Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Estados de equilíbrio na teoria quântica em topoi

Alisson Cordeiro Alves Tezzin

Orientador(a): Prof. Dr. Walter Alberto de Siqueira Pedra

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre(a) em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Walter Alberto de Siqueira Pedra - Orientador (IF-USP)

Prof. Dr. Edécio Gonçalves de Souza (FFLCH-USP)

Prof. Dr. Marcelo Terra Cunha (IMECC-UNICAMP)

São Paulo
2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Tezzin, Alisson Cordeiro Alves

Estados de equilíbrio na teoria quântica em topoi.
São Paulo, 2020.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Walter Alberto de Siqueira Pedra

Área de Concentração: Mecânica Estatística Quântica e Fundamentos da Mecânica Quântica

Unitermos: 1. Mecânica estatística quântica; 2. Lógica intuicionista; 3. Teoria de topoi; 4. Teoria quântica em topoi; 5. Estados de equilíbrio.

USP/IF/SBI-046/2020

University of São Paulo
Physics Institute

Equilibrium states on the topos approach to quantum mechanics

Alisson Cordeiro Alves Tezzin

Supervisor: Prof. Dr. Walter Alberto de Siqueira Pedra

Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Walter Alberto de Siqueira Pedra - Orientador (IF-USP)

Prof. Dr. Edécio Gonçalves de Souza (FFLCH-USP)

Prof. Dr. Marcelo Terra Cunha (IMECC-UNICAMP)

São Paulo
2020

Ao meu pai, Alcides, e à minha mãe, Ivonete

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas pessoas que fizeram parte da minha vida durante esses dois anos, em especial aos meus pais - não é à toa que esse trabalho é dedicado a eles -, à minha família, aos meus amigos e aos meus professores. Ao meu orientador, Walter Pedra, agradeço por todo apoio dado e ensinamento transmitido durante esse tempo; sem isso eu sequer seria capaz de começar esse trabalho, e se o comesse não seria capaz de terminá-lo. Agradeço também à CAPES, cujo apoio financeiro foi fundamental para que esse mestrado fosse realizado, e a todas as pessoas que pagando seus impostos financiaram esse projeto.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Um ferrageiro de Carmona

que me informava de um balcão:

Aquilo? É de ferro fundido,

foi a fôrma que fez, não a mão...”

O ferrageiro de Carmona

João Cabral de Melo Neto

Resumo

Nessa dissertação buscamos caracterizar estados de equilíbrio termodinâmico na formulação contravariante da teoria quântica em topoi. Como esse tipo de abordagem à teoria quântica é relativamente novo, procuramos também fazer uma exposição autocontida - ao menos do ponto de vista matemático - dos elementos principais desta. Em relação ao equilíbrio termodinâmico estudamos duas propriedades fundamentais: invariância com respeito à evolução temporal e a condição KMS. Caracterizamos a invariância temporal através das medidas definidas no pré-feixe espectral; mais precisamente, determinamos uma condição que é satisfeita por uma medida se, e somente se, o estado ao qual ela está associada é invariante. Essa caracterização se justifica pois tais medidas constituem uma das tentativas de se introduzir uma noção satisfatória de estado na teoria quântica em topoi. Não conseguimos, porém, caracterizar a condição KMS através dessas medidas e apresentamos argumentos que indicam que fazer isso, ao menos da maneira que tentamos, não é possível. Estudamo-la, então, através da noção de pseudoestado, que constitui outra tentativa de se definir estado na teoria. Para caracterizar a condição KMS introduzimos o conceito de topos associado a um estado e mostramos que no topos de qualquer estado existem ao menos duas proposições (subobjetos clopen do pré-feixe espectral) que são verdadeiras (no sentido do pseudoestado) se, e só se, o estado é KMS. Uma dessas proposições não é determinada pela daseinização de um projetor, e portanto isso pode ser entendido como uma maneira de se atribuir significado físico a uma proposição que não está na interpretação da linguagem $\mathcal{PL}(S)$ apresentada em [9].

Palavras-chave

Mecânica estatística quântica, lógica intuicionista, teoria de topoi, teoria quântica em topoi, estados de equilíbrio

Abstract

The main purpose of this work was to study equilibrium states in the topos approach to quantum theory. This is a relatively new approach to quantum theory then we also tried to present it in a self-contained way - at least from a mathematical point of view. Concerning equilibrium, we focused on two features: time translation invariance (stationary states) and the KMS condition. We characterize invariant states (in particular stationary states) by means of the so called “measures on the spectral presheaf”. We couldn’t do the same for the KMS condition and, as argued in this work, we think that there are good reasons to believe that it is not possible. Then, we studied the KMS condition using pseudo-states. For this purpose we introduced the idea of a “topos associated to a state” and proved that in the topos of any state there are at least two propositions (clopen subobjects of the spectral presheaf) which are true (in the sense of the pseudo-state) if, and only if, the state is KMS. One of these propositions is not of the kind “daseinization of a projector” and it can be seen as a way of giving physical meaning to a proposition which is not in the interpretation of the $\mathcal{PL}(S)$ language.

Keywords

Quantum statistical mechanics, intuitionistic logic, topos theory, topos quantum theory, equilibrium states

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Organização desse trabalho	19
2	Teoria de topoi como fundamentação matemática para teorias físicas	21
2.1	Da necessidade de se obter uma nova formulação para a teoria quântica	22
2.2	Realismo, neorrealismo e as linguagens $\mathcal{L}(S)$ e $\mathcal{PL}(S)$	23
2.3	A categoria dos contextos	29
3	Categorias e Topoi	31
3.1	Funtores, diagramas, cones e limites	40
3.2	Subobjeto e classificador de subobjetos	58
3.3	Objeto exponencial	64
3.4	Topoi	66
3.5	Transformação natural	67
3.6	A categoria dos pré-feixes	70
3.6.1	Objeto terminal	72
3.6.2	Produto binário	73
3.6.3	Pullback	76

3.6.4	Subobjetos em $\widehat{\mathcal{C}}$	82
3.6.5	classificador de subobjetos em $\widehat{\mathcal{C}}$	84
4	Equilíbrio termodinâmico	91
4.1	Equilíbrio termodinâmico em sistemas de dimensão finita	92
4.2	Equilíbrio termodinâmico em sistemas quaisquer	95
5	Teoria quântica em topoi	105
5.1	Espaço de estados: O pré-feixe espectral	107
5.2	Proposições quânticas: a linguagem $\mathcal{PL}(S)$ e o conceito de Daseinização	109
5.2.1	Daseinização	110
5.2.2	Álgebra de Heyting de subobjetos clopen	120
5.3	Estados	129
5.3.1	Pseudoestado	129
5.3.2	Estados como medidas no pré-feixe espectral	133
5.4	Observáveis	141
6	Estados invariantes na teoria quântica em topoi	145
6.1	Internalizando o resultado	151
7	Preâmbulo sobre estados KMS na teoria quântica em topoi	156
8	O topos associado a um estado	159
9	Estados KMS na teoria quântica em topoi	162
10	Conclusão	170
A	Apêndices	172
A.1	Categorias e topoi	172
A.1.1	Lema do Pullback	172
A.1.2	Exponencial em $\widehat{\mathcal{C}}$	173
A.2	Topologia	180

A.3	Álgebras C^* e mecânica quântica algébrica	187
A.3.1	Álgebras de von Neumann	198
A.3.2	Teorema espectral	199
A.3.3	Transformação de Gelfand	204
A.3.4	Estados e representações	217
A.4	Contextos clássicos	225
A.5	Reticulados e álgebras e Heyting	230
A.6	Reticulado de projetores	233
A.7	Estados invariantes no topos associado ao estado	238

CAPÍTULO 1

Introdução

O objetivo primário desse trabalho é caracterizar equilíbrio termodinâmico na “teoria quântica em topoi”. Pretendemos também apresentar os elementos principais dessa teoria de uma maneira que, ao menos do ponto de vista matemático, possa ser considerada autocontida. O enfoque no caráter “técnico” (a fundamentação matemática) dessa abordagem à física quântica se justifica pelos seguintes motivos. Teoria de categorias, e em especial teoria de topoi, não é um elemento muito comum na física matemática - podemos dizer que é incomum na mecânica estatística quântica algébrica, área em que estados KMS são estudados - e nas apresentações padrões da teoria quântica em topoi (como [9], [5], [6], [7], [8], [13]) essa exposição de seus fundamentos matemáticos ou não é feita ou é feita de maneira que considerados insatisfatória para um leitor que não esteja familiarizado com teoria de categorias.¹ Além disso, o objetivo primário da dissertação também justifica essa ênfase: queremos usar essa teoria, descrever nela certos conceitos importantes da mecânica estatística, e para que consigamos fazer isso de maneira razoável é necessário que seu conteúdo matemático esteja claro.

Há ao menos duas formulações distintas da teoria quântica através de topoi; uma delas é a proposta por Chris Isham e Andreas Döring em [9], [5], [6], [7], [8], na qual basearemos esse trabalho, e outra é a proposta por Klaas Landsman, Chris Heunen e Bas Spitters em [20],

¹ Isso não é uma crítica. Trabalhos com propósitos diferentes exigem apresentações diferentes. Queremos dizer apenas que existe essa lacuna e que pretendemos preenchê-la.

sendo que essa última foi inspirada na primeira. Uma apresentação em livro da primeira pode ser encontrada em [13], e uma apresentação paralela das duas pode ser encontrada em [24]. Seguindo o autor de [24], algumas vezes nos referiremos à teoria apresentada por Landsman *et al.* por “formulação covariante” e à teoria de Isham e Döring por “formulação contravariante”, sendo que tal nomenclatura decorre do tipo de topos em que essas teorias são formuladas. Quando dissermos apenas “teoria quântica em topoi” estaremos nos referindo à formulação contravariante. Vale ainda citar que os trabalhos de Isham e Döring têm origem nos estudos de Chris Isham, Jeremy Butterfield e, em parte, John Hamilton sobre o teorema de Kochen-Specker do ponto de vista da teoria de topoi, apresentados em [1], [2], [3], [4].

Ambas as formulações têm como base a noção de **contexto clássico** (ou, mais sucintamente, **contexto**) introduzida nos artigos sobre Kochen-Specker que acabamos de citar. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra C^* unital (definição 115), um contexto de $\mathcal{A}$ é uma subálgebra C^* unital comutativa dessa álgebra. Pela transformação de Gelfand (teorema 139) sabemos que um contexto é sempre isomorfo ao conjunto das funções complexas contínuas definidas num espaço topológico Hausdorff compacto (o espectro de Gelfand do contexto); mais que isso, há uma bem conhecida relação biunívoca entre estados (definição 117) de uma álgebra C^* unital comutativa e medidas de probabilidade definidas no seu espectro de Gelfand (ver, por exemplo, o teorema 4.2 de [16]). Disso segue que há uma semelhança precisa entre contextos e a descrição que fazemos de sistemas mecânicos clássicos: temos um certo conjunto de estados puros, que chamamos de espaço de estados do contexto (o espectro de Gelfand é o conjunto dos estados puros do contexto), os observáveis do contexto são funções contínuas reais definidas nesse espaço de estados, sendo que a imagem de um observável (enquanto função) é seu espectro, como provado no apêndice A.3.3, e, por fim, estados do contexto são medidas de probabilidade definidas no espaço de estados (quando a eles associamos uma σ -álgebra adequada), em analogia com a noção que temos de estado na mecânica estatística clássica. Conhecimentos básicos sobre o espectro de Gelfand são suficientes para mostrar que não se trata de uma semelhança puramente artificial. No apêndice A.4 discutimos isso em maior detalhe; restringimos a discussão para o caso em que o sistema é representado por um espaço de Hilbert de dimensão finita para tentar deixar a comparação menos abstrata.

A ideia central das abordagens (covariante e contravariante) é descrever sistema quânticos através de seus contextos clássicos. Mais precisamente, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra C^* que, na formulação

algébrica da mecânica quântica, representa certo sistema quântico, estuda-se tal sistema através do conjunto de contextos clássicos de $\mathcal{A}$, ou seja, através do conjunto de subálgebras comutativas unitais de $\mathcal{A}$. Há muitas razões para que se faça isso; não se trata apenas da semelhança entre álgebras comutativas e sistemas clássicos. Klaas Landsman descreve a abordagem como uma formulação matematicamente rigorosa da “doutrina dos conceitos clássicos” sustentada por Niels Bohr, na qual este defende que os conceitos (físicos) clássicos são necessários para que os resultados experimentais da física quântica sejam comunicáveis de maneira inteligível e que, mais que isso, tais conceitos são a única maneira de se acessar o conteúdo empírico dessa física; há também a bem conhecida ideia de complementaridade, que sustenta que há certos conceitos clássicos que são mutualmente excludentes - sua aplicação “simultânea” na descrição de certo sistema nos leva a contradições - mas complementares no sentido de ambos serem necessários para a descrição completa do sistema. ² Numa analogia simples podemos associar os contextos da álgebra às descrições compatíveis de Bohr e a coleção de todos os contextos à descrição completa do sistema. O trabalho de Landsman, porém, certamente não pode ser resumido a esse paralelismo ingênuo, e como introdução à ideia de “Bohrificação” por ele defendida sugerimos [23]. Landsman aplica tal ideia, dentre outras coisas, no estudo dos limites entre a mecânica quântica e a mecânica clássica. A abordagem covariante também nos fornece, do mesmo modo que a contravariante, uma “lógica quântica intuicionista” ([21]). Desde sua origem em [30], a “lógica quântica” - ou melhor, as diversas tentativas de formulação de uma lógica quântica - é fonte de muitos debates, reformulações e críticas, como bem se sabe, e há muitas razões para que se defenda que a lógica intuicionista seja a mais adequada para a física quântica. A formulação contravariante também se justifica por diversas razões. Isham e Döring defendem que grande parte da dificuldade de se construir uma teoria da gravitação quântica reside no fato de que as principais tentativas de se fazer isso baseiam-se na “formulação canônica da mecânica quântica”; a formulação em topoi, defendem eles, não é tão “rígida” quanto a formulação canônica e seria o “background” matemático ideal para que tal teoria da gravitação quântica fosse construída. Mais que isso, os autores propõem em [5] que a construção de uma teoria física pode ser sempre entendida como a representação de certa linguagem associada ao sistema em algum topoi; dessa maneira, a teoria quântica em topoi seria um exemplo concreto de como isso pode ser realizado com êxito. Outra característica muito enfatizada da abordagem

²O que entendemos neste trabalho por “ideias de Niels Bohr” é o que é apresentado por Henry J. Folse em [22].

contravariante é a visão “neorrealista” de natureza que ela carrega. Essa ideia vem dos trabalhos de Isham e Butterfield sobre o teorema de Kochen-Specker. Discutiremos isso no capítulo 2. Por fim, como já citamos, a formulação contravariante é de interesse também por nos fornecer uma “lógica quântica” intuicionista.

Como última tentativa de defesa da abordagem vale citar que há diversas outras aplicações de teoria de categorias em mecânica quântica, sendo que muitas delas se assemelham em muitos aspectos à abordagem aqui utilizada. Como exemplo de aplicação de teoria de categorias em física poderíamos citar os trabalhos de Bob Coecke, Samson Abramsky, Chris Heunen, Cecilia Flori, John Baez entre outros.

