Universidade de São Paulo

Instituto de Física

**CONDIÇÕES DE CONTORNO MAIS GERAIS NO
ESPALHAMENTO DE AHARONOV-BOHM DE UMA
PARTÍCULA DE DIRAC EM DUAS DIMENSÕES:
CONSERVAÇÃO DA HELICIDADE E DA SIMETRIA
DE AHARONOV-BOHM**

VANILSE DA SILVA ARAUJO

SBI-IFUSP

305M810T3320

Tese de doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Banca examinadora:

Prof. Dr. Francisco Antonio Bezerra Coutinho
Prof. Dr. João Carlos Alves Barata
Prof. Dr. Marcelo O. Caminha Gomes
Prof. Dr. Henrique von Dreifus
Prof. Dr. Amir O. Caldeira

Francisco Antonio Bezerra Coutinho

ORIENTADOR: Prof. Dr. FRANCISCO ANTONIO BEZERRA COUTINHO
CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. JOSÉ FERNANDO PEREZ

[Signature]
Prés. Armandin, Cornélio, 1992
residente da Comissão de Pós Graduação

São Paulo, 2000.

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Araujo, Vanilse da Silva

Condições de contorno mais gerais no espalhamento
Aharonov-Bohm de uma partícula de Dirac em duas
dimensões: conservação da helicidade e da simetria de
Aharonov-Bohm. São Paulo, 2000.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Antônio Bezerra
Coutinho

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Efeito Aharonov-Bohm; 2. Extensões
Auto-adjuntas; 3. Condições de contorno.

USP/IF/SBI-026/2000

*Dedico essa tese a quem faz parte de minha história e
me ensina a escrevê-la com doçura e confiança.
A quem inspira em meu coração o amor de Deus e a Vida
e me fazendo olhar para os lírios do campo e para as aves do céu,
transforma os problemas em meros detalhes a serem sempre superados.
A quem ilumina meu caminho com o seu sorriso e
me empresta sua coragem, pondo seus braços a disposição.
Dedico a quem eu amo :
Jeff.*

***“O coração do homem pode fazer planos,
mas a resposta certa dos lábios vem do Senhor”.***
Provérbios 16,1

—

Agradecimentos

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço ao Prof. Coutinho e ao Prof. Perez, pessoas que, antes de tudo, admiro pelo indiscutível brilhantismo acadêmico.

Particularmente ao Prof. Coutinho, agradeço pela sugestão do tema, por compartilhar seus conhecimentos, pela orientação que permitiu meu desenvolvimento científico e também meu desenvolvimento pessoal, impondo-me maior autoconfiança.

Agradeço ao Prof. Perez pela co-orientação, por sua positividade, pelas discussões imprescindíveis nos vários momentos críticos desse trabalho.

Agradeço também aos Profs. Coutinho e Perez pela compreensão, pelo apoio em diversas situações e pelo bom humor constante que sempre me contagiou.

Agradeço ao Prof. Barata pelo auxílio norteador, pelas sugestões enriquecedoras e pela apreciação do artigo.

Agradeço a todos os meus amigos que contribuíram direta ou indiretamente e em especial ao Prof. Cavallari e ao Prof. Guidorizzi.

Agradeço a minha saudosa mãe Abigail e ao meu querido pai José pelos seus esforços sem limites, que permitiram minha formação humana e acadêmica e por seus testemunhos de vida, que sempre me inspiraram na busca de meus ideais.

Agradeço ao meu amigo Tadeu por ser meu irmão muito querido e com quem sempre pude contar.

Agradeço aos familiares do Jefferson: Dna. Ile, tia Vilma, Fabiana, César, Andrea e André pela generosidade e pelo zelo com o qual sempre me cercaram, pelo incentivo e pelo apoio que me deram.

Agradeço ao Jefferson, dádiva maravilhosa do Senhor em minha vida, por seu amor, paciência e sabedoria e por estar sempre junto, abraçando com ternura e vontade as 'nossas causas'.

Agradeço a Deus por tudo.

Resumo

Nessa tese, mostramos que a Hamiltoniana H e o operador helicidade Λ de uma partícula de Dirac que se movimenta em duas dimensões na presença de um tubo de fluxo magnético infinitamente fino na origem admitem, cada um, uma família de quatro parâmetros de extensões auto-adjuntas. Para cada extensão correspondem condições de contorno a serem satisfeitas pelas auto-funções na origem. Apesar dos operadores H e Λ formalmente comutarem antes da especificação das condições de contorno, para garantirmos a conservação da helicidade, não é suficiente obtermos as mesmas condições de contorno para ambos os operadores, ou seja, não é suficiente a determinação de um domínio comum a ambos. Mostramos que, para certas relações entre os parâmetros das extensões satisfeitas, é possível a determinação dos domínios mais gerais onde ambos os operadores H e Λ são auto-adjuntos e onde a helicidade é conservada, simultaneamente com a preservação da simetria de Aharonov-Bohm ($\phi \rightarrow \phi + 1$), onde ϕ é o fluxo magnético em unidades naturais. Nossos resultados implicam que, nem a conservação da helicidade nem a simetria de Aharonov-Bohm, resolvem o problema da escolha da condição de contorno "fisicamente correta".

Abstract

We show that both the Hamiltonian H and the helicity operator Λ of a Dirac particle moving in two dimension in the presence of an infinitely thin magnetic flux tube admit each a four-parameter family of self-adjoint extensions. Each extension is in one-to-one correspondence with the boundary conditions (BC's) to be satisfied by the eigenfunctions at the origin. Although the actions of these two operators commute before specification of boundary conditions, to ensure helicity conservation it is not sufficient to take the same BC's for both operators. We show that, given certain relations between the parameters of the extensions it is possible to write down the most general domain where both operators H and Λ are self-adjoint with helicity conservation and also Aharonov-Bohm symmetry ($\phi \rightarrow \phi+1$) preserved, where ϕ is the magnetic flux in natural units. The continuity of the dynamics is also obtained. Our results imply that neither helicity conservation nor Aharonov-Bohm symmetry by themselves solves the problem of choosing the "physical" boundary conditions for this system.

Índice

Introdução.....	1
Capítulo 2 - Os operadores H e Λ e a necessidade de extensões auto-adjuntas.....	5
2.1. Definições formais dos operadores H e Λ	5
2.2. Determinação das auto-funções mais gerais para o operador Hamiltoniana.....	9
2.3. Determinação das auto-funções mais gerais para o operador Helicidade.....	14
2.4. O caso Livre.....	18
Capítulo 3 - Um Método Heurístico para verificação da necessidade de extensões auto-adjuntas.....	23
Capítulo 4 - O Método de von Neumann para obtenção das extensões auto-adjuntas.....	26
4.1. Introdução	26
4.2. Algumas definições.....	27
4.3. Critério para possibilidade de extensões auto-adjuntas.....	30
4.4. Técnica dos índices de deficiência de von Neumann para obtenção das extensões auto-adjuntas de um operador simétrico.....	31
4.5. Relação entre as extensões auto-adjuntas e as extensões de contorno.....	32
4.6. Obtenção das extensões auto-adjuntas para o operador momento linear em uma dimensão.....	32

4.7. Obtenção das extensões auto-adjuntas para o operador energia cinética definido em $L^2(0, \infty)$ em uma dimensão.....	35
4.8. Obtenção das extensões auto-adjuntas para o operador energia cinética definido em $L^2(-\infty, \infty)$ em uma dimensão.....	37

Capítulo 5 - Extensões auto- adjuntas a dois parâmetros que não acoplam todas as componentes das funções de onda..... 43

5.1. Extensões auto- adjuntas para os operadores H e Λ	43
5.2. Extensões auto- adjuntas para o operador H - Um Caso Particular.....	52
5.3. Condições de contorno mais gerais admissíveis para o operador Λ	55
5.4. Condições de contorno e Conservação da Helicidade.....	61
5.5. Determinação das auto-funções do operador H que satisfazem as condições de contorno desacopladas.....	62
5.6. Determinação das auto-funções do operador Λ que satisfazem as condições de contorno desacopladas.....	64
5.7. Discussão dos Resultados.....	65
5.8. Determinação da condição formal para que os operadores H e Λ tenham auto-funções comuns.....	66
5.9. Auto-funções simultâneas para os operadores H e Λ no domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ das condições de contorno desacopladas.....	68
5.10. A ação do operador Λ nas auto-funções de H definidas em $D_\delta(H, \Lambda)$	71

Capítulo 6 - Extensões auto-adjuntas mais gerais a dois parâmetros para o operador H e conservação da helicidade.....	73
6.1. Determinação das condições de contorno.....	73
6.2. Determinação das auto-funções de H que satisfazem as condições de contorno mais gerais a dois parâmetros.....	75
Capítulo 7 - Extensões auto-adjuntas a três parâmetros para o operador Hamiltoniana e conservação da helicidade.....	80
7.1. Determinação das condições de contorno.....	80
7.2. Determinação das auto-funções.....	82
7.3. Verificando se Λ é auto-adjunto no domínio $D'_{\theta,\psi,\varphi}(H,\Lambda)$ encontrado.....	87
7.4. Exemplo: Uma extensão particular a três parâmetros.....	91
7.5. Verificando se o operador Λ é auto-adjunto no domínio $D'_{\frac{\pi}{4},0,\frac{3\pi}{4}}(H,\Lambda)$	93
Capítulo 8 - Extensões auto-adjunta mais gerais a quatro parâmetros para o operador H e conservação da helicidade.....	96
8.1. Determinação das condições de contorno mais gerais com quatro parâmetros para o operador Hamiltoniana.....	96
8.2. Determinação das auto-funções de H que satisfazem as condições de contorno mais gerais com quatro parâmetros.....	98
8.3. Verificando se Λ é auto-adjunto no domínio mais geral $D'_{\psi,\alpha,\theta,\varphi}(H)$ encontrado.....	105

Capítulo 9 - Simetria de Aharonov-Bohm e conservação da helicidade.....	107
Capítulo 10 - Determinação das condições de contorno a partir de um procedimento limite.....	125
10.1. Introdução - Procedimento Limite.....	125
10.2. Modelo do Tubo de Fluxo.....	127
10.3. Processo limite para a obtenção de todas as extensões a um parâmetro.....	133
Capítulo 11 - Conclusões.....	136
Apêndice A -	138
Apêndice B -	140
Apêndice C -	143
Apêndice D -	145
Apêndice E -	153

Capítulo 1

Introdução

O problema de uma partícula de Dirac que se move num plano na presença de um tubo de fluxo magnético infinitamente fino na origem aparece em vários problemas diferentes em física teórica. Originalmente, esse problema apareceu na discussão do efeito Aharonov-Bohm^[15,16] e de sua variante, o efeito Aharonov-Casher^[17]. Aparece também no estudo da interação da matéria com cordas cósmicas^[18-20]. No limite não relativístico, o problema de uma partícula em duas dimensões na presença de um tubo de fluxo magnético aparece no estudo da supercondutividade a altas temperaturas críticas^[21].

O problema de uma partícula de Dirac de massa $m > 0$, que se move num plano na presença de uma linha de fluxo magnético na origem, já foi considerado na literatura por vários autores^[1-7,16,22].

Foi mostrado pela primeira vez por Ph. de Sousa Gerbert^[3] que, diferentemente do caso de uma partícula de Dirac livre em duas dimensões, a introdução da linha de fluxo magnético na origem torna o problema de determinação das auto-funções do operador hamiltoniana bem mais complicado. Isto porque, o operador hamiltoniana passa a requerer, para sua completa determinação como um operador auto-adjunto, a especificação de condições de contorno a serem satisfeitas pelas funções de onda na origem^[1,2,3].

No entanto, tecnicamente falando, o problema de determinação das condições de contorno admissíveis é idêntico ao problema de determinação das extensões auto-adjuntas para um operador simétrico definido num domínio denso e fechado. Assim, o autor Sousa Gerbert encontrou uma família de extensões auto-adjuntas para o operador hamiltoniana^[3]. Posteriormente, os autores F. A. B. Coutinho e J. Fernando Perez^[1] demonstraram que o operador hamiltoniana admite uma família de extensões auto-adjuntas a quatro parâmetros e encontraram as extensões auto-adjuntas a dois parâmetros para o operador hamiltoniana, com a restrição de que esse operador continuasse possível de ser decomposto em dois operadores desacoplados atuando em espiniores de duas componentes. Desse modo aparece uma indeterminação na escolha das condições de contorno, sendo possíveis várias dinâmicas diferentes. Surge, então, naturalmente a questão de se saber qual dinâmica é a "fisicamente correta".

Foi sugerido por Hagen^[5,6] que a dinâmica "fisicamente correta" seria aquela obtida a partir de um processo limite onde se toma um tubo de fluxo magnético de

raio $R > 0$ (onde o campo magnético $\vec{H}$ é dado por uma função do tipo delta de casca), removendo-se assim a ambiguidade e depois tomando-se o limite $R \rightarrow 0$ no final dos cálculos. Esse procedimento também é utilizado nos cálculos das referências [2], [4], [5], [6] e [7]. As dinâmicas assim obtidas^[2,4-7] conservam todas elas a helicidade e segundo Hagen, seriam as fisicamente corretas.

Poderíamos pensar na conservação da helicidade como sendo a motivação física para a escolha das condições de contorno dentre as possíveis, removendo assim a indeterminação existente.

Os autores F. A. Coutinho e J. Fernando Perez no artigo da referência [1] concluem que existe mais de uma dinâmica possível que preserva a helicidade (na verdade uma família de extensões auto-adjuntas que não acoplam as quatro componentes das funções de onda). De modo que a conservação da helicidade não removeria a indeterminação na escolha das condições de contorno.

Na verdade, como discutiremos nessa tese, algumas das afirmações feitas na referência [1] não estão corretas. Surpreendentemente, apenas a comutação formal entre os operadores hamiltoniana e helicidade e a definição de um domínio comum onde ambos são operadores auto-adjuntos não é suficiente para garantir a comutação efetiva entre esses operadores e a consequente obtenção de auto-funções comuns. De fato, é possível a conservação da helicidade, apenas para *certas extensões auto-adjuntas* a um (ou dois) parâmetros que não acoplam as quatro componentes, como veremos nessa tese.

Outra importante simetria que aparece nesse problema é a simetria de Aharonov-Bohm, que consiste na invariância do operador hamiltoniana através da transformação $\phi \rightarrow \phi + 1$, onde ϕ é o fluxo magnético. As condições de contorno que aparecem nas referências [2], [4], [5], [6] e [7], embora conservem a helicidade, violam a simetria de Aharonov-Bohm.

Na referência [2] foi demonstrado que é possível através de uma interpolação reestabelecer a simetria de Aharonov-Bohm, mas, nesse caso, não é mais possível a conservação da helicidade. Assim, não aparece na literatura dinâmicas onde ambas as simetrias sejam preservadas.

Nesse trabalho, encontramos as extensões auto-adjuntas mais gerais a quatro parâmetros para o operador hamiltoniana, essas, que acoplam as quatro componentes das funções de onda, que permitem várias dinâmicas diferentes onde ambas as simetrias: conservação da helicidade e Aharonov-Bohm, são preservadas.

Essa tese está organizada do seguinte modo. No Capítulo 2 apresentamos a definição formal dos operadores hamiltoniana H e helicidade A , e mostramos que eles comutam formalmente. Encontramos as auto-funções mais gerais de

cada um desses operadores e verificamos através da análise dessas auto-funções a necessidade de extensões auto-adjuntas para H e Λ quando $\nu = n + \phi$ (n é o momento angular orbital e ϕ é o fluxo magnético) está no intervalo $\nu :] - 1, 0[$.

No Capítulo 3, apresentamos um método heurístico para se verificar a necessidade de extensões auto-adjuntas para H e Λ , que consiste em se analisar a divergência e considerar os termos dominantes nas equações diferenciais que definem as ações dos operadores H e Λ .

No Capítulo 4, revisamos alguns dos principais resultados da teoria de von Neumann das extensões auto-adjuntas e apresentamos dois exemplos, onde aplicamos a técnica dos índices de deficiência para obtermos as extensões auto-adjuntas. O primeiro exemplo mais simples é do operador momento linear definido em $L^2(0, 1)$. O segundo exemplo é o do operador energia cinética definido em $L^2(-\infty, \infty)$, cujas extensões auto-adjuntas já foram obtidas na literatura^[8,13,14]. Demonstramos que a técnica que utilizamos para obtermos as extensões auto-adjuntas é capaz de reproduzir os mesmos resultados das referências [8], [13] e [14].

No Capítulo 5, passamos ao problema de determinação das extensões auto-adjuntas para os operadores H e Λ , e nos concentramos no caso particular tratado na referência [1], de extensões auto-adjuntas a dois parâmetros que não acoplam as quatro componentes das funções de onda. Mostramos que apesar dos operadores H e Λ comutarem formalmente, a definição de um domínio comum, onde ambos são auto-adjuntos, não garante a comutação efetiva desses operadores como erroneamente se afirmou na referência [1]. Isso ocorre porque a imposição da conservação da helicidade pode ser obtida a partir de uma condição formal que só é satisfeita para certos valores dos parâmetros da extensão. Assim, na verdade, a comutação efetiva desses operadores e a conseqüente obtenção de auto-funções comuns só ocorre para certas extensões particulares. As auto-funções comuns são encontradas nesse caso e mostramos que elas incluem as auto-funções obtidas nas referências [2], [4], [5], [6] e [7].

No Capítulo 6, obtemos as extensões auto-adjuntas mais gerais a dois parâmetros, essas que acoplam todas as componentes das funções de onda. Verificamos que essas extensões não conduzem a novos resultados para as auto-funções, ou seja, não obtemos auto-funções diferentes das já encontradas no Capítulo 5.

No Capítulo 7, procedemos a extensões auto-adjuntas a três parâmetros para o operador H e nesse caso verificamos que é possível a conservação da helicidade, se certas relações entre os parâmetros da extensão forem satisfeitas. Sendo possível, assim, a definição de um domínio comum onde ambos os operadores H e Λ são auto-adjuntos e a helicidade é conservada.

No Capítulo 8, procedemos a extensão auto-adjunta mais geral a quatro parâmetros que inclui todas as condições de contorno apresentadas na literatura^[1-7] e verificamos que são possíveis várias dinâmicas onde a helicidade é conservada se certas relações entre os parâmetros da extensão são satisfeitas.

No Capítulo 9, mostramos que as condições de contorno do Capítulo 8 (as condições de contorno do Capítulo 8 obviamente, por serem as mais gerais, incluem as do Capítulo 7), além de preservarem a helicidade, preservam também a simetria de Aharonov-Bohm, o que não se conseguia através das dinâmicas que aparecem nas referências [1] a [7]. Mostramos que, para certas escolhas do intervalo de variação dos parâmetros da extensão, é possível assegurar a simetria de Aharonov-Bohm, através de uma interpolação.

No Capítulo 10, revisamos os cálculos e resultados da referência [2] e discutimos e comparamos os nossos resultados com os resultados anteriores que aparecem nas referências [2] a [7].

No Capítulo 11, apresentamos nossas conclusões.

No Apêndice A, checamos explicitamente a comutação formal entre os operadores H e A . No Apêndice B, verificamos a relação de comutação entre os operadores H e J_z (momento angular total). No Apêndice C, verificamos a relação de comutação entre os operadores A e J_z . No Apêndice D, discutimos e comparamos nossos resultados com os resultados das referências [5], [6] e [7]. No Apêndice E, calculamos a ação do operador H nas auto-funções do operador A definidas no domínio do Capítulo 5 e verificamos que H não deixa tal domínio invariante.

Capítulo 2

Os operadores H e Λ e a necessidade de extensões auto-adjuntas.

2.1. Definições Formais dos Operadores H e Λ .

O operador hamiltoniana para uma partícula de Dirac de massa $m > 0$, em duas dimensões na presença de um tubo de fluxo magnético infinitamente fino na origem é formalmente dado por^[1,2]:

$$H = \vec{\pi} \cdot \vec{\alpha} + \beta m, \quad (2.1.1)$$

onde:

$$\vec{\pi} = \left(p_x + \frac{e}{c} A_x, p_y + \frac{e}{c} A_y \right) \quad (2.1.2)$$

e:

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.1.3)$$

onde uma possível escolha das matrizes de Dirac é:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \quad (2.1.4)$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

e:

$$\beta = \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (2.1.6)$$

sendo σ_1 , σ_2 e σ_3 as matrizes de Pauli.

O potencial vetor $\vec{A}$ da equação (2.1.2), está relacionado com o campo magnético $\vec{H}$ através da equação:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (2.1.7)$$

Utilizando o gauge o Coulomb, o potencial vetor é dado por:

$$\vec{A} = \frac{e}{c} \phi \left(\frac{-y}{r^2}, \frac{x}{r^2} \right), \quad (2.1.8)$$

onde ϕ é o fluxo magnético.

De modo que:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left[\frac{2\pi e}{c} \right] \phi \frac{\delta(r)}{r} \vec{k}. \quad (2.1.9)$$

Podemos notar que o hamiltoniana definida pela equação (2.1.1) pode ser decomposta em dois operadores atuando em espinores de duas componentes:

$$H = \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} + sm\sigma_3, \quad (2.1.10)$$

onde:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2) \quad (2.1.11)$$

e:

$$s = \pm 1. \quad (2.1.12)$$

As duas escolhas de s levam a representações não equivalentes das matrizes de Dirac. No limite não relativístico para $s = +1$ apenas a componente superior do espinor de duas componentes sobrevive, descrevendo uma partícula de Schrödinger de spin $\frac{1}{2}$, enquanto para $s = -1$, apenas a componente inferior do espinor de duas componentes sobrevive descrevendo uma partícula de Schrödinger de spin $-\frac{1}{2}$.

Usando a representação de espinores de quatro componentes, podemos definir o operador helicidade, que dá a projeção do momento $\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$, na direção do spin, como sendo:

$$\Lambda = \left[\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right] \cdot \vec{\Sigma} \quad (2.1.13)$$

onde Σ é o operador de spin:

$$\vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2), \quad (2.1.14)$$

onde:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1.15)$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.16)$$

Os dois operadores H e Λ , definidos respectivamente pelas equações (2.1.1) e (2.1.13), comutam formalmente como se pode verificar. Veja o Apêndice A. No entanto, essa "comutação formal" dos operadores não garante a possibilidade de diagonalização simultânea dos mesmos e a conseqüente obtenção de auto-funções comuns. Em outras palavras, a comutação formal unicamente não garante a conservação da helicidade para qualquer dinâmica dada por H .

Conforme ficará claro mais adiante, o problema reside no fato de os operadores H e Λ não serem essencialmente auto-ajuntos para todo valor do fluxo magnético ϕ , havendo a necessidade de se especificar as condições de contorno a serem satisfeitas pelas suas auto-funções na origem, uma vez que, para certos valores do fluxo ϕ , não é possível a imposição usual de regularidade na origem.

Será bastante útil na solução do problema de condições de contorno de Λ , notar que existe uma transformação unitária U , dada por:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -i\sigma_3 \\ I & i\sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (2.1.17)$$

que conecta os dois operadores H e Λ , definidos respectivamente pelas equações (2.1.1) e (2.1.13):

$$\Lambda = U (H - \beta m) U^{-1}. \quad (2.1.18)$$

Esse fato decorre imediatamente da equação abaixo:

$$U \alpha_j U^{-1} = \Sigma_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.1.19)$$

A equivalência unitária da equação (2.1.18) deixará o problema de determinação de condições de contorno de Λ muito parecido com o problema de determinação das condições de contorno para H , como veremos no Capítulo 5.

É importante também notar que o operador momento angular total:

$$J_z = \frac{\Sigma_3}{2} + l_z, \quad (2.1.20)$$

onde:

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.1.21)$$

e:

$$l_z = xp_y - yp_x, \quad (2.1.22)$$

comuta formalmente com os operadores H e Λ , isto é:

$$[H, J_z] = [\Lambda, J_z] = 0 \quad (2.1.23)$$

No Apêndice B estão demonstradas as relações de comutação:

$$[H, l_z] = -i(\vec{\alpha} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{r}) \quad (2.1.24)$$

e:

$$[H, S_3] = i(\vec{\alpha} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{r}), \quad (2.1.25)$$

que estão de acordo com a equação (2.1.23) para a hamiltoniana. No Apêndice C estão demonstradas as relações de comutação:

$$[\Lambda, l_z] = -i(\vec{\Sigma} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{r}) \quad (2.1.26)$$

e:

$$[\Lambda, S_3] = i(\vec{\Sigma} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{r}), \quad (2.1.27)$$

que produzem o resultado da equação (2.1.23) para a helicidade.

O problema das extensões auto-adjuntas para o operador H foi pela primeira vez considerado por Sousa Gerbert^[3] e posteriormente por F. A. Coutinho e J. Fernando Perez^[1,2]. Esses autores encontraram uma família de extensões auto-adjuntas a um parâmetro (Sousa Gerbert^[3]) e a dois parâmetros (F. A. Coutinho e J. Fernando Perez^[1]) para o hamiltoniana com a restrição de que este operador

continuasse possível de ser decomposto em dois operadores desacoplados, atuando em espiniores de duas componentes. Assim há uma indeterminação na escolha das condições de contorno, sendo possíveis várias dinâmicas.

No entanto, para começarmos a entender esse problema, precisamos antes de mais nada, escrevermos a equação radial de auto-valores para H e Λ . Na Seção 2.3, estudaremos o caso do operador H e na Seção 2.4 o caso do operador Λ .

2.2. Determinação das auto-funções mais gerais para o operador Hamiltoniana.

Estamos interessados, agora, em resolver o problema de auto-valores para o operador hamiltoniana, isto é:

$$H\psi_{\pm} = \pm |E| \psi_{\pm} \quad (2.2.1)$$

Usando a equação (2.1.1) e as definições das equações (2.1.2) a (2.1.6), a equação acima pode ser escrita como:

$$H\psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} - \sigma_3 m \end{pmatrix} \psi_{\pm} = \pm |E| \psi_{\pm} \quad (2.2.2)$$

A fim de explorarmos a invariância rotacional do hamiltoniana (equação (2.2.23)), dada nossa escolha para o potencial vetor $\vec{A}$ da equação (2.1.8), vamos utilizar as equações de transformação para coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad (2.2.3)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (2.2.4)$$

que implicam:

$$\partial_x = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_{\theta} \quad (2.2.5)$$

$$\partial_y = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_{\theta}. \quad (2.2.6)$$

Assim podemos escrever a equação (2.2.2) como sendo:

$$H\psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & \mathcal{H} - \sigma_3 m \end{pmatrix} \psi_{\pm}, \quad (2.2.7)$$

onde:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\theta} \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_{\theta} \right) \\ -ie^{i\theta} \left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_{\theta} \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Podemos tentar uma separação de variáveis do tipo:

$$\psi_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} \psi_{\pm}^1(r) e^{in\theta} \\ \psi_{\pm}^2(r) e^{in'\theta} \\ \psi_{\pm}^3(r) e^{in\theta} \\ \psi_{\pm}^4(r) e^{in'\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Substituindo a equação (2.2.9) na equação (2.2.7), concluímos que:

$$n' = n + 1. \quad (2.2.10)$$

Sendo assim, podemos pensar em duas possibilidades para as auto-funções da equação (2.2.9):

$$\psi_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} \psi_{\pm}^1(r) \\ \psi_{\pm}^2(r) e^{i\theta} \\ \psi_{\pm}^3(r) \\ \psi_{\pm}^4(r) e^{i\theta} \end{pmatrix} e^{in\theta} \quad (2.2.11)$$

ou:

$$\psi'_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} \psi'_{\pm}{}^1(r) e^{-i\theta} \\ \psi'_{\pm}{}^2(r) \\ \psi'_{\pm}{}^3(r) e^{-i\theta} \\ \psi'_{\pm}{}^4(r) \end{pmatrix} e^{in\theta}. \quad (2.2.12)$$

A função de onda da equação (2.2.11) acima tem momento angular total igual a $n + \frac{1}{2}$ (n é o momento angular orbital) como pode ser facilmente checado se usarmos coordenadas polares para escrevermos o operador J_z dado pela equação (2.1.20) como sendo:

$$J_z = \frac{\Sigma_3}{2} - i\partial_{\theta}. \quad (2.2.13)$$

A função de onda da equação (2.1.12) tem momento angular total igual a $n - \frac{1}{2}$, onde n é o momento angular orbital. É claro que podemos obter o mesmo valor para o momento angular total da equação (2.2.12) fazendo $n \rightarrow n - 1$ na equação (2.2.11).

Usando a separação de variáveis da equação (2.2.11), sem perda de generalidade, obtemos a seguinte equação radial de auto-valores de H :

$$H(r)\psi_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} h(r) + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & h(r) - \sigma_3 m \end{pmatrix} \psi_{\pm}(r) = \pm |E| \psi_{\pm}(r), \quad (2.2.14)$$

onde:

$$h(r) = \begin{pmatrix} 0 & -i \left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r} \right) \\ -i \left(\partial_r - \frac{\nu}{r} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.15)$$

onde introduzimos a definição:

$$\nu = n + \phi. \quad (2.2.16)$$

Vamos definir:

$$\psi_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} \alpha \phi_{\pm}^1(r) \\ \beta \phi_{\pm}^2(r) \end{pmatrix}, \quad (2.2.17)$$

onde $\phi_{\pm}^{1,2}(r)$ são espinores de duas componentes e α e β são duas constantes que regulam as proporções das componentes superior e inferior. Assim, o problema de auto-funções da equação (2.2.14) fica equivalente a resolver o seguinte problema de auto-funções:

$$(h(r) + s\sigma_3 m) \phi_{\pm}^j(r) = \pm |E| \phi_{\pm}^j(r), \quad (2.2.18)$$

onde para $s = +1$, estaremos resolvendo o problema de determinação de $\phi_{\pm}^1$ e para $s = -1$, o problema de determinação de $\phi_{\pm}^2$.

Vamos escrever:

$$\phi_{\pm}^j(r) = \begin{pmatrix} u_{\pm}^j(r) \\ v_{\pm}^j(r) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (2.2.19)$$

Daqui em diante, nos referiremos ao operador $H(r)$ da equação (2.2.14) denotando-o simplesmente por H . Substituindo as equações (2.2.15) e (2.2.19) na equação (2.2.18), temos:

$$\begin{pmatrix} ms & -i\left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r}\right) \\ -i\left(\partial_r - \frac{\nu}{r}\right) & -ms \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix} = \pm |E| \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix}, \quad (2.2.20)$$

de onde vem que:

$$u_{\pm}^j = \frac{-i}{\pm |E| - ms} \left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r} \right) v_{\pm}^j \quad (2.2.21)$$

e:

$$v_{\pm}^j = \frac{-i}{\pm |E| + ms} \left(\partial_r - \frac{\nu}{r} \right) u_{\pm}^j. \quad (2.2.22)$$

Substituindo a equação (2.2.22) na equação (2.2.21) temos:

$$\left(\partial_{kr}^2 + \frac{\partial_{kr}}{kr} + \left(1 - \frac{\nu^2}{(kr)^2} \right) \right) u_{\pm}^j = 0, \quad (2.2.23)$$

onde introduzimos a definição:

$$k = \sqrt{E^2 - m^2}. \quad (2.2.24)$$

A solução da equação (2.2.23) é do tipo:

$$u_{\pm}^j(kr) = J_{-\nu}(kr) + c_{\pm} J_{\nu}(kr). \quad (2.2.25)$$

Lembrando que a componente inferior ($v_{\pm}$) está conectada com a superior ($u_{\pm}$) através da equação (2.2.22) (fato crucial na solução do problema) e usando as fórmulas de recorrência da referência [10]:

$$\frac{d}{dx} J_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) \quad (2.2.26)$$

$$\frac{d}{dx} J_{\nu}(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x), \quad (2.2.27)$$

temos que:

$$v_{\pm}^j(kr) = \frac{-ik}{\pm|E| + ms} (J_{-\nu-1}(kr) - c_{\pm} J_{\nu+1}(kr)) \quad (2.2.28)$$

Os resultados das equações (2.2.25) e (2.2.27) permitem escrever as auto-funções da equação (2.2.19) como sendo:

$$\phi_{\pm}^1(kr) = \begin{pmatrix} J_{-\nu}(kr) + c_{\pm} J_{\nu}(kr) \\ \frac{-ik}{\pm|E| + m} (J_{-\nu-1}(kr) - c_{\pm} J_{\nu+1}(kr)) \end{pmatrix} \quad (2.2.29)$$

e:

$$\phi_{\pm}^2(kr) = \begin{pmatrix} J_{-\nu}(kr) + d_{\pm} J_{\nu}(kr) \\ \frac{-ik}{\pm|E| - m} (J_{-\nu-1}(kr) - d_{\pm} J_{\nu+1}(kr)) \end{pmatrix}. \quad (2.2.30)$$

De modo que as auto-funções (de quatro componentes) de H da equação (2.2.14) são:

$$\psi_{\pm}(kr) = \begin{pmatrix} \alpha(J_{-\nu}(kr) + c_{\pm} J_{\nu}(kr)) \\ \alpha \frac{-ik}{\pm|E| + m} (J_{-\nu-1}(kr) - c_{\pm} J_{\nu+1}(kr)) \\ \beta(J_{-\nu}(kr) + d_{\pm} J_{\nu}(kr)) \\ \beta \frac{-ik}{\pm|E| - m} (J_{-\nu-1}(kr) - d_{\pm} J_{\nu+1}(kr)) \end{pmatrix} \quad (2.2.31)$$

Considerando a forma das soluções para as auto-funções de H da equação acima e lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel ^[10]:

$$J_{\nu}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, \quad (2.2.32)$$

vemos que para $\nu = n + \phi \geq 0$ e para $\nu \leq -1$, apenas as soluções regulares na origem são admissíveis, pois nesses casos as soluções singulares na origem são não normalizáveis na vizinhança da origem.

Entretanto, para o caso $-1 < \nu < 0$, é impossível impor a regularidade na origem simultaneamente para todas as componentes da função, havendo assim uma indeterminação na escolha das condições de contorno (note que isso acontece devido a relação da equação (2.2.21) entre as componentes superior e inferior do espinor de auto-funções de H). Nesse caso a solução singular na origem é normalizável na vizinhança da origem. Sendo assim possíveis extensões auto-adjuntas para o hamiltoniana no caso em que $-1 < \nu < 0$ ^[1,2,3].

Para todo valor não inteiro do fluxo ϕ , há exatamente um valor de n (que corresponde a uma onda parcial):

$$n = -[\phi] - 1, \quad (2.2.33)$$

onde $[\phi]$ representa o maior inteiro menor ou igual ϕ , tal que $\nu = n + \phi$ está no intervalo crítico $]-1, 0[$.

2.3. Determinação das auto-funções mais gerais para o operador Helicidade.

Estamos interessados agora em resolver o problema de auto-valores para o operador helicidade, isto é:

$$\Lambda \psi_{\pm} = \pm |\lambda| \psi_{\pm}. \quad (2.3.1)$$

Usando a equação (2.1.13) da definição formal do operador Λ e lembrando da equivalência unitária da equação (2.1.18), podemos escrever o operador Λ em coordenadas polares como sendo dado por:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H} \\ \mathcal{H} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.2)$$

onde $\mathcal{H}$ é dado como na equação (2.2.8) da seção anterior. Usando a mesma separação de variáveis da equação (2.2.11), obtemos a seguinte equação radial de auto-funções para Λ :

$$\Lambda(r) \psi_{\pm}(r) = \begin{bmatrix} 0 & h(r) \\ h(r) & 0 \end{bmatrix} \psi_{\pm}(r) = \pm |\lambda| \psi_{\pm}(r), \quad (2.3.3)$$

onde $h(r)$ está definido na equação (2.2.15). Daqui em diante, frequentemente nos referiremos ao operador $\Lambda(r)$ denotando-o por Λ .

Para encontrarmos as auto-funções de Λ vamos escrever os espiniores $\psi_{\pm}(r)$ de quatro componentes que representam as auto-funções a serem encontradas como sendo:

$$\psi_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} \psi_{\pm}^{(1)}(r) \\ \psi_{\pm}^{(2)}(r) \end{pmatrix}, \quad (2.3.4)$$

de modo que a equação (2.3.3) implique nas seguintes relações entre as componentes superior $\psi_{\pm}^1$ e inferior $\psi_{\pm}^2$:

$$h(r) \psi_{\pm}^{(2)}(r) = \pm |\lambda| \psi_{\pm}^{(1)}(r) \quad (2.3.5)$$

$$h(r) \psi_{\pm}^{(1)}(r) = \pm |\lambda| \psi_{\pm}^{(2)}(r) \quad (2.3.6)$$

Substituindo a equação (2.3.6) na equação (2.3.5) ou vice-versa, obtemos que:

$$h^2(r) \psi_{\pm}^j(r) = \lambda^2 \psi_{\pm}^j(r) \quad j = 1, 2. \quad (2.3.7)$$

Assim, para resolvermos o problema de auto-funções da equação (2.3.3) vamos antes resolver o problema de auto-funções de duas componentes da equação (2.3.7) acima.

