Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Modelos Efetivos para o Elétron

Roberto Baginski Batista Santos

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel

Tese apresentada ao
Instituto de Física da Universidade
de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Ciências.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Josif Frenkel (IFUSP)

Prof. Dr. Carlos Eugênio Imbassahy Carneiro (IFUSP)

Prof. Dr. Henrique Fleming (IFUSP)

Prof. Dr. Antônio José Accioly (IFT-UNESP)

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto (CBPF)

São Paulo

-2003-

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Santos, Roberto Baginski Batista

Modelos Efetivos para o Elétron.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria efetiva;
2. Spin do elétron;
3. Auto-energia do elétron;
4. Eletrodinâmica regularizada;
5. Auto-aceleração.

USP/IF/SBI-066/2003

Sumário

Resumo

Abstract

1	Introdução	5
2	Spin e Auto-Energia do Elétron	9
2.1	Considerações Iniciais	9
2.2	Um Modelo Efetivo para o Elétron	12
2.3	Determinação do Spin do Elétron	15
2.4	Determinação do Momento de Dipolo Magnético do Elétron	16
2.5	Determinação da Auto-Energia do Elétron	17
2.6	Determinação do Momento Angular Eletromagnético	20
2.7	Determinação do Momento de Quadrupolo Elétrico	24
3	Auto-Força do Elétron	26
3.1	Considerações Iniciais	26
3.2	Modelo de Abraham–Lorentz	34
3.3	Eletrodinâmica Regularizada	39
3.4	Determinação da Auto-Força	45
3.5	Teoria Quântica	57
4	Considerações Finais	61
	Referências Bibliográficas	63

Resumo

Apresentamos dois modelos para o elétron na eletrodinâmica clássica que incorporam alguns efeitos da eletrodinâmica quântica. No primeiro modelo, o elétron é tratado como uma partícula extensa como consequência das oscilações de alta-frequência (*Zitterbewegung*) que sua carga elétrica realiza. Mostramos que este modelo prevê corretamente a magnitude do spin do elétron e lhe atribui o mesmo fator giromagnético previsto pela equação de Dirac sem correções radiativas. Neste modelo, a auto-energia do elétron diverge logaritmicamente como resultado da distribuição extensa de sua carga elétrica. No segundo modelo, a criação de pares virtuais em torno do elétron é levada em conta por uma generalização da lagrangeana do campo eletromagnético que respeita as simetrias da eletrodinâmica clássica. Esta generalização altera a interação entre o elétron e o campo eletromagnético em pequenas distâncias e permite que a auto-força de uma partícula puntiforme seja determinada de modo consistente. Mostramos que as soluções da equação de movimento resultante não apresentam auto-aceleração nem pré-aceleração, sendo consistentes com a causalidade.

Abstract

We present two models for the electron in classical electrodynamics, which include some effects from quantum electrodynamics. In the first model, the electron is treated as an extended particle owing to the high-frequency oscillations (*Zitterbewegung*) of its electrical charge. We show that this model predicts correctly the magnitude of the electron spin and it gives the electron the same gyromagnetic factor as predicted by Dirac equation without radiative corrections. In this model, the electron self-energy has a logarithmic divergence due to the extended distribution of its electric charge. In the second model, virtual pair creation around the electron is taken into account by a generalization of the lagrangian for the electromagnetic field that preserves the symmetries of classical electrodynamics. This generalization changes the interaction of the electron with the electromagnetic field at small distances and allows us to evaluate the self-force of a point particle in a consistent way. We show that the solutions of the derived equation of motion do not exhibit self-acceleration nor pre-acceleration, being consistent with causality.

1 *Introdução*

Os limites de validade da eletrodinâmica clássica são razoavelmente bem conhecidos particularmente no que diz respeito à fronteira de pequenos comprimentos. Já em 1901, problemas com o tratamento clássico da radiação eletromagnética emitida por uma cavidade obrigaram Planck a propor que a interação entre a radiação e a matéria era quantizada [1]. Em 1905, Einstein supôs que a radiação se comportava termodinamicamente como se constituída por quanta de energia independentes de magnitude proporcional à frequência da radiação [2]. Assim, conseguiu deduzir o papel da frequência da radiação no efeito fotoelétrico. Em 1913, Bohr formulou um modelo para explicar o espectro de emissão do átomo de Hidrogênio que deixava claro que a eletrodinâmica clássica não era inteiramente aplicável aos fenômenos atômicos [3]. A era quântica havia começado e o restante da história é bem conhecido [4].

Depois de Heisenberg haver mostrado como quantizar o oscilador harmônico [5], não demoraria muito para que o campo eletromagnético fosse objeto de quantização. Em 1925, Born, Heisenberg e Jordan quantizaram o campo eletromagnético livre [6]. Formalmente, cada modo do campo eletromagnético livre comporta-se como um oscilador harmônico. Assim, bastaria quantizar esta coleção infinita de osciladores para ter uma teoria quântica da radiação. Dois anos mais tarde, em 1927, Dirac tratou a interação do campo de radiação com a matéria e explicou a origem da emissão espontânea de radiação [7].

A duplicidade de linhas em espectros de emissão levou Goudsmit e Uhlenbeck a proporem, em 1926, que o elétron seria dotado de spin, um momento angular intrínseco de magnitude $\hbar/2$ [8]. Em 1928, Dirac apresentou sua equação de onda relativística para o elétron [9]. A equação de Dirac descrevia o comportamento de partículas de spin $1/2$ e previa que o fator giromagnético do elétron era $g = 2$. Todavia, a teoria também previa estados de energia negativa. Dois anos mais tarde, em 1930, Dirac interpretou seu trabalho de 1928 como uma teoria de muitas partículas na qual os estados de energia negativa estavam já preenchidos por um mar de elétrons [10]. Um buraco neste mar de elétrons seria observado como uma partícula com as mesmas propriedades do elétron exceto por

sua carga elétrica, que seria da mesma magnitude mas de sinal oposto ao do elétron. Estas anti-partículas não tardaram a ser encontradas em experimentos com raios cósmicos [11].

Durante a década de 1930, a teoria quântica do campo eletromagnético estava madura [12] e a teoria do elétron de Dirac foi transformada em uma teoria quântica de campos [13]. No início da década de 1940, a teoria da interação entre o campo eletromagnético e a matéria, a eletrodinâmica quântica (QED), havia se tornado uma teoria quântica em que operadores de campo eram responsáveis por criar e destruir partículas localizadas em pontos do espaçotempo [14]. Ao mesmo tempo em que alguns dos problemas da eletrodinâmica clássica eram amenizados, outros eram criados. Na eletrodinâmica clássica, a auto-energia de uma partícula puntiforme, entendida como o limite de uma partícula extensa, diverge linearmente à medida que o raio da partícula tende a zero. Na eletrodinâmica quântica, a criação e aniquilação de pares virtuais elétron-pósitron na vizinhança da partícula puntiforme é responsável por suavizar a divergência, que se torna apenas logarítmica [15]. Esta divergência mais branda é consequência de uma distribuição efetiva da carga elétrica da partícula em uma região do espaço cuja extensão é, tipicamente, da ordem do comprimento de onda Compton da partícula. Contudo, o problema não é de todo resolvido uma vez que a auto-energia ainda permanece divergente.

Ainda na década de 1930, várias soluções foram propostas para resolver o problema dos infinitos. Em 1936, Weisskopf propôs que os infinitos fossem absorvidos nos parâmetros empíricos das teorias [16] e conseguiu mostrar que desta maneira era possível lidar com alguns dos infinitos conhecidos à época. Apesar disso, os infinitos afligiram a eletrodinâmica quântica até o final da década de 1940, quando Tomonaga [17], Schwinger [18], Feynman [19] e Dyson [20] desenvolveram um formalismo explicitamente covariante para renormalizar as divergências da eletrodinâmica quântica. A natureza dos infinitos fica clara quando partículas e anti-partículas são tratadas da mesma forma [21].

Durante as décadas de 1950 e 1960, um grande corpo de dados experimentais acerca das interações fraca e forte foi acumulado. Todavia, as expansões perturbativas em potências da constante de acoplamento que funcionavam tão bem para a eletrodinâmica quântica não eram suficientes para entender os fenômenos relacionados às interações forte e fraca. A solução para este problema veio na década de 1970, quando t'Hooft mostrou que a teoria de Yang-Mills era renormalizável mesmo quando sua simetria de calibre era espontaneamente quebrada [22]. Não demorou muito para que a teoria eletrofraca [23–25] se combinasse com a cromodinâmica quântica [26–28] para formar o Modelo Padrão das interações fundamentais.

A renormalizabilidade de uma teoria era importante para que fosse possível extrair resultados precisos que pudessem ser comparados com as observações experimentais. A gravidade, porém, sempre se mostrou refratária à quantização nestes moldes. Talvez por este motivo, a visão convencional acerca da renormalizabilidade de uma teoria tenha começado a mudar. Teorias efetivas, mesmo se não-renormalizáveis, começaram a ser cada vez mais usadas [29–33]. A história das teorias quânticas efetivas de campo é antiga. No contexto da eletrodinâmica quântica, Euler e Heisenberg calcularam uma lagrangeana efetiva que levava em conta os efeitos ópticos não-lineares produzidos por pares virtuais elétron-pósitron no espalhamento de luz por luz [34]. É importante notar que a forma da lagrangeana efetiva pode ser descoberta [16] de modo fenomenológico pela observação de que os únicos termos que são invariantes por transformações de Lorentz e por transformações de calibre e que não envolvem derivadas do campo eletromagnético são $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ e $E^2 - B^2$. Assim, a lagrangeana efetiva para um sistema físico em um dado regime pode ser construída levando em conta todos os termos compatíveis com as simetrias básicas do sistema físico e que sejam relevantes para a classe de fenômenos que se pretende descrever.

Na eletrodinâmica clássica, podemos aplicar uma idéia semelhante e incorporar algumas das conseqüências da eletrodinâmica quântica. É claro que, neste caso, não há sentido em considerar todos os termos compatíveis com as simetrias da teoria. As teorias clássica e quântica são suficientemente distintas para que seja improvável que a descrição fornecida pela eletrodinâmica clássica continue a melhorar após passado algum ponto da escala de comprimento que caracterize o regime quântico. Assim, uma teoria efetiva clássica para a eletrodinâmica não precisaria ser modificada por mais do que alguns poucos termos. Estas modificações refletem alguns dos principais fenômenos encontrados na eletrodinâmica quântica e devem permitir entender melhor a fronteira entre os dois regimes.

Neste trabalho, apresentamos dois modelos efetivos clássicos para o elétron na eletrodinâmica. O primeiro modelo descreve, em um modelo de partícula extensa, a estrutura eletromagnética efetiva do elétron criada pelas oscilações de alta-freqüência (*Zitterbewegung*) da carga elétrica do elétron puntiforme. Mostramos que o modelo prevê corretamente a magnitude do spin do elétron e fornece um fator giromagnético $g = 2$. Além disso, a auto-energia do elétron diverge logaritmicamente.

O segundo modelo é uma modificação da lagrangeana da eletrodinâmica clássica pelo acréscimo de uma derivada de segunda ordem do potencial que tem origem na criação de pares virtuais elétron-pósitron na vizinhança do elétron puntiforme. Esta modificação covariante e invariante por transformações de calibre regulariza a eletrodinâmica clássica

em pequenas distâncias e permite que a auto-força de uma partícula puntiforme seja determinada sem ambigüidade. Mostramos que na eletrodinâmica regularizada resultante, as soluções da equação de movimento não exibem auto-aceleração nem pré-aceleração contanto que a massa de origem não-eletromagnética seja não-negativa.

2 *Spin e Auto-Energia do Elétron*

Neste capítulo, apresentamos um modelo efetivo simples no qual o elétron é descrito como um disco que gira rapidamente. Neste modelo, a massa do elétron se distribui uniformemente sobre a superfície do disco enquanto sua carga elétrica é concentrada na borda do disco. Neste modelo simples, o spin do elétron, de magnitude $\hbar/2$, é puramente mecânico e o fator giromagnético é igual a 2. Além disso, a auto-energia do elétron diverge logicamente de modo semelhante ao previsto na eletrodinâmica quântica (QED). Com o objetivo de melhorar a compreensão de resultados semelhantes obtidos na eletrodinâmica quântica, interpretamos estes resultados em termos das oscilações de alta-freqüência (*Zitterbewegung*) do elétron vestido causadas pela contínua criação e aniquilação de partículas virtuais ao redor do elétron nu. Apesar destes sucessos parciais, mostramos também que o modelo prevê a existência de um momento de quadrupolo elétrico que nunca foi observado. Parte dos resultados mostrados neste capítulo foi publicada em [35].

2.1 Considerações Iniciais

O spin do elétron foi proposto na década de 1920 a partir da análise de espectros atômicos e da interpretação do princípio de exclusão de Pauli [36] feitas por Goudsmit e Uhlenbeck [8]. A interpretação do spin como o momento angular de um elétron extenso em rotação era tentadora mas, segundo Goudsmit [37], Lorentz a teria descartado argumentando que a auto-energia do elétron sairia errada e que seria incompatível com a eletrodinâmica clássica. Podemos apenas conjecturar acerca da natureza precisa do argumento de Lorentz mas é possível que Lorentz tenha usado um modelo para o elétron no qual tanto sua massa m quanto sua carga elétrica e estivessem distribuídas uniformemente por uma casca esférica rígida cujo raio a fosse da mesma ordem de grandeza do raio clássico do elétron $r_0 = e^2/mc^2$.

Um primeiro cálculo para a auto-energia do elétron poderia ignorar o fato de que a carga do elétron neste modelo está em movimento. Desta forma, considerando apenas a

parte eletrostática da densidade de energia do campo eletromagnético, a auto-energia W_E do elétron é dada por [38, 39]

$$W_E = \frac{1}{8\pi} \int \|\mathbf{E}\|^2 d^3x. \quad (2.1)$$

Como

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r} \mathbf{e}_r \quad (2.2)$$

na região exterior ao elétron e $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ na região interior ao elétron, vemos que

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}. \quad (2.3)$$

Assim, para que toda a massa do elétron fosse de origem eletromagnética seria preciso $W_E = mc^2$, ou seja, que $a = r_0/2$. Não se deve atribuir muita importância aos fatores numéricos neste resultado ou na discussão a seguir. À parte o fato de que ignoramos a parte magnética da energia eletromagnética, cada um dos diversos modelos de elétron que poderiam ser usados produziria fatores numéricos distintos. Apesar dos fatores numéricos, deve-se notar que, neste modelo clássico, a auto-energia do elétron divergiria linearmente no limite de partícula puntiforme em que $a \rightarrow 0$.

Se supusermos que a casca gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{e}_z$ constante, seu spin $\mathbf{S}$ pode ser facilmente calculado. O elemento de massa $dm = \sigma d^2x$ localizado no ponto $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_r$ da casca gira com velocidade

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \\ &= a\omega_0 \sin\theta \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.4)$$

e sua contribuição $d\mathbf{S}$ para o spin da distribuição é dada por

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \sigma \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} d^2x \\ &= \sigma \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) d^2x \\ &= \sigma ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}) d^2x \\ &= \sigma (a^2\boldsymbol{\omega} - a\omega_0 \cos\theta \mathbf{r}) d^2x. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para calcular o momento angular intrínseco $\mathbf{S}$, basta integrar $d\mathbf{S}$ sobre a casca esférica de raio a . O resultado é

$$\mathbf{S} = \frac{2}{3} ma^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.6)$$

Para que a magnitude de $\mathbf{S}$ seja igual à magnitude $\hbar/2$ do spin do elétron exigida para

explicar o efeito Zeeman, é preciso que

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 3 \frac{\lambda_C}{r_0^2} c \\ &= 3 \alpha^{-1} \frac{c}{r_0}\end{aligned}\tag{2.7}$$

na qual $\lambda_C = \hbar/mc$ é o comprimento de onda Compton do elétron e $\alpha = e^2/\hbar c = r_0/\lambda_C$ é a constante de estrutura fina. Isso significa que a velocidade v_{equador} no equador do elétron ($a = r_0/2$) é dada por

$$\begin{aligned}v_{\text{equador}} &= \omega_0 r_0 / 2 \\ &= \frac{3}{2} \frac{\lambda_C}{r_0} c \\ &= \frac{3}{2} \alpha^{-1} c \\ &\approx 2 \times 10^2 c\end{aligned}\tag{2.8}$$

que é certamente inaceitável.

Este resultado não deve, porém, ser tomado por seu valor de face. Se a massa eletromagnética for responsável por apenas uma fração κ da massa observada do elétron, o raio a do elétron poderia ser tão grande quanto $r_0/2\kappa$ e a velocidade no equador do elétron poderia ser reduzida por um fator κ . Não há como estimar com precisão a fração da massa do elétron que é de origem eletromagnética. Contudo, hádrõs como os mésons π^0 , π^+ e π^- são essencialmente idênticos no que diz respeito à interação forte e são distintos apenas por seu comportamento frente à interação eletromagnética. É razoável supor que a diferença entre a massa do méson π^0 eletricamente neutro ($m_{\pi^0} \approx 135,0 \text{ MeV}$) e as massas dos mésons π^+ e π^- eletricamente carregados ($m_{\pi^\pm} \approx 139,6 \text{ MeV}$) seja de origem eletromagnética. Neste caso, a contribuição eletromagnética para a massa observada do méson π pode ser estimada em 3%.