Por fim, vamos descrever brevemente a contribuição que esse trabalho faz à teoria quântica em topoi. Em relação ao equilíbrio termodinâmico estudamos duas condições fundamentais: estacionariedade (definição 51) e a condição KMS (definição 56). Caracterizar estacionariedade é importante pois trata-se de uma noção “primária” de equilíbrio: muitos conceitos relevantes referentes a equilíbrio em sistemas fechados, como por exemplo passividade e a condição KMS (lema 62), implicam na estacionariedade. Além disso, caracterizamos não só a estacionariedade mas, de modo mais geral, a invariância de estados em relação a automorfismos, e muitos conceitos importantes em física e matemática são casos particulares disso. A importância de se estudar a condição KMS é clara: trata-se de uma noção de equilíbrio termodinâmico muito bem estabelecida na mecânica estatística quântica. Nessa dissertação caracterizamos a invariância de um estado em relação a um automorfismo ou grupo de automorfismos - em particular a estacionariedade - através das medidas de probabilidade definidas no pré-feixe espectral introduzidas em [11]. Vale a pena descrevermos brevemente o que são essas medidas e o que é o pré-feixe espectral. Como já comentamos, há uma semelhança precisa entre contextos clássicos e sistemas mecânicos clássicos; o pré-feixe espectral (definição 63) associa cada contexto ao seu espectro de Gelfand (o conjunto dos estados puros do contexto) e pode ser entendido como o espaço de estados de um sistema físico. Em analogia ao caso clássico, no qual podemos entender proposições sobre o sistema como subconjuntos do espaço de estados, na teoria quântica em topoi podemos entender proposições como subobjetos do pré-feixe espectral (definição 66); mais precisamente, proposições são associadas ao que chamamos de “subobjetos clopen” (definição 69) de Σ . Se no caso clássico estados (não necessariamente puros) podem ser entendidos como medidas de probabilidades definidas no espaço de estados (quando a esse

associamos uma σ -álgebra apropriada) podemos, na teoria quântica em topoi, entender estados do sistema (definição 117) como “medidas de probabilidade” definidas no pré-feixe espectral (definição 82), sendo que, nesse caso, o conjunto dos subobjetos clopen do pré-feixe espectral (definição 69) é que faz o papel de σ -álgebra; além disso, há uma relação biunívoca entre essas medidas e os estados do sistema. Foi usando essas medidas que caracterizamos a estacionariedade. Primeiro mostramos que um estado é invariante em relação a um automorfismo α se e só se a medida μ a ele associada satisfaz, em qualquer contexto A e para qualquer subobjeto clopen S , a igualdade $\mu(S)(\alpha(A)) = \mu(\alpha(S))(A)$ (lema 91); assim, do ponto de vista das medidas, a α -invariância pode ser entendida como certa coerência da medida em relação à ação de α : fixar um subobjeto S e aplicar α no contexto A equivale (nos dá o mesmo resultado) a fixar A e aplicar α no subobjeto S . Em seguida internalizamos esse resultado, ou seja, obtivemos uma caracterização da α -invariância sem fazer referência a contextos. Mostramos no lema 95 que um estado é α -invariante se e só se a medida μ a ele associada satisfaz, para todo subobjeto S , a igualdade $\mu(\alpha(S)) = \alpha(\mu(S))$, e dessa maneira a α -invariância pode ser entendida como certa coerência da medida em relação à ação de α nos subobjetos e nos valores $\mu(S)$. Não conseguimos caracterizar a condição KMS através das medidas definidas no pré-feixe espectral, e no capítulo 7 tentamos justificar nossa crença no fato de que tal caracterização não é possível. Por conta disso buscamos caracterizar a condição KMS de outro modo, e a maneira que encontramos foi definir a condição KMS como uma proposição quântica (definição 102). Para isso introduzimos o conceito de topos associado a um estado (definição 98) e mostramos que um estado é KMS se e só se no topos a ele associado a proposição KMS é verdadeira - em relação à valoração definida por esse estado (lema 103). Da maneira que é formulada por Isham e Döring, a teoria quântica em topoi se restringe aos casos em que o sistema físico é representado por uma álgebra de von Neumann. Introduzindo o conceito de topos associado a um estado pudemos usar essa teoria para lidar com sistemas representados por álgebras C^* quaisquer, que é o caso mais comum em mecânica estatística quântica. Usamos a construção GNS para associar uma álgebra de von Neumann a um estado ρ - a álgebra $\mathcal{B}(H_\rho)$, onde H_ρ é o espaço de Hilbert dado pela construção GNS - e utilizamo-la para definir o topos do estado. Nesse álgebra, a condição KMS pode ser entendida como uma relação de ordem entre projetores, e usando a operação de daseinização (definição 66) transformamos isso em uma relação de ordem de subobjetos clopen do pré-feixe espectral. Essa relação é uma desigualdade envolvendo

o pseudoestado (definição 77) dado por ρ e a “proposição KMS”; desigualdade que equivale à afirmação de que a proposição KMS é verdadeira para a valoração definida por esse pseudoestado - é o “morfismo *true*” do topos. Obtivemos não uma mas duas “proposições KMS”, e uma delas, que não é dada por projetor através da daseinização, nos fornece uma maneira tecnicamente nova de se verificar a condição KMS.

1.1 Organização desse trabalho

Essa dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2 descrevemos brevemente o que é apresentado por Isham e Döring em [5]. Em resumo, trata-se da ideia de que a construção de uma teoria física pode ser sempre entendida como a interpretação de uma certa linguagem em um topos; essa linguagem dependeria do sistema físico que se pretende descrever e o topos no qual a interpretaremos pode depender tanto do sistema quanto de certo “tipo de teoria” que utilizaremos para descrevê-lo. Uma das principais características dessa proposta é o fato dela possibilitar a construção de teorias físicas “neorrealistas”; assim como fazem os autores, daremos certo destaque a essa faceta da construção. No capítulo 3 apresentamos uma revisão dos elementos centrais da teoria de categorias, enfatizando principalmente aquilo que utilizaremos nessa dissertação. Como o topos associado a um sistema quântico é sempre uma categoria de pré-feixes, demos atenção especial a essa categoria. Buscamos apresentar de maneira explícita nessa categoria construções como produto, pullback, subobjetos, classificados de subobjetos. Essa escolha ajuda a esclarecer resultados que, à primeira vista, não são óbvios, mas por outro lado deixa o texto mais carregado, dificultando uma leitura que, para um leitor que já conhece os resultados apresentados, poderia ser mais fluida; como se trata de uma dissertação de mestrado, e portanto um texto cuja função principal é demonstrar que seu autor possui certo conhecimento sobre o assunto do qual fala, achamos que essa escolha se justifica. Além disso, as contas que fizemos dificilmente são encontradas em livros, e portanto uma apresentação desse tipo pode ser útil a leitores que não têm familiaridade com teoria de categorias. No capítulo 4, sobre equilíbrio termodinâmico, introduzimos o conceito de estacionariedade e a condição KMS. Como a condição KMS, apesar de ser largamente aceita na mecânica estatística quântica algébrica como definição adequada de equilíbrio termodinâmico, difere, à primeira vista, da noção de equilíbrio comumente usada em física - a noção de estado de Gibbs - buscamos mos-

trar que essa condição pode ser entendida como uma generalização, para sistemas infinitos, da definição de estados de Gibbs - o lema 55 é um passo importante nessa direção. No capítulo 5 apresentamos os elementos principais da teoria quântica em topoi; como já comentado, procuramos fazer uma apresentação razoavelmente técnica da teoria e portanto há pouca ligação entre esse capítulo e o capítulo 2, sendo a discussão sobre a linguagem $\mathcal{PL}(S)$ uma exceção. Reunimos no capítulo 6 nossos resultados sobre estados invariantes, dos quais já falamos brevemente acima. No capítulo 7 mostramos porque cremos que a condição KMS não pode ser caracterizada através de medidas definidas no pré-feixe espectral; *en passant* obtivemos uma nova caracterização de estados invariantes através de medidas. No capítulo 8 introduzimos a noção de topos associado a um estado, que nos permite usar estados para associar um topos a uma álgebra C^* , utilizando para isso a construção GNS, ou seja, o fato de podermos usar um estado definido uma álgebra C^* para associá-la a uma álgebra de operadores limitados definidos em um certo espaço de Hilbert. Além do “topos associado a um estado” ser necessário para a definição da nossa “proposição KMS”, ele é útil para que possamos utilizar a formulação contravariante da teoria quântica em topoi para lidar com sistemas que são descritos por álgebras C^* quaisquer (não necessariamente von Neumann); em mecânica estatística quântica, a maior parte dos sistemas é desse tipo. No capítulo 9 apresentamos nossos resultados sobre estados KMS, sobre os quais também já falamos brevemente: definimos “proposições KMS” e mostramos que um estado é KMS se e só se a proposição KMS é válida (no sentido da valoração definida pelo estado) no topos a ele associado. Finalmente, no capítulo 10 apresentamos uma breve conclusão sobre o resultados apresentados.

CAPÍTULO 2

Teoria de topoi como fundamentação matemática para teorias físicas

Como já dissemos, Isham e Döring apresentam a teoria quântica em topoi dentro de um contexto mais geral, que seria a utilização da teoria de topoi como fundamentação matemática para a construção de teorias físicas. Vamos fazer um esboço dessas ideias. Isso é importante para que justifiquemos parte das construções que faremos no caso quântico.

Em [5], Chris Isham e Andreas Döring apresentam o que eles defendem ser uma maneira fundamentalmente nova de se construir teorias físicas. Como o título do artigo sugere, o centro da proposta é o uso da teoria de topoi como fundamentação matemática para teorias físicas. Os autores especificam ainda como isso pode ser feito: há uma linguagem formal (no sentido da lógica matemática) que pode ser associada a um sistema físico e a construção de uma teoria física que descreva esse sistema equivale à interpretação (no sentido da lógica formal) dessa linguagem em algum topos.

Desse ponto de vista, a teoria quântica em topoi pode ser vista como uma realização disso. Porém, não se trata de um caso particular qualquer; do contrário, a teoria quântica em topoi é justamente o exemplo protótipo. Conforme eles afirmam, a motivação inicial do trabalho era abordar questões fundamentais que surgiam nas tentativas de se formular uma teoria quântica da gravitação, sendo que, para eles, a gênese da dificuldade de se formular tal teoria é o fato

de as várias tentativas de se fazer isso, incluindo a gravitação quântica em loop e a teoria de supercordas, usarem aproximadamente a mesma “teoria quântica padrão”. É útil tentarmos esclarecer a razão dessa crença, principalmente porque isso justifica muitas das escolhas que serão feitas na formulação contravariante da teoria quântica em topoi.

2.1 Da necessidade de se obter uma nova formulação para a teoria quântica

Segundo Isham e Döring, na “teoria quântica padrão” uma certa concepção sobre o espaço-tempo é implicitamente assumida e essa atitude pode ser conflituosa com a construção de uma teoria quântica da gravitação, cujo objetivo é justamente descrever tal espaço-tempo. Como principal exemplo da emergência dessa pré-concepção espaço-temporal coloca-se o uso de quantidades contínuas na teoria, em especial o uso de números reais ou complexos como valores de observáveis físicos. Segundo os autores, uma das razões para que se assuma que quantidades físicas têm como valores números reais é o fato de elas terem sido, inicialmente, medidas por instrumentos de medição constituídos de “roletas e ponteiros”, que são objetos clássicos que se movem no espaço-tempo; como tal espaço-tempo é usualmente modelado “de maneira contínua” - por exemplo como $\mathbb{R}^n$ ou como uma variedade suave - entendemos que as quantidades físicas também assumem um “contínuo de valores” ou, mais precisamente, todos os valores possíveis de $\mathbb{R}$ ou de certo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dessa maneira, se o uso de números (reais ou complexos) como valores de quantidades físicas decorre de uma visão “contínua” do espaço-tempo, tal uso não se justifica, à primeira vista, numa teoria quântica da gravitação, onde busca-se justamente modelar o espaço-tempo; mais que isso, seu uso pode ser inconsistente com tal modelagem: há tentativas de se conceber um “espaço tempo discreto”, e é razoável de se esperar que numa teoria desse tipo quantidades físicas quaisquer também não possam assumir “um contínuo de valores”. O que os autores defendem não é apenas que os valores de uma quantidade física deve ser certo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mas sim que, quando abriremos mão de certa concepção de espaço-tempo, não há razão “*a priori*” para que assumamos que os valores de quantidades físicas sejam números. É então compreensível a ideia de que a construção de uma teoria quântica da gravitação exija uma reformulação da teoria quântica

usual e que, nessa reformulação, um dos elementos do qual precisemos abrir mão seja o uso de “conceitos contínuos”, em particular o uso de números como valores de quantidades físicas.

Os autores defendem também que a noção de “interpretação instrumentalista” baseada em conceitos como “observador” e “instrumentos de medição” é problemática em uma teoria que não assuma, de início, um *background* espaço-temporal já que tal *background* é necessário para dar sentido a esses conceitos.¹ Assim, uma teoria quântica adequada à descrição da gravitação deveria ser interpretada de uma maneira que não dependesse desses conceitos e que portanto fosse uma teoria realista no sentido por eles apresentado. Aqui é importante lembrar que comumente entende-se que o teorema de Kochen-Specker impossibilita boa parte das interpretações desse tipo na formulação usual da mecânica quântica. Essa não é a única razão para que se exija tal realismo na reformulação da teoria. Uma interpretação instrumentalista fundamentada no conceito de observador é claramente incompatível com uma cosmologia quântica, ou seja, com uma “teoria quântica do universo”, já que o universo é um sistema fechado no qual não há observador externo. Segundo os autores, esse “problema do sistema fechado” ou da cosmologia quântica é considerado, dentre os pesquisadores que se preocupam com questões fundacionais em gravitação quântica, um das mais importantes razões para se reformular a teoria quântica.

Há diversos outros motivos para que uma reformulação da teoria quântica seja proposta; a lógica quântica pode ser citada como uma delas, por exemplo. A formulação contravariante da teoria quântica em topoi satisfaz essas exigências.

2.2 Realismo, neorrealismo e as linguagens $\mathcal{L}(S)$ e $\mathcal{PL}(S)$

Vamos agora ilustrar o esquema geral apresentado em [5], segundo o qual a construção de uma teoria física seria, grosseiramente falando, análoga à interpretação de uma certa linguagem em um topos. Como o nome da seção indica, por trás dessa construção está uma visão “neorrealista”

¹O que nós entendemos por “interpretação instrumentalista” é a ideia de que uma teoria física seria uma ferramenta capaz de descrever, de maneira aproximada, o comportamento de certo “domínio da natureza”, sem que haja a pretensão de que as “entidades” e os “fenômenos” que essa teoria utiliza para tornar tal descrição inteligível sejam elementos da realidade; no caso da mecânica quântica, tal domínio seria a interação entre objetos macroscópicos de medição e sistemas microscópicos. Porém, os autores aparentemente usam o termo para se referir a uma interpretação fundamentada nos conceitos de medição e observação: uma teoria que não faz qualquer afirmação sobre a natureza quando essa é considerada como um sistema fechado, apenas sobre sua interação com objetos de medição. Note que essa visão pode ser entendida como um caso particular de interpretação instrumentalista no primeiro sentido aqui descrito. De qualquer maneira, ambas as visões enquadram a interpretação ortodoxa da mecânica quântica.

de ciência. O prefixo “*neo*” será justificado mais tarde.

Os autores falam em “sistema físico” no sentido de “região da natureza” cujo comportamento se pretende descrever. É importante também a noção de “tipo de teoria”, que eles não definem mas que apresentam como exemplos a física clássica e a física quântica.² Um tipo de teoria é capaz de descrever toda uma coleção de sistemas. No início dessa seção falamos em “linguagem associada a um sistema”; de maneira mais precisa, a linguagem depende tanto do sistema quanto do tipo de teoria que será usado para descrevê-lo. O topos adequado para se descrever linguagens associadas ao tipo de teoria “física clássica” é **Sets** (a “categoria dos conjuntos e das funções conjuntistas”); para o tipo de teoria “física quântica” seria $\hat{\mathcal{C}} \equiv [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets}]$ - que será definido em 3.6 -; novos tipos de teoria exigiriam outros topoi.

Segundo os autores há duas linguagens que podemos associar a um sistema: uma “linguagem local” - se denotamos por S o sistema, denotamos por $\mathcal{L}(S)$ essa linguagem - e outra “linguagem proposicional” - denotada por $\mathcal{PL}(S)$ no sistema S . A linguagem $\mathcal{L}(S)$ é a principal e sua construção é motivada pela noção de “teoria física neorrealista”. Para entendermos o que eles definem como “neorrealista” precisamos antes compreender o conceito de “teoria física realista” por eles apresentado, e é isso que tentaremos fazer agora.

Para que entendamos o conceito de realismo (ou, mais precisamente, teoria física realista) apresentado por Isham e Döring³ é útil olharmos para [9], que reúne num só artigo o que foi apresentado em [5], [6], [7] e [8]. O conceito por eles defendido se assemelha, sustentam eles, à resposta de Martin Heidegger à pergunta “*what is a thing*”, que dá nome ao artigo. Segundo Heidegger ([32]),

“A thing is always something that has such and such properties, always something that is constituted in such and such a way. This something is the bearer of the properties; the something, as it were, that underlies the qualities.”

Desse trecho entende-se que “uma coisa” é sempre um “portador de propriedades”; assim,

²Há nessa dissertação certa confusão entre as expressões “física clássica”, “mecânica clássica” e “física quântica”, “mecânica quântica”, como é comum nos textos sobre física. Muita coisa que Isham e Döring chamam de física quântica ou física clássica nós costumamos chamar de mecânica quântica ou mecânica clássica respectivamente. Porém, sempre que estivermos nos referindo às afirmações deles, usaremos, claro, a terminologia por eles empregada, e por consequência disso temos a confusão mencionada.