Usando o resultado da equação (2.2.15) podemos escrever o operador h^2 como sendo o seguinte operador diagonal:

$$h^2(r) = \begin{pmatrix} \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{\nu^2}{r^2} & 0 \\ 0 & \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{(\nu+1)^2}{r^2} \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

onde $\nu = n + \phi$.

De modo que, escrevendo as funções de onda da equação (2.3.7) sob a forma:

$$\psi_{\pm}^j(r) = \begin{pmatrix} u_{\pm}^j(r) \\ v_{\pm}^j(r) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2 \quad (2.3.9)$$

e usando o resultado da equação (2.3.8) acima, temos:

$$-\begin{pmatrix} \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{\nu^2}{r^2} & 0 \\ 0 & \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{(\nu+1)^2}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\pm}^j(r) \\ v_{\pm}^j(r) \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} u_{\pm}^j(r) \\ v_{\pm}^j(r) \end{pmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Da equação acima surgem as equações desacopladas para $u_{\pm}^j$ e $v_{\pm}^j(r)$:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_{\pm}^j(r) = -\lambda^2 u_{\pm}^j(r) \quad (2.3.11)$$

e:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{(\nu+1)^2}{r^2} \right) v_{\pm}^j(r) = -\lambda^2 v_{\pm}^j(r), \quad (2.3.12)$$

cujas soluções mais gerais são do tipo:

$$u_{\pm}^j(\lambda r) = J_{-\nu}(\lambda r) + a_{\pm} J_{\nu}(\lambda r) \quad (2.3.13)$$

e:

$$v_{\pm}^j(\lambda r) = J_{-\nu-1}(\lambda r) + b_{\pm} J_{\nu+1}(\lambda r) \quad (2.3.14)$$

Assim os espinores $\psi_{\pm}^j$ (auto-funções do operador $h^2(r)$) têm a forma:

$$\psi_{\pm}^j(\lambda r) = \begin{pmatrix} J_{-\nu}(\lambda r) + a_{\pm} J_{\nu}(\lambda r) \\ J_{-\nu-1}(\lambda r) + b_{\pm} J_{\nu+1}(\lambda r) \end{pmatrix} \quad j = 1, 2. \quad (2.3.15)$$

Para encontrarmos, agora, as auto-funções do operador Λ , devemos impor que os espinores da equação (2.3.15) obedeam às equações (2.3.5) e (2.3.6) que relacionam as componentes superior $\psi_{\pm}^{(1)}$ e inferior $\psi_{\pm}^{(2)}$ do espinor de quatro componentes de auto-funções de Λ .

Assim tomando $\psi_{\pm}^{(1)}(\lambda r)$ como sendo dado pela equação (2.3.15), as equações (2.3.5) e (2.3.6) fornecem:

$$\psi_{\pm}^{(2)}(\lambda r) = \begin{pmatrix} \mp i(b_{\pm} J_{\nu}(\lambda r) - J_{-\nu}(\lambda r)) \\ \mp i(J_{-\nu-1}(\lambda r) - a_{\pm} J_{\nu+1}(\lambda r)) \end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

A expressão da equação (2.3.16) acima foi encontrada usando os resultados das equações (2.2.26) e (2.2.27). Assim, as auto-funções de Λ quando tomamos $\psi_{\pm}^{(1)}$ como na equação (2.3.15) e $\psi_{\pm}^{(2)}$ como na equação (2.3.16) podem ser escritas como sendo:

$$\psi_{\pm|\lambda|}(\lambda r) = \begin{pmatrix} J_{-\nu}(\lambda r) + a_{\pm} J_{\nu}(\lambda r) \\ J_{-\nu-1}(\lambda r) - b_{\pm} J_{\nu+1}(\lambda r) \\ \mp i(b_{\pm} J_{\nu}(\lambda r) - J_{-\nu}(\lambda r)) \\ \mp i(J_{-\nu-1}(\lambda r) - a_{\pm} J_{\nu+1}(\lambda r)) \end{pmatrix}. \quad (2.3.17)$$

Trocando $\psi_{\pm}^{(1)}$ por $\psi_{\pm}^{(2)}$ na equação (2.3.17) (ou seja, tomando $\psi_{\pm}^{(2)}$ como sendo dado por (2.3.15)), respeitando as condições das equações (2.3.5) e (2.3.6) (que garantem que as funções obtidas são auto-funções do operador Λ), temos as seguintes auto-funções de Λ :

$$\psi'_{\pm|\lambda|}(\lambda r) = \begin{pmatrix} \mp i (b'_{\pm} J_{\nu}(\lambda r) - J_{-\nu}(\lambda r)) \\ \mp i (J_{-\nu-1}(\lambda r) - a'_{\pm} J_{\nu+1}(\lambda r)) \\ J_{-\nu}(\lambda r) + a'_{\pm} J_{\nu}(\lambda r) \\ J_{-\nu-1}(\lambda r) + b'_{\pm} J_{\nu+1}(\lambda r) \end{pmatrix}. \quad (2.3.18)$$

Assim existem quatro auto-funções do operador Λ : duas com auto-valor positivo $+|\lambda|$ e duas com auto-valor negativo $-|\lambda|$, dadas pelas equações (2.3.17) e (2.3.18) acima.

Analisando a forma das soluções para as auto-funções de Λ das equações acima e lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel dada pela equação (2.2.32) vemos que para $\nu = n + \phi \geq 0$ e para $\nu \leq -1$, apenas as soluções regulares na origem são admissíveis, pois nesses casos, as componentes singulares na origem são não localmente normalizáveis na vizinhança da origem.

No entanto, para o caso $-1 < \nu < 0$, é impossível impor a condição de regularidade simultaneamente para todas as componentes, havendo assim uma indeterminação na escolha das condições de contorno (note que isso acontece devido às relações das equações (2.3.5) e (2.3.6) entre as componentes superior $\psi_{\pm}^{(1)}(r)$ e inferior $\psi_{\pm}^{(2)}(r)$ do espinor de auto-funções de Λ). As soluções singulares na origem são normalizáveis na vizinhança da origem no caso em que $\nu \in]-1, 0[$. Sendo, assim possíveis extensões auto-adjuntas para a helicidade (ou seja, podemos tomar *diferentes auto-funções que correspondem a diferentes proporções entre as soluções regular e singular*).

Isso é o mesmo que ocorre para o operador hamiltoniana, descrito na seção anterior. Da mesma forma que naquele caso, teremos que, para todo valor não inteiro do fluxo magnético ϕ , haverá exatamente um valor de n (que corresponde a uma onda parcial) $n = -[\phi] - 1$, tal que ν está no intervalo crítico $]-1, 0[$. Nesse intervalo os operadores H e Λ não estão bem definidos, havendo a necessidade de especificação das condições de contorno na origem a serem satisfeitas pelas auto-funções de H e de Λ , o que é equivalente ao problema de determinação das extensões auto-adjuntas para esses operadores^[1,2,3].

Nesse trabalho, estamos interessados em definir os operadores H e Λ em

domínios (comuns a ambos) tais que eles sejam auto-adjuntos e que a helicidade seja uma quantidade conservada.

Lembremo-nos de que esse problema não possui solução trivial imediata, uma vez que, conforme dissemos anteriormente na Seção 2.1, apenas a comutação formal entre os operadores H e Λ não garante a conservação da helicidade e consequentemente não implica na obtenção de auto-funções simultâneas (para H e Λ) para toda dinâmica definida por H através de algum conjunto de condições de contorno.

Nos próximos capítulos procederemos a extensões auto-adjuntas para os operadores H e Λ e investigaremos a possibilidade de obtenção de auto-funções comuns para essas extensões.

No entanto, antes de considerarmos o problema das extensões auto-adjuntas para H e Λ no caso da partícula de Dirac em duas dimensões sujeita a uma linha de fluxo magnético na origem, vamos considerar o caso mais simples de uma partícula livre ($\phi = 0$) em duas dimensões. Na próxima seção vamos investigar a possibilidade de conservação da helicidade para esse caso mais simples.

2.4. O Caso Livre.

Consideraremos nessa seção o problema de uma partícula de Dirac livre em duas dimensões. Nesse caso o operador hamiltoniana é essencialmente auto-adjunto e suas auto-funções são sempre regulares na origem.

Inicialmente vamos encontrar quais são essas auto-funções mais gerais e a seguir verificar, a partir dessas auto-funções encontradas, que é possível obter auto-funções simultâneas para os operadores hamiltoniana e helicidade.

Assim, vamos agora considerar a equação radial de auto-funções de H , que pode ser obtida fazendo-se $\phi = 0$ na equação (2.2.14):

$$H(r)\psi_{\pm}(r) = \pm |E| \psi_{\pm}(r) \quad , \quad (2.4.1)$$

onde:

$$H(r) = \begin{pmatrix} h(r) + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & h(r) - \sigma_3 m \end{pmatrix}, \quad (2.4.2)$$

com:

$$h(r) = \begin{pmatrix} 0 & -i \left(\partial_r + \frac{t+1}{r} \right) \\ -i \left(\partial_r - \frac{t}{r} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.3)$$

onde l é o número inteiro associado a onda parcial " l ".

Vamos escrever as auto-funções $\psi_{\pm}(r)$ sob a forma:

$$\psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \alpha & \phi_{\pm}^{(1)} \\ \beta & \phi_{\pm}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.4.4)$$

com $\phi_{\pm}^{(1),(2)}$ sendo espinores de duas componentes e α e β sendo duas constantes para um certo valor fixo da energia. Assim, o problema de determinação de auto-funções da equação (2.4.1) fica equivalente ao seguinte problema de determinação de auto-funções de duas componentes:

$$(\hbar + \sigma_3 ms) \phi_{\pm}^j = \pm |E| \phi_{\pm}^j, \quad j = 1, 2, \quad (2.4.5)$$

onde para $s = +1$, estaremos resolvendo o problema de determinação de $\phi_{\pm}^{(1)}$ e para $s = -1$, estaremos resolvendo o problema de determinação de $\phi_{\pm}^{(2)}$.

Definindo:

$$\phi_{\pm}^j = \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix}, \quad (2.4.6)$$

e usando a equação (2.4.3), a equação (2.4.5) se torna:

$$\begin{pmatrix} ms & -i \left(\partial_r + \frac{l+1}{r} \right) \\ -i \left(\partial_r - \frac{l}{r} \right) & -ms \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix} = \pm |E| \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

Da equação (2.4.7) acima vem que:

$$ms u_{\pm}^j - i \left(\partial_r + \frac{l+1}{r} \right) v_{\pm}^j = \pm |E| u_{\pm}^j \quad (2.4.8)$$

$$-i \left(\partial_r - \frac{l}{r} \right) u_{\pm}^j - ms v_{\pm}^j = \pm |E| v_{\pm}^j, \quad (2.4.9)$$

de onde tiramos:

$$u_{\pm}^j = \frac{-i}{\pm |E| - ms} \left(\partial_r + \frac{l+1}{r} \right) v_{\pm}^j \quad (2.4.10)$$

e:

$$v_{\pm}^j = \frac{-i}{\pm |E| + ms} \left(\partial_r - \frac{l}{r} \right) u_{\pm}^j \quad (2.4.11)$$

Substituindo a equação (2.4.11) na equação (2.4.10), obtemos a seguinte equação para $u_{\pm}^j(r)$:

$$\left(\partial_{kr}^2 + \frac{1}{r} \partial_{kr} + \left(1 - \frac{l^2}{(kr)^2} \right) \right) u_{\pm}^j = \pm |E| u_{\pm}^j, \quad (2.4.12)$$

onde introduzimos a definição:

$$k = \sqrt{E^2 - m^2}. \quad (2.4.13)$$

A solução mais geral da equação (2.4.12) para l inteiro é:

$$u_{\pm}^j = J_l(kr). \quad (2.4.14)$$

Lembre-mo-nos que $J_{-l} = (-)^l J_l$. Substituindo o resultado da equação (2.4.14) acima na equação (2.4.11), a qual relaciona as componentes inferior ($v_{\pm}^j$) e superior ($u_{\pm}^j$), temos:

$$v_{\pm}^j = \frac{ik}{\pm |E| + ms} J_{l+1}(kr), \quad (2.4.15)$$

onde usamos o resultado da equação (2.2.26).

Substituindo os resultados das equações (2.4.14) e (2.4.15) na equação (2.4.6) encontramos para $s = +1$ a função $\phi_{\pm}^{(1)}$ e para $s = -1$ a função $\phi_{\pm}^{(2)}$ como sendo iguais a:

$$\phi_{\pm(r)}^{(1)} = \begin{pmatrix} J_l(kr) \\ \frac{ik}{\pm |E| + m} J_{l+1}(kr) \end{pmatrix} \quad (2.4.16)$$

e:

$$\phi_{\pm(r)}^{(2)} = \begin{pmatrix} J_l(kr) \\ \frac{ik}{\pm |E| - m} J_{l+1}(kr) \end{pmatrix}. \quad (2.4.17)$$

De modo que a equação (2.4.4) para as auto-funções mais gerais de quatro componentes do operador $H(r)$, pode ser escrita como:

$$\psi_{\pm}(kr) = \begin{pmatrix} \alpha J_l(kr) \\ \alpha \frac{ik}{\pm |E| + m} J_{l+1}(kr) \\ \beta J_l(kr) \\ \beta \frac{ik}{\pm |E| - m} J_{l+1}(kr) \end{pmatrix}. \quad (2.4.18)$$

Vejamos agora se conseguimos encontrar auto-funções simultâneas para os operadores H e Λ para algum valor dos coeficientes α e β que regulam respectivamente as proporções das componentes superior e inferior. Para isso vamos impor que:

$$\Lambda \psi_{\pm} = \lambda \psi_{\pm}. \quad (2.4.19)$$

Lembrando (veja equação (2.3.3)) que Λ pode ser escrito como:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix}$$

e usando a equação (2.4.4), a equação (2.4.19) acima pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \phi_{\pm}^{(1)} \\ \beta & \phi_{\pm}^{(2)} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \phi_{\pm}^{(1)} \\ \beta & \phi_{\pm}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.4.20)$$

de onde vem que:

$$\beta h \phi_{\pm}^{(2)} = \lambda \alpha \phi_{\pm}^{(1)} \quad (2.4.21)$$

$$\alpha h \phi_{\pm}^{(1)} = \lambda \beta \phi_{\pm}^{(2)}. \quad (2.4.22)$$

Devido à equação (2.4.5), as equações (2.4.21) e (2.4.22) acima podem ser escritas como sendo:

$$\beta (\pm |E| + \sigma_3 m) \phi_{\pm}^{(2)} = \lambda \alpha \phi_{\pm}^{(1)} \quad (2.4.23)$$

$$\alpha (\pm |E| - \sigma_3 m) \phi_{\pm}^{(1)} = \lambda \beta \phi_{\pm}^{(2)} \quad (2.4.24)$$

As equações acima fornecem o sistema:

$$\beta (\pm |E| + m) = \lambda \alpha \quad (2.4.25)$$

$$\alpha (\pm |E| - m) = \lambda \beta \quad (2.4.26)$$

A condição de existência de soluções (α e β) para o sistema acima fornece:

$$\lambda = \pm \sqrt{E^2 - m^2} = \pm k \quad (2.4.27)$$

que são os auto-valores da helicidade.

Para $\lambda = +k$, temos a seguinte relação entre os coeficientes α e β :

$$\beta = \frac{k}{\pm |E| + m} \alpha \quad (2.4.28)$$

e para $\lambda = -k$, temos:

$$\beta = \frac{-k}{\pm |E| + m} \alpha. \quad (2.4.29)$$

Assim, tomando α e β como nas equações (2.4.28) e (2.4.29), obtemos as auto-funções simultâneas de H e Λ como sendo as seguintes:

$$\psi_{|E|, \pm k}(kr) = \begin{pmatrix} J_l(kr) \\ \frac{ik}{|E|+m} J_{l+1}(kr) \\ \pm \frac{k}{|E|+m} J_l(kr) \\ \pm i J_{l+1}(kr) \end{pmatrix}, \quad (2.4.30)$$

$$\psi_{-|E|, \pm k}(kr) = \begin{pmatrix} J_l(kr) \\ \frac{-ik}{|E|-m} J_{l+1}(kr) \\ \mp \frac{k}{|E|-m} J_l(kr) \\ \pm i J_{l+1}(kr) \end{pmatrix}. \quad (2.4.31)$$

Vemos, então, que para o caso livre ($\phi = 0$), como os operadores H e Λ são essencialmente auto-adjuntos, o problema de determinação das auto-funções simultâneas é facilmente resolvido. Para o caso não livre, quando existe a presença da linha de fluxo magnético na origem, como veremos nos próximos capítulos, além das condições que dão as proporções entre as componentes superiores e inferiores dos espinores surgem outras condições que relacionam os parâmetros das extensões e que tornam o problema mais complicado.

Capítulo 3

Um Método Heurístico para verificação da necessidade de extensões auto-adjuntas.

No capítulo anterior verificamos, através da análise das auto-funções dos operadores hamiltoniana (dada pela equação (2.2.31)) e das auto-funções do operador helicidade (dadas pelas equações (2.3.17) e (2.3.18)), que não são possíveis soluções singulares para $\nu = n + \phi \geq 0$ e $\nu \leq -1$, uma vez que essas soluções não são integráveis na vizinhança da origem nesses casos. Para $-1 < \nu < 0$, verificamos que as soluções singulares são localmente normalizáveis na vizinhança da origem, sendo impossível, nesse caso, impor a regularidade na origem simultaneamente para as componentes superior e inferior do espinor de auto-funções de H (e de Λ). Assim concluímos que para $-1 < \nu < 0$ são possíveis extensões auto-adjuntas para H e para Λ que podem ser obtidas pelo método dos índices de deficiência, que apresentaremos no Capítulo 4.

No entanto, é bastante instrutivo notar que podemos chegar a essa mesma conclusão, quanto à possibilidade de extensões auto-adjuntas, sem precisar obter as auto-funções de H e de Λ , para só então analisar os intervalos de ν para os quais as soluções singulares na origem são admissíveis.

Podemos obter o intervalo de ν para o qual são possíveis extensões auto-adjuntas para H e Λ através de um método heurístico bastante simples que consiste em se fazer a análise do comportamento da equação diferencial para as componentes superior e inferior do espinor de auto-funções na vizinhança da origem, considerando apenas os termos dominantes da equações diferenciais quando $r \sim 0$.

A equação diferencial para a componente superior do espinor de auto-funções de H , conforme mostra a equação (2.2.23) tem a forma:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \left(\frac{\nu^2}{r^2} - k^2 \right) u = 0 \quad (3.1)$$

A equação diferencial para a componente superior do espinor de auto-funções de Λ , conforme a equação (2.3.11), é da forma:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \left(\frac{\nu^2}{r^2} - \lambda^2 \right) u = 0 \quad (3.2)$$

Considerando apenas os termos dominantes nas duas diferenciais acima quando $r \sim 0$ temos a seguinte equação diferencial para as componentes superior das auto-funções tanto de H quanto de Λ :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} u = 0 \quad (3.3)$$

Tentando uma solução particular para a equação (3.3) acima, da forma:

$$u(r) = cr^\alpha, \quad (3.4)$$

onde α é uma constante a ser determinada, concluímos que:

$$\alpha = \pm \nu. \quad (3.5)$$

Esse resultado mostra que deve haver *dois tipos* de solução para as equações diferenciais (3.1) e (3.2) com *comportamento na origem distintos*.

Existe uma solução regular, que na origem se comporta como r^ν para $\nu > 0$ ou com $r^{-\nu}$ se $\nu < 0$. Existe também uma solução singular na origem, que se comporta (na vizinhança da origem) como $r^{-\nu}$ para $\nu > 0$ ou com r^ν para $\nu < 0$.

Vamos analisar agora as equações diferenciais para as componentes inferiores dos espinores de auto-funções de H e de Λ .

Note que as equações (2.2.4) e (2.2.22) mostram que a equação diferencial para as componentes inferiores da auto-funções de H tem a forma:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \left(\frac{(\nu+1)^2}{r^2} - k^2 \right) v = 0. \quad (3.6)$$

Do mesmo modo a equação diferencial para a componente inferior do espinor de auto-funções de Λ , conforme a equação (2.3.12), é:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \left(\frac{(\nu+1)^2}{r^2} - \lambda^2 \right) v = 0. \quad (3.7)$$

Considerando novamente apenas os termos dominantes das duas equações diferenciais na vizinhança da origem e tentando uma solução do tipo r^α , concluímos que:

$$\alpha = \pm(\nu+1). \quad (3.8)$$

Esse resultado mostra que as equações (3.6) e (3.7) admitem dois tipos de solução com comportamentos distintos na origem: uma sendo regular e outra singular na origem.

Resta saber agora se as soluções singulares na origem são admissíveis para algum intervalo de ν , ou seja, se são de quadrado integrável na vizinhança da origem para certos valores de ν .

Lembrando que estamos tratando de um problema em duas dimensões temos que, portanto, soluções do tipo r^β são admissíveis (integráveis na origem) só se $2\beta + 1 > -1$.

Assim a análise da possibilidade de soluções singulares integráveis na origem para as componentes superior e inferior nos leva à conclusão que, para $\nu \geq 0$ e $\nu \leq -1$, as soluções singulares não são admissíveis. De modo que, para $\nu \geq 0$ e $\nu \leq -1$ os operadores H e Λ são essencialmente auto-adjuntos, não requerendo nem admitindo outras extensões (havendo apenas uma única extensão possível). Para $-1 < \nu < 0$, além das soluções regulares são possíveis também as soluções singulares que são normalizáveis na origem. *De modo que são possíveis diferentes extensões auto-adjuntas (na verdade famílias a quatro parâmetros de extensões) para os operadores hamiltoniana H e helicidade Λ para $-1 < \nu < 0$, que correspondem, de fato, às várias soluções possíveis onde são tomadas diferentes proporções entre as soluções regular e singular.*

Capítulo 4

Teoria das Extensões Auto-Adjuntas de von Neumann

4.1. Introdução.

Sabemos que observáveis em Mecânica Quântica são operadores que atuam em *espaços de Hilbert*. Para os matemáticos, um operador é definido pela sua *ação* e por seu *domínio*. Nós, físicos, em geral ignoramos o domínio, pensando que basta tomar o conjunto de vetores tais que a ação do operador não tire este vetor do espaço de Hilbert.

Entretanto os operadores admissíveis em Mecânica Quântica devem ser obrigatoriamente *auto-adjuntos*. Em certos domínios um operador pode não ser auto-adjunto. Torna-se, portanto, imperativo estudar esta questão com maior cuidado.

Assim, sejam f e g dois elementos de um espaço de Hilbert e B um operador linear. O adjunto de B , B^* , é definido como:

$$\langle f | Bg \rangle = \langle B^* f | g \rangle. \quad (4.1.1)$$

O operador B^* pode existir ou não. Se existir e se B^* tiver a mesma ação que B , então B é dito simétrico. Se o adjunto B^* for igual ao operador B , isto é, se tiver a mesma ação e o mesmo domínio, então o operador é dito auto-adjunto.

Surgem, então, as perguntas:

"Como saber se um operador é auto-adjunto? "

"Como construir operadores auto-adjuntos? "

Tentaremos responder a essas questões posteriormente na Seção 4.3. Na próxima seção apenas definiremos algumas noções necessárias para o entendimento do assunto.

4.2. Algumas definições.

Vamos, agora, introduzir alguns conceitos e definições que serão usados na próxima seção quando discutiremos os critérios para se saber se um operador admite extensões auto-adjuntas e o método de von Neumann para obtê-las. Se o leitor preferir poderá passar a leitura das próximas seções, consultando essa se e quando for necessário. Consultamos as referências [11], [12], [13], [14], [23], [24], [25], [26] e [27] para a elaboração dessa e das próximas seções.

Definição: Dizemos que uma sequência de vetores ψ_n é uma *sequência de Cauchy* se:

$$\|\psi_n - \psi_m\| \rightarrow 0 \quad , \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty \quad (4.2.1)$$

onde o número positivo $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ é chamado de *norma* ou *comprimento* do vetor ψ .

Toda sequência de vetores ψ_n , num determinado espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, que converge para um vetor limite ψ , é uma sequência de Cauchy, pois se:

$$\psi_n \rightarrow \psi, \quad (4.2.2)$$

isso significa que:

$$\|\psi_n - \psi\| \rightarrow 0 \quad , \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.2.3)$$

Então:

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|\psi_n - \psi + \psi - \psi_m\| \leq \|\psi_n - \psi\| + \|\psi - \psi_m\| \rightarrow 0 \quad , \quad \text{quando } n, m \rightarrow \infty. \quad (4.2.4)$$

Nessa demonstração usamos a desigualdade triangular^{[11], [12]}.

Definição: um espaço é dito *completo*, se toda sequência de Cauchy de vetores desse espaço converge.

Definição: um conjunto é dito *fechado* se toda sequência convergente de vetores ψ_n desse conjunto converge para um vetor limite ψ que também pertence a esse conjunto.

Definição: se um espaço linear com um produto interno definido é completo, então é chamado de *espaço de Hilbert*.

Definição: um espaço de Hilbert é *separável* se possuir uma base ortonormal que consiste em um conjunto contável (finito ou infinito) de vetores, digamos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_j, \dots$.

Definição: seja A um conjunto de vetores tal que $A \subset M$. Se para todo vetor $\psi \in M$, existe uma sequência de vetores ψ_n em A que converge para ψ , então A é dito *denso* em M .

Definição: um operador linear B é *limitado* se existe um número positivo $C \geq 0$ tal que:

$$\|B\psi\| \leq C\|\psi\| \quad , \quad \text{para } \forall \psi \quad (4.2.5)$$

Caso contrário o operador é chamado *não-limitado*. O menor número C que satisfaz essa propriedade é chamado de *norma* de B e é denotado por $\|B\|$.

Definição: um operador linear B é *contínuo* se para toda sequência de vetores ψ_n que converge para um vetor limite ψ , acontecer que $B\psi_n \rightarrow B\psi$. Um operador é contínuo se e só se for limitado^[12], como se pode verificar.

Definição: O *domínio* de um operador B denotado por $D(B)$ é o conjunto de vetores ψ para os quais $B\psi$ está definido, ou seja, $B\psi$ também é um vetor pertencente ao espaço de Hilbert em questão.

Um operador limitado está definido para todos os vetores do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ em questão, isto é $D(B) = \mathcal{H}$, em geral $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{R})$. Como isso não ocorre para um operador não-limitado, o domínio do operador é um conjunto de vetores ψ tal que $\psi \in D(B) \subset \mathcal{H}$.

Definição: $A \times B$ é o produto cartesiano de A e B , isto é, o conjunto de pares ordenados:

$$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Definição: O gráfico de um operador linear B denotado por $\Gamma(B)$ é o conjunto:

$$\Gamma(B) = \{(\varphi, B\varphi) \mid \varphi \in D(B)\}. \quad (4.2.6)$$

Assim o gráfico de B é um subconjunto de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e é um espaço de Hilbert com o produto interno:

$$\langle (\varphi_1, \psi_1) \mid (\varphi_2, \psi_2) \rangle = \langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle + \langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle \quad (4.2.7)$$

Definição: O operador B é dito *fechado* se $\Gamma(B)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Teorema: Se B é um operador densamente definido, então o adjunto de B , B^* é único.

Seja $B: D(B) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear densamente definido. Por definição:

$$v \in D(B^*), \quad (4.2.8)$$

se existe um vetor $w \in X$, tal que

$$\langle v | Bu \rangle = \langle w | u \rangle, \quad \text{para todo } u \in D(B) \quad (4.2.9)$$

e definimos:

$$B^*v = w. \quad (4.2.10)$$

Assim, obtemos o operador adjunto $B^*: D(B^*) \subseteq X \rightarrow X$. Para que essa definição faça sentido, $D(B)$ deve ser denso em X . De fato, suponha que a relação (4.2.9) seja verdadeira se trocarmos w por w_1 . Então, devemos ter:

$$\langle w - w_1 | u \rangle = 0, \quad \text{para todo } u \in D(B). \quad (4.2.11)$$

Uma vez que $D(B)$ é denso em X , concluímos que $w = w_1$. Assim o adjunto B^* está unicamente definido^{[23],[24]}.

Teorema: Se um operador linear B está definido num domínio denso, então o adjunto B^* de B é fechado^{[11],[12]}.

Definição: Sejam dois operadores A e B tal que $D(A) \supset D(B)$. Se no domínio de B , ocorrer que $A = B$ então A é chamado de *extensão* de B .

Definição: Um operador linear B é *fechável* se ele tem pelo menos uma extensão fechada. A menor extensão fechada de um operador é chamada de seu *fecho* denotado por $\bar{B}$.

Definição: Um operador B definido num domínio denso (do espaço de Hilbert) é chamado *simétrico* se $D(B) \subset D(B^*)$ e se $B\psi = B^*\psi$, para todo $\psi \in D(B)$. Equivalentemente B é *simétrico* se e só se:

$$\langle \varphi | B\psi \rangle = \langle B\varphi | \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in D(B). \quad (4.2.12)$$

Definição: Um operador linear B é *auto-adjunto* se $B = B^*$, ou seja se e só se B é simétrico e se $D(B) = D(B^*)$.

Definição: Um operador simétrico B é chamado *essencialmente auto-adjunto* se seu fecho $\bar{B}$ é auto-adjunto.

4.3. Critério para possibilidade de extensões auto-adjuntas.

Se quisermos saber se um operador B simétrico é auto-adjunto, devemos de acordo com o que foi definido na seção anterior, verificar se o domínio do operador $D(B)$ é o mesmo de seu adjunto $D(B^*)$. No entanto, checar a identidade dos domínios $D(B)$ e $D(B^*)$ não é muitas vezes trivial. Existe um outro critério mais prático para se verificar se um operador é ou não auto-adjunto.

Suponhamos que um operador B seja auto-adjunto e que exista um vetor $\varphi \in D(B^*) = D(B)$ tal que $B^*\varphi = i\varphi$. De modo que $B\varphi = i\varphi$ e

$$-i \langle \varphi | \varphi \rangle = \langle i\varphi | \varphi \rangle = \langle B\varphi | \varphi \rangle = \langle \varphi | B^*\varphi \rangle = \langle \varphi | B\varphi \rangle = i \langle \varphi | \varphi \rangle \quad (4.3.1)$$

Então $\varphi = 0$.

Assim se B é auto-adjunto a equação $B^*\varphi = \pm i\varphi$ não possui solução não trivial. Do mesmo modo, pode ser verificado que se B é um operador fechado e $B^*\varphi = \pm i\varphi$ não tem solução, então B é auto-adjunto.

Definição: Chamamos de núcleo de um operador F , denotado por $Ker(F)$ ao conjunto de vetores no domínio $D(F)$, tal que:

$$Ker(F) = \{u \in D(F) \mid Fu = 0\}. \quad (4.3.2)$$

Assim, o critério básico para se saber se um operador é auto-ajunto é:

Se um operador B é fechado e se $Ker(B^* \pm i) = \{0\}$, então B é auto-adjunto.

4.4. Técnica dos índices de deficiência de von Neumann para obtenção das extensões auto-adjuntas de um operador simétrico.

A técnica dos índices de deficiência desenvolvida por von Neumann permite verificarmos se um operador *simétrico* possui extensões auto-adjuntas, permitindo também a obtenção e caracterização dessas extensões caso elas existam.

Na teoria de von Neumann os chamados *subspaços de deficiência* desempenham um papel importante^{[11],[23],[26],[27]}.

São chamados *subspaços de deficiência* os seguintes subspaços de um operador simétrico B .

$$D_+(B) = \text{Ker}(i - B^*) \quad (4.4.1a)$$

$$D_-(B) = \text{Ker}(i + B^*) \quad (4.4.1b)$$

Os *índices de deficiência* de B : $n_+(B)$ e $n_-(B)$ são definidos como sendo:

$$n_+(B) = \dim D_+(B) \quad (4.4.2a)$$

$$n_-(B) = \dim D_-(B). \quad (4.4.2b)$$

Através da introdução de um novo produto interno:

$$\langle \varphi | \psi \rangle_B = \langle \varphi | \psi \rangle + \langle B\varphi | B\psi \rangle, \quad (4.4.3)$$

pode ser demonstrado que o domínio do adjunto B^* é dado pela soma direta dos seguintes subspaços mutuamente ortogonais com o produto interno definido acima^[26, 27, 28]:

$$D(B^*) = D(B) \oplus_B D_+(B) \oplus_B D_-(B). \quad (4.4.4)$$

Se o operador B é simétrico em $D(B)$ e em $D_+(B) \oplus_B D_-(B)$ e se:

$$n_+(B) = n_-(B) = n, \quad (4.4.5)$$

então, existe uma matriz unitária U , $n \times n$ que mapeia $D_+(B)$ em $D_-(B)$.

De modo que o domínio das extensões auto-adjuntas é definido por:

$$D(B) = \{\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \mid \varphi \in D(B), \varphi_+ \in D_+(B)\} \quad (4.4.6)$$

e a ação do operador B no domínio dado por (4.4.6) é:

$$B(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = B\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+. \quad (4.4.7)$$

4.5. Relação entre as extensões auto-adjuntas e as condições de contorno.

Notemos que a aplicação de U em um vetor $\varphi_+ \in D_+(B)$ leva numa combinação linear de vetores $\varphi_- \in D_-(B)$, isto é:

$$U\varphi_+^i = \sum_{j=1}^n W_{ij}\varphi_-^j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5.1)$$

Para encontrarmos as condições de contorno a serem satisfeitas pelas funções ψ no domínio das extensões auto-adjuntas de B , basta utilizarmos o fato de que o operador B é simétrico no domínio definido por (4.4.6), isto é:

$$\left\langle B \left(\varphi_+^i + \sum_{j=1}^n W_{ij}\varphi_-^j \right) \mid \psi \right\rangle = \left\langle \left(\varphi_+^i + \sum_{j=1}^n W_{ij}\varphi_-^j \right) \mid B\psi \right\rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5.2)$$

4.6. Obtenção das extensões auto-adjuntas para o operador momento linear em uma dimensão.

Vamos considerar o operador momento linear $P = i\frac{d}{dx}$ definido em $L^2(0,1)$. Para que P seja simétrico em um domínio D_0 de funções absolutamente contínuas no intervalo $(0,1)$ devemos ter que, para $\psi \in D_0(P)$ e $\varphi \in D_0(P^*)$:

$$\begin{aligned} \left\langle i\frac{d}{dx}\varphi \mid \psi \right\rangle &= \left\langle \varphi \mid i\frac{d}{dx}\psi \right\rangle \\ -i \int_0^1 \frac{d}{dx}\varphi^*(x)\psi(x)dx &= i \int_0^1 \varphi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x)dx \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Integrando por partes vemos que isso só ocorre se:

$$\varphi^*(1)\psi(1) - \varphi^*(0)\psi(0) = 0 \quad (4.6.2)$$

Assim, é necessária a especificação de condições de contorno para que o operador P seja simétrico. No caso do operador momento linear em uma dimensão definido em $L^2(0,1)$ é fácil encontrar as extensões auto-adjuntas sem precisar utilizar a técnica dos índices de deficiência. Se definirmos $D_0(P)$ como sendo:

$$D_0(P) = \{\psi \mid \psi \in AC[0,1], \psi(0) = \psi(1) = 0\}, \quad (4.6.3)$$

então o operador P é simétrico. No entanto, a condição de contorno para as funções em $D_0(P)$ acima ($\psi(0) = \psi(1) = 0$) é "muito forte", de modo que não é necessário impor qualquer condição de contorno às funções em $D_0(P^*)$ para que a equação (4.6.2) se verifique.

Assim:

$$D_0(P^*) \supset D_0(P). \quad (4.6.4)$$

Para definirmos o operador P como sendo um operador auto-adjunto é necessário impor condições de contorno mais gerais (ou mais "fracas") a serem obedecidas pelas funções em $D(P)$ tais que (4.6.2) requeira as *mesmas* condições de contorno para as funções em $D(P^*)$, isto é, $D(P) = D(P^*)$.

Podemos facilmente verificar que definindo o domínio de P como sendo

$$D(P) = \{\psi \mid \psi \in A[0,1], \psi(1) = \alpha\psi(0) \mid \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\} \quad (4.6.5)$$

a equação (4.6.2) implica em mesmas condições de contorno a serem satisfeitas pelas funções em $D(P^*)$, isto é $D(P^*) = D(P)$, de modo que o operador P definido nesse domínio é auto-adjunto. A cada valor de α corresponde uma extensão auto-adjunta para o operador P .

Vamos agora aplicar a técnica dos índices de deficiência de von Neumann para verificarmos que é possível chegar ao mesmo domínio obtido através da equação (4.6.5).

