Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Termodinâmica em sistemas gravitacionais

Walace de Sousa Elias

Orientador: Prof. Dr. Carlos Molina Mendes

Tese de doutorado apresentada ao Instituto
de Física para a obtenção do título de Doutor
em Ciências.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes (USP)

Prof. Dr. Alberto Saa (UNICAMP)

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (USP)

Prof. Dr. Jorge Noronha (USP)

Prof. Dr. Rodrigo Fresneda (UFABC)

São Paulo

2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Elias, Wallace de Sousa

Termodinâmica em sistemas gravitacionais. São Paulo, 2017.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Molina Mendes
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Termodinâmica; 2. Gravitação; 3. Teoria de campos.

USP/IF/SBI-039/2017

"Não há excesso de liberdade se aqueles que são livres são responsáveis. O problema é a liberdade sem responsabilidade."

Milton Friedman

Agradecimentos

Neste pequeno espaço terei a duríssima missão em demonstrar meus agradecimentos a todos que me ajudaram, direta e indiretamente, para que este trabalho fosse realizado sem esquecer algum nome. Em especial, gostaria de manifestar meus agradecimentos às pessoas a seguir:

- Aos meus pais, Evanice e Marcos, por me incentivarem e apoiarem em todos os momentos de minha vida. À vocês, meu sincero obrigado. Amo vocês.
- À minha noiva, Rosane, que mesmo a distância me apoiou e motivou nos momentos mais complicados desta jornada. Te amo.
- As minhas irmãs, Beatriz, Bruna e Thayná, a quem tenho imenso amor e carinho.
- Ao meu orientador, Prof. Carlos Molina Mendes, pelo apoio e incentivo na realização deste trabalho.
- Ao Prof. Luís Raul Weber Abramo pela ajuda e atenção. Obrigado.
- Aos amigos Alysson Moraes, André Britto, Miguel Jorge, Rafael Francisco e Yuber Pérez pelos momentos de amizade e descontração. Em alguns momentos, fazendo o papel de família. Obrigado de verdade.
- Um agradecimento especial ao meu amigo-irmão Yuber Pérez, pelas inúmeras conversas sobre os mais diversos temas, pelas leituras incessantes desta tese, sugestões e dicas para que este trabalho se tornasse uma realidade.
- Aos amigos da sala 313, em especial à Laura Raquel quem dividiu sala comigo por todos estes anos.

- Aos funcionários do departamento de física-matemática pela simpatia e boa vontade. Em especial, agradeço a Amélia, Cecília e Simone. Obrigado meninas.
- A todos meus colegas de departamento que tive o prazer de conhecer. Listá-los seria uma injustiça aos nomes que, por falha da minha memória, não estivessem presentes. Muito obrigado pessoal.
- Aos companheiros do FutCampo-Física pelos momentos de descontração.
- Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro deste trabalho de doutorado.

Resumo

As propriedades termodinâmicas relacionadas a um gás composto por partículas bosônicas em geometrias esfericamente simétricas são apresentadas ao longo deste trabalho. Utilizando o formalismo proposto por Ishibashi e Kodama, verificou-se que as equações de movimento associadas aos campos escalar e eletromagnético podem ser reduzidas a uma equação tipo Schrödinger. Ao considerarmos algumas soluções esfericamente simétricas observou-se que o espectro de energia associado às partículas é discretizado. Em particular, no estudo das lightspheres, superfícies onde os fótons estão confinados em órbitas fechadas, propomos um mecanismo de quantização para as partículas bosônicas. Estudamos algumas propriedades termodinâmicas e dentro deste tratamento, é apresentada uma expressão para a densidade de energia espectral da radiação emitida. Nossos resultados sugerem que as lightspheres quando termalizadas com o seu ambiente, possuem propriedades termodinâmicas não usuais. Ao levarmos em consideração a presença da constante cosmológica negativa, constatou-se que além de um espectro de energia discretizado, a geometria adS possui um comportamento confinante, podendo ser interpretada como uma caixa de tamanho conhecido. Considerando um gás de partículas bosônicas confinadas na geometria anti-de Sitter, obtivemos as grandezas termodinâmicas associadas tais como energia interna, entropia e pressão. Para a energia interna observamos um comportamento diferente do usual para o limite de baixas temperaturas.

Palavras chave: termodinâmica, teoria quântica de campos, relatividade geral, lightspheres, espaço-tempo adS .

Abstract

The thermodynamic properties related to a gas composed of bosonic particles in spherically symmetrical geometries are presented in this work. Using the formalism proposed by Ishibashi and Kodama, we have seen that the equations of motion associated to the scalar and electromagnetic fields can be reduced to a Schrödinger-like equation. For some spherically symmetrical solutions it has been demonstrated that the energy spectrum associated with the particles is discretized. In particular, when we considered lightspheres, surfaces where photons are confined in closed orbits, we propose a quantization procedure for the bosonic particles. In this treatment, it is presented an expression for the spectral energy density of the emitted radiation. Our results suggest that lightspheres thermalized with its environment, have unusual thermodynamical properties. When taken into account the presence of the negative cosmological constant, it has been shown that, besides a discretized energy spectrum, the geometry has a confining behavior and can be interpreted as a finite size box. Considering a gas of bosonic particles confined in the anti-Sitter geometry, we obtained the associated thermodynamics quantities such as internal energy, entropy and pressure. For the internal energy, in the low temperatures limit, we observe a different behavior from the usual one.

Keywords: thermodynamics, quantum field theory, general relativity, lightspheres, adS spacetime.

Sumário

1. Introdução	1
2. Geometrias esfericamente simétricas na relatividade geral	7
2.1. Geometria e gravitação	8
2.2. Equações de Einstein	12
2.3. Campos de Killing e soluções maximalmente simétricas	14
2.4. A geometria anti-de Sitter	17
2.5. Volume efetivo anti-de Sitter	22
3. A dinâmica dos campos	33
3.1. A geometria de fundo	34
3.2. Campo escalar	35
3.3. Campo eletromagnético	38
3.4. Regras de quantização dos campos	44
4. A termodinâmica das lightspheres	49
4.1. Lightspheres em geometrias esfericamente simétricas	50
4.2. Uma abordagem semi-clássica para as lightspheres	53
4.3. Termodinâmica das Lightspheres	61
5. Termodinâmica de sistemas bosônicos na geometria adS	71
5.1. Campo escalar em adS	71
5.2. A termodinâmica dos fótons escalares	78
5.3. Campo eletromagnético em adS	82

5.4. A termodinâmica dos fótons	89
6. Considerações finais	97
A. Decomposição em hamônicos esféricos sobre a n-esfera	101
A.1. Harmônicos esféricos escalares	101
A.2. Harmônicos esféricos vetoriais	102
A.3. Harmônicos esféricos tensoriais	103
B. Radiação do corpo negro em uma cavidade esférica	107
C. Cálculo da degenerescência das energias	113
D. Grandezas termodinâmicas em diferentes dimensionalidades	117
Referências Bibliográficas	121

Lista de Figuras

2.1. Modelo representando espaço euclidiano com curvatura constante.	18
2.2. Modelo de espaços hiperboloides.	20
2.3. Representação de adS_2 induzida a partir de $\mathbb{R}^{2,1}$	22
2.4. Geodésicas radiais tipo tempo em adS_4	26
2.5. Diagrama de emissão de um feixe de luz na geometria adS_4	27
2.6. Representação do raio efetivo R_{eff} para adS_4	30
4.1. Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ para geometria de Schwarzschild.	52
5.1. Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(\chi)$ para geometria adS com um campo escalar.	73
5.2. Representação dos modos radiais para o campo escalar em adS_4	77
5.3. Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(\chi)$ para a componente tipo vetor.	83
5.4. Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(\chi)$ para a componente tipo escalar.	86
B.1. Representação numérica dos zeros das funções de Bessel.	109

1. Introdução

A teoria quântica e a relatividade geral são as duas pedras angulares da física moderna que, por mais de um século, contribuíram para aumentar nosso conhecimento sobre o Universo como nunca antes visto na história da humanidade. Com a ajuda da teoria quântica foi possível explicar fenômenos previamente inexplicáveis, tais como a radiação de corpo negro [1] e as ``órbitas`` estáveis do elétron em torno do núcleo de um átomo [2]. Sua relevância não está restrita apenas em níveis microscópicos da matéria, seus efeitos são presentes para explicar fenômenos macroscópicos, tais como a superfluidez e a supercondutividade [3].

Por outro lado, a teoria da relatividade geral fornece uma compreensão profunda do Universo em escalas astrofísicas e cosmológicas, onde podemos listar como alguns de seus principais resultados a explicação para a precessão do periélio de Mercúrio [4] e a recente descoberta direta das ondas gravitacionais [5].

Algumas tentativas em unificar estas duas belas teorias apresentam problemas conceituais. Uma teoria unificada entre a gravitação e a teoria quântica seria muito importante para descrever, por exemplo, a origem do Universo e seu desenvolvimento posterior. Uma destas tentativas, que tem apresentados resultados interessantes, surgiu da combinação dos ingredientes fundamentais da teoria quântica de campos e a relatividade geral, denominada por teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos [6--8].

Apesar de suas limitações como uma teoria efetiva, a abordagem tem sido responsável pela predição de importantes resultados, como a criação de partículas em universos em expansão, a radiação térmica obtida para observadores acelerados [9--11] (efeito Fulling-Davies-Unruh), e a evaporação de buracos negros ocasionada por efeitos quânticos [12] (a radiação Hawking), este último em total contraste com as previsões clássicas. Entretanto, uma das dificuldades em estudar teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos, mesmo quando os campos não interagem, está no fato das equações não poderem ser resolvidas analiticamente para muitos cenários de interesse.

Geometrias esfericamente simétricas em relatividade geral são fundamentais para estudar objetos compactos, buracos negros e cosmologia. De fato, duas das mais antigas e mais comumente estudadas soluções exatas das equações de campo de Einstein são ‘‘esfericamente simétricas’’. A métrica de Schwarzschild [6--8] descreve o campo gravitacional fora de um corpo maciço esférico estático e a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [6--8], que descreve um universo homogêneo e isotrópico em termos da evolução de seu fator de escala com o tempo cósmico. Outra solução esfericamente simétrica muito importante surge ao considerarmos as equações de campo de Einstein, na presença da constante cosmológica negativa, conhecida por solução anti-de Sitter (adS) [6--8].

O espaço-tempo adS está entre as geometrias esfericamente simétricas mais populares na teoria quântica de campos. Parte deste interesse foi motivado por questões relacionadas, principalmente, com a quantização de campos em espaços-tempos curvos [13]. O espaço-tempo adS é uma solução maximalmente simétrica e, por isso, inúmeros problemas físicos podem ser resolvidos exatamente. A presença de modos regulares e irregulares e a

possibilidade de obter uma estrutura causal interessante levam a vários fenômenos novos e notáveis.

Um fenômeno recente envolvendo a geometria adS, é a descoberta da correspondência adS/teorias de campo conforme (CFT). Proposta inicialmente por Maldacena [14] relacionando a teoria supersimétrica de Yang-Mills ($\mathcal{N} = 4$) e a teoria de supercordas fechadas do tipo IIB, a correspondência foi reescrita de uma forma mais geral por Witten [15] e Gubser et al. [16]. Em sua formulação mais básica, tal correspondência postula um dicionário, relacionando teorias conformes em um espaço de Minkowski d -dimensional e uma teoria de gravidade em $(d+1)$ dimensões.

As propriedades termodinâmicas da geometria adS atraem muitas atenções já há algum tempo. Em 1983, Hawking e Page descobriram, utilizando o formalismo das integrais de trajetória, que o buraco negro de Schwarzschild-adS possuía uma energia livre negativa relativa à geometria adS a altas temperaturas e, além disso, exibia uma transição de fase de primeira ordem [17]. As transições de fase e as estabilidades termodinâmicas em diferentes geometrias foram estudadas nos trabalhos subsequentes [18, 19]. Em 1993, Witten interpretou a transição de fase Hawking-Page no contexto da teoria de gauge como transição de fase entre os quarks e os glúons [15].

Entretanto, a análise de alguns sistemas termodinâmicos de interesse, tais como um gás de partículas não interagentes vivendo em geometrias esfericamente simétricas não tem sido objeto de estudos até o presente momento. Um estudo de sistemas bosônicos em um caso particular de geometrias esfericamente simétricas é apresentado em nosso trabalho [20], onde verificamos o comportamento de um gás de fótons confinados em uma lightsphere, região prevista pela relatividade geral, em que os fótons estão confinados em uma trajetória circular. Um segundo sistema termodinâmico de interesse consiste

em considerar o gás de partículas bosônicas em geometrias esfericamente simétricas, na presença da constante cosmológica negativa. Esta tese tem como objetivo estudar a termodinâmica associada aos sistemas termodinâmicos em geometrias esfericamente simétricas.

A estrutura deste trabalho discutido ao longo desta tese é apresentada a seguir. No capítulo 2 expomos uma revisão breve sobre a relatividade geral, identificando algumas soluções esfericamente simétricas utilizadas neste trabalho. Uma análise sobre o movimento de partículas testes e feixe de luz é demonstrada ao final do capítulo, com o objetivo de introduzir conceitos importantes para o desenvolvimento da tese.

No capítulo 3 são apresentadas as equações de movimento associadas aos campos escalar e eletromagnético no contexto de geometrias esfericamente simétricas e estacionárias, utilizando a decomposição dos campos em termos dos harmônicos esféricos. Nestas geometrias o campo eletromagnético será decomposto em duas partes, uma perturbação eletromagnética tipo vetor e uma perturbação eletromagnética tipo escalar. A partir da decomposição em termos dos harmônicos esféricos, será possível reduzir as equações de movimentos associadas aos campos a uma equação diferencial de segunda ordem tipo Schrödinger. Ao final deste capítulo, apresentamos as regras de quantização para os campos no contexto de geometrias esfericamente simétricas.

No capítulo 4 é apresentado a noção de lightspheres, com suas propriedades clássicas e uma descrição quântica para os campos escalar e eletromagnético neste objeto. Com espectros de energias bem definidos para os campos, é realizado um estudo termodinâmico para um gás não interagente. As grandezas termodinâmicas associadas são apresentadas no final deste capítulo.

No capítulo 5 os campos escalar e eletromagnético são resolvidos classicamente na geometria adS. Em seguida, um processo de quantização canônica é introduzido, de modo que é possível determinar o espectro de energia associado a cada um dos campos. A partir do espectro de energia, novamente é realizado um estudo termodinâmico de sistemas compostos por partículas bosônicas não massivas.

Finalmente, no capítulo 6 as conclusões gerais relacionadas a esta tese são apresentadas, assim como as possíveis extensões e perspectivas futuras. Para a facilidade na leitura desta tese, adicionamos três apêndices ao final do texto com materiais complementares ao trabalho aqui apresentados.

No decorrer desta tese, utilizaremos a seguinte assinatura para a geometria $(-, +, + \cdots +)$ e um sistema de unidades naturais, no qual a velocidade da luz, a constante de Boltzmann e a constante de Planck reduzida ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$) serão normalizadas à unidade, $c = k_B = \hbar = 1$. Desta forma, todas as quantidades físicas serão medidas em unidades de massa (ou energia).

2. Geometrias esfericamente simétricas na relatividade geral

A teoria da relatividade geral formulada por Einstein é uma teoria da gravidade puramente geométrica, onde a dinâmica da matéria pode ser determinada através da geometria do espaço e, por sua vez, a geometria pela forma como a matéria está distribuída. Em 1917 [21], Einstein acreditando em um Universo estático, propôs a inclusão de um termo adicional a suas equações de campo, introduzindo assim a constante cosmológica Λ para "segurar" a expansão do Universo. Einstein abandonou o conceito da constante cosmológica logo após Hubble descobrir em 1929 que o Universo estava em expansão [22] e até a década de 90, cosmólogos acreditavam que a constante cosmológica fosse zero. Com a inclusão da constante cosmológica, em 1932 [23] o físico-matemático Willem de Sitter juntamente com Einstein, apresentam uma solução das equações de campo com a presença da constante cosmológica. Para a situação em que a constante cosmológica assume um valor negativo, denominamos esta solução de solução anti-de Sitter (adS).

As aplicações destas soluções têm abrangido diversas áreas da física atual, onde podemos destacar a evidência astronômica para uma expansão acelerada do Universo nos fornecendo uma oportunidade para utilizarmos a geometria de Sitter na cosmologia [24], enquanto que a correspondência adS/CFT [14] representa a mais importante aplicação para a geometria anti-de Sitter. Do ponto de vista geométrico, as geometrias de Sitter e anti-de Sitter são similares à geometria de Minkowski. Na verdade, assim como

a geometria de Minkowski, são soluções maximalmente simétricas, ou seja, admitem grupos de simetria cinemáticas com dez geradores. Uma outra característica importante destas geometrias é que possuem curvatura constante. Apresentaremos neste capítulo uma breve revisão da teoria da relatividade geral e discutiremos algumas características das soluções maximalmente simétricas, uma vez que tais geometrias desempenham um papel importante ao longo deste trabalho.

2.1. Geometria e gravitação

O elemento central na relatividade geral é a noção de espaço-tempo, o conjunto de todos os eventos. A relatividade o modela usando várias estruturas distintas, combinadas de uma forma bem definida. Um espaço-tempo é formado por uma variedade topológica, como base, uma estrutura diferenciável, estrutura afim e métrica compatíveis e por fim, pelas equações de campo.

Uma variedade diferenciável é uma variedade topológica com uma estrutura diferencial definida globalmente [4]. Uma variedade topológica pode ser descrita como uma variedade diferencial localmente usando o homeomorfismo no seu atlas e a estrutura diferencial padrão em um espaço linear. Seja uma variedade $\mathcal{M}$, damos o nome de atlas a uma família

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}, \quad (2.1)$$

onde os $\mathcal{U}_\alpha$ são subconjuntos abertos e ϕ_α são as cartas de $\mathcal{M}$. As cartas ϕ_α são homeomorfismos

$$\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

sobre o subconjunto aberto $V_\alpha = \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Dessa maneira, a variedade $\mathcal{M}$ composta por um atlas de cartas $\mathcal{A}$ é chamada de variedade diferenciável ou variedade suave [4, 8, 25].

Em uma variedade, um dos objetos geométricos centrais é a métrica (ou o tensor métrico). Através dela podemos determinar as propriedades geométricas da variedade, tais como norma de um vetor, paralelismo e a curvatura da variedade, se considerarmos o caso onde a torção seja nula e a métrica compatível com a conexão. Uma vez que conhecemos a métrica, definimos a norma de um vetor como sendo

$$V^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (2.3)$$

porém, os vetores não possuem, na relatividade geral, normas necessariamente positivas. Isto implica dizer que a métrica tem uma assinatura hiperbólica ou lorentziana [4, 26], ou seja, é sempre possível escolher uma base local na qual a métrica assume, no ponto considerado, a forma diagonal

$$(-1, +1, +1, \dots, +1). \quad (2.4)$$

Podemos então, classificá-los de acordo com o sinal da sua norma, ou seja, vetor tipo tempo se $V^2 < 0$, vetor tipo luz se $V^2 = 0$ e vetor tipo espaço se $V^2 > 0$.

Na variedade é preciso prescrever por qual critério se diz que dois vetores definidos em pontos infinitesimalmente próximos são ou não paralelos, isto é, devemos fornecer uma lei de transporte paralelo. Seja então P e Q pontos infinitesimalmente próximos na variedade. Em um sistema de coordenadas, o ponto P possui coordenadas x^μ e o ponto Q possui coordenadas $x^\mu + dx^\mu$. O vetor no ponto P será definido através das suas componentes neste ponto, como sendo $V^\mu(P)$. Dizemos então, que o vetor $V^\mu(Q)$ são as componentes do vetor transportado inalterado se

$$V^\mu(x^\mu + dx^\mu) = V^\mu(x^\mu) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha dx^\beta. \quad (2.5)$$

Como vemos na equação (2.5), para que tenhamos um vetor calculado no ponto Q associado ao vetor calculado no ponto P, precisa-se conhecer além de suas componentes e do incremento dx^μ , também conhecer a conexão. Para a situação em que a variedade possua torção nula e conexão compatível com a métrica, a conexão é também conhecida como símbolos de Christoffel [8]. Os símbolos de Christoffel, conhecendo-se a métrica, são calculados como

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \left[\frac{\partial g^{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g^{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right]. \quad (2.6)$$

A partir da conexão, podemos definir a derivada covariante. Ela age sobre um tensor de ordem p produzindo um novo tensor de ordem $p+1$. Escrevemos a derivada covariante, por exemplo, de um tensor de ordem 1 (vetor) como sendo

$$\nabla_\alpha T^\mu = \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^\beta. \quad (2.7)$$

Para tensores de ordem maior, a derivada covariante pode ser calculada como

$$\nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \frac{\partial T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}}{\partial x^\alpha} - \sum_i \Gamma^{\mu_i}_{\alpha\beta} T^{\mu_1 \dots \beta \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \sum_i \Gamma^\beta_{\alpha\nu_i} T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \beta \dots \nu_m}. \quad (2.8)$$

Com os conceitos de derivada covariante e transporte paralelo, podemos introduzir o conceito de curvatura de uma variedade. A curvatura de uma variedade é definida através do tensor de curvatura ou tensor de Riemann, dado por

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}. \quad (2.9)$$

Definido o tensor de curvatura, construímos o tensor de Ricci,

$$R_{\nu\beta} = R^\mu_{\nu\mu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{[\mu\alpha][\nu\beta]}, \quad (2.10)$$

e o escalar de Ricci,

$$\mathcal{R} = R^\nu_{\nu} = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta}. \quad (2.11)$$

Uma propriedade importante do tensor de Riemann é a identidade de Bianchi [26], dada por

$$\nabla_{\beta} R^{\lambda\mu}{}_{\nu\alpha} + \nabla_{\nu} R^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} R^{\lambda\mu}{}_{\beta\nu} = 0. \quad (2.12)$$

Definido o tensor de Riemann, podemos definir o chamado tensor de Einstein, como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}, \quad (2.13)$$

sendo este objeto importante na caracterização das equações de campo da relatividade geral.

Geodésica

Dada uma variedade, se considerarmos uma curva cujo vetor tangente seja aquele transportado paralelamente a partir de um ponto anterior da curva, então a denominamos por geodésica [8]. Consideremos um ponto com coordenadas x^{μ} , este se movendo ao longo de um caminho parametrizado pela variável s . Existe um vetor $U^{\mu}(s)$, tal que

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}(s)}{ds}, \quad (2.14)$$

em cada ponto deste caminho, e a medida que transportamos paralelamente o vetor U^{μ} ao longo da curva, devemos ter que

$$U^{\nu} \nabla_{\nu} U^{\mu} = 0. \quad (2.15)$$

Na verdade, a fim de satisfazer a ideia intuitiva de que a curva seja uma geodésica, podemos exigir apenas que o vetor tangente ao ponto da curva, transportado paralelamente, esteja na mesma direção e não exigir que mantenha o mesmo comprimento. Dessa forma, a equação da geodésica pode ser escrita como

$$U^{\nu} \nabla_{\nu} U^{\mu} = \alpha U^{\mu}, \quad (2.16)$$

onde α é um parâmetro arbitrário da curva. Esta pode ser reduzida sempre na equação (2.15) escolhendo adequadamente o parâmetro α [25]. Retornando à equação (2.15), podemos escrevê-la em uma forma mais simples como

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (2.17)$$

sendo s é um parâmetro escalar de movimento (e.g. o tempo próprio). Se estivermos falando de partículas de teste ou de feixes de luz, a grandeza a seguir será uma constante de movimento:

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \begin{cases} 0 & \text{geodésica tipo luz,} \\ +1 & \text{geodésica tipo tempo,} \\ -1 & \text{geodésica tipo espaço.} \end{cases} \quad (2.18)$$

A partir da classificação (2.18), podemos interpretar fisicamente as diferentes geodésicas. Se considerarmos geodésicas tipo luz, estas descrevem o movimento de partículas com massa nula. Por outro lado, as geodésicas tipo tempo descrevem o movimento de partículas massivas. Entretanto, as geodésicas tipo espaço não descrevem movimento algum de partículas.

2.2. Equações de Einstein

Na mecânica clássica newtoniana, podemos determinar o potencial gravitacional φ solucionando a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi\rho, \quad (2.19)$$

onde ρ é a densidade de matéria e G a constante gravitacional universal. A solução geral para (2.19) pode ser escrita da seguinte forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = -G \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|}. \quad (2.20)$$

No contexto da relatividade geral, as equações de Einstein representam a generalização de (2.19), onde a densidade de matéria ρ será relacionada pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Por outro lado, a métrica $g_{\mu\nu}$ fará o papel do potencial gravitacional φ e dessa forma, as equações de campo para a relatividade geral deverão conter o tensor momento-energia de um lado da equação e para manter a analogia com a teoria de Newton, o outro lado da equação deverá satisfazer algumas condições:

- (a) tal equação não deverá conter derivadas de $g_{\mu\nu}$ de ordem superior à dois;
- (b) deverá ser linear na segunda derivada de g_{00} ;
- (c) uma vez que existe a conservação de $T_{\mu\nu}$, a derivada covariante desta grandeza tensorial deverá ser nula também.

Einstein conseguiu determinar um objeto tensorial, simétrico, de segunda ordem, que satisfaz as três condições, denominado por tensor de Einstein [8]. Sendo assim, postula-se a seguinte equação de campo

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

onde a constante χ é obtida a partir da condição de que, no limite não relativístico se recupere (2.19). Inicialmente, as equações de Einstein foram escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $\mathcal{R}$ é o escalar de Ricci, G a constante gravitacional universal, c a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento. Em 1917 [21], Einstein apresenta as suas equações com a introdução da constante cosmológica Λ ,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

e em termos do tensor de Einstein (2.13), podemos reescrever a equação (2.23) como

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

As equações de campo de Einstein (2.24) formam um conjunto de 10 equações da teoria da relatividade geral que descrevem a interação fundamental da gravitação como consequência da curvatura gerada pela matéria e energia. De maneira análoga aos campos eletromagnéticos, que são determinados pelas cargas e correntes através das equações de Maxwell, as equações de Einstein são utilizadas para determinar a geometria do espaço-tempo resultante da presença de matéria. A relação entre o tensor métrico e o tensor de Einstein permite escrever as equações de campo como um conjunto não-linear de equações diferenciais parciais, cujas soluções nos fornecem as componentes da métrica.

