

Introdução

A teoria quântica de campos é bem aceita na atualidade como a principal ferramenta para tratar sistemas quânticos e relativísticos de muitos corpos, como encontramos em diversos trabalhos de física de partículas e nuclear. Além disso, ela também é útil para tratar problemas de outras áreas da física como a cosmologia e a física de matéria condensada. Neste contexto, existe a teoria de campos a temperatura finita, que aplica conceitos da mecânica estatística para compreender a importância dos fenômenos térmicos nos problemas que analisamos através da teoria quântica de campos.

Dentro dessa teoria, existem três métodos para tratar dos problemas que envolvem a temperatura. O formalismo de tempo real [1], a dinâmica dos campos térmicos [2] e o formalismo de tempo imaginário [3, 4]. Este último é o mais eficiente para tratar sistemas em equilíbrio termodinâmico, de forma que neste trabalho utilizamos apenas este formalismo.

Uma característica importante das teorias de campos é que podemos caracterizá-las completamente a partir de suas funções de Green [5]. Desta forma, uma estratégia eficiente de estudar diversos problemas da teoria é partir do funcional gerador das funções de Green da teoria. Existem vários tipos de funcionais geradores. Dentre eles, um em particular se destaca, o funcional gerador das funções de Green 1PI^[1], também conhecido como ação efetiva. Assim, a partir da derivação funcional da ação efetiva obtemos informação necessária e suficiente para analisar a grande maioria dos sistemas em equilíbrio.

Seguindo essa filosofia, estudaremos neste trabalho os funcionais geradores das funções de Green e em especial a ação efetiva, tanto para temperatura finita quanto para tem-

^[1]Funções de Green irredutíveis, ou em inglês “one particle irreducible”.

peratura zero. Para tanto, vamos escrever as funções de Green geradas pelos funcionais a temperatura finita no espaço dos momentos, e dividir a função em duas partes, uma dependente da temperatura e outra independente (correspondente ao termo de temperatura zero). Nos dois primeiros capítulos discutiremos essa questão assim como mostraremos todos os fundamentos teóricos necessários para o entendimento dos resultados obtidos no projeto.

O primeiro problema, que analisaremos no capítulo 3, traz a questão da invariância de gauge da massa física definida a partir do polo do propagador fermiônico para a eletrodinâmica quântica em D dimensões a temperatura zero. É fato que as teorias de campo mais aceitas para explicar a dinâmica das partículas elementares são as teorias de gauge [6]. Sendo assim, é importante demonstrar que uma grandeza escalar como a massa física é invariante sob transformações de gauge para garantir a consistência da teoria.

Essa questão já havia sido estudada para gauges covariantes em diversos trabalhos [7, 8], porém, aqui estenderemos este estudo para uma classe mais genérica que compreende os gauges covariantes, axiais e de Coulomb. Um método eficiente para isso é utilizar as identidades de Nielsen que relacionam a invariância de gauge dos funcionais geradores da teoria (e de suas respectivas funções de Green geradas) em função dos parâmetros fixadores do gauge [1, 9] e se originam da invariância BRST da teoria [10].

Utilizaremos este método para analisar o polo de um propagador fermiônico proposto, encontrando a identidade correspondente para o nosso problema. Também calcularemos de forma explícita a dependência de gauge do polo do propagador proposto através dos diagramas de Feynman 1PI (até a ordem de dois loops) correspondentes a função de dois pontos do férmion, e dessa forma verificaremos a invariância de gauge da massa física até a ordem calculada.

No capítulo 4 analisaremos a questão da interação de n fótons para eletrodinâmica quântica a temperatura finita num espaço de $(1+1)$ dimensões. Um modelo de dimensão menor, apesar de não corresponder a nossa realidade fornece informação importante e algumas vezes indícios do comportamento de alguns sistemas que em dimensão maior são muito mais difíceis ou até mesmo impossíveis de se calcular exatamente.

Para altas temperaturas, as interações com um ou mais loops estão na região dos *hard*

thermal loops, onde para o termo dominante os efeitos da massa do férmion no propagador são desprezíveis e as variações dos campos externos são muito menores que os termos de integração nos loops. Nesse contexto, podemos usar o modelo de Schwinger [11], que trata da QED num espaço de $(1 + 1)$ dimensões com férmions sem massa.

Em outros trabalhos [12, 13] já foram calculadas, através do formalismo de tempo real para o modelo de Schwinger, todas as contribuições das amplitudes de Feynman com um ou mais loops e dependentes da temperatura. Neste trabalho, usaremos o formalismo de tempo imaginário para calcular as amplitudes causais retardadas, que facilitam a compreensão física do fenômeno.

No capítulo 5 trabalharemos em um problema de gravitação quântica. O objetivo será encontrar nos limites estático (onde os campos externos ao loop independem do tempo) e de comprimento de onda longo (em que os campos externos independem da posição) as funções da interação de n grávitons e 1 loop para altas temperaturas (ou seja, estaremos novamente trabalhando na região dos *hard thermal loops*). Nestes limites, ao contrário do caso geral, as funções de n pontos geradas são locais [14, 15].

Utilizando as identidades de Ward [16] e a invariância de Weyl [17], podemos relacionar as funções de n e $n + 1$ pontos geradas pela ação efetiva. A partir dessas relações, encontraremos uma expressão polinomial simples para escrever a função de n pontos em cada um dos limites estudados. Por fim, utilizaremos o formalismo da equação de transporte de Boltzmann [18], para definir uma ação efetiva para cada um dos limites do nosso problema e entender o motivo das funções de n pontos geradas nos dois limites apresentarem a estrutura encontrada anteriormente.

1 | Conceitos Fundamentais

Inicialmente, vamos discutir alguns conceitos físicos que são essenciais para se chegar aos resultados obtidos neste trabalho.

1.1 Teorias de Gauge

As teorias de gauge, também chamadas de teorias de calibre, são baseadas no conceito de que transformações de simetria não são necessariamente globais, como uma rotação por exemplo, mas também podem ser representadas por um grupo contínuo de transformações locais, as transformações de gauge. Dessa forma, uma teoria de campo cuja lagrangiana que a descreve se mantém invariante após uma transformação de gauge é uma teoria de gauge. Essas teorias estão presentes em diversas áreas da física, sendo que na teoria quântica de campos (QFT) a sua utilização na explicação da dinâmica das partículas elementares é bem aceita [6].

Podemos dividir essas teorias em dois grupos: as abelianas, cujas transformações não dependem da ordem que são realizadas, e as não-abelianas, em que as transformações dependem da ordem em que são realizadas. Um exemplo de teoria abeliana é a eletrodinâmica quântica (QED), enquanto a cromodinâmica quântica (QCD) é um bom exemplo de teoria não-abeliana.

Em geral, as teorias abelianas têm uma estrutura mais simples. Dessa forma, vamos como exemplo inicial partir da lagrangiana do campo escalar complexo, e modificá-la para que ela seja invariante sob transformações locais para então chegar à lagrangiana da QED para o campo escalar complexo.

A lagrangiana do campo escalar complexo é dada por:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi, \quad (1.1)$$

onde a (1.1) é invariante sob transformações globais, como a mudança de fase

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad (1.2)$$

em que α é uma constante real.

Vamos fazer a substituição $\alpha \rightarrow \alpha(x)$. Dessa forma, a transformação deixa de ser global e passa a ser local, dependendo das coordenadas em que é realizada.

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi. \quad (1.3)$$

Quando realizamos a transformação acima na (1.1), temos:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) &\rightarrow (\partial_\mu \phi'^*)(\partial^\mu \phi') = (\partial_\mu e^{-i\alpha(x)} \phi^*)(\partial^\mu e^{i\alpha(x)} \phi) \\ &= [\partial_\mu \phi^* - i(\partial_\mu \alpha(x)) \phi^*][\partial^\mu \phi + i(\partial^\mu \alpha(x)) \phi]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dessa forma, a lagrangiana transformada pode ser escrita como

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - i(\partial_\mu \alpha(x)) \phi^* \partial^\mu \phi + i \partial_\mu \phi^* (\partial^\mu \alpha(x)) \phi + (\partial_\mu \alpha(x)) \phi^* (\partial^\mu \alpha(x)) \phi. \quad (1.5)$$

Ou seja, a lagrangiana não é invariante para esta transformação local. Vamos então modificar a lagrangiana para torná-la invariante sob esta transformação. Para isso, vamos fazer a substituição:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (1.6)$$

Chamamos D_μ de derivada covariante e definimos $(D_\mu \phi)$ invariante sob a transformação (1.3). Na (1.6), e é a carga associada ao campo escalar e A_μ é o campo de gauge, que adicionamos à lagrangiana de modo a torná-la invariante. Para isso, A_μ deve satisfazer a seguinte transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.7)$$

Chegamos então a forma invariante da lagrangiana

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi^*)(D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi, \quad (1.8)$$

porém, para o campo A_μ ter significado físico, precisamos colocar um termo cinético que represente a dinâmica do campo. Além disso, esse termo precisa ser invariante sob transformações locais para manter a invariância da lagrangiana. Com esse intuito, introduzimos o tensor $F_{\mu\nu}$ definido como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}. \quad (1.9)$$

Aplicando a (1.7) na (1.9) é fácil ver que o tensor $F_{\mu\nu}$ é invariante. Podemos então escrever o termo cinético invariante

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.10)$$

e adicionar este termo a (1.8), obtendo:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi^*)(D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

Essa é a lagrangiana da QED para o campo escalar complexo. $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e A_μ o quadrivetor formado pelos potenciais escalar e vetorial da eletrodinâmica clássica.

Como outro exemplo, podemos fazer o mesmo com a lagrangiana de Dirac, que descreve a dinâmica de um campo de férmions

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad (1.12)$$

onde γ^μ 's são as matrizes gama de Dirac. Analogamente à (1.1), a (1.12) pode ser transformada em

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

o que nos leva a lagrangiana da QED para um campo fermiônico.

1.2 Mecânica Estatística Quântica

Antes de discutirmos a teoria de campos a temperatura finita, precisamos relembrar alguns conceitos de mecânica estatística essenciais para o entendimento do trabalho.

Em mecânica estatística, quando queremos descrever o comportamento de um sistema em equilíbrio, precisamos primeiro identificar as grandezas termodinâmicas (macroscópicas) que o caracterizam e especificar os estados microscópicos do sistema. Chamamos o conjunto completo desses estados de *ensemble estatístico*.

Para diferentes sistemas podemos definir diferentes tipos de ensembles, o que nos permite usar a teoria de probabilidades para descrever o comportamento deste sistema e fazer a conexão com a termodinâmica, relacionando os estados microscópicos com as grandezas termodinâmicas que caracterizam o sistema macroscópico. [19]

Existem muitos tipos de ensembles estatísticos. Para o nosso caso, usaremos o *ensemble grande canônico*. Neste tipo de ensemble, o sistema está em contato com um reservatório térmico externo, podendo trocar energia e variar o seu número de partículas. Entretanto, a temperatura, o volume e o potencial químico das partículas no sistema são fixados. Este ensemble é ideal para descrevermos o comportamento de sistemas físicos em que o número de partículas é variável, como a teoria de campos.

Seja um sistema descrito por uma hamiltoniana H e seja uma série de operadores número \hat{N}_i , todos hermitianos, extensivos, e que comutam entre si e com o operador hamiltoniano. Podemos definir o operador matriz desidade

$$\hat{\rho} = \exp[-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)], \quad (1.14)$$

onde $(\beta = T^{-1})$ e μ_i é o potencial químico correspondente ao operador \hat{N}_i . Vale ressaltar que os operadores número não representam necessariamente o número total de um tipo de partículas no sistema (já que esse número nem sempre é conservado), mas também podem representar uma quantidade conservada relacionada aos números de diferentes tipos de partículas. Por exemplo, na QED o número de elétrons não é conservado, mas a diferença entre o número de elétrons e pósitrons é, em virtude da conservação da carga elétrica.

Usando a matriz densidade, encontramos a média de um observável representado por um operador \hat{A} qualquer da seguinte forma:

$$A = \langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho})}{\text{Tr}(\hat{\rho})}. \quad (1.15)$$

Podemos então definir a função de partição grande canônica

$$Z(V, T, \mu_1, \mu_2, \dots) = \text{Tr}(\hat{\rho}), \quad (1.16)$$

e a partir da (1.16), podemos determinar as grandezas termodinâmicas entropia (S), pressão (P), número total de partículas (N_i) e energia do sistema (E):

$$S = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial T}, \quad (1.17a)$$

$$P = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial V}, \quad (1.17b)$$

$$N_i = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial \mu_i}, \quad (1.17c)$$

$$E = -PV + TS + \mu_i N_i. \quad (1.17d)$$

Como exemplo, usaremos agora o formalismo do ensemble grande canônico para tratarmos de dois sistemas básicos: o gás de bósons e o gás de férmions.

1.2.1 Gás de Bósons

Vamos inicialmente considerar um sistema formado por um único estado de energia ϵ ocupado por um número n (não fixado) de bósons idênticos, onde cada bóson tem a mesma energia e as partículas não interagem entre si. Podemos tratar esse sistema como um oscilador harmônico quântico e a sua energia total é naturalmente dada pela equação

$$E = n\epsilon + k, \quad (1.18)$$

onde k é uma constante que pode ser interpretada como a energia do sistema na ausência de partículas. Vamos chamar de $|n\rangle$ o estado do sistema com n bósons.

As propriedades básicas desses estados em função do número de partículas são

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}, \quad (1.19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1, \quad (1.20)$$

que correspondem respectivamente às relações de ortogonalidade e completeza. Dessa forma, a soma de todos os estados $|n\rangle$ possíveis formam uma base ortogonal de um espaço vetorial de dimensão infinita.

Vamos agora introduzir os operadores criação e aniquilação. O primeiro tem a propriedade de, quando aplicado em um estado, “criar” um bóson, levando o estado inicial ao estado correspondente a uma partícula a mais multiplicado por um autovalor. O segundo “destrói” um bóson, levando o estado inicial ao estado com uma partícula a menos multiplicado pelo autovalor correspondente. Assim, temos:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.21a)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (1.21b)$$

Nota-se que quando aplicamos o operador de aniquilação no estado $|0\rangle$, que representa a ausência de bósons no estado de energia ϵ , o resultado é 0.

Usando as equações (1.21), é direta a relação

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle, \quad (1.22)$$

da qual podemos obter o operador número $N = a^\dagger a$. Podemos também aplicar o comutador de a e a^\dagger num estado qualquer para chegar a relação:

$$[a, a^\dagger]|n\rangle = (aa^\dagger - a^\dagger a)|n\rangle = 1|n\rangle. \quad (1.23)$$

Ou seja, o comutador atua num estado como o operador identidade. Agora, para escrevermos o hamiltoniano em função dos operadores de criação e aniquilação, lembrando da equação de Schrödinger independente do tempo ($H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$) e tendo como referência a (1.18) podemos considerar

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\epsilon}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) = \epsilon \left(aa^\dagger + \frac{1}{2}[a, a^\dagger] \right) \\
&= \epsilon \left(N + \frac{1}{2} \right),
\end{aligned} \tag{1.24}$$

onde o termo $\frac{\epsilon}{2}$ aplicado num estado qualquer corresponde a constante de energia do sistema na ausência de partículas. Usando as equações (1.14) e (1.24), temos:

$$\hat{\rho} = \exp \left[-\beta(\epsilon - \mu)N - \frac{\beta\epsilon}{2} \right]. \tag{1.25}$$

Na prática, vamos desconsiderar o último termo da exponencial da (1.25), pois não estamos interessados em estudar os efeitos de campo do vácuo de partículas, e sim na diferença de energia entre os estados do sistema e relacionar a função de partição com a matriz densidade. Usando a base formada pelos estados $|n\rangle$, chegamos a função de partição

$$\begin{aligned}
Z &= \text{Tr}(\hat{\rho}) = \text{Tr}[\exp[-\beta(\epsilon - \mu)N]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp[-\beta(\epsilon - \mu)N] | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon - \mu)n] \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}}, \quad (\epsilon > \mu)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

e com ela é possível obter as grandezas termodinâmicas relevantes do sistema.

Agora, vamos partir para um caso um pouco mais complexo. Considere um gás de bósons livres, idênticos, não interagentes e de spin nulo numa caixa cúbica de lado L . Como não há interação entre as partículas, podemos resolver a equação de Schrödinger independente do tempo separadamente para cada bóson. O problema da partícula em uma caixa cúbica é bem conhecido [20] e os valores possíveis obtidos para a energia da partícula são

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{2\pi n_x}{L} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_y}{L} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_z}{L} \right)^2 \right], \tag{1.27}$$

onde $n_i \in \mathbb{Z}$. Podemos definir o vetor $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ e usar a seguinte notação simplificada:

$$E_{\vec{n}} = \frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi \vec{n}}{L} \right)^2. \tag{1.28}$$

Sendo $N_{\vec{n}}$ o número de bósons no estado \vec{n} , são diretas as seguintes relações:

$$N = \sum_{\vec{n}} N_{\vec{n}}, \quad (1.29)$$

$$E = \sum_{\vec{n}} N_{\vec{n}} E_{\vec{n}}, \quad (1.30)$$

$$H = \sum_{\vec{n}} N_{\vec{n}} H_{\vec{n}}. \quad (1.31)$$

Onde $H_{\vec{n}}$ é a hamiltoniana para as partículas no estado \vec{n} . A partir dos resultados acima e das equações (1.14) e (1.26) chegamos a

$$\begin{aligned} Z = \text{Tr}(\hat{\rho}) &= \sum_{N_{\vec{n}}=0}^{\infty} \exp \left[-\beta \sum_{\vec{n}} (E_{\vec{n}} N_{\vec{n}} - \mu N_{\vec{n}}) \right] \\ &= \prod_{\vec{n}} \sum_{N_{\vec{n}}=0}^{\infty} e^{-\beta N_{\vec{n}} (E_{\vec{n}} - \mu)} = \prod_{\vec{n}} \frac{1}{1 - e^{-\beta (E_{\vec{n}} - \mu)}}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

que é a função de partição do nosso sistema. Apesar do produtório, para determinarmos as principais grandezas termodinâmicas do sistema vamos trabalhar com o logarítmo da função Z , ou seja com uma somatória.

$$\log Z = - \sum_{\vec{n}} \log \left[1 - e^{-\beta (E_{\vec{n}} - \mu)} \right]. \quad (1.33)$$

1.2.2 Gás de Férmions

Assim como no exemplo anterior, vamos inicialmente trabalhar com um sistema que tem apenas um estado de energia e depois fazer a generalização. No caso de férmions, é preciso primeiramente lembrar do princípio de Pauli que proíbe a presença de mais de um férmion no mesmo estado quântico simultaneamente. Sendo assim, nosso sistema tem apenas dois estados possíveis: $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Usando novamente o formalismo de operadores de criação e aniquilação temos:

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle, \quad (1.34a)$$

$$a |1\rangle = |0\rangle, \quad (1.34b)$$

$$a |0\rangle = 0, \quad (1.34c)$$

$$a^\dagger |1\rangle = 0. \quad (1.34d)$$

A partir dessas equações é trivial verificar que os dois operadores quando aplicados duas vezes seguidas em qualquer um dos estados se anulam, ou seja

$$aa = a^\dagger a^\dagger = 0, \quad (1.35)$$

e, assim como para bósons, podemos também definir o operador número $N = a^\dagger a$.

Além disso, os operadores satisfazem a relação de anticomutação

$$\{a, a^\dagger\}|i\rangle = (aa^\dagger + a^\dagger a)|i\rangle = 1|i\rangle. \quad (1.36)$$

Vamos agora obter o hamiltoniano do sistema. Seguindo a mesma filosofia que empregamos para obter a (1.24) e lembrando que para esse caso a energia também é da forma da (1.18), chegamos a

$$\begin{aligned} H &= \frac{\epsilon}{2}(a^\dagger a - aa^\dagger) = \epsilon \left(a^\dagger a - \frac{1}{2}\{a, a^\dagger\} \right) \\ &= \epsilon \left(N - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

e assim como fizemos para bósons, vamos desconsiderar o termo independente do número de partículas para chegar na função de partição para um gás de férmions com apenas um estado de energia:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr}(\hat{\rho}) = \text{Tr}[\exp[-\beta(\epsilon - \mu)N]] \\ &= \sum_{n=0}^1 \langle n | \exp[-\beta(\epsilon - \mu)N] | n \rangle = 1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Seguindo o mesmo procedimento feito no caso anterior, vamos generalizar o problema para chegarmos a função de partição de um gás de férmions numa caixa cúbica fechada de lado L . Podemos proceder de maneira análoga a (1.32) e obter

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{N_{\vec{n}}=0}^1 \exp \left[-\beta \sum_{\vec{n}} (E_{\vec{n}} N_{\vec{n}} - \mu N_{\vec{n}}) \right] \\ &= \prod_{\vec{n}} \sum_{N_{\vec{n}}=0}^1 e^{-\beta N_{\vec{n}}(E_{\vec{n}} - \mu)} = \prod_{\vec{n}} [1 + e^{-\beta(E_{\vec{n}} - \mu)}], \end{aligned} \quad (1.39)$$

e, a partir dessa função, obter as grandezas termodinâmicas relevantes do sistema.

1.3 O Formalismo das Integrais de Trajetória

Quando tratamos das teorias de campos, existem dois formalismos que são muito utilizados: o formalismo de operadores e o de integrais de trajetória (ou integrais funcionais). Cada um desses formalismos tem suas vantagens e desvantagens no tratamento de diferentes problemas sendo que em alguns casos um método é mais eficiente, em outros o outro método se sobressai. [3] Nesta seção, discutiremos o formalismo de integrais de trajetória, explicitando os seus princípios gerais, o seu funcionamento e alguns resultados fundamentais. No apêndice A desta tese, explicitamos mais detalhadamente algumas propriedades das integrais funcionais e explicamos com mais detalhes o desenvolvimento do método.

Uma teoria de campos pode ser completamente caracterizada pelas suas funções de Green [5]. Para obter o funcional gerador das funções de Green, vamos partir da (A.22) e adicionar à lagrangiana do sistema um termo correspondente a uma fonte do campo escalar da teoria. Assim, definimos a lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L} + j\phi, \quad (1.40)$$

em que j é a fonte do campo escalar ϕ . Dessa forma, o funcional gerador das funções de Green, é dado por

$$Z[j] = \rho \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^{D-1} \vec{x} (\mathcal{L} + \mu \mathcal{N} + j\phi) \right\}, \quad (1.41)$$

onde a função de partição do sistema pode ser recuperada fazendo $Z = Z[j = 0]$.

A função de Green de dois pontos é definida como

$$G((\vec{x}_1, \tau_1), (\vec{x}_2, \tau_2)) = \langle T_\tau(\phi(\vec{x}_1, \tau_1), \phi(\vec{x}_2, \tau_2)) \rangle_\beta, \quad (1.42)$$

onde tomamos a média térmica do operador de ordenação para o tempo imaginário T_τ , definido como

$$T_\tau(\phi(\vec{x}_1, \tau_1), \phi(\vec{x}_2, \tau_2)) = \theta(\tau_1 - \tau_2) \phi(\vec{x}_1, \tau_1) \phi(\vec{x}_2, \tau_2) + \theta(\tau_2 - \tau_1) \phi(\vec{x}_2, \tau_2) \phi(\vec{x}_1, \tau_1). \quad (1.43)$$

Usando a (1.15) e a (A.4), é possível fazer uma analogia e escrever

$$\langle T_\tau(\phi(\vec{x}_1, \tau_1), \phi(\vec{x}_2, \tau_2)) \rangle_\beta = \frac{1}{Z[j]} \text{Tr} [e^{-\beta(H-\mu N)} T_\tau(\phi(\vec{x}_1, \tau_1), \phi(\vec{x}_2, \tau_2))], \quad (1.44)$$

e para obter o termo do lado direito da (1.44), vale lembrar que

$$\text{Tr} [e^{-\beta(H-\mu N)} T_\tau(\phi(\vec{x}_1, \tau_1), \phi(\vec{x}_2, \tau_2))] = \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(\vec{x}_1, \tau_1) \delta j(\vec{x}_2, \tau_2)} \Big|_{j=0}. \quad (1.45)$$

Agora, para obter as funções de Green de n pontos do funcional gerador, tomamos a n -ésima derivada funcional de $Z[j]$ com relação a fonte e dividimos o resultado pelo funcional para normalizar a função obtida:

$$G^{(n)}((\vec{x}_1, \tau_1), (\vec{x}_2, \tau_2), \dots, (\vec{x}_n, \tau_n)) = \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(\vec{x}_1, \tau_1) \delta j(\vec{x}_2, \tau_2) \dots \delta j(\vec{x}_n, \tau_n)} \Big|_{j=0}. \quad (1.46)$$

Como um exemplo simples de aplicação do funcional $Z[j]$, consideremos a teoria de um campo escalar real e livre cuja densidade lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad (1.47)$$

e vamos calcular a função de Green de dois pontos para esse sistema e verificar se o resultado é compatível com o valor conhecido do propagador do campo real escalar.

Para este caso, devemos voltar ao espaço de tempo real ($\tau = idt$) e considerar que a integração é realizada sobre todo o espaço-tempo. Assim, o funcional $Z[j]$ assume a forma

$$\begin{aligned} Z[j] &= \rho \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^D x (\mathcal{L} + \mu \mathcal{N} + j\phi) \right\} \\ &= \rho \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^D x \left(-\frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi + \mu \mathcal{N} + j\phi \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

e vamos usar a notação $K = (\partial^2 + m^2)$. Essa integração funcional é conhecida e seu resultado dá [21]:

$$Z[j] = \rho \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^D x j K^{-1} j \right\}. \quad (1.49)$$

Usando a relação (1.46) na (1.49) para a função de dois pontos, temos:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x_2)} \Big|_{j=0} = -i K^{-1}. \quad (1.50)$$

Podemos escrever explicitamente o resultado

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = -iK^{-1} = \frac{-i}{\partial^2 + m^2}, \quad (1.51)$$

que no espaço dos momentos ($\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$) assume a forma conhecida do propagador livre do campo escalar real [22]

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (1.52)$$

2 | Teoria de Campos a Temperatura Finita

Neste capítulo usaremos o formalismo de integrais de trajetória e vamos tratar mais especificamente da teoria de campos a temperatura finita.

Assim como fizemos no capítulo anterior e no apêndice A deste trabalho, para tratarmos de sistemas em equilíbrio a temperatura finita, é conveniente utilizar o formalismo de tempo imaginário, em que realizamos a substituição $\tau = it$, onde τ tem dimensão inversa da temperatura. Dessa forma, conseguimos realizar a conexão entre a mecânica estatística e a teoria de campos.

Vamos partir do funcional obtido no capítulo 1:

$$Z[j] = \rho \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^{D-1}\vec{x} (\mathcal{L} + \mu\mathcal{N} + j\phi) \right\}. \quad (2.1)$$

Para o caso bosônico, consideramos $\mu = 0$ e o termo dependente do operador \mathcal{N} não precisa ser considerado. Como na maior parte deste capítulo, trabalharemos com o campo real escalar, este termo não aparecerá nos cálculos. Para férmions este termo não pode ser desconsiderado. O tratamento do campo fermiônico com potencial químico não nulo foge ao escopo deste trabalho mas pode ser encontrado em diversos textos [3].

Podemos definir o propagador de tempo imaginário

$$\Delta(\vec{x}, \tau) = \langle T_\tau(\phi(\vec{x}, 0), \phi(\vec{x}, \tau)) \rangle_\beta. \quad (2.2)$$

Lembremos que na dedução do funcional gerador, a integração é realizada para os estados periódicos do campo. Dessa forma, temos a seguinte condição de contorno:

$$\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta). \quad (2.3)$$

Ou seja, com relação à variável τ , o campo é uma função de período β . Estendendo o domínio para o intervalo $[-\beta, \beta]$, por exemplo, e usando a periodicidade do campo ϕ , temos que

$$\Delta(\vec{x}, \tau) = \Delta(\vec{x}, \tau - \beta), \quad (2.4)$$

para τ no intervalo $[0, \beta]$. Podemos então generalizar esse resultado e tratar o propagador de tempo imaginário como uma função de período β com relação a variável τ .

Trabalharemos com alguns aspectos importantes da teoria e, como exemplo, vamos aplicá-los num campo escalar para encontrar alguns resultados importantes. Para o caso do campo escalar real, podemos escrever a lagrangiana da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.5)$$

onde o último termo define a interação dos campos e para $\mathcal{L}_{int} = 0$, temos o campo escalar livre.

2.1 A Ação Efetiva

A partir desta seção, utilizaremos os diagramas de Feynman para facilitar a interpretação das funções de Green geradas e tratadas no texto. O Apêndice B desta tese contém um resumo com toda a informação que será necessária para a construção e o entendimento de todos os diagramas apresentados ao longo neste trabalho.

2.1.1 Reescrevendo $Z[j]$

Como vimos anteriormente, podemos obter as funções de Green que descrevem uma teoria de campo a partir do funcional $Z[j]$ correspondente. No entanto, quando vamos tratar de um problema em específico, como por exemplo um sistema com n partículas idênticas de um campo escalar interagindo entre si, obter todas as funções de Green correspondentes a interação de n partículas a partir de $Z[j]$ e trabalhar com todas elas não é a maneira mais eficiente de tratar este problema.

Existem outros funcionais que podem ser obtidos de $Z[j]$ e geram um conjunto mais restrito de funções de Green que podem fornecer toda a informação necessária para solu-

cionar o problema apresentado. Para obter e entender o significado destes outros funcionais, trabalharemos primeiramente com $Z[j]$ e explicitaremos o significado das funções de Green geradas por ele com o auxílio dos diagramas de Feynman.

Com este intuito, e usando como exemplo o campo escalar real, vamos partir da (1.48) e reescrever o funcional gerador de maneira conveniente. Para o caso livre ($\mathcal{L}_{int} = 0$), temos que

$$Z_0[j] = \rho \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^D x \left(-\frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi + j \phi \right) \right\}, \quad (2.6)$$

onde o índice “0” indica que estamos tratando do campo escalar livre. Para reescrever este funcional, vamos usar a relação [23]

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x \phi(x) A \phi(x) + b \phi(x) \right] = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^D x b A^{-1} b \right] (\det A)^{-1/2}, \quad (2.7)$$

onde

$$\int d^D x A^{-1} A(x, y) f(x) = \int d^D x \delta^D(x - y) f(x) = f(y). \quad (2.8)$$

Também é preciso lembrar que a função de Green para o campo escalar livre pode ser obtida a partir da equação de Klein-Gordon modificada

$$(\partial^2 + m^2)G(x) = -\delta^D(x), \quad (2.9)$$

e que como vimos no capítulo anterior a função de Green de dois pontos do campo escalar livre é igual ao propagador de Feynman (de tempo ordenado) do campo escalar $\Delta_F(x)$.

Podemos então substituir $A = i(\partial^2 + m^2)$, $b = -ij$, $A^{-1} = i\Delta_F(x - y)$ para obter:

$$Z_0[j] = \frac{\rho \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x - y) j(y) \right]}{\det[i(\partial^2 + m^2)]^{1/2}}. \quad (2.10)$$

Com relação ao determinante, podemos usar a (2.7) tomando $b = 0$ e chegaremos finalmente em

$$Z_0[j] = \rho \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x - y) j(y) \right] \times \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x \phi (\partial^2 + m^2) \phi \right]. \quad (2.11)$$

Na prática, como estamos apenas interessados na diferenciação do funcional com relação a fonte j , podemos considerar a integral funcional um termo constante e adicioná-lo ao termo de normalização ρ . Sendo assim, o funcional renormalizado tal que $Z_0[j = 0] = 1$ pode ser escrito como:

$$Z_0[j] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right]. \quad (2.12)$$

Aqui um resultado interessante é calcular a função de dois pontos gerada por este funcional, que deve ser equivalente ao propagador do campo escalar livre. Para isso fazemos:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{1}{Z_0} \frac{\delta Z_0}{\delta j(x_1) \delta j(x_2)} \Big|_{j=0} \\ &= \left[i \Delta_F(x_1 - x_2) + \left(\int d^D y \Delta_F(x_1 - y) \right) \left(\int d^D y \Delta_F(x_2 - y) \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right] \Big|_{j=0} \\ &= i \Delta_F(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vamos agora fazer o mesmo procedimento para o caso do campo real escalar com interação. Partiremos do funcional gerador

$$\begin{aligned} Z[j] &= \rho \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^D x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + j\phi) \right] \\ &= \rho \int \mathcal{D}\phi \left\{ \exp \left[i \int d^D x \mathcal{L}_{int}(\phi) \right] \exp \left[i \int d^D x (\mathcal{L}_0 + j\phi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

e aqui, assim como em [21, 24], podemos fazer a seguinte substituição

$$\phi(x) \exp \left[i \int d^D x j\phi \right] = -i \frac{\delta}{\delta j(x)} \exp \left[i \int d^D x j\phi \right], \quad (2.15)$$

e como j e ϕ são variáveis independentes, podemos fazer a mesma substituição para qualquer função que dependa apenas de ϕ . Dessa forma, fazemos

$$\mathcal{L}_{int}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right), \quad (2.16)$$

e substituindo na (2.14), temos

$$\begin{aligned}
Z[j] &= \rho \int \mathcal{D}\phi \left\{ \exp \left[i \int d^D x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right) \right] \exp \left[i \int d^D x (\mathcal{L}_0 + j\phi) \right] \right\} \\
&= \rho \exp \left[i \int d^D x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right) \right] \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^D x (\mathcal{L}_0 + j\phi) \right] \\
&= \rho' \exp \left[i \int d^D x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right) \right] Z_0[j],
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde ρ' é a nova constante de normalização. Renormalizando o funcional $Z[j]$ de maneira análoga ao que fizemos em (2.12), temos:

$$Z[j] = \frac{\exp \left[i \int d^D z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(z)} \right) \right] \exp \left[- \frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right]}{\left\{ \exp \left[i \int d^D z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(z)} \right) \right] \exp \left[- \frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right] \right\} \Big|_{j=0}}. \tag{2.18}$$

2.1.2 Interpretando as Funções de Green

Agora que conseguimos reescrever o funcional $Z[j]$ de maneira conveniente, vamos analisar as funções de Green geradas com o auxílio dos diagramas de Feynman correspondentes. Para isso, precisamos primeiramente definir o termo de interação do campo.

