UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO Instituto de Física

Cálculo da Dimensão em um Modelo de Gravitação Quântica Euclidiana

Felipe Honorio dos Santos

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do título de mestre em Ciências.

Orientador: Paulo Teotônio Sobrinho

Banca Examinadora: Paulo Teotônio-Sobrinho (Orientador) Carlo Eugênio I. Carneiro Franciscus Josef Vanhecke

> São Paulo 2007

Dedico esta dissertação a: Maria Fernanda, meu pai, minha mãe, meu irmão, Maria Helena e Fernando Júlio.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Paulo Teotônio Sobrinho pela paciência e inspiração neste trabalho e pelas incontáveis horas investidas no aprimoramento da minha formação.

Ao professor Luís Cláudio, eu gostaria de deixar a minha imensa gratidão pelo acompanhamento e orientação neste trabalho. Infelizmente o seu trabalho não pode ser reconhecido formalmente por questões burocráticas, mas realmente sem a sua ajuda os resultados obtidos não teriam sido tão bons.

À minha família agradeço o seu apoio incondicional. Ao sacrifício dos meus pais para me proporcionar a melhor educação possível e às constantes lembranças da importância do estudo na vida.

A Fernando Júlio e Maria Helena pelas acaloradas discussões, pelos infindáveis almoços e jantares que aumentaram o meu peso mas me trouxeram muita felicidade.

Aos amigos da sala 307, Alessandro, Amilcar, Luciano, Cedric e Leandro pelas grandes discussões que tivemos sobre os mais variados assuntos onde invariavelmente eu aprendi mais do que ensinei.

Agradeço especialmente à Maria Fernanda que passou por este caminho ao meu lado. Pelo seu apoio, compreensão e carinho destes últimos quase 6 anos.

E, finalmente, à FAPESP e ao CNPQ pelo suporte financeiro.

São Paulo, 23 de abril de 2007.

Resumo

Este trabalho de mestrado teve o objetivo de calcular a dimensão de um modelo de gravitação quântica euclidiana baseado no formalismo da geometria não comutativa. Este cálculo é uma continuação do artigo [4].

Em [4], observa-se que utilizar uma tripla espectral comutativa permite generalizar e tratar a geometria usual de maneira puramente algébrica. Do formalismo da Geometria Não Comutativa [2], observa-se que existe uma relação entre uma variedade e uma tripla espectral comutativa.

Depois de definida a ação, as variáveis dinâmicas e o observável dimensão desta teoria em termos da tripla espectral, verificou-se que havia uma analogia clara com a teoria das Matrizes Aleatórias [6], assim foi possível identificar uma maneira numerica de calcular a dimensão deste problema.

O espaço estudado foi um conjunto infinito de pontos, cuja dimensão era uma variável estocástica, ou seja, partimos de um conjunto de pontos arbitrário que poderia ter qualquer dimensão real. Os resultados obtidos mostram que a dimensão do modelo é um número perto de 1.

Neste trabalho de mestrado encontramos dois métodos distintos para calcular a dimensão, um baseando-se na definição de dimensão de dimensão oriunda da Geometria Não Comutativa e a outra baseada na lei de Weyl.

Dadas estas duas alternativas, o trabalho consistiu em criar, construir, implementar e testar um algoritmo capaz de extrair a dimensão destas duas maneiras através de simulações de Monte Carlo.

Este resultado é muito interessante devido as características muito gerais do espaço escolhido, dado que o limite superior da dimensão calculada em [4] foi 2, estávamos esperando qualquer valor no intervalo entre 0 e 2, e o que os resultados sugerem é que a dimensão é uma "variável termodinâmica", ou seja, uma distribuição delta com centro em 1.

Abstract

This work had the intention of calculating the dimension of a Euclidian Quantum Gravity model which is based on the formalism of non commutative geometry. This work is a continuation of the article [4].

From [4] we know that using a commutative spectral triple allows us to generalize and treat ordinary geometry in a purely algebraic manner. From Non Commutative Geometry [2] follows that manifolds and a spectral triples are related.

After defining action, dynamical variables and observables in terms of the spectral triple, a relationship between Random Matrix Theory [6] came up. That relationship was used to evaluate the model dimension using numerical computation algorithms.

We studied one particular manifold which is equivalent to an ordinary set of points. The dimension is a stochastic variable, for instance this model would allow any possible value for dimension inside the interval [0; 2).

We found two distinct methods for calculating the dimension. One of them was based on the dimension defined by Alain Connes and the other is based on the dimension defined by Weyl. It is known that both definitions are equivalent for the simple cases.

Given these two methods we calculated the dimension through a Monte Carlo algorithm created and implemented during this work. The program simulated a finite approximation for the dimension and after running several simulations, each one depending on the number of points, we found the asymptotic law for the space dimension.

We found that the dimension is a "thermodynamic variable" near the finite value 1, since we found that the estimator of this observable has variance that goes to zero on the continuous case.

This result is very interesting due to the broad characteristics of the space chosen. Given that the upper limit for the dimension calculated in [4] was 2, we were expecting any stochastic distribution centered in any number in the interval between 0 and 2, but the results sugest that dimension is a delta distribution centered in 1.

Sumário

Ι	Int	rodução e Motivação																1
1	Introdução													3				
	1.1	Motivação																3
	1.2	Geometria Não Comutativa																3
	1.3	Modelo																6
	1.4	Objetivos																9
	1.5	Resultados	•••	•	•	•	•		•	•	•	•	• •		•	•	•	11
Π	For	malismo Matemático, I	M	00	le	elo) (е	A	lg	O	ri	tn	no)S			13
2	For	malismo Matemático																15
	2.1	Introdução																15
	2.2	Preliminares																16
	2.3	Geometria Não Comutativa																28
	2.4	Matrizes Aleatórias		•	•	•	•		•	•		•			·	•	•	32
3	Modelo e Algoritmos										35							
	3.1	Introdução																35
	3.2	Fórmula de Weyl																35
	3.3	Modelo Matemático																39
	3.4	Ação e Variáveis dinâmicas .																40
	3.5	Número Médio de Pontos $\langle n \rangle$																42
	3.6	Dimensão Média do Espaço	$\langle \delta \rangle$															42
	3.7	Cálculo da Dimensão																43
	3.8	Algoritmo																44
Π	I F	lesultados																53

4 Resultados

4.1	Introdução	55 56							
4.2	Grancos dos Resultados das Dimensoes	50							
IV (Conclusões	81							
5 Co	nclusões	83							
5.1	Resumo	83							
5.2	Métodos	87							
5.3	Distribuições	88							
5.4	Lei de Convergência:	89							
5.5	Considerações finais	90							
Referências Bibliográficas									

Parte I Introdução e Motivação

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Um dos desafios da Física Teórica atual é construir uma teoria quântica para a gravitação. A teoria da Relatividade Geral mostra que a geometria do espaço-tempo é dinâmica. Por outro lado a teoria quântica usual assume que o espaço-tempo é uma variedade fixa, ou em outras palavras, estática.

Argumentos teóricos sugerem que a estrutura do espaço-tempo é modificada na chamada "escala de Planck", que é definida em termos do comprimento de Planck L_p e do tempo de Planck T_P :

- $L_p = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 10^{-35} m$
- $T_p = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 10^{-44} s$

Devido às relações de incerteza nesta escala [1], ocorrem flutuações de energia e momento que podem causar flutuações na curvatura grandes o suficiente para perturbar a estrutura do espaço-tempo. Por este argumento a descrição matemática do espaço-tempo como uma variedade perderia a sua validade.

1.2 Geometria Não Comutativa

A Geometria Não Comutativa (ou Geometria Espectral) é uma generalização da geometria usual, proposta principalmente por Alain Connes em [2], [3]. Este formalismo se mostra um caminho natural para a compreensão da estrutura do espaço-tempo na escala de Planck, que é um dos principais objetivos de um candidato a teoria de gravitação quântica euclidiana.

Utilizando o arcabouço matemático da geometria não comutativa, construiremos um método que permitirá obter, num certo "limite macroscópico", a estrutura de uma variedade para que possamos eventualmente recompor a Teoria de Relatividade Geral.

Os elementos da geometria não comutativa são as álgebras C^* , os espaços de Hilbert e os operadores de Dirac. Estes objetos definem uma entidade chamada tripla espectral e é através da tripla espectral que reconstruiremos a geometria usual.

No contexto desta dissertação estudaremos apenas álgebras comutativas, ou seja, álgebras cujos elementos obedecem a relação ab = ba pois esta abordagem é suficientemente geral para cobrirmos os objetivos deste trabalho, já que álgebras comutativas originam espaços topológicos Hausdorff que contém todos as variedades possíveis.

Denotaremos uma variedade pelo par $(M, g_{\mu\nu})$, onde M significa um espaço topológico Hausdorff e $g_{\mu\nu}$ é a métrica válida neste espaço. Denotaremos a tripla espectral associada a variedade $(M, g_{\mu\nu})$ por $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ onde \mathcal{A} é a álgebra C^* comutativa das funções complexas contínuas que vão a zero no infinito sobre M, \mathcal{H} é o espaço de Hilbert dos espinores definidos em M e \mathcal{D} significa o operador de Dirac atuando em \mathcal{H} .

Os teoremas de Gelfand e Gelfand-Naimark garantem que existe uma maneira de associarmos as variedades $(M, g_{\mu\nu})$ com triplas espectrais comutativas $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Demonstra-se que o espaço topológico Hausdorff M pode ser recomposto a partir do fecho do espaço das representações irredutíveis da álgebra \mathcal{A} , denotado por $\hat{\mathcal{A}}$, enquanto que a métrica $g_{\mu\nu}$ é definida em termos do operador de Dirac.

Por conseguinte, podemos substituir a variedade $(M, g_{\mu\nu})$ pela sua tripla espectral correspondente $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, ou seja, podemos estudar as propriedades da tripla espectral de maneira totalmente algébrica e conseqüentemente tirarmos conclusões sobre algumas propriedades fundamentais da variedade. Não há perda de informação nesta abordagem e os resultados obtidos são promissores.

1.2.1 Formalismo

Para construirmos uma teoria de gravitação quântica precisamos encontrar um formalismo em que seja possível definir as variáveis dinâmicas, a ação e os observáveis da teoria. Em nosso caso, estas entidades devem estar definidas em termos dos elementos das triplas espectrais.

Um dos resultados da Relatividade Geral é que propriedades físicas fundamentais são invariantes por difeomorfismos. Utilizaremos os autovalores dos operadores de Dirac como variáveis dinâmicas seguindo [4]. É importante frisar que esses autovalores são invariantes por difeomorfismos, logo eles são variáveis dinâmicas apropriadas para uma teoria de gravitação quântica, conforme sugerido em [5].

Observamos que a escolha dos autovalores como variáveis dinâmicas torna possível escrever uma teoria que seja interpretável em termos do ferramental matemático da Teoria de Matrizes Aleatórias [6]. Assim é possível extrair alguns resultados utilizando esta abordagem.

Foi demonstrado em [7] que este enfoque nos permite estudar apenas a quantização euclidiana. Contudo, a possibilidade de encontrar as soluções do problema no espaço de Minkowski via rotação de Wick não pode ser excluída.

A ação pode ser definida em termos de uma função quadrática dos autovalores do operador de Dirac \mathcal{D} e esta abordagem resulta na ação de Hilbert-Einstein sendo recuperada na expansão de Heat-Kernel de S[x] no limite β muito pequeno. A ação fica definida em termos dos elementos da tripla espectral $x \in (\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ como:

$$S[x] = tr\left(\frac{\mathcal{D}}{\Lambda}\right)^2 = \beta tr(D)^2 \tag{1.1}$$

Onde o parâmetro Λ é interpretado como sendo inverso do comprimento de Planck, $\Lambda = \frac{1}{L_p}$, e o parâmetro β é o quadrado da razão entre o comprimento de Planck e um parâmetro de escala $L, \beta = \left(\frac{L_p}{L}\right)^2$. O parâmetro L é a escala de comprimento tal que o operador $\mathcal{D} = \frac{D}{L}$ é análogo a um operador de Dirac, pois D é um operador auto-adjunto adimensional.

Seguindo o método de quantização por integrais de trajetória [8], para definirmos uma teoria de gravitação quântica euclidiana, ver [9], é preciso definir uma função de partição em termos da ação definida por S[x].

Definimos o análogo da função de partição como:

$$Z = \sum_{x \in \mathcal{X}} e^{-S[x]}, \qquad (1.2)$$

onde o conjunto \mathcal{X} é o conjunto de todas as triplas espectrais comutativas $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ com a ação definida por (1.1). A expressão acima é a maneira formal de quantizar uma teoria no contexto euclidiano. Ela implica dizer que estamos somando as configurações sobre todas as possíveis triplas espectrais, por conseguinte, sobre todos os espaços Hausdorff.

Somar sobre todos os espaços Hausdorff significa considerar um conjunto que contenha todas as variedades, pois as variedades estão contidas nos espaços topológicos Hausdorff. Em outras palavras, existem espaços Hausdorff que não possuem correspondentes no contexto das variedades. Neste sentido obtemos uma generalização da geometria usual.

Definida a função de partição da teoria, podemos definir observáveis em termos da função de partição em analogia com a Mecânica Estatística, ou seja, interpretamos o observável como uma propriedade média do sistema. A definição dos observáveis é:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{O}[x] e^{-S[x]}}{Z}$$
(1.3)

1.3 Modelo

Iniciaremos a discussão de um modelo para compreendermos melhor este formalismo. Este modelo foi proposto no artigo [4] como um exemplo da aplicação da teoria desenvolvida até aqui.

Descreveremos o nosso ensemble como um subconjunto $X \subset \mathcal{X}$ de triplas espectrais, ou seja, um subconjunto de geometrias. Definimos um elemento $x \in X$ deste subconjunto como uma tripla espectral $x = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ onde a álgebra C^* comutativa tem espectro contável.

O espectro de uma álgebra é o conjunto das representações irredutíveis da mesma, e se a álgebra é comutativa, o espectro, denotado por $\hat{\mathcal{A}}$, é um espaço topológico Hausdorff, portanto estamos considerando na verdade um conjunto contável de pontos no sentido usual.

Dividiremos X em subespaços $X_n = (\mathcal{A}_n, \mathcal{H}_n, D_n)$ de tal forma que $\hat{\mathcal{A}}_n$ tenha um número finito *n* de pontos. O teorema de Gelfand-Naimark implica que os elementos de \mathcal{A}_n são as seqüências do tipo $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ onde $a_i \in \mathbb{C}$.

O espaço de Hilbert \mathcal{H}_n é escolhido como o espaço dos vetores $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ que possuem norma $||v|| = \sum_{i=1}^n v_i^2 < \infty$. O operador D é uma matriz $n \times n$ auto-adjunta.

Finalmente selecionaremos amostras do espaço X através de subconjuntos X_1, X_2, \ldots, X_N e tomaremos o limite para $N \to \infty$ que estaremos chamando de "limite termodinâmico" deste modelo.