Algumas soluções de (2.24) são conhecidas e possuem aplicabilidade em fenômenos gravitacionais, tais como buracos negros carregados e/ou girantes e até mesmo no estudo da expansão do universo. Tais equações nos permitem, entre muitas outras coisas, o estudo de ondas gravitacionais [27].

2.3. Campos de Killing e soluções maximalmente simétricas

Consideremos um campo vetorial K_μ tal que gere um conjunto de isometrias em um parâmetro, ou seja, um grupo de transformações que mantêm a métrica de uma dada variedade invariante. A este campo chamamos de campo de Killing [4, 25]. Os campos vetoriais de Killing satisfazem a seguinte equação

$$\nabla_\nu K_\mu + \nabla_\mu K_\nu = 0. \quad (2.25)$$

Uma das propriedades mais úteis dos vetores de Killing [8] é apresentada a seguir. Seja K^μ um vetor de Killing e seja γ uma geodésica com vetor tangente U^μ . Então a grandeza $K_\mu U^\mu$ é conservada ao longo de γ . Podemos verificar esta afirmação, considerando que

$$U^\nu \nabla_\nu (K_\mu U^\mu) = U^\nu U^\mu \nabla_\nu K_\mu + K_\mu U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0, \quad (2.26)$$

onde utilizamos a equação da geodésica (2.15) para anular o segundo termo e a equação de Killing (2.25) para anular o primeiro termo.

Dizemos que a solução é maximalmente simétrica quando a variedade d -dimensional possuir um número máximo de vetores de Killing linearmente independentes dado por [8]

$$\frac{(n+2)(n+3)}{2}. \quad (2.27)$$

Uma outra forma de caracterizar essa solução será quando o tensor de Riemann puder ser escrito como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{\mathcal{R}}{n(n-1)} (g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu}), \quad (2.28)$$

ou então, utilizando as propriedades do tensor de Riemann podemos escrever (2.28) como

$$R_{\mu\nu} = \mathcal{R} \frac{g_{\mu\nu}}{(n+2)}. \quad (2.29)$$

Se considerarmos, em $d = 4$ ($n = 2$), uma geometria com o número máximo de vetores de Killing igual a 10, podemos escrever (2.29) da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = \mathcal{R} \frac{g_{\mu\nu}}{4}, \quad (2.30)$$

e substituindo em (2.22) encontramos que

$$g_{\mu\nu} = -\frac{32\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Se considerarmos $\mathcal{R} = 0$, a solução para (2.31) será trivial e dada pela solução de Minkowski. Entretanto, se considerarmos $g_{\mu\nu}$ como uma métrica lorentziana, (2.31) implicará que $T_{00} < 0$ e $T_{ii} > 0$ ou $T_{00} > 0$ e $T_{ii} < 0$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Porém, com a inclusão da constante cosmológica nas equações de Einstein, conforme apresentado na equação (2.24), é possível determinar soluções maximalmente simétricas com $\Lambda = \frac{\mathcal{R}}{4}$. Dependendo do sinal atribuído à constante cosmológica teremos duas soluções distintas, descritas pela métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.32)$$

válida para $\Lambda > 0$ (solução de-Sitter), para $\Lambda < 0$ (solução anti de-Sitter), e para $\Lambda = 0$ (solução de Minkowski).

Soluções esfericamente simétricas e estáticas

Uma solução é dita esfericamente simétrica [8, 28] se possuir vetores de Killing linearmente independentes satisfazendo as seguintes relações de comutação

$$[K_1, K_2] = K_3, \quad (2.33)$$

$$[K_2, K_3] = K_1 \quad (2.34)$$

e

$$[K_3, K_1] = K_2. \quad (2.35)$$

A partir das relações de comutações para os vetores de Killing, vemos que estes satisfazem a uma álgebra de Lie $SO(3)$, que corresponde ao grupo de rotações $SO(3)$. A solução (2.32) é um caso particular de soluções esfericamente simétricas.

Outros dois conceitos importantes a serem apresentados são a estaticidade e a estacionaridade. Um espaço-tempo é dito estacionário se ele admitir um vetor de Killing tipo tempo. Dessa maneira, uma métrica é

estacionária se existir um sistema de coordenadas onde ela é independente do tempo, isto é,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \quad (2.36)$$

sendo t uma coordenada temporal [8, 28]. A solução é dita estática se ela puder ser folheada por uma família de hipersuperfícies ortogonais a um campo de Killing tipo tempo. Em uma solução estática, a métrica não possui termos cruzados, isto é, $g_{0i} = 0$ [8, 28].

2.4. A geometria anti-de Sitter

Tendo sido apresentado um breve resumo da teoria da relatividade geral e alguns dos principais conceitos necessários, vamos dar início ao estudo da geometria anti-de Sitter. Como mencionando anteriormente, esta geometria nada mais é que a solução das equações de Einstein (2.24) para a situação em que temos $\Lambda < 0$. Primeiramente, vamos revisar sobre espaços-tempos com curvaturas constantes e na sequência apresentar a geometria adS e suas características mais importantes.

Espaços com curvatura constante

Para melhor entendermos a geometria anti-de Sitter e suas propriedades, é interessante revisarmos o conceito de espaços com curvatura constante. Consideremos o espaço euclidiano tridimensional descrito pela seguinte métrica

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.37)$$

Identificaremos a esfera S^2 como sendo a superfície bidimensional que irá satisfazer a seguinte relação de vínculo

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.38)$$

Uma possível solução para (2.38) pode ser escrita em termos das coordenadas esféricas usuais, isto é

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \cos \theta, \quad (2.39)$$

e em termos de (2.39), é possível reescrevermos (2.37) como

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.40)$$

Sabemos que S^2 possui invariância com relação ao grupo de rotação $SO(3)$, ou seja, qualquer ponto sobre S^2 pode ser mapeado em outro por uma transformação de rotação. Além disso, S^2 possui curvatura constante e quando calculada pelo escalar de Ricci (2.11) encontramos [8, 28]

$$\mathcal{R} = \frac{2}{R^2}. \quad (2.41)$$

Figura 2.1.: Se transportamos um vetor apontado para fora da esfera (vermelho) ao longo de qualquer caminho (azul ou verde), os vetores resultantes após o transporte se manterão direcionados da mesma forma que o original. Esta característica se deve ao fato da curvatura de S^2 ser positiva [29].

Uma outra possibilidade um pouco mais complicada, com curvatura constante porém negativa, também conhecido como espaços hiperbólicos $\mathcal{H}^2$ [4]. A visualização de espaços hiperbólicos se torna complexa, uma vez que não é possível induzir sua métrica a partir do espaço euclidiano tridimensional. Entretanto, podemos escrever uma métrica induzida para $\mathcal{H}^2$ a partir do espaço de Minkowski. A geometria $\mathcal{H}^2$ pode ser definida como [4]

$$ds^2 = -dz^2 + dx^2 + dy^2, \quad (2.42)$$

satisfazendo a seguinte relação de vínculo

$$-z^2 + x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.43)$$

O espaço $\mathcal{H}^2$ é homogêneo e, ao contrário de $\mathcal{S}^2$, sua invariância será com relação ao grupo $SO(1,2)$ [4], isto é, podemos levar um ponto sobre a superfície em outro por meio das transformações de Lorentz. Uma possível solução para (2.43) consiste em escrevermos no seguinte sistema de coordenadas

$$x = R \sinh \rho \cos \phi, \quad y = R \sinh \rho \sin \phi, \quad z = R \cosh \rho, \quad (2.44)$$

e em termos de (2.44), a métrica induzida em $\mathcal{H}^2$ será determinada

$$ds^2 = R^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2). \quad (2.45)$$

Se calcularmos o escalar de Ricci (2.11) para $\mathcal{H}^2$ encontraremos [4, 8, 28]

$$\mathcal{R} = -\frac{2}{R^2}, \quad (2.46)$$

de onde vemos que $\mathcal{H}^2$ terá de fato uma curvatura constante e negativa.

Figura 2.2.: Em geometrias com curvatura negativa, como o espaço hiperboloide, se movermos um vetor apontando para fora (vermelho) ao longo do caminho verde, ele irá apontar para sua posição original. No entanto, se movermos a seta ao longo do trajeto azul, o mesmo irá apontar para uma posição diferente da sua inicial. Tal efeito se deve a curvatura negativa da geometria [29].

Espaço-tempo anti-de Sitter

Vimos anteriormente algumas propriedades de espaços com curvatura constante, agora iremos estudar a geometria anti-de Sitter. Esta geometria poderá ser definida como um hiperboloide em 4 dimensões, descrito como a superfície

$$-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -L^2, \quad (2.47)$$

em um espaço-tempo de 5 dimensões, cuja métrica é descrita como

$$ds^2 = -dx_0^2 - dx_1^2 + \sum_{i=2}^4 dx_i^2. \quad (2.48)$$

O parâmetro L é conhecido como raio adS e, assim como o espaço $\mathcal{H}^2$, adS_4 é um espaço-tempo homogêneo e isotrópico que possui simetria com relação ao grupo $SO(2,3)$. A parametrização para a geometria adS_4 , satisfazendo a

relação (2.47), poderá ser escrita como

$$x_1 = L \cosh \rho \cos \tilde{t}, \quad x_2 = L \cosh \rho \sin \tilde{t},$$

$$x_i = L \sinh \rho \Omega_i, \quad \sum_i \Omega_i^2 = 1, \quad (2.49)$$

onde Ω_i são os ângulos que parametrizam S^2 . Portanto, a métrica induzida para o espaço adS_4 poderá ser escrita como

$$ds^2 = L^2 (-\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_2^2). \quad (2.50)$$

As coordenadas $(\tilde{t}, \rho, \Omega_i)$ são chamadas de coordenadas globais para o espaço-tempo adS e, ao escolhermos $0 \leq \rho$ e $0 \leq \tilde{t} \leq 2\pi$, as soluções (2.49) e (2.49) irão cobrir todo o hiperboloide. Uma vez que a métrica (2.50) próximo de $\rho = 0$, comporta-se como $ds^2 = L^2 (-d\tilde{t}^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$, o hiperboloide possui topologia de $S^1 \times \mathbb{R}^3$, com S^1 associado a curvas tipo tempo fechadas na direção de $\tilde{t}$, como mostrado na figura 2.3.

A fim de evitarmos a existência de curvas tipo tempo fechadas, é comum considerarmos o espaço adS de recobrimento (CadS). Ao fazermos essa escolha, estaremos assumindo então que a coordenada $\tilde{t}$ irá variar no intervalo $-\infty \leq \tilde{t} \leq \infty$ e dessa forma, CadS poderá ser visualizado como um cilindro longo e infinito. Iremos considerar o espaço-tempo CadS ao longo desta tese, e seguindo a convenção usual de parte da literatura, não mais distinguiremos CadS e adS .

O espaço-tempo adS (ou CadS) não é globalmente hiperbólico. Em variedades que não são globalmente hiperbólicas, o conhecimento das equações de movimento e as condições iniciais não são suficientes para determinarmos a evolução de quantidades físicas. A falta de hiperbolicidade global em adS se deve ao fato da existência de uma fronteira tipo espaço no infinito, ou seja, é possível o recebimento de informações oriundas do infinito.

Figura 2.3.: Na geometria adS vemos que direção tipo tempo $\tilde{t}$ possui curvas fechadas e, uma forma de contornarmos a situação, é necessário considerarmos o espaço adS estendido [29].

A seguir, estudaremos o movimento de uma partícula no espaço-tempo adS onde será possível verificarmos essa propriedade interessante.

2.5. Volume efetivo anti-de Sitter

Uma forma de exemplificarmos tudo que aprendemos até o momento sobre a geometria adS será estudando as trajetórias realizadas por partículas teste e pela luz. Iremos verificar que partículas testes se movendo no espaço-tempo adS irão descrever trajetórias periódicas e, por outro lado, a luz irá descrever linhas retas e retornarão do infinito em um tempo finito.

A partir da expressão para a métrica da geometria adS na equação (2.32), com $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$, os símbolos de Christoffel diferentes de zero podem ser

calculados e escritos como

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{r}{L^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)}, \quad (2.51)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{r}{L^2} \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right), \quad (2.52a)$$

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{r}{L^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)}, \quad (2.52b)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right), \quad (2.52c)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) \sin^2 \theta, \quad (2.52d)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (2.53a)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta, \quad (2.53b)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (2.54a)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta. \quad (2.54b)$$

Retornando à equação (2.17), encontramos as componentes da geodésica satisfazendo as seguintes equações diferenciais

$$\ddot{t} + 2 \frac{r}{L^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (2.55)$$

$$\ddot{r} + r \left[\frac{(\dot{t})^2}{L^2} \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) - \frac{(\dot{r})^2}{L^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} + \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) (\dot{\theta})^2 - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 \right] = 0, \quad (2.56)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - (\dot{\phi})^2 \cos \theta \sin \theta = 0, \quad (2.57)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cot \theta = 0, \quad (2.58)$$

onde denotamos $\dot{} \equiv \frac{d}{d\tau}$. Sem perdermos a generalidade do nosso problema, podemos restringir o movimento das partículas (e dos feixes de luz) ao plano $\theta = \pi/2$, devido à conservação do momento angular e, portanto, teremos apenas três componentes para as geodésicas, ou seja,

$$\ddot{t} + 2 \frac{r}{L^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (2.59)$$

$$\ddot{r} + r \left[\frac{(\dot{t})^2}{L^2} \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) - \frac{(\dot{r})^2}{L^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) (\dot{\phi})^2 \right] = 0, \quad (2.60)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} = 0, \quad (2.61)$$

enquanto que a constante de movimento (2.18) será escrita como

$$\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} = \begin{cases} +1 & \text{geodésica tipo tempo,} \\ 0 & \text{geodésica tipo luz,} \\ -1 & \text{geodésica tipo espaço.} \end{cases} \quad (2.62)$$

Ao integrarmos as equações (2.59) e (2.61), encontramos

$$\dot{t} = \frac{\mathbb{E}}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)}, \quad (2.63)$$

e

$$\dot{\phi} = \frac{\mathbb{L}}{r^2}, \quad (2.64)$$

com $\mathbb{E} = \text{const.}$ e $\mathbb{L} = \text{const.}$, representando a energia e o momento angular da partícula teste.

Geodésicas radiais tipo tempo

Se considerarmos partículas massivas, a relação (2.62) será escrita como

$$\left(1 + \frac{r^2}{\mathbb{L}^2}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 + \frac{r^2}{\mathbb{L}^2}\right)} = 1, \quad (2.65)$$

e com auxílio da equação (2.63), encontramos que

$$\dot{r}^2 = \mathbb{E}^2 - \left(1 + \frac{r^2}{\mathbb{L}^2}\right). \quad (2.66)$$

Assumimos geodésicas radiais com $\mathbb{L} = 0$, isto é, $\phi = 0$ ($0 < \phi < 2\pi$). Dessa forma, a equação (2.60) é escrita como

$$\ddot{r} + \frac{1}{\mathbb{L}^2} r = 0, \quad (2.67)$$

cujas soluções são dadas por

$$r = \pm \sin\left(\frac{\tau}{\mathbb{L}}\right), \quad (2.68)$$

onde consideramos condições iniciais nulas. Como podemos ver partir da figura 2.4, as curvas tipo tempo representam partículas massivas que estão confinadas na própria geometria. A partir do resultado (2.68) observamos que as linhas de mundos de partículas de teste não irão depender da energia de repouso $\mathbb{E}$.

Figura 2.4.: A curva representa as linhas de mundo senoidais para uma partícula teste de massa m e energia $\mathbb{E}$. As curvas são independentes de $\mathbb{E}$.

Movimento periódico do feixe de luz

Vamos estudar o que acontece quando impomos condições de contorno periódicas no movimento de um feixe de luz no espaço-tempo adS . Consideraremos condições de contorno no infinito de forma que o feixe de luz seja refletido, conforme a figura 2.5. A trajetória do feixe de luz, partindo do ponto P_0 até o ponto P_4 , deverá formar um período completo de oscilação e neste caso, vemos que o feixe interceptará $r=0$ duas vezes:

- começando em P_0 de $r=0$;
- voltando para $r=0$ em P_2 do infinito na direção contrária;
- voltando para $r=0$ em P_4 na mesma direção que partiu em P_0 .

Portanto, vamos definir um observador com uma curva do tipo tempo. Por exemplo, um observador em repouso, em $r=0$, seria descrito pela seguinte curva

$$r(\tau)=0, \quad t(\tau)=\tau, \quad \theta(\tau)=\frac{\pi}{2}, \quad \phi(\tau)=0, \quad (2.69)$$

e podemos ver que τ denotará o tempo próprio do observador, visto que ele está localizado em $r=0$. Vamos considerar um feixe emitido por este observador. O tempo que o feixe levará para encontrar o observador em

Figura 2.5.: Um período completo ($P_0 \rightarrow P_4$) na trajetória de um feixe de luz.

repouso será dado por t_2 . Podemos determiná-lo, calculado o tempo que este fóton leva para sair do ponto P_0 até chegar ao ponto P_1 , denotado por t_1 e em seguida multiplicá-lo por 2. Portanto,

$$t_2 = 2 \times t_1. \quad (2.70)$$

Na origem (ponto P_0), temos que

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \mathbb{E}^2, \quad (2.71)$$

com τ sendo o parâmetro afim que descreverá a geodésica do feixe de luz. Neste caso, τ não pode ser interpretado como o tempo próprio. Logo,

$$r(\tau) = \mathbb{E}\tau + C_1. \quad (2.72)$$

Como o feixe e o observador se encontram na origem, podemos escolher $C_1 = 0$. Por outro lado, uma vez conhecido r , podemos determinar o tempo que este

fóton leva para chegar ao ponto P_1 localizado no infinito. Assim,

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{\mathbb{E}}{1 + \frac{(r(\tau))^2}{L^2}} = -\frac{\mathbb{E}}{1 + \mathbb{E}^2 \tau^2 / L^2}, \quad (2.73)$$

e

$$t(\tau) = -\int_0^\tau \frac{\mathbb{E}}{1 + \mathbb{E}^2 \tau^2 / L^2} = L \arctan \left[\frac{\mathbb{E} \tau}{L} \right] + C_2. \quad (2.74)$$

Lembrando que para $t(0) = 0$, então $C_2 = 0$. Logo,

$$t(\tau) = L \arctan \left[\frac{\mathbb{E} \tau}{L} \right]. \quad (2.75)$$

Para determinarmos t_1 , basta encontrar o valor de $t(\infty)$,

$$t_1 \equiv t(\infty) = \frac{\pi}{2} L. \quad (2.76)$$

A equação acima mostra que o tempo para o feixe chegar ao infinito espacial será finito. O tempo que o feixe levará para ir ao infinito espacial e reencontrar o observador em repouso será finito também e dado por

$$t_2 = 2 \times t_1 = \pi L. \quad (2.77)$$

Imediatamente, podemos determinar o período T do movimento do feixe, calculando

$$T = \int_{P_0}^{P_4} ds_{\text{observador}} \Big|_{r=r_0} = 2 t_2 = 2 \pi L. \quad (2.78)$$

O feixe encontrará a borda do espaço-tempo adS em um tempo finito, sendo necessário a escolha de uma condição de contorno adequada. Para o caso em questão, a condição de contorno escolhido foi do tipo reflexiva.

Volume efetivo adS

Nas seções anteriores verificamos que as trajetórias associadas às partículas massivas e os feixes de luz possuem comportamentos interessantes. Quando

estudado o movimento de uma partícula massiva na geometria adS, verificamos que seu movimento além de periódico é confinado, conforme demonstrado na figura 2.4. Por outro lado, quando emitido um feixe de luz e calculado o tempo, medido por um observador estático, que este leva para ir até o infinito espacial, determinamos um valor finito expresso pela equação (2.76). A partir destes resultados, podemos interpretar a geometria adS como uma geometria que apresenta um comportamento similar à uma cavidade de volume efetivo V_{eff} .

Para determinar o volume efetivo associado à geometria adS, vamos considerar um observador localizado no ponto A, que emite um feixe de luz com direção ao infinito espacial localizado no ponto B, conforme ilustrado na figura 2.6. A distância entre os pontos A e B pode ser identificada como um raio efetivo R_{eff} , cujo valor é determinado pela relação¹

$$R_{\text{eff}} = t(\infty), \quad (2.79)$$

onde $t(\infty)$ representa o tempo em que o feixe de luz leva para ir do ponto A até o ponto B, sendo dado pela equação (2.76). Com auxílio da equação (2.78), obtemos que o raio efetivo será expresso por

$$R_{\text{eff}} = \frac{\pi}{2} L. \quad (2.80)$$

Determinado o valor do raio efetivo pela equação (2.80), podemos calcular o volume de uma esfera euclidiana de raio efetivo R_{eff} a partir da equação

$$V_{\text{eff}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{eff}}^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\pi}{2} L\right)^3 \propto L^3, \quad (2.81)$$

e desprezando o fator numérico, vemos que V_{eff} associada à geometria adS

¹Em unidades usuais, o raio efetivo é escrito como $R_{\text{eff}} = c \times t(\infty)$.

Figura 2.6.: Um feixe de luz é emitido a partir do ponto A com direção ao infinito espacial da geometria adS localizado no ponto B. O tempo do percurso entre os dois pontos representa o raio efetivo R_{eff} .

quadrimensional pode ser definido como sendo

$$V_{\text{eff}} \equiv L^3. \quad (2.82)$$

A extensão do resultado (2.82) pode ser estendido para a geometria adS d-dimensional de maneira análoga e, assim, o resultado será escrito como

$$V_{\text{eff}(d)} \equiv L^{n+1}, \quad (2.83)$$

onde L é o raio adS. A noção de um volume efetivo para a geometria adS será importante para discutirmos a implementação de um limite termodinâmico para estudar o comportamento de um gás bosônico no contexto do espaço-tempo adS, que será discutido no capítulo 5.

Ao longo deste capítulo tivemos como objetivo principal apresentar uma revisão sobre a teoria da relatividade geral. Abordamos de forma sucinta alguns tópicos que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho realizado nesta tese. O foco principal foi a apresentação da geometria adS, bem como suas principais características. Além disso, determinamos as geodésicas para partículas massivas e feixes de luz, onde verificamos

que a geometria apresenta um comportamento confinante. Como consequência, verificamos que o tempo para um feixe de luz ir e retornar do infinito espacial adS é finito e portanto, além das condições iniciais devemos conhecer as condições de contorno no infinito espacial. O comportamento confinante da geometria nos levou a construir a noção de um volume efeito associado V_{eff} descrito pela equação (2.82). No próximo capítulo, iremos apresentar o formalismo de Ishibashi-Kodama. Tal formalismo será importante para escrevermos as equações de evolução dos campos escalar e eletromagnético.

3. A dinâmica dos campos

No capítulo 2 revisamos a teoria da relatividade geral e suas propriedades, bem como foram apresentadas algumas soluções conhecidas para as suas equações de campo. Entretanto, nem sempre é possível determinar analiticamente soluções exatas para tais equações e, desta forma, devemos recorrer a técnicas de aproximações, dentre elas a mais utilizada a teoria de perturbações. Temos como objetivo neste trabalho estudar sistemas termodinâmicos em diferentes geometrias e, para estudá-los, será necessário compreendermos a dinâmica dos campos escalar e eletromagnético. Portanto, iremos considerar tais campos como perturbações evoluindo em uma métrica fixa onde desconsideraremos a interação que estes possuem com a própria geometria, isto é, estamos desconsiderando o efeito de backreaction.

Em 1957, Regge e Wheller apresentaram a teoria de perturbações aplicada a buracos negros [30] ao analisarem a questão da estabilidade de um buraco negro de Schwarzschild, sujeito a uma pequena perturbação inicial, isto é, pequenos desvios iniciais de sua simetria esférica. Regge e Wheeler obtiveram equações lineares que governam pequenos desvios, em primeira ordem, da métrica de Schwarzschild. Para isto, estudaram a equação de Einstein linearizada sobre o espaço-tempo descrito por tal métrica. Anos mais tarde, a análise completa deste problema foi apresentada com os trabalhos de Mathews [31], Edelstein-Vishveshwara [32] e Zerilli [33], que forneceram uma abordagem mais rigorosa com o uso dos harmônicos tensoriais.

Ishibashi e Kodama apresentaram em [34] uma generalização ao estudo das perturbações gravitacionais para dimensões mais altas, onde verificaram

que as equações de Einstein para perturbações gravitacionais poderiam ser reduzidas a uma equação tipo da onda em um espaço-tempo estático bidimensional, independentemente dos modos de perturbações. Este resultado também pode ser estendido ao campo eletromagnético e ao campo escalar [35,36]. Este capítulo tem como objetivo discutir as equações de movimento associadas aos campos escalar e eletromagnético no contexto de geometrias esfericamente simétricas e estacionárias, utilizando o formalismo apresentado por Ishibashi e Kodama. Dessa forma, será possível determinar as soluções para as equações em diferentes geometrias e os resultados aqui apresentados serão utilizados ao longo deste trabalho.

3.1. A geometria de fundo

O nosso ponto de partida para estudar a dinâmica dos campos clássicos em diferentes espaços-tempos se inicia com a ação clássica descrita por

$$S = \int \sqrt{-g} \, dx^d \left[\frac{1}{16\pi} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right], \quad (3.1)$$

sendo $\mathcal{L}_M$ a lagrangiana que irá descrever todos os campos de matéria ϕ_i presentes na teoria. A partir de (3.1) podemos obter as equação que regem a dinâmica dos campos, ao variarmos a ação clássica, S , com relação aos campos

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0. \quad (3.2)$$

Se a variação for com relação à métrica, $g_{\mu\nu}$, que descreve a geometria, iremos obter como equação de movimento associada, as equações de Einstein (2.23), na presença da constante cosmológica Λ .