³Não se trata de uma visão exótica; do contrário, é uma “definição” de teoria física realista bem aceita. Porém, como não é a única, vale a pena explicitá-la.

afirmar que uma determinada coisa existe mas não possui propriedades é aparentemente uma contradição. Partindo desse ponto de vista, se quisermos nos referir à “realidade” é necessário que sempre atribuamos propriedades aos elementos que afirmamos constituí-la.

A “realidade” que uma teoria física se propõe a descrever é o que comumente chamamos de sistema físico, e é bem aceita a ideia de que as propriedades de um sistema sejam representadas na teoria pelo que chamamos de observável. Quando dizemos que um sistema “possui uma propriedade A” estamos afirmando que o sistema assumiu um dos valores possíveis para o observável A. Assim, se cremos que uma teoria física deve ter como objetivo descrever tão bem quanto possível a “essência da realidade” e não apenas o comportamento da natureza em certas situações e se, mais que isso, entendemos a realidade do modo como foi proposto acima, então numa teoria física realista a noção de “propriedade do sistema” deve fazer sentido, e isso implica que afirmações sobre o valor de certo observável devem ter um significado que independe de referências a medições. Ao fazermos afirmações sobre um sistema podemos dizer que, num certo instante de tempo, “o observável A possui um valor, e esse valor pertence ao conjunto I ”; não precisamos nos restringir a afirmações sobre o que ocorreria caso uma medição fosse feita (“se uma medição de A for feita no sistema será obtido um valor no conjunto I ”), como a interpretação ortodoxa da mecânica quântica nos ensina. Um sistema, enquanto sistema isolado, possui propriedades, pois é um “elemento da realidade” e porque estamos entendendo “realidade” da maneira que foi descrita acima; se nossa teoria é capaz de descrever a “essência” dessa realidade então essa teoria deve nos permitir fazer afirmações sobre tais propriedades sem que para isso precisemos nos referir a objetos de medição.

Sabe-se que tanto a interpretação ortodoxa da mecânica quântica quanto a visão defendida por Bohr ⁴ não podem ser entendidas como realistas nesse sentido. É afirmado por Bohr e aceito na interpretação ortodoxa que, enquanto sistema isolado, ou seja, antes de um ato de medição, qualquer afirmação sobre o sistema não tem significado pois o sistema não possui as propriedades que a ele atribuímos no momento da medição - segundo Bohr, as propriedades pertencem ao conjunto “instrumento de medição + sistema microscópico”. O teorema de Kochen-Specker nos diz ainda que, na formulação usual da mecânica quântica, não podemos associar de maneira coerente (não contextual) valores a todos os observáveis do sistema (mais precisamente,

⁴Apesar de ser comum chamar a interpretação ortodoxa de “interpretação de Bohr”, Henry Folse argumenta em [22] que isso é um engano.

a todos os operadores autoadjuntos que usamos para representar esses observáveis na teoria), e isso impossibilita diversas tentativas de interpretação realista da mecânica quântica, como por exemplo parte das teorias de variáveis ocultas - vale lembrar que tais teorias são mais que interpretações da mecânica quântica. Enfim, assumindo a ideia de “realidade” acima apresentada, a formulação usual da mecânica quântica dificilmente é compatível com uma visão realista de ciência já que a noção de “propriedade do sistema” não tem, em geral, qualquer significado.

“Proposições físicas” têm papel importante na noção de teoria física realista por eles apresentada. A ideia de proposição é fundamental na formulação contravariante da teoria quântica em topoi. Além disso, a linguagem $\mathcal{PL}(S)$ mencionada acima lida com tais proposições. Desse modo, discutiremo-la brevemente para em seguida apresentar a noção de realismo e, por fim, a noção de neorealismo por eles sustentada, que justifica a construção da linguagem $\mathcal{L}(S)$.

Podemos dizer que as proposições “mais simples” usadas em física são do tipo “o observável físico A possui um valor, e esse valor pertence ao conjunto I ” - ou, numa visão instrumentalista, “se uma medição do observável A for feita será obtido um valor que pertence ao conjunto I ”. Fixemos um sistema físico S e um “tipo de teoria”. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos observáveis desse sistema (mais precisamente, o conjunto dos observáveis da teoria que descreve o sistema) e $\mathcal{I}$ certo conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}$, como por exemplo a σ -álgebra de Borel.⁵ A linguagem $\mathcal{PL}(S)$ é um cálculo proposicional intuicionista cujas proposições primitivas são representadas por “ $A \in I$ ”⁶ para $A \in \mathcal{O}$ e $I \in \mathcal{I}$. Ou seja, é a linguagem formal cujo alfabeto são os conectivos $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ e as proposições primitivas $A \in I$ para $A \in \mathcal{O}, I \in \mathcal{I}$, onde as sentenças (nos referimos às sentenças também por “proposições”) são formadas pelas regras de formação “as proposições primitivas são sentenças”, “se α é sentença $\neg\alpha$ também o é” e “se α, β são sentenças então $\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta$ e $\alpha \rightarrow \beta$ o são”, cujos axiomas são os axiomas da lógica intuicionista - ou seja, os axiomas do cálculo proposicional com exceção da “lei do terceiro excluído” ($\alpha \vee \neg\alpha$) e mais alguns “axiomas físicos” que podem ser encontrados em [5]; a única regra de inferência é *modus ponens*. Sugerimos [35] para uma exposição precisa dos conceitos de lógica formal aqui citados. Como se trata de um cálculo proposicional intuicionista podemos interpretá-lo numa álgebra de Heyting (definição 162); em particular, podemos interpretá-lo na coleção dos subobjetos de algum objeto num topos - sugerimos novamente [35] tanto para que

⁵Note que estamos nos referindo a teorias em que observáveis têm números reais como possíveis valores, o que, do ponto de vista acima exposto, é uma restrição: estamos nos restringindo às teorias “padrões”.

⁶Note que, aqui, $A \in I$ é apenas de um símbolo; não se trata de uma relação de pertinência conjuntista.

se entenda a relação entre álgebras de Heyting e o cálculo proposicional intuicionista quanto para a prova de que, num topos, a coleção dos subobjetos de um dado objeto forma uma álgebra de Heyting. Do ponto de vista físico, a escolha da lógica intuicionista pode ser justificada por bem conhecidas questões relacionados à lógica quântica. Além disso, a escolha se justifica por querermos representar a linguagem em um topos.

No caso de uma descrição clássica e mecânica de um sistema S , onde observáveis são funções reais mensuráveis (podemos impor também que sejam contínuas, de classe C^∞ ou algo do tipo) definidas num espaço de estados puros Σ (que, nos casos simples, é $\mathbb{R}^n$ e no caso geral é uma variedade simplética qualquer) fica fácil interpretar a linguagem $\mathcal{PL}(S)$ a ele associada. A álgebra de Heyting em questão é $\mathcal{P}(\Sigma)$, ou seja, o conjunto das partes de Σ - sabemos que o conjunto das partes de qualquer conjunto, munido das operações de união, interseção e complemento é uma álgebra de Boole (a “implicação” $\rightarrow$ é definida por $A \rightarrow B \doteq B \cup A^c$, que é justamente o pseudo-complemento de A relativo a B apresentado no apêndice A.5), e álgebras de Boole são álgebras de Heyting. Como veremos no capítulo 3, $\mathcal{P}(\Sigma)$ é, a menos de isomorfismos, o conjunto dos subobjetos de Σ em **Sets**. Uma proposição primitiva $A \in I$ é associada ao conjunto $A^{-1}(I)$ e podemos estender essa regra para o conjunto de todas as sentenças indutivamente. É importante e fácil notar que podemos associar proposições distintas, inclusive proposições primitivas distintas, ao mesmo conjunto; dizemos que duas proposições são fisicamente equivalentes quando têm como interpretação o mesmo subconjunto de Σ . Bom, um estado puro $\omega \in \Sigma$ define trivialmente uma valoração V^ω na álgebra de Boole $\mathcal{P}(\Sigma)$ através da regra $V^\omega(A) \doteq 1$ se $\omega \in A$ e $V^\omega(A) = 0$ caso contrário. Isso é de fato uma valoração clássica, ou seja, essa função preserva a estrutura de álgebra de Boole de $\mathcal{P}(\Sigma)$, e portanto, compondo essa função com a interpretação de $\mathcal{PL}(S)$ temos uma valoração nessa linguagem. Falando de maneira menos precisa porém mais clara, podemos usar estados para atribuir “valores de verdade” para as proposições físicas, sendo que, dado um estado $\omega \in \Sigma$, a proposição primitiva $A \in I$ é verdadeira se, e só se, $\omega \in A^{-1}(I)$, ou seja, se e só se $A(\omega) \in I$. O significado físico desse tipo de valoração é claro. Note que, no caso clássico, podemos considerar $\mathcal{PL}(S)$ como um cálculo proposicional clássico (ou seja, com o axioma $\alpha \vee \neg\alpha$) que ainda nesse caso os estados nos darão valorações: mais precisamente, quando compusermos V^ω com a representação da linguagem em $\mathcal{PL}(S)$, teremos $V^\omega(\alpha) = 1$ para todo teorema de $\mathcal{PL}(S)$. Faz sentido então afirmar que a “lógica da mecânica clássica” é Booleana.

Consideremos agora a descrição mecânica e quântica de um sistema S . Para evitar argumentos que exijam conhecimento do teorema espectral em dimensão infinita assumamos que o sistema é representado por um espaço de Hilbert H de dimensão finita. Seguiremos agora a terminologia e a notação do apêndice A.3.2. Uma maneira natural e bem conhecida de se interpretar proposições do tipo $A \in I$ - aqui não importa se a entendemos de maneira realista ou instrumentalista - se dá através do projetor $e(A \in I) \doteq \sum_{\lambda \in \sigma(A) \cap I} p_{\lambda}^{(A)}$ (ver teorema 130). Assim, como inicialmente proposto por Birkhoff e von Neumann em [30] e como é feito em diversas tentativas de se formular uma “lógica quântica”, tentaríamos usar $Pr(H)$ (o conjunto dos projetores ortogonais de H) para “construir” uma lógica quântica. Porém, como está provado no apêndice A.5, $Pr(H)$ é um reticulado completo não distributivo, e por ser não distributivo não é uma álgebra de Heyting, e por isso não podemos representar nossa linguagem em $Pr(H)$. Na formulação contravariante da teoria quântica em topoi representaremos $\mathcal{P}\mathcal{L}(S)$ de maneira análoga à empregada no caso clássico: construiremos um “espaço de estados” para o sistema, que será um objeto do topos, e associaremos proposições do tipo $A \in I$ a subobjetos desse espaço de estados.

Esclarecida a noção de proposição podemos compreender o conceito de teoria física realista por eles apresentado. Uma **teoria física realista** pode ser caracterizada da seguinte maneira. A ideia de “propriedade do sistema” tem significado e é representável na teoria através da noção de “valor de um observável”, sendo esse valor um número (real ou complexo). Proposições sobre o sistema, no sentido discutido acima (linguagem $\mathcal{P}\mathcal{L}(S)$), obedecem a lógica Booleana. Por fim, há na teoria um “espaço de estados” tal que, especificando um estado puro, atribuímos “valores de verdade” a toda proposição física.

As discussões feitas acima nos mostram que a mecânica clássica é uma teoria realista nesse sentido e que a mecânica quântica, na sua formulação usual, dificilmente pode sê-lo. Comumente afirma-se ainda que o teorema de Kochen-Specker impede uma interpretação desse tipo na mecânica quântica usual.

A formulação de teorias físicas através da teoria de topoi por eles proposta é chamada de **neorrealista** por ser caracterizada da seguinte maneira. A ideia de “propriedade do sistema” faz sentido e é representável na teoria através da noção de “valor de um observável”, assim como no caso realista, porém esse valor não necessariamente é um número (real ou complexo). Proposições sobre o sistema obedecem à lógica intuicionista: a linguagem $\mathcal{P}\mathcal{L}(S)$ é

representada numa álgebra de Heyting associada ao topos. Existe no topos um objeto análogo ao “espaço de estados” da mecânica clássica e “valores de verdade” podem ser associados a todas as proposições físicas - veremos porém que tal associação não necessariamente é feita através de um elemento global desse espaço de estados, que seria o análogo do estado puro; além disso, como estamos usando lógica intuicionista, os valores de verdade não são necessariamente binários (verdadeiro ou falso).

A linguagem $\mathcal{L}(S)$ é a linguagem formal que nos fornece os principais ingredientes de tal teoria neorrealista. Por exemplo, sua interpretação nos fornece um objeto Σ que interpretamos como o análogo ao espaço de estados, um objeto R que faz a função de objeto no qual os observáveis “assumem valores”, sendo que observáveis são interpretados como morfismos $\Sigma \rightarrow R$. Proposições são associadas a subobjetos de Σ e podemos atribuir a elas “valores de verdade” no topos, já que nele temos um classificador de subobjetos - há na linguagem um símbolo que se interpreta como o classificador de subobjetos. Não apresentaremos essa linguagem pois não se trata de uma linguagem simples como $\mathcal{PL}(S)$ e porque não a usaremos na prática. O que importa é que a construção de teorias físicas em topoi, da maneira proposta por Isham e Döring, nos fornece teorias que podem ser chamadas de “neorrealistas” em um sentido preciso.

2.3 A categoria dos contextos

Vamos finalizar a introdução esboçando a categoria dos contextos, que será fundamental na teoria quântica em topoi. Definiremo-la usando álgebras C^* ; na formulação contravariante, porém, utilizaremos álgebras de von Neumann.

Já introduzimos a noção de contexto e justificamos sua definição, e uma justificativa mais completa pode ser encontrada no apêndice A.4. Dissemos também que uma ideia fundamental da teoria quântica em topoi é estudar um sistema quântico através de seus contextos clássicos. Seja então $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* unital e $\tilde{\mathcal{A}}$ o conjunto de seus contextos (subálgebras comutativas unitais de $\mathcal{A}$), que é, agora, o objeto de interesse. É razoável esperar que introduzamos em $\tilde{\mathcal{A}}$ alguma estrutura, e uma maneira natural de se fazer isso é olhar para esse conjunto como um conjunto parcialmente ordenado (um poset ⁷) cuja ordem parcial é a inclusão conjuntista. Isso nos permite lidar não só com a noção de subcontexto (onde, claro, um contexto A é subcontexto

⁷Apêndice A.5.

de B se $A \subset B$), tão cara à teoria quântica em topoi, mas também com a interseção de contextos, já que a interseção de duas álgebras C^* unitais é também uma álgebra C^* unital. Bom, posets são exemplos simples de categorias, e essa é a categoria dos contextos. Esse não é, porém, o topos associado ao sistema - até porque não se trata de um topos. Como veremos, o topos de interesse é a categoria dos pré-feixes definidos nesse poset.

CAPÍTULO 3

Categorias e Topoi

Apresentaremos agora conceitos básicos de teoria de categorias. Tentaremos ser objetivos e apresentar principalmente o que será importante para a definição de topos, que é um tipo especial de categoria, e para a teoria quântica em topoi. Sendo o topos associado a um sistema quântico uma categoria de pré-feixes, daremos especial atenção a ela.

Começemos pela definição de categoria. Temos dois tipos de elementos numa categoria: objetos e flechas. Flechas que têm objetos como “origem” e “destino”. Um exemplo de “estrutura” matemática que pode ser ilustrado dessa maneira é a coleção de todos os conjuntos (objetos) e de todas as funções conjuntistas (flechas). Podemos tomar também como coleção de objetos a coleção de algum tipo de estrutura algébrica (por exemplo, a coleção dos espaços vetoriais) e como flechas as funções que preservam essa estrutura (funções lineares no caso dos espaços vetoriais). Para definir uma estrutura matemática desse tipo, de modo que ela englobe os exemplos citados acima, tomar como fundamentação a teoria dos conjuntos usual (Zermelo-Fraenkel com axioma da escolha) não parece ser uma boa ideia pois sabemos que, por exemplo, a coleção de todos os conjuntos não define um conjunto. Precisamos então de outra fundamentação para a teoria. Há mais de uma maneira de se fazer isso e aqui usaremos teoria das classes. Para isso não precisamos entender muito sobre essa teoria, assim como não precisamos entender muito sobre teoria dos conjuntos para estudar teorias matemáticas que a

têm como fundamentação: o que importa são as operações formais permitidas.