Como exemplo usaremos a teoria $\lambda\phi^4$, um dos modelos mais simples para o campo real escalar. Dessa forma, definimos:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4. \tag{2.19}$$

Para tratar da exponencial do termo de interação devemos expandi-la, tratar o problema perturbativamente e truncar a série em função do parâmetro λ na ordem desejada. Fazendo isso até primeira ordem:

$$\exp \left[- \frac{i\lambda}{4!} \int d^D z \left(-i \frac{\delta}{\delta j(z)} \right)^4 \right] = 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^D z \left(-i \frac{\delta}{\delta j(z)} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{2.20}$$

Vamos agora calcular o termo de primeira ordem de $Z[j]$. Para isso, temos que tomar a derivada funcional de $Z_0[j]$ quatro vezes.

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{\delta}{\delta j(z)}\right)^4 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right] = \\ = \left\{ -3[\Delta_F(z-z)]^2 + 6i \Delta_F(z-z) \left[\int d^D x \Delta_F(z-x) j(x) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int d^D x \Delta_F(z-x) j(x) \right]^4 \right\} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right]. \quad (2.21) \end{aligned}$$

O termo $\Delta_F(z-z) = \Delta_F(0)$ é um loop fechado. Podemos usar os diagramas de Feynman para representar os resultados da equação acima. Na figura 2.1 os diagramas (a), (b) e (c) correspondem na mesma ordem aos três termos da (2.21).

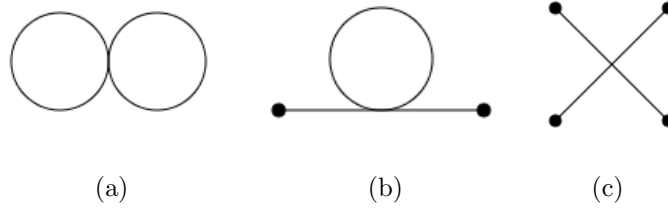


Figura 2.1: diagramas gerados por $Z[j]$ de $\mathcal{O}(\lambda)$.

Para facilitar a notação, podemos então escrever a (2.21) da seguinte forma:

$$\left\{ -3 \bigcirc \bigcirc + 6i * \underline{\bigcirc} * + * \times * \right\} \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right), \quad (2.22)$$

onde os asteriscos indicam que os pontos externos não estão definidos no diagrama.

Com relação ao denominador de $Z[j]$ em $\mathcal{O}(\lambda)$, quando tomamos $j = 0$, os termos correspondentes aos diagramas (b) e (c) desaparecem. Dessa forma, temos

$$Z[j] = \frac{\left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^D z \left(-3 \bigcirc \bigcirc + 6i * \underline{\bigcirc} * + * \times * \right) \right] \exp \left(-\frac{i}{2} \int j \Delta_F j \right)}{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^D z \left(-3 \bigcirc \bigcirc \right)}, \quad (2.23)$$

que em $\mathcal{O}(\lambda)$ pode ser escrito como:

$$Z[j] = \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^D z \left(6i * \underline{\bigcirc} * + * \times * \right) \right] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right). \quad (2.24)$$

O termo que não aparece no funcional gerador normalizado é uma *bolha de vácuo*, pois não apresenta linhas externas. Na prática, as bolhas de vácuo não são importantes para o cálculo das interações em um sistema já que seu efeito é igual em todos os diagramas com linhas externas. Dessa forma, todos os termos podem ser renormalizados igualmente e as bolhas de vácuo não alteram o resultado.

Por isso, escrever $Z[j]$ renormalizado é vantajoso, já que diminui o número de diagramas gerados e mesmo assim podemos tratar de todas as funções de n pontos da teoria.

Aqui, é importante ressaltar que para o caso da teoria $\lambda\phi^4$, é fácil mostrar que se tomarmos a derivada funcional de $Z[j]$ um número ímpar de vezes fazendo $j = 0$, o resultado será sempre zero. Isso porque todos os termos da expansão de $Z[j]$ são proporcionais a

$$Z_n \propto \left(\int j \Delta_F \right)^{2n} \exp \left(\int j \Delta_F j \right), \quad (2.25)$$

onde $n \geq 0$. Assim, se tomarmos a derivada funcional um número ímpar de vezes os termos não nulos serão todos múltiplos de j .

Continuando, vamos analisar a função de quatro pontos até $\mathcal{O}(\lambda)$. Abaixo podemos ver todos os diagramas relevantes nesse caso:

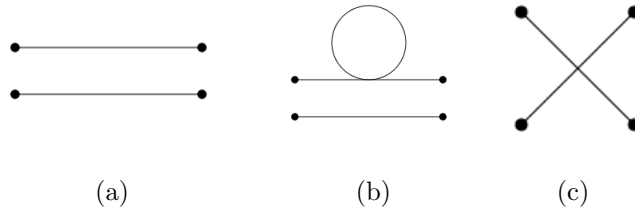


Figura 2.2: diagramas de 4 pontos gerados por $Z[j]$ até $\mathcal{O}(\lambda)$.

Escrevendo a função de Green de quatro pontos, temos

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta^4 Z[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x_2) \delta j(x_3) \delta j(x_4)} \Big|_{j=0}. \quad (2.26)$$

Para o termo de $\mathcal{O}(\lambda^0)$, fazemos

$$\begin{aligned}
G^{[0]} &= \frac{\delta^4}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3 \delta j_4} \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right) \right] \Big|_{j=0} \\
&= -[\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) + \\
&\quad + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3)] \\
&= -3 \left(\text{---} \right), \tag{2.27}
\end{aligned}$$

onde $j(x_i) = j_i$ e o diagrama correspondente é formado por duas partes desconexas. Já com relação ao termo de $\mathcal{O}(\lambda)$, podemos dividir o cálculo em duas partes. A primeira é dada por

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^4}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3 \delta j_4} \left[\frac{\lambda}{4} * \text{---} * \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right) \right] \Big|_{j=0} = \\
&= -i \frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int d^D z [\Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) \\
&\quad + \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3) \\
&\quad + \Delta_F(z - x_2) \Delta_F(z - x_3) \Delta_F(x_1 - x_4) + \Delta_F(z - x_2) \Delta_F(z - x_4) \Delta_F(x_1 - x_3) \\
&\quad + \Delta_F(z - x_3) \Delta_F(z - x_4) \Delta_F(x_1 - x_2)] = \\
&= -3i\lambda \left(\text{---} \right), \tag{2.28}
\end{aligned}$$

onde o diagrama final também é desconexo.

Com relação a outra parte do termo de $\mathcal{O}(\lambda)$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^4}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3 \delta j_4} \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} * \text{---} * \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right] \right\} \Big|_{j=0} \\
&= -i\lambda \int d^D z \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(x_2 - z) \Delta_F(x_3 - z) \Delta_F(x_4 - z) \\
&= -i\lambda \text{---} . \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Vale lembrar que a (2.21) tem a forma explícita dos diagramas $* \text{---} *$ e $* \text{---} *$.

Juntando tudo, a função de quatro pontos até primeira ordem é dada então por:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3 \text{---} - 3i\lambda \text{---} - i\lambda \text{---} . \tag{2.30}$$

Como já mencionamos antes, os dois primeiros diagramas gerados são desconexos, ou seja, podemos dividir o diagrama em partes independentes (que não interagem entre si). Usando a representação dos diagramas de Feynman, se é possível desenhar um diagrama sem tirar o lápis do papel ao menos uma vez, podemos chamar esse diagrama de conexo. Caso contrário, é um diagrama desconexo.

Podemos representar um diagrama desconexo como o produto das suas partes conexas. Vale lembrar que quando vamos escrever um diagrama como produto de outros é preciso depois levar em consideração os fatores combinatórios dos diagramas. Nas (2.27 - 2.29), o fator combinatório aparece como a soma dos diferentes termos que surgem da derivação funcional e são representados pelo mesmo diagrama.

2.1.3 O Funcional Gerador das Funções de Green Conexas

Como podemos representar os diagramas desconexos em função dos conexos, com um funcional gerador que nos forneça apenas as funções de Green conexas, podemos tratar os problemas da teoria de campos estudada.

Este funcional, que chamaremos de $W[j]$, é encontrado fazendo [23]

$$W[j] = -i \log(Z[j]), \quad (2.31)$$

e podemos relacionar a derivada dos funcionais em relação a fonte da seguinte forma:

$$\frac{\delta W}{\delta j(x)} = -\frac{i}{Z} \frac{\delta Z}{\delta j(x)}. \quad (2.32)$$

Vamos como exemplo testar o funcional $W[j]$ na função de quatro pontos da teoria $\lambda\phi^4$. Lembrando que todas as derivadas de ordem ímpar de $Z[j]$ se anulam em $j = 0$ e $Z[j = 0] = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^4 W}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3 \delta j_4} \right|_{j=0} &= i \left\{ \frac{1}{Z^2} \left[\frac{\delta^2 Z}{\delta j_1 \delta j_2} \frac{\delta^2 Z}{\delta j_3 \delta j_4} + \frac{\delta^2 Z}{\delta j_1 \delta j_3} \frac{\delta^2 Z}{\delta j_2 \delta j_4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\delta^2 Z}{\delta j_1 \delta j_4} \frac{\delta^2 Z}{\delta j_2 \delta j_3} \right] - \frac{1}{Z} \frac{\delta^4 Z}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3 \delta j_4} \right\} \Big|_{j=0} \\ &= i[G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) \\ &\quad + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3) - G(x_1, x_2, x_3, x_4)]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A função de Green de dois pontos é igual a [23]

$$G(x_1, x_2) = i \text{ ——— } - \frac{\lambda}{2} \text{ — } \bigcirc \text{ — } + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (2.34)$$

Quando realizamos o produto de duas funções de Green de dois pontos até $\mathcal{O}(\lambda)$, obtemos

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) &= \left[i \text{ — }^1\text{ — }^2 - \frac{\lambda}{2} \text{ — }^1\text{ — } \bigcirc \text{ — }^2 \right] \left[i \text{ — }^3\text{ — }^4 - \frac{\lambda}{2} \text{ — }^3\text{ — } \bigcirc \text{ — }^4 \right] \\ &= - \frac{1}{3} \text{ — }^1\text{ — }^2 \text{ — }^3\text{ — }^4 - \frac{i\lambda}{2} \frac{1}{3} \text{ — }^1\text{ — } \bigcirc \text{ — }^2 \text{ — }^3\text{ — }^4 - \frac{i\lambda}{2} \frac{3}{1} \text{ — }^3\text{ — } \bigcirc \text{ — }^4 \text{ — }^1\text{ — }^2 + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned} \quad (2.35)$$

e quando substituímos as funções de dois e quatro pontos na (2.33) chegamos a:

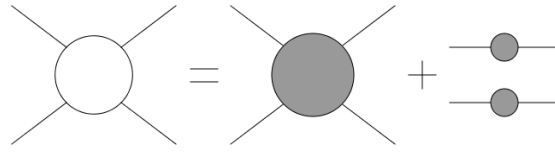
$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^4 W}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3 \delta j_4} \right|_{j=0} &= i \left[- \frac{1}{3} \text{ — }^1\text{ — }^2 \text{ — }^3\text{ — }^4 - \frac{i\lambda}{2} \frac{1}{3} \text{ — }^1\text{ — } \bigcirc \text{ — }^2 \text{ — }^3\text{ — }^4 - \frac{i\lambda}{2} \frac{3}{1} \text{ — }^3\text{ — } \bigcirc \text{ — }^4 \text{ — }^1\text{ — }^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{ — }^1\text{ — }^3 \text{ — }^2\text{ — }^4 - \frac{i\lambda}{2} \frac{1}{2} \text{ — }^1\text{ — } \bigcirc \text{ — }^3 \text{ — }^2\text{ — }^4 - \frac{i\lambda}{2} \frac{2}{1} \text{ — }^2\text{ — } \bigcirc \text{ — }^4 \text{ — }^1\text{ — }^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{ — }^1\text{ — }^4 \text{ — }^2\text{ — }^3 - \frac{i\lambda}{2} \frac{1}{2} \text{ — }^1\text{ — } \bigcirc \text{ — }^4 \text{ — }^2\text{ — }^3 - \frac{i\lambda}{2} \frac{2}{1} \text{ — }^2\text{ — } \bigcirc \text{ — }^3 \text{ — }^1\text{ — }^4 \\ &\quad \left. + 3 \text{ — }^1\text{ — }^2 \text{ — }^3\text{ — }^4 + 3i\lambda \text{ — }^1\text{ — } \bigcirc \text{ — }^2\text{ — }^3\text{ — }^4 + i\lambda \text{ — }^1\text{ — } \times \text{ — }^2\text{ — }^3\text{ — }^4 \right] \Big|_{j=0} \\ &= -\lambda \text{ — }^1\text{ — } \times \text{ — }^2\text{ — }^3\text{ — }^4. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aqui notamos que o fator de simetria de diferentes termos que discutimos anteriormente na função de quatro pontos é explicitamente representado pelos diagramas com índices diferentes dos produtos das funções de dois pontos, sendo que estes termos desconexos e os da função de quatro pontos se cancelam.

Para facilitar a notação chamaremos de $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a função de Green de n pontos conexa. Para a função de dois pontos temos que:

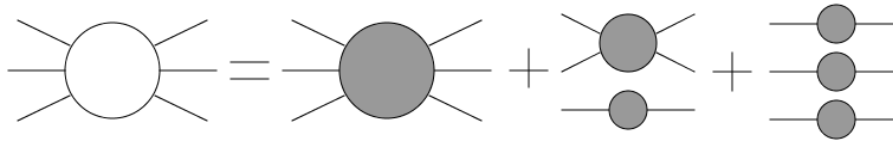
$$H(x_1, x_2) = \left. \frac{\delta^2 W}{\delta j_1 \delta j_2} \right|_{j=0} = - \frac{i}{Z} \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta j_1 \delta j_2} \right|_{j=0} = iG(x_1, x_2), \quad (2.37)$$

o que indica que a função de dois pontos não apresenta termos desconexos. Sendo assim, podemos escrever em forma de diagramas para a função de quatro pontos a seguinte relação:



$$(2.38)$$

Aqui, um círculo branco representa todos os diagramas possíveis da função de n pontos (e, por conseguinte, todas as interações possíveis na teoria), em que n é o número de linhas ligadas a este círculo. Já um círculo cinza representa o conjunto dos diagramas conexos da função de n pontos. A (2.38) pode ser generalizada para um diagrama de n pontos (n par). Assim, por exemplo, para $n = 6$:



$$(2.39)$$

E assim, podemos apenas com as funções de Green conexas descrever todas as interações possíveis do problema. Mas é possível escolher um conjunto ainda mais restrito de funções de Green que atingem o mesmo resultado. Para entender melhor aonde queremos chegar, observe primeiro o diagrama abaixo:

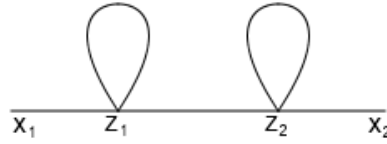


Figura 2.3: diagrama conexo com dois loops.

Usando as regras de Feynman para a teoria $\lambda\phi^4$ (vide apêndice B), a função de Green correspondente ao diagrama da figura acima pode ser escrita da seguinte maneira

$$G_{diag}(x_1, x_2) = S \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 [i\Delta_F(0)]^2 \times \\ \times \iint d^D z_1 d^D z_2 (i\Delta_F(z_1 - x_1))(i\Delta_F(z_1 - z_2))(i\Delta_F(z_2 - x_2)), \quad (2.40)$$

onde S é o fator de simetria do diagrama. Para separar as integrais, podemos adicionar um ponto adicional x' entre z_1 e z_2 , e com isso, reescrevemos o propagador

$$i\Delta_F(z_1 - z_2) = i\Delta_F(z_1 - x')i\Delta_F(z_2 - x'), \quad (2.41)$$

e substituindo na (2.40), temos:

$$\begin{aligned}
 G_{diag}(x_1, x_2) &= S \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 [i\Delta_F(0)]^2 \int d^D z_1 (i\Delta_F(z_1 - x_1))(i\Delta_F(z_1 - x')) \times \\
 &\quad \times \int d^D z_2 (i\Delta_F(z_2 - x_2))(i\Delta_F(z_2 - x')) \\
 &= \frac{S\lambda^2}{(4!)^2} \text{---}\bigcirc \times \text{---}\bigcirc .
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Dessa forma, podemos escrever o diagrama da figura 2.3 como o produto de dois diagramas de ordem menor. Chamamos um diagrama desse tipo de redutível, enquanto um diagrama conexo que não pode ser escrito como produto de outros diagramas menores é chamado de irreduzível (usaremos a notação 1PI).

Podemos diferenciar uma função redutível de uma 1PI facilmente através dos diagramas de Feynman. Um diagrama redutível pode ser separado em dois diagramas não triviais “cortando” apenas uma linha dele enquanto um diagrama 1PI não, como podemos notar na figura 2.4 onde o diagrama (a) é redutível e pode ser dividido em dois, enquanto o diagrama (b) é 1PI.

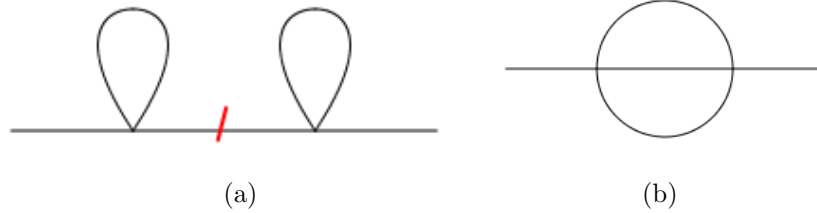


Figura 2.4: diferença entre um diagrama redutível e um 1PI.

2.1.4 O Funcional $\Gamma[\phi]$

O nosso próximo passo é escrever o funcional gerador das funções de Green 1PI. Na realidade, encontraremos o funcional que gera o inverso das funções de Green 1PI, o que para fins práticos tem a mesma serventia. Para isso, vamos fazer a seguinte transformação de Legendre do funcional $W[j]$ [23]:

$$\Gamma[\phi] = W[j] - \int d^D x j(x)\phi(x). \tag{2.43}$$

Podemos tirar diretamente da equação acima

$$\frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = \phi(x), \quad (2.44a)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = -j(x), \quad (2.44b)$$

e então a função de dois pontos fica

$$\Gamma(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} = -\frac{\delta j(x_1)}{\delta \phi(x_2)}. \quad (2.45)$$

Além disso, da (2.37) temos que

$$G(x_1, x_2) = -i \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j_1 \delta j_2} = -i \frac{\delta \phi(x_1)}{\delta j(x_2)}, \quad (2.46)$$

e usando as (2.45) e (2.46) podemos mostrar que

$$\int d^D z G(x_1, z) \Gamma(z, x_2) = i \int d^D z \frac{\delta \phi(x_1)}{\delta j(z)} \frac{\delta j(z)}{\delta \phi(x_2)} = i \delta(x_1 - x_2), \quad (2.47)$$

ou seja exceto por um fator i , as duas funções são inversas.

A partir da derivada funcional de ordem n de $\Gamma[\phi]$ em $\phi(x) = 0$, podemos obter todas as funções de Green 1PI de n pontos da teoria. A única exceção é a função de dois pontos, que em particular é dada por [24]

$$\Pi^{(2)}(x, y) = \Gamma^{(2)}(x, y) + [\partial^2 + m^2]_y \delta^D(x - y), \quad (2.48)$$

onde $\Pi^{(2)}(x, y)$ é a função de dois pontos 1PI e o índice y indica em qual variável é a derivação do último termo.

2.2 As Frequências de Matsubara

Voltando a teoria de campos a temperatura finita, vamos agora escrever a transformada de Fourier do propagador de tempo imaginário, para obter a sua forma no espaço dos momentos. Por questões de simetria, é mais fácil considerar a transformação do propagador no intervalo $[-\beta, \beta]$. De qualquer forma, é importante ressaltar aqui que como a função está definida num intervalo finito, a transformada de Fourier inversa vai

ser dada por uma somatória de frequências discretas. Para uma função $f(\tau)$ de período β , teríamos:

$$f(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau), \quad (2.49a)$$

$$f(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} f(\omega_n). \quad (2.49b)$$

Aqui, $\omega_n = \frac{n\pi}{\beta}$, com $n \in \mathbb{Z}$ e os fatores multiplicativos vêm da normalização da transformada. Vamos trabalhar um pouco mais na (2.49a). Levando em conta a periodicidade de $f(\tau)$, temos

$$\begin{aligned} f(\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau + \beta) + \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n(\tau-\beta)} f(\tau) + \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau) \right] \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega_n \beta}) \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau) \\ &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dessa forma, $f(\omega_n)$ vale zero para n ímpar e só precisamos considerar os casos $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$. Estas frequências ω_n são chamadas de *frequências de Matsubara*.

Analogamente, para o propagador de tempo imaginário, a transformada de Fourier e sua inversa são dadas por:

$$\Delta(\vec{p}, \omega_n) = \int_0^{\beta} d\tau \int d^{D-1} \vec{x} e^{i(\omega_n \tau + \vec{p} \vec{x})} \Delta(\vec{x}, \tau), \quad (2.51a)$$

$$\Delta(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1} \vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-i(\omega_n \tau + \vec{p} \vec{x})} \Delta(\vec{p}, \omega_n). \quad (2.51b)$$

Trabalhar com o propagador no espaço dos momentos em geral simplifica as contas no formalismo de temperatura finita pois permite separar o propagador em duas partes, uma dependente da temperatura e a outra independente e correspondente ao caso $T = 0$.

Vamos calcular o propagador do campo escalar livre no espaço dos momentos. Para isso, partimos inicialmente da equação de Klein-Gordon fazendo a substituição $\partial_t \rightarrow \partial_\tau$, e temos que o propagador deve satisfazer a equação:

$$-(\partial_\tau^2 + \nabla^2 - m^2)\Delta(\vec{x}, \tau) = \delta(\tau)\delta^{(D-1)}(\vec{x}), \quad (2.52)$$

que surge ao utilizarmos o método das funções de Green na equação de Klein-Gordon. Usando a (2.51b) e sabendo que a transformada da função delta é igual a 1 [25], temos que

$$\begin{aligned} -(\partial_\tau^2 + \nabla^2 - m^2) \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-i(\omega_n\tau + \vec{p}\vec{x})} \Delta(\vec{p}, \omega_n) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-i(\omega_n\tau + \vec{p}\vec{x})} \\ \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-i(\omega_n\tau + \vec{p}\vec{x})} (\omega_n^2 + (\vec{p})^2 + m^2) \Delta(\vec{p}, \omega_n) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-i(\omega_n\tau + \vec{p}\vec{x})}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

o que nos leva a

$$G(\vec{p}, \omega_n) = i\Delta(\vec{p}, \omega_n) = \frac{i}{\omega_n^2 + \omega^2}, \quad (2.54)$$

onde $\omega^2 = (\vec{p})^2 + m^2$.

Como exemplo, voltaremos a trabalhar com a teoria $\lambda\phi^4$, desta vez para $T \neq 0$. Partindo da função de dois pontos, vamos calcular o diagrama de um loop ($\mathcal{O}\lambda$), desconsiderando as linhas externas, ou seja, avaliaremos apenas o termo correspondente ao loop do diagrama abaixo:

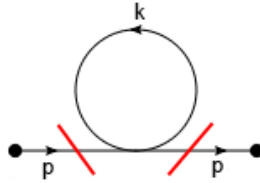


Figura 2.5: diagrama de um loop da função de dois pontos no espaço dos momentos. As linhas diagonais indicam que estamos desconsiderando as pernas externas.

Usando as regras de Feynman no espaço dos momentos (vide apêndice B), podemos escrever o termo correspondente ao loop do diagrama acima da seguinte maneira

$$\Pi = \frac{K}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}, \quad (2.55)$$

onde K é uma constante que depende dos fatores de simetria do diagrama e de λ .

Precisamos então calcular a soma da função para todas as frequências de Matsubara do campo escalar. Para uma função f qualquer, temos que avaliar

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(p_0 = i\omega_n = \frac{2\pi n i}{\beta}\right), \quad (2.56)$$

em que p_0 pode ser interpretado como o termo correspondente a energia de um vetor (p_0, \vec{p}) num espaço de Minkowski de dimensão D . Para resolver esta somatória uma alternativa é transformá-la numa integral de linha em função de p_0 cujos polos coincidem com as frequências que devemos somar. A figura 2.6 mostra a distribuição dos polos de p_0 no plano complexo onde C é um contorno possível de integração.

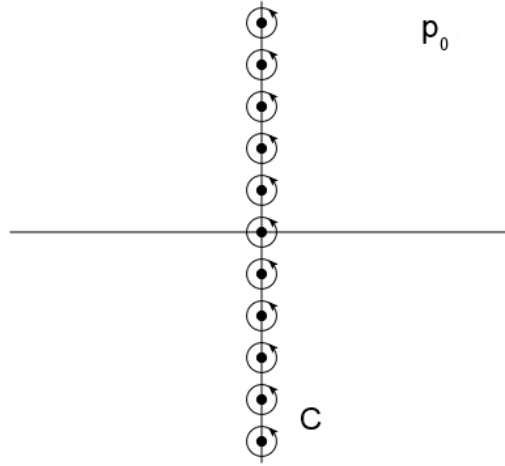


Figura 2.6: integração em torno dos polos correspondentes as frequências de Matsubara.

Agora precisamos encontrar uma função cujos polos coincidam com i vezes as frequências de Matsubara. Uma função que satisfaz essa condição é

$$\coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) = \frac{e^{\beta p_0/2} + e^{-\beta p_0/2}}{e^{\beta p_0/2} - e^{-\beta p_0/2}} = \frac{e^{\beta p_0} + 1}{e^{\beta p_0} - 1}, \quad (2.57)$$

cujos polos são iguais a $p_0 = \frac{i2\pi n}{\beta} = i\omega_n$.

Vamos então testar a seguinte integral:

$$\begin{aligned}
\oint_C dp_0 f(p_0) \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) &= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Res}\left(p_0 = \frac{2n\pi i}{\beta}\right) f(p_0) \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{p_0 \rightarrow 2n\pi i/\beta} \left(p_0 - \frac{2n\pi i}{\beta}\right) f(p_0) \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{p_0 \rightarrow 2n\pi i/\beta} \left(p_0 - \frac{2n\pi i}{\beta}\right) f(p_0) \frac{e^{\beta p_0} + 1}{e^{\beta p_0} - 1} \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z \rightarrow 0} f(z + 2n\pi i/\beta) z \frac{e^{\beta z + 2n\pi i} + 1}{e^{\beta z + 2n\pi i} - 1} \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z \rightarrow 0} f(z + 2n\pi i/\beta) z \frac{2 + \beta z + \frac{(\beta z)^2}{2!} + \dots}{\beta z + \frac{(\beta z)^2}{2!} + \dots} \\
&= \frac{4\pi i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n\pi i}{\beta}\right). \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Comparando as (2.56) e (2.58), temos então

$$\frac{1}{4\pi i} \oint_C dp_0 f(p_0) \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n). \tag{2.59}$$

Vamos usar um contorno equivalente ao da figura 2.6 que seja mais conveniente para realizar a integral. Este contorno pode ser visto na figura 2.7:

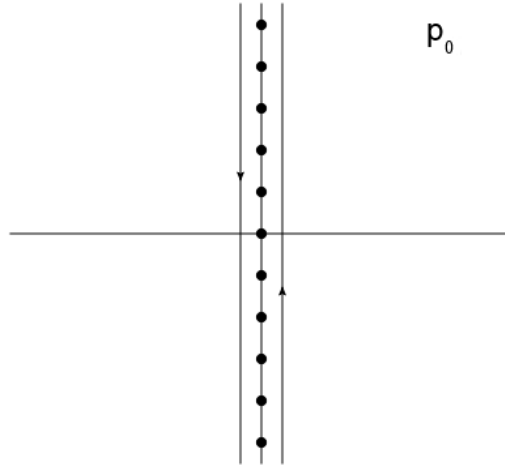


Figura 2.7: novo contorno de integração.

Dessa forma podemos escrever:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0) \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) + \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dp_0 f(p_0) \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \right]. \quad (2.60)$$

Uma relação que é muito útil aqui é

$$\coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) = 1 + \frac{2}{e^{\beta p_0} - 1} = -1 - \frac{2}{e^{-\beta p_0} - 1}, \quad (2.61)$$

e substituindo de maneira conveniente estes valores na (2.60), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0) \left(1 + \frac{2}{e^{\beta p_0} - 1}\right) + \right. \\ \left. \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dp_0 f(p_0) \left(-1 - \frac{2}{e^{-\beta p_0} - 1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $p_0 \rightarrow -p_0$ na segunda integral, podemos reorganizar as integrais e chegar em

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 [f(p_0) + f(-p_0)] + \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 [f(p_0) + f(-p_0)] \left(\frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}\right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Aqui já aparece claramente a divisão da integral em duas partes, uma independente da temperatura e outra dependente e que desaparece para $T = 0$ (lembramos que se $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$). Além disso aqui podemos identificar a distribuição de Bose-Einstein para bósons [4]

$$N_B(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (2.64)$$

No nosso caso,

$$f(p_0) = f(-p_0) = -\frac{1}{p_0^2 - \omega^2}, \quad (2.65)$$

e devemos considerar mais dois polos no plano complexo em $p_0 = \pm\omega$.

Vamos definir

$$\Pi = \Pi^0 + \Pi^T, \quad (2.66)$$

onde o primeiro termo corresponde ao problema a temperatura zero e o segundo termo é a parte dependente da temperatura.

Para a primeira integral, podemos fazer a substituição $p_D = ip_0$ e levar o problema para um espaço euclidiano de dimensão D onde $d^D p = d^{D-1} \vec{p} dp_D$. Assim

$$\Pi^0 = K \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p_D^2 + \omega^2}. \quad (2.67)$$

Para o outro termo, podemos fazer a integral em p_0 escolhendo um caminho que contorne apenas o polo $p_0 = \omega$ (note que este caminho obrigatoriamente percorrerá o sentido horário). Com isso temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} dp_0 \frac{-2}{p_0^2 - \omega^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} &= 2 \text{Res}(p_0 = \omega) \frac{1}{p_0^2 - \omega^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \\ &= 2 \lim_{p_0 \rightarrow \omega} (p_0 - \omega) \frac{1}{p_0^2 - \omega^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \\ &= 2 \frac{1}{2\omega} \frac{1}{e^{\beta \omega} - 1} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta \omega} - 1}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

E com esse resultado finalmente chegamos em:

$$\Pi^T = K \int \frac{d^{D-1} \vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\omega} N_B(\omega). \quad (2.69)$$

2.3 A Massa Física

Na última seção, escrevemos o propagador do campo escalar livre no espaço dos momentos a temperatura finita. Analogamente, para temperatura zero temos

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (2.70)$$

onde $p^2 = p_0^2 + (\vec{p})^2$. De fato, já tínhamos chegado a um resultado equivalente no capítulo anterior (vide (1.52)). O termo m^2 corresponde ao quadrado da massa da partícula livre, ou seja, sem sofrer interações.