Ao contrário dos mésons π , o elétron não sofre os efeitos da interação forte e é plausível que a fração de sua massa que é de origem eletromagnética seja no mínimo comparável à dos mésons π . Se κ for tão pequeno quanto 0,05, ainda ficamos com uma velocidade de aproximadamente $10c$ no equador do elétron. Por outro lado, o raio do elétron não poderia ser maior do que o raio clássico $r_0 \approx 2,82 \times 10^{-15} \text{ m}$ pois já era bem sabido [40] que o elétron era certamente menor do que 10^{-15} m . Desta forma, era difícil conciliar a noção de um elétron girante com os modelos clássicos para a auto-energia do elétron.

Em 1928, Dirac [9] mostrou que o spin do elétron era uma consequência natural da

mecânica quântica relativística aplicada a uma partícula puntiforme. A equação de onda relativística de Dirac também previa que o fator giromagnético

$$g = \frac{2mc}{e} \frac{\mu}{S}, \quad (2.9)$$

do elétron, que descreve a estrutura magnética da partícula ao medir a razão entre as magnitudes μ do momento de dipolo magnético e S do spin, seria igual a 2 para o elétron. Experimentalmente [41], o elétron possui um fator giromagnético $g \approx 2,00232$ levemente maior do que o previsto pela teoria de Dirac. Na eletrodinâmica quântica, a teoria de Dirac é corrigida por meio de processos radiativos e o elétron puntiforme é vestido por uma nuvem formada por partículas virtuais como fótons e pares elétron-pósitron. A interação entre o elétron nu, puntiforme, e sua nuvem de partículas virtuais é suficiente para explicar a anomalia no fator giromagnético do elétron.

2.2 Um Modelo Efetivo para o Elétron

Um modelo efetivo para o spin e para a auto-energia do elétron pode ser criado a partir do estudo das oscilações de alta-frequência (*Zitterbewegung*) da carga elétrica do elétron percebidas por Schrödinger [42] na teoria de Dirac. No contexto da teoria de Dirac, pode-se interpretar o *Zitterbewegung* como tendo origem nas relações de comutação entre os operadores posição $\mathbf{r}$ da carga elétrica, velocidade $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\alpha}$ da carga elétrica e momento $\mathbf{p}$ do elétron. Tanto a posição $\mathbf{r}$ quanto a velocidade da carga elétrica podem ser especificados simultaneamente pois os operadores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ comutam. Da mesma forma, tanto a velocidade $\mathbf{v}$ da carga quanto o momento $\mathbf{p}$ do elétron comutam e podem ser determinados simultaneamente. Porém, os operadores posição $\mathbf{r}$ da carga elétrica do elétron e momento $\mathbf{p}$ do elétron não comutam e dão origem a um movimento de alta-frequência com velocidade c da carga elétrica do elétron em torno de um centro de massa que se move como uma partícula relativística puntiforme com velocidade $\mathbf{p}/m$.

Huang [43] investigou o comportamento médio da posição $\mathbf{r}$ da distribuição de carga elétrica do elétron em um estado localizado no espaço. Para tanto, usou como estado inicial $\psi_0(\mathbf{r})$ um pacote gaussiano de ondas planas dado por

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{N}_\varepsilon(r) \quad (2.10)$$

com

$$\mathcal{N}_\varepsilon(r) = (2\pi\varepsilon^2)^{-3/2} e^{-r^2/2\varepsilon^2} \quad (2.11)$$

e $r = \|\mathbf{r}\|$. Este pacote representa um elétron localizado em repouso na origem com spin na direção positiva do eixo z .

O parâmetro ε é uma medida da extensão espacial inicial do pacote e deve ser escolhido de modo adequado para que o pacote não se disperse muito rapidamente conforme evolui no tempo. Se $\varepsilon \lesssim \lambda_C$, a contribuição de ondas de alta-freqüência cujos momentos $p \gtrsim mc$ seria importante e o pacote se dispersaria muito rapidamente. Porém, se $\varepsilon \gg \lambda_C$, as ondas de baixa-freqüência cujos momentos $p \ll mc$ seriam as principais responsáveis pela formação do pacote inicial $\psi_0(\mathbf{r})$. Deste modo, o pacote se dispersaria lentamente e seria possível apreciar o efeito das oscilações de alta-freqüência. Uma consequência desta escolha é que a participação dos estados de energia negativa na formação do pacote de ondas é muito pequena. Estudando a evolução temporal do pacote de ondas, Huang mostrou que cada onda plana contribui com um movimento que é circular no plano xy e cujo raio é o comprimento de onda Compton λ_C do elétron. Porém, por ter usado apenas os estados de energia positiva, há um cancelamento dos movimentos entre as diversas ondas que compõem o pacote e o valor esperado do operador posição $\mathbf{r}$ da carga elétrica é nulo.

É importante salientar que seriam necessárias tanto ondas associadas a estados de energia positiva (elétrons) quanto ondas associadas a estados de energia negativa (pósitrons) no processo de localização da partícula dentro de um comprimento de onda Compton do elétron por meio de um pacote de ondas. A interferência entre os estados de energia negativa e os estados de energia positiva garante que o *Zitterbewegung* sobrevive como uma oscilação de alta-freqüência no movimento do pacote de ondas [44]. Sem eles, não há interferência entre os estados de energia positiva e os estados de energia negativa e as oscilações de alta-freqüência desaparecem. No contexto da eletrodinâmica quântica, diríamos que a criação e a aniquilação de pares virtuais elétron–pósitron na vizinhança do elétron nu é a responsável pelo movimento oscilatório de alta-freqüência da carga elétrica do elétron.

Estas interpretações são reforçadas por análises mais recentes do *Zitterbewegung* da carga do elétron [45–48]. Em especial, Ohanian [49], seguindo uma sugestão contida em um antigo trabalho de Belinfante [50], mostrou que tanto o spin do elétron quanto o spin do fóton podem ser entendidos como resultantes de um fluxo circulante de energia ou de uma densidade de momento de seus respectivos campos em torno do centro de massa

da distribuição. Na mesma linha, Gordon mostrou que o momento de dipolo magnético do elétron podia ser entendido como resultante do fluxo circulante de carga elétrica no campo do elétron [51]. Em ambos os casos, não se trata de buscar uma estrutura interna ao elétron mas de entender como a estrutura de seu campo é capaz de dar origem às propriedades observadas da partícula.

Em 1938, Hönl [52] propôs um modelo clássico para o spin do elétron baseado no *Zitterbewegung*. Em seu modelo, o elétron é tratado como uma partícula puntiforme que se move com a velocidade da luz em um círculo de raio $\lambda_C/2$. Isto é suficiente para que seu spin tenha magnitude $\hbar/2$ mas, previsivelmente, o momento de dipolo magnético apresenta um fator giromagnético $g = 1$ compatível com um momento angular orbital e, portanto, incorreto para a descrição da relação entre momento de dipolo magnético e spin. Um modelo sensivelmente mais sofisticado do que o de Hönl pode ser encontrado no trabalho de Barut e Zanghi [48], que resolve algumas das dificuldades encontradas anteriormente por Grossmann e Peres [53] ao tentar deduzir o sistema clássico diretamente da equação de Dirac. Barut e Zanghi representam o elétron por meio de um sistema dinâmico clássico que possui tanto as variáveis canônicas usuais para o quadrivetor posição x^μ da carga elétrica e para o quadrivetor energia-momento p^μ quanto duas variáveis clássicas espinoriais conjugadas para representar graus de liberdade associados ao spin da partícula.

A motivação básica de todos estes trabalhos acerca de modelos clássicos para o elétron era adquirir uma intuição adicional da física responsável pelas propriedades das partículas elementares. É com este espírito que consideramos um modelo efetivo simples para o elétron no qual consideramos que sua distribuição de carga elétrica gira rapidamente ao redor de seu centro de massa, como na análise de Huang [43]. A carga elétrica girante dá origem a correntes paralelas muito intensas que se atraem mutuamente e tendem a achatar a distribuição de carga elétrica da partícula. Por outro lado, a força elétrica de repulsão entre as diversas partes eletricamente carregadas da partícula tende a afastar a carga elétrica do centro de massa, concentrando-a nas bordas da partícula. A combinação dos dois efeitos deve produzir uma distribuição de carga elétrica no formato de uma espécie de pequeno toro de raio interno $\varepsilon \ll \lambda_C$ e raio externo igual ao comprimento de onda Compton λ_C do elétron como sugerido pela análise do *Zitterbewegung* da carga elétrica do elétron. Ademais, seguindo a análise do *Zitterbewegung*, vamos supor que a borda mais externa do toro gira com velocidade igual a c . Não há motivo para supor que a massa do elétron deva ter distribuição semelhante à da carga elétrica. Em nosso modelo, suporemos que a massa do elétron é distribuída uniformemente pela superfície de um disco rígido fino de raio igual ao comprimento de onda Compton λ_C do elétron e cuja borda gira com

velocidade c .

2.3 Determinação do Spin do Elétron

No modelo efetivo esboçado na Seção 2.2, a densidade superficial de massa σ é constante e dada por $\sigma = m/\pi\lambda_C^2$. Então, é simples determinar o momento angular intrínseco da distribuição de massa. A contribuição do elemento de massa $dm = \sigma d^2x$ localizado no ponto $\mathbf{r}$ para o spin $\mathbf{S}$ da partícula é

$$d\mathbf{S} = \sigma \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} d^2x. \quad (2.12)$$

Como $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$ com $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{e}_z$ e $\omega_0 = c/\lambda_C$, descobrimos que a Eq. (2.12) se torna, em coordenadas cilíndricas nas quais r é a distância radial da origem no plano do disco,

$$d\mathbf{S} = \sigma \boldsymbol{\omega} r^2 d^2x. \quad (2.13)$$

Para calcular o spin da partícula, basta integrar $d\mathbf{S}$ sobre a superfície do disco. O resultado é

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \int d\mathbf{S} \\ &= 2\pi\sigma\boldsymbol{\omega} \int_0^{\lambda_C} r^3 dr \\ &= 2\pi\sigma\omega_0 \frac{\lambda_C^4}{4} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{2} mc\lambda_C \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\hbar}{2} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A Eq. (2.14) mostra que, neste modelo, o spin da partícula possui magnitude $\hbar/2$ correta. Deve-se notar, todavia, que calculamos apenas a contribuição mecânica ao spin da partícula. Como o elétron efetivo é um sistema de cargas e correntes, há momento angular armazenado no campo eletromagnético da partícula. Na Seção 2.6, mostraremos que a contribuição eletromagnética ao spin do elétron é uma grandeza que se anula quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.4 Determinação do Momento de Dipolo Magnético do Elétron

A distribuição de carga elétrica muito concentrada na borda do disco proposta em nosso modelo pode ser descrita pela densidade de carga elétrica

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi\lambda_C} \delta(z) \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \quad (2.15)$$

na qual a função delta δ_ε é definida por

$$\delta_\varepsilon(r - \lambda_C) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-(r-\lambda_C)^2/\varepsilon^2}. \quad (2.16)$$

No limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, δ_ε se torna a função delta de Dirac. Assim, a densidade de corrente $\mathbf{j}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \\ &= \varrho(\mathbf{r}) \omega r \mathbf{e}_\varphi \\ &= I \delta(z) \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.17)$$

e $I = ec/2\pi\lambda_C$ é a corrente estacionária que flui pela borda do disco.

O momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ pode ser determinado por

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{j} d^3x. \quad (2.18)$$

que se torna, em coordenadas cilíndricas e no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{j} d^3x \\ &= \frac{1}{2c} \int \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}) d^3x \\ &= \frac{1}{2c} \int \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) d^3x \\ &= \frac{1}{2c} \frac{e}{2\pi\lambda_C} \int \delta(z) \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}) d^3x \\ &= \frac{e}{2c\lambda_C} \boldsymbol{\omega} \int \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) r^3 dr \\ &= \frac{e}{2c\lambda_C} \frac{c}{\lambda_C} \lambda_C^3 \mathbf{e}_z \\ &= \frac{e\lambda_C}{2} \mathbf{e}_z \\ &= 2 \frac{e}{2mc} \frac{\hbar}{2} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Comparando a Eq. (2.19) com a Eq. (2.14), vemos que o modelo efetivo para o elétron prevê que

$$\boldsymbol{\mu} = 2 \frac{e}{2mc} \mathbf{S} \quad (2.20)$$

com um fator giromagnético $g = 2$ que descreve adequadamente a estrutura magnética do elétron quando as correções radiativas da eletrodinâmica quântica não são levadas em conta. De fato, tentar modificações *ad hoc* do modelo apenas para que, por exemplo, o fator giromagnético concorde com a correção em primeira ordem $g = 2(1 + \alpha/2\pi)$ da eletrodinâmica quântica parece um exercício fútil.

2.5 Determinação da Auto-Energia do Elétron

Vamos determinar agora a energia eletromagnética da partícula. Há duas contribuições a considerar e, ao contrário do cálculo simples de auto-energia esboçado na Seção 2.1, a energia magnética não será ignorada. A energia eletrostática associada à densidade de carga elétrica $\varrho(\mathbf{r})$ é

$$W_E = \frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\mathbf{r})\varrho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3x d^3x'. \quad (2.21)$$

Como

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi\lambda_C} \delta(z)\delta_\varepsilon(r - \lambda_C), \quad (2.22)$$

a Eq. (2.21) pode ser reescrita como uma integral que envolve apenas as distâncias radiais r e r' no plano do disco e os ângulos azimutais φ e φ' associados aos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$. Assim,

$$\begin{aligned} W_E = & \frac{e^2}{8\pi^2\lambda_C^2} \int dz\delta(z) \int dz'\delta(z') \int_0^\infty dr r \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \int_0^\infty dr' r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) \\ & \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi'))^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A mudança de variável $\phi = \varphi - \varphi'$ permite que uma das integrais angulares seja efetuada e que a Eq. (2.23) seja reescrita como

$$\begin{aligned} W_E = & 2 \frac{e^2}{4\pi\lambda_C^2} \int_0^\infty dr \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \int_0^\infty dr' r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) \\ & \times \int_0^\pi d\phi \left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos\phi \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A integral angular pode ser associada à integral elíptica completa de primeiro tipo K [54]

e a Eq. (2.24) pode ser reescrita como

$$W_E = \frac{e^2}{\pi \lambda_C^2} \int_0^\infty dr \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \int_0^\infty dr' r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) K(r'/r). \quad (2.25)$$

No limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, $r' \rightarrow r$ e $K(r'/r)$ se torna logaritmicamente divergente. Esta divergência está associada com a divergência da integral angular em $r' = r$, a qual ocorre quando $\varphi' \rightarrow \varphi$. Isso mostra que a contribuição eletrostática W_E à auto-energia do elétron diverge logaritmicamente se a carga está concentrada em um toro fino de raio interno $\varepsilon \rightarrow 0$. Quando ε é pequeno mas não-nulo, W_E pode ser aproximada pelo termo logaritmicamente divergente e é dada por

$$W_E \approx \frac{e^2}{2\pi \lambda_C} \ln\left(\frac{\lambda_C}{\varepsilon}\right). \quad (2.26)$$

A contribuição magnética para a energia da partícula pode ser escrita em uma forma semelhante à da Eq. (2.21) mas em termos da densidade de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ como

$$W_M = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3x d^3x'. \quad (2.27)$$

Como, segundo a Eq. (2.17), a densidade de corrente é dada por

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \delta(z) \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \mathbf{e}_\varphi \quad (2.28)$$

com $I = ec/2\pi\lambda_C$, a contribuição magnética para a auto-energia do elétron é

$$\begin{aligned} W_M = & \frac{e^2}{8\pi^2 \lambda_C^2} \int dz \delta(z) \int dz' \delta(z') \int_0^\infty dr r \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \int_0^\infty dr' r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) \\ & \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi'))^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

pois $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}'_\varphi = \cos(\varphi - \varphi')$.

Usando um método semelhante ao empregado no tratamento da parte eletrostática da energia da partícula, descobrimos que a Eq. (2.29) pode ser reescrita em termos das integrais elípticas completas de primeiro e de segundo tipos, K e E , como

$$W_M = \frac{e^2}{\pi \lambda_C^2} \int_0^\infty dr \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \int_0^\infty dr' r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) \left(K(r'/r) - E(r'/r) \right). \quad (2.30)$$

A integral elíptica de segundo tipo $E(r'/r)$ é uma função regular para $r' \rightarrow r$. Neste caso, a contribuição dominante para a energia magnética da partícula quando $\varepsilon \rightarrow 0$ vem da divergência logarítmica de $K(r'/r)$ para $r' \rightarrow r$. De modo análogo ao obtido no caso da energia eletrostática, esta divergência está associada à concentração da corrente em um

toro fino de raio interno $\varepsilon \rightarrow 0$ na borda do disco. Quando ε é pequeno mas não-nulo, a energia magnética pode ser aproximada pelo termo logaritmicamente divergente e, à semelhança do caso eletrostático, obtemos

$$W_M \approx \frac{e^2}{2\pi\lambda_C} \ln\left(\frac{\lambda_C}{\varepsilon}\right). \quad (2.31)$$

A auto-energia eletromagnética $W_{EM} = W_E + W_M$ da partícula é dada, em primeira aproximação, por

$$\begin{aligned} W_{EM} &\approx \frac{e^2}{\pi\lambda_C} \ln\left(\frac{\lambda_C}{\varepsilon}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} mc^2 \ln\left(\frac{\hbar}{mc\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para qualquer valor razoável de ε , a massa eletromagnética $m_{EM} = W_{EM}/c^2$ é uma fração pequena da massa m observada do elétron. Usando o fato de que $\lambda_C \approx 3,86 \times 10^{-13}$ m, descobrimos que $m_{EM}/m \approx 0,02$. Isso significa que há forças não-eletromagnéticas que produzem uma massa m_0 tal que $m = m_0 + m_{EM}$. Tais forças atrativas também podem ser necessárias para assegurar a estabilidade de uma partícula extensa eletricamente carregada [55, 56].

