilde{\theta}_l(k, \eta_0) \simeq \frac{1}{3}j_l(k\chi)$, onde $\chi = \eta_0 - \eta_* \simeq \eta_0$. Se considerarmos o espectro de potências inicial da

perturbação gravitacional como uma lei de potência, $P_{\Psi}(k) = A\chi^3(k\chi)^{n-4}$, onde n é o índice espectral escalar, obtemos, de (85),

$$C_l^{SW} \simeq \frac{2^{n-3}}{9} A \frac{\Gamma(3-n) \Gamma[(2l+n-1)/2]}{\Gamma^2[(4-n)/2] \Gamma[(2l+5-n)/2]}, \quad (89)$$

onde o superescrito SW denota *Sachs-Wolfe*, se referindo às primeiras pessoas a obterem esse resultado [46]. Para um espectro invariante de escala, $n = 1$, teremos $\frac{\Gamma(2)}{\Gamma^2(3/2)} = \frac{4}{\pi}$ e $\frac{\Gamma(l)}{\Gamma(l+2)} = \frac{1}{l(l+1)}$, portanto,

$$l(l+1) C_l^{SW} \simeq \frac{A}{9\pi} = cte .$$

O resultado acima mostra que a distribuição de C_l , se for escrita em termos de $l(l+1) C_l$, apresentará aproximadamente um *plateau* na região de baixos multipolos.

Podemos, agora, prever a forma qualitativa do espectro de multipolos da RCF: um *plateau* na região de baixos multipolos e um aspecto oscilatório (os picos acústicos) na região de altos multipolos. A figura (1) reproduz a figura (16) de [47]. Nessa figura, temos dados do 3º ano do WMAP, juntamente com a curva de melhor ajuste de um universo Λ CDM plano aos dados (considerando somente os dados do WMAP).

Figura 1: espectro de potências angular de temperatura da RCF. A curva sólida corresponde ao melhor ajuste de um universo Λ CDM plano aos dados do 3º ano do WMAP (reprodução da figura (16) de [47]).

Vemos que, na região de baixos multipolos, o espectro de fato não é exatamente um *plateau*. Isso porque o momento de dipolo, desprezado na derivação de (89), dá uma pequena contribuição mesmo na região de baixos multipolos. Também há uma contribuição do efeito Sachs-Wolfe integrado, devido ao decaimento do potencial newtoniano em períodos recentes, quando a energia escura começou a dominar.

3 Modelos de energia escura interagente

Nos últimos anos, têm surgido propostas de interação entre a matéria e a energia escuras (ver, por exemplo, [48] - [59]). Uma das motivações é resolver ou ao menos amenizar o problema da coincidência. No entanto, na classe de modelos onde a energia escura é considerada como sendo um campo físico, existe uma razão mais básica para se considerar uma interação entre a matéria e a energia escuras: como ambas são de natureza ainda desconhecida, seria, em princípio, mais natural supor que os campos dos quais essas se constituem interagem entre si. Quando há interação, esses "fluidos cósmicos" não se conservam mais individualmente, mas as equações de conservação se tornam acopladas através de um termo de interação. Neste capítulo, apresentaremos dois modelos de energia escura em interação com a matéria escura. No primeiro, o termo de interação é deduzido a partir de argumentos fenomenológicos. No segundo, será deduzido de maneira formal, a partir do tensor de energia-momento e das equações de movimento, obtidos por sua vez a partir da densidade de lagrangiana do modelo.

3.1 Modelo fenomenológico

Geralmente supõe-se que teorias quânticas de campos, como o modelo padrão, são aptas a descrever a física de partículas somente até uma escala de comprimento mínima $1/\Lambda$. Equivalentemente, podemos dizer que Λ corresponde a uma escala de energia máxima, menor do que a massa de Planck reduzida $M_{Pl} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}}$ [31], ou seja, Λ é um corte ultravioleta e uma teoria de campos pode descrever de modo preciso a física de partículas somente se os momentos e intensidades dos campos forem pequenos comparados com esse corte ultravioleta Λ .

Uma teoria de campos numa caixa cúbica de lado L , com um corte ultravioleta Λ , terá entropia da ordem de $(L\Lambda)^3$ [60]. Por outro lado, a entropia de um buraco negro de raio L é $\pi L^2 m_{Pl}^2$, onde $m_{Pl} = G^{-\frac{1}{2}}$. Com base nisso, Bekenstein postulou que a entropia máxima em uma caixa de lado L deve ser proporcional à área da superfície da caixa. Assim sendo, o volume do sistema deve satisfazer à condição

$$L^3 \Lambda^3 \lesssim \pi L^2 m_{Pl}^2 \equiv S_{BH} . \quad (90)$$

O comprimento máximo L , então, depende de Λ^{-3} , sendo efetivamente um corte infravermelho, induzido pelo corte ultravioleta Λ . No entanto, essa

condição permite que estados cujos respectivos raios de Schwarzschild são maiores que a dimensão L do sistema contribuam para a entropia total. De fato, quando o volume do sistema satura a condição acima, a relação entre a dimensão L e o corte ultravioleta Λ será dada por $\Lambda = (\pi m_{Pl}^2/L)^{1/3}$. Se $T \sim \Lambda$ (respeitando, naturalmente, a condição $T \leq \Lambda$), então $T \sim (m_{Pl}^2/L)^{1/3}$. Mas a energia térmica do sistema será $M \sim L^3 T^4 \sim L^3 (m_{Pl}^2/L)^{4/3}$. Então, o raio de Schwarzschild (que é dado por $R_S = 2M/m_{Pl}^2$) será, para esse sistema, $R_S \sim L (L m_{Pl})^{2/3} \gg L$. Porém, teorias de campos locais provavelmente não são capazes de fornecer uma descrição precisa de um sistema contendo buracos negros. Assim, em [60] foi proposta uma condição mais restritiva sobre L , de modo a excluir todos os estados físicos cujos raios de Schwarzschild sejam maiores do que L . Sendo Λ o corte ultravioleta, a densidade de energia máxima será Λ^4 , e a restrição sobre L será, então, dada por

$$L^3 \Lambda^4 \lesssim L m_{Pl}^2 . \quad (91)$$

Aqui, o corte infravermelho L depende de Λ^{-2} . Note que, quando $L^3 \Lambda^4 \simeq L m_{Pl}^2$, $S \simeq (m_{Pl}/\Lambda)^3$ e $S_{BH} \simeq \pi (m_{Pl}/\Lambda)^4$, ou seja, $S \simeq (S_{BH}/\pi)^{3/4}$. Portanto, a condição acima é bem mais restritiva que a condição (90). Se identificarmos Λ^4 com a densidade de energia do ponto zero, $\rho_\Lambda \equiv \Lambda^4$, e escolhermos L que satura a desigualdade (91), teremos

$$\rho_\Lambda = \frac{3c^2 M_{Pl}^2}{L^2} , \quad (92)$$

onde, por conveniência, foi introduzida a constante $3c^2$, com $c > 0$. Note-se também que substituímos m_{Pl} por M_{Pl} .

Em [60] foi observado que se escolhermos o corte infravermelho L como sendo da ordem do *raio de Hubble*, $1/H$, a densidade de energia do ponto zero ρ_Λ será da mesma ordem de grandeza do limite empírico estabelecido para a densidade de energia escura. Isso elimina a necessidade de se evocar a existência de uma nova física em altas energias, para se explicar a discrepância de 120 ordens de grandeza entre a densidade de energia do ponto zero e a densidade de energia escura. No entanto, conforme observado em [61], escolher $L = 1/H$ não é conveniente, pois teremos, nesse caso, uma energia escura se comportando como matéria escura. Para ver isso, considere a equação de Friedmann para um universo plano, contendo somente matéria e energia escuras, $3M_{Pl}^2 H^2 = \rho_{me} + \rho_\Lambda$. Considerando que ρ_Λ é dada por (92), com $L = 1/H$, e isolando ρ_{me} , obtemos $\rho_{me} = 3M_{Pl}^2 (1 - c^2) H^2$. Portanto,

tanto a matéria como a energia escuras serão proporcionais a H^2 , ou seja, terão o mesmo comportamento dinâmico. Mas $\rho_{me} \propto a^{-3}$, então teremos também $\rho_\Lambda \propto a^{-3}$. Essa dependência de ρ_Λ com o fator de escala significa que a energia escura, assim como a matéria escura, tem pressão zero. De fato, substituindo $\rho_\Lambda \propto a^{-3}$ na equação de conservação da energia escura (por enquanto, não interagente), $\dot{\rho}_\Lambda + 3H(1 + \omega_\Lambda)\rho_\Lambda = 0$, obtemos que $\omega_\Lambda = 0$. Mas, para a energia escura levar a uma expansão acelerada do universo, deve-se ter $\omega_\Lambda < -1/3$, portanto, L não pode ser $1/H$.

Da mesma forma, podemos também mostrar que o *horizonte de partículas*, $R_P(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a'}$, também não é uma escolha satisfatória. Substituindo $L = R_P$ em (92), e considerando um universo dominado pela energia escura, a equação de Friedmann se torna $HR_P = c$, ou

$$\int_0^{a(t)} \frac{da'}{Ha'^2} = \frac{c}{Ha(t)},$$

onde reescrevemos $R_P(t)$ como $a(t) \int_0^{a(t)} \frac{da'}{Ha'^2}$. Diferenciando ambos os membros em relação a $a(t)$, temos

$$\frac{1}{Ha^2} = c \frac{d}{da} \left(\frac{1}{Ha} \right).$$

Resolvendo para H , obtemos $H^{-1} = \alpha a^{1+1/c}$, onde α é uma constante de integração. Com isso, $R_P = \frac{c}{H} = c\alpha a^{1+1/c}$ e, substituindo em (92), obtemos $\rho_\Lambda = 3\alpha^{-2} M_{Pl}^2 a^{-2(1+1/c)}$. Substituindo essa expressão para ρ_Λ em sua equação de conservação, obtemos $\omega_\Lambda = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3c} > -\frac{1}{3}$. Portanto, R_P também não é uma boa escolha para L .

A escolha adequada para L será o *horizonte de eventos*, $R_h(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a'}$. De fato, quando substituimos $R_h(t)$ em (92), para um universo plano e dominado por energia escura, obtemos, de modo inteiramente análogo ao que fizemos acima, que $\rho_\Lambda = 3\alpha'^2 M_{Pl}^2 a^{-2(1-1/c)}$, o que implica em $\omega_\Lambda = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3c} < -\frac{1}{3}$.

Passemos agora à derivação do modelo fenomenológico adotado neste trabalho. Suponhamos um universo composto apenas por matéria e energia escuras, com densidades denotadas por ρ_{me} e ρ_Λ , respectivamente. Se supusermos que haja uma interação entre a matéria e a energia escuras, esses componentes não serão conservados independentemente, mas satisfarão às equações acopladas

$$\dot{\rho}_{me} + 3H\rho_{me} = Q \tag{93}$$

e

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H(1 + \omega_\Lambda)\rho_\Lambda = -Q , \quad (94)$$

onde Q é o termo de interação, que pode ser função de ρ_{me} , de ρ_Λ , ou de ambas, ρ_{me} e ρ_Λ , e sua forma depende da teoria fundamental escolhida para descrever a energia e a matéria escuras. Na próxima seção, onde apresentaremos um modelo lagrangiano para a energia e a matéria escuras em interação, essa função será obtida explicitamente ao derivarmos as equações de conservação de energia e momento para o modelo. Aqui, no entanto, fixaremos Q fenomenologicamente.

Tomemos Q como função de ρ_{me} e ρ_Λ . Expandindo $Q(\rho_{me}, \rho_\Lambda)$ em série de Taylor, teremos

$$\begin{aligned} Q(\rho_{me}, \rho_\Lambda) &= Q(0, 0) + \frac{\partial Q(0, 0)}{\partial \rho_{me}} \rho_{me} + \frac{\partial Q(0, 0)}{\partial \rho_\Lambda} \rho_\Lambda + \frac{\partial^2 Q(0, 0)}{\partial \rho_{me} \partial \rho_\Lambda} \rho_{me} \rho_\Lambda \\ &\quad + O(\rho_{me}^2, \rho_\Lambda^2) . \end{aligned}$$

Naturalmente, devemos tomar $Q(0, 0) = 0$, além disso, como ρ_{me} e ρ_Λ são pequenos (no universo atual, $\rho_{me} \sim \rho_\Lambda \sim 10^{-35} \text{MeV}^{-4}$), retemos somente os termos lineares na expansão. Assim

$$Q(\rho_{me}, \rho_\Lambda) \simeq c_1 \rho_{me} + c_2 \rho_\Lambda .$$

Para que o 2º membro seja da mesma ordem de grandeza do 1º membro em (93) e (94), escolhemos os coeficientes c_1 e c_2 como sendo proporcionais a H . Se Q for função somente de ρ_{me} ou de ρ_Λ , teremos $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$, respectivamente. Escolhemos aqui $c_1 = c_2 = 3b^2 H$, ou seja,

$$Q(\rho_{me}, \rho_\Lambda) = 3b^2 H (\rho_{me} + \rho_\Lambda) , \quad (95)$$

onde b^2 é a constante de acoplamento. Poderíamos, no entanto, ter $c_1 \neq c_2$, como foi considerado, por exemplo, em [62]. No entanto, em [63] foi demonstrado que, nesse caso, se $c_1 \neq 0$, teremos instabilidades nas perturbações de curvatura.

Substituindo $R_h(t)$ em (92) e isolando $R_h(t)$, obtemos que $R_h = \frac{c}{H\sqrt{\Omega_\Lambda}}$, ou

$$\int_t^\infty \frac{dt'}{a'} = \frac{c}{Ha\sqrt{\Omega_\Lambda}} ,$$

onde usamos a definição $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/3M_{Pl}^2H^2$. Diferenciando ambos os membros em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{\dot{\Omega}_\Lambda}{2H\Omega_\Lambda} = -1 + \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda}}{c} - \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt} . \quad (96)$$

Diferenciando a equação de Friedmann e usando (93) e (94), obtemos que $\frac{dH}{dt} = -\frac{3H^2}{2}(1 + \Omega_\Lambda\omega_\Lambda)$. Substituindo essa expressão para $\frac{dH}{dt}$ e também $\dot{\Omega}_\Lambda = H \frac{d\Omega_\Lambda}{d \ln(a)} \equiv H\Omega'_\Lambda$ em (96), obtemos

$$\Omega'_\Lambda = 2\Omega_\Lambda \left(\frac{\sqrt{\Omega_\Lambda}}{c} + \frac{3\Omega_\Lambda\omega_\Lambda + 1}{2} \right) . \quad (97)$$

Por outro lado, seja $r \equiv \rho_{me}/\rho_\Lambda$. Derivando r em relação ao tempo e usando (93) e (94), com $Q(\rho_{me}, \rho_\Lambda)$ dado por (95), obtemos

$$\dot{r} = 3Hb^2(1+r)^2 + 3Hr\omega_\Lambda . \quad (98)$$

Mas $\rho_{me}/\rho_\Lambda = \Omega_{me}/\Omega_\Lambda$, além disso, para um universo plano, $\Omega_{me} = 1 - \Omega_\Lambda$. Assim, $r = (1 - \Omega_\Lambda)/\Omega_\Lambda$ e, derivando em relação ao tempo, $\dot{r} = -\dot{\Omega}_\Lambda/\Omega_\Lambda^2$. Substituindo r e $\dot{r}$ em (98), e isolando ω_Λ , obtemos

$$\omega_\Lambda = [-\dot{\Omega}_\Lambda/\Omega_\Lambda^2 - 3Hb^2(1+r)^2]/(3Hr) = -\frac{\Omega'_\Lambda}{3\Omega_\Lambda(1-\Omega_\Lambda)} - \frac{b^2}{\Omega_\Lambda(1-\Omega_\Lambda)} . \quad (99)$$

Substituindo (97) em (99), obtemos

$$\omega_\Lambda = -\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{\Omega_\Lambda}}{3c} - \frac{b^2}{\Omega_\Lambda} . \quad (100)$$

Se $b^2 = 0$, então (100) reproduzirá a equação de estado obtida em [64].

É possível estabelecer teoricamente um limite inferior para c . Como escolhemos o corte infravermelho L como sendo o horizonte de eventos R_h , então a entropia de Gibbons-Hawking para o universo será

$$S = \pi m_{Pl}^2 R_h^2 .$$

Se nós impusermos que a entropia do universo não deve decrescer, então devemos ter $\dot{R}_h \geq 0$. Usando (96), temos $\dot{R}_h = \frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} - 1$. Como no futuro

$\Omega_\Lambda \longrightarrow 1$, então $\dot{R}_h \longrightarrow c-1$, portanto devemos ter $c \geq 1$ para que a segunda lei da termodinâmica seja sempre respeitada [64].