Vamos começar determinando os subspaços de deficiência $D_+(P)$ e $D_-(P)$ definidos por:

$$P^* \varphi_{\pm} = \pm i \varphi_{\pm} \quad \text{se} \quad \varphi_{\pm} \in D_{\pm} \Rightarrow \quad (4.6.6)$$

$$i \frac{d}{dx} \varphi_{\pm} = \pm i \varphi_{\pm} \quad \text{se} \quad \varphi_{\pm} \in D_{\pm} \quad (4.6.7)$$

Assim $D_{\pm}(P) = \{c e^{\pm x} \mid c \in \mathbb{C}\}$, de modo que os índices de deficiência $n_+(P)$ e $n_-(P)$ são ambos iguais a um. E portanto existe uma família a um parâmetro de extensões auto-adjuntas admissíveis

Considerando os vetores normalizados de $D_{\pm}(P)$:

$$\varphi_+ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} e^x \quad \text{e} \quad \varphi_- = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2 - 1}} e^{-x}, \quad (4.6.8)$$

veremos que as únicas aplicações unitárias de $D_+(P)$ em $D_-(P)$ são as dadas por $\varphi_+ \rightarrow e^{i\theta} \varphi_-$ com $\theta \in \mathbb{R}$. De modo que as extensões auto-adjuntas de P são dadas pelo domínio:

$$D_{\theta}(P) = \left\{ \varphi + \beta \varphi_+ + e^{i\theta} \beta \varphi_- \mid \varphi \in D(P), \beta \in \mathbb{C} \right\} \quad (4.6.9)$$

É interessante checarmos que o domínio dado por (4.6.9) é o mesmo que o da equação (4.6.5). Para isso basta usarmos o fato de que o operador P deve ser simétrico no domínio de suas extensões auto-adjuntas, recorrendo à equação (4.5.2). Assim, seja $\psi \in D_{\theta}(P)$ então, devemos ter que:

$$\langle P(\varphi_+ + e^{i\theta} \varphi_-) \mid \psi \rangle = \langle \varphi_+ + e^{i\theta} \varphi_- \mid P\psi \rangle \quad (4.6.10)$$

$$\begin{aligned} & -i \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} e^x + e^{-i\theta} \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2 - 1}} e^{-x} \right) \psi(x) dx = \\ & -i \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} e^x + e^{-i\theta} \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2 - 1}} e^{-x} \right) \frac{d}{dx} \psi(x) dx \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

Para que a igualdade acima se verifique devemos ter a satisfação da equação (4.6.2) que nesse caso se torna:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} \left[(e + e^{-i\theta}) \psi(1) - (1 + e^{-i\theta} e) \psi(0) \right] = 0 \quad (4.6.12)$$

A equação acima dá a seguinte condição de contorno para as funções ψ no domínio das extensões auto-adjuntas:

$$\psi(1) = \alpha \psi(0), \quad (4.6.13)$$

onde:

$$\alpha = \frac{1 + e^{-i\theta} e}{e + e^{-i\theta}}, \quad \text{com } |\alpha| = 1. \quad (4.6.14)$$

Portanto, como vemos, as condições de contorno obtidas através da equação (4.6.11) para as funções ψ do domínio $D_\theta(P)$ dado pela equação (4.6.9) são as mesmas condições de contorno descritas pela equação (4.6.5) e definem os domínios para os quais operador P é auto-adjunto. Para cada valor de α na equação (4.6.13) é possível uma extensão auto-adjunta (com $|\alpha| = 1$) para P definido em $L^2(0, 1)$.

4.7. Obtenção das extensões auto-adjuntas para o operador energia cinética definido em $L^2(0, \infty)$ em uma dimensão.

Vamos considerar o operador energia cinética $K = -\frac{d^2}{dx^2}$, definido no domínio $D_0(K)$ constituído pelas funções $AC(0, \infty)$ e infinitamente diferenciáveis.

Vamos inicialmente aplicar o método dos índices de deficiência para determinar as extensões auto-adjuntas desse operador.

As únicas soluções normalizáveis da equação:

$$\frac{-d^2 \varphi}{dx^2} = \pm i \varphi_{\pm} \quad (4.7.1)$$

são:

$$\varphi_+ = \frac{1}{N} e^{\frac{(-1+i)x}{\sqrt{2}}}, \quad (4.7.2)$$

$$\varphi_- = \frac{1}{N} e^{\frac{-(1+i)x}{\sqrt{2}}}, \quad (4.7.3)$$

uma vez que as soluções $\varphi_+ = e^{\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}x}$ e $\varphi_- = e^{\frac{i(1+i)}{\sqrt{2}}x}$ não são de quadrado integrável no intervalo $(0, \infty)$, ou seja, não pertencem a $L^2(0, \infty)$.

Sendo assim os índices de deficiência $n_+(K)$ e $n_-(K)$ são ambos iguais a um e as únicas aplicações unitárias de $D_+(K)$ em $D_-(K)$ são dadas por $\varphi_+ \rightarrow e^{i\theta} \varphi_-$. De modo que as extensões auto-adjuntas são dadas pelo domínio:

$$D_\theta(K) = \left\{ \varphi + \beta \varphi_+ + e^{i\theta} \beta \varphi_- \mid \varphi \in D_0(K), \beta \in \mathbb{C} \right\} \quad (4.7.4)$$

Notemos que, para que o operador $K = \frac{d^2}{dx^2}$ definido em $L^2(0, \infty)$ seja simétrico num domínio $D_0(K)$ de funções $AC(0, \infty)$ e infinitamente diferenciáveis que se anulam no infinito, devemos ter que, para $\psi \in D_0(K)$ e $\varphi \in D_0(K^*)$:

$$\left\langle \frac{-d^2\varphi}{dx^2} \mid \psi \right\rangle = \left\langle \varphi \mid \frac{-d^2\psi}{dx^2} \right\rangle \quad (4.7.5)$$

A integração por partes nos mostra que a igualdade acima só é satisfeita se :

$$\varphi^*(0) \frac{d\psi}{dx}(0) - \frac{d\varphi^*}{dx}(0) \psi(0) = 0 \quad (4.7.6)$$

Se quisermos encontrar as condições de contorno a serem satisfeitas pelas funções no domínio das extensões auto-adjuntas do operador K definido em $L^2(0, \infty)$, basta usarmos o fato de que tal operador K deve ser simétrico no domínio $D_\theta(K)$ de suas extensões auto-adjuntas, recorrendo à equação (4.5.2). Assim, para uma função $\psi \in D_\theta(K)$ devemos ter que:

$$\left\langle K(\varphi_+ + e^{i\theta} \varphi_-) \mid \psi \right\rangle = \left\langle (\varphi_+ + e^{i\theta} \varphi_- \mid K\psi) \right\rangle \quad (4.7.7)$$

Para que a igualdade acima se verifique devemos ter a satisfação da equação (4.7.6), que nesse caso, nos leva a :

$$(1 + e^{-i\theta}) \frac{d\psi}{dx}(0) + [e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\theta} e^{-i\frac{\pi}{4}}] \psi(0) = 0 \quad (4.7.8)$$

A equação acima dá a seguinte condição de contorno para as funções $\psi \in D_\theta(K)$:

$$\frac{d\psi}{dx}(0) = \alpha\psi(0) \quad (4.7.9)$$

onde:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (4.7.10)$$

ou seja $\alpha \in \mathbb{R} - \{\infty\}$.

Para $\alpha = \infty$, isto é, quando o parâmetro θ vale π , a equação (4.7.8) fornece a seguinte condição de contorno:

$$\psi(0) = 0 \quad (4.7.11)$$

Assim, para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ na equação (4.7.9), é possível uma extensão auto-adjunta para o operador K definido em $L^2(0, \infty)$.

4.8. Obtenção das extensões auto-adjuntas para o operador energia cinética definido em $L^2(-\infty, +\infty)$ em uma dimensão.

Vamos considerar agora o problema de determinação das extensões auto-adjuntas do operador energia cinética $K = -\frac{d^2}{dx^2}$, definido em $L^2(-\infty, +\infty)$. Nesse caso a obtenção das condições de contorno mais gerais não é tão simples como nos casos tratados anteriormente. Assim, convém encontrarmos as extensões auto-adjuntas diretamente através do método dos índices de deficiência e utilizando a fórmula da equação (4.5.2). No entanto, esse problema não trivial já foi considerado pelos autores Carreau^[13] e por Albeverio^[14]. De forma que, é interessante checarmos se conseguimos reproduzir os resultados das referências [9], [13] e [14] através da fórmula da equação (4.5.2).

Para que o operador K definido em $L^2(-\infty, +\infty)$ seja simétrico devemos ter que para ψ no domínio de K e ϕ no domínio do adjunto K^* :

$$\left\langle -\frac{d^2}{dx^2}\phi \mid \psi \right\rangle = \left\langle \phi \mid -\frac{d^2}{dx^2}\psi \right\rangle. \quad (4.8.1)$$

A integração por partes nos mostra que a igualdade acima só é satisfeita se:

$$[\phi^* \psi' - \phi'^* \psi]_{0-}^{0+} = 0. \quad (4.8.2)$$

Os subspaços de deficiência $D_{\pm}(K)$ definidos pelas equações:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \varphi_{\pm} = \pm i \varphi_{\pm}, \quad \varphi_{\pm} \in D_{\pm}(K), \quad (4.8.3)$$

são gerados pelas funções ortonormalizadas descontínuas na origem:

$$\varphi_+^1 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}x}, & x > 0 \end{cases} \quad \varphi_+^2 = \begin{cases} e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}x}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (4.8.4)$$

e:

$$\varphi_-^1 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}x}, & x > 0 \end{cases} \quad \varphi_-^2 = \begin{cases} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}x}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (4.8.5)$$

Vemos então que as dimensões dos subspaços de deficiência $D_{\pm}(K)$, isto é, os índices de deficiência $n_{\pm}(K)$ são ambos iguais a dois. E portanto, as condições de contorno admissíveis para os vetores ψ no domínio das extensões auto-adjuntas do operador simétrico K , podem ser parametrizadas por uma matriz unitária W 2×2 , através das equações:

$$\langle K (\varphi_+^1 + w_{11}\varphi_-^1 + w_{12}\varphi_-^2) | \psi \rangle = \langle (\varphi_+^1 + w_{11}\varphi_-^1 + w_{12}\varphi_-^2) | K\psi \rangle \quad (4.8.6)$$

e:

$$\langle K (\varphi_+^2 + w_{21}\varphi_-^1 + w_{22}\varphi_-^2) | \psi \rangle = \langle (\varphi_+^2 + w_{21}\varphi_-^1 + w_{22}\varphi_-^2) | K\psi \rangle. \quad (4.8.7)$$

A matriz unitária W pode ser tomada como tendo a forma particular:

$$W = \begin{pmatrix} \cos be^{i(c+a)} & i \operatorname{sen} be^{-i(\Psi-a)} \\ i \operatorname{sen} be^{i(\Psi+a)} & \cos be^{-i(c-a)} \end{pmatrix}. \quad (4.8.8)$$

Usando as equações (4.8.2), (4.8.4), e (4.8.5) as equações (4.8.6) e (4.8.7) acima se tornam:

$$(1 + \bar{w}_{11})\psi'(0_+) + \left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{w}_{11}\right)\psi(0_+) - \bar{w}_{12}\psi'(0_-) + e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{w}_{12}\psi(0_-) = 0 \quad (4.8.9)$$

e:

$$\bar{w}_{21}\psi'(0_+) + e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{w}_{21}\psi(0_+) - (1 + \bar{w}_{22})\psi'(0_-) + \left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{w}_{22}\right)\psi(0_-) = 0. \quad (4.8.10)$$

As equações (4.8.9) e (4.8.10) acima com a matriz W dada pela equação (4.8.8) fornecem as condições de contorno mais gerais a serem satisfeitas pelas funções de onda na vizinhança da origem, correspondendo ao domínio mais geral, onde o operador K (definido em $L^2(-\infty, +\infty)$) é auto-adjunto.

No entanto, como dissemos anteriormente, as condições de contorno mais gerais para esse problema do operador energia cinética já foram encontradas por Carreau^[13] e por Albeverio^[14]. As condições de contorno mais gerais obtidas por esses autores podem ser escritas como na referência [8] como sendo:

$$\begin{pmatrix} \psi'(0_+) \\ \psi(0_+) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi'(0_-) \\ \psi(0_-) \end{pmatrix} \quad (4.8.11)$$

onde $\psi'(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$ e :

$$U = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (4.8.12)$$

onde os parâmetros α , β , δ , γ e θ são constantes reais satisfazendo a seguinte relação de unitariedade:

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 1. \quad (4.8.13)$$

Vamos verificar se as condições de contorno obtidas através das equações (4.8.9) e (4.8.10) coincidem com as referências [8], [13] e [14].

Multiplicando a equação (4.8.9) pelo fator $e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{w}_{21}$ e a equação (4.8.10) pelo fator $e^{i\frac{\pi}{4}}(1 - i\bar{w}_{11})$ e subtraindo as equações assim obtidas, temos:

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{21} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} (1 + \bar{w}_{11}) - e^{i\frac{\pi}{4}} (1 - i\bar{w}_{11}) \right] \psi'(0_+) \\ & + \left[e^{i\frac{\pi}{4}} (1 - i\bar{w}_{11}) (1 + \bar{w}_{22}) - e^{-i\frac{\pi}{4}} \bar{w}_{12} \bar{w}_{21} \right] \psi'(0_-) \\ & - i [\bar{w}_{12} \bar{w}_{21} + (1 - i\bar{w}_{11}) (1 - i\bar{w}_{22})] \psi(0_-) = 0. \end{aligned} \quad (4.8.14)$$

Utilizando a matriz unitária W como sendo dada pela equação (4.8.8), a equação (4.8.14) acima, para $\text{sen} b$ diferente de 0 (isto é w_{12} e w_{21} diferentes de zero), se torna:

$$\begin{aligned} \psi'(0_+) &= e^{i\psi} \left[\sqrt{2} \left(\frac{\cos(a + \frac{\pi}{4}) - \cos b \text{sen}(c - \frac{\pi}{4})}{\text{sen} b} \right) \right] \psi'(0_-) \\ &+ e^{i\psi} \left[\sqrt{2} \left(\frac{\text{sen} a - \cos b \cos c}{\text{sen} b} \right) \right] \psi(0_-). \end{aligned} \quad (4.8.15)$$

Comparando a equação acima com a equação (4.8.11), podemos identificar os parâmetros α e β e θ da referência [8] em função dos parâmetros ψ , a , b e c da equação (4.8.8):

$$\alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\cos(a + \frac{\pi}{4}) - \cos b \text{sen}(c - \frac{\pi}{4})}{\text{sen} b} \right), \quad (4.8.16a)$$

$$\beta = \sqrt{2} \left(\frac{\text{sen} a - \cos b \cos c}{\text{sen} b} \right) \quad (4.8.16b)$$

e:

$$\theta = \psi. \quad (4.8.16c)$$

Multiplicando a equação (4.8.9) pelo fator $\bar{w}_{21}$ e a equação (4.8.10) pelo fator $(1 + \bar{w}_{11})$ e depois subtraindo as equações assim obtidas, temos:

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{21} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} (1 - i\bar{w}_{11}) - e^{-i\frac{\pi}{4}} (1 + \bar{w}_{11}) \right] \psi(0_+) \\ & + \left[(1 + \bar{w}_{11})(1 + \bar{w}_{22}) - \bar{w}_{12}\bar{w}_{21} \right] \psi'(0_-) \\ & + \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \bar{w}_{12}\bar{w}_{21} - e^{i\frac{\pi}{4}} (1 - i\bar{w}_{22})(1 + \bar{w}_{11}) \right] \psi(0_-) = 0. \end{aligned} \quad (4.8.17)$$

Novamente, utilizando a equação (4.8.8), a equação (4.8.17) acima, para $\text{sen} b$ diferente de 0 (isto é w_{12} e w_{21} diferentes de zero), se torna:

$$\begin{aligned} \psi(0_+) &= -e^{i\psi} \left[\sqrt{2} \left(\frac{\cos a + \cos b \cos c}{\text{sen} b} \right) \right] \psi'(0_-) \\ &+ e^{i\psi} \left[\sqrt{2} \left(\frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{4} \right) + \cos b \text{sen} \left(c + \frac{\pi}{4} \right)}{\text{sen} b} \right) \right] \psi(0_-). \end{aligned} \quad (4.8.18)$$

Comparando a equação acima com a equação (4.8.11) podemos identificar as seguintes relações entre os parâmetros β , δ e θ das referências [8], [9], [13] e [14], com os parâmetros ψ , a , b e c da equação (4.8.8):

$$\delta = -\sqrt{2} \left[\frac{\cos a + \cos b \cos c}{\text{sen} b} \right], \quad (4.8.19a)$$

$$\gamma = \sqrt{2} \left[\frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{4} \right) + \cos b \text{sen} \left(c + \frac{\pi}{4} \right)}{\text{sen} b} \right] \quad (4.8.19b)$$

e:

$$\theta = \psi. \quad (4.8.19c)$$

É fácil verificar que os parâmetros α , β , δ e γ escritos em funções dos três parâmetros a , b e c através das equações (4.8.16a) e (4.8.16b) e (4.8.19a) e (4.8.19b) satisfazem automaticamente a equação (4.8.13) da unitariedade.

Para o caso em que $w_{12} = w_{21} = 0$ (isto é $\operatorname{sen} b = 0$), as condições de contorno das equações (4.8.14) e (4.8.17) se tornam:

$$\psi'(0_{\pm}) = \eta_{\pm} \psi(0_{\pm}) \quad , \eta_{\pm} \in \mathbb{R}.$$

De forma que as condições de contorno obtidas através da imposição das equações (4.8.6) e (4.8.7), onde a matriz paramétrica W é dada pela equação (4.8.8), são as mais gerais para o operador energia cinética em uma dimensão definido em $L^2(-\infty, +\infty)$ e coincidem com as demais apresentadas na literatura [8], [9], [13] e [14].

Capítulo 5

Extensões auto-adjuntas a dois parâmetros que não acoplam todas as componentes das funções de onda.

5.1. Extensões Auto-adjuntas para os operadores H e Λ .

O problema da determinação das extensões auto-adjuntas de um operador simétrico definido num domínio denso é equivalente ao problema da determinação das condições de contorno admissíveis para o mesmo conforme vimos (através dos exemplos) no capítulo anterior.

A técnica que usaremos para esse fim já foi descrita no Capítulo 4 e requer a determinação dos espaços de deficiência dos operadores H e Λ simétricos, atuando num domínio denso (do espaço de Hilbert) de funções contínuas em r que se anulam na origem.

Os subspaços de deficiência $D_{\pm}(H)$ e $D_{\pm}(\Lambda)$ são definidos por:

$$H^*\varphi_{\pm} = \pm im\varphi_{\pm}, \quad \text{se } \varphi_{\pm} \in D_{\pm}(\Lambda), \quad (5.1.1a)$$

$$\Lambda^*\xi_{\pm} = \pm i\ell\xi_{\pm}, \quad \text{se } \xi_{\pm} \in D_{\pm}(\Lambda), \quad (5.1.1b)$$

onde H^* e Λ^* são os operadores adjuntos de H e Λ , respectivamente.

Inicialmente vamos encontrar as funções $\varphi_{\pm}$, dadas pela equação (5.1.1a), do subspaço $D_{\pm}(H)$.

Usando que $H = H^*$, ou seja a ação dos operadores H e H^* é a mesma (operador simétrico) e que:

$$H = \begin{pmatrix} h + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & h - \sigma_3 m \end{pmatrix}, \quad (5.1.2)$$

(veja equação (2.2.14)), a equação (5.1.1) se torna:

$$\begin{pmatrix} h + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & h - \sigma_3 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm}^1 \\ \phi_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \pm im \begin{pmatrix} \phi_{\pm}^1 \\ \phi_{\pm}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.1.3)$$

onde introduzimos:

$$\varphi_{\pm} = \begin{pmatrix} \phi_{\pm}^1 \\ \phi_{\pm}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.1.4)$$

com $\phi_{\pm}^1$ e $\phi_{\pm}^2$ sendo espinores de duas componentes.

Resolver o problema de auto-valores acima (de quatro componentes) é equivalente a resolver o seguinte problema (de duas componentes):

$$(h + ms\sigma_3)\phi_{\pm}^j = \pm im\phi_{\pm}^j, \quad j = 1, 2, \quad (5.1.5)$$

onde para $s = 1$ estamos resolvendo o problema da determinação de $\phi_{\pm}^1$ na equação (5.1.4) e $s = -1$ corresponde a determinação de $\phi_{\pm}^2$.

Lembrando da equação (2.2.15) e definindo:

$$\phi_{\pm}^j = \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix}, \quad (5.1.6)$$

a equação (5.1.5) se torna:

$$\begin{pmatrix} ms & -i\left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r}\right) \\ -i\left(\partial_r - \frac{\nu}{r}\right) & -ms \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix} = \pm im \begin{pmatrix} u_{\pm}^j \\ v_{\pm}^j \end{pmatrix}. \quad (5.1.7)$$

Da equação (5.1.7) temos:

$$msu_{\pm}^j - i\left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r}\right)v_{\pm}^j = \pm imu_{\pm}^j \quad (5.1.8)$$

$$-i\left(\partial_r - \frac{\nu}{r}\right)u_{\pm}^j - smv_{\pm}^j = \pm imv_{\pm}^j. \quad (5.1.9)$$

Da equação (5.1.9) temos:

$$v_{\pm}^j = \frac{-i\left(\partial_r - \frac{\nu}{r}\right)u_{\pm}^j}{(\pm im + sm)}. \quad (5.1.10)$$

Substituindo a equação (5.1.10) na equação (5.1.8) temos:

$$\partial_r^2 u_{\pm}^j + \frac{1}{r} \partial_r u_{\pm}^j - \left(\frac{\nu^2}{r^2} + 2m^2 \right) u_{\pm}^j = 0. \quad (5.1.11)$$

A equação acima pode ser escrita como:

$$\partial_{\sqrt{2mr}}^2 u_{\pm}^j + \frac{1}{\sqrt{2mr}} \partial_{\sqrt{2mr}} u_{\pm}^j - \left(1 + \frac{\nu^2}{(\sqrt{2mr})^2} \right) u_{\pm}^j = 0, \quad (5.1.12)$$

cujas soluções são:

$$u_{\pm}(\sqrt{2mr}) = K_{\nu}(\sqrt{2mr}). \quad (5.1.13)$$

Voltando com esse resultado na equação (5.1.10) podemos determinar $v_{\pm}^j$:

$$v_{\pm}^j = -i \frac{\sqrt{2}}{\pm i + s} \left(\partial_{\sqrt{2mr}} - \frac{\nu}{\sqrt{2mr}} \right) K_{\nu}(\sqrt{2mr}). \quad (5.1.14)$$

Mas como^[10]:

$$\partial_x K_{\nu} - \frac{\nu}{x} K_{\nu} = -K_{\nu+1}, \quad (5.1.15)$$

a equação (5.1.13) finalmente fornece:

$$v_{\pm}^j = \frac{i\sqrt{2}}{\pm i + s} K_{\nu+1}(\sqrt{2mr}). \quad (5.1.16)$$

Assim podemos escrever as funções $\phi_{\pm}^{(1,2)}$ da equação (5.1.6) como sendo:

$$\phi_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{N} \left[\begin{array}{c} K_{\nu}(\sqrt{2mr}) \\ \pm e^{\pm i \frac{\pi}{4}} K_{\nu+1}(\sqrt{2mr}) \end{array} \right] \quad (5.1.17)$$

e:

$$\phi_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{N} \left[\begin{array}{c} K_{\nu}(\sqrt{2mr}) \\ \pm e^{\mp i \frac{\pi}{4}} K_{\nu+1}(\sqrt{2mr}) \end{array} \right], \quad (5.1.18)$$

onde N é uma constante de normalização.

Assim estão determinadas as funções $\varphi_{\pm}$ ortonormalizadas dos subspaços de deficiências $D_{\pm}(H)$ da equação (5.1.1):

$$\varphi_+^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_+^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_-^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_-^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.19)$$

e:

$$\varphi_+^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_+^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \varphi_-^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_-^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (5.1.20)$$

Se olharmos H da equação (5.1.4) como um par de operadores desacoplados atuando em espinores de duas componentes, então, vemos que, os índices de deficiência são iguais a um para cada operador do par.

Para determinarmos os índices de deficiência de Λ , vamos nos lembrar que Λ pode ser obtido através da transformação da unitária da equação (2.1.18) abaixo transcrita:

$$\Lambda = U(H - \beta m)U^{-1}, \quad (5.1.21)$$

A equação (5.1.21) implica que o problema de determinação dos índices de deficiência de Λ é equivalente ao problema de determinação dos índices de deficiência de $H - \beta m$.

Assim, nós devemos determinar os subspaços de deficiência de $H - \beta m$, resolvendo a equação:

$$(H - \beta m)\chi_{\pm} = \pm i\ell\chi_{\pm} \quad ; \quad \chi_{\pm} \in D_{\pm}(H - \beta m). \quad (5.1.22)$$

Lembrando das definições de β da equação (2.1.6) e de H das equações (2.1.1) e (2.2.7), o operador $H - \beta m$ pode ser escrito como sendo o operador diagonal:

$$H - \beta m = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}. \quad (5.1.23)$$

De modo que, os espinores $\chi_{\pm}$ (de quatro componentes) da equação (5.1.22) podem ser obtidos, resolvendo-se primeiro o seguinte problema de duas componentes :

$$h\phi_{\pm} = \pm i\ell\phi_{\pm}. \quad (5.1.24)$$

Vamos introduzir a definição:

$$\phi_{\pm} = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ v_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (5.1.25)$$

Usando a equação (5.1.25) a equação (5.1.24) se torna:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r}\right) \\ -i\left(\partial_r - \frac{\nu}{r}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ v_{\pm} \end{pmatrix} = \pm il \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ v_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (5.1.26)$$

Da equação (5.1.25) temos as seguintes equações que relacionam $u_{\pm}$ e $v_{\pm}$:

$$-i\left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r}\right) v_{\pm} = \pm il u_{\pm} \quad (5.1.27)$$

$$-i\left(\partial_r - \frac{\nu}{r}\right) u_{\pm} = \pm il v_{\pm}. \quad (5.1.28)$$

Substituindo a equação (5.1.28) na equação (5.1.27), vem que:

$$\left(\partial_{lr}^2 + \frac{1}{lr}\partial_{lr}\right) u_{\pm} - \left(1 + \frac{\nu^2}{(lr)^2}\right) u_{\pm} = 0, \quad (5.1.29)$$

cujas soluções são:

$$u_{\pm} = K_{\nu}(lr). \quad (5.1.30)$$

Voltando com o resultado da equação acima na equação (5.1.28), temos:

$$v_{\pm} = \mp \left(\partial_{lr} - \frac{\nu}{lr}\right) K_{\nu}(lr) \quad (5.1.31)$$

Usando o resultado da equação (5.1.15) concluímos que:

$$v_{\pm} = \pm K_{\nu+1}(lr). \quad (5.1.32)$$

Assim, estão agora também determinadas as funções ortogonais $\chi_{\pm}$ (de quatro componentes) dos subspaços de deficiência $D_{\pm}(H - \beta m)$:

$$\begin{aligned} \chi_+^{(1)} &= \begin{bmatrix} \phi_+ \\ 0 \end{bmatrix}, & \chi_-^{(1)} &= \begin{bmatrix} \phi_- \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \chi_+^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_+ \end{bmatrix}, & \chi_-^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_- \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

onde:

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} K_{\nu}(lr) \\ \pm K_{\nu+1}(lr) \end{bmatrix}. \quad (5.1.34)$$

Dessa forma, vemos que a dimensão dos subspaços $D_{\pm}(H - \beta m)$, isto é, os índices de deficiência $d_{\pm}(H - \beta m)$ são iguais a dois. Devido a relação dada pela equação (2.1.18) também podemos dizer que isso significa que $d_{\pm}(\Lambda) = 2$. As funções $\xi_{\pm}$ dos subspaços de deficiência $D_{\pm}(\Lambda)$ são obtidas pela aplicação de U nas auto-funções $\chi_{\pm}$, isto é: $U\chi_{\pm}^{(1)}$ e $U\chi_{\pm}^{(2)}$.

Da teoria geral, já apresentada e discutida na Seção 4.5, as condições de contorno admissíveis para os vetores ψ , nos domínios das extensões auto-adjuntas de um operador simétrico A com iguais índices de deficiência $d_{+}(A) = d_{-}(A) = n$, são parametrizadas por uma matriz unitária W , $n \times n$, através da equação (4.5.2) abaixo transcrita:

$$\left\langle A^* \left[f_{+}^j + \sum_{k=1}^n w_{jk} f_{-}^k \right] \mid \psi \right\rangle - \left\langle \left[f_{+}^j + \sum_{k=1}^n w_{jk} f_{-}^k \right] \mid A^* \psi \right\rangle = 0, \quad (5.1.35)$$

onde $f_{\pm}^j$ são os vetores ortonormalizados em $D_{\pm}(A)$, tais que:

$$A^* f_{\pm}^j = \pm i a f_{\pm}^j \quad \text{com} \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.1.36)$$

Assim as condições de contorno para H estão parametrizadas por uma matriz 2×2 unitária:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.1.37)$$

através de um conjunto de duas equações que devemos encontrar a partir da equação (5.1.35). Para isso, vejamos que a equação (5.1.35) para o operador H pode ser escrita na forma:

$$(H\phi|\psi) = (\phi|H\psi), \quad (5.1.38)$$

onde:

$$\phi = \varphi_{+}^j + \sum_{k=1}^n w_{jk} \varphi_{-}^k, \quad j = 1, 2. \quad (5.1.39)$$

Dessa forma, vemos que na equação (5.1.38) estamos requerendo que o operador H seja simétrico nos domínios de suas extensões auto-adjuntas. Lembrando que o operador H pode ser escrito como na equação (2.2.14), isto é:

$$H = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_3 m & 0 \\ 0 & -\sigma_3 m \end{pmatrix}, \quad (5.1.40)$$

onde, obviamente, a segunda parcela corresponde a um operador simétrico, o problema se reduz a encontrar a condição necessária para que o operador:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \quad (5.1.41)$$

seja simétrico.

Lembrando da definição de h (equação (2.2.15)), o operador hamiltoniana da equação (5.1.40) pode ser escrito como sendo:

$$H = -i\alpha_1 \partial_r - iZ + \beta m, \quad (5.1.42)$$

onde α_1 e β estão definidos respectivamente pelas equações (2.1.4) e (2.1.6) e Z está definido como sendo:

$$Z = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu+1}{r} \\ -\frac{\nu}{r} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.43)$$

O operador βm , como dissemos anteriormente, é obviamente simétrico, assim o problema é verificar se o operador:

$$\overline{H} = -i\alpha_1 \partial_r - iZ \quad (5.1.44)$$

é simétrico.

Para essa finalidade calculemos, inicialmente:

$$\begin{aligned} \langle \overline{H}\phi | \psi \rangle &= \langle -i\alpha_1 \partial_r \phi | \psi \rangle + \langle -iZ\phi | \psi \rangle \\ &= \int dr r (-i\alpha_1 \partial_r \phi)^\dagger \psi + \int dr r (-iZ\phi)^\dagger \psi = \\ &= i \int dr r \partial_r \phi^\dagger \alpha_1 \psi + i \int dr r \phi^\dagger (Z)^\dagger \psi. \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

Resolvendo a primeira integral da equação acima por partes, temos:

$$\langle \overline{H}\phi | \psi \rangle = i \int dr r \partial_r (\phi^\dagger \alpha_1 \psi) - i \int dr r \phi^\dagger \alpha_1 \partial_r \psi + i \int dr r \phi^\dagger (Z)^\dagger \psi.$$

Novamente integrando por partes a primeira integral acima, temos:

$$\langle \bar{H}\phi|\psi \rangle = i \int dr \partial_r (\tau \phi^\dagger \alpha_1 \psi) - i \int dr \phi^\dagger \alpha_1 \psi - i \int dr r \phi^\dagger \alpha_1 \partial_r \psi + i \int dr r \phi^\dagger (Z)^\dagger \psi. \quad (5.1.46)$$

Calculemos agora o produto escalar $\langle \phi|\bar{H}\psi \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \phi|\bar{H}\psi \rangle &= \langle \phi|(-i\alpha_1 \partial_r - iZ)\psi \rangle \\ &= -i \int dr r \phi^\dagger \alpha_1 \partial_r \psi - i \int dr r \phi^\dagger Z \psi. \end{aligned} \quad (5.1.47)$$

Voltando com os resultados das equações (5.1.46) e (5.1.47), na imposição de operador simétrico dada pela equação (5.1.38), surge então a condição:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r (\phi^\dagger \alpha_1 \psi) = 0, \quad (5.1.48)$$

uma vez que as funções $\phi, \psi \in L^2(R)$ (ou seja, no limite de $r \rightarrow \infty$ essas funções tendem a zero) e uma vez que vale a igualdade abaixo:

$$-i \int dr \phi^\dagger (\alpha_1 - rZ^\dagger) \psi = -i \int dr \phi^\dagger (rZ) \psi. \quad (5.1.49)$$

Lembrando da definição de ϕ dada pela equação (5.1.39), a equação (5.1.48) fornece:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r [\varphi_+^{(1)} + w_{11}\varphi_-^{(1)} + w_{12}\varphi_-^{(2)}]^\dagger \alpha_1 \psi = 0 \quad (5.1.50)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r [\varphi_+^{(2)} + w_{21}\varphi_-^{(1)} + w_{22}\varphi_-^{(2)}]^\dagger \alpha_1 \psi = 0 \quad (5.1.51)$$

que dão todas as condições de contorno possíveis a serem satisfeitas pelas autofunções de H na origem (na verdade dão todas as condições contorno a serem satisfeitas por qualquer função no domínio do operador H) e que correspondem também, exatamente, a todas as famílias de quatro parâmetros de extensões auto-adjuntas possíveis para o operador H .

De forma análoga, as condições de contorno admissíveis para o operador $H - \beta m$ podem ser parametrizadas por uma matriz unitária V da forma:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.1.52)$$

através das equações:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\chi_+^{(1)} + v_{11} \chi_-^{(1)} + v_{12} \chi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0, \quad (5.1.53)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\chi_+^{(2)} + v_{21} \chi_-^{(1)} + v_{22} \chi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0, \quad (5.1.54)$$

uma vez que o operador $(H - \beta m)$ é o próprio operador $\bar{H}$ definido nas equações (5.1.41) e (5.1.42).

Mas lembrando que os operadores Λ e $H - \beta m$ estão relacionados pela transformação unitária dada na equação (2.1.18), as equações acima, para as auto-funções de Λ se tornam:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[U \chi_+^{(1)} + v_{11} U \chi_-^{(1)} + v_{12} U \chi_-^{(2)} \right]^\dagger \Sigma_1 U \psi = 0, \quad (5.1.55)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[U \chi_+^{(2)} + v_{21} U \chi_-^{(1)} + v_{22} U \chi_-^{(2)} \right]^\dagger \Sigma_1 U \psi = 0, \quad (5.1.56)$$

onde usamos a unitariedade da matriz U :

$$U U^\dagger = 1.$$

Resumindo, podemos dizer que as equações (5.1.50) e (5.1.51) dão todas as extensões auto-adjuntas de H (parametrizadas por uma família de quatro parâmetros) o que simultaneamente corresponde a todas as condições de contorno admissíveis para as auto-funções de H . Do mesmo modo as equações (5.1.55) e (5.1.56) dão todas as possíveis extensões auto-adjuntas de Λ , isto é, todas as possíveis condições de contorno que as auto-funções de Λ devem satisfazer na origem.

A tabela abaixo contém os resultados das equações (5.1.50), (5.1.51), (5.1.55) e (5.1.56) e será útil nos próximos cálculos.

$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(1)} + w_{11} \varphi_-^{(1)} + w_{12} \varphi_-^{(2)} \right]^+ \alpha_1 \psi = 0$
$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(2)} + w_{21} \varphi_-^{(1)} + w_{22} \varphi_-^{(2)} \right]^+ \alpha_1 \psi = 0$
$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[U \chi_+^{(1)} + v_{11} U \chi_-^{(1)} + v_{12} U \chi_-^{(2)} \right]^+ \Sigma_1 U \psi = 0$
$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[U \chi_+^{(2)} + v_{21} U \chi_-^{(1)} + v_{22} U \chi_-^{(2)} \right]^+ \Sigma_1 U \psi = 0$

Tabela 1 - Condições de contorno a serem satisfeitas por uma função ψ nos domínios mais gerais das extensões auto-adjuntas de H (duas primeiras equações) e de Λ (duas últimas equações).