Dadas as limitações de um modelo clássico, não poderíamos esperar mais do que uma descrição qualitativa da auto-energia da partícula. Ainda assim, cabe notar a grande semelhança entre a auto-energia eletromagnética W_{EM} obtida em nosso modelo efetivo e dada pela Eq. (2.32) e o resultado para a auto-energia do elétron obtido por Weisskopf na eletrodinâmica quântica [15]. Weisskopf mostrou que a presença de um elétron puntiforme no vácuo, entendido no sentido da teoria de Dirac, daria origem a uma distribuição efetiva de carga elétrica em torno do elétron puntiforme. Esta distribuição de carga elétrica seria causada pela aplicação do princípio de exclusão de Pauli aos elétrons do vácuo e teria uma extensão espacial da ordem do comprimento de onda Compton λ_C do elétron. Isso foi suficiente para mostrar que a auto-energia do elétron, composta por contribuições eletrostáticas, magnéticas e de flutuações de vácuo, diverge apenas logaritmicamente como

$$W_{QED} \approx \frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} mc^2 \ln\left(\frac{\hbar}{mc} \frac{Mc}{\hbar}\right), \quad (2.33)$$

na qual M é uma massa muito maior do que a massa m do elétron. Assim, $\hbar/Mc \ll \lambda_C$ corresponde a um regularizador (*cutoff*) efetivo em pequenas distâncias na eletrodinâmica quântica. O fato de que os resultados experimentais concordam muito bem com a eletrodinâmica quântica pode ser usado para estimar um limite superior para o regularizador

$\hbar/Mc$, que deve ser menor do que 10^{-17} m [57].

Em resumo, na eletrodinâmica quântica, podemos interpretar a Eq. (2.33) como resultante da criação de pares virtuais elétron–pósitron na vizinhança do elétron nu. O elétron puntiforme repele os elétrons virtuais e é atraído pelos pósitrons virtuais. Esta nuvem de partículas virtuais veste o elétron efetivo que adquire uma distribuição extensa de carga elétrica ao seu redor. Deste modo, a divergência linear na auto-energia característica do elétron puntiforme é atenuada e se torna apenas logarítmica. Nosso modelo efetivo para o elétron sugere que o efeito dos pares virtuais é espalhar a carga elétrica do elétron e confiná-la em uma pequena região toroidal de extensão $\varepsilon = \hbar/Mc \ll \lambda_C$ cuja distância até o centro de massa da partícula é da ordem do comprimento de onda Compton λ_C do elétron. Isso garante que a divergência na auto-energia é atenuada de linear, característica de carga elétrica puntiforme, para logarítmica, característica de uma distribuição linear de carga elétrica. Como, além disso, λ_C é aproximadamente 137 vezes maior do que o raio clássico do elétron r_0 , a magnitude correta do spin e o fator giromagnético são obtidos sem que velocidades superiores à da luz sejam necessárias.

2.6 Determinação do Momento Angular Eletromagnético

Na Seção 2.3, determinamos a contribuição mecânica para o spin da partícula. Como, porém, a partícula é rodeada por campos elétricos e magnéticos produzidos pelas distribuições de carga elétrica e de corrente em sua borda, é concebível que haja uma contribuição eletromagnética ao momento angular intrínseco da partícula. De fato, é bem sabido que a magnitude do spin do fóton é o momento angular eletromagnético de uma onda eletromagnética clássica circularmente polarizada e é determinada pelas equações de Maxwell e pela condição de quantização de energia do fóton [39, 49]. Nesta seção, mostraremos que o momento angular eletromagnético do elétron é finito e que se anula quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O momento angular eletromagnético $\mathbf{J}$ é produzido pela circulação do fluxo de energia do campo eletromagnético e é dado por

$$\mathbf{J} = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}(\mathbf{r}) d^3x \quad (2.34)$$

e

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.35)$$

é o vetor de Poynting que representa o fluxo de energia do campo eletromagnético. A

interpretação de $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ é simplificada quando percebemos que a densidade de momento $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ do campo eletromagnético é dada por

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{r})}{c^2}. \quad (2.36)$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (2.34) em termos da densidade de momento do campo eletromagnético como

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{r}) d^3x. \quad (2.37)$$

Para calcular os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gerados pelas densidades efetivas de carga elétrica

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi\lambda_C} \delta(z) \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \quad (2.38)$$

e de corrente

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{ec}{e\pi\lambda_C} \delta(z) \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \mathbf{e}_\varphi \quad (2.39)$$

da partícula, podemos calcular os potenciais escalar $\Phi(\mathbf{r})$ e vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Começamos pelo potencial escalar.

O potencial escalar é dado por

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3x' \quad (2.40)$$

que, em coordenadas cilíndricas, é igual a

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{e}{2\pi\lambda_C} \int \frac{\delta(z') \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2)^{1/2}} d^3x' \\ &= \frac{e}{2\pi\lambda_C} \int_0^\infty dr' r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\left((r + r')^2 + z^2 - 2rr'(1 + \cos(\varphi - \varphi'))\right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Definindo uma nova variável angular $\phi = (\varphi - \varphi')/2 - \pi/2$ e notando que $\cos(\varphi - \varphi') = 2\sin^2\phi - 1$, podemos reescrever a Eq. (2.41) como

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{2e}{\pi\lambda_C} \int_0^\infty dr' r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) \int_0^{-\pi/2} \frac{d\phi}{\left((r + r')^2 + z^2 - 4rr' \sin^2\phi\right)^{1/2}} \quad (2.42)$$

e definindo o módulo k das integrais elípticas como

$$k^2 = \frac{4rr'}{(r - r')^2 + z^2} \quad (2.43)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{2e}{\pi\lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{-\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \\
&= -\frac{2e}{\pi\lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} F(-\pi/2, k) \\
&= \frac{2e}{\pi\lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} F(\pi/2, k)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

pois a integral elíptica de primeiro tipo $F(x, k)$ é definida como [54]

$$\begin{aligned}
F(x, k) &= \int_0^x \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \\
&= -F(-x, k).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Como, além disso, $F(\pi/2, k) = K(k)$, obtemos, finalmente

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2e}{\pi\lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} K(k). \tag{2.46}$$

Como $\mathbf{J} = J_z \mathbf{e}_z$ e $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = s_\varphi \mathbf{e}_\varphi$, apenas as componentes E_r e E_z do campo elétrico $\mathbf{E}$ são de interesse. Para calculá-las, precisamos das relações

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k}, \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3}{4r} - \frac{k^3}{4r'} \tag{2.49}$$

e

$$\frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{zk^3}{4rr'}. \tag{2.50}$$

Assim, sabendo que $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$, basta alguma álgebra para mostrar que

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \\
&= -\frac{2e}{\pi\lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} K(k) \\
&\quad \times \left(\frac{r'}{(r + r')^2 + z^2} - \frac{1}{2r} + \frac{E(k)}{2(1 - k^2)} \left(\frac{1}{r} - \frac{k^2}{2r} - \frac{k^2}{2r'} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

e que

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
&= \frac{2e}{\pi \lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} \frac{z}{(r + r')^2 + z^2} \frac{E(k)}{1 - k^2}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

O cálculo do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ é semelhante ao do potencial escalar. Desta feita, o potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3x' \tag{2.53}$$

que pode ser escrito, em coordenadas cilíndricas, como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi \lambda_C} \int \frac{\delta(z') \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2)^{1/2}} d^3x' \mathbf{e}_\varphi. \tag{2.54}$$

Comparando a Eq. (2.54) com a Eq. (2.41), descobrimos que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{2e}{\pi \lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} K(k) \mathbf{e}_\varphi. \tag{2.55}$$

Desta vez, apenas as componentes B_r e B_z do campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ são de interesse. Sabendo que $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})$, basta mais um pouco de álgebra para mostrar que

$$\begin{aligned}
B_r &= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\
&= -\frac{2e}{\pi \lambda_C} \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} \frac{z}{(r + r')^2 + z^2} \frac{E(k)}{1 - k^2}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Já a expressão para a componente B_z é um pouco mais complexa:

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\
&= \frac{1}{r} \left(A_\varphi + r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) \\
&= \frac{2e}{\pi \lambda_C} \left(\int_0^\infty dr' \frac{r'}{r} \frac{\delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} K(k) + \int_0^\infty dr' \frac{r' \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C)}{((r + r')^2 + z^2)^{1/2}} K(k) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{r'}{(r + r')^2 + z^2} - \frac{1}{2r} + \frac{E(k)}{2(1 - k^2)} \left(\frac{1}{r} - \frac{k^2}{2r} - \frac{k^2}{2r'} \right) \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Tendo obtido os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gerados pelas distribuições de carga elétrica e de corrente da partícula, é uma tarefa simples, porém muito traba-

lhosa, determinar o momento angular eletromagnético $\mathbf{J}$. É preciso lembrar que estamos interessados em $\mathbf{J}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Neste caso, o termo dominante para $k \rightarrow 1$ tem a forma

$$\mathbf{J} \approx \frac{8\alpha}{\pi} \frac{\varepsilon^2}{\lambda_C^2} \frac{K(k)E(k)}{64} \hbar \mathbf{e}_z. \quad (2.58)$$

Ainda que a integral elíptica completa de segundo tipo $E(k)$ seja regular quando $k = 1$, a integral elíptica completa de primeiro tipo $K(k)$ diverge logaritmicamente quando $k \rightarrow 1$. Assim, para ε pequeno mas não-nulo, o momento angular eletromagnético se comporta como

$$\mathbf{J} \approx \frac{\alpha}{16\pi} \frac{\varepsilon^2}{\lambda_C^2} \ln\left(\frac{\lambda_C}{\varepsilon}\right) \hbar \mathbf{e}_z. \quad (2.59)$$

Isso é suficiente para garantir que $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{0}$ no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, apenas a contribuição mecânica é relevante e pode-se ignorar a contribuição eletromagnética ao spin da partícula. A contribuição mecânica, por sua vez, tem origem na circulação do fluxo de energia do campo de Dirac do elétron. Em nosso modelo, o fluxo de energia do campo de Dirac é representado pelo disco girante de massa m . Deste modo, a determinação do spin da partícula mostrado na Seção 2.3 e a determinação do fator giromagnético da Seção 2.4 são justificadas *a posteriori*.

2.7 Determinação do Momento de Quadrupolo Elétrico

Nesta seção, mostraremos que o modelo efetivo para o elétron prevê a existência de um momento de quadrupolo elétrico que, até onde sabemos, não existe.

Não é difícil ver que uma distribuição de carga elétrica concentrada em um pequeno toro na borda de um disco não possui simetria esférica e deve, portanto, possuir um momento de quadrupolo elétrico não-nulo. De fato, como a carga elétrica da partícula, de sinal negativo, está concentrada no plano perpendicular ao eixo de simetria axial da distribuição, é fácil ver que o momento de quadrupolo elétrico principal $Q_0 = Q_{33}$ é positivo.

O momento de quadrupolo elétrico de traço nulo é definido como um tensor cujas componentes são dadas por

$$Q_{ij} = \int \varrho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) d^3x'. \quad (2.60)$$

Como a densidade de carga elétrica

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi\lambda_C} \delta(z) \delta_\varepsilon(r - \lambda_C) \quad (2.61)$$

é axialmente simétrica em torno do eixo z , $Q_{11} = Q_{22}$, e só precisamos determinar o momento de quadrupolo elétrico Q_{33} :

$$\begin{aligned} Q_{33} &= \int \varrho(\mathbf{r}') (2z'^2 - r'^2) d^3x' \\ &= \frac{e}{2\pi\lambda_C} \int \delta(z') \delta_\varepsilon(r' - \lambda_C) (2z'^2 - r'^2) d^3x'. \end{aligned} \quad (2.62)$$

A integração pode ser realizada facilmente em coordenadas cilíndricas e o resultado é

$$Q_{33} = -e\lambda_C^2. \quad (2.63)$$

Como $\lambda_C \approx 3,86 \times 10^{-13} \text{ m}$, vemos que a magnitude do momento de quadrupolo elétrico previsto é da ordem de $1,50 \times 10^3 \text{ eb}$, que é mais de cem vezes maior do que os maiores momentos de quadrupolo nuclear [58]. Dificilmente um momento de quadrupolo tão grande em uma partícula tão estudada como o elétron conseguiria passar despercebido.

Para entender este resultado, convém lembrar que o modelo efetivo proposto tem origem no *Zitterbewegung* da carga elétrica do elétron. Porém, o que modelamos foi o movimento do operador posição $\mathbf{r}$ da carga ou, equivalentemente, o movimento de uma das ondas que compõem um pacote de ondas de extensão finita no espaço como o dado pela Eq. (2.10). Quando o valor esperado do operador posição é calculado em um pacote de ondas de extensão $\varepsilon \gg \lambda_C$, o *Zitterbewegung* da carga elétrica desaparece [43] por conta da superposição entre as diversas ondas que compõem o pacote. Se, porém, o valor esperado de $\mathbf{r}$ for calculado em um pacote de ondas de extensão $\varepsilon \lesssim \lambda_C$, então a interferência entre os estados de energia positiva e os estados de energia negativa fazem o *Zitterbewegung* se mostrar como uma oscilação de alta-frequência do movimento do pacote como um todo [44]. Em ambos os casos, não há motivo para o aparecimento de um momento de quadrupolo elétrico.

3 *Auto-Força do Elétron*

Neste capítulo, apresentamos um modelo regularizado para a eletrodinâmica clássica no qual é alterado apenas o comportamento do campo eletromagnético em pequenas distâncias. Neste modelo, as equações de Maxwell ainda são locais e lineares no campo eletromagnético e a lagrangeana é invariante tanto por transformações de Lorentz quanto por transformações de calibre. No contexto deste modelo regularizado para a eletrodinâmica, determinamos a auto-força eletromagnética que age sobre uma partícula puntiforme, entendida como o limite de uma partícula extensa, e mostramos que a equação de movimento resultante não apresenta soluções com auto-aceleração ou com pré-aceleração. Parte dos resultados mostrados neste capítulo foi publicada em [59].

3.1 Considerações Iniciais

O movimento de um sistema composto por cargas elétricas, correntes e campo eletromagnético costuma ser tratado sempre de modo aproximado. Ora o campo eletromagnético é tratado como especificado e o efeito deste campo eletromagnético sobre as cargas elétricas e sobre as correntes é determinado, ora as cargas elétricas e as correntes é que são tratadas como especificadas e o campo eletromagnético resultante é determinado [38].

Quando uma partícula eletricamente carregada é acelerada, há emissão de radiação eletromagnética que transporta momento, energia e momento angular. Conseqüentemente, o movimento da partícula é afetado pela força de reação de radiação. Na maior parte das vezes, a correção introduzida pela força de reação de radiação é pequena e pode ser ignorada com segurança. Outras vezes, contudo, a força de reação de radiação não pode ser ignorada. Isso é especialmente verdadeiro em fenômenos nos quais a emissão de radiação desempenha um papel importante. Ainda assim, nestes casos, é comum não haver interesse pelos detalhes do movimento do sistema radiativo. Neste particular, o estudo da radiação síncrotron é uma importante exceção [60].

A determinação da força de reação de radiação costuma ser feita a partir da conservação da energia. Primeiro, a potência P emitida por uma partícula eletricamente carregada é determinada. Para tanto, deve-se calcular o campo eletromagnético associado a uma partícula em movimento usando os potenciais retardados de Liénard–Wiechert para o potencial escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}', t')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| - c(t - t')) d^3x' dt', \quad (3.1)$$

e para o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| - c(t - t')) d^3x' dt'. \quad (3.2)$$

Tipicamente, o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.3)$$

e o campo magnético

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (3.4)$$

podem ser divididos em um campo de velocidade, proporcional a $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2$, e um campo de aceleração, proporcional a $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$. Apenas o campo de aceleração contribui para a emissão de radiação. Em seguida, o fluxo de energia do campo eletromagnético é calculado por meio do vetor de Poynting

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (3.5)$$

e a distribuição angular de energia emitida é determinada por

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \quad (3.6)$$

na qual $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ e

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (3.7)$$

O cálculo termina com a integração de $dP/d\Omega$ sobre o ângulo sólido e o resultado é a fórmula de Larmor para a potência emitida por uma partícula de carga elétrica e e aceleração $\dot{v}$

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2. \quad (3.8)$$

Por simplicidade, limitamos a discussão ao caso não-relativístico mas não há maiores dificuldades em estender estas idéias ao caso relativístico.

Após haver determinado a potência P emitida por uma carga acelerada, basta exigir

que o trabalho realizado pela força de reação de radiação $\mathbf{F}_r$ entre os instantes de tempo t_1 e t_2 , escolhidos arbitrariamente, compense a energia emitida pela partícula neste mesmo intervalo de tempo. Com a potência dada pela Eq. (3.8), isso é equivalente a

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} dt = - \int \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt. \quad (3.9)$$

A integral do lado direito da Eq. (3.9) pode ser realizada por meio da técnica de integração por partes e o resultado é

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} dt = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt - \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \Big|_{t_1}^{t_2} \right). \quad (3.10)$$

O argumento comumente encontrado [38] é que se o movimento da partícula fosse periódico ou se $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0$ nos instantes de tempo arbitrários t_1 e t_2 , então o segundo termo poderia ser desconsiderado e poderíamos escrever

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0. \quad (3.11)$$

A análise da Eq. (3.11) permitiria identificar a força de reação de radiação $\mathbf{F}_r$ como

$$\mathbf{F}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (3.12)$$

Neste caso, a equação de movimento para uma partícula de massa m e carga elétrica e na presença de uma força externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ seria dada por

$$m\dot{\mathbf{v}} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (3.13)$$

que é uma equação diferencial para a velocidade de segunda ordem no tempo ou de terceira ordem no tempo para a posição $\mathbf{r}$. Esta equação foi obtida por Lorentz [61] no caso não-relativístico e por Dirac [62] no caso relativístico e é conhecida como equação de Lorentz–Dirac. Equações diferenciais de ordem tão elevada como a equação de Lorentz–Dirac não são comuns na dinâmica.