Finalmente, podemos interpretar o corte infravermelho como um limite máximo para o comprimento de onda da RCF [65] - [67]. Denotando esse comprimento de onda máximo por λ_c , teremos $\lambda_c = 2L$. Usando a expressão $L = \frac{c}{H\sqrt{\Omega_\Lambda}}$, obtemos

$$k_c = \frac{\pi}{c} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} , \quad (101)$$

onde os subscritos "0" denotam as quantidades no tempo atual. A expressão acima, representando o número de onda mínimo para a RCF, deve ser levada em conta no cálculo do espectro de potências. Mais precisamente, para perturbações escalares da métrica, no lugar de (85), teremos

$$C_l = (4\pi)^2 \int_{k_c}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 P_\Psi(k, \eta_I) \left| \tilde{\theta}_l(k, \eta_0) \right|^2 , \quad (102)$$

onde $P_\Psi(k, \eta_I)$ é o espectro de potências inicial para perturbações escalares da métrica, $\theta_l(k, \eta_0)$ é o l -ésimo coeficiente da expansão em polinômios de Legendre da flutuação de temperatura no espaço de Fourier⁹ e η_0 denota o tempo conforme atual. A expressão (102) é calculada numericamente pelo programa CMBFAST [43] versão 4.5.1, com uma pequena modificação para levar em conta o corte k_c nos números de onda.

3.2 Modelo lagrangiano

Recentemente, têm surgido trabalhos onde o campo escalar taquiónico é aplicado em cosmologia, como o campo responsável pela inflação ou como o constituinte da energia escura (ver, por exemplo, [68] - [77]). Esse tipo de campo escalar foi proposto no contexto da teoria de cordas, onde recebeu esse nome [78] - [80].

Uma característica que torna os táquions candidatos naturais a energia escura é que, como veremos abaixo, um gás de táquions tem pressão negativa. Uma outra motivação é que, na era da matéria, o parâmetro da equação de estado dos táquions se aproxima de zero, fazendo com que a razão entre a densidade de energia dos táquions e a densidade de energia da matéria escura

⁹ A rigor, $\tilde{\theta}_l(k, \eta)$ se relaciona com o l -ésimo coeficiente da expansão em polinômios de Legendre da flutuação de temperatura no espaço de Fourier através de (83).

se torne constante. Essa propriedade pode ser usada como uma possível solução para o problema da coincidência.

Como foi dito acima, quando supomos que a energia escura é constituída de algum campo físico, é mais natural supor que essa é interagente. Assim, adotamos um modelo onde a energia escura é constituída de táquions em interação com a matéria escura, que por sua vez consideramos como sendo um campo fermiônico massivo. Introduziremos abaixo esse modelo, mas antes apresentaremos o formalismo necessário para tratar férmions na presença de gravitação.

3.2.1 Formalismo das tétradas

Não existem representações do grupo das transformações gerais de coordenadas, o $GL(4)$, que se comportam como espinores sob transformações do subgrupo de Lorentz [81] - [83]. Por essa razão, para ser possível escrever uma ação escalar para um modelo que contém férmions, adota-se um formalismo no qual o campo de Dirac se comporta como um escalar sob transformações gerais de coordenadas. Esse formalismo é o chamado formalismo das tétradas. Introduções podem ser encontradas, por exemplo, em [81] e [82], e há introduções bastante didáticas em [2] e [83].

De acordo com o Princípio de Equivalência, em cada ponto $x^\mu = X^\mu$ de um espaço-tempo qualquer, podemos erigir um sistema de coordenadas y_X^α , que é localmente inercial em $x^\mu = X^\mu$. Nesse sistema localmente inercial, o tensor métrico será o de Minkowski, $\eta_{\alpha\beta}$. O tensor métrico no sistema de coordenadas geral x^μ será dado por

$$g_{\mu\nu}(x) = V_\mu^\alpha(x) V_\nu^\beta(x) \eta_{\alpha\beta} ,$$

onde

$$V_\mu^\alpha(X) \equiv \left(\frac{\partial y_X^\alpha}{\partial x^\mu} \right)_{x=X} , \alpha = 0, 1, 2, 3 .$$

Note que, para as coordenadas do referencial localmente inercial, estamos usando como índices letras do início do alfabeto grego, enquanto que as letras do final do alfabeto grego são usadas para o sistema de coordenadas geral. Sob uma transformação no sistema geral de coordenadas, $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, e mantendo fixas as coordenadas y_X^α do sistema localmente inercial, os objetos $V_\mu^\alpha(X)$ definidos acima se transformam como *vetores covariantes*, ou

seja, $V'^{\alpha}_{\mu}(X') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V^{\alpha}_{\nu}(X)$. Esse *conjunto* de quatro vetores é chamado de *vierbein*¹⁰ ou *tétrada* (cada um desses quatro vetores é chamado de campo da tétrada). Sob uma transformação de Lorentz do sistema localmente inercial, $y^{\alpha}_X \rightarrow y'^{\alpha}_X$, os campos da tétrada se transformam como *vetores de Lorentz contravariantes*, ou seja, $V^{\alpha}_{\mu}(X) \rightarrow \Lambda^{\alpha}_{\beta}(X) V^{\beta}_{\mu}(X)$.

Se contrairmos um vetor geralmente contravariante A^{μ} com V^{α}_{μ} , o objeto resultante, $A^{\alpha} = V^{\alpha}_{\mu} A^{\mu}$, se transformará como um conjunto de quatro escalares sob uma transformação geral de coordenadas, enquanto que sob uma transformação de Lorentz do sistema localmente inercial, A^{α} se transformará como um vetor de Lorentz contravariante. Em geral, um tensor n vezes contravariante e m vezes covariante, $T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$, se tornará um objeto que se transformará como uma coleção de $n \times m$ escalares, sob uma transformação geral de coordenadas, e como um tensor de Lorentz n vezes contravariante e m vezes covariante, sob uma transformação de Lorentz no sistema localmente inercial, se contrairmos os n índices contravariantes com V^{α}_{μ} e os m índices covariantes com a tétrada inversa, V^{ν}_{β} . Essa última pode ser obtida de V^{α}_{μ} abaixando o índice α e levantando o índice μ : $V^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} V^{\alpha}_{\mu}$. Note que $V^{\alpha}_{\mu} V^{\mu}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ e também que $V^{\alpha}_{\nu} V^{\nu}_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu}$.

Naturalmente, a ação dos campos de matéria depende não somente dos campos, mas também de suas derivadas. Consideremos um campo qualquer Ψ , que se transforma, no espaço de Minkowski, como $\Psi' = D(\Lambda) \Psi$, onde $D(\Lambda)$ é uma representação do grupo de Lorentz (note-se que, em geral, Ψ pode ser um campo de múltiplos componentes, mas omitimos os índices dos componentes, para simplificar a notação). As derivadas de Ψ , $\partial_{\alpha} \Psi$, se transformarão como $\partial'_{\beta} \Psi' = \Lambda^{\alpha}_{\beta} D(\Lambda) \partial_{\alpha} \Psi$. Assim, para termos uma ação escalar num espaço-tempo qualquer, tanto com relação a transformações do sistema geral de coordenadas, como com relação a transformações de Lorentz no sistema localmente inercial, precisamos definir uma derivada covariante $\nabla_{\alpha} \Psi$, que sob transformações de Lorentz locais se transforme dessa maneira simples, ou seja, que $\nabla'_{\beta} \Psi' = \Lambda^{\alpha}_{\beta} D(\Lambda) \nabla_{\alpha} \Psi$. Podemos verificar que uma derivada covariante definida como

$$\nabla_{\alpha} \equiv V^{\mu}_{\alpha} (\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}) = V^{\mu}_{\alpha} \left[\partial_{\mu} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} V^{\nu}_{\alpha}(x) \left(\tilde{\nabla}_{\mu} V_{\beta\nu}(x) \right) \right]$$

terá tal propriedade. Na expressão acima, $\tilde{\nabla}_{\mu} V_{\beta\nu}(x) \equiv \partial_{\mu} V_{\beta\nu}(x) - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\beta\lambda}(x)$

¹⁰Para espaços-tempo de dimensão $n \neq 4$, esse conjunto de vetores é chamado de *vielbein*.

e $\Sigma^{\alpha\beta}$ denota os geradores do grupo de Lorentz, na particular representação sendo considerada ¹¹. Por exemplo, para campos escalares, $\Sigma^{\alpha\beta} = 0$ e $\nabla_\alpha = \partial_\alpha$. No espaço dos espinores, $\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$, sendo γ^α as matrizes de Dirac. Então, dado que temos uma teoria cuja densidade de lagrangiana é função dos campos e de suas primeiras derivadas, a prescrição para generalizarmos essa teoria para espaços-tempo curvos é contrair todos os vetores, tensores, etc., com a tetrada (fazer as substituições $A^\alpha \rightarrow V_\mu^\alpha A^\mu$, etc.) e substituir as derivadas ∂_α por derivadas covariantes ∇_α . A ação assim obtida será, como desejamos, um escalar, tanto sob transformações gerais de coordenadas, como sob transformações de Lorentz locais.

O tensor de energia-momento pode ser definido como

$$T_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{V_{\alpha\mu}(x)}{\det[V(x)]} \frac{\delta S_M}{\delta V_\alpha^\nu(x)}, \quad (103)$$

onde S_M denota a ação dos campos de matéria e $\det[V(x)] = \sqrt{-g}$, sendo g o determinante de $g_{\mu\nu}(x)$. Usando o fato de que a ação da matéria é invariante com relação a transformações de Lorentz locais, é possível mostrar que o tensor de energia-momento, tal como definido acima, é simétrico. Usando essa simetria, e também a invariância da ação da matéria com relação a transformações gerais de coordenadas, mostra-se também que $\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0$ [2]. A definição (103) é, portanto, plenamente satisfatória. Usando (103), podemos obter o tensor de energia-momento para campos em espaços curvos e com spin arbitrário.

3.2.2 Um modelo lagrangiano para a energia escura em interação com a matéria escura

Apresentaremos agora o modelo que estamos considerando. Neste modelo, como dissemos acima, a energia escura é constituída por um campo escalar taquiônico, enquanto a matéria escura é formada por férmions. A densidade de lagrangiana do modelo é dada por

$$\mathcal{L}_M(x) = \sqrt{-g} \left\{ -V(\varphi) \sqrt{1 - \alpha \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi} + \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu \Psi] - (M - \beta \varphi) \bar{\Psi} \Psi \right\},$$

¹¹ A derivada covariante "total" do campo da tetrada é zero: $\nabla_\mu V_{\beta\nu} = \tilde{\nabla}_\mu V_{\beta\nu} + \omega_{\mu\beta}^\eta V_{\eta\nu} = 0$, onde $\omega_{\mu\beta}^\eta$ é a chamada conexão de spin.

onde α é uma constante com dimensão MeV^{-4} , β é a constante de acoplamento, adimensional e $V(\varphi)$ é o potencial dos táquions. As matrizes γ^μ são as contrapartes das matrizes de Dirac no espaço curvo, e se relacionam com γ^α através da téttrada, $\gamma^\mu = V_\alpha^\mu \gamma^\alpha$. Usando o fato de que $g_{\mu\nu}(x) = V_\mu^\alpha(x)V_\nu^\beta(x)\eta_{\alpha\beta}$, é fácil verificar que as matrizes γ^μ obedecem à relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}(x) .$$

A ação da matéria será, então

$$S_M = \int dx^4 \mathcal{L}_M(x) ,$$

com a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_M(x)$ dada acima. O fator $\sqrt{-g}$, introduzido em $\mathcal{L}_M(x)$, serve para torná-la uma densidade escalar e, portanto, para fazer com que a ação S_M seja um escalar. Efetuando a variação de S_M com relação ao campo $\bar{\Psi}$, obtemos a equação de movimento para o campo de Dirac Ψ ,

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - M^* \Psi = 0 , \quad (104)$$

onde $M^* \equiv M - \beta\varphi$. Do mesmo modo, variando S_M com respeito a Ψ , obtemos a equação para o campo de Dirac adjunto $\bar{\Psi}$,

$$i(\nabla_\mu \bar{\Psi})\gamma^\mu + M^* \bar{\Psi} = 0 . \quad (105)$$

As equações acima são as equações de Dirac e sua adjunta, generalizadas para um espaço-tempo com curvatura, e com uma interação do campo de Dirac com o campo dos táquions φ . Na derivação dessas duas equações, foi usada a identidade $\tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu = [\gamma_\mu, \Gamma_\nu]$, que por sua vez pode ser verificada usando a relação de anticomutação satisfeita pelas matrizes de Dirac. Note que as equações com interação acima poderiam ter sido obtidas das respectivas equações livres via substituição mínima, $M \rightarrow M - \beta\varphi$. Usando essas equações, podemos mostrar que a corrente $j^\mu(x) = \sqrt{-g}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ se conserva, ou seja, que

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 . \quad (106)$$

Variando S_M com respeito a φ , obtemos a equação de movimento para esse campo:

$$\nabla_\mu \partial^\mu \varphi + \alpha \frac{\partial^\mu \varphi (\nabla_\mu \partial_\sigma \varphi) \partial^\sigma \varphi}{1 - \alpha \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi} + \frac{1}{\alpha} \frac{d \ln V(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\beta \bar{\Psi} \Psi}{\alpha V(\varphi)} \sqrt{1 - \alpha \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi} . \quad (107)$$

Usando (103), podemos calcular o tensor de energia-momento para o modelo sob consideração. Obtemos

$$T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}^{\varphi}(x) + T_{\mu\nu}^{\Psi}(x) , \quad (108)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{\varphi}(x) = V(\varphi) \left[\frac{\alpha \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi}{\sqrt{1 - \alpha \partial^{\sigma} \varphi \partial_{\sigma} \varphi}} + g_{\mu\nu}(x) \sqrt{1 - \alpha \partial^{\sigma} \varphi \partial_{\sigma} \varphi} \right]$$

e

$$T_{\mu\nu}^{\Psi}(x) = \frac{i}{4} \left[\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \nabla_{\nu} \Psi + \bar{\Psi} \gamma_{\nu} \nabla_{\mu} \Psi - (\nabla_{\mu} \bar{\Psi}) \gamma_{\nu} \Psi - (\nabla_{\nu} \bar{\Psi}) \gamma_{\mu} \Psi \right] .$$

Na derivação do tensor de energia-momento acima, foram usadas as equações de movimento (no Apêndice A, é apresentada a derivação de $T_{\mu\nu}^{\Psi}(x)$).

Por outro lado, admitindo que o universo em grandes escalas pode ser considerado um fluido, podemos identificar o tensor de energia-momento (108) com o de um fluido ideal,

$$T^{\mu}_{\nu}(x) = (P + \rho) U^{\mu} U_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} P ,$$

onde P e ρ são a pressão e a densidade de energia do fluido, respectivamente, e U^{μ} é a quadrivelocidade. Num sistema de referência que se move com a velocidade do fluido na posição x , temos $U^{\mu} = (1/\sqrt{g_{00}}, 0, 0, 0)$, o que segue do fato de que $U^{\mu} U_{\mu} = 1$, por definição. Da expressão acima, temos que

$$\rho = T^0_0 ,$$

e

$$P = -\frac{1}{3} T^j_j ,$$

A partir de $T_{\mu\nu}^{\varphi}(x)$, obtemos

$$\rho^{\varphi} = \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1 - \alpha \partial^{\sigma} \varphi \partial_{\sigma} \varphi}} (1 - \alpha \partial^j \varphi \partial_j \varphi)$$

e

$$P^{\varphi} = -\frac{V(\varphi)}{3} \frac{\alpha \partial^j \varphi \partial_j \varphi}{\sqrt{1 - \alpha \partial^{\sigma} \varphi \partial_{\sigma} \varphi}} - V(\varphi) \sqrt{1 - \alpha \partial^{\sigma} \varphi \partial_{\sigma} \varphi} .$$

A partir de $T_{\mu\nu}^{\Psi}(x)$, obtemos

$$\rho^\Psi = M^* \bar{\Psi} \Psi + \frac{i}{2} [(\nabla^j \bar{\Psi}) \gamma_j \Psi - \bar{\Psi} \gamma^j \nabla_j \Psi]$$

e

$$P^\Psi = \frac{i}{6} [(\nabla^j \bar{\Psi}) \gamma_j \Psi - \bar{\Psi} \gamma^j \nabla_j \Psi] .$$

Note-se que, se $M^* = 0$, obtemos a equação de estado de um gás ideal no limite ultra-relativístico, $P^\Psi = \frac{\rho^\Psi}{3}$.