Para analisarmos o efeito do termo de interação na massa da partícula, vamos tratar novamente a função de dois pontos do campo escalar. Desta vez, vamos escrever o problema no espaço dos momentos e as correções do propagador em função dos diagramas 1PI. Na notação dos diagramas de Feynman:

$$\begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \bigcirc \text{---} p \text{---} \\ \text{---} p \text{---} \end{array} = \text{---} p \text{---} + \text{---} p \text{---} \text{1PI} \text{---} p \text{---} + \text{---} p \text{---} \text{1PI} \text{---} p \text{---} \text{1PI} \text{---} p \text{---} + \dots \quad (2.71)$$

O diagrama da direita representa o propagador completo, considerando o efeito do termo de interação na massa da partícula propagada. Para diferenciar o propagador completo do livre, vamos chamar de $\Delta(p)$ o propagador completo e $\Delta_0(p)$ o propagador livre. Além disso, para simplificar o cálculo, vamos definir o termo de interação 1PI, também chamado de auto-energia, como $\Sigma(p)/i$. Juntando tudo obtemos:

$$\begin{aligned}
i\Delta(p) &= i\Delta_0(p) + i\Delta_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} i\Delta_0(p) + i\Delta_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} i\Delta_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} i\Delta_0(p) + \dots \\
&= i\Delta_0(p) [1 + \Sigma(p)\Delta_0(p) + \Sigma(p)\Delta_0(p)\Sigma(p)\Delta_0(p) + \dots] \\
&= i\Delta_0(p) \sum_{n=0}^{\infty} [\Sigma(p)\Delta_0(p)]^n \\
&= \frac{i\Delta_0(p)}{1 - \Sigma(p)\Delta_0(p)}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Substituindo a (2.70) na (2.72), chegamos em

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}, \tag{2.73}$$

onde definimos,

$$m_f^2 = m^2 + \Sigma(p)|_{p^2=m_f^2}, \tag{2.74}$$

como a massa física da partícula no campo escalar com interação. Este resultado pode ser obtido expandindo $\Sigma(p)$ perturbativamente partindo de $m_f^2 \approx m^2$.

Essa definição da massa física como o polo do propagador da partícula é muito utilizada em várias teorias de campo e é válida em muitos casos. Porém, como veremos mais adiante, para algumas teorias a massa física obtida dessa maneira não permanece invariante sob transformações de gauge. Isso é um absurdo do ponto de vista físico, afinal, a massa, como grandeza escalar, deve permanecer invariante sob esse tipo de transformação.

Nesses casos, precisamos encontrar outra forma de escrever a massa física da partícula, reescrevendo o propagador de modo que a massa física definida a partir deste novo propagador seja invariante sob transformações de gauge. Faremos isso no próximo capítulo.

2.4 Campo Fermiônico

Nos próximos capítulos, trabalharemos com teorias que contém tanto bósons quanto férmions como partículas de campo. Por isso, vamos discutir brevemente algumas diferenças entre o tratamento do campo escalar e o do campo fermiônico.

Para o caso livre (campo de Dirac), a lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi, \quad (2.75)$$

onde ψ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ são spinores que contém os operadores de criação e aniquilação de férmions e anti-férmions no campo.

O spinor ψ é uma solução da equação de Dirac

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (2.76)$$

e resolvendo esta equação, temos que a solução geral é do tipo [22]

$$\psi(x) = \sum_p \sum_{i=1}^2 (e^{-ipx} a_i(p) u_i(p) + e^{ipx} b_i^\dagger(p) v_i(p)), \quad (2.77a)$$

e analogamente

$$\bar{\psi}(x) = \sum_p \sum_{i=1}^2 (e^{-ipx} b_i(p) \bar{v}_i(p) + e^{ipx} a_i^\dagger(p) \bar{u}_i(p)), \quad (2.77b)$$

onde os valores de p correspondem aos quadrimomentos do campo spinorial permitidos pelas condições de contorno do sistema e os operadores $a_i(p)$, $a_i^\dagger(p)$, $b_i(p)$ e $b_i^\dagger(p)$ são os operadores de aniquilação e criação de férmions. Além disso, $u_i(p)$ e $v_i(p)$ são spinores constantes e soluções das equações

$$(\not{p} - m)u_i(p) = 0, \quad (2.78a)$$

$$(\not{p} + m)v_i(p) = 0, \quad (2.78b)$$

onde o índice i indentifica as componentes da base das diferentes soluções possíveis destas equações para uma mesma energia no sistema. [16]

Geralmente, usa-se a normalização [16]

$$u_i^\dagger(p)u_j(p) = v_i^\dagger(p)v_j(p) = \frac{E_p}{m}\delta_{ij}, \quad (2.79)$$

que nos leva a

$$\bar{u}_i u_j = \delta_{ij}, \quad (2.80a)$$

$$\bar{v}_i v_j = -\delta_{ij}. \quad (2.80b)$$

Devemos lembrar também que os férmions considerados são partículas de spin 1/2 que obedecem a distribuição de Fermi-Dirac [4]

$$N_F = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}, \quad (2.81)$$

onde ω é a energia do estado dos férmions em questão.

Além disso, outra diferença entre o tratamento de férmions e bósons está na função de tempo ordenado. No caso ferimiônico a função é antissimétrica com relação aos tempos e escrevemos:

$$T(\psi(x), \bar{\psi}(y)) = \theta(x_0 - y_0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \theta(y_0 - x_0)\bar{\psi}(y)\psi(x). \quad (2.82)$$

Quando levamos este resultado para o formalismo de tempo imaginário, usando a (1.15) e a (1.42), com $0 < \tau < \beta$, temos que

$$\begin{aligned} G((\vec{x}_1, 0), (\vec{x}_2, \tau)) &= \langle T_\tau(\psi(\vec{x}_1, 0), \bar{\psi}(\vec{x}_2, \tau)) \rangle_\beta \\ &= -Z^{-1}(\beta) \text{Tr} [e^{-\beta H} \bar{\psi}(\vec{x}_2, \tau) \psi(\vec{x}_1, 0)] \\ &= -Z^{-1}(\beta) \text{Tr} [e^{-\beta H} e^{\beta H} \psi(\vec{x}_1, 0) e^{-\beta H} \bar{\psi}(\vec{x}_2, \tau)] \\ &= -Z^{-1}(\beta) \text{Tr} [e^{-\beta H} \psi(\vec{x}_1, \beta) \bar{\psi}(\vec{x}_2, \tau)] \\ &= -\langle T_\tau(\psi(\vec{x}_1, \beta), \bar{\psi}(\vec{x}_2, \tau)) \rangle_\beta \\ &= -G((\vec{x}_1, \beta), (\vec{x}_2, \tau)), \end{aligned} \quad (2.83)$$

ou seja, a função de Green para férmions é antiperiódica de período β . Relações como a utilizada acima são conhecidas como relações Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [1].

Assim, quando vamos obter as frequências de Matsubara para férmions, fazendo o procedimento análogo ao que realizamos na (2.50), mas para uma função $f(\tau)$ antiperiódica, obtemos

$$f(\omega_n) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau), \quad (2.84)$$

e dessa forma, para o caso fermiônico, $f(\omega_n) = 0$ para n par e as frequências de Matsubara são dadas por

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}. \quad (2.85)$$

3 | Independência de Gauge da Massa do Férion

Nos dois primeiros capítulos desta tese, falamos de maneira geral sobre aspectos da teoria quântica de campos, em particular a temperatura finita, e obtivemos alguns resultados e ferramentas, que serão úteis para obter os resultados principais deste trabalho. Neste e nos próximos capítulos, trabalharemos com problemas mais específicos da teoria, utilizando os conceitos já discutidos e mais alguns outros que mostraremos a seguir.

Neste capítulo vamos tratar da questão da invariância da massa física dos férmions na QED sob transformações de gauge, em particular para gauges axiais. Essa questão é importante, pois como veremos adiante, a maneira usual que escrevemos o propagador do férmion e definimos a massa física a partir do polo deste propagador funciona apenas para gauges covariantes, mas não é invariante sob transformações para gauges não covariantes, como os axiais.

Assim, precisaremos encontrar uma nova maneira de definir esta massa física, reescrevendo o propagador de forma ao polo dele obtido permanecer invariante sob transformações de gauge.

Primeiramente, vamos mostrar que a forma usual de definir o propagador do férmion não funciona para gauges não covariantes. Em seguida, obteremos uma nova forma de escrever o propagador que seja válida tanto para gauges covariantes quanto para não covariantes.

Utilizaremos então as identidades de Nielsen [9] para mostrar a invariância de gauge da massa física em todas as ordens da sua expansão perturbativa (discutimos na seção

2.3 que a massa física é obtida de maneira perturbativa, como na (2.74)). Finalmente, vamos fazer o cálculo perturbativo explícito, até $\mathcal{O}(e^4)$ de interação, onde e é a carga do férmion, para reafirmar a invariância de gauge da massa física obtida a partir do novo propagador fermiônico.

O apêndice C deste trabalho mostra diversas relações para as matrizes de Dirac que serão úteis no entendimento deste capítulo, assim como o apêndice D, que faz uma breve discussão sobre o tratamento das variáveis de Grassmann.

3.1 Gauges Axiais

Antes de tratarmos da questão do propagador fermiônico e da massa física, vamos descrever o que são os gauges axiais que citamos anteriormente.

Quando vamos trabalhar com uma teoria onde férmions interagem com um campo de gauge, como no caso da QED, para tratar de um problema qualquer, por exemplo um cálculo perturbativo, é preciso primeiramente escolher qual gauge vamos utilizar. Geralmente, para definir um gauge, acrescentamos à lagrangiana da teoria um termo adicional, muitas vezes chamado de termo fixador.

Como já vimos no primeiro capítulo, a lagrangiana da QED para um campo fermiônico é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\not{A}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde e é a carga do elétron (férmion), A^μ é o campo de gauge, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e usamos a notação $\not{A} = \gamma_\mu A^\mu$.

Geralmente, escolhemos um gauge covariante e para isso adicionamos à lagrangiana o termo fixador

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (3.2)$$

que mantém explícita a invariância de Lorentz da lagrangiana e a covariância dos cálculos perturbativos. O termo ξ é o parâmetro fixador do gauge. Como exemplo, dois dos gauges mais utilizados são o de Landau (onde $\xi = 0$) e o de Feynman (onde $\xi = 1$) [6].

Porém, algumas vezes é mais conveniente usar outros tipos de gauges para determinados problemas. Os gauges axiais, que são objeto central do nosso estudo neste capítulo, não são covariantes, mas quando utilizados apresentam outras vantagens como o desacoplamento total dos campos de Fadeev-Popov (conhecidos como “ghosts”) [26] e o fato do funcional gerador das funções de Green ser escrito por muitas vezes de uma maneira mais simples nesse tipo de gauge [27]. Estes gauges são definidos com o auxílio de um vetor adicional n^μ ^[1] tal que

$$n_\mu A^\mu = 0. \quad (3.3)$$

Esse formalismo é prático para definir não só os gauges axiais como também para os gauges de Coulomb (onde $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$), como veremos mais adiante.

Com relação à lagrangiana do sistema, no caso de gauges axiais adicionamos o termo

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_L \cdot A)^2, \quad (3.4)$$

onde ξ é o parâmetro fixador do gauge e

$$\partial_L^\mu = \frac{(n \cdot \partial)n^\mu}{n^2}. \quad (3.5)$$

3.2 A Forma Usual de Escrever o Propagador Fermiônico

É importante ressaltar que diferente da teoria $\lambda\phi^4$ que tratava de apenas um tipo de partícula escalar, na QED vamos trabalhar com dois férmions (o elétron e o anti-elétron, ou pósitron) e um bóson de gauge (o fóton).

O propagador livre do férmion para o campo de Dirac é definido no espaço dos momentos como [22]

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m}, \quad (3.6)$$

onde m é massa do férmion livre. Fazendo o procedimento análogo ao que fizemos nas (2.71 - 2.74), podemos obter o propagador fermiônico da QED. Assim, temos

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \Sigma(p)}, \quad (3.7)$$

^[1]Não é necessário mas é comum escolher este vetor de modo a ter a mesma dimensão do momento p^μ .

onde $\Sigma(p)$ é o termo correspondente a contribuição dos diagramas 1PI na função de dois pontos do férmion. Esta definição do propagador fermiônico é válida para gauges covariantes e muito utilizada na literatura [5, 23].

Para obtermos a massa física neste caso, é preciso lembrar que a massa é uma grandeza escalar, enquanto $S(p)$ é um tensor (representado por uma matriz $D \times D$). Dessa forma, precisamos encontrar uma maneira de escrever a massa física apenas em função de termos escalares. Primeiramente, para gauges covariantes, podemos escrever

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p), \quad (3.8)$$

e definir

$$S^{-1}(p)u(p)|_{p^2=m_f^2} = (\not{p} - m - \Sigma(p))u(p)|_{p^2=m_f^2} = (\not{p} - m_f)u(p)|_{p^2=m_f^2} = 0, \quad (3.9)$$

em que $u(p)$ e $\bar{u}(p)$ são spinores constantes, como os que usamos para escrever o campo fermiônico de Dirac no capítulo anterior (seção 2.4) e que satisfazem

$$(\not{p} - m_f)u(p) = 0, \quad (3.10a)$$

$$\bar{u}(p)(\not{p} - m_f) = 0. \quad (3.10b)$$

A primeira equação é análoga a (2.78a) e a segunda é facilmente obtida tomando a equação conjugada à primeira e usando algumas propriedades fundamentais das matrizes gama de Dirac (vide apêndice C).

A massa física m_f é uma grandeza escalar e devemos lembrar que todos os elementos escalares estão multiplicados por uma matriz identidade $D \times D$. Para isolarmos a massa física devemos escrever primeiramente uma equação que relacione $S^{-1}(p)$ com uma grandeza escalar. Dessa forma, fazemos

$$\bar{u}(p)S^{-1}(p)u(p)|_{p^2=m_f^2} = \bar{u}(p)(\not{p} - m_f)u(p)|_{p^2=m_f^2} = 0, \quad (3.11)$$

e daí obtemos

$$\begin{aligned} \bar{u}(p)m_f u(p) &= \bar{u}(p)m u(p) + \bar{u}(p)\Sigma(p)u(p)|_{p^2=m_f^2} \\ m_f &= m + \bar{u}(p)\Sigma(p)u(p)|_{p^2=m_f^2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

lembrando que

$$\bar{u}(p)u(p) = 1. \quad (3.13)$$

Esta forma de definir a massa física é muito utilizada e funciona para gauges covariantes.

3.3 Testando o Propagador para Gauges Axiais

Vamos tentar estender a definição da (3.12) para gauges axiais e mostrar que isso não é possível, pois para este conjunto de gauges o termo $\bar{u}(p)\Sigma(p)u(p)$ não é invariante. Isso invalida a definição, já que uma grandeza escalar não pode depender do gauge que estamos usando.

Analisaremos explicitamente os diagramas 1PI da função de dois pontos do férmion e mostraremos que apesar do termo de um loop (correção de segunda ordem) ser invariante, a soma das contribuições dos diagramas de dois loops (quarta ordem) não é independente de gauge (depende do vetor n^μ que define o gauge).

Para analisarmos os diagramas 1PI, precisamos antes de tudo escrever o propagador do fóton. No gauge covariante, temos [22]

$$D_F^{\mu\nu}(p) = -\frac{\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}, \quad (3.14)$$

onde ϵ é um pequeno termo que introduzimos para evitar descontinuidades mas que após realizar as integrações necessárias nos diagramas analisados podemos tomar $\epsilon \rightarrow 0$.^[2]

Para o gauge axial, o propagador também depende do vetor n^μ . Usamos [28]

$$D^{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2} \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{n^\mu p^\nu + n^\nu p^\mu}{n \cdot p} + \frac{p^\mu p^\nu n^2}{(n \cdot p)^2} \left(1 + \frac{\xi n^2 p^2}{(n \cdot p)^2} \right) \right]. \quad (3.15)$$

É interessante notar que esse propagador é simétrico com relação aos índices $\mu\nu$ e não se altera se substituirmos $n^\mu \rightarrow -n^\mu$. O primeiro termo da (3.15) corresponde ao propagador para gauges covariantes, e dessa forma, se tomamos $n \rightarrow 0$, os dois outros termos desaparecem da equação e voltamos para o caso covariante.

^[2]Daqui em diante, vamos considerar as divergências que encontrarmos regularizadas sem necessidade de escrever explicitamente a regularização.

Além disso, podemos escrever

$$\alpha = 1 + \frac{\xi n^2 p^2}{(n \cdot p)^2}, \quad (3.16)$$

pois o produto interno é proporcional à norma dos vetores p^μ e n^μ e estes vetores estão fixados. Dessa forma, podemos tratar α como uma constante independente do momento e do vetor axial.

O único diagrama 1PI com apenas um loop para a função de dois pontos do férmion é o da figura abaixo:

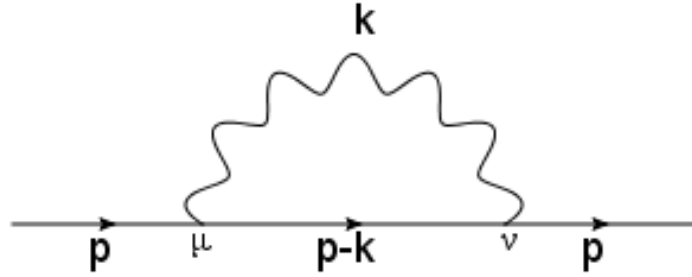


Figura 3.1: diagrama de um loop da função de dois pontos.

Usando as regras de Feynman para a QED (vide apêndice B), desconsiderando as linhas externas, temos

$$\begin{aligned} -i\Sigma_1(p) &= (ie)^2(i)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} D_{\mu\nu}(k) \gamma^\nu S(p-k) \gamma^\mu \\ &= e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} D_{\mu\nu}(k) \gamma^\nu S(p-k) \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde o índice “1” indica que estamos tratando apenas dos termos de um loop e o fator $(-i)$ da maneira que definimos $\Sigma(p)$ na seção 2.3.

Vamos calcular $\Sigma(p)$ perturbativamente partindo de $p^2 = m_f^2 \approx m^2$. Lembrando que pelas regras de Feynman

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m}, \quad (3.18)$$

usamos as (3.18) e (3.15) na (3.17) e obtemos

$$\begin{aligned} -i\Sigma_1(p) &= -i\Sigma_1^F + e^2 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k \cdot n)} (\not{k} S(p-k) \not{n} + \not{n} S(p-k) \not{k}) - \right. \\ &\quad \left. \alpha n^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k \cdot n)^2} \not{k} S(p-k) \not{k} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde Σ_1^F corresponde ao termo 1PI de um loop para o gauge de Feynman (covariante).

Agora, para mostrarmos que $\bar{u}_0(p)\Sigma_1(p)u_0(p)$ é invariante devemos usar que

$$(\not{p} - m)u_0(p) = 0, \quad (3.20a)$$

$$\bar{u}_0(p)(\not{p} - m) = 0. \quad (3.20b)$$

A primeira equação é igual a (2.78a), enquanto a segunda é obtida tomando a equação conjugada à primeira (vide apêndice C). O índice zero dos spinores indica que estamos nos referindo aos termos de primeira ordem de $u(p)$ e $\bar{u}(p)$, pois assim como $\Sigma(p)$, estes spinores só podem ser obtidos perturbativamente. Vamos utilizar essas equações para mostrar que a contribuição das duas integrais da (3.19) é nula quando multiplicadas por u_0 e \bar{u}_0 .

Para isso faremos a manipulação algébrica

$$\not{k} = (-\not{p} + \not{k} + m) + (\not{p} - m), \quad (3.21)$$

e fazemos essa substituição nas duas integrais. Para a primeira temos que

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k \cdot n)} (\not{k} S(p-k) \not{n} + \not{n} S(p-k) \not{k}) \right] u_0 = \\ \bar{u}_0 \left[(\not{p} - m) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{S(p-k) \not{n}}{k^2(k \cdot n)} - 2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{n}}{k^2(k \cdot n)} \right. \\ \left. + \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{n} S(p-k)}{k^2(k \cdot n)} (\not{p} - m) \right] u_0, \quad (3.22) \end{aligned}$$

e usando a (3.20) o primeiro e o terceiro termo do lado direito da (3.22) se anulam.

O segundo termo também é nulo, pois a integração é realizada em todo o espaço e o integrando é ímpar (proporcional a k^{-3}).

Para a outra integral fazemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k \cdot n)^2} \not{k} S(p-k) \not{k} \right] u_0 = \\ \bar{u}_0 \left[(\not{p} - m) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{S(p-k) \not{k}}{k^2(k \cdot n)^2} - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k}}{k^2(k \cdot n)^2} \right] u_0, \quad (3.23) \end{aligned}$$

onde o primeiro termo do lado esquerdo também se anula pela (3.20) e o segundo termo é zero pois a integral também é ímpar.

Dessa forma mostramos que $\bar{u}_0 \Sigma_1(p) u_0$ é invariante mesmo para gauges axiais. Porém, para dois loops, veremos que a invariância não se mantém.

Para verificarmos isso, precisamos avaliar os diagramas 1PI de dois loops da função de dois pontos do elétron. Um desses diagramas está representado na figura abaixo:

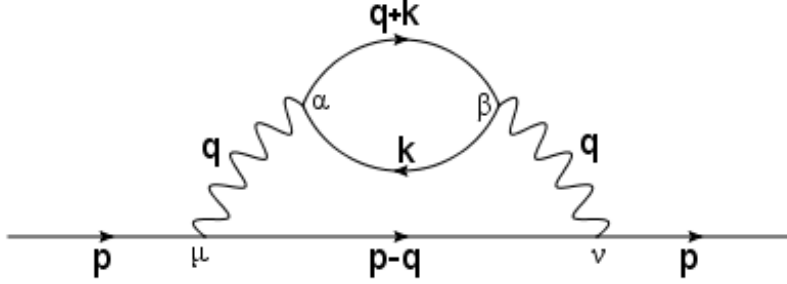


Figura 3.2: diagrama 1PI de 2 loops.

Usando as regras de Feynman podemos escrever a expressão correspondente a este diagrama (desconsiderando as linhas externas):

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2^a &= (ie)^4 (i)^5 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_{\mu\alpha}(q) \Pi^{\alpha\beta}(q) D_{\beta\nu}(q) \gamma^\nu S(p-q) \gamma^\mu \\ &= ie^4 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_{\mu\alpha}(q) \Pi^{\alpha\beta}(q) D_{\beta\nu}(q) \gamma^\nu S(p-q) \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $\Pi^{\alpha\beta}(q)$ é a auto-energia do fóton (mas deve-se notar que já contamos os fatores ie correspondentes aos vértices do diagrama e i correspondentes as linhas internas fora de $\Pi^{\alpha\beta}(q)$). Esta é uma quantidade escalar que depende apenas de q^μ . Não discutiremos os detalhes do cálculo da auto-energia do fóton neste trabalho, mas este pode ser encontrado em uma grande quantidade de referências [5, 22]. A forma geral de $\Pi^{\alpha\beta}(q)$ é dada por

$$\Pi^{\alpha\beta}(q) = (q^2 \eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \Pi(q^2), \quad (3.25)$$

em que $\Pi(q^2)$ é uma função escalar par.

Podemos verificar facilmente que

$$q_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(q) = q_\alpha (q^2 \eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \Pi(q^2) = (q^2 q^\beta - q^2 q^\beta) \Pi(q^2) = 0, \quad (3.26)$$

e usando este resultado junto a (3.15), temos que

$$D_{\mu\alpha}(q)\Pi^{\alpha\beta}(q)D_{\beta\nu}(q) = \frac{1}{q^4} \left[\eta_{\mu\alpha} - \frac{n_\alpha q_\mu}{n \cdot q} \right] \Pi^{\alpha\beta}(q) \left[\eta_{\beta\nu} - \frac{n_\beta q_\nu}{n \cdot q} \right]. \quad (3.27)$$

Substituindo este resultado na (3.24), chegamos em

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_{\mu\alpha}(q)\Pi^{\alpha\beta}(q)D_{\beta\nu}(q)\gamma^\nu S(p-q)\gamma^\mu = \\ = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^4} \left[\Pi_{\mu\nu}(q)\gamma^\nu S(p-q)\gamma^\mu - \frac{n_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(q)}{n \cdot q} \gamma_\beta S(p-q)\not{n} - \right. \\ \left. \frac{\Pi^{\alpha\beta}(q)n_\beta}{n \cdot q} \not{n} S(p-q)\gamma_\alpha + \frac{n_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(q)n_\beta}{(n \cdot q)^2} \not{n} S(p-q)\not{n} \right]. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Podemos então repetir o procedimento que fizemos para a função de um loop (3.20 - 3.23) para os três termos dependentes de n^μ . Não explicitaremos todas as passagens neste trabalho pois estamos mais interessados em mostrar apenas o procedimento geral e os resultados. Além disso seríamos obrigados a escrever diversos cálculos muito similares que o leitor interessado pode reproduzir somente com a informação que já apresentamos.

Dessa forma, usando as equações citadas acima e o fato das integrais ímpares em q^μ terem contribuição nula, podemos demonstrar que os três termos dependentes de n^μ são nulos e $\bar{u}_0 \Sigma_2^a u_0$ é independente de gauge. Resta agora analisar os outros dois diagramas 1PI de dois loops existentes para a função de dois pontos do elétron.

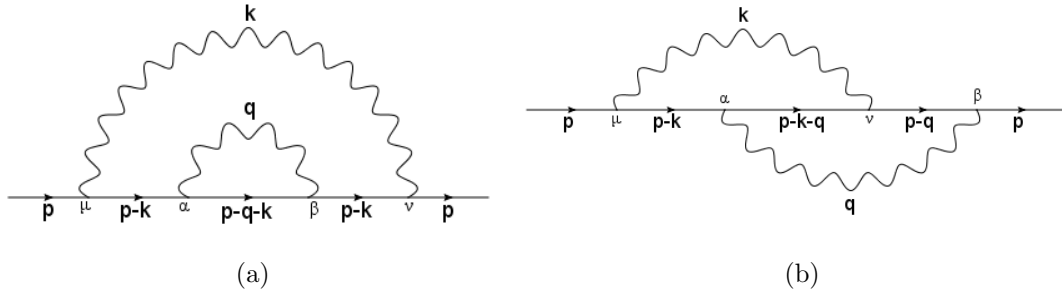


Figura 3.3: diagramas 1PI de dois loops restantes.

Usando as regras de Feynman para a QED, vamos escrever a expressão correspondente a soma da contribuição destes diagramas. Vale a pena notar que estes dois diagramas tem o mesmo fator combinatório (igual a 1) e também o mesmo número de linhas e vértices. Assim, o expoente do fator i (igual a soma do número de linhas fermiônicas e bosônicas)

e o expoente do fator ie (correspondente ao número total de vértices) também será igual para os dois diagramas (e também iguais ao do primeiro diagrama).

Chamando a soma da contribuição desses dois diagramas de $-i(\Sigma_2^{b+c})$, escrevemos

$$-i(\Sigma_2^{b+c}) = ie^4 \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} [D_{\mu\nu}(k) D_{\alpha\beta}(q) \gamma^\nu S(p-k) \gamma^\beta S(p-k-q) \gamma^\alpha S(p-k) \gamma^\mu + D_{\mu\nu}(k) D_{\alpha\beta}(q) \gamma^\beta S(p-q) \gamma^\nu S(p-q-k) \gamma^\alpha S(p-k) \gamma^\mu]. \quad (3.29)$$

Este cálculo é muito extenso, por isso resolveremos ele por partes. De qualquer forma, estamos apenas interessados na dependência com relação a n^μ da contribuição dos dois diagramas somados.

Vamos escrever o propagador do fóton usando a (3.15) e analisar primeiro apenas o termo de $\mathcal{O}(\alpha^2)$ da integral, proporcional a

$$\alpha^2 \iint \frac{d^D q d^D k n^4}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot q)^2 (n \cdot k)^2} [\not{k} S(p-k) \not{q} S(p-k-q) \not{q} S(p-k) \not{k} + \not{q} S(p-q) \not{k} S(p-q-k) \not{q} S(p-k) \not{k}]. \quad (3.30)$$

Podemos multiplicar a (3.30) pelos spinors u_0 e \bar{u}_0 e usar as (3.20) e (3.21) para chegarmos em

$$\bar{u}_0 \left[\alpha^2 \iint \frac{d^D q d^D k n^4}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot q)^2 (n \cdot k)^2} [\not{q} S(p-q-k) \not{q} + \not{q} S(p-q-k) \not{k}] \right] u_0. \quad (3.31)$$

Em seguida vamos fazer a seguinte manipulação algébrica

$$\not{q} S(p-q-k) \not{k} = -\not{q} - \not{q} S(p-q-k) \not{q} + \not{q} S(p-q-k) (\not{p} - m), \quad (3.32)$$

e substituir este resultado na (3.31) para obtermos

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 \left[\alpha^2 \iint \frac{d^D q d^D k n^4}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot q)^2 (n \cdot k)^2} [\not{q} S(p-q-k) \not{q} + \right. \\ \left. - \not{q} - \not{q} S(p-q-k) \not{q} + \not{q} S(p-q-k) (\not{p} - m)] \right] u_0 = \\ = -\bar{u}_0 \left[\alpha^2 \iint \frac{d^D q d^D k n^4}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot q)^2 (n \cdot k)^2} \not{q} \right] u_0, \quad (3.33) \end{aligned}$$

sendo que esta integral vale zero pois é ímpar com relação a variável q^μ .

Dessa forma, a contribuição do termo de $\mathcal{O}(\alpha^2)$ é nula. A seguir, vamos analisar os fatores de $\mathcal{O}(\alpha)$. Podemos escrever para o termo do propagador de k^μ , sem nos preocuparmos com os fatores de segunda ordem e contraindo os índices spinoriais

$$-\alpha \iint \frac{d^D q d^D k n^2}{(2\pi)^{2D} k^2 (n \cdot k)^2} D_{\alpha\beta}(q) [\not{k} S(p-k) \gamma^\beta S(p-k-q) \gamma^\alpha S(p-k) \not{k} + \gamma^\beta S(p-q) \not{k} S(p-q-k) \gamma^\alpha S(p-k) \not{k}], \quad (3.34)$$

e assim como no caso anterior podemos usar as (3.20) e (3.21) para obtermos

$$-\bar{u}_0 \left[\alpha \iint \frac{d^D q d^D k n^2}{(2\pi)^{2D} k^2 (n \cdot k)^2} D_{\alpha\beta}(q) \gamma^\beta [1 - S(p-q) \not{k}] S(p-q-k) \gamma^\alpha \right] u_0. \quad (3.35)$$

Para resolver essa expressão, devemos usar

$$S(p-q) \not{k} S(p-q-k) = S(p-q-k) - S(p-q), \quad (3.36)$$

que substituindo na (3.35) resulta em

$$-\bar{u}_0 \left[\alpha \iint \frac{d^D q d^D k n^2}{(2\pi)^{2D} k^2 (n \cdot k)^2} D_{\alpha\beta}(q) \gamma^\beta S(p-q) \gamma^\alpha \right] u_0. \quad (3.37)$$

Este termo vale zero, e podemos mostrar isso através de argumentos relacionados a dimensão da integração em k^μ , como explicamos em detalhes no apêndice E deste trabalho.

Ainda resta avaliar outro termo de $\mathcal{O}(\alpha)$, equivalente a (3.34) para a variável q^μ , que pode ser escrito como

$$-\alpha \iint \frac{d^D q d^D k n^2}{(2\pi)^{2D} q^2 (n \cdot q)^2} D_{\mu\nu}(k) [\gamma^\nu S(p-k) \not{q} S(p-k-q) \not{q} S(p-k) \gamma^\mu + \not{q} S(p-q) \gamma^\nu S(p-q-k) \not{q} S(p-k) \gamma^\mu], \quad (3.38)$$

e multiplicando a expressão acima pelos spinors u_0 e \bar{u}_0 e usando as relações (3.20), (3.21) e (3.36), obtemos a expressão

$$\bar{u}_0 \left[\alpha \iint \frac{d^D q d^D k n^2}{(2\pi)^{2D} k^2 (n \cdot q)^2} D_{\mu\nu}(k) [\gamma^\nu S(p-k) \not{q} S(p-k) \gamma^\mu] \right] u_0, \quad (3.39)$$

que vale zero, pois a integral é ímpar com relação a variável q^μ e assim, a contribuição de $\mathcal{O}(\alpha)$ também é nula.

Dando prosseguimento ao cálculo, os termos restantes que devemos avaliar são

$$\iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{n \cdot k} \right) \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{n_\alpha q_\beta + n_\beta q_\alpha}{n \cdot q} \right) \times \\ \left[\gamma^\nu S(p-k) \gamma^\beta S(p-k-q) \gamma^\alpha S(p-k) \gamma^\mu + \right. \\ \left. \gamma^\beta S(p-q) \gamma^\nu S(p-q-k) \gamma^\alpha S(p-k) \gamma^\mu \right]. \quad (3.40)$$

Vamos lidar primeiro com os termos proporcionais a $1/(n \cdot q)(n \cdot k)$. Para simplificar a leitura, vamos tratar apenas dos integrandos e não escreveremos os fatores $1/q^2$, $1/k^2$ e $1/(n \cdot q)(n \cdot k)$. Além disso, lembrando que a integral está multiplicada pelos spinors u e \bar{u} , podemos usar as (3.20) e (3.21) novamente e chegar na expressão

$$\begin{aligned} & - \not{q} S(p-k-q) \not{k} S(p-k) \not{k} - \not{k} S(p-k-q) \not{q} S(p-k) \not{k} + \\ & - \not{k} S(p-k) \not{q} S(p-k-q) \not{k} - \not{k} S(p-k) \not{k} S(p-k-q) \not{q} + \\ & - \not{k} S(p-k-q) \not{k} S(p-k) \not{k} + \not{k} S(p-k-q) \not{k} + \\ & \not{k} S(p-q) \not{k} S(p-k-q) \not{q} S(p-k) \not{k} - \not{k} S(p-q) \not{k} S(p-k-q) \not{q}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Este é um cálculo muito trabalhoso que seremos obrigados a fazer em várias etapas menores. Por exemplo, podemos usar a (3.36) e reescrever o segundo termo fazendo

$$\not{k} S(p-k-q) \not{q} S(p-k) \not{k} = \not{k} S(p-k-q) \not{k} - \not{k} S(p-k) \not{k}, \quad (3.42)$$

e juntando com o sexto termo da (3.41), temos

$$-\not{k} S(p-k-q) \not{k} + \not{k} S(p-k) \not{k} + \not{k} S(p-k-q) \not{k} = \not{k} S(p-k) \not{k}, \quad (3.43)$$

termo este que se anula pois a integração é ímpar com relação a variável q^μ .