Há vários problemas bem conhecidos com este resultado. Um dos mais evidentes é a existência de soluções com auto-aceleração (*runaways*) mesmo na ausência de qualquer força externa. Em uma dimensão e na ausência de força externa, a Eq. (3.13) se torna

$$m\dot{v} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v} = 0, \quad (3.14)$$

que admite uma solução que exhibe uma aceleração exponencialmente crescente como

$$\dot{v} = a_0 e^{t/\tau_0} \quad (3.15)$$

na qual

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \quad (3.16)$$

é um tempo característico associado a processos radiativos. Pode-se argumentar que esta solução só é admissível se satisfizer a exigência de que $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Neste caso, seria preciso escolher $a_0 = 0$ e a partícula permaneceria com aceleração nula.

Esta solução, porém, não é realmente satisfatória por dois motivos. Primeiramente, é estranho que a força de reação de radiação

$$\mathbf{F}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (3.17)$$

deduzida segundo a hipótese de que $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0$ ainda produza uma solução que não satisfaça automaticamente esta condição. O segundo motivo, contudo, é bem mais importante. Nem sempre é possível eliminar a auto-aceleração da solução como é bem ilustrado pelo caso em que a força externa exerce um impulso I_0 concentrado no instante de tempo $t = 0$, por exemplo. Neste caso, $F_{\text{ext}} = I_0 \delta(t)$ e a partícula está livre da ação de força externa em todos os instantes de tempo exceto em $t = 0$. Se supusermos que a partícula está em repouso antes da aplicação da força externa, então $v(t) = 0$ para $t < 0$. Por outro lado, $v(t) = a_0 \tau_0 e^{t/\tau_0}$ para $t > 0$. Como há uma força impulsiva agindo sobre a partícula em $t = 0$, é preciso levar em conta a variação do momento da partícula em $t = 0$:

$$I_0 = mv(t \rightarrow 0^+) - mv(t \rightarrow 0^-). \quad (3.18)$$

Como $v(t \rightarrow 0^-) = 0$ e como $v(t \rightarrow 0^+) = a_0 \tau_0$, concluímos que a aceleração

$$a_0 = \frac{I_0}{m\tau_0} \quad (3.19)$$

deve, necessariamente, ser não-nula e que, para $t > 0$

$$\dot{v}(t) = \frac{I_0}{m\tau_0} e^{t/\tau_0} \quad (3.20)$$

e a auto-aceleração é obtida.

Curiosamente, a auto-aceleração não é, necessariamente, incompatível com a conservação da energia. O ganho sem limites em energia eletromagnética no campo de radiação pode ser compensado por uma redução igualmente sem limites da energia cinética

da partícula à medida que sua velocidade aumenta desde que a massa m_0 de origem não-eletromagnética da partícula seja negativa [63]. Como veremos na Seção 3.2, este é o caso para partículas puntiformes na eletrodinâmica clássica uma vez que a auto-energia eletromagnética é divergente. Assim, auto-aceleração não é um mero artifício matemático mas parece ser uma consequência inevitável da equação de movimento do elétron puntiforme.

Um tratamento completamente relativístico é insuficiente para eliminar o problema da auto-aceleração. Usando argumentos baseados nas leis de conservação para o campo eletromagnético, Dirac [62] mostrou que a força de reação de radiação é dada por

$$F_r^\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{v}^\mu - \frac{\dot{v}^\nu \dot{v}_\nu}{c^2} v^\mu \right), \quad (3.21)$$

resultado que havia sido inferido anos antes por Abraham [64] e por von Laue [65] por generalização relativística da Eq. (3.13). Nesta equação, o termo proporcional a $\ddot{v}$ é conhecido como termo de Schott [66] enquanto o termo proporcional a $-v$ comporta-se como uma força viscosa e é o termo de Larmor [67] ou termo de reação de radiação propriamente dito [55,56]. Dirac também mostrou que a equação de movimento da partícula submetida à força externa F_{ext}^μ é dada por

$$m\dot{v}^\mu - F_r^\mu = F_{\text{ext}}^\mu. \quad (3.22)$$

Basta multiplicar a Eq. (3.22) por $\dot{v}_\mu$ e contrair os índices para ver que, no caso de uma partícula livre ($F_{\text{ext}}^\mu = 0$),

$$m\dot{v}^\mu \dot{v}_\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}^\mu \dot{v}_\mu \quad (3.23)$$

pois $v^\mu \dot{v}_\mu = 0$ uma vez que, por um lado,

$$v^\mu \dot{v}_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (v^\mu v_\mu) \quad (3.24)$$

e, por outro lado, $d(v^\mu v_\mu)/d\tau = 0$ dado que $v^\mu v_\mu = -c^2$. Além disso, como

$$\ddot{v}^\mu \dot{v}_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\dot{v}^\mu \dot{v}_\mu), \quad (3.25)$$

a Eq. (3.23) pode ser reescrita como

$$\dot{v}^\mu \dot{v}_\mu = \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{d\tau} (\dot{v}^\mu \dot{v}_\mu). \quad (3.26)$$

É fácil resolver a Eq. (3.26) para obter

$$\dot{v}^\mu \dot{v}_\mu \sim e^{2\tau/\tau_0} \quad (3.27)$$

e concluir que a auto-aceleração continua presente nas soluções da Eq. (3.22). Ao contrário do tratamento não-relativístico, porém, a velocidade da partícula não aumenta ilimitadamente mas se aproxima cada vez mais da velocidade da luz. Outras soluções para a equação de Lorentz–Dirac têm sido obtidas [55, 68, 69].

O fato de que a Eq. (3.13) ou a Eq. (3.22) são equações diferenciais para a posição de terceira ordem no tempo é, às vezes, apontado como o responsável pela existência de auto-aceleração em suas soluções. Para tentar remediar esta situação, pode-se tentar transformá-las em equações integrodiferenciais. Para tal, usa-se o fator integrante e^{-t/τ_0} juntamente com a condição assintótica

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (3.28)$$

para integrar a Eq. (3.13) e o resultado, obtido por Dirac [62] e por Haag [70], é

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_t^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') e^{-(t'-t)/\tau_0} dt'. \quad (3.29)$$

Nesta equação, a aceleração da partícula em qualquer instante de tempo t depende de uma média ponderada das magnitudes da força externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ em instantes posteriores a t , uma evidência de um efeito de não-localidade temporal na equação de Lorentz–Dirac. Esta não-localidade temporal não constitui necessariamente uma violação de causalidade. Como discutido por Rohrlich [55], há três definições de causalidade envolvidas. A mais simples é a causalidade associada com a relatividade e com a velocidade de propagação de sinais. Contanto que o tratamento dado à questão seja completamente covariante, esta forma de causalidade está necessariamente assegurada.

Se causalidade for equivalente a previsibilidade, então nada estranho estaria realmente acontecendo pois seria possível prever a trajetória da partícula uma vez conhecida a força. Segundo este ponto de vista, a estranheza associada ao fato de que é preciso conhecer o comportamento da força em instantes de tempo posteriores ao instante de tempo de interesse deriva de nosso desejo de querer entender a força como a causa da aceleração em vez de admitir que as duas estão apenas, de algum modo, associadas [63].

Por outro lado, se causalidade for identificada com ausência de efeitos avançados, então a pré-aceleração seria evidência de existência de fenômenos não-causais na eletrodinâmica clássica. Quanto à magnitude da não-causalidade presente na equação de Lorentz–Dirac, o fator $e^{-(t'-t)/\tau_0}$ na Eq. (3.29) garante que o efeito de pré-aceleração só é relevante em pequenos intervalos de tempo de duração da ordem de τ_0 após t . Para fenômenos cujos tempos característicos são maiores do que τ_0 , a reação de radiação pode, usualmente, ser

ignorada. Para o elétron, $\tau_0 \approx 6,3 \times 10^{-24}$ s e, na maior parte dos casos que pertencem ao domínio de fenômenos da eletrodinâmica clássica, a reação de radiação, assim como a pré-aceleração, pode ser ignorada. Ainda assim, é incômodo que a partícula reaja à força antes que esta lhe seja aplicada. Parece-nos que isto é sintoma de alguma inconsistência na teoria que merece ser estudada.

Para tentar entender a origem destas inconsistências nos fundamentos da eletrodinâmica clássica, voltemos nossa atenção à dedução da força de reação de radiação. O argumento usado para desconsiderar o termo proporcional a $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \Big|_{t_1}^{t_2}$ na passagem da Eq. (3.10) para a Eq. (3.11) é um tanto criticável. Não há qualquer motivo físico pelo qual $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0$ devesse ser uma condição verdadeira em geral. Na verdade, este termo está presente na expressão relativística para a força de reação de radiação e sua interpretação é de uma potência que transfere energia da força externa para o campo de velocidade da partícula [71]. Assim, em vez de desconsiderá-lo, vamos reescrevê-lo como

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (3.30)$$

o que permite reescrever a Eq. (3.11) como

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt + \frac{e^2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt + \frac{e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt + \frac{e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{v^2} dt \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} + \frac{e^2}{3c^3} \frac{d^2}{dt^2} (v^2) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \right) \cdot \mathbf{v} dt \end{aligned} \quad (3.31)$$

Desta forma, a Eq. (3.31) sugere que a força de reação de radiação seja identificada, a menos de um vetor arbitrário que seja sempre perpendicular à velocidade, com

$$\mathbf{F}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} - \frac{e^2}{3c^3} \frac{d^2}{dt^2} (v^2) \frac{\mathbf{v}}{v^2}. \quad (3.32)$$

Como

$$\frac{d^2}{dt^2} (v^2) = 2\dot{v}^2 + 2\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.33)$$

a Eq. (3.32) ainda pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{\mathbf{v}} - \frac{\dot{v}^2 + \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right). \quad (3.34)$$

Nesta expressão para a força de reação de radiação, o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.34) é o familiar termo de Schott proporcional à aceleração e o segundo é remanescente do termo de Larmor. É curioso observar como a dedução de Lorentz da força de reação de radiação produz apenas o termo de Schott apesar de ter como base a potência emitida pela partícula que é a componente temporal do termo de Larmor.

Para movimento em uma dimensão, a força de reação de radiação se reduz a

$$F_r = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{v}^2}{v} \quad (3.35)$$

que não apresenta um termo proporcional a $\ddot{v}$. Neste caso, a solução da equação de movimento para uma partícula livre da ação de força externa

$$m\dot{v} + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{v}^2}{v} = 0 \quad (3.36)$$

é

$$v = v_0 e^{-t/\tau_0}, \quad (3.37)$$

que é exponencialmente decrescente. Neste caso, se admitirmos que a partícula estava em repouso quando $t \rightarrow -\infty$, poderemos concluir que $v = 0$ para todo instante de tempo t . Além disso, quando a partícula é submetida a uma força impulsiva $F_{\text{ext}} = I_0 \delta(t)$, um raciocínio semelhante ao que levou à Eq. (3.20), permite concluir que, para $t > 0$,

$$v = \frac{I_0}{m} e^{-t/\tau_0}. \quad (3.38)$$

Desta vez, o efeito da força de reação de radiação é o de introduzir uma memória da ação da força sobre o movimento da partícula. Esta memória pode ser entendida como resultante do relacionamento mútuo entre a partícula e o campo eletromagnético associado. O campo eletromagnético afeta o movimento da partícula, e a partícula afeta a evolução do campo. Assim, o campo que age sobre a partícula em um instante de tempo é o resultado do próprio movimento da partícula em instantes anteriores. De todo modo, esta memória é de curta duração, sendo da ordem de τ_0 , dada a grande velocidade de propagação da luz. É importante salientar que este efeito de memória também pode ser interpretado, no contexto de partículas extensas, como resultante da ação retardada de uma parte da partícula sobre a outra.

Esta expressão para a força de reação de radiação tem, contudo, vários problemas. Primeiramente, não admite uma boa generalização relativística. Ainda que

$$F_r^\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{v}^\mu - \frac{\dot{v}^\nu \dot{v}_\nu + \ddot{v}^\nu v_\nu}{c^2} v^\mu \right) \quad (3.39)$$

pareça uma tentativa promissora por ser parecida com a Eq. (3.21), pode-se ver facilmente que a Eq. (3.34) não é a parte espacial de F_r^μ dada pela Eq. (3.39) nem mesmo no limite não-relativístico. Um problema mais sério do que este é o fato de que a Eq. (3.34) é apenas uma das diversas expressões para $\mathbf{F}_r$ que poderiam ter sido obtidas pelo método indicado. Na Eq. (3.33), poderíamos ter introduzido na segunda integral qualquer termo da forma $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} / \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ na qual $\mathbf{b}$ é um vetor escolhido arbitrariamente. Neste caso, a força de reação de radiação seria modificada para

$$\mathbf{F}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{\mathbf{v}} - \frac{\dot{v}^2 + \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{b} \right). \quad (3.40)$$

Poderíamos, por exemplo, ter escolhido $\mathbf{b} = \ddot{\mathbf{v}}$ e teríamos obtido

$$\mathbf{F}_r = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{v}^2}{\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (3.41)$$

que é outra expressão para a força de reação de radiação que produz efeito de memória da ação da força.

Esta arbitrariedade na definição da força de reação de radiação parece indicar que os métodos usados, ainda que plausíveis, não são os mais indicados para resolver o problema. De fato, descobrir a força responsável por obrigar uma partícula a emitir energia com uma certa potência não parece ser um problema muito simples. Se quisermos compreender melhor o fenômeno da reação de radiação teremos de abandonar este caminho e procurar determinar a auto-força que age sobre a partícula de um ponto de vista mais fundamental do que o empregado até agora.

3.2 Modelo de Abraham–Lorentz

As tentativas resumidas na Seção 3.1 para determinar a força de reação de radiação não foram suficientes. Os fenômenos de auto-aceleração e de pré-aceleração encontrados na formulação convencional e a arbitrariedade existente em nossa formulação da força de reação de radiação são evidências da necessidade de um tratamento mais fundamental para a questão. Nesta seção, discutimos a determinação da auto-força eletromagnética que age sobre a partícula no modelo de Abraham–Lorentz.

Para determinar a auto-força de uma partícula eletricamente carregada, Abraham [72] e Lorentz [61] propuseram um modelo de partícula extensa totalmente eletromagnético com densidade de carga elétrica $\varrho(\mathbf{r})$ e densidade de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Como vimos na Seção 2.5, a massa de origem eletromagnética m_{EM} responde por apenas uma pequena

fração da massa observada m do elétron. Assim, devemos modificar as hipóteses de Abraham e Lorentz e introduzir uma massa de origem não-eletromagnética m_0 que é a principal responsável pela massa do elétron. Deste modo, o momento total do sistema físico constituído pela partícula, por seu campo eletromagnético e por campos externos $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ é composto por uma contribuição $\mathbf{p}_0$ associada à massa m_0 de origem puramente não-eletromagnética, por uma contribuição $\mathbf{p}_{\text{EM}}$ associada ao campo eletromagnético da partícula e por uma contribuição $\mathbf{G}_{\text{ext}}$ associada aos campo eletromagnético externo. É importante notar que o momento $\mathbf{p}_{\text{EM}}$ é parte tanto do momento $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_{\text{EM}}$ da partícula quanto do momento $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\text{ext}} + \mathbf{p}_{\text{EM}}$ eletromagnético.

Como este sistema é fechado, seu momento é conservado e a conservação do momento pode ser escrita, por exemplo, como

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = -\frac{d\mathbf{G}}{dt}. \quad (3.42)$$

Como, porém,

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = -\int \left(\varrho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \right) d^3x, \quad (3.43)$$

na qual $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ constituem o campo eletromagnético total que age sobre a partícula, descobrimos que a Eq. (3.43) se torna

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = \int \left(\varrho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \right) d^3x. \quad (3.44)$$

Por outro lado, voltando nossa atenção apenas para a partícula,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.45)$$

e como $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_{\text{EM}}$, concluímos que a auto-força $\mathbf{F}_{\text{auto}}$ sobre a partícula é dada por

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \int \left(\varrho \mathbf{E}_{\text{auto}} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}_{\text{auto}} \right) d^3x, \quad (3.46)$$

na qual $\mathbf{E}_{\text{auto}}$ e $\mathbf{B}_{\text{auto}}$ constituem o auto-campo eletromagnético da partícula que descreve a ação sobre a partícula do campo eletromagnético gerado por si mesma.