A ação está bem definida pois o traço de matrizes finitas está bem definido e pode ser escrita em termos dos autovalores reais das matrizes D:

$$S[x] = \beta tr(D)^2 \tag{1.4}$$

As matrizes D, $n \times n$ auto-adjuntas, tem os autovalores como números reais dados por: $\{\lambda_1(D), \lambda_2(D), \ldots, \lambda_n(D)\}$, que são as variáveis dinâmicas da teoria, e o parâmetro β é o quadrado da razão entre o comprimento de Planck e um parâmetro de escala.

Definimos a função de partição como:

$$Z_N(\beta) = \sum_{n=0}^N z_n(\beta)$$

Onde $z_n(\beta)$ é dado por:

$$z_n(\beta) = \int_{D \in X_n} [dD] e^{-\beta tr(D)^2}$$
(1.5)

A medida de integração [dD] representa a integração de todos os elementos D_{ij} , independentes, dentro do subespaço X_n .

Verifica-se que esta definição da função de partição (1.5), representa o ensemble de matrizes gaussianas unitárias, daí a conexão com a Teoria de Matrizes Aleatórias [6]. Continuando a definição dos observáveis desta teoria:

$$\langle \mathcal{O} \rangle(\beta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle \mathcal{O} \rangle_{n,\beta} z_n(\beta)}{\sum_{l=0}^{N} z_l(\beta)}$$
 (1.6)

No artigo [4] foram discutidos dois observáveis para este modelo de gravitação quântica euclidiana, a saber: o número de pontos do universo e a dimensão do universo.

Estes observáveis são variáveis aleatórias, ou seja, este modelo não está pressupondo qualquer estrutura geométrica prévia, liberando a possibilidade destas geometrias terem qualquer número de pontos. Este modelo também permite que a dimensão média das geometrias assuma qualquer valor.

O número médio de pontos, definido em termos de (1.6), resulta na expressão:

$$\langle n \rangle (\beta) = \frac{\sum_{n} n 2^{\frac{n}{2}} (\frac{\pi}{2\beta})^{\frac{n^{2}}{2}}}{\sum_{n} 2^{\frac{n}{2}} (\frac{\pi}{2\beta})^{\frac{n^{2}}{2}}}$$
(1.7)

Existem 2 regimes neste modelo. Para $\beta > \frac{\pi}{2}$, $\langle n \rangle$ converge e para $\beta < \frac{\pi}{2}$, $\langle n \rangle$ diverge.

Seja o conjunto Λ dos módulos dos autovalores do operador D ordenados de forma crescente. A dimensão δ é obtida observando o comportamento assintótico dos módulos dos autovalores do operador de Dirac definido no espaço em questão, ou seja:

$$\lambda_k(D) \, \backsim \, k^{\frac{1}{\delta}} \tag{1.8}$$

para $k \to \infty$

No artigo [4], conclui-se que a dimensão é diferente nas duas fases do modelo. $\langle d \rangle (\beta)$ é zero para valores de β maiores do que $\frac{\pi}{2}$ e $\langle d \rangle (\beta) \neq 0$ na fase correspondente a valores de $\beta < \frac{\pi}{2}$.

1.4 Objetivos

O problema em calcular a dimensão média deste modelo reside na dificuldade em definir a dimensão do espaço $\hat{\mathcal{A}}$ de maneira direta em termos dos autovalores do operador D. Portanto utilizamos uma outra definição de dimensão, consistente com a dimensão oriunda da teoria de Weyl.

Considere a função zeta de Riemann complexa $\zeta(z)$:

$$\zeta(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} k^{-z}$$
(1.9)

Demonstra-se que ζ diverge para valores $Re(z) \leq 1$ e converge para valores Re(z) > 1. Outro resultado conhecido é que a função ζ pode ser estendida analíticamente, exceto para Re(z) = 1, para todo o plano complexo.

Alain Connes mostrou em [21] que a dimensão na geometria espectral pode ser calculada tomando os módulos dos autovalores não nulos $\{\lambda_k\}$ de um operador de Dirac \mathcal{D} para uma álgebra \mathcal{A} e um espaço de Hilbert \mathcal{H} (tripla espetral) utilizando a função zeta de Riemann espectral:

$$\zeta_D(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-z}$$
(1.10)

Analogamente ao que ocorre na função zeta de Riemann no plano complexo, a função zeta de Riemann espectral diverge para $Re(z) \leq z_c$ e converge para $Re(z) > z_c$, portanto podemos definir a extensão analítica de ζ_D para todo o plano complexo, exceto nos polos de ζ_D . A dimensão é definida como o conjunto dos pólos de ζ_D .

Suponha agora que λ_k é da forma $\lambda_k = k^{\frac{1}{\delta}} \operatorname{com} k \neq 0$. A expressão (1.10) é escrita como:

$$\zeta_D(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n k^{-\frac{z}{\delta}}$$
(1.11)

Observe que de acordo com a argumentação sobre a função zeta de Riemann os pólos da função zeta de Riemann espectral para $\lambda_k = k^{\frac{1}{\delta}}$ são os números complexos tais que $Re(\frac{z}{\delta}) = 1$, ou seja, $z = \delta$. Entretanto a definição da dimensão de Weyl diz que a dimensão do espaço em questão, δ é data pela expressão $\lambda_k = k^{\frac{1}{\delta}}$ onde λ_k são os módulos dos autovalores não nulos do operador D.

Portanto concluímos que a dimensão de Connes é consistente com a dimensão pela definição de Weyl. A definição da dimensão de Connes é definida pelo conjunto finito de pólos da função zeta de Riemann espectral (1.10). De fato, neste caso é mais apropriado definir o chamado "espectro de dimensões".

Durante o trabalho utilizamos essas duas definições complementares para estimar o valor da dimensão de $\hat{\mathcal{A}}$, definidas por (1.8) e (1.10). Vejamos resumidamente os algoritmos utilizados:

ALGORITMO

Passo 0: O passo inicial deste trabalho é criar um algoritmo que gere as matrizes D seguindo a distribuição de probabilidades do ensemble gaussiano unitário e calcular os autovalores de D para cada parâmetro β e para cada parâmetro N estudado. O parâmetro N significa que o tamanho das matrizes hermitianas é $N \times N$.

ALGORITMO 1 - Logaritmo¹

Passo 1: Dado o conjunto $\Lambda = \{\lambda_0(D), \lambda_1(D), \dots\}_{N,\beta}$ dos módulos dos autovalores para cada valor de N e cada valor de β .

Passo 1.2: Criar o gráfico $\{\log(k); \log(\lambda_k)\}$

Passo 1.3: Extrair a dimensão δ como o inverso do coeficiente angular da reta resultante

ALGORITMO 2 - Zeta de Riemann²

Passo 1: Dado o conjunto $\Lambda = \{\lambda_0(D), \lambda_1(D), \dots\}_{N,\beta}$ dos módulos dos autovalores para cada valor de N e cada valor de β .

Passo 1.2: Extrair a dimensão δ pelo método utilizando a função zeta de Riemann.

¹Baseado na fórmula de Weyl (1.8)

²Baseado na definição de dimensão de Connes

1.5. Resultados

Este procedimento deve ser repetido várias vezes, isto é, devemos gerar várias matrizes D diferentes para o mesmo par $N \in \beta$, de acordo com a distribuição de probabilidades dada por (1.5), de modo que possamos fazer alguma estatística com as dimensões calculadas. Assim, o resultado desta abordagem numérica é que devemos obter como resposta do algoritmo:

$$d = \{ \langle d \rangle; \sigma_d \}_{\beta, N}$$

Para completar este trabalho estudamos a influência dos parâmetros β e N nos resultados. O parâmetro N é o mais importante porque compreendendo o comportamento da dimensão média com N podemos estudar o limite $N \to \infty$ e descobrir se existe convergência na discretização deste modelo. Poderemos dizer qual é a forma funcional da convergência e o comportamento assintótico do desvio padrão.

1.5 Resultados

Neste trabalho estudamos um modelo abstrato afim de descrever um apossível teoria quântica para a gravitação. Em [4], definiu-se um modelo teórico composto por um conjunto de pontos que poderia ser finito ou infinito. Esta dissertação de mestrado encontrou uma estimativa confiável para a dimensão deste modelo na fase em que $\beta < \frac{\pi}{2}$.

Demonstramos que a dimensão deste modelo tende a um valor finito próximo de 1. Observamos este resultado na extrapolação, no limite $N \to \infty$, da lei de convergência da discretização escolhida.

A dimensão média, que é a estimativa da dimensão do modelo, tem a seguinte lei de convergência:

$$\langle d \rangle \simeq a + \frac{b}{\log N}$$

onde $b \in [-.83, -.62]$ e $a \in [1.01, 1.05]$ para o método utilizando as funções zeta de Riemann e $b \in [-.58, -.54]$ e $a \in [1.04, 1.05]$ para o método utilizando o logartimo das funções zeta de Riemann.

Estimamos a variância da dimensão média e também encontramos a maneira coma qual a variância, mais especificamente o desvio padrão, se comporta com o parâmetro N. O resultado foi que:

$$\sigma_d \simeq \frac{1}{N^a}$$

onde a é um número no intervalo (0, 1).

Estes dois resultados juntos implicam que a dimensão é um observável que tende a um valor finito, ou seja, é uma variável aleatória cuja distribuição tende a uma função delta no infinito, isto é, a dimensão é um observável que define o sistema. Buscando uma analogia com a mecânica estatística, a dimensão é uma ´´variável termodinâmica".

Esta abordagem mostrou-se muito promissora como uma nova proposta para uma teoria de gravitação quântica euclidiana, já que obtivemos resultados inesperados no comportamento da dimensão do modelo. Apesar de assumirmos o mínimo de hipóteses possível, ou seja, um conjunto abstrato de pontos, obtivemos o resultado surpreendente de que a dimensão deste ensemble de geometrias tende a um número inteiro bem definido.

Parte II

Formalismo Matemático, Modelo e Algoritmos

Capítulo 2

Formalismo Matemático

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos o ferramental matemático necessário ao entendimento do modelo estudado neste trabalho. A ênfase será em ilustrar o significado dos conceitos mais elaborados através de exemplos e apenas enunciando os eventuais teoremas utilizados.

Nas primeiras seções enunciaremos os teoremas e as definições que serão utilizados na seção de Geometria Não Comutativa onde discutiremos os fundamentos matemáticos do modelo de gravitação quântica euclidiana proposto no trabalho [4], em que é definido um observável dimensão, para a qual desejamos calcular uma estimativa numérica.

O teorema de Gelfand-Naimark garante que podemos descrever uma variedade $(M, g_{\mu,\nu})$ de maneira algébrica através da escolha de uma tripla espectral apropriada $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Portanto, podemos substituir a abordagem geométrica usual da Relatividade Geral pela abordagem algébrica das triplas espectrais.

A cada variedade associamos uma tripla espectral, entretanto, existem triplas espectrais que não estão associadas a variedades como já discutimos na seção 1.2. Neste sentido, este modelo generaliza a teoria da gravitação. Neste capítulo apresentaremos o método para recuperarmos uma variedade e o tensor métrico, dada uma tripla espectral comutativa e vice-e-versa.

2.2 Preliminares

2.2.1 Espaços Métricos

Métrica. Seja \mathcal{X} um conjunto. d é uma função distância em \mathcal{X} , ou seja, uma métrica, se d satisfizer as propriedades [10],[11]:

- 1. d é uma função real, finita e não negativa
- 2. d(x,y) = 0 se e somente se x = y
- 3. d(x, y) = d(y, x)
- 4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Espaço Métrico. Espaço métrico é um par (\mathcal{X}, d) onde \mathcal{X} é um conjunto e d é uma métrica definida em \mathcal{X} .

Exemplo 1: Espaço \mathbb{R}^3 . O espaço \mathbb{R}^3 munido da métrica:

$$d(x,y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Exemplo 2: Espaço das funções C[a, b]. O espaço das funções contínuas no intervalo fechado [a, b] munido da métrica:

$$d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

Sequências de Cauchy. Uma seqüência (x_n) definida em um espaço métrico (\mathcal{X}, d) é dita uma seqüência de Cauchy se $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ tal que:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m, n > N(\epsilon)$$

Exemplo 1: Seqüência $x_n = \frac{1}{n}$. Tomemos a seqüência $x_n = \frac{1}{n}$ no intervalo $\mathcal{X} = (0, 1]$ munida da métrica d(x, y) = |x - y| para $n = 1, 2, \ldots$

Exemplo 2: Seqüência de Funções Contínuas da figura 2.1. Seja o espaço das funções contínuas reais no intervalo J = [0, 1] com a métrica:

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$

Espaço Completo. Um espaço \mathcal{X} é dito completo se toda seqüência de Cauchy em \mathcal{X} converge (tem um limite que é um elemento em \mathcal{X}).



Figura 2.1: Seqüência de Funções Contínuas $x_m(t) = 0, t \in [0, \frac{1}{2}] e x_m(t) = 1, t \in [a_m, 1]$ onde $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$

Exemplo 1: Funções C[a, b]. Seja o espaço das funções contínuas no intervalo $\mathcal{J} = [a, b]$ utilizando a métrica¹:

$$d(x,y) = \max_{t \in \mathcal{J}} |x_m(t) - y_m(t)|$$

Exemplo 2: \mathbb{R}^n . O espaço euclidiano \mathbb{R}^n , ou seja, o espaço da hipercubo dos números reais munidos da métrica euclidiana:

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

¹Observe que fornecemos dois exemplos de seqüências de Cauchy no item anterior que não são convergentes

2.2.2 Topologia

Bola Aberta. Dado um número real r > 0 e um espaço métrico (\mathcal{X}, d) . Definimos bola aberta de centro a e raio r como o conjunto $\mathcal{B}(a, r)$ dos pontos de \mathcal{X} cuja distância ao ponto a é menor do que r [12].

 $\mathcal{B}(a,r) = \{ x \in \mathcal{X} \mid d(x,a) < r \}$

Exemplo 1: Bola aberta em \mathbb{R} . Tomando a métrica usual em \mathbb{R} , d(x,y) = |x-y| a bola aberta $\mathcal{B}(a,r)$ em \mathbb{R} é o intervalo (a-r;a+r)



Exemplo 2: Bola aberta em \mathbb{R}^2 . Tomando a métrica $d(x,y) = \max\{x,y\}$ a bola aberta $\mathcal{B}(a,r)$ em \mathbb{R}^2 é o quadrado de lado de raio r no ponto a:



Figura 2.3: Bola Aberta em \mathbb{R}^2 com a métrica do máximo

Ponto Interior. Seja \mathcal{A} um subconjunto de um espaço métrico (\mathcal{X}, d) . Um ponto $x \in \mathcal{A}$ é dito um ponto interior a \mathcal{A} quando é centro de uma bola aberta contida em \mathcal{A} . **Interior.** O conjunto dos pontos interiores a \mathcal{A} em (\mathcal{X}, d) é chamado conjunto interior de \mathcal{A} .

Conjunto Aberto. Um conjunto \mathcal{A} de um espaço métrico (\mathcal{X}, d) é chamado aberto em (\mathcal{X}, d) quando todos os seus pontos são pontos interiores, ou seja, int $\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Topologia. Uma topologia definida em um conjunto \mathcal{X} é uma coleção \mathcal{T} de partes de \mathcal{X} , chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:

- 1. $\emptyset \in \mathcal{T} \ e \ \mathcal{X} \in \mathcal{T}$
- 2. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$
- 3. Dada uma família arbitrária $(A_{\lambda})_{\lambda \in L}$ com $A_{\lambda} \in \mathcal{T}$ para cada $\lambda \in L$, tem-se $\bigcup A_{\lambda} \in \mathcal{T}$

Espaço Topológico. É um par $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ onde \mathcal{X} é um conjunto e \mathcal{T} é uma topologia em \mathcal{X} .