Podemos tratar de maneira semelhante todas as parcelas da (3.41), sendo que para alguns termos é útil usar $q \leftrightarrow k$. Esta substituição é válida pois como as integrações sobre q^μ e k^μ são sobre domínios idênticos, o resultado da integração não se altera.

Sendo assim, a contribuição desta parte do cálculo é

$$-\bar{u}_0 \left[\iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot q)(n \cdot k)} \not{k} S(p-q) (\not{p} - m) S(p-k) \not{k} \right] u_0. \quad (3.44)$$

Voltando a (3.40), vamos analisar a contribuição do termo proporcional a $1/(n \cdot k)$. Escrevendo apenas o integrando e omitindo o fator $(1/q^2 k^2)$, temos

$$-\frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(n \cdot k)} [\gamma^\nu S(p-k) \gamma_\alpha S(p-k-q) \gamma^\alpha S(p-k) \gamma^\mu + \gamma_\alpha S(p-q) \gamma^\nu S(p-q-k) \gamma^\alpha S(p-k) \gamma^\mu], \quad (3.45)$$

e como a integral está multiplicada pelos spinors u e \bar{u} , usando novamente as (3.20) e (3.21), chegamos em (omitimos também o fator $1/(n \cdot k)$)

$$[\gamma_\alpha S(p-k-q) \gamma^\alpha S(p-k) \not{k} + \not{k} S(p-k) \gamma_\alpha S(p-k-q) \gamma^\alpha - \gamma_\alpha S(p-q) \not{k} S(p-q-k) \gamma^\alpha S(p-k) \not{k} + \gamma_\alpha S(p-q) \not{k} S(p-q-k) \gamma^\alpha]. \quad (3.46)$$

Para o termo proporcional a $1/(n \cdot q)$, podemos usar o mesmo argumento da análise anterior e realizar a substituição $q \leftrightarrow k$. Porém, nesse caso como os índices spinoriais ainda não estão contraídos, para facilitar a visualização substituímos $\alpha \leftrightarrow \mu$ e $\beta \leftrightarrow \nu$. Estas substituições resultam em

$$-\frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(n \cdot k)} [\gamma_\alpha S(p-q) \gamma^\nu S(p-k-q) \gamma^\mu S(p-q) \gamma^\alpha + \gamma^\nu S(p-k) \gamma_\alpha S(p-k-q) \gamma^\mu S(p-q) \gamma^\alpha], \quad (3.47)$$

que pode ser transformada em (desconsiderando o fator $1/(n \cdot k)$)

$$-[\gamma_\alpha S(p-q) \not{k} S(p-k-q) \not{k} S(p-q) \gamma^\alpha + \gamma_\alpha S(p-q) \not{k} S(p-k-q) \not{k} S(p-q) \gamma^\alpha - \gamma_\alpha S(p-k-q) \not{k} S(p-q) \gamma^\alpha + \not{k} S(p-k) \gamma_\alpha S(p-k-q) \not{k} S(p-q) \gamma^\alpha]. \quad (3.48)$$

Agora precisamos tratar em conjunto as (3.46) e (3.48). Não mostraremos o cálculo explicitamente, mas o resultado pode ser obtido utilizando os mesmos métodos que aplicamos para os termos anteriores. Sendo assim, chegamos ao resultado

$$\bar{u}_0 \left[\iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot k)} [\gamma_\alpha S(p-q) \gamma^\alpha S(p-k) \not{k} + \not{k} S(p-k) \gamma_\alpha S(p-q) \gamma^\alpha] \right] u_0. \quad (3.49)$$

Dessa forma, as (3.44) e (3.49) correspondem a parte não invariante de $\bar{u}_0 \Sigma_2(p) u_0$.

Levando em conta os fatores de i , desconsiderados após a (3.29), finalmente obtemos

$$\bar{u}_0 \Sigma_2^n(p) u_0 = -\bar{u}_0 \left\{ e^4 \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot k)} \left[\gamma_\alpha S(p-q) \gamma^\alpha S(p-k) \not{n} + \right. \right. \\ \left. \left. \not{n} S(p-k) \gamma_\alpha S(p-q) \gamma^\alpha - \frac{1}{(n \cdot q)} \not{n} S(p-q) (\not{p} - m) S(p-k) \not{n} \right] \right\} u_0, \quad (3.50)$$

onde o índice n indica que estamos nos referindo apenas aos termos não invariantes (dependentes do vetor axial).

Porém, para confirmarmos que $\bar{u}(p) \Sigma(p) u(p)$ não é invariante ainda precisamos avaliar mais dois termos de segunda ordem, correspondentes a $\bar{u}_2 \Sigma_1(p) u_0$ e $\bar{u}_0 \Sigma_1(p) u_2$, pois, como já comentamos anteriormente, os spinores também são calculados de maneira perturbativa.

Vamos avaliar o termo $\bar{u}_0 \Sigma_1(p) u_2$. Usando as regras de Feynman podemos escrevê-lo como

$$\bar{u}_0 \Sigma_1(p) u_2 = ie^2 \bar{u}_0 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} D_{\mu\nu}(k) \gamma^\nu S(p-k) \gamma^\mu \right] u_2 \\ = -ie^2 \bar{u}_0 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{n^\mu k^\nu + n^\nu k^\mu}{n \cdot k} + \alpha \frac{k^\mu k^\nu n^2}{(n \cdot k)^2} \right) \gamma^\nu S(p-k) \gamma^\mu \right] u_2, \quad (3.51)$$

onde estamos interessados apenas na contribuição dos dois últimos termos de $D_{\mu\nu}(k)$, pois são os que dependem do vetor axial. Usando a (3.20) e excluindo os termos ímpares pode-se mostrar que

$$\bar{u}_0 \Sigma_1^n(p) u_2 = ie^2 \bar{u}_0 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2 (n \cdot k)} \not{n} S(p-k) (\not{p} - m) \right] u_2, \quad (3.52)$$

e por analogia, para $\bar{u}_2 \Sigma_1(p) u_0$, temos que

$$\bar{u}_2 \Sigma_1^n(p) u_0 = ie^2 \bar{u}_2 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2 (n \cdot k)} (\not{p} - m) S(p-k) \not{n} \right] u_0. \quad (3.53)$$

Para somar todos os termos, devemos lembrar que

$$(\not{p} - m_f) u(p) = (\not{p} - m - \delta m) (u_0(p) + u_2(p) + \dots) = 0, \quad (3.54)$$

e como a função precisa zerar em todas as ordens, temos

$$(\not{p} - m)u_2(p) = \delta^{(2)}m u_0(p), \quad (3.55)$$

onde o índice 2 indica a correção de segunda ordem (um loop) da massa física. Voltando a (3.17) e lembrando que apenas os termos invariantes do propagador do fóton contribuem na correção de um loop, chegamos em

$$(\not{p} - m)u_2(p) = -ie^2 \left[\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D q^2} \gamma_\mu S(p - q) \gamma^\mu \right] u_0(p). \quad (3.56)$$

Assim,

$$ie^2 \bar{u}_0 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2 (n \cdot k)} \not{n} S(p - k) (\not{p} - m) \right] u_2 = e^4 \bar{u}_0 \left[\iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot k)} \not{n} S(p - k) (\not{p} - m) \gamma_\mu S(p - q) \gamma^\mu \right] u_0, \quad (3.57a)$$

$$ie^2 \bar{u}_2 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2 (n \cdot k)} (\not{p} - m) S(p - k) \not{n} \right] u_0 = e^4 \bar{u}_0 \left[\iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot k)} \gamma_\mu S(p - q) \gamma^\mu (\not{p} - m) S(p - k) \not{n} \right] u_0. \quad (3.57b)$$

Finalmente, somando as (3.50), (3.57a) e (3.57b) obtemos

$$\bar{u}_0 \Sigma_2^n(p) u_0 + \bar{u}_2 \Sigma_1^n(p) u_0 + \bar{u}_0 \Sigma_1^n(p) u_2 = \bar{u}_0 \left[e^4 \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D} q^2 k^2 (n \cdot k) (n \cdot q)} \not{n} S(p - q) (\not{p} - m) S(p - k) \not{n} \right] u_0, \quad (3.58)$$

que é a parte não invariante de segunda ordem de $\bar{u}(p) \Sigma(p) u(p)$. E como este termo não é nulo, provamos que a (3.9) não vale para gauges axiais.

3.4 Redefinindo o Propagador Fermiônico

Para encontrarmos uma nova forma de escrever o propagador do férmion, de um modo que seja válido não só para gauges covariantes como também para gauges axiais, devemos analisar a estrutura da auto-energia do férmion. Para gauges covariantes, escrevemos

$$\Sigma^{(c)}(p) = Am + B\not{p}, \quad (3.59)$$

com A e B funções adimensionais, dependentes dos invariantes de Lorentz m e p^2 .

Para gauges axiais (não covariantes) devido a presença do vetor axial, a estrutura da auto-energia do férmion é mais complexa. Convencionalmente, usa-se a seguinte parametrização [29]

$$\Sigma^{(nc)} = Am + B\not{p} + C\not{p}_L + \frac{mD}{p_L^2}(\not{p}_L\not{p} - \not{p}\not{p}_L), \quad (3.60)$$

onde definimos

$$p_L^\mu = \frac{(n \cdot p)}{n^2} n^\mu, \quad (3.61)$$

de maneira análoga a (3.5). Neste caso os coeficientes A, B, C e D são funções adimensionais de $p^2, p_L^2 = (n \cdot p)^2, n^2$ e m . Se tomamos $C = D = 0$, o efeito é equivalente a fazermos $n^\mu = 0$. E assim, voltamos ao caso covariante.

A (3.60) foi obtida usando apenas conceitos gerais da Álgebra de Clifford [30]. Porém, numa teoria de gauge existem outras simetrias que podemos utilizar para simplificar o modelo, de maneira que este ainda seja válido para todos os casos fisicamente possíveis. Podemos usar a simetria de carga na QED, que exige que a função de dois pontos do férmion satisfaça

$$\mathcal{C}(S^{-1}(p))^T \mathcal{C}^{-1} = S^{-1}(-p), \quad (3.62)$$

onde T indica que estamos tratando da matriz transposta e \mathcal{C} é a matriz de conjugação da carga que pode é definida por

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T, \quad \mathcal{C}(\gamma^\mu)^T\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (3.63)$$

Dessa forma, ao aplicarmos os operadores \mathcal{C} e \mathcal{C}^{-1} na transposta da (3.8), para a (3.62) se manter válida as funções A, B, C e D devem respeitar

$$\begin{aligned} A(p) &= A(-p), & B(p) &= B(-p), \\ C(p) &= C(-p), & D(p) &= -D(-p), \end{aligned} \quad (3.64)$$

sendo que, para a condição da função D ser satisfeita, ela precisa depender de uma potência ímpar de $(n \cdot p)$. Entretanto, isso é impossível, pois nesse caso, a simetria $n^\mu \leftrightarrow -n^\mu$ seria violada e isso contradiz a (3.15), lembrando que a dependência de n^μ da

auto-energia do elétron tem origem no propagador do fóton. Dessa forma, para respeitar a simetria de carga precisamos assumir $D = 0$, o que nos leva a

$$\Sigma^{(nc)} = Am + B\not{p} + C\not{p}_L, \quad (3.65)$$

e voltando a (3.8) temos agora

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= \not{p} - m - Am - B\not{p} - C\not{p}_L \\ &= (1 - B)\not{p} - C\not{p}_L - m(1 + A). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Se queremos construir um propagador fermiônico cuja massa física obtida a partir do seu polo é invariante, uma boa estratégia é construir um propagador do tipo

$$S(p) = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}, \quad (3.67)$$

em que o denominador \mathcal{D} é escalar (na realidade uma grandeza escalar multiplicada por uma matriz identidade). Dessa forma, garantimos que o polo do propagador é uma grandeza escalar e restará apenas demonstrar a sua invariância.

Partindo dessa idéia, vamos definir

$$S^{-1}(p) = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathbb{I}, \quad (3.68)$$

onde

$$\mathcal{A} = (1 - B)\not{p} - C\not{p}_L, \quad \mathcal{B} = m(1 + A), \quad (3.69)$$

e \mathbb{I} é a matriz identidade. Podemos escrever

$$\mathcal{A}^2 = [(1 - B)^2 p^2 + (C^2 - 2C(1 - B))p_L^2]\mathbb{I}, \quad (3.70)$$

pois como p_L^μ é a projeção de p^μ na direção n^μ , é claro que

$$(p \cdot p_L) = p_L^2. \quad (3.71)$$

Sendo assim, podemos tentar

$$S(p) = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathbb{I}}{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2}, \quad (3.72)$$

equação que está de acordo com a (3.66), e tem um denominador escalar (multiplicado por uma matriz identidade). Em função do inverso do propagador, o numerador e o denominador podem ser escritos, respectivamente, como

$$\mathcal{N} = \mathcal{A} + \mathcal{B}\mathbb{I} = -S^{-1}(-p) = -\mathcal{C}(S^{-1}(p))^T \mathcal{C}^{-1}, \quad (3.73a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2 = [(1-B)^2 p^2 + (C^2 - 2C(1-B))p_L^2 - m^2(1+A)^2]\mathbb{I} \\ &= -S^{-1}(p)S^{-1}(-p) = -S^{-1}(p)\mathcal{C}(S^{-1}(p))^T \mathcal{C}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.73b)$$

e se definirmos $\mathcal{D} = \mathcal{D}'\mathbb{I}$, em que \mathcal{D}' é a parte escalar do denominador, temos que

$$\mathcal{D}' = -\frac{1}{2^{[D/2]}} \text{Tr}[S^{-1}(p)S^{-1}(-p)], \quad (3.73c)$$

onde $[D/2]$ é a parte inteira de $D/2$ e usamos o fato que em D dimensões, as matrizes de Dirac são $2^{[D/2]} \times 2^{[D/2]}$. Assim, seguindo essa definição de propagador fermiônico, para encontrarmos a massa física precisamos fazer

$$\text{Tr}[S^{-1}(p)S^{-1}(-p)]|_{p^2=m_f^2} = 0. \quad (3.74)$$

3.5 O Método das Identidades de Nielsen

Nesta seção, utilizaremos as identidades de Nielsen com o intuito de confirmar a validade do novo propagador proposto. Para isso, primeiramente precisamos determinar um termo fixador de gauge para a QED com parâmetros de controle tais que, dependendo dos seus valores, possamos tratar tanto dos gauges covariantes quanto dos gauges axiais. Em seguida, discutiremos brevemente sobre a teoria que leva às identidades de Nielsen e encontraremos a relação procedente dessas identidades para a função de dois pontos do férmion na QED (para o termo fixador de gauge definido). Finalmente, utilizaremos as identidades para verificar a invariância de gauge da massa física obtida do novo propagador fermiônico proposto.

3.5.1 Escolha do termo fixador de gauge

Como já vimos anteriormente, a lagrangiana da QED é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.75)$$

sendo que, para definirmos o gauge em que estamos tratando um problema, adicionamos um termo fixador. As (3.2) e (3.4) servem para fixarmos os gauges covariante e axial, respectivamente. Para definirmos uma expressão que possa representar ao mesmo tempo os dois termos fixadores, podemos tentar

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2}[\Lambda^\mu(\partial)A_\mu]^2, \quad (3.76)$$

onde

$$\Lambda^\mu(\partial) = \alpha\partial^\mu + \beta\partial_L^\mu, \quad (3.77)$$

e aqui podemos identificar

$$\alpha = \frac{1}{\xi_{cov}}, \quad \beta = \frac{1}{\xi_{axial}}. \quad (3.78)$$

Dessa forma, o gauge que estamos usando não é mais determinado apenas pelo vetor axial n^μ , mas também pelos parâmetros de controle α e β .

Se escolhermos $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$, caímos no caso covariante. Por outro lado, para $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, temos o gauge axial. Finalmente, se $\alpha = -\beta$ e $n^2 > 0$, encontramos o gauge de Coulomb, que mencionamos anteriormente.

Porém, aqui surge um novo problema. Não podemos simplesmente adicionar o termo fixador de gauge na lagrangiana esperando que nossa teoria não sofra alterações. Sendo assim, precisamos de alguma forma compensar essa mudança e o método mais utilizado para fazermos isso é adicionar mais um termo à densidade lagrangiana que compense o efeito do anterior. [31]

Este termo é conhecido como *ghost* e é definido fazendo [1]

$$\mathcal{L}_{ghost} = - \int d^D y \, \bar{c}(x) \left(\frac{\delta f(x)}{\delta A_\mu(y)} \right) (D_\mu c(y)), \quad (3.79)$$

onde c e \bar{c} são os campos de Faddeev-Popov também chamados de campos fantasmas (em inglês *ghost fields*). São campos de spin nulo que anticomutam (vide apêndice D para os campos de Grassmann) e não são físicos.

Já $f(x)$ corresponde a condição fixadora tal que $f(x) = 0$ para o gauge fixado. Por exemplo, para o gauge covariante $f(x) = \partial_\mu A^\mu$ pois como sabemos a condição que fixa o gauge covariante é $\partial_\mu A^\mu = 0$. Para o caso do nosso gauge generalizado, a condição fixadora é dada por $f(x) = \Lambda_\mu(\partial)A^\mu$, pois $\Lambda_\mu(\partial)A^\mu = 0$. Dessa forma, temos que

$$\frac{\delta f(x)}{\delta A_\mu(y)} = \Lambda_x^\mu(\partial)\delta^D(x-y), \quad (3.80)$$

e aplicando na (3.79), chegamos em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ghost} &= - \int d^D y \bar{c}(x) [\Lambda_x^\mu(\partial)\delta^D(x-y)] (D_\mu c(y)) \\ &= -\bar{c}(x)\Lambda^\mu(\partial)(D_\mu c(x)) = -\bar{c}(x)\Lambda^\mu(\partial)(\partial_\mu c(x)) \\ &= (\Lambda^\mu(\partial)\bar{c}(x))\partial_\mu c(x), \end{aligned} \quad (3.81)$$

sendo que na última passagem desconsideramos um termo de superfície pois assumimos que no infinito todos os campos tendem a zero.

Além disso, por razões que veremos a seguir, existe uma forma mais conveniente de escrever o termo fixador, assumindo

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2}F^2 + (\Lambda^\mu(\partial)F)A_\mu, \quad (3.82)$$

onde F é um campo escalar auxiliar cuja função será mostrada mais adiante. De qualquer forma, tomando $F = \Lambda^\mu(\partial)A_\mu$, voltamos a (3.76) a menos de um termo de superfície.

3.5.2 Identidades de Nielsen

As identidades de Nielsen são úteis para analisar a invariância de gauge de diversos aspectos associados a uma teoria de campo, como por exemplo as funções de Green geradas pela ação efetiva da teoria, a invariância de fenômenos como a quebra espontânea de simetria e, para o nosso caso específico, a invariância da massa física obtida a partir do polo do propagador fermiônico.

Para chegar a essas identidades, primeiro temos que analisar a lagrangiana do problema quando fixamos o gauge. Definimos

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{ghost}, \quad (3.83)$$

e esta lagrangiana é invariante sob as seguintes transformações

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \omega \partial_\mu c, & \delta F &= 0, & \delta \psi &= -ie\omega c\psi, & \delta \bar{\psi} &= -ie\omega \bar{\psi}c, \\ \delta c &= 0, & \delta \bar{c} &= -\omega F, \end{aligned} \quad (3.84)$$

onde ω é uma constante de Grassmann arbitrária (vide apêndice D). As equações acima são chamadas de *transformações BRST* (Becchi, Rouet, Stora e Tyutin) [10], são nilpotentes ($\delta_2 \delta_1 \phi = 0$) e a invariância da (3.83) sob elas é relativamente fácil de se demonstrar lembrando que ω , os campos spinoriais e os campos fantasmas anticomutam entre si [1].

Para encontrarmos as relações de Nielsen correspondentes ao sistema que estamos estudando, temos que adicionar à lagrangiana os seguintes termos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fon} &= J^\mu A_\mu + JF + i(\bar{\chi}\psi - \bar{\psi}\chi) + i(\bar{\eta}c - \bar{c}\eta) + ie(\bar{M}c\psi - \bar{\psi}cM) + \\ &\quad [H_{(\alpha)}(\partial^\mu \bar{c}) + H_{(\beta)}(\partial_L^\mu \bar{c})]A_\mu + \beta H_{(n)\mu}(N^{\mu\nu} \bar{c})A_\nu, \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde

$$N^{\mu\nu} = \frac{\partial(\partial_L^\nu)}{\partial n_\mu} = \frac{(n \cdot \partial)}{n^2} \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu n^\nu}{n \cdot \partial} - \frac{2n^\mu n^\nu}{n^2} \right). \quad (3.86)$$

Os termos $(J^\mu, J, \bar{\chi}, \chi, \bar{\eta}, \eta)$ correspondem às fontes dos campos $(A_\mu, F, \psi, \bar{\psi}, c, \bar{c})$, já (\bar{M}, M) são as fontes das transformações BRST de $(\psi, \bar{\psi})$ respectivamente. Finalmente, $(H_{(\alpha)}(x), H_{(\beta)}(x), H_{(n)}^\mu(x))$ são as fontes cujas transformações BRST dos termos correspondentes é igual à derivada de \mathcal{L}_{tot} com relação aos parâmetros (α, β, n^μ) definidos em (3.77), ou seja a transformação BRST destes termos indica a dependência de gauge da lagrangiana em relação aos parâmetros que definem o gauge.

É importante notar que a fonte de um termo que comuta com todos os outros apresenta o mesmo comportamento. Por outro lado, se um termo anticomuta com um campo de Grassmann, o mesmo vale para sua respectiva fonte. Sendo assim, \bar{M} e M têm índices spinoriais mas comutam, e as fontes H anticomutam.

A idéia de somar estes termos à lagrangiana é a mesma que usamos no capítulo 1 para chegarmos ao funcional gerador das funções de Green da teoria. Assim, podemos definir a lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}_{tot} + \mathcal{L}_{fon}, \quad (3.87)$$

e a ação

$$S = \int d^D x \mathcal{L}_{ef}, \quad (3.88)$$

de forma a chegar no funcional gerador

$$Z[\mathcal{J}] = e^{iW[\mathcal{J}]} = N \int \mathcal{D}\phi e^{iS}, \quad (3.89)$$

onde ϕ e \mathcal{J} representam genericamente todos os campos e fontes da lagrangiana e N é uma constante de normalização.

Agora podemos fazer uma transformação BRST de todos os campos ($\phi \rightarrow \phi + \delta_{BRST}\phi$). Essa transformação não altera o funcional gerador pois a integração funcional já cobre todos os caminhos e configurações possíveis de integração, ou seja, o funcional depende apenas das fontes e não dos campos. Dessa maneira, obtemos

$$\delta Z[\mathcal{J}] = 0 = N \int \mathcal{D}\phi \delta_{BRST}(iS) e^{iS}. \quad (3.90)$$

A ação S depende diretamente da lagrangiana efetiva, e como comentamos anteriormente, \mathcal{L}_{tot} é invariante sob transformações BRST. Assim, podemos analisar separadamente os termos correspondentes a \mathcal{L}_{fon} . Lembrando que a transformação BRST dos termos relacionados às fontes H é igual a derivada de \mathcal{L}_{tot} com relação aos parâmetros correspondentes, chegamos em

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \int d^D x \left[J^\mu \delta(A_\mu) + J \delta(F) + i(\bar{\chi} \delta(\psi) - \delta(\bar{\psi}) \chi) + i(\bar{\eta} \delta(c) - \delta(\bar{c}) \eta) + ie(\bar{M} \delta(c\psi) - \delta(\bar{\psi} c) M) + H_{(\alpha)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \alpha} + H_{(\beta)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \beta} + H_{(n)}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial n^\mu} \right] e^{iS}, \quad (3.91)$$

considerando que todo δ na equação acima corresponde a uma transformação BRST.

Lembrando que as transformações BRST são nilpotentes, podemos descartar os termos proporcionais a M e \bar{M} . Além disso, usando a (3.8), podemos escrever

$$\int \mathcal{D}\phi \int d^D x \left[H_{(\alpha)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \alpha} + H_{(\beta)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \beta} + H_{(n)}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial n^\mu} \right] e^{iS} = \int \mathcal{D}\phi \int d^D x (J^\mu \partial_\mu c - \bar{\chi} e c \psi - e \bar{\psi} c \chi - i F \eta) \omega e^{iS}. \quad (3.92)$$

Antes de continuarmos o procedimento para obtermos a identidade de Nielsen, é necessário escrevermos uma importante relação. Para um funcional $Z[\mathcal{J}] = e^{iW[\mathcal{J}]}$ cujo termo de fonte da lagrangiana é $\mathcal{L}_{fon} = \mathcal{J}\phi$, vale a relação

$$W[\mathcal{J}] = -i \log(Z[\mathcal{J}])$$

$$\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}} = -\frac{i}{Z[\mathcal{J}]} \frac{\delta Z[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}} = (-i) \frac{iN \int \mathcal{D}\phi (\phi) e^{iS}}{N \int \mathcal{D}\phi e^{iS}} = \langle \phi \rangle. \quad (3.93)$$

Usando a igualdade acima (adaptada para as fontes da (3.85)) e como podemos assumir que ω tem valor unitário, pois é uma constante arbitrária, a (3.92) pode ser reescrita como

$$\frac{N}{Z[\mathcal{J}]} \int \mathcal{D}\phi \int d^D x \left[H_{(\alpha)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \alpha} + H_{(\beta)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \beta} + H_{(n)}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial n^\mu} \right] e^{iS} = i \int d^D x \left(J^\mu \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \bar{\chi} \frac{\delta W}{\delta \bar{M}} + \frac{\delta W}{\delta M} \chi - \frac{\delta W}{\delta J} \eta \right). \quad (3.94)$$

Seja $H(x) = (H_{(\alpha)}(x), H_{(\beta)}(x), H_{(n)}^\mu(x))$ e $\phi = (\alpha, \beta, n^\mu)$, quando calculamos a derivada funcional do lado esquerdo da (3.94) em função dos campos $H_{(i)}(x)$ fazendo todos os campos H irem pra zero temos

$$\frac{\delta}{\delta H_{(i)}} \left\{ \frac{N}{Z[\mathcal{J}]} \int \mathcal{D}\phi \int d^D x \left[H_{(\alpha)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \alpha} + H_{(\beta)} \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \beta} + H_{(n)}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial n^\mu} \right] e^{iS} \right\} \Big|_{H=0} = \frac{N}{Z[\mathcal{J}]} \int \mathcal{D}\phi \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \phi_{(i)}} e^{iS}, \quad (3.95)$$

onde $\phi_{(i)}$ é o campo correspondente a $H_{(i)}(x)$. Integrar o resultado da (3.95) em função de x , resulta em

$$\frac{N}{Z[\mathcal{J}]} \int \mathcal{D}\phi \int d^D x \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \phi_{(i)}} e^{iS} = \frac{\partial W}{\partial \phi_{(i)}}. \quad (3.96)$$

Repetindo o mesmo procedimento que fizemos acima para o lado direito da (3.94) chegamos finalmente em

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_{(i)}} = i \iint d^D x d^D y \left(J^\mu(y) \partial_\mu^{(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta H_{(i)}(x) \delta \bar{\eta}(y)} + \bar{\chi}(y) \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{M}(y) \delta H_{(i)}(x)} + \frac{\delta^2 W}{\delta H_{(i)}(x) \delta M(y)} \chi(y) - \frac{\delta^2 W}{\delta H_{(i)}(x) \delta J(y)} \eta(y) \right). \quad (3.97)$$

Derivando o funcional W em função dos campos $(\psi, \bar{\psi})$ obtemos as funções de Green conexas como vimos no capítulo 2. Para tratarmos apenas das funções 1PI, precisamos fazer uma transformação de legendre que relacione o funcional W com a ação efetiva da teoria. Usando as fontes que definimos anteriormente, escrevemos

$$\Gamma = W - \int d^D x J^\mu A_\mu + JF + i(\bar{\chi}\psi - \bar{\psi}\chi) + i(\bar{\eta}c - \bar{c}\eta), \quad (3.98)$$

sendo que devemos notar que as fontes M , \bar{M} e H e seus respectivos termos não fazem parte da transformação. Dessa forma, podemos escrever as seguintes relações

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta M} &= \frac{\delta W}{\delta M}, & \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{M}} &= \frac{\delta W}{\delta \bar{M}}, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta H_{(i)}} &= \frac{\delta W}{\delta H_{(i)}}, & \frac{\delta\Gamma}{\delta \phi_{(i)}} &= \frac{\delta W}{\delta \phi_{(i)}}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

e para as derivações dos campos da teoria temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} &= -J^\mu, & \frac{\delta\Gamma}{\delta F} &= -J, & \frac{\delta\Gamma}{\delta \psi} &= i\bar{\chi}, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\psi}} &= i\chi, & \frac{\delta\Gamma}{\delta c} &= i\bar{\eta}, & \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}} &= i\eta, \end{aligned} \quad (3.100)$$

que são análogas as seguintes relações

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J^\mu} &= A_\mu, & \frac{\delta W}{\delta J} &= F, & \frac{\delta W}{\delta \bar{\chi}} &= -i\psi, \\ \frac{\delta W}{\delta \chi} &= -i\bar{\psi}, & \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} &= -ic, & \frac{\delta W}{\delta \eta} &= -i\bar{c}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Substituindo estes resultados na (3.97) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Gamma}{\partial\phi_{(i)}} &= \iint d^D x d^D y \left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(y)} \partial_\mu^{(y)} \frac{\delta c(y)}{\delta H_{(i)}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta \psi(y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta \bar{M}(y) \delta H_{(i)}(x)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta^2\Gamma}{\delta H_{(i)}(x) \delta M(y)} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\psi}(y)} - \frac{\delta F(y)}{\delta H(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}(y)} \right) \\ &= \iint d^D x d^D y \left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(y)} \partial_\mu^{(y)} \frac{\delta c(y)}{\delta H_{(i)}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta \psi(y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta \bar{M}(y) \delta H_{(i)}(x)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta^2\Gamma}{\delta H_{(i)}(x) \delta M(y)} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\psi}(y)} \right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

aqui nós excluimos o último termo pois como vimos anteriormente, ao tomarmos as derivadas funcionais da ação efetiva obtemos o inverso das funções de Green 1PI da teoria. Logo, o termo é nulo pois não existem funções de campos fantasmas de n pontos.

De qualquer forma, a equação relaciona a dependência da ação efetiva em relação aos parâmetros que fixam o gauge. Assim, analisando essa equação para os três parâmetros de controle, temos a dependência de gauge da ação efetiva, e derivando a relação dos dois lados (fazendo os campos iguais a zero) podemos encontrar o mesmo para as funções de Green 1PI geradas que quisermos analisar. Sendo assim, a (3.102) é a identidade principal que queríamos encontrar.

3.5.3 Aplicação do Método

Queremos analisar o propagador fermiônico e para isso devemos primeiro derivar a ação efetiva em função dos campos spinoriais ψ e $\bar{\psi}$. Como estamos derivando apenas em função dos campos spinoriais, o primeiro termo da (3.102) não contribui, pois teríamos uma função de um ponto do campo de gauge, o que violaria a invariância de Lorentz. Assim, os termos relevantes para analisarmos são

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_{(i)}} = \iint d^D x d^D y \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_\sigma(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{M}_\sigma(y) \delta H_{(i)}(x)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H_{(i)}(x) \delta M_\sigma(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_\sigma(y)} \right), \quad (3.103)$$

sendo que para cada spinor associamos um índice spinorial (no caso σ) para deixar os cálculos mais claros. Derivando a (3.103) dos dois lados por $\bar{\psi}_\mu(z)$ e $\psi_\nu(w)$ (e fazendo todos os campos iguais a zero) chegamos a

$$\frac{\partial S_{\mu\nu}^{-1}(z-w)}{\partial \phi_{(i)}} = \iint d^D x d^D y [\mathcal{F}_{\mu\sigma}^{(i)}(x, y, z) S_{\sigma\nu}^{-1}(y-w) + S_{\mu\sigma}^{-1}(x-z) \mathcal{G}_{\sigma\nu}^{(i)}(x, y, w)], \quad (3.104)$$

onde

$$S_{\mu\nu}^{-1}(x-y) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\nu(y) \delta \bar{\psi}_\mu(x)}, \quad (3.105a)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(i)}(x, y, z) = \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{\psi}_\mu(x) \delta H_{(i)}(y) \delta M_\nu(z)}, \quad (3.105b)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(i)}(x, y, z) = \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{M}_\mu(x) \delta H_{(i)}(y) \delta \psi_\nu(z)}, \quad (3.105c)$$

e todos os outros termos que surgem das derivações funcionais da (3.104) não contribuem pois as funções de n pontos geradas violam as regras de Feynman (seus diagramas não tem significado físico) e, portanto, suas contribuições valem zero.

