Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Coreografias no Problema de N Corpos

Gabriela Iunes Depetri

Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção do tí-
tulo de Mestre em Ciências

Comissão examinadora:

Alberto Saa (IMECC – UNICAMP)

Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza (IFUSP)

Marcus Aloizio Martinez de Aguiar (IFGW – UNICAMP)

São Paulo
2011

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Depetri, Gabriela Iunes

Coreografias no Problema de N Corpos.

São Paulo, 2011.

Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo.
Instituto de Física — Departamento de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Sistemas Dinâmicos (Física Matemática);
2. Mecânica Clássica; 3. Gravidade; 4. Física Matemática.

USP/IF/SBI-019/2011

Agradecimentos

“Dance is the hidden language of the soul.”

– Martha Graham.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu irmão William, por todo o apoio durante todos esses anos. Obrigada pelas risadas, pelos sorvetes em horas inusitadas, pelas conversas e televisão até altas horas, e por me acompanhar a filmes estranhos em sessões de cinema, digamos... alternativas... Ah, e sim, não se preocupe, eu te perdôo pelo antigo hábito de jogar todas as almofadas da casa em mim só pra fugir das lições de casa quando nós éramos crianças! Agradeço aos meus pais por me amarem e sempre quererem o que é melhor pra mim. Obrigada por terem me ensinado a ser uma pessoa responsável. Obrigada por acreditarem em mim, pelo investimento nos cursos de inglês e francês, pelas aulas de ballet, dança moderna e contemporânea e jazz, e por não me colocarem pra estudar bateria (imaginem só!). Obrigada por me tornarem quem eu sou.

Agradeço ao meus avós William e Zilda, por terem formado uma família muito unida, e por terem me apoiado incondicionalmente nos momentos em que eu mais precisei deles. À Vóva, obrigada pelos infinitos chás e lanchinhos no fim da tarde e, principalmete, por fazer a melhor comida do mundo! E ao Gidinho, obrigada por cuidar de cada um dos netos com prioridade máxima na sua extensa lista de tarefas, e por nunca deixar de ir a feira às terças-feiras impreterivelmente no horário do almoço. Agradeço também à minha vó Leo, que mesmo de longe nunca deixa de lembrar de nós.

Agradeço também aos meus primos Jorge, Bianca, Fábio, Mayara e Bruna pela infância feliz que eu tive ao lado deles e pelos bons amigos que eles se tornaram agora que nós crescemos. Agradeço aos meus tios Deise e Jorge, que são também os meus vizinhos. À tia Deise, obrigada pelos (muitos!) conselhos, pelo carinho, pela amizade, e pelas recomendações médicas! Ao tio Jorge, obrigada por me ensinar a ir ao teatro e a ouvir música brasileira, pelos guarda-chuvinhas de chocolate que eu ficava esperando todos os dias, e pelo emprego na HydraFire. Agradeço aos meus tios Diane e Ivo, que infelizmente me apoiaram de longe durante o meu mestrado. À minha querida madrinha, obrigada por servir de exemplo pra mim,

por mesmo de longe estar sempre presente, e pela sua amizade. Como você faz falta aqui! Ao tio Ivo, muito obrigada pelas viagens que você me proporcionou.

Agradeço de uma forma muito especial a um professor que eu conheci antes mesmo de entrar na USP, num seminário de divulgação sobre os 100 anos da Relatividade na Unicamp. Ao professor Alberto Saa, obrigada por todas as dicas acadêmicas desde então e, mais tarde, depois de alguma (muita!) insistência, por ter aceitado me orientar durante o mestrado e, agora, durante o doutorado. Obrigada por este projeto de pesquisa e por ter me passado um pouquinho do seu conhecimento.

Agradeço à minha querida professora do colegial Ana Maria, por ter sido a responsável pela minha escolha profissional. Obrigada por ter me inspirado, pelo incentivo e por ter se tornado uma amiga. Agradeço às minhas professoras de ballet Isabel Mano, que me introduziu à técnica Graham, e Lissandra Berdugo, que mudou a forma como eu entendo o ballet clássico. Obrigada por me ensinarem o valor da disciplina e da determinação, por terem acreditado em mim, e também pela paciência com atrasos e faltas quando necessário.

Agradeço aos meus grandes amigos (irmãos!) de tantos anos, Thiago (Thiba), Luiz Leandro e Diego. Apesar do pouco tempo que temos para nos encontrar, eu sei que posso contar com vocês pra qualquer coisa. Agradeço também às minhas amigas bailarinas Luciana, Nádia, Flavinha, Giu, Vanessa, Fábria, Gabi Strauss e Gabi Torres. Agradeço também aos amigos da faculdade, Elisa, Leo, Paulo, Vinão, Flávio, Thiago (Tio), Alexandra e Denise, por terem tornado mais divertido o árduo caminho da graduação.

Finalmente, agradeço ao Dani pelo apoio e por cuidar de mim. Obrigada pelo carinho e pela paciência (importante!). Obrigada pelas valiosas discussões e pela ajuda com L^AT_EX.

Agradeço à Fapesp pelo apoio financeiro durante esta pesquisa.

Resumo

“ All that is important is this one moment in movement. Make the moment important, vital and worth living. Do not let it slip away unnoticed and unused.”

– Martha Graham (1894-1991, EUA), precursora da dança moderna, coreógrafa e fundadora da Martha Graham Dance Company.

O objetivo deste trabalho é a obtenção numérica de soluções periódicas para o problema geral de N corpos sujeitos apenas à atração gravitacional mútua. Em particular, procuramos soluções chamadas de *coreografias*, que apresentam em comum a propriedade de que todos os corpos se movem sobre a mesma curva. O interesse neste tipo de solução aumentou muito recentemente devido aos avanços na Física das ondas gravitacionais. Com a possível detecção de ondas gravitacionais prevista para um futuro próximo, todas as configurações periódicas do problema de N corpos passam a ser consideradas como possíveis fontes de radiação gravitacional. Identificar os padrões de radiação associados a estas órbitas é uma das tarefas prementes atualmente na área. Tendo isso em vista, iremos calcular também as ondas gravitacionais emitidas por um sistema em que os corpos que o constituem seguem uma órbita coreográfica.

Começamos este trabalho com um capítulo que descreve historicamente a busca pela solução geral do problema de N corpos, inicialmente motivada pelo interesse na análise da estabilidade do Sistema Solar. Em seguida, no Capítulo 2, apresentamos as principais definições e teoremas que serão utilizados ao longo do texto. O leitor pode escolher entre seguir este capítulo no início de sua leitura, ou então utilizá-lo para consulta quando necessário. No Capítulo 3, identificamos os graus de liberdade do sistema formado pelos N corpos e determinamos quais grandezas físicas nele se conservam, através do Teorema de Noether. Com isso estabelecemos a não integrabilidade deste sistema, no sentido de Liouville, para $N > 2$. Escrevemos também a solução geral do problema de dois corpos, conhecido como problema de Kepler, e mostramos duas soluções particulares para o problema de três corpos com massas iguais, conhecidas como soluções de Euler (1765) e Lagrange (1772). Na solução de Euler, os três corpos estão dispostos

sobre uma mesma reta que gira com velocidade angular constante ao redor do seu centro de massa, e na de Lagrange, estão dispostos sobre os vértices de um triângulo equilátero que gira com velocidade angular constante ao redor do seu centro de massa.

Com o intuito de descrever as soluções periódicas conhecidas para o Problema de N Corpos, no Capítulo 4 estudaremos as órbitas homográficas, que apresentam a característica de que a configuração do sistema em qualquer instante pode ser obtida através de uma rotação composta com uma dilatação/contração da configuração inicial. Essas soluções generalizam as soluções de Euler e Lagrange citadas anteriormente. No Capítulo 5, analisaremos as órbitas coreográficas. Esta classe de soluções foi descoberta por Cris Moore em 1993, que encontrou numericamente uma solução coreográfica para o problema de três corpos em que eles seguem uma mesma curva em forma de oito. A existência e a estabilidade desta solução foram estudadas de maneira rigorosa por Richard Montgomery e Alain Chenciner. Neste trabalho, damos um esboço de como construir a solução em forma de oito no caso em que as massas são idênticas. Simularemos esta e outras órbitas coreográficas, além de algumas outras órbitas periódicas descritas anteriormente, através do método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem. Finalmente, no Capítulo 6 calculamos as ondas gravitacionais emitidas pelas órbitas homográficas e coreográficas simuladas anteriormente. Finalizaremos com uma breve discussão comparando os padrões de ondas gravitacionais obtidos para as diferentes órbitas e analisando a possibilidade de determinar a fonte de emissão a partir da medida de um sinal de uma onda gravitacional.

Abstract

“All that is important is this one moment in movement. Make the moment important, vital and worth living. Do not let it slip away unnoticed and unused.”

– Martha Graham (1894-1991, USA), pioneer of modern dance, choreographer and founder of the Martha Graham Dance Company.

The purpose of this work is the numerical computing of the periodic solutions to the N -body problem, that is, the general problem of determining the motion of N bodies exclusively subject to gravitational forces between them. In particular, we search for solutions that were named choreographies, which have in common the property that all bodies move along the same curve. The interest in this kind of solution has recently increased due to technological advances in Gravitational Wave (GW) Physics. As the detection of Gws is foreseen for the near future, all periodic configurations of the N -body problem may be considered as possible sources of gravitational radiation. Identifying the patterns of radiation associated to these orbits is nowadays one of the pressing tasks in this field. Having this fact in mind, we calculate the GWs emitted by a system in which all bodies describe a choreographic orbit.

In Chapter 1, we briefly describe the history of the search for the general solution to the N -body Problem, initially motivated by the interest in the stability analysis of the Solar System. Next, in Chapter 2, we present the main definitions and theorems to which we refer during this text. The reader may opt between following this chapter as he begins to read this thesis and consulting it only if necessary or when he is referred to. In Chapter 3, we identify the degrees of freedom of the system consisting of N bodies and determine the physical quantities it conserves, through Noether’s theorem. Doing that, we establish the non-integrability of our dynamical system, in the sense of Liouville integrability, if $N > 2$. We also give the general solution to the 2-body problem, known as Kepler’s Problem, and present two particular solutions to the 3-body Problem, known as Euler’s solution (1765) and Lagrange’s solution (1772). In Euler’s solution, all three bodies are in the same line, which revolves around its center of mass, and in Lagrange’s solu-

tion they are at the vertices of an equilateral triangle, which also revolves around its center of mass.

In order to describe all known periodic solutions to the N -body Problem, in Chapter 4 we study homographic orbits, that is, orbits in which the configuration at any instant can be obtained by a rotation and a dilation/contraction of the initial configuration. These solutions generalize the solutions by Euler and Lagrange mentioned above. In Chapter 5, we analyze choreographic orbits. This class of solutions was discovered by Cris Moore in 1993, who computed numerically a choreographic solution in which the bodies move along the same curve in the shape of an “eight”. The existence and stability of this orbit were rigorously studied by Richard Montgomery and Alain Chenciner. Here, we sketch the construction of the figure eight solution in the particular case where all masses are identical. We simulate this and other choreographic solutions, as well as some other periodic solutions described before, through the use of a fourth order Runge-Kutta method of numerical integration. Finally, in Chapter 6 we calculate the Gws emitted by the homographic and choreographic orbits simulated before. We end this work with a brief discussion comparing the GW patterns obtained to different orbits and analyzing the possibility of determining the emission source from a measurement of a GW signal.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
1 Breve histórico do problema	1
2 Definições e teoremas úteis	9
2.1 Definições gerais	9
2.2 Teorema de Noether	13
2.3 Órbitas homográficas	16
2.4 Órbitas coreográficas	18
3 Descrição do problema	19
3.1 Possíveis formulações para o problema	19
3.2 Simetrias e leis de conservação	21
3.3 O Problema de 2 corpos	26
3.4 O Problema de 3 corpos	29
4 Soluções Homográficas	35
4.1 Lagrangiana para soluções homográficas	37
4.2 Movimento homográfico colinear	40
4.3 Movimento homográfico plano	40
4.4 Movimento homográfico espacial	43
4.5 Conclusões a respeito das soluções homográficas	44
4.6 Como gerar uma solução homográfica	47
5 Soluções Coreográficas	49
5.1 A solução em forma de oito	49
5.2 Simulações numéricas	58

6	Emissão de ondas gravitacionais por órbitas coreográficas	71
6.1	Equações de Einstein linearizadas	72
6.2	Geração de ondas gravitacionais	78
6.3	Simulações numéricas	81
7	Comentários finais	87
A	Integrador pra o problema de N-corpos	91
A.1	O Método de Runge-Kutta	91
A.2	Código	93
B	Equação do desvio geodésico	101
	Índice Remissivo	106

Lista de Figuras

1.1	Soluções de Euler e Lagrange para o problema de três corpos.	2
1.2	Cenário em que ocorre uma pseudocolisão numa possível solução para o problema de 3 corpos. Figura extraída de [1].	3
1.3	Construção de Mather e McGehee para o problema de 4 corpos em que é possível fazer o momento de inércia divergir a tempo finito, provocando assim o escape dos corpos do sistema. Figura extraída de [1].	4
1.4	Soluções para o Problema de N Corpos que apresentam pseudocolisões, violando assim a conjectura de Painlevé.	5
1.5	Solução periódica para o problema de três corpos descoberta por Moore [2]. Nesta solução, todos os corpos se movem sobre a mesma curva, em forma de oito. Esta figura foi extraída da referência [3].	6
1.6	Órbitas tridimensionais obtidas por Moore e Nauenberg extraídas da <i>homepage</i> de Cris Moore [4].	6
1.7	Solução em forma de oito. A curva sólida representa a órbita obtida no contexto da gravitação clássica, e a curva pontilhada representa a solução com correções pós-Newtonianas de primeira ordem. Esta figura foi extraída do artigo [5].	7
2.1	Distância entre os corpos “ j ” e “ k ”.	10
3.1	Duas trajetórias possíveis para ir de $q(t_1)$ a $q(t_2)$	20
3.2	Vetor de Laplace-Runge-Lenz para uma órbita elíptica, solução geral do problema de dois corpos, em quatro pontos distintos. A conservação deste vetor impede a precessão da órbita.	30
3.3	Solução de Euler para o problema de 3 corpos, também conhecida como solução colinear. A figura acima representa o caso particular em que as massas são todas iguais.	30

3.4	Caso geral do problema de 3 corpos em que a configuração determinada pelas massas m_1 , m_2 e m_3 é um triângulo escaleno. Na figura, H é o centro de massa de m_1 e m_2 e C é o centro de massa do sistema.	32
3.5	Caso particular da família de soluções descoberta por Michel Hénon a partir da solução retilínea de Schubart e, mais tarde, também simulada por Chris Morre. Esta figura foi extraída de [4].	34
5.1	<i>Shape Sphere</i> , ou esfera dos triângulos orientados. Cada ponto desta casca esférica representa uma configuração possível para o triângulo orientado formado pelos 3 corpos.	52
5.2	Trajectoria que leva da posição EUL_1 à posição $ISOSC_2$ com ação mínima no espaço dos triângulos orientados.	54
5.3	Em vermelho, temos a trajetória que leva da posição $ISOSC_2$ à posição EUL_1 com ação mínima no espaço dos triângulos orientados. Concatenando as curvas em azul e em vermelho, temos uma curva com ação mínima no intervalo $0 \leq t \leq \frac{T}{6}$	55
5.4	A operação σ_3 inverte a orientação do triângulo formado pelos 3 corpos, não sendo portanto uma operação de simetria.	55
5.5	A operação σ_3 composta com uma rotação de 180° é uma operação de simetria e permite a continuação da construção no espaço das configurações.	56
5.6	Parte da solução contida no primeiro quadrante. Como $L = r^2\dot{\theta}$ é positivo, temos que esta curva é estrelada.	57
5.7	Construção da solução em forma de oito. O trecho da órbita que vai de $ISOSC_2$ a EUL_3 foi obtido através de reflexão do trecho que vai de EUL_1 a $ISOSC_2$, e assim sucessivamente. As figuras acima foram retiradas do site de Cris Moore [4].	57
5.8	Órbita fechada e periódica obtida como solução para o Problema de Kepler com os dados iniciais da Tabela 5.1. Se o passo de integração for menor que $h = 10^{-6}$ a solução é numericamente estável o suficiente para gerarmos centenas de voltas.	59
5.9	Órbita aberta não planar obtida como solução para o Problema de Kepler com os dados iniciais da Tabela 5.2. A única diferença entre esta solução e a anterior é a velocidade inicial do corpo 2 na direção $\mathcal{O}z$, de maneira que a sua projeção sobre o plano $\mathcal{O}xy$ é igual à solução 5.8.	60

5.10	Órbita aberta não planar obtida como solução para o Problema de Kepler com os dados iniciais da Tabela 5.2. A única diferença entre esta solução e a anterior é a velocidade inicial do corpo 2 na direção $\mathcal{O}z$, de maneira que a sua projeção sobre o plano $\mathcal{O}xy$ é igual à solução 5.8.	61
5.11	Solução de Euler em $t = \frac{T}{2}$ simulada com os dados da Tabela 5.3. Para esta simulação escolhemos $h = 10^{-4}$	62
5.12	Solução de Euler em que fizemos $x_2 = -x_3 = 21$, mantendo $h = 10^{-4}$, e obtivemos assim uma nova órbita estável em que os círculos descritos por esses corpos não são mais concêntricos. . . .	62
5.13	Simulação numérica para a Solução de Lagrange com os dados iniciais da Tabela 5.4. Neste caso o erro na energia cresce muito rapidamente devido a problemas técnicos.	63
5.14	Solução de Hénon em $t = T$. Para esta solução, com $h = 10^{-6}$ o código gera simulações confiáveis segundo o nosso critério.	64
5.15	Órbita em que os corpos 1 e 2 precessam no sentido horário, obtida com as condições iniciais perturbadas em que puxamos o corpo 1 para direita e o corpo 2 para baixo.	65
5.16	Órbita em que os corpos 1 e 2 precessam no sentido anti-horário, obtida com as condições iniciais perturbadas em que puxamos o corpo 1 para direita e o corpo 3 para esquerda.	66
5.17	Solução em forma de oito em $t = \frac{T}{3}$ obtida com as condições iniciais da Tabela 5.6 e passo de integração $h = 10^{-6}$	66
5.18	Órbita com as condições iniciais perturbadas com $h = 5 \cdot 10^{-6}$ em que perturbações nas condições iniciais da ordem de 10^{-3} fazem a órbita precessar no sentido horário.	67
5.19	Órbita com as condições iniciais perturbadas com $h = 5 \cdot 10^{-6}$ em que perturbações nas condições iniciais da ordem de 10^{-3} fazem a órbita precessar no sentido horário.	68
5.20	Órbita com as condições iniciais da Tabela 5.6 em que fizemos $m_2 = 1.001$ e $h = 5 \cdot 10^{-6}$. Cada um dos corpos continua numa órbita fechada em forma de oito, mas elas não são mais a mesma curva.	69
5.21	Cadeia de 3 ventres gerada como solução para o problema de 4 corpos gerada com os dados da Tabela 5.7 com passo de integração $h = 10^{-5}$. Esta solução é numericamente instável.	69
5.22	Cadeia de 4 ventres gerada como solução para o problema de 5 corpos gerada com os dados da Tabela 5.8 com passo de integração $h = 10^{-5}$. Esta solução é numericamente instável.	70

6.1	Partículas estacionárias sob ação de uma onda gravitacional com “polarização +”.	76
6.2	Partículas estacionárias sob ação de uma onda gravitacional com “polarização $\times$ ”.	77
6.3	Padrão das ondas gravitacionais emitidas pelas órbitas que são soluções de Kepler das Figuras 5.8 e 5.9, obtido com passo de integração $h = 10^{-6}$	81
6.4	Padrões das ondas gravitacionais emitidas pelas soluções de Euler e Lagrange com todas as massa iguais representadas nas Figura 5.11 e 5.13, obtidos com passo de integração $h = 10^{-4}$. Observe que esses sinais diferem apenas por uma fase.	82
6.5	Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela solução de Henon com todas as massa iguais representada na Figura 5.14, obtido com passo de integração $h = 5 \cdot 10^{-5}$	83
6.6	Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela solução de Henon com todas as massa iguais perturbada representada na Figura 5.15, obtido com passo de integração $h = 5 \cdot 10^{-5}$. Comparando com a figura anterior, vemos que este padrão apresenta certas assimetrias devidas à precessão da órbita.	84
6.7	Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela solução de Henon com todas as massa iguais perturbada representada na Figura 5.16, obtido com passo de integração $h = 5 \cdot 10^{-5}$. Comparando com a figura anterior, vemos que este padrão apresenta certas assimetrias devidas à precessão da órbita.	85
6.8	Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela órbita em forma de oito com todas as massa iguais representada na Figura 5.17.	85
6.9	Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela órbita em forma de oito que precessa no sentido horário, com todas as massa iguais, representada na Figura 5.18.	86
6.10	Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela órbita em forma de oito que precessa no sentido anti-horário, com todas as massa iguais, representada na Figura 5.19.	86
A.1	Método de integração iterativo de Runge-Kutta.	92

Lista de Tabelas

5.1	Dados utilizados para gerar a solução de Kepler plana e periódica.	58
5.2	Dados utilizados para gerar a solução de Kepler aberta tridimensional.	59
5.3	Dados utilizados para gerar a solução de Euler.	60
5.4	Dados utilizados para gerar a solução de Lagrange.	61
5.5	Dados utilizados para gerar a solução de Hénon.	64
5.6	Dados utilizados para gerar a solução em forma de oito.	65
5.7	Dados utilizados para gerar a cadeia de 3 ventres.	65
5.8	Dados utilizados para gerar a cadeia de 4 ventres.	67

Capítulo 1

Breve histórico do problema

*“I want to lift the audience to the miraculous in human nature.
After all, we shouldn’t be here, with all the odds against us in nature.
It’s kind of unusual and wonderful!”*

– Paul Taylor, nascido em 1930 nos EUA, coreógrafo e fundador da Paul Taylor Dance Company, foi um dos primeiros a aderir a dança moderna.

O problema de N corpos sujeitos apenas à atração gravitacional mútua na Mecânica Clássica é uma questão que desperta curiosidade entre os cientistas desde que Newton estabeleceu a sua *Lei da Gravitação Universal* [6]. A solução para o caso $N = 2$ é conhecida como o Problema de Kepler, e é um exemplo simples de um sistema integrável. As soluções podem ser divididas em duas classes: as órbitas abertas e as órbitas fechadas e periódicas, dependendo do valor da energia do sistema. Já para o caso $N = 3$, durante muitos anos as únicas soluções fechadas e periódicas conhecidas foram a de Euler, de 1765, e a de Lagrange, de 1772 [7]. Ambas são casos particulares das soluções homográficas, conhecidas como solução colinear e solução equilátera, respectivamente. Muitos esforços foram feitos no sentido de generalizar essas soluções, devido ao grande interesse de aplicá-las na análise do movimento dos planetas no Sistema Solar, para que assim se pudesse estudar a sua estabilidade de maneira confiável. Tendo estas ideias em mente, em 1887, o Rei Oscar II da Suécia e Noruega [8] propôs que na comemoração de seu sexagésimo aniversário, em 1889, fosse entregue um prêmio em dinheiro ao cientista que resolvesse a seguinte questão:

Dado um número arbitrário de massas pontuais movendo-se exclusivamente sob ação gravitacional mútua, descartando-se possíveis colisões, encontrar as funções do tempo que descrevem as posições das massas a partir de uma dada configuração inicial.

(a) Solução de Euler, na qual os três corpos se mantêm sobre uma mesma reta que gira em torno de seu centro de massa.

(b) Solução de Lagrange, na qual os três corpos se mantêm sobre os vértices de um triângulo equilátero que gira em torno do seu centro de massa.

Figura 1.1: Soluções de Euler e Lagrange para o problema de três corpos.