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre o comportamento dos campos, é interessante definirmos a geometria de fundo em que os campos irão se propagar. Nossa escolha de geometria de fundo será um subconjunto das soluções esfericamente simétricas e estacionárias, sendo descritas por uma

métrica $(2 + n)$ dimensional, de modo que no sistema de coordenadas globais assumirá a seguinte forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma_n^2, \quad (3.3)$$

onde $d\sigma_n^2$ representa o elemento de linha da esfera unitária S^n .

A escolha da geometria descrita por (3.3) tem como objetivo nos permitir estudar as equações de movimento associadas aos campos ϕ_i , projetando-os em partes tangentes e ortogonais à S^n , escritos em termos dos harmônicos esféricos apropriados, cujas propriedades são apresentadas no apêndice A. A maioria dos resultados associados à decomposição dos harmônicos esféricos sobre S^n são bem conhecidos e demonstrados em algumas referências, como por exemplo em [37, 38].

3.2. Campo escalar

A seguir, vamos considerar um campo escalar real e massivo de Klein-Gordon, ϕ , cuja dinâmica pode ser obtida a partir da seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\{g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi(x)\nabla_\nu\phi(x) - [m_0^2 + \xi\mathcal{R}(x)]\phi^2(x)\}, \quad (3.4)$$

sendo o termo de acoplamento não-mínimo representado por $\xi\mathcal{R}\phi^2$, com ξ uma constante adimensional e $\mathcal{R}$ o escalar de curvatura de Ricci (2.11). Na literatura existem duas escolhas típicas para o valor de ξ [8]. A primeira é conhecida como acoplamento mínimo onde simplesmente desconsidera-se o termo proporcional a $\mathcal{R}$, ou seja,

$$\xi = 0, \quad (3.5)$$

e a segunda, denominada acoplamento conforme, onde ξ assume um valor específico dependendo da dimensionalidade do espaço-tempo,

$$\xi = \frac{n}{4(n+1)}. \quad (3.6)$$

Se considerado o caso do campo de Klein-Gordon não massivo, verifica-se que tanto o campo quanto a equação de movimento associada à ϕ serão invariantes por uma transformação conforme [7], se a escolha para ξ , em (3.4) é tomada.

Descrever a evolução de ϕ implica em resolver a sua equação de movimento associada e, para obtê-la basta substituírmos $\mathcal{L}_M$ dado (3.4) em (3.2), e dessa maneira a equação de movimento associada será a equação de Klein-Gordon,

$$[\square + m_0^2 + \xi \mathcal{R}(x)] \Phi = 0, \quad (3.7)$$

onde $\square$ é o operador Laplace-Beltrami. Podemos ainda, escrever a equação (3.7) na seguinte forma

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m_0^2 + \xi \mathcal{R}(x)) \phi = \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + m_0^2 + \xi \mathcal{R}(x) \right] \phi = 0, \quad (3.8)$$

e (3.8) admitirá um conjunto completo de soluções, ϕ_k , satisfazendo o produto interno de Klein-Gordon [7]

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} \{ \phi_1 \nabla_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \nabla_\mu \phi_1 \} n^\mu g^{00} \sqrt{-g} d^{n-1} x. \quad (3.9)$$

Dessa forma, uma vez conhecidas as soluções ϕ_k , podemos escrever o campo como

$$\phi(x) = \sum_j a_j \phi_j + a_j^* \phi_j^*, \quad (3.10)$$

onde a_j e $a_j^\dagger$ representam os coeficientes da expansão de ϕ em função dos modos ϕ_k e o seu complexo conjugado, ϕ_k^* , respectivamente. Devido à simetria esférica do espaço-tempo, a solução da equação de movimento para ϕ poderá ser escrita como

$$\phi = \sum_{k_s} \Phi_{k_s}(r, t) S_{k_s}(z^i), \quad (3.11)$$

sendo $\mathbb{S}_{k_S}$ os harmônicos esféricos escalares definidos sobre S^n . Os autovaleiros associados aos harmônicos esféricos escalares $\mathbb{S}_{k_S}$, denotados por k_S^2 , podem ser escritos como

$$k_S^2 = \ell(\ell + n - 1). \quad (\text{A.3})$$

Outras propriedades relacionadas aos $\mathbb{S}_{k_S}$ são apresentadas com mais detalhes no apêndice A.

A função $\Phi_{k_S}(r, t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\left[-\frac{1}{f(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 f(r) \frac{\partial}{\partial r} \right\} - \left(\frac{k_S^2}{r^2} - m^2 \right) \right] \Phi_{k_S}(r, t) = 0, \quad (3.12)$$

a partir da substituição da expansão (3.11) e usando (3.3) em (3.8). Reescrevendo (3.12) em termos da coordenada tartaruga, χ , definida como

$$\chi = \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (3.13)$$

a mesma será transformada em uma equação de onda, tal que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_{k_S}(r, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} - V_{\text{eff}} \right) \Phi_{k_S}(r, t), \quad (3.14)$$

onde V_{eff} é uma função que dependerá da geometria escolhida. Devido à estaticidade da geometria, a solução harmônica da parte temporal do campo ϕ pode ser escrita como

$$\Phi_{k_S}(r, t) = \Phi_{k_S}(r) e^{-i\omega t}, \quad (3.15)$$

sendo $\Phi_{k_S}(r)$ denominado modos radiais do campo ϕ . Ainda precisamos determinar as expressões para os modos radiais $\Phi_{k_S}(r)$ e, portanto, obter um conjunto completo de soluções que descrevam o campo escalar. Entretanto, meio caminho já foi percorrido para obtermos a sua expressão, se retornarmos à equação (3.12), utilizando a solução temporal (3.15), encontramos a seguinte equação

diferencial para os modos radiais

$$\left[\frac{f(r)}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 f(r) \frac{d}{dr} \right\} - f(r) \left(\frac{k_s^2}{r^2} - m^2 + \frac{\omega^2}{f(r)} \right) \right] \Phi_{ks}(r) = 0, \quad (3.16)$$

sendo esta uma equação diferencial hipergeométrica [39].

3.3. Campo eletromagnético

Os campos elétrico e magnético, tratados como vetores tridimensionais $\vec{E}$, $\vec{B}$ na eletrodinâmica clássica, podem ser escritos em termos de uma grandeza tensorial denominada por tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ na eletrodinâmica relativística. As equações de Maxwell serão, portanto, reescritas em termos desta nova quantidade. Dessa forma, podemos descrever a dinâmica do campo eletromagnético a partir da seguinte densidade lagrangeana,

$$\mathcal{L}_M = -\frac{\sqrt{-g}}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

onde o tensor de Maxwell é escrito como

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (3.18)$$

A quantidade A_μ é chamada de potencial vetor ou campo de gauge e, $F_{\mu\nu}$ pode ser interpretado como sendo o "rotacional" de A_μ . A equação de movimento associada a A_μ pode ser obtida ao substituirmos (3.17) em (3.2) e portanto,

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.19)$$

$$\nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0. \quad (3.20)$$

A dinâmica do campo vetorial A_μ é descrita pela equação de movimento (3.19), sendo uma representação mais útil apresentada na seguinte forma

$$\partial_\nu [\sqrt{-g}F^{\mu\nu}] = 0. \quad (3.21)$$

A partir da definição de $F_{\mu\nu}$ em (3.18), segue diretamente que o campo A_μ será invariante sobre a seguinte transformação

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \nabla_\mu \lambda, \quad (3.22)$$

sendo λ uma função escalar. Esta propriedade do campo eletromagnético é conhecida como invariância de gauge [40].

O gauge de Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) é útil para a discussão de propriedades gerais da teoria, sendo sua desvantagem em o utilizarmos o fato de quebrar a covariância da teoria. Uma opção para quantizar o campo eletromagnético, sem perder a covariância explícita, é utilizarmos o gauge de Lorentz. Classicamente, o gauge de Lorentz é definido como

$$\nabla_\mu A^\mu = 0, \quad (3.23)$$

e o campo A_μ satisfazendo a equação da onda

$$\square A_\mu = 0. \quad (3.24)$$

Crispino et. al. [41], utilizando o gauge de Feynman modificado demonstraram que a equação (3.21), quando resolvida em uma simetria estática e esfericamente simétrica, poderia ser simplificada e transformada em um conjunto de equações diferenciais radiais associadas a cada componente de A_μ . Outros estudos sobre dinâmica do campo eletromagnético em dimensões arbitrárias foram apresentadas em [42--44], ampliando portanto a discussão sobre o assunto.

A seguir, apresentaremos as equações de movimento associadas às componentes A_μ utilizando a decomposição em termos dos harmônicos esféricos tensoriais apropriados, utilizando o formalismo de Ishibashi e Kodama [45]. Podemos escrever o quadrivetor A_μ como uma soma de projeções ortogonais e tangentes à S^n , onde as componentes ortogonais à S^n se comportam como escalares sobre rotações, e as projeções tangentes comportam-se como vetores com relação à S^n . Dessa forma, podemos escrever o potencial A_μ como sendo a soma destas partes,

$$A_\mu = A_\mu^V + A_\mu^S, \quad (3.25)$$

onde A_μ^V representa a componente vetorial e A_μ^S representa a componente escalar de A_μ , respectivamente. Em [41], verificou-se que os modos físicos I e II apresentados representavam todos os graus de liberdades físicos associados ao campo eletromagnético se propagando em uma geometria descrita por (3.3). Os modos físicos I e II corresponderão às componentes tipo escalar e tipo vetor [42] do quadrivetor A_μ , respectivamente. Devido a invariância por rotações e paridade, as partes escalar e vetorial do quadrivetor A_μ não se acoplam e, portanto, cada um satisfará equações de movimento independentes.

Perturbação eletromagnética tipo vetor

A parte puramente vetorial, A_μ^V , de A_μ poderá ser expandida em termos dos harmônicos vetoriais $\mathbb{V}_{ki}$. As propriedades dos harmônicos vetoriais podem ser encontradas em detalhes no apêndice A.2. Expandindo A_μ^V em termos de $\mathbb{V}_{ki}$, temos

$$A_\mu^V dx^\mu = \sum_{k_V} \phi_{V_k}(r) \mathbb{V}_{ki} e^{i\omega t} dz^i, \quad (3.26)$$

em que autovalores associados aos harmônicos esféricos vetoriais $\mathbb{V}_{ki}$, representados por k_V^2 , são obtidos a partir da relação

$$k_V^2 = \ell(\ell + n - 1) - 1. \quad (A.9)$$

O número de componentes independentes de $\mathbb{V}_{ki}$ será $(n-1)$ e, portanto, $\mathbb{V}_{ki}$ estará definido apenas para $n \geq 2$. A função $\phi_{V_k}(r)$ representa os modos radiais de A_μ^V .

Em termos da decomposição (3.26), ao substituí-la na equação de movimento (3.21), temos que os modos radiais $\phi_{V_k}(r)$ satisfazem a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{r^{n-2}} \frac{d}{dr} \left[f(r) r^{n-2} \frac{d\phi_{V_k}(r)}{dr} \right] + \left[\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{k_V^2 + (n-1)}{r^2} \right] \phi_{V_k}(r) = 0. \quad (3.27)$$

Se reescalarmos ϕ_V em termos de um novo coeficiente Φ_V , de forma que, este seja escrito como

$$\phi_V \equiv r^{-\frac{n+2}{2}} \Phi_V, \quad (3.28)$$

e introduzindo novamente a coordenada tartaruga

$$x = \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (3.29)$$

será possível reescrevermos (3.27) em uma equação tipo Schrödinger

$$\frac{d^2 \Phi_V}{dx^2} + [\omega^2 - V_V(r)] \Phi_V = 0, \quad (3.30)$$

com o potencial efetivo, V_V , sendo determinado por

$$V_V(r) = \frac{k_V^2}{r^2} f(r) + \frac{(n-2)(n-4)}{4r^2} f^2(r) + \frac{n-2}{2r} f(r) \frac{df}{dr}. \quad (3.31)$$

Para geometrias quadrimensionais, é possível ver que a equação (3.31) será coincidente com o potencial de Regge-Wheeler [46],

$$V_V = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f(r). \quad (3.32)$$

Perturbação eletromagnética tipo escalar

Por outro lado, a parte escalar, A_μ^S , do campo eletromagnético A_μ consistirá em duas quantidades, um vetor A_a ortogonal à S^n e uma quantidade escalar, A , de um vetor tangente à S^n . Através da decomposição em termos dos harmônicos esféricos, podemos escrever A_μ^S da seguinte forma

$$A_\mu^S dx^\mu = \sum_{k_S} (A_{ka} S_k dy^a + A_k D_i S_k dz^i) e^{i\omega t}, \quad (3.33)$$

com $a \in \{t, r\}$ e ∇_a denotando o operador diferencial associado à métrica bidimensional

$$g_{ab} dy^a dy^b = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}. \quad (3.34)$$

A partir da expansão (3.33), podemos escrever as componentes do tensor eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, em termos de seus coeficientes e dessa forma, suas componentes F_{ab} , F_{ai} e F_{ij} serão expressas como

$$F_{ab} = (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) S_k, \quad (3.35)$$

$$F_{ai} = (\nabla_a A + k_S A) D_i S_k, \quad (3.36)$$

$$F_{ij} = 0. \quad (3.37)$$

Retornando à componente i -ésima da equação (3.21), temos que

$$\nabla_a \{r^{n-2} (\nabla^a A + k_S A)\} = 0, \quad (3.38)$$

e, com auxílio de (3.38), podemos concluir que existe um campo escalar ϕ_S , de forma que

$$\nabla_a \phi_S = g_{ab} r^{n-2} (\nabla^b A + k_S A), \quad (3.39)$$

sendo g_{ab} a métrica (3.34). Ao compararmos as equações (3.39) e (3.36), a relação entre ϕ_S e $F_{\mu\nu}$ serão dadas por

$$F_{ai} = \frac{1}{r^{n-2}} g_{ab} \nabla^b \phi_S D_i S. \quad (3.40)$$

Por outro lado, se escrevermos a componente a -ésima de (3.21), encontramos que

$$\nabla^b \left[r^n \nabla_a \left(\frac{1}{r^{n-2}} \nabla^a \phi_S \right) - k_S^2 \phi_S \right] = 0, \quad (3.41)$$

e portanto, temos

$$r^{n-2} \nabla_a \left(\frac{1}{r^{n-2}} \nabla^a \phi_S \right) - \frac{k_S^2}{r^2} \phi_S = 0. \quad (3.42)$$

Explicitando a equação (3.42), veremos que os modos radiais associados às perturbações do campo eletromagnético do tipo escalar será dada por

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[f(r) r^{2-n} \frac{d}{dr} (r^n \phi_S) \right] + \left[\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{k_S^2}{r^2} \right] \phi_S = 0. \quad (3.43)$$

Escrevendo em termos de uma nova variável, Φ_S , escrita em termos de ϕ_S da seguinte forma

$$\Phi_S \equiv r^{-\frac{(n-2)}{2}} \phi_S, \quad (3.44)$$

e com o auxílio da coordenada tartaruga (3.13), transformamos a equação (3.43) em

$$\frac{d^2 \Phi_S}{dx^2} + [\omega^2 - V_S(r)] \Phi_S = 0, \quad (3.45)$$

com o potencial efetivo, V_S , sendo determinado por

$$V_S(r) = \frac{k_S^2}{r^2} f(r) + \frac{n(n-2)}{4r^2} f^2(r) - \frac{n-2}{2r} f(r) \frac{df}{dr}. \quad (3.46)$$

Se considerarmos novamente as geometrias quadrimensionais, o potencial efetivo (3.31) terá exatamente a mesma expressão determinada para o caso

dos modos tipo vetor (3.32). Portanto,

$$V_s(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f(r). \quad (3.47)$$

3.4. Regras de quantização dos campos

Nas seções anteriores apresentamos a teoria clássica para os campos escalar e eletromagnético no contexto de geometrias esfericamente simétricas e estáticas. A seguir, faremos a transição para a teoria quântica destes campos. Uma importante consequência da transição é que a teoria quântica descreve estados de múltiplas partículas.

É interessante observar que os campos apresentados nas seções anteriores não representam uma função de onda, e sim campos clássicos. No formalismo de Schrödinger para a quantização da teoria de campos, é definido um funcional de onda complexo, $\Psi[\phi(x^\mu)]$, que representa a amplitude de probabilidade de encontrar o campo em cada configuração. Entretanto, adotaremos o formalismo de Heisenberg, onde os campos serão promovidos a operadores quânticos, satisfazendo relações de comutações usuais [7].

Campo Escalar

Vamos iniciar nossa discussão sobre as regras de quantização, considerando o campo escalar por ser mais simples o processo. A construção de uma teoria quântica de campos, a partir da equação de movimento (3.8), dependerá de um estado de vácuo, isto é, o estado de mínima energia $|0\rangle$, definido como

$$a_j|0\rangle = 0, \quad (3.48)$$

a partir do qual um espaço de Fock possa ser gerado através das operações dos coeficientes da expansão a_j e $a_j^\dagger$, correspondendo a operadores de criação e destruição, respectivamente.

Os modos ϕ_j e ϕ_j^* apresentados em (3.10) são interpretados como modos de energia positiva e negativa, $\phi^\pm$, respectivamente, se

$$\omega \geq 0 \Leftrightarrow \|\phi^\pm\|_{KG} \geq 0, \quad (3.49)$$

com $\|\cdot\|_{KG}$ representando a norma associada ao produto interno de Klein-Gordon, apresentado em (3.9). Em geral, a possibilidade de distinguirmos estes modos em energia positivas e negativas dependerá do espaço-tempo em que o campo estará contido. Entretanto, a escolha feita por nós em considerarmos geometrias esfericamente simétricas e estacionárias, conforme discutido na seção 3.1, nos permite escolher um vetor de Killing tipo tempo, tal que

$$\partial_0 \phi_j^\pm \propto i\omega \phi_j^\pm, \quad \omega > 0. \quad (3.50)$$

É fundamental que possamos fazer esta distinção entre os modos, pois garante que os operadores satisfaçam as relações de comutação canônicas a tempo fixo, permitindo assim a construção de uma teoria quântica de campos bem definida.

A escolha do vetor de Killing tipo tempo de acordo com a equação (3.50) implica diretamente na escolha da coordenada temporal t . Tal escolha, desempenhou um papel essencial ao longo deste trabalho. Caso tivéssemos escolhido uma noção diferente de tempo, os modos que descrevem a solução dos campo seriam distintos, a definição do produto interno (3.9) também seria diferente e, por fim, possivelmente teríamos outra quantização para a teoria.

Campo eletromagnético

Discutido o procedimento para realizar a quantização do campo escalar, a próxima etapa será realizar a quantização do campo eletromagnético. A princípio, o processo de quantização de A_μ segue de maneira análoga ao

realizado para o caso do campo escalar, isto é, A_μ é transformado em um operador $\hat{A}_\mu$ e os coeficientes da expansão da solução clássica são interpretados como operadores de criação e destruição satisfazendo relações de comutação canônicas. Uma vez realizado procedimento de quantização do campo, associado a ele existirá uma partícula de massa nula e spin unitário, denominada por fóton.

Naturalmente, adotaríamos o procedimento de quantização canônica para o campo eletromagnético no gauge de Lorentz, entretanto, a partir da densidade lagrangeana (3.17), observamos que o momento canonicamente conjugado a A_μ , expresso por

$$\Pi^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_0 A_\nu)} = -F_0{}^\mu, \quad (3.51)$$

é nulo quando consideramos $\mu = 0$,

$$\Pi^0 = 0. \quad (3.52)$$

Tal resultado é um obstáculo para a realização da quantização canônica e como uma alternativa de solução, poderíamos adotar a escolha de $A_0 = 0$. Entretanto, surge uma quebra de covariância da teoria e as componentes do campo A_μ não são tratadas de maneiras equivalentes [47].

Uma solução proposta por Gupta-Bleuer [48, 49], consiste em modificar as equações de Maxwell de modo que possamos tratar de forma independente todas as componentes de A_μ . Tal formalismo é baseado numa condição mais fraca para o gauge de Lorentz, conhecida como condição de Gupta-Bleuer, onde

$$\nabla_\mu A^{\mu (+)} |EF\rangle = 0, \quad (3.53)$$

restringe o espaço de Hilbert dos estados físicos $|EF\rangle$ descritos pelos modos tipo vetor (3.26) e tipo escalar (3.33) e assim, o processo de quantização seguirá de maneira similar ao campo escalar [41].

Ao longo do capítulo 3 apresentamos a evolução clássica dos campos escalar e eletromagnético no contexto de uma geometria esfericamente simétrica e estática, através da expansão em termos dos harmônicos esféricos escalar e vetorial. A dinâmica clássica dos campos está determinada a menos da solução para os modos radiais, que satisfazem uma equação tipo Schrödinger (3.14). A seguir, apresentaremos um estudo termodinâmico de sistemas compostos por partículas bosônicas associadas aos campos escalar e eletromagnético, onde particularizaremos os resultados aqui apresentados para algumas soluções esfericamente simétricas e estáticas.

4. A termodinâmica das lightspheres

A relatividade geral prevê a existência de regiões onde a luz está confinada em órbitas fechadas. Estas estruturas são conhecidas como lightspheres e espera-se que existam em torno de corpos ultracompactos [50--54]. Embora os buracos negros sejam candidatos naturais para criarem lightspheres, estrelas ultramassivas poderiam suportar tais objetos também. Inicialmente, considerada como uma particularidade da geometria de Schwarzschild, o conceito de lightsphere foi generalizado e encontrado em uma ampla classe de geometrias estáticas e esféricamente simétricas [55, 56]. Além disso, observamos um crescente interesse na física pelas lightspheres, como por exemplo o problema na sua caracterização em diversos tipos de geometrias [55--57]. A conexão entre os parâmetros da lightspheres e quantidades associadas à dinâmica perturbativa em torno de buracos negros também é objeto de estudos recentes [54, 58, 59]. E, do ponto de vista observacional, a fenomenologia das lightspheres pode ser vista como uma área de interesse em pesquisas, sendo as assinaturas astrofísicas destes objetos foco do estudo em alguns trabalhos [60, 61].

Neste capítulo estudamos a termodinâmica de um gás composto por fótons vivendo na lightsphere. Através de um tratamento semi-clássico para estes fótons, o campo eletromagnético é quantizado sobre a lightsphere e dessa forma, é possível determinar o espectro de energia associado à estas partículas e construir sua função de partição, bem como determinar todas as grandezas termodinâmicas associadas a este sistema. Tal resultado foi publicado em [20].

4.1. Lightspheres em geometrias esfericamente simétricas

Antes de iniciarmos a discussão sobre a termodinâmica das lightspheres, é necessário conhecermos sua definição e algumas de suas propriedades clássicas. Estamos considerando geometrias esfericamente simétricas e estáticas. No capítulo 2 discutimos tais geometrias e, foi verificado que tais geometrias são aquelas equipadas com quatro campos de Killing, K_t , K_x , K_y e K_z , satisfazendo relações de comutações como as das equações (2.33)-(2.35). Uma vez que estamos considerando estaticidade em nossa geometria de fundo, os vetores de Killing K_x , K_y , K_z serão identificados como tipo espaço, enquanto o vetor de Killing, K_t , será identificado como tipo tempo.

O sistema de coordenadas escolhido para descrever o espaço-tempo de fundo será caracterizado pelo conjunto (t, r, θ, ϕ) , podendo ser definido na região estática, de forma que

$$K_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.1)$$

r representando a coordenada radial areal e (θ, ϕ) são as coordenadas angulares usuais que descrevem a esfera em S^2 , cujo elemento de linha é escrito como

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.2)$$

com $A(r) > 0$ e $B(r) > 0$.

Podemos interpretar a lightsphere como sendo uma esfera bidimensional gerada por geodésicas nulas que descrevem órbitas circulares, cujo raio é representado por R . Dada uma parametrização afim, as geodésicas nulas $x^\mu(\lambda)$ nos fornecem quatro constantes de movimentos $\mathbb{E}$, $\mathbb{L}_x$, $\mathbb{L}_y$ e $\mathbb{L}_z$, associadas aos campos de Killing K_t , K_x , K_y e K_z , respectivamente, conforme seção 2.3.

Para quaisquer geodésicas na lightsphere, sempre é possível escolher um sistema de coordenadas onde as órbitas nulas estejam localizadas em um plano equatorial definido por $\theta = \pi/2$. Partindo da equação da geodésica (2.15), obtemos as seguintes equações para as componentes [62]

$$\left[\frac{dr(\lambda)}{d\lambda} \right]^2 = \frac{B(r)}{A(r)} \mathbb{E}^2 - B(r) \frac{\mathbb{L}^2}{r^2} = V_{\text{eff}}(r) , \quad (4.3)$$

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{|\vec{\mathbb{L}}|}{r^2} , \quad (4.4)$$

$$\frac{dt(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\mathbb{E}}{A(r)} . \quad (4.5)$$

O potencial efetivo V_{eff} é dado por

$$V_{\text{eff}}(r) = B(r) \left[\frac{\mathbb{E}^2}{A(r)} - \frac{\mathbb{L}^2}{r^2} \right] , \quad (4.6)$$

com $\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}_x^2 + \mathbb{L}_y^2 + \mathbb{L}_z^2$ representando o quadrado do momento angular total. A partir da expressão do potencial efetivo (4.6), pode-se determinar as órbitas circulares levando em consideração o fato de que a força efetiva, associada ao potencial efetivo, seja nula

$$F_{\text{eff}} = - \left. \frac{dV_{\text{eff}}(R)}{dr} \right|_{r=R} = 0 . \quad (4.7)$$

Ao substituírmos (4.6) em (4.7), encontramos finalmente que o raio da lightsphere será determinado por

$$R = \sqrt{A(r)} \frac{\mathbb{L}}{\mathbb{E}} . \quad (4.8)$$

Se a geometria for assintoticamente plana, as constantes $\mathbb{E}$, $\mathbb{L}_x$, $\mathbb{L}_y$ e $\mathbb{L}_z$ poderão ser interpretadas como sendo a energia e as componentes do momento angular, associados à geodésica vista por um observador estático distante.