Podemos levar a relação (3.104) para o espaço dos momentos e escrevê-la da maneira simplificada (podemos omitir agora os índices spinoriais)

$$\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial \phi_{(i)}} = \mathcal{F}^{(i)}(p)S^{-1}(p) + S^{-1}(p)\mathcal{G}^{(i)}(p). \quad (3.106)$$

Agora, podemos aplicar a identidade no denominador do propagador fermiônico proposto para verificarmos a invariância de gauge da massa física. Dessa forma, derivando a (3.73c) em função de um parâmetro $\phi_{(i)}$ encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial \phi_{(i)}} &= -\frac{1}{2^{[D/2]}} \text{Tr} \left[\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial \phi_{(i)}} \mathcal{C} (S^{-1}(p))^T \mathcal{C}^{-1} + S^{-1}(p) \mathcal{C} \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial \phi_{(i)}} \mathcal{C}^{-1} \right] \\ &= -\frac{1}{2^{[D/2]}} \text{Tr} \left[(\mathcal{F}^{(i)}(p)S^{-1}(p) + S^{-1}(p)\mathcal{G}^{(i)}(p)) S^{-1}(-p) + \right. \\ &\quad \left. S^{-1}(p) \mathcal{C} (\mathcal{F}^{(i)}(p) \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} S^{-1}(p) + S^{-1}(p) \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \mathcal{G}^{(i)}(p))^T \mathcal{C}^{-1} \right] \\ &= \mathcal{D}' \text{Tr} \left[(\mathcal{F}^{(i)}(p) + \mathcal{G}^{(i)}(p)) + \mathcal{C} (\mathcal{F}^{(i)}(p) + \mathcal{G}^{(i)}(p))^T \mathcal{C}^{-1} \right] \\ &= 2\mathcal{D}' \text{Tr} \left[(\mathcal{F}^{(i)}(p) + \mathcal{G}^{(i)}(p)) \right]. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Nesta operação usamos diversas propriedades do traço como a ciclicidade, o fato de $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A)^T$ e que $\text{Tr}(cA) = c\text{Tr}(A)$ onde c é uma quantidade escalar. O mais importante é que a derivada do denominador depende do valor do mesmo de forma que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial \phi_{(i)}} \right|_{\mathcal{D}'=0} = 0, \quad (3.108)$$

ou seja, no polo o propagador é invariante de gauge. Além disso devemos lembrar que

$$\mathcal{D}' \propto -S^{-1}(p)S^{-1}(-p) = (\not{p} - m_f)(\not{p} + m_f) = p^2 - m_f^2, \quad (3.109)$$

e como obviamente p é invariante de gauge, se \mathcal{D}' é invariante no polo, então obrigatoriamente m_f também é. Assim, conseguimos provar a invariância da massa física definida pelo propagador da (3.72).

3.6 Cálculo Explícito da Invariância da Massa Física

Nesta seção, verificaremos explicitamente se a massa física definida pela (3.72) é invariante de gauge até dois loops (quarta ordem) no gauge axial. Para isso, estudaremos a função

$$F(p^2) = -Tr(S^{-1}(p)S^{-1}(-p)), \quad (3.110)$$

onde

$$F(p^2)|_{p^2=m_f^2} = 0. \quad (3.111)$$

Já vimos anteriormente que

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p). \quad (3.112)$$

A partir de agora, para facilitar a identificação da ordem do termo que estaremos analisando, vamos realizar a transformação $\Sigma_n(p) \rightarrow e^{2n}\Sigma_n(p)$, ou seja, vamos escrever a dependência da carga fermiônica fora do termo de auto-energia para explicitar a ordem do termo que estamos tratando.

Usando a (3.19) sabemos que até segunda ordem podemos escrever

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m - e^2 \Sigma_1^F - ie^2 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k \cdot n)} (\not{k} S(p-k) \not{n} + \not{n} S(p-k) \not{k}) - \alpha n^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k \cdot n)^2} \not{k} S(p-k) \not{k} \right], \quad (3.113)$$

e usando os resultados das (3.22-3.25), obtemos

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m - e^2 \{ \Sigma_1^F + i[(\not{p} - m) S_1 \not{n} + \not{n} S_1 (\not{p} - m)] - i\alpha n^2 (\not{p} - m) S_2 (\not{p} - m) \}, \quad (3.114)$$

onde é necessário usar o argumento do apêndice E para mostrar que um termo da integração é nulo e para simplificar a escrita utilizamos a notação

$$S_N = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{S(p-k)}{(n \cdot k)^N}, \quad (3.115)$$

que também adotaremos nos cálculos subsequentes.

Antes de partirmos para o cálculo explícito, um último detalhe para simplificar mais nossa notação. Na seção 3.4, mostramos que o propagador fermiônico obedece a simetria de carga e é invariante sob a transformação $(n^\mu \rightarrow -n^\mu)$. Sendo assim, podemos escrever no polo do propagador

$$F(p^2)|_{p^2=m_f^2} = -Tr(S^{-1}(p)S^{-1}(-p))|_{p^2=m_f^2} = Tr(S^{-1}(m)S^{-1}(-m)) = F(m_f^2) = 0, \quad (3.116)$$

onde definimos

$$S^{-1}(\pm m) = \not{p} - (\pm m) - e^2 \Sigma_1^\pm - e^4 \Sigma_2^\pm - \dots \quad (3.117)$$

Podemos também escrever a importante relação

$$\begin{aligned} Tr(S^{-1}(m)S^{-1}(-m)) &= Tr[(\not{p} - m - e^2 \Sigma_1^+ + \mathcal{O}(e^4))(\not{p} + m - e^2 \Sigma_1^- + \mathcal{O}(e^4))] \Big|_{p^2=m_f^2} \\ Tr(m_f^2 - m^2) &= Tr[e^2((\not{p} - m)\Sigma_1^- + \Sigma_1^+(\not{p} + m)) + \mathcal{O}(e^4)] \Big|_{p^2=m_f^2} \\ (m_f^2 - m^2) &= e^2 \delta m_1^2 + \mathcal{O}(e^4), \end{aligned} \quad (3.118)$$

sendo que

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)\Sigma_1^- + \Sigma_1^+(\not{p} + m) \Big|_{p^2=m_f^2} &= (\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m) + i(p^2 - m^2)(S_1^- \not{p} + \not{p} S_1^-) + \\ &\quad i(S_1^+ \not{p} + \not{p} S_1^+)(p^2 - m^2) - i\alpha n^2[(p^2 - m^2)S_2^-(\not{p} + m) + (\not{p} - m)S_2^+(p^2 - m^2)] \\ &= (\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m) + i(m_f^2 - m^2)[S_1^- \not{p} + \not{p} S_1^- + \\ &\quad S_1^+ \not{p} + \not{p} S_1^+ - \alpha n^2(S_2^-(\not{p} + m) + (\not{p} - m)S_2^+)] \\ (\not{p} - m)\Sigma_1^- + \Sigma_1^+(\not{p} + m) \Big|_{p^2=m_f^2} &= (\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m) + \mathcal{O}(e^2), \end{aligned} \quad (3.119)$$

e assim

$$\delta m_1^2 = (\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m). \quad (3.120)$$

Dessa forma, a diferença entre a massa física e a massa da partícula livre é de $\mathcal{O}(e^2)$. Para analisar a invariância de gauge do polo do propagador, devemos apenas nos preocupar com os termos que dependem do vetor axial. Temos que

$$\begin{aligned} S^{-1}(m)S^{-1}(-m) &= (p^2 - m^2) - e^2[(\not{p} - m)\Sigma_1^- + \Sigma_1^+(\not{p} + m)] + \\ &\quad e^4[\Sigma_1^+ \Sigma_1^- - (\not{p} - m)\Sigma_2^- - \Sigma_2^+(\not{p} + m)] + \mathcal{O}(e^6), \end{aligned} \quad (3.121)$$

e definimos

$$\begin{aligned} F_0 &= Tr(p^2 - m^2), & (\mathcal{O}(e^0)) \\ F_1 &= -Tr[(\not{p} - m)\Sigma_1^- + \Sigma_1^+(\not{p} + m)], & (\mathcal{O}(e^2)) \\ F_2 &= Tr[\Sigma_1^+ \Sigma_1^- - (\not{p} - m)\Sigma_2^- - \Sigma_2^+(\not{p} + m)]. & (\mathcal{O}(e^4)) \end{aligned} \quad (3.122)$$

O termo de ordem zero é trivialmente invariante, sendo assim precisamos nos ocupar apenas com F_1 e F_2 . Começaremos pelo termo de primeira ordem. Escrevendo explicitamente Σ_1^\pm , obtemos

$$F_1 = -Tr\{(\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m) + i(p^2 - m^2)[S_1^- \not{p} + \not{p} S_1^- + S_1^+ \not{p} + \not{p} S_1^+ - \alpha n^2(S_2^-(\not{p} + m) + (\not{p} - m)S_2^+)]\}. \quad (3.123)$$

A parte proporcional a $\Sigma_1^{F\pm}$ é invariante pois não depende de n^μ , e a outra parte é proporcional a $(p^2 - m^2)$, ou seja, é de ordem maior. Temos que

$$\begin{aligned} i(p^2 + m^2)[S_1^- \not{p} + \not{p} S_1^- + S_1^+ \not{p} + \not{p} S_1^+ - S_2^-(\not{p} + m) - (\not{p} - m)S_2^+]|_{p^2=m_f^2} = \\ = ie^2[(\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m)][S_1^- \not{p} + \not{p} S_1^- + S_1^+ \not{p} + \not{p} S_1^+ - S_2^-(\not{p} + m) - (\not{p} - m)S_2^+] + \mathcal{O}(e^4), \end{aligned} \quad (3.124)$$

logo esse termo contribui apenas em $\mathcal{O}(e^4)$. Sendo assim, mostramos que o polo do propagador é invariante até segunda ordem.

Continuando, vamos tratar o termo de F_2 formado pelo produto de dois diagramas de um loop.

$$\begin{aligned} F_2' = Tr[\Sigma_1^+ \Sigma_1^-] = Tr\{\Sigma_1^{F+} \Sigma_1^{F-} + i\Sigma_1^{F+}[(\not{p} + m)S_1^- \not{p} + \not{p} S_1^-(\not{p} + m)] + \\ i[(\not{p} - m)S_1^+ \not{p} + \not{p} S_1^+(\not{p} - m)]\Sigma_1^{F-} - (\not{p} - m)S_1^+ \not{p}(\not{p} + m)S_1^- \not{p} - \\ \not{p} S_1^+(\not{p} - m)\not{p} S_1^-(\not{p} + m) - n^2(m_f^2 - m^2)(S_1^- S_1^+ + S_1^+ S_1^-) + \mathcal{O}(\alpha)\}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Aqui o primeiro termo é invariante e os termos proporcionais a $(m_f^2 - m^2)$ não contribuem em $\mathcal{O}(e^4)$ pois são de ordem maior. Com relação a $\mathcal{O}(\alpha)$

$$\begin{aligned} Tr(\mathcal{O}(\alpha)) = Tr\{\alpha n^2[-i(\not{p} - m)S_2^+(\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} - i\Sigma_1^{F+}(\not{p} + m)S_2^-(\not{p} + m) + \\ (m_f^2 - m^2)[S_1^+ \not{p}(\not{p} + m) + S_2^-(\not{p} - m)\not{p} S_1^- + \not{p} S_1^+ S_2^-(\not{p} + m) + \\ (\not{p} - m)S_2^+ S_1^- \not{p}]] - \alpha^2 n^4(m_f^2 - m^2)^2 S_2^+ S_2^-\}, \end{aligned} \quad (3.126)$$

onde novamente os termos múltiplos de $(m_f^2 - m^2)$ podem ser descartados.

Sendo assim, chegamos a

$$F_2'^{(n)} = Tr\{i\Sigma_1^{F+}[(\not{p} + m)S_1^- \not{p} + \not{p}S_1^-(\not{p} + m)] + i[(\not{p} - m)S_1^+ \not{p} + \not{p}S_1^+(\not{p} - m)]\Sigma_1^{F-} \\ - (\not{p} - m)S_1^+ \not{p}(\not{p} + m)S_1^- \not{p} - \not{p}S_1^+(\not{p} - m)\not{p}S_1^-(\not{p} + m) \\ - i\alpha n^2[(\not{p} - m)S_2^+(\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m)S_2^-(\not{p} + m)]\}. \quad (3.127)$$

Além disso temos que as quantidades $[(\not{p} - m)\Sigma_1^{F-} + \Sigma_1^{F+}(\not{p} + m)]$ e $[\not{p}S_1^- + S_1^+\not{p}]$ são escalares (vide propriedades das matrizes de Dirac no apêndice C). Usando isto e a substituição $(S_1^+\not{p} = \not{p}S_1^- + S_1^+\not{p} - \not{p}S_1^-)$ na soma da (3.127) com a parte de $\mathcal{O}(e^4)$ da (3.124), encontramos a contribuição total da parte dependente de n^μ dos diagramas de um loop em F_2 , ou seja

$$F_2^{1(n)} = Tr\{-i[\Sigma_1^{F+}[(\not{p} + m)\not{p}S_1^+ + S_1^+\not{p}(\not{p} + m)] + [(\not{p} - m)\not{p}S_1^- + S_1^-\not{p}(\not{p} - m)]\Sigma_1^{F-}] \\ + (\not{p} - m)\not{p}S_1^-(\not{p} + m)S_1^-\not{p} + \not{p}S_1^+(\not{p} - m)S_1^+\not{p}(\not{p} + m)\}, \quad (3.128)$$

transformação essa que, como veremos mais adiante, será útil para cancelar termos dos diagramas de dois loops dependentes de n^μ .

Agora vamos tratar da parte de F_2 correspondente aos diagramas de dois loops. Como vimos anteriormente, existem três diagramas 1PI de dois loops para a auto-energia do elétron. Dessa forma, vamos tratar estes diagramas separadamente como fizemos na seção 3.3 e em seguida somar suas contribuições.

Para o primeiro diagrama (fig. 3.2), podemos partir da (3.27) e escrever

$$\Sigma_2^{a\pm} = - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^4} \left[\eta_{\mu\alpha} - \frac{n_\alpha q_\mu}{n \cdot q} \right] \Pi^{\alpha\beta}(q) \left[\eta_{\beta\nu} - \frac{n_\beta q_\nu}{n \cdot q} \right] \gamma^\nu S^\pm(p - q) \gamma^\mu, \quad (3.129)$$

e estamos interessados no termo

$$F_2^a = (\not{p} - m)\Sigma_2^{a-} + \Sigma_2^{a+}(\not{p} + m). \quad (3.130)$$

Vamos começar por $[(\not{p} - m)\Sigma_2^{a-}]$, lembrando que só precisamos analisar os termos dependentes do vetor axial e que usaremos a definição (3.25) para $\Pi^{\alpha\beta}(q)$. Uma das partes da expressão é dada por

$$- (\not{p} - m) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\eta_{\mu\alpha}}{q^4(q \cdot n)} (q^2 \eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \Pi(q^2) (-q_\nu n_\beta) \gamma^\nu S^-(p - q) \gamma^\mu = \\ = (\not{p} - m) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\Pi(q^2)}{q^4(q \cdot n)} (q^2 \not{q} S^-(p - q) \not{p} - (q \cdot n) \not{q} S^-(p - q) \not{q}), \quad (3.131)$$

e excluindo termos ímpares e de ordem maior, como já fizemos anteriormente, podemos mostrar que a integral final têm contribuição nula.

Outra integral que precisamos analisar é

$$\begin{aligned}
& -(\not{p} - m) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{-q_\mu n_\alpha}{q^4(q \cdot n)} (q^2 \eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \Pi(q^2) (\eta_{\nu\beta}) \gamma^\nu S^-(p - q) \gamma^\mu = \\
& (\not{p} - m) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\Pi(q^2)}{q^4(q \cdot n)} (q^2 \not{n} S^-(p - q) \not{q} - (q \cdot n) \not{q} S^-(p - q) \not{q}), \quad (3.132)
\end{aligned}$$

que também tem contribuição nula, pois usando a ciclicidade do traço podemos notar que os dois termos da integral final são equivalentes aos da (3.131).

A última parte não invariante do termo que estamos calculando é

$$\begin{aligned}
& -(\not{p} - m) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{-q_\mu n_\alpha}{q^4(q \cdot n)^2} (q^2 \eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \Pi(q^2) (-q_\nu n_\beta) \gamma^\nu S^-(p - q) \gamma^\mu = \\
& = -(\not{p} - m) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\Pi(q^2)}{q^4(q \cdot n)^2} (q^2 n^2 - (q \cdot n)^2) \not{q} S^-(p - q) \not{q}, \quad (3.133)
\end{aligned}$$

e essa integral vale zero, pois ela é igual ao segundo termo da (3.131), a menos de um fator escalar par.

Assim, a contribuição de $[(\not{p} - m)\Sigma_2^{a-}]$ com $F_2^{(n)}$ é nula. Por analogia, podemos assumir que a de $[\Sigma_2^{a+}(\not{p} + m)]$ também é. Concluimos então que a contribuição total desse diagrama para $F_2^{(n)}$ é zero.

Continuando, temos que analisar os dois diagramas restantes (fig. 3.3). Assim como fizemos na seção 3.3, podemos partir da (3.29) e iniciar nossa análise com os termos de $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Nesta parte, teremos que trabalhar com algumas integrais muito extensas e por isso, para reduzir o tamanho da notação, usaremos

$$S(p - q) = S^q, \quad S(p - k) = S^k, \quad S(p - q - k) = S^{qk}, \quad (3.134)$$

e substituindo na (3.29), temos

$$(\Sigma_2^{(b+c)}) = - \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} D_{\mu\nu}(k) D_{\alpha\beta}(q) [\gamma^\nu S^k \gamma^\beta S^{qk} \gamma^\alpha S^k \gamma^\mu + \gamma^\beta S^q \gamma^\nu S^{qk} \gamma^\alpha S^k \gamma^\mu]. \quad (3.135)$$

Para calcular os termos de $\mathcal{O}(\alpha^2)$, devemos usar a parte de $\mathcal{O}(\alpha)$ da (3.15) e substituir na (3.135). Fazendo isso, para $[(\not{p} - m)\Sigma_2^{(b+c)-}]$ chegamos em

$$\begin{aligned}
& -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{\alpha^2 n^4}{q^2 k^2 (n \cdot q)^2 (n \cdot k)^2} [\not{k} S^{k-} \not{q} S^{qk-} \not{q} S^{k-} \not{k} + \not{q} S^{q-} \not{k} S^{qk-} \not{q} S^{k-} \not{k}] = \\
& -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} A(q, k) [-\not{q} + (\not{p} + m)(S^{k-} \not{q} + S^{q-} \not{k}) - \not{k}] S^{qk-} \not{q} S^{k-} \not{k}, \quad (3.136)
\end{aligned}$$

em que definimos

$$A(q, k) = \frac{\alpha^2 n^4}{q^2 k^2 (n \cdot q)^2 (n \cdot k)^2}, \quad (3.137)$$

que é uma função par para as duas variáveis. Analisando a (3.136), o segundo termo (quando multiplicamos por $(\not{p} - m)$) é de ordem maior e não contribui em F_2 , enquanto o primeiro termo dá

$$\begin{aligned}
& (\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} A(q, k) \not{q} S^{qk-} \not{q} S^{k-} \not{k} = \\
& (\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} A(q, k) [-1 + (\not{p} + m) S^{qk-} - \not{k} S^{qk-}] \not{q} S^{k-} \not{k}, \quad (3.138)
\end{aligned}$$

onde o primeiro termo é nulo pois a integração é ímpar com relação a q^μ , o segundo é de ordem maior, não contribuindo em F_2 e o terceiro é cancelado com o último termo da (3.137). Dessa forma, a contribuição de $[(\not{p} - m) \Sigma_2^{(b+c)-}]$ é nula para $\mathcal{O}(\alpha^2)$ e por simetria, $[\Sigma_2^{(b+c)+}(\not{p} + m)]$ também não contribuirá.

Continuando, devemos fazer a análise de $\mathcal{O}(\alpha)$. Observando a (3.29), podemos dividir este estudo em duas partes. Por exemplo, um dos termos de $\mathcal{O}(\alpha)$ de $[(\not{p} - m) \Sigma_2^{b-}]$ é dado por

$$\begin{aligned}
& -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{\alpha n^2}{k^2 q^2 (n \cdot k)^2 (n \cdot q)} (-k_\mu k_\nu) (q_\alpha n_\beta + q_\beta n_\alpha) \gamma^\nu S^{k-} \gamma^\beta S^{qk-} \gamma^\alpha S^{k-} \gamma^\mu \\
& = (\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} B(q, k) \not{k} S^{k-} (\not{q} S^{qk-} \not{q} + \not{q} S^{qk-} \not{q}) S^{k-} \not{k}, \quad (3.139)
\end{aligned}$$

onde $B(q, k)$ é definida de forma análoga a (3.137), sendo par em k^μ e ímpar em q^μ .

Utilizando substituições iguais ou análogas as das (3.136) e (3.138), além dos métodos aplicados nos cálculos anteriores, podemos mostrar que a soma dos termos similares a (3.139) para os dois diagramas é zero.

Os outros termos de $\mathcal{O}(\alpha)$ são do tipo (para o diagrama b)

$$\begin{aligned}
& -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{\alpha n^2}{k^2 q^2 (n \cdot k)^2} (-k_\mu k_\nu) (-\eta_{\alpha\beta}) \gamma^\nu S^{k-} \gamma^\beta S^{qk-} \gamma^\alpha S^{k-} \gamma^\mu = \\
& -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} C(q, k) \not{k} S^{k-} \gamma_\alpha S^{qk-} \gamma^\alpha S^{k-} \not{k}, \quad (3.140)
\end{aligned}$$

onde $C(q, k)$ é par para as duas variáveis. E assim como no caso anterior podemos, usando os métodos acima descritos, mostrar que a soma dos termos similares a (3.140) para os dois diagramas é zero. Porém, vale ressaltar que neste caso a soma resultará na integral

$$-(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} C(q, k) \gamma_\alpha S^{qk-} \gamma^\alpha, \quad (3.141)$$

que vale zero devido a razões que estão explicadas no apêndice E do texto. Assim a contribuição de $\mathcal{O}(\alpha)$ de $[(\not{p} - m)\Sigma_2^{(b+c)-}]$ é nula e, por simetria, o mesmo vale para $[\Sigma_2^{(b+c)+}(\not{p} + m)]$.

Resta apenas tratar os termos independentes de α que também podem ser divididos em dois grupos. Para o primeiro grupo, com relação ao diagrama b , temos

$$\begin{aligned} & -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)(q_\alpha n_\beta + q_\beta n_\alpha)}{q^2 k^2 (q \cdot n)(k \cdot n)} \gamma^\nu S^{k-} \gamma^\beta S^{qk-} \gamma^\alpha S^{k-} \gamma^\mu = \\ & -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} D(q, k) [\not{n} S^{k-} \not{q} S^{qk-} \not{q} S^{k-} \not{k} + \not{n} S^{k-} \not{q} S^{qk-} \not{n} S^{k-} \not{k} + \\ & \quad \not{k} S^{k-} \not{n} S^{qk-} \not{q} S^{k-} \not{n} + \not{k} S^{k-} \not{q} S^{qk-} \not{n} S^{k-} \not{n}], \end{aligned} \quad (3.142)$$

onde $D(q, k)$ é ímpar para as duas variáveis. Podemos simplificar esta expressão a partir de relações análogas às utilizadas na (3.136) e descartando os termos de ordem maior. Somando a expressão simplificada com a equivalente para o diagrama c e utilizando os métodos já apresentados, é possível mostrar que a contribuição total destes termos vale

$$\begin{aligned} & (\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} D(q, k) \not{n} S^{q-} (\not{p} + m) S^{k-} \not{n} = \\ & (\not{p} - m) \not{n} \left[\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D q^2 (q \cdot n)} S^-(p - q) \right] (\not{p} + m) \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2 (k \cdot n)} S^-(p - k) \right] \not{n} = \\ & (\not{p} - m) \not{n} S_1^-(\not{p} + m) S_1^- \not{n}, \end{aligned} \quad (3.143)$$

onde separamos as integrações de q^μ e k^μ e usamos a (3.115) para escrever esta parte da contribuição de $[(\not{p} - m)\Sigma_2^{(b+c)-}]$ de forma conveniente. Analogamente, a contribuição do termo $[\Sigma_2^{(b+c)+}(\not{p} + m)]$ é igual a

$$\not{n} S_1^+(\not{p} - m) S_1^+ \not{n} (\not{p} + m). \quad (3.144)$$

Ainda falta calcular o segundo grupo de termos independentes de α . Como exemplo, temos (parte do diagrama *b*)

$$\begin{aligned} & -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)(-\eta_{\alpha\beta})}{q^2 k^2 (k \cdot n)} \gamma^\nu S^{k-} \gamma^\beta S^{qk-} \gamma^\alpha S^{k-} \gamma^\mu = \\ & (\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} E(q, k) [\not{n} S^{k-} \gamma_\alpha S^{qk-} \gamma^\alpha S^{k-} \not{k} + \not{k} S^{k-} \gamma_\alpha S^{qk-} \gamma^\alpha S^{k-} \not{n}], \end{aligned} \quad (3.145)$$

onde definimos que $E(q, k)$ é ímpar em k^μ e par em q^μ .

Podemos simplificar a (3.145) fazendo as mesmas substituições da (3.136) e somar com as outras contribuições deste tipo nos dois diagramas para chegarmos em

$$-(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} E(q, k) [\not{n} S^{k-} \gamma_\alpha S^{q-} \gamma^\alpha + \gamma_\alpha S^{q-} \gamma^\alpha S^{k-} \not{n}], \quad (3.146)$$

que é a contribuição total deste grupo.

Assim como fizemos na (3.143), pode-se escrever as integrações separadamente e obter

$$\begin{aligned} & -(\not{p} - m) \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} E(q, k) [\not{n} S^{k-} \gamma_\alpha S^{q-} \gamma^\alpha + \gamma_\alpha S^{q-} \gamma^\alpha S^{k-} \not{n}] = \\ & -(\not{p} - m) \left[\not{n} \left(\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2 (k \cdot n)} S^-(p - k) \right) \left(\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D q^2} \gamma_\alpha S^-(p - q) \gamma^\alpha \right) + \right. \\ & \quad \left(\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D q^2} \gamma_\alpha S^-(p - q) \gamma^\alpha \right) \left(\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2 (k \cdot n)} S^-(p - k) \right) \not{n} \Big] = \\ & -(\not{p} - m) [\not{n} S_1^- (i\Sigma_1^{F-}) + (i\Sigma_1^{F-}) S_1^- \not{n}], \end{aligned} \quad (3.147)$$

onde usamos que

$$-i\Sigma_1^F = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{-\eta_{\mu\nu}}{k^2} \right) \gamma^\mu S(p - k) \gamma^\nu = - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D k^2} \gamma_\nu S(p - k) \gamma^\nu. \quad (3.148)$$

Podemos aplicar as propriedades do traço para organizar os termos da (3.147) de forma mais conveniente

$$Tr\{-(\not{p} - m)[\not{n} S_1^- (i\Sigma_1^{F-}) + (i\Sigma_1^{F-}) S_1^- \not{n}]\} = Tr\{-i[(\not{p} - m)\not{n} S_1^- + S_1^- \not{n}(\not{p} - m)]\Sigma_1^{F-}\}, \quad (3.149)$$

que vale para $[(\not{p} - m)\Sigma_2^{(b+c)-}]$. Por analogia, a contribuição do termo $[\Sigma_2^{(b+c)+}(\not{p} + m)]$ é

$$Tr\{-i\Sigma_1^{F+}[(\not{p} + m)\not{n} S_1^+ + S_1^+ \not{n}(\not{p} + m)]\}. \quad (3.150)$$

Agora somando as (3.143), (3.144), (3.149) e (3.150) sem omitir o traço em nenhum dos termos, chegamos a contribuição total não invariante dos diagramas de dois loops do propagador do elétron em F_2 , ou seja

$$F_2^{2(n)} = Tr\{i[\Sigma_1^{F+}[(\not{p} + m)\not{S}_1^+ + S_1^+\not{p}(\not{p} + m)] + [(\not{p} - m)\not{S}_1^- + S_1^-\not{p}(\not{p} - m)]\Sigma_1^{F-}] - (\not{p} - m)\not{S}_1^-(\not{p} + m)S_1^- \not{p} - \not{S}_1^+(\not{p} - m)S_1^+ \not{p}(\not{p} + m)\}, \quad (3.151)$$

e se somamos esse termo com a contribuição de um loop dada pela (3.128), finalmente chegamos em

$$F_2^{(n)} = F_2^{1(n)} + F_2^{2(n)} = 0. \quad (3.152)$$

Dessa forma, provamos por meio do cálculo explícito que até dois loops, o polo do propagador fermiônico proposto na seção 3.4 é invariante para gauges axiais. E como vimos anteriormente, isso significa que a massa física obtida a partir do polo deste propagador também é invariante até dois loops.

4 | Interação de n Fótons em $(1+1)$ Dimensões

Continuando o trabalho, trataremos neste capítulo de um problema de teoria de campos a temperatura finita. Assim como no capítulo anterior, vamos analisar uma questão relacionada a QED, porém desta vez nosso estudo estará restringido ao espaço de $(1 + 1)$ dimensões.

Trabalhar com um espaço de dimensão menor que a nossa realidade pode não parecer muito útil a primeira vista, mas a partir da análise deste tipo de modelo, podemos compreender de uma maneira muito mais simples e fácil mecanismos e características importantes que também fazem parte das teorias mais complexas.

Nosso objetivo principal será demonstrar para este espaço bidimensional, usando o formalismo de tempo imaginário, que ao analisarmos a interação de n fótons para altas temperaturas, a parte térmica de todos os termos que contêm um ou mais loops têm contribuição total nula. Quando falamos de altas temperaturas significa que estamos na região dos *hard thermal loops* (usaremos a sigla HTL), onde a temperatura do sistema é alta o suficiente para que os termos de integração sejam muito maiores do que o efeito de campos externos e os efeitos da massa são praticamente desprezíveis no propagador fermiônico.

A demonstração desta questão já foi discutida e realizada em outros trabalhos [12, 13], porém usando o formalismo de tempo real. Por outro lado, com o formalismo de tempo imaginário, podemos entender de uma maneira mais clara o significado físico da questão, e usar a simetria CPT para mostrar que a contribuição dos diagramas com loops

é necessariamente nula.

4.1 Modelo de Schwinger

Dada a descrição do problema, podemos usar o modelo de Schwinger [11] para analisá-lo. Este modelo consiste na QED para um sistema de $(1 + 1)$ dimensões com férmions sem massa e pode ser resolvido exatamente.

Com relação aos férmions, a lagrangiana do modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(t, x) \gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(t, x)) \psi(t, x), \quad (4.1)$$

sendo que as matrizes de Dirac para o espaço de $(1 + 1)$ dimensões e suas principais propriedades estão descritas no apêndice C deste trabalho.

Uma maneira eficiente de tratar esta lagrangiana é usar a decomposição do campo spinorial [12, 16, 32]

$$\begin{aligned} \psi_E &= \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \gamma_3)\psi, & \psi_D &= \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma_3)\psi, & x^\pm &= \frac{x^0 \pm x^1}{2}, \\ p^\pm &= p^0 \pm p^1, & \partial^\pm &= \partial^0 \pm \partial^1, & A_\pm &= A_0 \pm A_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

e com essas novas variáveis a lagrangiana pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_D \\ &= \psi_E^\dagger (i\partial_- - eA_-) \psi_E + \psi_D^\dagger (i\partial_+ - eA_+) \psi_D, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde é importante notarmos que só é possível desacoplar a lagrangiana em dois termos devido a massa dos férmions ser nula.

Para temperatura zero, quando calculamos por exemplo a função de dois pontos, é preciso regularizar a integral e as duas partes da lagrangiana se misturam. Porém, a temperatura finita, estas divergências desaparecem e podemos tratar as duas partes da lagrangiana separadamente [12].

Poderíamos agora seguir o método que descrevemos no capítulo 2 e no apêndice A, adicionando fontes à densidade lagrangiana para obter funcional gerador das funções de Green [33], e assim por diante até chegarmos numa expressão para a ação efetiva da teoria.