Além disso, o resultado seria publicado na revista *Acta Mathematica*, que já tinha muito prestígio na época. O prêmio foi concedido a Poincaré, apesar do fato de o artigo original conter um erro. O artigo foi corrigido e novamente publicado em 1890. Ainda em 1887, e de maneira independente, Heinrich Bruns publicou um

teorema em que afirma que existem apenas 10 integrais algébricas linearmente independentes no problema geral de N corpos [9, 10]. Hoje sabemos que este sistema não é integrável no sentido de Liouville.

O problema de descartar as soluções que contêm colisões também não é tarefa fácil. Poincaré foi o primeiro a chamar atenção para o fato de que as singularidades na solução poderiam não ser devidas a colisões [1]. Para ilustrar esta ideia, seja $r_{\min}$, a menor das distâncias entre cada dois corpos. A condição $\liminf r_{\min} = 0$ é necessária para que haja uma colisão entre dois corpos quaisquer do sistema, mas não é suficiente. Se tivermos $\limsup r_{\min} = 0$, então essa singularidade representa uma colisão, mas se tivermos $\limsup r_{\min} \neq 0$, então essa singularidade pode estar associada a um movimento oscilatório entre esses corpos.

Figura 1.2: Cenário em que ocorre uma pseudocolisão numa possível solução para o problema de 3 corpos. Figura extraída de [1].

Em 1897 Paul Painlevé demonstra que no caso $N = 3$ toda singularidade é devida a uma colisão [11, 12], e conjectura que não existem pseudocolisões neste problema para todo N . Em 1908, von Zeipel demonstra que uma singularidade não devida a colisão ocorre se e somente se o momento de inércia do sistema diverge a tempo finito, o que implica o escape dos corpos que constituem o sistema [1]. Este fato é bastante surpreendente, uma vez que a gravidade é uma força atrativa, e durante muitos anos serviu para reforçar a conjectura de Painlevé. A ideia por trás desse resultado, é que se um dos corpos se afasta para muito longe dos outros, sua velocidade se torna aproximadamente constante (pois a força resultante sobre ele se anula), o momento de inércia não diverge, mas ele também não escapa. Por outro lado, para que este corpo escape de vez do sistema, é necessário que um outro corpo oscile para *muito perto* dele com uma *frequência muito alta*, aumentando bruscamente a sua aceleração. Neste caso então, a singularidade está associada à oscilação da distância entre esses corpos. Em 1912 Karl Frithiof Sundman elaborou um método para regularizar as singularidades no caso de três corpos [13, 14].

Em 1975, John Mather e Richard McGehee elaboram uma construção colinear para o problema de 4 corpos em que o momento de inércia diverge a tempo

Em 1991 Joseph Gerver amplia o resultado obtido por Xia [19], demonstrando que órbitas planas com muitos corpos podem apresentar pseudocolisões. Em sua construção, o sistema deve ser composto por $3N$ corpos, dos quais $2N$ possuem a mesma massa M , estão organizados em sistemas binários com órbita circular, e ocupam os vértices de um polígono regular, enquanto os outros N corpos, todos

(a) Construção de Xia.

(b) Construção de Gerver

Figura 1.4: Soluções para o Problema de N Corpos que apresentam pseudocolisões, violando assim a conjectura de Painlevé.

com a mesma massa $m \ll M$, se deslocam sobre as arestas deste polígono. Cada vez que um corpo de massa m passa por um sistema binário, ele ganha energia cinética e o par, que perde energia, se afasta do centro por conservação do momento angular. Os corpos de massa pequena, que se movem cada vez mais rápido, visitam os binários com uma frequência cada vez maior, o que provoca a divergência do momento de inércia a tempo finito. Veja a Figura 1.4b, extraída da referência [19]. A estabilidade apresentada por esta órbita é estabilidade KAM [20], o que significa que pequenas variações nos parâmetros iniciais geram órbitas vizinhas à órbita original. Mesmo assim, este fato é bastante surpreendente, pois as soluções de Euler e o caso geral da solução de Lagrange não são estáveis. Além disso, o procedimento de encontrar uma órbita periódica minimizando-se sua ação, no caso geral leva a órbitas dinamicamente instáveis. A partir de então, diversas soluções numéricas foram encontradas para o caso geral de N corpos [21], sendo que todas elas apresentam a propriedade de que todos os corpos estão sobre a mesma curva separados igualmente no tempo. Essas órbitas foram chamadas de *coreografias*. Os métodos numéricos para encontrar essas soluções foram melhorados por Michael Nauenberg [22], que expande as equações das trajetórias em série de Fourier e obtém soluções para as equações de Newton encontrando os coeficientes de Fourier que minimizam a ação do sistema. Moore e Nauenberg obtiveram juntos soluções coreográficas tridimensionais [23].

Em 1993, Christopher Moore [2] encontra numericamente uma solução plana para o problema de três corpos, no caso em que todas as massas são iguais, em

Figura 1.5: Solução periódica para o problema de três corpos descoberta por Moore [2]. Nesta solução, todos os corpos se movem sobre a mesma curva, em forma de oito. Esta figura foi extraída da referência [3].

que todos os corpos se deslocam sobre uma curva em forma de oito (ver Figura 1.5). Em 2000 Alain Chenciner e Richard Montgomery demonstraram a existência desta órbita, e Carles Simó mostra numericamente a sua estabilidade.

(a) Órbita tridimensional com 3 corpos que apresenta a forma de um oito retorcido.

(b) Órbita tridimensional com 12 corpos.

Figura 1.6: Órbitas tridimensionais obtidas por Moore e Nauenberg extraídas da *homepage* de Cris Moore [4].

Mais recentemente, Hideki Asada, Takamasa Chiba e Tatsunori Imai investigam a possibilidade da existência de órbitas coerográficas no contexto da Relatividade Geral, através da análise da estabilidade de órbitas desse tipo na presença de perturbações relativísticas [5]. Eles chamaram atenção para o fato de que, uma vez que a precessão do periastro prevista pela Relatividade Geral (RG) impede um sistema binário de seguir uma curva fechada, talvez as órbitas coreográficas não sejam órbitas possíveis quando levamos em conta efeitos relativísticos. A conclusão a que chegaram é que a solução em forma de oito continua estável quando levamos em conta perturbações pós-Newtonianas de primeira ordem (ver Figura 1.7), mas que pode haver classes de soluções coreográficas que são proibidas no contexto da RG. Além disso, eles também procuram o padrão de ondas

Figura 1.7: Solução em forma de oito. A curva sólida representa a órbita obtida no contexto da gravitação clássica, e a curva pontilhada representa a solução com correções pós-Newtonianas de primeira ordem. Esta figura foi extraída do artigo [5].

gravitacionais que seria emitido por órbitas coreográficas [24, 3, 25]. Este é um assunto que levanta grande interesse científico, dado o investimento tecnológico que deve permitir a detecção de sinais de ondas gravitacionais dentro de um futuro próximo, e que também será abordado neste trabalho.

Capítulo 2

Definições e teoremas úteis

“God creates, I do not create. I assemble and I steal everywhere to do it - from what I see, from what the dancers can do, from what others do.”

– George Balanchine (1904, Rússia - 1983, EUA), coreógrafo e co-fundador do New York City Ballet.

Neste capítulo seguem algumas das definições e teoremas relevantes que serão considerados neste trabalho. A partir daqui, adotaremos a seguinte notação:

- Vetores no espaço $\mathbb{R}^3$ serão denotados por uma letra numa fonte diferenciada, como por exemplo, $\mathbb{r}$.
- Os demais vetores e os vetores duais serão denotados apenas por letras, e o espaço ao qual pertencem será declarado na sua definição. As componentes dos vetores serão indexadas com índices sobrescritos, e as componentes dos vetores duais com índices subscritos.
- Utilizaremos a convenção de soma de Einstein.
- Matrizes serão denotadas por letras em negrito.
- O ponto ($\dot{}$) indica derivação com respeito ao tempo.

2.1 Definições gerais

Ao analisarmos o problema de N corpos, vamos supor que todos eles se movam sobre um espaço Euclidiano tridimensional E cujos eixos são x , y e z e a origem está em $\mathcal{O}$. Desta forma, temos $3N$ graus de liberdade para descrever todas as

posições de todas as partículas do sistema. Em certos momentos iremos nos referir aos vetores no espaço $\mathbb{R}^3$ que representam as posições de cada um dos corpos no espaço, e em outros a um único vetor em $\mathbb{R}^{3N}$ que contém as $3N$ coordenadas generalizadas deste sistema. As definições que seguem abaixo são importantes para que possamos distinguir entre esses casos ao longo do texto. Neste sentido, também é importante que se esteja sempre atento à notação estabelecida e à variação dos índices de cada objeto.

Considere o k -ésimo corpo, cuja massa é m_k , disposto sobre o espaço E descrito anteriormente.

Definição 2.1. A *posição* deste corpo é

$$\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^3 \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

A sua *velocidade* é obtida através de derivação com respeito ao tempo,

$$\mathbf{v}_k = (\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) \in \mathbb{R}^3 \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

O seu *momento linear* é dado por

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k = (m_k \dot{x}_k, m_k \dot{y}_k, m_k \dot{z}_k) \in \mathbb{R}^3 \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

A atração gravitacional entre dois corpos depende da distância entre eles. Vamos definir a distância entre cada dois corpos em E .

Definição 2.2 (Distância entre dois corpos). Considere o vetor

$$\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j \in \mathbb{R}^3, \text{ com } j, k = 1, 2, \dots, N.$$

Então $r_{jk} = |\mathbf{r}_{jk}|$ é a distância entre os corpos “ j ” e “ k ”.

Figura 2.1: Distância entre os corpos “ j ” e “ k ”.

Definição 2.3. Seja ∇_k como o operador gradiente em relação às coordenadas do corpo “ k ”. Temos

$$\nabla_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y^k} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z^k} \hat{k}.$$

Podemos também definir grandezas físicas que são propriedades do sistema como um todo, como por exemplo a energia, o momento de inércia e o momento angular total.

Definição 2.4 (Autopotencial). O *autopotencial* do sistema dinâmico formado por N corpos sujeitos apenas à atração gravitacional mútua é

$$U(r_1, \dots, r_N) = \sum_{1 \leq k < j \leq N} G \frac{m_j m_k}{r_{jk}}, \quad (2.1)$$

no contexto da Mecânica Clássica. O autopotencial deste sistema é o oposto de sua *energia potencial*.

Definição 2.5 (Energia cinética). Considere a soma

$$K = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}_i|^2 \quad (2.2)$$

Então a energia cinética do nosso sistema dinâmico é dada por

$$T = \frac{1}{2} K \quad (2.3)$$

O momento de inércia e o momento angular total são grandezas que dependem da origem do sistema de coordenadas. Suas definições seguem abaixo.

Definição 2.6 (Momento de inércia). O *momento de inércia total* $I \in \mathbb{R}$ do nosso sistema é dado por

$$I = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{r}_i|^2 \quad (2.4)$$

Proposição 2.1 (Identidade de Jacobi-Lagrange). Sendo $E = \frac{1}{2}K - U$ a energia total do sistema, temos [7]

$$\ddot{I} = 2U + 4E. \quad (2.5)$$

Esta expressão é conhecida como identidade de Jacobi-Lagrange.

Definição 2.7 (Momento angular total). O *momento angular total* $\mathbb{L} \in \mathbb{R}^3$ do sistema é

$$\mathbb{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i. \quad (2.6)$$

Por outro lado, podemos também trabalhar com um único vetor para o sistema todo, que contém todas as coordenadas generalizadas do sistema.

Definição 2.8. Conforme discutimos anteriormente, o nosso sistema possui $3N$ graus de liberdade para posição. Seja

$$q(t) = \begin{bmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ \vdots \\ q^{3N}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N}, \text{ com } t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \quad (2.7)$$

o vetor cujas componentes são as n coordenadas generalizadas do sistema. Se escolhermos $q^1 = x^1, q^2 = y^1, q^3 = z^1, q^4 = x^2, \dots, q^{3N} = z^N$, este vetor será o *vetor posição* do sistema. Se derivarmos com relação ao tempo, temos o *vetor velocidade*, $v(t) = \dot{q}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$, cujas componentes são as velocidades generalizadas. Temos ainda o *vetor dual do momento canônico conjugado a q* , dado por

$$p = \nabla_v \mathcal{L} \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{3N}} \right] \in (\mathbb{R}^{3N})^* \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{L} : (q, p; t) \rightarrow \mathbb{R}$ é a *Lagrangiana* do sistema, dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}K - U,$$

e $(\mathbb{R}^{3N})^*$ é o espaço dual a $(\mathbb{R}^{3N})$.

Observação 2.1. Se definirmos a matriz $\mathbf{M}$ das massas da seguinte maneira

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_N \end{pmatrix},$$

então podemos escrever a energia cinética do sistema como

$$T = \frac{1}{2} v^T \mathbf{M} v \quad (2.9)$$

Definição 2.9 (Espaço das configurações). O *espaço das configurações* $\mathcal{Q}$ de um sistema dinâmico é um espaço vetorial que contém todas as posições possíveis para todas as partículas deste sistema, ou seja, $q(t) \in \mathcal{Q}$. No caso do problema de N corpos se movendo no espaço Euclidiano, se não considerarmos nenhum vínculo externo, temos $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^{3N}$, mas se quisermos, por exemplo, excluir as órbitas que levam a colisões, precisamos definir

$$\Delta \equiv \{q : q_i = q_j \text{ para algum } i \neq j\},$$

e assim temos

$$\mathcal{Q} = \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta. \quad (2.10)$$

Definição 2.10 (Espaço de fase). O *espaço de fase* $T^*\mathcal{Q}$ é o fibrado co-tangente ao espaço das configurações. Temos assim

$$T^*\mathcal{Q} = \{(q, p) : q \in \mathcal{Q}, p \in (\mathbb{R}^{3N})^*\} \subset \mathbb{R}^{6N}$$

2.2 Teorema de Noether

Sabemos que as simetrias de um sistema restringem os seus graus de liberdade. Para entendermos o mecanismo através do qual isso acontece, precisamos compreender o Teorema de Noether [26], cuja demonstração segue abaixo. Considere um sistema dinâmico com n graus de liberdade¹, cujas coordenadas generalizadas são $q^k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Seja então a seguinte transformação infinitesimal nas coordenadas deste sistema

$$\bar{t} = \varphi(t, q, \dot{q}, \varepsilon) \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (2.11a)$$

$$\bar{q}^k = \psi^k(t, q, \dot{q}, \varepsilon) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.11b)$$

e vamos supor que $\varphi, \psi^k \in C^2$ em cada um dos seus $2n + 1 + 1$ argumentos.

Teorema 2.1 (Teorema de Noether). *Para cada transformação infinitesimal que conserva a ação de um sistema, ou seja, que mantém a sua Lagrangiana invariante, corresponde uma grandeza física que se conserva.*

Demonstração. Vamos começar expandindo as expressões (2.11) em série de Taylor em torno de $\varepsilon \rightarrow 0$. Como $\bar{t} \rightarrow t$ e $\bar{q}^k \rightarrow q^k$, desprezando termos de segunda ordem em ε temos

¹No Problema de N corpos temos $n = 3N$.

$$\delta t = \bar{t} - t \equiv \tau \varepsilon, \quad (2.12a)$$

$$\delta q^k = \bar{q}^k - q^k \equiv \xi^k \varepsilon, \quad (2.12b)$$

onde τ e ξ^k são os *geradores* dessas transformações, dados por

$$\tau(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, q, \dot{q}, 0)$$

$$\xi^k(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial \psi^k}{\partial t}(t, q, \dot{q}, 0)$$

E para acharmos a variação em $\dot{\bar{q}}^k$ devida às transformações (2.12) fazemos

$$\frac{d\bar{q}^k}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{q}^k}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = \dot{q}^k + \varepsilon(\dot{\xi}^k - \dot{q}^k \tau) + O(\varepsilon)^2$$

Novamente desprezando os termos de segunda ordem em ε , temos que as variáveis da Lagrangiana do sistema se transformam da seguinte maneira

$$\bar{t} = t + \tau \varepsilon \quad (2.14a)$$

$$\bar{q}^k = q^k + \xi^k \varepsilon \quad (2.14b)$$

$$\dot{\bar{q}}^k = \dot{q}^k + (\dot{\xi}^k - \dot{q}^k \tau) \varepsilon \quad (2.14c)$$

Agora, vamos determinar quais são as condições que devemos impor aos geradores de uma transformação para que a hipótese de que a Lagrangiana é invariante seja satisfeita. Para isso, devemos ter que quando aplicamos (2.14) às coordenadas generalizadas q e $\dot{q}$, então $\exists f(t, q, \dot{q})$ tal que

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \mathcal{L}[\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t})] d\bar{t} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}[t, q(t), \dot{q}(t)] dt + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt + O(\varepsilon)^2$$

Transformando o lado esquerdo de volta para o intervalo $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ através da regra da cadeia, podemos igualar os integrandos da expressão acima. Usando a expressão (2.14a), temos $d\bar{t} = (1 + \varepsilon \tau) dt$, e a variação na Lagrangiana,

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}[\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t})] - \mathcal{L}[t, q(t), \dot{q}(t)],$$

pode ser escrita como

$$\delta \mathcal{L} = \varepsilon \tau \mathcal{L} + \varepsilon \frac{df}{dt}. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.14) em (2.15), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \xi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \left[\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial t} + \frac{\partial \xi^k}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial \xi^k}{\partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l \right) - \dot{q}^k \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l \right) \right] + \\ + \mathcal{L} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na identidade anterior, as partes que dependem de t , q e $\dot{q}$ são grandezas escalares, e as que dependem de $\ddot{q}$ são vetoriais, e portanto devem se cancelar independentemente. Desta forma, temos as $n + 1$ equações de Killing generalizadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \xi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \left[\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial t} + \frac{\partial \xi^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \right) - \dot{q}^k \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^l} \dot{q}^l \right) \right] + \\ + \mathcal{L} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^l} \dot{q}^l \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^l} \dot{q}^l \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\mathcal{L} \frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}^l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial \dot{q}^l} - \dot{q}^k \frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}^l} \right) = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^l} \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (2.17b)$$

Vemos assim que ao aplicarmos uma transformação infinitesimal (2.14) aos argumentos de uma Lagrangiana, ela será invariante se os geradores desta transformação satisfizerem as equações de Killing (2.17).

Agora vamos identificar qual é a consequência física da invariância da Lagrangiana. Para isso, vamos reescrever a equação (2.16) utilizando as expressões para as derivadas totais de $\mathcal{L}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^l} \xi^k$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^l} \dot{q}^l \tau$. Com isso eliminamos dentre os seus termos todos aqueles que não são derivadas totais, transformando-a assim numa lei de conservação, dada por

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = 0,$$

onde definimos a *corrente de Noether*

$$\mathcal{J} \equiv \mathcal{L} \tau + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} (\xi^k - \dot{q}^k \tau) - f. \quad (2.18)$$

Vemos então que a invariância da Lagrangiana implica a conservação da corrente de Noether.

□

Seja $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}$ o momento canônico conjugado à variável q^k . Observe que no caso particular em que fazemos uma transformação pontual ($\tau = 0$), e escolhemos arbitrariamente $f = 0$, pela expressão (2.18), a constante de Noether é dada por

$$\mathcal{J}(q, p) = p_k \xi^k \quad (2.19)$$

2.3 Órbitas homográficas

As soluções de Euler e Lagrange (ver Figura 1.1), que durante mais de 200 anos foram as únicas órbitas periódicas conhecidas para o problema de três corpos, são soluções particulares de uma classe de soluções conhecidas como *soluções homográficas*. Soluções homográficas são órbitas para as quais em qualquer instante, a configuração do sistema difere da configuração inicial apenas por uma rotação e/ou uma dilatação.

Definição 2.11 (Solução Homográfica). A solução é chamada de *solução homográfica* se a evolução temporal do sistema a partir de uma configuração inicial pode ser fatorada em um fator de escala $\lambda(t)$ e uma matriz de rotação $\mathbf{\Omega}(t)$ (ortogonal, $\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{\Omega}^T$), ou seja

$$\mathbf{r}_k(t) = \lambda(t) \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{r}_k^0(t) \in \mathbb{R}^3, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

de maneira que a configuração do sistema formado pelos N corpos permanece similar à configuração inicial conforme o tempo varia. Note que poderíamos ainda somar um vetor de translação τ à expressão (2.20), mas a condição de que o centro de massa está fixo garante que $\tau = 0$.

Definição 2.12 (Solução homotética). O movimento é chamado de *movimento homotético* se consiste em pura dilatação ou contração, ou seja,

$$\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{1} \quad \forall t > 0.$$

Definição 2.13 (Equilíbrio relativo). o movimento é chamado de *equilíbrio relativo* se consiste em pura rotação, ou seja,

$$\lambda(t) = 1 \quad \forall t > 0. \quad (2.21)$$

Observação 2.2. Analisando a expressão (2.20), temos as seguintes condições iniciais para o sistema

$$\begin{cases} \mathbf{r}_k(t=0) = \mathbf{r}_k^0, \\ \lambda(t=0) = \lambda^0 = 1, \\ \mathbf{\Omega}(t=0) = \mathbf{\Omega}^0 = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Definição 2.14 (Plano invariante). O *plano invariante* é o plano P perpendicular ao momento angular total $\mathbb{L}$ que contém o centro de massa do sistema. Segue que este plano só existe quando $\mathbb{L} \neq 0$, e que qualquer vetor $\mathbf{v} \in P$ satisfaz $\mathbf{v} \cdot \mathbb{L} = 0$

Definição 2.15 (Função homogênea). Uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ é uma *função homogênea de grau n* se

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^n f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2.22)$$

Teorema 2.2 (Teorema de Euler). Se $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ é uma *função homogênea de grau n* , então

$$\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2.23)$$

Classificação das órbitas homográficas. Agora definimos alguns casos notáveis que podem surgir como soluções do nosso problema.

Definição 2.16 (Solução planar). A solução é chamada de *solução planar* se $\exists$ um plano $\Pi(t)$, cuja posição varia no tempo, que contém todos os N corpos $\forall t$.

Definição 2.17 (Solução plana). A solução é chamada de *solução plana*² se $\exists$ um plano Π^* , cuja posição *não* varia no tempo, que contém todos os N corpos $\forall t$. Este plano coincide com o plano invariante quando $\mathbb{L} \neq 0$.

No caso em que a solução é plana, sempre podemos escolher o nosso sistema de coordenadas de forma que o plano Π^* coincida com o plano xy , de forma que $z_k = \dot{z}_k = 0 \forall k$ e $L_x = L_y = 0$.

Definição 2.18 (Solução colinear). A solução é chamada de *solução colinear* se $\exists$ uma reta $\Lambda(t)$, cuja posição varia no tempo, que contém todos os N corpos $\forall t$.

Definição 2.19 (Solução retilínea). A solução é chamada de *solução retilínea* se $\exists$ uma reta Λ^* , cuja posição *não* varia no tempo, que contém todos os N corpos $\forall t$.

Proposição 2.2. *Toda solução retilínea é instável.*

²A tradução do inglês pode gerar troca entre as definições 2.16 e 2.17. A solução planar é, em inglês, chamada de *flat solution*, e a solução plana, de *planar solution*.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos escolher a reta Λ^* coincidindo com o eixo Ox e a origem coincidindo com o centro de massa. Os N corpos podem ser ordenados nessa reta, e teremos certamente $x_N > 0$. Mas levando-se em conta a atração gravitacional devida aos demais $N - 1$ corpos, temos também $\ddot{x}_N < 0$, de forma que em algum instante ocorrerá uma colisão. □

2.4 Órbitas coreográficas

Soluções coreográficas são soluções particulares do problema de N corpos nas quais todos os corpos que compõem o sistema se deslocam sobre a mesma curva. A primeira órbita coreográfica, descoberta por Moore [4], tem a forma de um oito. Segue abaixo um teorema que garante a sua existência [20]. Considere as configurações EUL_1 , em que os três corpos se encontram alinhados, com o corpo 1 no centro de massa, como na Figura 1.1a, e $ISOSC_2$, na qual os três corpos se encontram sobre os vértices de um triângulo isósceles, com o corpo 2 no vértice oposto à base.