Adotando a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a(t)^2, -a(t)^2, -a(t)^2)$, onde $a(t)$ é o fator de escala, e supondo que os campos sejam homogêneos, então $\partial_j \varphi = 0$, $\partial_j \Psi = \partial_j \bar{\Psi} = 0$ e $\nabla_j \bar{\Psi} \gamma^j \Psi - \bar{\Psi} \gamma^j \nabla_j \Psi = 0$. Com isso, as expressões para densidade de energia e pressão dos táquions e dos férmions se tornam, respectivamente,

$$\rho^\varphi = \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1 - \alpha \dot{\varphi}^2}} , \quad (109)$$

$$P^\varphi = -V(\varphi) \sqrt{1 - \alpha \dot{\varphi}^2} , \quad (110)$$

$$\rho^\Psi = M^* \bar{\Psi} \Psi \quad (111)$$

e

$$P^\Psi = 0 . \quad (112)$$

Note-se que $\omega^\varphi \equiv P^\varphi / \rho^\varphi = -(1 - \alpha \dot{\varphi}^2)$.

A equação de movimento dos táquions, (107), se reduz a

$$\ddot{\varphi} = -(1 - \alpha \dot{\varphi}^2) \left[\frac{1}{\alpha} \frac{d \ln V(\varphi)}{d\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\beta \bar{\Psi} \Psi}{\alpha V(\varphi)} \sqrt{1 - \alpha \dot{\varphi}^2} \right] , \quad (113)$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$. A lei de conservação (106) se reduz a

$$\frac{d(a^3 \Psi^\dagger \Psi)}{dt} = 0 .$$

Derivando (109) e (111) em relação ao tempo e usando as equações de movimento, obtemos

$$\dot{\rho}^\varphi + 3H\rho^\varphi(\omega^\varphi + 1) = \beta \dot{\varphi} \bar{\Psi} \Psi \quad (114)$$

e

$$\dot{\rho}^\Psi + 3H\rho^\Psi = -\beta \dot{\varphi} \bar{\Psi} \Psi . \quad (115)$$

As equações acima expressam a conservação de energia para o sistema de fluidos interagentes. Somando-as, obtemos

$$\dot{\rho}^\varphi + \dot{\rho}^\Psi + 3H[\rho^\varphi(\omega^\varphi + 1) + \rho^\Psi] = 0 ,$$

a qual equivale à equação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, para um fluido homogêneo composto de férmions e táquions, e num espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker. Usando (111), podemos reescrever (115) numa forma mais simples,

$$\frac{d(a^3\bar{\Psi}\Psi)}{dt} = 0 . \quad (116)$$

A equação de movimento dos táquions, (113), as expressões da densidade de energia e da pressão dos táquions, (109) e (110), e a equação de conservação (114), com $\beta = 0$, já foram obtidas em diversas referências onde a energia escura é modelada como um gás de táquions, como por exemplo em [68] - [75].

Finalmente, a equação de Friedmann para esse modelo será

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[M^* \bar{\Psi}\Psi + \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1 - \alpha\dot{\varphi}^2}} \right] . \quad (117)$$

Escolhemos um potencial do tipo lei de potência para os táquions,

$$V(\varphi) = \frac{m^{4+n}}{\varphi^n} , n > 0 . \quad (118)$$

De acordo com [68] e [72], o caso $n = 2$ produz uma solução para o fator de escala $a(t)$ do tipo lei de potência na era de domínio da energia escura, e corresponde a uma energia escura se comportando como matéria escura, na era em que a matéria escura domina. Escolhemos então, inicialmente, $n = 2$. Depois, analisamos também os casos $n = 1$ e $n = 3$, cujos resultados não diferiram qualitativamente do caso $n = 2$, conforme discutiremos no capítulo 5.

4 Análise de dados

Neste capítulo, apresentamos os métodos utilizados para se obter estimativas dos parâmetros teóricos, com intervalos de incerteza, a partir de dados observacionais.

4.1 Método de máxima verossimilhança

Consideremos uma determinada quantidade física com um valor verdadeiro y_0 que queremos estimar através de um processo de medida qualquer. Naturalmente, o valor verdadeiro y_0 é impossível de se conhecer exatamente, devido às inúmeras fontes de incerteza que afetam a medida. Consideremos que essas incertezas sejam representadas por uma quantidade que denotaremos por σ . Então a probabilidade de em um processo de medida, cujas incertezas são representadas por σ , obtermos uma estimativa y de y_0 , contida em um intervalo Δy ao redor de y_0 , é dada por

$$P = \int_{y_1}^{y_2} pdf(y|y_0)dy ,$$

onde $pdf(y|y_0)$ é a chamada *função densidade de probabilidade* (*probability density function*) de y e nos diz como os resultados y_i de diversas medidas, realizadas mediante o mesmo processo, se distribuirão em torno do valor verdadeiro y_0 , dado que as incertezas inerentes ao processo de medida são representadas por σ . De fato, σ especifica um intervalo em torno de y_0 , no qual o resultado y de uma medida tem uma determinada probabilidade de estar contido. Frequentemente, σ é a metade do intervalo dentro do qual temos aproximadamente 68,3% de probabilidade de obtermos o resultado y de uma medida. Observe que, pela definição acima, a probabilidade de obtermos como resultado de uma medida um valor y que coincida exatamente com o valor verdadeiro y_0 é zero. Se o intervalo Δy for pequeno, então a probabilidade pode ser aproximada como $P \simeq pdf(y|y_0)\Delta y$. A pdf depende das características das fontes de incerteza e também da própria quantidade que está sendo medida. Em cosmologia costuma-se aproximar a pdf dos dados como sendo gaussiana, mesmo quando sabe-se que cada dado observacional em si não foi tirado de uma distribuição gaussiana. Isso pode ser feito graças ao *teorema do limite central*. Esse teorema estabelece que, dado um conjunto de N variáveis aleatórias, cada uma com uma dada pdf (não necessariamente

gaussiana) com variância finita, a pdf da média dessas variáveis tenderá à gaussiana, quando $N \rightarrow \infty$ [84] - [86].

Consideremos, agora, que a quantidade y varie em função de uma outra quantidade x , e que queremos estimar os valores de y correspondentes a N valores de x , x_i , $i = 1, \dots, N$. Denotemos os valores verdadeiros de y como y_{0i} . Temos então a seguinte questão: dado que os valores verdadeiros de y são y_{0i} , qual é a probabilidade de obtermos dados y_i , caindo dentro de intervalos Δy_i em torno dos respectivos valores verdadeiros y_{0i} ? Supondo que os dados y_i sejam independentes (não correlacionados) e considerando Δy_i pequenos e todos iguais, temos, a partir da definição acima, que essa probabilidade será dada por

$$P(y_i|y_{0i}) \simeq (\Delta y)^N \prod_{i=1}^N pdf(y_i|y_{0i}) \equiv (\Delta y)^N \mathcal{L}(y_i|y_{0i}) .$$

Na expressão acima $\mathcal{L}(y_i|y_{0i}) \equiv \prod_{i=1}^N pdf(y_i|y_{0i})$ é a chamada *função verossimilhança*. A função verossimilhança $\mathcal{L}(y_i|y_{0i})$ nos dá, a menos de um fator constante, a probabilidade de obtermos as estimativas y_i , dado que os correspondentes valores verdadeiros são y_{0i} . No caso de os dados serem correlacionados, $\mathcal{L}(y_i|y_{0i})$ não será mais dada meramente pelo produto das pdf de cada dado, mas sua interpretação estatística será a mesma.

Como já dissemos acima, o valor verdadeiro de uma grandeza física não pode ser determinado exatamente, portanto, a função verossimilhança, como está definida acima, não pode ser calculada. Uma maneira de contornar esse problema é substituir os valores verdadeiros y_{0i} por estimativas teóricas $y(\vec{p})$, obtidas a partir de um determinado modelo escolhido, sendo que $\vec{p} \equiv (p_1, \dots, p_n)$ denota o conjunto de parâmetros dos quais depende a quantidade y , no particular modelo que escolhemos. Desse modo, a função verossimilhança nos dá agora a probabilidade de obtermos um conjunto de medidas y_i , correspondentes aos valores x_i da variável independente, dado que os parâmetros teóricos são $\vec{p}$.

No entanto, a pergunta que queremos responder é: dado que temos um conjunto de medidas y_i , correspondentes aos valores x_i da variável independente, qual é a probabilidade de os parâmetros teóricos serem $\vec{p}$? Podemos relacionar essa probabilidade com a função verossimilhança, aplicando o teorema de Bayes: a probabilidade de ocorrência de um evento B, dado que um evento A ocorreu, $P(B|A, I)$, é dada por

$$P(B|A, I) = \frac{P(A|B, I)P(B|I)}{P(A|I)} .$$

A letra “I” indica que as probabilidades são condicionais em alguma informação I que tomamos como verdadeira. Tomando $B \equiv \vec{p}$, $A \equiv y_i$ e sendo I fornecida pelo modelo teórico por nós escolhido, temos

$$P(\vec{p}|y_i, M) = \frac{\mathcal{L}(y_i|\vec{p})P(\vec{p}|M)}{P(y_i|M)} . \quad (119)$$

Na expressão acima, a letra M indica que as probabilidades são condicionais no modelo escolhido. Note que omitimos a constante multiplicativa que aparece na definição da função verossimilhança. $P(\vec{p}|y_i, M)$ é a chamada distribuição de probabilidade *posterior*; $P(y_i|M)$, as vezes chamada de *evidência bayesiana* [87], é fixada via normalização e $P(\vec{p}|M)$ é chamada de *prior probability*, e representa o nosso grau de conhecimento em relação aos parâmetros $\vec{p}$, *antes* de olharmos os dados. Como normalmente não sabemos nada a respeito dos parâmetros que queremos estimar, uma escolha comum para a prior é uma distribuição de probabilidade uniforme, dentro de um certo intervalo, e zero fora desse intervalo. Existem, no entanto, outras escolhas frequentes para a prior, como a prior gaussiana, que pode ser usada quando, por exemplo, estamos estimando um parâmetro p_j que já possui estimativas prévias baseadas em outros conjuntos de dados ou outros modelos teóricos [87]. Em geral, se os dados fornecerem vínculos suficientemente fortes sobre os parâmetros, a distribuição posterior não dependerá da escolha da prior, ou seja, as estimativas dos parâmetros e respectivos intervalos de incerteza não dependerão da prior escolhida.

A expressão acima nos fornece a probabilidade de os parâmetros teóricos corretos serem $\vec{p}$, uma vez que os dados são y_i e que adotamos um dado modelo teórico M . Naturalmente, teremos diferentes probabilidades para diferentes valores dos parâmetros teóricos $\vec{p}$. O chamado *método de máxima probabilidade* ou *de máxima verossimilhança* consiste em encontrar o conjunto $\vec{p}_{mp}$ que maximiza a probabilidade dada por (119). O conjunto $\vec{p}_{mp}$ constitui o chamado *melhor ajuste global*. No entanto, a melhor estimativa para um dado parâmetro do modelo é o chamado *melhor ajuste individual*, que corresponde ao pico da distribuição de probabilidade para o respectivo parâmetro. A distribuição de probabilidade para um parâmetro p_j do modelo, $P(p_j)$, é determinada integrando (marginalizando) (119) sobre

os demais parâmetros:

$$P(p_j) = \int \dots \int P(\vec{p} \mid y_i, M) dp_1 \dots dp_{j-1} dp_{j+1} \dots dp_N . \quad (120)$$

Os intervalos de incerteza correspondentes a 1σ , 2σ e 3σ para o parâmetro p_j são os limites inferior e superior dos menores intervalos de integração possíveis que correspondem a 68,26%, 95,44% e 99,73%, respectivamente. Mais explicitamente, o intervalo de 1σ , por exemplo, é obtido determinando-se os limites de integração $p_{j\text{ inf}}$ e $p_{j\text{ sup}}$, tais que

$$\int_{p_{j\text{ inf}}}^{p_{j\text{ sup}}} P_N(p_j) dp_j = 0.6826 , \quad (121)$$

onde $P_N(p_j)$ é a distribuição de probabilidade normalizada de p_j . Além disso, o intervalo $[p_{j\text{ inf}}, p_{j\text{ sup}}]$ deve ser o menor possível. Os intervalos de 2σ e de 3σ são determinados de maneira análoga. Quando não há degenerescência entre os parâmetros, o conjunto formado pelos melhores ajustes individuais coincide com o conjunto formado pelo melhor ajuste global.

Um caso importante é quando a pdf dos dados é gaussiana e os dados são independentes (não covariantes). Nesse caso, temos $pdf(y_i|y_{0i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - y_{0i}}{\sigma_i}\right)^2\right]$ e a função verossimilhança será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_i|y_{0i}) &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - y_{0i}}{\sigma_i}\right)^2\right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \left(\frac{y_j - y_{0j}}{\sigma_j}\right)^2\right] . \end{aligned} \quad (122)$$

Nesse caso, maximizar (119) é equivalente a minimizar o expoente da expressão acima, $\chi^2 \equiv \sum_{j=1}^N \left(\frac{y_j - y_{0j}}{\sigma_j}\right)^2$. Quando encontramos o melhor ajuste global minimizando χ^2 , estamos empregando o chamado *método dos mínimos quadrados*. Esse método é, portanto, um importante caso particular do método de máxima verossimilhança¹².

¹²É possível mostrar que, quando a função teórica que queremos ajustar for linear nos parâmetros, mesmo que a pdf dos dados não seja gaussiana, ainda poderemos empregar o método dos mínimos quadrados para obter a melhor estimativa dos parâmetros teóricos [86].

Para dados como os de supernovas e idades de galáxias vermelhas (look-back time), a função verossimilhança é dada pela expressão (122). Para os dados do WMAP, a função verossimilhança é algo mais complicada:

$$\mathcal{L}(y_i|\vec{p}) \propto \frac{1}{\sqrt{\det C}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta^T C^{-1} \Delta \right\} , \quad (123)$$

onde Δ é o vetor dos dados, no caso as anisotropias na temperatura e C é a matriz de covariância, que é dada por $C = S + N$, sendo N a contribuição das fontes de ruído e S a contribuição do sinal. Mais especificamente, esse vetor pode ser representado de duas maneiras: na base dos pixels, cada elemento do vetor representa a flutuação de temperatura num determinado pixel; na base dos harmônicos esféricos, os dados são os coeficientes da expansão do mapa de anisotropias de temperatura em harmônicos esféricos, a_{lm} .

Na base dos pixels, N é aproximadamente diagonal e S é dada por [88]

$$S_{mn} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l(\vec{p}) W_l P_l(\hat{n}_n \cdot \hat{n}_m) ,$$

onde os $C_l(\vec{p})$ são os coeficientes teóricos do espectro de temperatura, W_l é a *função janela* (*window function*) e $P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}')$ é um polinômio de Legendre. A função janela depende apenas do experimento, e contém informação sobre a forma do feixe e sobre o ângulo de corte da observação.

Na base dos harmônicos esféricos, S é diagonal e dada por $S = \text{diag}(C_0, C_1, C_1, C_1, \dots)$, onde os C_l se relacionam com os a_{lm} por $C_l = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{|a_{lm}|^2}{2l+1}$ (para mais detalhes, ver o Apêndice A de [89] ou o Apêndice C de [47]).

É comum em cosmologia querermos inferir o conjunto $\vec{p}$ de parâmetros teóricos a partir de mais de um conjunto de dados. Nesse caso, a função verossimilhança a ser maximizada é dada pelo produto das funções verossimilhança de cada conjunto individual de dados, ou seja,

$$\mathcal{L} = \prod_j \mathcal{L}_j , \quad (124)$$

onde $\mathcal{L}_j$ é a função verossimilhança do j -ésimo conjunto de dados.

Finalmente, podemos também querer inferir o valor de uma grandeza derivada, que é função de dois ou mais dos parâmetros teóricos $\vec{p}$ estimados a

partir dos dados. Denotando por g essa grandeza e por $\{p_j\}$ o subconjunto de parâmetros dos quais g é função, a distribuição de probabilidade de $g(\{p_j\})$, calculada num determinado valor $g(\{p_j\}) = g'$, será dada por

$$P(g') = \int \cdots \int \delta(g(p_j) - g') P(\{p_j\}) d\{p_j\} , \quad (125)$$

onde $P(\{p_j\})$ é a distribuição de probabilidade dos parâmetros $\{p_j\}$, obtida marginalizando-se (119) sobre os demais parâmetros e $d\{p_j\}$ indica que a integração múltipla é sobre todos os parâmetros do subconjunto $\{p_j\}$.