As geodésicas contidas na lightsphere, onde V_{eff} é nulo, satisfazem uma relação clássica [62] obtida a partir de (4.3) tomando $r = R$, sendo escrita como

$$\mathbb{E}^2 = A(R) \frac{\mathbb{L}^2}{R^2} . \quad (4.9)$$

Espaços-tempos que apresentam órbitas estáveis para as lightsphere são apresentadas, por exemplo em [63, 64]. Para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild, conforme podemos ver na figura 4.1, encontramos um valor para o raio da lightsphere descrito por

$$R = 3M , \quad (4.10)$$

com a lightsphere existindo em torno de um corpo esférico de massa M , que possua com raio menor que $3M$.

Figura 4.1.: A curva descreve $V_{\text{eff}}(r)$ para o caso do buraco negro de Schwarzschild. Como pode ser visto, existe um ponto em $R = 3M$, de modo que o feixe de luz descreverá uma trajetória circular.

4.2. Uma abordagem semi-clássica para as lightspheres

Nossa proposta para estudarmos a termodinâmica das lightspheres consistirá em um processo de quantização dos fótons confinados em sua superfície. A lightsphere estará situada em uma região externa a um buraco negro (ou uma estrela supermassiva) e a radiação emitida por ela poderá ser detectada por um observador distante. Dessa forma, iremos apresentar a quantização dos campos escalar e eletromagnético em uma variedade tridimensional $S^2 \times \mathbb{R}$.

Lightsphere: campos escalares

A seguir apresentaremos um exemplo não-realista, com o objetivo didático de discutir o processo de quantização dos fótons contidos na lightsphere. O processo de quantização canônica aplicado ao campo escalar, baseado na expansão em termos de ondas planas não é adequado para aplicarmos às lightsphere. É interessante realizarmos a quantização do campo em uma representação mais útil, utilizando a expansão em termos dos harmônicos esféricos (3.11) apresentados no capítulo 3, lembrando que devemos considerar $r = R = \text{cte}$.

Nossa proposta de quantização para um fóton escalar consistirá em promover as constantes $\mathbb{E}$, $\mathbb{L}_x$, $\mathbb{L}_y$ e $\mathbb{L}_z$ a operadores, de modo que estes irão satisfazer as relações de comutação (2.33), (2.34) e (2.35). Inicialmente, será necessário construirmos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ associado a um único fóton, onde consideramos $\mathcal{H}_1$ o conjunto de funções

$$\mathcal{H}_1 : S^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (4.11)$$

tal que, o campo Φ possa ser escrito como uma expansão

$$\Phi(t, \theta, \varphi) = \sum_{\epsilon, l, m} f_{\epsilon lm}(t) S_{l, m}(\theta, \varphi). \quad (4.12)$$

Discutimos no capítulo 3 que a expansão (4.12) forma uma base completa para o campo Φ e portanto, poderá ser utilizada para quantizarmos o campo na lightsphere. A hamiltoniana associada a este sistema pode, portanto, ser obtida a partir da representação diferencial do campo de Killing, K_t , como

$$\hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t} , \quad (4.13)$$

enquanto que os operadores associados ao momento angular $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ e $\hat{L}_z$ são determinados por

$$\hat{L}_x = i \left[-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] , \quad (4.14)$$

$$\hat{L}_y = i \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] , \quad (4.15)$$

$$\hat{L}_z = i \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (4.16)$$

Com o auxílio das equações (4.14)-(4.16), o operador Casimir $(\hat{L})^2$ pode ser escrito como

$$(\hat{L})^2 = (\hat{L}_x)^2 + (\hat{L}_y)^2 + (\hat{L}_z)^2 = - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] . \quad (4.17)$$

Portanto, podemos escrever o campo quantizado na lightsphere, $\hat{\Phi}$, como

$$\hat{\Phi} = \sum_{\epsilon \ell m} \left[\hat{a}_{(\epsilon \ell m)} S_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\epsilon t} + (\hat{a}_{(\epsilon \ell m)})^\dagger S_{\ell m}^*(\theta, \varphi) e^{+i\epsilon t} \right] , \quad (4.18)$$

sendo $\hat{a}_{(\epsilon \ell m)}$ e $(\hat{a}_{(\epsilon \ell m)})^\dagger$ identificados como operadores de destruição e criação, respectivamente. Um ponto essencial na introdução de operadores de criação e destruição é que podemos escrever o espaço de Fock associado a muitas partículas como

$$|(\epsilon \ell m)_1, (\epsilon \ell m)_2, \dots, (\epsilon \ell m)_N\rangle = a_{(\epsilon \ell m)_1}^\dagger a_{(\epsilon \ell m)_2}^\dagger \cdots a_{(\epsilon \ell m)_N}^\dagger |0\rangle . \quad (4.19)$$

Escrita a expansão para $\hat{\Phi}$, podemos obter a hamiltoniana $\hat{H}$ e o operador Casimir $\hat{\mathbb{L}}^2$ em termos dos operadores de criação e aniquilação como sendo

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon (\hat{a}_{(i)})^\dagger \hat{a}_{(i)} , \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbb{L}}^2 = \sum_i k_S^2 (\hat{a}_{(i)})^\dagger \hat{a}_{(i)} , \quad (4.21)$$

onde o índice i representa o conjunto $\{(\epsilon, \ell, m)\}$ e os fótons escalares definidos por $(\hat{a}_{(i)})^\dagger$ e $\hat{a}_{(i)}$ possuem energia ϵ e o quadrado do momento angular k_S^2 bem definidos. A partir da relação (A.3), considerando $n=2$, encontramos que o momento angular associado aos fótons escalares será determinado por

$$k_S^2 = \ell(\ell + 1). \quad (4.22)$$

De acordo com a nossa proposta de quantização, para estudarmos os fótons escalares na lightsphere, escrevemos as grandezas clássicas, que satisfazem a relação (4.9), como sendo operadores quânticos satisfazendo uma versão quantizada de (4.9),

$$[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{\Phi}]] = \frac{A(R)}{R^2} [(\hat{\mathbb{L}})^2, \hat{\Phi}] . \quad (4.23)$$

A partir das equações (4.13) e (4.17), com auxílio da expansão do operador $\hat{\Phi}$ na representação dos harmônicos esféricos (4.18), é possível obtermos uma expressão para a energia ϵ_ℓ associado a um fóton escalar. Levando em consideração que

$$[\hat{H}, \hat{\Phi}] = \epsilon \hat{\Phi} \quad (4.24)$$

e considerando também que

$$[(\hat{\mathbb{L}})^2, \hat{\Phi}] = \ell(\ell + 1) \hat{\Phi}, \quad (4.25)$$

encontramos que a energia ϵ_ℓ será dada por

$$\epsilon_\ell = \frac{\sqrt{A(R)}}{R} \sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.26)$$

O resultado obtido na equação (4.26) representa o espectro de energia de um fóton escalar contido em uma lightsphere. A seguir, iremos determinar o espectro de energia e associado ao fóton.

Lightsphere: campo eletromagnético

Assim como ocorreu para o campo escalar, o tratamento do campo eletromagnético na lightsphere é facilitado quando adotamos a representação em termos dos harmônicos esféricos. Foi discutido anteriormente, na seção 3.3, que o campo eletromagnético A_μ pode ser decomposto em dois distintos modos, denominados por modo escalar e modo vetorial. Na lightsphere os fótons estão contidos na região com $r = R$ e portanto, podemos escrever o modo vetorial (3.26)

$$A_\mu^V dx^\mu = \sum_{k_V} \phi_{V_k}(R) \mathbb{V}_{k_V j} dz^j e^{i\omega t}. \quad (4.27)$$

Por outro lado, o modo escalar (3.33), na lightsphere é escrito da seguinte forma

$$A_\mu^S dx^\mu = \sum_{k_S} \phi_{S_k}(R) \mathbb{S}_k e^{i\omega t}, \quad (4.28)$$

com os modos radiais $\phi_{V_k}(r)$ e $\phi_{S_k}(r)$ determinados pelas equações (3.27) e (3.43), respectivamente. Entretanto, como estamos considerando a região em que $r = R$, $\phi_{V_k}(R)$ e $\phi_{S_k}(R)$ serão apenas constantes.

O processo de quantização é muito semelhante ao realizado no caso do campo escalar. A diferença essencial neste caso, consistirá na construção de um espaço de Hilbert associado a cada um dos modos de perturbação. Assim como ocorreu no campo escalar, a componente tipo escalar do campo eletromagnético, A_μ^S , será quantizada de maneira idêntica, onde construímos

o espaço de Hilbert,

$$\mathcal{H}_1^S : S^2 \rightarrow \mathbb{C} , \quad (4.29)$$

de forma que A_μ^S seja expandido em termos dos harmônicos esféricos escalares

$$A_\mu^S = \sum_{\ell m} f_{\ell m}(t) S_{\ell m}(\theta, \varphi) . \quad (4.30)$$

Para a componente tipo vetor do campo eletromagnético, A_μ^V , o espaço de Hilbert associado será tal que

$$\mathcal{H}_1^V : S^2 \rightarrow \mathbb{C} , \quad (4.31)$$

de forma que A_μ^V possam ser expandidos em termos dos harmônicos vetoriais, $\mathbb{V}_i^{(\ell m)}(\theta, \varphi)$ como

$$A_\mu^V = \sum_{\ell m} \tilde{f}_{\ell m}(t) \mathbb{V}_j^{(\ell m)}(\theta, \varphi) dz^j . \quad (4.32)$$

Uma vez bem definidos os espaços $\mathcal{H}_1^p$, com $p \in \{S, V\}$, a quantização das componentes seguirá de forma análoga ao caso do campo escalar. Assim como ocorreu para o caso do campo escalar, uma vez que os operadores de criação e destruição são definidos, o espaço de Fock associado a muitas partículas (fótons no caso eletromagnético) será construído de maneira análoga. Assim,

$$|j_1^p, j_2^p, \dots, j_N^p\rangle = (a^p)_{j_1}^\dagger (a^p)_{j_2}^\dagger \dots (a^p)_{j_N}^\dagger |0\rangle . \quad (4.33)$$

Portanto, a hamiltoniana associada a um fóton será escrita como (4.13)

$$\hat{H}^p = i \frac{\partial}{\partial t} , \quad p \in \{S, V\} , \quad (4.34)$$

porém devemos levar em consideração a contribuição de cada uma das componentes, caracterizados pelo índice p . Além disso, definimos o operador momento angular como

$$\hat{L}_x^p = i \left[-\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] , \quad (4.35)$$

$$\hat{\mathbb{L}}_y^p = i \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbb{L}}_z^p = i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.37)$$

A partir da equação (4.34), finalmente encontramos

$$\mathbb{S}_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\epsilon t}, \quad \mathbb{S}_{\ell m}^*(\theta, \varphi) e^{+i\epsilon t}, \quad (4.38)$$

representando os modos de energia positiva e negativa. Além disso, definimos os operadores de criação e destruição, de forma que os modos escalares quantizados na lightsphere sejam escritos como

$$\hat{A}_\mu^S = \sum_j \left[\hat{a}_{(j)}^S \mathbb{S}_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\epsilon t} + (\hat{a}_{(j)}^S)^\dagger \mathbb{S}_{\ell m}^*(\theta, \varphi) e^{+i\epsilon t} \right], \quad (4.39)$$

com $(j) \equiv (\epsilon \ell m)$. Para os modos vetoriais, os modos de energia positiva e negativa serão escritos como

$$\mathbb{V}_i^{(\ell m)}(\theta, \varphi) e^{-i\epsilon t}, \quad (\mathbb{V}_i^{(\ell m)})^*(\theta, \varphi) e^{+i\epsilon t}, \quad (4.40)$$

e assim como para os modos escalares, os modos vetoriais são expandidos em termos dos harmônicos vetoriais como

$$\hat{A}_\mu^V = \sum_j \left[\hat{a}_{(j)}^V \mathbb{V}_i^{(\ell m)}(\theta, \varphi) e^{-i\epsilon t} + (\hat{a}_{(j)}^V)^\dagger \left(\mathbb{V}_i^{(\ell m)} \right)^* (\theta, \varphi) e^{+i\epsilon t} \right], \quad (4.41)$$

com $(j) \equiv (\epsilon \ell m)$.

Determinadas as expressões para os potenciais quantizados, a hamiltoniana do sistema, $\hat{\mathbb{H}}^p$, e o quadrado do momento angular, $(\hat{\mathbb{L}}^p)^2$, serão escritos em termos dos operadores de criação e destruição como

$$\hat{\mathbb{H}}^p = \sum_i \epsilon \left(\hat{a}_{(i)}^p \right)^\dagger \hat{a}_{(i)}^p , \quad (4.42)$$

$$(\hat{\mathbb{L}}^S)^2 = \sum_i k_S^2 \left(\hat{a}_{(i)}^S \right)^\dagger \hat{a}_{(i)}^S , \quad (4.43)$$

$$(\hat{\mathbb{L}}^V)^2 = \sum_i k_V^2 \left(\hat{a}_{(i)}^V \right)^\dagger \hat{a}_{(i)}^V . \quad (4.44)$$

onde k_S^2 e k_V^2 são obtidos a partir das relações (A.3) e (A.9), respectivamente. Considerando $n=2$, encontramos imediatamente que

$$k_S^2 = \ell(\ell+1), \quad (4.45)$$

e

$$k_V^2 = \ell(\ell+1) - 1. \quad (4.46)$$

Como podemos ver, quando estudamos a quantização do campo eletromagnético na lightsphere, surge um novo termo associado ao quadrado do momento angular. Os potenciais quantizados também satisfazem a relação quântica para a energia e o momento angular (4.23), sendo escrita da seguinte maneira

$$[\hat{\mathbb{H}}^p, [\hat{\mathbb{H}}^p, \hat{A}_k^p]] = \frac{A(R)}{R^2} [(\hat{\mathbb{L}}^p)^2, \hat{A}_k^p] . \quad (4.47)$$

A partir da relação (4.47) é possível determinarmos as expressões para os espectros de energia do fóton, com o auxílio das relações

$$[\hat{\mathbb{H}}^p, \hat{A}_k^p] = \epsilon \hat{A}_k^p, \quad (4.48)$$

e considerando também

$$[(\hat{\mathbb{L}}^S)^2, \hat{A}_k^S] = \ell(\ell+1) \hat{A}_k^S, \quad (4.49)$$

$$[(\hat{\mathbb{L}}^V)^2, \hat{A}_k^S] = [\ell(\ell+1) - 1] \hat{A}_k^V, \quad (4.50)$$

encontraremos a energia do fóton assumindo valores discretos, assim como no campo escalar, determinada por

$$\epsilon_\ell^S = \frac{\sqrt{A(R)}}{R} \sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (4.51)$$

$$\epsilon_\ell^V = \frac{\sqrt{A(R)}}{R} \sqrt{\ell(\ell+1)-1}, \quad (4.52)$$

com $\ell = 1, 2, \dots$. As equações (4.51) e (4.52) representam o espectro de energia dos fótons associados aos modos escalar e vetorial, respectivamente.

Limite óptico geométrico

Nesta seção iremos validar a proposta de quantização para o espectro de energia dos fótons para os casos do campo escalar e eletromagnético, utilizando o limite óptico geométrico, também conhecido como aproximação eikonal [8, 65, 66]. No limite clássico, observamos que os campos escalar e eletromagnético, contidos na lightsphere, satisfazem a uma mesma equação

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{A(R)}{R^2} \hat{\nabla}^2 \Phi. \quad (4.53)$$

Ao considerarmos a aproximação eikonal, onde assumimos

$$\Phi = \Phi_0 e^{iS}, \quad (4.54)$$

com S sendo a ação clássica, ao inserirmos (4.54) em (4.53), obtemos que

$$-\frac{1}{A(R)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \frac{1}{R^2} \hat{\nabla}^2 S = \nabla_\mu S \nabla^\mu S = 0. \quad (4.55)$$

com o operador $\hat{\nabla}^2$ definido sobre S^2 . A partir de (4.55), observamos que o vetor $\nabla_\mu S$ será nulo, bem como representará geodésicas nulas. Na aproximação eikonal devemos considerar que $\ell \gg 1$ e, portanto, esta aproximação fará com que os espectros de energia associados ao campo escalar (4.26), aos modos

escalar (4.51) e modo vetorial (4.52) sejam equivalentes, ou seja

$$(\epsilon_\ell)^2 = A(R) \frac{\ell^2}{R^2}. \quad (4.56)$$

Portanto, na aproximação eikonal verificamos que um fóton, seja no caso do campo escalar ou no caso do campo eletromagnético, o espectro de energia ϵ_ℓ e o momento angular ℓ , irão satisfazer exatamente à mesma relação (4.9).

4.3. Termodinâmica das Lightspheres

No tratamento dos campos quantizados na lightsphere apresentado anteriormente, vimos que é possível determinar o espectro de energia associado às partículas nos casos do campo escalar e do campo eletromagnético. A seguir, iremos estudar o comportamento termodinâmico destas partículas, com o intuito de obter algumas grandezas termodinâmicas associadas ao problema.

As propriedades termodinâmicas associadas ao gás de partículas podem ser obtidas através da sua função canônica de partição [67],

$$Z[\beta] = \sum_s e^{-\beta E}, \quad (4.57)$$

onde o somatório se estenderá sobre todos os estados s possíveis. Levando em consideração o fato de que o número de partículas não é conservado, temos, que a função de partição (4.57) será fatorizada e reescrita como

$$Z = \prod_{s=0}^{\infty} Z_s, \quad (4.58)$$

com Z_s escrito como

$$Z_s = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_s n_s} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}}. \quad (4.59)$$

Temos então,

$$\ln Z[\beta] = \sum_s \ln Z_s = - \sum_s \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_s}), \quad (4.60)$$

e do resultado acima, para obtermos a energia interna, U , associada ao sistema temos que

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \sum_s \frac{\epsilon_s}{e^{\beta \epsilon_s} - 1}. \quad (4.61)$$

Para a energia livre de Helmholtz, F ,

$$F = -k_B T \ln Z[\beta] = k_B T \sum_s \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_s}). \quad (4.62)$$

A partir da energia livre de (4.62), as demais grandezas termodinâmicas, como pressão e entropia, podem ser calculadas diretamente a partir das seguintes relações

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B \sum_s \left[\frac{\beta \epsilon_s}{e^{\beta \epsilon_s} - 1} - \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_s}) \right], \quad (4.63)$$

e

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\sum_s \frac{\partial \epsilon_s}{\partial V} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s} - 1} = \frac{1}{3} \sum_s \frac{\epsilon_s}{V} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s} - 1} = \frac{1}{3} \frac{U}{V}. \quad (4.64)$$

A termodinâmica das lightspheres para o campo escalar

Inicialmente iremos estudar o caso de um sistema composto por apenas fótons escalares, ou seja, consideraremos o campo escalar Φ . Iremos considerar a lightsphere populada por fótons escalares com suas energias bem definida pela equação (4.26), satisfazendo a estatística de Bose-Einstein, em equilíbrio térmico. Ressaltando, temos que o número de partículas não irá se conservar.

A energia total, U , associada a este sistema com uma certa temperatura T , poderá ser determinada utilizando a equação (4.61), ou seja,

$$U = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{\epsilon_{\ell m}}{\exp\left(\frac{\epsilon_{\ell m}}{T}\right) - 1}, \quad (4.65)$$

onde consideramos o espectro de energia associado a um fóton escalar (4.26). A somatória no índice m é facilmente determinada, se levarmos em conta que $\epsilon_{\ell m}$ não depende de m . Portanto, a energia total será escrita como

$$U = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell+1) \epsilon_{\ell}}{\exp\left(\frac{\epsilon_{\ell}}{T}\right) - 1} \Delta \ell, \quad (4.66)$$

onde o fator $(2\ell+1)$ representa a degenerescência do fóton escalar com uma dada energia ϵ_{ℓ} . As quantidades termodinâmicas relevantes serão definidas a partir de um limite termodinâmico apropriado [68]. Para as lightspheres, o limite termodinâmico apropriado consistirá em considerarmos o número de partículas $N \rightarrow \infty$ e a área da lightsphere $\mathcal{A} \rightarrow \infty$, de forma que

$$\frac{N}{\mathcal{A}} = \text{Cte}. \quad (4.67)$$

Entretanto, se olharmos para a equação (4.66), veremos que se faz necessário reescrevermos a equação em uma forma mais conveniente. Assim, para obtermos o limite termodinâmico, vamos expressar a diferença de energia $\Delta \epsilon_{\ell}$ como

$$\Delta \epsilon_{\ell} = \epsilon_{\ell+1} - \epsilon_{\ell} \approx \frac{d\epsilon}{d\ell} \Delta \ell. \quad (4.68)$$

Aplicando o limite termodinâmico, com auxílio da equação (4.26), observamos que a diferença de energia $\Delta \epsilon_{\ell}$ poderá ser escrita como

$$\Delta \epsilon = (2\ell+1) \frac{A(R)}{2\epsilon R^2}. \quad (4.69)$$

Utilizando o resultado encontrado em (4.69), vamos retornar à equação (4.66) para escrevê-la como uma soma de Riemann, na forma

$$U = \frac{2 R^2}{A(R)} \sum_{\epsilon} \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} \Delta \epsilon, \quad (4.70)$$

e quando escritas em termos da área $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ da lightsphere, temos que

$$\frac{U}{\mathcal{A}} = \sum_{\epsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{A(R)} \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} \Delta\epsilon . \quad (4.71)$$

A partir de (4.71), o limite termodinâmico (4.67) poderá ser aplicado, de modo que R seja suficientemente grande e a razão $U/\mathcal{A}$ seja mantida constante. Por outro lado, a partir da equação (4.69), quando consideramos R grande, o incremento $\Delta\epsilon$ tenderá a zero e portanto a soma de Riemann (4.71) pode ser escrita como uma integral de Riemann.

No limite termodinâmico, a equação (4.71) pode ser escrita como

$$\frac{U}{\mathcal{A}} = \int_0^\infty \rho(\epsilon) d\epsilon , \quad (4.72)$$

com a densidade espectral de energia, ρ , na forma

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{A(R)} \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} . \quad (4.73)$$

Finalmente, determinada a densidade espectral de energia para o fóton escalar, podemos determinar a energia total emitida realizando a integração em ϵ na equação (4.72),

$$\frac{U}{\mathcal{A}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{A(R)} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} d\epsilon = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{A(R)} \left[\int_0^\infty \frac{x^2}{\exp(x) - 1} dx \right] T^3 = \sigma T^3 , \quad (4.74)$$

onde σ é uma constante e em termos dos parâmetros da lightsphere, fica

$$\sigma = \frac{2.5}{2\pi} \frac{1}{A(R)} . \quad (4.75)$$

Observamos que os fótons escalares satisfazem uma lei de Stefan-Boltzmann compatível com um sistema bidimensional. A seguir, vamos analisar o comportamento da lightsphere, quando consideramos o campo eletromagnético.

A termodinâmica das lightspheres para o campo eletromagnético

Na quantização dos fótons apresentada na seção 4.2, consideramos o campo eletromagnético livre de interações e ainda assim, em muitas situações astrofísicas de interesse, espera-se que alguns fótons sejam trocados entre a lightsphere e o objeto que ela circunda.

Por outro lado, pequenas perturbações na lightsphere permitiriam que alguns fótons escapassem, o que seria consistente com a existência de um tempo médio de vida finito para os fótons aprisionados nessa estrutura. Além disso, alguns fótons poderiam ser capturados pela lightsphere, contanto que estes satisfizessem a relação (4.9).

Assim como no caso anterior, iremos considerar a lightsphere populada por fótons com energia bem definida, satisfazendo a estatística de Bose-Einstein e em equilíbrio térmico com o meio. Novamente, o número de partículas também não será conservado. A partir da equação (4.61), a energia total do sistema poderá finalmente ser escrita como

$$U = \sum_{p \in \{S, V\}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{\epsilon_{\ell}^p}{\exp\left(\frac{\epsilon_{\ell}^p}{T}\right) - 1} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell+1) \epsilon_{\ell}^S}{\exp\left(\frac{\epsilon_{\ell}^S}{T}\right) - 1} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell+1) \epsilon_{\ell}^V}{\exp\left(\frac{\epsilon_{\ell}^V}{T}\right) - 1}, \quad (4.76)$$

onde utilizamos a isotropia do espaço para o somatório em m e, por conveniência, separamos as contribuições provenientes dos modos escalar e vetorial. A diferença entre a equação (4.76) e a equação (4.66), consistirá na contribuição adicional proveniente do modo vetorial, cuja expressão da energia é dada pela equação (4.52).