Bom, vamos usar conjuntos e funções conjuntistas para ilustrar as propriedades que serão importantes na definição de categoria. Se tomarmos funções (entre conjuntos) $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sabemos que existe a composta $g \circ f : A \rightarrow C$ e que, se $h : C \rightarrow D$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (ou seja, a composição de funções é associativa). Se A é conjunto, podemos definir a função identidade $1_A : A \rightarrow A$ por $1_A(x) \doteq x$ para $x \in A$ e, para $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$, sabemos que $f \circ 1_A = f$, $1_A \circ g = g$. Por fim, a cada função f podemos associar dois conjuntos, domínio e codomínio, que podemos representar respectivamente por $\text{dom}(f)$ e $\text{cod}(f)$. Essa discussão ilustra a seguinte definição.

Definição 1 (Categoria) *Sejam*

- (a) $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_1$ classes (chamaremos de objetos os elementos de $\mathcal{C}_0$ e de morfismos os elementos de $\mathcal{C}_1$).
- (b) $\text{dom}, \text{cod} : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0$ funções (escreveremos $f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ para dizer que f é um morfismo tal que $A = \text{dom}(f)$, $B = \text{cod}(f)$).
- (c) $H \doteq \{(g, f) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \mid \text{dom}(g) = \text{cod}(f)\}$ e $\circ : H \rightarrow \mathcal{C}_1$. Escreveremos $g \circ f \equiv \circ(g, f)$.
- (d) $1 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1$ função. Escreveremos $1_X \equiv 1(X)$ para $X \in \mathcal{C}_0$

Diremos que a 6-upla $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \text{dom}, \text{cod}, \circ, 1)$ é uma categoria se as seguintes propriedades forem satisfeitas.

- se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, então $g \circ f : A \rightarrow C$, ou seja, se $\text{cod}(g) = \text{dom}(f)$ ($(g, f) \in H$ equivalentemente), então $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$ e $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$.
Mais que isso, $\circ$ é uma operação associativa, ou seja, se $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ então

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

- $\text{dom}(1_X) = \text{cod}(1_X) = X$ para $X \in \mathcal{C}_0$; mais que isso

$$f \circ 1_X = f \tag{3.1}$$

$$1_X \circ g = g. \tag{3.2}$$

para $f : X \rightarrow \text{cod}(f), g : \text{dom}(g) \rightarrow X$ quaisquer.

É consequência simples da associatividade da composição que a identidade associada a um objeto é única (ou seja, se $A \in \mathcal{C}_0$, existe um único morfismo $1_A : A \rightarrow A$ que satisfaz as propriedades apresentadas no último item da definição acima). É comum utilizar-se a palavra flecha em vez de morfismo. Diremos que f é um morfismo “entre” os objetos A e B quando $f : A \rightarrow B$ ou $f : B \rightarrow A$, e que f é um morfismo “de A a B ” quando $f : A \rightarrow B$. Um conjunto do tipo $\text{Hom}(A, B)$ é o que chamamos de conjunto Hom. Note que acima usamos o fato de podermos definir produto cartesiano de classes, funções entre classes, n-uplas etc. pelos motivos já apontados, não discutiremos essas questões.

Os morfismos são os elementos mais importantes da categoria pois é nele que podemos fazer operações. Pode-se inclusive definir categoria se fazer menção a objetos: isso é fácil de se perceber na nossa definição, já que há uma relação biunívoca entre objetos e morfismos identidade. Excluir objetos da definição, porém, nem sempre é conveniente, e cremos que o topos que associaremos a um sistema físico é um bom exemplo disso.

Para dar precisão aos conceitos de relação e função conjuntistas, que serão utilizados no parágrafo seguinte, lembremos que, usualmente, definimos uma relação como sendo uma classe cujos elementos são pares ordenados e que uma função F é uma relação tal que, se $(x, y) \in F$ e $(x, z) \in F$, então $y = z$. Sobre pares ordenados (ou n-uplas), é suficiente lembramos que dois pares ordenados (ou duas n-uplas) são iguais se, e somente se, eles são iguais termo a termo; de qualquer modo, vale também lembrar que, se x, y são conjuntos, definimos o par ordenado (x, y) por $(x, y) \doteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (que também é conjunto). Se F é função, definimos $\text{dom}(F) \doteq \{x \mid \exists y \text{ tal que } (x, y) \in F\}$ e $\text{im}(F) \doteq \{y \mid \exists x \text{ tal que } (x, y) \in F\}$ (domínio e imagem de F respectivamente) sendo que codomínio de F pode ser qualquer conjunto B tal que $\text{im}(F) \subset B$. Por fim, se $\text{dom}(F)$ e $\text{im}(F)$ são conjuntos, F também o é já que $F \subset \text{dom}(F) \times \text{im}(F)$, que $\text{dom}(F) \times \text{im}(F)$ é conjunto e que um subconjunto de um conjunto é conjunto.

Como motivação da definição de categoria foram usadas funções conjuntistas. Queremos definir uma categoria, que vamos denotar por **Sets**, em que os morfismos sejam dados por funções entre conjuntos e os objetos sejam os conjuntos. Porém, é importante notar que a cada morfismo podemos associar apenas um codomínio. Se nessa categoria tomarmos a classe dos morfismos como sendo a classe de todas as funções entre conjuntos (no sentido do parágrafo

acima), ao definirmos nossa função cod , estaremos fazendo com que nossa categoria não “represente”, de fato, todas as funções desejadas. Por exemplo, para a função $f \doteq \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$, se definirmos $\text{cod}(f) \doteq \mathbb{R}$, não poderemos usar tal função para “definir” um morfismo entre os objetos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e portanto nossa categoria não terá um morfismo associado à função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x) \doteq x^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Para corrigir isso, vamos tomar **Sets**₁ como sendo a classe dos pares ordenados (f, B) , onde f é uma função entre conjuntos e B é um conjunto tal que $\text{im}(f) \subset B$. Tomamos **Sets**₀ como sendo a classe de todos os conjuntos e definimos as funções codomínio e domínio por $\text{cod}((f, B)) \doteq B \forall (f, B) \in \mathbf{Sets}_1$ e $\text{dom}(f, B) \doteq \text{dom}(f) \forall (f, B) \in \mathbf{Sets}_1$ respectivamente ($\text{dom}(f)$ é o domínio de uma função definido no parágrafo acima). Para a composição, se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, $g \circ f : A \rightarrow C$ é dado por $(g \circ f, C)$ e a identidade associada a um objeto A é $(1_A, A)$. Em resumo, a única coisa que fizemos foi distinguir funções não apenas pelo conjunto de pares ordenados que geralmente usamos para defini-las mas também pelo codomínio que associamos a ela. Daqui pra frente, sempre que tivermos tratando de funções entre conjuntos, estaremos chamando de função um par ordenado desse tipo (e não mais os representaremos usando pares ordenados, já que o segundo termo do par nada mais é que o codomínio da função). Enfim, uma função f entre conjuntos é um par ordenado (F, B) , onde F é um conjunto de pares ordenados de conjuntos tal que, se $(x, y) \in F$ e $(x, z) \in F$, então $y = z$ e, mais que isso, $F \subset B$.

Como já comentamos, quando tomamos como objetos algum tipo de estrutura algébrica e como morfismos os homomorfismos entre essas estruturas temos uma categoria. Espaços topológicos (como objetos) e funções contínuas entre espaços topológicos (como morfismos) são outro exemplo importante de categoria onde os objetos são determinados por certa estrutura (topológica, nesse caso) e cujos morfismos são funções que preservam essa estrutura. Chamaríamos uma categoria desse tipo de **categoria concreta**. Temos as seguintes categorias como exemplo disso.

- **Sets**: **Sets**₀ é a classe dos conjuntos e **Sets**₁ é a classe das funções entre conjuntos
- **Vet** _{$\mathbb{K}$} : **Vet** _{$\mathbb{K}$} 0 é a classe dos espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e **Vet** _{$\mathbb{K}$} 1 é a classe das funções lineares entre esses espaços
- **Gr**: **Gr**₀ é a classe dos grupos e **Gr**₁ é a classe dos homomorfismos entre grupos

- **Ab**: $\mathbf{Ab}_0$ é a classe dos grupos abelianos e $\mathbf{Ab}_1$ é a classe dos homomorfismos entre grupos
- **Top**: $\mathbf{Top}_0$ é a classe dos espaços topológicos e $\mathbf{Top}_1$ é a classe das funções contínuas
- **Pos**: $\mathbf{Pos}_0$ é a classe dos conjuntos parcialmente ordenados e $\mathbf{Pos}_1$ é a classe das funções monótonas
- **Rings**: $\mathbf{Rings}_0$ é a classe dos anéis e $\mathbf{Rings}_1$ é a classe dos homomorfismos entre anéis
- **Rings(1)**: $\mathbf{Rings}(1)_0$ é a classe dos anéis unitais e $\mathbf{Rings}(1)_1$ é a classe dos homomorfismos que preservam a identidade
- **0Ban**: $\mathbf{0Ban}_0$ é a classe espaços de Banach e $\mathbf{0Ban}_1$ é a classe dos operadores lineares limitados
- **Ban**: $\mathbf{Ban}_0$ é a classe espaços de Banach e $\mathbf{Ban}_1$ é a classe das contrações (operadores limitados de norma menor que um)

Um **conjunto parcialmente ordenado** (poset) ¹ também pode ser entendido como uma categoria. Trata-se de um tipo de categoria de muita importância nesse trabalho pois a categoria dos contextos, já apresentada na introdução, é desse tipo. Se $(P, \leq)$ é poset, podemos definir uma categoria cujos objetos são os elementos de P e cujos morfismos são os elementos da ordem parcial, ou seja, são os pares (a, b) tais que $a \leq b$. Assim, temos um morfismo de p a q se, e só se, $p \leq q$, e além disso $\text{Hom}(p, q)$ tem no máximo um elemento. Um **monoide** também podem ser visto como uma categoria. Seja M um monoide, ou seja, um conjunto munido por uma operação binária associativa e com elemento neutro (vou representar a operação por “ $\cdot$ ” e o elemento neutro por e : $e \cdot x = x \cdot e = x \forall x \in M$). Os elementos de um monoide se relacionam - através da operação binária - como os morfismos $f : A \rightarrow A$, para um $A \in \mathcal{C}_0$ numa categoria $\mathcal{C}$, o fazem através da composição; o elemento neutro do monoide satisfaz as propriedades que 1_A deve satisfazer. Enfim, um monoide M pode ser visto como uma categoria de um único objeto, cujos morfismos são os elementos de M , a composição é a operação do monoide e a identidade do objeto é o elemento neutro do monoide. Como caso particular disso, um **grupo** é também uma categoria.

¹ Sempre que discutirmos conjuntos parcialmente ordenados usaremos a terminologia do apêndice A.5.

Assim como fizemos na definição 1, dada uma categoria $\mathcal{C}$, $\text{Hom}(A, B)$ (ou $\mathcal{C}(A, B)$) sempre representará a coleção dos morfismos $f : A \rightarrow B$ em $\mathcal{C}$, onde $A, B \in \mathcal{C}_0$.

Definição 2 *Seja $\mathcal{C}$ categoria. Dizemos que*

- (a) *$\mathcal{C}$ é uma categoria pequena se $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_1$ forem conjuntos.*
- (b) *$\mathcal{C}$ é localmente pequena se $\text{Hom}(A, B)$ é conjunto para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}_0$.*
- (c) *$\mathcal{C}$ é uma categoria finita se $\mathcal{C}_1$ e, conseqüente, $\mathcal{C}_0$ forem conjuntos finitos.*

Sejam A e B conjuntos. Temos que $A \times B$ é conjunto e que $\mathcal{P}(A \times B)$ também o é. Como $\text{Hom}(A, B) \subset \mathcal{P}(A \times B)$, $\text{Hom}(A, B)$ é conjunto. Isso garante que todas as categorias concretas citadas acima são categorias localmente pequenas. É trivial que uma categoria pequena é localmente pequena e que posets são categorias pequenas.

Se tomarmos $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, $\mathcal{C}_1 = \emptyset$, temos uma categoria, que vamos chamar de categoria vazia. Podemos tomar uma categoria que possua apenas um morfismo f , com $\text{dom}(f) = \text{cod}(f) \equiv A$. Chamaremos de “discreta” uma categoria em que os únicos morfismos são as identidades, ou seja, se f é morfismo da categoria em questão, $f = 1_{\text{dom}(f)}$.

Chamaremos de **morfismos paralelos** morfismos que possuem os mesmos domínio e codomínio, ou seja, que pertencem a um mesmo conjunto Hom . A seguinte definição, que pode ser entendida como uma generalização das noções de injetividade e sobrejetividade, é muito importante.

Definição 3 (mono e epimorfismo) *Sejam $\mathcal{C}$ categoria e $f : A \rightarrow B$ morfismo. Dizemos que*

- (a) *f é monomorfismo se para qualquer par de morfismos paralelos $g, h : C \rightarrow A$ valer que*

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$
- (b) *f é epimorfismo se para qualquer par de morfismos paralelos $g, h : B \rightarrow C$ valer que*

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Diremos que um morfismo é “mono” quando ele for um monomorfismo e que ele é “epi” quando se tratar de um epimorfismo.

Lema 4 *Em Sets, seja $f : A \rightarrow B$ morfismo. Valem as seguintes afirmações.*

(a) f é monomorfismo se, e somente se, é uma função injetora entre os conjuntos A e B

(b) f é epimorfismo se, e só se, é sobrejetora.

Prova. Seja $f : A \rightarrow B$ morfismo.

(a) Supondo f injetora, sejam $g, h : C \rightarrow A$; temos $f \circ g = f \circ h \Leftrightarrow (f \circ g)(c) = (f \circ h)(c) \forall c \in C \Leftrightarrow f(g(c)) = f(h(c)) \forall c \in C \Leftrightarrow h(c) = g(c) \forall c \in C \Leftrightarrow g = h$, e isso mostra que f é monomorfismo. Supondo agora que f é monomorfismo, se f não fosse injetiva teríamos $a, a' \in A$ tais que $a \neq a'$, $f(a) = f(a')$; mas podemos tomar funções $g, g' : \{c\} \rightarrow A$ dadas por $g(c) \doteq a, g'(c) \doteq a'$, onde c é um conjunto qualquer, e teríamos $f \circ g = f \circ g'$, sendo que $g \neq g'$ por definição, e isso viola nossa hipótese; portanto, se f é monomorfismo, f tem que ser injetora.

(b) Sejam f sobrejetora e $g, h : B \rightarrow C$; temos $g \circ f = h \circ f \Leftrightarrow g(f(a)) = h(f(a)) \forall a \in A \Leftrightarrow g(b) = h(b) \forall b \in B \Leftrightarrow g = h$. Agora, se f é epimorfismo, suponhamos que existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \notin f(A)$. Para um conjunto C de ao menos dois elementos distintos podemos tomar $f, g : B \rightarrow C$ tais que $f|_{B \setminus \{b_0\}} = g|_{B \setminus \{b_0\}}$ e $f(b_0) \neq g(b_0)$. Temos com isso que $g \circ f = h \circ f$ porém, por definição, $g \neq h$, contrariando o fato de f ser epimorfismo.

■

Em um poset P (que, sob o ponto de vista descrito acima, é uma categoria), a unicidade do morfismo entre dois objetos $A, B \in P_0$ nos garante que todo morfismo nessa categoria é mono e epi.

É consequência da associatividade da composição que a composição de dois morfismos mono é um monomorfismo (consequentemente, a composição de $n \in \mathbb{N}$ monomorfismos é monomorfismo), sendo verdadeira a afirmação análoga para epimorfismos. De fato, tomando $m : A \rightarrow B, m' : B \rightarrow C$ monomorfismos numa categoria, sejam $g, h : C \rightarrow A$; temos $(m' \circ m) \circ g = (m' \circ m) \circ h \Leftrightarrow m' \circ (m \circ g) = m' \circ (m \circ h) \Leftrightarrow m \circ g = m \circ h \Leftrightarrow g = h$, o que prova que $m' \circ m$ é monomorfismo, e analogamente se tem que a composição de epimorfismos é epimorfismo. Mais que isso, de modo semelhante ao que foi feito acima mostra-se que, para morfismos $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, se $g \circ f$ e g forem monomorfismos, f também o é, e se $g \circ f$ e f forem epimorfismos, g também o é.

Definição 5 (Isomorfismo) Um isomorfismo numa categoria $\mathcal{C}$ é um morfismo $f : A \rightarrow B$ tal que existe $g : B \rightarrow A$ satisfazendo

$$g \circ f = 1_A \quad (3.3)$$

$$f \circ g = 1_B \quad (3.4)$$

É consequência simples da associatividade da composição que tal morfismo g , quando existe, é único. Chamamo-lo de “inversa” de f e o representamos por f^{-1} , como de costume. Diremos que um morfismo é inversível quando ele possuir uma inversa. É trivial que a identidade associada a um objeto é sempre inversível, sendo ela mesma a sua inversa. Diremos que um morfismo é “iso” quando ele for um isomorfismo. Diremos que dois objetos são isomorfos quando existir um isomorfismo entre eles. É trivial que a inversa de morfismo f é também inversível, sendo f sua inversa: $(f^{-1})^{-1} = f$. Vamos escrever $A \cong B$ para denotar que A e B são dois objetos isomorfos.