Espaço Hausdorff. Seja \mathcal{X} um conjunto e \mathcal{T} uma topologia. Para cada par de pontos distintos $x \ e \ y \ em \ \mathcal{X}$, existem abertos $\mathcal{U} \ e \ \mathcal{V}$ tais que $x \in \mathcal{U}$ e $y \in \mathcal{V} \ e \ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Espaço Compacto. Um espaço Hausdorff \mathcal{A} é um espaço compacto se todo recobrimento aberto de \mathcal{A} admite um sub-recobrimento finito, isto é, dada uma família de conjuntos abertos $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ tal que $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i = \mathcal{A}$, existe um subconjunto finito $i_1, i_2, \ldots, i_n \subset I$ tal que $\mathcal{O}_{i_1} \cup \mathcal{O}_{i_2} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{i_n} = \mathcal{A}$

Mapa Contínuo. Sejam $\mathcal{X} \in \mathcal{Y}$ dois espaços topológicos. O mapa Φ : $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é contínuo se e somente se a imagem inversa de cada aberto em \mathcal{Y} é aberta em \mathcal{X} .

Homeomorfismo. Sejam $\mathcal{X} \in \mathcal{Y}$ dois espaços topológicos. Se o mapa Φ : $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é tal que Φ é uma bijeção e além disso, $\Phi \in \Phi^{-1}$ são contínuos, então Φ é um homeomorfismo.

2.2.3 Análise Funcional

Norma. Uma norma definida em um espaço vetorial \mathcal{X} real ou complexo é uma função real em \mathcal{X} cujo valor em um elemento de \mathcal{X} , $x \in \mathcal{X}$, é denotada ||x|| e tem as propriedades [11]:

1. $||x|| \ge 0$

- 2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 3. $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$
- 4. $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

Exemplo 1: Norma Euclidiana. A norma euclidiana em \mathbb{R}^n é definida pela expressão:

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exemplo 2: Espaço l^p . O espaço das seqüências de números reais ou complexos $x = x_1, x_2, \ldots$ tais que $|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots$ converge. Definindo a norma neste espaço como:

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Espaço Normado. Um espaço normado é um espaço vetorial \mathcal{X} cuja métrica é definida pela norma em \mathcal{X} .

$$d(x,y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$

A métrica d(x, y) definida acima é chamada métrica induzida pela norma.

Exemplo 1: Funções Contínuas no intervalo $\mathcal{J} = [a, b]$. O espaço das funções contínuas no intervalo [a, b], $\mathcal{C}[a, b]$, munido com a norma:

$$||x|| = \max_{t \in \mathcal{J}} |x(t)|$$

Exemplo 2: Funções Contínuas no intervalo $\mathcal{J} = [0, 1]$. O espaço das funções contínuas no intervalo [0, 1], munido com a norma :

$$||x|| = \int_0^1 |x(t)| dt$$

Espaço de Banach. Espaço de Banach é um espaço normado e completo na métrica induzida pela norma ^{2 3}.

 $^{^2}O$ exemplo 1 do item anterior, funções contínuas no intervalo fechado [a,b] com a norma do máximo é outro exemplo de um espaço de Banach.

³Observe que o exemplo 2 da seção anterior, apesar de ser um exemplo de espaço normado, não é um exemplo de um espaço de Banach.

Exemplo 1: Espaço das seqüências l^{∞} . O espaço das seqüências de números $x = x_1, x_2, \ldots$ tais que x_i converge na métrica do supremo. A norma deste espaço é :

$$||x|| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

Produto Interno. Um produto interno definido em um espaço vetorial \mathcal{X} é um mapa $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ em um campo escalar \mathbb{K} . Para cada par de vetores xe y de \mathcal{X} associamos um escalar de \mathbb{K} simbolizado por $\langle x, y \rangle$ que tem as propriedades:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2.
$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

- 3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
- 4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
- 5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exemplo 1: Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Espaço do hipercubo dos números reais \mathbb{R}^n munido da produto interno que induz a norma euclidiana:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exemplo 2: Espaço das seqüências de Hilbert l^2 . O espaço das seqüências de números $x = x_1, x_2, \ldots$ tais que $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots$ converge. Definimos o produto interno pela expressão:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Espaço de Hilbert. Um espaço vetorial \mathcal{X} com um produto interno $\langle x, y \rangle$ definido em \mathcal{X} é um espaço de Hilbert se \mathcal{X} é um espaço completo na métrica definida pelo produto interno.

Observar que os exemplos 1 e 2 da seção anterior são exemplos de espaços de Hilbert. Basta provar que, nestes espaços, toda seqüência de Cauchy converge.

2.2.4 Ålgebras

Álgebra. Álgebra sob um corpo \mathbb{K} é um espaço vetorial \mathcal{A} sobre o corpo \mathbb{K} dotado de uma operação de produto binária ".", conhecida como o produto da álgebra que satisfaz as propriedades [13], [14]:

1. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b \ e \ c \in \mathcal{A}$

2. $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$

Álgebra Associativa. Uma álgebra é dita ser associativa se $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$ valer:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Exemplo 1: Espaço das Matrizes $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. O espaço vetorial das matrizes complexas de tamanho 2×2 é uma álgebra associativa utilizando o produto usual de matrizes.

Exemplo 2: C([a, b]). Espaço das funções contínuas no intervalo fechado [a, b] utilizando a definição de produto:

$$(f.g)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Álgebra Comutativa. Uma álgebra é dita comutativa se $\forall a, b \in \mathcal{A}$ valer:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Exemplo 1: A álgebra das funções contínuas no intervalo fechado [a, b] é um bom exemplo de um álgebra comutativa devido à propriedade comutativa do produto de números reais..

Exemplo 2: O exemplo 1 da seção anterior, a álgebra de matrizes complexas de tamanho 2×2 , é um exemplo de álgebra não comutativa por consequência das propriedades dos produtos de matrizes..

Ålgebra Involutiva. Uma álgebra associativa sobre o corpo \mathbb{C} chama-se álgebra involutiva, ou álgebra-*, se existir uma operação $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, isto é, para todo $a \in \mathcal{A}$ associa um elemento $a^* \in \mathcal{A}$ com as propriedades:

- 1. $(a^*)^* = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$
- 2. $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^* \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$
- 3. $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^* \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \ e \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Álgebra Normada. Um espaço vetorial normado \mathcal{A} é chamado álgebra normada se satisfizer a propriedade:

1. $||ab|| \leq ||a|| ||b||$

Álgebra de Banach. Uma álgebra de Banach \mathcal{A} é uma álgebra normada e completa.

Álgebra de Banach-*. Uma álgebra de Banach-* \mathcal{A} é um álgebra de Banach com uma involução-*.

Álgebra C^* . Uma álgebra C^* é uma álgebra de Banach com involução-* que satisfaz a propriedade adicional:

$$||aa^*|| = ||a||^2$$

Exemplo 1: Espaço $\mathcal{C}(\mathcal{M})$. Seja \mathcal{M} um espaço compacto e $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ o espaço de Banach das funções complexas em \mathcal{M} com a norma do supremo:

$$||f|| = \sup_{x \in \mathcal{M}} |f(x)|$$

A multiplicação em $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ é definida ponto a ponto:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

A involução é definida pela conjugação complexa:

$$f^*(x) = \overline{f(x)}$$

O espaço $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ é uma álgebra C^* comutativa com identidade e(x) = 1.

Exemplo 2: Espaço $\mathcal{C}^0(\mathcal{M})$. Seja \mathcal{M} um espaço localmente compacto. $\mathcal{C}^0(\mathcal{M})$ é o espaço de Banach de todas as funções complexas definidas em \mathcal{M} que se anulam no infinito. O produto da álgebra e a involução são os mesmos do exemplo 1, portanto o espaço $\mathcal{C}^0(\mathcal{M})$ é uma álgebra C^* comutativa.

Morfismo. Um morfismo é um mapa entre duas estruturas matemáticas que preserva as propriedades internas entre estas duas estruturas. Se as estruturas consideradas forem conjuntos os exemplos de morfismo são as funções. Se as estruturas consideradas forem espaços topológicos, funções contínuas são exemplos de morfismos. **Homomorfismo.** Sejam duas álgebras $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$. Um homomorfismo entre álgebras é um mapa que preserva as propriedades das álgebras, ou seja, produtos de álgebras em \mathcal{A} são levados em produtos de álgebras em \mathcal{B} . Vejamos:

$$\pi(ab) = \pi(a)\dot{\pi}(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

Morfismo-*. Sejam duas álgebras $\mathcal{A} \in \mathcal{B} C^*$. Um morfismo-* é um homomorfismo entre duas álgebras C^* que tem a propriedade:

$$\pi(a^*) = \pi(a)^* \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall \pi(a) \in B$$

Isomorfismo. Sejam duas álgebras $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$, sejam $f \in g$ morfismos entre $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$. Um isomorfismo é um morfismo que tem a propriedade de bijeção, ou seja, Seja o morfismo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que existe um morfismo $g, g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ de forma que as propriedades $f \circ g = I_y \in g \circ f = I_x$ são satisfeitas.

Isomorfismo-*. Um isomorfismo-* entre álgebras $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ é um isomorfismo que preserva a propriedade *.

$$\pi(a^*) = \pi(a)^* \ \forall a \in \mathcal{A}$$

Sejam $\pi_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \ e \ \pi_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, ou seja π é um morfismo e uma bijeção:

- $\pi_1 \circ \pi_2 = I_B$
- $\pi_2 \ o \ \pi_1 = I_A$

2.2.5 Geometria Diferencial

Sistema Local de Coordenadas. Seja um espaço Hausdorff \mathcal{M} , [15]. Um sistema local de coordenadas (cartas) em $p \in \mathcal{M}$ é um par (\mathcal{U}, μ) , onde \mathcal{U} é um conjunto aberto de \mathcal{M} contendo $p \in \mu$ é um homeomorfismo de \mathcal{U} em um conjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Atlas. Seja um espaço Hausdorff \mathcal{M} . Um conjunto de cartas $\{(\mathcal{U}_a, \mu_a)\}$ tal que $\{\mathcal{U}_a\}$ cobre \mathcal{M} é chamado atlas.

Manifold - Espaço Localmente Euclidiano. Um espaço Hausdorff munido de um atlas é um espaço localmente euclidiano. Um espaço localmente euclidiano também é chamado de variedade topológica.
Exemplo 1: $S^1 = \{(a, b) : a^2 + b^2 = 1; a, b \in \mathbb{R}\}$. O conjunto dos pontos do círculo de raio 1 no plano \mathbb{R}^2 , munido da topologia induzida de \mathbb{R}^2 . Os conjuntos abertos que cobrem S^1 são:

$$\mathcal{U}_1 = \{(a, b) \in S^1 : a > 0\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(a, b) \in S^1 : b > 0\}$$

$$\mathcal{U}_3 = \{(a, b) \in S^1 : a < 0\}$$

$$\mathcal{U}_4 = \{(a, b) \in S^1 : b < 0\}$$

Os homeomorfismos dos abertos em $\mathbb R$ são:

$$\begin{array}{l} u_1:(a,b)\to b\\ u_2:(a,b)\to a\\ u_3:(a,b)\to b\\ u_4:(a,b)\to a \end{array}$$

Portanto o conjunto $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_1, u_1); (\mathcal{U}_2, u_2); (\mathcal{U}_3, u_3); (\mathcal{U}_4, u_4)\}$ forma um atlas de S^1 .Podemos levar todos os pontos de S^1 em \mathbb{R} por meio dos home-omorfismos definidos.

O espaço S^1 é Hausdorff na topologia induzida pela métrica euclidiana, portanto o exemplo S^1 é uma variedade topológica, ou em outras palavras, um espaço localmente euclidiano. Vejamos a figura (2.4) como um exemplo do que está ocorrendo nesta construção:



Figura 2.4: Mapa de um aberto em S^1 para um intervalo de $\mathbb R$

Produto Tensorial. Suponha que $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$ são dois espaços vetoriais de dimensão $m \in n$ respectivamente. O produto tensorial $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ satisfaz as propriedades:

1. Para um escalar arbitrário $\lambda, v \in \mathcal{V} e w \in \mathcal{W}$

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$$

2. Para $v_1 \in \mathcal{V}, v_2 \in \mathcal{V} e w \in \mathcal{W}$

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$$

3. Para $v \in \mathcal{V}, w_1 \in \mathcal{W} e w_2 \in \mathcal{W}$

$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$

Tensor Covariante. Um tensor covariante de ordem 1 é uma quantidade X_a , definida em termos das coordenadas x^a , associada ao ponto P, que ao aplicarmos uma mudança de coordenadas se transforma segundo a expressão:

$$X_{a}^{'} = \frac{\partial x^{b}}{\partial x^{'a}} X_{b}$$

Um tensor covariante de ordem 2 transforma-se segundo a expressão:

$$X_{ab}^{'} = \frac{\partial x^c}{\partial x^{'a}} \frac{\partial x^d}{\partial x^{'b}} X_{cd}$$

Um tensor covariante de ordem k transforma-se segundo a expressão:

$$X'_{a_1,a_2,\dots,a_k} = \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x'^{a_1}} \frac{\partial x^{b_2}}{\partial x'^{a_2}} \dots \frac{\partial x^{b_k}}{\partial x'^{a_k}} X_{b_1,b_2,\dots,b_k}$$

Tensor Contravariante. Um tensor contra-variante de ordem 1 é uma quantidade X_a em termos das coordenadas x^a associada ao ponto P que ao aplicarmos uma mudança de coordenadas se transforma segundo a expressão:

$$X^{'a} = \frac{\partial x^{'a}}{\partial x^b} X^b$$

Um tensor contra-variante de ordem 2 transforma-se segundo a expressão:

$$X^{'ab} = \frac{\partial x^{'a}}{\partial x^c} \frac{\partial x^{'b}}{\partial x^d} X^{cd}$$

Um tensor contra-variante de ordem k transforma-se segundo a expressão:

$$X^{'a_1,a_2,\ldots,a_k} = \frac{\partial x^{'a_1}}{\partial x^{b_1}} \frac{\partial x^{'a_2}}{\partial x^{b_2}} \cdots \frac{\partial x^{'a_k}}{\partial x^{b_k}} X^{b_1,b_2,\ldots,b_k}$$

Tensor Métrico. O tensor métrico, denota-se g_{ij} é uma função que permite calcular a distância entre 2 pontos quaisquer de um espaço métrico. Cada componente ij do tensor métrico representa o coeficiente do termo $dx_i dx_j$ na expressão da distância entre dois pontos:

$$ds^{2} = g_{11}(x)dx_{1}^{2} + g_{12}(x)dx_{1}dx_{2} + \dots$$

.