Novamente, assim como no caso do campo escalar, devemos considerar o limite termodinâmico (4.67) para extrairmos as grandezas termodinâmicas importantes. Por outro lado, será necessário reescrevermos a equação da energia interna, assim como foi realizado para o campo escalar. As diferenças de energia associadas aos fótons na lightsphere poderão escritas

como

$$\Delta\epsilon^S \equiv \epsilon_{\ell+1}^S - \epsilon_\ell^S \approx \frac{d\epsilon^S}{d\ell} \Delta\ell, \quad (4.77)$$

e

$$\Delta\epsilon^V \equiv \epsilon_{\ell+1}^V - \epsilon_\ell^V \approx \frac{d\epsilon^V}{d\ell} \Delta\ell, \quad (4.78)$$

sendo que (4.77) representa a diferença de energia associada ao modo escalar e (4.78) representa a diferença de energia associada ao modo vetorial. Quando considerado o limite termodinâmico (4.67), juntamente com as expressões (4.51) e (4.52), as diferenças de energia $\Delta\epsilon^S$ e $\Delta\epsilon^V$ são iguais, isto é,

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^S = \Delta\epsilon^V = (2\ell + 1) \frac{A(R)}{2\epsilon R^2}. \quad (4.79)$$

Retornando à equação da energia interna total (4.76), a reescrevemos da seguinte maneira

$$U = 2 \times \sum_{\epsilon} \frac{2R^2}{A(R)} \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} \Delta\epsilon, \quad (4.80)$$

sendo $\epsilon \in \{\epsilon^S\} \cup \{\epsilon^V\}$. Em termos da área $\mathcal{A}$, (4.80) poderá escrito como

$$\frac{U}{\mathcal{A}} = \sum_{\epsilon} \frac{1}{A(R)\pi} \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} \Delta\epsilon. \quad (4.81)$$

A partir da equação (4.81), podemos aplicar o limite termodinâmico (4.67), e com auxílio das equações (4.51) e (4.52) percebemos que o valor máximo de $\Delta\epsilon$, para um dado ℓ , será $\Delta\epsilon_{\max} = \max[\{\Delta\epsilon^S\} \cup \{\Delta\epsilon^V\}]$.

A medida que consideramos R suficientemente grande, o incremento $\Delta\epsilon$ será pequeno e a somatória em (4.81) será transformada em uma integral

$$\frac{U}{\mathcal{A}} = \int_0^\infty \rho(\epsilon) d\epsilon, \quad (4.82)$$

onde a densidade espectral de energia $\rho(\epsilon)$ do fóton será

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{\pi A(R)} \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1}. \quad (4.83)$$

O resultado apresentado na equação (4.83) possui a mesma forma que o resultado apresentado em [69]. Neste trabalho, os autores determinam o espectro de energia emitida por um hipercubo em n -dimensões, enquanto que apresentamos os resultados considerando a esfera S^2 .

A energia emitida total pela lightsphere é determinada realizando a integração em (4.82),

$$\frac{U}{\mathcal{A}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{A(R)} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{\exp\left(\frac{\epsilon}{T}\right) - 1} d\epsilon = \frac{1}{\pi} \frac{1}{A(R)} \left[\int_0^\infty \frac{x^2}{\exp(x) - 1} dx \right] T^3 = \bar{\sigma} T^3, \quad (4.84)$$

sendo $\bar{\sigma}$ uma constante dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{2.5}{\pi} \frac{1}{A(R)} = 2\sigma. \quad (4.85)$$

A partir do resultado (4.73), verificamos que o sistema composto por fótons possui um fator multiplicativo 2 quando comparado ao resultado (4.83). Tal fator, está relacionado com o fato do fóton possuir dois graus de liberdades. Assim como no caso dos fótons escalares, a energia emitida total pela lightsphere satisfaz a lei de Stefan-Boltzmann em duas dimensões, apresentando uma dependência com o cubo da temperatura.

Outras grandezas termodinâmicas

Através do formalismo apresentado, podemos calcular analiticamente a função de partição (4.57) associada as lightspheres, para os casos do campo escalar e do campo eletromagnético. Uma vez conhecida a função de partição, do ponto de vista da mecânica estatística, o sistema estará completamente determinado, onde será possível obter as principais grandezas associadas através de relações termodinâmicas.

A função de partição poderá ser calculada a partir da equação (4.60), onde agora a soma em s será realizada sobre (m, ℓ) para o caso do campo escalar e (m, ℓ, p) para o caso do campo eletromagnético. Vejamos inicialmente como serão escritas as grandezas termodinâmicas para os fótons escalares

associados ao campo escalar. Neste caso, reescreveremos (4.60) da seguinte forma

$$\ln Z[\beta] = \sum_{m,\ell} \ln Z_{m,\ell} = - \sum_{\ell} (2\ell + 1) \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_{\ell}}). \quad (4.86)$$

A somatória em (4.86) poderá novamente ser reescrita em termos da energia ϵ_{ℓ} associada aos fótons escalares, de maneira análoga ao que fizemos na equação (4.80). Através da equação (4.69) a diferença de energia $\Delta\epsilon_{\ell}$ será dada por

$$\Delta\epsilon = (2\ell + 1) \frac{A(R)}{2\epsilon R^2}, \quad (4.87)$$

e portanto, a somatória em (4.86) será reescrita da seguinte forma

$$\ln Z[\beta] = - \frac{2R^2}{A(R)} \sum_{\epsilon} \epsilon \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) \Delta\epsilon. \quad (4.88)$$

Escrevendo em termos da área da lightsphere $\mathcal{A}$, encontramos que

$$\ln Z[\beta] = -\mathcal{A} \sum_{\epsilon} \frac{1}{2\pi A(R)} \epsilon \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) \Delta\epsilon. \quad (4.89)$$

Impondo o limite termodinâmico (4.67), será possível escrevermos a somatória em (4.89) como uma integral de Riemann, de modo que

$$\ln Z[\beta] = -\mathcal{A} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi A(R)} \epsilon \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon, \quad (4.90)$$

sendo a integral dada por

$$\int_0^{\infty} \epsilon \ln(1 - e^{-\alpha\epsilon}) d\epsilon = -\frac{\zeta(3)}{\alpha^2}, \quad \alpha \geq 0, \quad (4.91)$$

onde $\zeta(n)$ é a função zeta [39]. Portanto, a função de partição $Z[\beta]$ calculada para os fótons escalares será escrita como

$$\ln Z[\beta] = \mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{2\pi A(R)} \frac{1}{\beta^2}. \quad (4.92)$$

Portanto, a equação (4.92) representa a função de partição associada aos fótons escalares. Uma vez determinada, as demais grandezas termodinâmicas associadas ao sistema composto pelos fótons escalares poderão ser obtidas de maneira direta, utilizando as relações (4.62), (4.63) e (4.64). Inicialmente, vamos determinar a energia livre de Helmholtz (4.62),

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z[\beta] = -\mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{2\pi A(R)} \frac{1}{\beta^3}. \quad (4.93)$$

Por sua vez, a entropia poderá ser calculada a partir da energia livre de Helmholtz, de modo que

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{2\pi A(R)} 3 T^2, \quad (4.94)$$

enquanto que a pressão, p , se utilizarmos a equação (4.64) adaptada, encontramos

$$p = -\frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}} = \frac{\zeta(3)}{2\pi A(R)} \frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{2} \frac{U}{\mathcal{A}}. \quad (4.95)$$

Na seção 4.3 determinamos a energia interna do sistema sem ter calculado a função de partição. Entretanto, a partir do resultado obtido para a função de partição em (4.92), a energia interna também pode ser calculada se utilizarmos (4.61),

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{\pi A(R)} \frac{1}{\beta^3}, \quad (4.96)$$

e se considerarmos que a função $\zeta(3) = 1.20206$, verificamos que a energia interna associada aos fótons escalares será dada por

$$U = \sigma T^3, \quad (4.97)$$

onde $\sigma = \frac{0.387}{A(R)}$ estando de acordo com o valor encontrado na equação (4.75).

Se considerarmos o caso dos fótons, ou seja, o caso do campo eletromagnético, o procedimento a ser realizado será análogo ao que fizemos para o campo escalar. A diferença, além dos sistemas físicos em si, será na soma

sobre o índice p , relacionado aos modos escalar e vetorial.

Dessa forma, após reescrevermos a somatória na função de partição (4.86) para o caso em questão, encontraremos a seguinte expressão para $Z[\beta]$,

$$\ln Z[\beta] = \mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{\pi A(R)} \frac{1}{\beta^2}, \quad (4.98)$$

e as grandezas termodinâmicas (4.61), (4.62), (4.63) e (4.64) sendo escritas como

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \mathcal{A} \frac{2\zeta(3)}{\pi A(R)} \frac{1}{\beta^3}, \quad (4.99)$$

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z[\beta] = -\mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{\pi A(R)} \frac{1}{\beta^3} = -\frac{U}{2}, \quad (4.100)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{\pi A(R)} 3 T^2 = \frac{3U}{2T}, \quad (4.101)$$

$$p = -\frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}} = \frac{\zeta(3)}{\pi A(R)} \frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{2} \frac{U}{\mathcal{A}}. \quad (4.102)$$

Para a energia interna, U , no caso do campo eletromagnético, obtemos $\sigma = \frac{0.765}{A(R)}$, novamente de acordo com o valor determinado na equação (4.85).

Conforme discutimos no capítulo 4, apresentamos um tratamento semi-clássico para as lightspheres, de modo que os campos escalar e eletromagnético puderam ser quantizados e o espectro de energia associado as partículas destes campos determinado analiticamente. Conhecido o espectro de energia, apresentamos um problema termodinâmico composto por um gás destas partículas confinadas na lightsphere.

O formalismo aqui apresentado nos possibilitou calcular analiticamente as expressões para a função de partição, bem como determinar algumas grandezas termodinâmicas fundamentais para a completa caracterização do problema. No capítulo seguinte, discutiremos um problema termodinâmico análogo, em que o gás de partículas estará aprisionado pela geometria adS.

5. Termodinâmica de sistemas bosônicos na geometria adS

O espaço-tempo adS possui um potencial confinante que age como uma caixa de tamanho determinado pelo seu raio L , conforme vimos nos capítulos 2 e 3. Desta forma, podemos interpretar um gás em adS como sendo similar a um gás contido em uma cavidade. Assim, uma proposta de estudo consiste em analisar o comportamento de um gás composto por partículas não interagentes satisfazendo a estatística de Bose-Einstein e determinar algumas de suas principais grandezas termodinâmicas, tais como entropia, energia interna, etc. Uma consequência direta do comportamento confinante da geometria adS será a quantização da energia associada às partículas. Os resultados aqui discutidos representam uma contribuição original, que estão sendo colocadas em uma forma apropriada para serem submetidas à publicação.

5.1. Campo escalar em adS

A dinâmica do campo escalar no espaço-tempo adS tem sido investigada ao longo dos últimos anos. No capítulo 3 verificamos que esta dinâmica pode ser determinada se resolvermos a equação associada aos modos radiais (3.16). Avis, Isham e Storey [70] obtiveram uma expressão para os modos radiais considerando o espaço-tempo adS em 4 dimensões ($n = 2$). Burgess e Lütken [71] estenderam os resultados encontrados para o caso n -dimensional e, mais recentemente, Cotăescu [72] determinou uma expressão corrigida para os modos

completos em relação ao resultado previamente apresentado em [71]. A seguir, apresentaremos brevemente os resultados obtidos de modo que, ao final desta seção, apresentaremos a expressão da solução completa do campo escalar ϕ .

A geometria adS corresponde a um caso específico das geometrias esfericamente simétricas, apresentadas no capítulo 2. Obtemos a expressão da métrica que descreve este espaço-tempo fazendo $\Lambda = -\frac{n(n+1)}{2L^2}$ em (2.32), ou seja,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)} + r^2 d\sigma_n^2, \quad (5.1)$$

cujas propriedades já discutimos anteriormente. Podemos escrever a métrica (5.1) em termos da coordenada tartaruga x em (3.13), de forma que

$$x = \int \frac{dr}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)} = L \arctan\left(\frac{r}{L}\right), \quad (5.2)$$

e portanto, escrevemos a coordenada r em função de x como

$$r = L \tan\left(\frac{x}{L}\right). \quad (5.3)$$

Se redefinirmos a coordenada temporal $t \rightarrow Lt$, temos que a métrica (5.1) assumirá a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2\left(\frac{x}{L}\right)} (-dt^2 + dx^2) + L^2 \tan^2\left(\frac{x}{L}\right) d\sigma_n^2. \quad (5.4)$$

Determinada a métrica em termos da nova coordenada x , definida no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}L$, retornando à equação de movimento (3.8) verificamos que o campo ϕ satisfará uma equação diferencial similar à (3.14), onde o potencial efetivo é escrito como

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{L^2} \left[\frac{A}{\cos^2\left(\frac{x}{L}\right)} + \frac{B}{\sin^2\left(\frac{x}{L}\right)} \right], \quad (5.5)$$

Figura 5.1.: A partir do gráfico para $V_{\text{eff}}(x)$, verificamos que a geometria adS desempenha um papel confinante para o sistema em questão, mesmo quando consideramos dimensões superiores a 4. A curva em azul representa a geometria em 4 dimensões, a curva em laranja representa para 5 dimensões e a curva em verde para 6 dimensões, respectivamente. Consideramos $\ell = 1$ e $m_0 = 0$.

com as constantes A e B definidas conforme

$$A = \frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 L^2 + \xi R, \quad (5.6)$$

e

$$B = k_s^2 + \frac{n(n-2)}{4}. \quad (5.7)$$

A partir da equação (5.5), percebemos que o potencial efetivo para o espaço-tempo adS é do tipo Pöschl-Teller [73, 74]. Além do espaço-tempo adS, outros espaços-tempos apresentam um potencial efetivo do tipo Pöschl-Teller, quando estudamos a equação de movimento associada ao campo escalar [75].

Podemos seguir adiante e determinar os modos radiais $\Phi_{k_s}(r)$ e portanto, obter a solução completa do campo escalar. Se levarmos em consideração a dependência temporal do campo na forma (3.15), os modos radiais irão

satisfazer a equação

$$-\tilde{\omega}^2 \Phi_{ks}(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \left[\frac{A}{\cos^2\left(\frac{x}{L}\right)} + \frac{B}{\sin^2\left(\frac{x}{L}\right)} \right] \right) \Phi_{ks}(x), \quad (5.8)$$

com $\tilde{\omega} \equiv \omega L$ e os coeficientes A e B sendo dados por (5.6) e (5.7). A solução de equações do tipo Pöschl-Teller [76] envolve uma transformação de variável da seguinte forma

$$u \equiv \sin^2\left(\frac{x}{L}\right), \quad (5.9)$$

transformando (5.8) na seguinte equação diferencial

$$4(1-u) \frac{d^2 \Phi_{ks}(u)}{du^2} + 2(1-2u) \frac{d\Phi_{ks}(u)}{du} - [(1-u)^{-1} A + u^{-1} B - \omega^2] \Phi_{ks}(u) = 0. \quad (5.10)$$

Em seguida, é necessário reescalonarmos a função $\Phi_{ks}(u)$, de modo que

$$\Phi_{ks}(u) = u^p (1-u)^q F(u), \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad (5.11)$$

e, ao substituirmos (5.11) em (5.8), obtemos a expressão

$$u(1-u) \frac{d^2 F}{du^2} + \left[2p + \frac{1}{2} + (2q - 2p - 1)u \right] \frac{dF}{du} + \left[2pq - p^2 - q^2 + \frac{\tilde{\omega}^2}{4} \right] F = 0, \quad (5.12)$$

com os coeficientes A e B estando relacionados com p e q através das relações

$$A = 2q(2q - 1), \quad (5.13)$$

e

$$B = 2p(2p - 1). \quad (5.14)$$

A forma da equação (5.12) pode ser identificada com a equação hipergeométrica, onde uma escolha apropriada da solução $F(u)$ sendo dada pela combinação linear das funções hipergeométricas [39], $F[\alpha, \beta; \gamma; u]$,

$$F(u) = C_1 F[\alpha, \beta; \gamma; u] + D_1 u^{1-\gamma} F[\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; u], \quad (5.15)$$

com C_1 e D_1 sendo constantes arbitrárias, e os parâmetros α , β e γ podendo ser escritos como

$$\alpha = p + q - \frac{\tilde{\omega}}{2}, \quad (5.16)$$

$$\beta = p + q + \frac{\tilde{\omega}}{2}, \quad (5.17)$$

$$\gamma = 2p + \frac{1}{2}. \quad (5.18)$$

Com o auxílio das equações (5.16)-(5.18), podemos escrever a solução para os modos radiais (5.8) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \Phi_{ks}(x) = & \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{2p} \cos\left(\frac{x}{L}\right)^{2q} \left(C_1 F\left[p + q - \frac{\tilde{\omega}}{2}, p + q + \frac{\tilde{\omega}}{2}; 2p + \frac{1}{2}; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] \right. \\ & \left. + D_1 \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{1-4p} F\left[\frac{1}{2} - p + q - \frac{\tilde{\omega}}{2}, \frac{1}{2} - p + q + \frac{\tilde{\omega}}{2}; \frac{3}{2} - 2p; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] \right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

com $n \geq 2$. A partir das equações (5.13) e (5.14), obtemos os seguintes valores para p e q

$$2p = \ell + \frac{n}{2}, \quad (5.20)$$

e

$$2q = \tilde{m} + \frac{1}{2}, \quad (5.21)$$

com

$$\tilde{m} \equiv \sqrt{m_0^2 L^2 + \xi R + \frac{(n+1)^2}{4}}, \quad (5.22)$$

onde os resultados até este ponto são gerais.

Como mencionamos no capítulo 2, a geometria adS não é globalmente hiperbólica e, portanto, além de conhecer as condições iniciais, é necessário que conheçamos as condições de contorno tanto na origem ($x = 0$) quanto no infinito espacial ($x = \frac{\pi}{2}$) para determinarmos completamente a dinâmica dos campos. Existem na literatura diversos trabalhos que analisam a influência de diferentes condições de contorno para os campos clássicos [77--79]. Neste

trabalho, vamos considerar que o campo será regular na origem e também, a condição de contorno de Dirichlet, ou seja, assumiremos que os campos se anularão no infinito espacial.

A condição de regularidade na origem é violada pelo segundo termo de (5.19), devido a singularidade associada ao termo $\left[\sin\left(\frac{x}{L}\right)\right]^{1-\ell+\frac{n}{2}}$. Para removê-la, devemos, portanto, impor a condição de que

$$D_1 = 0. \quad (5.23)$$

Por outro lado, ao aplicarmos a segunda condição de contorno no infinito espacial tomando o limite da equação (5.19) para $x \rightarrow \frac{\pi}{2}L$, a função hipergeométrica pode ser escrita como [39, 80]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}L} F\left[p+q-\frac{\tilde{\omega}}{2}, p+q+\frac{\tilde{\omega}}{2}; 2p+\frac{1}{2}; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] = \\ = \frac{\Gamma[2p+\frac{1}{2}]\Gamma[2q-\frac{1}{2}]}{\Gamma[p+q+\frac{\tilde{\omega}}{2}]\Gamma[p+q-\frac{\tilde{\omega}}{2}]}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

e verificamos que a condição de contorno no infinito espacial será satisfeita, quando na equação (5.24) a frequência ω apresentar valores positivos discretizados, definidos como

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= 2(p+q+r) \\ &= 2r+\ell+\tilde{m}+\frac{n+1}{2}, \quad r=0,1,2,3,\dots, \end{aligned} \quad (5.25)$$

sendo r denominado como o número quântico radial [72].

Para o caso do campo escalar não massivo ($m_0=0$) e minimamente acoplado ($\xi=0$), a frequência ω discretizada será dada pela expressão

$$\tilde{\omega} \equiv \omega L = 2r + \ell + n + 1. \quad (5.26)$$

O resultado anterior implica em uma regra de quantização da energia das partículas não massivas associadas ao campo ϕ . Determinada a frequência, podemos finalmente escrever a solução clássica completa do campo ϕ como sendo

$$\phi = \sum_{\mathbb{j}} C_{\mathbb{j}} \sin \left[\frac{x}{L} \right]^{\ell + \frac{n}{2}} (1 - \sin \left[\frac{x}{L} \right]^2)^{\frac{n}{2} + 1} \times F \left[p + q - \frac{\tilde{\omega}_{\mathbb{j}}}{2}, p + q + \frac{\tilde{\omega}_{\mathbb{j}}}{2}; 2p + \frac{1}{2}; \sin^2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] \mathbb{S}_{k_s} e^{i\omega_{\mathbb{j}} t}, \quad (5.27)$$

com $C_{\mathbb{j}}$ sendo uma constante de normalização e introduzimos a notação $\mathbb{j}$ para descrever o conjunto de números quânticos $\{(k_s, r)\}$. Se considerarmos a geometria adS quadrimensional, o estado será descrito pela tripla (ℓ, m, r) .

Figura 5.2.: Modos radiais Φ_{k_s} para o campo escalar minimamente acoplado em adS_4 para os primeiros quatro estados com $r = 0, 1, 2, 3$ e mantendo fixo os valores de $\ell = 1$ e $m_0 = 0$. As curvas não estão normalizadas.

O processo de quantização do campo a partir deste ponto é feito de maneira usual conforme esboçado no capítulo 3. A principal característica dos estados construídos a partir de muitas partículas livres (estados do espaço Fock associado) é que os números quânticos serão apenas a soma dos números quânticos das partículas individuais. Em particular, sua energia

será apenas a soma das energias de cada uma das partículas.

Por esta razão, introduzimos os operadores de criação e destruição $\hat{a}_{\mathbf{j}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger$, satisfazendo a relação de comutação

$$[\hat{a}_{\mathbf{j}}, \hat{a}_{\mathbf{j}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{j}\mathbf{j}'}, \quad (5.28)$$

e uma base para os estados de muitas partículas poderá ser construída de maneira usual. Deste modo, um estado para uma partícula genérica k seja escrito como

$$\hat{a}_{k_S 1 r_1}^\dagger \hat{a}_{k_S 2 r_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{k_S k r_k}^\dagger |0\rangle, \quad (5.29)$$

onde $|0\rangle$ representa o estado de vácuo, em que o valor esperado do número de partículas é zero. Em termos dos operadores de criação e destruição, a hamiltoniana adS, $\hat{H}$, será simplesmente escrita como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{j}} \epsilon_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}}, \quad (5.30)$$

com

$$\epsilon_{\mathbf{j}} = \frac{(2r + \ell + n + 1)}{L}, \quad (5.31)$$

e a soma realizada em (5.30) é feita sobre todos os valores de energia possíveis. O operador $\hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}}$ representa o operador número, cujo autovalor será o número de partículas no estado $\mathbf{j}$.

5.2. A termodinâmica dos fótons escalares

Apesar de estarmos considerando o campo escalar livre minimamente acoplado com a geometria adS, a figura 5.1 nos mostra que o potencial efetivo associado a geometria adS no caso do campo escalar possuirá um comportamento do tipo poço de potencial. Portanto, podemos imaginar que o nosso problema termodinâmico consiste em estudar partículas confinadas em uma cavidade com um volume efetivo V_{eff} definido em (2.82), semelhante ao estudo da radiação

do corpo negro.

Consideraremos um gás composto por partículas escalares não massivas não interagentes, com energia ϵ_j bem definida pela equação (5.31), sujeito à distribuição de Bose-Einstein, isto é,

$$n_j(\epsilon_j) = \frac{d(\epsilon_j)}{e^{\beta \epsilon_j} - 1}, \quad (5.32)$$

com $d(\epsilon_j)$ sendo a degenerescência do estado j . O estado quântico de uma única partícula neste sistema será descrito pela tripla (n, m, ℓ) . Dessa forma, a função de partição (uma vez que o número de partículas não é fixo) deste sistema poderá ser escrita como

$$\ln Z[\beta] = - \sum_j \ln [1 - e^{-\beta \epsilon_j}] = - \sum_{\epsilon} d(\epsilon) \ln [1 - e^{-\beta \epsilon}], \quad (5.33)$$

sendo $d(\epsilon)$ a degenerescência de um estado possuir energia ϵ , cuja expressão é dada por

$$d(\epsilon) = \frac{(-1)^n [1 - L\epsilon]_n}{n!}, \quad (5.34)$$

onde $[x]_n$ é denominado como símbolo de Pochhammer [39] e escrito como

$$[x]_n = \frac{\Gamma[x+n]}{\Gamma[x]} = x(x+1)(x+n-1). \quad (5.35)$$

Apresentamos no apêndice C o cálculo explícito para a degenerescência $d(\epsilon)$ quando considerado o caso quadrimensional. Ao discutirmos a termodinâmica associada às lightspheres, verificamos que foi necessário introduzir um limite termodinâmico adequado (4.67), de modo que seja possível determinar as principais grandezas termodinâmicas associadas.

Assim, para estudarmos o gás de partículas não massivas na geometria adS, devemos introduzir um limite termodinâmico apropriado. Nossa proposta para um limite termodinâmico neste contexto, consiste em considerar os limites onde $V_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$, mantendo a razão N/V_{eff} constante, analogamente à

equação (4.67). A grandeza V_{eff} é o volume efetivo introduzido na seção 2.5. Portanto,

$$\frac{N}{V_{\text{eff}}} = \text{cte} . \quad (5.36)$$

A diferença de energia $\Delta\epsilon$ é obtida se considerarmos que

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &= \epsilon_{j+1} - \epsilon_j \\ &= \frac{[2(r+1) + (\ell+1) + n+1]}{L} - \frac{(2r + \ell + n + 1)}{L} \\ &= \frac{1}{L} = \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/(n+1)}}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

e no limite (5.36), vemos que $\Delta\epsilon \rightarrow 0$. Dessa forma, a equação (5.33) poderá ser escrita como uma soma de Riemann

$$\ln Z[\beta] = -L \sum_{\epsilon} d(\epsilon) \ln [1 - e^{-\beta\epsilon}] \Delta\epsilon, \quad (5.38)$$

e impondo o limite termodinâmico (5.36), transformamos a somatória em (5.38) em uma integral, de modo que

$$\ln Z[\beta] = -L \int_0^\infty \frac{(-1)^n [1 - L\epsilon]_n}{n!} \ln [1 - e^{-\beta\epsilon}] d\epsilon. \quad (5.39)$$

A partir da equação (5.39), para um dado n fixado, é possível obter uma expressão analítica da função de partição. Para a situação com n arbitrário, os recursos computacionais não foram suficientes para determinar uma expressão analítica completa.