Em um poset, a anti-simetria da ordem parcial nos diz que os únicos morfismos inversíveis são as identidades. Num grupo, o morfismo inverso é dado pelo elemento inverso (inverso com relação à operação do grupo).

É fácil ver que, em **Sets**, um morfismo $f : A \rightarrow B$ é iso se, e somente se, $f : A \rightarrow B$ é bijetora (ou seja, é um isomorfismo conjuntista) e que o morfismo inverso é dado pela função inversa. É importante notar que isso, em geral, é falso. Por exemplo, em **Top**, nem todo morfismo dado por uma função bijetora é inversível, já que a função inversa não necessariamente será contínua - por esse mesmo motivo, ao definirmos homeomorfismo entre espaços topológicos, exigimos que sua inversa seja contínua. Como a inversa de um homomorfismo entre grupos ou anéis é também homomorfismo, e a inversa de uma função linear entre espaços vetoriais é também linear, vale, em **Gr**, **Rings**, **Rings(1)**, e **Vet_K**, que “ser morfismo + ser bijeção $\Rightarrow$ ser isomorfismo”. A outra afirmação “ser isomorfismo $\Rightarrow$ ser Mono e epi” é sempre válida

Lema 6 Numa categoria, um isomorfismo é sempre mono e epi.

Prova. Seja $f : A \rightarrow B$ isomorfismo. Se $g, h : C \rightarrow A$ são tais que $f \circ g = f \circ h$, temos $g = 1_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h = h$, ou seja, f é monomorfismo. Analogamente se mostra que f é epimorfismo. ■

Não é verdade em geral que todo morfismo mono e epi é isomorfismo, como ocorre em **Sets**.

Definição 7 (Objetos inicial e terminal) *Numa categoria $\mathcal{C}$, dizemos que um objeto A é*

- (a) *Inicial se para todo $B \in \mathcal{C}_0$ existe, e é único, um morfismo $f : A \rightarrow B$*
- (b) *Terminal se para todo $B \in \mathcal{C}_0$ existe, e é único, um morfismo $f : B \rightarrow A$*

Geralmente representamos objetos iniciais por 0 e objetos terminais por 1.

Se 0 é objeto inicial em uma categoria $\mathcal{C}$, sabemos que é único um morfismo $h \in \mathcal{C}_1$ tal que $\text{dom}(h) = \text{cod}(h) = 0$; como 1_0 satisfaz isso, qualquer morfismo satisfazendo essa propriedade é igual a 1_0 . Supondo que uma categoria tem dois objetos iniciais, 0 e $0'$, o fato de 0 ser inicial implica que existe um morfismo $f : 0 \rightarrow 0'$; o fato de $0'$ ser inicial implica que existe $g : 0' \rightarrow 0$; então temos $g \circ f : 0 \rightarrow 0$ e, pelo que foi argumentado acima, $g \circ f = 1_0$, analogamente, $f \circ g = 1_{0'}$. Então, 0 e $0'$ são isomorfos. Analogamente mostra-se que se dois objetos numa categoria forem terminais, eles são isomorfos. Um morfismo $f : 1 \rightarrow B$ necessariamente é mono pois para qualquer par de morfismos paralelos $g, h : C \rightarrow 1$ vale que $g = h$; analogamente, um morfismo $f : A \rightarrow 0$ é necessariamente epi. Resumimos esses resultados no seguinte lema.

Lema 8 *Numa categoria vale que*

- (a) *Objetos iniciais, se existem, são únicos a menos de isomorfismos, ou seja, se 0 e $0'$ são objetos iniciais da categoria eles são objetos isomorfos*
- (b) *Objetos terminais são únicos a menos de isomorfismos*
- (c) *Se 1 é objeto terminal, $1 \rightarrow A$ é mono*
- (d) *Se 0 é objeto inicial, $A \rightarrow 0$ é epi.*

Se A e $*$ são conjuntos, existe, e é única, uma função $f : A \rightarrow \{*\}$. Então, em **Sets**, $\{*\}$ é objeto terminal para qualquer conjunto $*$; como objetos terminais são isomorfos (e, no caso de **Sets**, isso equivale a haver bijeção entre eles), qualquer objeto terminal deve conter apenas um elemento, ou seja, ser o unitário de algum conjunto. Por argumentos análogos, $\emptyset$ é objeto inicial em **Sets** (único, já que objetos iniciais devem ser isomorfos). Em **Top**, a única

topologia possível de ser definida num conjunto unitário $\{*\}$ é a topologia caótica $\tau \doteq \{\{*\}, \emptyset\}$, e a função, única, $f : A \rightarrow \{*\}$, onde A é espaço topológico, é trivialmente contínua (de fato, $f^{-1}(\{*\}) = A$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, logo a pré-imagem de todo aberto em $\{*\}$ é um aberto de A e então f é contínua). Então, em **Top**, objetos terminais são espaços topológicos cujo conjunto possui apenas um ponto. O espaço topológico vazio é o objeto inicial de **Top**. Em **Gr**, é fácil ver que um grupo trivial (que possui apenas um elemento, consequentemente a identidade) é objeto terminal. Além disso, como homomorfismos levam a unidade na unidade, um grupo trivial é também objeto inicial em **Gr**. Como objetos iniciais e terminais são únicos a menos de isomorfismos, em **Gr**, objetos iniciais e terminais são necessariamente grupos triviais. Argumentos e propriedades análogas nos dizem que, em $\mathbf{Vet}_{\mathbb{K}}$, um objeto é inicial se, e somente se, é terminal, e isso acontece e, e só se, é espaço vetorial trivial. Um poset P possui objeto inicial a se, e somente se, a é menor elemento de P ($a \leq b \forall b \in P$) e esse objeto é único devido à antissimetria da relação - se P for apenas pré-ordenado, será único a menos de isomorfismos; analogamente, um poset possui objeto terminal se, e só se, possui maior elemento (novamente único). Um monoide possui objeto inicial se, e somente se, possui objeto terminal, sendo que isso ocorre se, e só se, tratar-se de um monoide trivial.

3.1 Funtores, diagramas, cones e limites

Nossa principal referência nessa seção é [33].

A noção de functor é fundamental na teoria quântica em topoi pois a categoria associada a um sistema físico é uma categoria de funtores; mais precisamente, uma categoria que tem certa coleção de funtores como coleção de objetos. Podemos entender um functor como um mapa entre categorias que se comporta de maneira coerente em relação à estrutura de categoria (composições, domínios, codomínios e identidades). Começaremos pela definição.

Definição 9 (Functor covariante) *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ duas categorias. Chamamos de functor covariante de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ um par (F_0, F_1) de funções $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$, $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ tais que*

$$(a) \text{ Se } f : A \rightarrow B, F_1(f) : F_0(A) \rightarrow F_0(B), \text{ ou seja, } \text{dom}(F_1(f)) = F_0(\text{dom}(f)), \\ \text{cod}(F_1(f)) = F_0(\text{cod}(f))$$

$$(b) F_1(1_A) = 1_{F_0(A)} \text{ para todo } A \in \mathcal{C}_0$$

$$(c) F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f) \text{ se } \text{cod}(f) = \text{dom}(g).$$

Escreveremos $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ para representar um funtor covariante F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$. Para limpar a notação representaremos, na maioria das vezes, as funções F_0 e F_1 pela mesma letra, ignorando os índices; a mesma usada para representar o funtor. Uma maneira sucinta de se representar a afirmação feita no item *a* da definição 9 é escrever $F(f : A \rightarrow B) = F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$. Além disso, escreveremos F_f em vez de $F(f)$ e F_A em vez de $F(A)$ sempre que for conveniente.

O termo “covariante” é usado aqui para fazer distinção à noção de funtor contravariante, que será definida mais adiante. Quando estiver claro de que tipo de funtor estivermos falando, nos referiremos a ele usando apenas a palavra funtor.

Num funtor, a função F_0 é determinada, de modo único, pela função F_1 , ou seja, se os pares $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$, $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ e $\tilde{F}_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$, $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ são funtores, então $F_0 = \tilde{F}_0$. De fato, tomando $A \in \mathcal{C}_0$ qualquer temos $1_{F_0(A)} = F_1(1_A) = 1_{\tilde{F}_0(A)}$, o que ocorre se, e só se, $F_0(A) = \tilde{F}_0(A)$.

Chamamos de **funtor identidade** de uma categoria $\mathcal{C}$ o funtor $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $1_{\mathcal{C}}(f : A \rightarrow B) = f : A \rightarrow B$, ou seja, $F(f) = f \forall f \in \mathcal{C}_1$ e $F(A) = A \forall A \in \mathcal{C}_0$.

Vamos agora introduzir a importante noção de “funtor Hom covariante”. Trata-se de um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$, sendo $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena qualquer. Primeiro, fixamos um objeto $X \in \mathcal{C}_0$. A cada objeto $A \in \mathcal{C}_0$ associamos o conjunto $\text{Hom } \mathcal{C}(X, A)$ (possivelmente vazio). Agora precisamos definir $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathbf{Sets}_1$ de modo que $F(f : A \rightarrow B) = F(f) : \mathcal{C}(X, A) \rightarrow \mathcal{C}(X, B)$. A maneira mais natural de se fazer isso é tomar $F(f)$ como sendo a função tal que $F(f)(x) \doteq f \circ x \forall x \in \mathcal{C}(X, A)$; a seguinte figura representa a situação:

Vamos representar $F(f)$ por F_f . Para uma identidade 1_A em $\mathcal{C}$, temos $F_{1_A}(x) = 1_A \circ x = x \forall x \in \mathcal{C}(X, A)$, então $F_{1_A} = 1_{\mathcal{C}(X, A)}$, como necessário; além disso, se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são morfismos em $\mathcal{C}$, temos que, para $x \in \mathcal{C}(X, A)$ qualquer, $F_{g \circ f}(x) = (g \circ$

$f) \circ x = g \circ (f \circ x) = F_g(f \circ x) = F_g(F_f(x)) = (F_g \circ F_f)(x)$ e portanto $F_g \circ F_f = F_{g \circ f}$. Está provado que isso nos dá, de fato, um funtor. Vamos representar tal funtor por $\mathcal{C}(X, -)$ e o chamaremos de funtor Hom.

Definição 10 (Funtor Hom covariante) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena e $X \in \mathcal{C}_0$. Chamamos de funtor Hom (associado a X) o funtor $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ que*

- (a) *A cada objeto de $\mathcal{C}$ associa o conjunto $\mathcal{C}(X, A)$*
- (b) *A cada morfismo $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{C}$ associa a função $\mathcal{C}(X, f) : \mathcal{C}(X, A) \rightarrow \mathcal{C}(X, B)$ dada por $\mathcal{C}(X, f)(x) \doteq f \circ x \ \forall x \in \mathcal{C}(X, A)$.*

Às vezes denotaremos o funtor $\mathcal{C}(X, -)$ por $\text{Hom}(X, -)$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$.

Chamamos de domínio de um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ a categoria $\mathcal{C} \equiv \text{dom}(F)$ e de codomínio de F a categoria $\mathcal{C}' \equiv \text{cod}(F)$. Se F e G são funtores, temos que $\text{dom}(G) = \text{cod}(F)$ se, e somente se, $\text{dom}(G_i) = \text{cod}(F_i)$, $i \in \{0, 1\}$. Também podemos definir a composição de funtores F e G quando $\text{cod}(F) = \text{dom}(G)$: trata-se do funtor $G \circ F : \text{dom}(F) \rightarrow \text{cod}(G)$ tal que $(G \circ F)_0 \doteq G_0 \circ F_0$ e $(G \circ F)_1 \doteq G_1 \circ F_1$, ou seja, $(G \circ F)(f : A \rightarrow B) = G(F(f : A \rightarrow B)) = G(F(f) : F(A) \rightarrow F(B)) = G(F(f)) : G(F(A)) \rightarrow G(F(B))$. Diremos que um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ é inverso de $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ quando $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$. Um funtor que possui inverso é chamado de funtor inversível e diremos que duas categorias são isomorfas se existe um funtor inversível entre elas.

O parágrafo acima sugere a definição de uma “categoria das categorias”. Essa definição é problemática por razões semelhantes à dificuldade de se definir um “conjunto de todos os conjuntos”. Uma discussão sobre essa questão pode ser encontrada em [36].

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ funtor. Sabemos que, se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ em $\mathcal{C}$, então é possível a composição $F(g) \circ F(f)$ em $\mathcal{C}'$ já que F_0 é função; por outro lado, $\text{cod}(F(f)) = \text{dom}(F(g))$ não nos garante que é possível a composição $g \circ f$, pois F_0 não necessariamente é função injetora. Se exigirmos que $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ seja injetora, teremos que F_0 o será (basta olhar para os morfismos identidade de $\mathcal{C}$). Sabemos que se $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $F(f) \in \mathcal{C}'(F(A), F(B))$; isso nos permite definir uma função $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}'(F(A), F(B))$ por $F_{A,B}(f) \doteq F(f) \ \forall f \in \mathcal{C}(A, B)$. Se exigirmos que F_1 seja função injetora, teremos que $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}'(F(A), F(B))$ será também injetora; por outro lado, exigir que

$F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}'(F(A), F(B))$ seja injetora para todo par $A, B \in \mathcal{C}_0$ não nos garante que $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ é uma função injetora pois isso não implica que F_0 é injetora (condição que, como vimos, é necessária para que F_1 seja injetora). De fato, ainda que $F_{A,B}$ seja injetora podemos ter morfismos $f_1 \neq f_2$, $f_1 : A_1 \rightarrow B_1$, $f_2 : A_2 \rightarrow B_2$ satisfazendo $F(f_1) = F(f_2)$, desde que $A_1 \neq A_2$ ou $B_1 \neq B_2$. Essa discussão motiva a seguinte definição.

Definição 11 *Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é dito ser*

- (a) *Injetor nos objetos se $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$ é injetora. Sobrejetor nos objetos se $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$ é sobrejetor*
- (b) *Injetor nos morfismos se $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ é injetora, e analogamente se define funtor sobrejetor nos morfismos.*
- (c) *Fiel se para todo par $A, B \in \mathcal{C}_0$, a função $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}'(F(A), F(B))$, dada por $F_{A,B}(f) \doteq F(f) \forall f \in \mathcal{C}(A, B)$, é injetora*
- (d) *Pleno se $F_{A,B}$, definida no item acima, é sobrejetora para todo par $A, B \in \mathcal{C}_0$*
- (e) *Essencialmente sobrejetor (nos objetos) para todo $A' \in \mathcal{C}'$ existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $F(A) \cong A'$*

Para qualquer categoria $\mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}_0$, o funtor $\mathcal{C}(X, -)$ é injetor nos objetos. As outras propriedades (injetividade nos morfismos, ser pleno e fiel etc.) do funtor Hom dependerão da categoria $\mathcal{C}$ e do objeto $X \in \mathcal{C}_0$ tomados. Das definições dadas acima, plenitude e fidelidade são, ao menos nos casos de nosso interesse, as mais importantes.

Definição 12 (Subcategoria) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma subcategoria de $\mathcal{C}$ é uma categoria $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C}_0$, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{C}_1$ e cujas operações ($\text{dom} : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_0$, $\text{cod} : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_0$ e composições) são dadas pelas restrições das operações de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D}_1$.*

Se $\mathcal{D}$ é subcategoria de $\mathcal{C}$, chamamos de “funtor inclusão” (de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$) o funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $F(f : A \rightarrow B) = f : A \rightarrow B \forall f \in \mathcal{D}_1$. Representamos o funtor inclusão por $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$.