Exemplo 1: Espaço Euclidiano. O espaço euclidiano é definido pelo tensor métrico $g_{ij} = \delta_{ij}$ onde δ_{ij} é a matriz identidade.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1: Espaço de Minkowski. O espaço de Minkowski é definido pelo tensor métrico:

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3 Geometria Não Comutativa

Embora a geometria não comutativa forneça a possibilidade de descrição de estruturas geométricas muito mais gerais do que as estruturas usuais, vamos restringir a discussão abaixo às álgebras comutativas pois elas são as álgebras que se relacionam com os espaços Hausdorff. Estes são os espaços relevantes ao trabalho pois englobam todas as variedades topológicas [2],[3].

Representação irredutível. Seja \mathcal{A} uma álgebra C^* comutativa. Uma representação irredutível de \mathcal{A} é um funcional linear não nulo $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que tem a propriedade de ser um morfismo-*:

- 1. Representação Irredutível: $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$
- 2. Propriedade-*: $\phi(a^*) = \phi(a)^* \quad \forall a \in \mathcal{A}$

Denota-se o espaço das classes de equivalência das representações irredutíveis de \mathcal{A} por $\hat{\mathcal{A}}$. O conjunto $\hat{\mathcal{A}}$ é também chamado espectro de \mathcal{A} ou "structure space" de \mathcal{A} .

Transformação de Gelfand. Seja \mathcal{A} uma álgebra C^* comutativa. A transformação de Gelfand, para um elemento da álgebra \mathcal{A} , é uma função complexa $\hat{a} : \hat{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\hat{a}(\phi) = \phi(a) \quad \forall \phi \in \hat{\mathcal{A}}$$

Topologia de $\hat{\mathcal{A}}$. Seja uma sequência de funcionais $\{\phi_{\lambda \in \Lambda}\} \in \hat{\mathcal{A}}$, onde Λ é um conjunto de índices. Dizemos que o funcional $\phi \in \hat{\mathcal{A}}$ converge em $\hat{\mathcal{A}}$ se e somente se $\phi_{\lambda}(a)$ converge para $\phi(a)$ para qualquer $a \in \mathcal{A}$. Esta topologia é chamada de topologia de Gelfand.

Teorema. Se \mathcal{A} é um álgebra C^* com identidade então $\hat{\mathcal{A}}$ é um espaço topológico Hausdorff compacto.

Teorema de Gelfand-Naimark. Dada uma álgebra C^* comutativa \mathcal{A} com identidade, existe um isomorfismo-* isométrico de \mathcal{A} em $C^0(\hat{\mathcal{A}})$. O isomorfismo é definido por:

 $a \rightarrow \hat{a}$

Onde \hat{a} é a transformação de Gelfand $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$.

Entende-se por isometria:

 $\|\hat{a}\| = \|a\| \quad \forall a \in \mathcal{A}$

Lembrando que neste contexto vale a norma do supremo:

$$\|\hat{a}\|_{\infty} = \|\hat{a}(\phi)\|_{\infty} = \sup_{\phi \in \hat{\mathcal{A}}} |\hat{a}(\phi)|$$

Teorema de Gelfand. Seja \mathcal{M} um espaço localmente compacto e a álgebra C^* definida em \mathcal{M} : $C^0(\mathcal{M})$. Definimos o homomorfismo entre a álgebra $C^0(\mathcal{M})$ e a álgebra dos números complexos \mathbb{C} , $\phi_m : C^0(\mathcal{M}) \to \mathbb{C}$, por:

$$\phi_m(f) = f(m) \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

O mapa $m \to \phi_m$ é um homeomorfismo de \mathcal{M} em $\widehat{C^0(\mathcal{M})}$ já que ϕ_m é uma representação irredutível de $C^0(\mathcal{M})$ por construção.

Interpretação

Vamos considerar o caso em que a álgebra comutativa \mathcal{A} seja $C^0(\mathcal{M})$, a álgebra C^* das funções contínuas em um espaço topológico Hausdorff compacto \mathcal{M} (Veja o exemplo 2 da página 23). Entendemos $\widehat{C^0(\mathcal{M})}$ como espaço das representações irredutíveis da álgebra comutativa $C^0(\mathcal{M})$ e $C^0(\widehat{C^0(\mathcal{M})})$ como a álgebra das funções contínuas no espaço topológico $\widehat{C^0(\mathcal{M})}$.

O espaço topológico Hausdorff \mathcal{M} está relacionado univocamente ao espectro $\widehat{C^0(\mathcal{M})}$ através do homeomorfismo $m \to \phi_m$, isto é, cada elemento m está relacionado a um único ϕ_m e vice-e-versa. Da mesma maneira, a álgebra C^* , $C^0(\mathcal{M})$, está relacionada univocamente à álgebra $C^0(\widehat{C^0(\mathcal{M})})$ pelo isomorfismo-* $f \to \hat{f}$. Surge a pergunta:

Como relacionar os espaços topológicos $\overline{C}^0(\overline{\mathcal{M}})$ e M e as álgebras C^* comutativas $C^0(\mathcal{M})$ e $C^0(\widehat{C}^0(\overline{\mathcal{M}}))$?

Dados dois pares (S_1, r_1) e (S_2, r_2) , onde S_1 e S_2 são duas estruturas matemáticas e r_1 e r_2 duas relações entre os elementos destas estruturas. Existe uma associação entre cada elemento de S_1 a um elemento de S_2 que também associa os mapas r_1 e r_2 .

Por exemplo, dadas as álgebras C^* , $C^0(\mathcal{M}) \in C^0(\widehat{C^0(\mathcal{M})})$, e um isomorfismo-* entre elas, e dados dois espaços topológicos Hausdorff, $\mathcal{M} \in \widehat{C^0(\mathcal{M})}$, e um homeomorfismo entre eles, existe uma associação que leva os elementos de $C^0(\mathcal{M})$ nos elementos de \mathcal{M} e os elementos de $C^0(\widehat{\mathcal{O}(\mathcal{M})})$ nos elementos de $\widehat{\mathcal{C}^0(\mathcal{M})}$ além de levar isomorfismo-*, $a \to \hat{a}$ no homeomorfismo $m \to \phi_m$. Esta associação entre estruturas matemáticas chama-se funtor.

O funtor é o conjunto das três setas que levam os elementos dos espaços topológicos nas álgebras e os homeomorfismos nos isomorfirmos e vice-eversa. Portanto existe uma relação unívoca entre um espaço topológico Hausdorff compacto e uma tripla espectral.

Triplas Espectrais. Seja \mathcal{A} uma álgebra C^* comutativa de operadores limitados em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , denota-se $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Seja \mathcal{D} um operador auto-adjunto definido no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Uma tripla espectral, denota-se $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ é definida pelas propriedades:

- O resolvente $(\mathcal{D} \lambda)^{-1}$, com $\lambda \notin \mathbb{R}$ é um operador compacto em \mathcal{H} .
- $[\mathcal{D}, a] = \mathcal{D}a a\mathcal{D} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ \forall a \in \mathcal{A}.$

Triplas Canônicas. Uma tripla espectral canônica $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ associada e uma variedade topológica \mathcal{M} que contenha espinores é definida por:

- $\mathcal{A} = C^0(M)$ álgebra das funções complexas contínuas em \mathcal{M} .
- \mathcal{H} Espaço de Hilbert dos espinores em L^2 (quadrado integrável).
- $\mathcal{D} = i \ \gamma_{\nu} \partial_{\nu}$.

Equivalência $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ e $(M, g_{\mu\nu})$. Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ uma tripla espectral canônica em M. Então recuperamos a variedade e a distância geodésica através da associação:

- 1. O espaço \mathcal{M} é o espaço das representações irredutíveis do fecho da álgebra \mathcal{A} .
- 2. A distância geodésica entre dois pontos em \mathcal{M} é dada por:

$$d(p,q) = \sup_{f \in \mathcal{A}} \left\{ |f(p) - f(q)| : \| [\mathcal{D}, f] \| \le 1 \right\} \ \forall p, q \in \mathcal{M}.$$

Equivalência $(M, g_{\mu\nu})$ e $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Dada uma variedade \mathcal{M} , e um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ podemos construir a sua tripla espectral correspondente através de:

- A álgebra C^{*}, A, é dada por C⁰(M), ou seja, a álgebra das funções contínuas em M.
- 2. Os operadores de Dirac são definidos por: $D = i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}$, onde γ_{μ} obedece à relação de anti-comutação: $\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2g_{\mu\nu}$.
- 3. O espaço de Hilbert é o espaço dos espinores de quadrado integrável onde atuam os operadores D.

Exemplo 1: $\mathcal{M} = S^1 \times S^1, g_{\mu\nu} = \mathbb{I}_2.$

O toro $S^1 \times S^1$ é um espaço topológico Hausdorff compacto e podemos associar a ele o sistema de coordenadas usual transformando-o em uma variedade.

Tomando o espaço das funções contínuas em $S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}$, construímos uma álgebra C^* . A métrica definida como $g_{\mu\nu}$ define os operadores de Dirac que são matrizes 2×2 e o espaço de Hilbert em que os operadores D atuam é o espaço dos espinores:

$$\left(\begin{array}{c}\psi_1\\\psi_2\end{array}\right)$$

tais que:

$$\int d^2x \ \psi^{\dagger}\psi \leq \infty$$

2.4 Matrizes Aleatórias

Uma matriz aleatória [6] é uma matriz em que seus elementos são variáveis aleatórias que respeitam uma certa distribuição de probabilidades. A teoria de matrizes aleatórias está interessada, entre outras coisas, no estudo das distribuições dos autovalores e autovetores do ensemble, bem como na distribuição dos espaçamentos de autovalores.

A teoria de matrizes aleatórias tem sua origem ligada às investigações sobre as propriedades dos níveis de energia dos núcleos pesados. A compreensão dos níveis de energia destes tipos de núcleos por meio da descrição das interações quânticas entre cada nucleon e a posterior solução da equação de Schroedinger para estes sistemas mostrou-se um problema dificílimo.

A solução para este impasse foi criar uma descrição em que todas as dinâmicas possíveis são consideradas e que as propriedades de simetria temporal e de paridade são satisfeitas, de modo que é possível estudar as propriedades dos níveis de energia por meio de técnicas estatísticas.

Consideramos que cada hamiltoniana do ensemble representa uma possível realização do núcleo. As técnicas de matrizes aleatórias permitem obter a distribuição dos espaçamentos dos autovalores por meio de médias ponderadas do tipo:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int [dH] \mathcal{O}(H) e^{-f(H)}}{\int [dH] e^{-f(H)}}$$

Onde [dH] significa a medida de integração, H é uma matriz aleatória hermitiana representando a hamiltoniana, \mathcal{O} significa o observável em termos da hamiltoniana e finalmente f(H) é uma função simples da hamiltoniana.

2.4.1 Ensemble Gaussiano Unitário

Ensemble Gaussiano Unitário. O ensemble Gaussiano Unitário, EGU, é um conjunto de matrizes definidas no espaço T_{2G} (espaço das matrizes hermitianas) que possui as propriedades:

1. A probabilidade P(H) dH de que o sistema pertença ao elemento de volume:

$$dH = \prod_{i \le j} dH_{ij}^R \prod_{i < j} dH_{ij}^I$$

 H_{ij}^R significa a parte real de H_{ij} e H_{ij}^I significa a parte imaginária de H_{ij} :

$$H \to U^{-1}HU$$

de T_{2G} nele mesmo, onde U é uma matriz unitária.

2. Os elementos independentes de H são estatisticamente independentes.

Ou seja:

- 1. P(H') dH' = P(H) dH se $H' = U^{-1}HU$ onde U é uma matriz unitária.
- 2. Elementos estatisticamente independentes significa:

$$P(H) = \prod_{i \leq j} f_{ij}(H_{ij}^R) \prod_{i < j} f_{ij}(H_{ij}^I)$$

 f_{ij} são funções de H_{ij} que dependem somente de uma única variável H_{ij} , onde P(H) é uma distribuição de probabilidades.

Distribuição de Probabilidades de EGU. Na referência [6] é demonstrado que assumindo como hipóteses as propriedades 1 e 2, a densidade de probabilidade para o ensemble gaussiano unitário é da forma:

$$P(H) = e^{-aTrH^2 + bTr(H) + c}$$

que pode ser transformada algebricamente em:

$$P(H) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \exp\left(\frac{-Tr(H - E_0 \mathbb{I})^2}{4\alpha^2}\right)$$

Distribuição dos Autovalores. A densidade de probabilidade dos autovalores x_k das matrizes do ensemble gaussiano unitário EGU é dada por:

$$P_{N\beta} = C_N \exp\left(-\sum_{i=1}^N x_i^2\right) \prod_{i< j} |x_i - x_j|^{\beta}$$

onde o fator de normalização C_N é:

$$C_N = \frac{1}{\prod_{j=1}^N \Gamma(1+j)} (2\pi)^{\frac{N}{2}} 2^{\frac{N}{2} + \frac{N(N-1)}{2}} \left[\Gamma(2) \right]^N$$

Lei do Semi-Círculo. A Lei do Semi-Círculo demonstrada por Wigner expressa a densidade de autovalores em termos do tamanho da matriz:

$$\sigma_N(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{N}}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4N}} & se \ |\lambda| < (4N)^{\frac{1}{2}}\\ 0 & se \ |\lambda| > (4N)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Onde λ é um autovalor de uma matriz do ensemble.



Figura 2.5: Histograma dos autovalores para um ensemble de 200 matrizes aleatórias hermitianas de tamanho 50×50 . Este gráfico é composto pelos autovalores calculados utilizando algoritmos consagrados da literatura de maneira a testar se estamos gerando as matrizes do ensemble EGU corretamente.

Capítulo 3

Modelo e Algoritmos

3.1 Introdução

Neste capítulo descreveremos os pontos fundamentais do modelo estudado que, conforme assinalado anteriormente, está embasado no formalismo matemático da Geometria Não Comutativa. Consideraremos um ensemble de espaços discretos X, que correspondem a um ensemble de geometrias, e por conseguinte o observável de interesse será a dimensão deste conjunto de geometrias. A idéia é flutuarmos todas as triplas espectrais discretas, portanto flutuarmos todas as geometrias possíveis associadas, e encontrar o valor médio da dimensão conforme exposto no capítulo 1.

Na referência [4], publicada pelos orientadores, estudou-se o número de pontos e a dimensão deste ensemble. Mostrou-se que haviam 2 fases distintas: a primeira em que o número de pontos é finito e a dimensão nula, e a segunda, mais interessante, em que o número médio de pontos é infinito e o limite superior da dimensão é 2.

3.2 Fórmula de Weyl

Tomemos uma membrana Ω fixada em seu contorno Γ . Ao aplicarmos uma pequena força F nesta membrana na direção perpendicular à superfície, o deslocamento resultante K como função da posição no plano e do tempo $K(x, y; t) = K(\vec{\rho}; t)$ tem o seu movimento descrito pela equação de onda onde a constante c guarda as características físicas da membrana.

A equação de onda é:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 K \tag{3.1}$$

Estamos interessados nas soluções que representam os tons puros que a membrana é capaz de produzir, ou seja, as soluções harmônicas com o tempo da forma:

$$K(\vec{\rho};t) = U(\vec{\rho})e^{i\omega t}$$

Substituindo K na equação da onda com $c^2 = \frac{1}{2}$, verificamos que para encontrar os modos normais de vibração, U deve satisfazer a equação de autovalores :

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \omega^2 U = 0 \tag{3.2}$$

O problema de caracterizar propriedades geométricas do espaço através das soluções da equação (3.2) foi colocado no final do século XIX por Weyl. Kac em [16] formulou o problema da seguinte maneira:

Pensando em Ω como uma membrana e $0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots$ como seus tons fundamentais, é possível com um ouvido perfeito identificar a forma de Ω ?