Se considerarmos o caso quadrimensional ($n=2$), vemos que a função de partição é determinada por

$$\ln Z[\beta] = \frac{\pi}{270} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^3} - \frac{\zeta[3]}{2} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^2} + \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta}. \quad (5.40)$$

A partir de (5.40), podemos determinar todas as grandezas termodinâmicas associadas analiticamente. Vamos inicialmente determinar a energia livre de

Helmholtz (4.62),

$$F = -\frac{\pi}{270} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^4} + \frac{\zeta[3]}{2} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^3} - \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^2}. \quad (5.41)$$

Na sequência, podemos determinar a entropia (4.63), onde obtemos a seguinte expressão:

$$S = \frac{2\pi}{135} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^3} - \frac{3\zeta[3]}{2} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^2} + \frac{\pi^2}{9} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta}. \quad (5.42)$$

A partir de (5.42) verificamos que é uma função crescente com a temperatura, estando de acordo com a segunda lei da termodinâmica. A energia interna (4.61) associada ao nosso sistema termodinâmico será

$$U = \frac{\pi^4}{270} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^4} - \frac{\zeta[3]}{3} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^3} + \frac{\pi^2}{54} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^2} \quad (5.43)$$

Podemos determinar a pressão associada ao fótons escalar, utilizando a equação (4.64)

$$p = \frac{\pi^4}{270} \frac{1}{\beta^4} - \frac{\zeta[3]}{3} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/3} \beta^3} + \frac{\pi^2}{54} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{2/3} \beta^2} = \frac{1}{3} \frac{U}{V_{\text{eff}}}, \quad (5.44)$$

que é similar à equação de estado de um gás ultrarelativístico na geometria de Minkowski [67]. As equações (5.41)-(5.44) descrevem as principais grandezas termodinâmicas associadas ao gás de partículas livres na geometria adS quadrimensional. Apresentamos no apêndice D as expressões tanto da função de partição quanto das grandezas termodinâmicas para outras dimensionalidades. A partir dos resultados encontrados, podemos induzir que a pressão satisfará a seguinte relação para n arbitrário

$$p = \frac{1}{(n+1)} \frac{U}{V_{\text{eff}}} \quad (5.45)$$

A seguir vamos considerar a radiação eletromagnética na geometria adS. Assim como ocorreu nas partículas escalares, os fótons possuirão uma energia discretizada e bem definida, de modo que será possível determinarmos analiticamente a sua função de partição bem como as grandezas termodinâmicas

associadas.

5.3. Campo eletromagnético em adS

Na seção anterior estudamos o comportamento do campo escalar real se propagando na geometria adS, e foi possível determinar que as frequências associadas ao campo serão discretizadas. A seguir, discutiremos a dinâmica do campo eletromagnético na geometria adS, com o objetivo de realizarmos o processo de quantização canônica. Ao escrevermos as equações de movimento associadas ao campo eletromagnético, vimos que este poderá ser decomposto em duas partes denominadas por modo tipo vetor e modo tipo escalar. Cada um destes modos, após serem expandidos em termos de harmônicos esféricos apropriados, satisfazem a equações radiais que dependerão da geometria escolhida. O estudo sobre o campo eletromagnético se movendo no espaço-tempo adS $(2 + n)$ -dimensional foi previamente determinado por [36] e, a seguir, apresentamos uma breve discussão dos resultados obtidos.

Perturbação eletromagnética tipo vetor em adS

A seguir, estudaremos o comportamento dos modos de perturbação tipo vetor do campo eletromagnético com o objetivo de determinar completamente a sua dinâmica. Os modos radiais de perturbação tipo vetor do campo eletromagnético satisfazem a equação radial (3.27), e com o auxílio da coordenada tartaruga (3.13), reescrevemos sua equação diferencial como

$$-\tilde{\omega}^2 \phi_{V_k}(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \left[\frac{A}{\cos^2\left(\frac{x}{L}\right)} + \frac{B}{\sin^2\left(\frac{x}{L}\right)} \right] \right) \phi_{V_k}(x), \quad (5.46)$$

com $\tilde{\omega} \equiv \omega L$ e os coeficientes A e B sendo agora determinados por

$$A = \frac{n(n-2)}{4}, \quad (5.47)$$

Figura 5.3.: A partir do gráfico para $V_{\text{eff}}(x)$, verificamos que a geometria adS desempenha um papel confinante para o sistema em questão, mesmo quando consideramos dimensões superiores a 4. A curva em azul representa a geometria em 4 dimensões, a curva em laranja representa para 5 dimensões e a curva em verde para 6 dimensões, respectivamente.

e

$$B = k_V^2 + \frac{(n-2)^2}{4}. \quad (5.48)$$

Assim como ocorreu no campo escalar, os modos radiais da perturbação tipo vetor do campo eletromagnético possuem um potencial efetivo Pösch-Teller conforme ilustrado na figura 5.3. A solução da equação diferencial associada aos modos radiais $\phi_{V_k}(x)$ será feita de maneira análoga à apresentada na seção anterior. Portanto, $\phi_{V_k}(x)$ serão soluções da equação hipergeométrica (5.12), cuja solução completa será escrita como

$$\begin{aligned} \phi_V(x) = & \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{2p} \cos\left(\frac{x}{L}\right)^{2q} \left(C_2 F \left[p+q-\frac{\tilde{\omega}}{2}, p+q+\frac{\tilde{\omega}}{2}; 2p+\frac{1}{2}; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right) \right] + \right. \\ & \left. + D_2 \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{1-4p} F \left[\frac{1}{2}-p+q-\frac{\tilde{\omega}}{2}, \frac{1}{2}-p+q+\frac{\tilde{\omega}}{2}; \frac{3}{2}-2p; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right) \right] \right), \quad (5.49) \end{aligned}$$

com $n \geq 2$ e os parâmetros p e q , para a perturbação tipo vetor do campo

eletromagnético, escritos como

$$2p = \ell + \frac{n}{2}, \quad (5.50)$$

e

$$2q = 1 - \frac{n}{2}. \quad (5.51)$$

Novamente, estamos interessados em soluções regulares na origem e assim como observamos no campo escalar, a singularidade associada ao termo $\left[\sin\left(\frac{x}{L}\right)\right]^{1-\ell+\frac{n}{2}}$ deverá ser removida. Portanto, impomos a condição de que

$$D_2 = 0. \quad (5.52)$$

A segunda condição de contorno a ser aplicada no infinito espacial, será satisfeita se a frequência ω assumir os seguintes valores

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega L \\ &= 2(p + q + r) \\ &= 2r + \ell + n, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.53)$$

A solução associada à função $\phi_V(x)$ das perturbações eletromagnéticas tipo vetor pode ser escrita como

$$\phi_V(x) = C_2 \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{2p} \cos\left(\frac{x}{L}\right)^{2q} F\left[p + q - \frac{\tilde{\omega}}{2}, p + q + \frac{\tilde{\omega}}{2}; 2p + \frac{1}{2}; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right], \quad (5.54)$$

com p e q sendo determinados pelas equações (5.50) e (5.51), respectivamente.

Perturbação eletromagnética tipo escalar em adS

Determinada a expressão para os modos radiais da perturbação tipo escalar para o campo eletromagnético (3.43), vamos obter sua solução para o caso da

geometria adS. Lembrando que a métrica que descreve adS é dada pela equação (5.1), a equação associada ao modo ϕ_S será escrita na seguinte forma

$$-\tilde{\omega}^2 \phi_{V_k}(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \left[\frac{A}{\cos^2\left(\frac{x}{L}\right)} + \frac{B}{\sin^2\left(\frac{x}{L}\right)} \right] \right) \phi_{V_k}(x), \quad (5.55)$$

com $\tilde{\omega} \equiv \omega L$ e os coeficientes A e B sendo agora determinados por

$$A = \frac{(n-2)(n-4)}{4}, \quad (5.56)$$

e

$$B = k_S^2 + \frac{n(n-2)}{4}. \quad (5.57)$$

Assim como os modos tipo vetor, verificamos que os modos radiais das perturbações tipo escalar do campo eletromagnético satisfazem uma equação diferencial tipo Pösch-Teller e sua solução já foi apresentada anteriormente. Portanto, a solução $\phi_S(x)$ será dada por

$$\begin{aligned} \phi_S(x) = & \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{2p} \cos\left(\frac{x}{L}\right)^{2q} \left(C_3 F\left[p+q-\frac{\tilde{\omega}}{2}, p+q+\frac{\tilde{\omega}}{2}; 2p+\frac{1}{2}; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] + \right. \\ & \left. + D_3 \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{1-4p} F\left[\frac{1}{2}-p+q-\frac{\tilde{\omega}}{2}, \frac{1}{2}-p+q+\frac{\tilde{\omega}}{2}; \frac{3}{2}-2p; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

com $n \geq 4$ e os parâmetros p e q , para a perturbação tipo escalar do campo eletromagnético, serão determinados através das relações

$$2p = \ell + \frac{n}{2}, \quad (5.59)$$

e

$$2q = \frac{n}{2} - 1. \quad (5.60)$$

Na busca por soluções regulares, assim como ocorreu anteriormente, devemos impor que

$$D_3 = 0, \quad (5.61)$$

uma vez que a divergências estará contida no termo $\left[\sin\left(\frac{x}{L}\right)\right]^{\frac{n}{2}-1}$. Ao aplicarmos

(a) As curvas no gráfico acima representam o comportamento de $V_{\text{eff}}(x)$ para os modos tipo escalar no caso do campo eletromagnético, onde é possível observamos o comportamento confinante que a geometria produz sobre o campo.

(b) Ao compararmos os potenciais efetivos dos modos tipo vetor (curva amarela) e modos tipo escalar (curva azul) para a geometria em 5 dimensões, verificamos que o comportamento confinante não está presente na componente tipo escalar. Para dimensões superiores a 5, o potencial efetivo para ambos os modos apresenta um comportamento confinante.

Figura 5.4.: Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(x)$ para a componente tipo escalar.

a condição de contorno no infinito espacial, da mesma forma que os demais casos mostrados, ela será satisfeita apenas se a frequência ω satisfizer os valores discretizados

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \omega L \\ &= 2(p + q + r) \\ &= 2r + \ell + n - 1, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{5.62}$$

A solução para a função $\phi_s(x)$, associada as perturbações eletromagnéticas tipo escalar, pode ser escrita como

$$\phi_s(x) = C_3 \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{2p} \cos\left(\frac{x}{L}\right)^{2q} F\left[p + q - \frac{\tilde{\omega}}{2}, p + q + \frac{\tilde{\omega}}{2}; 2p + \frac{1}{2}; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right], \tag{5.63}$$

com p e q sendo determinados pelas equações (5.59) e (5.60), respectivamente. O resultado encontrado para a frequência ω é válido para $n \geq 4$. Entretanto, se considerarmos o espaço-tempo adS em quatro dimensões, a frequência ω tanto para o modo tipo vetor quanto para o modo tipo escalar será determinada pela expressão [81, 82]

$$\tilde{\omega} \equiv \omega L = 2r + \ell + 2. \tag{5.64}$$

Por outro lado, quando consideramos a geometria adS em 5 dimensões ($n = 3$), observamos através da figura 5.4 que o potencial efetivo V_{eff} associado as perturbações eletromagnéticas tipo escalar será negativo em algumas regiões do espaço-tempo. Tal comportamento nos leva a um resultado não esperado. Utilizando a solução (5.63) para o caso particular em que $n = 3$, encontramos

$$\phi_s(x) = C_3 \sin\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{3+2\ell}{2}} \cos\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}} F\left[\frac{2+\ell}{2} - \frac{\tilde{\omega}}{2}, \frac{2+\ell}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}; \frac{4+2\ell}{2}; \sin^2\left(\frac{x}{L}\right)\right], \tag{5.65}$$

e a partir da equação (5.65), verificamos que a condição de contorno no infinito espacial, $\phi_s(x = \frac{\pi}{2}L) = 0$, é satisfeita para qualquer valor de ω real. Portanto, as perturbações eletromagnéticas tipo escalar na geometria adS em cinco dimensões possuem um espectro de frequências contínuo, para qualquer $\omega \in \mathbb{R}$ [81].

Determinada a dinâmica clássica do campo eletromagnético na geometria adS, o passo seguinte é realizar o processo de quantização. Assim como foi realizado no contexto das lightspheres, devemos construir um espaço de Hilbert associado a cada uma das perturbações eletromagnéticas tipo vetor e tipo escalar. Cada um dos modos de A_μ é expandido em termos dos operadores de criação e destruição. A principal característica dos estados construídos a partir de muitas partículas livres (estados do espaço Fock associado) é que os números quânticos serão apenas a soma dos números quânticos das partículas individuais. Em particular, sua energia será apenas a soma das energias de cada uma das partículas.

Por esta razão, introduzimos os operadores de criação e destruição $\hat{a}^p_j$ e $\hat{a}^{\dagger}_j$, satisfazendo a relação de comutação usual

$$[\hat{a}^p_j, \hat{a}^{\dagger}_{j'}] = \delta_{jj'}, \quad (5.66)$$

onde $p = \{V, S\}$. Uma base para os estados de muitas partículas pode ser construído de maneira usual, de modo que um estado para um único fóton no estado j seja escrito como

$$\hat{a}^{\dagger}_{k_{S1}r_1} \hat{a}^{\dagger}_{k_{S2}r_2} \cdots \hat{a}^{\dagger}_{k_{S_k}r_j} |0\rangle, \quad (5.67)$$

onde $|0\rangle$ representa o estado de vácuo, cujo valor esperado do número de partículas é zero. Em termos dos operadores de criação e destruição, a

hamiltoniana adS para os fótons, $\hat{H}^p$, será simplesmente escrita como

$$\hat{H}^p = \sum_{p=V,S} \sum_{\mathfrak{j}} \epsilon_{\mathfrak{j}}^p \hat{a}_{\mathfrak{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathfrak{j}}, \quad (5.68)$$

com

$$\epsilon_{\mathfrak{j}}^p = \epsilon_{\mathfrak{j}}^V + \epsilon_{\mathfrak{j}}^S, \quad (5.69)$$

e $\epsilon_{\mathfrak{j}}^V$ e $\epsilon_{\mathfrak{j}}^S$ sendo determinados por

$$\epsilon_{\mathfrak{j}}^V = \frac{2r + \ell + n}{L}, \quad (5.70)$$

$$\epsilon_{\mathfrak{j}}^S = \frac{2r + \ell + (n-1)}{L}. \quad (5.71)$$

A soma realizada na equação (5.68) é feita sobre todos os valores de energia possíveis, o operador $\hat{a}_{\mathfrak{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathfrak{j}}$ representa o operador número, cujo autovalor será o número de partículas no estado $\mathfrak{j}$.

5.4. A termodinâmica dos fótons

Na seção 5.2 discutimos o comportamento termodinâmico de um gás de fótons escalares e obtivemos as principais grandezas termodinâmicas associadas. A seguir, vamos analisar o comportamento das radiações "confinadas" pela geometria adS. Como já discutido, o espaço-tempo adS pode ser interpretado como uma cavidade de volume efetivo (2.82). Ao considerarmos a radiação eletromagnética na geometria adS, verificamos que o campo A_μ é decomposto em dois modos que descrevem a sua dinâmica, os modos tipo vetor e tipo escalar,

$$\epsilon_{\mathfrak{j}} = \epsilon_{\mathfrak{j}}^V + \epsilon_{\mathfrak{j}}^S. \quad (5.72)$$

Dessa forma, a função de partição deste sistema poderá escrita como

$$\begin{aligned}\ln Z[\beta] &= - \sum_{p=V,S} \sum_{\mathbb{j}} \ln \left[1 - e^{-\beta \epsilon_j^p} \right] \\ &= - \left(\sum_{\epsilon^V} d(\epsilon^V) \ln \left[1 - e^{-\beta \epsilon^V} \right] + \sum_{\epsilon^S} d(\epsilon^S) \ln \left[1 - e^{-\beta \epsilon^S} \right] \right),\end{aligned}\quad (5.73)$$

sendo $d(\epsilon^p)$ a degenerescência de um estado possuir energia ϵ^p , cuja expressão será dada por

$$d(\epsilon^V) = \frac{(-1)^{n+1} L \epsilon^V [1 - L \epsilon^V]_{n-1}}{n!} \quad (5.74)$$

e

$$d(\epsilon^S) = \frac{(-1)^n L \epsilon^S (1 + L \epsilon^S) [1 - L \epsilon^S]_{n-2}}{n!}, \quad (5.75)$$

onde $[x]_n$ representa o símbolo de Pochhammer [39]. Para dar continuidade ao estudo termodinâmico do gás de fótons na geometria adS, deve-se implementar um limite termodinâmico adequado. Assim como realizamos para o caso do gás de partículas associadas ao campo escalar, tomaremos como limite termodinâmico, $V_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$, mantendo a razão N/V_{eff} constante, expressa pela equação (5.36). A diferença de energia $\Delta \epsilon^p$ associada a cada um dos modos do campo eletromagnético é obtida se considerarmos que

$$\Delta \epsilon^p = \min[\epsilon_{\mathbb{j}+1}^p - \epsilon_{\mathbb{j}}^p], \quad (5.76)$$

e quando consideramos o modo tipo vetor, cuja energia é dada pela equação (5.70), encontramos

$$\begin{aligned}\Delta \epsilon^V &= \min[\epsilon_{\mathbb{j}+1}^V - \epsilon_{\mathbb{j}}^V] \\ &= \frac{2(r) + (\ell + 1) + n}{L} - \frac{(2r + \ell + n)}{L} \\ &= \frac{1}{L},\end{aligned}\quad (5.77)$$

enquanto o modo tipo escalar, com energia bem definida e determinada pela

equação (5.71), é escrita como

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon^S &= \min[\epsilon_{j+1}^S - \epsilon_j^S] \\ &= \frac{2(r) + (\ell + 1) + (n - 1)}{L} - \frac{(2r + \ell + (n - 1))}{L} \\ &= \frac{1}{L},\end{aligned}\tag{5.78}$$

e ao considerarmos o limite (5.36) verificamos que $\Delta\epsilon^P \rightarrow 0$. Dessa forma, podemos transformar a equação (5.73) como uma soma de Riemann

$$\ln Z[\beta] = -L \left(\sum_{\epsilon^V} d(\epsilon^V) \ln [1 - e^{-\beta \epsilon^V}] \Delta \epsilon^V + \sum_{\epsilon^S} d(\epsilon^S) \ln [1 - e^{-\beta \epsilon^S}] \Delta \epsilon^V \right), \tag{5.79}$$

com $d(\epsilon^V)$ e $d(\epsilon^S)$ sendo determinados pelas equações (5.74) e (5.75), respectivamente. Impondo o limite termodinâmico (5.36), a equação (5.79) é transformada em uma integral, de modo que

$$\ln Z[\beta] = -\frac{L(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(L\epsilon^S (1 + l\epsilon^S) [1 - L\epsilon^S]_{n-2} \ln [1 - e^{-\beta \epsilon^S}] d\epsilon^S + \right. \tag{5.80}$$

$$\left. -L\epsilon^V [1 - L\epsilon^V]_{n-1} \ln [1 - e^{-\beta \epsilon^V}] d\epsilon^V \right), \tag{5.81}$$

sendo este resultado válido para $n \geq 4$. Os casos para $n = 2$ e $n = 3$ serão discutidos na próxima seção. A equação (5.81) representa a função de partição total associada a um gás de fótons na geometria adS. Determiná-la analiticamente, implica em obter as grandezas termodinâmicas associadas a este gás através das relações termodinâmicas (4.61), (4.62), (4.63) e (4.64).

Assim como ocorreu para o gás de fótons escalares, novamente não foi possível obter uma expressão analítica para a função de partição com n arbitrário. Entretanto, através do cálculo computacional foi possível determinar as grandezas termodinâmicas para diversos valores de $n \geq 4$, uma vez fixado seu valor, conforme mostrado no apêndice D.

Para $n = 4$ a função de partição é descrita pela seguinte expressão

$$\ln Z[\beta] = \frac{\pi^6}{11340} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^5} - \frac{\zeta[5]}{12} \frac{V_{\text{eff}}^{4/5}}{\beta^4} + \frac{\pi^4}{2592} \frac{V_{\text{eff}}^{3/5}}{\beta^3} - \frac{\zeta[3]}{144} \frac{V_{\text{eff}}^{2/5}}{\beta^2}, \quad (5.82)$$

onde escrevemos (5.82) em termos do volume efetivo (2.83) com $n = 4$. Imediatamente, as grandezas termodinâmicas associadas ao gás de fótons podem ser obtidas. A energia livre de Helmholtz associada ao sistema é obtida a partir da relação (4.62), onde encontramos o seguinte resultado

$$F = -\frac{\pi^6}{11340} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^6} + \frac{\zeta[5]}{12} \frac{V_{\text{eff}}^{4/5}}{\beta^5} - \frac{\pi^4}{2592} \frac{V_{\text{eff}}^{3/5}}{\beta^4} + \frac{\zeta[3]}{144} \frac{V_{\text{eff}}^{2/5}}{\beta^3}. \quad (5.83)$$

A entropia também é determinada ao considerarmos a relação termodinâmica (4.63) e portanto,

$$S = \frac{\pi^6}{1890} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^5} - \frac{5\zeta[5]}{12} \frac{V_{\text{eff}}^{4/5}}{\beta^4} + \frac{\pi^4}{648} \frac{V_{\text{eff}}^{3/5}}{\beta^3} - \frac{\zeta[3]}{48} \frac{V_{\text{eff}}^{2/5}}{\beta^2}. \quad (5.84)$$

A terceira grandeza termodinâmica a ser determinada, é a energia interna total do sistema, cuja expressão é obtida a partir de (4.61) e como resultado obtemos

$$U = \frac{\pi^6}{2268} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^6} - \frac{\zeta[5]}{3} \frac{V_{\text{eff}}^{4/5}}{\beta^5} + \frac{\pi^4}{864} \frac{V_{\text{eff}}^{3/5}}{\beta^4} - \frac{\zeta[3]}{72} \frac{V_{\text{eff}}^{2/5}}{\beta^3}. \quad (5.85)$$

Se levarmos em consideração o fato de que a geometria adS atua como uma caixa, mantendo o gás de fótons confinados, podemos associar a este sistema termodinâmico uma pressão, cuja expressão é obtida a partir de (4.64)

$$p = \frac{\pi^6}{11340} \frac{1}{\beta^6} - \frac{\zeta[5]}{15} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/5} \beta^5} + \frac{\pi^4}{4320} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{2/5} \beta^4} - \frac{\zeta[3]}{360} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{3/5} \beta^3} = \frac{1}{5} \frac{U}{V_{\text{eff}}}.$$

e verificamos que os fótons na geometria adS satisfazem uma equação de estado similar ao corpo negro em uma cavidade cúbica em 6 dimensões. É interessante observar que a partir da equação (5.85), a energia interna total do sistema possui um comportamento em altas temperaturas de um gás de fótons usual em 6 dimensões, onde $U \propto T^6$. Por outro lado, para o limite de baixas temperaturas

o efeito da geometria se apresenta através de novos termos proporcionais à potências de T .

Caso quadrimensional

A seguir vamos considerar a termodinâmica dos fótons para a geometria adS quadrimensional ($n = 2$). Tal escolha se deve pelo fato de que, nesta dimensionalidade, as energias associadas aos modos vetorial e escalar dos fótons possuem um comportamento diferente. Ao considerarmos a geometria quadrimensional, para escrever as energias ϵ_j^V e ϵ_j^S , a princípio, tomaríamos nas equações (5.70) e (5.71) $n = 2$, onde encontraríamos os seguintes valores

$$\epsilon_j^V = 2r + \ell + 2, \quad (5.86)$$

e

$$\epsilon_j^S = 2r + \ell + 1. \quad (5.87)$$

Entretanto, conforme mostrado nos trabalhos [75, 81, 82], os modos tipo vetor e tipo escalar apresentam o mesmo valor de energia, determinada a partir da equação (5.64). Desta forma, podemos escrever a energia total dos fótons como

$$\epsilon_j^p = \epsilon_j^V + \epsilon_j^S = 2 \times \epsilon_j^V = 2 \times (2r + \ell + 2). \quad (5.88)$$

Calculada a expressão para a energia ϵ_j^p , podemos retornar à função de partição (5.79) e escrevê-la na seguinte forma

$$\ln Z[\beta] = -2 \times L \sum_{\epsilon} d(\epsilon) \ln [1 - e^{-\beta \epsilon}] \Delta \epsilon, \quad (5.89)$$

onde omitimos o índice p por simplicidade de notação. Novamente, devemos implementar o limite termodinâmico (5.36) e assim, convertemos a equação (5.89) em uma integral de Riemann, tal que

$$\ln Z[\beta] = -2 \times \frac{L(-1)^2}{2!} \int_0^{\infty} L \epsilon (L\epsilon - 1) \ln [1 - e^{-\beta \epsilon}] d\epsilon. \quad (5.90)$$

Resolvendo a integral, encontramos que a função de partição para um gás de fótons na geometria quadrimensional, escrita em termos do volume efetivo (2.82), é dada por

$$\ln Z[\beta] = \frac{\pi^4}{45} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^3} - \zeta[3] \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^2}. \quad (5.91)$$

A partir do resultado para a função de partição, podemos escrever as principais grandezas termodinâmicas associadas ao sistema. A energia livre de Helmholtz pode ser obtida a partir da equação (4.62), onde temos que

$$F = -\frac{\pi^4}{45} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^4} + \zeta[3] \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^3}. \quad (5.92)$$

Em seguida, determinamos a entropia a partir da relação (4.63),

$$S = \frac{4\pi^4}{45} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^3} - 3\zeta[3] \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^2}. \quad (5.93)$$

A energia interna que o sistema possui também é obtida de maneira direta, se utilizarmos o resultado (4.61), dessa forma

$$U = \frac{\pi^4}{15} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^4} - 2\zeta[3] \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^3}, \quad (5.94)$$

onde o primeiro termo da expressão acima reproduz o comportamento da lei de Stefan-Boltzmann para o gás de fótons em um cavidade cúbica [67]. O segundo termo é uma correção decorrente da própria geometria, isto é, ao ‘‘aprisionarmos’’ os fótons na geometria adS_4 , surge um termo proporcional à T^3 .