5.2. Extensões Auto-Adjuntas para o Operador H - Um Caso Particular.

Nessa seção vamos considerar uma classe especial de condições de contorno com dois parâmetros para as auto-funções do operador hamiltoniana que inclui as anteriormente propostas na literatura [1],[2],[3],[4],[5],[6] e [7].

Em seguida, na próxima seção, vamos impor às auto-funções do operador helicidade Λ as mesma condições de contorno impostas às auto-funções do operador hamiltoniana H . De forma que estaremos assim definindo os dois operadores em domínios comuns, isto é, $D(H) = D(\Lambda)$. Levando em conta que os dois operadores H e Λ formalmente comutam, estudaremos mais adiante, a possibilidade de se obter auto-funções comuns e se as dinâmicas obtidas para H de fato preservam a helicidade e a simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$ do hamiltoniana.

Vamos agora tomar a matriz paramétrica W da equação (5.1.37) como tendo a forma diagonal particular da referência [1], isto é:

$$W = \begin{pmatrix} e^{iw_1} & 0 \\ 0 & e^{iw_2} \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Assim as relações dadas pelas equações (5.1.50) e (5.1.51) (apresentadas na Tabela 1) ficam:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(1)} + e^{iw_1} \varphi_-^{(1)} \right]^+ \alpha_1 \psi = 0, \quad (5.2.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(2)} + e^{iw_2} \varphi_-^{(2)} \right]^+ \alpha_1 \psi = 0, \quad (5.2.3)$$

onde ψ é um espinor de quatro componente que está no domínio da extensão auto-adjunta de H :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (5.2.4)$$

Substituindo o resultado da equação (5.1.19) na equação (5.2.2) temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\phi_+^{(1)\dagger} + e^{-i\omega_1} \phi_-^{(1)\dagger} \right] \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Com os espinores $\phi_{\pm}^{(1)}$ dados pela equação (5.1.17) a equação acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left(\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\omega_1 + i\frac{\pi}{4}} \right) K_{\nu+1}(\sqrt{2}mr) \psi_1 + \left(1 + e^{-i\omega_1} \right) K_{\nu}(\sqrt{2}mr) \psi_2 \right) = 0. \quad (5.2.5)$$

Lembrando do comportamento assintótico de $K_{\nu}(x)$ e de $K_{\nu+1}$ [10]:

$$\begin{aligned} K_{\nu}(x) &\sim \frac{1}{2} \Gamma(-\nu) \left(\frac{1}{2}x \right)^{-\nu} \\ K_{\nu+1}(x) &\sim \frac{1}{2} \Gamma(1+\nu) \left(\frac{1}{2}x \right)^{-(1+\nu)} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

e introduzindo as definições:

$$x = \frac{1}{2} \Gamma(1+\nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{-(1+\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\nu} \psi_1, \quad (5.2.7)$$

$$y = \frac{1}{2} \Gamma(-\nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{\nu} \lim_{r \rightarrow 0} r^{(1+\nu)} \psi_2, \quad (5.2.8)$$

temos que a equação (5.2.5) acima se torna:

$$\left[e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\omega_1 + i\frac{\pi}{4}} \right] x - i \left[1 + e^{-i\omega_1} \right] y = 0. \quad (5.2.9)$$

Podemos escrever a equação (5.2.9) assim:

$$\cos \delta_1 x - i \operatorname{sen} \delta_1 y = 0, \quad (5.2.11)$$

onde:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{w_1}{2}\right) - 1}, \quad (5.2.12)$$

que corresponde exatamente à classe de condições de contorno discutidas por Sousa Gerbert (veja referência [3]), onde foram obtidas todas as extensões auto-adjuntas a um parâmetro para o problema de uma partícula sem spin em duas dimensões^[1,3].

Da mesma forma, substituindo agora, os resultados da equação (5.1.20) na condição dada pela equação (5.2.3) temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\phi_+^{(2)\dagger} + e^{-i w_2} \phi_-^{(2)\dagger} \right] \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.2.13)$$

Com os espinores $\phi_{\pm}^{(2)}$ dados pela equação (5.1.18) a equação (5.2.13) acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\left(e^{i \frac{\pi}{4}} - e^{-i w_2 - i \frac{\pi}{4}} \right) K_{\nu+1}(\sqrt{2} m r) \psi_3 + \left(1 + e^{-i w_2} \right) K_{\nu}(\sqrt{2} m r) \psi_4 \right] = 0 \quad (5.2.14)$$

Usando novamente as formas assintóticas de K_{ν} e $K_{\nu+1}$ dadas pela equação (5.2.6) e introduzindo as definições:

$$z = \frac{1}{2} \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{-(1+\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\nu} \psi_3, \quad (5.2.15)$$

$$w = \frac{1}{2} \Gamma(-\nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{\nu} \lim_{r \rightarrow 0} r^{(1+\nu)} \psi_4, \quad (5.2.16)$$

a equação (5.2.14) se torna:

$$\cos \delta_2 z - i \operatorname{sen} \delta_2 w = 0, \quad (5.2.17)$$

onde:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1}. \quad (5.2.18)$$

Assim, a partir das equações (5.2.11) e (5.2.17) concluímos que as condições de contorno a serem satisfeitas pelas auto-funções de H são:

$$x \cos \delta_1 - i y \operatorname{sen} \delta_1 = 0 \quad (5.2.19)$$

$$z \cos \delta_2 - i w \operatorname{sen} \delta_2 = 0 \quad (5.2.20)$$

que significam condições a serem satisfeitas separadamente pelas componentes superior ($s = +1$), equação (5.2.19), e inferior ($s = -1$), equação (5.2.20), dos espinores de quatro componentes das auto-funções de H . Em outras palavras, as condições de contorno dadas acima não acoplam as componentes superior e inferior das auto-funções de H .

5.3. As condições de contorno mais gerais admissíveis para o operador Λ .

Vamos agora encontrar as condições de contorno mais gerais a serem satisfeitas pelas auto-funções do operador helicidade, com a "matriz paramétrica" V dada pela equação (5.1.52). Para encontrar tais condições de contorno devemos retornar às equações (5.1.55) e (5.1.56).

Da equação (5.1.55) temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[U \chi_+^{(1)} + v_{11} U \chi_-^{(1)} + v_{12} U \chi_- \right]^\dagger \Sigma_1 \psi = 0 \quad (5.3.1)$$

com ψ sendo uma função qualquer no domínio mais geral onde o operador helicidade é auto-adjunto ($D(\Lambda)$) a ser determinado:

$$\psi \in D(\Lambda). \quad (5.3.2)$$

Lembrando da forma da matriz unitária U dada pela equação (2.1.18) e das formas dos espinores $\chi_\pm^{(1)}$ e $\chi_\pm^{(2)}$ dadas pela equação (5.1.33), podemos escrever a

expressão entre colchetes do espinor da equação (5.3.1) acima como sendo igual a:

$$\begin{aligned}
 U\chi_+^{(1)} + v_{11}U\chi_-^{(1)} + v_{12}U\chi_-^{(2)} = \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -i\sigma_3 \\ I & i\sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_+ \\ 0 \end{bmatrix} + v_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -i\sigma_3 \\ I & i\sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_- \\ 0 \end{bmatrix} + v_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -i\sigma_3 \\ I & i\sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_- \end{bmatrix} = \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_+ \\ \phi_+ \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{11} \begin{bmatrix} \phi_- \\ \phi_- \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{12} \begin{bmatrix} -i\sigma_3 \phi_- \\ i\sigma_3 \phi_- \end{bmatrix} \quad (5.3.3)
 \end{aligned}$$

Lembrando das formas de $\phi_{\pm}$ dadas através da equação (5.1.34), vemos que:

$$\sigma_3 \phi_{\mp} = \phi_{\pm}$$

De forma que a equação (5.3.3) se torna:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 - iv_{12}) \phi_+ + v_{11} \phi_- \\ (1 + iv_{12}) \phi_+ + v_{11} \phi_- \end{bmatrix}. \quad (5.3.5)$$

Assim a equação (5.3.2) com a substituição do resultado de (5.3.5) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} r \left[(1 - i\bar{v}_{12}) \phi_+^{\dagger} + \bar{v}_{11} \phi_-^{\dagger} \right] \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \\
 + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} r \left[(1 + i\bar{v}_{12}) \phi_+^{\dagger} + \bar{v}_{11} \phi_-^{\dagger} \right] \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3.6)
 \end{aligned}$$

Lembrando das formas de $\phi_{\pm}$ dadas através da equação (5.1.34), dos comportamentos assintóticos de K_{ν} e $K_{\nu+1}$ dado pela equação (5.2.6) e usando as definições para x e y dadas em (5.2.7) e (5.2.8) e usando as definições para z e w dadas em (5.2.15) e (5.2.16) apenas tomando $l = \sqrt{2}m$ nessas definições, a equação (5.3.6) acima se torna:

$$(1 - \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})x + (1 + \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})y + (1 - \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})z + (1 + \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})w = 0 \quad (5.3.7)$$

onde a barra sobre os parâmetros v 's denota o complexo conjugado. Esta é a primeira equação para as condições de contorno mais gerais para a helicidade.

Da equação (5.1.56), temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[U\chi_+^{(2)} + v_{21}U\chi_-^{(1)} + v_{22}U\chi_-^{(2)} \right]^\dagger \Sigma_1 \psi = 0, \quad (5.3.8)$$

com ψ sendo uma função no domínio de Λ a ser determinado:

$$\psi \in D(\Lambda). \quad (5.3.9)$$

Procedendo da mesma forma que levou a equação (5.3.1) a poder ser escrita como a equação (5.3.7), podemos reescrever a eq.(5.3.8) como sendo:

$$(i - \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})x + (-i + \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})y + (-i - \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})z + (i + \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})w = 0. \quad (5.3.10)$$

Assim as condições de contorno mais gerais a serem satisfeitas pelas auto-funções da helicidade parametrizadas pela matriz V unitária são:

$$(1 + \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})w + (1 - \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})z + (1 + \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})y + (1 - \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})x = 0 \quad (5.3.11)$$

$$(i + \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})w + (-i - \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})z + (-i + \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})y + (i - \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})x = 0 \quad (5.3.12)$$

as quais, evidentemente, por serem as mais gerais, acoplam todas as componentes dos espinores de quatro componentes das auto-funções de Λ .

Se quisermos definir o domínio do operador Λ , dado através das equações (5.3.11) e (5.3.12) acima como sendo o mesmo domínio do operador H , definido através das equações (5.2.19) e (5.2.20), ou seja, se quisermos impor as mesmas condições de contorno impostas às auto-funções de H , também às auto-funções de Λ , devemos impor que o sistema de equações (5.2.19) e (5.2.20) e o sistema de equações (5.3.11) e (5.3.12) tenham o mesmo conjunto de soluções, ou seja, sejam equivalentes. Para encontrarmos as condições necessárias e suficientes para que isso aconteça, basta começarmos multiplicando a equação (5.3.11) por $\cos \delta_1 \cos \delta_2$ e então substituírmos as equações (5.2.19) e (5.2.20).

Assim obtemos as condições:

$$e^{i\delta_2}v_{11} - ie^{-i\delta_2}v_{12} = -e^{-i\delta_2} \quad (5.3.13)$$

$$e^{i\delta_1}v_{11} + ie^{-i\delta_1}v_{12} = -e^{-i\delta_1}. \quad (5.3.14)$$

Multiplicando (5.3.12) por $\cos \delta_1 \cos \delta_2$ e em seguida substituindo as equações (5.2.19) e (5.2.20) encontramos as condições:

$$-ie^{-i\delta_2}v_{22} + e^{i\delta_2}v_{21} = ie^{i\delta_2} \quad (5.3.15)$$

$$ie^{-i\delta_1}v_{22} + e^{i\delta_1}v_{21} = -ie^{i\delta_1}. \quad (5.3.16)$$

Temos, assim dois sistemas de equações desacoplados, que terão solução apenas se:

$$\cos(\delta_1 - \delta_2) \neq 0. \quad (5.3.17)$$

Sob essa condição podemos resolver o sistema definido pelas equações (5.3.13) e (5.3.14), obtendo como únicas soluções:

$$v_{11} = \frac{-2}{e^{2i\delta_1} + e^{2i\delta_2}} \quad (5.3.18)$$

$$v_{12} = -i \frac{(e^{-2i\delta_2} - e^{-2i\delta_1})}{e^{-2i\delta_2} + e^{-2i\delta_1}} \quad (5.3.19)$$

O sistema definido pelas equações (5.3.15) e (5.3.16) fornece, sob a condição (5.3.17), as soluções únicas:

$$v_{21} = i \frac{(e^{2i\delta_2} - e^{2i\delta_1})}{e^{2i\delta_1} + e^{2i\delta_2}} \quad (5.3.20)$$

$$v_{22} = \frac{-2}{e^{-2i\delta_1} + e^{-2i\delta_2}}. \quad (5.3.21)$$

De onde vemos que:

$$v_{11} = \overline{v_{22}} \quad e \quad v_{12} = \overline{v_{21}}. \quad (5.3.22)$$

No entanto, a matriz V deve ser unitária, isto é:

$$VV^\dagger = 1. \quad (5.3.23)$$

Assim:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{21}} \\ \overline{v_{12}} & \overline{v_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{11}\overline{v_{11}} + v_{12}\overline{v_{12}} & v_{11}\overline{v_{21}} + v_{12}\overline{v_{22}} \\ v_{21}\overline{v_{11}} + v_{22}\overline{v_{12}} & v_{21}\overline{v_{21}} + v_{22}\overline{v_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3.24)$$

Devido às relações expressas pela equação (5.3.22), é fácil notar na equação acima que os elementos da diagonal principal são idênticos, bem como os elementos fora da diagonal também são idênticos entre si.

Assim basta verificar que:

$$v_{11}v_{22} + v_{12}v_{21} = 1 \quad (5.3.25)$$

e

$$v_{11}v_{12} + v_{12}v_{11} = 2v_{11}v_{12} = 0. \quad (5.3.26)$$

A equação (5.3.25) conduz à condição:

$$\cos(\delta_2 - \delta_1) = 1. \quad (5.3.27)$$

A equação (5.2.26) conduz à equação:

$$\sin(\delta_1 - \delta_2) = 0. \quad (5.3.28)$$

Portanto, a condição de unitariedade da matriz paramétrica V conduz finalmente à condição:

$$\delta_1 - \delta_2 = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.3.29)$$

A equação acima deve ser a condição necessária e suficiente para que as condições de contorno parametrizadas por δ_1 e δ_2 dadas pelas equações (5.2.19) e (5.2.20) sejam também admissíveis para a helicidade.

Note que a condição (5.3.29) implica em mesmas condições de contorno a serem satisfeitas pelas componentes superior e inferior dos espinores de quatro

componentes das auto-funções de H (devido à periodicidade das funções seno e cosseno das equações (5.2.19) e (5.2.20)).

Note também que as auto-funções assim obtidas (isto é, que satisfazem às condições de contorno dadas por (5.2.19) e (5.2.20) com a condição (5.3.39) satisfeita) incluem as apresentadas nas referências [3],[4] e nas referências [1], [2]. Isso ficará mais evidente ao escrevermos explicitamente as auto-funções de H que obedecem às equações (5.2.19) e (5.2.20).

Um modo particular de satisfazer a equação (5.3.29) é tomando:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta \quad (5.3.30)$$

Nessa situação as equações (5.3.18), (5.3.19), (5.3.20) e (5.3.21) se tornam:

$$v_{11} = -e^{-2i\delta} \quad v_{22} = \overline{v_{11}} = -e^{2i\delta} \quad v_{12} = \overline{v_{21}} = 0 \quad (5.3.31)$$

De modo que as condições de contorno dadas por (5.3.11) e (5.3.12) ficam:

$$\cos \delta (x + z) - i \operatorname{sen} \delta (y + w) = 0 \quad (5.3.32)$$

$$\cos \delta (x - z) - i \operatorname{sen} \delta (y - w) = 0 \quad (5.3.33)$$

O sistema de equações acima, evidentemente, é equivalente ao sistema:

$$x \cos \delta - i y \operatorname{sen} \delta = 0 \quad (5.3.34)$$

$$z \cos \delta - i w \operatorname{sen} \delta = 0. \quad (5.3.35)$$

Assim, vemos que, de fato, foi operacionalizado através das equações (5.3.18) a (5.3.21) junto com as equações (5.3.29) e (5.3.30), o estabelecimento de mesmas condições de contorno a serem satisfeitas tanto pelas auto-funções de H quanto pelas auto-funções de Λ , o que significa a determinação de domínios $D_\delta(H, \Lambda)$ comuns aos operadores em questão; isto é:

$$D_\delta(H, \Lambda) = D_\delta(H) = D_\delta(\Lambda). \quad (5.3.36)$$

Vamos, então, resolver o problema de determinação das auto-funções de H e Λ que satisfazem as condições de contorno acima, respectivamente nas Seções 5.5 e 5.6.

5.4. Condições de Contorno e Conservação da Helicidade.

Tendo definido, na seção anterior, os operadores H e Λ atuando em domínios densos comuns $D_\delta(H, \Lambda)$ e levando em conta que esses dois operadores formalmente comutam, isto é:

$$[H, \Lambda] = 0, \quad (5.4.1)$$

queremos estudar a possibilidade de obtenção de auto-funções comuns aos dois operadores e se as dinâmicas obtidas para H através das condições de contorno dadas pelas equações (5.2.19) e (5.2.20) conservam a helicidade. Faremos esse estudo nas Seções 5.7 a 5.10.

Essa questão foi, primeiramente, levantada por Hagen [7] e posteriormente abordada pelos autores Coutinho e Perez [1]. Essa questão será reestudada nas próximas seções, levando a conclusões, a princípio, diferentes das obtidas por esses autores.

Antes de prosseguirmos, no entanto, vamos recapitular alguns de nossos principais resultados.

As condições de contorno a serem satisfeitas pelas auto-funções de H e Λ parametrizadas pelo parâmetro δ e que definem os domínios comuns $D_\delta(H, \Lambda)$ onde H e Λ são auto-adjuntos (encontradas na seção anterior) são:

$$x \cos \delta - iy \operatorname{sen} \delta = 0, \quad (5.4.2)$$

$$z \cos \delta - iw \operatorname{sen} \delta = 0, \quad (5.4.3)$$

onde:

$$x = \frac{1}{2} \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{-(1+\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\nu} \psi_1(r), \quad (5.4.4)$$

$$y = \frac{1}{2} \Gamma(-\nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{\nu} \lim_{r \rightarrow 0} r^{(1+\nu)} \psi_2(r), \quad (5.4.5)$$

$$z = \frac{1}{2} \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{-(1+\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\nu} \psi_3(r), \quad (5.4.6)$$

$$w = \frac{1}{2} \Gamma(-\nu) \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \right)^{\nu} \lim_{r \rightarrow 0} r^{(1+\nu)} \psi_4(r). \quad (5.4.7)$$

Vamos resolver respectivamente nas Seções 5.5 e 5.6 o problema da determinação das auto-funções dos operadores H e Λ que satisfazem às condições de contorno dadas pelas equações acima (5.4.2) e (5.4.3).

5.5. Determinação das auto-funções do operador H que satisfazem as condições de contorno desacopladas.

No Capítulo 2, já resolvemos o problema da determinação das auto-funções mais gerais de H . As auto-funções de H encontradas naquele capítulo, dadas pela equação (2.2.31), são:

$$\psi_{\pm}(kr) = \begin{pmatrix} \alpha \phi_{\pm}^{(1)}(kr) \\ \beta \phi_{\pm}^{(2)}(kr) \end{pmatrix}, \quad (5.5.1)$$

onde α e β são constantes quaisquer que regulam as proporções entre as componentes superior e inferior, que são dadas pelas equações (2.2.29) e (2.2.30) respectivamente, abaixo transcritas para maior comodidade do leitor:

$$\phi_{+}^{(1)}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) + c_{+} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{-ik}{|E|+m} (J_{|\nu|-1}(kr) - c_{+} J_{-|\nu|+1}(kr)) \end{pmatrix}, \quad (5.5.2)$$

$$\phi_{+}^{(2)}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) + d_{+} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{-ik}{|E|-m} (J_{|\nu|-1}(kr) - d_{+} J_{-|\nu|+1}(kr)) \end{pmatrix}, \quad (5.5.3)$$

$$\phi_{-}^{(1)}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) + c_{-} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{ik}{|E|-m} (J_{|\nu|-1}(kr) - c_{-} J_{-|\nu|+1}(kr)) \end{pmatrix}, \quad (5.5.4)$$

$$\phi_{-}^{(2)}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) + d_{-} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{ik}{|E|+m} (J_{|\nu|-1}(kr) - d_{-} J_{-|\nu|+1}(kr)) \end{pmatrix}. \quad (5.5.5)$$

Vamos impor a essas auto-funções mais gerais que satisfaçam às condições de contorno dadas por (5.4.2) e (5.4.3) que desacoplam as componentes superior e inferior dos espinores $\psi_{\pm}(kr)$ das auto-funções de H . Para tanto devemos calcular x , y , z e w para cada um dos espinores $\psi_{\pm}(kr)$, lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel envolvidas.

Lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel^[10]:

$$J_{\nu}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}, \quad (5.5.6)$$

e lembrando que estamos tratando do caso em que $-1 < \nu < 0$, temos que, para a auto-função $\psi_+(kr)$ dada pela eq. (5.5.1) acima:

$$x = \alpha (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} c_+ , \quad (5.5.7)$$

uma vez que $J_{|\nu|}(kr)$ tem comportamento regular na origem e $J_{-|\nu|}(kr)$ é singular na origem, e :

$$y = \alpha \frac{-i (\sqrt{2m})^{-|\nu|}}{|E| + m} k^{|\nu|} , \quad (5.5.8)$$

uma vez que $J_{|\nu|-1}$ é singular e $J_{-|\nu|+1}$ é regular na origem.

Substituindo as expressões de x e y acima obtidas na condição de contorno (5.4.2), vem que:

$$c_+(\delta, E) = \frac{tg\delta}{|E| + m} \frac{k^{2|\nu|}}{(\sqrt{2m})^{2|\nu|-1}} . \quad (5.5.9)$$

Procedendo da mesma forma, obtemos as demais constantes d_+ , c_- e d_- como funções do parâmetro δ e da energia. Os resultados estão apresentados na tabela abaixo:

$c_+ = \frac{tg\delta}{ E +m} \frac{k^{2 \nu }}{(\sqrt{2m})^{2 \nu -1}}$	$c_- = -\frac{tg\delta}{ E -m} \frac{k^{2 \nu }}{(\sqrt{2m})^{2 \nu -1}}$
$d_+ = \frac{tg\delta}{ E -m} \frac{k^{2 \nu }}{(\sqrt{2m})^{2 \nu -1}}$	$d_- = -\frac{tg\delta}{ E +m} \frac{k^{2 \nu }}{(\sqrt{2m})^{2 \nu -1}}$

Tabela 2 - Valores das constantes $c_{\pm}$ e $d_{\pm}$ em função do parâmetro δ das extensões auto-adjuntas.

Note que esses resultados coincidem com os resultados obtidos na referência [3] do autor Sousa Gerbert.

Assim, as auto-funções de H que satisfazem às condições de contorno de-sacopladas das equações (5.4.2) e (5.4.3) tem a forma dada pelas equações (5.5.1) a (5.5.5) com as constantes $c_{\pm}$ e $d_{\pm}$ dadas na Tabela 2.

5.6. Determinação das auto-funções do operador Λ que satisfazem as condições de contorno desacopladas.

Vamos agora passar ao problema da determinação das auto-funções de Λ que satisfazem às mesmas condições de contorno desacopladas (5.4.2) e (5.4.3).

As auto-funções mais gerais de Λ já foram encontradas no Capítulo 2, através das equações (2.3.17) e (2.3.18) e são as seguintes:

$$\psi_{+|\lambda|}(\lambda r) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(\lambda r) + a_+ J_{-|\nu|}(\lambda r) \\ J_{|\nu|-1}(\lambda r) + b_+ J_{1-|\nu|}(\lambda r) \\ -i(b_+ J_{-|\nu|}(\lambda r) - J_{|\nu|}(\lambda r)) \\ -i(J_{|\nu|-1}(\lambda r) - a_+ J_{1-|\nu|}(\lambda r)) \end{pmatrix}, \quad (5.6.1)$$

$$\psi_{-|\lambda|}(\lambda r) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(\lambda r) + a_- J_{-|\nu|}(\lambda r) \\ J_{|\nu|-1}(\lambda r) + b_- J_{1-|\nu|}(\lambda r) \\ i(b_- J_{-|\nu|}(\lambda r) - J_{|\nu|}(\lambda r)) \\ i(J_{|\nu|-1}(\lambda r) - a_- J_{1-|\nu|}(\lambda r)) \end{pmatrix}, \quad (5.6.2)$$

$$\psi'_{+|\lambda|}(\lambda r) = \begin{pmatrix} -i(b'_+ J_{-|\nu|}(\lambda r) - J_{|\nu|}(\lambda r)) \\ -i(J_{|\nu|-1}(\lambda r) - a'_+ J_{1-|\nu|}(\lambda r)) \\ J_{|\nu|}(\lambda r) + a'_+ J_{-|\nu|}(\lambda r) \\ J_{|\nu|-1}(\lambda r) + b'_+ J_{1-|\nu|}(\lambda r) \end{pmatrix}, \quad (5.6.3)$$

$$\psi'_{-|\lambda|}(\lambda r) = \begin{pmatrix} i(b'_- J_{-|\nu|}(\lambda r) - J_{|\nu|}(\lambda r)) \\ i(J_{|\nu|-1}(\lambda r) - a'_- J_{1-|\nu|}(\lambda r)) \\ J_{|\nu|}(\lambda r) + a'_- J_{-|\nu|}(\lambda r) \\ J_{|\nu|-1}(\lambda r) + b'_- J_{1-|\nu|}(\lambda r) \end{pmatrix}. \quad (5.6.4)$$

Devemos impor a essas auto-funções mais gerais que satisfaçam às condições de contorno desacopladas (5.4.2) e (5.4.3). Para tanto devemos calcular x , y , z e w para cada um dos quatro espinores auto-funções de Λ , através das definições (5.4.4) a (5.4.7) tomando $l = \sqrt{2}m$ nessas definições. Dado o comportamento das funções de Bessel na origem (equação (5.5.6)), para o espinor $\psi_{+|\lambda|}(\lambda r)$, temos:

$$x = l^{|\nu|-1} \lambda^{-|\nu|} a \quad (5.6.5)$$

uma vez que $J_{|\nu|}(\lambda r)$ é regular e $J_{-|\nu|}(\lambda r)$ é singular na origem e:

$$y = t^{-|\nu|} \lambda^{|\nu|-1} \quad (5.6.6)$$

uma vez que $J_{|\nu|-1}(\lambda r)$ é singular e $J_{-|\nu|+1}(\lambda r)$ é regular na origem.

Substituindo x e y obtidos acima na condição dada por (5.4.2) obtemos:

$$a(\delta, \lambda) = i \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{2|\nu|-1} tg\delta. \quad (5.6.7)$$

A imposição da condição (5.4.3) à mesma auto-função $\psi_{+|\nu|}(\lambda r)$ também leva ao mesmo resultado de (5.6.7) para o parâmetro b_+ .

Procedendo da mesma forma com as demais auto-funções, obtemos as demais constantes a_- , b_- , $a'_\pm$ e $b'_\pm$. Os resultados estão apresentados na tabela abaixo:

$a_\pm = i \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{2 \nu -1} tg\delta$	$a'_\pm = i \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{2 \nu -1} tg\delta$
$b_\pm = i \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{2 \nu -1} tg\delta$	$b'_\pm = i \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{2 \nu -1} tg\delta$

Tabela 3 - Valores das constantes $a_\pm^{(j)}$ e $b_\pm^{(j)}$ em função do parâmetro δ das extensões auto-adjuntas.

Assim, as auto-funções de Λ que satisfazem às condições de contorno desacopladas tem a forma dada pelas equações (5.6.1) a (5.6.4) com as constantes $a_\pm^{(j)}$ e $b_\pm^{(j)}$ dadas na Tabela 3.

5.7. Discussão dos Resultados.

Tendo definido os operadores H e Λ atuando no mesmo domínio $D_\delta(H, \Lambda)$, definidos através das condições de contorno desacopladas (5.4.2) e (5.4.3), e tendo em vista que estes operadores comutam formalmente, poderíamos esperar que esses fatos, por si só, talvez implicassem que H e Λ comutassem efetivamente no domínio definido $D_\delta(H, \Lambda)$, e que consequentemente tivessem auto-funções comuns nesse domínio, e que estas auto-funções fossem ou as próprias auto-funções de H obtidas na Seção 5.5, ou as próprias auto-funções de Λ obtidas na Seção 5.6 ou alguma combinação linear simples dessas auto-funções. Este "raciocínio natural" está sugerido na referência [1] e conforme verificaremos a seguir não está correto.

Na verdade, conforme discutiremos mais adiante (Seção 5.10), o operador Λ ao atuar nas auto-funções de H encontradas na Seção 5.5, não gera vetores pertencentes ao domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ para todos os valores de δ , ou seja, gera, para

certas extensões, vetores fora desse domínio. Em outras palavras, o operador Λ não deixa o domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ invariante.

Nesse caso, não faz sequer sentido pensarmos em uma relação de comutação entre H e Λ em $D_\delta(H, \Lambda)$ e consequentemente não faz sentido falarmos em auto-funções simultâneas.

Isso é um fato inesperado. Mas nós não levaremos essa discussão adiante agora, sem primeiro tentar responder à seguinte pergunta:

• "Qual a condição para que os operadores H e Λ tenham auto-funções comuns?"

5.8. Determinação da condição formal para que os operadores H e Λ tenham auto-funções comuns.

Vamos agora procurar sob que condições existe alguma combinação linear de auto-funções $\psi_\pm$ de H , dadas através das constantes α e β da equação (5.5.1), que seja também auto-função de Λ definido pela equação (2.3.3).

Assim, vamos impor:

$$\Lambda \psi_\pm(kr) = \lambda \psi_\pm(kr) \quad (5.8.1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \phi_\pm^{(1)}(kr) \\ \beta \phi_\pm^{(2)}(kr) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \phi_\pm^{(1)}(kr) \\ \beta \phi_\pm^{(2)}(kr) \end{pmatrix} \quad (5.8.2)$$

$$\begin{pmatrix} \beta h & \phi_\pm^{(2)}(kr) \\ \alpha h & \phi_\pm^{(1)}(kr) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \phi_\pm^{(1)}(kr) \\ \beta \phi_\pm^{(2)}(kr) \end{pmatrix} \quad (5.8.3)$$

Usando a equação (2.2.18), temos:

$$(h + \sigma_3 m) \phi_\pm^{(1)}(kr) = \pm |E| \phi_\pm^{(1)}(kr), \quad (5.8.4)$$

$$(h - \sigma_3 m) \phi_\pm^{(2)}(kr) = \pm |E| \phi_\pm^{(2)}(kr), \quad (5.8.5)$$

de modo que:

$$h \phi_\pm^{(1)}(kr) = (\pm |E| - \sigma_3 m) \phi_\pm^{(1)}(kr) \quad (5.8.6)$$

$$h \phi_\pm^{(2)}(kr) = (\pm |E| + \sigma_3 m) \phi_\pm^{(2)}(kr). \quad (5.8.7)$$

Substituindo as equações (5.8.6) e (5.8.7) acima na equação (5.8.3) temos:

$$\begin{pmatrix} \beta (\pm |E| + \sigma_3 m) \phi_{\pm}^{(2)} \\ \alpha (\pm |E| - \sigma_3 m) \phi_{\pm}^{(1)} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \phi_{\pm}^{(1)} \\ \beta & \phi_{\pm}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (5.8.8)$$

Assim, temos que:

$$\beta (\pm |E| + \sigma_3 m) \phi_{\pm}^{(2)} = \lambda \alpha \phi_{\pm}^{(1)} \quad (5.8.9)$$

$$\alpha (\pm |E| - \sigma_3 m) \phi_{\pm}^{(1)} = \lambda \beta \phi_{\pm}^{(2)}. \quad (5.8.10)$$

A equação (5.8.9) fornece o sistema de equações abaixo:

$$\beta (\pm |E| + m) = \lambda \alpha, \quad (5.8.11)$$

$$\beta (\pm |E| + m) d_{\pm} = \lambda \alpha c_{\pm}, \quad (5.8.12)$$

que evidentemente só tem solução sob a condição:

$$c_{\pm} = d_{\pm}. \quad (5.8.13)$$

A equação (5.8.10) fornece o sistema de equações:

$$\alpha (\pm |E| - m) = \lambda \beta \quad (5.8.14)$$

$$\alpha (\pm |E| - m) c_{\pm} = \lambda \beta d_{\pm} \quad (5.8.15)$$

que evidentemente só tem solução se satisfeita a mesma condição da equação (5.8.13).

Sob a condição que $c_{\pm}$ seja igual a $d_{\pm}$ temos, então, finalmente o sistema:

$$\beta (\pm |E| + m) = \lambda \alpha \quad (5.8.16)$$

$$\alpha (\pm |E| - m) = \lambda \beta. \quad (5.8.17)$$

A condição para existência de soluções para o sistema acima fornece:

$$\lambda = \pm \sqrt{E^2 - m^2} = \pm k, \quad (5.8.18)$$

que são os auto-valores da helicidade.

Para $\lambda = +k$, temos a seguinte relação entre os coeficientes α e β :

$$\beta = \frac{k}{\pm |E| + m} \alpha \quad (5.8.19)$$

e para $\lambda = -k$, temos:

$$\beta = -\frac{k}{\pm |E| + m} \alpha. \quad (5.8.20)$$

Assim tomando α e β como nas equações (5.8.19) para $\lambda = +k$ e (5.8.20) para $\lambda = -k$ acima e com a condição da equação (5.8.13) satisfeita num determinado domínio comum de H e Λ obtemos as auto-funções comuns desses operadores nesse domínio (veja Tabela 4).

$\alpha = 1$	$\beta = \frac{k}{ E +m}$	$\psi_{ E ,k}(kr)$
$\alpha = 1$	$\beta = -\frac{k}{ E +m}$	$\psi_{ E ,-k}(kr)$
$\alpha = 1$	$\beta = \frac{k}{- E +m}$	$\psi_{- E ,k}(kr)$
$\alpha = 1$	$\beta = -\frac{k}{- E +m}$	$\psi_{- E ,-k}(kr)$

Tabela 4 - Valores das constantes α e β (que dão as proporções das componentes superior e inferior do espinor) e as respectivas auto-funções comuns aos operadores H e Λ obtidas.

5.9. Auto-funções simultâneas para os operadores H e Λ no domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ das condições de contorno desacopladas.

Os resultados obtidos na seção anterior mostram que impor às auto-funções de H encontradas na Seção 5.5 (que obedecem às condições de contorno desacopladas) que sejam também auto-funções do operador Λ , equivale a tomar os coeficientes α e β conforme a Tabela 4 com a condição da equação (5.8.13) satisfeita, isto é:

$$c_{\pm} = d_{\pm}. \quad (5.9.1)$$

Lembrando dos resultados obtidos na Tabela 2 da Seção 5.5, a equação acima se torna:

$$\frac{tg\delta}{|E| + m} = \frac{tg\delta}{|E| - m} \quad (5.9.2)$$

a qual só tem solução se:

$$\delta = 0 \quad (5.9.3)$$

ou:

$$\delta = \frac{\pi}{2}. \quad (5.9.4)$$

Para $\delta = 0$, conforme podemos ver a partir da Tabela 2, temos que a primeira componente do espinor de auto-função fica sendo apenas a solução regular e a segunda componente fica sendo apenas a solução singular na origem. Para $\delta = \frac{\pi}{2}$, conforme podemos ver a partir da Tabela 2, temos que a primeira componente do espinor de auto-função fica sendo apenas a solução singular e a segunda componente fica sendo apenas a solução regular na origem.