Se numa categoria $\mathcal{C}$ tivermos duas subclasses $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C}_0$, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{C}_1$ que sejam “fechadas para as operações da categoria”, ou seja, duas classes tais que $A \in \mathcal{D}_0 \Leftrightarrow 1_A \in \mathcal{D}_1$, $f \in \mathcal{D}_1 \Rightarrow \text{dom}(f), \text{cod}(f) \in \mathcal{D}_0$, $f, g \in \mathcal{D}_1$, com $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, implica $g \circ f \in \mathcal{D}_1$ podemos definir, trivialmente, uma subcategoria de $\mathcal{C}$. Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é funtor injetor nos objetos, é fácil

ver que, tomando as classes $F(\mathcal{C}_1) \doteq \{F(f) | f \in \mathcal{C}_1\}$, $F(\mathcal{C}_0) \doteq \{F(A) \in \mathcal{C}' | A \in \mathcal{C}\}$, temos uma subcategoria de $\mathcal{C}$ - a injetividade nos objetos é importante para que, dados morfismos $F(f), F(g)$ tenhamos $\text{dom}(F(g)) = \text{cod}(F(f))$ se, e só se, $\text{dom}(g) = \text{cod}(f)$, já que, se essa condição for apenas suficiente para tal igualdade (coisa que acontece para um funtor qualquer), podemos ter $F(g) \circ (f) \notin F(\mathcal{C}_1)$. Em resumo, se para um funtor injetor nos objetos $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ chamarmos as classes $F(\mathcal{C}_1) \doteq \{F(f) | f \in \mathcal{C}_1\}$, $F(\mathcal{C}_0) \doteq \{F(A) \in \mathcal{C}' | A \in \mathcal{C}\}$, munidas as operações (composição, domínio, imagem) de $\mathcal{C}'$ - a rigor, das operações dadas pela restrição (de modo apropriado) dessas - de imagem de F , podemos dizer que a imagem do funtor é uma subcategoria de $\mathcal{C}'$. Por outro lado, tomando uma subcategoria de uma categoria $\mathcal{C}$, temos o funtor inclusão associado a ela, que é trivialmente injetor nos objetos.

Definição 13 (Subcategoria plena) *Seja $\mathcal{C}$ categoria. Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é plena se o funtor inclusão $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ é pleno.*

Se $\mathcal{D}$ for subcategoria plena de $\mathcal{C}$, como o funtor inclusão é trivialmente injetor nos morfismos, temos que, para quaisquer $A, B \in \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$.

Uma noção fundamental em teoria de categorias é a de diagrama. De início podemos entender um diagrama de maneira puramente pictórica: um diagrama é uma figura que representa certos morfismos da categoria (com seus domínios e codomínios) e que usamos para fazer afirmações sobre eles - afirmações do tipo “alguns morfismos dessa coleção são iguais”. Fazendo afirmações sobre diagramas podemos fazer afirmações sobre a categoria. Em diagramas representamos morfismos sempre como flechas que têm como origem seu domínio e como destino seu codomínio (nesse sentido, podemos dizer que a notação $A \xrightarrow{f} B$ é um diagrama). A seguinte figura é um exemplo disso.

O que nos permite usar um diagrama para “fazer afirmações” sobre uma coleção de morfismos é a ideia de comutatividade. Para entender isso é útil a noção de “caminho” em um diagrama: uma n-upla $(f_1, \dots, f_n)$ de morfismos no diagrama é dita ser um “caminho de $\text{dom}(f_1)$

a $\text{cod}(f_n)$ ” se a composição $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ é possível na categoria; se um caminho é uma n -upla dizemos que ele tem “tamanho n ”. Quando dizemos que um diagrama comuta estamos afirmando que, para quaisquer objetos A e B representados no diagrama, se existe um caminho de A a B de tamanho maior que um, então todo caminho de A a B representado no diagrama é igual. Por exemplo, afirmar que o diagrama acima comuta significa dizer que $f \circ e = g \circ e$, $f \circ e' = g \circ e'$, $e \circ u = e'$ e $f \circ e \circ u = g \circ e \circ u = f \circ e' = g \circ e'$ (sendo essa última afirmação, trivialmente, consequência das anteriores, devido à associatividade da composição); não estamos afirmando porém que $f = g$.

Em teoria de categorias provam-se afirmações sobre diagramas, e para isso é necessária que se tenha uma definição de diagrama enquanto elemento da teoria. Dada a “noção pictórica” de diagrama faria sentido tentarmos definir um diagrama na categoria $\mathcal{C}$ como uma subcategoria de $\mathcal{C}$ - sendo que, na representação do diagrama, ocultaríamos composições e morfismos identidade apenas por simplicidade. Seguindo [33] utilizaremos uma definição um pouco mais geral que essa.

Definição 14 (Diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$) *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$ categorias. Um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$ é um funtor $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Diremos que o diagrama é finito quando a categoria $\mathcal{I}$ for uma categoria finita.*

A categoria $\mathcal{I}$ tem como função “indexar” os elementos da imagem do diagrama. Assim como no caso de conjuntos, essa indexação é útil quando queremos nos referir a um elemento (objeto ou morfismo) mais de uma vez - dado um morfismo $f : A \rightarrow B$ na imagem de D , podemos ter diversos morfismos $\alpha : i \rightarrow j$ em $\mathcal{I}$ tais que $D(\alpha) = f$ (e consequentemente $D(i) = A$, $D(j) = B$). Com essa definição de diagrama podemos introduzir a importante noção de cone para um diagrama.

Definição 15 (Cone para um diagrama) *Seja $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$. Diremos que uma coleção $\mathcal{C}_1^I$ de morfismos em $\mathcal{C}$ é um cone para esse diagrama se*

- (a) *Todos os morfismos dessa coleção têm o mesmo domínio*
- (b) *A cada morfismo do cone está associado um, e apenas um, objeto i de $\mathcal{I}$ - vamos denotar por c_i esse morfismo. Mais que isso, $\text{cod}(c_i) = D(i)$*

(c) se $\alpha : i \rightarrow j$ é morfismo de $\mathcal{I}$ então $c_j = D(\alpha) \circ c_i$.

Essa definição ficará mais clara quando a exemplificarmos em diagramas finitos. Geralmente vamos nos referir a um cone usando o nome do domínio de seus morfismos. Por exemplo, se $\mathcal{D}$ é um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$, um cone C para esse diagrama é um cone tal que $C \equiv \text{dom}(c_i)$, $i \in \mathcal{I}$. Então, os morfismos de um cone são sempre morfismos do tipo $c_i : C \rightarrow D(i)$, $i \in \mathcal{I}_0$

Quando formos lidar com diagramas numa categoria $\mathcal{C}$ geralmente não faremos referência a um funtor $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, apenas representaremos certa coleção finita de morfismos. Isso pode ser entendido tanto no sentido da “noção pictórica de diagrama” que usamos acima quanto no sentido preciso de diagrama que definimos acima. Com efeito, se temos uma coleção finita de morfismos $\mathcal{D}_1$, o diagrama (no sentido da definição 14) a ela associado é o funtor inclusão $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ onde $\mathcal{I}$ é a menor subcategoria de $\mathcal{C}$ que “contém” essa coleção, ou seja, é a menor subcategoria tal que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{I}_1$, sendo que a ordem parcial de subcategorias à qual nos referimos é $\mathcal{I} \leq \mathcal{I}'$ se, e só se, e $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}'_1$. Note que $\mathcal{I}_1$ é a coleção de todos os morfismos de $\mathcal{C}$ que podem ser escritos como composições finitas de elementos de $\mathcal{D}_1$ e, além desses, todas as identidades associadas aos domínios e codomínios dos elementos de $\mathcal{D}_1$. É importante notar que não são apenas diagramas finitos que conseguimos representar dessa maneira. Por exemplo, se tomarmos dois morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$, temos as composições $g \circ f$, $g \circ f \circ g$, $g \circ f \circ g \circ f$ e assim por diante que, possivelmente, nos dá uma coleção infinita de morfismos; porem, podemos representar esses dois morfismos e chamar isso de “diagrama”, e estaremos desse modo representando um diagrama infinito usando apenas dois morfismos.

Vamos exemplificar essas ideias. Sejam $\mathcal{C}$ categoria e $f : A \rightarrow E$, $g : B \rightarrow E$ morfismos nessa categoria. Tomando a classe $\mathcal{I}_1 \doteq \{f, g, 1_A, 1_B, 1_E\}$, temos a menor subcategoria de $\mathcal{C}$ que “contém” essa coleção, e o funtor inclusão $I : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$. Representemos esse diagrama

Como de costume, ocultamos as identidades e os morfismos dados por composição de outros morfismos (nesse exemplo, há apenas as composições com as identidades). Um cone C para esse diagrama pode ser assim representado:

Pela definição de cone temos que $f \circ c_A = c_E = g \circ c_A$. Assim, um cone para esse diagrama é determinado, de maneira única, por um par de morfismos $A \xleftarrow{c_A} C \xrightarrow{c_B} B$ que faz o seguinte diagrama comutar

Vemos que, nesse caso, para obtermos um cone para o diagrama não precisamos, na prática, apresentar um morfismo para cada objeto do diagrama. Isso se repetirá em quase todos os exemplos de cones finitos que utilizaremos.

Introduzimos agora a fundamental noção de cone limite.

Definição 16 (Limite para um diagrama) *Seja $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um diagrama (do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$). Diremos que um cone C é um limite para esse diagrama se para qualquer outro cone C' existir, e for único, um morfismo $u : C' \rightarrow C$ em $\mathcal{C}$ tal que, para todo objeto $i \in \mathcal{I}_0$, valer que $c_i \circ u = c'_i$ (onde c'_i é o morfismo do cone C' dado pelo item b da definição 15); ou seja, existe, e é único, morfismo $u : C' \rightarrow C$ tal que, para todo $i \in \mathcal{I}_0$, o seguinte triângulo comuta.*

Diremos que um limite é finito quando ele for um limite para um diagrama finito. Num diagrama, quando colocamos setas pontilhadas entre dois objetos, como no caso acima, estamos afirmando que existe, e é único, um morfismo entre esses objetos tal que o diagrama em questão comuta.

Notemos que, dado um diagrama numa categoria, não necessariamente existe um cone para ele e, em particular, não necessariamente existe um limite. Porém o limite para um diagrama, quando existe, “é único a menos de isomorfismos”. Mais precisamente temos o seguinte lema.

Lema 17 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$ categorias e $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um diagrama. Se C e C' são limites para esse diagrama, eles são isomorfos (enquanto objetos em $\mathcal{C}$).*

Prova. De início, temos que $1_C : C \rightarrow C$ é o morfismo, único, $p : C \rightarrow C$ tal que $c_i = c_i \circ p \forall i \in \mathcal{I}_0$ - valendo a afirmação análoga para C' e $1_{C'}$. Sejam $u : C' \rightarrow C$, $u' : C \rightarrow C'$ os morfismos, únicos tais que, para todo $i \in \mathcal{I}_0$, $c'_i = c_i \circ u$ e $c_i = c'_i \circ u'$. Isso nos diz que, para todo $i \in \mathcal{I}_0$,

$$\begin{cases} c_i = c_i \circ (u \circ u') \\ c'_i = c'_i \circ (u' \circ u) \end{cases} \quad (3.5)$$

e portanto, pelo que foi dito no começo da prova, $u \circ u' = 1_C$, $u' \circ u = 1_{C'}$, então $u' = u^{-1}$ e assim C e C' são objetos isomorfos em $\mathcal{C}$. ■

Muitas das definições importantes em teoria das categorias são limites para um “tipo” particular de diagrama. Introduziremos agora as mais fundamentais, sendo que a maior parte delas será importante para nós. Exemplificaremos essas construções em **Sets** pois o conhecimento desse caso concreto é fundamental para a compreensão dessas construções no “topos da mecânica quântica”, que é um topos de pré-feixes - um pré-feixe é um funtor contravariante (definição 28) cujo codomínio é **Sets**.

Numa categoria $\mathcal{C}$, tomemos uma coleção finita de objetos: $A_1, A_2, \dots, A_n$; incluindo as identidades obtemos uma categoria. Qualquer coleção de n morfismos tais que $f_i : C \rightarrow A_i, i \in \{1, \dots, n\}$ é um cone para esse diagrama. Um limite para esse diagrama é o que chamamos de produto finito.

Definição 18 (Produto) Sejam $A_i, i \in \{1, \dots, n\}$ objetos de uma categoria $\mathcal{C}$. Um produto dessa coleção é uma família de morfismos $\pi_i : P \rightarrow A_i, i \in \{1, \dots, n\}$, que chamamos de projetores, tais que, para qualquer outra família $f_i : C \rightarrow A_i, i \in \{1, \dots, n\}$ existe, e é único, um morfismo $u : C \rightarrow P$ satisfazendo $f_i = \pi_i \circ u \forall i \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, tal que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad u \quad} & C \\ & \searrow \pi_i & \downarrow f_i \\ & & A_i \end{array}$$

Se $n = 2$, a comutatividade dos dois diagramas equivale à comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow f_1 & \downarrow u & \searrow f_2 & \\ A_1 & \xleftarrow{\pi_1} & P & \xrightarrow{\pi_2} & A_2 \end{array}$$

Às vezes nos referiremos ao caso $n = 2$ dizendo que se trata de um produto binário. Geralmente vamos representar o domínio do produto de $A_1, \dots, A_n$ por $\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i$; no caso binário, escrevemos $A_1 \times A_2$ ou $A_2 \times A_1$. O diagrama acima, para o caso $n = 2$, é o que chamamos de diagrama do produto. Chamamos de “categoria com produtos” uma categoria em que existe um produto para toda coleção finita de objetos.

Para fixar ideias, discutiremos agora o caso $n = 2$ em **Sets**. Sejam A_1 e A_2 conjuntos e tomemos o produto cartesiano $A_1 \times A_2$. Seja $\pi_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i, i \in \{1, 2\}$, a projeção $\pi_i((a_1, a_2)) \doteq a_i \forall (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. Se C é conjunto, $u : C \rightarrow A_1 \times A_2$ se, e só se, existem $u_i : C \rightarrow A_i, i \in \{1, 2\}$, tais que $u(c) = (u_1(c), u_2(c)) \forall c \in C$. Assim, dadas $f_1 : C \rightarrow A_1, f_2 : C \rightarrow A_2$, é fácil ver que a única função $u : C \rightarrow A_1 \times A_2$ tal que $f_1 = \pi_1 \circ u$ e $f_2 = \pi_2 \circ u$ é $u(c) \doteq (f_1(c), f_2(c)) \forall c \in C$. Então, em **Sets**, o produto cartesiano de dois conjuntos A e B é um produto no sentido da definição acima. É fácil ver que isso vale para uma coleção de n objetos.

Lema 19 Em sets, o produto cartesiano é produto no sentido da definição 18.

Se A_1 e A_2 forem espaços topológicos, seja $A_1 \times A_2$ o produto cartesiano munido da topologia produto (se $\tau_i, i \in \{1, 2\}$, é a topologia de A_i , uma base da topologia de $A_1 \times A_2$ é o conjunto $\{U_1 \times U_2, U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$, ou seja, todo aberto de $A_1 \times A_2$ é da forma $\cup_{i \in I} U_1^{(i)} \times U_2^{(i)}$, I conjunto). Para que os argumentos acima impliquem que $A_1 \times A_2$ é produto de A_1 e A_2 em **Top**, precisamos mostrar que, na notação acima, $C \ni c \mapsto (f_1(c), f_2(c)) \doteq f(c) \in A_1 \times A_2$ é função contínua quando f_1 e f_2 o forem - esse será o morfismo, único, tal que o diagrama comuta. Para isso, vamos mostrar que, para qualquer aberto O de $A_1 \times A_2$, $f^{-1}(O)$ é um aberto de C e para isso é suficiente mostrarmos que a pré-imagem de qualquer aberto básico de $A_1 \times A_2$ é um aberto de C já que pré imagens preservam uniões. Seja então $O_1 \times O_2 \subset A_1 \times A_2$, $O_i \in \tau_i$, $i \in \{1, 2\}$. Temos $f^{-1}(O_1 \times O_2) = \{c \in C | f_1(c) \in O_1, f_2(c) \in O_2\} = f_1^{-1}(O_1) \cap f_2^{-1}(O_2)$; como f_1 e f_2 são contínuas, $f_i^{-1}(O_i)$, $i \in \{1, 2\}$, são abertos em C e portanto $f^{-1}(O_1 \times O_2)$ também o é. Em resumo, em **Top**, o produto cartesiano munido da topologia produto é um produto categorial. Em um poset, para que um objeto $A \times B$ seja produto dos objetos A e B é necessário que $A \times B \leq A$, $A \times B \leq B$ e que, para qualquer objeto C tal que $C \leq A$ e $C \leq B$, tenhamos $C \leq A \times B$, ou seja, o produto, quando existe, é, dentre os elementos menores ou iguais a A e B , o maior, ou seja, é o ínfimo do conjunto $\{A, B\}$; se $A = B$, $A \times A = A$. Para estruturas algébricas (como grupos, anéis e espaços vetoriais), um modo de se obter o produto cartesiano (no sentido acima) de duas estruturas é tomar o produto cartesiano conjuntista e definir as operações ponto a ponto.