Por fim, podemos obter uma expressão para a pressão que o gás de fótons exerce sobre a geometria adS_4 , visto que existe um volume efetivo V_{eff} . A partir da relação (4.64), encontramos que

$$p = \frac{\pi^4}{45} \frac{1}{\beta^4} - \frac{2\zeta[3]}{3} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/3} \beta^3} = \frac{1}{3} \frac{U}{V}, \quad (5.95)$$

e percebemos que mesmo na geometria adS_4 , a equação de estado relacionando

pressão e energia interna em um gás de fótons é satisfeita. Se considerarmos o limite termodinâmico (5.36) na entropia (5.93), encontramos que

$$S = \frac{4}{3} \frac{U}{T}, \quad (5.96)$$

e portanto, o gás de fótons em adS_4 satisfaz uma segunda equação de estado conhecida, relacionando a entropia e a energia interna do sistema [67].

Para a geometria em cinco dimensões, isto é, $n = 3$, conforme foi discutido na seção 5.3, os modos tipo vetor possuem uma energia discretizada e determinada pela equação (5.70), porém a componente tipo escalar possui um espectro de energia contínuo e a partir do formalismo apresentado, não é possível obter uma expressão analítica para a função de partição (5.81) e portanto, uma análise diferente deve ser considerada para este caso.

6. Considerações finais

Ao longo deste trabalho desenvolvemos um estudo sobre a termodinâmica de partículas bosônicas não massivas, considerando algumas soluções esfericamente simétricas e estáticas em $(2 + n)$ -dimensões. Na presença da constante cosmológica negativa são analisados os casos do campo escalar e eletromagnético, onde abordamos, além da dinâmica clássica dos campos, também um processo de quantização canônica para os mesmos. A partir da quantização canônica dos campos clássicos, obtivemos um espectro de energia discretizado. Este resultado foi utilizado para construir uma análise termodinâmica de sistemas compostos por partículas satisfazendo a estatística de Bose-Einstein.

O capítulo 2 teve como objetivo principal apresentar uma revisão sobre a teoria da relatividade geral, discutindo alguns tópicos importantes utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho. O seu principal objetivo foi apresentar a geometria adS, bem como suas principais características, da maneira mais didática possível. Além disso, investigamos as geodésicas para partículas massivas e feixes de luz, onde verificou-se que a geometria apresenta um comportamento confinante. Outro resultado interessante, decorrente do comportamento confinante da teoria, é o fato de que o tempo para um feixe de luz ir e retornar do infinito espacial é finito, conforme demonstrado pela equação (2.78). O papel das condições de contorno no infinito espacial adS é essencial nesta conclusão. A partir do comportamento confinante da geometria, podemos interpretar a geometria adS como sendo uma

caixa de tamanho L , cujo volume efetivo foi sugerido na equação (2.82).

No capítulo 3, utilizando o formalismo de Ishibashi e Kodama, revisamos as equações de movimento associadas ao campo escalar e eletromagnético para uma espaço-tempo esfericamente simétrico e estático. Nesta classe de geometrias, o campo eletromagnético foi decomposto em dois modos, classificados como perturbação eletromagnética tipo vetor e perturbação eletromagnética tipo escalar, devido a expansão em harmônicos esféricos. Para as perturbações eletromagnéticas tipo vetor e tipo escalar, verificamos que suas equações de movimento se reduzem a uma equação radial tipo Schrödinger (3.14) e no caso quadridimensional, as equações se reduzem aos resultados conhecidos das equações de Zerilli e Regge-Wheeler do campo eletromagnético. Por fim, uma discussão sobre a quantização canônica do campo escalar e eletromagnético foi apresentado.

No capítulo 4 apresentamos a noção de lightsphere, bem como suas propriedades clássicas. Na sequência, realizamos a quantização canônica dos campos escalar e eletromagnético neste objeto, onde determinamos que as partículas quânticas associadas aos campos possuem uma energia discretizada e bem definida. A partir das expressões para as energias associadas as partículas, estudamos um sistema termodinâmico composto por um gás de partículas bosônicas fracamente interagentes, de modo que foi possível determinar analiticamente a função de partição e obter as principais grandezas termodinâmicas associadas ao sistema. Verificamos que tal sistema possui uma energia interna total satisfazendo a lei de Stefan-Boltzmann associada a sistemas bidimensionais. Para obtermos estes resultados, não se fez necessário o uso das equações de Einstein, apenas aspectos cinéticos da teoria foram usados, sendo o efeito da gravidade manifestado pelo fator $\sqrt{A(R)}$ nas equações (4.26), (4.51) e (4.52).

No capítulo 5 apresentamos um estudo inédito sobre sistemas bosônicos na geometria anti-de Sitter. Através da análise das equações de movimento, verificamos que a geometria produz um efeito confinante através de um potencial efetivo. Levando em consideração o fato da geometria adS não ser globalmente hiperbólica, se faz necessário introduzir condições de contorno no infinito espacial para descrever a dinâmica dos campos completamente. Para solucionarmos as equações de movimento associadas aos campos escalar e eletromagnético, consideramos a condição de Dirichlet e desta forma, verificamos que os campos possuirão um espectro de energia discretizados e descrito pela equação (5.31) no caso do campo escalar e pelas equações (5.70) e (5.71). Entretanto, vimos que a perturbação eletromagnética tipo escalar para a geometria adS em cinco dimensões possui um espectro de energia contínuo, sendo este um resultado não esperado. As consequências de um espectro de energia contínuo para o estudo termodinâmico do sistema merecem um estudo mais profundo.

A noção de um volume efetivo na geometria adS nos permitiu implementar um limite termodinâmico adequado, descrito pela equação (5.36). A partir deste limite termodinâmico, foi possível determinar analiticamente as funções de partições para o caso do campo escalar e eletromagnético e determinar todas as grandezas termodinâmicas associadas.

Ao analisarmos a energia interna total do sistema, tanto para o caso do campo escalar (5.43), quanto para o caso do campo eletromagnético (5.85), verificamos que existe um termo dominante no regime de altas temperaturas, similar à lei de Stefan-Boltzmann. Entretanto, no limite de baixas energias a energia interna possui termos adicionais proporcionais a temperatura. Além disso, verificamos para o caso quadridimensional do campo eletromagnético, que o sistema satisfaz equações de estado similares a de um gás de fótons usuais para pressão e entropia, apresentadas pelas equações (5.95) e (5.96),

respectivamente. Os resultados obtidos neste capítulo representam uma contribuição original e serão colocadas em uma forma apropriada para serem submetidos à publicação.

Como sequência deste trabalho, temos interesse em estudar o comportamento dos férmions em geometrias esfericamente simétricas. O estudo de férmions em geometrias assintoticamente anti-de Sitter tem recebido bastante atenção nos últimos anos [83--86]. Implementando a metodologia apresentada neste trabalho aos campos fermiônicos, será possível estudar a termodinâmica de um gás de férmions confinados pela geometria adS e construir sua função de partição. Desta forma, esperamos investigar a influência da geometria e verificar como se comportam as principais grandezas termodinâmicas, tais como, energia interna, entropia, a energia de Fermi, etc.

A. Decomposição em hamônicos esféricos sobre a n-esfera

Neste apêndice iremos apresentar as definições e propriedades básicas dos harmônicos esféricos escalar, vetorial e tensorial sobre a n-esfera S^n equipada com a métrica γ_{ij} . O tratamento apresentado aqui segue [34, 45].

A.1. Harmônicos esféricos escalares

O grupo de rotações $SO(n+1)$ age naturalmente sobre o espaço de Hilbert, L^2_S , de funções de quadrado integráveis, definidas como $f: S^n \rightarrow \mathbb{C}$. Dado que o operador laplaciano, $D^i D_i$, é um invariante sobre rotações, cada subespaço de $D^i D_i$ também será um invariante sobre as transformações de rotação. Dessa forma, os harmônicos esféricos escalares, $\mathbb{S}_{k_S}$, serão definidos como sendo uma base ortonormal dos autovetores do operador $D^i D_i$ em L^2_S , satisfazendo a seguinte equação de autovalor

$$(D^i D_i + k_S) \mathbb{S}_{k_S} = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbb{S}_{k_S}$ satisfazem a relação de ortogonalidade dada por

$$\int_{S^n} \mathbb{S}_{k_S} \mathbb{S}_{k'_S} = \delta_{k_S} \delta_{k'_S}. \quad (\text{A.2})$$

Os autovalores de (A.1), k_S^2 , serão definidos como

$$k_S^2 = \ell(\ell + n - 1), \quad (\text{A.3})$$

com $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Uma forma explícita dos S_{k_S} pode ser encontrado em [87, 88].

A.2. Harmônicos esféricos vetoriais

Vejamos agora o caso dos harmônicos esféricos vetoriais. O grupo de rotação também atua sobre o espaço de Hilbert de campos vetoriais de quadrado integráveis sobre S^n . Além disso, é possível vermos que as rotações mapeiam o subespaço de Hilbert de campos vetoriais de divergências nulas, L_V^2 , em si mesmo. É possível verificar que o laplaciano, $D^i D_i$, também mapeia L_V^2 . Portanto, definimos os harmônicos esféricos vetoriais, $\mathbb{V}_{k_V i}$, como sendo uma base ortonormal de autovetores de $D^i D_i$ em L_V^2 .

Consideremos um campo vetorial, v_i , de quadrado integrável definido em L_V^2 . Podemos decompô-lo da seguinte forma

$$v_i = v_{(T)i} + D_i f, \quad (\text{A.4})$$

onde f é uma função escalar e v_T representa a parte transversa do campo vetorial v_i , de divergência nula, ou seja,

$$D^i v_{(T)i} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, o campo vetorial v_i poderá ser expresso usando os harmônicos escalares $\mathbb{S}_i$ e os harmônicos vetoriais, $\mathbb{V}_{k_i}$, como

$$v_i = \sum_k [c_1 \mathbb{V}_{k_i} + c_2 D_i \mathbb{S}_i], \quad (\text{A.6})$$

onde as constantes c_1 e c_2 dependerão de k_V . Os harmônicos esféricos

vetoriais $\mathbb{V}_{ki}$ satisfazem uma equação de autovalor

$$(D^j D_j + k_V^2) \mathbb{V}_{k_V i} = 0, \quad (\text{A.7})$$

e divergência nula

$$D^i \mathbb{V}_{k_V i} = 0, \quad (\text{A.8})$$

com os autovalores k_V^2 sendo determinados por

$$k_V^2 = \ell(\ell + n - 1) - 1, \quad (\text{A.9})$$

sendo $\ell = 1, 2, \dots$, e a forma explícita dos $\mathbb{V}_{ki}$ podendo ser encontrada em [87, 88]. Os harmônicos esféricos vetoriais possuem $(n - 1)$ componentes independentes e portanto, $\mathbb{V}_{ki}$ estará definido apenas para dimensões maiores ou iguais a 4 ($n \geq 2$). Além disso, uma vez que $\mathbb{V}_{ki}$ formam uma base completa em L_V^2 , estes satisfazem uma relação de ortogonalidade dada por

$$\int_{S^n} \mathbb{V}_{k_V i} \mathbb{V}_{k'_V}^i = \delta_{k_V} \delta_{k'_V}. \quad (\text{A.10})$$

A.3. Harmônicos esféricos tensoriais

Por fim, vejamos o caso dos harmônicos esféricos tensoriais. O grupo de rotação $SO(n + 1)$ age sobre o espaço de Hilbert dos tensores simétricos de segunda ordem de quadrado integrável sobre S^n . Ademais, mapeia o subespaço de Hilbert, L_T^2 , de campos tensoriais de traço e divergência nulos nele mesmo. Vemos que o operador laplaciano, $D_i D^i$, também irá mapear L_T^2 em si mesmo. Portanto, podemos definir os harmônicos esféricos tensoriais, $T_{k_T ij}$ como sendo uma base ortonormal dos autovetores de $D_i D^i$ em L_T^2 .

Vamos considerar um tensor simétrico de segunda ordem, t_{ij} , de quadrado integrável. É possível escrevermos t_{ij} como

$$t_{ij} = t_{(T)ij} + D_i v_j + D_j v_i + f \gamma_{ij}, \quad (\text{A.11})$$

onde f é uma função, v_i é um vetor e t_{ij} representa um tensor simétrico transverso de traço e divergência nulos, satisfazendo as seguintes relações

$$t_{(T)i}^i = 0, \quad (\text{A.12})$$

e

$$D^i t_{(T)ij} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Portanto, o campo tensorial t_{ij} pode ser expandido utilizando os harmônicos esféricos escalares, S_{k_S} , vetoriais, V_{k_T} , e os harmônicos esféricos tensoriais, $\mathbb{T}_{k_T ij}$ como

$$\begin{aligned} t_{ij} = & \sum_k \left[c_1 \mathbb{T}_{k_T ij} + c_2 \left(D_i V_{k_T j} + D_j V_{k_T i} \right) \right. \\ & \left. + c_3 (D_i (D_j S_{k_S}) + D_j (D_i S_{k_S})) + c_4 \gamma_{ij} S_{k_S} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes que dependerão dos autovalores k_T^2 , k_V^2 e k_S^2 . Os harmônicos esféricos tensoriais, $\mathbb{T}_{k_T ij}$, satisfazem a seguinte equação de autovalor

$$(D^p D_p + k_T^2) \mathbb{T}_{k_T ij} = 0, \quad (\text{A.15})$$

onde os autovalores, k_T^2 , que surgem em (A.15) são determinados por

$$k_T^2 = \ell(\ell + n - 1) - 2, \quad (\text{A.16})$$

com $\ell = 2, 3, \dots$. O número de componentes independentes de $\mathbb{T}_{k_T ij}$ serão dadas por $(n-2)(n+1)/2$, e portanto, os harmônicos esféricos tensoriais serão definidos apenas para $n \geq 3$. Os $\mathbb{T}_{k_T ij}$, como mencionado anteriormente, possuem divergência nula

$$D_j \mathbb{T}_{k_T ij} = 0, \quad (\text{A.17})$$

e traço nulo, isto é,

$$\mathbb{T}_{k_T i}^i = 0. \quad (\text{A.18})$$

Além destas relações, $\mathbb{T}_{k_T ij}$ constituem uma base completa em L_T^2 e a relação de ortogonalidade entre eles pode ser apresentada como

$$\int_{S^n} \mathbb{T}_{k_T ij} \mathbb{T}_{k'_T}{}^{ij} = \delta_{k_T} \delta_{k'_T}. \quad (\text{A.19})$$

Uma forma explícita dos $\mathbb{T}_{k_T ij}$ pode ser encontrada em [87, 88].

B. Radiação do corpo negro em uma cavidade esférica

Este apêndice tem como objetivo apresentar o cálculo da radiação do corpo negro considerando uma cavidade esférica como uma forma de validar o método utilizado neste trabalho.

A formulação estatística clássica para sistemas cujos constituintes quase não interagem, apenas o suficiente para estabelecer o equilíbrio térmico, é suficientemente geral para explicar as principais teorias desenvolvidas sobre a radiação de corpo negro e do calor específico dos sólidos. A teoria quântica tem suas origens no problema da radiação do corpo negro, que consiste na tentativa de explicar a distribuição da intensidade da radiação eletromagnética emitida por uma pequena cavidade. No entanto, experimentalmente já era conhecido, no final do século XIX, que a lei que descrevia a quantidade de energia emitida por volume não dependia da forma, da geometria, da cavidade, mas apenas da temperatura de equilíbrio T .

O formalismo apresentado neste trabalho, nos possibilitou verificar que o comportamento da lei de Stefan-Boltzmann para uma cavidade esférica se mantém válida. Ao invés de utilizarmos uma cavidade na forma de paralelepípedo, como feito usualmente, iremos considerar um cavidade esférica, de raio R e por questão de simplicidade, vamos considerar o campo escalar no espaço-tempo de Minkowski.

Para estudarmos a radiação emitida por esta cavidade, é necessário conhecermos o espectro de energia associado à radiação. Isto pode ser determinado realizando a quantização do campo nesta cavidade. Devemos conhecer a solução da equação de movimento associado ao campo, resolvida na cavidade esférica. Uma vez determinada a solução clássica, o procedimento de quantização segue de forma usual. O campo escalar Φ quantizado nesta geometria, conforme discutido no capítulo 3, em coordenadas esféricas usuais pode ser escrito como

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \sum_{k\ell m} \mathcal{N}_k j_k(kr) \{ \hat{a}_{k_{n\ell}m} S_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\epsilon t} + \hat{a}_{k\ell m}^\dagger S_{\ell m}^*(\theta, \varphi) e^{i\epsilon t} \}. \quad (\text{B.1})$$

As quantidades $\{k_{n\ell}, n=1,2,\dots, \ell=0,1,2,\dots\}$ serão expressas em termos dos zeros $j_{n\ell}$ da função de Bessel esférica $j_\ell(x)$ conforme

$$k_{n\ell} = \frac{j_{n\ell}}{R}. \quad (\text{B.2})$$

A energia associada a um modo (n, ℓ, m) é dada por $\epsilon_{n\ell m}$, com

$$\epsilon_{n\ell m} = \omega_{n\ell} = k_{n\ell} = \frac{j_{n\ell}}{R}. \quad (\text{B.3})$$

Dado que o sistema é composto por uma combinação de modos com energia bem definida, sujeitos à estatística de Bose-Einstein, a energia total do campo escalar a uma temperatura T é dada por

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{\epsilon_{n\ell m}}{\exp\left(\frac{\epsilon_{n\ell m}}{T}\right) - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{k_{n\ell}}{\exp\left(\frac{k_{n\ell}}{T}\right) - 1}, \quad (\text{B.4})$$

e resolvendo a somatória em m , temos

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1) k_{n\ell}}{\exp\left(\frac{k_{n\ell}}{T}\right) - 1}. \quad (\text{B.5})$$

A dificuldade a partir deste ponto, consistirá em reescrevermos a equação (B.5) em uma forma mais conveniente. Infelizmente, o recurso utilizado para reescrevermos as somatórias no capítulo 4.3 não será muito útil aqui, uma vez que a energia será determinada pelo zeros da função de Bessel. Entretanto, as funções de Bessel, quando analisadas numericamente, são bem comportadas. Dado o conjunto $\{n, \ell\}$, os zeros da função de Bessel serão únicos, isto é, não existirá degenerescência para os $j_{n\ell}$. Podemos então, numericamente, ordenar todos os $j_{n\ell}$ de forma que possamos escrevê-los como um conjunto

$$\mathcal{Z} = \{j_i, i = 1, 2, \dots\} , \quad (\text{B.6})$$

rotulados pelo índice i , com $j_i < j_k$ se $i < k$. Assim, uma boa aproximação de j_i com dependência em i é dada por

$$j_i \approx 2.86 \times i^{1/2} . \quad (\text{B.7})$$

Figura B.1.: Zeros j_i da função de Bessel esférica $j(x)$, ordenados segundo a magnitude de j_i . Na figura, os dados numéricos e o ajuste (B.7) coincidem.

Assim como os zeros da função de Bessel, o espectro de energia ϵ_{nl} também poderá ser rotulado pelo índice i , uma vez que ϵ_{nl} e j_{nl} estão relacionados através da equação (B.3). Logo, o espectro de energia poderá ser escrito como

$$\epsilon_i \approx 2.86 \frac{i^{1/2}}{R}, \quad (\text{B.8})$$

as diferenças $\Delta\epsilon_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$ não serão constantes e a norma $\Delta\epsilon_{\max}$ de $\{\epsilon_i\}$ será dada por

$$\Delta\epsilon_{\max} = \frac{j_2 - j_1}{R}. \quad (\text{B.9})$$

O conjunto $\{\Delta\epsilon_i\}$ poderá ser aproximado por

$$\Delta\epsilon_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i \approx \frac{d\epsilon}{di} \Delta i, \quad (\text{B.10})$$

e como $\Delta i = (i+1) - i = 1$, segue então que

$$\Delta\epsilon_i \approx \frac{1}{2} \frac{2.86}{R} i^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{2.86}{R} \frac{1}{i^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{2.86}{R} \frac{1}{\frac{R\epsilon_i}{2.86}} = \left[\frac{(2.86)^2}{2} \right] \frac{1}{R^2} \frac{1}{\epsilon_i}. \quad (\text{B.11})$$

Como a energia ϵ_i está sendo rotulada pelo índice i , o mesmo acontecerá com a quantidade $(2\ell+1)$. Numericamente, podemos mostrar que

$$(2\ell_i + 1) \approx 10.2 \times i^{1/2}. \quad (\text{B.12})$$

Com todas as grandezas determinadas em termos do índice i , reescrevemos a somatória (B.5) na forma de uma soma de Riemann,

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{10.2}{2.86} \right) \times R \frac{(\epsilon_i)^2}{\exp\left(\frac{\epsilon_i}{T}\right) - 1} \frac{1}{\Delta\epsilon_i} \Delta\epsilon_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2 \times 10.2}{(2.86)^3} \right] \times R^3 \frac{(\epsilon_i)^3}{\exp\left(\frac{\epsilon_i}{T}\right) - 1} \Delta\epsilon_i, \quad (\text{B.13})$$

e dado que o volume da cavidade esférica pode ser escrito como $V = 4\pi R^3/3$, temos

$$\frac{U}{V} \propto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\epsilon_i)^3}{\exp\left(\frac{\epsilon_i}{T}\right) - 1} \Delta\epsilon_i, \quad (\text{B.14})$$

e no limite termodinâmico, a densidade espectral de energia ρ associada a somatória (B.13),

$$\frac{U}{V} = \int_0^\infty \rho(k) dk , \quad (\text{B.15})$$

será dada por

$$\rho(k) \propto \frac{k^3}{\exp\left(\frac{k}{T}\right) - 1} . \quad (\text{B.16})$$

A equação (B.16) representa a famosa lei de Planck usual. O resultado obtido é bastante interessante, uma vez que consideramos uma cavidade esférica de raio R e a menos de fatores multiplicativos, está em comum acordo com o resultado obtido se considerarmos uma cavidade cúbica.

C. Cálculo da degenerescência das energias

No capítulo 5 apresentamos uma expressão para a degenerescência associada as partículas bosônicas quando consideramos a geometria adS, conforme demonstrado pela equação (5.34) para o caso do campo escalar e pelas equações (5.74) e (5.75) para o campo eletromagnético. Iremos apresentar neste apêndice o cálculo explícito da degenerescência $d(\tilde{\epsilon})$ quando consideramos a geometria adS quadridimensional. A degenerescência $d(\tilde{\epsilon})$ ¹ será o número de triplas (r, ℓ, m) que satisfazem

$$2r + \ell = \tilde{\epsilon} - \alpha, \quad (\text{C.1})$$

com r e ℓ inteiros não negativos, α inteiro, e $m \in \{-\ell, \dots, 0, \dots, +\ell\}$. Dado que r e ℓ são números não negativos, temos então que

$$d(\tilde{\epsilon}) = 0 \quad \text{para} \quad \tilde{\epsilon} < \alpha, \quad (\text{C.2})$$

e

$$d(\tilde{\epsilon}) = 1 \quad \text{para} \quad \tilde{\epsilon} = \alpha. \quad (\text{C.3})$$

Na equação (C.3) a única solução com $\tilde{\epsilon} = \alpha$ é $r = 0$, $\ell = 0$ e $m = 0$. Se assumirmos que $\tilde{\epsilon} > \alpha$, com $\tilde{\epsilon}$ não inteiro, temos que

$$d(\tilde{\epsilon}) = 0, \quad (\text{C.4})$$

¹Com o objetivo de escrever em função de parâmetros adimensionais, iremos definir uma nova variável $\tilde{\epsilon} = L\epsilon$.

e se $\tilde{\epsilon} > \alpha$, com $\tilde{\epsilon}$ inteiro, a análise da degenerescência dependerá da paridade de $(\tilde{\epsilon} - \alpha)$.

Assim, temos o seguinte cenário

- Se $\tilde{\epsilon} - \alpha$ é par e ℓ é ímpar, a Eq.(C.1) não possui solução, pois $2r$ é necessariamente par.
- Se $\tilde{\epsilon} - \alpha$ é ímpar e ℓ é par, a Eq.(C.1) não possui solução, pois $2r$ é necessariamente par.
- Se $\tilde{\epsilon} - \alpha$ é par e ℓ é par, temos $(2\ell + 1)$ soluções, considerando que $m \in \{-\ell, \dots, 0, \dots, +\ell\}$.
- Se $\tilde{\epsilon} - \alpha$ é ímpar e ℓ é ímpar, temos $(2\ell + 1)$ soluções, considerando que $m \in \{-\ell, \dots, 0, \dots, +\ell\}$.
- O valor máximo que ℓ pode assumir é $\tilde{\epsilon} - \alpha$ (neste caso $2r = 0$), visto que $r \geq 0$.

A contabilidade das possíveis soluções para os casos onde $\tilde{\epsilon} - \alpha$ assumam valores par ou ímpar é apresentada nas tabelas C.1 e C.2 a seguir.

ℓ	$2r$	$(2\ell + 1)$
0	$(\tilde{\epsilon} - \alpha)$	1
2	$(\tilde{\epsilon} - \alpha - 2)$	5
4	$(\tilde{\epsilon} - \alpha - 4)$	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{\epsilon} - \alpha$	0	$2(\tilde{\epsilon} - \alpha) + 1$

Tabela C.1.: Consideramos aqui $(\tilde{\epsilon} - \alpha)$ par. Valores de ℓ e $2r$ que geram soluções, juntamente com a degenerescência parcial para cada valor de ℓ . O número total de possíveis valores de ℓ é $\frac{\tilde{\epsilon} - \alpha}{2} + 1$.