Por simplicidade, vamos supor que a distribuição de carga elétrica da partícula extensa de dimensão R_0 é rígida e dotada de simetria esférica. A rigidez de um objeto extenso não é necessariamente incompatível com a invariância relativística. Para compatibilizar as duas noções basta trocar a noção usual de rigidez pela noção de movimento rígido [73]. Para que uma partícula esférica execute um movimento rígido, basta que tenha uma forma esférica no sistema de referência em que estiver instantaneamente em repouso. Nos outros sistemas de referência, a partícula terá o formato de um elipsóide. Assim, vamos

trabalhar sempre no sistema de referência em que a partícula está instantaneamente em repouso e no qual a distribuição de carga elétrica exibe simetria esférica. Neste sistema, a auto-força é apenas

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \int \varrho \mathbf{E}_{\text{auto}} d^3x \quad (3.47)$$

e, como

$$\mathbf{E}_{\text{auto}} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.48)$$

podemos reescrever a auto-força como

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = - \int \varrho \left(\nabla\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d^3x. \quad (3.49)$$

Em vez de, como feito por Abraham e por Lorentz, usar as expressões de Liénard–Wiechert para os potenciais retardados, notamos que, no calibre de Lorenz [74] no qual

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (3.50)$$

o quadripotencial $A^\mu = (c\Phi, \mathbf{A})$ é determinado pela quadricorrente $j^\mu = (c\varrho, \mathbf{j})$ por meio de

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (3.51)$$

A Eq. (3.51) pode ser resolvida pela técnica da função de Green. Assim,

$$A^\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') j^\mu(\mathbf{r}', t') d^3x' dt' \quad (3.52)$$

e $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ é a função de Green para a equação

$$\square G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \quad (3.53)$$

Para assegurar a causalidade nas ações do campo eletromagnético, deve-se usar a função de Green retardada que satisfaz $G_0 = 0$ para $t < t'$. É um exercício simples mostrar que [75]

$$G_0(R, T) = \frac{1}{R} \delta(T - R/c) \quad (3.54)$$

com $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ e $T = t - t'$. O limite de partícula puntiforme é ambíguo na eletrodinâmica clássica pois $G_0(R, T)$ é o produto de duas funções singulares quando $R \rightarrow 0$.

Os cálculos necessários para completar a determinação da auto-força no modelo de Abraham–Lorentz são bastante longos. Como cálculos semelhantes serão mostrados na Seção 3.4, nos contentaremos, por enquanto, em apresentar o resultado e discutir suas principais características. Quando correções não-lineares nas derivadas temporais de $\mathbf{v}$

são desconsideradas, a auto-força é dada por

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = -\frac{2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \frac{\partial^n \dot{\mathbf{v}}}{\partial t^n} \int \varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}') R^{n-1} d^3x d^3x'. \quad (3.55)$$

Para entender o significado desta expressão, é conveniente considerar os primeiros termos da expansão. O termo $n = 0$ é

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)} = -\frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{v}} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}')}{R} d^3x d^3x' \quad (3.56)$$

e, como a integral dupla é proporcional à auto-energia eletromagnética W_{EM} da partícula dada por

$$W_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}')}{R} d^3x d^3x', \quad (3.57)$$

concluimos que

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)} = -\frac{4}{3} \frac{W_{\text{EM}}}{c^2} \dot{\mathbf{v}} \quad (3.58)$$

que, dada a identificação $W_{\text{EM}} = m_{\text{EM}} c^2$, pode ainda ser escrita como

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)} = -\frac{4}{3} m_{\text{EM}} \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.59)$$

O fator $4/3$ na Eq. (3.59) é evidência de incorreção nas propriedades de covariância relativística do modelo. Da Eq. (3.59), podemos inferir que o momento eletromagnético $\mathbf{p}_{\text{EM}}$ da partícula satisfaz

$$\mathbf{p}_{\text{EM}} = \frac{4}{3} \frac{W_{\text{EM}}}{c^2} \mathbf{v} \quad (3.60)$$

enquanto a relatividade prevê que, em geral,

$$\mathbf{p}_{\text{EM}} = \frac{W_{\text{EM}}}{c^2} \mathbf{v}. \quad (3.61)$$

A falta de covariância relativística do modelo não pode, contudo, ser atribuída ao uso de uma distribuição extensa de carga elétrica pois, como notado anteriormente, basta usar a noção de movimento rígido de Born, no lugar da noção usual de rigidez, para contornar este problema. Fermi [76], Kwal [77] e Rohrlich [55, 78] mostraram que modificações nas expressões para o momento eletromagnético e para a auto-energia eletromagnética eram suficientes para restaurar as propriedades de covariância relativística do modelo e para transformar o embaraçoso fator $4/3$ no fator 1 correto. Na Seção 3.4, veremos que o problema dos $4/3$ pode ser resolvido por meio de um procedimento de regularização covariante da eletrodinâmica em pequenas distâncias [79]. Este mesmo procedimento será usado para determinar a auto-força eletromagnética em um modelo de partícula puntiforme.

O termo $n = 1$ é dado por

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \int \varrho(\mathbf{r})\varrho(\mathbf{r}') d^3x d^3x' \quad (3.62)$$

e vê-se facilmente que

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (3.63)$$

Cada um dos termos de ordem superior à primeira é da forma

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(n)} = -\frac{2e^2}{3c^2} \frac{(-1)^n}{n! c^n} b_n(R_0) \frac{\partial^n \dot{\mathbf{v}}}{\partial t^n} \quad (3.64)$$

e depende dos detalhes da distribuição de carga elétrica por meio do coeficiente

$$b_n(R_0) = \frac{1}{e^2} \int \varrho(\mathbf{r})\varrho(\mathbf{r}') R^{n-1} d^3x d^3x'. \quad (3.65)$$

Ainda assim, é fácil ver que $b_n(R_0) = O(R_0^{n-1})$.

A evidência experimental disponível sugere que o elétron possa ser tratado com uma partícula puntiforme [57]. Neste caso, é preciso investigar o limite de partícula puntiforme da expressão da auto-força eletromagnética. Quando $R_0 \rightarrow 0$, todos os termos de ordem superior à primeira devem ser desconsiderados pois são todos $O(R_0^{n-1})$. Os únicos termos que restam são $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)}$ e $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)}$. O termo $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)}$ é independente do raio R_0 da partícula e permanece inalterado. Por sua vez, o termo $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)}$ é $O(1/R_0)$ e é, portanto, divergente quando $R_0 \rightarrow 0$. Este problema já foi encontrado na Seção 2.1, e é fruto da divergência linear da auto-energia eletromagnética em um modelo de partícula puntiforme. A solução usual [38, 55, 80, 81] envolve a renormalização da divergência da massa eletromagnética m_{EM} na massa observada m do elétron. Em termos físicos, o argumento reconhece que são necessárias forças de origem não-eletromagnética, as tensões de Poincaré [82–84], para manter a coesão do elétron e que estas forças dão origem a uma massa m_0 não-eletromagnética. Para que o elétron tenha uma massa observada $m = m_0 + m_{\text{EM}}$, é preciso que a massa m_0 seja divergente e negativa pois a massa eletromagnética m_{EM} é divergente e positiva. Como discutido na Seção 3.1, auto-aceleração é uma consequência inevitável da equação de Lorentz–Dirac se $m_0 < 0$. No caso de partículas como os hádrons, que sofrem o efeito da interação forte, as tensões de Poincaré são provocadas pelo campo de glúons. Não está claro qual interação seria responsável pela existência de tensões de Poincaré no elétron. Na Seção 3.4, veremos que a massa eletromagnética é finita em uma eletrodinâmica regularizada de modo covariante [79].

A equação de movimento do elétron na presença de uma força externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ se torna,

no limite de partícula puntiforme,

$$\left(m_0 + \frac{4}{3} m_{\text{EM}}\right) \dot{\mathbf{v}} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (3.66)$$

que é a equação de Lorentz–Dirac no regime não-relativístico. Como já discutido na Seção 3.1, esta equação apresenta uma série de fenômenos incômodos como auto-aceleração e pré-aceleração. Como na Seção 3.1, um tratamento completamente relativístico é insuficiente para eliminar estes problemas no limite de partícula puntiforme [38, 55, 56, 62, 63].

Por outro lado, estes problemas são amenizados em modelos de partículas extensas [80, 85–87], o que sugere que a causa dos problemas com a equação de Lorentz–Dirac é o abandono dos termos de ordem $n > 1$ na passagem da Eq. (3.55) para a Eq. (3.66) por conta do limite de partícula puntiforme. Abandonar estes termos sob o pretexto de que são pequenos quando $R_0 \rightarrow 0$ pode ser inconsistente uma vez que durante pequenos intervalos de tempo da ordem de τ_0 , as variações no movimento da partícula podem ser importantes. Não custa lembrar que $\tau_0 \approx 6,3 \times 10^{-24} \text{ s}$ é da ordem do tempo necessário para que a luz atravesse uma partícula de raio $r_0 \approx 2,82 \times 10^{-15} \text{ m}$. É bem sabido que a eletrodinâmica clássica não pode permanecer válida e inalterada nas distâncias e nos intervalos de tempo diminutos em que fenômenos como os de auto-aceleração e de pré-aceleração se manifestam. Assim, é possível que uma modificação da eletrodinâmica em pequenas distâncias leve a uma teoria regularizada e livre de auto-aceleração e de pré-aceleração. De fato, por conta da existência de um regularizador covariante em uma tal teoria, mostraremos na Seção 3.4 que os coeficientes b_n são essenciais para a supressão destes fenômenos indesejados e que não se anulam no limite de partícula puntiforme.

3.3 Eletrodinâmica Regularizada

Soluções que exibem um comportamento divergente como a auto-aceleração presente nas soluções da equação de Lorentz–Dirac são comuns em teorias quânticas lineares [88]. Em particular, Coleman mostrou que *runaways* ocorrem em teorias quânticas sempre que se manifestarem nas teorias clássicas correspondentes [89]. Logo, entender como eliminá-los de uma teoria clássica pode fornecer pistas valiosas para sua eliminação de teorias quânticas. Em outro trabalho [63], Coleman tratou o elétron como uma partícula puntiforme desde o início às custas da introdução de um regularizador (*cutoff*) na eletrodinâmica clássica. A introdução do regularizador, entendido apenas como um dispositivo computacional para lidar com as divergências da teoria e cujos efeitos deveriam ser desconsiderados ao fim dos cálculos, lhe permitiu deduzir sem ambigüidade a equação

de Lorentz–Dirac. No contexto da teoria quântica do elétron não-relativístico, Moniz e Sharp [90–92] mostraram que a interação do elétron puntiforme com seu próprio campo eletromagnético induz naturalmente um regularizador efetivo da ordem do comprimento de onda Compton $\lambda_C = \hbar/mc$ do elétron. Este regularizador efetivo surge em consequência da criação e da aniquilação de pares virtuais elétron-pósitron na vizinhança do elétron puntiforme, que distribuem a carga elétrica em uma região de extensão não-nula do espaço. Outros aspectos da teoria do elétron na eletrodinâmica quântica não-relativística foram subsequentemente investigados [81, 93–97].

Com base nestas evidências, acreditamos que um modo de remover a divergência na massa eletromagnética, resolver o problema dos 4/3 e eliminar soluções que exibem auto-aceleração ou pré-aceleração é pela introdução de um regularizador em pequenas distâncias que seja invariante tanto por transformações de Lorentz quanto por transformações de calibre. Nossa abordagem consiste em modificar a lagrangeana da eletrodinâmica clássica, o que leva a uma lagrangeana efetiva que incorpora os efeitos relevantes da eletrodinâmica quântica. A forma da lagrangeana efetiva pode ser restrita pela exigência de algumas poucas condições razoáveis e simples que alteram a eletrodinâmica clássica o mínimo possível. A lagrangeana deve envolver apenas grandezas locais e deve ser invariante sob transformações de calibre e sob transformações de Lorentz. Além disso, deve levar a equações de campo lineares no campo eletromagnético $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Com estas condições, a essência da eletrodinâmica clássica é preservada.

A lagrangeana mais simples que satisfaz as condições anteriores e que inclui um regularizador efetivo ℓ contém derivadas de segunda ordem no potencial eletromagnético $A^\mu = (c\Phi, \mathbf{A})$ e é dada por

$$\mathcal{L}_\ell = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\ell^2}{8\pi} \partial^\alpha F_{\mu\alpha} \partial_\beta F^{\mu\beta} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu. \quad (3.67)$$

A regularização da eletrodinâmica por meio da introdução de derivadas superiores foi proposta há muitos anos por Bopp [98], Landé [99–101] e Podolsky [102–105]. Atualmente, o método é usado na regularização de teorias de calibre [106–109] e super-simétricas [110, 111] e derivadas de ordem superior são encontradas também em teorias de cordas [112].

As modificações induzidas pela lagrangeana $\mathcal{L}_\ell$ na eletrodinâmica podem ser mais bem apreciadas pela observação das equações de campo. Como a lagrangeana $\mathcal{L}_\ell$ é função das variáveis A_ν , $\partial_\mu A_\nu$ e $\partial^\lambda \partial_\mu A_\nu$, as equações de Euler–Lagrange são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) + \partial^\lambda \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\lambda \partial_\mu A_\nu)} \right) = 0 \quad (3.68)$$

e, com auxílio da Eq. (3.67), levam a

$$(1 - \ell^2 \square)(\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) = -\frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (3.69)$$

que é equivalente a

$$(1 - \ell^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (3.70)$$

em comparação com

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (3.71)$$

da eletrodinâmica de Maxwell. Como $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ continua sendo um tensor antissimétrico, a equação

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (3.72)$$

continua sendo válida na eletrodinâmica regularizada. O regularizador ℓ modifica apenas as leis de Coulomb–Gauss e de Ampère–Maxwell alterando o relacionamento do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ com sua fonte j^μ .

Para ver que o regularizador ℓ introduz uma modificação na eletrodinâmica apenas em pequenas distâncias, convém tornar à Eq. (3.69) que, no calibre de Lorenz, pode ser escrita como

$$(1 - \ell^2 \square) \square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (3.73)$$

Escrevendo o potencial $A^\mu(x)$ como

$$A^\mu(x) = \int \tilde{A}^\mu(k) e^{ik^\nu x_\nu} d^4k \quad (3.74)$$

e a corrente $j^\mu(x)$ como

$$j^\mu(x) = \int \tilde{j}^\mu(k) e^{ik^\nu x_\nu} d^4k, \quad (3.75)$$

podemos reescrever a Eq. (3.73) como

$$-\int (k^2 + \ell^2 k^4) \tilde{A}^\mu(k) e^{ik^\nu x_\nu} d^4k = -\frac{4\pi}{c} \int \tilde{j}^\mu(k) e^{ik^\nu x_\nu} d^4k \quad (3.76)$$

com $k^2 = k^\mu k_\mu$. Da Eq. (3.76), podemos concluir que

$$\tilde{A}^\mu(k) = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{k^2(1 + \ell^2 k^2)} \tilde{j}^\mu(k), \quad (3.77)$$

que, quando comparada com a expressão equivalente na eletrodinâmica de Maxwell, mostra que o regularizador só é efetivo em pequenas distâncias ($k \rightarrow \infty$). Quando $k \rightarrow 0$, seu efeito é suprimido.

O caso eletrostático da eletrodinâmica regularizada pode ser trabalhado com relativa

facilidade. Neste caso, a Eq. (3.77) se reduz a

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\tilde{\varrho}(\mathbf{k})}{k^2(1 + \ell^2 k^2)} \quad (3.78)$$

com $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Para uma partícula puntiforme de carga elétrica e na origem,

$$\varrho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}) \quad (3.79)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varrho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x \\ &= \frac{e}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x \\ &= \frac{e}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Assim, a Eq. (3.78) se torna

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k}) = \frac{2e}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2(1 + \ell^2 k^2)} \quad (3.81)$$

e o potencial $\Phi(\mathbf{r})$ pode ser calculado a partir de

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int \tilde{\Phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k \\ &= \frac{2e}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{k^2(1 + \ell^2 k^2)} d^3k. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Os cálculos necessários não apresentam maiores complexidades e descobrimos que

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{2e}{\pi r} \left(\int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{k} dk - \ell^2 \int_0^\infty \frac{k \sin(kr)}{(1 + \ell^2 k^2)} dk \right) \\ &= \frac{e}{\pi r} \Im \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k} dk - \ell^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{ikr}}{(1 + \ell^2 k^2)} dk \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

As integrais necessárias podem ser calculadas pela técnica usual de integração de contorno no plano complexo e o resultado é

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{r} (1 - e^{-r/\ell}). \quad (3.84)$$

Para confirmar que a lagrangeana $\mathcal{L}_\ell$ modifica a eletrodinâmica de Maxwell apenas para distâncias pequenas, basta analisar a Eq. (3.84) quando $r/\ell \ll 1$. Neste caso,

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{e}{r} \quad (3.85)$$

e recuperamos a expressão usual para o potencial de uma cara puntiforme. Porém, quando $r/\ell \ll 1$,

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{e}{\ell}. \quad (3.86)$$

O fato do potencial escalar ser finito quando $r \rightarrow 0$ é uma evidência de que a auto-energia e a massa eletromagnética da partícula puntiforme são finitas no modelo regularizado da eletrodinâmica. De fato, na eletrodinâmica regularizada, não só a massa eletromagnética é finita e dada por $m_{\text{EM}} = e^2/2\ell c^2$ como o problema dos 4/3 encontra uma resolução natural, dada a natureza covariante do procedimento de regularização adotado [79], como veremos na Seção 3.4.