Teorema 2.3. *Para um dado intervalo de tempo $\bar{T}$, dentre todas as curvas que levam o sistema da configuração EUL_1 à configuração $ISOSC_2$, existe uma curva sem colisões que minimiza a ação deste sistema. Esta curva é $\frac{1}{12}$ da solução em forma de oito.*

Capítulo 3

Descrição do problema

“I’m not interested in how people move. I’m interested in what makes them move.”

– Pina Bausch (1940 - 2009, Alemanha), coreógrafa, pedagoga e diretora do Tanztheater Wuppertal Pina Bausch.

Neste capítulo, vamos determinar as equações de movimento de um sistema dinâmico isolado formado por N corpos sujeitos apenas à atração gravitacional mútua. Vamos encontrar as simetrias do sistema, determinar seu número de graus de liberdade e estabelecer a sua não integrabilidade segundo Liouville. Vamos também catalogar algumas soluções periódicas particulares conhecidas, como a solução de Kepler para o caso $N = 2$, e as soluções de Euler e Lagrange para o caso $N = 3$.

3.1 Possíveis formulações para o problema

Queremos mostrar que, para mais que 3 corpos, o sistema em questão não se trata de um sistema integrável segundo Liouville. Para isso, estudaremos a descrição do sistema sob os diferentes pontos de vista da Mecânica Clássica, e transitaremos entre eles escolhendo sempre o mais conveniente para abordar cada questão. Começaremos contando os graus de liberdade e determinando as simetrias que o problema apresenta.

Formulação Newtoniana Na Mecânica Newtoniana, para encontrar as soluções de um sistema dinâmico, precisamos estabelecer todas as forças, internas e externas, que agem sobre ele. Com isso, através da Segunda Lei de Newton, determinamos a aceleração de cada um dos corpos que o compõem, e através de integração obtemos suas trajetórias. Considere então um sistema isolado formado

por N -corpos, onde o k -ésimo corpo possui massa m_k e vetor posição $\mathbb{r}_k$, de módulo r_k . De acordo com a Lei da Gravitação de Newton, sendo G a constante gravitacional universal, temos

$$\frac{d^2 \mathbb{r}_k(t)}{dt^2} = -G \sum_{j \neq k}^N m_j \frac{\mathbb{r}_{jk}(t)}{|\mathbb{r}_{jk}(t)|^3} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

De maneira equivalente, podemos também adotar a formulação potencial,

$$\mathbb{F}_k = \nabla_k U(r_1, \dots, r_n)$$

onde $U(r_1, \dots, r_n)$ é o autopotencial do problema, dado pela expressão (2.1). Nesta formulação, devemos resolver o sistema de equações diferenciais dado por (3.1), sujeito à condição de que não haja colisão entre os corpos.

Formulação Lagrangiana Queremos encontrar o vetor posição $q(t)$ tal que suas componentes são as soluções sem colisões para as equações (3.1), ou seja, o espaço configuracional é dado por (2.10). A Lagrangiana do sistema é um funcional $\mathcal{L} : T\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\mathcal{L} = \frac{1}{2}K + U$, e das expressões (2.2) e (2.1) temos

$$\mathcal{L}(q(t), v(t)) = \frac{1}{2} v^T \mathbf{M} v + \sum_{1 \leq k < j \leq N} G \cdot \frac{m_j m_k}{r_{jk}}. \quad (3.2)$$

Imagine agora todas as possíveis trajetórias que levam de um ponto $q(t_1)$ a outro $q(t_2)$. A trajetória que servirá como solução das equações de Newton é aquela que minimiza a ação

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, v) dt.$$

Figura 3.1: Duas trajetórias possíveis para ir de $q(t_1)$ a $q(t_2)$.

Determinamos as equações do movimento (equações de Euler-Lagrange) impondo $\delta \mathcal{S} = 0$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, 3N. \quad (3.3)$$

Formulação Hamiltoniana A Hamiltoniana de um sistema dinâmico é um funcional que associa um número real a cada ponto do espaço de fase, ou seja, $\mathcal{H} : T^* \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, obtida com uma transformada de Legendre da Lagrangiana (3.2) na variável v .

$$\mathcal{H}(q(t), p(t)) = p_k \cdot \dot{q}^k - \mathcal{L} = \frac{1}{2} p \mathbf{M}^{-1} p^T - \sum_{1 \leq k < j \leq N} G \cdot \frac{m_j m_k}{r_{jk}}, \quad (3.4)$$

onde usamos a notação de soma de Einstein. Neste contexto, as equações de movimento do sistema são determinadas pelas equações de Hamilton-Jacobi,

$$\dot{q}^k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \quad (3.5a)$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \quad k = 1, 2, \dots, 3N \quad (3.5b)$$

Graus de liberdade Nas duas primeiras formulações, precisamos resolver um conjunto de $3N$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, dadas por (3.1) na Mecânica Newtoniana, ou por (3.3) equivalentemente na Mecânica Lagrangiana, enquanto na Mecânica Hamiltoniana precisamos resolver um conjunto de $6N$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, dado por (3.5). Vemos então que este sistema apresenta $6N$ graus de liberdade, dos quais 3 são para a posição e 3 são para o momento para cada partícula.

3.2 Simetrias e leis de conservação

Através do Teorema de Noether (Teorema 2.1), vimos como as simetrias estão associadas às grandezas conservadas em um problema. Nesta seção, iremos aplicar este teorema [26], na procura das constantes do movimento no problema de N corpos [10]. Para começar, note que a Hamiltoniana do problema de N -corpos, dada por (3.4) é invariante sob a ação do grupo Euclidiano $E(3)$, ou seja, ela é invariante por transformações puntuais do tipo

$$\overline{\mathbf{r}}_k = \boldsymbol{\Psi}_k(\mathbf{r}_k) = \mathbf{R} \mathbf{r}_k + \mathbf{b} \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

em que $\mathbf{R}$ é uma matriz ortogonal 3×3 que representa uma rotação e $\mathbb{b} = (b, b, b) \in \mathbb{R}^3$ representa uma translação. Para entender como essa transformação atua na dupla ordenada (q, p) , note que

$$\begin{aligned} \Psi(q, p) = \Psi \left(\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^{3N} \end{bmatrix}, [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{3N}] \right) = \\ \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}r_1 + \mathbb{b} \\ \mathbf{R}r_2 + \mathbb{b} \\ \vdots \\ \mathbf{R}r_N + \mathbb{b} \end{bmatrix}, [\mathbb{p}_1^T \mathbf{R}^T \ \mathbb{p}_2^T \mathbf{R}^T \ \dots \ \mathbb{p}_N^T \mathbf{R}^T] \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

E, aplicando (3.7) nas coordenadas da (3.4), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Psi(q, p)] &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} p^k \mathbf{R}^T (p^k \mathbf{R}^T)^T - \sum_{1 \leq k < j \leq N} G \cdot \frac{m_j m_k}{|\Psi_k(r_k) - \Psi_j(r_j)|} = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} p^k \mathbf{R}^T \mathbf{R} (p^k)^T - \sum_{1 \leq k < j \leq N} G \cdot \frac{m_j m_k}{|\mathbf{R}(r_k - r_j)|} = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} p^k (p^k)^T - \sum_{1 \leq k < j \leq N} G \cdot \frac{m_j m_k}{|r_k - r_j|} = \mathcal{H}(q, p) \end{aligned}$$

pois $\mathbf{R}$ é ortogonal e, portanto, preserva a norma.

Através do Teorema de Noether, vamos procurar as constantes do movimento que estão por trás dessas simetrias. A operação de translação pode ser escrita em termos de um parâmetro $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{q} = \Psi(q) = q + s \cdot b,$$

O gerador desta transformação é então dado por

$$\xi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} = \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

De acordo com o teorema 2.1, a grandeza conservada associada a essa simetria é dada pela expressão (2.19), ou seja,

$$\mathcal{J}(q, p) = [\mathbb{p}_1 \quad \dots \quad \mathbb{p}_N] \begin{bmatrix} \mathbb{b} \\ \vdots \\ \mathbb{b} \end{bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^N \mathbb{p}_k \right) \cdot \mathbb{b},$$

e como as componentes de $\mathbb{b}$ são constantes, podemos afirmar que

$$\mathbb{P} = \sum_{k=1}^N \mathbb{p}_k \in (\mathbb{R}^3)^*, \quad (3.9)$$

que representa o momento linear total do sistema, é constante. As coordenadas do centro de massa de um sistema de partículas pontuais são

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{M_T} \sum_{k=1}^N m_k \Gamma_k$$

Note que podemos escrever

$$\dot{\mathbb{Q}} = \frac{1}{M_T} \mathbb{P},$$

onde $M_T = \sum_{k=1}^N m_k$ é a massa total do sistema. Com esta expressão podemos determinar a evolução temporal da posição do centro de massa,

$$Q(t) = Q(t_0) + \frac{1}{M_T} P(t - t_0).$$

O centro de massa do sistema se move em linha reta com velocidade constante, sendo portanto um referencial inercial. Temos então 6 integrais algébricas para o nosso problema, que são as coordenadas e o momento do centro de massa. Além disso, sempre podemos tratar o nosso problema no referencial do centro de massa, sem perda de generalidade. Agora considere a operação de rotação em torno de um vetor velocidade angular constante,

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

e vamos definir a matriz $\mathbf{R}$ como

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

de maneira que

$$\mathbf{R}\mathfrak{r}_k = \omega \times \mathfrak{r}_k.$$

Escrevendo a operação de rotação em termos de um parâmetro $s \in \mathbb{R}$ temos

$$\Psi_k(\mathfrak{r}_k) = \mathfrak{r}_k + s \cdot \mathbf{R}\mathfrak{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

e o gerador de cada uma dessas transformações é dado por

$$\xi_k = \frac{d\Psi}{ds} = \mathbf{R}\mathfrak{r}_k.$$

Podemos escrever então

$$\xi(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathfrak{r}_1 \\ \mathbf{R}\mathfrak{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}\mathfrak{r}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \times \mathfrak{r}_1 \\ \omega \times \mathfrak{r}_2 \\ \vdots \\ \omega \times \mathfrak{r}_N \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

E de acordo com o teorema 2.1, a grandeza conservada associada a essa simetria é dada pela expressão (2.19), ou seja,

$$\mathcal{J}(q, p) = p^k \xi_k = \sum_{k=1}^N \mathfrak{p}_k \cdot (\omega \times \mathfrak{r}_k) = \sum_{k=1}^N \omega \cdot (\mathfrak{r}_k \times \mathfrak{p}_k)$$

E como a velocidade angular é constante, temos que

$$\mathbb{L} = \sum_{k=1}^N \mathfrak{r}_k \times \mathfrak{p}_k \in \mathbb{R}^3, \quad (3.13)$$

que representa o momento angular total do sistema, é constante. Finalmente, lembrando as equações de Hamilton (3.5) temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + (-\dot{p}^k) \dot{q}_k + \dot{q}_k \dot{p}^k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0,$$

e assim a energia,

$$E = T - U = \frac{1}{2} p \mathbf{M}^{-1} p^T - \sum_{1 \leq k < j \leq N} G \frac{m_j m_k}{r_{jk}} \quad (3.14)$$

também é uma constante do movimento.

Resumindo, até agora temos 10 integrais algébricas, a saber:

- Energia (1 grau de liberdade)
- Posição do centro de massa (3 graus de liberdade)
- Momento linear total (3 graus de liberdade)
- Momento angular total (3 graus de liberdade)

Teorema 3.1. *Não existem outras integrais algébricas independentes para o conjunto de equações (3.1) além das 10 listadas acima [27].*

De acordo com o teorema acima, só podemos diminuir o número de graus de liberdade deste sistema até $6N - 10$. Para $N = 2$ temos o conhecido “Problema de Kepler”, que pode ser resolvido de maneira exata quando fornecemos duas condições iniciais, mas para $\forall N \geq 3$, o sistema não é integrável segundo Liouville, como veremos.

Integrabilidade segundo Liouville do problema de N corpos No contexto da Mecânica Hamiltoniana, temos que para uma função $\mathcal{F} = \mathcal{F}(q, p)$, sua derivada temporal total pode ser escrita como o colchete de Poisson $[\mathcal{F}, \mathcal{H}]$, o que decorre das equações de Hamilton (3.5) e da definição de colchete de Poisson,

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q}.$$

Definição 3.1 (Integral primeira). Dizemos que uma função $\mathcal{F} = \mathcal{F}(q, p)$ é uma *integral primeira* de um sistema dinâmico se

$$[\mathcal{F}, \mathcal{H}] = 0$$

Definição 3.2 (Involução). Dizemos que duas integrais primeiras estão em *involução* se o colchete de Poisson entre elas se anula.

Teorema 3.2 (Teorema de Liouville). *Um sistema dinâmico hamiltoniano com $2n$ graus de liberdade é integrável segundo Liouville se existirem n integrais primeiras independentes que estejam em involução duas a duas [28], ou seja,*

$$[\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j] = 0 \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Isso garante que existe uma mudança de variáveis canônica que permite reescrever a Hamiltoniana em termos das variáveis de ângulo e ação, e que portanto o sistema pode ser resolvido através do método de Hamilton-Jacobi.

3.3 O Problema de 2 corpos

O Problema de Kepler é o caso mais simples no Problema de N -corpos já há muito tempo conhecido e resolvido [29, 30]. Ainda assim, este é um caso muito interessante para ser estudado, pois além de ser um exemplo simples de um sistema integrável, ele pode ser utilizado para explicar as órbitas dos planetas da nossa galáxia ao redor do Sol, num modelo bem simplificado, por exemplo. Uma das surpresas relacionadas a este problema foi a descoberta da precessão do periélio de Mercúrio (de $43''$ por século) [31], não prevista pela Mecânica Clássica. Este valor pode ser explicado com bastante precisão pela Relatividade Geral, servindo assim como um dos testes que corroboram esta teoria. Sabemos que na Mecânica Clássica, o periélio não deve precessar devido a uma simetria adicional ao problema, associada à conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz [30], como veremos adiante.

Solução de Kepler Considere o problema de 2 corpos, de massas m_1 e m_2 e vetores posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, respectivamente. De acordo com a seção anterior, podemos passar para o referencial do centro de massa do sistema sem nenhuma perda de generalidade para a solução. Seja $M = m_1 + m_2$ a massa total do sistema e

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}$$

a posição do centro de massa. De acordo com a 3ª lei de Newton temos $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, ou seja, o centro de massa se desloca com velocidade constante, sendo portanto um referencial inercial. Seja também o vetor da posição relativa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

e a massa reduzida

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (3.15)$$

As equações do movimento (3.1) ficam

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}},$$

ou seja, o problema se torna equivalente ao problema de um único corpo de massa μ e vetor posição $\mathbf{r}$ sujeito à força central $\mathbb{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, com $f(r) = -\frac{k}{r^2}$. Podemos determinar $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ fazendo

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{R}(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{R}(t) - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t)\end{aligned}$$

Vamos então para o referencial do centro de massa. A Lagrangiana de um sistema dinâmico, formado por 1 único corpo, em coordenadas polares, é

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r).$$

Como ϕ é uma coordenada cíclica (válido no caso geral de forças centrais), da equação de Euler-Lagrange (3.3) para esta variável temos que o momento canônico conjugado a ela se conserva, ou seja,

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \equiv L, \quad (3.16)$$

onde L é o módulo do momento angular total do sistema como em (3.13). A conservação do momento angular garante que o movimento se dá no plano definido por $\mathbb{R} \times \mathbb{P}$. Agora note que a área dA varrida quando o corpo realiza um deslocamento angular $d\phi$ é dada por $dA = \frac{1}{2}r(rd\phi)$, e de (3.16) temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \text{constante},$$

que é a *Lei das Áreas* de Kepler. Além disso, da equação de Euler-Lagrange para a variável r , usando a expressão (3.16) temos

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (3.17)$$

Como o sistema é autônomo, garantimos a conservação da energia, ou seja,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \text{constante}. \quad (3.18)$$

Reescrevendo (3.18) encontramos uma expressão para $\dot{r}$. Mas como estamos interessados em determinar a forma da órbita que é solução para o problema, vamos usar (3.16) para obter a dependência entre dr e $d\phi$, e assim

$$d\phi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - V) - \frac{1}{r^2}}}.$$

Integrando ambos os lados e aplicando a mudança de variáveis $u = \frac{1}{r}$ temos

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mku}{L^2} - u^2}},$$

e usando [32]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)$$

com $\alpha = \frac{2mE}{L^2}$, $\beta = \frac{2mk}{L^2}$ e $\gamma = -1$ obtemos uma expressão para φ como função de u . Invertendo e voltando para a variável r temos

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \quad (3.19)$$

Comparando com a expressão geral para uma cônica com um dos focos na origem [33], vemos que a solução para o problema de Kepler é uma cônica cuja excentricidade é dada por

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}}. \quad (3.20)$$

Este resultado é conhecido como a *Lei das Órbitas de Kepler*. Note que se

$$\begin{cases} \varepsilon = 0, & \text{a solução é uma circunferência,} \\ 0 < \varepsilon < 1, & \text{a solução é uma elipse,} \\ \varepsilon = 1, & \text{a solução é uma parábola,} \\ \varepsilon > 1, & \text{a solução é uma hipérbole,} \end{cases}$$

de maneira que a órbita é aberta se $E \geq 0$ e periódica se $E < 0$.

Vetor de Laplace-Runge-Lenz O objetivo desta seção é entender a conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz no caso de forças centrais na Mecânica Clássica e como isso influencia as soluções do nosso problema de Kepler. Vamos começar tomando o produto vetorial $\mathbb{F} \times \mathbb{L}$ utilizando as expressões (??).

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbb{L} = \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] = \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r}(r\dot{r}) - r^2\dot{\mathbf{r}}]$$

onde usamos a identidade vetorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Usando que forças centrais conservam momento angular, temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{p} \times \mathbb{L}) = -mf(r)r^2 \left[\frac{\dot{\mathbb{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbb{r} \right] = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbb{r}}{r} \right)$$

Mas veja que *somente* para o caso do problema de Kepler (??) temos

$$-mf(r)r^2 = mk = \text{constante},$$

de forma que se definirmos

$$\mathbb{A} = \mathbb{p} \times \mathbb{L} - mk \frac{\mathbb{r}}{r}, \quad (3.21)$$

então de (3.21) temos

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = 0. \quad (3.22)$$

Note que

- $\mathbb{A} \cdot \mathbb{L} = 0$ $\therefore$ $\mathbb{A}$ pertence ao plano do movimento.
- $\mathbb{A} \cdot \mathbb{r} = A \cos \theta = L^2 - mkr$, se θ for o ângulo entre $\mathbb{A}$ e $\mathbb{r}$, de maneira que

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right), \quad (3.23)$$

que é exatamente a solução (3.19) se tomarmos $A = mk\varepsilon$.

Assim concluímos que $\mathbb{A}$ é um vetor no plano da órbita de módulo $mk\varepsilon$. Veja que a conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz implica a não precessão do periélio.

3.4 O Problema de 3 corpos

Durante aproximadamente 200 anos, as únicas soluções fechadas e periódicas conhecidas para o problema de três corpos foram as soluções de Euler e de Lagrange. Em ambos os casos, os 3 corpos realizam movimento circular uniforme com velocidade angular ω constante. Na solução de Euler, os três corpos estão sobre a mesma reta, que gira em torno de seu centro de massa, enquanto na solução de Lagrange eles estão dispostos sobre os vértices de um triângulo equilátero que gira em torno de seu centro de massa. Nesta seção, vamos verificar que estas configurações realmente são soluções para o problema (3.1) [7]. Aqui adotaremos que A_i é o ponto que representa a posição do corpo de massa m_i , com $i = 1, 2, 3$.

Figura 3.2: Vetor de Laplace-Runge-Lenz para uma órbita elíptica, solução geral do problema de dois corpos, em quatro pontos distintos. A conservação deste vetor impede a precessão da órbita.

Solução de Euler. Vamos considerar a configuração colinear em que A_2 está entre A_1 e A_3 . No caso especial em que todas as massas são iguais, A_2 permanece fixo no centro da circunferência descrita pelos outros dois, que coincide com o centro de massa do sistema.

Figura 3.3: Solução de Euler para o problema de 3 corpos, também conhecida como solução colinear. A figura acima representa o caso particular em que as massas são todas iguais.

Se a reta que contém os três corpos gira com velocidade angular ω em torno do seu centro de massa, então a força gravitacional deve exercer o papel de força

centrípeta, de maneira que

$$\omega^2 x_1 = -\frac{Gm_2}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{Gm_3}{(x_3 - x_1)^2} \quad (3.24a)$$

$$\omega^2 x_2 = -\frac{Gm_3}{(x_3 - x_2)^2} + \frac{Gm_1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (3.24b)$$

$$\omega^2 x_3 = \frac{Gm_1}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{Gm_2}{(x_3 - x_2)^2} \quad (3.24c)$$

Essas equações impõem vínculos sobre quais valores as distâncias entre cada dois corpos podem assumir. Seja então r_k a distância entre os corpos i e j no eixo que instantaneamente contém os 3 corpos, e vamos definir a razão $k \equiv \frac{r_1}{r_3}$, de maneira que

$$\begin{aligned} r_3 &= x_2 - x_1, \\ r_1 &= x_3 - x_2 \equiv kr_3, \\ r_2 &= x_3 - x_1 = r_1 + r_3 = (k+1)r_3, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{r_1}{k} = \frac{r_2}{k+1} = \frac{r_3}{1}.$$

Vamos usar as equações (3.24) para encontrar uma expressão pra k .

$$\begin{aligned} k = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} &= \frac{\frac{G}{\omega^2 r_3} \left[\frac{m_1}{(k+1)^2} + \frac{m_2+m_3}{k^2} - m_1 \right]}{\frac{G}{\omega^2 r_3} \left[\frac{-m_3}{k^2} + (m_1 + m_2) + \frac{m_3}{(k+1)^2} \right]} \\ &= \frac{(m_2 + m_3)(k+1)^2 - m_1 k^2 (k^2 + 2k)}{(m_1 + m_2)k^2 (k+1)^2 - m_3 (2k+1)} \end{aligned}$$

Da expressão acima obtemos uma equação de 5º grau para k , dada por

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)k^5 + (3m_1 + 2m_2)k^4 + (3m_1 + m_2)k^3 + \\ &-(m_2 + m_3)k^2 - (2m_2 + 3m_3)k - (m_2 + m_3) = 0, \end{aligned}$$

que apresenta apenas *uma* raiz real, k^* , com $k^* > 0$. Para um dado valor de r_3 , podemos obter r_1 e r_2 a partir de k^* . Fazendo (3.24c) - (3.24a) obtemos uma expressão para a velocidade angular ω ,

$$\omega^2 = \frac{G}{r_3^3} \left[\frac{m_1 + m_3}{(k+1)^3} + \frac{(k^2 + 1) \cdot m_2}{k^2(k+1)} \right]$$

Note que $\omega^2 \sim r_3^{-3}$, como a *Lei dos Períodos de Kepler*. De maneira análoga, podemos também encontrar soluções de Euler em que A_1 ou A_3 se encontrem no meio dos demais.

Solução de Lagrange. Para encontrarmos a solução de Lagrange, vamos considerar o caso geral em que os três corpos determinam um triângulo qualquer, e em seguida determinaremos quais condições o sistema deve satisfazer para que todos os corpos girem com velocidade angular ω em torno de seu centro de massa C .

Seja H o centro de massa dos corpos A_1 e A_2 . Este ponto divide o segmento A_1A_2 em duas partes, $s \equiv A_1H$ e $t \equiv HA_2$. Sejam também θ_1 o ângulo HA_3A_2 e θ_2 o ângulo A_1A_3H . Além disso, seja $h \equiv A_3H$. O centro de massa C do sistema deve estar contido neste segmento.