Temos que a degenerescência $d(\tilde{\epsilon})$ é dada pela soma das degenerescências parciais $2\ell + 1$. Para o caso onde $\tilde{\epsilon} - a$ assume apenas valores pares, considerando os resultados apresentados na tabela C.1, temos que

$$\begin{aligned}
d(\tilde{\epsilon}) &= \underbrace{1 + 5 + 9 + \cdots + [2(\tilde{\epsilon} - a) + 1]}_{\frac{\tilde{\epsilon}-a}{2}+1 \text{ termos}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\epsilon} - a}{2} + 1 \right) \{1 + [2(\tilde{\epsilon} - a) + 1]\} \\
&= \frac{1}{2} (\tilde{\epsilon} - a + 2) (\tilde{\epsilon} - a + 1) .
\end{aligned} \tag{C.5}$$

ℓ	$2r$	$(2\ell + 1)$
1	$(\tilde{\epsilon} - a - 1)$	3
3	$(\tilde{\epsilon} - a - 3)$	7
5	$(\tilde{\epsilon} - a - 5)$	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{\epsilon} - a$	0	$2(\tilde{\epsilon} - a) + 1$

Tabela C.2.: Consideramos aqui $(\tilde{\epsilon} - a)$ ímpar. Valores de ℓ e $2r$ que geram soluções, juntamente com a degenerescência parcial para cada valor de ℓ . O número total de possíveis valores de ℓ é $\frac{\tilde{\epsilon}-a-1}{2} + 1$.

Para o caso onde $\tilde{\epsilon} - a$ assume apenas valores ímpares, considerando os resultados da tabela C.2, encontramos

$$d(\tilde{\epsilon}) = \underbrace{3 + 7 + 11 + \cdots + [2(\tilde{\epsilon} - a) + 1]}_{\frac{\tilde{\epsilon}-a-1}{2}+1 \text{ termos}} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\epsilon} - a - 1}{2} + 1 \right) \{3 + [2(\tilde{\epsilon} - a) + 1]\} \\
&= \frac{1}{2} (\tilde{\epsilon} - a + 2) (\tilde{\epsilon} - a + 1) .
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Finalmente, podemos agrupar os resultados apresentados nas equações (C.2), (C.5) e (C.7) e escrever a degenerescência $d(\tilde{e})$ na seguinte forma

$$d(\tilde{e}) = \begin{cases} 0 & , \tilde{e} < a \\ \frac{1}{2}(\tilde{e} - a + 2)(\tilde{e} - a + 1) & , \tilde{e} \geq a \end{cases} . \quad (C.8)$$

A equação (C.1) é um exemplo de uma equação Diofantina [89] (ou Diofantina linear), cuja solução é dada apenas por números inteiro, nas variáveis r e ℓ .

D. Grandezas termodinâmicas em diferentes dimensionalidades

Ao estudarmos a termodinâmica de sistemas bosônicos na geometria adS, tanto para o caso dos fótons escalares quanto para o caso dos fótons usuais, determinamos as expressões para a função de partição com a dependência em n , apresentadas pelas equações (5.39) e (5.81). Verificamos que, para um dado n fixo, é possível obter todas as grandezas termodinâmicas associadas aos sistemas. Neste apêndice, apresentaremos as grandezas termodinâmicas calculadas para alguns valores de n com o objetivo de verificar a validade dos resultados obtidos.

Campo escalar - fótons escalares

As grandezas apresentadas a seguir foram calculadas a partir da função de partição, fixando o valor de $n \geq 2$ e utilizando o software MATHEMATICA para determinar suas expressões analíticas.

$n=3$

$$F = -\frac{\zeta[5]}{3} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^5} + \frac{\pi^4}{135} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^4} - \frac{11}{18} \frac{\zeta[3]}{\beta^3} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^3} + \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^2}, \quad (\text{D.1})$$

$$S = \frac{5\zeta[5]}{3} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^4} - \frac{4\pi^4}{135} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^3} - \frac{11\zeta[3]}{6} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^2} - \frac{\pi^2}{9} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta}, \quad (\text{D.2})$$

$$u = \frac{4\zeta[5]}{3} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^5} - \frac{\pi^4}{45} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^4} + \frac{11\zeta[3]}{9} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^3} - \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^2}, \quad (\text{D.3})$$

$$p = \frac{\zeta[5]}{3} \frac{1}{\beta^5} - \frac{\pi^4}{180} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/4} \beta^4} + \frac{11\zeta[3]}{36} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/2} \beta^3} - \frac{\pi^2}{72} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{3/4} \beta^2} = \frac{1}{4} \frac{u}{V_{\text{eff}}}. \quad (\text{D.4})$$

n = 11

$$\begin{aligned} F = & -\frac{\zeta[13]}{3} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^{13}} + \frac{1382\pi^{12}}{638512875} \frac{V_{\text{eff}}^{11/12}}{\beta^{12}} - \frac{35\zeta[11]}{6} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^{11}} + \frac{\pi^{10}}{8505} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^{10}} \\ & - \frac{10831\zeta[9]}{720} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^9} + \frac{1903\pi^8}{1134000} \frac{V_{\text{eff}}^{7/12}}{\beta^8} - \frac{242537\zeta[7]}{18144} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^7} + \frac{139381\pi^6}{14288400} \frac{V_{\text{eff}}^{5/12}}{\beta^6} \\ & - \frac{341747\zeta[5]}{64800} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^5} + \frac{190553\pi^4}{6804000} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^4} - \frac{83711\zeta[3]}{83160} \frac{V_{\text{eff}}^{1/6}}{\beta^3} + \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/12}}{\beta^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} S = & \frac{13\zeta[13]}{3} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^{12}} - \frac{5528\pi^{12}}{212837625} \frac{V_{\text{eff}}^{11/12}}{\beta^{11}} + \frac{385\zeta[11]}{6} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^{10}} - \frac{2\pi^{10}}{1701} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^9} \\ & + \frac{10831\zeta[9]}{80} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^8} - \frac{1903\pi^8}{141750} \frac{V_{\text{eff}}^{7/12}}{\beta^7} + \frac{242537\zeta[7]}{2592} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^6} - \frac{139381\pi^6}{2381400} \frac{V_{\text{eff}}^{5/12}}{\beta^5} \\ & + \frac{341747\zeta[5]}{12960} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^4} - \frac{190553\pi^4}{1701000} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^3} + \frac{83711\zeta[3]}{27720} \frac{V_{\text{eff}}^{1/6}}{\beta^2} - \frac{\pi^2}{9} \frac{V_{\text{eff}}^{1/12}}{\beta}, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} u = & 4\zeta[13] \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^{13}} - \frac{1382\pi^{12}}{58046625} \frac{V_{\text{eff}}^{11/12}}{\beta^{12}} + \frac{175\zeta[11]}{3} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^{11}} - \frac{\pi^{10}}{945} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^{10}} \\ & + \frac{10831\zeta[9]}{90} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^9} - \frac{1903\pi^8}{162000} \frac{V_{\text{eff}}^{7/12}}{\beta^8} + \frac{242537}{3024} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2} \zeta[7]}{\beta^7} - \frac{139381\pi^6}{2857680} \frac{V_{\text{eff}}^{5/12}}{\beta^6} \\ & + \frac{341747\zeta[5]}{16200} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^5} - \frac{190553\pi^4}{2268000} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^4} + \frac{83711\zeta[3]}{41580} \frac{V_{\text{eff}}^{1/6}}{\beta^3} - \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/12}}{\beta^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned}
p = & + \frac{\zeta[13]}{3} \frac{1}{\beta^{13}} - \frac{691\pi^{12}}{348279750} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/12} \beta^{12}} + \frac{175\zeta[11]}{36} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/6} \beta^{11}} - \frac{\pi^{10}}{11340} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/4} \beta^{10}} \\
& + \frac{10831\zeta[9]}{1080} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/3} \beta^9} - \frac{1903\pi^8}{1944000} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{5/12} \beta^8} + \frac{242537\zeta[7]}{36288} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/2} \beta^7} - \frac{139381\pi^6}{34292160} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{7/12} \beta^6} \\
& + \frac{341747\zeta[5]}{194400} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{2/3} \beta^5} - \frac{190553\pi^4}{27216000} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{3/4} \beta^4} + \frac{83711\zeta[3]}{498960} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{5/6} \beta^3} - \frac{\pi^2}{216} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{11/12} \beta^2} \\
& = \frac{1}{12} \frac{u}{V_{\text{eff}}}.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Campo eletromagnético - fótons

As grandezas apresentadas a seguir foram calculadas a partir da função de partição (5.81), fixando o valor de $n \geq 4$ e utilizando o software MATHEMATICA para determinar suas expressões analíticas.

n = 5

$$F = -2\zeta[7] \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^7} + \frac{\pi^6}{315} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^6} - 2\zeta[5] \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^5} + \frac{\pi^4}{120} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^4} - \frac{3\zeta[3]}{20} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^3} \tag{D.9}$$

$$S = 14\zeta[7] \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^6} - \frac{2\pi^6}{105} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^5} + 10\zeta[5] \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^4} - \frac{\pi^4}{30} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^3} + \frac{9\zeta[3]}{20} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^2} \tag{D.10}$$

$$u = 12\zeta[7] \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^7} - \frac{\pi^6}{63} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^6} + 8\zeta[5] \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^5} - \frac{\pi^4}{40} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^4} + \frac{3\zeta[3]}{10} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^3} \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned}
p = & 2\zeta[7] \frac{1}{\beta^7} - \frac{\pi^6}{378} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/6} \beta^6} + \frac{4\zeta[5]}{3} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/3} \beta^5} \\
& - \frac{\pi^4}{240} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/2} \beta^4} + \frac{\zeta[3]}{20} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{2/3} \beta^3} = \frac{1}{6} \frac{u}{V_{\text{eff}}}
\end{aligned} \tag{D.12}$$

n = 11

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{\zeta[13]}{3} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^{13}} + \frac{1382\pi^{12}}{638512875} \frac{V_{\text{eff}}^{11/12}}{\beta^{12}} - \frac{35\zeta[11]}{6} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^{11}} + \frac{\pi^{10}}{8505} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^{10}} \\
&\quad - \frac{10831\zeta[9]}{720} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^9} + \frac{1903\pi^8}{1134000} \frac{V_{\text{eff}}^{7/12}}{\beta^8} - \frac{242537\zeta[7]}{18144} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^7} + \frac{139381\pi^6}{14288400} \frac{V_{\text{eff}}^{5/12}}{\beta^6} \\
&\quad - \frac{341747\zeta[5]}{64800} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^5} + \frac{190553\pi^4}{6804000} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^4} - \frac{83711\zeta[3]}{83160} \frac{V_{\text{eff}}^{1/6}}{\beta^3} + \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/12}}{\beta^2} \\
\\
S &= +\frac{13\zeta[13]}{3} \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^{12}} - \frac{5528\pi^{12}}{212837625} \frac{V_{\text{eff}}^{11/12}}{\beta^{11}} + \frac{385\zeta[11]}{6} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^{10}} - \frac{2\pi^{10}}{1701} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^9} \\
&\quad + \frac{10831\zeta[9]}{80} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^8} - \frac{1903\pi^8}{141750} \frac{V_{\text{eff}}^{7/12}}{\beta^7} + \frac{242537\zeta[7]}{2592} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^6} - \frac{139381\pi^6}{2381400} \frac{V_{\text{eff}}^{5/12}}{\beta^5} \\
&\quad + \frac{341747\zeta[5]}{12960} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^4} - \frac{190553\pi^4}{1701000} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^3} + \frac{83711\zeta[3]}{27720} \frac{V_{\text{eff}}^{1/6}}{\beta^2} - \frac{\pi^2}{9} \frac{V_{\text{eff}}^{1/12}}{\beta}, \\
\\
U &= 4\zeta[13] \frac{V_{\text{eff}}}{\beta^{13}} - \frac{1382\pi^{12}}{58046625} \frac{V_{\text{eff}}^{11/12}}{\beta^{12}} + \frac{175\zeta[11]}{3} \frac{V_{\text{eff}}^{5/6}}{\beta^{11}} - \frac{\pi^{10}}{945} \frac{V_{\text{eff}}^{3/4}}{\beta^{10}} \\
&\quad + \frac{10831\zeta[9]}{90} \frac{V_{\text{eff}}^{2/3}}{\beta^9} - \frac{1903\pi^8}{162000} \frac{V_{\text{eff}}^{7/12}}{\beta^8} + \frac{242537\zeta[7]}{3024} \frac{V_{\text{eff}}^{1/2}}{\beta^7} - \frac{139381\pi^6}{2857680} \frac{V_{\text{eff}}^{5/12}}{\beta^6} \\
&\quad + \frac{341747\zeta[5]}{16200} \frac{V_{\text{eff}}^{1/3}}{\beta^5} - \frac{190553\pi^4}{2268000} \frac{V_{\text{eff}}^{1/4}}{\beta^4} + \frac{83711\zeta[3]}{41580} \frac{V_{\text{eff}}^{1/6}}{\beta^3} - \frac{\pi^2}{18} \frac{V_{\text{eff}}^{1/12}}{\beta^2}, \tag{D.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= +\frac{\zeta[13]}{3} \frac{1}{\beta^{13}} - \frac{691\pi^{12}}{348279750} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/12} \beta^{12}} + \frac{175\zeta[11]}{36} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/6} \beta^{11}} - \frac{\pi^{10}}{11340} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/4} \beta^{10}} \\
&\quad + \frac{10831\zeta[9]}{1080} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/3} \beta^9} - \frac{1903\pi^8}{1944000} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{5/12} \beta^8} + \frac{242537\zeta[7]}{36288} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{1/2} \beta^7} - \frac{139381\pi^6}{34292160} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{7/12} \beta^6} \\
&\quad + \frac{341747\zeta[5]}{194400} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{2/3} \beta^5} - \frac{190553\pi^4}{27216000} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{3/4} \beta^4} + \frac{83711\zeta[3]}{498960} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{5/6} \beta^3} - \frac{\pi^2}{216} \frac{1}{V_{\text{eff}}^{11/12} \beta^2} \\
&= \frac{1}{12} \frac{U}{V_{\text{eff}}}. \tag{D.14}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Max Karl Ernst Ludwig Planck. Über eine verbesserung der wienschen spectralgleichung. Verhandl. Dtsc. Phys. Ges., 2:202, 1900.
- [2] N. Bohr Dr. phil. I. on the constitution of atoms and molecules. Philosophical Magazine Series 6, 26(151):1, 1913.
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Microscopic theory of superconductivity. Phys. Rev., 106:162, 1957.
- [4] Charles W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. Gravitation. W. H. Freeman and Company, 1974.
- [5] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Phys. Rev. Lett., 116(6):061102, 2016.
- [6] G. E. A. Matsas. Preliminaries to quantum field theory in curved space-times. In Particles and fields. Proceedings, 9th Jorge Andre Swieca Summer School, Campos do Jordao, Brazil, February 16-28, 1997, page 291, 1997.
- [7] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1984.
- [8] Robert M. Wald. General Relativity. University Of Chicago Press, 1984.
- [9] Stephen A. Fulling. Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time. Phys. Rev., D7:2850, 1973.

- [10] P. C. W. Davies. Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics. J. Phys., A8:609, 1975.
- [11] W. G. Unruh. Notes on black hole evaporation. Phys. Rev., D14:870, 1976.
- [12] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. Commun. Math. Phys., 43:199, 1975.
- [13] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1975.
- [14] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. Int. J. Theor. Phys., 38:1113, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [15] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. Adv. Theor. Math. Phys., 2:253, 1998.
- [16] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. Phys. Lett., B428:105, 1998.
- [17] S. W. Hawking and Don N. Page. Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space. Commun. Math. Phys., 87:577, 1983.
- [18] Mirjam Cvetič and Steven S. Gubser. Phases of R charged black holes, spinning branes and strongly coupled gauge theories. JHEP, 04:024, 1999.
- [19] Mirjam Cvetič and Steven S. Gubser. Thermodynamic stability and phases of general spinning branes. JHEP, 07:010, 1999.

- [20] M. C. Baldiotti, Wallace S. Elias, C. Molina, and Thiago S. Pereira. Thermodynamics of quantum photon spheres. *Phys. Rev.*, D90(10):104025, 2014.
- [21] Albert Einstein. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1917:142, 1917.
- [22] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168, 1929.
- [23] W. de Sitter. The Curvature of Space. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20:229, 1917.
- [24] Norbert Straumann. On the cosmological constant problems and the astronomical evidence for a homogeneous energy density with negative pressure. 2002. [astro-ph/0203330](#).
- [25] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, first edition, 2003.
- [26] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Series in physics. Cambridge University Press, 1985.
- [27] Barry C. Barish. The Detection of gravitational waves with LIGO. In American Physical Society (APS) Meeting of the Division of Particles and Fields (DPF 99) Los Angeles, California, January 5–9, 1999, 1999.
- [28] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [29] For there we are captured. The geometry of spacetime. <https://goo.gl/UI5Ckq>. Acessado em: 23-09-2016.
- [30] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063, 1957.

- [31] Jon Mathews. Gravitational multipole radiation. J. Soc. Ind. Appl. Math., 10(4):768, 1962.
- [32] L. A. Edelman and C. V. Vishveshwara. Differential equations for perturbations on the schwarzschild metric. Phys. Rev., D1:3514, 1970.
- [33] F. J. Zerilli. Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. Phys. Rev., D2:2141, 1970.
- [34] Akihiro Ishibashi and Hideo Kodama. Stability of higher dimensional Schwarzschild black holes. Prog. Theor. Phys., 110:901, 2003.
- [35] Marco M. Caldarelli. Quantum scalar fields on anti-de Sitter space-time. Nucl. Phys., B549:499, 1999.
- [36] A. Lopez-Ortega. Electromagnetic quasinormal modes of D-dimensional black holes. Gen. Rel. Grav., 38:1747, 2006.
- [37] James M. Bardeen. Gauge Invariant Cosmological Perturbations. Phys. Rev., D22:1882, 1980.
- [38] Hideo Kodama and Misao Sasaki. Cosmological Perturbation Theory. Prog. Theor. Phys. Suppl., 78:1, 1984.
- [39] Milton Abramowitz. Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Incorporated, 1974.
- [40] J.D. Jackson. Classical electrodynamics. Wiley, 1975.
- [41] Luís C. B. Crispino, Atsushi Higuchi, and George E. A. Matsas. Quantization of the electromagnetic field outside static black holes and its application to low-energy phenomena. Phys. Rev., D63:124008, 2001.

- [42] Hideo Kodama and Akihiro Ishibashi. A Master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions. *Prog. Theor. Phys.*, 110:701, 2003.
- [43] Akihiro Ishibashi and Robert M. Wald. Dynamics in nonglobally hyperbolic static space-times. 3. Anti-de Sitter space-time. *Class. Quant. Grav.*, 21:2981, 2004.
- [44] Rahmi Gueven. Hertz potentials in higher dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 6:1961, 1989.
- [45] Akihiro Ishibashi and Robert M. Wald. Dynamics in nonglobally hyperbolic static space-times. 2. General analysis of prescriptions for dynamics. *Class. Quant. Grav.*, 20:3815, 2003.
- [46] Dieter R. Brill and John A. Wheeler. Interaction of neutrinos and gravitational fields. *Rev. Mod. Phys.*, 29:465, 1957.
- [47] M. Kaku. *Quantum field theory: A Modern introduction*. New York, USA: Oxford Univ. Pr. (1993) 785 p, 1993.
- [48] S. Gupta. Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics. *Proc. Phys. Soc, A* 63:681, 1950.
- [49] K. Bleuler. A New method of treatment of the longitudinal and scalar photons. *Helv. Phys. Acta*, 23:567, 1950.
- [50] B. R. Iyer, C. V. Vishveshwara, and S. V. Dhurandhar. Ultracompact ($r < 3m$) objects in general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 2(2):219, 1985.
- [51] Robert J. Nemiroff, Peter A. Becker, and Kent S. Wood. Properties of ultracompact neutron stars. *Astrophys. J.*, 406:590, 1993.
- [52] Robert J. Nemiroff, Peter A. Becker, and Kent S. Wood. Properties of ultracompact neutron stars: Erratum. *Astrophys. J.*, 434:395, 1994.

- [53] Ramesh Narayan. Black holes in astrophysics. *New J. Phys.*, 7(1):199, 2005.
- [54] Vitor Cardoso, Luís C. B. Crispino, Caio F. B. Macedo, Hirotada Okawa, and Paolo Pani. Light rings as observational evidence for event horizons: Long-lived modes, ergoregions and nonlinear instabilities of ultracompact objects. *Phys. Rev.*, D90:044069, 2014.
- [55] Clarissa-Marie Claudel, K. S. Virbhadra, and G. F. R. Ellis. The Geometry of photon surfaces. *J. Math. Phys.*, 42:818, 2001.
- [56] Thomas Foertsch, Wolfgang Hasse, and Volker Perlick. Inertial forces and photon surfaces in arbitrary spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 20(21):4635, 2003.
- [57] D. Horvat, S. Ilijic, A. Kirin, and Z. Narancic. Formation of photon spheres in boson stars with a nonminimally coupled field. *Class. Quant. Grav.*, 30(9):095014, 2013.
- [58] Vitor Cardoso, Alex S. Miranda, Emanuele Berti, Helvi Witek, and Vilson T. Zanchin. Geodesic stability, lyapunov exponents, and quasinormal modes. *Phys. Rev.*, D79:064016, 2009.
- [59] Yves Décanini, Antoine Folacci, and Bernard Raffaelli. Unstable circular null geodesics of static spherically symmetric black holes, regge poles, and quasinormal frequencies. *Phys. Rev.*, D81:104039, 2010.
- [60] Monika Moscibrodzka, Charles F. Gammie, Joshua C. Dolence, Hotaka Shiokawa, and Po Kin Leung. Radiative models of sgr a* from grmhd simulations. *Astrophys. J.*, 706(1):497, 2009.
- [61] Tim Johannsen and Dimitrios Psaltis. Testing the no-hair theorem with observations in the electromagnetic spectrum. ii. black hole images. *Astrophys. J.*, 718(1):446, 2010.

- [62] P. S Chandrasekhar. The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences Series. Clarendon Press, 1998.
- [63] Max Karlovini, Kjell Rosquist, and Lars Samuelsson. Ultracompact stars with multiple necks. Modern Physics Letters A, 17(04):197, 2002.
- [64] Wolfgang Hasse and Volker Perlick. Gravitational lensing in spherically symmetric static spacetimes with centrifugal force reversal. General Relativity and Gravitation, 34(3):415, 2002.
- [65] K. V. Shajesh. Eikonal approximation. Department of Physics and Astronomy, University of Oklahoma, 2004.
- [66] Maurice Levy and Joseph Sucher. Eikonal approximation in quantum field theory. Phys. Rev., 186:1656, 1969.
- [67] R.K. Pathria and P.D. Beale. Statistical Mechanics. Elsevier Science, 1996.
- [68] A. L. Kuzemsky. Thermodynamic Limit in Statistical Physics. Intern. Journ. of Mod. Phys. B, 28(09):1430004, 2014.
- [69] SamiM. Al-Jaber. Planck's spectral distribution law in n dimensions. International Journal of Theoretical Physics, 42(1):111, 2003.
- [70] S. J. Avis, C. J. Isham, and D. Storey. Quantum Field Theory in anti-De Sitter Space-Time. Phys. Rev., D18:3565, 1978.
- [71] C.P. Burgess and C.A. Lutken. Propagators and Effective Potentials in Anti-de Sitter Space. Phys. Lett., B153:137, 1985.
- [72] Ion I. Cotăescu. Remarks on the quantum modes of the scalar fields on $AdS(d+1)$ space-time. Phys. Rev., D60:107504, 1999.
- [73] G. Poschl and E. Teller. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. Z. Phys., 83:143, 1933.

- [74] Horst R. Beyer. On the completeness of the quasinormal modes of the Poschl-Teller potential. *Commun. Math. Phys.*, 204:397, 1999.
- [75] A. Lopez-Ortega. Quasinormal modes of D-dimensional de Sitter spacetime. *Gen. Rel. Grav.*, 38:1565, 2006.
- [76] W.J. Tian. Bound States of Klein-Gordon and Dirac Equations with Type-I Vector and Scalar Pöschl-Teller Potentials. *Sciencepaper Online*, page 10186, 2009.
- [77] Ofer Aharony, Donald Marolf, and Mukund Rangamani. Conformal field theories in anti-de Sitter space. *JHEP*, 02:041, 2011.
- [78] Piotr Bizoń. Is AdS stable? *Gen. Rel. Grav.*, 46(5):1724, 2014.
- [79] Donald Marolf and Simon F. Ross. Boundary Conditions and New Dualities: Vector Fields in AdS/CFT. *JHEP*, 11:085, 2006.
- [80] J.B. Seaborn. *Hypergeometric Functions and Their Applications*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [81] Jose Natario and Ricardo Schiappa. On the classification of asymptotic quasinormal frequencies for d-dimensional black holes and quantum gravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 8(6):1001, 2004.
- [82] Vitor Cardoso, Roman Konoplya, and Jose P. S. Lemos. Quasinormal frequencies of Schwarzschild black holes in anti-de Sitter space-times: A Complete study on the asymptotic behavior. *Phys. Rev.*, D68:044024, 2003.
- [83] Ion I Cotaescu. Discrete quantum modes of the Dirac field in AdS (d+1) backgrounds. *Int. J. Mod. Phys.*, A19:2217, 2004.
- [84] Ion I Cotaescu. Dirac fermions in de Sitter and anti-de Sitter backgrounds. *Rom. J. Phys.*, 52:895, 2007.

- [85] Victor E. Ambruş and Elizabeth Winstanley. Fermions on adS. 2013. gr-qc/1310.7429.
- [86] Victor E. Ambrus. Dirac fermions on rotating space-times. PhD thesis, University of Sheffield, 2014. Disponível em <http://etheses.whiterose.ac.uk/7527/>.
- [87] Atsushi Higuchi. Symmetric tensor spherical harmonics and its application to the de sitter group $so(n, 1)$. Yale preprint YTP 86-19, 1976.
- [88] Atsushi Higuchi. Quantization of Scalar and Vector Fields Inside the Cosmological Event Horizon and Its Application to Hawking Effect. Class. Quant. Grav., 4:721, 1987.
- [89] M. Hindry and J.H. Silverman. Diophantine Geometry: An Introduction. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.