Também é muito importante a noção de **produto de morfismos** numa categoria. Sem A_1 e A_2 objetos numa categoria e suponhamos que exista um produto para eles; sejam $f_i : C \rightarrow A_i$, $i \in \{1, 2\}$ morfismos. Vamos denotar por (f_1, f_2) o morfismo $(f_1, f_2) : C \rightarrow A_1 \times A_2$, único, tal que o diagrama do produto comuta. A definição de produto numa categoria nos diz que, assim como em **Sets**, uma função $f : C \rightarrow A_1 \times A_2$ é dada, de modo único, por componentes $f_i : C \rightarrow A_i$, $i \in \{1, 2\}$. De fato, dada $f : C \rightarrow A_1 \times A_2$, temos $f_1 \doteq \pi_1 \circ f$, $f_2 \doteq \pi_2 \circ f$, sendo que, trivialmente, f é o morfismo, único, tal que o diagrama do produto comuta para essas funções f_1, f_2 ; é igualmente trivial que se existem $g_i : C \rightarrow A_i$, $i \in \{1, 2\}$ tais que $f = (g_1, g_2)$ (o morfismo único tal que o diagrama do produto comuta para esse par de morfismos), então $g_i = f_i$, $i \in \{1, 2\}$ já que $g_i = \pi_i \circ f = f_i$; enfim, para $f : C \rightarrow A_1 \times A_2$ existem, e são únicos, morfismos $f_i : C \rightarrow A_i$ tais que $f = (f_1, f_2)$. Temos a seguinte definição

Definição 20 *Sejam A_1, A_2 objetos numa categoria $\mathcal{C}$ e suponha que existe um produto para o*

par A_1, A_2 . Para um par de morfismos $f_i : C \rightarrow A_i, i \in \{1, 2\}$, denotamos por (f_1, f_2) o único morfismo de C a $A_1 \times A_2$ tal que o diagrama do produto comuta.

Definição 21 (produto de morfismos) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos binários e sejam $f_i : A_i \rightarrow B_i, i \in \{1, 2\}$ morfismos nessa categoria. Sejam $\pi_i^{(A)} : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$ e $\pi_i^{(B)} : B_1 \times B_2 \rightarrow B_i$ projetores. Definimos o “produto de f_1 e f_2 ”, que denotamos por $f_1 \times f_2$, como sendo o único morfismo de $B_1 \times B_2$ a $A_1 \times A_2$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccc} B_1 & \xleftarrow{\pi_1^{(B)}} & B_1 \times B_2 & \xrightarrow{\pi_2^{(B)}} & B_2 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_1 \times f_2 & & \downarrow f_2 \\ A_1 & \xleftarrow{\pi_1^{(A)}} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\pi_2^{(A)}} & A_2 \end{array}$$

É fácil ver que essa definição é consistente. De fato, basta notar que, na notação da definição 20, $f_1 \times f_2 = (f_1 \circ \pi_1^{(B)}, f_2 \circ \pi_2^{(B)})$.

Introduziremos agora a noção de equalizador, que é o limite para um diagrama composto por um par de morfismos paralelos $f, g : A \rightarrow B$ (e as identidades 1_A e 1_B).

Definição 22 (Equalizador) Sejam $f, g : A \rightarrow B$ morfismos numa categoria. Um equalizador de f e g é um morfismo $e : E \rightarrow A$ tal que $f \circ e = g \circ e$, e, mais que isso, se $e' : E' \rightarrow A$ também satisfaz $f \circ e' = g \circ e'$ existe, e é único, um morfismo $u : E' \rightarrow E$ tal que $e' = e \circ u$. Em resumo, um equalizador de f e g é um morfismo $e : E \rightarrow A$ tal que $f \circ e = g \circ e$, para qualquer $e' : E' \rightarrow A$ satisfazendo essa mesma propriedade, existe, e é único, morfismo $u : E' \rightarrow E$ fazendo o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B \\ \uparrow u & & \nearrow e' & & \\ E' & & & & \end{array}$$

Vamos justificar a definição. Tomemos um par de morfismos paralelos $f, g : A \rightarrow B$. Um cone para esse diagrama é um par de morfismos $c_A : C \rightarrow A, c_B : C \rightarrow B$ tal que

$f \circ c_A = c_B = c_A \circ g$. Assim, um cone para esse diagrama é determinado de maneira única por um morfismo $c_A : C \rightarrow A$ tal que $f \circ c_A = g \circ c_A$. Além disso, se para qualquer outro cone C' existir, e for único, um morfismo $u : C' \rightarrow C$ tal que $c'_A = c_A \circ u$, temos $c'_B = f \circ c'_A = f \circ (c_A \circ u) = (f \circ c_A) \circ u = c_B \circ u$. Assim, para que o cone C seja limite para esse diagrama é suficiente (e necessário) que exista, para cada cone C' , um morfismo $u : C' \rightarrow C$ tal que $c'_A = c_A \circ u$ - e o cone C' é dado, de modo único pelo morfismo $c'_A : C' \rightarrow A$. Em resumo, um limite para um par de morfismos paralelos pode ser caracterizado por um único morfismo (assim como qualquer cone para esse diagrama) e chamamos tal limite de equalizador.

É comum que se use a palavra equalizador para se referir também ao domínio de um equalizador.

Sejam $f, g : A \rightarrow B$ e $h : C \rightarrow A$ funções entre conjuntos. Temos $f \circ h = g \circ h \Leftrightarrow (f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) \forall x \in C \Leftrightarrow f(h(x)) = g(h(x)) \forall x \in C \Leftrightarrow h(C) \subset E$, onde $E \doteq \{a \in A | f(a) = g(a)\}$. Seja $e : E \hookrightarrow A$ a inclusão. Supor que $h : C \rightarrow A$ satisfaz $f \circ h = g \circ h$ implica $h(C) \subset E$. Feito isso, é fácil ver que, em **Sets**, $e : E \hookrightarrow A$ é equalizador de f e g . Com efeito, $f \circ e = g \circ e$ por definição e se tomarmos $h : C \rightarrow A$ satisfazendo $f \circ h = g \circ h$, basta tomarmos $\tilde{h} : C \rightarrow E$ dada por $\tilde{h}(x) \doteq h(x) \forall x \in C$ que teremos $e \circ \tilde{h} = h$, e sendo $e : E \hookrightarrow A$ monomorfismo (pelo lema 4), temos que $\tilde{h}$ é o único morfismo u tal que $e \circ u = h$. Isso prova o seguinte lema;

Lema 23 *Sejam $f, g : A \rightarrow B$ morfismos paralelos em **Sets**. A inclusão $E \hookrightarrow A$, onde*

$$E \doteq \{a \in A | f(a) = g(a)\},$$

é um equalizador para esse par de morfismos.

Ainda na notação usada acima, se A for espaço topológico e tomarmos em E a topologia induzida de A , é trivial que a inclusão $e : E \rightarrow A$ é uma função contínua (de fato, se O é um aberto em A , $e^{-1}(O) = O \cap E$, que pertence à topologia de E por definição de topologia induzida), ou seja, $e : E \rightarrow A$ é um morfismo em **Top**; os mesmos argumentos usados no lema 4 nos dizem que que uma função contínua injetora é monomorfismo em **Top**, logo $e : E \rightarrow A$ é monomorfismo. Enfim, os mesmos argumentos apresentados acima para **Sets** nos dizem que, se $h : C \rightarrow A$ é morfismo em **Top** tal que $f \circ h = g \circ h$, existe, e é único (por e ser

mono), $\tilde{h} : A \rightarrow E$ tal que $e \circ \tilde{h} = h$. Em resumo, em **Top**, o equalizador de dois morfismos $f, g : A \rightarrow B$ também é dado pela inclusão $\{a \in A \mid f(a) = g(a)\} \hookrightarrow A$.

É fácil ver que dois morfismos paralelos $f, g : A \rightarrow B$ são iguais se, e somente se, 1_A é um equalizador para eles. Assim, num poset, os únicos equalizadores são as identidades.

Pullbacks, que aparecem em diversas áreas de matemáticas, são limites para diagramas do tipo $A \xrightarrow{f} E \xleftarrow{g} B$, ou seja, diagramas que, “a menos de identidades”, contêm apenas dois morfismos cujos codomínios são o mesmo objeto - note que o caso de dois morfismos paralelos tratado acima é um exemplo disso. Já apresentados esse tipo de diagrama como exemplo e vimos que um cone para ele é determinado de maneira única por um par de morfismos $A \xleftarrow{C_A} C \xrightarrow{C_A} B$ que faz o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{c_A} & B \\ \downarrow c_B & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$

É fácil ver que um cone é limite para esse diagrama se, e só se, para qualquer outro par $c'_A : P \rightarrow A, c'_B : P \rightarrow B$ tal que $f \circ c'_A = g \circ c'_B$, ou seja, para qualquer outro cone, existir, e for único, $u : P \rightarrow C$ tal que $c'_A = c_A \circ u, c'_B = c_B \circ u$. Isso nos leva à definição de Pullback.

Definição 24 (Pullback) Numa categoria $\mathcal{C}$, sejam $A \xrightarrow{f} E \xleftarrow{g} B$ morfismos. Um pullback de f e g é um par de morfismos $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ tais que $f \circ p_1 = g \circ p_2$ e, mais que isso, se tivermos $A \xleftarrow{q_1} Q \xrightarrow{q_2} B$ satisfazendo $f \circ q_1 = g \circ q_2$ existe, e é único, $u : Q \rightarrow P$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow^{q_2} & & \nearrow_{q_1} & \\ & & P & \xrightarrow{p_2} & B \\ & & \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$

Um **diagrama de pullback** é um diagrama comutativo formado pelo par de morfismos com mesmo codomínio $(f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C)$ e por um pullback para esse par - ou seja, é o quadrado do diagrama acima. Geralmente denotaremos por $A \times_E B$ o domínio de um pullback para um par de morfismos $A \rightarrow C \leftarrow B$. É comum dizer também que p_1 é “pullback de g através de f ”

Sejam $f : A_1 \rightarrow E, g : A_2 \rightarrow E$ funções e $P \doteq \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid f(a_1) = g(a_2)\}$. Sejam $p_i : P \rightarrow A_i, i \in \{1, 2\}$, dadas por $p_i(a_1, a_2) \doteq a_i \ \forall (a_1, a_2) \in P$. Temos, para todo $(a_1, a_2) \in P$, $(f \circ p_1)(a_1, a_2) = f(p_1(a_1, a_2)) = f(a_1) = g(a_2) = g(p_2(a_1, a_2)) = (g \circ p_2)(a_1, a_2)$, logo $f \circ p_1 = g \circ p_2$. Além disso, para funções $q_1 : Q \rightarrow A_1, q_2 : Q \rightarrow A_2$ temos $f \circ q_1 = g \circ q_2 \Leftrightarrow f(q_1(x)) = g(q_2(x)) \ \forall x \in Q \Leftrightarrow (q_1(x), q_2(x)) \in P \ \forall x \in Q$, e então podemos definir $(q_1, q_2) : Q \rightarrow P$ por $(q_1, q_2)(x) \doteq (q_1(x), q_2(x)) \ \forall x \in Q$. É imediato que $q_1 = p_1 \circ (q_1, q_2), q_2 = p_2 \circ (q_1, q_2)$ e, além disso, (q_1, q_2) é a única função $Q \rightarrow P$ que satisfaz isso (conforme já argumentamos). Disso concluímos o seguinte

Lema 25 *Em Sets, um pullback de morfismos $A \xrightarrow{f} E \xleftarrow{g} B$ é o par de “projeções” $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ do conjunto*

$$P \doteq \{(a, b) \in A \times B; f(a) = g(b)\}.$$

Para que esses mesmos argumentos nos garantam que, em **Top**, o pullback seja também dado pelo par de projeções $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ do conjunto $P \doteq \{(a, b) \in A \times B; f(a) = g(b)\}$ basta tomarmos q_1, q_2 como funções contínuas e mostrarmos que p_1, p_2 e (q_1, q_2) são contínuas (a unicidade de (q_1, q_2) não depende de propriedades topológicas). É trivial que p_1 e p_2 são contínuas e a continuidade de (q_1, q_2) é consequência da continuidade de q_1 e q_2 , pelos mesmos argumentos que utilizamos quando mostramos que o produto cartesiano, munido da topologia produto, era um produto de espaços topológicos em **Top**.

O seguinte lema será importante na discussão sobre classificador de subobjetos.

Lema 26 *Seja o seguinte diagrama um diagrama de pullback numa categoria*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad f' \quad} & B \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{\quad f \quad} & E \end{array}$$

Então, se g é monomorfismo, g' também o é, ou seja, o pullback de g por f é mono se g o é.

Prova. Seja g monomorfismo e tomemos um par de morfismos paralelos $u_1, u_2 : Q \rightarrow P$ tais que $g' \circ u_1 = g' \circ u_2$. Primeiro, pela associatividade da composição, o par $q_A \doteq g' \circ u_1$, $q_B \doteq f' \circ u_1$ é cone para f e g ; então, temos um diagrama de pullback, existe, e é único, $u : Q \rightarrow P$ tal que $g' \circ u = q_A \doteq g' \circ p_1$ e $f' \circ u = q_B \doteq f' \circ u_1$. Tomando $u = u_1$, esse par de igualdades é trivialmente satisfeito; tomando $u = u_2$, a igualdade $f' \circ u = f' \circ u_1$ é satisfeita por hipótese; se mostrarmos que, para $u = u_2$, vale que $f' \circ u = f' \circ u_1$, a unicidade de tal $u : Q \rightarrow P$ nos dirá que $u_2 = u_1$. Usando o fato de g ser mono, temos que $f' \circ u_1 = f' \circ u_2 \Leftrightarrow g \circ f' \circ u_1 = g \circ f' \circ u_2 \Leftrightarrow f \circ g' \circ u_1 = f \circ g' \circ u_2$, e sabemos que essa última igualdade é verdadeira pois $g' \circ u_1 = g' \circ u_2$ por hipótese ■

Sejam $f : B \rightarrow A$ e $g, h : C \rightarrow B$ morfismos numa categoria. Afirmar que $f \circ g = f \circ h$ equivale a afirmar que o par g, h é cone para f, f . Vamos mostrar que podemos usar pullbacks para caracterizar monomorfismos; isso será importante na discussão sobre categoria de pré-feixes.

Lema 27 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) *Um morfismo $f : A \rightarrow B$ é mono*
- (b) *O seguinte diagrama é diagrama de pullback*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad 1_A \quad} & A \\ 1_A \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \end{array}$$

Prova. Primeiro, supondo f mono, temos $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h \Leftrightarrow 1_A \circ g = g = h = 1_A \circ f$, logo $g (= h)$ é o único morfismo de C a A que faz o diagrama da definição 24 comutar. Por outro lado, se $1_A, 1_A$ é pullback para f, f , dados $f, g : A \rightarrow A$ tais que $f \circ g = f \circ h$, existe, e é único, $u : C \rightarrow A$ tal que $g = 1_A \circ u = u$ e $h = 1_A \circ u = u$, logo $g = u = h$. ■

Como já dissemos, a categoria de interesse na teoria quântica em topoi é uma categoria de pré-feixes e um pré-feixe é um exemplo de funtor contravariante. Um funtor contravariante é um funtor que “inverte morfismos”: se $f : A \rightarrow B$, $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$. A definição é a seguinte.

Definição 28 (Funtor contravariante) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias. Chamamos de funtor contravariante de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ um par (F_0, F_1) de funções $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$, $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ tais que*

$$(a) \quad F_1(f) : F_0(B) \rightarrow F_0(A) \text{ para todo morfismo } f \in \mathcal{C}_1$$

$$(b) \quad F_1(1_A) = 1_{F_0(A)} \text{ para todo } A \in \mathcal{C}_0$$

$$(c) \quad F_1(g \circ f) = F_1(f) \circ F_1(g) \text{ se } \text{cod}(f) = \text{dom}(g).$$

Como no caso covariante, vamos quase sempre escrever $F_0 \equiv F \equiv F_1$.