Figura 3.4: Caso geral do problema de 3 corpos em que a configuração determinada pelas massas m_1 , m_2 e m_3 é um triângulo escaleno. Na figura, H é o centro de massa de m_1 e m_2 e C é o centro de massa do sistema.

Como no caso anterior, sabemos que a força gravitacional em cada um dos corpos deve desempenhar o papel de força centrípeta. Se definirmos $b \equiv A_3C$, no ponto A_3 essa força deve estar na direção A_3C e ter módulo $m_3 b \omega^2$. Para que isso aconteça, as componentes tangenciais das forças agindo sobre A_3 devem se anular. Essas condições implicam

$$\frac{m_2}{m_2} = \frac{r_2^2 \sin \theta_1}{r_1^2 \sin \theta_2} \quad (3.25a)$$

$$b\omega^2 = G \left(\frac{m_2}{r_1^2} \cos \theta_1 = \frac{m_1}{r_2^2} \cos \theta_2 \right) \quad (3.25b)$$

Além disso, por semelhança de triângulos temos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{t}{s} = \frac{r_1 \sin \theta_1}{r_2 \sin \theta_2} \quad (3.26)$$

Juntas, as equações (3.25a) e (3.26) implicam $r_1 = r_2$, e uma análise análoga para o movimento de A_2 resulta em $r_1 = r_3$. Isso prova que, se uma solução desse tipo existir, o triângulo determinado pelos três corpos será um triângulo equilátero de lado l , independente da relação entre as massas! Agora vamos traçar a reta HK paralela à A_1A_3 , assim

$$t = HA_2 = HK = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2},$$

$$s = A_1H = KA_3 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Podemos escrever h como a soma das projeções de HK e KA_3 , de maneira que

$$h = HK \cos \theta_2 + KA_3 \cos \theta_1 = \frac{m_1 \cos \theta_2 + m_2 \cos \theta_1}{m_1 + m_2} l,$$

e usando a expressão (3.25b) temos

$$b\omega^2 = \frac{G}{l^2} \frac{m_1 + m_2}{l} h.$$

No caso em que as massas são iguais o centro de massa coincide com o baricentro do triângulo e temos $b = \frac{3}{2}h$, e finalmente

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{GM}{l^3}} \quad (3.28)$$

Análise análoga do movimento dos demais corpos resulta no mesmo valor de ω , proporcional a $l^{-\frac{3}{2}}$, como deveria ser. Vemos assim que esta é uma solução possível para o problema.

Solução de Hénon. Em 1976, Michel Hénon simulou numericamente toda uma família de soluções periódicas para o problema 3 corpos de massas iguais, partindo da solução retilínea periódica de Schubart [34]. Nesta solução, a configuração inicial é uma colisão dupla dos corpos 1 e 2 em $x_1 = x_2 = -a$, com $x_3 = -a$. Em seguida o corpo 1 vai para trás e o 2 para frente, e ocorre uma colisão dos corpos 2 e 3 em $x_2 = x_3 = a$, com $x_1 = -a$ em $t = \frac{T}{2}$. Em $t = T$ o sistema volta à configuração inicial. De uma maneira simples, seu método consiste em aumentar o momento angular de uma solução para encontrar novas soluções. Ao fazer isso, as colisões desaparecem, e se tornam apenas encontros próximos, e passando para o referencial em que o momento angular é nulo, Hénon encontra várias órbitas fechadas e periódicas. Em particular, uma das soluções descobertas por Hénon (ver Figura 3.5) foi também simulada por Chris Moore em [23], e também será simulada neste trabalho.

Figura 3.5: Caso particular da família de soluções descoberta por Michel Hénon a partir da solução retilínea de Schubart e, mais tarde, também simulada por Chris Morre. Esta figura foi extraída de [4].

Capítulo 4

Soluções Homográficas

“Nothing is more revealing than movement.”

– Martha Graham.

As órbitas homográficas são uma classe muito importante das soluções para o problema de N corpos. A ideia neste capítulo é analisarmos o que é uma solução homográfica e, em seguida, calcularmos analiticamente quais dessas órbitas são, de fato, soluções válidas para o problema (3.1). Veremos que com essa definição generalizamos as soluções de Euler e de Lagrange. Estabeleceremos que o surgimento de órbitas homográficas no contexto da gravitação clássica está associado a configurações iniciais centrais.

Sistema de coordenadas girante. Vamos introduzir um sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) que acompanha o movimento dos N corpos, podendo girar com velocidade angular constante ω e se expandir ou se contrair com o fator de escala $\lambda(t)$. Nesse sistema, o vetor posição do k -ésimo corpo é dado por

$$\begin{cases} \mathbb{p}_k \equiv (\xi^k, \eta^k, \zeta^k) = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{r}_k = \lambda(t) \mathbb{r}_k^0, \\ \mathbb{p}_k^0 = \mathbb{r}_k^0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

e a distância entre cada dois corpos é dada por $\rho_{jk} \equiv |\mathbb{p}_{jk}|$, onde $\mathbb{p}_{jk} = \mathbb{p}_j - \mathbb{p}_k$, temos $\rho_{jk} = \lambda r_{jk}^0$. Queremos determinar as expressões para a velocidade e a aceleração de cada corpo no sistema de referência (ξ^k, η^k, ζ^k) . As derivadas temporais de um dado vetor $\mathbf{v}$ nos sistemas de referência (x^k, y^k, z^k) e (ξ^k, η^k, ζ^k) se relacionam da seguinte maneira [30]

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \Big|_{(x^k, y^k, z^k)} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \Big|_{(\xi^k, \eta^k, \zeta^k)} + \omega \times \mathbf{v} \quad (4.1)$$

Agora, ao invés de trabalharmos com a matriz de rotação $\mathbf{\Omega}$, vamos definir uma matriz $\mathbf{\Sigma}$ dada por

$$\mathbf{\Sigma} \equiv \mathbf{\Omega}^{-1} \dot{\mathbf{\Omega}}. \quad (4.2)$$

Esta matriz satisfaz as seguintes propriedades

$$\dot{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{\Omega}^{-1} \ddot{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{\Sigma}^2, \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{\Sigma} = -\mathbf{\Sigma}^T, \quad (4.3b)$$

e da propriedade (4.3b) vemos que $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz antissimétrica, e portanto pode ser escrita na forma

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Podemos interpretar ω_1 , ω_2 e ω_3 como as componentes de um vetor [35]

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Note que

$$\mathbf{\Sigma} \mathbf{p}_k = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi^k \\ \eta^k \\ \zeta^k \end{bmatrix} = \omega \times \mathbf{p}_k,$$

de forma que a velocidade no referencial girante pode ser escrita como

$$\mathbf{\Omega}^{-1} \dot{\mathbf{r}}_k = \dot{\mathbf{p}}_k + \omega \times \mathbf{p}_k \quad (4.6)$$

Comparando a expressão acima com a expressão (4.1), vemos que o vetor ω representa a velocidade angular do sistema girante com relação ao referencial bari-cêntrico. Para calcular a aceleração, derivamos a expressão para a velocidade com relação ao tempo, e temos

$$\mathbf{\Omega}^{-1} \ddot{\mathbf{r}}_k = \ddot{\mathbf{p}}_k + 2(\mathbf{\Omega}^{-1} \dot{\mathbf{\Omega}}) \dot{\mathbf{p}}_k + \mathbf{\Omega}^{-1} \ddot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{p}_k,$$

onde usamos as relações

$$\dot{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{p}_k = \dot{\omega} \times \mathbf{p}_k,$$

$$\Sigma^2 \rho_k = (\omega \cdot \rho_k) \omega - \omega^2 \rho_k.$$

Usando (4.3a), temos

$$\Omega^{-1} \ddot{\mathbf{r}}_k = \ddot{\rho}_k + 2\omega \times \dot{\rho}_k + \dot{\omega} \times \rho_k + (\omega \cdot \rho_k) \omega - \omega^2 \rho_k \quad (4.7)$$

Para escrevermos os resultados para a velocidade e aceleração em termos das condições iniciais usamos

$$\begin{cases} \rho_k &= \lambda \hat{\mathbf{1}} \mathbf{r}_k^0, \\ \dot{\rho}_k &= \dot{\lambda} \hat{\mathbf{1}} \mathbf{r}_k^0, \\ \ddot{\rho}_k &= \ddot{\lambda} \hat{\mathbf{1}} \mathbf{r}_k^0, \end{cases}$$

e substituindo em (4.6) e (4.7) finalmente temos

$$\text{velocidade} \rightarrow \Omega^{-1} \dot{\mathbf{r}}_k = (\dot{\lambda} \hat{\mathbf{1}} + \lambda \Sigma) \mathbf{r}_k^0 \quad (4.8a)$$

$$\text{aceleração} \rightarrow \Omega^{-1} \ddot{\mathbf{r}}_k = [\ddot{\lambda} \hat{\mathbf{1}} + 2\dot{\lambda} \Sigma + \lambda(\ddot{\Sigma} + \Sigma^2)] \mathbf{r}_k^0 \quad (4.8b)$$

Finalmente, lembramos de acordo com a expressão (2.1), a força agindo em cada partícula, $\mathbb{F}_k = \nabla_k U = m_k \mathbb{Q}_k$, no referencial (ξ, η, ζ) , é dada por

$$\Omega^{-1} \nabla_k U = \frac{1}{\lambda^2} \nabla U^0 = \frac{1}{\lambda^2} m_k \mathbb{Q}_k^0$$

E usando o resultado (4.8b) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_k^0 &= \mathbf{K}(t), \\ \mathbf{K}(t) &= \lambda^2 [\ddot{\lambda} \hat{\mathbf{1}} + 2\dot{\lambda} \Sigma + \lambda(\ddot{\Sigma} + \Sigma^2)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.1 Lagrangiana para soluções homográficas

Note que estamos procurando uma classe restrita de soluções, e precisamos impor condições sobre $\lambda(t)$ e $\Omega(t)$, para garantir que uma solução que satisfaça (2.20) seja solução do sistema (3.1). Vamos determinar a Lagrangiana do sistema no caso em que forçamos que a solução seja homográfica. Em seguida, obteremos as equações do movimento e analisarmos o comportamento dessas soluções.

Energia cinética. Para calcularmos a energia cinética do sistema, começamos calculando a velocidade de cada partícula de acordo com a relação (4.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= \left(\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} \right) \Big|_{(x,y,z)} = (v_{\xi^k}, v_{\eta^k}, v_{\zeta^k}) = \left(\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} \right) \Big|_{(\xi^k, \eta^k, \zeta^k)} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_k = \\ &= \left(\frac{d\xi^k}{dt} + \omega_2 \zeta^k - \omega_3 \eta^k, \frac{d\eta^k}{dt} - \omega_1 \zeta^k + \omega_3 \xi^k, \frac{d\zeta^k}{dt} + \omega_1 \eta^k - \omega_2 \xi^k \right) \end{aligned}$$

Somando para todos os corpos, temos a expressão para a energia cinética

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (v_{\xi^k}^2 + v_{\eta^k}^2 + v_{\zeta^k}^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\dot{\xi}^k + (\omega_2 \zeta^k - \omega_3 \eta^k) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\dot{\eta}^k + (-\omega_1 \zeta^k + \omega_3 \xi^k) \right]^2 + \left[\dot{\zeta}^k + (\omega_1 \eta^k - \omega_2 \xi^k) \right]^2 \right\} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Energia potencial. No sistema (ξ^k, η^k, ζ^k) o autopotencial do sistema é

$$U = \sum_{1 \leq j < k \leq N} G \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}} \equiv \frac{1}{\lambda} U^0 \quad (4.11)$$

onde U_0 é o autopotencial do sistema no referencial (x, y, z) no instante inicial,

$$U^0 = \sum_{1 \leq j < k \leq N} G \frac{m_j m_k}{r_{jk}^0}.$$

Lagrangiana Usando os resultados (4.10) e (4.11), a Lagrangiana do sistema (3.2) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left[(\dot{\xi}^k)^2 + (\dot{\eta}^k)^2 + (\dot{\zeta}^k)^2 + 2\dot{\xi}^k(\omega_2 \zeta^k - \omega_3 \eta^k) + 2\dot{\eta}^k(-\omega_1 \zeta^k + \omega_3 \xi^k) + \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{\zeta}^k(\omega_1 \eta^k - \omega_2 \xi^k) + (\omega_2 \zeta^k - \omega_3 \eta^k)^2 + (-\omega_1 \zeta^k + \omega_3 \xi^k)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\omega_1 \eta^k - \omega_2 \xi^k)^2 \right] + \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}} \quad (4.12) \end{aligned}$$

Equações de Euler-Lagrange Agora vamos determinar as equações do movimento para soluções homográficas substituindo a Lagrangiana (4.12) nas equações de Euler-Lagrange (3.3).

Para a coordenada ξ^k temos

$$\sum_{k=1}^N m_k \left[-\ddot{\xi}_k + (\omega_2 \dot{\zeta} - \omega_3 \dot{\eta}) - (\omega_3 \dot{\eta}_k - \omega_2 \dot{\zeta}_k) - \omega_3 (-\omega_1 \zeta_k + \omega_3 \xi_k) + \right. \\ \left. + \omega_2 (\omega_1 \eta_k - \omega_2 \xi_k) - \sum_{j \neq k} m_j \frac{(\xi_j - \xi_k)}{\rho_{jk}^3} \right] = 0$$

Substituindo $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \lambda(x_k^0, y_k^0, z_k^0)$ podemos escrever a expressão acima em termos das condições iniciais. Usando o fato de que se o argumento de uma soma de termos independentes se anula então o seu argumento também deve se anular, e multilpicando tudo por λ temos a seguinte equação do movimento:

$$x_k^0 \left[\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] + y_k^0 \left[\lambda^2 \omega_1 \omega_2 - \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_3) \right] + \\ + z_k^0 \left[\lambda^2 \omega_1 \omega_3 + \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_2) \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{(x_j^0 - x_k^0)}{(r_{jk}^0)^3} \quad (4.13)$$

Procedendo de maneira completamente análoga para as coordenadas generalizadas η_k e ζ_k , temos as seguintes equações do movimento

$$x_k^0 \left[\lambda^2 \omega_1 \omega_2 + \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_3) \right] + y_k^0 \left[\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda (\omega_1^2 + \omega_3^2) \right] + \\ + z_k^0 \left[\lambda^2 \omega_2 \omega_3 - \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_1) \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{(y_j^0 - y_k^0)}{(r_{jk}^0)^3} \quad (4.14)$$

$$x_k^0 \left[\lambda^2 \omega_1 \omega_3 - \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_2) \right] + y_k^0 \left[\lambda^2 \omega_2 \omega_3 + \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_1) \right] + \\ + z_k^0 \left[\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{(z_j^0 - z_k^0)}{(r_{jk}^0)^3} \quad (4.15)$$

Tendo em mãos as equações do movimento para o movimento homográfico no caso geral, podemos analisar cuidadosamente casos particulares para determinarmos, dentre todas as soluções desse tipo, quais são órbitas possíveis para o problema (3.1).

4.2 Movimento homográfico colinear

No caso em que o movimento é colinear podemos supor, sem perda de generalidade, que os N corpos estão sobre o eixo ξ no instante $t = t_0$, de forma que valem as seguintes restrições

$$\begin{cases} y_k^0 = z_k^0 = 0 & t = t_0, \quad \forall k \\ \eta_k = \zeta_k = 0 & \forall t, \quad \forall k \end{cases} \quad (4.16)$$

Também podemos escolher o sistema de eixos (ξ, η, ζ) de forma que a velocidade angular do sistema está no plano $\xi \times \zeta$, ou seja, $\omega_2 = 0$. Substituindo em (4.13), (4.14) e (4.15), temos

$$\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 \omega_3^2 = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{(x_j^0 - x_k^0)}{(r_{jk}^0)^3} \quad (4.17a)$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda^2 \omega_3) = 0 \quad (4.17b)$$

$$\lambda^2 \omega_1 \omega_2 = 0 \quad (4.17c)$$

De (4.17b), temos $\lambda^2 \omega_3 \equiv \alpha$, com α constante. De (4.17c), vamos separar dois casos.

Caso 1. Se escolhermos $\omega_1 \neq 0$, temos $\omega_2 = \omega_3 = 0$, isso significa que o eixo $O\xi$, que contém os N corpos, está fixo, e o momento angular total é dado por $\mathbb{L} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{p}_k \times \dot{\mathbf{p}}_k = 0$, de onde concluímos então que o movimento é homotético.

Caso 2. Se escolhermos $\omega_3 \neq 0$, temos $\omega_1 = \omega_2 = 0$, isso significa então que é o eixo $O\zeta$ que está fixo, bem como o plano $O\xi\eta$, de onde concluímos que o movimento é plano.

4.3 Movimento homográfico plano

No caso em que o movimento é planar podemos supor, sem perda de generalidade, que os N corpos estão sobre o eixo $\zeta = 0$ no instante $t = t_0$, de forma que valem as seguintes restrições

$$\begin{cases} z_k^0 = 0 & t = t_0, \quad \forall k \\ \zeta_k = 0 & \forall t, \quad \forall k \end{cases} \quad (4.18)$$

Substituindo as condições (4.18) em (4.13), (4.14) e (4.15) temos

$$x_k^0 \left[\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] + y_k^0 \left[\lambda^2 \omega_1 \omega_2 - \frac{d^2}{dt^2} (\lambda^2 \omega_3) \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{x_j^0 - x_k^0}{(r_{jk}^0)^3} \quad (4.19a)$$

$$x_k^0 \left[\lambda^2 \omega_2 \omega_2 + \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_3) \right] + y_k^0 \left[\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 (\omega_1^2 + \omega_3^2) \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{y_j^0 - y_k^0}{(r_{jk}^0)^3} \quad (4.19b)$$

$$x_k^0 \left[\lambda^2 \omega_1 \omega_3 - \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_2) \right] + y_k^0 \left[\lambda^2 \omega_2 \omega_3 + \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_1) \right] = 0 \quad (4.19c)$$

Podemos separar (4.19c) em dois casos.

Caso 1.

$$\frac{y_k^0}{x_k^0} = - \frac{\lambda^2 \omega_1 \omega_3 - \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_2)}{\lambda^2 \omega_2 \omega_3 + \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_1)}, \quad (4.20)$$

Note que nenhum dos termos da fração acima depende de k , de forma que

$$\frac{y_1^0}{x_1^0} = \frac{y_2^0}{x_2^0} = \dots = \frac{y_N^0}{x_N^0}, \quad (4.21)$$

Isso significa que todos os N corpos estão localizados sobre a mesma reta, como no caso analisado na seção 4.2.

Caso 2.

$$\lambda^2 \omega_1 \omega_3 - \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_2) = 0, \quad (4.22a)$$

$$\lambda^2 \omega_2 \omega_3 + \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_1) = 0. \quad (4.22b)$$

Multiplicando a equação (4.22a) por $-\lambda^2 \omega_2$ e a equação (4.22b) por $\lambda^2 \omega_1$, e somando, temos

$$\lambda^2 \omega_2 \frac{d}{dt} \lambda^2 \omega_2 + \lambda^2 \omega_1 \frac{d}{dt} \lambda^2 \omega_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\lambda^2 \omega_2)^2 + (\lambda^2 \omega_1)^2] = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^4 (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \text{const.} \quad (4.23)$$

Além disso, lembrando que x_k^0, y_k^0 e z_k^0 são constantes, de (4.19a) e (4.19b) temos as seguintes relações

$$\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) \propto \frac{1}{\lambda} \text{const}, \quad (4.24a)$$

$$\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 (\omega_1^2 + \omega_3^2) \propto \frac{1}{\lambda} \text{const}. \quad (4.24b)$$

Subtraindo (4.24b) de (4.24a) temos

$$\lambda^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \propto \frac{1}{\lambda} \text{const},$$

ou equivalentemente,

$$\lambda^3 (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \text{const}. \quad (4.25)$$

E comparando as relações (4.23) e (4.25) vamos novamente separar dois casos.

Caso 2a. $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Este caso será deixado para a Seção 4.4.

Caso 2b. $\lambda \propto \text{const}$. Seja então λ constante. Temos então que as equações (4.22) implicam $\omega_1 \omega_3 = \omega_2 \omega_3 = 0$, e portanto só podem ser satisfeitas simultaneamente se

- ou $\omega_3 = 0$,
- ou se $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Se tomarmos $\omega_3 = 0$, temos que o movimento é uma rotação em torno de alguma direção no plano $O\xi\eta$, que podemos escolher arbitrariamente como sendo a direção $O\xi$. Seja então $\omega_2 = 0$. A equação (4.19a) nos dá

$$\sum_{j \neq k} m_j \frac{x_j^0 - x_k^0}{(r_{jk}^0)^3} = 0,$$

e multiplicando por $m_k x_k^0$ e somando em k temos

$$\sum_{1 \leq j < k \leq N} -m_j m_k \frac{(x_j^0 - x_k^0)^2}{(r_{jk}^0)^3} = 0. \quad (4.26)$$

Mas uma soma de termos estritamente negativos não pode ser nula! Então não podemos ter λ constante com $\omega_3 = 0$, ou seja, o movimento não pode ser puramente homotético. A solução para este caso então só pode ser movimento planar com rotação (em torno do eixo $O\zeta$) com equilíbrio relativo (λ constante).

4.4 Movimento homográfico espacial

Neste caso, vamos adotar $O\zeta$ como sendo o eixo de rotação *instantâneo* do sistema, de forma que

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = 0 \\ \omega_3 \neq 0 \end{cases} \quad \forall t \quad (4.27)$$

Substituindo as condições (4.27) em (4.13), (4.14) e (4.15) temos

$$x_k^0 \left[\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 \omega_3^2 \right] - y_k^0 \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_3) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{x_j^0 - x_k^0}{(r_{jk}^0)^3}, \quad (4.28a)$$

$$x_k^0 \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_3) + y_k^0 \left[\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 \omega_3^2 \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} m_j \frac{y_j^0 - y_k^0}{(r_{jk}^0)^3}, \quad (4.28b)$$

$$z_k^0 \lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} \frac{z_j^0 - z_k^0}{(r_{jk}^0)^3}. \quad (4.28c)$$

Multiplicando (4.28a) por $-m_k y_k^0$ e (4.28b) por $m_k x_k^0$ e somando temos

$$m_k [(x_k^0)^2 + (y_k^0)^2] \frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_3) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{(r_{jk}^0)^3} [x_k^0 (y_j^0 - y_k^0) - y_k^0 (x_j^0 - x_k^0)].$$

Somando em k , o lado direito se anula, e lembrando que x_k^0 e y_k^0 são constantes, do lado esquerdo temos que

$$\frac{d}{dt} (\lambda^2 \omega_3) = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 \omega_3 = \text{const}, \quad (4.29)$$

mas substituindo em (4.28a) por exemplo temos

$$\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda^2 \omega_3^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{x_k^0} \sum_{j \neq k} m_j \frac{x_j^0 - x_k^0}{(r_{jk}^0)^3} \propto \frac{1}{\lambda} \text{const},$$

e substituindo em (4.28c) temos

$$\lambda \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{z_k^0} \sum_{j \neq k} m_j \frac{z_j^0 - z_k^0}{(r_{jk}^0)^3} \propto \frac{1}{\lambda} \text{const}, \quad (4.30)$$

e assim concluímos que

$$\lambda^2 \omega_3^2 \propto \frac{\text{const}}{\lambda}. \quad (4.31)$$

Comparando as conclusões (4.23) e (4.24b) temos que

$$\lambda \omega \propto \text{const},$$

de onde vamos separar dois casos.

Caso 1 $\omega_3 \neq 0 \therefore \lambda = \text{const}$, e da equação (4.30) temos

$$\sum_{j \neq k} m_j \frac{z_j^0 - z_k^0}{(r_{jk}^0)^3} = 0,$$

e multiplicando por $m_k z_k^0$ e somando em k novamente temos

$$\sum_{1 \leq j < k \leq N} -m_j m_k \frac{(z_j^0 - z_k^0)}{(r_{jk}^0)^3} = 0. \quad (4.32)$$

Novamente, uma soma de termos estritamente negativos não pode se anular, de forma que não podemos ter $\omega_3 \neq 0$.