Em termos mais específicos. Sejam $\Omega_1 \in \Omega_2$ duas regiões planas limitadas pelas curvas $\Gamma_1 \in \Gamma_2$ respectivamente, e considere os seguintes problemas de autovalores:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\nabla^2 U + \lambda U = 0 \ em \ \Omega_1 \\ U = 0 \ em \ \Gamma_1 \end{cases}$$
(3.3)

е

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\nabla^2 U + \mu U = 0 \ em \ \Omega_2 \\ U = 0 \ em \ \Gamma_2 \end{cases}$$
(3.4)

Assuma que para cada n o autovalor λ_n para Ω_1 é igual ao autovalor μ_n para Ω_2 . Seriam as regiões Ω_1 e Ω_2 congruentes no sentido da geometria euclidiana?

A partir do comportamento assintótico dos autovalores do Laplaciano para certos problemas de valor de contorno em determinados espaços, podemos inferir propriedades geométricas do espaço.

3.2.1 Teorema de Weyl

Uma conjectura proposta por Lorentz em 1910 diz:

Conjectura de Lorentz. Seja $N(\lambda)$ o número de autovalores do Laplaciano menores do que λ . Considere o problema de autovalores 3.2 com as condições de contorno de Neumann ou Dirichlet. Seja $|\Omega|$ a área da membrana contida no contorno Γ . $N(\lambda)$ segue o comportamento assintótico:

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{2\pi} \lambda \tag{3.5}$$

Em outras palavras:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{2\pi}$$
(3.6)

Generalizando a fórmula acima formalizamos o teorema de Weyl:

Teorema de Weyl. [17],[18],[19] Se D é uma região limitada de \mathbb{R}^d com contorno regular por pedaços, e se $0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots$ é o espectro do problema de autovalores do Laplaciano com condições de contorno:

$$\Delta f = \gamma f \ em \ D$$

$$f \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}(\bar{D})$$

$$f = 0 \ em \ B$$
(3.7)

Então o comportamento assintótico dos autovalores segue a expressão:

$$-\gamma_n \sim 2\pi \left[\left(\frac{d}{2}\right)! \right] \left(\frac{n}{vol(D)}\right)^{\frac{2}{d}}$$
(3.8)

quando $n \to \infty$, ou seja, o valor n, número de autovalores, está relacionado ao parâmetro $N(\lambda)$.

Segue uma lista das propriedades assintóticas dos autovalores dos espaços utilizados em nosso trabalho. Estes espaços têm dimensão conhecida, portanto podemos testar a precisão e a consistência dos algoritmos. Os espaços são: reta \mathbb{R} , o plano \mathbb{R}^2 , o cubo \mathbb{R}^3 e a esfera S^2 .

3.2.2 Laplaciano em \mathbb{R}

A equação diferencial parcial na semi-reta em $\mathbb R$ com condições de contorno de Neumann para o problema de autovalores:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0\\ u = 0 em\Lambda \end{cases}$$
(3.9)

resulta nos seguintes autovalores:

$$\lambda = \pi^2 \frac{l^2}{a^2}$$
 $l = 1, 2, 3, \dots$

3.2.3 Laplaciano em \mathbb{R}^2

A equação diferencial parcial no quadrado fechado em \mathbb{R}^2 com condições de contorno de Neumann para o problema de autovalores:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0\\ u = 0 e m \Lambda \end{cases}$$
(3.10)

resulta nos seguintes autovalores:

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad l, m = 1, 2, 3, \dots$$

3.2.4 Laplaciano em \mathbb{R}^3

A equação diferencial parcial no cubo fechado em \mathbb{R}^3 com condições de contorno de Neumann para o problema de autovalores:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0\\ u = 0 e m \Lambda \end{cases}$$
(3.11)

resulta nos seguintes autovalores:

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \quad l, m, n = 1, 2, 3, \dots$$

3.2.5 Laplaciano em S^2

A equação diferencial parcial na esfer
a S^2 com condições de contorno de Neumann para o problema de autovalores:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0\\ u = 0 \end{cases}$$
(3.12)

resulta nos seguintes autovalores:

$$\lambda_l = l(l+1) \ \forall l \in \mathbb{N}$$

A multiplicidade é:

$$m = 2l + 1$$

3.3 Modelo Matemático

No capítulo 2 apresentamos a Geometria Não Comutativa como uma generalização da Geometria Riemanniana. A principal conclusão desta teoria aplicável ao nosso problema é que:

Podemos substituir o variedade $(M, g_{\mu\nu})$ por uma tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$.

Uma possível abordagem para a gravitação quântica euclidiana que consiste em substituir os conceitos usuais de Relatividade Geral (variedade, métrica) pelo enfoque algébrico em termos das triplas espectrais foi proposta na referência [4].

As triplas espectrais comutativas englobam todos os espaços Hausdorff, portanto todos as variedades possíveis em todas as dimensões. Sendo assim é suficiente utilizá-las deixando os casos não comutativos para uma análise posterior.

Seguindo com a analogia entre o formalismo euclidiano e o formalismo algébrico, faz-se necessário encontrarmos o análogo para a ação de Hilbert-Einstein no contexto das triplas espectrais. Portanto, tomamos álgebras comutativas como os elementos constituintes das triplas espectrais e sugerimos uma ação em termos destes elementos.

O primeiro passo para extrair a dimensão média do ensemble de geometrias é definir uma função de partição em termos da ação espectral. Tomamos o conjunto \mathcal{X} de todas as triplas espectrais comutativas com uma ação S[x] definida no conjunto. Definimos a função de partição Z somando todas as funções $e^{-S[x]}$ em que x é uma tripla espectral comutativa, ou seja, somamos todas as geometrias possíveis, onde a soma deve ser definida como:

$$Z = \sum_{x \in \mathcal{X}} e^{-S[x]} \tag{3.13}$$

As álgebras em questão podem ter dimensão infinita, desta maneira precisamos de uma abordagem algébrica para aproximações nestes tipos de espaço. Generalizando o conceito de discretização, os orientadores e colaboradores em [20], substituíram a álgebra \mathcal{A} por um álgebra de dimensão finita A_n e, por meio de uma aproximação no limite do infinito obtêm-se a álgebra em questão.

Definição do Modelo. Seja X o ensemble $X \subset \mathcal{X}$ de geometrias contidas no conjunto das triplas espectrais comutativas. O ponto $x \in X$ é uma tripla espectral comutativa $x = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ onde a álgebra C^* comutativa \mathcal{A} têm espectro contável $\hat{\mathcal{A}}$. Dividimos X em subespaços X_n de triplas $(\mathcal{A}_n, \mathcal{H}_n, D)$ de modo que $\hat{\mathcal{A}}_n$ tenha um número fixo n de pontos.

Os elementos de \mathcal{A}_n são as seqüências $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), a_j \in \mathbb{C}$. O espaço de Hilbert é dado pelos vetores $v = (v_1, \ldots, v_n)$ com norma $||v||^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$ finita. Os elementos de \mathcal{A} são representados por $\hat{a} = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ agindo em \mathcal{H}_n . O operador D é uma matriz $n \times n$ hermitiana. Do teorema de Gelfand-Naimark segue que \mathcal{A}_n descreve um conjunto discreto de n pontos.

Calculamos observáveis neste ensemble através da expressão:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{x_i} \mathcal{O}(x_i) e^{-S[x_i]}}{Z}$$

3.4 Ação e Variáveis dinâmicas

O papel dos autovalores do operador de Dirac na geometria espectral foi discutido em [5]. A ação S depende do espectro de \mathcal{D} para cada tripla e no modelo estudado os autovalores são as variáveis dinâmicas interessantes. Inspirados na ação espectral sugerida por Connes-Chamseddine em [22], foi proposta uma ação espectral em termos do quadrado do traço do operador de Dirac em [4]:

Definição da Ação. Seja L uma certa escala de comprimento, tal que o operador \mathcal{D} definido por $\mathcal{D} = \frac{D}{L}$, é o análogo ao operador de Dirac. Λ é o

inverso do comprimento de Planck l_p . D é uma matriz hermitiana $n \times n$. A ação é definida por:

$$\mathcal{S}[x] = Tr\left[\left(\frac{\mathcal{D}}{\Lambda}\right)^2\right] = \beta Tr(D)^2 \tag{3.14}$$

onde:

$$\beta = \left(\frac{l_p}{L}\right)^2$$

Função de Partição. Definimos a função de partição:

$$Z_n = \sum_{n=0}^N z_n(\beta)$$

onde:

$$z_n(\beta) = \int [dD] e^{-\beta Tr(D^2)}$$
(3.15)

Ou seja, z_n é função de partição restrita a X_n , em outras palavras, a integral sobre todos os elementos de matriz independentes D_{ij} onde [dD] é o elemento de integração usual para matrizes hermitianas $n \times n$.

Já vimos no capítulo anterior que a função de partição acima define o ensemble gaussiano unitário de matrizes aleatórias, portanto conseguimos uma relação entre o modelo espectral na geometria comutativa e o ensemble EGU (Ensemble Gaussiano Unitário). De maneira que utilizaremos as técnicas já consagradas de análise de matrizes aleatórias para obtermos propriedades deste ensemble de geometrias.

Valor Esperado de um Operador. O valor esperado de um operador $\langle \mathcal{O} \rangle$ restrito a X_n é:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{n,\beta} = \frac{\int [dD] \ \mathcal{O} \ e^{-\beta Tr(D^2)}}{z_n(\beta)} \tag{3.16}$$

O valor esperado de um operador $\langle \mathcal{O} \rangle$ para o ensemble inteiro é:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\beta} = \sum_{n=1}^{N} P(n,\beta) \langle \mathcal{O} \rangle_{n\beta}$$
 (3.17)

onde

$$P(n,\beta) = \frac{z_n(\beta)}{\sum_n z_n(\beta)} \tag{3.18}$$

é a distribuição de probabilidades.

3.5 Número Médio de Pontos $\langle n \rangle$

Estamos flutuando as geometrias possíveis do universo, de maneira que cada elemento do ensemble X_n tem um número de pontos finito, ou seja, $\langle n \rangle_{n,\beta} = n$.

Número Médio de Pontos. O número médio de pontos no ensemble é um observável possível. Em [4] o valor de $\langle n \rangle (\beta)$ para o universo proposto é apresentada. A expressão é:

$$\langle n \rangle (\beta) = \frac{\sum_{n} n 2^{\frac{n}{2}} (\frac{\pi}{2\beta})^{\frac{n^{2}}{2}}}{\sum_{n} 2^{\frac{n}{2}} (\frac{\pi}{2\beta})^{\frac{n^{2}}{2}}}$$
(3.19)

Verifica-se que existe uma descontinuidade no número de pontos para $\beta_c = \frac{\pi}{2}$. Demonstrou-se que número médio de pontos do modelo em questão é finito para $\beta > \beta_c$ e diverge para $\beta < \beta_c$. Logo a região interessante para estudo é a região divergente, ou seja, onde $\langle n \rangle = \infty$. Este resultado sugere que a fase $\beta < \beta_c$ corresponde a uma variedade contínua.

3.6 Dimensão Média do Espaço $\langle \delta \rangle$

A partir de um operador de Dirac de dimensão infinita, \mathcal{D} , podemos utilizar a fórmula de Weyl para definir a dimensão do espaço $\hat{\mathcal{A}}$.

Dimensão Média do Espaço. Seja $\Lambda = \{\lambda_0(D), \lambda_1(D), \dots\}$ o conjunto formado pelos módulos dos autovalores de D organizados em ordem crescente levando-se em consideração a degenerescência (suponha que λ_0 tenha degenerescência 3, dessa forma $\lambda_0(D), \lambda_1(D), \lambda_2(D)$ são idênticos ao módulo de λ_0 e assim sucessivamente para todos os autovalores. Pela fórmula de Weyl [18] a dimensão δ é relacionada ao comportamento assintótico dos elementos de Λ para k grande, ou seja, $\lambda_k(D) \approx k^{\frac{1}{\delta}}$. Por definição $\delta = 0$ para triplas espectrais finitas. Dessa forma, o valor médio da dimensão fica:

$$\langle \delta \rangle (\beta) = \begin{cases} f(\beta) &, se \ \beta < \beta_c \\ 0 &, se \ \beta > \beta_c \end{cases}$$
(3.20)

Conforme discutido no capítulo 1, é possível escrever a função de partição e os valores médios do ensemble \mathbf{EGU} em termos dos autovalores do operador D [6]. Portanto:

Função de Partição.

$$z_n(\beta) = \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\prod_{k=1}^n k!} \int_{-\infty}^{\infty} [d^n \lambda] \Delta^2(\lambda_k) e^{-\beta \sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$
(3.21)

Valor Esperado de um Operador.

$$\langle \mathcal{O}(\lambda_i) \rangle_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} [d^n \lambda] \mathcal{O}(\lambda_i) \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}} \beta^{\frac{n^2}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n k!} \Delta^2(\lambda_k) e^{-\beta \sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$
(3.22)

O fator $[d^n \lambda] = \Pi d\lambda_j$ e o fator $\Delta \lambda_j$ é igual a $\Pi_{i < j}(\lambda_i - \lambda_j)$.

3.7 Cálculo da Dimensão

Este trabalho foi proposto com o intuito de calcular numericamente o valor médio da dimensão do espectro de \mathcal{A} . Se a expressão do operador \mathcal{O} em termos dos autovalores de matrizes hermitianas ou em termos dos elementos de matriz D_{ij} fosse conhecida, poderíamos encontrar a solução da integral [3.16] analítica ou numericamente e assim obter a dimensão média do espaço em questão. O fato é que não é possível escrever a expressão deste operador.

Para contornar a ausência de uma fórmula para o operador dimensão em termos dos elementos de matriz ou dos autovalores do operador de Dirac, encontramos duas maneiras numéricas de calcular o observável dimensão do modelo. A primeira maneira é baseada na definição da dimensão de Connes:

$$\zeta(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{-z} = Tr |D|^{-z}$$
(3.23)

A segunda maneira é baseada na lei de Weyl para o comportamento assintótico dos autovalores com a dimensão:

$$\lambda_k \sim k^{\frac{1}{\delta}}$$

Lembremos que estamos realizando a média das medidas num ensemble de triplas espectrais, ou seja, estamos flutuando as geometrias possíveis do modelo. Isto significa que devemos gerar vários operadores de Dirac com distribuição de probabilidade dada por $e^{-Tr(D^2)}$, calcular a dimensão para cada um destes operadores e só então calcular a dimensão média do modelo.

3.8 Algoritmo

A proposta consiste em gerar várias matrizes hermitianas finitas, ou seja, várias "geometrias" possíveis, calcularmos os observáveis do sistema, que são os autovalores e então, através de redefinições da dimensão em termos dos autovalores, calcularmos a dimensão do espaço.