Assim, tomando $\delta = 0$ (vemos que nesse caso $c_{\pm} = d_{\pm} = 0$), as auto-funções simultâneas de H e Λ são:

$$\psi_{|E|,+k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) \\ \frac{-ik}{|E|+m} J_{|\nu|-1}(kr) \\ \frac{k}{|E|+m} J_{|\nu|}(kr) \\ -i J_{|\nu|-1}(kr) \end{pmatrix}, \quad (5.9.5)$$

$$\psi_{|E|,-k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) \\ \frac{-ik}{|E|+m} J_{|\nu|-1}(kr) \\ \frac{-k}{|E|+m} J_{|\nu|}(kr) \\ i J_{|\nu|-1}(kr) \end{pmatrix}, \quad (5.9.6)$$

$$\psi_{-|E|,+k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) \\ \frac{ik}{|E|-m} J_{|\nu|-1}(kr) \\ \frac{-k}{|E|-m} J_{|\nu|}(kr) \\ -i J_{|\nu|-1}(kr) \end{pmatrix}, \quad (5.9.7)$$

$$\psi_{-|E|,-k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|}(kr) \\ \frac{ik}{|E|-m} J_{|\nu|-1}(kr) \\ \frac{k}{|E|-m} J_{|\nu|}(kr) \\ i J_{|\nu|-1}(kr) \end{pmatrix}. \quad (5.9.8)$$

Tomando $\delta = \frac{\pi}{2}$, as auto-funções simultâneas de H e Λ são:

$$\psi_{|E|,+k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{ik}{|E|+m} J_{1-|\nu|}(kr) \\ \frac{k}{|E|+m} J_{-|\nu|}(kr) \\ iJ_{1-|\nu|}(kr) \end{pmatrix}, \quad (5.9.9)$$

$$\psi_{|E|,-k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{ik}{|E|+m} J_{1-|\nu|}(kr) \\ \frac{-k}{|E|+m} J_{-|\nu|}(kr) \\ -iJ_{1-|\nu|}(kr) \end{pmatrix}, \quad (5.9.10)$$

$$\psi_{-|E|,+k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{-ik}{|E|-m} J_{1-|\nu|}(kr) \\ \frac{-k}{|E|-m} J_{-|\nu|}(kr) \\ iJ_{1-|\nu|}(kr) \end{pmatrix}, \quad (5.9.11)$$

$$\psi_{-|E|,-k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{-|\nu|}(kr) \\ \frac{-ik}{|E|-m} J_{1-|\nu|}(kr) \\ \frac{k}{|E|-m} J_{-|\nu|}(kr) \\ -iJ_{1-|\nu|}(kr) \end{pmatrix}. \quad (5.9.12)$$

É interessante observar que as auto-funções simultâneas obtidas nessa seção incluem as apresentadas nas referências [2] e [4] obtidas através de um procedimento limite onde se substitui a linha de fluxo magnético na origem por um tubo de fluxo de raio $R > 0$ (com o campo magnético $\vec{H}$ dado por uma função do tipo δ de casca) e toma-se o limite $R \rightarrow 0$ no final dos cálculos.

Note que os resultados das equações (5.9.1) a (5.9.4) implicam que a possibilidade de auto-funções comuns aos operadores H e Λ não é garantida apenas pela definição dos dois operadores em um domínio comum onde ambos são auto-adjuntos, como está sugerido na referência [1]. De modo que, só são possíveis auto-funções simultâneas a H e Λ apenas para certas extensões particulares a um parâmetro: $\delta = 0$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$, que satisfazem a condição (5.8.13).

5.10. A ação do operador Λ nas auto-funções de H definidas em $D_\delta(H, \Lambda)$.

Um fato interessante que podemos perceber é que o operador Λ atuando em certas funções do domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ da Seção 5.4 gera funções fora desse domínio, isto é:

$$\Lambda D_\delta = D' \mid D' \neq D_\delta. \quad (5.10.1)$$

Vejam como isso acontece, deixando Λ atuar numa auto-função de H , escrita como na equação (5.5.1), pertencente ao domínio $D_\delta(H, \Lambda)$, sujeita às condições de contorno que produziram os resultados da Tabela 2. Assim:

$$\Phi = \Lambda \psi_\pm = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \phi_\pm^{(1)} \\ \beta \phi_\pm^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta h \phi_\pm^{(2)} \\ \alpha h \phi_\pm^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.10.2)$$

Invocando os resultados das equações (5.8.6) e (5.8.7) e lembrando da forma das funções $\phi_\pm^{(1)}$ e $\phi_\pm^{(2)}$ dadas pela equação (5.5.2) a (5.5.5), encontramos:

$$\Phi = \pm |E| + m \begin{pmatrix} \beta (J_{|\nu|} + d_\pm J_{-|\nu|}) \\ \frac{-ik}{\pm|E|+m} \beta (J_{|\nu|-1} - d_\pm J_{1-|\nu|}) \\ \frac{(\pm|E|-m)}{\pm|E|+m} \alpha (J_{|\nu|} + c_\pm J_{-|\nu|}) \\ \frac{-ik}{\pm|E|+m} \alpha (J_{|\nu|-1} - c_\pm J_{1-|\nu|}) \end{pmatrix} \quad (5.10.3)$$

Veja que o par de componentes superior do espinor acima tem a mesma forma do espinor $\phi_\pm^{(1)}$ e o par de componentes inferior tem a mesma forma que a do espinor $\phi_\pm^{(2)}$, no entanto as constantes $c_\pm$ e $d_\pm$ aparecem em posições trocadas. De forma que a função $\Phi \notin D_\delta(H, \Lambda)$, a menos que os coeficientes $c_\pm$ e $d_\pm$ sejam iguais:

$$c_\pm = d_\pm, \quad (5.10.4)$$

o que só ocorre em $D_\delta(H, \Lambda)$ na situação discutida na Seção 5.9, ou seja, quando o parâmetro δ da extensão assume os valores $\delta = 0$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$. Assim, vemos que o operador Λ não mantém o domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ invariante. Esse fato deve ter alguma analogia com o problema de Nelson^[11].

Podemos pensar, então, em estender o domínio comum dos operadores na tentativa de obter auto-funções comuns mais gerais para H e Λ .

Extender o domínio, por outro lado, significa ter condições de contorno mais gerais que acoplem as quatro componentes dos espinores de auto-funções de H e Λ , o que pode representar operacionalmente uma maior liberdade na escolha dos parâmetros da extensão, viabilizando auto-funções comuns a H e Λ , que satisfazem a condição (5.8.13) e que são diferentes das obtidas na Seção 5.9.

Além do operador Λ não deixar o domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ invariante, também o operador H , atuando em certas funções do domínio $D_\delta(H, \Lambda)$, gera funções fora desse domínio, isto é:

$$HD_\delta = D'' \mid D'' \neq D_\delta. \quad (5.10.5)$$

Veja o Apêndice E.

Capítulo 6

Extensões auto-adjuntas mais gerais a dois parâmetros para o operador H e conservação da helicidade.

6.1. Determinação das condições de contorno.

Nessa seção, vamos proceder a extensões auto-adjuntas para o operador H que impliquem em condições de contorno que acoplem todas as componentes das funções de onda.

Vamos, então, tomar a seguinte matriz paramétrica W unitária:

$$W = \begin{pmatrix} \cos \delta e^{i\omega} & -\text{sen} \delta \\ \text{sen} \delta & \cos \delta e^{-i\omega} \end{pmatrix}. \quad (6.1.1)$$

Assim as relações apresentadas na Tabela 1 ficam:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(1)} + \cos \delta e^{i\omega} \varphi_-^{(1)} - \text{sen} \delta \varphi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0 \quad (6.1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(2)} + \text{sen} \delta \varphi_-^{(1)} + \cos \delta e^{-i\omega} \varphi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0. \quad (6.1.3)$$

Substituindo os resultados das equações (5.1.19) e (5.1.20), a equação (6.1.2) acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left(\phi_+^{(1)\dagger} + \cos \delta e^{-i\omega} \phi_-^{(1)\dagger} \right) \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - \lim_{r \rightarrow 0} r \text{sen} \delta \phi_-^{(2)\dagger} \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.1.4)$$

Com os espinores $\phi_{\pm}^{(1)}$ e $\phi_{\pm}^{(2)}$ dados pelas equações (5.1.17) e (5.1.18) a equação acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos \delta e^{-i\omega} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) K_{\nu+1} \psi_1 + \left(1 + \cos \delta e^{-i\omega} \right) K_{\nu} \psi_2 \right] - \\ - \text{sen} \delta \lim_{r \rightarrow 0} r \left[-e^{-i\frac{\pi}{4}} K_{\nu+1} \psi_3 + K_{\nu} \psi_4 \right] = 0 \quad (6.1.5)$$

Lembrando do comportamento na origem das funções K_{ν} e $K_{\nu+1}$ dado pela equação (5.2.6) e usando as definições de x , y , z e w dadas por (5.4.4) a (5.4.7) a equação (6.1.5) acima pode ser escrita assim:

$$\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos \delta e^{-i\omega} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) x + \left(1 + \cos \delta e^{-i\omega} \right) y + \text{sen} \delta e^{-i\frac{\pi}{4}} z - \text{sen} \delta w = 0. \quad (6.1.6)$$

Procedendo em relação à equação (6.1.3) da mesma forma que procedemos com a equação (6.1.2) encontramos:

$$-e^{i\frac{\pi}{4}} \text{sen} \delta x + \text{sen} \delta y + \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - \cos \delta e^{i\omega} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) z + \left(1 + \cos \delta e^{i\omega} \right) w = 0 \quad (6.1.7)$$

As equações (6.1.6) e (6.1.7) substituem agora as condições de contorno das equações (5.4.2) e (5.4.3) e acoplam todas as componentes das funções de onda.

Para maior comodidade, reescreveremos as equações (6.1.6) e (6.1.7) da seguinte forma:

$$ax + by + \text{sen} \delta e^{-i\frac{\pi}{4}} z - \text{sen} \delta w = 0 \quad (6.1.8)$$

$$-e^{i\frac{\pi}{4}} \text{sen} \delta x + \text{sen} \delta y + a^* z + b^* w = 0, \quad (6.1.9)$$

onde introduzimos as definições:

$$a = e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos \delta e^{-i\omega} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (6.1.10)$$

$$b = 1 + \cos \delta e^{-i\omega}. \quad (6.1.11)$$

Note que:

$$b = (\sqrt{2} - a) e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (6.1.12)$$

As equações (6.1.8) e (6.1.9) representam as condições de contorno a serem satisfeitas pelas auto-funções de H na origem, e definem novos domínios $D_{\delta,\omega}(H)$ para o operador H .

De outra forma, podemos dizer também que as equações (6.1.8) e (6.1.9) fornecem todas as extensões auto-adjuntas a dois parâmetros para o hamiltoniana que acoplam todas as componentes das auto-funções.

6.2. Determinação das auto-funções de H que satisfazem as condições de contorno mais gerais a dois parâmetros.

Na verdade, devemos nos lembrar que o nosso objetivo ao definirmos um domínio estendido para os operadores H e Λ foi o de verificar a possibilidade de obtermos auto-funções simultâneas, com H e Λ sendo operadores auto-adjuntos nesse domínio.

No entanto, já vimos na Seção 5.8 que isso só é possível para certas combinações lineares das auto-funções de H , apresentadas na Tabela 4, sob a condição da equação (5.8.13) ser satisfeita.

Seja, então, a auto-função de H com energia positiva e possibilidade de $\lambda = \pm k$:

$$\psi_{|E|,\pm k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|} + c_{\pm} J_{-|\nu|} \\ \frac{-ik}{|E|+m} \left(J_{|\nu|-1} - c_{\pm} J_{1-|\nu|} \right) \\ \frac{\pm k}{|E|+m} \left(J_{|\nu|} + d_{\pm} J_{-|\nu|} \right) \\ \mp i \left(J_{|\nu|-1} - d_{\pm} J_{1-|\nu|} \right) \end{pmatrix} \quad (6.2.1)$$

onde tomamos as constantes α e β conforme a Tabela 4¹.

Vamos verificar a possibilidade das auto-funções da forma da equação anterior, satisfazendo as condições de contorno das equações (6.1.8) e (6.1.9), satisfazerem também a condição da equação (5.8.13), de forma a garantir que tais auto-funções de H sejam também auto-funções de Λ .

¹Note que a função $\psi_{|E|,\pm k}(kr)$ da equação (6.2.1) é auto-função apenas da hamiltoniana com auto-valor $\pm |E|$, pois apenas tomar as constantes α e β como na Tabela 4 não é suficiente para garantir que a função seja auto-função também do operador Λ . Para que isso aconteça a condição (5.8.13) deve ser satisfeita no domínio $D_{\delta,\omega}(H)$, por isso dissemos "possibilidade de $\lambda = \pm k$ " ao nos referirmos à função da equação (6.2.1). O que será feito a seguir é a verificação da possibilidade de (5.8.13) ser satisfeita em $D_{\delta,\omega}(H)$ de forma a obtermos auto-funções simultâneas para os operadores H e Λ (da forma da equação (6.2.1) com $c_{\pm} = d_{\pm}$).

Lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel, dado pela equação (5.2.6) e lembrando das definições de x , y , z e w das equações (5.4.4) a (5.4.7), temos para a função da equação (6.2.1) acima:

$$x = (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} c_+ \quad , \quad (6.2.2)$$

$$y = -i \frac{(\sqrt{2m})^{-|\nu|} k^{|\nu|}}{|E| + m} \quad , \quad (6.2.3)$$

$$z = \pm (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \frac{k}{|E| + m} d_+ \quad , \quad (6.2.4)$$

$$w = \mp i (\sqrt{2m})^{-|\nu|} \frac{k^{|\nu|}}{k} \quad (6.2.5)$$

Substituindo as expressões das equações (6.2.2) a (6.2.5) nas equações (6.1.8) e (6.1.9) das condições de contorno, obtemos:

$$\begin{aligned} ac_+ (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \pm \text{sen} \delta e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{k}{|E| + m} d_+ (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} = \\ = i (\sqrt{2m})^{-|\nu|} k^{|\nu|} \left[\frac{b}{|E| + m} \mp \frac{\text{sen} \delta}{k} \right] \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

e:

$$\begin{aligned} -e^{i\frac{\pi}{2}} \text{sen} \delta (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} c_+ + (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \pm a^* \frac{k}{|E| + m} d_+ (\sqrt{2m})^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} = \\ = i (\sqrt{2m})^{-|\nu|} k^{|\nu|} \left[\frac{\text{sen} \delta}{|E| + m} \pm \frac{b^*}{k} \right], \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

de onde devemos extrair c_+ e d_+ para depois verificar a possibilidade de satisfação da condição (5.8.13).

O sistema acima terá solução apenas se:

$$\cos \delta \text{sen} \omega \neq 1 \quad (6.2.8)$$

Vamos aplicar a regra de Cramer para calcular os coeficientes c_+ e d_+ das equações (6.2.6) e (6.2.7). Assim, sendo Δ , o determinante da matriz incompleta do sistema de equações (6.2.6) e (6.2.7), isto é :

$$\Delta = \pm (\sqrt{2}m)^{2|\nu|-2} \frac{k^{-2|\nu|+1}}{|E|+m} \begin{vmatrix} a & e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{sen} \delta \\ -e^{i\frac{\pi}{4}} \text{sen} \delta & a^* \end{vmatrix},$$

temos:

$$\Delta = \pm (\sqrt{2}m)^{2|\nu|-2} \frac{k^{-2|\nu|+1}}{|E|+m} (aa^* + \text{sen}^2 \delta). \quad (6.2.9)$$

Vamos introduzir as definições:

$$f = a^*b - \text{sen}^2 \delta e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (6.2.10)$$

$$g = (a^* + b^* e^{-i\frac{\pi}{4}}) \text{sen} \delta. \quad (6.2.11)$$

Sendo Δ_1 o determinante da matriz obtida de Δ , substituindo-se a coluna dos coeficientes de c_+ pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_1 = \pm \frac{i}{\sqrt{2}m} \frac{k}{|E|+m} \begin{vmatrix} \frac{b}{|E|+m} \mp \frac{\text{sen} \delta}{k} & e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{sen} \delta \\ \frac{\text{sen} \delta}{|E|+m} \pm \frac{b^*}{k} & a^* \end{vmatrix},$$

temos:

$$\Delta_1 = \pm \frac{i}{\sqrt{2}m} \frac{k}{|E|+m} \left\{ \frac{f}{|E|+m} \mp \frac{g}{k} \right\} \quad (6.2.12)$$

Sendo Δ_2 o determinante da matriz obtida de Δ , substituindo-se a coluna dos coeficientes de d_+ pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_2 = \frac{i}{\sqrt{2}m} \begin{vmatrix} a & \frac{b}{|E|+m} \mp \frac{\text{sen} \delta}{k} \\ -e^{i\frac{\pi}{4}} \text{sen} \delta & \frac{\text{sen} \delta}{|E|+m} \pm \frac{b^*}{k} \end{vmatrix},$$

temos:

$$\Delta_2 = \frac{i}{\sqrt{2}m} \left\{ \frac{g^*}{|E|+m} \pm \frac{f^*}{k} \right\}. \quad (6.2.13)$$

Substituindo as equações (6.1.10) e (6.1.11) nas equações (6.2.10) e (6.2.11) acima, obtemos:

$$f = i\sqrt{2}[1 - \cos\delta(\operatorname{sen}\omega - \cos\omega)] \quad (6.2.14)$$

e:

$$g = \sqrt{2}\operatorname{sen}\delta. \quad (6.2.15)$$

Podemos calcular c_+ e d_+ fazendo:

$$c_+ = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (6.2.16)$$

e:

$$d_+ = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (6.2.17)$$

Como queremos que c_+ seja igual a d_+ (condição da equação (5.8.13)), vamos verificar a possibilidade de:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad (6.2.18)$$

Com Δ_1 e Δ_2 dados pelas expressões (6.2.12) e (6.2.13), a expressão acima implica em:

$$\pm \frac{k}{|E| + m} \left\{ \frac{f}{|E| + m} \mp \frac{g}{k} \right\} = \frac{g^*}{|E| + m} \pm \frac{f^*}{k} \quad (6.2.19)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\frac{\pm k^2 f - k(|E| + m)(g + g^*) \mp (|E| + m)^2 f^*}{k(|E| + m)^2} = 0 \quad (6.2.20)$$

Para que a equação acima seja verificada para qualquer valor de E , devemos ter:

$$f = f^* = 0, \quad (6.2.21)$$

$$g = -g^* \quad (6.2.22)$$

Substituindo a equação (6.2.14) na expressão (6.2.21) acima, obtemos que:

$$\cos \delta (\operatorname{sen} \omega - \cos \omega) = 1 \quad (6.2.23)$$

Substituindo a equação (6.2.15) na expressão (6.2.22) acima, obtemos:

$$\operatorname{sen} \delta = -\operatorname{sen} \delta \quad (6.2.24)$$

que só é possível se:

$$\delta = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.2.25)$$

Assim, os parâmetros δ e ω da extensão devem ser obtidos de modo a satisfazerem às condições das equações (6.2.8), (6.2.23) e (6.2.25) simultaneamente.

Note que a condição da equação (6.2.25) implica que:

$$g = -g^* = 0. \quad (6.2.26)$$

De modo que o resultado da equação acima junto com a equação (6.2.21) fornecem:

$$c_+ = d_+ = 0, \quad (6.2.27)$$

que corresponde às mesmas soluções já anteriormente encontrada na Seção 5.9 do Capítulo 5 através das equações (5.9.5) a (5.9.8)

Assim, as extensões auto-adjuntas mais gerais a dois parâmetros que acoplam todas as componentes das auto-funções não produzem novas auto-funções simultâneas para os operadores H e Λ , isto é, não produzem auto-funções mais gerais que as já encontradas no Capítulo 5. Para obtermos auto-funções simultâneas mais gerais devemos proceder a extensões auto-adjuntas mais gerais com três e quatro parâmetros. Isso é o que faremos nos próximos capítulos.

Capítulo 7

Extensões auto-adjuntas a três parâmetros para o operador Hamiltoniana e conservação da helicidade

7.1. Determinação das extensões auto-adjuntas a três parâmetros para o operador Hamiltoniana.

Como não conseguimos resultados novos com a extensão a dois parâmetros que mistura todas as componentes das funções de onda, vamos tentar extensões a três parâmetros para o hamiltoniana.

Vamos então tomar a matriz W como sendo a matriz unitária:

$$W = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\varphi} & i \sin \theta e^{-i\varphi} \\ i \sin \theta e^{i\varphi} & \cos \theta e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (7.1.1)$$

De forma que as relações apresentadas na Tabela 1 se tornam:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(1)} + \cos \theta e^{i\varphi} \varphi_-^{(1)} + i \sin \theta e^{-i\varphi} \varphi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0 \quad (7.1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(2)} + i \sin \theta e^{i\varphi} \varphi_-^{(1)} + \cos \theta e^{-i\varphi} \varphi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0. \quad (7.1.3)$$

Substituindo os resultados das equações (5.1.19) e (5.1.20), a equação (7.1.2) acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\phi_+^{(1)} + \cos \theta e^{-i\varphi} \phi_-^{(1)} \right] \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - \lim_{r \rightarrow 0} r i \sin \theta e^{i\varphi} \phi_+^{(2)} \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.1.4)$$

Usando os resultados das equações (5.1.17) e (5.1.18) a equação acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos\theta e^{-i\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) K_{\nu+1}\psi_1 + \left(1 + \cos\theta e^{-i\varphi} \right) K_{\nu}\psi_2 \right] - \\ - i \operatorname{sen}\theta e^{i\Psi} \lim_{r \rightarrow 0} r \left(-e^{-i\frac{\pi}{4}} K_{\nu+1}\psi_3 + K_{\nu}\psi_4 \right) = 0. \quad (7.1.5)$$

Lembrando do comportamento na origem das funções K_{ν} e $K_{\nu+1}$ dado pela equação (5.2.6) e usando as definições de x , y , z e w dadas por (5.4.4) a (5.4.7), a equação acima fica:

$$\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos\theta e^{-i\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) x + \left(1 + \cos\theta e^{-i\varphi} \right) y + \\ + i \operatorname{sen}\theta e^{i\Psi} e^{-i\frac{\pi}{4}} z - i \operatorname{sen}\theta e^{i\Psi} w = 0. \quad (7.1.6)$$

Procedendo em relação à equação (7.1.3) da mesma forma que levou a equação (7.1.2) a poder ser escrita como na equação (7.1.6), encontramos:

$$i \operatorname{sen}\theta e^{-i\Psi} e^{i\frac{\pi}{4}} x - i \operatorname{sen}\theta e^{-i\Psi} y + \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - \cos\theta e^{i\varphi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) z + \\ + \left(1 + \cos\theta e^{i\varphi} \right) w = 0 \quad (7.1.7)$$

Multiplicando a equação (7.1.6) pelo fator $-ie^{-i\Psi}$ e a equação (7.1.7) por $ie^{i\Psi}$ temos:

$$-ie^{-i\Psi} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos\theta e^{-i\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) x - ie^{-i\Psi} \left(1 + \cos\theta e^{-i\varphi} \right) y \\ + \operatorname{sen}\theta e^{-i\frac{\pi}{4}} z - \operatorname{sen}\theta w = 0 \quad (7.1.8)$$

$$- \operatorname{sen}\theta e^{i\frac{\pi}{4}} x + \operatorname{sen}\theta y + ie^{i\Psi} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - \cos\theta e^{-i\varphi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) z + \\ + ie^{i\Psi} \left(1 + \cos\theta e^{i\varphi} \right) w = 0. \quad (7.1.9)$$

Introduzindo as definições:

$$a = -ie^{-i\Psi} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos\theta e^{-i\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \quad , \quad (7.1.10)$$

$$b = -ie^{-i\Psi} \left(1 + \cos\theta e^{-i\varphi} \right) \quad , \quad (7.1.11)$$

as equações (7.1.8) e (7.1.9) se tornam:

$$ax + by + \operatorname{sen}\theta e^{-i\frac{\pi}{4}}z - \operatorname{sen}\theta w = 0 \quad (7.1.12)$$

$$-\operatorname{sen}\theta e^{i\frac{\pi}{4}}x + \operatorname{sen}\theta y + a^*z + b^*w = 0 \quad (7.1.13)$$

As equações do sistema acima representam as condições de contorno a serem satisfeitas pelas auto-funções do hamiltoniana na origem e definem novos domínios $D_{\theta,\psi,\varphi}(H)$ para o operador H .

De outra forma, podemos dizer também que tais equações (7.1.12) e (7.1.13) fornecem todas as extensões auto-adjuntas a três parâmetros para o hamiltoniana.

7.2. Determinação das auto-funções de H que satisfazem às condições de contorno com três parâmetros.

Note que o sistema definido pelas equações (7.1.12) e (7.1.13) tem a mesma forma do sistema definido pelas equações (6.1.8) e (6.1.9). Vamos tomar uma auto-função de H com auto-valor de energia positivo com a mesma forma dada pela equação (6.2.1), de modo que as quantidades x , y , z e w serão dadas através das equações (6.2.2) a (6.2.5).

Substituindo então as expressões para x , y , z e w nas equações (7.1.12) e (7.1.13) das condições de contorno obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} ac_+ (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \pm \operatorname{sen}\theta e^{-i\frac{\pi}{4}} d_+ \frac{k}{|E| + m} (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} = \\ = i (\sqrt{2}m)^{-|\nu|} k^{|\nu|} \left[\frac{b}{|E| + m} \pm \frac{\operatorname{sen}\theta}{k} \right] \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}\theta e^{i\frac{\pi}{4}} c_+ (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \pm a^* d_+ \frac{k}{|E| + m} (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} = \\ = i (\sqrt{2}m)^{-|\nu|} k^{|\nu|} \left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{|E| + m} \pm \frac{b^*}{k} \right], \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

de onde devemos extrair c_+ e d_+ para depois verificarmos a possibilidade de satisfação da condição (5.8.13).

A condição para existência de soluções no sistema acima é :

$$\cos\theta \sin\varphi \neq 1. \quad (7.2.3)$$

Vamos calcular os coeficientes c_+ e d_+ através da regra de Cramer. Assim, sendo Δ o determinante da matriz incompleta do sistema de equações (7.2.1) e (7.2.2), temos:

$$\Delta = \pm (\sqrt{2m})^{2|\nu|-2} \frac{k^{-2|\nu|+1}}{|E|+m} (a^* a + \sin^2\theta). \quad (7.2.4)$$

Vamos introduzir as definições:

$$f = a^* b - \sin^2\theta e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (7.2.5)$$

$$g = (a^* + b^* e^{-i\frac{\pi}{4}}) \sin\theta. \quad (7.2.6)$$

Sendo Δ_1 o determinante da matriz obtida de Δ pela mudança da coluna dos coeficientes de c_+ pela coluna dos termos independentes, temos:

$$\Delta_1 = \pm \frac{i}{\sqrt{2m}} \frac{k}{|E|+m} \left\{ \frac{f}{|E|+m} \mp \frac{g}{k} \right\}. \quad (7.2.7)$$

Sendo Δ_2 o determinante da matriz obtida de Δ pela mudança da coluna dos coeficientes de d_+ pela coluna dos termos independentes, temos:

$$\Delta_2 = \frac{i}{\sqrt{2m}} \left\{ \frac{g^*}{|E|+m} \pm \frac{f^*}{k} \right\}. \quad (7.2.8)$$

Com a e b dados, agora, pelas equações (7.1.10) e (7.1.11) temos que as equações (7.2.5) e (7.2.6) se tornam:

$$f = i\sqrt{2}(1 - \cos\theta(\sin\varphi - \cos\varphi)) \quad (7.2.9)$$

$$g = i\sqrt{2}e^{i\psi} \sin\theta. \quad (7.2.10)$$

Podemos calcular c_+ e d_+ fazendo:

$$c_+ = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (7.2.11)$$

e:

$$d_+ = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (7.2.12)$$

A fim de investigarmos agora a possibilidade de a condição da equação (5.8.13) ser satisfeita, isto é, de termos $c_+ = d_+$ vamos verificar a possibilidade de acontecer:

$$\Delta_1 = \Delta_2. \quad (7.2.13)$$

Com Δ_1 e Δ_2 dados pelas equações (7.2.7) e (7.2.8), a expressão acima implica em termos:

$$k^2 f \mp k(E+m)(g^* + g) - (E+m)^2 f^* = 0 \quad (7.2.14)$$

Vemos que para a equação acima ser satisfeita para qualquer valor de E devemos ter:

$$f = f^* = 0 \quad (7.2.15)$$

$$g = -g^* \quad (7.2.16)$$

Substituindo as equações (7.2.9) e (7.2.10) nas equações acima obtemos as seguintes condições:

$$\cos \theta (\sin \varphi - \cos \varphi) = 1 \quad (7.2.17)$$

e:

$$e^{i\Psi} = e^{-i\Psi} \quad (7.2.18)$$

A equação (7.2.18) implica em:

$$\Psi = n_1 \pi \quad , n_1 = 0, 1, \dots \quad (7.2.19)$$

Assim, a imposição da condição da equação (5.8.13) para obtenção de auto-funções comuns a H e Λ nos domínios $D_{\theta, \Psi, \varphi}(H)$ caracterizados pelas equações (7.1.12) e (7.1.13) conduz às relações entre os parâmetros das extensões dadas pelas equações (7.2.3), (7.2.17) e (7.2.19), esquematizadas na tabela abaixo.

$\cos \theta (\sin \varphi - \cos \varphi) = 1$	
$\cos \theta \sin \varphi \neq 1$	
$\Psi = \pi n_1$	$n_1 = 0, 1, 2, \dots$
$\theta \neq \pi n'$	$n' \neq 0, 1, 2, \dots$

Tabela 5 - Relações que devem obedecer os três parâmetros das extensões auto-adjuntas para obtenção de auto-funções comuns aos operadores H e Λ .

A última condição da Tabela 5 foi colocada para que sejam obtidas soluções diferentes das encontradas na seção 5.9 (isto é, para que tenhamos $c_{\pm}$, $d_{\pm}$ diferentes de zero).

Com as condições da Tabela 5, temos:

$$f = f^* = 0 \quad (7.2.20)$$

$$g = -g^* = i\sqrt{2} (-1)^{n_1} \text{sen}\theta. \quad (7.2.21)$$

De modo que, as equações (7.2.4), (7.2.7) e (7.2.8), devido aos resultados das equações acima ficam:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{m(|E| + m)} (-1)^{n_1} \text{sen}\theta \quad (7.2.22)$$

e

$$\Delta = \pm (\sqrt{2}m)^{2|\nu|-2} \frac{k^{-2|\nu|+1}}{|E| + m} 2(1 - \cos\theta \text{sen}\varphi). \quad (7.2.23)$$

Com os resultados das equações acima podemos obter c_+ e d_+ dados por (7.2.11) e (7.2.12) como sendo:

$$c_+ = d_+ = + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{n_1} \text{sen}\theta}{(1 - \cos\theta \text{sen}\varphi)} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m} \right)^{2|\nu|-1}, \quad (7.2.24a)$$

se $\lambda = +k$ e:

$$c_+ = d_+ = - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{n_1} \text{sen}\theta}{(1 - \cos\theta \text{sen}\varphi)} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m} \right)^{2|\nu|-1}, \quad (7.2.24b)$$

se $\lambda = -k$.

Observando a forma das auto-funções de H dada pelas equações (5.5.1) a (5.5.5) e a forma dos coeficientes α e β (Tabela 4), vemos que para obter as auto-funções simultâneas de H e Λ com energia negativa, basta trocar $|E| \rightarrow -|E|$. Da mesma forma para se obter as constantes c_- e d_- basta trocar $|E| \rightarrow -|E|$ na equações (7.2.24a) e (7.2.24b).

Desse modo, considerando os resultados obtidos nessa seção, teremos as seguintes auto-funções simultâneas para H e Λ , apresentadas na Tabela 6 abaixo, com os parâmetros da extensão relacionados conforme mostra a Tabela 5:

$\psi_{ E , \pm k}(kr) =$	$\begin{pmatrix} J_{ \nu }(kr) + c_+ J_{- \nu }(kr) \\ \frac{-ik}{ E +m} (J_{ \nu -1}(kr) - c_+ J_{1- \nu }(kr)) \\ \frac{\pm k}{ E +m} (J_{ \nu }(kr) + d_+ J_{- \nu }(kr)) \\ \mp i (J_{ \nu -1}(kr) - d_+ J_{1- \nu }(kr)) \end{pmatrix}$
$\psi_{- E , \pm k}(kr) =$	$\begin{pmatrix} J_{ \nu }(kr) + c_- J_{- \nu }(kr) \\ \frac{+ik}{ E -m} (J_{ \nu -1}(kr) - c_- J_{- \nu +1}(kr)) \\ \frac{\mp i}{ E -m} (J_{ \nu }(kr) + d_- J_{- \nu }(kr)) \\ \mp i (J_{ \nu -1}(kr) - d_- J_{1- \nu }(kr)) \end{pmatrix}$
com	
$c_+ = d_+ = c_- = d_- = +\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{n_1} \sin \theta}{1 - \cos \theta \sin \varphi} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m} \right)^{2 \nu -1}$	
para $\lambda = +k$ e	
$c_+ = d_+ = c_- = d_- = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{n_1} \sin \theta}{1 - \cos \theta \sin \varphi} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m} \right)^{2 \nu -1}$	
para $\lambda = -k$	

Tabela 6 - Auto-funções simultâneas para H e Λ nos domínios $D'_{\theta, \psi, \varphi}(H, \Lambda)$ caracterizados pelas equações (7.1.12) e (7.1.13), com os parâmetros das extensões satisfazendo as condições da Tabela 5.

As auto-funções da Tabela 6 são auto-funções simultâneas dos operadores H e Λ , ambos definidos nos domínios $D'_{\theta, \psi, \varphi}(H)$, definidos pelas equações (7.1.12) e (7.1.13) e com as condições da Tabela 5, onde H é auto-adjunto.

Surge então a questão crucial:

"Será que Λ é auto-adjunto nesses domínios? "

7.3. Verificando se Λ é auto-adjunto no domínio $D'_{\theta, \psi, \varphi}(H, \Lambda)$ encontrado.

Vamos verificar se o operador Λ é auto-adjunto no domínio $D'_{\theta, \psi, \varphi}(H, \Lambda)$ definido pelas equações (7.1.12) e (7.1.13) com as condições da Tabela 5.

Já vimos no Capítulo 5, que as condições de contorno mais gerais a serem satisfeitas pelas auto-funções de Λ na origem, que correspondem a todas as possíveis extensões auto-adjuntas de Λ , parametrizadas pela matriz V unitária, são dadas pelas equações (5.3.11) e (5.3.12) abaixo transcritas:

$$(1 + \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})w + (1 - \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})z + (1 + \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})y + (1 - \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})x = 0 \quad (7.3.1)$$

$$(1 + \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})w + (-i - \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})z + (-i + \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})y + (i - \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})x = 0 \quad (7.3.2)$$

Queremos definir Λ no domínio $D'_{\theta, \psi, \varphi}(H, \Lambda)$, caracterizados pelas equações (7.1.12) e (7.1.13) abaixo transcritas:

$$ax + by + \operatorname{sen}\theta e^{-i\frac{\pi}{4}}z - \operatorname{sen}\theta w = 0 \quad (7.3.3)$$

$$-e^{i\frac{\pi}{4}\theta} \operatorname{sen}\theta x + \operatorname{sen}\theta y + a^*z + b^*w = 0 \quad , \quad (7.3.4)$$

onde, devido às condições da Tabela 5 podemos escrever as equações (7.1.10) e (7.1.11) como sendo:

$$a = -i(-)^{n_1} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos\theta e^{-i\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \quad (7.3.5)$$

$$b = -i(-)^{n_1} \left(1 + \cos\theta e^{-i\varphi} \right). \quad (7.3.6)$$

O sistema de equações (7.3.3) e (7.3.4) das condições de contorno sob as condições da Tabela 5, pode ser escrito como:

$$x = m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi w \quad (7.3.7)$$

$$y = m_{\theta} \cos \varphi z, \quad (7.3.8)$$

onde:

$$m_{\theta} = i\sqrt{2}(-)^{n_1} \cot \theta. \quad (7.3.9)$$

Lembremo-nos que os parâmetros θ e φ estão relacionados conforme mostra a Tabela 5.