4.2 Regiões de confiança

Podemos querer calcular regiões de confiança para um subconjunto contendo ν dos n parâmetros do modelo. Para $\nu = 1$, se a distribuição for gaussiana, e quisermos determinar, por exemplo, o intervalo para o qual é de 68,26% a probabilidade de estar contido o valor verdadeiro do parâmetro p , basta encontrarmos os valores $p_{\min}^{(1\sigma)}$ e $p_{\max}^{(1\sigma)}$ para os quais $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 1$. Note que, nesses pontos $p_{\min}^{(1\sigma)}$ e $p_{\max}^{(1\sigma)}$ onde χ^2 aumenta de uma unidade em relação a $\chi_{\min}^2$, a pdf se reduz a $e^{-0.5}$ de seu valor máximo, ou seja, $p_{\min}^{(1\sigma)}$ e $p_{\max}^{(1\sigma)}$ delimitam o intervalo de 1σ . Os intervalos de 2σ e 3σ , para os quais temos 95,44% e 99,73% de probabilidade, respectivamente, de encontrarmos o valor verdadeiro de p , são determinados por $p_{\min}^{(2\sigma)}$ e $p_{\max}^{(2\sigma)}$ e $p_{\min}^{(3\sigma)}$ e $p_{\max}^{(3\sigma)}$ para os quais temos $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 4$ e $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 9$, respectivamente. No caso de querermos determinar as regiões de confiança para um subconjunto maior de parâmetros ($\nu > 1$), se a distribuição total $P(\vec{p} | y_i, M)$ for gaussiana, a função teórica for linear nos parâmetros, os parâmetros forem não degenerados e esses não afetarem a covariância entre os dados, podemos também determinar regiões de confiança de 68,26%, 95,44% e 99,73%, aumentando $\chi_{\min}^2$ por uma quantidade $\Delta\chi^2$ [85] [90]. Por exemplo, para $\nu = 2$, temos $\Delta\chi^2 = 2.30$ para 68,26%, $\Delta\chi^2 = 6.17$ para 95,44% e $\Delta\chi^2 = 11.8$ para 99,73%. Por outro lado, ainda para $\nu = 2$, se construirmos regiões de confiança definidas por $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 1$, $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 4$ e $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 9$, as projeções dessas regiões num determinado eixo corresponderão aos intervalos de 1σ , 2σ e 3σ , respectivamente, para o parâmetro representado nesse eixo [90].

No caso de a função teórica ser não linear nos parâmetros, as regiões bidimensionais definidas por $\Delta\chi^2 = 2.30$, $\Delta\chi^2 = 6.17$ e $\Delta\chi^2 = 11.8$ não mais corresponderão a 68,26%, 95,44% e 99,73% de probabilidade. No entanto, ao

se construir essas regiões de confiança, geralmente o objetivo é avaliar eventuais degenerescências entre os parâmetros, ou avaliar o quanto a inclusão de um determinado conjunto de dados na análise ajuda a restringir os parâmetros. Para essas finalidades, não é necessário que as regiões bidimensionais correspondam exatamente a 68,26%, 95,44% e 99,73% de probabilidade. Assim sendo, o critério acima descrito para construir as regiões bidimensionais é amplamente empregado, como aproximação.

5 Resultados e conclusões

5.1 Modelo fenomenológico

O modelo holográfico interagente foi comparado com dados do 1º ano do WMAP, especificamente para a região de baixos multipolos do espectro de anisotropias de temperatura. Para esse modelo, foram considerados como parâmetros livres somente o parâmetro de corte c e a constante de acoplamento b^2 . Para os demais parâmetros, como a densidade relativa de energia escura, $\Omega_{\Lambda 0}$, e o parâmetro de Hubble, H_0 , foram adotados valores estimados em outros trabalhos. Esse trabalho foi realizado em duas etapas, sendo que, na primeira, foram feitas apenas estimativas do parâmetro c , sem considerar a interação, usando duas parametrizações distintas para a equação de estado da energia escura. Na segunda, a partir das estimativas de c feitas na 1ª etapa, obtivemos estimativas para a constante de acoplamento b^2 . Descreveremos, a seguir, os detalhes dessas duas etapas. Os resultados que serão apresentados foram publicados em [53].

5.1.1 1ª Etapa

Nessa primeira etapa, estudamos o efeito, sobre a região de baixos multipolos do espectro de potências angular de temperatura da RCF, de adotarmos um corte nos números de onda, ou seja, calculamos o espectro teórico de anisotropias usando a expressão (102), com k_c dado por (101). Para isso, como já dito no capítulo 3, usamos uma versão modificada do CMBFAST 4.5.1 [43]. Adotamos duas parametrizações de ω com o redshift:

$$\omega^{(I)}(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{z+1}$$

e

$$\omega^{(II)}(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{(z+1)^2} .$$

Em princípio, o procedimento para se determinar os parâmetros cosmológicos para um desses modelos, por exemplo, para universo com ω variando de acordo com a parametrização I , deveria ser, conforme o descrito no capítulo 4, encontrar o máximo da função verossimilhança para esse modelo teórico, $\mathcal{L}(c, \Omega_{\Lambda}, \Omega_b, H_0, n, \frac{dn}{dlnk}, \tau, \omega_0, \omega_1, A)$. Para isso, teríamos que calcular $\mathcal{L}$ para um número suficientemente grande de pontos no espaço de dez

parâmetros e em seguida encontrar o máximo de $\mathcal{L}$. Para obtermos as incertezas em c , precisaríamos primeiro calcular $P(c)$ de acordo com (120). No entanto, é possível fazer uma importante aproximação.

O parâmetro de corte c afeta somente a região de baixos multipolos, tipicamente, a região correspondente a $l < 10$, o que compreende 1% do espectro (o espectro observacional vai até $l \approx 1000$). Assim sendo, os valores dos demais parâmetros do modelo não podem depender significativamente do valor de c , ou, em outras palavras, as degenerescências de c com cada um dos demais parâmetros cosmológicos deve ser desprezível. Nesse caso podemos escrever que

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(c, \Omega_\Lambda, \Omega_b, H_0, n, \frac{dn}{dlnk}, \tau, \omega_0, \omega_1, A) \\ & \simeq \mathcal{L}(c) \cdot \mathcal{L}(\Omega_\Lambda, \Omega_b, H_0, n, \frac{dn}{dlnk}, \tau, \omega_0, \omega_1, A) . \end{aligned}$$

Dessa maneira, a marginalização (120) produziria apenas uma constante multiplicativa, a qual seria absorvida na constante de normalização de $P(c)$. Assim, podemos manter fixos os demais parâmetros, o que nos leva a

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(c, \bar{\Omega}_\Lambda, \bar{\Omega}_b, \bar{H}_0, \bar{n}, \frac{\bar{dn}}{dlnk}, \bar{\tau}, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{A}) \\ & \simeq \mathcal{L}(c) \cdot \mathcal{L}(\bar{\Omega}_\Lambda, \bar{\Omega}_b, \bar{H}_0, \bar{n}, \frac{\bar{dn}}{dlnk}, \bar{\tau}, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{A}) \equiv \mathcal{L}(c) \times cte \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{L}(c) \simeq \frac{\mathcal{L}(c, \bar{\Omega}_\Lambda, \bar{\Omega}_b, \bar{H}_0, \bar{n}, \frac{\bar{dn}}{dlnk}, \bar{\tau}, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{A})}{cte} . \quad (126)$$

A constante acima pode ser absorvida na constante de normalização de $P(c)$. Neste trabalho, o que se fez então foi adotar valores dos demais parâmetros cosmológicos já determinados em outros trabalhos e, mantendo fixos esses valores, calcular a função verossimilhança de $1/c$, $\mathcal{L}(1/c)$, via equação (126) (foi usado $1/c$, ao invés de c por razões de precisão numérica e de normalizabilidade da função verossimilhança). Então, para cada uma das duas parametrizações de ω , calculou-se o ponto de máximo de $\mathcal{L}(1/c)$ e, através de (121), foram determinados os intervalos de incerteza em $1/c$.

Para a parametrização I , foram usados os parâmetros apresentados em [38], os quais são reproduzidos na tabela 1 e foram obtidos a partir dos dados do WMAP, 1º ano, de supernovas do tipo Ia e de formação de estrutura da SDSS.

Figura 2: distribuição de probabilidade de $1/c$ correspondente a equação de estado I

Tabela 1: parâmetros cosmológicos usados para universo plano com ω variando com z (parametrização I). h se relaciona com H_0 através da relação $H_0 = 2.133h \times 10^{-39} \text{ MeV}$.

Ω_Λ	$0.715^{+0.023+0.045+0.066}_{-0.024-0.047-0.070}$
$100\Omega_b h^2$	$2.33^{+0.10+0.20+0.32}_{-0.09-0.17-0.25} (*)$
A	0.837
n	$0.978^{+0.028+0.058+0.084}_{-0.022-0.041-0.059}$
h	$0.707^{+0.024+0.049+0.074}_{-0.023-0.046-0.066}$
τ (profundidade ótica da reionização)	$0.152^{+0.067+0.127+0.146}_{-0.056-0.101-0.136}$
ω_0	$-0.981^{+0.193+0.38+0.57}_{-0.193-0.37-0.52}$
ω_1	$-0.05^{+0.65+1.13+1.38}_{-0.83-1.92-2.88}$

* $\Omega_b = 0.0466$.

A distribuição de probabilidade de $1/c$ para a parametrização I é mostrada na figura (2). O valor obtido para $1/c$ com intervalos de incerteza de 68.26%, 95.44% e 99.73%, respectivamente, foi de

$$\frac{1}{c} = 0.56^{+0.12+0.28+0.41}_{-0.20-0.48-0.55} \text{ (eq. de estado } I\text{)}.$$

Para a parametrização II , foram usados os parâmetros apresentados em

[39], os quais são reproduzidos na tabela 2, e foram obtidos a partir dos dados do WMAP, 1º ano.

Tabela 2: parâmetros cosmológicos usados para universo plano com ω variando com z (parametrização *II*). Os intervalos de incerteza são de 95%, exceto para Ω_Λ , ω_0 e ω_1 , onde aparecem os intervalos de 68% e 95%. h se relaciona com H_0 através da relação $H_0 = 2.133h \times 10^{-39} \text{ MeV}$.

Ω_Λ	$0.76^{+0.03+0.60}_{-0.13-0.20}$
$\Omega_b h^2$	$0.0266^{+0.0004}_{-0.0066} (*)$
A	1.22
n	$1.1^{+0.0}_{-0.2}$
h	$0.73^{+0.05}_{-0.12}$
τ (profundidade ótica da reionização)	$0.35^{+0.04}_{-0.33}$
ω_0	$-1.48^{+0.78+1.05}_{-0.19-0.45}$
ω_1	$3.86^{+0.29+1.01}_{-4.6-6.36}$

* $\Omega_b = 0.05$.

A distribuição de probabilidade de $1/c$ para a parametrização *II* é mostrada na figura (3). O valor obtido para $1/c$ com intervalos de incerteza de 68.26%, 95.44% e 99.73%, respectivamente, foi de

$$\frac{1}{c} = 0.42^{+0.06+0.16+0.27}_{-0.24-0.39-0.42} \text{ (eq. de estado II)}.$$

Note que os dois valores de $1/c$ são compatíveis no nível 1σ .

5.1.2 2ª Etapa

Após a determinação dos valores de $1/c$ para as duas parametrizações da equação de estado da energia escura, conforme descrito acima, estimamos a constante de acoplamento do modelo de energia escura holográfica interagente, cuja equação de estado é dada por (100).

Novamente, para obtermos o valor de b^2 com as respectivas incertezas, deveríamos, em princípio, encontrar o ponto de máximo da função verossimilhança, $\mathcal{L}(b^2, 1/c, \Omega_\Lambda, \Omega_b, H_0, n, \frac{dn}{dlnk}, \tau, A)$. No entanto, é possível estimar b^2 a partir dos resultados da primeira etapa, levando-se em conta o fato de que a energia escura só é importante para a dinâmica da expansão do universo em baixos redshift. Dessa maneira, podemos aproximar ω por uma expansão

Figura 3: distribuição de probabilidade de $1/c$ correspondente a equação de estado II .

em série de Taylor até primeira ordem no fator de escala, $a = 1/(1+z)$,

$$\begin{aligned}
 \omega(a) &\simeq \omega(a=1) + \left. \frac{d\omega}{da} \right|_{a=1} (a-1) \\
 &= \omega(z=0) + \left. \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{da} \right|_{z=0} \left(-\frac{z}{1+z} \right) \\
 &\equiv \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z} .
 \end{aligned} \tag{127}$$

Substituindo (100) em (127), temos

$$-\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{\Omega_\Lambda(z)}}{3c} - \frac{b^2}{\Omega_\Lambda(z)} \simeq \omega_0^I + \omega_1^I \frac{z}{1+z} .$$

O segundo membro da equação acima é justamente a parametrização usada em [38], de onde foram extraídos os valores de ω_0 e ω_1 , os quais estão listados na tabela 1, juntamente com os demais parâmetros cosmológicos.

Podemos também aproximar (100) pela parametrização II , também válida em baixos redshift:

$$-\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{\Omega_\Lambda(z)}}{3c} - \frac{b^2}{\Omega_\Lambda(z)} \simeq \omega_0^{II} + \omega_1^{II} \frac{z}{(1+z)^2} .$$

No tempo de hoje ($z = 0$), as duas equações acima se reduzem a

$$-\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{\Omega_\Lambda(0)}}{3c} - \frac{b^2}{\Omega_\Lambda(0)} \simeq \omega_0 . \quad (128)$$

Isolando b^2 na expressão acima, obtemos

$$b^2 \simeq -\Omega_\Lambda(0) \left(\omega_0 + \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{\Omega_\Lambda(0)}}{3c} \right) . \quad (129)$$

Devemos aqui fazer uma observação. Os parâmetros $\Omega_\Lambda(0)$ e ω_0 , apresentados nas tabelas 1 e 2 para as equações de estado *I* e *II*, foram obtidos sem considerar a interação entre a matéria e a energia escuras, ou seja, tomando-se $Q = 0$ no segundo membro de (93) e de (94). No entanto, é ainda possível estimar b^2 a partir de (129), usando os parâmetros das tabelas 1 e 2, pois conforme é mostrado na figura (4), a interação só terá um efeito significativo na evolução de Ω_Λ e Ω_{me} apenas para valores do fator de escala a da ordem de 1 (ou, equivalentemente, para baixos redshift), de modo que os valores de Ω_Λ e ω_0 no tempo de hoje não devem ser muito afetados pela interação. b^2 foi então estimado pela expressão (129) e em seguida foram calculados os seus intervalos de incerteza. Para isso, naturalmente, foi preciso calcular a sua função de distribuição. Para isso, usamos a expressão (125),

$$\begin{aligned} P(b'^2) &= \int \int \int \delta[b^2(\Omega_\Lambda, \omega_0, 1/c) - b'^2] P(\Omega_\Lambda, \omega_0, 1/c) d\Omega_\Lambda d\omega_0 d(1/c) \\ &= \int \int \frac{P[\Omega_\Lambda, \omega_0(b'^2, \Omega_\Lambda, 1/c), 1/c]}{\Omega_\Lambda} d\Omega_\Lambda d(1/c) . \end{aligned}$$

Na expressão acima, a delta de Dirac foi usada para eliminar uma integração, e $\omega_0(b'^2, \Omega_\Lambda, 1/c)$ é dada por (128). De acordo com o que já discutimos acima, $\mathcal{L}[\Omega_\Lambda, \omega_0(b'^2, \Omega_\Lambda, 1/c), 1/c]$ fatora, portanto

$$P(b'^2) = \int P(1/c) \int \frac{P[\Omega_\Lambda, \omega_0(b'^2, \Omega_\Lambda, 1/c)]}{\Omega_\Lambda} d\Omega_\Lambda d(1/c) .$$

$\mathcal{L}(\Omega_\Lambda, \omega_0)$ em princípio não fatora, uma vez que a degenerescência entre Ω_Λ e ω_0 pode não ser desprezível. Podemos, no entanto, fazer uma importante aproximação.