Seja uma matriz hermitiana D de tamanho $N \times N$, que representa um elemento do ensemble de operadores de Dirac, e $\Lambda = \{\lambda_0(D), \lambda_1(D), \dots, \lambda_N(D)\}$ o conjunto do módulo dos seus autovalores ordenados de forma crescente: $\lambda_1(D) \leq \lambda_2(D) \leq \cdots \leq \lambda_N(D).$

O teorema de Weyl estabelece que a dimensão do espaço está relacionada ao comportamento assintótico dos autovalores de operadores de Dirac, definidos neste espaço, pela expressão:

$$\lambda_k \sim k^{\frac{1}{\delta}}$$

No artigo [22] provou-se que existe uma relação entre a dimensão do espaço e o traço espectral. Esta relação é consistente com a fórmula de Weyl e segue logo abaixo:

$$\zeta(\lambda, \alpha, n) = \frac{1}{\log(n)} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{-\alpha}$$
(3.24)

A dimensão é encontrada observando o comportamento da função ζ para $n \to \infty$.

Verifica-se que dado um conjunto Λ fixo, existem α s pequenos que resultam no valor infinito da função ξ . Para o mesmo conjunto de autovalores Λ , existem outros valores de α para os quais o valor da função ξ é 0. E finalmente existem também valores de α para os quais a função ξ tem valor finito e não nulo.

O passo seguinte é gerar um ensemble de matrizes aleatórias hermitianas para cada β e para cada tamanho de matriz N.

Matrizes aleatórias hermitianas definem o EGU que tem como propriedade a seguinte distribuição de probabilidades:

$$P(H) = 2^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{exp\frac{TrH^2}{4\beta^2}}{(4\pi\beta^2)^{\frac{N^2}{2}}}$$
(3.25)

Partindo deste ensemble de matrizes existem duas maneiras distintas e complementares de extrair a dimensão do espaço:

Método: Função Zeta de Riemann

A dimensão é calculada a partir do conjunto ordenado de autovalores de uma matriz hermitiana. A definição (3.24) não se mostrou interessante para o cálculo numérico da dimensão do espaço devido a dificuldade de obtenção de dados que convergissem para algum valor finito dentro do tempo e da capacidade computacional disponível. De maneira que modificamos a definição da dimensão para um função que tem o mesmo comportamento assintótico de (3.24), porém os resultados numéricos são melhores. A nova definição é a seguinte:

$$\xi(\lambda, \alpha, n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{-\alpha}$$

Para explicarmos a idéia do algoritmo, suponha que tomemos a seguinte seqüência de autovalores:

$$\Lambda' = \{1, 2^{\frac{1}{\delta}}, 3^{\frac{1}{\delta}}, \dots, k^{\frac{1}{\delta}}, \dots, N^{\frac{1}{\delta}}\}$$
(3.26)

Observe que estes autovalores têm um característica especial: eles têm o comportamento $\lambda_k = k^{\frac{1}{\delta}}$, ou seja, para todos os autovalores em questão a sequência comporta-se segundo a estimativa de Weyl. De modo que a função ξ para o conjunto Λ' fica:

$$\xi(\lambda,\alpha,n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^{\frac{\alpha}{\delta}}}$$

Analisando as propriedades deste conjunto de autovalores em termos da função ξ , observamos que:

1. Para valores de α maiores do que os valores de δ

$$i^{\frac{\alpha}{\delta}} \ge i$$

portanto

$$\frac{1}{i} \geq \frac{1}{i^{\frac{\alpha}{\delta}}}$$

Substituindo números naturais não nulos, i, na expressão de ξ como função de N, observa-se que ξ é decrescente como função de N.

2. De maneira inversa, para valores de α menores do que os valores de δ ,

$$i^{\frac{\alpha}{\delta}} \leq i$$

portanto

$$\frac{1}{i} \le \frac{1}{i^{\frac{\alpha}{\delta}}}.$$

Substituindo valores naturais não nulos, i, na expressão de ξ como função de N, observa-se que ξ é crescente como função de N.

3. Quando $\alpha = \delta$ a função ξ é identicamente igual a 1.

Por conseguinte, verificamos que existe um certo α denominado α_c para o qual a função ξ muda de comportamento, ou seja, $\xi \nearrow$ se $\alpha > \delta$ e $\xi \searrow$ se $\alpha < \delta$. Deste modo a idéia é calcular a derivada de ξ em termos de N e encontrar, para todos os Ns, os valores de α tais que $\frac{\partial \xi}{\partial N} = 0$.

Este método, que chamamos "Zeta de Riemann" pois é baseado no comportamento da seqüência de autovalores Λ' que a partir de agora denominaremos "Seqüência Ideal", já que os elementos de Λ' seguem o comportamento da lei de Weyl para todos os autovalores.

Passo 1:

Calcular a derivada $\frac{\partial \xi(\lambda,n,\alpha)}{\partial n} = \frac{\xi(\lambda,n+\Delta n,\alpha)-\xi(\lambda,n,\alpha)}{\Delta n}$ para diversos valores de α e Ns. Observe o comportamento da derivada para a seqüência de autovalores Λ' no gráfico da figura abaixo:



Figura 3.1: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$

Existem, claramente, dois comportamentos distintos da derivada $\frac{\partial \xi(\lambda, \alpha, N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$. Para certos valores de α a derivada é positiva, portanto a função ξ é crescente, para outros valores de α a derivada $\frac{\partial \xi(\lambda, \alpha, N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$ é negativa, portanto a função ξ é decrescente.

Passo 2:

Devemos então tomar cortes verticais no gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,N)}{\partial N}$. Estes cortes identificam uma seqüência de α s que fazem o comportamento da função ξ em termos de N mudar. Criamos a função $\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{n_0}$ para encontrar, para cada n_0 , qual valor de α anula a derivada.

Passo 3:

Calculamos o valor α_c através da interpolação linear, para todos os n_0 s da função $\frac{\partial \xi(\lambda, \alpha, N)}{\partial N}\Big|_{n_0}$ e construimos o gráfico da função $\alpha_c(n_0)$, calculando a dimensão para cada valor n_0 . No caso das "sequências perfeita", $\Lambda' = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ verificamos que $\alpha_c(n_0)$ é identicamente 1:

Geramos os autovalores dos laplacianos para sistemas de dimensão conhecida: esfera \mathbb{S}^2 , plano \mathbb{R}^2 e no espaço \mathbb{R}^3 . A dimensão para cada um



Figura 3.2: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,N)}{\partial N}\big|_{n_0}$

destes espaços é $d_{\mathbb{S}^2} = 2$, $d_{\mathbb{R}^2} = 2$ e $d_{\mathbb{R}^3} = 3$ respectivamente. Esta abordagem permite, através das simulações com matrizes aleatórias, testar a acurácia do algoritmo antes de efetuarmos as simulações do modelo sugerido em [4].

Para o modelo de gravitação proposto, simulamos numericamente um ensemble de matrizes aleatórias de tamanho E para cada tamanho de matriz N e β estudado.

Para cada matriz $H(N,\beta)_i$, ou seja, cada elemento do ensemble, obtemos uma dimensão d_i . A dimensão para cada tamanho de matriz $N \in \beta$ é a média aritmética destas $\{d_i\}$ dimensões.

$$\langle d \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{E} d_i}{E}$$

Ou seja, $d_{i,N}$ é a dimensão associada a uma matriz $H_i(N,\beta) \in \mathcal{E}(N,\beta)$.

De posse destes valores para vários tamanhos de matriz e β , é possível extrapolar a dimensão média do modelo em termos de N e a partir do resultado desta extrapolação verificarmos se existe uma lei de convergência para a dimensão.



Figura 3.3: Gráfico $\alpha_c(n_0)$: Dimensão do espaço

Segue a descrição do algoritmo de cálculo da dimensão, para matrizes aleatórias, em termos de pseudo-código:

ALGORITMO

Dados os ensembles de matrizes aleatórias $H_{N \times N;\beta}$ pertencentes ao conjunto $\mathcal{E}(N,\beta) = \{H^1, H^2, \cdots, H^E\}$. Os tamanhos das matrizes pertencem ao conjunto $\mathcal{N} = \{n_0, \cdots, \bar{N}\}$ e o conjunto de parâmetros $\beta \in \bar{\beta} = \{\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k\}$. O conjunto de expoentes, em outras palavras, os candidatos a $\alpha_c \in \bar{\alpha} = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_l\}$.

Encontramos um conjunto de autovalores $\Lambda(N,\beta)_j = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n_j}\}$ para cada matriz $H^j_{n_j \times n_j}$ e para cada β em $\overline{\beta}$, tiramos o módulo um a um e ordenamos. Ficamos assim com a seguinte sequência de autovalores:

$$\Lambda' = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_{n_i}\}$$
 onde $\lambda_{n_i} = |\lambda_{n_i}|$

For $n = n_0, \dots, \overline{N}$ do. Fixa um tamanho para a matriz

For $\beta = \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k$ do. Fixa um parâmetro β

For $k = 1, 2, \dots, n$ do. Fixa um elemento do ensemble

For $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l$ do. Fixa um candidato a dimensão

Calcular $\xi(\lambda, \alpha, k) = M_{n \times \alpha}$

End For

End For

For $k = 1, 2, \cdots, n$

For $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l$

Calcular
$$\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,k)}{\partial k} = \frac{\xi(\lambda,\alpha,k+\Delta k) - \xi(\lambda,\alpha,k)}{\Delta k}$$
 para α fixo.

End For

End For

For k = 1, 2, ..., n do

Calcular $\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,k)}{\partial k}|_{n_0}$

End For.

Interpolar $\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,k)}{\partial k}|_{k_0}$ de modo a encontrar $\bar{\alpha}$ tal que $\frac{\partial \xi(\lambda,\alpha,k)}{\partial k}|_{k_0} = 0.$

End do End do

Tendo as estimativas $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{\bar{N}}\}$ para α_c para vários tamanhos de matriz, calculamos a dimensão através da expressão $d_i(n,\beta) := \frac{\sum_{i=1}^J d_i}{J}$ onde J é um parâmetro arbitrário.

O conjunto $dim = \{d^0_{M_{n \times n}(\beta)}, \cdots, d^E_{M_{n \times n}(\beta)}\}$, onde E é o tamanho do ensemble de matrizes aleatórias, é o conjunto das dimensões calculadas para cada matriz aleatória do ensemble.

A dimensão é definida para cada tamanho de matriz como $\langle d \rangle := \frac{\sum_{i=1}^{E} d_{M_n \times n}^E(\beta)}{E}$.

Fim do cálculo da dimensão

Método: Logaritmo

O método de cálculo que chamamos Logaritmo se utiliza diretamente da definição da dimensão proposta por Weyl:

$$\lambda_k \sim k^{\frac{1}{\delta}}$$

- 1. Primeiramente calculamos os autovalores do Laplaciano do espaço em questão: Laplaciano em \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e para os ensembles de matrizes aleatórias.
- 2. Depois calculamos os módulos dos autovalores λ_k e ordenamos o conjunto resultante em ordem crescente ficando com $\Lambda' = \{\lambda_0, \dots, \lambda_N\}$, e agora estamos prontos para aplicar a lei de Weyl.
- 3. Criamos um gráfico $\log(k) \times \log(\lambda_k)$.
- 4. Calculamos o coeficiente angular da reta $log(\lambda_k) = a log(k) + b$
- 5. O coeficiente angular a é igual ao inverso da dimensão do espaço: $a = \frac{1}{\delta}$



Figura 3.4: Gráfico na escala $\{\log(k); \log(\lambda_k)\}$ utilizado para calcular a dimensão para a sequência perfeita.

Por consistência, descreveremos o algoritmo em termos de pseudo código computacional:

ALGORITMO

Dados os ensembles de matrizes aleatórias $M_{N \times N;\beta}$ $\mathcal{E}(N,\beta) = \{M^1, M^2, \cdots, M^E\}$. Os tamanhos das matrizes pertencem ao conjunto $\mathcal{N} = \{n_0, \cdots, \bar{N}\}$ e o conjunto de parâmetros de $\beta \in \bar{\beta} = \{\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k\}$.

Encontramos um conjunto de autovalores $\Lambda(N,\beta)_j = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n_j}\}$ para cada matriz $M_{n_j \times n_j}^j$ para cada $\beta \in \bar{\beta}$, tiramos o módulo um a um e ordenamos. Ficamos assim com a seguinte sequência de autovalores:

$$\Lambda' = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_{n_i}\} \text{ onde } \lambda_{n_i} = |\lambda_{n_i}|.$$

For $n = n_0, \cdots, \bar{N}$ do.

For $\beta = \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k$ do.

For $k = 1, 2, \cdots, n$ do.

Calcular o gráfico log x log Encontrar o coeficiente angular da reta $log(\lambda_k) = a log(k) + b$ Dimensão é $\frac{1}{a}$ End For End For End For Fim do cálculo da dimensão

Parte III Resultados

Capítulo 4

Resultados

4.1 Introdução

As simulações numéricas realizadas investigaram o comportamento do modelo proposto com relação aos parâmetros:

1. N: tamanho da matriz

2. β : razão entre o comprimento de Planck e a escala dos operadores matriciais

Em outras palavras, desejamos descobrir em que medida a dimensão do modelo depende do parâmetro β , além de entender o comportamento da dimensão com relação ao tamanho da matriz N para podermos extrapolar o comportamento com $N \to \infty$ e assim encontrarmos a lei de convergência da aproximação do modelo.

Primeiramente simulamos os autovalores do laplaciano nos espaços: plano \mathbb{R}^2 , espaço \mathbb{R}^3 e esfera S^2 . Depois calculamos as dimensões pelos dois métodos propostos de modo a testar os algoritmos e em seguida, geramos um ensemble de 1000 matrizes aleatórias para cada conjunto de tamanhos de matriz:

 $L = \{50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400\}$

e cada conjunto de "temperaturas":

$$\begin{split} \beta &= \{0.07853982, 0.23561945, 0.39269908, 0.54977871, 0.70685835, \\ &\quad 0.86393798, 1.02101761, 1.17809725, 1.33517688, 1.49225651\} \end{split}$$

Que significam: $\beta = \{\frac{\pi}{4} \frac{2j+1}{10}\}$ onde $j = 0, 1, 2, \dots, 9$. Os gráficos dos resultados dos cálculos da dimensão, dos histogramas da dimensão, do comportamento com β e da lei de convergência serão apresentados a partir de agora.

4.2 Gráficos dos Resultados das Dimensões

4.2.1 Método Zeta

Apresentamos os gráficos das derivadas $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}, \frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{n_0}$ e da dimensão para o Laplaciano no plano \mathbb{R}^2 .

Plano \mathbb{R}^2 - Derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$



Figura 4.1: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$. Observemos o comportamento crescente da derivada na região de $\alpha = 1.5625$ e decrescente para $\alpha > 1.9375$, sugerindo que o α_c está neste intervalo.

Plano \mathbb{R}^2 - Derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N} \big|_{n_0}$



Figura 4.2: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{n_0}$. Fizemos os cortes verticais no gráfico da figura (4.1) para cada n_0 . Vimos que existem valores de α para os quais os gráficos cruzam o zero, ou seja, valores de α chamados α_c .