Substituindo as equações (7.3.7) e (7.3.8) na equação (7.3.1) obtemos :

$$\begin{aligned} & [1 + m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi + \bar{v}_{11} (1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) + i\bar{v}_{12} (1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi)]w + \\ & + [1 + m_{\theta} \cos \varphi - \bar{v}_{11} (1 - m_{\theta} \cos \varphi) + i\bar{v}_{12} (1 - m_{\theta} \cos \varphi)]z = 0 \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

Para que a equação acima se verifique para qualquer w e z , devemos ter:

$$\bar{v}_{11} (1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) + i\bar{v}_{12} (1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) = -(1 + m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) \quad (7.3.11)$$

$$\bar{v}_{11} (1 - m_{\theta} \cos \varphi) - i\bar{v}_{12} (1 - m_{\theta} \cos \varphi) = (1 + m_{\theta} \cos \varphi) \quad (7.3.12)$$

O sistema acima sempre terá solução:

$$\bar{v}_{11} = \frac{-m_{\theta} (\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi)}{(1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) (1 - m_{\theta} \cos \varphi)} \quad (7.3.13)$$

$$\bar{v}_{12} = \frac{i (1 - m_{\theta}^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)}{(1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) (1 - m_{\theta} \cos \varphi)}. \quad (7.3.14)$$

Da mesma forma, substituindo as equações (7.3.7) e (7.3.8) na equação (7.3.2) obtemos:

$$\begin{aligned} & [i(1 + m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) + \bar{v}_{21} (1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi) + i\bar{v}_{22} (1 - m_{\theta} \operatorname{sen} \varphi)]w + \\ & [-i(1 + m_{\theta} \cos \varphi) - \bar{v}_{21} (1 - m_{\theta} \cos \varphi) + i\bar{v}_{22} (1 - m_{\theta} \cos \varphi)]z = 0. \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

Para que a equação acima seja sempre verificada para qualquer w e z , devemos ter que:

$$\bar{v}_{21} (1 - m_\theta \operatorname{sen} \varphi) + i \bar{v}_{22} (1 - m_\theta \operatorname{sen} \varphi) = -i(1 + m_\theta \operatorname{sen} \varphi) \quad (7.3.16)$$

$$\bar{v}_{21} (1 - m_\theta \cos \varphi) - i \bar{v}_{22} (1 - m_\theta \cos \varphi) = -i(1 + m_\theta \cos \varphi). \quad (7.3.17)$$

Esse sistema sempre terá solução:

$$\bar{v}_{21} = \frac{-i(1 - m_\theta^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)}{(1 - m_\theta \operatorname{sen} \varphi)(1 - m_\theta \cos \varphi)} \quad (7.3.18)$$

$$\bar{v}_{22} = \frac{-m_\theta (\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi)}{(1 - m_\theta \operatorname{sen} \varphi)(1 - m_\theta \cos \varphi)}. \quad (7.3.19)$$

As equações (7.3.13) e (7.3.19) implicam que:

$$\bar{v}_{11} = \bar{v}_{22}. \quad (7.3.20)$$

Da mesma forma a partir das equações (7.3.14) e (7.3.18) vemos que:

$$\bar{v}_{12} = -\bar{v}_{21}. \quad (7.3.21)$$

Notemos também, através da definição (7.3.9), que

$$m_\theta^* = -m_\theta. \quad (7.3.22)$$

Assim, podemos escrever os elementos da matriz V , como sendo:

$$v_{11} = v_{22} = \frac{m_\theta (\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi)}{(1 + m_\theta \operatorname{sen} \varphi)(1 + m_\theta \cos \varphi)} \quad (7.3.24)$$

$$v_{12} = -v_{21} = \frac{-i(1 - m_\theta^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)}{(1 + m_\theta \operatorname{sen} \varphi)(1 + m_\theta \cos \varphi)}. \quad (7.3.25)$$

Vejamos, agora, sob que condições a matriz V é unitária, isto é:

$$VV^{-1} = 1 \quad (7.3.26)$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ -v_{12} & v_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_{11} & -\bar{v}_{12} \\ \bar{v}_{12} & \bar{v}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.3.27)$$

$$\begin{bmatrix} v_{11}\bar{v}_{11} + v_{12}\bar{v}_{12} & -v_{11}\bar{v}_{12} + \bar{v}_{11}v_{12} \\ -\bar{v}_{11}v_{12} + v_{11}\bar{v}_{12} & v_{12}\bar{v}_{12} + v_{11}\bar{v}_{11} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.3.28)$$

Assim, devemos ter que:

$$v_{11}\bar{v}_{11} + v_{12}\bar{v}_{12} = 1 \quad (7.3.29)$$

$$v_{11}\bar{v}_{12} - \bar{v}_{11}v_{12} = 0. \quad (7.3.30)$$

A partir das equações (7.3.23) e (7.3.24) podemos calcular:

$$v_{11}\bar{v}_{11} = \frac{-m_\theta^2 (\text{sen}\varphi - \cos\varphi)^2}{(1 - m_\theta^2 \text{sen}^2\varphi)(1 - m_\theta^2 \cos^2\varphi)} \quad (7.3.31)$$

$$v_{12}\bar{v}_{12} = \frac{(1 - m_\theta^2 \text{sen}\varphi \cos\varphi)^2}{(1 - m_\theta^2 \text{sen}^2\varphi)(1 - m_\theta^2 \cos^2\varphi)}. \quad (7.3.32)$$

De modo que:

$$v_{11}\bar{v}_{11} + v_{12}\bar{v}_{12} = 1, \quad (7.3.33)$$

automaticamente.

Da mesma forma, utilizando as equações (7.3.23) e (7.3.24) podemos calcular:

$$v_{11}\bar{v}_{12} = \frac{im(\text{sen}\varphi - \cos\varphi)(1 - m_\theta^2 \text{sen}\varphi \cos\varphi)}{(1 - m_\theta^2 \text{sen}^2\varphi)(1 - m_\theta^2 \cos^2\varphi)} \quad (7.3.34)$$

$$\bar{v}_{11}v_{12} = \frac{im(\text{sen}\varphi - \cos\varphi)(1 - m_\theta^2 \text{sen}\varphi \cos\varphi)}{(1 - m_\theta^2 \text{sen}^2\varphi)(1 - m_\theta^2 \cos^2\varphi)}. \quad (7.3.35)$$

De modo que:

$$\bar{v}_{11}v_{12} - v_{11}\bar{v}_{12} = 0 \quad , \quad (7.3.36)$$

automaticamente.

Dessa forma, vemos que Λ é auto-adjunto do domínio definido pelas equações (7.1.12) e (7.1.13) sob as condições da Tabela 5 que relacionam os parâmetros da extensão, não havendo qualquer outra restrição adicional a ser satisfeita para que Λ seja auto-adjunto nesse domínio.

Portanto Λ e H comutam e conseqüentemente admitem auto-funções simultâneas (Tabela 6) no domínio $D'_{\theta,\Psi,\varphi}(H,\Lambda)$ definido pelas equações (7.1.12) e (7.1.13) com as condições da Tabela 5, onde ambos são auto-adjuntos. Em outras palavras, as dinâmicas definidas através das equações (7.1.12) e (7.1.13) para H com as condições da Tabela 5 conservam a helicidade.

7.4. Exemplo: Uma extensão particular a três parâmetros.

Uma maneira particular de satisfazermos as condições da Tabela 5 é tomarmos os parâmetros da extensão como sendo:

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad (7.4.1)$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}, \quad (7.4.2)$$

$$\Psi = 0. \quad (7.4.3)$$

Com esses valores para os parâmetros as equações (7.1.12) e (7.1.13) das condições de contorno podem ser escritas como:

$$-ix - ie^{-i\frac{\pi}{4}}y + e^{-i\frac{\pi}{4}}z - w = 0 \quad (7.4.4)$$

$$-e^{+i\frac{\pi}{4}}x + ie^{-i\frac{\pi}{4}}y - e^{-i\frac{\pi}{4}}z - w = 0. \quad (7.4.5)$$

Usando as definições das equações (7.2.6) e (7.2.7), obtemos que:

$$f = f^* = 0 \quad (7.4.6)$$

$$g = -g^* = -i \quad (7.4.7)$$

De modo que, as equações (7.2.7), (7.2.8) e (7.2.4) fornecem para uma auto-função de H com energia positiva e $\lambda = \pm k$, dada através da equação (6.2.1):

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{(|E| + m)} \quad (7.4.8)$$

e:

$$\Delta = \pm (\sqrt{2m})^{2|\nu|-2} \left(\frac{k}{|E| + m} \right)^{-2|\nu|+1}. \quad (7.4.9)$$

E, portanto, temos:

$$c_+ = d_+ = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$c_+ = d_+ = + \left(\frac{k}{\sqrt{2m}} \right)^{2|\nu|-1}, \quad (7.4.10a)$$

para $\lambda = +k$ e:

$$c_+ = d_+ = - \left(\frac{k}{\sqrt{2m}} \right)^{2|\nu|-1}, \quad (7.4.10b)$$

para $\lambda = -k$.

Assim, as auto-funções de H da forma da equação (6.2.1), com c_+ e d_+ dados pelas equações (7.4.10a) e (7.4.10b) acima satisfazem às condições de contorno dadas pelas equações (7.4.4) e (7.4.5) (para os valores dos parâmetros dados pelas equações (7.4.1) e (7.4.3)) e correspondem a auto-funções simultâneas de H e Λ , uma vez que satisfazem a condição da equação (5.8.13).

Observando a forma das auto-funções de H dada pela equação (5.5.1) e a forma dos coeficientes α e β dados na Tabela 4, vemos que para obter auto-funções simultâneas de H e Λ com energia negativa basta trocar $|E| \rightarrow -|E|$

nas auto-funções simultâneas de energia positiva (equação (6.2.1)). Da mesma forma para se obter as constantes c_- e d_- basta trocar $|E| \rightarrow -|E|$ na equações (7.4.10a) e (7.4.10b).

Assim, teremos as seguintes auto-funções simultâneas de H e Λ , dadas na Tabela 7 que pertencem ao domínio $D'_{\frac{\pi}{4},0,\frac{3\pi}{4}}(H,\Lambda)$, onde estamos definindo os operadores H e Λ .

$\psi_{ E ,\pm k}(kr) =$	$\begin{pmatrix} J_{ \nu }(kr) + c_+ J_{- \nu }(kr) \\ \frac{-ik}{ E +m} (J_{ \nu -1}(kr) - c_+ J_{1- \nu }(kr)) \\ \frac{\pm k}{ E +m} (J_{ \nu }(kr) + d_+ J_{- \nu }(kr)) \\ \mp i (J_{ \nu -1}(kr) - d_+ J_{1- \nu }(kr)) \end{pmatrix}$
$\psi_{- E ,\pm k}(kr) =$	$\begin{pmatrix} J_{ \nu }(kr) + c_- J_{- \nu }(kr) \\ \frac{+ik}{ E -m} (J_{ \nu -1}(kr) - c_- J_{1- \nu }(kr)) \\ \frac{\mp k}{ E -m} (J_{ \nu }(kr) + d_- J_{- \nu }(kr)) \\ \mp i (J_{ \nu -1}(kr) - d_- J_{1- \nu }(kr)) \end{pmatrix}$
com:	
$c_+ = d_+ = c_- = d_- = + \left(\frac{k}{\sqrt{2m}} \right)^{2 \nu -1}$	
para $\lambda = +k$	
$c_+ = d_+ = c_- = d_- = - \left(\frac{k}{\sqrt{2m}} \right)^{2 \nu -1}$	
para $\lambda = -k$	

Tabela 7 - Auto-funções simultâneas para H e Λ no domínio $D'_{\frac{\pi}{4},0,\frac{3\pi}{4}}(H,\Lambda)$.

Agora, resta checar se Λ é auto-adjunto no domínio em questão.

7.5. Verificando se o operador Λ é auto-adjunto no domínio $D'_{\frac{\pi}{4},0,\frac{3\pi}{4}}(H,\Lambda)$.

Já vimos no Capítulo 5, que as condições de contorno mais gerais a serem satisfeitas pelas auto-funções de Λ na origem, parametrizadas pela matriz V unitária, são dadas pelas equações (5.3.11) e (5.3.12) e correspondem a todas as possíveis extensões auto-adjuntas para a helicidade.

Para sabermos se Λ é auto-adjunto no domínio definido pelas equações (7.4.4) e (7.4.5), basta impormos que o sistema de equações (5.3.11) e (5.3.12) seja equivalente, isto é, tenha o mesmo conjunto de soluções que o sistema das equações (7.4.4) e (7.4.5), e verificarmos se isso resulta em uma matriz paramétrica V

unitária. Se isso acontecer, então Λ é auto-adjunto, caso contrário, Λ não é auto-adjunto no domínio em questão. Vejamos.

As extensões auto-adjuntas mais gerais para a helicidade são dadas pelas equações (5.3.11) e (5.3.12).

Queremos verificar se Λ é auto-adjunto no domínio $D'_{\frac{\pi}{4},0,\frac{3\pi}{4}}(H, \Lambda)$ caracterizado através das equações (7.4.4) e (7.4.5).

Das equações (7.4.4) e (7.4.5) podemos escrever:

$$x = iw \quad (7.5.1)$$

$$y = -iz \quad (7.5.2)$$

Substituindo as equações (7.5.1) e (7.5.2) nas equações (5.3.11) e (5.3.12) e após manipulações matemáticas, obtemos:

$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{11}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{12}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)w + \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \bar{v}_{11}e^{i\frac{\pi}{4}} - \bar{v}_{12}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)z = 0 \quad (7.5.3)$$

$$\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{21}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{22}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)w + \left(-e^{i\frac{\pi}{4}} - \bar{v}_{21}e^{i\frac{\pi}{4}} - \bar{v}_{22}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)z = 0 \quad (7.5.4)$$

Para que as equações acima sejam verificadas para qualquer w e z , devemos ter que:

$$\bar{v}_{11}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{12}e^{i\frac{\pi}{4}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (7.5.5)$$

$$\bar{v}_{11}e^{i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{12}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (7.5.6)$$

$$\bar{v}_{21}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{22}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (7.5.7)$$

$$\bar{v}_{21}e^{i\frac{\pi}{4}} + \bar{v}_{22}e^{-i\frac{\pi}{4}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (7.5.8)$$

As equações acima correspondem a dois sistema de equações desacopladas, de onde tiramos que:

$$v_{11} = v_{22} = i \quad (7.5.9)$$

e

$$v_{12} = v_{21} = 0 \quad , \quad (7.5.10)$$

dando a matriz V :

$$V = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad , \quad (7.5.11)$$

que é unitária ($VV^{-1} = 1$).

Portanto, podemos concluir que Λ é adjunto no domínio $D'_{\frac{\pi}{4}, 0, \frac{3\pi}{4}}(H, \Lambda)$ dado pelas equações (7.4.4) e (7.4.5).

Assim, vemos que, de fato, as condições de contorno dadas pelas equações (7.4.4) e (7.4.5) fornecem um possível domínio onde os operadores H e Λ são auto-adjuntos e efetivamente comutam. De modo que são possíveis auto-funções comuns (veja Tabela 7). Em outras palavras, a dinâmica definida pelas equações (7.4.4) e (7.4.5), de fato, conserva a helicidade.

Capítulo 8

Extensões auto-adjuntas mais gerais a quatro parâmetros para o operador H e conservação da helicidade

8.1. Determinação das condições de contorno mais gerais com quatro parâmetros para o operador Hamiltoniana.

Nessa seção, vamos proceder a extensão auto-adjunta mais geral para o operador H que implica em condições de contorno parametrizadas por quatro parâmetros e que acoplam todas as quatro componentes dos espinores das funções. Vamos, então, tomar a seguinte matriz paramétrica W unitária:

$$W = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i(\varphi+\alpha)} & i \operatorname{sen} \theta e^{-i(\Psi-\alpha)} \\ i \operatorname{sen} \theta e^{i(\Psi+\alpha)} & \cos \theta e^{-i(\varphi-\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (8.1.1)$$

De modo que as duas primeiras equações apresentadas na Tabela 1 ficam:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(1)} + \cos \theta e^{i(\varphi+\alpha)} \varphi_-^{(1)} + i \operatorname{sen} \theta e^{-i(\Psi-\alpha)} \varphi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0, \quad (8.1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\varphi_+^{(2)} + i \operatorname{sen} \theta e^{i(\Psi+\alpha)} \varphi_-^{(1)} + \cos \theta e^{-i(\varphi-\alpha)} \varphi_-^{(2)} \right]^\dagger \alpha_1 \psi = 0 \quad (8.1.3)$$

Substituindo os resultados das equações (5.1.19) e (5.1.20), a equação (8.1.2) acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[\phi_+^{(1)} + \cos \theta e^{-i(\varphi+\alpha)} \phi_-^{(1)} \right] \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - i \operatorname{sen} \theta e^{i(\Psi-\alpha)} \lim_{r \rightarrow 0} r \phi_-^{(2)} \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (8.1.4)$$

Com os espinores $\phi_{\pm}^{(1)}$ e $\phi_{\pm}^{(2)}$ dados pelas equações (5.1.17) e (5.1.18), a equação acima se torna:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left[(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos \theta e^{-i(\varphi+\alpha)} e^{i\frac{\pi}{4}}) K_{\nu+1} \psi_1 + (1 + \cos \theta e^{-i(\varphi+\alpha)}) K_{\nu} \psi_2 \right] - \\ - i \operatorname{sen} \theta e^{i(\Psi-\alpha)} \lim_{r \rightarrow 0} r \left(-e^{-i\frac{\pi}{4}} K_{\nu+1} \psi_3 + K_{\nu} \psi_4 \right) = 0. \quad (8.1.5)$$

Lembrando do comportamento na origem das funções K_{ν} e $K_{\nu+1}$ dado pela equação (5.2.6) e usando as definições de x , y , z e w das equações (5.4.4) a (5.4.7), a equação (8.1.5) acima pode ser escrita assim:

$$(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos \theta e^{-i(\varphi+\alpha)} e^{i\frac{\pi}{4}}) x + (1 + \cos \theta e^{-i(\varphi+\alpha)}) y + \\ + i \operatorname{sen} \theta e^{i(\Psi-\alpha)} e^{-i\frac{\pi}{4}} z - i \operatorname{sen} \theta e^{i(\Psi-\alpha)} w = 0. \quad (8.1.6)$$

Procedendo em relação à equação (8.1.3) da mesma que procedemos com a equação (8.1.2), a equação (8.1.3) pode ser escrita como:

$$i \operatorname{sen} \theta e^{-i(\Psi+\alpha)} e^{i\frac{\pi}{4}} x - i \operatorname{sen} \theta e^{-i(\Psi+\alpha)} y + (e^{i\frac{\pi}{4}} - \cos \theta e^{i(\varphi-\alpha)} e^{-i\frac{\pi}{4}}) z + \\ + (1 + \cos \theta e^{i(\varphi-\alpha)}) w = 0. \quad (8.1.7)$$

Podemos reescrever as equações (8.1.5) e (8.1.6) assim;

$$px + qy + \operatorname{sen} \theta e^{-i\frac{\pi}{4}} z - \operatorname{sen} \theta w = 0, \quad (8.1.8)$$

$$- \operatorname{sen} \theta e^{i\frac{\pi}{4}} x + \operatorname{sen} \theta y + rz + sw = 0, \quad (8.1.9)$$

onde introduzimos as definições:

$$p = -ie^{-i(\Psi-\alpha)} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - \cos \theta e^{-i(\varphi+\alpha)} e^{i\frac{\pi}{4}} \right), \quad (8.1.10)$$

$$q = -ie^{-i(\Psi-\alpha)} \left(1 + \cos \theta e^{-i(\varphi+\alpha)} \right), \quad (8.1.11)$$

$$r = ie^{i(\Psi+\alpha)} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - \cos \theta e^{i(\varphi-\alpha)} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right), \quad (8.1.12)$$

$$s = ie^{i(\Psi+\alpha)} \left(1 + \cos \theta e^{i(\varphi-\alpha)} \right). \quad (8.1.13)$$

As equações (8.1.8) e (8.1.9) representam as condições de contorno a serem satisfeitas pelas auto-funções de H na origem, e definem novos domínios $D_{\theta, \Psi, \varphi, \alpha}(H)$ onde H é auto-adjunto.

De fato, essas equações fornecem todas as extensões auto-adjuntas (a quatro parâmetros) para o operador H e evidentemente incluem as demais condições de contorno apresentadas nos Capítulos 5, 6 e 7 e também incluem todas as condições de contorno apresentadas nas referências [1-8].

8.2. Determinação das auto-funções de H que satisfazem as condições de contorno mais gerais com quatro parâmetros.

Na verdade, devemos nos lembrar que o nosso objetivo ao definirmos domínios estendidos para os operadores H e Λ foi o de verificar a possibilidade de obtermos auto-funções simultâneas, com H e Λ auto-adjuntos nesses domínios.

No entanto, já vimos no Capítulo 5 que isso só é possível para certas combinações lineares das auto-funções de H , apresentadas na Tabela 4, sob a condição da equação (5.8.13) ser satisfeita.

Seja, então, a auto-função de H da equação (6.2.1) com energia positiva e com possibilidade de auto-valor da helicidade $\lambda = \pm k$:

$$\psi_{+|E|, \pm k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{|\nu|} + c_{+} J_{-|\nu|} \\ \frac{-ik}{|E|+m} \left(J_{|\nu|-1} - c_{+} J_{1-|\nu|} \right) \\ \frac{\pm k}{|E|+m} \left(J_{|\nu|} + d_{+} J_{-|\nu|} \right) \\ \mp i \left(J_{|\nu|-1} - d_{+} J_{1-|\nu|} \right) \end{pmatrix}, \quad (8.2.1)$$

onde tomamos a combinação linear (isto é, as constantes α e β) conforme a Tabela 4.

Vamos agora verificar a possibilidade das auto-funções da forma da equação anterior, satisfazendo as condições de contorno das equações (8.1.8) e (8.1.9), satisfazerem também à condição da equação (5.8.13), de forma a garantir que tais auto-funções de H sejam também auto-funções de Λ .

Lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel, dado pela equação (5.2.6) e lembrando das definições de x , y , z e w das equações (5.4.4) a (5.4.7), temos:

$$x = (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} c_+ , \quad (8.2.2)$$

$$y = -i \frac{(\sqrt{2}m)^{-|\nu|} k^{|\nu|}}{|E| + m} , \quad (8.2.3)$$

$$z = \pm (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \frac{k}{|E| + m} d_+ , \quad (8.2.4)$$

$$w = \mp i (\sqrt{2}m)^{-|\nu|} \frac{k^{|\nu|}}{k} . \quad (8.2.5)$$

Substituindo as expressões das equações (8.2.2) a (8.2.5) nas equações (8.1.8) e (8.1.9) das condições de contorno, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} pc_+ (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \pm \text{sen}\theta e^{-i\frac{\pi}{4}} d_+ \frac{k}{|E| + m} (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} = \\ = i (\sqrt{2}m)^{-|\nu|} k^{|\nu|} \left[\frac{q}{|E| + m} \mp \frac{\text{sen}\theta}{k} \right] \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

$$\begin{aligned} -\text{sen}\theta e^{i\frac{\pi}{4}} c_+ (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} \pm r d_+ \frac{k}{|E| + m} (\sqrt{2}m)^{|\nu|-1} k^{-|\nu|} = \\ = i (\sqrt{2}m)^{-|\nu|} k^{|\nu|} \left[\frac{\text{sen}\theta}{|E| + m} \pm \frac{s}{k} \right] , \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

de onde devemos extrair c_+ e d_+ para depois verificar a possibilidade de satisfação da condição (5.8.13).

O sistema acima terá solução apenas se:

$$\cos \theta \operatorname{sen} \varphi \neq \cos \alpha. \quad (8.2.8)$$

Vamos calcular os coeficientes c_+ e d_+ através da regra de Cramer. Assim, sendo Δ o determinante da matriz incompleta do sistema de equações (8.2.6) e (8.2.7), temos :

$$\Delta = \pm (\sqrt{2m})^{2|\nu|-2} \frac{k^{-2|\nu|+1}}{|E|+m} (e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha} \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + 1). \quad (8.2.9)$$

Vamos introduzir as definições:

$$\gamma_1 = rq - e^{-i\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 \theta, \quad (8.2.10)$$

$$\gamma_2 = (r + se^{-i\frac{\pi}{4}}) \operatorname{sen} \theta, \quad (8.2.11)$$

$$\gamma_3 = (p + qe^{i\frac{\pi}{4}}) \operatorname{sen} \theta, \quad (8.2.12)$$

$$\gamma_4 = ps - e^{i\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 \theta. \quad (8.2.13)$$

Sendo Δ_1 o determinante da matriz obtida de Δ pela mudança da coluna dos coeficientes de c_+ pela coluna dos termos independentes, temos:

$$\Delta_1 = \pm \frac{i}{\sqrt{2m}} \frac{k}{|E|+m} \left\{ \frac{\gamma_1}{|E|+m} \mp \frac{\gamma_2}{k} \right\}. \quad (8.2.14)$$

Sendo Δ_2 o determinante da matriz obtida de Δ pela mudança da coluna dos coeficientes de d_+ pela coluna dos termos independentes, temos

$$\Delta_2 = \frac{i}{\sqrt{2m}} \left\{ \frac{\gamma_3}{|E|+m} \pm \frac{\gamma_4}{k} \right\}. \quad (8.2.15)$$

Substituindo as equações (8.1.10) a (8.1.13) nas equações (8.2.10) a (8.2.13) acima, obtemos:

$$\gamma_1 = 2ie^{i\alpha} \left[\text{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \theta \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \right], \quad (8.2.16)$$

$$\gamma_2 = i\sqrt{2}e^{i(\Psi+\alpha)} \text{sen} \theta, \quad (8.2.17)$$

$$\gamma_3 = -i\sqrt{2}e^{-i(\Psi-\alpha)} \text{sen} \theta, \quad (8.2.18)$$

$$\gamma_4 = 2ie^{i\alpha} \left[\text{sen} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \theta \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \right]. \quad (8.2.19)$$

Podemos calcular c_+ e d_+ fazendo:

$$c_+ = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (8.2.20)$$

e:

$$d_+ = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (8.2.21)$$

Como queremos que c_+ seja igual a d_+ (condição da equação (5.8.13)), vamos verificar a possibilidade de:

$$\Delta_1 = \Delta_2. \quad (8.2.22)$$

Com Δ_1 e Δ_2 dados pelas expressões (8.2.14) e (8.2.15), a expressão acima implica em:

$$\pm \frac{k}{|E| + m} \left\{ \frac{\gamma_1}{|E| + m} \mp \frac{\gamma_2}{k} \right\} = \frac{\gamma_3}{|E| + m} \pm \frac{\gamma_4}{k}, \quad (8.2.23)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\frac{\pm k^2 \gamma_1 - k(|E| + m)(\gamma_3 + \gamma_4) \pm (|E| + m)^2 \gamma_4}{k(|E| + m)^2} = 0. \quad (8.2.24)$$

Para que a equação acima seja verificada para qualquer valor de E devemos ter:

$$\gamma_1 = 0, \quad (8.2.25)$$

$$\gamma_4 = 0, \quad (8.2.26)$$

e:

$$\gamma_2 = -\gamma_3. \quad (8.2.27)$$

Substituindo as equações (8.2.16) e (8.2.19) nas expressões (8.2.25) e (8.2.26) obtemos que:

$$\alpha = n_1\pi \quad , n_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2.28)$$

e:

$$\cos\theta(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) = (-1)^{n_1} \quad (8.2.29)$$

Substituindo a equação (8.2.28) na condição da equação (8.2.8), essa se torna:

$$\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \neq (-1)^{n_1}. \quad (8.2.30)$$

Finalmente, substituindo as equações (8.2.17) e (8.2.18) na expressão (8.2.27), obtemos que:

$$\Psi = n_2\pi \quad , n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2.31)$$

Assim a imposição da condição da equação (5.8.13) para obtenção de auto-funções comuns no domínio $D_{\theta,\Psi,\varphi,\alpha}(H)$ conduz às relações entre os parâmetros da extensão dadas pelas equações (8.2.28) a (8.2.31), esquematizadas na tabela abaixo.

$\cos\theta(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) = (-1)^{n_1}$	
$\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \neq (-1)^{n_1}$	
$\alpha = n_1\pi$	$n_1 = 0, 1, 2, \dots$
$\Psi = n_2\pi$	$n_2 = 0, 1, 2, \dots$
$\theta \neq n'\pi$	$n' = 0, 1, 2, \dots$

Tabela 8 - Relações que devem obedecer os parâmetros da extensão auto-adjunta mais geral de H para obtenção de auto-funções comuns aos operadores H e Λ .

A última condição da Tabela 8 foi colocada para que sejam obtidas soluções diferentes das encontradas na Seção 5.9.

Dessa forma, para uma auto-função de H da forma da equação (8.2.1) e com os parâmetros da extensão satisfazendo as condições da Tabela 8, é possível obter auto-funções simultâneas para H e Λ , uma vez que as condições apresentadas na Tabela 8, implicam na satisfação da equação (5.8.13).

Com as condições da Tabela 8, temos que as equações (8.2.25) a (8.2.26) fornecem:

$$\gamma_1 = 0 \quad (8.2.32)$$

$$\gamma_4 = 0 \quad (8.2.33)$$

$$\gamma_2 = -\gamma_3 = i\sqrt{2}(-)^{n_1+n_2} \text{sen}\theta. \quad (8.2.34)$$

De modo que, assim, obtemos Δ_1 , Δ_2 e Δ dados pelas equações (8.2.9), (8.2.14) e (8.2.15) como sendo:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{(-)^{n_1+n_2} \text{sen}\theta}{m(|E| + m)} \quad (8.2.35)$$

e:

$$\Delta = \pm (\sqrt{2}m)^{2|\nu|-2} \frac{k}{|E| + m} 2(1 - (-)^{n_1} \cos\theta \text{sen}\varphi). \quad (8.2.36)$$

Com os resultados das equações acima podemos obter c_+ e d_+ dados por (8.2.20) e (8.2.21) como sendo:

$$c_+ = d_+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-)^{n_1+n_2} \text{sen}\theta}{(1 - (-)^{n_1} \cos\theta \text{sen}\varphi)} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m} \right)^{2|\nu|-1}, \quad (8.2.37a)$$

para $\lambda = +k$ e:

$$c_+ = d_+ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-)^{n_1+n_2} \text{sen}\theta}{(1 - (-)^{n_1} \cos\theta \text{sen}\varphi)} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m} \right)^{2|\nu|-1}, \quad (8.2.37b)$$

para $\lambda = -k$.

Observando a forma das auto-funções de H dada pelas equações (5.5.1) a (5.5.5) e a expressão dos coeficientes α e β (Tabela 4), vemos que para obter as auto-funções simultâneas de H e Λ com energia negativa, basta trocar $|E| \rightarrow -|E|$.

Desse modo, considerando os resultados obtidos nessa seção teremos as seguintes auto-funções simultâneas para H e Λ , apresentadas na Tabela 9 abaixo e com os parâmetros da extensão relacionados conforme mostra a Tabela 8 acima:

$\psi_{ E , \pm k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{ \nu }(kr) + c_+ J_{- \nu }(kr) \\ \frac{-ik}{ E +m} (J_{ \nu -1}(kr) - c_+ J_{1- \nu }(kr)) \\ \frac{\pm k}{ E +m} (J_{ \nu }(kr) + d_+ J_{- \nu }(kr)) \\ \mp i (J_{ \nu -1}(kr) - d_+ J_{1- \nu }(kr)) \end{pmatrix}$
$\psi_{- E , \pm k}(kr) = \begin{pmatrix} J_{ \nu }(kr) + c_- J_{- \nu }(kr) \\ \frac{+ik}{ E -m} (J_{ \nu -1}(kr) - c_- J_{1- \nu }(kr)) \\ \frac{\mp k}{ E -m} (J_{ \nu }(kr) + d_- J_{- \nu }(kr)) \\ \mp i (J_{ \nu -1}(kr) - d_- J_{1- \nu }(kr)) \end{pmatrix}$
com :
$c_+ = d_+ = c_- = d_- = +\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-)^{n_1+n_2} \sin \theta}{(1-(-)^{n_1} \cos \theta \sin \varphi)} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m}\right)^{2 \nu -1}$
para $\lambda = +k$ e:
$c_+ = d_+ = c_- = d_- = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-)^{n_1+n_2} \sin \theta}{(1-(-)^{n_1} \cos \theta \sin \varphi)} \left(\frac{k}{\sqrt{2}m}\right)^{2 \nu -1}$
para $\lambda = -k$.

Tabela 9 - Auto-funções simultâneas para H e Λ no domínio mais geral onde o operador hamiltoniana é auto-adjunto.

As auto-funções da Tabela 9 são auto-funções simultâneas dos operadores H e Λ , no domínio mais geral possível $D'_{\theta, \psi, \varphi, \alpha}(H)$ onde H é auto-adjunto, definido pelas equações (8.1.8) e (8.1.9) e com os parâmetros da extensão satisfazendo as condições da Tabela 8.

Surge, então, novamente, a questão crucial:

- "Será que o operador Λ é auto-adjunto nesse domínio? "

8.3. Verificando se Λ é auto-adjunto no domínio mais geral $D'_{\Psi, \alpha, \theta, \varphi}(H)$ encontrado.

Vamos verificar se Λ é auto-adjunto no domínio mais geral $D'_{\Psi, \alpha, \theta, \varphi}(H)$ definido pelas equações (8.1.8) e (8.1.9) com as condições da Tabela 8.

Já vimos no Capítulo 5, que as condições de contorno mais gerais a serem satisfeitas pelas auto-funções de Λ na origem, parametrizadas pela matriz V unitária, são dadas pelas equações (5.3.11) e (5.3.12) abaixo transcritas e correspondem a todas as possíveis extensões auto-adjuntas de Λ :

$$(1 + \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})w + (1 - \bar{v}_{11} + i\bar{v}_{12})z + (1 + \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})y + (1 - \bar{v}_{11} - i\bar{v}_{12})x = 0 \quad (8.3.1)$$

$$(1 + \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})w + (-i - \bar{v}_{21} + i\bar{v}_{22})z + (-i + \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})y + (i - \bar{v}_{21} - i\bar{v}_{22})x = 0 \quad (8.3.2)$$

É possível verificar que as equações (8.1.10) e (8.1.11), que definem o domínio mais geral $D'_{\theta, \Psi, \varphi, \alpha}(H)$ com os parâmetros da extensão satisfazendo as condições da Tabela 8, podem ser escritas como:

$$x = m_{\theta} \sin \varphi w, \quad (8.3.3)$$

$$y = m_{\theta} \cos \varphi z \quad (8.3.4)$$

onde:

$$m_{\theta} = i\sqrt{2}(-)^{n_2} \cot \theta. \quad (8.3.5)$$

Queremos definir Λ no domínio $D'_{\theta, \Psi, \varphi, \alpha}(H)$ definido pelas equações acima (com os parâmetros θ e φ satisfazendo as condições das equações (8.2.29) e (8.2.30)) e verificar se ele é auto-adjunto nesse domínio.

Como o sistema de equações (8.3.3) e (8.3.4) é o mesmo que o encontrado na Seção 7.6 do Capítulo 7 (equações (7.2.7) e (7.2.8)), podemos, da mesma forma que naquela seção, concluir que Λ é auto-adjunto nos domínios definido pelas equações (8.3.3) e (8.3.4) sob as condições da Tabela 8.

Portanto, H e Λ comutam e conseqüentemente admitem auto-funções simultâneas (Tabela 9) no domínio mais geral definido por (8.3.3) e (8.3.4) sob as condições da Tabela 8, onde ambos os operadores H e Λ , são auto-adjuntos. Em outras palavras, as dinâmicas definidas através das equações (8.3.3) e (8.3.4) com as condições da Tabela 8 conservam a helicidade.

É muito fácil verificar que as condições de contorno obtidas no Capítulo 7, através das equações (7.1.12) e (7.1.13) com as condições da Tabela 5, são um caso particular das condições de contorno obtidas nesse capítulo através das equações (8.1.8) e (8.1.9) com as condições da Tabela 8 (basta tomar, por exemplo $\alpha = 0$ na Tabela 8 para obter as equações encontradas no Capítulo 7).

Capítulo 9

Simetria de Aharonov-Bohm e conservação da helicidade

Nesse capítulo vamos analisar a possibilidade de preservação da Simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$ para as dinâmicas definidas pelas condições de contorno dos Capítulos 7 e 8 que conservam a helicidade.

Uma peculiaridade muito interessante das condições de contorno obtidas nos Capítulos 7 e 8 anteriores é que essas condições além de permitirem a conservação da helicidade preservam também outra importante simetria do hamiltoniana: a simetria de Aharonov Bohm ($\phi \rightarrow \phi + 1$), como discutiremos a seguir. A existência de dinâmicas onde ambas as simetrias são preservadas não ocorre para nenhuma das dinâmicas definidas pelas condições de contorno oferecidas pela literatura, entre elas [1],[2],[3],[4],[5],[6] e [7] para as quais a preservação de uma simetria implica na quebra da outra (faremos uma discussão sobre o conteúdo dessas referências no Capítulo 10).

De fato, nos Capítulos 7 e 8 foram encontradas famílias de extensões auto-adjuntas, para as quais os operadores H e A além de comutarem entre si (e consequentemente admitirem auto-funções comuns), preservam também a simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$ do hamiltoniana. Para vermos como isso acontece, precisamos analisar se há continuidade na dinâmica (isto é, das condições de contorno e das auto-funções) como função do fluxo ϕ . Precisamos também analisar se há ou não algum problema como o que ocorria para as condições de contorno das referências [2] e [4] quando o fluxo magnético $\phi \rightarrow \phi + k$ trocando de sinal, devido a assimetria existente entre os gráficos do parâmetro da extensão como função do fluxo magnético ϕ nos casos em que $n > 0$ e $n < 0$. Para isso vamos considerar as condições de contorno do Capítulo 8 que são as mais gerais (as condições de contorno do capítulo 7 são um caso particular dessas condições de contorno), dadas pelas equações (8.1.8) e (8.1.9), sujeitas às condições da Tabela 8, abaixo transcritas:

$$px + qy + \text{sen}\theta e^{-i\frac{\pi}{4}}z - \text{sen}\theta w = 0 \quad (9.1)$$

$$-\text{sen}\theta e^{i\frac{\pi}{4}}x + \text{sen}\theta y + rz + sw = 0 \quad (9.2)$$

onde:

$$p = r^* = -i(-)^{n_2+n_1} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - (-)^{n_1} \cos \theta e^{-i\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \quad (9.3)$$

$$q = s^* = -i(-)^{n_2+n_1} \left(1 + (-)^{n_1} \cos \theta e^{-i\varphi} \right), \quad (9.4)$$

com os parâmetros θ e φ satisfazendo às condições da Tabela 8 que representam as condições para conservação da helicidade, abaixo transcritas:

$$\cos \theta \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) = (-)^{n_1} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (9.5)$$

$$\cos \theta \sin \varphi \neq (-)^{n_1}. \quad (9.6)$$

Na verdade, apenas a equação (9.5) expressa a condição de conservação da helicidade, pois a equação (9.6) garante apenas que as expressões para as constantes $c_{\pm}$ e $d_{\pm}$ (da Tabela 9) tenham denominador diferente de zero.