Um teste numérico mostrou que, ao desprezarmos a degenerescência entre Ω_Λ e ω_0 , introduzimos um erro em $\mathcal{L}(\Omega_\Lambda, \omega_0)$ em torno de 20%. Assim, uma

Figura 4: evolução de Ω_Λ e de Ω_{me} em função do fator de escala a . As curvas sólidas (pretas) correspondem à parametrização I , as curvas tracejadas (vermelhas) correspondem ao modelo holográfico, com parâmetro de corte $c = 1$ e constante de acoplamento $b^2 = 0.1$ e as curvas pontilhadas (azuis) correspondem a $c = 1$ e $b^2 = 0.2$.

vez que $\mathcal{L}(\Omega_\Lambda, \omega_0)$ é estreita, o erro cometido nos intervalos de incerteza será pequeno. Então, fazendo a aproximação $\mathcal{L}(\Omega_\Lambda, \omega_0) \simeq \mathcal{L}(\Omega_\Lambda) \cdot \mathcal{L}(\omega_0)$, temos

$$P(b'^2) \simeq \int P(1/c) \int \frac{P(\Omega_\Lambda)}{\Omega_\Lambda} \cdot P[\omega_0(b'^2, \Omega_\Lambda, 1/c)] d\Omega_\Lambda d(1/c) .$$

A aproximação acima simplifica grandemente o cálculo da função de distribuição de b^2 . No caso da parametrização I , conforme podemos ver na tabela 1, as incertezas em Ω_Λ e ω_0 são aproximadamente simétricas, de modo que podemos aproximar as distribuições de probabilidade desses dois parâmetros como gaussianas. A distribuição de probabilidade de $1/c$ para a parametrização I foi obtida na 1ª etapa, descrita acima. A figura (5) mostra $P(b^2)$, obtida usando a parametrização I . A linha vertical mostra a posição de $b^2 = 0$. A probabilidade integrada de termos $b^2 > 0$ é de 95.5%.

Uma vez que conhecemos $P(b^2)$, podemos calcular os intervalos de incerteza em b^2 , usando (121). Para a parametrização I , o valor de b^2 , com

Figura 5: distribuição de probabilidade de b^2 , obtida aproximando (100) pela equação de estado I . A linha vertical mostra a posição de $b^2 = 0$.

os respectivos intervalos de incerteza de 68.26%, 95.44% e 99.73%, é dado abaixo:

$$b^2 = 0.25^{+0.16+0.32+0.48}_{-0.15-0.30-0.45} .$$

Podemos impor um vínculo adicional em b^2 , usando a condição expressa pela equação 8 de [91]:

$$b^2 < b_{max}^2 = \frac{1 - \Omega_\Lambda}{3} \left(1 + 2 \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda}}{c} \right) .$$

O vínculo acima serve para garantir que, no modelo de energia escura holográfica interagente, Ω_Λ será sempre crescente. Usando um procedimento inteiramente análogo ao que foi descrito acima para construir a distribuição de probabilidade de b^2 , construímos a distribuição de probabilidade de b_{max}^2 , $P(b_{max}^2)$, a qual está representada na figura (6).

Novamente, usando a equação (121), calculamos os intervalos de incerteza em b_{max}^2 , de 68.26%, 95.44% e 99.73%, respectivamente:

$$b_{max}^2 = 0.191^{+0.027+0.052+0.075}_{-0.022-0.047-0.075} .$$

Figura 6: distribuição de probabilidade de $b_{\max}^2$.

Combinando b^2 e $b_{\max}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} 0.10 &< b^2 < 0.22 & (1 \sigma) , \\ -0.05 &< b^2 < 0.24 & (2 \sigma) , \\ -0.20 &< b^2 < 0.27 & (3 \sigma) . \end{aligned}$$

Usando a parametrização *II*, obtivemos

$$b^2 = 0.7^{+0.1+0.5+0.8}_{-0.6-0.9-1.3}$$

e

$$b_{\max}^2 = 0.14^{+0.06+0.1+0.15}_{-0.03-0.08-0.12} .$$

Para essa parametrização, as informações contidas em [39] não permitiram construir com precisão as distribuições de probabilidade de b^2 e $b_{\max}^2$, por isso os intervalos de incerteza em b^2 e $b_{\max}^2$ para a equação de estado *II* tiveram um dígito a menos que para a equação de estado *I*. Combinando os vínculos acima, obtemos, para a equação de estado *II*,

$$\begin{aligned} 0.1 &< b^2 < 0.2 & (1 \sigma) , \\ -0.2 &< b^2 < 0.24 & (2 \sigma) , \\ -0.26 &< b^2 < 0.29 & (3 \sigma) . \end{aligned}$$

Note-se que os valores de b^2 obtidos com as duas equações de estado são compatíveis no nível 1σ . Uma vez que não conseguimos determinar com precisão a distribuição de probabilidade de b^2 usando a parametrização *II*, não calculamos a probabilidade de termos $b^2 > 0$, para esse caso.

Os vínculos obtidos aqui para b^2 concordam com os vínculos obtidos em [53] a partir da idade do universo, estimada pela equipe do WMAP, e também a partir da idade do quasar APM 0879+5255. Nessa mesma referência estão incluídos também os resultados apresentados acima.

Em [53], foi suposto que a idade do universo obtida com o modelo holográfico interagente não deve ser muito diferente da que seria obtida a partir de um universo Λ CDM. A figura (7) reproduz a figura (3a) de [53]. A faixa horizontal (em verde) representa o vínculo na idade do universo, segundo os dados do WMAP, 3º ano. As curvas teóricas foram obtidas para um universo plano, usando o modelo holográfico interagente, adotando parâmetro de corte $c = 1$ e constante de acoplamento $b^2 = 0$ (curva inferior, em vermelho), $b^2 = 0.01$ (curva do meio, em azul) e $b^2 = 0.068$ (curva superior, em preto). Desse modo, impondo que a idade do universo calculada com o modelo holográfico deve concordar com a estimativa feita pela equipe do WMAP, 3º ano, obteve-se que a constante de acoplamento deve estar contida no intervalo $0.01 < b^2 < 0.068$.

Por outro lado, a idade estimada do quasar APM 0879+5255, que está no redshift $z = 3.91$, é de $2.1Gyr$ [92]. A figura (8) reproduz a figura (4a) de [53]. A linha vertical (em verde), no canto direito da figura, representa a idade do quasar. As curvas teóricas correspondem a um universo plano, adotando parâmetro de corte $c = 1$ e valores da constante de acoplamento $b^2 = 0$ (curva inferior, em vermelho), $b^2 = 0.053$ (curva do meio, em azul) e $b^2 = 0.068$ (curva superior, em preto). Para que o universo seja suficientemente velho em $z = 3.91$ para acomodar o quasar APM 0879+5255, vemos, da figura, que devemos ter $b^2 > 0.053$.

Finalmente, ainda em [53] foi dado um argumento adicional em favor da interação, com base na formação de estruturas. Mais especificamente, começando com uma mesma flutuação inicial na densidade de matéria, essa irá crescer mais rapidamente no passado, quando $b^2 > 0$, em relação ao caso sem interação. Isso se explica pelo fato de que, quando $b^2 > 0$, temos energia escura se transformando em matéria escura, de modo que a aglomeração dessa será maior no passado. No entanto, a densidade de matéria escura irá se tornar comparável à de energia escura mais cedo, no caso interagente, de modo que as flutuações na densidade de matéria, embora tenham crescido

Figura 7: idade do universo em função do redshift, para o modelo holográfico, supondo um universo plano. As curvas foram obtidas adotando parâmetro de corte $c = 1$ e constante de acoplamento $b^2 = 0$ (curva inferior, vermelha), $b^2 = 0.01$ (curva do meio, azul) e $b^2 = 0.068$ (curva superior, preta). A faixa horizontal (em verde) representa o vínculo na idade do universo hoje, segundo os dados do 3º ano do WMAP (reprodução da figura (3a) de [53]).

mais rápido no passado, irão também decair mais rapidamente em tempos recentes, devido à pressão negativa da energia escura. Portanto, no caso com interação, teremos maior formação de estruturas no passado, embora terminemos com as mesmas estruturas observadas hoje. Tal comportamento é preferível em vista da existência do quasar APM 0879+5255.

Figura 8: idade do universo em função do redshift, para o modelo holográfico, supondo um universo plano. As curvas foram obtidas adotando parâmetro de corte $c = 1$ e constante de acoplamento $b^2 = 0$ (curva inferior, vermelha), $b^2 = 0.053$ (curva do meio, azul) e $b^2 = 0.068$ (curva superior, preta). A linha vertical (em verde) representa a idade do quasar APM 0879+5255 (reprodução da figura (4a) de [53]).

5.2 Modelo lagrangiano

O modelo de energia escura taquiônica interagente foi comparado com dados observacionais de 182 supernovas do tipo Ia, com o lookback time de 67 aglomerados de galáxias, com o parâmetro de deslocamento da RCF e com oscilações acústicas de bárions (BAO). Os resultados que apresentaremos aqui foram publicados em [93]. Antes de passarmos à discussão da comparação com dados observacionais, vamos apresentar as equações do modelo, na forma em que foram resolvidas numericamente. As equações (109) - (111) mostram que as densidades de energia e a equação de estado da energia escura dependem de φ e de a , de modo que basta conhecermos a evolução temporal dessas quantidades, dadas pelas soluções de (113) e (117), para termos a evolução temporal das densidades de energia e da equação de estado da energia escura. Podemos reescrever (113) como duas equações acopladas de 1ª ordem. Para isso, basta notar que $\dot{\phi} = \pm\sqrt{\omega + 1}$, onde definimos $\phi \equiv \sqrt{\alpha}\varphi$. Escolhendo o

sinal positivo¹³ e derivando ambos os membros em relação ao tempo, temos $\ddot{\phi} = \frac{1}{2\sqrt{\omega+1}}\dot{\omega}$. Adotando $V(\phi)$ na forma (118), com $n = 2$, (113) se torna

$$\dot{\omega} = -\frac{4\omega\sqrt{\omega+1}}{\phi} + 6H\omega(\omega+1) - \frac{2\beta\bar{\Psi}_0\Psi_0a_0^3}{\alpha\sqrt{\alpha}m^6} \frac{\omega\sqrt{|\omega|(\omega+1)}\phi^2}{a^3},$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\omega+1}.$$

Igualando os valores teóricos atuais de ρ_ϕ e ρ_Ψ , dados por (109) e (111), com os valores observacionais, $\rho_{\phi_0} = 3M_{pl}^2H_0^2(1 - \Omega_{\Psi_0})$ e $\rho_{\Psi_0} = 3M_{pl}^2H_0^2\Omega_{\Psi_0}$, podemos substituir $\bar{\Psi}_0\Psi_0$ e m por quantidades observáveis: $M\bar{\Psi}_0\Psi_0 = \frac{3M_{pl}^2H_0^2\Omega_{\Psi_0}}{1 - \frac{\beta}{M}\frac{\phi_0}{\sqrt{\alpha}}}$ e $\alpha m^6 = 3M_{pl}^2H_0^2(1 - \Omega_{\Psi_0})\phi_0^2\sqrt{|\omega_0|}$. Além disso, podemos usar o redshift z , ao invés de t , como variável independente, usando a relação $\frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}$, de modo que o sistema de equações do modelo se torna,

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{4\omega\sqrt{\omega+1}}{H_0E(z)\phi(1+z)} - \frac{6\omega(\omega+1)}{1+z} + \frac{2\left(\frac{\beta}{M}\right)\frac{\Omega_{\Psi_0}}{\sqrt{\alpha}}}{(1 - \Omega_{\Psi_0})(1 - \frac{\beta}{M}\frac{\phi_0}{\sqrt{\alpha}})} \frac{\omega\sqrt{|\frac{\omega}{\omega_0}|(\omega+1)}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2}{H_0E(z)}(1+z)^2, \quad (130)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = -\frac{\sqrt{\omega+1}}{H_0E(z)(1+z)} \quad (131)$$

e

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_0E(z)(1+z)}, \quad (132)$$

onde $H_0 = 2.133h \times 10^{-39} MeV$ é o valor atual do parâmetro de Hubble, $\Omega_{\Psi_0} = \frac{\rho_{\Psi_0}}{3M_{pl}^2H_0^2}$ e

$$E(z) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta}{M}\frac{\phi}{\sqrt{\alpha}}}{1 - \frac{\beta}{M}\frac{\phi_0}{\sqrt{\alpha}}}\Omega_{\Psi_0}(1+z)^3 + \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)^2\sqrt{|\frac{\omega_0}{\omega}|}(1 - \Omega_{\Psi_0})}. \quad (133)$$

Nas equações acima, o parâmetro α foi mantido fixo, com valor $\sqrt{\alpha} = 1.607 \times 10^{-39} MeV^{-2} \sim (H_0 \times MeV)^{-1}$. Esse valor de α foi escolhido para

¹³Essa escolha de sinal não é importante para as propriedades assintóticas do modelo [72] [73].

evitar que o último termo de (130) diferisse em muitas ordens de grandeza dos demais termos, inviabilizando a solução numérica dessa equação, pois $\phi_0 \sim H_0^{-1}$ [68] [73] - esse é, de fato, o ajuste fino do modelo, pois, para termos $\omega_0 \sim -1$, como $\dot{\phi} = \sqrt{\omega + 1}$, então $\phi_0 \sim t_0 \sim H_0^{-1}$. Aqui cabe enfatizar que adotar um valor fixo para α não representa uma perda de generalidade, pois olhando para (130) e (133), vemos que a quantidade que poderá de fato ser inferida dos dados observacionais é $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, ou seja, podemos absorver α e M numa redefinição de β . O conjunto de parâmetros a ser determinado a partir dos dados observacionais será, então, $(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0)$. Apresentaremos, abaixo, as definições das quantidades físicas cujas estimativas teóricas foram comparadas com os correspondentes valores observacionais, visando determinar esses parâmetros. Antes, porém, convém explicitar um limite teórico, envolvendo os parâmetros do modelo.

Sabemos que o modelo só está definido para $\omega > -1$. Se escolhermos, inicialmente, os demais parâmetros tais que $\frac{d\omega(z=0)}{dz} < 0$, então (130) só poderá ser integrada para todo $z > 0$ se, para algum z , houver um mínimo $\omega_{\min} > -1$, ou seja, se para algum z , tivermos $\frac{d\omega}{dz} = 0$. Assim, se inicialmente tivermos ω_0 muito próximo de -1 e $\frac{d\omega(z=0)}{dz} < 0$, teremos $\omega(z) \rightarrow -1$ para pequenos valores de z , de modo que a equação (130) poderá deixar de ter soluções reais a partir de um certo valor de z . Em outras palavras, $\omega_0 \rightarrow -1$ e $\frac{d\omega(z=0)}{dz} < 0$ constitui uma região de convergência difícil no espaço de parâmetros. Por outro lado, (130) sempre será integrável se $\frac{d\omega(z=0)}{dz} > 0$. Para o caso de $\beta = 0$, isso se traduz na condição

$$\phi_0 > \frac{2}{3H_0\sqrt{1+\omega_0}}. \quad (134)$$

Assim, se tivermos, por exemplo, $\omega_0 = -0.9$ e $h = 0.7$, (130) será sempre integrável se $\phi_0 H_0 > 2.1$. Para $\phi_0 H_0 < 2.1$, somente para algumas combinações de parâmetros (130) será integrável. Desse modo, espera-se que a distribuição de ϕ_0 se aproxime de zero, quando $\phi_0 < \frac{2}{3H_0\sqrt{1+\omega_0}}$. No caso de $\beta \neq 0$, esse limite em ϕ_0 será um pouco menor e β terá um limite superior, por uma razão análoga: valores positivos de β podem tornar $\frac{d\omega(z=0)}{dz} < 0$, de modo que a distribuição de β deve se aproximar de zero para valores pequenos e positivos de β . Voltaremos nesse ponto quando apresentarmos as distribuições marginalizadas de ϕ_0 e β .