Plano \mathbb{R}^2 - Dimensões

Figura 4.3: Gráfico da dimensão calculada. Para *n*s menores do que 50, o gráfico mostra um efeito transiente devido a poucos pontos no cálculo da dimensão. Observa-se a inluência da desgenerescência no cálculo da dimensão e que a convergência para a dimensão esperada, no caso 2, ocorre por valores menores do que 2.

Plano \mathbb{R}^3 - Derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$



Figura 4.4: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$. Observemos o comportamento crescente da derivada na região de $\alpha = 2.25$ e decrescente para $\alpha = 3.375$, sugerindo que o α_c está neste intervalo.



Plano \mathbb{R}^3 - Derivada $\frac{\partial \xi(\mu, \alpha, N)}{\partial N} \Big|_{n_0}$

Figura 4.5: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{n_0}$. Fizemos os cortes verticais no gráfico da figura (4.4) para cada n_0 . Vimos que existem valores de α para os quais os gráficos cruzam o zero, ou seja, valores de α chamados α_c .


Plano \mathbb{R}^3 - **Dimensões**

Figura 4.6: Gráfico da dimensão calculada. Para *n*s menores do que 50, o gráfico mostra um efeito transiente devido a poucos pontos no cálculo da dimensão. Observa-se a inluência da desgenerescência no cálculo da dimensão e que a convergência para a dimensão esperada, no caso 3, ocorre por valores menores do que 3.



Figura 4.7: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$. Observemos o comportamento crescente da derivada na região de $\alpha = 1.875$ e decrescente para $\alpha = 2.1875$, sugerindo que o α_c está neste intervalo.

Esfera S^2 - Derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\big|_{n_0}$



Figura 4.8: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{n_0}$. Fizemos os cortes verticais no gráfico da figura (4.7) para cada n_0 . Vimos que existem valores de α para os quais os gráficos cruzam o zero, ou seja, valores de α chamados α_c .



Esfera S^2 - Dimensões

Figura 4.9: Gráfico da dimensão calculada. Existem duas regiões interessantes para o comportamento da dimensão: Para *n*s menores do que 50, o gráfico mostra um efeito transiente devido a poucos pontos no cálculo da dimensão. Neste caso observa-se a influência da desgenerescência no cálculo da dimensão e a convergência para a dimensão esperada ocorre no sentido inverso dos outros modelos, as dimensões calculadas convergem para 2, por valores maiores do que 2.

Matrizes Aleatórias - Derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\big|_{\alpha_0}$



Figura 4.10: Gráfico da derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\Big|_{\alpha_0}$. Observemos o comportamento crescente da derivada na região de α = e decrescente para α =, sugerindo que o α_c está neste intervalo.



Matrizes Aleatórias - Derivada $\frac{\partial \xi(\mu,\alpha,N)}{\partial N}\big|_{n_0}$

Figura 4.11: Fizemos os cortes verticais no gráfico da figura (4.10) para cada n_0 . Vimos que existem valores de α para os quais os gráficos cruzam o zero, ou seja, valores de α chamados α_c .



Matrizes Aleatórias - Dimensões

Figura 4.12: Gráfico da dimensão calculada. Existem 3 regiões interessantes para o comportamento da dimensão: A primeira, no primeiro terço do gráfico é um transiente devido a poucos pontos no cálculo da dimensão. A segunda no segundo terço é a região de interesse em que o comportamento é mais regular e crescente com N. Na terceira região verificamos o efeito de borda das matrizes do modelo estudado.

4.2.2 Método Logaritmo:

Estamos contrapondo os dois métodos de cálculo desenvolvidos, isto é, para os mesmos conjuntos de autovalores, desejamos verificar as diferenças nos resultados quando calculamos a dimensão pelo método das derivadas da função zeta de Riemann e pelo método logaritmo.

Laplaciano no plano \mathbb{R}^2



Figura 4.13: Gráfico $\{\log(k); \log(\lambda_k)\}$ utilizado para calcular a dimensão. Observe a robustez em relação à degenerescência para a regressão linear do gráfico log x log. A dimensão calculada é 1.83, próxima à dimensão do plano \mathbb{R}^2 . Observemos também que o resultado da regressão linear está no intervalo [1.82, 1.84] com grau de confiança de 95%

Laplaciano no espaço \mathbb{R}^3



Figura 4.14: Gráfico $\{\log(k); \log(\lambda_k)\}$ utilizado para calcular a dimensão. Observe a robustez em relação à degenerescência para a regressão linear do gráfico log x log. A dimensão calculada é 2.65, próxima à dimensão do plano \mathbb{R}^3 . Observemos também que o resultado da regressão linear indica que a dimensão está no intervalo [2.64, 2.66] com grau de confiança de 95%.



Laplaciano na Esfera S^2

Figura 4.15: Gráfico $\{\log(k); \log(\lambda_k)\}$ utilizado para calcular a dimensão. Observe a robustez em relação à degenerescência para a regressão linear do gráfico log x log. A dimensão calculada é 2.02, próxima à dimensão de S^2 . Observemos também que o resultado da regressão linear indica que a dimensão está no intervalo [2.01, 2.03] com grau de confiança de 95%.

Matrizes Aleatórias:



Figura 4.16: Gráfico $\{\log(k); \log(\lambda_k)\}$ utilizado para calcular a dimensão. Observe que nos casos em que estamos gerando matrizes aleatórias a robustez em relação à degenerescência para a regressão linear do gráfico log × log não aparece já que a degenerescência nestes casos é bem menor. A dimensão calculada é 0.955. Observemos também que o resultado da regressão linear indica que a dimensão está no intervalo [0.951, 0.959] com grau de confiança de 95%.

4.2.3 Histogramas:

Método: Zeta de Riemann



Figura 4.17: Histogramas de um ensemble de 1000 elementos para matrizes de tamanho 400 × 400 para $\beta = \frac{9\pi}{10}$. O fato interessante é que o histograma para dimensão não descreve o comportamento gaussiano para o método das funções Zeta de Riemann. O histograma das médias das dimensões para sub-médias de 5 elementos está mostrado abaixo e apresenta uma leve assimetria.

Matrizes 400 x 400 - β = 9π/10 _____p(d) 8 6) – método logaritmo < d > = 0.953 σ = 0.0056 simetria = -0.125 (p)d 3 2 11 0 0.95 0.955 0.975 dimensão - d Matrizes 400 x 400 - $\beta = 9 \pi/10$ 20 _____p (< d >) 180 160 14 p (< d >) – método logaritmo 120 100 80 60 40 20 0.944 0.946 0.958 0.96 0.948 0.95 0.952 0.954 dimensão - < d > 0.956 0.962

Método: Logaritmo

Figura 4.18: Histogramas de um ensemble de 1000 elementos para matrizes de tamanho 400 × 400 para $\beta = \frac{9\pi}{10}$. O histograma da média das dimensões, utilizando o método logaritmo, é mais próximo de uma gaussiana do que o histograma para o mesmo conjunto de autovalores para o método das funções Zeta de Riemann. O histograma das dimensões para sub-médias de 5 elementos está impresso logo abaixo e também possui uma leve assimetria,porém menor do que o seu equivalente para o método das zetas.

4.2.4 Lei de Convergência:

Dimensão: Zeta de Riemann



Figura 4.19: Gráfico do ajuste da lei de convergência para o método utilizando as funções zeta de Riemann. Observe que a dimensão cresce com uma constante b mais uma constante a sobre o logaritmo do tamanho da matriz, ou seja, a lei de escala é $\frac{a}{\log N} + b$, onde os parâmetros a e b são respectivamente: a = -0.726, b = 1.03. Os intervalos de confiança são: $\delta a = [-0.827, -0.625]$ e $\delta b = [1.01, 1.05]$.

Desvio padrão: Zeta de Riemann



Figura 4.20: Gráfico do ajuste da lei de convergência do desvio padrão para o método utilizando as funções zeta de Riemann. Observe que o desvio padrão, em função de N, diminui com o inverso de uma raiz,
ou seja, a lei de escala $\frac{1}{N^b} + a$ aproxima bem o comportamento assintótico do desvio padrão. Os parâmetros
a $e\ b$ são respectivamente: a=6e-2, b=0.759. Os intervalos de confiança são:
 $\delta a=[5e-2,7e-2]$ e $\delta b=[0.674,0.844].$



Dimensão: Logaritmo

Figura 4.21: Gráfico do ajuste da lei de convergência para o método utilizando a lei de Weyl. Observe que a dimensão cresce com uma constante b mais uma constante a sobre o logaritmo do tamanho da matriz, ou seja, e a lei de escala é $\frac{a}{\log N} + b$, onde os parâmetros $a \in b$ são respectivamente: a = -0.565, b = 1.048. Os intervalos de confiança são: $\delta a = [-0.584, 0.546] \in \delta b = [1.044, 1.051]$.

Desvio Padrão: Logaritmo



Figura 4.22: Gráfico do ajuste da lei de convergência do desvio padrão para o método utilizando as funções zeta de Riemann. Observe que o desvio padrão, em função de N, diminui com o inverso de uma raiz,
ou seja, a lei de escala $\frac{1}{N^b} + a$ aproxima bem o comportamento assintótico do desvio padrão. Os parâmetros a
e b são respectivamente: a = 4e - 4, b = 0.881. Os intervalos de confiança são:
 $\delta a = [-1e - 4, 9e - 4]$ e $\delta b = [0.8737, 0.889]$.

4.2.5 Dependência com β

Método: Zeta



Figura 4.23: Gráfico do estudo do comportamento da dimensão em termos de β para o método utilizando as funções zeta de Riemann. Adicionamos vários valores de N de modo que pudemos observar também o crescimento da dimensão em direção ao valor inteiro 1. Observamos que a dimensão varia muito pouco com o parâmetro β .

Método: Logaritmo



Figura 4.24: Gráfico do estudo do comportamento da dimensão em termos de β para o método do logaritmo. Adicionamos vários valores de N de modo que pudemos observar também o crescimento da dimensão em direção ao valor inteiro 1. Observamos que a dimensão varia muito pouco com o parâmetro β .

Parte IV Conclusões

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Resumo

Este trabalho de mestrado teve o intuito de calcular numericamente a dimensão do modelo de gravitação quântica proposto em [4]. Definimos um modelo estocástico para a gravitação onde a geometria é descrita algebricamente pela chamada tripla espectral. Nesta abordagem é possível, em princípio, tomarmos todas as triplas espectrais possíveis, portanto todas as variedades riemanianas e conseqüentemente todas as geometrias possíveis. Os observáveis tornam-se variáveis estocásticas, notadamente em nosso modelo o número de pontos e a dimensão.

A idéia central da Geometria Não Comutativa é que podemos descrever uma variedade $(M, g_{\mu,\nu})$ de maneira algébrica pela tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Vimos que dado M, um espaço topológico Hausdorff e $g_{\mu,\nu}$ a métrica definida em M, a tripla espectral é definida por \mathcal{A} , uma álgebra C^* comutativa, \mathcal{H} , um espaço de Hilbert e \mathcal{D} , um operador de Dirac definido em \mathcal{H} .

Construímos a teoria definindo a ação, as variáveis dinâmicas e os observáveis correspondentes. A ação é definida em termos do operador de Dirac:

$$S = tr(\frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda}) = \beta tr(D^2)$$

Onde $\Lambda = \frac{1}{l_p}$ é o inverso do comprimento de Planck e $\beta = (\frac{l_p}{L})^2$. A propriedade fundamental das variáveis dinâmicas de um candidato a uma teoria de gravitação quântica é a de serem invariantes por difeomorfismos, e segundo [5] os autovalores do operador de Dirac têm esta propriedade. Portanto utilizamos os autovalores do operador de Dirac como as variáveis dinâmicas, de maneira que é possível definir a função de partição desta teoria de gravitação seguindo o formalismo de Feynman:

$$Z = \sum_{x \in \mathcal{X}} e^{-S[x]},$$

onde conjunto \mathcal{X} é o conjunto de todas as triplas espectrais $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Definimos os observáveis da teoria de maneira formal como:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{O}[x] e^{-S[x]}}{Z}.$$

Simplificamos as condições acima de maneira que pudessemos definir e calcular a dimensão em um caso finito e, posteriormente extrapolarmos a teoria para o caso infinito. Para isso substituímos \mathcal{X} por um conjunto de subespaços $X_N = (A_N, H_N, D_N)$ de modo que a álgebra \hat{A}_N tivesse um espectro finito, portanto o espaço de Hilbert poderia ser definido como o espaço L^2 usual de vetores de dimensão N e o operador de Dirac fica definido com uma matriz auto-adjunta de dimensão $N \times N$.

Como D tem dimensão finita, o traço está bem definido, logo a ação e a função de partição estão bem definidas. Portanto, a função de partição desta teoria fica definida como:

$$Z_N(\beta) = \sum_{i=1}^N z_i(\beta) = \sum_{i=1}^N \int_{D \in X_N} [dD] e^{-\beta tr(D^2)}.$$

 $Z_N(\beta)$ definido dessa maneira pode ser manipulado para ser expresso em termos da integral dos autovalores dos operadores de Dirac, explicitando desta maneira, a relação de dependência deste formalismo com a Teoria das Matrizes Aleatórias, mais especificamente com o ensemble Gaussiano Unitário.

O cálculo numérico consistiu em gerar matrizes aleatórias do ensemble Gaussiano Unitário. Este procedimento deve ser repetido várias vezes para cada variável N. Em seguida calculamos o observável dimensão deste ensemble de geometrias para cada $N \in \beta$ e por fim estudamos a dependência da dimensão com β e extrapolamos os valores de N para o infinito.

Vimos em [4] que um observável possível para este formalismo é o número de pontos da geometria:

$$\langle n \rangle(\beta) = \frac{\sum n 2^{\frac{n}{2}} (\frac{\pi}{2\beta})^{\frac{n^2}{2}}}{\sum 2^{\frac{n}{2}} (\frac{\pi}{2\beta})^{\frac{n^2}{2}}}.$$

Foi mostrado em [4] que o número médio de pontos do ensemble de geometrias possui duas regiões distintas dependentes de β . Verifica-se que $\langle n \rangle (\beta) \to \infty$ para

 $\beta < \frac{\pi}{2} \in \langle n \rangle(\beta) < \infty$ para $\beta > \frac{\pi}{2}$.

Na mesma referência definiu-se o observável dimensão associado a uma matriz D. A definição de dimensão é baseada na lei de Weyl, que para o conjunto dos módulos dos autovalores do operador de Dirac ordenados de forma crescente, $\Lambda = \{\lambda_0(D), \lambda_1(D), \ldots\}$, permite calcular a dimensão δ a partir do comportamento assintótico dos autovalores:

$$\lambda_k(D) \sim k^{\frac{1}{\delta}}$$

Mostrou-se que a dimensão para $\beta > \frac{\pi}{2}$ era nula e uma função de β para $\beta < \frac{\pi}{2}$. Esta definição é consistente com a definição da dimensão espectral proposta por Connes em [21] que utiliza as propriedades da função traço espectral dos operadores de Dirac:

$$\xi(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-z}.$$
(5.1)

Os termos $\lambda_k = \lambda_k(D)$, onde *D* depende de *N* e β , são os autovalores do operadore de Dirac. A dimensão de Connes é definida como o conjunto de pontos *z* que são pólos da função ξ . Como foi dito nesta dissertação, a dimensão de Connes é equivalente a dimensão extraída da lei de Weyl.