Antes de passar à determinação da auto-força de uma partícula puntiforme na eletrodinâmica regularizada, é interessante notar que o regularizador interfere na propagação livre do campo eletromagnético criando tanto modos propagantes de pequeno comprimento de onda quanto modos evanescentes no regime de comprimentos de onda grandes. Para vê-lo, basta tomar $j^\mu(x) = 0$ na Eq. (3.73). Assim, a Eq. (3.76) se torna

$$\int k^2 (1 + \ell^2 k^2) \tilde{A}^\mu(k) e^{ik^\nu x_\nu} d^4k = 0, \quad (3.87)$$

com $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$. Para que a Eq. (3.87) seja verdadeira a despeito de $\tilde{A}^\mu(k)$, é preciso que

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \left(1 + \ell^2 \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \right) = 0. \quad (3.88)$$

A Eq. (3.88) admite duas possíveis classes de soluções. A primeira classe é a das soluções usuais da eletrodinâmica para as quais a relação de dispersão é $\omega = kc$. Esta solução corresponde a ondas que se propagam sem dispersão com velocidade c . A outra classe de soluções satisfaz

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{\ell^2}. \quad (3.89)$$

Talvez a Eq. (3.89) seja mais familiar na forma

$$kc = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (3.90)$$

com $\omega_p = c/\ell$. A Eq. (3.90) descreve tanto a propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda quanto a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma no limite de alta-freqüência ou pequenos comprimentos de onda [38, 39]. O fenômeno não deve trazer maiores conseqüências pois a distância típica para atenuação destas ondas é $\delta \sim c/2\omega_p = \ell/2$ e se $\ell \sim \hbar/mc$, então $\delta \sim 10^{-13}$ m. Podemos seguir a analogia com a propagação em meio a um plasma um pouco mais e calcular a densidade de elétrons no

plasma como sendo

$$\varsigma = \frac{1}{4\pi\alpha\lambda_C^3} \quad (3.91)$$

$$\approx 1,90 \times 10^{32} \text{ cm}^{-3}$$

que corresponde a 2,60 partículas eletricamente carregadas em um volume esférico de raio λ_C . É difícil dizer se este número possui algum significado e poderia ser interpretado como o elétron puntiforme original e mais um par virtual ou se é apenas uma das tantas coincidências numéricas da física.

Seguindo a analogia com a propagação em guias de onda e analisando a Eq. (3.89), vemos que k é um número real apenas se $|\omega| \geq c/\ell$ e que k é um imaginário puro se $|\omega| < c/\ell$. Para completar a análise acerca do comportamento desta classe de soluções da Eq. (3.87), podemos calcular a velocidade de fase e a velocidade de grupo para as ondas associadas. A velocidade de fase é determinada pela relação

$$v_{\text{fase}}^2 = \frac{k^2}{\omega^2} \quad (3.92)$$

e a velocidade de grupo pode ser determinada por

$$\frac{1}{v_{\text{grupo}}^2} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^2 \quad (3.93)$$

e descobrimos, como sugerido pelas analogias com propagação em guias de onda ou em plasma, que $v_{\text{fase}} > c$ e $v_{\text{grupo}} < c$ para os modos propagantes, para as quais $k \in \mathbb{R}$. Por sua vez, $v_{\text{fase}} < c$ e $v_{\text{grupo}} > c$ para os modos evanescentes, para as quais $k \notin \mathbb{R}$. O regularizador altera as propriedades dielétricas do vácuo, transformando-o em uma espécie de plasma. Do ponto de vista físico, a explicação é intuitiva. A regularização proposta para a eletrodinâmica procura levar em conta, no regime clássico, fenômenos associados com a criação de pares virtuais elétron-pósitron na vizinhança do elétron puntiforme. Deste modo, as ondas eletromagnéticas interagem com estes pares virtuais e o resultado é sua propagação em um meio que é, de modo efetivo, um plasma ao redor do elétron puntiforme.

Estes resultados podem ser interpretados como indicadores da presença de duas excitações distintas na eletrodinâmica regularizada. Uma delas possui massa nula e corresponde ao fóton enquanto a outra possui massa $\hbar/c\ell$. Na Seção 3.5, veremos que esta interpretação é compatível com uma teoria quântica da eletrodinâmica regularizada.

3.4 Determinação da Auto-Força

Nesta seção, determinaremos a auto-força de uma partícula puntiforme na eletrodinâmica regularizada. Como vimos na Seção 3.2, a determinação da auto-força na eletrodinâmica de Maxwell levou a diversos problemas. Além do problema de covariância associado ao fator $4/3$ à frente da massa eletromagnética na Eq. (3.59), o limite de partícula puntiforme implicava uma massa eletromagnética linearmente divergente e o abandono de todos os termos que envolvem derivadas superiores a $\ddot{\mathbf{v}}$ na auto-força. Como discutido na Seção 3.2, este procedimento é inconsistente pois o movimento do elétron pode ser muito violento em intervalos de tempo tão curtos quanto $\tau_0 \approx 6,3 \times 10^{-24}$ s. Esta inconsistência se manifesta nas soluções da equação de Lorentz–Dirac na forma de auto-aceleração e de pré-aceleração.

Na eletrodinâmica regularizada, contudo, a massa eletromagnética é finita e exhibe as propriedades relativísticas corretas [79]. Ademais, na eletrodinâmica regularizada, a partícula puntiforme adquire muitas das propriedades das partículas extensas e é razoável supor que os termos que envolvem derivadas superiores a $\ddot{\mathbf{v}}$ na auto-força poderão ser calculados de modo consistente. Mostraremos que o cálculo consistente destes termos é suficiente para eliminar auto-aceleração e pré-aceleração das soluções da equação de movimento do elétron.

Como mostrado na Seção 3.2, no sistema de referência em que a partícula está instantaneamente em repouso, a auto-força $\mathbf{F}_{\text{auto}}$ da partícula é dada por

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \int \left(\varrho \mathbf{E}_{\text{auto}} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}_{\text{auto}} \right) d^3x, \quad (3.94)$$

na qual $\mathbf{E}_{\text{auto}}$ e $\mathbf{B}_{\text{auto}}$ são o campo eletromagnético da partícula que descreve a ação sobre a partícula do campo eletromagnético gerado por si mesma. Porém, na eletrodinâmica regularizada, o potencial A^μ satisfaz, no calibre explicitamente covariante de Lorenz, a Eq. (3.73),

$$(1 - \ell^2 \square) \square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (3.95)$$

Podemos continuar resolvendo a Eq. (3.95) pela técnica da função de Green,

$$A^\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int G_\ell(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') j^\mu(\mathbf{r}', t') d^3x' dt', \quad (3.96)$$

mas agora $G_\ell(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ é a função de Green para a equação

$$(1 - \ell^2 \square) \square G_\ell(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (3.97)$$

Como antes, para assegurar a causalidade do campo eletromagnético, deve-se usar a função de Green retardada que satisfaz $G_\ell = 0$ para $t < t'$.

Uma equação linear como a Eq. (3.97) pode ser resolvida pela técnica da transformada de Fourier. Podemos usar a representação

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik^\mu(x_\mu - x'_\mu)} d^4k \quad (3.98)$$

para a função delta de Dirac enquanto a função de Green $G_\ell(x - x')$ pode ser escrita como

$$G_\ell(x - x') = \int \tilde{G}_\ell(k) e^{ik^\mu x_\mu} d^4k. \quad (3.99)$$

Substituindo a Eq. (3.99) e a Eq. (3.98) na Eq. (3.97), obtemos

$$\tilde{G}_\ell(k) = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(1 + \ell^2 k^2)} \quad (3.100)$$

que pode ainda ser escrito, de modo mais conveniente, como

$$\tilde{G}_\ell(k) = \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + 1/\ell^2} \right). \quad (3.101)$$

Substituindo $\tilde{G}_\ell(k)$ na Eq. (3.99), obtemos

$$G_\ell(x - x') = \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\int \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{k^2} d^4k - \int \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{k^2 + 1/\ell^2} d^4k \right). \quad (3.102)$$

O primeiro termo é a função de Green retardada da eletrodinâmica de Maxwell,

$$G_0(R, T) = \frac{1}{R} \delta(T - R/c), \quad (3.103)$$

enquanto o segundo termo é uma correção introduzida pela eletrodinâmica regularizada,

$$G^{(\ell)} = \frac{c}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\Theta \left(T - \frac{R}{c} \right) J_0 \left(\frac{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}}{\ell} \right) \right) \quad (3.104)$$

com $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ e $T = t - t'$. A função de Heaviside

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ 1, & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (3.105)$$

garante que $G^{(\ell)} = 0$ para $T < R/c$ e $J_0(x)$ é a função de Bessel de ordem 0.

Com alguma álgebra e as relações $dJ_0/dx = -J_1$ e $J_0(0) = 1$, é possível mostrar que

a função de Green $G_\ell(R, T) = G_0 + G^{(\ell)}$ é dada por

$$G_\ell(R, T) = \frac{c}{\ell} \frac{\Theta(T - R/c)}{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}} J_1\left(\frac{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}}{\ell}\right) \quad (3.106)$$

ou, de modo equivalente, por

$$G_\ell(R, T) = \frac{c}{R} \Theta(T - R/c) \frac{d}{dR} J_0\left(\frac{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}}{\ell}\right) \quad (3.107)$$

ou, ainda, por

$$G_\ell(R, T) = -\frac{1}{cT} \Theta(T - R/c) \frac{d}{dT} J_0\left(\frac{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}}{\ell}\right). \quad (3.108)$$

A característica marcante da determinação da auto-força na eletrodinâmica clássica é uma expansão em potências de R/c da quadricorrente j^μ no tempo retardado $t' = t - R/c$ [38]. Em nossa formulação, isto é equivalente a uma expansão da função de Green da eletrodinâmica de Maxwell $G_0 = \delta(T - R/c)/R$ em potências de R/c seguida por uma integração em t' na Eq. (3.96). Para obter esta expansão, deve-se notar que

$$\begin{aligned} \delta(x - y) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-y)} dk \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} y^n \frac{1}{2\pi} \int k^n e^{ikx} dk \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \frac{y^n}{i^n} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} y^n \frac{d^n}{dx^n} \delta(x). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Assim, como

$$\delta(T - R/c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{R^n}{c^n} \frac{d^n}{dT^n} \delta(T), \quad (3.110)$$

vemos que

$$G_0(R, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} R^{n-1} \frac{d^n}{dT^n} \delta(T). \quad (3.111)$$

Na eletrodinâmica regularizada, temos de expandir a função de Green $G_\ell(R, T)$ dada pela Eq. (3.108). Procedendo de modo semelhante, propomos

$$G_\ell(R, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} R^{n-1} f_n(\ell/R) \frac{d^n}{dT^n} \delta(T). \quad (3.112)$$

e $f_n(\ell/R)$ são funções adimensionais que devem se reduzir a 1 quando $\ell \rightarrow 0$. Para

determiná-las, podemos multiplicar a Eq. (3.112) por T^m e integrar em T . Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} T^m G_\ell(R, T) dT &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} R^{n-1} f_n(\ell/R) \int_{-\infty}^{+\infty} T^m \frac{d^n}{dT^n} \delta(T) dT \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} R^{n-1} f_n(\ell/R) (-1)^n n! \delta_{mn} \\ &= \frac{R^{m-1}}{c^m} f_m(\ell/R) \end{aligned} \quad (3.113)$$

uma vez que

$$x^m \frac{d^n}{dx^n} \delta(x) = (-1)^n n! \delta(x) \delta_{mn}, \quad (3.114)$$

que pode ser provada por indução. Concluimos que as funções $f_n(\ell/R)$ podem ser determinadas de modo simples mas, eventualmente, trabalhoso por

$$\begin{aligned} f_n(\ell/R) &= \frac{c^n}{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} T^n G_\ell(R, T) dT \\ &= -\frac{c^{n-1}}{R^{n-1}} \int_{R/c}^{+\infty} T^{n-1} \frac{d}{dT} J_0\left(\frac{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}}{\ell}\right) dT. \end{aligned} \quad (3.115)$$

As primeiras funções $f_n(\ell/R)$ serão usadas em breve e são dadas por

$$\begin{aligned} f_0(\ell/R) &= 1 - e^{-R/\ell} \\ f_1(\ell/R) &= 1 \\ f_2(\ell/R) &= 1 + (\ell/R) e^{-R/\ell} \\ f_3(\ell/R) &= 1. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Substituindo a Eq. (3.112) na Eq. (3.95), a auto-força $\mathbf{F}_{\text{auto}}$ se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{auto}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3x \varrho(\mathbf{r}, t) \int d^3x' \int dt' \\ &\quad \times \left\{ \left(\varrho(\mathbf{r}', t') \nabla (R^{n-1} f_n) + \frac{1}{c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') R^{n-1} f_n \frac{d}{dT} \right) \frac{d^n}{dT^n} \delta(T) \right\}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Consideremos os dois primeiros termos que vêm do potencial escalar. O termo $n = 0$ é a auto-força eletrostática

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{\text{el}} = - \int \varrho(\mathbf{r}, t) \varrho(\mathbf{r}', t') \nabla \left(\frac{1}{R} (1 - e^{-R/\ell}) \right) \quad (3.118)$$

que é nula para uma distribuição esfericamente simétrica de carga elétrica. O termo $n = 1$ é identicamente nulo pois $f_1(\ell/R) = 1$. Eliminando estes dois termos da expansão,

alterando o índice de soma dos termos que vêm do potencial escalar e integrando sobre t' , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{auto}} = & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \int d^3x \varrho(\mathbf{r}, t) \int d^3x' \\ & \times \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\mathbf{r}', t) \frac{\nabla(R^{n+1} f_{n+2})}{(n+1)(n+2)} + \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) R^{n-1} f_n \right\}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Podemos usar a equação da continuidade para trocar $\partial \varrho / \partial t$ por $-\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$. Na integração sobre d^3x' , os termos que envolvem $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ podem ser integrados por partes e a expressão entre chaves ($\{\dots\}$) na Eq. (3.119) pode ser escrita como

$$\left\{ \dots \right\} = f_n R^{n-1} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) - \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla) \nabla(R^{n+1} f_{n+2})}{(n+1)(n+2)}. \quad (3.120)$$

Os primeiros dois termos da soma na Eq. (3.119) são especialmente interessantes pois são termos proporcionais a $\dot{\mathbf{v}}$ e a $\ddot{\mathbf{v}}$. O termo $n = 0$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)} = & - \frac{1}{2c^2} \int d^3x \varrho(\mathbf{r}, t) \int d^3x' \\ & \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 - e^{-R/\ell}}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) + \left(1 - e^{-R/\ell} - \frac{R}{\ell} e^{-R/\ell} \right) \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \mathbf{R} \right) \end{aligned} \quad (3.121)$$

e o termo $n = 1$ é dado por

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)} = \frac{2}{3c^3} \int d^3x \varrho(\mathbf{r}, t) \int d^3x' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t). \quad (3.122)$$

Para uma distribuição de carga elétrica em movimento rígido, a densidade de corrente é $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = \varrho(\mathbf{r}', t) \mathbf{v}(t)$ e, como a distribuição possui simetria esférica no sistema em que está instantaneamente em repouso, as únicas componentes que sobrevivem à integração são as paralelas à velocidade $\mathbf{v}$. Neste caso, o fator $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2$ pode ser trocado pelo valor médio $v^2 R^2 / 3$. Em velocidades baixas, podemos desconsiderar os termos não-lineares em v e as expressões para $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)}$ e para $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)}$ se tornam

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)} = - \frac{2\dot{\mathbf{v}}}{3c^2} \int d^3x \varrho(\mathbf{r}, t) \int d^3x' \varrho(\mathbf{r}', t) \left(\frac{1 - e^{-R/\ell}}{R} - \frac{e^{-R/\ell}}{4\ell} \right) \quad (3.123)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)} = & - \frac{2\ddot{\mathbf{v}}}{3c^3} \int d^3x \varrho(\mathbf{r}, t) \int d^3x' \varrho(\mathbf{r}', t) \\ = & \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (3.124)$$

respectivamente. Percebemos que o termo $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(1)}$ é independente das dimensões da partícula

e reproduz a força de reação da radiação do modelo de Abraham–Lorentz.

Concentremo-nos na expressão para $\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)}$. Este termo depende tanto do raio R_0 da partícula quanto do regularizador ℓ da eletrodinâmica. Como podemos inferir da Eq. (3.84), a primeira parte da integral na Eq. (3.123) é proporcional à auto-energia eletromagnética W_{EM} da partícula,

$$W_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \int \varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}') \frac{1 - e^{-R/\ell}}{R} d^3x d^3x' \quad (3.125)$$

e, no limite de partícula puntiforme [79],

$$W_{\text{EM}} = \frac{e^2}{2\ell}. \quad (3.126)$$

A segunda parte da integral na Eq. (3.123) é responsável por eliminar o fator $4/3$ à frente da massa eletromagnética $m_{\text{EM}} = W_{\text{EM}}/c^2$ e obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)} &= -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{W_{\text{EM}}}{c^2} \dot{\mathbf{v}} \\ &= -\frac{W_{\text{EM}}}{c^2} \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (3.127)$$

que possui o fator 1 compatível com a exigência de covariância relativística. Para entender a origem deste comportamento, pode-se escrever a Eq. (3.121) como

$$\mathbf{F}_{\text{auto}}^{(0)}(R_0, \ell) = -\mathcal{C}(R_0/\ell) m_{\text{EM}}(R_0, \ell) \dot{\mathbf{v}} \quad (3.128)$$

e $\mathcal{C}(R_0/\ell)$ é uma função adimensional que descreve a distribuição de carga elétrica da partícula. Pode-se mostrar que $\mathcal{C}(R_0/\ell)$ interpola suavemente entre o caso de partícula puntiforme na eletrodinâmica regularizada, quando $\mathcal{C}(0) = 1$, e o caso de partícula extensa na eletrodinâmica de Maxwell, quando $\mathcal{C}(\infty) = 4/3$ [79]. A Fig. 3.1 mostra o comportamento de $\mathcal{C}(R_0/\ell)$ para um modelo no qual a carga elétrica da partícula está concentrada em uma casca esférica de raio R_0 .