Devemos observar que as condições (9.5) e (9.6) impõem, por sua vez, certas restrições aos possíveis valores dos parâmetros θ e φ , os quais, a princípio, poderiam variar cada um independentemente no intervalo de 0 a 2π .

A equação (9.5) pode ser escrita sob a forma:

$$\theta = \arccos \left\{ (-)^{n_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cosec} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad (9.7)$$

de onde vemos que, para n_1 par o intervalo de variação de φ fica restrito ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, o que corresponde a θ variando no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$, e φ variando no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$ com θ variando no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$. Fora desses intervalos a equação (9.7) não pode ser verificada. Veja o gráfico da figura 1. Para n_1 ímpar o intervalo de φ fica restrito a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ com θ no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$ e φ no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$ com θ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$. Veja também o gráfico da figura 3.

Por outro lado, a condição (9.6) impede que tenhamos para n_1 par $\theta = 0, 2\pi$, simultaneamente com $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e que tenhamos $\theta = \pi$ simultaneamente com $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Para n_1 ímpar a condição (9.6) impede que tenhamos $\theta = 0, 2\pi$ com $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ e $\theta = \pi$ com $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Todos esses resultados estão apresentados na Tabela 10 abaixo e obviamente se referem ao caso do intervalo crítico $-1 < \nu < 0$ (ou seja, $-n-1 < \phi < -n$) para o qual foram feitas as extensões auto-adjuntas:

Para $\nu :]-1, 0[$, i.e., $\phi :]-n-1, -n[$			
-Caso $n_1 = \text{par}$			
$\varphi : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\longrightarrow$	$\theta : \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	
$\varphi : \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$\longrightarrow$	$\theta : \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$	
-Caso $n_1 = \text{ímpar}$			
$\varphi : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\longrightarrow$	$\theta : \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	
$\varphi : \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$\longrightarrow$	$\theta : \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$	

Tabela 10 - Intervalos de variação dos parâmetros da extensão na condição de conservação da helicidade.

Para o caso $\nu \geq 0$ (ou seja $\phi \geq -n$ para certo valor do momento angular n fixo), sabemos que a única solução admissível (por ser de quadrado integrável na vizinhança da origem) é a solução regular na origem o que significa que na equação (2.2.31) apenas a solução J_ν deve sobreviver na primeira componente da função de onda (e apenas a solução $J_{\nu+1}$ deve sobreviver na segunda componente de função de onda).

Para que isso aconteça as equações (9.1) e (9.2) das condições de contorno devem fornecer $c_\pm = d_\pm = \infty$, o que significa que devemos ter, naquelas equações:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \theta = 0,$$

$$p = r^* = 0$$

e:

$$q = s^* \neq 0. \quad (9.8)$$

Isso ocorre para os seguintes valores dos parâmetros:

$$\theta = 0, 2\pi \quad \text{com} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (9.9)$$

ou:

$$\theta = \pi \quad \text{com} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}. \quad (9.10)$$

para n_1 escolhido par e:

$$\theta = 0, 2\pi \quad \text{com} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad (9.11)$$

ou:

$$\theta = \pi \quad \text{com} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (9.12)$$

para n_1 escolhido ímpar e com os parâmetros θ e φ satisfazendo a equação (9.5).

Para o caso $\nu \leq -1$ (ou seja, $\phi \leq -n-1$ para certo valor do movimento angular n fixo), devemos novamente ter que a única solução admissível é a solução regular na origem, o que significa que na equação (2.2.31) apenas a solução $J_{-\nu}$ deve sobreviver na primeira componente da função de onda (e apenas a solução $J_{-\nu-1}$ deve sobreviver na segunda componente da função de onda).

Para que isso ocorra as equações (9.1) e (9.2) das condições de contorno devem fornecer $c_{\pm} = d_{\pm} = 0$, o que evidentemente ocorre se:

$$\theta = 0, 2\pi \quad \text{com} \quad \varphi = \pi \quad (9.13)$$

ou:

$$\theta = \pi \quad \text{com} \quad \varphi = 0, 2\pi, \quad (9.14)$$

para n_1 par e:

$$\theta = 0, 2\pi \quad \text{com} \quad \varphi = 0, 2\pi \quad (9.15)$$

ou:

$$\theta = \pi \quad \text{com} \quad \varphi = \pi, \quad (9.16)$$

para n_1 ímpar, com os parâmetros θ e φ satisfazendo a equação (9.5).

Esses resultados estão apresentados na Tabela 11:

Caso n_1 par		
-Para $\nu \geq 0$ ($\phi \geq -n$)		
$\theta = 0, 2\pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
ou		
$\theta = \pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = \frac{3\pi}{2}$
-Para $\nu \leq -1$ ($\phi \leq -n-1$)		
$\theta = 0, 2\pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = \pi$
ou		
$\theta = \pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = 0, 2\pi$
Caso n_1 ímpar		
-Para $\nu \geq 0$ ($\phi \geq -n$)		
$\theta = 0, 2\pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = \frac{3\pi}{2}$
ou		
$\theta = \pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
-Para $\nu \leq -1$ ($\phi \leq -n-1$)		
$\theta = 0, 2\pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = 0, 2\pi$
ou		
$\theta = \pi$	$\longrightarrow$	$\varphi = \pi$

Tabela 11 - Valores dos parâmetros da extensão para os casos $\nu \geq 0$ e $\nu \leq -1$.

Analisando os resultados das Tabelas 10 e 11, vemos que para certas escolhas dos parâmetros θ e φ é possível obter, através de interpolação, a continuidade da dinâmica como função do fluxo ϕ e a preservação da simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$, simultaneamente com a condição de conservação da helicidade da equação (9.5) satisfeita.

Para n_1 par, por exemplo, podemos tomar:

$$\theta(\phi) = 0, \text{ para } \phi \geq -n \quad (9.17)$$

com:

$$\varphi(\phi) = \frac{\pi}{2}, \text{ para } \phi \geq -n \quad (9.18)$$

e:

$$\theta(\phi) = 0, \text{ para } \phi \leq -n - 1 \quad (9.19)$$

com:

$$\varphi(\phi) = \pi, \text{ para } \phi \leq -n - 1. \quad (9.20)$$

Para um dado valor do momento angular n (positivo ou negativo), vemos que para garantir a continuidade da dinâmica (isto é, das condições de contorno e das funções de onda) como função do fluxo ϕ e a preservação da simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$, podemos interpolar as funções:

$$\theta(\phi) = 0, \text{ para } \phi \geq -n$$

$$\theta(\phi) = 0, \text{ para } \phi \leq -n - 1 \quad (9.21)$$

e:

$$\varphi(\phi) = \frac{\pi}{2}, \text{ para } \phi \geq -n$$

$$\varphi(\phi) = \pi, \text{ para } \phi \leq -n - 1, \quad (9.22)$$

no intervalo $-n - 1 < \phi < -n$, garantindo que a condição de conservação da helicidade da equação (9.5) seja satisfeita. Note que isso é possível para esses intervalos de variação dos parâmetros (veja a Tabela 10).

Assim, vamos tomar:

$$\varphi(\phi) = f(\phi + n + 1), \quad -n - 1 < \phi < -n, \quad (9.23)$$

onde f é uma função cuja forma independe de n e contínua no intervalo $[0, 1]$ e tal que: $f(0) = \pi$ e $f(1) = \frac{\pi}{2}$. É crucial que para esse intervalo de variação do parâmetro φ é possível garantir a satisfação da equação (9.5) com:

$$\theta(\varphi(\phi)) = \arccos \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cosec} \left(f(\phi + n + 1) - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad -n - 1 < \phi < -n \quad (9.24)$$

com $\theta(\varphi(\phi))$ variando no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ (de modo que $\theta(\varphi(\phi))$ é uma função contínua). Veja os gráficos das figuras 2a, 2b e 1.

Note também que para $n > 0$ (movimento angular positivo) os gráficos das figuras 2a e 2b terão as mesmas formas, não existindo portanto qualquer assimetria entre os casos $n > 0$ e $n < 0$, contrariamente ao que ocorre nos casos das referências [2],[4].

Uma outra possível escolha para os valores dos parâmetros para o caso de n_1 ser par é mostrada nas figuras 2c e 2d. Note que nesse caso também é possível a interpolação (que garante a preservação da simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$ e a continuidade da dinâmica como função de ϕ) com a condição da equação (9.5) de conservação da helicidade satisfeita.

Para o caso de n_1 ímpar, podemos tomar:

$$\theta(\phi) = 0, \text{ para } \phi \geq -n \quad (9.25)$$

com:

$$\varphi(\phi) = \frac{3\pi}{2} \text{ para } \phi \geq -n \quad (9.26)$$

e:

$$\theta(\phi) = 0 \text{ para } \phi \leq -n - 1 \quad (9.27)$$

com:

$$\varphi(\phi) = 2\pi \text{ para } \phi \leq -n - 1. \quad (9.28)$$

Para um dado valor do momento angular n (positivo ou negativo), a fim de garantirmos a continuidade das funções de onda como função de ϕ e a preservação da simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$, vamos interpolar as funções:

$$\theta(\phi) = 0 \text{ para } \phi \geq -n$$

$$\theta(\phi) = 0 \text{ para } \phi \leq -n - 1 \quad (9.30)$$

e:

$$\varphi(\phi) = \frac{3\pi}{2} \text{ para } \phi \geq -n$$

$$\varphi(\phi) = 2\pi \text{ para } \phi \leq -n - 1, \quad (9.31)$$

no intervalo $-n - 1 < \phi < -n$, garantindo que a condição de conservação da helicidade da equação (9.5) seja satisfeita. Note que isso é possível para esse intervalo de variação dos parâmetros (veja a Tabela 10).

Assim, vamos tomar:

$$\varphi(\phi) = g(\phi + n + 1) \quad , \quad -n - 1 < \phi < -n, \quad (9.32)$$

onde g é uma função cuja forma independe de n e contínua no intervalo $[0, 1]$ e tal que: $g(0) = 2\pi$ e $g(1) = \frac{3\pi}{2}$. Novamente, é crucial que para esse intervalo de variação do parâmetro φ é possível garantir a satisfação da equação (9.5) com:

$$\theta(\varphi(\phi)) = \arccos \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(g(\phi + n + 1) - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad , \quad -n - 1 < \phi < -n \quad (9.33)$$

com $\theta(\varphi(\phi))$ variando no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ (de modo que $\theta(\varphi(\phi))$ é uma função contínua). Veja os gráficos das figuras 4a, 4b e 3.

Note que as formas dos gráficos das figuras 4a e 4b serão as mesmas para o caso em que o momento angular n é positivo, não existindo portanto qualquer assimetria entre os casos $n > 0$ e $n < 0$.

Uma outra possível escolha para os valores dos parâmetros para o caso da escolha de n_1 ser ímpar é mostrada nas figuras 4c e 4d. Note que nesse caso também é possível a interpolação (que garante a continuidade da dinâmica como função do fluxo e a preservação da simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$) com a condição (9.5) de conservação da helicidade satisfeita.

Desse modo, vemos que as condições de contorno do Capítulo 8 que asseguram dinâmicas onde a helicidade é conservada, também podem, para certas escolhas dos parâmetros discutidas nesse capítulo, preservar a simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$, havendo também continuidade das dinâmicas (das condições de contorno e das funções de onda) como função do fluxo magnético ϕ , o que não se conseguia através das demais dinâmicas encontradas na literatura [1],[2],[3],[4],[5],[6] e [7].

Figura 1- Este gráfico mostra a dependência entre os parâmetros θ e φ que garante a conservação da helicidade quando n_1 é par.

Figura 2a - Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro φ como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n é par.

Figura 2b –Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro θ

como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n é par.

Figura 2c - Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro φ como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n_q é par.

Figura 2d - Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro θ como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n_1 é par.

Figura 3 - Este gráfico mostra a dependência entre os parâmetros θ e φ que garante a conservação da helicidade quando n é ímpar.

Figura 4a - Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro φ como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n_1 é ímpar.

Figura 4b – Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro θ como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n é ímpar.

Figura 4c - Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro φ como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n_1 é ímpar.

Figura 4d - Interpolação com conservação da helicidade para o parâmetro θ como função do fluxo magnético ϕ (para momento angular negativo n) quando n é ímpar.

Capítulo 10

Determinação das condições de contorno a partir de um procedimento limite

10.1. Introdução - Procedimento Limite.

Nos capítulos anteriores resolvemos o problema de determinação dos *domínios mais gerais* nos quais os operadores H e Λ são auto-adjuntos e comutam (e consequentemente admitem auto-funções comuns) e a simetria de Aharonov-Bohm é preservada. Vamos agora, nesse capítulo, tratar de um outro procedimento utilizado nas referências [2], [4], [5], [6] e [7], que não consiste em se proceder a uma extensão auto-adjunta para o operador H , mas que também pode ser utilizado para a escolha das condições de contorno e para a determinação das auto-funções de H .

Vimos no Capítulo 2 que, para uma partícula de Dirac livre em duas dimensões, o problema da determinação das auto-funções do hamiltoniana pode ser facilmente resolvido, uma vez que a única condição de contorno admissível é a usual: funções de onda regulares na origem, caso contrário as auto-funções não são normalizáveis na vizinhança da origem. Em outras palavras, o operador hamiltoniana do caso livre é essencialmente auto-adjunto, não requerendo (nem permitindo) extensões auto-adjuntas. Também conseguimos obter, com relativa facilidade, as auto-funções simultâneas dos operadores hamiltoniana e helicidade para o caso da partícula de Dirac livre. O mesmo não ocorre quando introduzimos um tubo de fluxo magnético na origem. Nesse caso, para $\nu = n + \phi \geq 0$ e para $\nu \leq -1$, novamente somente soluções regulares na origem são admissíveis, no entanto, no intervalo aberto $-1 < \nu < 0$, é impossível impor a condição de regularidade na origem simultaneamente para todas as componentes das auto-funções de H , surgindo assim uma indeterminação e as condições de contorno devem ser escolhidas dentro de uma família de condições de contorno admissíveis. Foi demonstrado pela primeira vez por Sousa Gerbert^[3] e repetido nesse trabalho no Capítulo 5, que existe uma família a um parâmetro de extensões auto-adjuntas possíveis para o operador H . As auto-funções parametrizadas pelo parâmetro θ encontradas por Sousa Gerbert^[3] tem o comportamento na origem:

$$\psi(r) \sim \left[\begin{array}{c} i(mr)^\nu \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right] \\ (mr)^{-(1+\nu)} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right] \end{array} \right]. \quad (10.1.1)$$

Surgindo assim naturalmente a questão de como resolver a ambiguidade, de qual dinâmica é fisicamente correta.

Algumas tentativas aparecem na literatura no sentido de procurar responder a essa pergunta.

Alford et al^[4] tentam uma motivação física para a escolha das condições de contorno dentre as possíveis, calculando as auto-funções do problema de uma partícula de Dirac na presença de um tubo de fluxo magnético (com fluxo na superfície do tubo) de raio $R > 0$, removendo, assim, a ambiguidade e tomando o limite $R \rightarrow 0$ no final dos cálculos. Esse mesmo procedimento é repetido por Hagen^[5,6,7] e Coutinho e Perez^[2]. O conteúdo pertinente às referências [5], [6] e [7] está discutido separadamente no Apêndice D.

No entanto, embora não haja nada de errado com os cálculos das referências [2], [4], [5], [6] e [7], as condições de contorno assim obtidas, conduzem a uma descontinuidade da dinâmica como função do fluxo magnético ϕ , produzindo também uma quebra da simetria de Aharonov-Bohm ($\phi \rightarrow \phi + 1$)^[2,4], apesar da conservação da helicidade. Assim, não é possível a conservação de ambas as simetrias (helicidade e Aharonov-Bohm) para tal dinâmica. Na referência [2] é mostrado que é possível, por interpolação, obter a preservação da simetria de Aharonov-Bohm, mas, nesse caso, não é mais possível a conservação da helicidade.

Um outro procedimento limite apresentado na mesma referência [2] consiste em considerar o mesmo tubo de fluxo de raio $R > 0$, mas com a adição de um potencial repulsivo constante u_R no seu interior. Tomando-se os limites $u_R \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 0$ de um certo modo particular conveniente, é possível também obter todas as condições de contorno possíveis a um parâmetro^[2].

10.2. Modelo do Tubo de Fluxo.

Nessa seção, vamos considerar o modelo do tubo de fluxo das referências [2], [4], [3], [5], [6] e [7]. Nosso objetivo aqui é discutir principalmente os resultados das referências [2], [4] e compará-los com os resultados que obtivemos no Capítulo 5 para as auto-funções de H e Λ .

Assim, vamos considerar o problema de uma partícula de Dirac em duas dimensões na presença de um tubo de fluxo do tipo delta δ de casca, isto é, vamos tomar o potencial vetor $\vec{A}$, como sendo:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{H} = \frac{2\pi c}{e} \phi \frac{\delta(r)}{r} \vec{k}. \quad (10.2.1)$$

Vamos introduzir também um potencial repulsivo $V_R(r)$, de tal modo que a equação radial (de duas componentes) de auto-funções da equação (2.2.14) se torna:

$$H(r)\psi(r) = \begin{bmatrix} ms & -i\left(\partial_r + \frac{\nu(r)+1}{r}\right) \\ -i\left(\partial_r - \frac{\nu(r)}{r}\right) & -ms \end{bmatrix} \psi(r) = [E - V_R(r)]\psi(r) \quad (10.2.2)$$

onde:

$$\nu(r) = \begin{cases} n & , \quad r < R \\ n + \phi & , \quad r > R \end{cases} \quad (10.2.3)$$

e:

$$V_R(r) = \begin{cases} u_R & , \quad r < R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}. \quad (10.2.4)$$

Vamos introduzir:

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix}.$$

Para $r \leq R$, a equação radial para a componente ψ_1 é:

$$\left\{ \partial_{k_0 r}^2 + \frac{1}{k_0 r} \partial_{k_0 r} + \left(1 - \frac{n^2}{(k_0 r)^2} \right) \right\} \psi_1 = 0, \quad (10.2.5)$$

onde definimos:

$$k_0 = \sqrt{(E - u_R)^2 - m^2}, \quad (10.2.6)$$

com a componente ψ_2 relacionada com a componente ψ_1 através da equação:

$$\psi_2 = -\frac{ik_0}{E - u_R + ms} \left(\partial_{kr} - \frac{n}{k_0 r} \right) \psi_1. \quad (10.2.7)$$

Usando a equação (2.2.27) e lembrando que^[10]:

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (10.2.8)$$

devemos ter:

$$\psi(k_0 r) = \frac{1}{N} \left[\frac{J_n(k_0 r)}{\frac{ik_0}{E - u_R + ms} J_{n+1}(k_0 r)} \right], \quad r < R \quad (10.2.9)$$

onde N é um fator de normalização e n pode ser positivo ou negativo.

Para $r \geq R$, a equação radial para ψ_1 é:

$$\left\{ \partial_{kr}^2 + \frac{1}{kr} \partial_{kr} + \left(1 - \frac{\nu^2}{(kr)^2} \right) \right\} \psi_1 = 0 \quad (10.2.11)$$

onde:

$$k = \sqrt{E^2 - m^2}, \quad (10.2.12)$$

e com a componente ψ_2 relacionada com a componente ψ_1 através da equação:

$$\psi_2 = \frac{-ik}{E + ms} \left(\partial_{kr} - \frac{\nu}{kr} \right) \psi_1. \quad (10.2.13)$$

Nesse caso, as possíveis soluções dependem de em que intervalo está ν (para $\nu > 0$ e $\nu < -1$ as soluções são as soluções regulares). Lembrando que estamos tratando do caso $-1 < \nu < 0$, as soluções mais gerais são da forma:

$$\psi(kr) = \frac{1}{N} \left[\frac{F J_\nu(kr) + G J_{-\nu}(kr)}{\frac{ik}{E + ms} (F J_{\nu+1}(kr) - G J_{-\nu-1}(kr))} \right], \quad (10.2.14)$$

onde N é um fator de normalização.

As constantes F e G , que regulam respectivamente as proporções das funções singular (regular) e regular (singular) da componente $\psi_1(\psi_2)$ podem ser encontradas, impondo a continuidade em $r = R$ para ambas as componentes, isto é:

$$J_n(k_0 R) = F J_\nu(kR) + G J_{-\nu}(kR) \quad (10.2.15)$$

$$\frac{ik_0}{E - u_R + ms} J_{n+1}(k_0 R) = \frac{ik}{E + ms} [F J_\nu(kR) - G J_{-\nu-1}(kR)]. \quad (10.2.16)$$

Esse sistema de equações pode ser resolvido fornecendo:

$$\frac{F}{G} = \frac{\frac{k}{E+ms} J_n(k_0 R) J_{-\nu-1}(kR) + \frac{k_0}{E-u_R+ms} J_{n+1}(k_0 R) J_{-\nu}(kR)}{\frac{k}{E+ms} J_n(k_0 R) J_{\nu+1}(kR) - \frac{k_0}{E-u_R+ms} J_{n+1}(k_0 R) J_\nu(kR)}. \quad (10.2.18)$$

Lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel^[10] dado pela equação (5.5.6) e tomando o limite $R \rightarrow 0$, com V_R mantido constante na expressão da equação (10.2.18) para $n \geq 0$ e $n \leq 0$, obtemos:

$$\frac{F}{G} \Big|_{R \rightarrow 0} \propto R^{-2(\nu+1)} \quad \text{para } n \geq 0 \quad (10.2.19)$$

e

$$\frac{F}{G} \Big|_{R \rightarrow 0} \propto R^{-2(\nu)} \quad \text{para } n \leq 0. \quad (10.2.20)$$

Note que esses resultados são os mesmos encontrados por Alford^[4], se lembrarmos que $\nu = n + \phi$.

Lembremo-nos também do seguinte fator: para todo valor não inteiro do parâmetro do fluxo ϕ há exatamente um valor de n , ou seja, uma onda parcial, $n = -[\phi] - 1$ ($[\phi]$ é o maior inteiro menor que ϕ) para a qual teremos o problema da indeterminação do domínio do hamiltoniana, isto é, ν está no intervalo crítico $]-1, 0[$.

Assim para $n > 0$, que corresponde a $\phi < 0$, a equação (10.2.19) fornece solução singular para ψ_1 e consequentemente, devido a equação (10.2.14), solução regular para ψ_2 , o que corresponde a fazer a escolha do parâmetro θ da referência [3] como sendo $\frac{\pi}{2}$ na equação (10.1.1) ou $\delta = \frac{\pi}{2}$ nas equações (5.4.2) e (5.4.3).

Para $n < 0$, que corresponde a $\phi > 0$, a equação (10.2.20) fornece solução singular para ψ_1 e consequentemente, devido a equação (10.2.14), solução regular

para ψ_2 , o que corresponde a fazer a escolha do parâmetro θ da referência [3] como sendo $-\frac{\pi}{2}$ na equação (10.1.1) ou $\delta = 0$ na equações (5.4.2) e (5.4.3).

Assim, através desse procedimento limite obtemos as condições de contorno das referências [2], [4], isto é, o parâmetro θ da extensão utilizado na referência [3] fica sendo:

$$\theta = -\text{sgn}(\phi) \frac{\pi}{2} \quad (10.2.21)$$

As soluções assim obtidas para as auto-funções (de duas componentes) da equação (10.2.2) são apresentadas na Tabela 12 abaixo:

$\psi(r) = \frac{1}{N} \left(\begin{array}{c} J_\nu(k_r) \\ \frac{ik}{E+ms} J_{\nu+1}(k_r) \end{array} \right)$	, para $\phi < 0 \quad (n > 0)$
$\psi(r) = \frac{1}{N} \left(\begin{array}{c} J_{-\nu}(k_r) \\ \frac{-ik}{E+ms} J_{-\nu-1}(k_r) \end{array} \right)$	, para $\phi > 0 \quad (n < 0)$

Tabela 12 - Auto-funções simultâneas de H e Λ , obtidas através da solução do problema com um tubo de fluxo magnético de raio $R > 0$ e depois tomando-se o limite $R \rightarrow 0$ no final dos cálculos^{[2],[4-7]}.

Está claro que o cálculo que foi procedido aqui é o mesmo das referências [2] e [4]. No entanto, talvez não esteja claro que é mesmo cálculo feito por Hagen, uma vez que nas referências [5],[6] e [7], não estão explícitas quais são as condições de contorno que as funções de onda devem obedecer. Os resultados das referências [5],[6] e [7] estão discutidos separadamente no Apêndice D.

As auto-funções de H apresentadas na Tabela 12, obtidas por esse processo limite, também são auto-funções do operador Λ , como pode ser verificado por mera aplicação de Λ nessas funções, tomando-se as constantes α e β como na Tabela 4. *Ou de outra forma, podemos notar que as soluções da Tabela 12 são um caso particular das soluções para auto-funções simultâneas de H e Λ obtidas no Capítulo 5 (equações (5.9.5) a (5.9.12)).*

Apesar da conservação da helicidade, a dinâmica dada pela condição de contorno da equação (10.2.2.) não preserva outra importante simetria: a simetria de Aharonov-Bohm, produzindo também uma descontinuidade na dinâmica (isto é, das condições de contorno e das auto-funções) como função do parâmetro θ para $\phi = -n$, se $n < 0$ e para $\phi = -n - 1$, se $n \geq 0$. Vejamos como isso acontece.

Para $\nu \geq 0$, dissemos que a única condição de contorno admissível é a regularidade na origem, o que corresponde ao parâmetro da extensão da referência [3] igual a $\frac{\pi}{2}$ (veja equação (10.1.1)). Para $\nu \leq -1$, novamente a única condição de

contorno admissível é a regularidade na origem, o que pode ser obtido tomando-se $\theta = -\frac{\pi}{2}$ na equação (10.1.1). Assim, para um dado valor do momento angular n temos:

$$\theta(\phi) = \frac{\pi}{2} \quad \text{para } \phi \geq -n \quad (10.2.22)$$

$$\theta(\phi) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{para } \phi \leq -n-1 \quad (10.2.23)$$

Na região crítica, para a qual $-n-1 < \phi < -n$, (isto é $-1 < \nu < 0$) temos:

$$\theta = -\text{sgn}(\phi) \frac{\pi}{2} \quad (10.2.24)$$

Vamos considerar primeiro o caso $n < 0$, para o qual a região crítica ($-1 < \nu < 0$) ocorre para $\phi > 0$. O comportamento de θ como função de ϕ , nesse caso é ilustrado no gráfico abaixo, para um dado valor de n negativo:

Figura 5.a

Vemos que a descontinuidade na dinâmica ocorre para $\phi = -n$.

Para o caso $n > 0$, a região crítica ocorre para $\phi < 0$. O gráfico da figura 5b abaixo ilustra o comportamento do parâmetro θ da extensão da referência [3] como função do fluxo ϕ para um dado valor de $n > 0$.

Figura 5b

Vemos que a descontinuidade na dinâmica ocorre para $\phi = -n-1$.

A assimetria entre os gráficos das figuras 5.a para $n < 0$ e 5.b para $n > 0$ e a descontinuidade da dinâmica produzida pela equação (10.2.24) para todo valor inteiro do fluxo ϕ (para $\phi = -n$ se $n < 0$ e para $\phi = -n - 1$ se $n > 0$) explica a quebra da simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$ da hamiltoniana (basta observar o que ocorre quando o fluxo ϕ vai em $\phi + k$ trocando de sinal, devido a assimetria da condição de contorno da equação (10.2.24)).

Note que a descontinuidade nunca ocorre para $\phi = 0$, como erroneamente foi afirmado na referência [4].

Se quisermos obter a continuidade da dinâmica, preservando a simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$, podemos pensar para um dado valor de n (positivo ou negativo) em interpolar a função:

$$\theta(\phi) = \frac{\pi}{2}, \quad \phi \geq -n \quad (10.2.29)$$

$$\theta(\phi) = \frac{-\pi}{2}, \quad \phi \leq -n - 1, \quad (10.2.30)$$

no intervalo aberto $-n - 1 < \phi < -n$. Assim, vamos tomar:

$$\theta(\phi) = f(\phi + n + 1), \quad -n - 1 < \phi < -n, \quad (10.2.31)$$

onde f é uma função cuja forma é independente de n e contínua no intervalo $[0, 1]$. Impondo que $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ e $f(1) = \frac{\pi}{2}$, garantimos a continuidade. Veja os gráficos das figuras 5a e 5b, onde as curvas pontilhadas correspondem às interpolações para os casos de $n > 0$ (figura 5a) e $n < 0$ (figura 5b). No entanto, procedendo dessa forma, isto é, tomando o parâmetro θ no intervalo crítico como sendo dado pela equação acima, embora garantamos a preservação da simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$ e a continuidade da dinâmica como função de ϕ , perderemos a possibilidade de conservação da helicidade, uma vez que as soluções da forma da equação (10.1.1) da mesma forma que as soluções a um parâmetro (Tabela 2) do Capítulo 5 não conservam a helicidade, como foi mostrado na Seção 5.8.

De modo que não é possível, nessa situação, a preservação de ambas as simetrias (helicidade e Ahronov-Bohm) simultaneamente. Isso não significa que para extensões auto-adjuntas de H mais gerais que a da referência [3] não possam haver dinâmicas que conservem ambas as simetrias. De fato, conforme verificamos no Capítulo 9 anterior, as extensões que encontrarmos nos capítulos 7 e 8 além de preservarem a helicidade podem também preservar a simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$ para certas escolhas especiais dos intervalos de variação dos parâmetros das extensões.

10.3. Processo limite para a obtenção de todas as extensões a um parâmetro.

Vamos agora mostrar que, para o caso crítico de $-1 < \nu < 0$, tomando os limites $u_R \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 0$ em certas proporções, podemos obter todas as condições de contorno a um parâmetro^[2].

Vamos tomar o limite $u_R \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 0$ na expressão da equação (10.2.18), da seguinte forma:

$$Ru_R = \begin{cases} x_{n+1} - (mR)^{-(1+2\nu)\frac{1}{\beta}}, & -1 < \nu < -\frac{1}{2} \\ \bar{x}, & \nu = -\frac{1}{2} \\ x_n + \beta(mR)^{1+2\nu}, & -\frac{1}{2} < \nu < 0 \end{cases}, \quad (10.3.1)$$

onde $\bar{x} \neq 0$ é o primeiro zero de $J_n(x)$, $\bar{x}$ é qualquer número tal que $J_n(\bar{x}) \neq 0$ e β é uma constante adimensional. Lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel (equação (5.5.6)) a equação (10.2.18) pode ser escrita como:

$$\frac{F}{G} \Big|_{u_R \rightarrow \infty} = \frac{\sqrt{\frac{E-mg}{E+mg}} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{kR}{2}\right)^{-1-\nu} J_n(u_R R) + \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{kR}{2}\right)^{1-\nu} J_{n+1}(u_R R)}{\sqrt{\frac{E-mg}{E+mg}} \frac{1}{\Gamma(2+\nu)} \left(\frac{kR}{2}\right)^{1+\nu} J_n(u_R R) - \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{kR}{2}\right)^\nu J_{n+1}(u_R R)} \quad (10.3.2)$$

Considerando primeiro o caso $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$, temos:

$$J_n(u_R R) = J_n\left(x_{n+1} - \frac{1}{\beta}(mR)^{-(1+2\nu)}\right) \sim J_n(x_{n+1}) \quad (10.3.3)$$

e

$$J_{n+1}(u_R R) = J_{n+1}\left(x_{n+1} - \frac{1}{\beta}(mR)^{-(1+2\nu)}\right) \sim J_{n+1}(x_{n+1}) - \frac{1}{\beta}(mR)^{-(1+2\nu)} J'_{n+1}(x_{n+1}). \quad (10.3.4)$$

Usando o resultado da equação (5.5.6), a equação (10.3.4) acima fornece:

$$J'_{n+1}(x_{n+1}) = J_n(x_{n+1}) - \frac{n+1}{x_{n+1}} J_{n+1}(x_{n+1}) \quad (10.3.5)$$

e, portanto:

$$J_{n+1}(Ru_R) \sim -\frac{1}{\beta}(mR)^{-(1+2\nu)} J_n(x_{n+1}). \quad (10.3.6)$$

Substituindo os resultados das equações (10.3.3) e (10.3.6) na equação (10.3.2), obtemos:

$$\frac{F}{G} \Big|_{u_R \rightarrow \infty} = \beta \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{k}{2m} \right)^{-(1+2\nu)} \left(\frac{E-ms}{E+ms} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad -1 < \nu < -\frac{1}{2} \quad (10.3.7)$$

Considerando agora o caso $-\frac{1}{2} < \nu < 0$, temos:

$$J_{n+1}(Ru_R) = J_{n+1}(x_n + \beta(mR)^{1+2\nu}) \sim J_{n+1}(x_n) \quad (10.3.8)$$

e

$$J_n(Ru_R) = J_n(x_n + \beta(mR)^{1+2\nu}) \sim J_n(x_n) + \beta(mR)^{1+2\nu} J'_n(x_n) \quad (10.3.9)$$

Usando novamente o resultado da equação (5.5.6) na equação (10.3.9) acima, temos:

$$J'_n(x_n) = -J_{n+1}(x_n) + \frac{n}{x_n} J_n(x_n) \quad (10.3.10)$$

e, portanto:

$$J_n(Ru_R) \sim -\beta(mR)^{1+2\nu} J_{n+1}(x_n). \quad (10.3.11)$$

Substituindo, os resultados das equações (10.3.8) e (10.3.11) na equação (10.3.2), obtemos:

$$\frac{F}{G} \Big|_{u_R \rightarrow \infty} = \beta \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{k}{2m} \right)^{-(1+2\nu)} \left(\frac{E-ms}{E+ms} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad -\frac{1}{2} < \nu < 0 \quad (10.3.12)$$

Para $\nu = -\frac{1}{2}$, a expressão da equação (10.3.2) se torna:

$$\frac{F}{G} \Big|_{u_R \rightarrow \infty} = -\frac{J_n(\bar{x})}{J_{n+1}(\bar{x})} \left(\frac{E-ms}{E+ms} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10.3.13)$$

Assim, tomando os limites $u_R \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 0$ como na equação (10.3.1), obtemos:

$$\frac{F}{G} \Big|_{\substack{R \rightarrow 0 \\ u_R \rightarrow \infty}} = \left\{ \begin{array}{ll} \beta \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{k}{2m}\right)^{-(1+2\nu)} \left(\frac{E-ms}{E+ms}\right)^{\frac{1}{2}} & , \quad \nu \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{J_n(\bar{x})}{J_{n+1}(\bar{x})} \left(\frac{E-ms}{E+ms}\right)^{\frac{1}{2}} & , \quad \nu = \frac{1}{2} \end{array} \right\}, \quad (10.3.14)$$

o que é o mesmo que tomar:

$$2^{-\nu-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu+1)} \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right] = \left\{ \begin{array}{ll} \beta & , \quad \nu \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{J_n(\bar{x})}{J_{n+1}(\bar{x})} & , \quad \nu = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (10.3.15)$$

na equação (10.1.1), onde θ é o parâmetro da referência [3] e δ é o parâmetro da extensão da referência [1] e também das equações (5.4.1) e (5.4.2) dessa tese. Dessa forma, obtemos, portanto, todas as condições de contorno admissíveis a um parâmetro (parâmetro β). Provavelmente, existe também alguma física expressa através de algum processo limite como este da referência [2], que acabamos de reproduzir, que leve às condições de contorno obtidas nos Capítulos 7 e 8, as quais além de conservarem a helicidade, preservam também a simetria $\phi \rightarrow \phi + 1$. No entanto, certamente não é óbvio qual deve ser esse processo limite.

Capítulo 11

Conclusões

É importante salientar aqui alguns aspectos interessantes sobre as condições de contorno que obtivemos nesse trabalho.