Porém, este método é longo e calcular a ação efetiva a partir dele seria muito trabalhoso. Desta forma usaremos outro método, que descreveremos nas próximas seções e permite que a parte dependente da temperatura do funcional seja obtida de uma maneira mais rápida para o caso analisado.

4.2 Trabalhando com o Propagador

Agora que desacoplamos a lagrangiana em duas partes, vamos estudar os termos do lado direito da (4.3). Calculando a equação de Euler-Lagrange para ψ_D^\dagger correspondente a este termo temos

$$(i\partial_+ - eA_+)\psi_D = 0, \quad (4.4)$$

que na prática é a equação da QED sem massa e em uma dimensão para o campo ψ_D .

Podemos escrever a função de Green correspondente a essa equação, que é igual ao propagador fermiônico do campo fazendo

$$(i\partial_+ - eA_+)S_D = \delta(x^0)\delta(x^1) = \frac{\delta(x^+)\delta(x^-)}{2}, \quad (4.5)$$

sendo que para encontrar essa função de Green, podemos usar o conjunto das autofunções $\psi_D^{(n)}$ dadas por

$$(i\partial_+ - eA_+)\psi_D^{(n)} = \lambda_n\psi_D^{(n)}. \quad (4.6)$$

As soluções da (4.6) podem ser escritas como

$$\psi_D^{k,n}(x_+, x_-) \propto \exp \left[i \left(kx^- - \lambda_n x^+ - e \int_0^{x^+} A_+(x'^+, x^-) dx'^+ \right) \right], \quad (4.7)$$

onde o valor de x^- na integração é fixado e consideramos a transformação

$$\int dk e^{ikx^-} = 2\pi\delta(x^-), \quad (4.8)$$

que é conveniente para que possamos escrever o propagador na forma [25]

$$S_D(x^+, x^-) = \rho \int dk \sum_n \frac{\psi_D^{k,n}(x_+, x_-) \psi_D^{*k,n}(0, 0)}{\lambda_n}, \quad (4.9)$$

onde ρ é uma constante de normalização.

No formalismo de tempo imaginário, o propagador fermiônico também pode ser escrito como [12]

$$S(k, \tau) = \frac{i}{2\omega} \{ [\theta(\tau) - N_F(\omega)] e^{-\omega\tau} + [\theta(-\tau) - N_F(\omega)] e^{\omega\tau} \}, \quad (4.10)$$

onde $N_F(\omega)$ é a distribuição de Fermi-Dirac para férmions [4]

$$N_F(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}, \quad (4.11)$$

e tratando-se de férmions sem massa e $(1+1)$ dimensões, $\omega^2 = k^2$.

Esta função é anti-periódica para o intervalo $-\beta < \tau < 0$, mas não para o intervalo $0 < \tau < \beta$. Sendo assim, no nosso trabalho consideraremos que τ está no primeiro intervalo.

Impondo então as condições de anti-periodicidade

$$\psi_D(\tau) = -\psi_D(\tau + \beta), \quad S_D(\tau) = -S_D(\tau + \beta), \quad (4.12)$$

e considerando que para uma função qualquer

$$f(\tau, x) = f(x^+, x^-) \Rightarrow f(\tau + \beta, x) = f(x^+ + \beta/2, x^- + \beta/2), \quad (4.13)$$

podemos usar a (4.12) na (4.7) para chegarmos na igualdade

$$\begin{aligned} \exp \left\{ i \left[k \left(x^- + \frac{\beta}{2} \right) - \lambda \left(x^+ + \frac{\beta}{2} \right) - e \int_0^{x^+ + \beta/2} A_+ \left(x'^+, x^- + \frac{\beta}{2} \right) dx'^+ \right] \right\} = \\ - \exp \left[i \left(kx^- - \lambda_n x^+ - e \int_0^{x^+} A_+(x'^+, x^-) dx'^+ \right) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

que pode ser escrita na forma

$$e^{i(k-\lambda)\beta/2} = - \exp \left\{ ie \left[\int_0^{x^+ + \beta/2} A_+ \left(x'^+, x^- + \frac{\beta}{2} \right) dx'^+ - \int_0^{x^+} A_+(x'^+, x^-) dx'^+ \right] \right\}. \quad (4.15)$$

Fazendo agora a mudança de variável na primeira integral $x'^+ = x''^+ - \beta/2$ e usando que para n inteiro $(-1) = e^{-i\pi(2n+1)}$, temos que

$$\begin{aligned} e^{i(k-\lambda_n)\beta/2} = \exp \left\{ -i\pi(2n+1) + ie \left[\int_{-\beta/2}^{x^+} A_+ \left(x''^+ + \frac{\beta}{2}, x^- + \frac{\beta}{2} \right) dx''^+ \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^{x^+} A_+(x'^+, x^-) dx'^+ \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

e aplicando a condição de periodicidade para o campo de gauge $A_+(\tau) = A_+(\tau + \beta)$, podemos simplificar a expressão para

$$e^{i(k-\lambda_n)\beta/2} = \exp \left[-i\pi(2n+1) + ie \int_{-\beta/2}^0 A_+(x'^+, x^-) dx'^+ \right], \quad (4.17)$$

que nos leva a condição

$$\begin{aligned} \lambda_n &= k + \frac{2}{\beta} \left[(2n+1)\pi - e \int_{-\beta/2}^0 A_+(x'^+, x^-) dx'^+ \right] \\ &= k + \frac{2}{\beta} [(2n+1)\pi + ea_+(x^-)]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Isso significa que os autovalores dependem de x^- , o que não causa problemas para a (4.6), pois a derivada é em relação a x^+ .

Agora usando os resultados que obtemos para ψ e λ_n na (4.9), chegamos em

$$\begin{aligned} (i\partial_+ - eA_+)S_D &= \rho|\psi_D^0|^2 \int dk e^{ik(x^- - x^+)} \times \\ &\sum_n \exp \left\{ -i\frac{2x^+}{\beta} [(2n+1)\pi + ea_+(x^-)] - ie \int_0^{x^+} A_+(x'^+, x^-) dx'^+ \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Em seguida podemos usar a função delta periódica [25] definida por

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ix\pi n} = \tilde{\delta}(x), \quad (4.20)$$

e tomando $(x = 4x^+/\beta)$, substituímos essa expressão na (4.19), que fica proporcional a $\tilde{\delta}(x^+)$. Finalmente podemos escrever para $-\beta < \tau < 0$

$$(i\partial_+ - eA_+)S_D = \rho|\psi_D^0|^2 2\pi\delta(x^- - x^+) \frac{\beta}{2} \delta(x^+) = \pi\rho\beta|\psi_D^0|^2 \delta(x^+) \delta(x^-), \quad (4.21)$$

que comparando com a (4.5) resulta na relação

$$2\pi\rho\beta|\psi_D^0|^2 = 1. \quad (4.22)$$

A partir das (4.9), (4.18) e (4.22), temos que

$$\begin{aligned} S_D(0,0) &= \rho|\psi_D^0|^2 \sum_n \int \frac{dk}{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi\beta} \sum_n \int \frac{dk}{\lambda_n} \\ &= \frac{1}{2\pi\beta} \sum_n \int \frac{dk}{k + \frac{2}{\beta}[ea_+(0) + (2n+1)\pi]} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{k\beta}{2\pi} + \frac{ea_+(0)}{\pi} + (2n+1)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para resolver essa somatória devemos usar as seguintes relações [34]

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{4x}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - x^2}, \quad (4.24a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + (2n+1)} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad (4.24b)$$

e realizar a substituição

$$x = \frac{1}{2\pi} [k\beta + 2a_+(0)], \quad (4.25)$$

que aplicada na (4.23) nos leva a

$$S_D(0,0) = -\frac{1}{8\pi} \int dk \tan\left[\frac{k\beta}{4} + \frac{ea_+(0)}{2}\right]. \quad (4.26)$$

4.3 A Ação Efetiva do Sistema

Agora que encontramos o propagador para $(x, \tau) = (0, 0)$, é possível obter a ação efetiva deste sistema. Este método fornece o valor correto da ação efetiva apenas para a parte do funcional dependente da temperatura, mas como estamos interessados somente na análise dessas amplitudes, podemos utilizá-lo aqui sem complicações adicionais. Assim como em [12], vamos partir da equação

$$\frac{\delta\Gamma_D}{\delta A_+(\tau, x)} = e\beta^2 S_D(\tau, x; \tau, x), \quad (4.27)$$

e lembrando que

$$a_+(0) = -\int_{-\beta/2}^0 A_+(x'^+, 0) dx'^+, \quad (4.28)$$

é possível fazer uma pequena transformação de gauge tal que A_+ assuma o valor constante $(-2a_+/\beta)$. E assim, podemos usar essa transformação junto com as (4.26) e (4.27) para chegar em

$$\frac{\delta\Gamma_D}{\delta A_+(0)} = -\frac{\beta}{2} \frac{\delta\Gamma_D}{\delta a_+(0)} = -\frac{e\beta^2}{8\pi} \int dk \tan\left[\frac{k\beta}{4} + \frac{ea_+(0)}{2}\right]. \quad (4.29)$$

Fazendo a integração funcional em relação a $a_+(0)$, obtemos o seguinte resultado (normalizado para $\Gamma_D(a_+ = 0) = 0$)

$$\Gamma_D = \frac{e\beta}{4\pi} \int dk \int_0^{a_+} \tan\left[\frac{k\beta}{4} + \frac{ea'_+}{2}\right] da'_+, \quad (4.30)$$

e resolvendo a integral da tangente temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_D &= \frac{\beta}{2\pi} \int dk \left\{ \ln \left[\cos \left(\frac{k\beta}{4} \right) \right] - \ln \left[\cos \left(\frac{ea_+}{2} + \frac{k\beta}{4} \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{\beta}{2\pi} \int dk \ln \left[\cos \left(\frac{ea_+}{2} \right) - \tan \left(\frac{k\beta}{4} \right) \sin \left(\frac{ea_+}{2} \right) \right].\end{aligned}\quad (4.31)$$

Para tratar essa integral, faremos primeiro a substituição $k' = k\beta/4$ para simplificar a notação. Em seguida, para $-\infty < k' < 0$ faremos a substituição $k' \rightarrow -k'$, e assim chegamos na equação

$$\begin{aligned}\Gamma_D &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty dk' \ln \left[\cos \left(\frac{ea_+}{2} \right) - \tan(k') \sin \left(\frac{ea_+}{2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \ln \left[\cos \left(\frac{ea_+}{2} \right) + \tan(k') \sin \left(\frac{ea_+}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty dk' \ln \left[\cos^2 \left(\frac{ea_+}{2} \right) \right] + \ln \left[1 - \tan^2(k') \tan^2 \left(\frac{ea_+}{2} \right) \right] \right\},\end{aligned}\quad (4.32)$$

e podemos resolver a integral do segundo termo da última linha usando [34]

$$\int_0^{\pi/2} dk \ln[1 + q^2 \tan^2(k)] = \pi \ln(1 + \sqrt{q^2}), \quad (4.33)$$

onde para o nosso caso $q^2 = -\tan^2(ea_+/2)$ e podemos, usando a simetria da integração do quadrado da tangente, escrever o intervalo $0 < k' < \infty$ em N intervalos de tamanho $\pi/2$ com $N \rightarrow \infty$.

Dessa maneira, a segunda parte da (4.32) resulta em

$$\begin{aligned}2N \ln \left[1 + \sqrt{-\tan^2 \left(\frac{ea_+}{2} \right)} \right] &= 2N \ln \left[1 + \tan \left(\frac{ea_+}{2} \right) \sqrt{-1} \right] \\ &= -2N \ln \left[\cos \left(\frac{ea_+}{2} \right) \right] + 2N \ln \left[\exp \left(\frac{\sqrt{-1}ea_+}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk' -\cos^2 \left(\frac{ea_+}{2} \right) + 2 \ln \left[e^{(\sqrt{-1})ea_+/2} \right],\end{aligned}\quad (4.34)$$

e substituindo este resultado na (4.32), a ação efetiva é simplificada para

$$\Gamma_D = \frac{2ea_+}{\pi} \sqrt{-1} \int_0^\infty dk', \quad (4.35)$$

que é um resultado puramente imaginário. A integral diverge e claramente precisamos regularizar o funcional. Além disso, não faz sentido ele apresentar um valor imaginário

e $\sqrt{-1} = \pm i$. Dessa forma, podemos usar o valor principal para regularizar a conta e escrever

$$\Gamma_D = \frac{ea_+}{\pi} \int_0^\infty dk' [i + (-i)] = 0. \quad (4.36)$$

Por simetria temos

$$\Gamma_E = \frac{2ea_-}{\pi} \sqrt{-1} \int_0^\infty dk', \quad (4.37)$$

que também se anula da mesma forma.

A partir deste resultado podemos tirar uma conclusão direta: se o funcional gerador das funções 1PI é nulo, a soma das funções de Green 1PI geradas deve ser nula em todas as ordens.

4.4 Cálculo Perturbativo

Agora, vamos calcular explicitamente a função de dois pontos do fóton em 1 loop para mostrar que a contribuição é nula. Depois, generalizaremos o resultado para a função de $2n$ pontos. É fácil mostrar que as funções com um número ímpar de pontos são nulas devido a simetria por conjugação da carga [6]. Em duas dimensões, as matrizes de Dirac satisfazem algumas propriedades especiais [35], por exemplo

$$Tr(\gamma^{\mu_1} \not{a} \gamma^{\mu_2} \not{b} \gamma^{\mu_3} \not{c} \dots) = a_+ b_+ c_+ \dots u_-^{\mu_1} u_-^{\mu_2} u_-^{\mu_3} \dots + a_- b_- c_- \dots u_+^{\mu_1} u_+^{\mu_2} u_+^{\mu_3} \dots \quad (4.38)$$

onde a_\pm, b_\pm, \dots seguem a definição (4.2) e $u_\pm^{\mu_i} = (1, \pm 1)$ são vetores nas direções x^\pm respectivamente.

Começaremos pelo termo de um loop da função de dois pontos do fóton, que podemos ver na figura a seguir

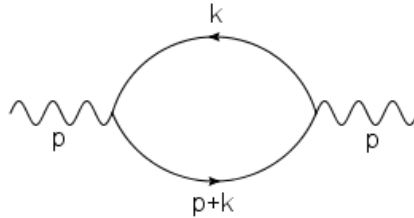


Figura 4.1: termo de um loop da função de dois pontos do fóton.

Podemos usar as regras de Feynman (lembrando que estamos tratando do diagrama com o formalismo de tempo imaginário [4]) e escrever

$$\Pi_{\mu\nu} = e^2 \sum_n \int \frac{dk_1}{(2\pi)} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{1}{\not{k}} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \right], \quad (4.39)$$

onde estamos somando as frequências de Matsubara

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T. \quad (4.40)$$

Utilizando o mesmo método que aplicamos no capítulo 2 para realizar as somas de Matsubara e as propriedades das matrizes gama (vide apêndice C), chegamos a seguinte equação para a parte do cálculo dependente da temperatura:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^T = 2e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [(k+p)_\mu k_\nu + (k+p)_\nu k_\mu - \eta_{\mu\nu} k \cdot (k+p)] \times \\ \left[\frac{2\pi N_F(k) \delta(k^2)}{(k+p)^2} + \frac{2\pi N_F(k+p) \delta((k+p)^2)}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Fazendo a substituição ($k \rightarrow -k - p$) no último termo da (4.41), obtemos

$$\Pi_{\mu\nu}^T = \frac{2e^2}{\pi} \int \frac{d^2k}{(k+p)^2} N_F(k) \delta(k^2) [(k+p)_\mu k_\nu + (k+p)_\nu k_\mu - \eta_{\mu\nu} k \cdot (k+p)]. \quad (4.42)$$

Podemos escrever de maneira conveniente a definição

$$k_\pm^\mu = (\eta^{\mu\nu} \pm \epsilon^{\mu\nu}) k_\nu, \quad (4.43)$$

que nos leva a relação

$$k_+^\mu (k+p)_+^\nu + k_-^\mu (k+p)_-^\nu = 2[k^\mu (k+p)^\nu + k^\nu (k+p)^\mu - \eta_{\mu\nu} k \cdot (k+p)], \quad (4.44)$$

e substituindo esta na (4.42) chegamos finalmente em

$$\Pi_{\mu\nu}^T = \frac{e^2}{\pi} \int \frac{d^2k}{(k+p)^2} N_F(k) \delta(k^2) [k_\mu^+ (k+p)_\nu^+ + k_\mu^- (k+p)_\nu^-]. \quad (4.45)$$

Como k é apenas o momento de integração do loop podemos fazer a substituição ($k \rightarrow -k$) sem alterar o resultado. Contudo, realizando essa substituição de forma a simetrizar a (4.45), simplificamos o nosso trabalho.

Primeiramente, escrevemos

$$\Pi_{\mu\nu}^T = \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{d^2k}{(k+p)^2} N_F(k) \delta(k^2) [k_\mu^+(k+p)_\nu^+ + k_\mu^-(k+p)_\nu^- + (k \rightarrow -k)], \quad (4.46)$$

que é equivalente a (4.45). Aqui devemos tomar cuidado com os índices spinoriais. Usando a (4.43) e os vetores u_\pm^μ definidos anteriormente, temos que

$$k_\mu^+ = k^+ u_\mu^-, \quad k_\mu^- = k^- u_\mu^+, \quad (4.47)$$

e substituindo na (4.46), chegamos em

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^T = \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{d^2k}{(k+p)^2} N_F(k) \delta(k^2) \times \\ [k^+(k+p)^+ u_\mu^- u_\nu^- + k^-(k+p)^- u_\mu^+ u_\nu^+ + (k \rightarrow -k)]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Agora precisamos utilizar as substituições

$$\delta(k^2) = \delta(k_+ k_-) = \frac{1}{2|k_0|} [\delta(k_+) + \delta(k_-)], \quad (4.49a)$$

$$(k+p)^2 = (k+p)_+ (k+p)_-, \quad (4.49b)$$

e aplicando-as na (4.48) obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^T &= \frac{e^2}{2\pi} \int d^2k N_F(k) \delta(k^2) \left[\frac{k^+}{(k+p)^-} u_\mu^- u_\nu^- + \frac{k^-}{(k+p)^+} u_\mu^+ u_\nu^+ + (k \rightarrow -k) \right] \\ &= \frac{e^2}{2\pi} \int d^2k \frac{N_F(k)}{2|k_0|} \left[\frac{k^+}{p^-} u_\mu^- u_\nu^- \delta(k^-) + \frac{k^-}{p^+} u_\mu^+ u_\nu^+ \delta(k^+) + (k \rightarrow -k) \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

e como os termos são ímpares em k , $\Pi_{\mu\nu}^T = 0$ devido a presença de $(k \rightarrow -k)$. Notem que fazer a transformação $(k \rightarrow -k)$ é equivalente a fazer $(p \rightarrow -p)$, e que tanto essa característica quanto a manipulação algébrica da (4.50) só existem devido a ausência de massa na teoria.

Percebam que todos os termos não nulos que escrevemos, como por exemplo cada parcela da (4.50) separadamente, são puramente reais. Isso está de acordo com a (4.35) valer zero, pois esta era puramente imaginária antes da regularização e após o procedimento, os termos imaginários desaparecem já que a ação efetiva só gera termos reais.

Dessa forma, usando as regras de Feynman chegamos a conclusão que para a teoria com férmions sem massa, o diagrama que estávamos analisando é equivalente a decompor a função de dois pontos na soma dos dois diagramas da figura 4.2 [13].

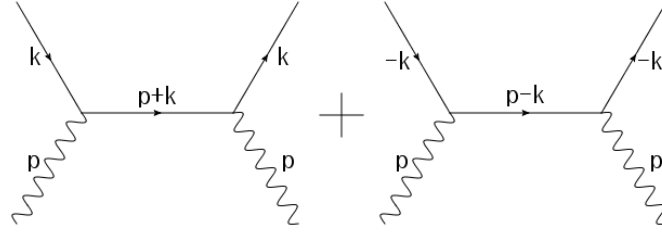
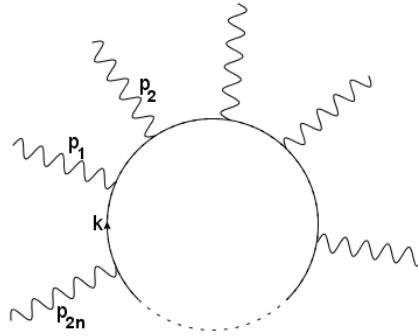


Figura 4.2: soma equivalente ao diagrama da figura 4.1.

Além disso, o fato do cancelamento dos termos já existir no nível do integrando também pode ser interpretado fisicamente. Como tratamos de partículas sem massa, a helicidade de cada partícula é conservada independente do referencial. Se juntamos essa propriedade à invariância sob conjugação da carga, chegamos a conclusão que uma partícula que se move com momento \vec{k} é equivalente a uma anti-partícula com momento $-\vec{k}$. Assim, quando somamos o efeito dos dois diagramas de espalhamento da figura 4.2, estes devem se anular.

Como já mencionamos antes, este resultado pode ser generalizado para $2n$ pontos. Vamos então seguir o mesmo procedimento para analisar o diagrama da figura 4.3. Primeiramente utilizaremos as regras de Feynman para escrever a expressão correspondente ao diagrama de $2n$ pontos.

Figura 4.3: função de $2n$ pontos.

$$\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n}}^{(2n)} = e^{2n} \sum_l \int \frac{dk_l}{(2\pi)} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{k}} \gamma_{\mu_1} \frac{1}{\not{k} + \not{p}_1} \gamma_{\mu_2} \dots \frac{1}{\not{k} + \not{p}_1 + \dots + \not{p}_{2n-1}} \gamma_{\mu_{2n}} \right], \quad (4.51)$$

onde consideramos que todos os fótons estão orientados na direção do loop, e portanto

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{2n} = 0. \quad (4.52)$$

Trabalhando com o integrando da (4.51) da mesma forma que fizemos na (4.41), chegamos a

$$\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n}}^{T(2n)} = 2e^{2n} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} f(k, p_1, p_2, \dots, p_{2n-1}) \left[\frac{2\pi N_F(k) \delta(k^2)}{(k + p_1)^2 \dots (k + p_1 + \dots + p_{2n-1})^2} + \dots + \frac{2\pi N_F(k + p_1 + \dots + p_{2n-1}) \delta((k + p_1 + \dots + p_{2n-1})^2)}{k^2 (k + p_1)^2 \dots (k + p_1 + \dots + p_{2n-2})^2} \right], \quad (4.53)$$

onde $f(k, p_1, p_2, \dots, p_{2n-1})$ é a função originada do produto de $2n$ matrizes gama e dos numeradores dos propagadores, e assim, carrega todos os índices spinoriais de $\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n}}^{T(2n)}$.

Aplicando o mesmo método que usamos para tratar o integrando da função de dois pontos encontramos termos do tipo

$$\frac{N_F(k_0)}{2|k_0|} \left\{ \frac{k^- \delta(k^+) u_{\mu_1}^+ \dots u_{\mu_{2n}}^+}{p_1^+ (p_1 + p_2)^+ \dots (p_1 + p_2 + \dots + p_{2n-1})^+} + \frac{k^+ \delta(k^-) u_{\mu_1}^- \dots u_{\mu_{2n}}^-}{p_1^- (p_1 + p_2)^- \dots (p_1 + p_2 + \dots + p_{2n-1})^-} \right\}, \quad (4.54)$$

que corresponde ao diagrama

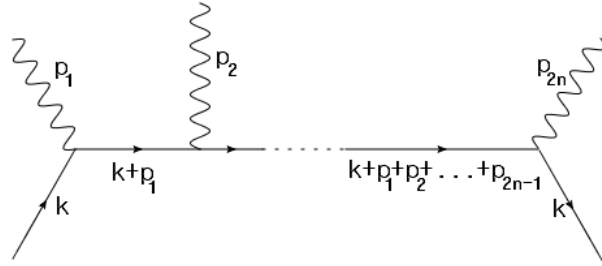


Figura 4.4: diagrama que é parte da decomposição da função de $2n$ fótons.

Quando somamos este termo com o equivalente fazendo $(k \rightarrow -k)$, a contribuição total é zero, pois ele é ímpar. Os outros termos da decomposição da função de $2n$ pontos em diagramas de espalhamento são as permutações cíclicas dos momentos p_i da figura acima, e conseqüentemente, tem o mesmo resultado. Sendo assim, a contribuição do loop de $2n$ pontos é zero.

5 | Interação de n Bósons na Gravitação Quântica

Neste capítulo vamos tratar do último problema que discutimos neste trabalho. Analisaremos a interação de n grávitons a altas temperaturas, ou seja, quando os termos de interação estão na região dos *hard thermal loops*, e portanto a influência da energia e momento dos campos externos são muito menores que a contribuição dependente da temperatura dos loops internos [3].

Nosso objetivo principal será obter uma expressão simples para encontrar as funções de n pontos e 1 loop derivadas da ação efetiva da gravitação quântica nos limites estático, onde os campos externos aos loops são independentes do tempo, e de comprimento de onda longo, onde os campos externos são independentes da posição. Em geral, as amplitudes geradas pelo funcional são funções não locais dos campos externos, porém nesses dois limites a dependência é local (e diferente para cada um dos casos) [14, 15]. Como nestes limites, funções de três ou mais pontos são nulas para a QED ou teorias de Yang-Mills [15], não precisamos nos preocupar com estes casos e por isso que restringimos nosso estudo a gravitação.

Para conseguir este objetivo, precisaremos usar as identidades de Ward [16], que são de certa forma equivalentes ao teorema de Noether para a teoria quântica de campos. Ou seja, para cada simetria do sistema podemos encontrar uma relação entre os termos de n pontos derivados do funcional gerador da teoria analisado, no nosso caso a ação efetiva. Usando essas identidades aliadas a invariância de gauge e sob transformações de Weyl, que estão associadas a invariância de escala da teoria [17], é possível relacionar as funções

de n e $n + 1$ pontos e encontramos uma forma simples de escrever estas funções.

5.1 Funções de n pontos

A gravitação quântica é uma teoria de campos não-abeliana cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ -\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right\}, \quad (5.1)$$

onde κ é um fator relacionado a constante gravitacional de Newton, g é o determinante da métrica do espaço e R é o escalar de Ricci e ϕ é um campo de uma partícula escalar de massa m .

Analisar todos os diagramas gerados a partir desta lagrangiana é uma tarefa complicada que não faremos neste trabalho. Ao invés disso, vamos utilizar o fato de que para os termos dominantes, a contribuição das funções de n pontos a altas temperaturas é a mesma para partículas escalares ou bósons de campo (como glúons na QCD ou grávitons no nosso caso) a menos de um fator constante \mathcal{C} (fator de Casimir) que depende apenas dos graus de liberdade da partícula em questão [36].

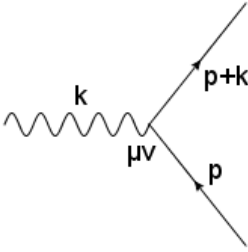
É importante ressaltar que estamos interessados apenas nos termos dominantes das funções. Como trabalhamos na região de altas temperaturas, podemos usar esta grandeza como parâmetro para avaliar se um termo é dominante ou não. Como já foi descrito em diversos trabalhos anteriores [36, 37, 38], no caso da gravitação quântica, os termos dominantes tem uma contribuição de $\mathcal{O}(T^4)$ e os termos correspondentes a loops com partículas fantasmas, quando fixamos um gauge, são de $\mathcal{O}(T^3)$, não participando do nosso cálculo.

Temos que definir uma maneira de representar a métrica do espaço. Utilizaremos a definição

$$(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h^{\mu\nu}$ o campo gravitacional, cuja ação sobre a métrica é calculada de forma perturbativa. A partir desta definição, como discutido em [36, 39], apenas temos que tratar de diagramas com vértices de uma linha bosônica e duas

escalares, cuja contribuição é dada por



$$= \frac{1}{2} [(k+q)_\mu q_\nu + (k+q)_\nu q_\mu]. \quad (5.3)$$

Sendo assim, tomando como exemplo as funções de dois e três pontos, precisamos apenas considerar os diagramas da figura abaixo:

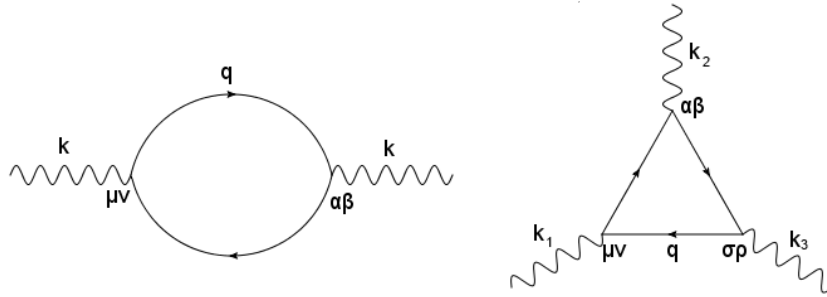


Figura 5.1: diagramas de $\mathcal{O}(T^4)$ das funções de 2 e 3 grávitons.

Notem que, assim como mencionamos anteriormente, tratamos as partículas internas dos loops como escalares. Além disso, cada vértice da teoria é associado a dois índices spinoriais. Podemos usar as regras de Feynman para o formalismo de tempo imaginário e escrever para as funções de dois e três pontos as seguintes expressões:

$$\Gamma^{[2]} = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^3 \vec{q} \int_C dq_0 N(q_0) t(k, q) \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+k)^2}, \quad (5.4a)$$

$$\Gamma^{[3]} = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^3 \vec{q} \int_C dq_0 N(q_0) t(k_1, k_2, k_3, q) \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+k_1)^2} \frac{1}{(q-k_3)^2}, \quad (5.4b)$$

onde para simplificar a notação suprimimos os índices spinoriais, $q = (1, \vec{q})$ é um quadri-vetor em que \vec{q} é o vetor unitário na direção do momento de integração dos loops e a função t é a parte do integrando que contém os termos com índices spinoriais.

Nós não realizaremos o cálculo dessas integrais explicitamente nesse trabalho, pois o cálculo é muito extenso e foge do propósito desta parte do trabalho. Além disso, em capítulos anteriores já realizamos integrações de funções correspondentes a diagramas com

loops e o leitor agora já deve estar familiarizado com o tipo de manipulação algébrica que estes cálculos demandam.

Dessa forma, para a auto-energia do gráviton, podemos aproveitar alguns trabalhos anteriormente citados [36, 37, 40] e utilizar o resultado

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}(k) = -\frac{\mathcal{C}\pi T^4}{2 \cdot 240} \int d\Omega \left\{ \frac{4k_0}{q \cdot k} + w - 5 \right\} q_\alpha q_\beta q_\mu q_\nu, \quad (5.5)$$

onde w é um fator que é igual ao número de índices spinoriais do termo que são iguais a zero.

Para o limite estático $k_0 = 0$ e podemos escrever

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S = -\frac{\mathcal{C}\pi T^4}{2 \cdot 240} \int d\Omega (w - 5) q_\alpha q_\beta q_\mu q_\nu, \quad (5.6a)$$

enquanto para o limite de comprimento de onda longo $\vec{k} = 0$ e chegamos em

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^L = -\frac{\mathcal{C}\pi T^4}{2 \cdot 240} \int d\Omega (w - 1) q_\alpha q_\beta q_\mu q_\nu. \quad (5.6b)$$

Com relação a função de três pontos, podemos usar os cálculos apresentados em [36], e escrever para os limites estático e de comprimento de onda longo

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma}^S = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{4 \cdot 240} \int d\Omega (w - 5)(w - 7) q_\alpha q_\beta q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma, \quad (5.7a)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma}^L = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{4 \cdot 240} \int d\Omega (w - 1)(w - 3) q_\alpha q_\beta q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma. \quad (5.7b)$$

Comparando as (5.6) e (5.7), podemos notar que existe uma similaridade na estrutura das funções de dois e três pontos nos dois limites. Como já dissemos anteriormente, nosso objetivo é encontrar uma expressão simples para as funções de n pontos nos dois limites. Nas próximas seções, falaremos sobre as identidades de Ward e da invariância de Weyl, para em seguida aplicá-las ao nosso problema relacionando as funções de dois e três pontos e, em seguida, generalizando a relação para as funções de n e $n + 1$ pontos nos dois limites.

5.2 Identidades de Ward

No capítulo 3 utilizamos as transformações BRST para chegar às identidades de Nielsen. Também pode-se usar este conjunto de transformações para chegar às identidades de Ward, que estão relacionadas a relações de conservação devido a simetrias nas

teorias de campo estudadas. No nosso caso, a simetria usada é a invariância da teoria sob transformações de gauge, que no contexto da gravitação quântica podem ser interpretadas como uma transformação de coordenadas [36].