Conseqüentemente, existem pelo menos duas maneiras de calcularmos a dimensão para este ensemble de geometrias. Podemos utilizar a lei de Weyl ou a definição de Connes. Utilizando a lei de Weyl, criamos o gráfico $log(k) \times log(\lambda_k)$ e estudamos o comportamento desta função. O fato surpreendente é que a forma funcional da relação entre $log(k) \in log(\lambda_k)$ é aproximadamente um reta da forma f(x) = ax + b. Posto isto, calcular a dimensão pela lei de Weyl é equivalente a calcular uma regressão linear, já que o coeficiente angular da reta é o inverso da dimensão do modelo.

Utilizamos uma definição análoga à definição da dimensão de Connes de maneira a preservar o comportamento assintótico da função zeta (5.1):

$$\xi_D(N,\beta,\alpha) = \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \lambda_k^{-z}$$

que é aproximadamente igual a:

$$\xi_D(N,\beta,\alpha) \sim \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{i}} \sum_{k=1}^N \lambda_k^{-z}$$
 (5.2)

Vimos que para encontrar a dimensão foi preciso estudar o comportamento da função $\xi_D(N,\beta,\alpha)$, dada por (5.2), em termos de N e α . Vimos que para

a seqüência ideal, $\lambda_{(D)} = n^{\frac{1}{\delta}}$, o traço espectral tem comportamentos distintos para $\alpha > \delta$ e para $\alpha < \delta$. E a dimensão da matriz D é dada para o valor crítico $\alpha = \delta$. O algoritmo mais natural foi o de estudar o comportamento das derivadas da função espectral.

Para um dado tamanho de matriz N, calculamos a derivada de (5.2) como:

$$\frac{\partial \xi(\bar{N},\beta,\alpha)}{\partial \bar{N}} = \frac{\xi(\bar{N}+h,\beta,\alpha) - \xi(\bar{N},\beta,\alpha)}{h}$$
(5.3)

Escolhemos h = 1, para cada \overline{N} dentro do intervalo [1, N]. Ou seja, para cada matriz D, de tamanho $N \times N$ que retiramos do ensemble gaussiano unitário, calculamos as derivadas 5.3. Este passo ocorre fixando um α em uma discretização do intervalo [0, d] que é o intervalo que onde estamos procurando a dimensão.

Observando o comportamento da derivada (5.3) para vários α s e verificamos que existem duas fases distintas. Para valores de α maiores do que um valor α_c , a derivada (5.3) é negativa, portanto ξ é decrescente. No caso de valores de α menores do que um valor α_c , a derivada (5.3) é positiva, portanto ξ é crescente.

Tomando a derivada:

$$\frac{\partial \xi(\bar{N},\beta,\alpha)}{\partial \bar{\alpha}} = \frac{\xi(N,\beta,\bar{\alpha}+h) - \xi(N,\beta,\bar{\alpha})}{h}$$
(5.4)

onde escolhemos h condizente com a discretizão escolhida. Para cada $\bar{\alpha}$ dentro do intervalo [0, d]. Ou seja, para cada matriz D, de tamanho $N \times N$ que retiramos do ensemble gaussiano unitário, calculamos as derivadas (5.3), e depois calculamos a derivada de ξ em função do parâmetro α . Este passo ocorre fixando um N em uma discretização do intervalo [1, N].

A derivada (5.4) cruza o eixo das abscissas representando o comportamente descrito para a função ξ . O próximo passo é encontrar o valor de α_c para o qual a derivada 5.4 se anula.

O resultado deste processo é que encontramos vários α_c , um para cada \bar{N} , ou seja, para cada matriz existem vários α_c possíveis. Observou-se visualmente que o gráfico $\{\alpha_c, \bar{N}\}$ tem um comportamento característico. Para \bar{N} próximos de 1, a simulação mostrou um comportamento transiente. Para valores de \bar{N} próximos de N observou-se o efeito de finitude da matriz. Estas duas regiões foram ignoradas e a dimensão estimada para uma matriz D de tamanho $N \times N$ retirada do ensemble gaussiano, fixado o parâmetro β , foi calculada como:

$$\delta(D(N,\beta)) = \sum_{i=J}^{J+K+1} \frac{\alpha_{c_i}}{K}$$

Escolhemos $J \in K$, arbitrariamente como $J = N/2 - 10 \in K = 20$, para evitar os efeitos transiente e de finitude da matriz. Para um mesmo parâmetro β , construímos uma amostra arbitrária de 1000 matrizes de tamanho N. Assim para cada tamanho N calculamos a dimensão média estimada para a geometria em questão:

$$d_N(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} \delta(N,\beta)_i}{1000}$$

Repetimos este processo para vários tamanhos de matriz D, ainda fixando o mesmo parâmetro β . E desta maneira podemos estudar o comportamento assintótico da dimensão com o parâmetro N.

Por fim, variando β no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, repetimos todo o processo acima para vários ensemble gaussianos unitários distintos, afim de estudar qual o efeito do parâmetro β no valor estimado da dimensão da geoetria estudada.

5.2 Métodos

5.2.1 Método Zeta de Riemann

O cálculo da dimensão para os espaços de dimensão conhecida: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{S}^1$ mostraram que os algoritmos utilizados convergem lentamente para a dimensão esperada dos espaços estudados.

Uma das dificuldades em aplicar o algoritmo nestes casos é que este método é sensível à degenerescência dos autovalores dos operadores nos espaços em questão. Verificamos que a aproximação da dimensão para $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ se dava por valores menores do que 2 e 3. Entretanto para o espaço \mathbb{S}^1 a aproximação ocorreu por valores superiores a 2.

Para o ensemble gaussiano unitário, este método resulta em uma aproximação por baixo da dimensão média do ensemble. Observamos este fato na inspeção do comportamento das estimativas da distribuição da dimensão com o parâmetro N. O comportamento dos valores mais prováveis da dimensão, para cada tamanho de matriz N, tende a 1 por baixo independentemente do β escolhido.

5.2.2 Método do Logaritmo

O estudo do gráfico $G = \{\log(k); \log(\lambda_k)\}$ mostrou resultados muito interessantes. Verificamos que existe uma forma funcional predominante no comportamento dos autovalores deste ensemble. O gráfico G é aproximadamente uma reta para $\beta < \frac{\pi}{2}$ independentemente do tamanho das matrizes e do parâmetro de escala estudados.

Os resultados obtidos mostram que o coeficiente angular destas retas é aproximadamente 1 e esta é uma característica conservada. Verificamos também que o coeficiente de intersecção das retas estimadas com o eixo das ordenadas não têm a propriedade de se manter constante para o ensemble estudado.

Observamos também um fato interessante de que os autovalores neste ensemble se acumulam na região superior da reta calculada. Isto é, para cada tamanho de matriz N o gráfico G mostra que a densidade dos autovalores na reta cresce com k.

Para os espaços de dimensão conhecida: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{S}^1$, o cálculo da dimensão média resultou em valores mais próximos da dimensão esperada. Também verificouse que estas estimativas possuem uma variância menor. Além disso, observarmos que a desgenerescência nestes casos é menos relevante no cálculo da dimensão.

5.3 Distribuições

Em modelos estocásticos, como é o caso deste modelo de gravitação, uma informação importante é a distribuição das variáveis aleatórias estudadas. Portanto estudamos o comportamento da distribuição de probabilidade da dimensão em termos do tamanho da matriz N e do parâmetro β . Estudamos se a forma funcional da distribuição varia significativamente com estes parâmetros.

Verificou-se que tanto para o método utilizando as funções zeta de Riemann quanto para o método utilizando o logaritmo da lei de Weyl, as dimensões estimadas para os graus de liberdade $N \in \beta$ não são gaussianas.

As distribuições encontradas tem assimetria. Para os histogramas resultantes do método que utilizou as funções zeta a assimetria é maior se comparada com a assimetria do método que utilizou a lei de Weyl.

Observamos que um possível candidato a distribuição de probabilidades da dimensão seria uma distribuição log-normal. Entendemos que esta observação poderia ser aproveitada nos estudos posteriores na tentativa de estimarmos melhor a dimensão média destas geometrias.

Observamos também o comportamento das distribuições de probabilidades com o acréscimo no parâmetro N. Observamos que as distribuições de probabi-

lidade são transladas na direção do aumento de N. Este fato pode ser observado pelo comportamento dos picos das distribuições que crescem com N tendendo a 1.

Dois fatos interessantes obtidos deste estudo é que este comportamento das distribuições se verifica independentemente do método de cálculo da dimensão e do parâmetro β .

5.4 Lei de Convergência:

Estudamos o gráfico $\{N; \langle d \rangle (N, \beta)\}$, ou seja, o comportamento da dimensão calculada com o parâmetro N e percebemos que existe um comportamento de convergência para um valor inteiro perto de 1.

Observamos que existem 2 possibilidades. A lei de escala f(N) poderia ser:

$$f(N) = \frac{a}{N^b} + c$$

ou

$$f(N) = \frac{a}{\log(N)} + b$$

Utilizamos métodos usuais de aproximação de funções não lineares por métodos de mínimos quadrados para todas as possibilidades de lei de escala derivadas destas duas expressões. Testamos a significância dos coeficientes, os parâmetros de confiabilidade estatísticos e observamos graficamente qual comportamento era mais próximo ao observado.

A conclusão foi que a lei de escala é:

$$f(N) = \frac{a}{\log(N)} + b$$

As estimativas para os parâmetros $a \in b$ são:

- Para o método das funções zeta: $a \in [-0.83, -0.62]$ e $b \in [1.01, 1.05]$
- Para o método do logaritmo: $a \in [-0.58, -0.54]$ e $b \in [1.04, 1.05]$

Portanto, o comportamento da dimensão média tende a um valor próximo de 1 quando $N \to \infty$.

Estudamos o comportamento do desvio padrão desta variável e verificamos que o desvio padrão decai com o inverso do parâmetro N dado pela lei:

$$\sigma(\langle d \rangle(\beta)) ~\sim~ \frac{1}{N^a}$$

onde $a \in [0, 1)$.

Assim quando $N \to \infty$ observa-se que $\sigma \to 0$. Este fato é muito interessante e implica que a dimensão do ensemble de geometrias é uma variável termodinâmica porque é uma quantidade finita bem definida com variância nula, ou seja caracteriza o sistema.

5.4.1 Variação com β

Observou-se, nos resultados obtidos neste estudo, para o regime $\beta < \frac{\pi}{2}$, pouca significância da dimensão com o parâmetro β . As distribuições de probabilidade, a lei de escala e a dimensão média tem as mesmas características independentemente do parâmetro β escolhido.

5.5 Considerações finais

Este estudo de mestrado elucidou algumas propriedades interessantes do observável dimensão. Lembrando que as hipóteses assumidas foram muito gerais e a dimensão, como uma variável estocástica, poderia ter um valor qualquer no intervalo [0, 2], conforme demonstrado em [4].

Também vale ressaltar que a dimensão poderia ter qualquer distribuição de probabilidades e esta distribuição poderia não ter este comportamento de convergência para um valor próximo de 1, com variância nula. Ou seja, descobrimos que a dimensão é uma variável termodinâmica, ou seja, caracteriza este sistema proposto.

Observamos que existe uma forma funcional para o logaritmo do módulo dos autovalores das matrizes no ensemble Gaussiano Unitário, esta forma funcional é aproximadamente uma reta ax + b. A dimensão está contida no coeficiente angular da reta, e os autovalores deste ensemble estão se acumulando na parte superior da reta.

Encontramos dois intervalos para a dimensão, um para cada modelo. Para o método das funções zeta de Riemann encontramos que a dimensão do ensemble está no intervalo [1.01; 1.05]. Para o método utilizando a lei de Weyl a dimensão média está no intervalo [1.04, 1.05].

Entendemos que a continuação deste trabalho pode tomar várias frentes. Pois ainda resta a definição do observável dimensão do ensemble de geometria diretamente em termos dos autovalores, já que utilizamos definições indiretas da dimensão.

Outra possibilidade seria a de melhorar os algoritmos numéricos de cálculo implementados, com filtros no cálculo da dimensão pelo método das derivadas da função zeta de Riemann, e um melhor tratamento estatístico dos dados simulados.

Finalmente, este trabalho de mestrado mostra que esta abordagem é promissora. Neste caso simplificado encontramos resultados não trivias a respeito de propriedades da dimensão, além de verificarmos que esta abordagem numérica trouxe respostas e perguntas interessantes que devem ser investigadas em trabalhos posteriores.

Referências Bibliográficas

- Kempf, Achim: Fields over Unsharp Coordinates, Phys. Rev. Lett. (85) 2873, (2000).
- [2] Connes, A.: Noncommutative Geometry, Academic Press, New York, (1994).
- [3] Landi, G.: An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries, Springer, New York, (1997).
- [4] Albuquerque, Luiz C., deLyra, Jorge L., P., Teotônio-Sobrinho, Paulo: Fluctuating Dimension in a Discrete Model for Quantum Gravity Based on the Spectral Principle, Phys. Rev. Lett. (91), 081301 (2003).
- [5] Landi, G., Rovelli, C.: General Relativity in Terms of Dirac Eigenvalues. Phys. Rev. Lett. (78) 3051, (1997).
- [6] Mehta, Madan L., Random matrices, 2nd. ed., Academic Press, (1991).
- [7] Kalau, W., Walze, M., Gravity, Non-commutative Geometry and the Wodzicki Residue, J Geom Phys 16 (1995) 327-344.
- [8] Feynman, Richard P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. (20),no.2,(1948)
- [9] Hawking, Stephen W. and Gibbons, G.W., Euclidean Quantum Gravity, World Scientific, (1993).
- [10] Lima, Elon L., Espaços Métricos, IMPA, (1977).
- [11] Kreyszig, Erwin., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, (1989).
- [12] Hönig, Chaim S., Aplicações da Topologia à Análise, IMPA.
- [13] Murphy, Gerald, J., C*-Algebras and Operator Theory, Elsevier Science & Technology Books, (1990).
- [14] Diximier, Jacques, C*-Algebras, North-Holland Mathematical Library, (1977).

- [15] Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish Press, 1979.
- [16] Kac, Mark, can one Hear the Shape of a Drum?. George Eugene Uhlenbeck sixth birthday.
- [17] Weyl, H., Das assymptotische Verteilungsgesetz der eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Karpers, Ren. Cir. Mat. Palermo 39,1-50, (1950).
- [18] Weyl, H., The classical Groups, Princeton University Press, 1946.
- [19] McKean Jr., H. P., singer, I. M., Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian, J. Diff. Geom., 43-69, (1967).
- [20] A. P. Balachandran, G. Bimonte, E. Ercolessi, G. Landi, F. Lizzi, G. Sparano and P. Teotonio-Sobrinho, *F*inite quantum physics and noncommutative geometry, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **37**C, 20 (1995)
- [21] Connes, Alain. Geometry from the spectral point of view. Lett. Math. Phys. 34 (1995), no. 3, 203-238.
- [22] Chamseddine, A. H., Connes, The Spectral Action Principle Commun. Math. Phys. 186, 731 (1997).
- [23] Isham, C. J., Structural Issues in quantum Gravity, gr-qc/9510063