Em [94] foi apresentado um método para se impor vínculos nos parâmetros de um modelo cosmológico, a partir de idades de aglomerados de galáxias em

conjunto com a idade do universo. Dado um objeto no redshift z_i , sua idade $t(z_i)$ é definida como a diferença entre a idade do universo em z_i e a idade do universo quando esse objeto nasceu, em z_F , ou seja

$$\begin{aligned} t(z_i) &= H_0^{-1} \left[\int_{z_i}^{\infty} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} - \int_{z_F}^{\infty} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \right] \\ &= H_0^{-1} \int_{z_i}^{z_F} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} = t_L(z_F) - t_L(z_i) , \end{aligned} \quad (135)$$

onde t_L denota o chamado *lookback time*, definido como a diferença entre a idade atual do universo e sua idade no redshift z , sendo dado por

$$t_L(z) = H_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z')} . \quad (136)$$

Usando (135), o lookback time $t_L^{obs}(z_i)$ de um determinado objeto no redshift z_i pode ser estimado como

$$\begin{aligned} t_L^{obs}(z_i) &= t_L(z_F) - t(z_i) = [t_0^{obs} - t(z_i)] - [t_0^{obs} - t_L(z_F)] \\ &= t_0^{obs} - t(z_i) - df , \end{aligned} \quad (137)$$

onde t_0^{obs} é a idade atual do universo e df é o chamado *delay factor*, definido como

$$df \equiv t_0^{obs} - t_L(z_F) ,$$

o qual aparece devido ao fato de não conhecermos o redshift z_F de formação do objeto considerado. Precisamos, então, calcular χ_{lbt}^2 , dado por

$$\chi_{lbt}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[t_L(z_i, \vec{p}) - t_L^{obs}(z_i)]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{t_0^{obs}}^2} ,$$

onde $\vec{p}$ denota os parâmetros do modelo teórico, $\sigma_{t_0^{obs}}$ é a incerteza na idade estimada do universo, $t_L(z_i, \vec{p})$ é o valor teórico do lookback time do objeto em z_i , $t_L^{obs}(z_i)$ é o correspondente valor observacional, dado por (137), e σ_i é a incerteza na idade estimada $t(z_i)$, que entra na expressão (137). O parâmetro df é considerado uma quantidade desconhecida, sendo ajustado juntamente com os parâmetros $\vec{p}$ do modelo teórico para minimizar χ_{lbt}^2 . Note, no entanto, que o lookback time teórico $t_L(z_i, \vec{p})$ não depende de df .

Em [95] e [96] foram apresentadas as idades de 35 e 32 galáxias vermelhas, respectivamente. Adotando, para a idade do universo, a estimativa

$t_0^{obs} = 13.73 \pm 0.12 \text{ Gyr}$ [42] e usando (137), obtemos $35 + 32 = 67$ dados de lookback time. Embora a estimativa usada para t_0^{obs} tenha sido feita ajustando-se o modelo ΛCDM aos dados observacionais, isso não introduz erro sistemático no ajuste, pois qualquer erro sistemático, eventualmente introduzido ao adotarmos uma estimativa dependente de modelo cosmológico para t_0 , seria compensado pelo ajuste de df , em (137). Por outro lado, essa estimativa está em perfeita concordância com outras estimativas, independentes de modelo cosmológico, como por exemplo, $t_0^{obs} = 12.6^{+3.4}_{-2.4} \text{ Gyr}$, obtida a partir da idade de aglomerados globulares [97] e $t_0^{obs} = 12.5 \pm 3.0 \text{ Gyr}$, obtida a partir de estudos de radioisótopos [98].

Incluimos também no conjunto de dados o chamado parâmetro de deslocamento da RCF, R , definido, para universos planos, como

$$R = \sqrt{\Omega_M} \int_0^{z_{ls}} \frac{dz'}{E(z')} , \quad (138)$$

onde $z_{ls} = 1089$ é o redshift da superfície do último espalhamento. O valor de R foi estimado em [99] a partir dos dados do 3º ano do WMAP como $R_{obs} = 1.70 \pm 0.03$ e, nessa mesma referência, mostra-se também que essa quantidade é pouco dependente do modelo cosmológico adotado. Adicionamos então ao χ^2 total o termo

$$\chi_{CMB}^2 = \frac{[R - R_{obs}]^2}{\sigma_R^2} .$$

Também foi incluído no conjunto de dados a medida das oscilações acústicas de bárions (BAO), feita pela equipe da SDSS [100], independente do modelo cosmológico, que é descrita pelo parâmetro

$$A = \sqrt{\Omega_M} E(z_{BAO})^{-1/3} \left[\frac{1}{z_{BAO}} \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz'}{E(z')} \right]^{2/3} , \quad (139)$$

onde $z_{BAO} = 0.35$. O valor estimado de A é dado por $A_{obs} = 0.469(\frac{n}{0.98})^{-0.35} \pm 0.017$, sendo $n = 0.95$ [47] o índice espectral escalar. Foi então adicionado ao χ^2 total o termo

$$\chi_{BAO}^2 = \frac{[A - A_{obs}]^2}{\sigma_A^2} .$$

Finalmente, foram incluídos os dados referentes a 182 supernovas do tipo Ia. Essa amostra inclui dados do 1º ano do programa SNLS (*Supernova*

Legacy Survey) [101], além de supernovas recentemente descobertas pela equipe do telescópio espacial Hubble e dados mais antigos e foi compilada por Riess *et. al.* [16]¹⁴. Esses dados fornecem a chamada *distância em módulo* das supernovas em função do redshift, $\mu(z)$, a qual é definida por (15), e pode ser reescrita em termos de $E(z)$ como

$$\mu(z) = 5\log_{10} \left[c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] + 25 - 5\log_{10} H_0 . \quad (140)$$

Para as supernovas, o χ^2 é dado por:

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{j=1}^{182} \frac{[\mu(z_j) - \mu_{obs}(z_j)]^2}{\sigma_j^2} .$$

Determinamos então o conjunto de parâmetros que minimiza o χ^2 total, dado por

$$\chi^2 = \chi_{SN}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_{CMB}^2 + \chi_{lbt}^2 + \frac{(h - h_{obs})^2}{\sigma_h^2} + \frac{(\Omega_\Psi - \Omega_{Mobs})^2}{\sigma_{\Omega_M}^2} , \quad (141)$$

onde os últimos termos correspondem a priors gaussianas, adotadas para h e Ω_Ψ , que foram incluídas visando reduzir degenerescências entre os parâmetros. Para h , usamos o resultado obtido pelo projeto HST Key [6]: $h_{obs} = 0.72 \pm 0.08$. Para Ω_Ψ , adotamos $\Omega_{Mobs} = 0.28 \pm 0.04$, uma estimativa apresentada em [16], e obtida a partir da combinação de diferentes medidas de $\Omega_M h$ e usando o valor de h do projeto HST Key. Escolhemos essas medidas como priors por serem independentes do modelo cosmológico.

Uma vez calculado χ^2 para um determinado ponto $\vec{p} = (\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0)$ no espaço de parâmetros, o valor da função verossimilhança correspondente a esse ponto será dada por

$$\mathcal{L} \left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0 \right) \propto \exp \left[-\frac{\chi^2(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0)}{2} \right] .$$

Para termos uma boa estimativa de $\mathcal{L} \left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0 \right)$, precisamos calcular essa função num número suficientemente grande de pontos e essa etapa

¹⁴Esses dados podem ser obtidos no endereço <http://braeburn.pha.jhu.edu/~ariess/R06/>.

consumiu um grande tempo de cálculo. No presente trabalho, variamos o espaço de parâmetros (variados os intervalos de prior dos parâmetros) e repetimos a análise de χ^2 em cada caso e isso não alterou os valores obtidos para os parâmetros do modelo. Para cada espaço de parâmetros usado, calculamos a função verossimilhança em mais de 7.5×10^6 pontos.

Uma vez determinada $\mathcal{L}\left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0\right)$, pudemos calcular os intervalos de incerteza em cada parâmetro, através de (120) e (121). Na tabela a seguir, apresentamos os valores obtidos para os parâmetros do modelo, juntamente com os respectivos intervalos de 1σ , 2σ e 3σ . Escrevemos ϕ_0 em unidades de H_0^{-1} e $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ em unidades de H_0 , onde $H_0 = 1.493 \times 10^{-39} \text{ MeV}$.

Tabela 3: Valores obtidos para os parâmetros do modelo taquiónico interagente, a partir da comparação com dados de lookback time, BAO, CMB e SNeIa.

h	$0.631 \pm 0.007 \pm 0.015 \pm 0.022$
Ω_{Ψ_0}	$0.324 \pm 0.017 \pm 0.033 \pm 0.050$
ω_0	$-0.979^{+0.049+0.201+0.267}_{-0.014-0.019-0.019}$
ϕ_0	$\phi_0 H_0 > 1.3 \text{ (} 2\sigma \text{)}$
$\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$	$\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}H_0} < 0.071 \text{ (} 2\sigma \text{)}$

Os valores obtidos para h e Ω_{Ψ} estão bastante razoáveis, compatíveis em 1σ com as medidas independentes de modelo que usamos como priors: $h_{obs} = 0.72 \pm 0.08$ (projeto HST Key) [6], e $\Omega_{Mobs} = 0.28 \pm 0.04$ [16]. h está também em excelente concordância com a estimativa que aparece em [95], também independente de modelo cosmológico, $h_{obs} = 0.69 \pm 0.12$. Além disso, esses valores de h e Ω_{Ψ} se mostraram independentes dos intervalos de prior. O valor obtido para ω_0 é um pouco dependente dos priors adotados para ϕ_0 e $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, conforme discutiremos mais detalhadamente mais adiante.

A figura (9) mostra a função verossimilhança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e as figuras (10) a (13) mostram as distribuições de probabilidade dos demais parâmetros. Juntamente com essas, são apresentadas também as distribuições para o caso sem interação (curvas vermelhas tracejadas). A função verossimilhança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ não vai a zero quando $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}} \rightarrow -\infty$. De fato, abaixo de um certo valor de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ a função verossimilhança assume um valor aproximadamente constante. Desse modo, essa não é normalizável, ou seja, tem integral infinita. A função verossimilhança de ϕ_0 , por sua vez, também não é normalizável, permanecendo constante a partir de um certo valor até $\phi_0 \rightarrow \infty$. Esse pro-

blema ocorre mesmo no caso sem interação, como vemos na figura (10). Esses problemas só puderam ser contornados adotando-se priors planas em $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e ϕ_0 . No entanto, como já dissemos acima, as estimativas dos parâmetros não foram afetadas pela escolha de priors - de fato, especificamente para $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e ϕ_0 , os intervalos de prior foram variados em até 6 ordens de grandeza e isso não afetou as estimativas obtidas para os parâmetros. Analisemos primeiramente o caso de ϕ_0 .

Para qualquer valor de ϕ_0 , o comportamento dinâmico é sempre o mesmo: a medida que o redshift z aumenta, ϕ cai rapidamente para um determinado valor (tipicamente em torno de $0.8\phi_0$) e permanece aproximadamente constante, como vemos na figura (14). Este comportamento já havia sido obtido, para o caso sem interação, em [73]. Desse modo, os termos nas equações de movimento que dependem da razão $\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)$ não serão muito afetados pelo valor

de ϕ_0 . O primeiro termo de (133) é proporcional a $\frac{1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi}{1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0}$, mas devido a esse comportamento dinâmico de ϕ_0 , teremos sempre $\frac{1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi}{1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0} \simeq 1$. Portanto, o valor de ϕ_0 será importante somente no primeiro termo de (130). No entanto, a medida que ϕ_0 aumenta, esse termo se torna cada vez menos importante em relação aos dois outros termos. A partir de um certo valor de ϕ_0 esse termo se tornará desprezível, de modo que para todos os valores de ϕ_0 acima desse valor teremos o mesmo valor de χ^2 , explicando porque a verossimilhança de ϕ_0 se torna aproximadamente constante acima de um certo ϕ_0 .

O parâmetro $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, por sua vez, aparece em dois lugares nas equações de movimento, mas, como dissemos no parágrafo anterior, o primeiro termo de (133) será aproximadamente 1, de modo que o único lugar onde $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ é importante é no último termo de (130). Note que esse termo é proporcional a $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}} / \left(1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0\right)$. Para um dado ϕ_0 , à medida que diminuimos $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, teremos $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}} / \left(1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0\right) \rightarrow -\frac{1}{\phi_0}$, ou seja, abaixo de um certo valor de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, teremos praticamente o mesmo valor de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}} / \left(1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0\right)$ e, consequentemente, a distribuição de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ se tornará aproximadamente constante.

Figura 9: função verossimilhança de $\beta/M\sqrt{\alpha}$.

Figura 10: distribuição de probabilidade de ϕ_0 .

Figura 11: distribuição de probabilidade de h .

Figura 12: distribuição de probabilidade de Ω_Ψ .

Figura 13: distribuição de probabilidade de ω_0 .

Figura 14: evolução de ϕ com o fator de escala a .

Passemos agora à discussão das degenerescências entre os parâmetros. Fisicamente, ocorre uma degenerescência entre dois parâmetros de um modelo quando é possível, usando diferentes pares desses parâmetros, obter um mesmo resultado para uma determinada quantidade calculada a partir do modelo, levando a um mesmo valor de χ^2 , quando comparamos essa quantidade com o seu valor observacional. Neste trabalho, como podemos ver em (136), (138), (139) e (140), as quatro quantidades físicas que foram comparadas com os respectivos valores observacionais são dadas em termos de integrais de $E(z)^{-1}$ (integral de $[(1+z)E(z)]^{-1}$, no caso de (136)). Assim, ocorrerão degenerescências entre dois parâmetros sempre que for possível obter a mesma $E(z)$ para diferentes pares desses parâmetros.

As figuras (15) a (24) mostram as regiões de confiança de 68.3%, 95.4% e 99.7%, para as 10 combinações possíveis de parâmetros. Em linhas vermelhas tracejadas são mostradas, nas mesmas figuras, quando pertinente, as respectivas regiões de confiança para o caso sem interação. As figuras (15) a (21) mostram que as bidimensionais que contém $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ são abertas no sentido negativo, enquanto que as bidimensionais que contém ϕ_0 são abertas no sentido positivo. Tais características são consequência do que foi discutido logo acima, a respeito da dependência das equações do modelo em ϕ_0 e $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$.

As figuras (15) e (16) mostram haver muito pouca degenerescência entre h e $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, bem como entre Ω_{Ψ_0} e $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$. A figura (17) mostra uma degenerescência entre $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e ω_0 : valores positivos de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ são equivalentes a valores maiores de ω_0 . Isso se explica pelo fato de que, se aumentarmos $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, aumentamos a razão $\frac{\rho_{\Psi}}{\rho_{\phi}}$, na era de domínio da matéria escura. Por outro lado, se aumentarmos ω_0 , obtemos o efeito contrário: $\frac{\rho_{\Psi}}{\rho_{\phi}}$ diminui na era da matéria. Assim sendo, é possível obter a mesma $E(z)$ aumentando simultaneamente $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e ω_0 , o que resulta na degenerescência observada na figura (17). Na figura (18), vemos que há degenerescência entre $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e ϕ_0 . A explicação é análoga: aumentar ϕ_0 irá diminuir a razão $\frac{\rho_{\Psi}}{\rho_{\phi}}$ na era da matéria, efeito que será compensado se, simultaneamente, aumentarmos $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, resultando na degenerescência observada. A figura (19) mostra que valores menores de ϕ_0 são moderadamente degenerados com valores menores de h . A figura (20) mostra que há muito pouca degenerescência entre ϕ_0 e Ω_{Ψ_0} , enquanto que, na figura (21), vemos uma forte degenerescência entre ϕ_0 e ω_0 : valores maiores de ω_0 são degenerados com valores menores de ϕ_0 . A figura (22) mostra que valores menores de h são levemente degenerados com valores maiores de ω_0 . A figura

(23) mostra não haver degenerescência entre Ω_{Ψ_0} e ω_0 e, finalmente, a figura (24) mostra que valores maiores de h são degenerados com valores menores de Ω_{Ψ_0} . Nessa figura vemos também que no caso sem interação valores menores de h foram ligeiramente suprimidos em relação ao caso interagente.

Uma vez que h e Ω_{Ψ_0} são muito pouco degenerados com $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, as distribuições desses dois parâmetros no caso sem interação (curvas tracejadas vermelhas nas figuras (11) e (12)) mudam muito pouco em relação ao caso interagente.

As distribuições de ϕ_0 e de ω_0 , no caso sem interação, ficaram ligeiramente deslocadas no sentido positivo. A explicação em ambos os casos é idêntica: valores menores (mais negativos) de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ são degenerados com valores menores de ϕ_0 e também de ω_0 . Desse modo, valores negativos de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ aumentam a probabilidade tanto de valores pequenos de ϕ_0 quanto de valores de ω_0 próximos de -1 . Portanto, quando não há interação, ϕ_0 pequenos e ω_0 próximos de -1 se tornarão menos prováveis, e suas distribuições ficarão deslocadas no sentido positivo, como vemos nas figuras (10) e (13). Os deslocamentos das distribuições de ϕ_0 e ω_0 no sentido positivo podem também ser vistos nas regiões de confiança mostradas nas figuras (19) a (23).

Aqui, é conveniente retomarmos a discussão precedente, envolvendo a equação (134), a respeito do limite de pequenos ϕ_0 . Note que as distribuições marginalizadas de ϕ_0 para os casos com e sem interação, na figura (10), caem rapidamente para zero em pequenos ϕ_0 , sendo que, para o caso com interação, valores um pouco menores de ϕ_0 serão permitidos, devido à degenerescência com $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, que acabamos de discutir. No caso da distribuição de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, figura (9), ocorre a queda para zero em valores pequenos e positivos de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, que também já esperávamos.