Para usar as relações oriundas das transformações BRST precisamos primeiro fixar o gauge que estamos trabalhando. Como exemplo, podemos adotar a seguinte escolha:

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\xi} G_\mu G^\mu + \bar{c}_\mu (\delta G^\mu), \quad (5.8)$$

onde

$$G^\mu = \partial_\nu h^{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

ξ é o parâmetro fixador do gauge, c_μ e \bar{c}_μ são os campos fantasmas e δ indica a transformação BRST do termo entre parênteses. Note que aqui, diferente da notação que utilizamos anteriormente, já incluímos os campos fantasmas no termo fixador. As transformações BRST dos campos são dadas por

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial^\mu c^\nu + \partial^\nu c^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha c^\alpha + h^{\alpha\mu} \partial_\alpha c^\nu + h^{\alpha\nu} \partial_\alpha c^\mu - \partial_\alpha (c^\alpha h^{\mu\nu}), \quad (5.10a)$$

$$\delta \phi = -c^\alpha \partial_\alpha \phi, \quad (5.10b)$$

$$\delta c^\mu = -(\partial_\alpha c^\mu) c^\alpha, \quad (5.10c)$$

$$\delta \bar{c}^\mu = -\frac{1}{\xi} G^\mu. \quad (5.10d)$$

E assim como fizemos para a QED anteriormente, podemos definir

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{fix} + t h_\mu^\mu, \quad (5.11)$$

sendo que para a gravitação quântica, a teoria exige que adicionemos mais um termo para garantir que $\langle h^{\mu\nu} \rangle = 0$, ou seja o espaço plano é solução das equações de movimento, sendo que t é um parâmetro com dimensão de massa. Porém, como neste trabalho só estamos tratando de funções 1PI que não precisam dessa regularização, podemos tomar o limite $t \rightarrow 0$. [41]

É possível definir uma lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}_{tot} + \sum_F J_F F + \sum_{F \neq \bar{c}^\mu} J_{\delta F} \delta F + Q G_\mu \bar{c}^\mu, \quad (5.12)$$

onde F representa genericamente todos os campos da teoria (incluindo os fantasmas). J_F e $J_{\delta F}$ são as fontes dos campos e das transformações BRST dos campos respectivamente, enquanto Q é a fonte do último termo que adicionamos convenientemente a \mathcal{L}_{ef} pois é útil para encontrar as identidades.

Como \mathcal{L} e \mathcal{L}_{fix} são invariantes sob transformações BRST, a transformação da lagrangiana efetiva é dada por

$$\delta \mathcal{L}_{ef} = \sum_F J_F \delta F + Q \delta(G_\mu \bar{c}^\mu), \quad (5.13)$$

lembrando que as transformações BRST são nilpotentes.

Podemos a partir dessa lagrangiana definir um funcional gerador $Z[J]$ e escrever a relação análoga a (3.90) para a gravitação quântica

$$\delta Z[J] = \int \mathcal{D}F \left(i \int d^4x \sum_F J_F \delta F + Q \delta(G_\mu \bar{c}^\mu) \right) e^{i \int d^4x \delta \mathcal{L}_{ef}} = 0, \quad (5.14)$$

onde as transformações de cada um dos campos da teoria estão dadas na (5.10), e para um campo spinorial ou tensorial, a grandeza que escolhemos como fonte contém os índices spinoriais correspondentes de forma que $\delta \mathcal{L}_{ef}$ seja escalar.

Não mostraremos aqui toda a manipulação algébrica a partir dessas transformações para se encontrar as identidades de Ward da teoria, pois o cálculo é razoavelmente extenso e estamos mais interessados na aplicação dessas identidades propriamente ditas. Contudo, diversos trabalhos mostram que a teoria da gravitação quântica é invariante de gauge [16, 41, 42]. Além disso, apesar de nos passos anteriores não termos analisado efeitos térmicos, é importante ressaltar que as identidades de Ward se mantêm válidas seja a temperatura zero ou finita [16].

Para escrever a identidade de uma maneira conveniente, podemos primeiramente re-fazer todos os passos já apresentados no capítulo 3 de forma a chegar na seguinte forma para a ação efetiva da teoria

$$\Gamma[F] = W[J] - \int d^4x \left\{ \sum_F J_F F + Q G_\mu \bar{c}^\mu - \frac{1}{2\xi} G_\mu G^\mu + t h_\mu^\mu \right\}, \quad (5.15)$$

em que, como anteriormente, $W[J]$ é o funcional gerador das funções de Green conexas. Na realidade, na (5.15) as variáveis dos campos são os campos clássicos, que podem ser definidos como

$$F_{cl} = \frac{\delta W}{\delta J_F}, \quad (5.16)$$

e a partir da (5.15) também podemos escrever que

$$J_F = -\frac{\delta \Gamma}{\delta F_{(cl.)}}. \quad (5.17)$$

Para escrever a invariância de gauge (que neste caso pode ser também interpretada como uma transformação de coordenadas) das funções 1PI de forma conveniente para analisarmos a relação entre as funções de n e $(n+1)$ pontos usaremos a seguinte relação

$$\int d^4x \frac{\delta \Gamma}{\delta h^{\mu\nu}(x)} \delta h^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (5.18)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta h^{\mu\nu}(x) = & \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \chi^\nu + \eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \chi^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \chi^\alpha + \\ & h^{\mu\lambda}(x) \partial_\lambda \chi^\nu + h^{\nu\lambda}(x) \partial_\lambda \chi^\mu - \partial_\lambda (\chi^\lambda h^{\mu\nu}(x)), \end{aligned} \quad (5.19)$$

e χ^μ é uma pequena variação de x^μ .

Tomando agora a derivada funcional duas vezes (em $h^{\mu\nu} = 0$) da (5.18) e aplicando a transformação de Fourier podemos relacionar as funções de dois e três pontos no espaço dos momentos [36, 39]

$$\begin{aligned} (k_{1\lambda} \eta_{\mu\nu} - 2k_{1\mu} \eta_{\nu\lambda}) \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3) = & k_1^\rho \Gamma_\lambda^{\alpha\beta\sigma}(k_2) + k_1^\sigma \Gamma_\lambda^{\alpha\beta\rho}(k_2) + k_{2\lambda} \Gamma^{\alpha\beta\rho\sigma}(k_2) + \\ & k_1^\alpha \Gamma_\lambda^{\beta\sigma\rho}(k_3) + k_1^\beta \Gamma_\lambda^{\alpha\sigma\rho}(k_3) + k_{3\lambda} \Gamma^{\alpha\beta\rho\sigma}(k_3). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Essa é a relação principal com a qual trabalharemos. Claro que podemos encontrar relações equivalentes fazendo a permutação dos momentos externos. Vamos verificar como exemplo a validade desta relação no limite de comprimento de onda longo. Antes de mais nada, devemos lembrar que $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Além disso podemos simplificar a relação

omitindo os termos constantes em comum das funções de dois e três grávitons. Chegamos assim na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} (2k_{1\mu}\eta_{\nu\lambda} - k_{1\lambda}\eta_{\mu\nu})\frac{1}{2}\int d\Omega(w-1)(w-3)q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma = \\ k_1^\rho \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\sigma + k_1^\sigma \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho + k_1^\beta \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\alpha q^\rho q^\sigma + \\ k_1^\alpha \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\beta q^\rho q^\sigma - k_1^\lambda \int d\Omega(w-1)q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma, \quad (5.21) \end{aligned}$$

sendo que o lado esquerdo desta equação pode ser reescrito como

$$k_{1\mu} \int d\Omega(w-1)(w-3)q^\mu q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma - 2k_{1\lambda} \int d\Omega(w-1)q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma, \quad (5.22)$$

onde usamos que $q = (1, \vec{q})$, e devemos lembrar que \vec{q} é um vetor relacionado a direção do momento de integração cujo módulo é igual a 1, enquanto w é o número de índices spinoriais iguais a zero. Lembrando que estamos no limite de comprimento de onda longo ($\vec{k} = 0$), temos que

$$\begin{aligned} k_{10} \int d\Omega w(w-2)q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma = k_1^\rho \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\sigma + \\ k_1^\sigma \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho + k_1^\beta \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\alpha q^\rho q^\sigma + \\ k_1^\alpha \int d\Omega(w-1)q_\lambda q^\beta q^\rho q^\sigma + k_1^\lambda \int d\Omega(w-1)q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma, \quad (5.23) \end{aligned}$$

e essa é a expressão final que verifica a validade da identidade de Ward. Para verificar este resultado de maneira explícita precisamos verificar todos os possíveis valores para os índices spinoriais $(\alpha, \beta, \rho, \sigma, \lambda)$. Por exemplo se todos os índices forem iguais a zero, para a primeira integral $w = 5$, enquanto para as demais $w = 4$ e chegaremos na relação

$$15k_{10} \int d\Omega = 3k_1^0 \int d\Omega + 3k_1^0 \int d\Omega + 3k_1^0 \int d\Omega + 3k_1^0 \int d\Omega + 3k_{10} \int d\Omega, \quad (5.24)$$

onde a igualdade está evidentemente correta visto que $k_{10} = k_1^0$.

Já para o limite estático ($k_0 = 0$) encontramos

$$\begin{aligned} (2k_{1\mu}\eta_{\nu\lambda} - k_{1\lambda}\eta_{\mu\nu})\frac{1}{2}\int d\Omega(w-5)(w-7)q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma = \\ k_1^\rho \int d\Omega(w-5)q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\sigma + k_1^\sigma \int d\Omega(w-5)q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho + k_1^\beta \int d\Omega(w-5)q_\lambda q^\alpha q^\rho q^\sigma + \\ k_1^\alpha \int d\Omega(w-5)q_\lambda q^\beta q^\rho q^\sigma - k_1^\lambda \int d\Omega(w-5)q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma, \quad (5.25) \end{aligned}$$

cujo lado esquerdo pode ser reescrito como

$$k_{1i} \int d\Omega (w-5)(w-7) q^i q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma - 2k_{1\lambda} \int d\Omega (w-5) q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma, \quad (5.26)$$

o que nos leva a expressão final

$$\begin{aligned} k_{1i} \int d\Omega (w-5)(w-7) q^i q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma &= k_1^\rho \int d\Omega (w-5) q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\sigma + \\ &+ k_1^\sigma \int d\Omega (w-5) q_\lambda q^\alpha q^\beta q^\rho + k_1^\beta \int d\Omega (w-5) q_\lambda q^\alpha q^\rho q^\sigma + \\ &+ k_1^\alpha \int d\Omega (w-5) q_\lambda q^\beta q^\rho q^\sigma + k_1^\lambda \int d\Omega (w-5) q^\alpha q^\beta q^\rho q^\sigma, \end{aligned} \quad (5.27)$$

que é equivalente a (5.23) e deve também ser testada para todos os valores possíveis dos índices spinoriais.

Podemos também utilizar as identidades de Ward para relacionar as funções de um e dois pontos. Para tanto, primeiro precisamos escrever a função de dois pontos, que neste caso é a mesma nos dois limites [43]

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{240} \int d\Omega q^\mu q^\nu, \quad (5.28)$$

e para obtermos a identidade de Ward que relaciona as funções de um e dois pontos basta fazer a derivada funcional da (5.18) uma vez, o que no espaço dos momentos é escrito como

$$2k^\mu \Gamma_{\mu\lambda\alpha\beta}(k) - k_\lambda \Gamma_{\mu\nu\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} = -k_\alpha \Gamma_{\lambda\beta} - k_\beta \Gamma_{\lambda\alpha}, \quad (5.29)$$

que, como veremos mais adiante, pode ser simplificado na expressão

$$2k^\mu \Gamma_{\mu\lambda\alpha\beta}(k) = -k_\alpha \Gamma_{\lambda\beta} - k_\beta \Gamma_{\lambda\alpha} - k_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}. \quad (5.30)$$

Agora vamos fazer como no caso anterior e verificar essa identidade para os dois limites. No caso de comprimento de onda longo temos que

$$k_0 \int d\Omega w q_\lambda q_\alpha q_\beta = k_\alpha \int d\Omega q_\lambda q_\beta + k_\beta \int d\Omega q_\lambda q_\alpha + k_\lambda \int d\Omega q_\alpha q_\beta, \quad (5.31)$$

que deve ser verificada para todos os índices spinoriais (α, β, λ) possíveis.

Por exemplo, se todos os índices valem zero obtemos a igualdade

$$3k_0 \int d\Omega = k_0 \int d\Omega + k_0 \int d\Omega + k_0 \int d\Omega, \quad (5.32)$$

que evidentemente está correta.

Já para o limite estático vale a relação

$$k^i \int d\Omega (w - 5) q_i q_\lambda q_\alpha q_\beta = k_\alpha \int d\Omega q_\lambda q_\beta + k_\beta \int d\Omega q_\lambda q_\alpha + k_\lambda \int d\Omega q_\alpha q_\beta, \quad (5.33)$$

que também pode ser verificada para todos as combinações possíveis de índices. Por exemplo, seja $\alpha = \beta = 0$ e $\lambda = j \neq 0$, chegamos na relação

$$-3k^i \int d\Omega q_i q_j = k_j \int d\Omega, \quad (5.34)$$

igualdade essa fácil de verificar. Basta lembrar que $k^i = -k_i$, usar que a integral do lado esquerdo só não se anula quando $i = j$ e a relação

$$3 \int d\Omega q_i^2 = \int d\Omega = 4\pi. \quad (5.35)$$

Dessa forma verificamos que as funções de um, dois e três pontos obedecem a identidade de Ward gerada a partir da invariância de gauge. Para ir além podemos continuar derivando a (5.18) de forma a relacionar indefinidamente funções de n e $n + 1$ pontos. Porém, os cálculos tornam-se cada vez maiores, e complicados de entender o significado de cada termo. Assim, na próxima seção usaremos outro método para encontrar a forma das funções com mais de três gravitons.

5.3 Transformações de Weyl

Na seção anterior, utilizamos a invariância de gauge da teoria para obter uma relação entre as funções de até três gravitons. Nesta, utilizaremos outra simetria da nossa teoria, a invariância de escala, que vai nos levar às transformações de Weyl. A simetria de escala está relacionada a invariância das leis físicas com relação às dimensões das grandezas observadas.

Nosso universo não é invariante de escala, caso contrário seria impossível para alguém detectar uma invariância de escala a partir de um experimento físico. Por exemplo,

imagine uma pessoa com uma bola dentro de uma caixa sem contato com o meio externo. Suponha que esta pessoa pode medir as dimensões da bola com a maior precisão possível segundo as leis que regem nosso universo. Então, repentinamente, a caixa e todo seu interior encolhem de maneira proporcional. Se a pessoa dentro da caixa refizer as medidas das dimensões da bola, perceberá que a precisão do seu resultado será diferente da obtida anteriormente devido ao princípio da incerteza.

Porém, estamos trabalhando na região de altas temperaturas e desprezando o efeito da massa das partículas. Nesta aproximação, a invariância de escala da teoria é preservada. A transformação de Weyl é dada por

$$g^{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma(x)} g^{\mu\nu}, \quad (5.36)$$

onde $\sigma(x)$ é uma função escalar que depende apenas da posição no espaço. Também podemos usar a transformação [17]

$$(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} \rightarrow e^{(2-d)\sigma(x)}(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}, \quad (5.37a)$$

onde d representa a dimensão do espaço, no nosso caso

$$(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\sigma(x)}(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}. \quad (5.37b)$$

Se procuramos uma relação de identidade a partir da simetria com relação a essa transformação, podemos seguir o exemplo da (5.18) e partir da relação

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0, \quad (5.38)$$

sendo que definimos a transformação infinitesimal

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = (e^{-2\sigma(x)} - 1)(\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}), \quad (5.39)$$

e a partir dessa relação podemos simplificar a (5.38) para

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta h^{\mu\nu}}(\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) = 0, \quad (5.40)$$

que é a identidade com a qual podemos trabalhar tomando as derivadas funcionais, assim como fizemos com a (5.18) anteriormente. Fazendo a derivada da equação acima por $h^{\alpha\beta}$ em $h = 0$, chegamos em

$$\eta^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu\alpha\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta}, \quad (5.41)$$

resultado este que justifica a igualdade entre as (5.29) e (5.30).

Continuando, para escrever a função de n pontos, podemos adotar a seguinte notação

$$\Gamma_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n} = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{240} \int d\Omega C_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}(q, k_1, \cdots, k_n), \quad (5.42)$$

onde C é uma função que depende apenas dos momentos externos e do momento de integração. Porém, como já dissemos anteriormente, nos limites estático e de longo comprimento de onda as amplitudes de n pontos geradas não dependem dos momentos externos, sendo assim, para este trabalho podemos escrever

$$C_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}(q, k_1, \cdots, k_n) \rightarrow C_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}(q). \quad (5.43)$$

Além disso, em trabalhos anteriores [15, 17], utilizamos o fato de que estas identidades se mantêm válidas no nível do integrando, assim, para a (5.41), por exemplo, podemos também escrever

$$\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu\alpha\beta}(q) = -C_{\alpha\beta}(q), \quad (5.44)$$

que pode ser facilmente verificada nos dois limites. Para o caso estático, por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu\alpha\beta}^S(q) &= \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \right) (w-5) q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta \\ &= -\frac{1}{2} [(w-3)(q_0)^2 - (w-5)(\vec{q})^2] q_\alpha q_\beta \\ &= -q_\alpha q_\beta = -C_{\alpha\beta}^S(q). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Se derivamos duas vezes a (5.40) e analisamos no nível do integrando, obtemos

$$\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu\alpha\beta\rho\sigma}(q) = -2C_{\alpha\beta\rho\sigma}(q), \quad (5.46)$$

que evidentemente só pode ser escrita nessa forma pois estamos apenas levando em consideração estas relações nos dois limites estudados.

De qualquer maneira, podemos generalizar as (5.44) e (5.46). Assim, ao derivarmos n vezes a (5.40), podemos escrever a equação

$$\eta^{\mu_{n+1}\nu_{n+1}} C_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_{n+1}\nu_{n+1}}(q) = -nC_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}(q), \quad (5.47)$$

onde definimos

$$C_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}(q) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} P_n(w) q_{\mu_1\nu_1} \cdots q_{\mu_n\nu_n}, \quad (5.48)$$

em que $P_n(w)$ é o polinômio que pretendemos descobrir a forma de escrevê-lo para a função de n pontos nos dois limites. Usando as (5.6), (5.7) e (5.46), podemos escrever

$$P_3^S(w+2) - P_3^S(w) = 6(w-5)(w-7), \quad (5.49a)$$

$$P_3^L(w+2) - P_3^L(w) = 6(w-1)(w-3), \quad (5.49b)$$

e com o auxílio da (5.47) generalizarmos este resultado para

$$P_n^S(w+2) - P_n^S(w) = 2n(w-5)(w-7)\cdots(w-2n-1), \quad (5.50a)$$

$$P_n^L(w+2) - P_n^L(w) = 2n(w-1)(w-3)\cdots(w-2n+3). \quad (5.50b)$$

Finalmente, a partir da (5.50) e das outras equações citadas logo acima podemos escrever

$$P_1^S(w) = P_1^L(w) = 1, \quad (5.51a)$$

e para $n \geq 2$

$$P_n^S(w) = (w-5)\cdots(w-2n-1), \quad (5.51b)$$

$$P_n^L(w) = (w-1)\cdots(w-2n+3), \quad (5.51c)$$

que são os polinômios que queríamos descobrir.

5.4 Equação de Boltzmann

Apesar dos limites estático e de longo comprimento de onda tratarem-se de casos muito distintos, é notório que a estrutura das funções de n pontos nos dois limites é parecida. Para entender melhor o porquê destes polinômios serem similares, estudaremos o problema a partir de uma abordagem diferente da que seguimos até este ponto.

Com esse intuito, vamos primeiro nos recordar da equação de transporte de Boltzmann. Seja $f(x^\mu, p^\nu)$ uma função de distribuição de partículas onde

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (5.52)$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{dp^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{p^\mu}{m} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{dp^\mu}{d\tau}.\end{aligned}\quad (5.53)$$

A equação de movimento de uma partícula num campo gravitacional é dada por

$$m \frac{dp^\mu}{d\tau} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta, \quad (5.54)$$

onde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ é um símbolo de Christoffel, definido como

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}). \quad (5.55)$$

Substituindo a (5.55) na equação de Boltzmann, chegamos em

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{p^\mu}{m} \partial_\mu f + \frac{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{m} p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^\mu}, \quad (5.56)$$

sendo que se f é uma constante de movimento, $(df/d\tau) = 0$.

Todo este formalismo e os cálculos estão explicitados em trabalhos anteriores onde, trabalhando com essa equação, é possível encontrar para os limites estático e de comprimento de onda longo a seguinte forma para a ação efetiva [18]

$$\Gamma = \frac{\mathcal{N}\mathcal{C}}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4p \theta(P) N(P) \theta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu), \quad (5.57)$$

onde N é a função de distribuição das partículas térmicas (no caso escalares), P é uma constante de movimento e \mathcal{N} é um fator de normalização. Usando essa definição, o que diferencia se estamos tratando do caso estático ou de comprimento de onda longo é a constante de movimento. Para definir essas constantes, devemos lembrar que elas devem satisfazer a equação de Boltzmann e ser uma grandeza escalar com dimensão de momento (para ser coerente com $N(P)$).

Podemos verificar que tanto p_0 quanto p_i são soluções da equação de Boltzmann. Um princípio bastante conhecido para teorias descritas em função de uma lagrangiana é que a invariância dessa lagrangiana com relação a uma coordenada x^μ implica na conservação do momento canonicamente conjugado p^μ correspondente. Assim, no caso estático, onde

os campos externos independem do tempo, p_0 é conservado, e no limite de comprimento de onda longo, onde os campos externos independem da posição, os momentos p_i 's são conservados.

Portanto, temos que:

$$P^S = p_0, \quad P^L = \sqrt{p_i p_i}. \quad (5.58)$$

Vamos então trabalhar com a (5.57). Primeiramente vamos encontrar a relação entre as constantes de normalização dos dois limites. Para tanto, precisamos calcular as duas ações para o caso da partícula livre ($h = 0$) nos dois limites e igualar os resultados. Para o limite estático fazemos

$$\Gamma^S = \frac{\mathcal{N}^S \mathcal{C}}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4p \theta(p_0) N(p_0) \theta[(p_0)^2 - (\vec{p})^2], \quad (5.59)$$

enquanto para o limite de comprimento de onda longo

$$\begin{aligned} \Gamma^L &= \frac{\mathcal{N}^L \mathcal{C}}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4p \theta(\sqrt{p_i p_i}) N(\sqrt{p_i p_i}) \theta[(p_0)^2 - (\vec{p})^2] \\ &= \frac{\mathcal{N}^L \mathcal{C}}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4p N(|p_0|) \theta[(p_0)^2 - (\vec{p})^2], \end{aligned} \quad (5.60)$$

e como $\sqrt{p_i p_i} > 0$, a função θ torna-se redundante neste limite. A (5.60) é simétrica para $(p_0 \rightarrow -p_0)$, portanto para igualar as duas ações efetivas, precisamos que

$$\mathcal{N}^L = \frac{\mathcal{N}^S}{2}. \quad (5.61)$$

Para simplificar a notação, como nessa análise obteremos apenas resultados qualitativos, vamos assumir que $\mathcal{N}^S = 1$. Dando continuidade, podemos realizar os dois cálculos usando as substituições:

$$q_i = \frac{p_i}{P}; \quad |\hat{q}| = 1; \quad z = q_0 = \frac{p_0}{P}. \quad (5.62)$$

Aplicando as substituições na ação de Boltzmann para o limite de comprimento de onda longo encontramos

$$\Gamma^L = \frac{\mathcal{C}}{2(2\pi)^3} \int d^4x \int d\Omega \int dz \int_0^\infty dP P^3 N(P) \theta[(\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) q_\mu q_\nu], \quad (5.63)$$

e dessa forma podemos resolver as integrais separadamente. Para a variável P usamos que [34]

$$\int_0^\infty dP P^3 N(P) = \frac{\pi^4 T^4}{15}, \quad (5.64)$$

já com relação a função θ dentro do integrando temos que

$$\theta[(\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})q_\mu q_\nu] = \theta(z^2 - 1 + h^{00}z^2 + 2h^{0i}q_i z + h^{ij}q_i q_j), \quad (5.65)$$

onde $h^{i0} = h^{0i}$ e podemos definir

$$A = h^{00}; \quad B = h^{0i}q_i; \quad C = h^{ij}q_i q_j. \quad (5.66)$$

Normalizando Γ^L de forma que se anule para $h = 0$ e usando o fato de que para $z < 0$ podemos substituir $(z \rightarrow -z)$ e $(q_i \rightarrow -q_i)$ juntos, sem alterar o resultado, chegamos em

$$\Gamma^L = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{120} \int d^4x \int d\Omega \int_0^\infty dz [\theta(z^2 - 1 + Az^2 + 2Bz + C) - \theta(z^2 - 1)]. \quad (5.67)$$

Daqui em diante, vamos nos concentrar apenas na integral da variável z para entender a estrutura das funções de n pontos geradas a partir da derivação funcional de Γ^L pelo campo gravitacional. Para isso, vamos expandir a função θ em potências de $h^{\mu\nu}$. Por conveniência, fazemos a substituição $z = \sqrt{u}$, e chegamos então a relação

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dz [\theta(z^2 - 1 + Az^2 + 2Bz + C) - \theta(z^2 - 1)] = \\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty du \frac{1}{2\sqrt{u}} \delta^{(n-1)}(u-1) [Au + 2B\sqrt{u} + C]^n, \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde $\delta^{(n-1)}$ é a derivada de ordem $(n-1)$ da função delta de Dirac.

Note que quando calculamos as derivadas funcionais com relação ao campo gravitacional, os termos (A, B, C) são os únicos que dependem de $h^{\mu\nu}$. Além disso, $A = h^{00}$, B é proporcional aos termos de h com apenas um índice nulo e C é proporcional aos termos de h com dois índices não nulos, enquanto no termo entre colchetes estão multiplicados por $(u, \sqrt{u}, 1)$ respectivamente. Sendo assim, temos que

$$[Au + 2B\sqrt{u} + C]^n \propto u^{w/2}, \quad (5.69)$$

onde w é o número de índices nulos da derivação funcional.

Portanto, para o termo de enésima ordem

$$\frac{1}{2n!} \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{u}} \delta^{(n-1)}(u-1) [Au + 2B\sqrt{u} + C]^n \propto \frac{1}{2n!} \int_0^\infty du \delta^{(n-1)}(u-1) u^{\frac{w-1}{2}}, \quad (5.70)$$

sendo que podemos fazer a integração do lado direito por partes, o que nos leva a

$$\frac{1}{2n!} \int_0^\infty du \delta^{(n-1)}(u-1) u^{\frac{w-1}{2}} = \frac{1}{2n!} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} (w-1) \cdots (w-2n+3), \quad (5.71)$$

que é a mesma estrutura de $P_n^L(w)$. Vamos parar este cálculo por aqui, pois estamos apenas interessados em comparar qualitativamente a estrutura dos polinômios gerados pelos dois métodos, visto que o fator multiplicativo pode ser obtido da forma que fizemos nas seções anteriores.

Para o caso estático, temos que

$$\Gamma^S = \frac{\mathcal{C}}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4p \theta(p_0) N(p_0) \theta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu), \quad (5.72)$$

e podemos usar as mesmas substituições para chegar em

$$\Gamma^S = \frac{\mathcal{C}}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d\Omega \int_0^\infty dz \int_0^\infty dP P^3 N(zP) \theta[(\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) q_\mu q_\nu], \quad (5.73)$$

sendo que existe uma diferença na função de distribuição, cuja integração em relação a P dá

$$\int_0^\infty dP P^3 N(zP) = \frac{\pi^4 T^4}{z^4 15}, \quad (5.74)$$

e repetindo os passos do caso anterior obtemos

$$\Gamma^S = \frac{\mathcal{C} \pi T^4}{120} \int d^4x \int d\Omega \int_0^\infty \frac{dz}{z^4} [\theta(z^2 - 1 + Az^2 + 2Bz + C) - \theta(z^2 - 1)]. \quad (5.75)$$

Dessa forma, quando analisamos apenas a integração de z , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dz}{z^4} [\theta(z^2 - 1 + Az^2 + 2Bz + C) - \theta(z^2 - 1)] = \\ \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \int_0^\infty du \frac{1}{2u^{5/2}} \delta^{(n-1)}(u-1) [Au + 2B\sqrt{u} + C]^n, \end{aligned} \quad (5.76)$$

e usando a (5.69) encontramos

$$\frac{1}{2n!} \int_0^\infty du \frac{1}{u^{5/2}} \delta^{(n-1)}(u-1) [Au + 2B\sqrt{u} + C]^n \propto \frac{1}{2n!} \int_0^\infty du \delta^{(n-1)}(u-1) u^{\frac{w-5}{2}}, \quad (5.77)$$

e finalmente, assim como na (5.71), chegamos a

$$\frac{1}{2n!} \int_0^\infty du \, \delta^{(n-1)}(u-1) u^{\frac{w-5}{2}} = \frac{1}{2n!} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} (w-5) \cdots (w-2n-1), \quad (5.78)$$

que é a mesma estrutura de $P_n^S(w)$.

Dessa forma, fica mais claro o porquê de apesar dos limites representarem situações físicas completamente diferentes, os polinômios que fornecem as funções de n pontos nos dois casos têm formato tão parecido. No apêndice F mostramos como é possível, a partir da (5.57), obter um formato das ações efetivas nesses limites de maneira que fica mais fácil realizar as derivações funcionais. Como exemplo, mostramos o procedimento para o limite de comprimento de onda longo, porém algo semelhante pode ser feito para o caso estático.

6 | Conclusão

Neste trabalho abordamos alguns aspectos das teorias quânticas de campos. Nos dois primeiros capítulos revisamos conceitos importantes para o entendimento delas, principalmente com relação as características destas teorias a temperatura finita. Além disso, introduzimos e trabalhamos com o formalismo de tempo imaginário e com o conceito dos funcionais geradores das funções de Green de cada teoria. Isso nos forneceu a maior parte das ferramentas necessárias para trabalhar com os três problemas apresentados nos capítulos subsequentes.

Com relação a invariância da massa física do férmion na QED, mostramos que o propagador fermiônico usado geralmente para definir a massa física para gauges covariantes não funciona para gauges covariantes. Definimos um novo propagador e mostramos, com o auxílio das identidades de Nielsen, que a massa física obtida a partir do polo deste novo propagador não só funciona para gauges covariantes, como também para gauges axiais e também para qualquer gauge não covariante cujo termo fixador é oriundo de uma combinação linear dos termos fixadores dos gauges citados anteriormente, como o gauge de Coulomb.

Sobre a contribuição da parte térmica dos diagramas de um ou mais loops da QED de $1 + 1$ dimensões a altas temperaturas, conseguimos mostrar, usando o formalismo de tempo imaginário e o modelo de Schwinger, que a parte térmica da ação efetiva da teoria é nula. Portanto, a soma das contribuições das amplitudes causais retardadas geradas deve ser nula em todas as ordens.

Em seguida, através do cálculo perturbativo e das simetrias CPT, conseguimos entender a interpretação física do problema, onde ficou claro que no limite de altas temperat-

uras, desprezando a massa das partículas, a contribuição destes diagramas é equivalente a soma de diagramas de espalhamento frontal de partícula e anti-partícula. E como nesse limite não conseguimos distinguir uma partícula com momento \vec{k} da anti-partícula correspondente de momento $-\vec{k}$, a contribuição total dos diagrams é zero.

Por fim, com respeito a interação de n grávitons a altas temperaturas nos limites estático e de comprimento de onda longo, conseguimos, com o auxílio das identidades de Ward e Weyl e tratando a interação dentro dos loops como proporcional ao caso escalar, descobrir o formato dos polinômios que fornecem as funções de n pontos e um loop nos dois limites. Em seguida, usando o formalismo da equação de Boltzmann, pudemos obter a forma da ação efetiva para estes dois limites e entender a similaridade na estrutura dos polinômios obtidos para os dois casos. Futuramente, é possível estender este problema e tentar obter o funcional gerador para o caso geral da gravitação quântica a altas temperaturas.

Dessa forma, todos os trabalhos atingiram o objetivo que planejávamos, apresentando resultados positivos que foram publicados em periódicos científicos de expressão nos últimos anos [44, 45, 46].

A | Integrais Funcionais

Nessa seção vamos tratar as integrais funcionais, que na teoria quântica de campos são também chamadas muitas vezes de integrais de trajetória.

A.1 Definição e Propiedades

Seja $G[f]$ um funcional dependente de uma função $f(x)$. Definimos a integral funcional de G em relação de f aplicada entre um ponto inicial $f_a = f(x_a)$ e $f_b = f(x_b)$ da seguinte forma:

$$I = \int \mathcal{D}f G[f]. \quad (\text{A.1})$$

Onde

$$\mathcal{D}f = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^N \left(\frac{df(x_k)}{A} \right) \right], \quad (\text{A.2})$$

em que A é uma constante de normalização que depende de como definimos a condição de completude da integral. Dessa forma, temos:

$$\int \mathcal{D}f |f\rangle \langle f| = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N \left(\frac{df_k}{A} \right) |f_k\rangle \langle f_k| = 1. \quad (\text{A.3})$$

Assim, quando realizamos a integral (A.1), estamos integrando o funcional $G[f]$ de forma a considerar as contribuições de todas as trajetórias possíveis no domínio de x que levam f_a a f_b .