Caso 2 $\omega_3 = 0 \therefore \lambda$ arbitrário, o momento angular é nulo, e o movimento é puramente homotético. Da equação (4.30) temos

$$\lambda^2 \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \equiv -\beta^2 (\text{constante}), \quad (4.33)$$

de onde vemos que os corpos se movem sobre uma mesma reta passando pelo centro de massa.

4.5 Conclusões a respeito das soluções homográficas

Se a solução for homográfica [26], apenas duas coisas podem acontecer, dependendo do valor do momento angular.

Momento angular não nulo Se $\omega \neq 0$, então o movimento é obrigatoriamente plano. Em particular, a solução pode ser retilínea e, portanto, instável, ou colinear (e assim generalizamos a solução de Euler), ou os corpos podem estar sobre os vértices de um polígono regular (e assim generalizamos a solução de Lagrange).

Sempre podemos escolher o plano xy como o plano em que ocorre o movimento, de forma que $\zeta_k = \dot{\zeta}_k = 0 \forall k$. Ainda podemos adotar $\omega_1 = \omega_2 = 0$ e

$\omega_3 = \dot{\phi}$, onde $\dot{\phi}$ é o módulo da velocidade angular entre os dois sistemas de referência. Usando a expressão (2.4), temos que o módulo do momento angular neste caso é dado por

$$L = I\dot{\phi} = \lambda^2 \dot{\phi} I^0. \quad (4.34)$$

No referencial (ξ, η, ζ) , de acordo com as expressões (4.8a) e (4.8b), a velocidade e a aceleração de cada partícula são dados por

$$\text{velocidade} \rightarrow \mathbf{\Omega}^{-1} \dot{\mathbf{r}}_k = \begin{bmatrix} \dot{\xi}^k \\ \dot{\eta}^k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi^k \\ \eta^k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}^k - \eta^k \dot{\phi} \\ \dot{\eta}^k + \xi^k \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \text{aceleração} \rightarrow \mathbf{\Omega}^{-1} \ddot{\mathbf{r}}_k &= \begin{bmatrix} \ddot{\xi}^k \\ \ddot{\eta}^k \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\xi}^k \\ \dot{\eta}^k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi^k \\ \eta^k \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^k \\ \eta^k \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^k \\ \eta^k \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{\xi}^k - 2\dot{\eta}^k \dot{\phi} - \xi^k \dot{\phi}^2 - \eta^k \ddot{\phi} \\ \ddot{\eta}^k + 2\dot{\xi}^k \dot{\phi} - \eta^k \dot{\phi}^2 + \xi^k \ddot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Usando a expressão (4.35), a energia cinética fica

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [(\dot{\xi}^k - \eta^k \dot{\phi})^2 + (\dot{\eta}^k + \xi^k \dot{\phi})^2] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [(\dot{\xi}^k)^2 + (\dot{\eta}^k)^2 + \dot{\phi}^2((\xi^k)^2 + (\eta^k)^2) + 2\dot{\phi}(\xi^k \dot{\eta}^k - \dot{\xi}^k \eta^k)] \end{aligned}$$

Analisando separadamente cada termo desta soma, se substituirmos $\wp_k = \mathbf{r}_k$ e compararmos com a expressão para o momento de inércia (2.4), para o primeiro termo temos

$$\sum_{k=1}^N m_k (\dot{\xi}^k)^2 + (\dot{\eta}^k)^2 = \sum_{k=1}^N m_k \lambda^2 [((x^k)^0)^2 + ((y^k)^0)^2] = \lambda^2 I^0.$$

De forma análoga, para o segundo e o último termo temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N m_k \dot{\phi}^2 ((\xi^k)^2 + (\eta^k)^2) &= \sum_{k=1}^N m_k \dot{\phi}^2 \lambda^2 [((x^k)^0)^2 + ((y^k)^0)^2] = \dot{\phi}^2 \lambda^2 I^0, \\ \sum_{k=1}^N m_k 2\dot{\phi}(\xi^k \dot{\eta}^k + \dot{\xi}^k \eta^k) &= \sum_{k=1}^N m_k 2\dot{\phi} \lambda \dot{\lambda} [(x^k)^0 (y^k)^0 - (y^k)^0 (x^k)^0] = 0.\end{aligned}$$

E substituindo esses termos na expressão para a energia cinética temos

$$T = \frac{1}{2} [\dot{\lambda}^2 + (\lambda \dot{\phi})^2] I^0. \quad (4.37)$$

De acordo com a expressão (3.14), com este resultado temos também que

$$E = \frac{1}{2} [\dot{\lambda}^2 + (\lambda \dot{\phi})^2] - \frac{U^0}{\lambda}. \quad (4.38)$$

E finalmente, de acordo com a expressão (4.9), a matriz $\mathbf{K}$ fica

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} \lambda^2 (\ddot{\lambda} - \lambda \dot{\phi}^2) & -\lambda^2 (\lambda \ddot{\phi} + 2\dot{\lambda} \dot{\phi}) & 0 \\ \lambda^2 (\lambda \ddot{\phi} + 2\dot{\lambda} \dot{\phi}) & \lambda^2 (\ddot{\lambda} - \lambda \dot{\phi}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \ddot{\lambda} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Momento angular nulo Se $\omega = 0$, então o movimento é homotético. Neste caso, continuam valendo as expressões obtidas no ítem anterior, calculadas no caso particular em que $\dot{\phi} = 0$, de forma que

$$L = 0, \quad (4.40)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 I^0, \quad (4.41)$$

$$E = \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 I^0 - \frac{U^0}{\lambda}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} \lambda^2 \ddot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \ddot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \ddot{\lambda} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Para ambos os casos, vale que da identidade de Jacobi-Lagrange (2.5) temos

$$\ddot{I} = \frac{d^2}{dt^2} (\lambda^2 I^0) = \frac{d}{dt} (2\lambda \dot{\lambda} I^0) = 2(\dot{\lambda}^2 + \lambda \ddot{\lambda}) I^0,$$

de forma que

$$2E = I^0(\dot{\lambda}^2 + \lambda\ddot{\lambda}) - \frac{U^0}{\lambda} \quad (4.44)$$

4.6 Como gerar uma solução homográfica

Para que possamos prever quando o movimento homográfico surge como solução do problema de N corpos (3.1), precisamos definir o que é uma *configuração central*, e em seguida consideramos um teorema que relaciona as soluções homográficas às configurações iniciais centrais [35].

Definição 4.1 (Configuração central). Uma configuração é chamada de *configuração central* em t_0 se, dado $t = t_0$, a força agindo sobre cada um dos N corpos é proporcional à sua massa m_k e à sua posição $\mathbb{r}_k$, ou seja,

$$\mathbb{F}_k = \nabla_k U = \sigma m_k \mathbb{r}_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots, N \quad (4.45)$$

onde $\nabla_k U \equiv (\frac{\partial U}{\partial x_k} \hat{i}, \frac{\partial U}{\partial y_k} \hat{j}, \frac{\partial U}{\partial z_k} \hat{k})$ e σ não depende de k .

Vamos tentar entender o que significa uma configuração central. Para isso, consideramos a soma $\sum_{k=1}^N \mathbb{r}_k \cdot \mathbb{F}_k$, que para configurações centrais fica

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{r}_k \cdot \nabla_k U = \sigma \sum_{k=1}^N m_k |\mathbb{r}_k|^2 = \sigma I,$$

onde I é o momento de inércia total do sistema. Mas de acordo com a expressão (2.1) e o teorema 1.1a, temos $\sum_k \mathbb{r}_k \cdot \nabla_k U = (-1)U$, e da expressão acima vemos que

$$\sigma = -\frac{U}{I}. \quad (4.46)$$

Multiplicando a expressão acima por $m_k \mathbb{r}_k$ temos

$$-\frac{U}{I} m_k \mathbb{r}_k = \nabla_k U,$$

e ainda multiplicando por IU , usando $\nabla_k I = 2m_k \mathbb{r}_k$, temos

$$2IU \nabla_k U + U^2 \nabla_k I = 0 \therefore \nabla_k (IU^2) = 0,$$

de onde vemos que as configurações centrais são *pontos críticos* da função IU^2 .

Teorema 4.1. *O movimento é homográfico $\Leftrightarrow$ a configuração inicial dos N corpos é uma configuração central.*

Demonstração. Para demonstrarmos o teorema, podemos trabalhar com o caso em que o momento angular é nulo, como vimos na seção 4.5, uma vez que o outro é um caso particular deste. Nesta seção, vamos mostrar que configuração inicial central é uma *condição necessária* para que a solução seja homográfica, ou seja,

$$\boxed{\text{movimento homográfico} \Rightarrow \text{configuração central}}$$

Vamos começar renormalizando U , E e c em unidades de I^0 , definindo

$$m_0 = \frac{U^0}{I^0} \equiv \sigma, \quad E_0 = \frac{E}{I^0}, \quad e \quad c_0 = \frac{c}{I^0} \quad (4.47)$$

Multiplicando (4.40) por $\frac{1}{I^0}$, (4.38) por $\frac{2}{I^0}$ e (4.44) por $\frac{1}{I^0}$ e substituindo as expressões renormalizadas acima temos, respectivamente,

$$c_0 = \lambda^2 \dot{\phi} \quad (4.48)$$

$$2E_0 = (\dot{\lambda}^2 + \lambda^2 \dot{\phi}^2) - \frac{2m_0}{\lambda} \quad (4.49)$$

$$2E_0 = (\dot{\lambda}^2 + \lambda^2 \ddot{\lambda}) - \frac{m_0}{\lambda} \quad (4.50)$$

Subtraindo (4.49) de (4.50) temos que para $\lambda \neq 0$ vale $\lambda^2(\ddot{\lambda} - \lambda \dot{\phi}^2) = -m_0$, e derivando a expressão (4.48), novamente para $\lambda \neq 0$, temos $2\dot{\lambda}\dot{\phi} + \lambda\ddot{\phi}$. Substituindo esses dois últimos resultados em (4.39) temos

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -m_0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_0 \end{pmatrix}.$$

A aceleração de cada um dos corpos do sistema, calculada no instante inicial, é dada por

$$\mathfrak{a}_k^0 = \mathbf{K}(t) \mathfrak{r}_k^0 = \begin{bmatrix} -m_0 x_k^0 \\ -m_0 y_k^0 \\ -m_0 z_k^0 + \lambda^3 \dot{\phi}^2 \end{bmatrix} = \sigma \mathfrak{r}_k^0 = \frac{1}{m_k} \nabla_k U \quad (4.51)$$

Veja que recuperamos a definição 4.1 tanto para $z_k^0 = 0$, como no caso (I), quanto para $\dot{\phi} = 0$, como no caso (II), de onde vemos que a configuração inicial é central!

□

Capítulo 5

Soluções Coreográficas

“I am absorbed in the magic of movement and light. Movement never lies. It is the magic of what I call the outer space of the imagination. There is a great deal of outer space, distant from our daily lives, where I feel our imagination wanders sometimes. It will find a planet or it will not find a planet, and that is what a dancer does.”

– Martha Graham.

As famílias de soluções descobertas por Chris Moore em 1993 apresentam em comum a propriedade de que todos os corpos se deslocam sobre *a mesma curva*, e estão igualmente separados no tempo ao longo da sua trajetória. Estas órbitas receberam o nome de *coreografias*. Desta forma, se T é o período de uma solução coreográfica, temos

$$\mathbb{X}_i(t) = \mathbb{X}\left(t + \frac{i-1}{N}T\right) \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Podemos encontrar coreografias que apresentem diferentes formas e valores de N , garantindo ainda a sua estabilidade numérica. Podemos também variar a massa dos corpos e avaliar para quais razões entre as massas se obtêm soluções coreográficas. Neste capítulo, vamos fazer uma análise detalhada da solução em forma de oito, e em seguida faremos simulações numéricas para obter algumas soluções coreográficas.

5.1 A solução em forma de oito

A solução em forma de oito é uma solução plana para o problema de três corpos no caso particular em que todos possuem a mesma massa. Como vimos na seção 3.2, as simetrias envolvidas em um problema são capazes de eliminar alguns

dos seus graus de liberdade. No caso em questão, antes de tirarmos as colisões, o nosso espaço de configurações é dado por $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^6$, mas podemos mostrar que devido ao fato da invariância das leis de Newton por isometrias, este espaço pode ser representado por uma esfera. Para começar, note que três corpos formam sempre um triângulo no espaço das configurações, e que portanto podemos então descrever uma solução para este problema como sucessivas translações, rotações e homotetias em um triângulo orientado.

Shape Sphere. Com a ajuda das simetrias do problema, o nosso espaço de fase será transformado topologicamente em uma esfera onde cada ponto corresponde a uma configuração possível para o triângulo determinado pelos três corpos, conhecida como a esfera dos triângulos orientados ou, em inglês, como *Shape Sphere*. Para isso, passaremos ao quociente de $\mathbb{R}^6$ através dos três procedimento que seguem descritos abaixo.

Coordenadas de Jacobi. As coordenadas de Jacobi consistem em um processo análogo à redução do Problema de Kepler ao problema de um único corpo. No caso $N = 3$, trocamos as coordenadas dos corpos 2 e 3 pela distância relativa entre eles,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3,$$

e em seguida repetimos este procedimento fazendo

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3},$$

Desta forma, reduzimos este problema à determinação das equações de movimento de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, e passamos de $\mathbb{R}^6$ a $\mathbb{R}^4$. Este procedimento elimina degenerescências por translação da solução.

Aplicação de Hopf. A aplicação de Hopf consiste em um mapa $m : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ dado por

$$(z_1, z_2) \rightarrow (2z_1^* z_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \equiv (z, x), \quad (5.1)$$

através do qual transformamos uma dupla ordenada de números complexos em uma dupla ordenada na qual a primeira entrada é um número complexo e a segunda é um número real puro. Se escrevermos $z_1 = x_1 + ix_2$ e $z_2 = x_3 + ix_4$, podemos identificar $\mathbb{C}^2$ com $\mathbb{R}^4$, e se escrevermos $z = x_1 + ix_2$ e $x = x_3$, podemos identificar $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ com $\mathbb{R}^3$. Note então que através desta aplicação passamos de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$. Considere agora a 3-esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, dada por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

O mapa (5.1) preserva a relação (??), pois

$$|z|^2 + x^2 = 2z_1^* z_2 \cdot 2z_1 z_2^* + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = 1,$$

ou seja, ele leva uma 3-esfera $\mathbb{S}^3$ a uma 2-esfera $\mathbb{S}^2$. Este procedimento elimina degenerescências por rotação da solução.

Fixação do momento de inércia. No caso em que as massas são iguais, sejam a , b , e c os lados do triângulo formado pelos 3 corpos. Temos

$$I = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

de maneira que fixar $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ é equivalente a fixar $I = 1$. Com isso passamos de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{S}^2$.

Vamos agora localizar alguns pontos que representam configurações notáveis nesta esfera.

- L^+ e L^- representam as configurações de Lagrange girando nos sentidos horário e anti-horário, respectivamente. Esses pontos são os polos da esfera.
- O equador é o espaço dos triângulos degenerados, ou seja, ele contém as configurações colineares. A origem da esfera é o ponto que representa uma colisão tripla do sistema. Excluímos este ponto quando fixamos o momento de inércia $I > 0$. Em particular, no equador se encontram os pontos EUL_i , a configuração de Euler na qual o i -ésimo corpo está entre os demais, e C_i , a colisão dupla entre os corpos “ j ” e “ k ”. No caso em que as massas são iguais esses pontos estão igualmente espaçados sobre o equador, e para um dado “ i ” as configurações EUL_i e C_i são diametralmente opostas.
- $ISOSC_i$ representa a variedade que contém os triângulos isósceles em que o i -ésimo corpo está no vértice oposto à base. Esta variedade é representada por um meridiano que cruza o equador nos pontos EUL_i e C_i .

Temos assim que o espaço das configurações pode ser representado pelo espaço dos triângulos orientados $\mathcal{C} = \mathbb{S}^2 \setminus \{C_1, C_2, C_3\}$. A métrica deste espaço topológico é determinada pela energia cinética do problema, e é dada pela expressão (2.2). Sejam $x(t) \in \mathcal{Q}$ uma solução para as equações de Newton e $c(t) \in \mathcal{C}$ a sua projeção sobre $\mathcal{C}$, que chamaremos de *solução reduzida*. Vamos relacionar uma dada configuração à sua imagem através do mapa $\pi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{C}$, de forma que

Figura 5.1: *Shape Sphere*, ou esfera dos triângulos orientados. Cada ponto desta casca esférica representa uma configuração possível para o triângulo orientado formado pelos 3 corpos.

$c(t) = \pi(x(t))$. Além disso, se M é uma subvariedade de $\mathcal{Q}$, então também podemos utilizar o mapa π para relacioná-la a uma subvariedade M de $\mathcal{C}$. Seja também $\dot{c}(t) \in T\mathcal{C}$ o vetor tangente a $c(t)$ a cada instante t . Vamos definir a energia cinética

$$K_c(c, \dot{c}) = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ denota a métrica Riemanniana no ponto $c(t)$. Pode-se mostrar [36] que

$$K(\dot{x}) = K_c(c, \dot{c}) + \frac{|L(x, \dot{x})|^2}{I}. \quad (5.2)$$

Assim como as equações de Newton, o autopotencial $U(x)$ também é invariante sob isometrias, e pode ser naturalmente transformado para uma função $U(c)$ no espaço dos triângulos orientados tal que $U(c) = U(x)$. Podemos definir então a *Lagrangiana reduzida*

$$\mathcal{L}_c(c, \dot{c}) = \frac{1}{2} K_c(c, \dot{c}) + U(c),$$

e a ação reduzida

$$\mathcal{A}_c(c) = \int_c \mathcal{L}_c dt.$$

Note que sempre é possível escolher uma rotação $g(t)$ de forma que $g(t)c(t) \in \mathcal{C}$ é uma curva com momento angular nulo que possui a mesma forma de $c(t)$. Neste caso, pela expressão (5.2) temos $K(\dot{x}) = K_c(\dot{c})$, o que implica

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \mathcal{L}_c(c, \dot{c}), \quad (5.3a)$$

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_c(c). \quad (5.3b)$$

Para resolvermos as equações de Newton (3.1), precisamos encontrar a solução $x(t)$ que liga duas subvariedades $M_1, M_2 \subset \mathcal{Q}$ num intervalo de tempo $\bar{T}$, que minimiza a ação $\mathcal{A}(x)$. De acordo com as relações (5.3), isso é equivalente a encontrar a solução reduzida $c(t)$ que liga as variedades $E_i = \pi(M_i) \in \mathcal{C}$, com $i = 1, 2$, neste mesmo intervalo de tempo, que minimiza a ação $\mathcal{A}_c(c)$. Se a curva obtida não apresentar colisões, em princípio é possível a partir dela encontrar a curva $x(t)$ através do mapa π .

Solução reduzida. Para minimizar a ação em $\mathcal{C}$, vamos usar a ideia de que, dentre as curvas que ligam duas subvariedades, a que minimiza a ação é aquela que cruza as subvariedades E_1 em $t = 0$ e E_2 em $t = \bar{T}$ ortogonalmente.

Adotando $E_1 = EUL_1$, $E_2 = ISOSC_2$, e $\bar{T} = \frac{T}{12}$, e usando o teorema 2.3, vemos que existe uma curva $c(t)$ que satisfaz essa propriedade (ver Figura 5.2). Além disso, no caso em que as massas são todas iguais, reflexões em torno dos meridianos $ISOSC_i$ são operações de simetria, ou seja, mantêm invariantes a Lagrangiana e a ação. Estas operações, portanto, levam soluções reduzidas a soluções reduzidas. Se refletirmos a solução obtida em torno do meridiano $ISOSC_2$, obtemos uma nova curva $c'(t)$ que leva de $ISOSC_2$ a EUL_3 com ação mínima num tempo $\bar{T}$, mas com velocidade oposta à velocidade da curva $c(t)$ calculada em $ISOSC_2$.

Figura 5.2: Trajetória que leva da posição EUL_1 à posição $ISOSC_2$ com ação mínima no espaço dos triângulos orientados.

Podemos então inverter temporalmente a curva $c'(t)$ (o que equivale a uma reflexão em torno do equador no espaço dos triângulos orientados) e concatená-la com primeira curva. Encontramos assim uma nova curva, que chamaremos de $c(t)$, que é uma solução reduzida do problema no intervalo de tempo $0 \leq t \leq \frac{T}{6}$ (ver Figura 5.3).

Prosseguindo desta maneira, aplicando sucessivas reflexões em torno dos meridianos $ISOSC_1$ e $ISOSC_3$ seguidas de reflexões em torno do equador, obtemos uma curva $c(t)$, que é uma solução reduzida do problema no intervalo de tempo $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$. Esta curva nos leva de volta à posição inicial EUL_1 , mas com as velocidades opostas às velocidades iniciais das partículas. Para obtermos uma solução periódica, fazemos uma nova reflexão em torno do equador e concatenamos as duas curvas. Obtemos assim uma órbita fechada $c(t)$, que é uma solução reduzida do problema no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, passando duas vezes por todas as configurações EUL_i e $ISOSC_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Voltando ao espaço das configurações. Agora nos resta obter a curva $x(t)$ que é solução para as equações de Newton (3.1) no espaço das configurações. Precisamos mostrar que o período desta solução é T e que nela os três corpos se movem sobre a mesma curva em forma de oito. No espaço dos triângulos orientados, a nossa solução foi obtida através de reflexões ao redor dos meridianos $ISOSC_i$ seguidas de reflexões em torno do equador, para mantermos a orientação do triângulo inicial. Suponha que queiramos continuar a solução obtida para $0 \leq t \leq \frac{T}{6}$ a partir de uma reflexão em torno de $ISOSC_3$. Precisamos determinar o

Figura 5.3: Em vermelho, temos a trajetória que leva da posição $ISOSC_2$ à posição EUL_1 com ação mínima no espaço dos triângulos orientados. Concatenando as curvas em azul e em vermelho, temos uma curva com ação mínima no intervalo $0 \leq t \leq \frac{T}{6}$.

análogo desta operação no espaço das configurações. Considere como candidata a operação de permutação entre os corpos 1 e 2 dada por

$$\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3).$$

Note que esta operação inverte a orientação do triângulo original. No instante $t = \frac{T}{6}$, o sistema se encontra na configuração EUL_3 . Temos então $x\left(\frac{T}{6}\right) = (x, -x, 0)$ e se aplicarmos a operação σ_3 temos

$$\sigma_3 x\left(\frac{T}{6}\right) = (-x, x, 0) \neq x\left(\frac{T}{6}\right).$$

Figura 5.4: A operação σ_3 inverte a orientação do triângulo formado pelos 3 corpos, não sendo portanto uma operação de simetria.

Assim vemos que é impossível continuar a solução encontrada a partir do instante $t - \frac{T}{6}$ através de σ_3 . Entretanto, podemos combinar esta operação com uma

rotação g de modo que

$$g \circ \sigma_3 x \left(\frac{T}{6} \right) = x \left(\frac{T}{6} \right).$$

Para que a condição acima seja satisfeita, devemos ter $g(x_i) = -x_i$, ou seja, g deve representar uma rotação de 180° .

Figura 5.5: A operação σ_3 composta com uma rotação de 180° é uma operação de simetria e permite a continuação da construção no espaço das configurações.