Como discutido na Seção 3.2, o abandono dos termos de ordem $n \geq 2$ no limite de partícula puntiforme leva a equação de Lorentz–Dirac a exibir fenômenos como auto-aceleração e pré-aceleração. Este problema é causado porque estes termos podem não ser pequenos em intervalos de tempo da ordem de $\tau_0 \approx 6,3 \times 10^{-24}$ s. Na eletrodinâmica regularizada, a presença do regularizador permite que os termos de ordem $n \geq 2$ sejam determinados de modo consistente mesmo no limite de partícula puntiforme.

A expressão para a auto-força é muito simplificada no limite de partícula puntiforme.

Figura 3.1: Gráfico de $\mathcal{C}(R_0/\ell)$ como função de R_0/ℓ para uma distribuição de carga elétrica concentrada em uma casca esférica de raio R_0 .

Neste caso,

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n! c^{n+2}} b_n \ell^{n-1} \frac{d^n \dot{\mathbf{v}}}{dt^n} \quad (3.129)$$

e os coeficientes b_n podem ser determinados com auxílio da Eq. (3.115) e da Eq. (3.119).

O resultado é que $b_0 = 1/2$, $b_1 = -2/3$,

$$b_n = \frac{(-1)^{n/2}(n+1)}{(n-1)(n+2)} ((n-1)!!)^2 \quad (3.130)$$

se $n \geq 2$ for par e $b_n = 0$ se $n \geq 3$ for ímpar. Ainda assim, não é simples determinar se as soluções da equação de movimento

$$m_0 \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{auto}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.131)$$

apresentam auto-aceleração ou pré-aceleração. Para tal, convém voltar à Eq. (3.106) e, em vez de expandir $G_\ell(R, T)$ em uma série de potências em R/c , tomar diretamente o limite de partícula puntiforme $R \rightarrow 0$ para $G_\ell(R, T)$.

Na eletrodinâmica regularizada, o limite de partícula puntiforme não é ambíguo e obtemos

$$G_\ell(0, T) = \frac{\Theta(T)}{\ell T} J_1(cT/\ell), \quad (3.132)$$

que nos permite expressar a auto-força $\mathbf{F}_{\text{auto}}$ em uma forma fechada como

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \frac{e^2}{c^2} \int_0^\infty \frac{dG_\ell}{dT}(0, T) \left(\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t-T)}{T} - \mathbf{v}(t-T) \right) dT. \quad (3.133)$$

Ao contrário da auto-força calculada por Abraham e Lorentz, a Eq. (3.133) não possui

explicitamente uma derivada de segunda ordem da velocidade em relação ao tempo. Isto sugere que as soluções da equação de movimento

$$m_0 \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{auto}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.134)$$

têm propriedades substancialmente diferentes das propriedades das soluções da equação de Lorentz–Dirac. Em especial, as soluções homogêneas da Eq. (3.134) não apresentam auto-aceleração quando a massa m_0 de origem não-eletromagnética é não-negativa.

Para ver que não há auto-aceleração na eletrodinâmica regularizada quando $m_0 \geq 0$, supomos que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{\eta t}$. Se a parte real de η for negativa ou nula, não haverá auto-aceleração. As soluções possíveis para a Eq. (3.134) devem satisfazer, na ausência de forças externas, a condição

$$m_0 \eta^2 + \frac{e^2}{c^2 \ell} \int_0^\infty (e^{-\eta T} - 1 + \eta T e^{-\eta T}) \frac{1}{T} \frac{d}{dT} \left(\frac{J_1(cT/\ell)}{T} \right) dT = 0. \quad (3.135)$$

Após a integração sobre T [54], obtemos

$$\left(\eta^2 + \frac{c^2}{\ell^2} \right)^{1/2} \left(2\eta^2 - \frac{c^2}{\ell^2} \right) = 2\eta^3 - \frac{c^3}{\ell^3} - \frac{3m_0 c^3}{e^2} \eta^2. \quad (3.136)$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e notando que $\eta = 0$ é uma raiz duplamente degenerada, podemos reduzir a Eq. (3.136) à equação cúbica

$$m_0 \eta^3 - \frac{3}{4} \frac{m_0^2 c^3}{e^2} \eta^2 + \frac{1}{3} \frac{e^2}{\ell^3} \eta - \frac{ce^2}{4\ell^4} - \frac{m_0 c^3}{2\ell^3} = 0. \quad (3.137)$$

As soluções da equação cúbica resultante são bem conhecidas [113] e não é muito difícil verificar que as soluções complexas da Eq. (3.137) são mero artifício matemático e não satisfazem a Eq. (3.136) original. Escrevendo as soluções da Eq. (3.136) como

$$\eta = \frac{cx}{\ell}, \quad (3.138)$$

descobrimos que a nova variável real x satisfaz

$$(1 + x^2)^{1/2} (2x^2 - 1) = 2x^3 - 1 - px^2 \quad (3.139)$$

na qual

$$p = \frac{3\ell m_0 c^2}{e^2} \quad (3.140)$$

é um parâmetro adimensional real cujo sinal é determinado pelo sinal da massa m_0 de origem não-eletromagnética.

Figura 3.2: Gráfico do parâmetro p como função da variável $x = \eta\ell/c$.

Além da solução trivial $x = 0$, que não leva a uma solução com auto-aceleração, devemos destacar dois casos para determinar as outras soluções. Quando $p \geq 0$, o lado esquerdo da Eq. (3.139) é sempre maior do que o lado direito com exceção do caso $x = 0$. Portanto, não há qualquer solução adicional quando $p = 0$. Neste caso, as soluções da Eq. (3.131) não apresentam auto-aceleração.

Quando $p < 0$, há um contínuo de soluções dependentes do parâmetro p , $x = x(p)$. Para vê-lo, basta considerar a relação inversa $p = p(x)$ que é mostrada na Fig. 3.2. Segundo a Eq. (3.139), $p(x)$ é dada por

$$p = 2x - \frac{1}{x^2} + (1 + x^2)^{1/2} \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right). \quad (3.141)$$

Quando $x \gg 1$, p tende a zero como $-1/x^2$ e quando $x \ll 1$, p se comporta como $2x - 3/2$. Como $m = m_0 + m_{\text{EM}}$ e como a massa eletromagnética é dada, na eletrodinâmica regularizada, por [79]

$$m_{\text{EM}} = \frac{e^2}{2\ell c^2}, \quad (3.142)$$

é possível expressar p em termos do regularizador ℓ e do raio clássico do elétron $r_0 = e^2/mc^2$ como

$$\begin{aligned} p &= \frac{3m_0\ell c^2}{e^2} \\ &= \frac{3\ell}{r_0} - \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (3.143)$$

Isto é suficiente para mostrar que, neste caso, p é sempre maior do que $-3/2$. Portanto, se $p < 0$, x pode tomar apenas valores positivos, $\eta = cx/\ell$ é um número real positivo e, nesta condição, as soluções da Eq. (3.131) apresentam auto-aceleração. É interessante

analisar estas soluções no limite da eletrodinâmica de Maxwell em que $\ell \rightarrow 0$. Neste caso, temos

$$x \approx \frac{3\ell}{2r_0} \quad (3.144)$$

e a solução homogênea da Eq. (3.131) se torna, no limite em que $\ell \rightarrow 0$,

$$\dot{\mathbf{v}} \approx \dot{\mathbf{v}}_0 e^{t/\tau_0} \quad (3.145)$$

que é o resultado obtido na Seção 3.1 no contexto da eletrodinâmica de Maxwell.

Podemos concluir que as soluções da Eq. (3.131) apresentam auto-aceleração apenas quando $p < 0$ e, conseqüentemente, quando a massa não-eletromagnética m_0 é negativa, como discutido na Seção 3.1. Para que $m_0 < 0$, é preciso que $\ell < r_0/2$. Contudo, se a criação de pares virtuais na vizinhança do elétron puntiforme dá origem a um regularizador efetivo da ordem de λ_C , como mostrado por Moniz e Sharp [90], então a eletrodinâmica regularizada é livre de auto-aceleração.

Por fim, devemos analisar o comportamento das soluções da Eq. (3.131) quando uma força externa atua sobre a partícula. Nesta situação, as soluções da equação de Lorentz–Dirac apresentam pré-aceleração, conforme discutido na Seção 3.1.

Para mostrar que não há pré-aceleração na equação de movimento do elétron na eletrodinâmica regularizada quando $m_0 \geq 0$, devemos estudar a solução não-homogênea da Eq. (3.131), que corresponde ao movimento não-relativístico da partícula sujeita à força externa dependente do tempo $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$. A solução é facilmente obtida com o uso da representação de Fourier para a posição da partícula

$$\mathbf{r}(t) = \int \tilde{\mathbf{r}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.146)$$

e para a força externa

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(t) = \int \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.147)$$

Substituindo-as na Eq. (3.133), obtemos

$$\tilde{\mathbf{r}}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}}(\omega) \times \{\dots\}^{-1} \quad (3.148)$$

com

$$\{\dots\}^{-1} = \left\{ m_0(-i\omega)^2 + \frac{e^2}{c^2\ell} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega T} - 1 - i\omega T e^{i\omega T}}{T} \frac{d}{dT} \left(\frac{J_1(cT/\ell)}{T} \right) dT \right\}^{-1}. \quad (3.149)$$

A aceleração da partícula pode ser calculada a partir da Eq. (3.146) como

$$\dot{\mathbf{v}} = \int (-i\omega)^2 \tilde{\mathbf{r}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.150)$$

e, com auxílio do Teorema da Convolução, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \int d\omega e^{-i\omega t} (-i\omega)^2 \{\dots\}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}}(\omega) \\ &= \int d\omega e^{-i\omega t} (-i\omega)^2 \{\dots\}^{-1} \int dt' e^{i\omega t'} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') \\ &= \int dt' \left(\int d\omega e^{-i\omega(t-t')} (-i\omega)^2 \{\dots\}^{-1} \right) \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') \\ &= \int dt' \mathcal{G}(t-t') \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') \end{aligned} \quad (3.151)$$

e a função de Green $\mathcal{G}(t-t')$ é dada por

$$\mathcal{G}(t-t') = \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} (-i\omega)^2 \{\dots\}^{-1}. \quad (3.152)$$

O movimento da partícula não apresentará pré-aceleração se a aceleração no instante de tempo t depender apenas da força em instantes de tempo anteriores a t . Este comportamento pode ser assegurado por uma função de Green retardada, que é caracterizada pelo fato de que seus pólos estão na metade inferior do plano complexo da variável ω . A substituição $\eta = -i\omega$ significa que os pólos da função de Green devem estar na metade esquerda do plano complexo da variável η , ou seja, a parte real dos zeros da expressão $\{\dots\}$ na Eq. (3.152) deve ser negativa. Dado o relacionamento entre auto-aceleração e pré-aceleração não é surpreendente que a condição para ausência de pré-aceleração seja idêntica à condição para ausência de auto-aceleração. Logo, a análise pode ser repetida e a conclusão é que não há soluções com pré-aceleração na eletrodinâmica regularizada desde que $\ell > r_0/2$.

É importante notar que a remoção da auto-aceleração e da pré-aceleração da teoria depende da manutenção dos termos de ordem superior na expansão da auto-força. Na eletrodinâmica regularizada, estes termos não se anulam no limite de partícula puntiforme e podem ser determinados de modo consistente graças à presença do regularizador.

Uma generalização relativística da Eq. (3.131) deve ter a forma

$$m_0 \dot{v}^\mu = F_{\text{auto}}^\mu + F_{\text{ext}}^\mu \quad (3.153)$$

e F_{auto}^μ representa a generalização covariante da auto-força $\mathbf{F}_{\text{auto}}$ da partícula. Usando as

propriedades de transformação do quadrivetor F_{auto}^μ e a condição

$$F_{\text{auto}}^\mu v_\mu = 0, \quad (3.154)$$

descobrimos que

$$F_{\text{auto}}^\mu = \left(\gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{auto}}}{c}, \mathbf{F}_{\text{auto}} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{auto}}}{v^2} \mathbf{v} \right). \quad (3.155)$$

A auto-força pode ser expandida em uma série de potências que envolve derivadas superiores da velocidade em relação ao tempo próprio. A determinação da auto-força é, no caso relativístico, semelhante à determinação da auto-força no caso não-relativístico e o resultado é

$$F_{\text{auto}}^\mu = -m_{\text{EM}} \dot{v}^\mu + \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{v}^\mu - \frac{\dot{v}^\nu \dot{v}_\nu}{c^2} v^\mu \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n e^2}{n! c^{n+2}} \ell^{n-1} V^{(n)\mu}. \quad (3.156)$$

Na Eq. (3.156), $m_{\text{EM}} = e^2/2\ell c^2$ é a massa eletromagnética da partícula e os coeficientes b_n são os dados na Eq. (3.130). O quadrivetor $V^{(n)\mu}$ pode ser expresso em termos das derivadas de v como

$$\begin{aligned} V^{(n)\mu} = & \frac{1}{(n+1)^2} \left(v^{(n+1)\mu} + \frac{v^\nu v_\nu^{(n+1)}}{c^2} v^\mu \right) \\ & + \frac{n+2}{n+1} \frac{v^\nu}{c^2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n+2-k} \left(v_\nu^{(n+2-k)} v^{(k-1)\mu} - v^{(n+2-k)\mu} v_\nu^{(k-1)} \right). \end{aligned} \quad (3.157)$$

No limite em que $\ell \rightarrow 0$, a auto-força se reduz a

$$F_{\text{auto}}^\mu = -m_{\text{EM}} \dot{v}^\mu + \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{v}^\mu - \frac{\dot{v}^\nu \dot{v}_\nu}{c^2} v^\mu \right) \quad (3.158)$$

com uma massa eletromagnética $m_{\text{EM}} = e^2/2\ell c^2$ linearmente divergente. Neste limite, a equação de movimento exata se reduz à equação de Lorentz–Dirac.

A equação relativística de movimento (3.154) com a auto-força dada pela Eq. (3.156) prevê o mesmo tipo de comportamento descrito por sua contrapartida não-relativística. Para entender esta característica, devemos observar que quando $\ell < r_0/2$, a massa m_0 deve ser negativa para que a massa observada do elétron seja m . Neste caso, auto-aceleração é consistente com a conservação da energia, que é a soma da energia cinética $(\gamma - 1)m_0 c^2$ da partícula com a energia eletromagnética positiva. A diminuição da energia cinética negativa de uma partícula de massa $m_0 < 0$ compensa o aumento na energia do campo eletromagnético produzido pelo aumento de velocidade da partícula.

Por outro lado, se $\ell \geq r_0$, a massa m_0 é necessariamente positiva e o movimento

da partícula não pode exibir auto-aceleração. Este tipo de movimento é incompatível com a conservação da energia quando $m_0 \geq 0$ pois aumentaria a energia cinética da partícula ao mesmo tempo em que aumentaria a energia do campo eletromagnético. Assim, se os processos quânticos induzirem o aparecimento de um regularizador efetivo da ordem do comprimento de onda Compton λ_C do elétron, a equação de movimento de uma partícula puntiforme admite apenas soluções que não apresentam auto-aceleração nem pré-aceleração.

3.5 Teoria Quântica

Vimos que a eletrodinâmica regularizada proposta na Seção 3.3 é capaz de eliminar fenômenos como auto-aceleração e pré-aceleração da eletrodinâmica clássica. Processos quânticos como criação de pares virtuais induzem o surgimento, na eletrodinâmica clássica, de um regularizador $\ell \sim \lambda_C$ em pequenas distâncias [90]. Este regularizador é responsável por, no limite de partícula puntiforme, resolver o problema dos 4/3, dotar o elétron de uma massa eletromagnética finita e de uma massa não-eletromagnética positiva e produzir uma equação de movimento que não admite soluções com auto-aceleração ou com pré-aceleração. Ainda que a eletrodinâmica regularizada seja uma teoria efetiva que incorpora algumas conseqüências da eletrodinâmica quântica no quadro conceitual da eletrodinâmica clássica, pode ser instrutivo construir uma teoria quântica da eletrodinâmica regularizada e investigar algumas de suas características. Em particular, determinaremos o momento magnético anômalo do elétron no contexto da teoria quântica da eletrodinâmica regularizada.

Inicialmente, convém determinar o propagador do fóton na eletrodinâmica regularizada. Para fazê-lo, acrescentamos o termo fixador de calibre

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{8\pi\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.159)$$

à lagrangeana

$$\mathcal{L}_\ell = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\ell^2}{8\pi} \partial^\alpha F_{\mu\alpha} \partial_\beta F^{\mu\beta} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu. \quad (3.160)$$

No espaço dos momentos, o propagador $D_\ell^{\mu\nu}(k)$ do fóton na eletrodinâmica regularizada se torna

$$D_\ell^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2(1 + \ell^2 k^2)} \left(\eta^{\mu\nu} - (1 + \xi(1 + \ell^2 k^2)) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (3.161)$$

e a prescrição $-i\varepsilon$ é implícita.