Sendo $F[f]$ e $G[f]$ dois funcionais dependentes da mesma função, podemos definir

$$\langle G \rangle = \frac{\int \mathcal{D}f G[f] F[f]}{\int \mathcal{D}f F[f]}, \quad (\text{A.4})$$

onde $\langle G \rangle$ é a média do funcional G no domínio em que o funcional F faz o papel de funcional-peso ou densidade. Se $F[f]$ for igual a 1 em todo domínio da integração, então $\langle G \rangle$ será igual a média do funcional G nesse domínio.

Vamos também enunciar a regra do produto para integrações funcionais:

$$\int \mathcal{D}f \frac{\delta G[f]}{\delta f} H[f] = G[f] H[f] \Big|_{f \rightarrow \infty} - \int \mathcal{D}f G[f] \frac{\delta H[f]}{\delta f} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Aplicação na Teoria de Campos

Primeiramente, vamos obter a amplitude de transição entre dois estados no formalismo de integrais de trajetória. Como exemplo, consideraremos um campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$.

Da mecânica quântica, sabemos que se no instante inicial t_0 , um sistema está num estado inicial $|\phi\rangle$, num instante t' , a partícula estará no estado $e^{-iH\Delta t}|\phi\rangle$, onde $\Delta t = t' - t_0$ e H é o hamiltoniano do sistema em questão. Nesse instante t' a amplitude de transição para um estado $|\phi'\rangle$ é dado por:

$$\langle \phi' | e^{-iH\Delta t} | \phi \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Podemos agora dividir esse intervalo de tempo Δt em n intervalos de tempo de duração ϵ e escrever:

$$\langle \phi' | e^{-iH\Delta t} | \phi \rangle = \int \left(\prod_{i=1}^n \mathcal{D}\phi_i \right) \langle \phi' | e^{-iH\epsilon} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \dots e^{-iH\epsilon} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \phi \rangle. \quad (\text{A.7})$$

Sendo $|\Pi\rangle$ o estado do momento conjugado ao estado $|\phi\rangle$, podemos definir a relação

$$\int \mathcal{D}\Pi |\Pi\rangle \langle \Pi| = 1, \quad (\text{A.8})$$

e inserir na (A.7)

$$\begin{aligned} \langle \phi' | e^{-iH\Delta t} | \phi \rangle = \int \left(\prod_{i=1}^n \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\Pi_i \right) & \langle \phi' | \Pi_n \rangle \langle \Pi_n | e^{-iH\epsilon} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \Pi_{n-1} \rangle \langle \Pi_{n-1} | \dots \\ & \dots | \Pi_1 \rangle \langle \Pi_1 | e^{-iH\epsilon} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Sabemos pela mecânica quântica que $\langle x|p\rangle = e^{ipx}$. O equivalente para teoria de campos é

$$\langle \phi|\Pi\rangle = \exp\left(i \int \Pi(x)\phi(x)d^{(D-1)}\vec{x}\right), \quad (\text{A.10})$$

onde D é a dimensão do espaço (\vec{x}, t) .

Além disso, para ϵ suficientemente pequeno podemos fazer $e^{-iH\epsilon} \approx 1 - iH\epsilon$, e daí temos que:

$$\begin{aligned} \langle \Pi_k|e^{-iH\epsilon}|\phi_k\rangle &\approx \langle \Pi_k|(1 - iH\epsilon)|\phi_k\rangle = \\ &= \exp\left(\int d^{(D-1)}\vec{x}[\Pi_k(x)\phi_k(x) + \epsilon\mathcal{H}(\Pi_k(x), \phi_k(x))]\right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Vale ressaltar que \mathcal{H} é a densidade hamiltoniana do sistema e depende dos autovalores dos estados de $\Pi_k(x)$ e $\phi_k(x)$ com relação ao hamiltoniano e não dos estados em si.

Podemos agora reescrever a (A.9), substituindo os resultados obtidos nas (A.10) e (A.11), para chegar a

$$\begin{aligned} \langle \phi'|e^{-iH\Delta t}|\phi\rangle &= \int \left(\prod_{i=1}^n \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\Pi_i\right) \delta[\phi - \phi_1] \times \\ &\times \exp\left\{i\epsilon \sum_{k=1}^n \int d^{(D-1)}\vec{x} \left[\Pi_k\left(\frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\epsilon}\right) - \mathcal{H}(\Pi_k, \phi_k)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde consideramos $\phi_{n+1} = \phi'$. Tomando agora os limites $n \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$ a somatória dos pequenos intervalos de tempo se transforma numa integral e obtemos:

$$\langle \phi'|e^{-iH\Delta t}|\phi\rangle = \int \mathcal{D}\Pi \int_{\phi(\vec{x}, t_0)=\phi}^{\phi(\vec{x}, t')=\phi'} \mathcal{D}\phi \exp\left[i \int_{t_0}^{t'} dt \left(\int d^{(D-1)}\vec{x} (\Pi \partial_t \phi - \mathcal{H})\right)\right]. \quad (\text{A.13})$$

A densidade lagrangiana de um campo escalar pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi), \quad (\text{A.14})$$

onde $V(\phi)$ é um potencial que depende das características do campo. O momento canonicamente conjugado ao campo é dado por

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi = \partial_t \phi, \quad (\text{A.15})$$

e, conseqüentemente, a densidade hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \partial_t \phi \Pi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) + V(\phi). \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a (A.16) na (A.13), chegamos a

$$\begin{aligned} \langle \phi' | e^{-iH\Delta t} | \phi \rangle &= \int \mathcal{D}\Pi \int \mathcal{D}\phi \times \\ &\times \exp \left[i \int_{t_0}^{t'} dt \left(\int d^{(D-1)} \vec{x} \Pi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) - V(\phi) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

o que nos leva a uma integral gaussiana em Π . Completando os quadrados temos:

$$\begin{aligned} \langle \phi' | e^{-iH\Delta t} | \phi \rangle &= \int \mathcal{D}\Pi \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_0}^{t'} dt \left(\int d^{(D-1)} \vec{x} \times \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. (-1/2) ((\Pi - \partial_0 \phi)^2 - (\partial_0 \phi)^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) - V(\phi) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\Pi \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_0}^{t'} dt \int d^{(D-1)} \vec{x} \left(-\frac{1}{2} (\Pi - \partial_0 \phi)^2 + \mathcal{L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Seja \hat{K} , um operador qualquer, a integral funcional Gaussiana tem como resultado [21, 23]

$$\int \mathcal{D}\Pi \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{t_0}^{t'} dt \int d^{(D-1)} \vec{x} \Pi \hat{K} \Pi \right] = \frac{\rho}{\det \hat{K}}. \quad (\text{A.19})$$

No nosso caso aplicamos a substituição $\Pi \rightarrow \Pi' = \Pi - \partial_0 \phi$, $\hat{K} = 1$ e ρ é um fator de normalização. Além disso, a ação clássica $S[\phi]$ é dada por

$$S[\phi] = \int_{t_0}^{t'} dt \int d^{(D-1)} \vec{x} \mathcal{L}. \quad (\text{A.20})$$

Usando estes resultados na (A.18), temos que:

$$\langle \phi' | e^{-iH\Delta t} | \phi \rangle = \rho \int_{\phi}^{\phi'} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}. \quad (\text{A.21})$$

A função de partição no ensemble grande canônico é dada por

$$Z = Tr(e^{-\beta(H-\mu N)}) = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi | e^{-\beta(H-\mu N)} | \phi \rangle, \quad (\text{A.22})$$

e fazendo as substituições $H \rightarrow H - \mu N$, $i\Delta t \rightarrow \beta$ e $idt \rightarrow d\tau$, chegamos a um resultado equivalente a (A.21):

$$Z = \rho \int_{[\phi]} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^{D-1} \vec{x} (\mathcal{L} + \mu \mathcal{N}) \right\}. \quad (\text{A.23})$$

Aqui \mathcal{N} é a densidade do número de partículas e $[\phi]$ representa o conjunto dos estados periódicos. Podemos interpretar $e^{-\beta(H-\mu N)}$ como o operador de evolução no formalismo de tempo imaginário.

B | Diagramas de Feynman

Os diagramas de Feynman são muito utilizados no estudo das teorias quânticas de campos, pois são uma forma simples e prática de escrever as interações entre as partículas de uma teoria, além de ajudar na interpretação do fenômeno analisado e seus resultados. Nesta seção, enunciaremos as regras de Feynman para teorias de campos que utilizamos neste trabalho, a teoria $\lambda\phi^4$ e em seguida a eletrodinâmica quântica. Todos os diagramas apresentados no trabalho adotam a convenção da seta do tempo se mover da esquerda para a direita, ou seja, os termos mais a esquerda num diagrama são anteriores aos termos mais a direita.

B.1 Teoria $\lambda\phi^4$

Para esta teoria, tratamos apenas de um tipo de partícula, proveniente de um campo escalar real. Inicialmente enunciaremos as regras de Feynman, que relacionam os diagramas e a expressão algébrica correspondente, no espaço das posições e mostraremos um exemplo. Em seguida, faremos o mesmo no espaço dos momentos.

Devemos lembrar que para essa teoria a lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (\text{B.1})$$

Seguem as regras de Feynman da teoria $\lambda\phi^4$ que usamos para o espaço das posições:

- A evolução temporal do diagrama é da esquerda para a direita (eventos a esquerda ocorrem antes de efeitos a direita)
- Uma linha contínua ligando os vértices x e y corresponde ao propagador $i\Delta_F(x - y)$

- Para cada vértice interno do diagrama multiplicar a expressão por um fator $-i\frac{\lambda}{4!}$
- Integrar em função de todos os pontos correspondentes a vértices intermediários
- Um loop ligado a um só vértice z corresponde a um termo $i\Delta_F(z-z) = i\Delta_F(0)$
- Calcular o fator combinatório do diagrama

Como exemplo de aplicação destas regras, vamos analisar o diagrama abaixo:

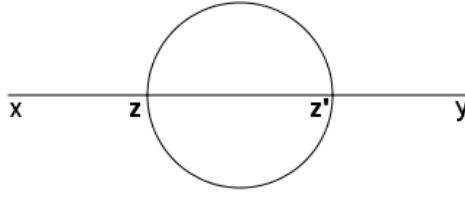


Figura B.1: exemplo de função de dois pontos.

Usando as quatro primeiras regras listadas acima temos que o diagrama corresponde a seguinte expressão

$$C \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \iint d^D z d^D z' [i\Delta_F(x-z)][i\Delta_F(z-z')]^3 [i\Delta_F(y-z')], \quad (\text{B.2})$$

onde C é o fator combinatório do diagrama.

Para calcular este fator devemos notar que cada um dos vértices internos é conectado a quatro segmentos do diagrama, pois neste caso o termo de interação é de ordem quatro. Podemos então imaginar que cada vértice contem quatro “pontos de conexão”, que se conectam às linhas do diagrama. Quando permutamos as conexões entre os pontos de conexão e as linhas, geramos diagramas equivalentes.

Além disso, os vértices internos são indistinguíveis, assim podemos permutar os pontos z e z' . Finalmente, devemos lembrar que os diagramas estão sendo gerados a partir da expansão de um exponencial (vide (2.18) e (2.20)), sendo assim, para obter C, precisamos dividir o número de combinações possíveis do diagrama por $n!$, onde n é a ordem da interação e, portanto, é igual ao número de vértices internos do diagrama.

No nosso caso, podemos conectar o vértice x a oito pontos de conexão diferentes (pois podemos permutar z e z'). Em seguida, podemos conectar y a um dos quatro pontos

correspondentes ao outro vértice interno e finalmente existirão $3!$ maneiras de conectar os dois vértices através dos pontos de conexão restantes. Além disso, neste caso $n = 2$.

Assim, chegamos em:

$$C = \frac{8 \times 4 \times 3!}{2!} = 4 \times 4!. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo este resultado na (B.2), concluimos que o diagrama da figura B.1 é equivalente a expressão

$$\frac{(-i\lambda)^2}{6} \iint d^D z \, d^D z' [i\Delta_F(x - z)][i\Delta_F(z - z')]^3 [i\Delta_F(y - z')]. \quad (\text{B.4})$$

Para o espaço dos momentos devemos seguir outro conjunto de regras:

- A evolução temporal do diagrama é da esquerda para a direita
- Uma linha contínua com um índice de momento p corresponde ao propagador $i\Delta_F(p)$
- Impor a conservação do momento (D-dimensional) em cada vértice do diagrama
- Para cada vértice interno do diagrama multiplicar a expressão por um fator $-i\frac{\lambda}{4!}$
- Para cada loop fechado integrar em função do momento associado a este loop
- Calcular o fator combinatório do diagrama

Como exemplo vamos analisar o seguinte diagrama

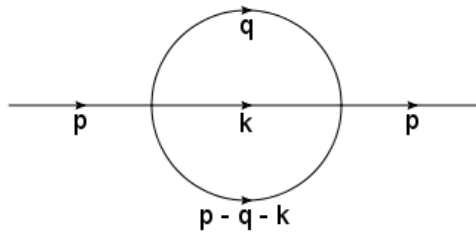


Figura B.2: função de dois pontos no espaço dos momentos.

Este diagrama é equivalente ao exemplo anterior, porém agora escrito no espaço dos momentos.

Usando as regras listadas e lembrando que já calculamos o fator combinatório deste diagrama anteriormente, chegamos em

$$\frac{(-i\lambda)^2}{6} [i\Delta_F(p)]^2 \iint \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} [i\Delta_F(q)][i\Delta_F(k)][i\Delta_F(p-q-k)], \quad (\text{B.5})$$

onde o fator $(2\pi)^{-2D}$ é devido a normalização da transformada de Fourier.

B.2 Eletrodinâmica Quântica

Nesta teoria, trabalhamos com três tipos de partículas, um férmion (elétron), o anti-férmion correspondente (pósitron) e um bóson (fóton). Como já vimos ao longo do trabalho, a lagrangiana da QED para o campo fermiônico é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\not{A}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.6})$$

Seguem as regras de Feynman que usamos para a QED:

- A evolução temporal do diagrama é da esquerda para a direita
- Para cada vértice devemos associar um índice vetorial μ e multiplicar a expressão por um fator $ie\gamma^\mu$
- Impor a conservação do momento (D-dimensional) em cada vértice do diagrama
- Uma linha interna contínua com uma seta na direção do fluxo do tempo corresponde ao propagador de um elétron
- Uma linha interna contínua com uma seta na direção oposta ao fluxo do tempo corresponde ao propagador de um pósitron
- Uma linha interna ondulada corresponde ao propagador de um fóton $iD_{\mu\nu}(p)$
- Para cada elétron inicial, devemos multiplicar a expressão por um fator $\bar{u}_i(p)$
- Para cada elétron final, devemos multiplicar a expressão por um fator $u_i(p)$
- Para cada pósitron inicial, devemos multiplicar a expressão por um fator $v_i(p)$

- Para cada pósitron final, devemos multiplicar a expressão por um fator $\bar{v}_i(p)$
- Para cada loop fechado integrar em função do momento associado a este loop
- Para cada loop fechado formado apenas por propagadores fermiônicos multiplicar a expressão por um fator (-1)
- Calcular o fator combinatório do diagrama

Podemos escrever o propagador fermiônico (e o anti-fermiônico) como

$$\overrightarrow{\psi\psi} = \bullet \xrightarrow{\mathbf{p}} \bullet = iS(p). \quad (\text{B.7})$$

Como exemplo vamos analisar o diagrama a seguir:

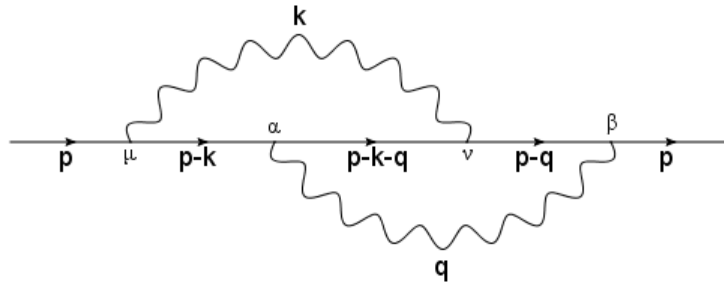


Figura B.3: exemplo de função de dois pontos na QED.

Usando as regras listadas acima e excluindo as linhas externas temos:

$$\Sigma(p) = C(ie)^4 \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{d^D q}{(2\pi)^{2D}} (i)^5 D_{\mu\nu}(k) D_{\alpha\beta}(q) \gamma^\beta S(p-q) \gamma^\nu S(p-q-k) \gamma^\alpha S(p-k) \gamma^\mu, \quad (\text{B.8})$$

onde C é o fator combinatório do diagrama.

Para calcular este fator devemos notar que para a QED os três campos do termo de interação são diferentes, portanto não precisamos nos preocupar com a permutação dos “pontos de conexão” dos vértices.

Porém, precisamos ainda considerar as permutações possíveis entre os vértices no diagrama. Neste caso, é fácil ver que podemos permutar todos os vértices sem restrição e obter $4!$ diagramas idênticos. Dividindo esse valor por $4!$ (devido a ordem de interação desse diagrama ser 4) chegamos em $C = 1$.

C | Matrizes de Dirac

Nesta seção vamos enunciar algumas propriedades das matrizes de Dirac (também conhecidas como matrizes gama), que são utilizadas para trabalhar com teorias de campos spinoriais num espaço de Minkowski.

Primeiramente mostraremos algumas relações que envolvem essas matrizes para um número arbitrário de dimensões, e em seguida trataremos mais especificamente dos casos de $(1 + 1)$ e $(3 + 1)$ dimensões.

C.1 Matrizes de Dirac em D Dimensões

Seja γ^μ uma matriz quadrada, onde $\mu = 0, 1, \dots, (D-1)$ é um índice spinorial, definimos que as matrizes de Dirac devem satisfazer a relação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad (\text{C.1})$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é um elemento da métrica de Minkowski onde usamos a assinatura $(+, -, -, \dots, -)$.

Da equação acima temos que

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{I}. \quad (\text{C.2})$$

As matrizes gama também obedecem a condição de hermiticidade

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\text{C.3})$$

e podemos obter as matrizes de Dirac covariantes fazendo

$$\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu, \quad (\text{C.4})$$

e das duas equações anteriores é evidente que

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma_0 = \gamma^0. \quad (\text{C.5})$$

Vamos também definir as contrações

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = D\mathbb{I}, \quad (\text{C.6})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -(D-2)\gamma^\nu. \quad (\text{C.7})$$

Seja a^μ e b^ν vetores quaisquer de D dimensões do espaço de Minkowski, definimos

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu, \quad (\text{C.8})$$

que chamamos de “*a slash*” e obedece as propriedades

$$\not{a}\not{a} = a^2, \quad (\text{C.9})$$

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2(a \cdot b). \quad (\text{C.10})$$

Além disso, de forma análoga a (C.7), temos que

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -(D-2)\not{a}. \quad (\text{C.11})$$

Outras matrizes importantes que podemos definir a partir das matrizes de Dirac são

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad (\text{C.12})$$

$$\gamma^{D+1} = i\gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{D-1}. \quad (\text{C.13})$$

Seja \mathcal{C} a matriz de conjugação da carga, vale a relação

$$\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^T. \quad (\text{C.14})$$

Para um campo spinorial ψ , como os que encontramos na QED, é comum usar a notação

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{C.15})$$

Com relação ao traço, temos

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad (\text{C.16})$$

$$\text{Tr}(\sigma^{\mu\nu}) = 0, \quad (\text{C.17})$$

e para D par também é válido que

$$\text{Tr}(\gamma^{D+1}) = 0. \quad (\text{C.18})$$

C.2 Matrizes de Dirac em (1+1) Dimensões

Em $(1+1)$ dimensões ($D=2$), escolhemos duas das matrizes de Pauli como matrizes de Dirac. Podemos definir, por exemplo

$$\gamma^0 = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = i\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.19})$$

e com isso temos que

$$\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1 = -i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

Por definição, todas as (C.1-C.18) são válidas para $(1+1)$ dimensões e em particular notamos que

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = 0. \quad (\text{C.21})$$

Também vale que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\nu} \gamma^3, \quad (\text{C.22})$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o símbolo de Levi-Civita ($\epsilon^{01} = 1$).

C.3 Matrizes de Dirac em (3+1) Dimensões

Em $(3+1)$ dimensões existem diversas maneiras de definir as matrizes de Dirac. Neste trabalho escolhemos

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.23})$$

e temos que

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

Além das (C.1 - C.18), também vale para este caso

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4\eta^{\alpha\beta} \mathbb{I}, \quad (\text{C.25})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\alpha, \quad (\text{C.26})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = 2(\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\rho). \quad (\text{C.27})$$

Analogamente

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4(a \cdot b), \quad (\text{C.28})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a}, \quad (\text{C.29})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu = 2(\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + \not{c} \not{b} \not{a} \not{d}). \quad (\text{C.30})$$

Para o traço valem as identidades

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4\eta^{\alpha\beta}, \quad (\text{C.31})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu}), \quad (\text{C.32})$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b}) = 4(a \cdot b), \quad (\text{C.33})$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]. \quad (\text{C.34})$$

Além disso, para n ímpar vale

$$\text{Tr}(\gamma^{i_1} \gamma^{i_2} \dots \gamma^{i_n}) = 0. \quad (\text{C.35})$$

Com respeito a γ^5 , vale

$$\text{Tr}(\gamma^5) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha) = 0, \quad (\text{C.36})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{C.37})$$

D | Álgebra de Grassmann

Hermann Grassmann desenvolveu uma álgebra de variáveis anticomutantes cuja estrutura tornou-se uma ferramenta matemática importante no estudo de sistemas com propriedades antissimétricas como as teorias de campos fermiônicos. Nesta seção enunciaremos algumas propriedades básicas dos elementos dessa álgebra usadas neste trabalho.

Sejam z_1 e z_2 dois elementos dessa álgebra

$$\{z_1, z_2\} \equiv z_1 z_2 + z_2 z_1 = 0. \quad (\text{D.1})$$

Uma consequência direta desse fato é que

$$\{z_i, z_i\} = 0 \Rightarrow z_i^2 = 0, \quad (\text{D.2})$$

o que nos leva a

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} = 1 + z_1. \quad (\text{D.3})$$

Uma função polinomial qualquer $f(z)$ sempre pode ser escrita da forma

$$f(z) = a + bz, \quad (\text{D.4})$$

onde a e b são constantes escalares. Para duas variáveis

$$f(z_1, z_2) = a + bz_1 + cz_2 + dz_1 z_2, \quad (\text{D.5})$$

e esse formato pode ser estendido para um número de variáveis n qualquer.

Pode-se definir uma variável de Grassmann complexa

$$z = z_1 + iz_2, \quad z^* = z_1 - iz_2, \quad (\text{D.6})$$

e temos que

$$z^* z = 2iz_1 z_2. \quad (\text{D.7})$$

Em geral, um spinor fermiônico de dimensão D é constituído por D componentes de Grassmann complexas.

E | Integral D-dimensional de $\frac{1}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2}$

Nesta seção avaliaremos as integrais da seguinte forma

$$\int d^D k \frac{1}{(n \cdot k)^2 k^{2m}}, \quad (\text{E.1})$$

onde n^μ é o vetor axial, k^μ é o momento correspondente ao loop que está sendo integrado e m é um número inteiro qualquer.

Essa integração vale zero e daremos duas justificativas para isso, uma matemática e uma física.

Antes de mais nada é preciso lembrar que o termo $1/(n \cdot k)^2$ que analisamos no trabalho está implicitamente regularizado, sendo assim, não existem divergências ou descontinuidades na integração. Dessa forma, após a integração o único parâmetro restante no cálculo é o vetor axial. Como mencionado no capítulo 3, apesar de não ser necessário, costuma-se escolher a dimensão de n^μ igual a do momento. Dessa forma, a dimensão total da integral acima é

$$d = D - 2m - 4, \quad (\text{E.2})$$

em unidades de massa.

Após a integração, o resultado obviamente deve manter a mesma dimensão. Como n^μ é o único termo algébrico que nos resta para representar a integração, o resultado será proporcional a n^d .

Porém o resultado da integração não pode depender da transformação

$$n^\mu \rightarrow c n'^\mu, \quad (\text{E.3})$$

onde c é uma constante não nula qualquer.

Isso só é válido se $d = -2$, caso contrário a integração é nula. Para $d = -2$, $D = 2m+2$, o que significa um número inteiro para D . Mesmo que nosso espaço tenha dimensão igual a $(2m + 2)$, quando realizamos a regularização dimensional da integração, passamos a integrar em uma dimensão não inteira. Sendo assim, na prática a integral (E.1) é nula qualquer que seja o valor de D .

Fisicamente, podemos argumentar que a (E.1) corresponde a uma integração proporcional ao propagador do campo fantasma para o gauge axial. No gauge covariante o propagador do fóton tem mais graus de liberdade do que observamos fisicamente para a polarização do fóton e os loops dos campos fantasmas cancelam o efeito dessas polarizações não físicas. No nosso caso, ao analisarmos a (3.15), temos que o propagador apresenta $(D - 2)$ graus de liberdade, assim como esperamos para os graus de polarização do fóton em D dimensões. Assim, a contribuição dos campos fantasmas deve ser nula e assim, a integral (E.1) vale zero.

F | Ação de Boltzmann

Para o limite de comprimento de onda longo vamos partir de

$$\Gamma^L = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{240} \int d^4x \int d\Omega \int dz \theta[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}q_\mu q_\nu] - \theta[\eta^{\mu\nu}q_\mu q_\nu], \quad (\text{F.1})$$

em que o segundo termo do integrando tem a função de normalizar o funcional tal que ele seja nulo quando $h = 0$.

A condição imposta pela função θ para o integrando não se anular é

$$g^{\mu\nu}q_\mu q_\nu = g^{00}z^2 + (g^{0i} + g^{i0})zq_i + g^{ij}q_i q_j > 0, \quad (\text{F.2})$$

onde $g^{0i} = g^{i0}$. Assumindo $g^{00} > 0$, devemos procurar as raízes de

$$g^{00}z^2 + 2g^{0i}zq_i + g^{ij}q_i q_j = 0, \quad (\text{F.3})$$

que são dadas por

$$z^\pm = -\frac{g^{0i}q_i}{g^{00}} \pm \sqrt{\left(\frac{g^{0i}q_i}{g^{00}}\right)^2 - \frac{g^{ij}q_i q_j}{g^{00}}}. \quad (\text{F.4})$$

Dessa forma, a integração em z pode ser dividida em duas partes

$$\Gamma^L = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{240} \int d^4x \int d\Omega \left[\int_{-\infty}^{z^-} dz + \int_{z^+}^{\infty} dz - \int_{-\infty}^{-1} dz - \int_1^{\infty} dz \right], \quad (\text{F.5})$$

que pode ser simplificada na integral

$$\begin{aligned} \Gamma^L &= \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{240} \int d^4x \int d\Omega (z^- - z^+ - 2) \\ &= -\frac{\mathcal{C}\pi T^4}{120} \int d^4x \int d\Omega \left\{ \sqrt{\left(\frac{g^{0i}q_i}{g^{00}}\right)^2 - \frac{g^{ij}q_i q_j}{g^{00}}} - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

que é a forma utilizada para obter as funções de n pontos a partir das derivadas funcionais com relação ao campo gravitacional [15, 36, 38].

Também é possível fazer um procedimento similar para a ação efetiva no limite estático, que resulta na expressão

$$\Gamma^S = \frac{\mathcal{C}\pi T^4}{90} \int d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}^2} - 1 \right], \quad (\text{F.7})$$

resultado que foi obtido de maneira detalhada em [18].

Referências Bibliográficas

- [1] A. Das, Finite Temperature Field Theory. World Scientific, Singapore, 1997.
- [2] Faqir C. Khanna, Adolfo P. C. Malbouisson, Jorge M. C. Malbouisson, Ademir R. Santana. Thermal quantum field theory - Algebraic aspects and applications, 2009.
- [3] Michel Le Bellac. Thermal Field Theory. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996.
- [4] J. I. Kapusta e Charles Gale. Finite-temperature field theory: Principles and applications. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006.
- [5] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber. Quantum Field Theory. McGraw-Hill International Book Co., 1980.
- [6] Michael E. Peskin e Dan V. Schroeder. An introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley Publishing Co., 1995.
- [7] R. Tarrach, Nucl. Phys. B183, 384 (1981). L. J. Reinders e K. Stam, Phys. Lett. B195, 465 (1987). N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe e K. Schilcher, Z. Phys. C48, 673 (1990). J. C. Breckenridge, M. J. Lavelle e T. G. Steele, Z. Phys. C65, 155 (1995). A. S. Kronfeld, Phys. Rev. D58, 051501 (1999).
- [8] L. S. Brown, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992.
- [9] N. K. Nielsen, Nucl. Phys. 101, 173 (1975).

- [10] C. A. Becchi, A. Rouet e R. Stora, *Comm. Math. Phys.* 42, 127 (1975); *Ann. Phys.* (N.Y.) 98, 287 (1976).
- [11] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 128, 2425 (1962).
- [12] A. Das e J. Frenkel, *Phys. Rev. D* 80, 125039 (2009).
- [13] F. T. Brandt, A. Das, J. Frenkel e A. J. da Silva, *Phys. Rev. D* 59, 105011 (1999).
- [14] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, Singapore, 2008.
- [15] Silvio R. Salinas, *Introdução à Física Estatística*. Edusp, SP, Brasil, 1997.
- [16] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. *Quantum Mechanics*, vol. 1, Wiley-Interscience, 1973.
- [17] Marcelo Otávio C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*. Edusp, SP, Brasil, 2002.
- [18] F. Mandl e G. Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons Ltd., 1984.
- [19] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd Ed.. Cambridge University Press, 1996.
- [20] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, 2nd Ed.. Perseus Groups Book, 1988.
- [21] Eugene Butkov, *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Publishing Co., 1968.
- [22] G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.* 59 (1987), 1067. A. Bassetto, G. Nardelli e R. Soldati. *Yang-Mills Theories in Algebraic Non-Covariant Gauges*. World Scientific, Singapore, 1991.
- [23] Jorge C. Romão, *Advanced Quantum Field Theory*, 2006.
- [24] J. Frenkel, *Phys. Rev. D* 13, 2325 (1976).
- [25] H. Pagels, *Phys. Rev. D* 15, 2091 (1977). W. Konetschny, *Nuovo Cim.* 44 A, 465 (1978).

- [26] Chris Dohan e Anthony Lasenby. Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [27] L. D. Faddeev e V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. Phys. Lett. B25, 29-30 (1967).
- [28] A. Das e S. Perez, Phys. Rev. D 70, 065006 (2004).
- [29] David Lurié, Particles and Fields. Interscience Publishers (part of John Wiley & Sons Ltd.), New York, London, Sydney, 1968.
- [30] I. S. Gradshteyn e I. M. Rhyzik, Table of Integrals, Series and Products, 7th Ed.. Elsevier Inc., 2007.
- [31] A. Das e A. J. da Silva, Phys. Rev. D 59, 105011 (1999). S. G. Maciel e S. Perez, Phys. Rev. D 78, 065005 (2008).
- [32] J. Frenkel e J. C. Taylor, Nucl. Phys. B 334 (1990) 199; Nucl. Phys. B 374 (1992) 156. E. Braaten, R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B 337 (1990) 569; Nucl. Phys. B 339 (1990) 310. J. Frenkel, S. H. Pereira, N. Takahashi, Phys. Rev. D 79 (2009) 085001.
- [33] F. T. Brandt, J. Frenkel e J. C. Taylor, Nucl. Phys. B 814 (2009), 366.
- [34] F. T. Brandt, J. Frenkel e J. C. Taylor, Nucl. Phys. B 374 (1992), 169-182.
- [35] J. Frenkel e J. C. Taylor, Z. Phys. C 49 (1991), 515.
- [36] F. T. Brandt e J. Frenkel, Phys. Rev. D 47 (1993), 4688.
- [37] A. Rebhan, Nucl. Phys. B 351 (1991), 706.
- [38] D. M. Capper, G. Leibbrandt e M. R. Mendrano, Phys. Rev. D 8 (1973), 4320.
- [39] F. T. Brandt e J. Frenkel, Phys. Rev. D 48 (1993), 4940.
- [40] I. Antoniadis, J. Iliopoulos e T. N. Tomaras, Nucl. Phys. B 267 (1986), 497.
- [41] B. de Wit e R. Gastmans, Nucl. Phys. B 128 (1977), 294.

- [42] F. T. Brandt e J. Frenkel, Phys. Rev. D 58 (1998), 085012.
- [43] F. T. Brandt, J. Frenkel e J. C. Taylor, Nucl. Phys. B 437 (1995), 433.
- [44] Ashok K. Das, R. R. Francisco e J. Frenkel, Phys. Rev D 88, 085012 (2013).
- [45] Ashok K. Das, R. R. Francisco e J. Frenkel, Phys. Rev. D 86, 047702 (2012).
- [46] R. R. Francisco e J. Frenkel, Phys, Lett B 722, 157-159 (2013).