Ainda com relação à ω_0 , a degenerescência com $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ produz um resultado algo peculiar: as barras de incerteza, principalmente a de 1σ , são maiores que no caso interagente. Isso ocorre porque valores mais negativos de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ são degenerados com valores de ω_0 próximos de -1 , de modo que, quando marginalizamos em $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$, a altura do pico, que está próximo de -1 , aumenta, fazendo com que a "área" da função de distribuição fique mais concentrada ao redor do pico, reduzindo assim as barras de incerteza. A distribuição, no entanto, está "contida" num intervalo ligeiramente menor para o caso não interagente.

A tabela 4 mostra os valores obtidos para os parâmetros do modelo no caso sem interação.

Tabela 4: Valores obtidos para os parâmetros do modelo taquiônico sem interação ($\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}} = 0$), a partir da comparação com dados de lookback time, BAO, CMB e SNeIa.

h	$0.630 \pm 0.007 \pm 0.014 \pm 0.022$
Ω_{Ψ}	$0.322 \pm 0.017 \pm 0.034 \pm 0.050$
ω_0	$-0.972^{+0.062+0.194+0.265}_{-0.026-0.021-0.023}$
ϕ_0	$\phi_0 H_0 > 1.4 \text{ (} 2\sigma \text{)}$

Figura 15: regiões de confiança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ versus h .

Figura 16: regiões de confiança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ versus Ω_{Ψ_0} .

Figura 17: regiões de confiança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ versus ω_0 .

Figura 18: regiões de confiança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ versus ϕ_0 .

Figura 19: regiões de confiança de ϕ_0 versus h .

Figura 20: regiões de confiança de ϕ_0 versus Ω_{Ψ_0} .

Figura 21: regiões de confiança de ω_0 versus ϕ_0 .

Figura 22: regiões de confiança de h versus ω_0 .

Figura 23: regiões de confiança de Ω_{Ψ_0} versus ω_0 .

Figura 24: regiões de confiança de h versus Ω_{Ψ_0} .

Neste ponto, é conveniente lembrarmos da discussão feita um pouco acima sobre o efeito de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ nas equações do modelo. Conforme mencionado, o único lugar onde $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ é importante é no último termo de (130), o qual é proporcional a $\delta \equiv \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}} / \left(1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0\right)$, ou seja, δ é uma constante de acoplamento efetiva. Por outro lado, usando $M\bar{\Psi}_0\Psi_0 = \frac{3M_{pl}^2 H_0^2 \Omega_{\Psi_0}}{1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0}$ e $\alpha m^6 = 3M_{pl}^2 H_0^2 (1 - \Omega_{\Psi_0}) \phi_0^2 \sqrt{|\omega_0|}$ podemos reescrever (114) e (115) como

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi(\omega + 1) = \frac{\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}}{1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0} \sqrt{1 + \omega} \rho_{\Psi_0} (1 + z)^3 \text{ e}$$

$$\dot{\rho}_\Psi + 3H\rho_\Psi(\omega + 1) = -\frac{\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}}{1 - \frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0} \sqrt{1 + \omega} \rho_{\Psi_0} (1 + z)^3 ,$$

onde $\rho_{\Psi_0} = 3M_{pl}^2 H_0^2 \Omega_{\Psi_0}$. Conforme mencionado acima, $\sqrt{\alpha} \sim (H_0 \times MeV)^{-1}$. Além disso, para $z > 0$, ω se aproxima rapidamente de valores muito pequenos, de modo que o termo de interação no segundo membro das equações

Figura 25: distribuição de probabilidade de δ .

acima vai ser da ordem de $\delta\rho_{\Psi_0}(1+z)^3 \sim \left(\frac{\frac{\beta}{M}}{1-\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0}\right) H_0\rho_{\Psi_0}(1+z)^3$, bastante similar ao termo de interação que aparece nas equações de conservação de modelos fenomenológicos, em particular do modelo fenomenológico considerado na primeira parte deste trabalho. Desse modo, a constante de acoplamento fenomenológica seria constituída de dois parâmetros teóricos: $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e ϕ_0 . Vamos então calcular a distribuição de probabilidade de δ .

Usando (125), a probabilidade de obtermos um certo valor de δ , δ' , é dada por

$$P(\delta') = \int \int \delta(\delta' - \delta) P\left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0\right) d\left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\right) d\phi_0, \quad (142)$$

onde, conforme (119), $P\left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0\right) \propto \text{prior}\left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0\right) \mathcal{L}\left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0\right)$. A distribuição de delta é mostrada na figura (25). Aqui, é conveniente fazer algumas observações.

Como já foi mencionado, $\bar{\Psi}_0\Psi_0$ foi reescrito em termos de quantidades observáveis, através da expressão $\bar{\Psi}_0\Psi_0 = \frac{3M_{Pl}^2 H_0^2 \Omega_{\Psi_0}}{M\left(1-\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0\right)}$. Como $\bar{\Psi}_0\Psi_0$ é a densidade de número de partículas de matéria escura, esse deve ser positivo.

Portanto, devemos ter $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0 < 1$. Este vínculo deve ser incluído na prior de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e ϕ_0 (não se deve, no entanto, confundir esse vínculo com a queda para zero da distribuição de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ em valores pequenos e positivos, discutida acima). Como consequência desse vínculo, a constante de acoplamento efetiva δ terá o mesmo sinal de β e valores mais negativos (positivos) de δ serão equivalentes a valores mais negativos (positivos) de β , diminuindo (aumentando) a razão ρ_Ψ/ρ_ϕ na era de domínio da matéria escura. Portanto, δ terá a mesma degenerescência de β com ϕ_0 , como de fato pode ser visto na figura (26). No entanto, δ , ao contrário de β , é restrito a um pequeno intervalo. O vínculo $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}\phi_0 < 1$ é equivalente a $\phi_0 < -\frac{1}{\delta}$, se $\delta < 0$, como podemos verificar se eliminarmos $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ em favor de δ na expressão de $\bar{\Psi}_0\Psi_0$. Este vínculo pode ser visto claramente na figura (26). A posição do máximo de $P(\delta)$, na figura (25), tem uma dependência moderada nos intervalos de prior adotados para $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ e principalmente para ϕ_0 . No entanto, a probabilidade de termos $\delta < 0$ é fracamente dependente desses intervalos de prior. Essa probabilidade é $P(\delta < 0) \simeq 90\%$. Este resultado nos diz que δ é diferente de zero e negativo, ao menos com 1σ de confiança, o que implica em energia escura decaindo em matéria escura, aliviando o problema da coincidência. A figura (27) mostra a evolução das densidades relativas de energia e de matéria escuras, Ω_ϕ e Ω_Ψ , em função do fator de escala a , para alguns valores de δ . Quando $\delta = -0.2$ (curvas tracejadas azuis), a razão $\frac{\Omega_\Psi}{\Omega_\phi}$ diminui no período de domínio da matéria escura em relação ao caso sem interação, $\delta = 0$ (curvas pretas sólidas). Por outro lado, quando $\delta = +0.2$ (curvas pontilhadas vermelhas), a razão $\frac{\Omega_\Psi}{\Omega_\phi}$ aumenta nesse período.

Finalmente, devemos observar que toda a análise feita acima é para o caso de potencial taquiónico na forma (118) com $n = 2$. No entanto, na figura (28) nós vemos que não há nada de extraordinário em uma tal escolha de n . De fato, para $n = 1, 2$ ou 3 , as funções verossimilhança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ são bastante similares.

Todos os valores de n testados (até $n = 10$) foram capazes de reproduzir as propriedades do universo observado (ao menos, do background) e, de fato, as soluções da equação de movimento para todos os valores de n testados tiveram o mesmo comportamento qualitativo: reproduziram o período atual de expansão acelerada, gerada pelo domínio da energia escura, e o parâmetro da equação de estado da energia escura se aproximando de zero na época de domínio da matéria escura, tornando a razão $\frac{\rho_\Psi}{\rho_\phi}$ constante nesse período.

Figura 26: regiões de confiança de δ versus ϕ_0 .

Figura 27: densidades relativas de energia escura, Ω_ϕ e Ω_Ψ , em função do fator de escala a , para o modelo taquiônico com $\delta = 0$ (curvas pretas sólidas), $\delta = -0.2$ (curvas azuis tracejadas) e $\delta = +0.2$ (curvas vermelhas pontilhadas).

Figura 28: funções verossimilhança de $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}$ para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.

Em [72], duas soluções aproximadas haviam sido encontradas, válidas para um universo dominado por táquions: uma que corresponde a $\omega \approx -1$, que é estável para $0 < n < 2$ e uma outra que corresponde a $\omega \approx 0$, estável se $n > 2$. As soluções das equações exatas do modelo, encontradas por nós, de fato reproduzem esse comportamento, mas somente no futuro distante, ou seja, quando $a(t) \gg 1$, quando $\Omega_\phi \rightarrow 1$.

Por outro lado, ainda em [72] foi mencionado que quando o universo é dominado por outro componente, como matéria ou radiação, existe uma solução atratora que corresponde a $\omega \approx 0$, para todos os valores de n , e foi essa a solução que encontramos. No entanto, foram apresentadas soluções de natureza aproximada para o campo taquiônico, quando o universo é dominado por um fluido com o parâmetro da equação de estado constante, ω_F . Nesse caso, as soluções aproximadas encontradas correspondem a $\omega \simeq -1 + n\frac{1+\omega_F}{2}$, estável se $n < \frac{2}{1+\omega_F}$, e $\omega \approx 0$, estável se $n > \frac{2}{1+\omega_F}$. Porém, essas soluções aproximadas são válidas somente se $\phi_i H_i \ll \sqrt{\frac{2n}{9(1+\omega_F)}}$, onde o subscrito i denota algum tempo primordial. As soluções encontradas por nós não satisfazem essa condição.

5.3 Conclusões

Neste trabalho, investigamos a possibilidade de haver um acoplamento entre a matéria e a energia escuras. Essa investigação foi feita comparando-se dois modelos de energia escura interagente a dados observacionais recentes. O modelo de energia escura holográfica interagente forneceu como resultado que a constante de acoplamento é diferente de zero com 1σ de confiança, para ambas as parametrizações usadas para a equação de estado da energia escura. Além disso, a probabilidade integrada de termos um acoplamento compatível com energia escura decaindo em matéria escura ($b^2 > 0$), calculada usando a parametrização I , é de $P(b^2 > 0) \simeq 95\%$.

O modelo taquiónico interagente, por sua vez, forneceu uma probabilidade integrada de termos um acoplamento compatível com energia escura decaindo em matéria escura de $P(\delta < 0) \simeq 90\%$. Ambos os modelos, portanto, embora comparados com conjuntos de dados diferentes, concordam surpreendentemente bem no que diz respeito a probabilidade de termos um acoplamento compatível com energia escura decaindo em matéria escura. Assim, podemos dizer que os resultados de ambos os modelos fornecem uma evidência significativa da interação entre a matéria e a energia escuras.

É conveniente salientarmos que, conforme podemos ver nas tabelas 3 e 4, as estimativas obtidas para ω_0 e $\Omega_{\Psi 0}$, nos casos com e sem interação, foram bastante parecidas. Isso fornece um suporte adicional à hipótese que fizemos na comparação do modelo fenomenológico com os dados observacionais, de que ω_0 e Ω_Λ não deveriam mudar muito com a interação. Ainda com base nas tabelas 3 e 4 vemos que, apesar da simplicidade do modelo taquiónico, esse forneceu estimativas bastante razoáveis dos parâmetros cosmológicos.

É interessante também salientar a concordância de nossos resultados com o que foi obtido em [102], onde, através da equação de Layser-Irvine, o equivalente relativístico do teorema do virial, e de observações de aglomerados de galáxias, obteve-se também que a constante de acoplamento é diferente de zero com 90% de confiança.

Os resultados apresentados neste trabalho, apontando para a existência de uma interação entre os componentes escuros do universo, foram obtidos com base em dois modelos simples. Isso nos encoraja a olhar para modelos de teoria de campos mais sofisticados - e mais realistas - para explicar os comportamentos da matéria e da energia escuras, bem como suas origens.

A Derivação do tensor de energia-momento dos férmions

O tensor de energia-momento dos férmions, $T_{\mu\nu}^\Psi$, é calculado aplicando (103) à parte da ação do modelo correspondente aos férmions,

$$T_{\mu\nu}^\Psi(x) = \frac{V_{\alpha\mu}(x)}{\det[V(x)]} \frac{\delta S_M^\Psi}{\delta V_\alpha^\nu(x)}, \quad (143)$$

onde

$$S_M^\Psi = \int d^4x \mathcal{L}^\Psi(x) = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu \Psi] - (M - \beta\varphi) \bar{\Psi} \Psi \right\}.$$

Variando S_M^Ψ em relação ao campo da téttrade, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_M^\Psi = & \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\bar{\Psi} \gamma^\mu \delta \Gamma_\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\gamma \delta V_\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi + \bar{\Psi} \delta \Gamma_\mu \gamma^\mu \Psi - \nabla_\mu \bar{\Psi} \gamma^\gamma \delta V_\gamma^\mu \Psi] \\ & + \int d^4x \delta \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu \Psi] - (M - \beta\varphi) \bar{\Psi} \Psi \right\}, \end{aligned} \quad (144)$$

onde $\delta \sqrt{-g}$ e $\delta \Gamma_\mu$ são as variações de $\sqrt{-g}$ e da conexão de spin $\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} V_\alpha^\nu(x) (\tilde{\nabla}_\mu V_{\beta\nu}(x))$ em relação ao campo da téttrade e são dadas, respectivamente, por

$$\delta \sqrt{-g} = -\sqrt{-g} V_\lambda^\alpha \delta V_\alpha^\lambda \quad (145)$$

e

$$\delta \Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^\alpha \gamma^\beta \left\{ V_\alpha^\nu \left[\tilde{\nabla}_\mu (\delta V_{\beta\nu}) - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_{\beta\lambda} \right] + \delta V_\alpha^\nu \tilde{\nabla}_\mu \delta V_{\beta\nu} \right\}, \quad (146)$$

sendo $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ a variação do símbolo de Christoffel com relação ao campo da téttrade. Substituindo (145) e (146) em (144), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_M^\Psi = & \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\bar{\Psi} \gamma^\gamma \nabla_\mu \Psi - \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\gamma \Psi \right) \delta V_\gamma^\mu \right] \\ & + \frac{i}{8} \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\Psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) \Psi \nabla_\mu \delta V_{\beta\nu} \\ & - \frac{i}{8} \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\Psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\lambda + \gamma^\nu \gamma_\lambda \gamma^\mu) \Psi \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\ & - \int d^4x \mathcal{L}^\Psi(x) V_\nu^\alpha \delta V_\alpha^\nu. \end{aligned} \quad (147)$$

$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ pode ser escrita como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} [\nabla_\nu (\delta g_{\rho\mu}) + \nabla_\mu (\delta g_{\rho\nu}) - \nabla_\rho (\delta g_{\mu\nu})] . \quad (148)$$

Por conveniência, não escrevemos explicitamente $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ em termos da variação no campo da téttrada. Substituindo (148) no terceiro termo de (147), fazendo integração por partes e usando o Teorema de Gauss, obtemos que

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\Psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\lambda + \gamma^\nu \gamma_\lambda \gamma^\mu) \Psi \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu (\bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi) g^{\mu\rho} \delta g_{\mu\rho} \\ &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu j^\nu(x) \right] V_\sigma^\alpha \delta V_\alpha^\sigma . \end{aligned} \quad (149)$$

Na última passagem, usamos que $\nabla_\nu (\bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu j^\nu(x)$ e também a relação $g^{\mu\rho} \delta g_{\mu\rho} = -2V_\sigma^\alpha \delta V_\alpha^\sigma$.