Em primeiro lugar, observemos que as condições de contorno das equações (8.1.8) e (8.1.9) caracterizam os domínios mais gerais onde o operador hamiltoniana é auto-adjunto e incluem todas as condições de contorno apresentadas nas referências [1], [2], [3], [4], [5], [6] e [7].

Apesar de os operadores H e Λ formalmente comutarem, simplesmente a definição dos dois operadores num mesmo domínio denso comum, não garante a comutação efetiva entre esses operadores e a consequente obtenção de auto-funções comuns, contrariamente ao que se afirmou na referência [1].

Mostramos que é formalmente possível obter auto-funções comuns a H e Λ para certas combinações particulares das auto-funções de H (equação (2.2.17)) dadas na Tabela 2 com a condição da equação (5.8.13) satisfeita.

Impondo às auto-funções de H que satisfazem às condições de contorno mais gerais das equações (8.1.8) e (8.1.9) que também satisfaçam à condição (5.8.13) de conservação da helicidade, obtivemos as relações entre os parâmetros da extensão apresentadas na Tabela 8. Dessa forma encontramos os domínios mais gerais onde a helicidade é conservada.

Além da conservação da helicidade, concluímos que uma característica importante das condições de contorno que obtivemos é que elas permitem também a preservação da simetria de Aharonov-Bohm. Para certas escolhas convenientes dos intervalos de variação dos parâmetros das extensões, é possível, através de uma interpolação, obter a preservação da simetria de Aharonov-Bohm ($\phi \rightarrow \phi + 1$).

De modo que, a conservação da helicidade se torna compatível com a simetria de Aharonov-Bohm para as condições de contorno que obtivemos, o que não ocorre para as demais condições de contorno obtidas na literatura^[1-7].

No entanto, a conservação da helicidade com a preservação da simetria de Aharonov-Bohm não ocorre apenas para uma, mas para várias diferentes dinâmicas.

De modo que, podemos dizer que nem a conservação da helicidade nem a simetria de Aharonov-Bohm podem remover a indeterminação existente na escolha das condições de contorno para o caso de uma partícula de Dirac, que se move num plano na presença de uma linha de fluxo magnético na origem.

A continuidade da dinâmica (isto é, das condições de contorno e das funções de onda) como função do fluxo magnético ϕ também é garantida, nesse caso.

Apêndice A

Cálculo da Relação de Comutação $[H, \Lambda]$

A relação de comutação formal entre os operadores H, Λ :

$$[H, \Lambda] = 0 \quad , \quad (\text{A-1})$$

pode ser facilmente verificada, usando-se as definições formais desses operadores dadas respectivamente pelas equações (2.1.1) e (2.1.13). Basta notar que H (dado pela equação (2.1.1)) é o operador diagonal:

$$H = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} - \sigma_3 m \end{pmatrix}$$

e Λ dado pela equação (2.1.13) é um operador não diagonal;

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

No entanto, para sermos mais cuidadosos, devemos checar se a ação desses operadores numa função de onda genérica é de fato comutativa como parece. Para isso vamos tomar os operadores H e Λ como sendo dados pelas equações (2.2.7) e (2.3.2), depois de feita a transformação de variáveis para coordenadas polares.

Assim, sejam os operadores H e Λ (escritos em coordenadas polares).

$$H = \begin{pmatrix} \mathcal{H} + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & \mathcal{H} - \sigma_3 m \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H} \\ \mathcal{H} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A-3})$$

onde $\mathcal{H}$ é dado pela equação (2.2.2) aqui transcrita:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\theta} \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta + \frac{\phi}{r} \right) \\ -ie^{i\theta} \left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta - \frac{\phi}{r} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-4})$$

Calculando inicialmente a ação do operador $H \Lambda$ sobre uma função de onda genérica de quatro componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} , \quad (\text{A-5})$$

onde ψ_1, ψ_2 são espinores de duas componentes, temos:

$$\begin{aligned} H \Lambda \psi &= \begin{pmatrix} \mathcal{H} + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & \mathcal{H} - \sigma_3 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H} \\ \mathcal{H} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ H \Lambda \psi &= \begin{pmatrix} (\mathcal{H} + \sigma_3 m) \mathcal{H} \psi_2 \\ (\mathcal{H} - \sigma_3 m) \mathcal{H} \psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

Calculando a ação do operador ΛH sobre a função de onda genérica da equação (A-5), temos:

$$\begin{aligned} \Lambda H \psi &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H} \\ \mathcal{H} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H} + \sigma_3 m & 0 \\ 0 & \mathcal{H} - \sigma_3 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ \Lambda H \psi &= \begin{pmatrix} \mathcal{H} (\mathcal{H} - \sigma_3 m) \psi_2 \\ \mathcal{H} (\mathcal{H} + \sigma_3 m) \psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

É fácil verificar, considerando que $\mathcal{H}$ é o operador não-diagonal dado por (A-4), a seguinte equação:

$$\mathcal{H} \sigma_3 \psi_i = -\sigma_3 \mathcal{H} \psi_i , \quad (\text{A-8})$$

onde ψ_i é um espinor qualquer de duas componentes. De modo que as equações (A-6) e (A-7) produzem o mesmo resultado, implicando, automaticamente na relação de comutação dos operadores H e Λ da equação (A-1).

Apêndice B

Cálculo das Relações de Comutação $[H, S_3]$, $[H, l_z]$, $[H, J_z]$.

Consideremos o operador hamiltoniana formalmente definido pela equação (2.1.1) como sendo:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \left[\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right] + \beta m \quad (\text{B-1})$$

com o potencial vetor $\vec{A}$ dado pela equação (2.1.11), e o operador de spin S_3 , definido por:

$$S_3 = \frac{\Sigma_3}{2} \quad (\text{B-2})$$

Usando as equações (B-1) e (B-2) acima e a equação (2.1.11), podemos escrever o comutador $[H, S_3]$ como sendo:

$$[H, S_3] = \frac{1}{2} \left[\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (-y\alpha_1 + x\alpha_2) + \beta m, \Sigma_3 \right]$$

$$[H, S_3] = \frac{1}{2} \left\{ [\alpha_1, \Sigma_3] p_x + [\alpha_2, \Sigma_3] p_y + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (-[\alpha_1, \Sigma_3] y + [\alpha_2, \Sigma_3] x) + [\beta, \Sigma_3] m \right\} \quad (\text{B-3})$$

Através das definições das matrizes α_1 , α_2 , β e Σ_3 , dadas respectivamente pelas equações (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) e (2.1.21) e lembrando da relação de comutação conhecida entre as matrizes de Pauli:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{B-4})$$

podemos escrever:

$$[\alpha_1, \Sigma_3] = -2i\alpha_2, \quad (\text{B-5})$$

$$[\alpha_2, \Sigma_3] = 2i\alpha_1, \quad (\text{B-6})$$

e:

$$[\beta, \Sigma_3] = 0. \quad (\text{B-7})$$

Substituindo os resultados das equações (B-5) a (B-7) acima na equação (B-3) obtemos:

$$[H, S_3] = i \left\{ \alpha_1 p_y - \alpha_2 p_x + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (\alpha_1 x + \alpha_2 y) \right\} ,$$

ou seja:

$$[H, S_3] = i \left\{ \vec{\alpha} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (\vec{\alpha} \cdot \vec{r}) \right\}. \quad (\text{B-8})$$

Considerando, agora, o operador l_z dado por:

$$l_z = x p_y - y p_x, \quad (\text{B-9})$$

podemos escrever o comutador $[H, l_z]$ como sendo dado por:

$$[H, l_z] = \left[\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (-y \alpha_1 + x \alpha_2) + \beta m, x p_y - y p_x \right] \quad (\text{B-10})$$

Lembrando das relações de comutação conhecidas:

$$[x, y] = [y, p_x] = [x, p_x] = [y, p_y] = 0 \quad (\text{B-11})$$

e:

$$[x, p_y] = [y, p_x] = i, \quad (\text{B-12})$$

a equação (B-10) pode ser escrita como sendo:

$$[H, l_z] = \alpha_1 [p_x, x] p_y - \alpha_2 [p_y, y] p_x + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (-x [y, p_y] \alpha_1 - y [x, p_x] \alpha_2)$$

de onde vem que:

$$[H, l_z] = -i \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{r} \right) \quad (\text{B-13})$$

De modo que, sendo o momento angular total:

$$J_z = S_z + l_z \quad , \quad (\text{B-14})$$

e usando as equações (B-8) e (B-13), obtemos imediatamente:

$$[H, J_z] = 0. \quad (\text{B-15})$$

Apêndice C

Cálculo das Relações de Comutação $[\Lambda, S_3]$, $[\Lambda, l_z]$, $[\Lambda, J_z]$.

Consideremos o operador helicidade formalmente definido pela equação (2.1.13) como sendo igual a:

$$\Lambda = \left[\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right] \cdot \vec{\Sigma} \quad (C-1)$$

Calculemos o comutador:

$$[\Lambda, S_3] = \frac{1}{2} \left[p_x \Sigma_1 + p_y \Sigma_2 + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (-y \Sigma_1 + x \Sigma_2), \Sigma_3 \right]$$

$$[\Lambda, S_3] = \frac{1}{2} \left[px[\Sigma_1, \Sigma_2] + py[\Sigma_2, \Sigma_3] + e \frac{\phi}{r^2} (-y[\Sigma_1, \Sigma_3] + x[\Sigma_2, \Sigma_3]) \right] \quad (C-2)$$

onde usamos a equação (2.1.11) para o potencial vetor $\vec{A}$.

Através das definições das matrizes Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 dadas respectivamente pelas equações (2.1.15), (2.1.16) e (2.1.21) e usando a relação de comutação (B-4) conhecida entre as matrizes de Pauli podemos facilmente escrever:

$$[\Sigma_1, \Sigma_3] = -2i\Sigma_2 \quad (C-3)$$

e:

$$[\Sigma_2, \Sigma_3] = 2i\Sigma_1 \quad (C-4)$$

De modo que a equação (C-2) se torna:

$$[\Lambda, S_3] = i \left(\vec{\Sigma} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{r} \right) \quad (C-5)$$

Com l_z definido como na equação (B-9) podemos calcular:

$$[\Lambda, l_z] = \left[px\Sigma_1 + py\Sigma_2 + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (-y\Sigma_1 + x\Sigma_2), xp_y - yp_x \right] \quad (C-6)$$

Usando as relações de comutação conhecidas das equações (B-11) e (B-12) a equação (C-6) acima se torna:

$$[\Lambda, l_z] = [p_x, x]\Sigma_1 p_y - [p_y, y]\Sigma_2 p_x + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} (-[y, p_y]x\Sigma_1 - [x, p_x]y\Sigma_2)$$

de onde obtemos:

$$[\Lambda, l_z] = -i \left(\vec{\Sigma} \wedge \vec{p} + \frac{e}{c} \frac{\phi}{r^2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{r} \right) \quad (C-7)$$

De modo que as equações (C-5) e (C-7), implicam no resultado:

$$[\Lambda, J_z] = 0. \quad (C-8)$$

Apêndice D

Discussão dos resultados das referências [5], [6] e [7].

O objetivo desse apêndice é comentar os resultados das referências [5], [6] e [7], compará-los com os demais resultados das referências [1], [2] e [4] e com os resultados apresentados nessa tese.

O procedimento limite das referências [5], [6] e [7], onde se toma um tubo de fluxo magnético de raio $R > 0$ (com o campo magnético $\vec{H}$ dado por uma função do tipo δ de casca), a fim de se remover a ambiguidade, tomando-se o limite $R \rightarrow 0$ no final dos cálculos, é o mesmo procedimento utilizado pelos autores das referências [2] e [4] e também no Capítulo 10 dessa tese.

No entanto, os resultados obtidos por Hagen contém uma dependência no sinal de s ($s = \pm 1$) que não aparece nas soluções dos demais autores citados acima.

Um fato que torna um tanto obscuro os resultados das referências [5], [6] e [7] é que o autor, não encarando o problema como um problema de determinação das condições de contorno, não deixa explícito quais condições de contorno suas autofunções obedecem dentro daquela família de condições de contorno admissíveis encontradas por Sousa Gerbert^[3].

Outro fato que chama-nos a atenção é que Hagen obtém soluções singulares admissíveis para $-1 < \nu = n + \phi < 0$ quando $s = +1$ e para $0 < \nu < 1$ quando $s = -1$.

Se voltarmos ao Capítulo 2 dessa tese e às referências [1], [2], [3] e [4] veremos que só são possíveis extensões auto-adjuntas para $-1 < \nu < 0$, pois fora desse intervalo o operador hamiltoniana utilizado é essencialmente auto-adjunto não admitindo outra condição de contorno senão a regularidade na origem.

É preciso, então, esclarecermos esses fatos aqui. A explicação para esses fatos está nas diferentes maneiras como os autores introduzem o spin, ou seja, na forma do operador hamiltoniana. O hamiltoniana usado por Hagen é obtido usando-se a decomposição da equação de Dirac usual de quatro componentes na ausência da terceira coordenada espacial em duas equações para $s = +1$ e $s = -1$ [5,6,7], enquanto a hamiltoniana das referências [1], [2], [3] e [4] é a mesma usada nessa tese (veja equação (2.1.1)), fornecendo o limite não relativístico correto.

Vamos recapitular alguns de nossos resultados importantes para o esclarecimento dos fatos. A hamiltoniana de duas componentes que apresentamos no Capítulo 2 (equação (2.1.10)) é a seguinte:

$$H = \sigma_1 \pi_x + \sigma_2 \pi_y + s \sigma_3 m \quad (\text{D-1})$$

com $s = \pm 1$, onde $\vec{\pi} = (\pi_x, \pi_y)$ é definido na equação (2.1.2).

Após passarmos para coordenadas polares, a hamiltoniana da equação (D-1) acima pôde ser escrita como:

$$H(r, \theta) = \begin{pmatrix} ms & -ie^{-i\theta} \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta + \frac{\phi}{r} \right) \\ -ie^{i\theta} \left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta - \frac{\phi}{r} \right) & -ms \end{pmatrix} \quad (\text{D-2})$$

Para resolvermos o problema de determinação das auto-funções mais gerais de H :

$$H \psi_\pm = \pm |E| \psi_\pm \quad (\text{D-3a})$$

pudemos tentar uma separação de variáveis do tipo:

$$\psi_\pm = \begin{pmatrix} \psi_\pm^1(r) e^{in_1\theta} \\ \psi_\pm^2(r) e^{in_2\theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{D-3})$$

de onde surgiu a condição:

$$n_2 = n_1 + 1. \quad (\text{D-4})$$

Pudemos pensar, então, em duas possibilidades para as auto-funções:

$$\psi_\pm = \begin{pmatrix} \psi_\pm^1(r) \\ \psi_\pm^2(r) e^{i\theta} \end{pmatrix} e^{in\theta}, \quad (\text{D-5a})$$

que tem momento angular total:

$$j_z = n + \frac{1}{2} \quad (\text{D-5b})$$

e

$$\psi'_\pm = \begin{pmatrix} \psi_\pm^1(r) e^{-i\theta} \\ \psi_\pm^2(r) \end{pmatrix} e^{in\theta}, \quad (\text{D-6a})$$

com momento angular total:

$$j_z = n - \frac{1}{2}. \quad (\text{D-6b})$$

Lembremo-nos que H e J_z comutam.

Como pudemos obter o mesmo valor para o momento angular total da equação (D-6b) fazendo $n \rightarrow n - 1$ na equação (D-5b), é claro que as equações para a hamiltoniana $H(r)$ e para as auto-funções $\psi_{\pm}(r)$ obtidas através da equação (D-5a) são equivalentes às mesmas equações obtidas através da equação (D-6a) pela transformação $\nu \rightarrow \nu - 1$, como pode ser facilmente checado.

Assim, escolhendo a auto-função da equação (D-5a) (sem perda de generalidade) obtivemos a seguinte equação radial para as auto-funções:

$$H(r) \psi_{\pm}(r) = \pm |E| \psi_{\pm}(r)$$

$$\begin{pmatrix} ms & -i\left(\partial_r + \frac{\nu+1}{r}\right) \\ -i\left(\partial_r - \frac{\nu}{r}\right) & -ms \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\pm}^1(r) \\ \psi_{\pm}^2(r) \end{pmatrix} = \pm |E| \begin{pmatrix} \psi_{\pm}^1(r) \\ \psi_{\pm}^2(r) \end{pmatrix} \quad (\text{D-7a})$$

de onde encontramos:

$$\psi_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} J_{-\nu}(kr) + c J_{\nu}(kr) \\ \frac{-ik}{\pm|E|+ms} (J_{-\nu-1}(kr) - c J_{\nu+1}(kr)) \end{pmatrix}, \quad (\text{D-7b})$$

havendo a seguinte relação entre as componentes superior e inferior do espinor de auto-funções (veja equação (2.2.22)):

$$\psi_{\pm}^2(kr) = \frac{-ik}{\pm|E|+ms} \left(\partial_{kr} - \frac{\nu}{kr} \right) \psi_{\pm}^1(kr). \quad (\text{D-8})$$

Assim, observando a equação (D-8) acima, vemos que para os valores de s , $s = +1$ ou $s = -1$, o que muda é apenas a proporção entre as componentes superior $\psi_{\pm}^1$ e inferior $\psi_{\pm}^2$ das auto-funções, dada através do fator:

$$\frac{-ik}{\pm|E|+ms}, \quad (\text{D-9})$$

não mudando a forma das auto-funções.

Conforme já analisamos no Capítulo 2 para $\nu \geq 0$ e $\nu \leq -1$, apenas as soluções regulares na origem são admissíveis, uma vez que as soluções singulares

na origem não são localmente normalizáveis (na vizinhança da origem). Para $-1 < \nu < 0$, ocorre uma indeterminação, sendo possíveis várias extensões auto-adjuntas implicando em várias dinâmicas diferentes possíveis, uma vez que a equação (D-8) impede a imposição de regularidade na origem simultaneamente para ambas as componentes (superior e inferior) e que as soluções singulares são normalizáveis para esse intervalo de ν .

A hamiltoniana definida nas referências [5],[6] e [7] e que também representa uma partícula de Dirac em duas dimensões sujeita a uma linha de fluxo magnético na origem tem a forma:

$$\tilde{H} = \sigma_1 \pi_1 + s \sigma_2 \pi_1 + m \sigma_3, \quad (\text{D-10})$$

com $s = \pm 1$.

Vemos que fazendo-se $s = 1$ na equação (D-10) e na equação (D-1) obtemos a mesma hamiltoniana e portanto os resultados obtidos por Hagen para $s = +1$ devem ser, e de fato são, conforme verificaremos explicitamente a seguir, iguais aos encontrados nessa tese (Capítulo 10), e nas referências [2] e [4]. Assim, para a hamiltoniana da equação (D-10), para $s = +1$, o problema de indeterminação das condições de contorno será exatamente o mesmo de que tratamos nessa tese e ocorre para $-1 < \nu < 0$.

No entanto, para $s = -1$, a hamiltoniana da equação (D-10) se torna:

$$\tilde{H} = \sigma_1 \pi_1 - \sigma_2 \pi_1 + m \sigma_3. \quad (\text{D-11})$$

que pode ser escrita em coordenadas polares como sendo:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} m & -ie^{i\theta} \left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta - \frac{\phi}{r} \right) \\ -ie^{-i\theta} \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta + \frac{\phi}{r} \right) & -m \end{pmatrix}. \quad (\text{D-12})$$

Para resolvermos o problema de auto-funções:

$$\tilde{H} \Psi_\pm = \pm |E| \Psi_\pm, \quad (\text{D-13})$$

podemos tentar a separação de variáveis da equação (D-3), o que resulta na condição:

$$n_2 = n_1 - 1. \quad (\text{D-14})$$

Podemos pensar em duas possibilidades para as auto-funções:

$$\Psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \Psi_{\pm}^1(r) \\ \Psi_{\pm}^2(r)e^{-i\theta} \end{pmatrix} e^{in\theta}, \quad (\text{D-15})$$

ou:

$$\Psi'_{\pm} = \begin{pmatrix} \Psi_{\pm}^1(r)e^{i\theta} \\ \Psi_{\pm}^2(r) \end{pmatrix} e^{in\theta}, \quad (\text{D-16})$$

que não possuem momento angular total j_z bem definido pois o operador $\tilde{H}$ dado pela equação (D-11) não comuta com J_z como se pode facilmente verificar.

Como podemos obter a mesma auto-função da equação (D-16), fazendo $n \rightarrow n+1$ na equação (D-15), é claro que as equações para a hamiltoniana $\tilde{H}(r)$ e para as auto-funções $\Psi_{\pm}(r)$ obtidas através da equação (D-15) são equivalentes às mesmas equações obtidas através da equação (D-16) pela transformação $\nu \rightarrow \nu+1$ (como pode ser facilmente checado).

Assim, escolhendo a separação de variáveis da equação (D-15) (sem perda de generalidade), obtemos a seguinte equação radial para as auto-funções:

$$\tilde{H}(r) \Psi_{\pm}(r) = \pm |E| \Psi_{\pm}(r)$$

$$\begin{pmatrix} m & -i\left(\partial_r - \frac{\nu-1}{r}\right) \\ -i\left(\partial_r + \frac{\nu}{r}\right) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\pm}^1 \\ \Psi_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \pm |E| \begin{pmatrix} \Psi_{\pm}^1 \\ \Psi_{\pm}^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D-17})$$

de onde vem:

$$\Psi_{\pm}(r) = \begin{pmatrix} J_{-\nu} + d J_{\nu} \\ \frac{-ik}{\pm|E|+m} (-J_{-\nu+1} + d J_{\nu-1}) \end{pmatrix}, \quad (\text{D-18})$$

com a seguinte relação entre as componentes superior e inferior do espinor de auto-funções:

$$\Psi_{\pm}^2(r) = \frac{-i}{\pm|E|+m} \left(\partial_r + \frac{\nu}{r} \right) \Psi_{\pm}^1(r) \quad (\text{D-19})$$

Analisando a auto-função para $s = -1$ da equação (D-18) acima vemos que ela é diferente das auto-funções da equação (D-7).

De modo que, das equações (D-18) e (D-19) vemos que, para $\nu \leq 0$ e $\nu \geq 1$ apenas as soluções regulares na origem são admissíveis, uma vez que as soluções singulares (na origem) não são localmente normalizáveis (na vizinhança da origem).

Para $0 < \nu < +1$, a equação (D-19) impede a imposição de regularidade simultaneamente para ambas as componentes (superior e inferior), ocorrendo assim uma indeterminação. De modo que são possíveis extensões auto-adjuntas para H quando $0 < \nu < 1$ para $s = -1$.

Notamos então que, para a hamiltoniana da expressão (D-1), a indeterminação ocorre sempre no intervalo $-1 < \nu < 0$, qualquer que seja o valor de s ($s = \pm 1$).

No entanto, para a hamiltoniana da equação (D-10) a indeterminação ocorre para o mesmo intervalo $-1 < \nu < 0$ apenas para $s = +1$, enquanto para $s = -1$ a indeterminação ocorre no intervalo $0 < \nu < 1$.

Essa é a razão pela qual os resultados de Hagen^[5,6,7] (obtidos através do processo limite do tubo de fluxo de raio $R > 0$) dependem do valor de s e ocorrem para diferentes sinais do fluxo magnético ϕ .

Notemos também que na referência [7], Hagen conclui a possibilidade de solução singular para a componente superior quando $s = +1$, para $n > 0$ e $\phi < 0$ (veja equação (3.15b) da referência [7]), o que coincide com o resultado que nós apresentamos na Tabela 12 do Capítulo 10 e com os resultados das referências [2] e [4]. Tal fato é bastante esperado uma vez que as hamiltonianas usadas por Hagen (equação D-10) e pelos demais autores (equação (D-1)) coincidem para $s = +1$.

No entanto a outra solução singular obtida para a componente superior quando $s = -1$, que de acordo com a equação (3.15a) da referência [7], ocorre para $n < 0$ e $\phi > 0$, não aparece nas referências [2] e [4] e também não aparece nessa tese, pois nesse caso não ocorre identidade entre os hamiltonianas utilizados por Hagen e pelos demais autores, sendo esperado, portanto, previsões diferentes para $s = -1$.

No entanto, podemos observar que as hamiltonianas das equações (D-1) e (D-10) estão relacionadas pela transformação:

$$V^\dagger H V = \tilde{H}, \quad (\text{D-20})$$

onde:

$$V = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D-21})$$

De modo que, a equivalência unitária da equação (D-20) implica que as auto-funções das equações (D-3a) e (D-13) estão relacionadas por:

$$\Psi_{\pm}(r) = V^{\dagger} \psi'_{\pm}(r), \quad (\text{D-22a})$$

$$\Psi'_{\pm}(r) = V^{\dagger} \psi_{\pm}(r). \quad (\text{D-22b})$$

Utilizando as equações (D-5a), (D-6a), (D-15) e (D-16), vemos que as equações acima implicam em:

$$\Psi_{\pm}^1(r) = -i\psi_{\pm}^2(r) \quad \text{e} \quad \Psi_{\pm}^2(r) = -i\psi_{\pm}^1(r). \quad (\text{D-23a})$$

$$\Psi_{\pm}^1(r) = -i\psi_{\pm}^2(r) \quad \text{e} \quad \Psi_{\pm}^2(r) = -i\psi_{\pm}^1(r). \quad (\text{D-23b})$$

Podemos checar as relações acima rapidamente, notando que, fazendo $\nu \rightarrow \nu - 1$ na equação (D-7b) para $\psi_{\pm}(r)$, devemos obter a expressão para $\psi'_{\pm}(r)$. Trocando a componente superior pela inferior e vice-versa no espinor assim obtido, obtemos $\Psi_{\pm}(r)$, o que está de acordo com as equações (D-22a) e (D-22b).

Num comunicado informal Hagen disse que os procedimentos limite utilizados nas referências [2] e [4] não são os "mais corretos" e que a análise perfeita é a apresentada nas referências [5], [6] e [7].

Refazendo os cálculos das referências [5], [6] e [7], vemos que, embora não haja nada de errado com esses cálculos, eles simplesmente parecem ser uma outra maneira, talvez mais complicada, de se calcular os limites de $R \rightarrow 0$.

Iniciamos notando que as condições impostas à componente superior (do espinor de duas componentes da auto-função), através das equações (3.8a) e (3.8b) da referência [7], que correspondem respectivamente à continuidade da função e salto da derivada primeira em $r = R$, são equivalentes à imposição da continuidade para ambas as componentes superior e inferior (condição usada nas referências [2] e [4] e nas equações (10.2.16) e (10.2.17) dessa tese) conforme podemos imediatamente verificar considerando as equações (D-7) para $s = +1$ e (D-18) para $s = -1$.

Impondo essas condições à componente superior, e tomando o limite $R \rightarrow 0$, lembrando do comportamento na origem das funções de Bessel dada pela equação (5.5.6), e fazendo a análise do termo dominante na equação (3.10) da referência [7] chega-se de fato na condição da equação (3.11). Essa condição parece não surgir nos cálculos da Seção 10.2 dessa tese.

No entanto, se nos lembrarmos que os cálculos da referência [7] e os nossos devem coincidir para $s = +1$ e que, no nosso caso, nós já sabemos (pela análise

prévia da forma das auto-funções da equação (D-7)) que o intervalo crítico para ν é $] -1, 0[$, vemos que para $n > 0$ a equação (3.11) é automaticamente satisfeita, ou seja, o primeiro termo da equação (3.10) se anula e somos obrigados, em nossos cálculos, a tomar outros termos de ordem imediatamente superior em kr , chegando a equação (10.2.19), que é exatamente a condição da equação (3.13) (para $\nu:] -1, 0[$ e $s = +1$) da referência [7], para que haja solução singular para a componente superior.

Do mesmo modo, note que, ainda para $s = +1$, a condição da equação (3.11) da referência [7], não é satisfeita para o intervalo crítico $-1 < \nu < 0$ com $n < 0$ (o que significa que devemos ter a solução regular) e por isso em nossos cálculos a análise do termo dominante conduz à solução regular conforme mostram nossas equações (10.2.20) e a segunda equação da Tabela 12.

Para $s = -1$, como dissemos, é possível fazermos a equivalência entre os resultados das referências [2], [4] e os nossos com os obtidos por Hagen, e utilizando o mesmo procedimento que fizemos no Capítulo 10, podemos chegar rapidamente ao resultado da equação (3.15a) da referência [7]. Como nós já sabemos (através de nossa análise prévia das soluções da equação (D-18)), que o intervalo crítico para ν quando $s = -1$ é $]0, 1[$, a análise do termo dominante na equação (3.10) (levando em conta que ν está nesse intervalo), nos leva à equação (3.11) da referência [7] satisfeita apenas se $n < 0$, o que significa $\phi > 0$ (para $\nu:]0, 1[$), que corresponde exatamente ao resultado da equação (3.15a) de Hagen.

Portanto, nossa análise "mais simplificada" dos termos dominantes é equivalente à análise feita por Hagen, conduzindo aos mesmos resultados, conforme se pôde verificar.

A análise feita na referência [7], embora correta, não está completa, uma vez que as auto-funções não estão completamente determinadas unicamente pelas equações (3.15a) e (3.15b), sendo necessária além da análise da componente superior a análise do comportamento da componente inferior através das equações (D-8) para $s = +1$ e (D-19) para $s = -1$, que relacionam a componente inferior com a superior.

Efetuando-se essa análise para $s = +1$, a equação (D-8) fornece componente inferior regular na situação da equação (3.15b) satisfeita, ou seja, quando a componente superior é singular (para $\nu:] -1, 0[$), e componente inferior singular (e normalizável na origem) quando a condição (3.15b) não é satisfeita, ou seja, quando a componente superior é regular (para $\nu:] -1, 0[$). De forma que as soluções são as apresentadas na Tabela 12 dessa tese, que correspondem a extensões auto-adjuntas para H com o parâmetro θ da equação (10.1.1) igual a

$-\text{sgn}(\phi)\frac{\pi}{2}$, ou o parâmetro δ da equação (5.3.30) igual a 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Fora do intervalo $\nu:]-1, 0[$, as únicas soluções possíveis são as regulares na origem, como já discutimos anteriormente.

Efetuando-se a mesma análise para $s = -1$ (para $\nu:]0, 1[$), a equação (D-19) implicará em componente inferior regular quando a condição (3.15a) da referência [7] é satisfeita (isto é, quando a componente superior é singular) e componente inferior singular e normalizável na origem quando a condição (3.15a) não é satisfeita (isto é, quando a componente superior é regular).

Assim para $s = -1$, o procedimento limite do tubo de fluxo para a hamiltoniana da equação (D-10) quando $\nu:]0, 1[$, conduz às soluções:

$$\Psi_{\pm}(kr) = \begin{pmatrix} J_{-\nu}(kr) \\ \frac{ik}{\pm|E|+m} J_{-\nu+1}(kr) \end{pmatrix}, \quad \text{para } n < 0, \phi > 0 \quad (\text{D-24})$$

e

$$\Psi_{\pm}(kr) = \begin{pmatrix} J_{\nu}(kr) \\ \frac{-ik}{\pm|E|+m} J_{\nu-1}(kr) \end{pmatrix}, \quad \text{para } n > 0, \phi < 0 \quad (\text{D-25})$$

Para $s = -1$ e fora do intervalo crítico $\nu:]0, 1[$, como dissemos anteriormente, as únicas soluções possíveis, devido inclusive à condição de normalizabilidade na origem, são as soluções regulares na origem.

Apêndice E

Atuação do operador H nas auto-funções do operador Λ definidas no domínio $D_\delta(H, \Lambda)$.

Podemos verificar que, além do operador Λ não deixar o domínio $D_\delta(H, \Lambda)$ definido na Seção 5.4 invariante, isto é:

$$\Lambda D_\delta = D' / D' \neq D_\delta, \quad (\text{E-1})$$

também o operador H , atuando em certas funções do domínio $D_\delta(H, \Lambda)$, gera funções fora desse domínio, isto é:

$$H D_\delta = D'' / D'' \neq D_\delta, \quad (\text{E-2})$$

Vejam os como isso acontece, deixando H atuar numa auto-função de Λ , da forma da equação (5.6.1), que pode também ser escrita na forma da equação (2.3.4), pertencente ao domínio $D_\delta(H, \Lambda)$, sujeita às condições de contorno que produziram os resultados da Tabela 3. Assim:

$$\Phi = H\psi_\pm = \begin{pmatrix} h + m\sigma_3 & 0 \\ 0 & h - m\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\pm^{(1)} \\ \psi_\pm^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h + m\sigma_3)\psi_\pm^{(1)} \\ (h - m\sigma_3)\psi_\pm^{(2)} \end{pmatrix} \quad (\text{E-3})$$

Invocando os resultados das equações (2.3.5) e (2.3.6) e sendo $\psi_\pm$ da forma da equação (5.6.1), de modo que $\psi_\pm^{(1)}$ é dado por (2.3.15) e $\psi_\pm^{(2)}$ é dado por (2.3.16), encontramos:

$$\Phi = \begin{pmatrix} [(i\lambda + m) J_{|\nu|} + (-i\lambda b + am) J_{-|\nu|}] \\ [(-i\lambda - m) J_{|\nu|-1} + (i\lambda a - bm) J_{1-|\nu|}] \\ [\pm(\lambda - im) J_{|\nu|} \pm (\lambda a + ibm) J_{-|\nu|}] \\ [\pm(\lambda - im) J_{|\nu|-1} \pm (\lambda b + iam) J_{1-|\nu|}] \end{pmatrix} \quad (\text{E-4})$$

É fácil vermos que, se $\psi_\pm$ satisfaz as condições de contorno das equações (5.4.2) e (5.4.3), ou seja, se as constantes a e b são dadas de acordo com a Tabela 3, então $\Phi \notin D_\delta(H, \Lambda)$, a menos que o parâmetro δ da extensão assuma os valores $\delta = 0$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$.

REFERÊNCIAS

- [1] - F. A. B. Coutinho e J. Fernando Perez, Phys. Rev. **D 49**, 2092 (1994)
- [2] - F. A. B. Coutinho e J. Fernando Perez, Phys. Rev. **D 48**, 932 (1993)
- [3] - Ph. de Souza Gerbert, Phys. Rev. **D 40**, 1346 (1989)
- [4] - M. G. Alford , J. March - Russell e F. Wilczec, Nuclear Phys. **B328**, 140 (1989)
- [5] - C. R. Hagen, Phys. Rev. **Sett 64**, 503 (1990)
- [6] - C. R. Hagen, Phys. Rev. **D 48**, 3935 (1993)
- [7] - C. R. Hagen, International Journal of Modern Physics A, (Vol. 6), 3119 (1991)
- [8] - F. A. B. Coutinho, Y. Nogami e J. Fernando Perez, J. Phys. A : Math **Gen 32** (1999)
- [9] - F. A. B. Coutinho, Y. Nogami e J. Fernando Perez, J. Phys. A : Math **Gen 30**, 3937 (1997)
- [10] - M. Abramowitz e Irene A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, (Dover Publications, New York (1968))
- [11] - M. Reed e B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, (Academic, New York 1975/1980), Vols. I and II
- [12] - Thomas F. Jordan, Linear Operators for Quantum Mechanics (John Wiley & Sons, New York (1969))
- [13] - M. Carreau, E. Farhi e S. Gutmann, Phys. Rev. **D 42**, 1194 (1990)
- [14] - S. Albeverio, L. Dabrowski e P. Kurasov, Lett. Math. Phys. **45** 33 (1998)

- [15] – Y. Aharonov e D. Bohm, Phys. Rev. **119**, 485 (1959)
- [16] – W. Ehrenberg e R. W. Siday, Proc. Phys. Soc. London **B 62**, 8 (1949)
- [17] - Y. Aharonov e A. Casher, Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984)
- [18] - M. G. Alford e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **623**, 1071 (1989)
- [19] – M. G. Alford, J. March-Russell e F. Wilczek, Nucl. Phys. **B328**, 140 (1989)
- [20] – Ph. Gerbert e R. Jackiw, Commun. Math. Phys. **124**, 229 (1989)
- [21] – Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten e B. I. Halperin, Int. J. Mod. Phys. **B 3**, 1001 (1989)
- [22] - Ph. Gerbert e R. Jackiw. Commun. Math. Phys. **124**, 229 (1989)
- [23] - E. Zeidler, Applied Functional Analysis, Springer- Verlag, NewYork, Inc. (1995)
- [24] - I. Stakgold, Green's Functions and Boundary Problems, John Wiley & Sons, Inc (1998)
- [25] – S. Flugge, Practical Quantum Mechanics, Springer-Verlag, NewYork, 1974
- [26] – S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, Solvable Models in Quantum Mechanics, pg. 357, Springer- Verlag, NewYork, Inc. (1988)
- [27] – N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, pg. 91, Inc., 1993
- [28] - M. Reed e B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, (Academic, New York 1975/1980), pg. 140, Vols.II