Com isso podemos então estender a nossa solução está definida até o instante

$$\frac{T}{6} + \left(\frac{T}{6} - t \right) = \frac{T}{3} - t.$$

Veja então que no intervalo $0 \leq t \leq \frac{T}{3}$ temos a seguinte equação funcional

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \left(-x_2 \left(\frac{T}{3} - t \right), -x_1 \left(\frac{T}{3} - t \right), -x_3 \left(\frac{T}{3} - t \right) \right),$$

de forma que se escolhermos $x(0) = EUL_1 = (-a, 0, a)$, para $t = \frac{T}{3}$ temos

$$x \left(\frac{T}{3} \right) = (-a, 0, a) \equiv px(0),$$

onde $p(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$. Veja que

$$\begin{aligned} p^2(x_1, x_2, x_3) &= (x_2, x_3, x_1) \\ p^3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \equiv \mathbb{1} \end{aligned}$$

Se aplicarmos o operador p ao vetor das posições três vezes voltamos à posição inicial. Então para obtermos uma solução periódica, é necessário que o seu período seja T . Vemos assim que o período no espaço das configurações é o mesmo do espaço dos triângulos orientados. Mostramos também que todos os corpos se movem sobre a mesma curva. Para $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ a solução está no primeiro quadrante, e mostrando que o momento angular $L = r^2 \dot{\theta}$ é positivo, temos que esta

Figura 5.6: Parte da solução contida no primeiro quadrante. Como $L = r^2\dot{\theta}$ é positivo, temos que esta curva é estrelada.

Figura 5.7: Construção da solução em forma de oito. O trecho da órbita que vai de $ISOSC_2$ a EUL_3 foi obtido através de reflexão do trecho que vai de EUL_1 a $ISOSC_2$, e assim sucessivamente. As figuras acima foram retiradas do site de Cris Moore [4].

curva é estrelada. Refletindo nos eixos $\mathcal{O}x$ e $\mathcal{O}y$ obtemos uma curva periódica que satisfaz as condições acima. Mostramos assim que a curva em forma de oito é uma solução para o Problema de N Corpos.

5.2 Simulações numéricas

Agora nós vamos usar o programa do Apêndice A para gerar órbitas coreográficas. Para descartarmos erros devidos a limitações do código e podermos fazer perturbações nas condições iniciais e nos parâmetros das soluções obtidas, escolhamos o passo de integração de maneira que o erro e na energia total depois de cerca de 100 voltas deve satisfazer [37]

$$e = \frac{E_f - E_0}{E_0} < 1\%. \quad (5.4)$$

e, no momento de analisarmos os efeitos dessas perturbações observamos apenas cerca 10 voltas da solução perturbada. Outro teste possível para analisar a qualidade de uma simulação é reverter temporalmente o resultado final, e comparar os dois resultados. Em todos os casos simulados, vimos que quando o erro na energia é de fato pequeno, a reversão temporal obtida é igual à solução inicial.

Para testar o programa, nós simulamos duas versões do Problema de Kepler, uma órbita plana fechada e periódica, e uma tridimensional aberta porém limitada. Em seguida, vamos gerar as soluções de Euler e Lagrange, que são soluções homográficas conhecidas para o Problema de 3 corpos, e também vamos gerar a solução descoberta por Hénon em 1976. Finalmente, vamos usar o programa para gerar algumas soluções coreográficas e discutir a sua estabilidade.

Soluções de Kepler

As condições iniciais usadas para gerar a órbita fechada estão na Tabela 5.1, e as usadas para gerar a órbita tridimensional aberta estão na Tabela 5.2. Em ambos os casos, se o passo de integração for $h = 10^{-5}$, podemos gerar apenas cerca de 50 voltas com $e < 1\%$. Entretanto, para passos de integração menores que $h = 10^{-6}$, podemos gerar centenas de voltas garantindo a estabilidade do código, ou seja, mantendo o desvio na energia pequeno e a forma e a posição da órbita estáveis.

Tabela 5.1: Dados utilizados para gerar a solução de Kepler plana e periódica.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.5$		
$\mathbf{x}_0$	-0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\dot{\mathbf{x}}_0$	0.0	-1.5	0.0	0.0	1.0	0.0

Para a Tabela 5.1, obtivemos o resultado da Figura 5.8, em que ambos os corpos seguem órbitas elípticas com um dos focos no centro de massa do sistema.

Figura 5.8: Órbita fechada e periódica obtida como solução para o Problema de Kepler com os dados iniciais da Tabela 5.1. Se o passo de integração for menor que $h = 10^{-6}$ a solução é numericamente estável o suficiente para gerarmos centenas de voltas.

Tabela 5.2: Dados utilizados para gerar a solução de Kepler aberta tridimensional.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.5$		
$\mathbf{x}_0$	-0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\dot{\mathbf{x}}_0$	0.0	-1.5	0.0	0.0	1.0	0.2

Se o passo de integração for $h = 10^{-6}$, depois de 50 voltas temos $e \approx 0.11\%$, e podemos gerar centenas de voltas mantendo a órbita estável. Perturbações nas condições iniciais deste sistema, desde que mantenhamos $E < 0$, apenas mudam a excentricidade da elipse que descreve a órbita. Se perturbarmos a massa do corpo 1 com acréscimos da ordem de 10^{-3} , apesar do erro na energia continuar pequeno e a forma da órbita permanecer a mesma, o centro de massa translada na direção $y < 0$. Para a Tabela 5.2, obtivemos o resultado da Figura 5.9, em que os corpos seguem órbitas abertas porém limitadas. A projeção desta solução no plano $\mathcal{O}xy$ é idêntica à solução anterior (ver Figura 5.8), mas neste caso os corpos se deslocam com velocidade constante na direção $\mathcal{O}z$. Se o passo de integração for $h = 10^{-6}$, depois de 50 voltas temos $e \approx 0.23\%$, e podemos gerar centenas de

Solução de Kepler: órbita tridimensional aberta

Figura 5.9: Órbita aberta não planar obtida como solução para o Problema de Kepler com os dados iniciais da Tabela 5.2. A única diferença entre esta solução e a anterior é a velocidade inicial do corpo 2 na direção $\mathcal{O}z$, de maneira que a sua projeção sobre o plano $\mathcal{O}xy$ é igual à solução 5.8.

voltas mantendo a órbita estável. O resultado das perturbações é análogo ao do caso anterior.

Soluções homográficas

Agora vamos gerar as soluções de Euler e Lagrange com as condições iniciais das Tabelas 5.3 e 5.4.

Tabela 5.3: Dados utilizados para gerar a solução de Euler.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.0$			$m_3 = 1.0$		
x_0	0.0	0.0	0.0	20.0	0.0	0.0	-20.0	0.0	0.0
$\dot{x}_0$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	0.0	-0.25	0.0

Para a Tabela 5.3, obtivemos a solução de Euler da Figura 5.11. Se o passo de integração for $h = 10^{-4}$, depois de 10 voltas temos $e \approx 0.0121\%$, e o aspecto

Solução de Kepler: órbita 3D com $m_1=1.01$

Figura 5.10: Órbita aberta não planar obtida como solução para o Problema de Kepler com os dados iniciais da Tabela 5.2. A única diferença entre esta solução e a anterior é a velocidade inicial do corpo 2 na direção $\mathcal{O}z$, de maneira que a sua projeção sobre o plano $\mathcal{O}xy$ é igual à solução 5.8.

Tabela 5.4: Dados utilizados para gerar a solução de Lagrange.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.0$			$m_3 = 1.0$		
$\mathbf{x}_0$	0.0	10.0	0.0	$-5\sqrt{3}$	-5.0	0.0	$5\sqrt{3}$	-5.0	0.0
$\dot{\mathbf{x}}_0$	-0.24	0.0	0.0	0.12	-0.21	0.0	0.12	0.21	0.0

da solução é como o esperado (ver Figura 1.1a). Vamos então perturbar as condições iniciais da Tabela 5.3. Começamos perturbando as posições iniciais dos corpos 2 e 3. Se puxarmos ambos no mesmo sentido em qualquer direção, vemos que os corpos escapam rapidamente, mesmo para perturbações da ordem de 10^{-4} . Entretanto, se puxarmos ambos em sentidos opostos, obtemos uma outra solução estável, e o período aumenta cerca de 20%. A Figura 5.12, por exemplo, por exemplo, foi obtida fazendo-se $x_2 = -x_3 = 21$. Podemos também perturbar as velocidades iniciais. Se fizermos $\dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 10^{-2}$, os corpos escapam, e se fizermos $\dot{x}_2 = -\dot{x}_3 = 10^{-2}$ obtemos uma solução estável como em 5.12. Já se perturbarmos as velocidades na direção $\mathcal{O}y$ a solução diverge de qualquer maneira. Para a Tabela 5.4, obtivemos a solução de Lagrange da Figura 5.13. Se o passo de inte-

Figura 5.11: Solução de Euler em $t = \frac{T}{2}$ simulada com os dados da Tabela 5.3. Para esta simulação escolhemos $h = 10^{-4}$.

Figura 5.12: Solução de Euler em que fizemos $x_2 = -x_3 = 21$, mantendo $h = 10^{-4}$, e obtivemos assim uma nova órbita estável em que os círculos descritos por esses corpos não são mais concêntricos.

Figura 5.13: Simulação numérica para a Solução de Lagrange com os dados iniciais da Tabela 5.4. Neste caso o erro na energia cresce muito rapidamente devido a problemas técnicos.

gração for $h = 10^{-4}$, depois de 10 voltas temos $e \approx 0.011\%$, mas para esta solução o erro na energia cresce muito rapidamente devido a problemas técnicos com as aproximações numéricas das condições iniciais, ou seja, isso não representa uma instabilidade intrínseca dessa solução. Como o erro na energia é muito grande, os resultados das perturbações nessa órbita não são muito confiáveis. É possível que um algoritmo mais sofisticado possa contornar esse problemas. Segundo a literatura, as soluções de Euler e Lagrange, no caso geral, são pouco estáveis, mas a solução de Lagrange no caso em que uma das massas é bem maior que as outras é bastante estável.

Solução de Hénon

Vamos gerar também a solução para o caso $N = 3$ descoberta por Hénon em 1976, e simulada também por Cris Moore. As condições iniciais para esta órbita seguem na Tabela 5.5, e foram obtidas na referência [23].

Para a Tabela 5.5, obtivemos a solução de Hénon da Figura 5.14. Se o passo de integração for $h = 10^{-6}$, depois de 100 voltas o erro acumulado é $e \approx 0.15\%$, e conseguimos gerar centenas de voltas com erro $e \approx 1\%$. Vemos então que esta é uma em que o código não apresenta instabilidades. Vamos então perturbar as

Tabela 5.5: Dados utilizados para gerar a solução de Hénon.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.0$			$m_3 = 1.0$		
$\mathbf{x}_0$	-1.00496	0.0	0.0	1.07590	0.0	0.0	-0.07095	0.0	0.0
$\dot{\mathbf{x}}_0$	0.0	1.03678	0.0	0.0	0.19509	0.0	0.0	-1.23187	0.0

Figura 5.14: Solução de Hénon em $t = T$. Para esta solução, com $h = 10^{-6}$ o código gera simulações confiáveis segundo o nosso critério.

condições iniciais desta solução, integrando as equações do movimento com passo $h = 5 \cdot 10^{-6}$. Se fizermos $x_2 = 1.077$ e $x_3 = -0.07210$, obtemos uma solução em que as órbitas dos corpos 2 e 3 precessam no sentido horário, como na Figura 5.15, e se fizermos $x_1 = -1.009$, obtemos uma solução em que as órbitas dos corpos 2 e 3 precessam no sentido anti-horário, como na Figura 5.16.

Soluções coreográficas

Agora vamos gerar a solução em forma de oito. As condições iniciais nessas simulações seguem na Tabela 5.6, e foram obtidas da referência [24].

Para a Tabela 5.6, obtivemos o resultado da Figura 5.17. Se o passo de integração for $h = 10^{-6}$, depois de 100 voltas temos $e \approx 0.33\%$, e a órbita simulada tem exatamente o aspecto esperado (ver Figura 1.5). Podemos gerar assim centenas de

Figura 5.15: Órbita em que os corpos 1 e 2 precessam no sentido horário, obtida com as condições iniciais perturbadas em que puxamos o corpo 1 para direita e o corpo 2 para baixo.

Tabela 5.6: Dados utilizados para gerar a solução em forma de oito.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.0$			$m_3 = 1.0$		
x_0	0.970	-0.243	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.970	0.243	0.0
$\dot{x}_0$	0.466	0.4325	0.0	-0.932	-0.865	0.0	0.466	0.4325	0.0

Tabela 5.7: Dados utilizados para gerar a cadeia de 3 ventres.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.0$		
x_0	1.382857	0.0	0.0	0.0	0.157030	0.0
$\dot{x}_0$	0.0	0.584873	0.0	1.871935	0.0	0.0
	$m_3 = 1.0$			$m_4 = 1.0$		
x_0	-1.382857	0.0	0.0	0.0	-0.157030	0.0
$\dot{x}_0$	0.0	-0.584873	0.0	-1.871935	0.0	0.0

Figura 5.16: Órbita em que os corpos 1 e 2 precessam no sentido anti-horário, obtida com as condições iniciais perturbadas em que puxamos o corpo 1 para direita e o corpo 3 para esquerda.

Figura 5.17: Solução em forma de oito em $t = \frac{T}{3}$ obtida com as condições iniciais da Tabela 5.6 e passo de integração $h = 10^{-6}$.

Figura 5.18: Órbita com as condições iniciais perturbadas com $h = 5 \cdot 10^{-6}$ em que perturbações nas condições iniciais da ordem de 10^{-3} fazem a órbita precessar no sentido horário.

Tabela 5.8: Dados utilizados para gerar a cadeia de 4 ventres.

	$m_1 = 1.0$			$m_2 = 1.0$		
x_0	1.657666	0.0	0.0	0.439775	-0.169717	0.0
$\dot{x}_0$	0.0	-0.593786	0.0	1.822785	0.128248	0.0
	$m_3 = 1.0$			$m_4 = 1.0$		
x_0	-1.268608	-0.267651	0.0	-1.268608	0.267651	0.0
$\dot{x}_0$	1.271564	0.168645	0.0	-1.271564	0.168645	0.0
	$m_5 = 1.0$					
x_0	0.439775	0.169717	0.0			
$\dot{x}_0$	-1.822785	0.128248	0.0			

voltas com erro $e < 1\%$. Para fazermos perturbações, vamos escolher $h = 5 \cdot 10^{-2}$. Se fizermos, por exemplo, $x_1 = 0.975$, $x_3 = -0.965$, $y_1 = -0.248$ e $y_3 = 0.248$, obtemos como resultado órbita em forma de oito que precessa no sentido horário, como na Figura 5.18, e se fizermos $x_1 = 0.965$, $x_3 = -0.975$, $y_1 = -0.238$ e $y_3 = 0.238$, obtemos como resultado órbita em forma de oito que precessa no

Figura 5.19: Órbita com as condições iniciais perturbadas com $h = 5 \cdot 10^{-6}$ em que perturbações nas condições iniciais da ordem de 10^{-3} fazem a órbita precessar no sentido horário.

sentido anti-horário, como na Figura 5.19. O mesmo ocorre se fizermos perturbações da mesma ordem de grandeza nas coordenadas do corpo 2. Se continuarmos alterando os valores das condições iniciais, vemos que esta solução só diverge para perturbações da ordem 10^{-1} (!), ou seja, trata-se de uma órbita muito estável. Podemos também perturbar as massas dos corpos pra vermos o que acontece. Se fizermos $m_2 = 1.001$, cada um dos corpos continua numa órbita em forma de oito fechada, mas o centro de cada uma muda, como na Figura 5.20.

Vamos gerar também exemplos de coreografias para os casos de 4 e 5 corpos. Começaremos com a cadeia de 3 ventres para o caso $N = 4$. As condições iniciais para esta simulação seguem na Tabela 5.7, e foram obtidas na referência [21]. Para a cadeia de 4 ventres no caso $N = 5$, as condições iniciais utilizadas seguem na Tabela 5.8, e também foram obtidas na referência [21]. Mesmo com passo de integração $h = 10^{-7}$ as órbitas gerada com este código precessam já na segunda volta, o que está dentro do esperado, já que de acordo com a literatura estas órbitas são, de fato, numericamente instáveis.

Figura 5.20: Órbita com as condições iniciais da Tabela 5.6 em que fizemos $m_2 = 1.001$ e $h = 5 \cdot 10^{-6}$. Cada um dos corpos continua numa órbita fechada em forma de oito, mas elas não são mais a mesma curva.

Figura 5.21: Cadeia de 3 ventres gerada como solução para o problema de 4 corpos gerada com os dados da Tabela 5.7 com passo de integração $h = 10^{-5}$. Esta solução é numericamente instável.

Figura 5.22: Cadeia de 4 ventres gerada como solução para o problema de 5 corpos gerada com os dados da Tabela 5.8 com passo de integração $h = 10^{-5}$. Esta solução é numericamente instável.

Capítulo 6

Emissão de ondas gravitacionais por órbitas coreográficas

“We have the capacity to receive messages from the stars and the songs of the night winds.”

– Ruth St. Denis (1879 - 1968, EUA), precursora da dança moderna, fundou o Adelphi’s Department of Performing Arts.

Desde a formulação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein em 1915, diversos testes foram feitos para verificar as suas previsões, dentre eles a previsão da precessão do periélio de Mercúrio e o cálculo correto da deflexão dos raios luminosos. Entretanto, a consequência mais surpreendente da Relatividade Geral é o fato de que as equações de Einstein no regime linear aceitam como soluções ondas planas transversais que se propagam com a velocidade da luz, as ondas gravitacionais, o que assegura a causalidade desta teoria [31, 38–42].

A detecção destas ondas apresenta um grande desafio tecnológico, pois as deformações provocadas pela passagem dessas ondas é, no máximo, da ordem de $10^{-18}m$. Uma medida indireta de sua existência é a previsão da diminuição do período de sistemas binários de pulsares, e a descoberta do sistema PSR 1913+16, em 1974, por Joseph Taylor e Russell Hulse, ambos de Princeton University, rendeu-lhes o prêmio Nobel em 1993 [43]. Atualmente muitos esforços estão sendo feitos no sentido de se obter medidas diretas deste fenômeno, sendo por isso muito importante compreendê-lo de forma ampla. Milhões de dólares foram investidos em detectores de ondas gravitacionais, que podem ser interferômetros de laser gigantesco, como o LIGO (EUA) e o VIRGO (Itália), ou o LISA, que deve ser lançado ao espaço em 2015, ou então podem ser sistemas de massa ressonante como os detectores MiniGRAIL (Holanda) e SCHENBERG (Brasil). Os primeiros são capazes de detectar ondas emitidas num grande intervalo de frequências,

enquanto os demais só detectam ondas cuja frequência está próxima à sua frequência de ressonância. Entretanto os detectores de massa ressonante são sensíveis a ondas que se propagam em qualquer direção e podem oferecer informações como a amplitude e a polarização da onda [44]. Por estarem presentes desde a origem do universo, as ondas gravitacionais podem servir como uma grande lupa para investigação do início do universo, o que motiva muitos pesquisadores a estudar as ondas gravitacionais.

6.1 Equações de Einstein linearizadas

Vamos analisar como ficam as equações de Einstein quando consideramos o limite em que o campo gravitacional é fraco, mas pode variar com o tempo. Neste limite, podemos descrever o espaço como um espaço plano com uma pequena perturbação, e escrevemos a métrica $g_{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, que na nossa convenção será

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (6.2)$$

e $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Note que $h \equiv h^\mu{}_\mu$, é o traço de $h_{\mu\nu}$. Para determinarmos as equações de movimento que são obedecidas por $h_{\mu\nu}$, vamos calcular as equações de Einstein quando a métrica é dada pela equação (6.1), considerando somente os termos de, no máximo, primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Em primeiro lugar, calculamos os símbolos de Christoffel. Levando em conta que a métrica de Minkowski apresenta apenas elementos constantes e desprezando termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) = \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Agora vamos calcular o tensor de Riemann,

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\rho\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu}.$$

Os dois últimos termos, produtos de 2 símbolos de Christoffel, são de segunda ordem. Usando $\eta_{\mu\lambda} \eta^{\lambda\gamma} = \delta_\mu^\gamma$ e levando em conta o fato de que as derivadas parciais comutam, os demais termos dão

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\rho\mu} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho}) \quad (6.4)$$

Agora, vamos calcular o tensor de Ricci. Usando a definição de D'Alembertiano,

$$\eta^{\mu\rho}\partial_\rho\partial_\mu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla \equiv \square,$$

temos então que

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= \eta^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \\ &= R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - h^2_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Por fim, calculamos agora o escalar de Ricci, que é o traço do tensor de Ricci.

$$\begin{aligned} R &= R^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \\ &= \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - h^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Finalmente, podemos escrever as equações de Einstein linearizadas usando

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = 16\pi GT_{\mu\nu}.$$

De acordo com (6.5) e (6.6), o tensor de Einstein fica

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu}h^2). \quad (6.7)$$

Para simplificar a expressão do tensor de Einstein, definimos a perturbação de traço reverso

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h. \quad (6.8)$$

que recebe este nome porque

$$\bar{h} = \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\mu\nu} = h - \frac{1}{2}4h = -h.$$

Levando-se em conta as expressões

- $h^\sigma_\nu = \eta_{\rho\nu}h^{\sigma\rho} = \eta_{\rho\nu}(\bar{h}^{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho}h) = \bar{h}^\sigma_\nu + \frac{1}{2}\delta^\sigma_\nu h = \bar{h}_n u^\sigma - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\nu \bar{h},$
- $\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda h^{\rho\lambda} = \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda (\bar{h}^{\rho\lambda} + \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}h),$

temos que para $\bar{h}$, de acordo com a equação (6.7), as equações de Einstein são dadas por

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\partial_\sigma \partial_\mu \bar{h}_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha \bar{h}_\mu^\alpha - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} \right] = 16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (6.9)$$

Escolha de gauge. Para simplificar ainda mais, vamos usar a arbitrariedade na escolha de gauge de (6.9), de maneira análoga ao caso eletromagnético [45]. Se escolhermos o gauge de Lorentz, em que temos

$$\partial_\alpha \bar{h}_\mu^\alpha = 0, \quad (6.10)$$

nos resta apenas um termo não nulo em (6.9), e temos

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu}.$$

As equações de Einstein se tornam então uma equação de onda,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (6.11)$$

No vácuo, a equação (6.11) é uma equação de onda sem fonte, pois $T_{\mu\nu} = 0$,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (6.12)$$

e sua solução geral pode ser escrita como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (6.13)$$

O tensor $A_{\mu\nu}$ é um tensor de rank (0, 2) chamado de tensor de polarização, e k_α é um vetor de componentes constantes dadas por (ω, k_x, k_y, k_z) , chamado de vetor de onda. Eles devem satisfazer os vínculos impostos pela condição de gauge (6.10) e pela equação de onda (6.12).