Efetuada integração por partes no segundo termo de (147) e usando o Teorema de Gauss, obtemos que

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\Psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) \Psi \nabla_\mu \delta V_{\beta\nu} \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\begin{array}{c} \nabla_\mu \bar{\Psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) \Psi \\ + \bar{\Psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) \nabla_\mu \Psi \end{array} \right] \delta V_{\beta\nu} . \end{aligned} \quad (150)$$

Usando a relação $V_\alpha^\nu \delta V_{\beta\nu} = -V_{\beta\nu} \delta V_\alpha^\nu$ e a relação de anti-comutação satisfeita pelas matrizes de Dirac, $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$, no segundo membro de (150), teremos que

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\Psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) \Psi \nabla_\mu \delta V_{\beta\nu} \\ &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\begin{array}{c} \nabla_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma_\nu \Psi + \nabla_\nu \bar{\Psi} \gamma^\gamma \Psi - \nabla^\gamma \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi \\ + \bar{\Psi} \gamma_\nu \nabla^\gamma \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\gamma \nabla_\nu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\gamma \gamma_\nu \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi \end{array} \right] \delta V_\gamma^\nu . \end{aligned} \quad (151)$$

Substituindo (151) e (149) em (147), teremos

$$\begin{aligned} \delta S_M^\Psi &= \frac{i}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\begin{array}{c} \nabla_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \Psi - \nabla_\nu \bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi - \nabla^\alpha \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi \\ + \bar{\Psi} \gamma_\nu \nabla^\alpha \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\alpha \nabla_\nu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi \\ - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu j^\mu(x) V_\nu^\alpha \end{array} \right] \delta V_\alpha^\nu \\ &\quad - \int d^4x \mathcal{L}^\Psi(x) V_\nu^\alpha \delta V_\alpha^\nu . \end{aligned} \quad (152)$$

Substituindo (152) em (143), obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\Psi}(x) = & \frac{i}{4} (\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\nabla_{\nu}\Psi + \bar{\Psi}\gamma_{\nu}\nabla_{\mu}\Psi - \nabla_{\mu}\bar{\Psi}\gamma_{\nu}\Psi - \nabla_{\nu}\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi) \\
& + \frac{i}{4} (\nabla_{\lambda}\bar{\Psi}\gamma^{\lambda}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\Psi + \bar{\Psi}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma^{\lambda}\nabla_{\lambda}\Psi) \\
& - \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \left[\frac{i}{4} \partial_{\lambda} j^{\lambda}(x) + \mathcal{L}^{\Psi}(x) \right] .
\end{aligned}$$

Usando as equações de movimento (104) e (105), verificamos facilmente que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\lambda}\bar{\Psi}\gamma^{\lambda}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\Psi + \bar{\Psi}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma^{\lambda}\nabla_{\lambda}\Psi &= 0 , \\
\partial_{\lambda} j^{\lambda}(x) &= 0 \quad (106)
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}^{\Psi}(x) = 0 .$$

Dessa maneira, obtemos, finalmente

$$T_{\mu\nu}^{\Psi}(x) = \frac{i}{4} (\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\nabla_{\nu}\Psi + \bar{\Psi}\gamma_{\nu}\nabla_{\mu}\Psi - \nabla_{\mu}\bar{\Psi}\gamma_{\nu}\Psi - \nabla_{\nu}\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi) .$$

B Programação numérica

Descreveremos, aqui, os procedimentos numéricos usados para calcular os resultados obtidos para ambos os modelos estudados neste trabalho.

B.0.1 Modelo fenomenológico

Foi usado o programa CMBFAST 4.5.1, com pequenas modificações para calcular os C_l teóricos de acordo com (102). Esse programa foi escrito em FORTRAN 77. Os C_l , no caso de universo plano, são calculados na subrotina *cmbflat.F*. Nessa subrotina, o comprimento de onda comóvel mínimo é armazenado na variável *akmin*. A entrada dessa variável foi modificada para receber um comprimento de onda mínimo dado por (101). Foi também necessário modificar a subrotina *driver.F*, a qual recebe os parâmetros do modelo, para receber o parâmetro de corte *c*. Este parâmetro é recebido pela variável *cutoff*, introduzida por nós. Abaixo está reproduzido o *common block* onde introduzimos a variável *cutoff*:

```
common /lingerinc/ omegab,omegac,omegav,omegan,omegak,h0
& ,tcmb,yhe,annur,annunr,cutoff
```

A seguir, reproduzimos o trecho da subrotina *driver.F* onde *cutoff* é recebida:

```
write(*,*)
2   'Enter H0, Tcmb, Y_He, N_nu(massless), N_nu, g*(massive),c',
3   '(e.g. 65 2.726 0.24 3.04 0 10.75 c>=1)'
      read(*,*) h0,tcmb,yhe,annur,annunr,gsnunr,cutoff
ENDIF
```

Abaixo está reproduzido o trecho da subrotina *cmbflat.F* onde o número de onda mínimo *akmin* é calculado de acordo com (102). Note-se que aparece a velocidade da luz em $km \cdot s^{-1}$ no denominador, pois o parâmetro de Hubble H_0 está em $km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$. Portanto, *akmin* está em Mpc^{-1} (no

CMBFAST, tanto comprimento quanto tempo estão em Mpc). Logo abaixo da modificação introduzida neste trabalho deixamos, como linha de comentário, a expressão original de $akmin$.

```

c      Maximum and minimum k-values. dlnk is the logarithmic spacing
c      used for low k.
      akmax=akmax0/tau0
      akmin=(3.1415926d0/cutoff)*sqrt(omegav)*h0/2.99792458d5
c      akmin=0.15d0/tau0
      write(*,*)akmax,akmin,tau0,h0

```

A versão 4.5.1 do CMBFAST permite que se forneça uma tabela numérica contendo uma parametrização da equação de estado ω com o redshift z . Assim, para calcularmos o espectro teórico, usando as duas parametrizações de ω com z , precisamos apenas fornecer ao CMBFAST tabelas numéricas, regularmente espaçadas em z , contendo essas duas parametrizações.

Para o cálculo das funções verossimilhança, foi usado o programa *compute_likelihood.F*, elaborado por L. Verde e H. Peiris [88]. Esse programa calcula a função verossimilhança para os dados de flutuações de temperatura do WMAP, dada por (123). Nesse programa, fixamos o parâmetro *tarrsiz* em *tarrsiz=9*, para calcular a função verossimilhança somente até $l = 9$. Aqui cabe observar, porém, que atualmente esse programa foi substituído e não está mais disponível. Isso porque descobriu-se que o programa não calculava com precisão a função verossimilhança na região de baixos multipolos [103] - [105] e [47]. Isso, no entanto, não afetou nossos resultados, pois usamos o programa para determinar os valores esperados e os intervalos de incerteza em $1/c$, para as duas parametrizações de ω com z , de modo que o valor exato da função verossimilhança não é relevante.

B.0.2 Modelo lagrangiano

Dado um ponto $\vec{p} = (\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0)$ no espaço de parâmetros, a função verossimilhança correspondente a esse ponto será dada por

$$\mathcal{L} \left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0 \right) \propto \exp \left[-\frac{\chi^2(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0)}{2} \right],$$

onde $\chi^2(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0)$ é dado por (141). Para termos uma boa estimativa de $\mathcal{L}\left(\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0, h, \Omega_{\Psi_0}, \omega_0\right)$, precisamos calcular essa função num número suficientemente grande de pontos e essa etapa consumiu um grande tempo de cálculo. No presente trabalho, variamos o espaço de parâmetros (variemos os intervalos de prior dos parâmetros) e repetimos a análise de χ^2 em cada caso e isso não alterou os valores obtidos para os parâmetros do modelo. Foi também necessário variar o espaçamento nos parâmetros, visando uma melhor definição da função verossimilhança em torno do pico. Especificamente para $\frac{\beta}{M\sqrt{\alpha}}, \phi_0$ e ω_0 - cujas distribuições marginalizadas se mostraram bastante assimétricas - foi necessário adotar espaçamentos não uniformes, de modo a termos mais pontos em torno do pico. Para cada espaço de parâmetros usado, calculamos a função verossimilhança em mais de 7.5×10^6 pontos.

Referências

- [1] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, e T. R. Seshadri, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **364**, 601 (2005).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley and Sons, Nova York, 1972).
- [3] A. Friedmann, *Z. Phys.* **10**, 377 (1922); *ibid.* **21**, 326 (1924).
- [4] H. P. Robertson, *Astrophys. J.* **82**, 284 (1935); *ibid.* **83**, 187, 257 (1936).
- [5] A. G. Walker, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **42**, 90 (1936).
- [6] W. L. Freedman *et. al.*, *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001).
- [7] D. J. Fixsen *et. al.*, *Astrophys. J.* **473**, 576 (1996).
- [8] J. C. Mather *et. al.*, *Astrophys. J.* **512**, 511 (1999).
- [9] M. Fukugita, C. J. Hogan e P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **503**, 518 (1998).
- [10] M. Rauch *et. al.*, *Astrophys. J.* **489**, 7 (1997).
- [11] G. Hinshaw *et. al.*, *Astrophys. J. Supp.* **180**, 225 (2009).
- [12] J. M. O’Meara *et. al.*, *Astrophys. J.* **552**, 718 (2001).
- [13] N. A. Bahcall, L. M. Lubin e V. Dorman, *Astrophys. J.* **447**, L81 (1995).
- [14] N. Bahcall *et. al.*, *Astrophys. J.* **541**, 1 (2000).
- [15] M. Tegmark *et. al.*, *Astrophys. J.* **606**, 702 (2004).
- [16] A. G. Riess *et. al.*, *Astrophys. J.* **659**, 98 (2007).
- [17] D. Clowe *et. al.*, *Astrophys. J.* **648**, L109 (2006).
- [18] S. Cole *et. al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362**, 505 (2005).
- [19] P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **263**, L1 (1983).

- [20] G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack e M. J. Rees, *Nature* **311**, 517 (1984).
- [21] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, (Academic Press, Londres, 2003).
- [22] J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [23] Y. Fukuda *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
- [24] A. G. Riess *et. al.*, *Astrophys. J.* **116**, 1009 (1998).
- [25] S. Perlmutter *et. al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [26] A. D. Miller *et. al.*, *Astrophys. J.* **524**, L1 (1999).
- [27] P. de Bernardis *et al.*, *Nature* **404**, 955 (2000).
- [28] S. Hanany *et. al.*, *Astrophys. J.* **545**, L5 (2000).
- [29] N. W. Halverson *et. al.*, *Astrophys. J.* **568**, L28 (2002).
- [30] C. L. Bennett *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003).
- [31] S. M. Carrol, *Living Rev. Relativity* **4**, 1 (2001).
URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1>
- [32] E. J. Copeland, M. Sami e S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [33] S. Weinberg, *Cosmology*, (Oxford University Press, Oxford, 2008).
- [34] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [35] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics vol III: Galaxies and Cosmology*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [36] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [37] C.-P. Ma e E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).

- [38] U. Seljak *et. al.*, *Phys. Rev. D* **71**, 103515 (2005).
- [39] H. K. Jassal, J. S. Bagla e T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **72**, 103503 (2005).
- [40] A. R. Liddle e D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [41] D. N. Spergel *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [42] E. Komatsu *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009).
- [43] U. Seljak e M. Zaldarriaga, *Astrophys. J. Suppl.* **469**, 437, (1996).
- [44] U. Seljak, *Astrophys. J.* **435**, L87 (1994).
- [45] W. Hu e N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **444**, 489 (1995).
- [46] R. K. Sachs e A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* **147**, 73 (1967).
- [47] G. Hinshaw *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 288 (2007).
- [48] L. Amendola, *Phys. Rev. D* **62**, 043511 (2000).
- [49] G. Olivares, F. Atrio-Barandela e D. Pavón, *Phys. Rev. D* **71**, 063523 (2005).
- [50] G. Olivares, F. Atrio-Barandela e D. Pavón, *AIP Conf. Proc.* **841**, 550 (2006).
- [51] G. Olivares, F. Atrio-Barandela e D. Pavón, *Phys. Rev. D* **74**, 043521(2006).
- [52] B. Wang, C.-H. Lin e E. Abdalla, *Phys. Lett. B* **637**, 357 (2006).
- [53] B. Wang, J. Zang, C.-H. Lin, E. Abdalla e S. Micheletti, *Nucl. Phys. B* **778**, 69 (2007).
- [54] L. Amendola, G. C. Campos e R. Rosenfeld, *Phys. Rev. D* **75**, 083506 (2007).
- [55] R. Rosenfeld, *Phys. Rev. D* **75**, 083509 (2007).
- [56] Z.-K. Guo, N. Ohta e S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **76**, 023508 (2007).

- [57] C. Feng, B. Wang, Y. Gong e R.-K. Su, *JCAP* **09**, 005 (2007).
- [58] C. Feng, B. Wang, E. Abdalla e R.-K. Su, *Phys. Lett. B* **665**, 111 (2008).
- [59] R. Bean, E. E. Flanagan, I. Laszlo e M. Trodden, *Phys. Rev. D* **78**, 123514 (2008).
- [60] A. G. Cohen, D. B. Kaplan e A. E. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4971 (1999).
- [61] M. Li, *Phys. Lett. B* **603**, 1 (2004).
- [62] J-H He e B. Wang, *JCAP* **06**, 010 (2008).
- [63] J.-H. He, B. Wang e E. Abdalla, *Phys. Lett. B* **671**, 139 (2009).
- [64] Q.-G. Huang e M. Li, *JCAP* **08**, 013 (2004).
- [65] K. Enqvist e M. S. Sloth, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 221302 (2004).
- [66] K. Enqvist, S. Hannestad e M. S. Sloth, *JCAP* **02**, 004 (2005).
- [67] J. Shen, B. Wang, E. Abdalla e R. K. Su, *Phys. Lett. B* **609**, 200 (2005).
- [68] T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **66**, 021301(R) (2002).
- [69] A. Feinstein, *Phys. Rev. D* **66**, 063511 (2002).
- [70] T. Padmanabhan e T. R. Choudhury, *Phys. Rev. D* **66**, 081301(R) (2002).
- [71] M. Sami, P. Chingangbam e T. Qureshi, *Phys. Rev. D* **66**, 043530 (2002).
- [72] L. R. Abramo e F. Finelli, *Phys. Lett. B* **575**, 165 (2003).
- [73] J. S. Bagla, H. K. Jassal e T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D*, **67**, 063504 (2003).
- [74] L. R. Abramo, F. Finelli e T. S. Pereira, *Phys. Rev. D* **70**, 063517 (2004).

- [75] A. A. Sen, *Phys. Rev. D* **74**, 043501 (2006).
- [76] J. Zhang, X. Zhang e H. Liu, *Phys. Lett. B* **651**, 84 (2007)
- [77] M. R. Setare, *Phys. Lett. B* **653**, 116 (2007).
- [78] A. Sen, *J. High Energy Phys.* **04**, 048 (2002).
- [79] A. Sen, *J. High Energy Phys.* **07**, 065 (2002).
- [80] A. Sen, *Mod. Phys. Lett. A* **17**, 1797 (2002).
- [81] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).
- [82] N. Nakanishi e I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, (World Scientific, Singapura, 1990).
- [83] V. de Sabbata e M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, (World Scientific, Singapura, 1985).
- [84] D. S. Sivia e J. Skilling, *Data Analysis - a Bayesian Tutorial*, 2^a ed., (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [85] L. Verde, *0712.3028 [astro-ph]* (2007).
- [86] V. R. Vanin e F. Gouffon, *Tópicos avançados em tratamento estatístico de dados em física experimental*, (LAL-IFUSP, ed. preliminar, 1996).
- [87] R. Trotta, *Contemp. Phys.* **49**, 71 (2008).
- [88] L. Verde *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 195 (2003).
- [89] G. Hinshaw *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 135 (2003).
- [90] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C - The art of scientific computing* - 2^a ed., (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [91] B. Wang, Y. Gong e E. Abdalla, *Phys. Lett. B* **624**, 141 (2005).
- [92] G. Hasinger, N. Scharef e S. Komossa, *Astrophys. J.* **573**, L77 (2002).
- [93] S. Micheletti, E. Abdalla e B. Wang, *Phys. Rev. D* **79**, 123506 (2009).

- [94] S. Capozziello, V. F. Cardone, M. Funaro e S. Andreon, *Phys. Rev. D* **70**, 123501 (2004).
- [95] R. Jimenez, L. Verde, T. Treu e D. Stern, *Astrophys. J.* **593**, 622 (2003).
- [96] J. Simon, L. Verde e R. Jimenez, *Phys. Rev. D* **71**, 123001 (2005).
- [97] L. M. Krauss, *astro-ph/0301012* (2003).
- [98] R. Cayrel *et. al.*, *Nature* **409**, 691 (2001).
- [99] Y. Wang e P. Mukherjee, *Phys. Rev. D* **76**, 103533 (2007).
- [100] D. J. Eisenstein *et. al.*, *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005).
- [101] P. Astier *et. al.*, *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006).
- [102] E. Abdalla, L. R. W. Abramo, L. Sodre Jr. e B. Wang, *Phys. Lett. B* **673**, 107 (2009).
- [103] G. Efstathiou, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **348**, 885 (2004).
- [104] A. Slosar, U. Seljak e A. Makarov, *Phys. Rev. D* **69**, 123003 (2004).
- [105] I. J. O'Dwyer *et. al.*, *Astrophys. J.* **617**, L99 (2004).