Figura 3.3: Diagrama de Feynman para o espalhamento de um elétron por um campo eletromagnético externo

Deve-se notar que o coeficiente de $\eta^{\mu\nu}$ na Eq. (3.161) apresenta um bom comportamento ultravioleta, sendo proporcional a k^{-4} para valores grandes de k . O coeficiente de $\eta^{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$\frac{1}{k^2(1 + \ell^2 k^2)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \ell^{-2}}. \quad (3.162)$$

O primeiro termo no lado direito da Eq. (3.162) vem do propagador usual para o fóton enquanto o segundo termo é uma correção introduzida pela presença de

$$-\frac{\ell^2}{8\pi} \partial^\alpha F_{\mu\alpha} \partial_\beta F^{\mu\beta} \quad (3.163)$$

na lagrangeana $\mathcal{L}_\ell$. Este termo representa o propagador de um bóson vetorial neutro de massa $\hbar/c\ell$, como sugerido por Landé [99] e pela análise da propagação de ondas eletromagnéticas na eletrodinâmica regularizada na Seção 3.3. Contudo, por conta do sinal negativo à frente do termo, este bóson vetorial pode levar a interações que violam a conservação de probabilidade [114, 115]. Este fantasma não-taquiônico é o responsável pelo bom comportamento ultravioleta do termo que independe da escolha de calibre [116]. Fantasmas não-taquiônicos também aparecem em extensões de teorias abelianas de Chern-Simons com derivadas superiores em $2 + 1$ dimensões [117]. Concluimos, porém, que a teoria quântica que emerge da eletrodinâmica regularizada é, do ponto de vista de seus fundamentos, insatisfatória a menos que seja interpretada como a primeira aproximação de uma teoria efetiva que descreve, em alguma escala de energia, os efeitos de uma teoria mais fundamental válida em energias mais elevadas [21].

Para determinar o momento magnético anômalo do elétron, calculamos, em primeira ordem, a correção do vértice para o espalhamento do elétron por um campo externo como mostrado na Fig. 3.3. As regras de Feynman [118] indicam que este diagrama modifica

o vértice γ_μ que representa a interação do elétron com o campo externo de um modo que pode ser descrito pela substituição de $e\gamma_\mu$ por $e(\gamma_\mu + \Lambda_\mu^\ell(p, p'))$ [115]. O cálculo de termos como Λ_μ^ℓ é amplamente discutido na literatura [44, 75, 115, 118–120] e o resultado é que a parte $\tilde{\Lambda}_\mu^\ell(p, p')$ independente do calibre pode ser escrita como

$$\tilde{\Lambda}_\mu^\ell(p, p') = \gamma_\mu F_1^\ell(q^2) + \frac{i}{2mc} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2^\ell(q^2), \quad (3.164)$$

na qual $\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2i$, $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$ é o momento transferido no espalhamento do elétron e as funções $F_1^\ell(q^2)$ e $F_2^\ell(q^2)$ são fatores de forma eletromagnéticos para o elétron. Os fatores de forma $F_1^\ell(q^2)$ e $F_2^\ell(q^2)$ descrevem a estrutura eletromagnética efetiva do elétron adquirida na interação entre o elétron puntiforme e os fótons virtuais criados em sua vizinhança.

O significado dos fatores de forma pode ser entendido quando o elétron é submetido a um campo eletromagnético estático no limite $q \rightarrow 0$. No caso não-relativístico, a energia de interação W_{int} pode ser escrita como [121]

$$W_{\text{int}} \approx e\Phi F_1^\ell(0) - 2(1 + F_2^\ell(0))\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (3.165)$$

e $\boldsymbol{\mu}$ é o momento magnético de uma partícula de spin 1/2 com fator giromagnético

$$g = 2(1 + F_2^\ell(0)). \quad (3.166)$$

Assim, precisamos apenas obter o valor de $F_2^\ell(0)$ para calcular o momento magnético anômalo do elétron na eletrodinâmica regularizada. Este fator é dado por

$$F_2^\ell(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(1 - \frac{2\ell^2}{3\lambda_C^2} + O(\ell^4/\lambda_C^4) \right). \quad (3.167)$$

O primeiro termo na Eq. (3.167) foi obtido por Schwinger em 1948 [18]. O segundo termo é a correção mais importante associada com o parâmetro ℓ da eletrodinâmica regularizada. O resultado teórico corrente para $F_2^{\text{QED}}(0)$, calculado até ordem de α^8 na eletrodinâmica quântica é dado por [122]

$$F_2^{\text{QED}}(0) = 0,001\,159\,652\,140\,(28) \quad (3.168)$$

enquanto o resultado experimental para o fator de forma $F_2(0)$ é ainda mais preciso [123]:

$$F_2(0) = 0,001\,159\,652\,187\,(4). \quad (3.169)$$

Como o valor teórico previsto pela eletrodinâmica quântica para o momento anômalo do

elétron concorda com o valor observado em até uma parte em 10^{10} , a correção introduzida pela eletrodinâmica regularizada deve ser tal que

$$\frac{2\ell^2}{3\lambda_C^2} < 10^{-10} \quad (3.170)$$

e podemos concluir que o parâmetro ℓ da eletrodinâmica regularizada deve ser menor do que $\ell_0 = 4,73 \times 10^{-18}$ m. Este comprimento seria a dimensão característica de uma possível teoria efetiva baseada na eletrodinâmica quântica que levasse em consideração alguns dos fenômenos que ocorrem em energias mais elevadas que as descritas pela eletrodinâmica quântica. É divertido notar que o comprimento de onda Compton $\lambda_Z \approx 2,16 \times 10^{-18}$ m do bóson vetorial neutro Z é da ordem do parâmetro ℓ_0 .

Comprimentos tão pequenos quanto ℓ_0 estão fora do domínio de validade da eletrodinâmica clássica. Assim, não é concebível que a expressão clássica para a auto-energia do elétron na eletrodinâmica regularizada se sustente em uma teoria quântica. Neste caso, a massa eletromagnética pode ser determinada no contexto da teoria quântica da eletrodinâmica regularizada e o resultado é que a divergência linear em ℓ é substituída pela divergência logarítmica:

$$m_{\text{EM}} = \frac{3\alpha}{2\pi} mc^2 \ln\left(\frac{\lambda_C}{\ell}\right) \quad (3.171)$$

característica da eletrodinâmica quântica. Ao substituir ℓ por ℓ_0 na Eq. (3.171), descobrimos que a massa eletromagnética corresponde a apenas 3,9% da massa observada do elétron. Assim, pode-se atribuir a maior parte da massa do elétron a interações de origem não-eletromagnética.

4 *Considerações Finais*

Construímos dois modelos efetivos para o elétron na eletrodinâmica clássica. No primeiro, modelamos o elétron como uma partícula extensa com a massa distribuída uniformemente sobre a superfície de um disco girante de raio $\hbar/mc$ e a carga elétrica concentrada na borda do disco. Este modelo procura levar em conta o efeito das oscilações de alta-frequência (*Zitterbewegung*) da carga elétrica da partícula que são consequência da incompatibilidade entre os operadores posição $\mathbf{r}$ da carga elétrica do elétron e momento $\mathbf{p}$ do elétron. Isto foi suficiente para que obtivéssemos o valor correto para a magnitude do spin do elétron e o valor previsto pela equação de Dirac sem correções radiativas para o fator giromagnético do elétron. Como uma consequência da distribuição da carga elétrica do elétron, sua auto-energia passou a divergir de modo logarítmico em contraste com a divergência linear típica de partícula puntiforme na eletrodinâmica clássica. Contudo, o aparecimento de um momento de quadrupolo elétrico que não poderia ter passado despercebido mas que parece nunca ter sido observado mostra as limitações da descrição.

Em nosso segundo modelo, optamos por modificar o campo eletromagnético com o qual o elétron interage. Por conta da criação de pares virtuais em sua vizinhança, a interação entre o elétron e o campo eletromagnético é modificada em pequenas distâncias. Para escolher a modificação mais adequada para descrever este fenômeno, optamos pela menor generalização possível da lagrangeana que fosse compatível com as simetrias básicas da eletrodinâmica e ainda a mantivesse linear uma vez que modificações não-lineares na eletrodinâmica estão associadas ao espalhamento de luz por luz. O modelo foi aplicado ao problema da auto-interação do elétron puntiforme e conseguimos determinar a auto-força da partícula de modo consistente. Quando aplicada ao movimento do elétron, a eletrodinâmica clássica sai de seu domínio de validade e é razoável que os resultados obtidos mostrem claros sinais de inconsistência. A incorporação cuidadosa de efeitos da eletrodinâmica quântica restaurou a consistência da teoria e permitiu que mostrássemos que as soluções da equação de movimento resultante não sofrem de auto-aceleração nem de pré-aceleração, sendo consistentes com a causalidade.

Em ambos os casos, o uso de teorias efetivas permitiu descrever fenômenos que estavam, inicialmente, fora do domínio de validade da eletrodinâmica clássica. Deste modo, foi possível explorar a fronteira entre as teorias clássica e quântica.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Planck, *Ann. Phys.* **4**, 553 (1901).
- [2] A. Einstein, *Ann. Phys.* **17**, 132 (1905).
- [3] N. Bohr, *Phil. Mag.* **26**, 1 (1913).
- [4] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [5] W. Heisenberg, *Ann. Phys.* **33**, 879 (1925).
- [6] M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, *Z. Phys.* **35**, 557 (1925).
- [7] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **114**, 243 (1927).
- [8] S. A. Goudsmit, G. E. Uhlenbeck, *Nature* **117**, 264 (1926).
- [9] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **117**, 610 (1928).
- [10] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **126**, 360 (1930).
- [11] C. D. Anderson, *Science* **76**, 238 (1932).
- [12] E. Fermi, *Rev. Mod. Phys.* **4**, 125 (1932).
- [13] W. H. Furry, J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **45**, 245 (1934).
- [14] W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203 (1941).
- [15] V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **56**, 72 (1939).
- [16] V. F. Weisskopf, *Klg. Danske Videnskab Selskab Mat.-Fys. Medd.* **14(6)** (1936).
- [17] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **1**, 27 (1946).
- [18] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).
- [19] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).

- [20] F. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949).
- [21] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, v.1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [22] G. t'Hooft, *Nucl. Phys. B* **33**, 173 (1971).
- [23] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961).
- [24] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [25] A. Salam, in *Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity*, editado por N. Svartholm, p.367 (Wiley, New York, 1969).
- [26] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964).
- [27] D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [28] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [29] S. Weinberg, *Physica A* **96**, 327 (1979).
- [30] H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory* (Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984).
- [31] W. Dittrich, M. Reuter, *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, 1984).
- [32] U.-G. Meissner (ed.), *Effective Field Theories of the Standard Model* (World Scientific, Singapore, 1992).
- [33] H. Georgi, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **43**, 209 (1994).
- [34] W. Heisenberg, H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
- [35] J. Frenkel, R. B. Santos, *Mod. Phys. Lett.* **11**, 189 (1997).
- [36] W. Pauli, *Z. Phys.* **31**, 765 (1925).
- [37] S. A. Goudsmit, in *Foundations of Modern EPR*, editado por G. R. Eaton, S. S. Eaton, K. M. Salikhov, p.386 (World Scientific, Singapore, 1998).
- [38] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3.ed. (Wiley, New York, 1998).
- [39] J. Frenkel, *Princípios de Eletrodinâmica Clássica* (Edusp, São Paulo, 1996).

- [40] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Dover, New York, 1981), tradução do original de 1921.
- [41] H. Dehmelt, *Physica Scripta* **T22**, 102 (1988).
- [42] E. Schrödinger, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.* **24**, 418 (1930).
- [43] K. Huang, *Am. J. Phys.* **20**, 479 (1952).
- [44] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [45] H. C. Corben, *Phys. Rev.* **121**, 1833 (1961).
- [46] A. O. Barut, A. J. Bracken, *Phys. Rev. D* **23**, 2454 (1981).
- [47] A. O. Barut, A. J. Bracken, *Phys. Rev. D* **24**, 3333 (1981).
- [48] A. O. Barut, N. Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009 (1984).
- [49] H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **54**, 500 (1986).
- [50] F. J. Belinfante, *Physica* **6**, 887 (1939).
- [51] W. Gordon, *Z. Phys.* **50**, 630 (1928).
- [52] H. Hönl, *Ann. Physik* **33**, 565 (1938).
- [53] Z. Grossmann, A. Peres, *Phys. Rev.* **132**, 2346 (1963).
- [54] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5.ed. (Academic, New York, 1994).
- [55] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles* (Addison-Wesley, Reading, 1965).
- [56] P. Pearle, in *Electromagnetism: Paths to Research*, editado por D. Teplitz, p.183 (Plenum, New York, 1982).
- [57] D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1987).
- [58] V. S. Shirley, *Table of Isotopes* (Wiley, New York, 1978).
- [59] J. Frenkel, R. B. Santos, *Int. J. Mod. Phys. B* **13**, 315 (1999).
- [60] N. P. Klepikov, *Sov. Phys. Usp.* **28**, 506 (1985).

- [61] H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons*, 2.ed. (Dover, New York, 1952), texto das conferências de 1906.
- [62] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **167**, 148 (1938).
- [63] S. Coleman, in *Electromagnetism: Paths to Research*, editado por D. Teplitz, p.183 (Plenum, New York, 1982), reimpressão do original de 1960.
- [64] M. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, v.2 (Springer, Leipzig, 1905).
- [65] M. von Laue, *Ann. Physik* **28**, 436 (1909).
- [66] G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1912).
- [67] J. Larmor, *Phil. Mag.* **44**, 503 (1897).
- [68] G. N. Plass, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 37 (1961).
- [69] D. Villarroel, *Phys. Rev. A* **55**, 3333 (1997).
- [70] R. Haag, *Z. Naturforsch.* **10**, 752 (1955).
- [71] C. Teitelboim, *Phys. Rev. D* **1**, 1572 (1970).
- [72] M. Abraham, *Ann. Physik* **10**, 105 (1903).
- [73] M. Born, *Ann. Physik* **30**, 1 (1909).
- [74] L. V. Lorenz, *Phil. Mag.* **34**, 287 (1867).
- [75] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [76] E. Fermi, *Phys. Zeit.* **23**, 340 (1922).
- [77] B. Kwal, *J. Phys. Radium* **10**, 103 (1949).
- [78] F. Rohrlich, *Am. J. Phys.* **28**, 639 (1960).
- [79] J. Frenkel, *Phys. Rev. E* **54**, 5859 (1996).
- [80] T. Erber, *Fortschritte d. Phys.* **9**, 343 (1961).
- [81] F. E. Low, *Ann. Physics* **266**, 274 (1998).

- [82] H. Poincaré, *Comptes Rendue* **140**, 1504 (1905).
- [83] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **268**, 57 (1962).
- [84] J. Schwinger, *Found. Phys.* **13**, 373 (1983).
- [85] J. D. Kaup, *Phys. Rev.* **152**, 1130 (1966).
- [86] H. M. França, G. C. Marques, A. J. da Silva, *N. Cim. A* **54**, 65 (1978).
- [87] L. de la Peña, J. L. Jiménez, R. Montemayor, *N. Cim. B* **69**, 71 (1982).
- [88] R. E. Norton, W. K. R. Watson, *Phys. Rev.* **116**, 1597 (1959).
- [89] S. Coleman, *Phys. Rev.* **125**, 1422 (1962).
- [90] E. J. Moniz, D. H. Sharp, *Phys. Rev. D* **10**, 1133 (1974).
- [91] E. J. Moniz, D. H. Sharp, *Phys. Rev. D* **15**, 2850 (1977).
- [92] H. Levine, E. J. Moniz, D. H. Sharp, *Am. J. Phys.* **45**, 75 (1977).
- [93] H. Grotch, E. Kazes, *Phys. Rev. D* **16**, 3605 (1977).
- [94] D. H. Sharp, in *Foundations of Radiation Reaction and Quantum Electrodynamics*, editado por A. O. Barut (Plenum, New York, 1980).
- [95] H. Grotch, E. Kazes, in *Foundations of Radiation Reaction and Quantum Electrodynamics*, editado por A. O. Barut (Plenum, New York, 1980).
- [96] F. Rohrlich, in *Foundations of Radiation Reaction and Quantum Electrodynamics*, editado por A. O. Barut (Plenum, New York, 1980).
- [97] H. Grotch, E. Kazes, F. Rohrlich, D. H. Sharp, *Acta Phys. Austriaca* **54**, 31 (1982).
- [98] F. Bopp, *Ann. Physik* **38**, 345 (1940).
- [99] A. Landé, *Phys. Rev.* **60**, 121 (1941).
- [100] A. Landé, L. H. Thomas, *Phys. Rev.* **60**, 514 (1941).
- [101] A. Landé, L. H. Thomas, *Phys. Rev.* **65**, 175 (1944).
- [102] B. Podolsky, *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942).
- [103] B. Podolsky, C. Kikuchi, *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944).

- [104] B. Podolsky, C. Kikuchi, *Phys. Rev.* **67**, 184 (1945).
- [105] B. Podolsky, P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40 (1948).
- [106] A. A. Slavnov, *Nucl. Phys. B* **31**, 301 (1971).
- [107] A. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **13**, 1064 (1972).
- [108] A. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **33**, 997 (1978).
- [109] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, v.50 de *Frontiers in Physics*, 2.ed. (Addison-Wesley, Reading, 1991).
- [110] M. A. Namazie, *J. Phys. A* **11**, 713 (1980).
- [111] P. West, *Nucl. Phys. B* **268**, 113 (1986).
- [112] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B* **268**, 406 (1986).
- [113] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
- [114] F. Bloch, *Klg. Danske Videnskab Selskab Mat.-Fys. Medd.* **27(8)** (1952).
- [115] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1967).
- [116] A. Accioly, H. Mukai, *N. Cim. B* **112**, 1061 (1997).
- [117] S. Deser, R. Jackiw, *Phys. Lett. B* **451**, 73 (1999).
- [118] R. P. Feynman, *Quantum Electrodynamics* (W. A. Benjamin, New York, 1961).
- [119] J. M. Jauch, F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Cambridge, 1955).
- [120] L. S. Brown, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [121] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, 2.ed. (Springer, Berlin, 1997).
- [122] T. Kinoshita, *Quantum Electrodynamics* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [123] K. H. et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **66**, 010001 (2002).