- De (6.10) temos que a onda emitida é transversal, ou seja, $A_{\mu\nu} k^\nu = 0$, pois

$$\partial_\alpha \bar{h}_\mu^\alpha = \eta^{\alpha\nu} \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\nu} A_{\mu\nu} (ik_\alpha) e^{ik_\beta x^\beta} = i(A_{\mu\nu} k^\nu e^{ik_\beta x^\beta}) = 0.$$

- De (6.12) temos que esta onda se propaga com a velocidade da luz, ou seja, $k^2 = 0$, pois

$$\begin{aligned} \square \bar{h}_{\mu\nu} &= \partial^\rho \partial_\rho (A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) = \partial^\rho (A_{\mu\nu} (ik_\rho) e^{ik_\alpha x^\alpha}) = \\ &= A_{\mu\nu} (ik_\rho) (ik^\rho) e^{ik_\alpha x^\alpha} = -k^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Fixando o gauge da solução de onda Sabemos que uma equação do tipo (6.13) apresenta dois graus de liberdade. Entretanto, $A_{\mu\nu}$ é uma matriz 4×4 simétrica, e possui portanto 10 componentes livres. Nos resta então uma liberdade de gauge para eliminar as componentes dependentes. Com o intuito de simplificar as contas, vamos escolher o gauge em que o tensor de polarização é transverso e tem traço nulo, o que chamamos de gauge TT . No gauge transverso temos

$$A_{\mu\nu}U^\nu = A_{\mu\nu}\delta_0^\nu = A^{\mu 0} = 0,$$

de maneira que a perturbação não mistura as componentes temporais e espaciais. Agora tomamos, sem perda de generalidade, a parte espacial do vetor de onda na direção z , ou seja $\mathbb{k} = k\hat{z}$. Sempre é possível acertar nosso sistema de coordenadas tal que essa condição seja satisfeita. Neste caso, como $k^2 = 0$, temos $k_\alpha = (\omega, 0, 0, \omega)$, e pela condição de gauge (6.10) temos $A_{\mu 3} = 0$, de maneira que a última linha e a última coluna do tensor também se anulam. Por fim, tomando o gauge em que o traço se anula, e chamando as componentes independentes de h_+ e $h_\times$, temos que o tensor de polarização é dado por

$$h^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Modos de polarização de um onda gravitacional Para encontrarmos os modos de polarização das ondas gravitacionais que aparecem no gauge TT , vamos analisar o efeito físico da passagem de uma onda gravitacional. Para isso, precisamos de alguma medida desse efeito que seja independente do sistema de coordenadas, como por exemplo o movimento relativo de partículas próximas. Seja $\xi(\lambda) \in \mathbb{R}^3$ o vetor que representa a distância entre essas partículas. De acordo com a equação do desvio geodésico (ver Apêndice B) temos

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{D\lambda^2} = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} U^\beta U^\gamma \xi^\delta \quad (6.15)$$

Considere que as partículas de teste se movem devagar. Neste caso podemos fazer as aproximações $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $\tau = t = x^0$. A única equação não-nula que se obtém da equação (6.15) é aquela com a componente $R^\alpha_{00\delta}$ do tensor de Riemann. De acordo com a equação (6.4), no gauge TT esta componente é dada por

$$R_{\alpha 00\delta} = \frac{1}{2} (\partial_0 \partial_0 h_{\alpha\delta}^{TT} + \partial_\alpha \partial_\delta A_{00}^{TT})$$

E substituindo em (6.15) temos então

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^\delta \frac{\partial^2 (A^{TT})^\alpha_\delta}{\partial t^2}, \quad \alpha, \delta = 1, 2.$$

Para a componente h_+ temos

$$\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_v x^v}),$$

cuja solução geral é

$$\xi^1 = \xi^1(0) + \xi^1(0) \frac{1}{2} h_+ e^{ik_v x^v}, \quad (6.16)$$

e também

$$\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_v x^v}),$$

cuja solução geral é

$$\xi^2 = \xi^2(0) - \xi^2(0) \frac{1}{2} h_+ e^{ik_v x^v}. \quad (6.17)$$

Das equações (6.16) e (6.17) vemos que partículas inicialmente separadas apenas na direção ξ^1 oscilam apenas na direção ξ^1 , enquanto partículas inicialmente separadas apenas na direção ξ^2 oscilam apenas na direção ξ^2 . A interpretação física desse resultado é que se tivéssemos um anel de partículas estacionárias, com a passagem dessa onda gravitacional, elas oscilariam como se formassem um “+”, e por isso dizemos que essa onda tem “polarização +”, conforme a Figura 6.1.

Figura 6.1: Partículas estacionárias sob ação de uma onda gravitacional com “polarização +”.

E para a componente $h_\times$ temos

$$\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_\times e^{ik_v x^v}),$$

cuja solução geral é

$$\xi^1 = \xi^1(0) + \xi^2(0) \frac{1}{2} h_+ e^{ik_v x^v}, \quad (6.18)$$

e também

$$\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_x e^{ik_v x^v}),$$

cuja solução geral é

$$\xi^2 = \xi^2(0) + \xi^1(0) \frac{1}{2} h_+ e^{ik_v x^v}. \quad (6.19)$$

Das equações (6.18) e (6.19) vemos que partículas inicialmente separadas apenas na direção ξ^1 oscilam apenas na direção ξ^2 , enquanto partículas inicialmente separadas apenas na direção ξ^2 oscilam apenas na direção ξ^1 . A interpretação física desse resultado é que se tivéssemos um anel de partículas estacionárias, com a passagem dessa onda gravitacional, elas oscilariam como se formassem um “ $\times$ ”, e por isso dizemos que essa onda tem “polarização $\times$ ”, conforme a Figura 6.2.

Figura 6.2: Partículas estacionárias sob ação de uma onda gravitacional com “polarização $\times$ ”.

Esses são os dois modos independentes de polarização linear de uma onda gravitacional. Podemos alternativamente escrever os modos de polarização circular, dados por

$$h_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (h_+ + ih_\times)$$

$$h_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (h_+ - ih_\times)$$

O efeito de uma onda com pura “polarização R ” é distorcer o anel em uma elipse que gira no sentido horário no plano ξ^1 vs ξ^2 .

6.2 Geração de ondas gravitacionais

Considere uma fonte de emissão de ondas gravitacionais de tamanho característico δr bem menor que o comprimento da radiação emitida. Se v a velocidade típica das partículas na fonte, isso é equivalente a afirmar que essas partículas são não relativísticas, pois $v = \omega \delta r \ll 1$. Sejam x' as coordenadas que descrevem essa fonte. Vamos calcular as ondas emitidas, através de $h_{\mu\nu}$, num ponto $x \equiv r\hat{x}$ muito distante da fonte, de maneira que $r = |x| \gg \delta r$. A distância deve ser muito maior que o comprimento de onda emitido, de forma que $r \gg \omega^{-1}$ e $r \gg \omega \delta r^2$. Em primeira ordem temos que

$$|x - x'| \approx r - \hat{x} \cdot x',$$

e sabemos que o vetor de onda é dado por

$$k^\mu = \omega(1, \hat{x}).$$

Para entendermos a geração de ondas gravitacionais, precisamos resolver as equações de Einstein linearizadas no caso não homogêneo. A solução pode ser encontrada através da técnica da função de Green. Se

$$\square F(x^\sigma - x'^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - x'^\sigma),$$

vemos que a solução

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G \int F(x^\sigma - x'^\sigma) T_{\mu\nu}(x'^\sigma) d^4x. \quad (6.20)$$

preserva a relação (6.11), sendo portanto sua solução. Estamos interessados na função de Green retardada, para que o sinal medido em x seja resultado do acúmulo dos sinais emitidos em pontos que estão em seu cone de luz passado. Assim,

$$F(x^\sigma - x'^\sigma) = \frac{-1}{4\pi|x - x'|} \delta[|x - x'| - (x^0 - x'^0)] \Theta(x^0 - x'^0)$$

Substituindo em (6.20) e integrando em x'^0 temos

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(x', t_r)}{|x - x'|},$$

onde $t_r = t - |x - x'|$ é o tempo retardado. Vamos fazer a transformada de Fourier de $\bar{h}$ para que possamos trabalhar com as frequências emitidas. Temos então

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt d\mathbf{x} e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}') = \\ &= 4G \int d\mathbf{x}' e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|},\end{aligned}$$

onde $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}')$ é a transformada de Fourier de $T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{x}')$, ou seja,

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r e^{i\omega t_r} \tilde{T}_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{x}')$$

Na aproximação em que estamos distantes da fonte, podemos dizer que

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d\mathbf{x}' \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}'). \quad (6.21)$$

Observe que não é necessário calcular todas as componetes de $\bar{h}$, pois com a condição de calibre (6.10) podemos determinar as componentes temporais a partir das espaciais. Então vamos calcular as componentes espaciais. Da condição de conservação do tensor energia-momento segue que $\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = -i\omega \tilde{T}^{0\mu}$. Usando isso e aplicando a regra da cadeia em $\tilde{T}^{ij}$, desprezando o termo de superfície temos

$$\int d^3\mathbf{x}' \tilde{T}^{ij} = - \int d^3\mathbf{x}' x'^i \partial_k (T^{kj}) \frac{i\omega}{2} = \int d^3\mathbf{x}' \partial_l (x'^i x'^j) T^{0l},$$

e repetindo o mesmo procedimento temos

$$\int d^3\mathbf{x}' \tilde{T}^{ij} = -\frac{i\omega}{2} \int d^3\mathbf{x}' x'^i x'^j \partial_l \tilde{T}^{0l} = -\frac{\omega^2}{2} \int d^3\mathbf{x}' \tilde{T}^{00} \equiv -\frac{\omega^2}{2} \tilde{D}_{ij}.$$

Note que

$$D_{ij}(t) = \int d^3\mathbf{x}' x'^i x'^j T^{00}(t_r, \mathbf{x}') \quad (6.22)$$

é um tensor relacionado ao momento de quadrupolo, e $\tilde{D}_{ij}(\omega)$ é a sua transformada de Fourier. Tomando a transformada de Fourier inversa de $\tilde{\bar{h}}$, temos finalmente

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 D_{ik}}{dt^2}(t_r). \quad (6.23)$$

Solução no gauge TT . Para escrevermos esse resultado no gauge TT , precisamos fazer com que a sua projeção ao longo da direção de propagação e o seu traço se anulem [46]. Considere então o operador de projeção

$$P_i^j = \delta_i^j - n_i n^j$$

onde $n^i = \frac{k^i}{k}$ são as componente do versor $\hat{n}$ na direção de propagação da onda. Queremos tomar a projeção de h_{ij} sobre a superfície perpendicular à direção de propagação, e assim temos

$$\bar{h}_{ij}^T = P_i^l P_j^k \bar{h}_{lk}.$$

Observe que se tomarmos a direção de propagação como sendo o eixo $\mathcal{O}z$, ou seja, $n_i = \delta_i^3$, temos

$$P_i^l P_j^k \bar{h}_{lk} = \bar{h}_{ij} - \bar{h}_{i3} \delta_j^3 - \delta_i^3 \bar{h}_{3j} + \delta_i^3 \delta_j^3 \bar{h}_{33},$$

ou seja, os termos que possuem i ou $j = 3$ se anulam, e só restam as componentes com $i, j = 1, 2$. Agora para tirarmos o traço fazemos

$$\bar{h}_{ij}^{TT} = \bar{h}_{ij}^T - \frac{1}{2} P_{ij} \bar{h}^T.$$

Veja que, de fato,

$$\bar{h}^{TT} = \bar{h}^T - \frac{1}{2} (3 - n^2) \bar{h}^T = 0.$$

Desta forma, de acordo com (6.23), no gauge TT a perturbação é dada por

$$\bar{h}_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \left(P_i^l P_j^k - \frac{1}{2} P_{ij} P^{lk} \right) \frac{d^2}{dt^2} D_{lk} \quad (6.24)$$

Podemos reescrever a expressão (6.24) em termos tensor do momento de quadrupolo $\mathcal{D}_{ij}$, que nada mais que o tensor D_{ij} da expressão (6.22) com traço nulo, ou seja

$$\mathcal{D}_{ij} = D_{ij} - \delta_{ij} \frac{D}{3}. \quad (6.25)$$

Como $\left(P_i^l P_j^k - \frac{1}{2} P_{ij} P^{lk} \right) \delta_{lk}$ isso pode ser feito sem que se altere a expressão (6.24), e temos

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \left(P_i^l P_j^k - \frac{1}{2} P_{ij} P^{lk} \right) \frac{d^2 \mathcal{D}_{lk}}{dt^2}(t_r). \quad (6.26)$$

6.3 Simulações numéricas

Agora vamos obter as ondas gravitacionais emitidas por partículas pontuais que descrevem as órbitas obtidas na Seção 5.2. Para começar, note que neste limite a expressão (6.23) se torna

$$D_{ij} = \sum_{A=1}^N m_A x_A^i x_A^j,$$

e sua segunda derivada é dada por

$$\ddot{D}_{ij} = \sum_{A=1}^N m_A \left(\ddot{x}_A^i x_A^j + x_A^i \ddot{x}_A^j + 2\dot{x}_A^i \dot{x}_A^j \right).$$

Nessas simulações, calcularemos o momento de quadrupolo $\mathcal{D}_{ij}$, o que é equivalente a calcular os termos da perturbação h_{ij}^{TT} num ponto r fixo a menos de multiplicação por constantes. Novamente vamos utilizar o código do Apêndice A.

Figura 6.3: Padrão das ondas gravitacionais emitidas pelas órbitas que são soluções de Kepler das Figuras 5.8 e 5.9, obtido com passo de integração $h = 10^{-6}$.

Para ambas as órbitas de Kepler obtivemos o mesmo padrão da Figura 6.3, o que era de se esperar, uma vez que a projeção no plano $\mathcal{O}_{xy}$ da órbita tridimensional é exatamente idêntica à órbita plana. Este padrão é distinto daqueles obtidos para outras órbitas, de maneira que, em princípio, é possível identificar uma solução de Kepler elíptica, mas não é possível afirmar se ela é plana ou tridimensional

Figura 6.4: Padrões das ondas gravitacionais emitidas pelas soluções de Euler e Lagrange com todas as massa iguais representadas na Figura 5.11 e 5.13, obtidos com passo de integração $h = 10^{-4}$. Observe que esses sinais diferem apenas por uma fase.

apenas com base no padrão de ondas gravitacionais. Para as soluções de Euler e Lagrange, as ondas emitidas possuem o mesmo padrão, a mesma amplitude e a mesma frequência a cada período da órbita, diferindo apenas por uma fase, como na Figura 6.4. Não é possível portanto distinguir entre os sinais emitidos por essas órbitas na aproximação de quadrupolo com o nosso código. Esse problema talvez possa ser resolvido com a expansão em ordens mais altas quando tratamos a geração de ondas gravitacionais, mas experimentalmente falando essas correções seriam muito pequenas para serem observadas na prática.

Para a solução de Hénon da Figura 5.14 obtivemos o padrão de ondas gravitacionais da Figura 6.5, que é distinto dos demais padrões obtidos. Desta forma, vemos que, em princípio, é possível identificar esta órbita através do padrão de ondas gravitacionais observado. Para a solução perturbada da Figura 5.15, que precessa no sentido horário, obtivemos o padrão de ondas gravitacionais da Figura 6.6, que difere do caso anterior porque a componente D_{xy} apresenta um pico maior para a esquerda. Se simularmos o padrão emitido pela órbita que precessa no outro sentido, como na Figura 5.16, veremos que esses picos crescem para a esquerda. Podemos então tirar conclusões (até agora qualitativas) a respeito da velocidade angular de precessão das órbitas perturbadas tendo em mãos o padrão

Figura 6.5: Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela solução de Henon com todas as massa iguais representada na Figura 5.14, obtido com passo de integração $h = 5 \cdot 10^{-5}$.

de ondas gravitacionais emitido por essas órbitas.

A solução em forma de oito também emite um sinal bem distinto dos demais, como na Figura 6.8 e, em princípio, poderia ser identificada caso um sinal de uma órbita como essa fosse medido. O padrão emitido para as ondas gravitacionais para esta solução perturbada como nas Figuras 5.18 e 5.19, em que obtivemos uma precessão da órbita original, é bem parecido com o anterior, mas os picos apresentam assimetrias para a direita e para a esquerda, respectivamente, e o mínimo local entre dois picos diminui a cada duas oscilações (ver Figuras 6.9 e 6.10). Novamente, é possível obter informações a respeito da velocidade angular com que a órbita precessa a partir dessas assimetrias, pois para órbitas que precessam no sentido oposto os picos crescem para o lado oposto.

Figura 6.6: Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela solução de Henon com todas as massa iguais perturbada representada na Figura 5.15, obtido com passo de integração $h = 5 \cdot 10^{-5}$. Comparando com a figura anterior, vemos que este padrão apresenta certas assimetrias devidas à precessão da órbita.

Figura 6.7: Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela solução de Henon com todas as massa iguais perturbada representada na Figura 5.16, obtido com passo de integração $h = 5 \cdot 10^{-5}$. Comparando com a figura anterior, vemos que este padrão apresenta certas assimetrias devidas à precessão da órbita.

Figura 6.8: Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela órbita em forma de oito com todas as massa iguais representada na Figura 5.17.

Figura 6.9: Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela órbita em forma de oito que precessa no sentido horário, com todas as massa iguais, representada na Figura 5.18.

Figura 6.10: Padrão das ondas gravitacionais emitidas pela órbita em forma de oito que precessa no sentido anti-horário, com todas as massa iguais, representada na Figura 5.19.

Capítulo 7

Comentários finais

“Dancing is just discovery, discovery, discovery.”

– Martha Graham.

Neste trabalho, nós obtivemos simulações numéricas de soluções homográficas e o coreográficas para o problema geral de N corpos em Mecânica Clássica com o código do Apêndice A, que integra as equações de movimento de Newton através do uso do Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Calculamos também as ondas gravitacionais emitidas pelas órbitas obtidas, pois o interesse no padrão da radiação gravitacional emitida por órbitas periódicas vem crescendo muito com a previsão para um futuro próximo da detecção dessas ondas. Para verificarmos a estabilidade numérica do nosso algoritmo, um dos parâmetros utilizados é o erro na energia total do sistema, que deve ser menor que 1%. Além disso, para podermos fazer perturbações nas condições iniciais e nos parâmetros das soluções obtidas, escolhemos o tamanho do passo de integração que garante a estabilidade da forma e da posição da órbita por algumas centenas de voltas e, pra descartarmos erros devidos ao código, analisamos os efeitos dessas perturbações depois de cerca de apenas 10 voltas.

Começamos simulando a solução de Kepler para o problema de 2 corpos, que no caso plano representa um exemplo simples de um sistema integrável em que as soluções podem ser classificadas em duas classes distintas, a saber, órbitas abertas e órbitas fechadas e periódicas, dependendo do valor da energia total do sistema. Escolhemos dois exemplos, ambos com energia total negativa, que representam soluções limitadas. O primeiro caso é uma órbita plana em que os corpos descrevem elipses com um dos focos no centro de massa do sistema (ver Figura 5.8), e o outro é uma órbita tridimensional que difere da primeira apenas por uma componente na direção $\mathcal{O}z$ na velocidade inicial de um dos corpos, o que provoca um deslocamento uniforme nesta direção do sistema todo (ver Figura 5.9). Perturbações nas condições iniciais dessas órbitas, desde que $E < 0$, apenas mudam a

excentricidade das elipses que os corpos descrevem. Já perturbações nas massas da ordem de 10^{-3} causam translação do centro de massa do sistema. O padrão de ondas gravitacionais emitido por essas duas soluções é idêntico (ver Figura 6.3), o que é esperado uma vez que a projeção da órbita tridimensional no plano $\mathcal{O}xy$ é exatamente igual à órbita plana.

Em seguida, simulamos soluções para o Problema de 3 corpos. Começamos com as órbitas homográficas de Euler e Lagrange que são soluções conhecidas para o problema desde o final do século XVIII. A solução de Euler, em que os corpos estão dispostos sobre a mesma reta, que gira com velocidade angular uniforme em torno do seu centro de massa (ver Figura 5.11), já apresenta uma boa estabilidade estrutural para um passo de integração da ordem de 10^{-4} , e é pouco estável quanto a perturbações nas posições, e muito instável quanto a perturbações nas velocidades iniciais. No primeiro caso, vemos que se alterarmos as posições iniciais dos corpos que estão diametralmente opostos, em sentidos contrários, de uma quantia da ordem de 1, encontramos uma outra solução, não homográfica, porém também estável, em que as trajetórias desses corpos ainda são círculos, mas que agora não são mais concêntricos, enquanto o terceiro corpo continua fixo no centro de massa do sistema (ver Figura 5.12). Se alterarmos as posições desse dois corpos da mesma quantidade, mas puxando-os no mesmo sentido, os corpos escapam do sistema. Já a solução de Lagrange, em que os corpos estão sobre os vértices de um triângulo equilátero que gira em torno do seu centro de massa com velocidade angular constante (ver Figura 5.13), é mais estável quanto a perturbações nos parâmetros que a solução de Euler, principalmente no caso em que uma das massas é bem maior que as demais, segundo a literatura, mas problemas técnicos envolvendo aproximações numéricas, provocam escape dos corpos para um número grande de voltas, mesmo para um passo de integração da ordem de 10^{-6} , sem que isso represente uma instabilidade intrínseca dessa solução. Acreditamos que com um algoritmo um pouco mais sofisticado esta dificuldade possa ser contornada. As ondas gravitacionais destas soluções apresentam o mesmo padrão, a mesma amplitude e a mesma frequência, diferindo apenas por uma fase (ver Figura 6.4), de maneira que não é possível identificar a fonte de emissão com base nesses padrões, mas é possível que expansões em ordens maiores ao considerarmos a geração de ondas gravitacionais possam revelar maiores diferenças.

Simulamos também uma solução que não é nem homográfica e nem coreográfica, mas é uma solução periódica para o problema de 3 corpos descoberta por Hénon em 1976, chamada de solução “Criss-Cross” por Cris Moore (ver Figura 5.14). Para esta órbita, o código é capaz de gerar centenas de voltas para um passo de integração da ordem de 10^{-6} , e neste caso perturbações da ordem de 10^{-3} nas posições iniciais provocam precessão da órbita. O padrão de ondas gravitacionais emitido por essa órbita é distinto dos demais (ver Figura 6.5) de maneira que esta solução pode, em princípio, ser identificada a partir das ondas gravitacionais que

ela emite. Para a solução perturbada que precessa no sentido anti-horário (ver Figura 5.16), obtivemos um padrão cuja componente D_{xy} apresenta uma assimetria em relação ao caso anterior, pois os picos crescem para a direita (ver Figura 6.6). Para a órbita que precessa no outro sentido (ver Figura 5.15), os picos na componente D_{xy} crescem para a esquerda, sendo portanto possível obter uma informação qualitativa interessante a respeito da velocidade angular de precessão da órbita com base na medida do sinal de ondas gravitacionais.

Para finalizar o caso $N = 3$, simulamos a órbita coreográfica em forma de oito descoberta por Cris Moore em 1993. Esta órbita mantém a sua estrutura por centenas de voltas quando o passo de integração é da ordem de 10^{-6} (ver Figura 5.17), e é uma solução surpreendentemente estável quanto a perturbações nas posições iniciais, pois o escape dos corpos do sistema só ocorre para perturbações da ordem 10^{-1} (!). Para perturbações menores que 10^{-2} , alterações nos valores das posições e velocidades iniciais provocam a precessão da órbita, mas preservam a sua forma (ver Figura 5.18). Esta órbita também é estável quanto a perturbações nas massas dos corpos, e se fizermos, por exemplo, $m_2 = 1 + 10^{-3}$, iremos obter uma órbita em que todos os corpos continuam se deslocando sobre uma curva em forma de oito, mas cada uma dessas curvas se desloca um pouco em relação à curva original (ver Figura 5.20), mas se fizermos $m_2 = 1 + 10^{-5}$, podemos gerar centenas de voltas idênticas ao caso não perturbado. A solução em forma de oito emite um sinal bem distinto dos demais (ver Figura 6.8) e, em princípio, também poderia ser identificada caso um sinal de uma órbita como essa fosse medido. O padrão emitido para as ondas gravitacionais para esta solução perturbada mencionada acima, que precessa no sentido horário, é bem parecido com o anterior, mas os picos apresentam assimetrias para a direita e o mínimo local entre dois picos diminui a cada duas oscilações (ver Figura 6.9). Novamente, é possível obter informações a respeito da velocidade angular com que a órbita precessa a partir dessas assimetrias, pois se a órbita precessa no sentido anti-horário, a assimetria que aparece no padrão da onda gravitacional é para a esquerda (ver Figura 6.10). Por fim, simulamos mais dois exemplos de soluções coreográficas, uma cadeia de três ventres para o caso $N = 4$ (ver Figura 5.21) e uma cadeia de quatro ventres para o caso $N = 5$ (ver Figura 5.22). Ambas apresentaram precessão da estrutura inicial já na segunda volta simulada, mesmo para passos de integração da ordem de 10^{-7} , antes mesmo de colocarmos qualquer perturbação nas condições iniciais. Este resultado está de acordo com o esperado, pois de acordo com a literatura estas soluções são, de fato, instáveis.

No futuro, pretendemos elaborar algoritmos mais elaborados para gerar soluções coreográficas, tendo em vista o método numérico desenvolvido por Naunberg. Este método consiste basicamente na expansão em série de Fourier da equação da órbita (o que permite a escolha da simetria que a órbita encontrada deverá satisfazer) e na determinação dos coeficientes de Fourier que minimizam a

ação do sistema. Com este método, é possível gerar um número muito maior de órbitas coreográficas, uma vez que não é necessário partir das condições iniciais precisas que levam a esse tipo de solução. Além disso, com um maior número de soluções em mãos, pretendemos analisar a estabilidade dessas órbitas quando levamos em conta perturbações relativísticas e expandir e quantificar a análise para as ondas gravitacionais feita nesse trabalho.

Apêndice A

Integrador pra o problema de N-corpos

Neste trabalho, as soluções para as equações diferenciais (3.1) serão encontradas através de integração numérica pelo Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Este é um método frequentemente utilizado para integrar diferenciais ordinárias de primeira ordem, e o erro total acumulado no processo iterativo é proporcional à quarta potência do passo escolhido para a integração. Neste Apêndice segue uma introdução ao Método de Runge-Kutta e o código escrito para integrar as equações de movimento do problema de N corpos.

A.1 O Método de Runge-Kutta

No caso geral, considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(x, t)$$

sujeita à condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Como todo método numérico, nós discretizamos a variável independente fazendo

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

onde h é chamado de passo da integração. O passo pode variar, mas no nosso caso será mantido fixo.

A ideia do método é partir do valor y_n e fazer uma estimativa da inclinação da curva $\dot{y}$, entre os pontos (t_n, x_n) e (t_{n+1}, x_{n+1}) para então calcular o próximo ponto, y_{n+1} .

Para isso calculamos K_1 ,

$$K_1 = f(t_n, x_n),$$

Figura A.1: Método de integração iterativo de Runge-Kutta.

que é a inclinação no início do intervalo, depois calculamos K_2 ,

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{1}{2}hK_1\right),$$

que é a inclinação no meio do intervalo sendo K_1 o valor de partida. Aí então calculamos K_3 ,

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{1}{2}hK_2\right),$$

que é a inclinação no meio do intervalo sendo desta vez K_2 o valor de partida, e finalmente calculamos K_4 ,

$$K_4 = f(t_n + h, x_n + hK_3),$$

que é a inclinação no final do intervalo sendo K_3 o valor de partida.

A inclinação estimada é uma média ponderada entre K_1 , K_2 , K_3 e K_4 , e temos então

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

As nossas equações diferenciais podem ser escritas como um conjunto de equações acopladas da seguinte maneira

$$(\dot{v}_k)^i = f\left(r_1^x, r_1^y, \dots, r_N^z\right) = -G \sum_{j \neq k}^N \frac{r_k^i - r_j^i}{r_{jk}}, \quad (\text{A.1a})$$

$$(\dot{r}_k)^i = g(v_k^i) = v_k^i \quad k = 1, \dots, N, \quad i = x, y, z. \quad (\text{A.1b})$$

O caso da equação (A.1b) é mais simples, pois $g(v_k^i)$ é simplesmente a função identidade. Note que

- $(K_1)_k^i = g(v_k^i) = v_k^i$,
- $(K_2)_k^i = g\left(v_k^i + \frac{h}{2}(K_1)_k^i\right) = \left(1 + \frac{h}{2}\right)v_k^i$,
- $(K_3)_k^i = g\left(v_k^i + \frac{h}{2}(K_2)_k^i\right) = \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right)v_k^i$,
- $(K_4)_k^i = g\left(v_k^i + h(K_3)_k^i\right) = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right)v_k^i$.

De acordo com (A.1) temos então

$$(r_k^i)_{t+1} = (r_k^i)_t + \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) * (v_k^i)_t \quad (\text{A.2})$$

Esse processo será repetido até o instante $t = h * npassos$. O programa utilizado para integrar essas equações segue abaixo.

A.2 Código

```

1  /***** Gabriela Iunes Depetri *****/
2  /***** Integrador RK4 para o problema de N-corpos *****/
3  /***** *****/
4  /***** *****/
5
6  #include <stdio.h>
7  #include <stdlib.h>
8  #include <math.h>
9
10 #define G 1
11 #define N <número de corpos>
12 #define periodo <passo*npassos em 1 volta>
13 #define npontos <freq de impressão de dados>
14
15 void soma_vetores (double passo, double a[][3], double b[][3],
16                   double c[][3]);
17
18 void calcula_r (double x[][3], double r[][N]);
19
20 double calcula_energia (double q[][3], double v[][3],
21                         double m[]);
22
23 void func (double x[][3], double M[], double a[][3]);

```

```
24
25 void onda (double h[][3], double x[][3], double v[][3],
26            double a[][3]);
27
28 int main(int numargs, char *args[]){
29
30     int i, k, p;
31     double h, t;
32     long int npassos;
33     double m[N], q[N][3], temp_q[N][3], v[N][3];
34     double k1[N][3], k2[N][3], k3[N][3], k4[N][3];
35     FILE *dados, *saida1, *saida2, *saida3;
36     double E_0, E_f, erro;
37     double D[3][3];
38
39     if (numargs != 2){
40     exit(EXIT_FAILURE);
41     }
42
43     dados = fopen (args[1], "r");
44     if (dados == NULL){
45     printf ("\nArquivo nao encontrado\n");
46     return 0;
47     }
48
49     /***** Leitura dos dados iniciais *****/
50
51     fscanf (dados, "%lf %li", &h, &npassos);
52
53     printf ("numero de passos = %li \n", npassos);
54
55     for (i = 0; i < N; i++) {
56     fscanf (dados, "%lf", &m[i]);
57     }
58     for (i = 0; i < N; i++) {
59     for (k = 0; k < 3; k++) {
60         fscanf (dados, "%lf", &q[i][k]);
61     }
62     }
63     for (i = 0; i < N; i++) {
64     for (k = 0; k < 3; k++) {
65         fscanf (dados, "%lf", &v[i][k]);
66     }
67     }
68
69     fclose (dados);
70
71     /***** Abertura dos arquivos de saída *****/
72
```



```
73  saida1 = fopen ("posicoes.dat", "w");
74  saida2 = fopen ("velocidades.dat", "w");
75  saida3 = fopen ("ondas.dat", "w");
76
77  fprintf (saida1, "\nt=0.000000");
78  fprintf (saida2, "\nt=0.000000");
79
80  for (i = 0; i < N; i++) {
81      for (k = 0; k < 3; k++) {
82          fprintf (saida1, " %f", q[i][k]);
83          fprintf (saida2, " %f", v[i][k]);
84      }
85  }
86
87  E_0 = calcula_energia (q, v, m);
88  printf ("E inicial = %f", E_0);
89
90  /***** Integrador Runge-Kutta *****/
91
92  for (p=0; p<npassos; p++) {
93
94      t = (p+1) * h;
95
96      func (q, m, k1);
97
98      soma_vetores (h, q, k1, temp_q);
99      func (temp_q, m, k2);
100
101      soma_vetores (h, q, k2, temp_q);
102      func (temp_q, m, k3);
103
104      soma_vetores (2*h, q, k3, temp_q);
105      func (temp_q, m, k4);
106
107      if (p % npontos == 0){
108          fprintf (saida1, "\nt=%f", t);
109          fprintf (saida2, "\nt=%f", t);
110      }
111
112      for (i = 0 ; i < N; i++) {
113          for (k = 0; k < 3; k++) {
114              q[i][k] += (h + 0.5*h*h + (1.0/6.0)*h*h*h +
115                  (1.0/24.0)*h*h*h*h) * v[i][k];
116              v[i][k] += (h/6.0)* (k1[i][k] + 2.0*k2[i][k] +
117                  2.0*k3[i][k] + k4[i][k]);
118          if (p % npontos == 0){
119              fprintf (saida1, " %f", q[i][k]);
120              fprintf (saida2, " %f", v[i][k]);
121          }
```

```

122     }
123     }
124
125     E_f = calcula_energia (q, v, m);
126     erro = fabs(1 - (E_f)/(E_0));
127
128     if (erro > 0.05){
129         printf ("\nErro na energia > %d%%\n", 5);
130         return 0;
131     }
132
133     onda (D, q, v, k1);
134
135     if (p % npontos == 0) {
136         fprintf (saida3, "\n%f", t/periodo);
137         fprintf (saida3, " %f %f %f %f",
138             D[0][0], D[1][1],
139             D[0][1], D[1][0] );
140     }
141
142     if (p * 10 % npassos == 0)
143         printf ("\npasso %d: Tudo OK!", p);
144
145 }
146
147 fclose (saida1);
148 fclose (saida2);
149 fclose (saida3);
150
151 E_f = calcula_energia (q, v, m);
152 erro = (1 - (E_f)/(E_0))*100;
153 printf ("\nE final = %f\nerro = %f\n", E_f, fabs(erro));
154
155 return 0;
156
157 }
158
159 /***** Função que soma vetores *****/
160
161 void soma_vetores (double passo, double a[][3], double b[][3],
162     double c[][3]) {
163
164     int i, k;
165
166     for (i = 0; i < N; i++) {
167         for (k = 0; k < 3; k++) {
168             c[i][k] = 0;
169         }
170     }

```

```
171     for (i = 0; i < N; i++) {
172     for (k = 0; k < 3; k++) {
173         c[i][k] = a[i][k] + (passo/2)*b[i][k];
174     }
175     }
176 }
177
178 /***** Função que calcula as distâncias *****/
179
180 void calcula_r (double x[][3], double r[][N]) {
181
182     int i, j;
183
184     for (i = 0; i < N; i++) {
185     for (j = 0; j < N; j++) {
186         r[i][j] = 0;
187     }
188     }
189     for (i = 0; i < N; i++) {
190     for (j = 0; j < N; j++) {
191         if (j != i) {
192             r[i][j] = sqrt((x[i][0] - x[j][0])*(x[i][0] - x[j][0]) +
193                 (x[i][1] - x[j][1])*(x[i][1] - x[j][1]) +
194                 (x[i][2] - x[j][2])*(x[i][2] - x[j][2]) );
195         }
196     }
197     }
198 }
199 }
200
201 /***** Função que calcula a energia *****/
202
203 double calcula_energia (double q[][3], double v[][3],
204     double m[]) {
205
206     int i, j, k;
207     double energia, T = 0, V = 0;
208     double distancia[N][N];
209
210     calcula_r (q, distancia);
211
212     for (i = 0; i < N; i++) {
213     for (k = 0; k < 3; k++) {
214         T += m[i]*(v[i][k])*(v[i][k])/2;
215     }
216     }
217     for (i = 0; i < N; i++) {
218     for (j = i+1; j < N; j++) {
219         V -= (m[i]*m[j])/(distancia[i][j]);
```

```
220     }
221     }
222
223     energia = T + V;
224
225     return energia;
226 }
227
228 /***** Função para calcular a aceleração *****/
229
230 void func (double x[][3], double M[], double a[][3]) {
231
232     int i, j, k;
233     double r[N][N];
234
235     calcula_r (x, r);
236
237     for (i = 0; i < N; i++) {
238     for (k = 0; k < 3; k++) {
239         a[i][k] = 0;
240     }
241     }
242
243     for (i = 0; i < N; i++) {
244     for (k = 0; k < 3; k++) {
245     for (j = 0; j < N; j++) {
246         if (j != i) {
247             a[i][k] -= M[j]* ( (x[i][k] - x[j][k])/
248                 ((r[i][j])*(r[i][j])*(r[i][j])) );
249         }
250     }
251     }
252     }
253 }
254
255 /***** Função para calcular as ondas gravitacionais *****/
256
257 void onda (double I[][3], double x[][3], double v[][3],
258     double a[][3]) {
259
260     int i, j, k;
261     double traco;
262
263     for (i = 0; i < 3; i++) {
264     for (j = 0; j < 3; j++) {
265         I[i][j] = 0;
266     }
267     }
268 }
```

```
269     for (i = 0; i < 3; i++) {
270     for (j = 0; j < 3; j++) {
271         for (k = 0; k < N; k++) {
272             I[i][j] = a[k][i]*x[k][j] + x[k][i]*a[k][j] +
273             2*v[k][i]*v[k][j];
274         }
275     }
276 }
277
278     traco = I[0][0] + I[1][1] + I[2][2];
279
280     for (i = 0; i < 3; i++) {
281     for (j = 0; j < 3; j++) {
282         if (j == i)
283             I[i][j] -= (traco)/3;
284     }
285 }
286
287 }
```

Listing A.1: Código que integra o problema de N corpos e calcula as ondas gravitacionais emitidas por corpos que seguem essas trajetórias.

Apêndice B

Equação do desvio geodésico

Considere uma geodésica parametrizada pelos parâmetro τ , descrita pela curva $x^\alpha(\tau)$. A velocidade ao longo dessa geodésica é dada por :

$$V^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \quad (\text{B.1})$$

Considere agora uma família de geodésicas paralelas à primeira, descritas por $x(\tau, \lambda)$, sendo τ e λ direções ortogonais. Para τ constante, no limite em que essas geodésicas estão próximas, a separação entre elas é dada pelo vetor ξ tal que

$$\xi^\alpha(\lambda) = \frac{dx^\alpha(\lambda)}{d\lambda} \quad (\text{B.2})$$

Vamos encontrar a equação do movimento que descreve $\xi^\alpha(\tau)$. Para isso, em primeiro lugar considere a expressão $V^\alpha \partial_\beta \xi^\alpha - \xi^\beta \partial_\beta V^\alpha$. Temos:

$$\begin{aligned} V^\beta \partial_\beta \xi^\alpha - \xi^\beta \partial_\beta V^\alpha &= \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \xi^\alpha - \xi^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} = \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia e o fato de que as derivadas parciais comutam temos:

$$V^\beta \partial_\beta \xi^\alpha - \xi^\beta \partial_\beta V^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau d\lambda} - \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda d\tau} = 0, \quad (\text{B.3})$$

Tendo em vista o resultado acima, vamos ver o que acontece com a expressão $V^\alpha \nabla_\beta \xi^\alpha - \xi^\beta \nabla_\beta V^\alpha$. Temos:

$$V^\alpha \nabla_\beta \xi^\alpha - \xi^\beta \nabla_\beta V^\alpha = \left(V^\alpha \partial_\beta \xi^\alpha - \xi^\beta \partial_\beta V^\alpha \right) - \Gamma_{\beta\gamma} \left(V^\beta \xi^\gamma - \xi^\beta V^\gamma \right) \quad (\text{B.4})$$

O primeiro termo é nulo pela equação B.3, e o segundo termo também se anula pois:

$$V^\beta \xi^\lambda - \xi^\beta V^\lambda = \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} - \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

Usando as definições $\xi^\alpha \nabla_\alpha \equiv \nabla_\xi$ e $V^\alpha \nabla_\alpha \equiv \nabla_V$

$$\nabla_V \xi^\alpha = \nabla_\xi V^\alpha \quad (\text{B.5})$$

Aplicando o operador ∇_V em ambos os lados da equação B.5, o lado esquerdo dá:

$$\nabla_V \nabla_V \xi^\alpha = \frac{D^2 \xi^\alpha}{D\tau^2}$$

Usando a definição do Tensor de Riemann o lado direito da equação B.5 dá:

$$[\nabla_V, \nabla_\xi] V^\alpha = \nabla_\xi \nabla_V V^\alpha + R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta V^\gamma \xi^\delta$$

Mas por definição temos que para uma geodésica $\nabla_V V^\alpha = 0$. Dessa forma, a equação (B.5) fica:

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{D\lambda^2} = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} U^\beta U^\gamma \xi^\delta \quad (\text{B.6})$$

A equação acima é chamada de equação do desvio geodésico.

Referências Bibliográficas

- [1] D. G. Saari, Z. Xia. Off to infinity in finite time. *Notices of the AMS* **45**(5) (2009). doi:10.1.1.146.2656.
- [2] C. Moore. Braids in classical dynamics. *Physical Review Letters* **70**(24):3675–3679 (1993).
- [3] H. Asada. Gravitational wave for a three-body system in lagrange’s orbit: parameter determinations and binary source test. *Physical Review D* **80**(064021) (2009). doi:10.1103/PhysRevD.80.064021. URL [arXiv:0907.5091v2](#).
- [4] C. Moore. Cris moore’s homepage (1993). URL <http://tuvalu.santafe.edu/~moore/>.
- [5] H. A. T. Imai, T. Chiba. Choreographic solution to the general relativistic three-body problem. *Physical Review Letters* **98**(201102) (2008). doi:10.1103/PhysRevLett.98.201102. URL [arXiv:gr-qc/0702076v2](#).
- [6] F. Diacu. The solution to the n-body problem. *The Mathematical Intelligencer* **18**(3) (1996).
- [7] L. A. Pars. *A Treatise on Analtitical Dynamics*. Ox Bow Press (1981). ISBN 978-0918024077.
- [8] J. Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*, volume 11 de *History of Mathematics*. American Mathematical Society, 1ª edição (1996). ISBN 978-0821803677.
- [9] H. Bruns. Über die integrale des vielkörper-problems. *Acta Mathematica* **11**:25–96 (1887).
- [10] R. Moeckel. Celestial mechanics: especially central configurations (1994). URL <http://www.math.umn.edu/~rick/notes/Notes.html>.

- [11] P. Painlevé. Leçons sur la théorie analytique des equations différentielles (1897).
- [12] D. G. Saari, Z. Xia. Singularities in the newtonian n -body problem. In D. G. Saari, Z. Xia (editores), *Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics, a Joint Summer Research Conference on Haniltonian Dynamics and Celestial Mechanics, June 25 – 29, Seattle, Washington*. American Mathematical Society (1996).
- [13] K. F. Sundman. Mémoire sur le problème de trois corps. *Acta Mathematica* **36**:105–179 (1912).
- [14] C. L. Siegel, J. K. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer (1971). ISBN 978-3540586562.
- [15] D. G. Saari. Improbability of collisions in newtonian gravitational systems. *Transactions of the American Mathematical Society* **162**:267 – 271 (1971). URL <http://www.jstor.org/stable/1995752>.
- [16] D. G. Saari. Improbability of collisions in newtonian gravitational systems ii. *Transactions of the American Mathematical Society* **181**:351–368 (1973). URL <http://www.jstor.org/stable/1996638>.
- [17] D. G. Saari. A visit to the newtonian n -body problem via elementary complex variables. *The American Mathematical Montly* **97**(2):105–119 (1990). URL <http://www.jstor.org/stable/2323910>.
- [18] Z. Xia. The non-collision singularities in the 5-body problem. In T. Ratiu (editor), *The geometry of Hamiltonian systems, Proceedings of a workshop held June 5-16, 1989*. Springer-Verlag (1991).
- [19] J. L. Gerver. The existence of pseudocollisions in the plane. *Journal of Differential Equations* **89**:1 – 68 (1991).
- [20] R. Montgomery. A new solution to the three-body problem. *Notices of the AMS* **48**(5) (2001).
- [21] C. Simó. New families of solutions in n -body problems, in proc. *ECM 2000*, barcelona, july 10-14. doi:10.1063/1.3009472.
- [22] M. Nauenberg. Periodic orbits for three particles with finite angular momentum. *Physics Letters A* **292**:93–99 (2001). URL arxiv.org/pdf/math/0511219.

- [23] C. Moore, M. Nauenberg. New periodic orbits for the n-body problem (2005). URL <http://arxiv.org/pdf/math/0511219v2>.
- [24] H. A. T. Chiba, T. Imai. Can n-body systems generate periodic gravitational waves? *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **377**:269–272 (2007). doi:10.1111/j.1365-2966.2007.11619.x. URL [arXiv:astro-ph/0609773v4](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0609773v4).
- [25] H. A. Y. Torigoe, K. Hattori. Gravitational wave forms for two- and three-body gravitating systems. *Physical Review Letters* **102**(251101) (2009). doi:10.1103/PhysRevLett.102.251101. URL [arXiv:0906.1448v1](http://arxiv.org/abs/0906.1448v1).
- [26] D. Boccaletti, G. Pucacco. *Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, volume 1 de *Theory of Orbits*. Springer, Heildelberg (1996). ISBN 978-3540589631.
- [27] E. T. Whittaker. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*. Cambridge University Press, London (1965). ISBN 978-1110312733.
- [28] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate texts in Mathematics. Springer, 2^a edição (1989). ISBN 978-1441930873.
- [29] K. R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, London, 2^a edição (1960).
- [30] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3^a edição (2001). ISBN 978-0201657029.
- [31] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, 1^a edição (1972). ISBN 978-0471925675.
- [32] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 5^a edição (1994). ISBN 978-0122947551.
- [33] I. Camargo, P. Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. Pearson Education, 3^a edição (2005). ISBN 8587918915.
- [34] M. Hénon. A family of periodic solutions of the planar three-body problem, and their stability. *Celestial Mechanics* **13**:267 – 285 (1976).
- [35] A. Wintner. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton University Press, New Jersey (1947).
- [36] A. Chenciner, R. Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Annals of Mathematics* **152**:881–901 (2000). URL [arXiv:math/0011268v1](http://arxiv.org/abs/math/0011268v1).

- [37] P. Hut, J. Makino. Moving stars around (2011). URL http://www.artcompsci.org/msa/web/vol_1/v1_web/v1_web.html.
- [38] C. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1^a edição (1973). ISBN 978-0716703440.
- [39] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1^a edição (1984). ISBN 978-0226870335.
- [40] B. F. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University Press (1985). ISBN 978-0521277037.
- [41] R. d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press (1992). ISBN 978-0198596868.
- [42] S. Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. Benjamim Cummings (2003). ISBN 978-0805387322.
- [43] J. H. Taylor. Binary pulsars and relativistic gravity. *Rev. Mod. Phys.* **66**(3):711–719 (1994). doi:10.1103/RevModPhys.66.711.
- [44] N. S. Magalhães. Challenges in signal analysis of resonant-mass gravitational wave detectors. *Brazilian Journal of Physics* **35**(4B) (2005). URL [arXiv:gr-qc/0512063v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0512063v1).
- [45] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3^a edição (1998). ISBN 978-0471309321.
- [46] R. P. Macedo. *Emissão de Ondas Gravitacionais por Fontes Compactas: O Regime Não-Linear*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo – Instituto de Física, São Paulo (2011).

Índice Remissivo

- Construção de
 - Gerver, [4](#)
 - Mather e McGehee, [3](#)
 - Xia, [4](#)
- Desvio geodésico
 - equação do, [101](#)
- Euler
 - Teorema de, [17](#)
 - solução de, [1](#), [30](#), [60](#)
- Função
 - homogênea, [17](#)
- grupo de simetria
 - $E(3)$, [21](#)
- Hénon
 - solução de, [34](#), [63](#)
- Kepler
 - solução de, [1](#), [26](#)
- Killing
 - equações de, [15](#)
- Lagrange
 - solução de, [1](#), [32](#), [60](#)
- Laplace-Runge-Lenz
 - vetor de, [28](#)
- Liouville
 - Integrabilidade no sentido de, [25](#)
 - Teorema de, [25](#)
- Noether
 - Teorema de, [13](#)
- Ondas gravitacionais, [71](#)
 - emitidas por órbitas coreográficas, [7](#)
 - gauge, [74](#), [75](#)
 - geração de, [78](#)
 - modos de polarização, [75](#)
- Plano invariante, [17](#)
- Poincaré, [2](#)
- Simetrias, [21](#)
- Simulações numéricas
 - de órbitas coreográficas, [58](#)
 - de ondas gravitacionais emitidas por órbitas coreográficas, [81](#)
- Singularidades, [2](#)
- Solução
 - colinear, [17](#)
 - de equilíbrio relativo, [16](#)
 - em forma de oito, [49](#)
 - homotética, [16](#)
 - plana, [17](#)
 - planar, [17](#)
 - retilínea, [17](#)
 - em forma de oito, [5](#)
 - homográfica, [16](#), [60](#)
- Soluções homográficas
 - colineares, [40](#)
 - conclusões a respeito das, [44](#)
 - espaciais, [43](#)
 - planares, [40](#)