Podemos usar a noção de categoria oposta para relacionar as duas definições. Se $\mathcal{C}$ é categoria, a categoria oposta de $\mathcal{C}$ é a categoria $\mathcal{C}^{op}$ que obtemos ao “inverter os morfismos de $\mathcal{C}$ ”. Mais precisamente, temos $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0^{op}$ e existe uma bijeção entre $\mathcal{C}(A, B)$ e $\mathcal{C}^{op}(B, A)$ para todo par $A, B \in \mathcal{C}_0$. Uma maneira simples de se obter a categoria oposta é “trocar as funções domínio e codomínio de $\mathcal{C}$ ”: escrevemos $\widetilde{\text{dom}} \doteq \text{cod}$ e $\widetilde{\text{cod}} \doteq \text{dom}$ e então definimos a categoria oposta por $\mathcal{C}^{op} \doteq (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \widetilde{\text{dom}}, \widetilde{\text{cod}}, \circ, 1)$. De maneira mais explícita, se $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ temos em $\mathcal{C}^{op}$ um morfismo $f^* : B \rightarrow A$. É importante notar que as identidades são preservadas, ou seja, $1_A^* = 1_A$. É trivial que as associações $\mathcal{C}_0^{op} \ni A \mapsto A \in \mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_1^{op} \ni f^* \mapsto f \in \mathcal{C}_1$ determinam um funtor contravariante, que denotamos por $*$. Usando esse funtor é fácil ver que há uma simples relação biunívoca entre funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ e funtores covariantes de $\mathcal{C}^{op}$ a $\mathcal{D}$ dada pela associação $F \mapsto F \circ *$ (a composição está bem definida, como discutiremos abaixo). Há também, claro, uma relação biunívoca entre funtores covariantes de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ e funtores contravariantes de $\mathcal{C}^{op}$ a $\mathcal{D}$. Isso é útil pois há muitas construções importantes que podem ser relacionadas dessa maneira: dizemos nesse caso que uma construção é o dual da outra. Por exemplo, temos as dualidades “monomorfismo e epimorfismo”, “produto e coproduto”, “pullback e pushout”, “equalizador e coequalizador”. Mais precisamente, se $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ é um diagrama, o “diagrama dual” ou “codiagrama de D ” é definido como sendo o diagrama de $\mathcal{C}$ univocamente associado a $D \circ *$; introduzimos também as noções de cocone (o dual de um cone) e colimite e temos, por exemplo, que um pushout é o diagrama dual de um diagrama de pullback. Tudo o que provamos para certo funtor covariante F tem sua versão “dual” para o funtor contravariante a ele associado - mais precisamente, o funtor contravariante associado a $F \circ *$ pela bijeção mencionada - e vice-versa.

Já definimos composição de funtores covariantes e, de maneira análoga, ou seja, compondo as funções do par de funções entre classes que, a rigor, define funtor, podemos definir

composição de funtores contravariantes. Note porém que a composição de dois funtores contravariantes é um funtor covariante. De fato, se $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ são funtores contravariantes temos $(G \circ F)(A) \doteq G(F(A))$ para $A \in \mathcal{C}_0$ e, para $f \in \mathcal{C}_0$,

$$(G \circ F)(f : A \rightarrow B) \doteq G(F(f : A \rightarrow B)) \quad (3.6)$$

$$= G(F(f) : F(B) \rightarrow F(A)) \quad (3.7)$$

$$= G(F(f)) : G(F(A)) \rightarrow G(F(B)) \quad (3.8)$$

$$= (G \circ F)(f) : (G \circ F)(A) \rightarrow (G \circ F)(B). \quad (3.9)$$

Podemos também compor funtores covariantes com funtores contravariantes, em qualquer ordem, como no caso $F \circ *$ citado acima. A definição, novamente, é a mesma (componente a componente). É fácil ver que a composição de um funtor covariante com um funtor contravariante é um funtor contravariante.

Definição 29 (Pré-feixe) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um pré-feixe em $\mathcal{C}$ é um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$.*

Às vezes, quando quisermos afirmar que um funtor F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é contravariante, diremos que temos um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$. Essa notação, muito comum, se justifica pelo que foi discutido acima. Assim, podemos dizer que um pré-feixe em $\mathcal{C}$ é um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$.

É natural que definamos o seguinte funtor, que será de grande importância na “categoria dos pré-feixes”.

Definição 30 (Funtor Hom contravariante) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena e X um objeto de $\mathcal{C}$. Chamamos de funtor Hom contravariante (associado a X) o funtor contravariante $\mathcal{C}(-, X) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ que*

(a) *A cada objeto A de $\mathcal{C}$ associa o conjunto $\mathcal{C}(A, X)$*

(b) *A cada morfismo $f : A \rightarrow B$ de $\mathcal{C}$ associa a função $\mathcal{C}(f, X) : \mathcal{C}(B, X) \rightarrow \mathcal{C}(A, X)$ dada por $\mathcal{C}(f, X)(x) \doteq x \circ f \ \forall x \in \mathcal{C}(X, B)$.*

Para ilustrar:

É fácil ver que $\mathcal{C}(-, X)$ é o funtor contravariante de $\mathcal{C}$ a **Sets** univocamente associado a $\mathcal{C}(X, -) \circ *$.

3.2 Subobjeto e classificador de subobjetos

As noções de subobjeto e classificador de subobjetos serão fundamentais na teoria quântica em topoi. Todo topos possui classificador de subobjetos e isso é uma das coisas que torna a definição tão útil.

Seja C um objeto numa categoria $\mathcal{C}$. O conceito de subobjeto pode ser entendido como uma generalização da ideia de subconjunto. Notemos que, em **Sets**, um monomorfismo (função injetora) $m : A \rightarrow C$ determina um isomorfismo entre A e $m(A)$. Além disso, se para outro monomorfismo $m' : A' \rightarrow C$ tivermos $m'(A') = m(A)$ então, trivialmente, $A \cong A'$. Seja $\mathcal{M}(C)$ a coleção de todos os monomorfismos em **Sets** cujo codomínio é C . É trivial que a regra $m \sim m' \Leftrightarrow m(\text{dom}(m)) = m'(\text{dom}(m'))$ define uma relação de equivalência nesse conjunto e portanto os conjuntos do tipo $[m] = \{m' \in \mathcal{M}(C); m'(\text{dom}(m')) = m(\text{dom}(m))\}$ são classes de equivalência. Em resumo, associamos a um subconjunto C' de C a coleção dos monomorfismos que têm C' como imagem. Há claramente uma bijeção entre o conjunto das partes de C e o conjunto das classes de equivalência definidas acima. Enfim, em **Sets** um subconjunto de C pode ser entendido como uma classe de equivalência de monomorfismos que o têm como imagem. Vamos usar essa ideia para definir subobjeto numa categoria qualquer.

Bom, acima definimos uma relação de equivalência em $\mathcal{M}(C)$ - a coleção dos monomorfismos de **Sets** cujo codomínio é C - usando a regra $m \sim m' \Leftrightarrow m(\text{dom}(m)) = m'(\text{dom}(m'))$. É fácil traduzir isso fazendo referência apenas a elementos categoriais. Com efeito, se em **Sets** $m : M \rightarrow C$ e $m' : M' \rightarrow C$ são monomorfismos, então $m(M) = m'(M')$ se, e só se, existe um isomorfismo $i : M \rightarrow M'$ tal que $f = g \circ i$. Assim, numa categoria $\mathcal{C}$ qualquer, tomando a classe $\mathcal{M}(C)$ dos monomorfismos cujo codomínio é C , podemos definir uma relação

de equivalência nessa classe de maneira análoga, ou seja, dois monomorfismos $m : M \rightarrow C$, $m' : M' \rightarrow C$ são equivalentes se, e só se, existe um iso $i : M \rightarrow M'$ tal que $m = m' \circ i$. Como a composição de isomorfismos é isomorfismo, é fácil ver que isso de fato define uma relação de equivalência em $\mathcal{M}(C)$. Um subobjeto de C é uma classe de equivalência definida por essa relação de equivalência.

Definição 31 (Subobjeto) *Seja $\mathcal{C}$ categoria e $C \in \mathcal{C}_0$. Um subobjeto de C é uma classe de equivalência determinada pela seguinte relação de equivalência: dois monomorfismos $m : M \rightarrow C$ e $m' : M' \rightarrow C$ são equivalentes se, e só se, existe um isomorfismo $i : M \rightarrow M'$ fazendo o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & M' \\ & \searrow m & \swarrow m' \\ & C & \end{array}$$

Vamos denotar por $Sub(C)$ ou $Sub_{\mathcal{C}}(C)$ a coleção de todos os subobjetos de C . É comum chamarmos um monomorfismo $m : dom(m) \rightarrow C$ também de subobjeto de C .

Em **Sets**, todo subobjeto de C possui um, e apenas um, elemento que é uma função inclusão: trata-se da inclusão da imagem que todos esses morfismos têm em comum. Chamamos esse elemento de **representante principal** do subobjeto. Essa noção será importante na categoria dos pré-feixes; veremos que lá todo subobjeto terá um, e somente um, representante cujas componentes serão funções inclusão. Isso ficará claro mais adiante.

Assim como generalizamos a noção de subconjunto é útil generalizarmos a noção de elemento. Em **Sets** já vimos que o objeto terminal é qualquer conjunto unitário, e assim um elemento de C pode ser entendido como um morfismo $1 \rightarrow C$. Definimos.

Definição 32 (Elemento global de um objeto) *Seja $\mathcal{C}$ categoria com objeto terminal 1 e C objeto de $\mathcal{C}$. Um elemento global de C , caso exista, é um morfismo $1 \rightarrow C$.*

Nesse caso seria redundante tomar classes de equivalência. De fato, sabemos que objetos terminais são únicos a menos de isomorfismos. Quando escrevemos $1 \rightarrow C$ já estamos tratando como equivalentes morfismos $1 \xrightarrow{f} C$ e $1' \xrightarrow{g} C$ tais que $g \circ ! = f$, onde $! : 1 \dashrightarrow 1'$. Note que, tomando $f : 1 \rightarrow C$, se $g : A \rightarrow C$ é equivalente a f no sentido da equivalência que define

subobjetos, então A é isomorfo ao objeto terminal 1 , e isso faz de A um objeto terminal - isso se prova facilmente pela definição de objeto terminal.

Introduziremos agora a noção de classificador de subobjetos, e novamente tomaremos **Sets** como exemplo protótipo. Seja Ω um conjunto de dois elementos (elementos que vamos representar por $\top$ e $\perp$). Para um conjunto X qualquer, existe uma bijeção entre $\mathcal{P}(X)$ e $\text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, \Omega)$, que se deve ao fato de que, se $f : X \rightarrow \Omega$, f é função característica para um, e somente um, subconjunto de X . Temos então que $\mathcal{P}(X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, \Omega)$ e que $\text{Sub}_{\mathbf{Sets}}(X) \cong \mathcal{P}(X)$, logo $\text{Sub}_{\mathbf{Sets}}(X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, \Omega)$, e é fácil ver que essa bijeção é dada por $\text{Sub}_{\mathbf{Sets}}(X) \ni [i_A] \mapsto \chi_A \in \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, \Omega)$, onde i_A é o representante principal de A e χ_A é a função característica de A . Ainda em **Sets**, tomemos um monomorfismo qualquer $m : M \rightarrow X$ e denotemos por A sua imagem: $A \equiv \text{im}(m) \subset X$. Para qualquer conjunto $B \subset X$ tal que $A \subset B$, temos que $\chi_B \circ m = \mathbb{1}_M$, onde $\mathbb{1}_M : M \rightarrow \Omega$ é dado por $\mathbb{1}_M(x) \doteq \top \forall x \in M$. Definindo o morfismo $t : 1 \rightarrow \Omega$ por $t(*) \doteq \top$ ($1 = \{*\}$), qualquer que seja o conjunto M , podemos escrever $\mathbb{1}_M = t \circ t_M$, onde $t_M : M \rightarrow 1$ (lembre que existe, e é único, um morfismo de M a 1). Introduzindo esse morfismo, a afirmação de que $\chi_B \circ m = \mathbb{1}_M$ equivale à comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad t_M \quad} & 1 \\ \downarrow m & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{\quad \chi_B \quad} & \Omega \end{array}$$

Vamos agora mostrar que o diagrama acima é um diagrama de pullback se, e somente se, $B = \text{im}(m)$. Desse modo, a relação entre o subobjeto $[m]$ e a função característica $\chi_{\text{im}(m)}$, que determina o isomorfismo $\text{Sub}_{\mathbf{Sets}}(X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, \Omega)$, será caracterizada pelo fato desse diagrama ser diagrama de pullback; introduziremos então, numa categoria qualquer, um objeto Ω (classificador de subobjetos) e um morfismo $1 \rightarrow \Omega$ (morfismo *true*) que, quando existirem, cumprirão esse papel de “classificar subobjetos” através de “morfismos característicos”, e consequentemente estabelecerão uma bijeção $\text{Sub}(X) \cong \text{Hom}(X, \Omega)$. Bom, voltemos a **Sets** e suponhamos que $B = A(\equiv \text{im}(m))$; sejam $p : P \rightarrow X$, $q : P \rightarrow 1$ morfismos tais que $\chi_A \circ p = t \circ q$; temos $(t \circ q)(x) = \top \forall x \in P$ e portanto $\chi_A(p(x)) = \top \forall x \in P$, ou seja, $\text{im}(p) \subset A$. Podemos definir $\tilde{p} : P \rightarrow M$ por $\tilde{p}(x) \doteq m^{-1}(p(x)) \forall x \in P$, onde $m^{-1}(p(x))$ é

a pré-imagem de m no ponto $p(x)$ - note que aqui estamos usando o fato de que $m : M \rightarrow X$ é monomorfismo. É imediato, do fato de 1 ser objeto terminal, que $q = t_M \circ \tilde{p}$; mais que isso, $(m \circ \tilde{p})(x) = m(m^{-1}(p(x))) = p(x) \forall x \in Q$ e então $m \circ \tilde{p} = p$; tal $\tilde{p} : P \rightarrow M$ que faz o diagrama comutar é único por definição: tomando $p' : P \rightarrow M$ com essa mesma propriedade, temos $m(p'(x)) = p(x) \forall x \in P$, logo $m^{-1}(m(p'(x))) = m^{-1}(p(x))$ e assim $p'(x) = m^{-1}(p(x)) = \tilde{p}(x) \forall x \in P$. Enfim, mostramos que, se $B = A$, o diagrama acima é, de fato, diagrama de pullback. Se $A \not\subseteq B$, então o quadrado acima não será comutativo e, consequentemente, não será diagrama de pullback. Se $A \subsetneq B$, o quadrado comuta, porém tomando um conjunto de um elemento $P \equiv \{x\}$ e definindo $p : P \rightarrow X$ por $p(x) \doteq b$, onde $b \in B \setminus A$, (e $q : P \rightarrow 1$ é a única função de P em 1), temos que $t \circ q = \chi_B \circ p$, porém não existe $\tilde{p} : P \rightarrow X$ tal que $m \circ \tilde{p} = p$ e, consequentemente, o par m, t_M não pode ser pullback para t, χ_B . Em resumo, vimos que, dado um monomorfismo $m : M \rightarrow X$, existe, e é único, um morfismo $\chi_B : X \rightarrow \Omega$ tal que o diagrama acima é diagrama de pullback, e esse morfismo é $\chi_{im(m)}$, ou seja, a função característica da imagem de m . Finalmente, suponhamos que $m : M \rightarrow X$ não é monomorfismo. Os argumentos apresentados acima nos dizem que o diagrama comuta apenas se $B = A$ (quando mostramos que, quando $A \neq B$, o diagrama não era diagrama de pullback, não usamos o fato de m ser monomorfismo). Porém, se $m : M \rightarrow X$ não é monomorfismo, podemos tomar $a, b \in M$, $a \neq b$, tais que $m(a) = m(b)$ e definir $p : \{x\} \rightarrow X$ por $p(x) \doteq m(a)$ que teremos $\chi_A \circ p = t \circ q$ ($q : \{x\} \rightarrow 1$, $A \equiv im(m)$). Porém, tomando $p', p'' : \{x\} \rightarrow M$ dados por $p'(x) \doteq a$, $p''(x) \doteq b$, teremos que $m \circ p' = p = m \circ p''$ e, trivialmente, $t_M \circ p' = q = t_M \circ p''$, sendo que $p' \neq p''$; enfim, m, t_M não pode ser limite para o diagrama χ_B, t (já que encontramos outro cone P para esse diagrama no qual o morfismo $P \rightarrow M$ não é único), ou seja, se $m : M \rightarrow X$ não é monomorfismo, o diagrama acima não pode ser um diagrama de pullback.

Definição 33 (Classificador de subobjetos) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto terminal 1 . Um classificador de subobjetos nessa categoria é um objeto Ω tal que existe um morfismo $t : 1 \rightarrow \Omega$, que chamamos de “morfismo true”, com a seguinte propriedade: para qualquer monomorfismo $m : M \rightarrow X$, existe, e é único, um morfismo $u : X \rightarrow \Omega$ tal que o seguinte diagrama é diagrama de pullback*

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
\downarrow m & & \downarrow t \\
X & \xrightarrow{u} & \Omega
\end{array}$$

Note que t é um monomorfismo pois seu domínio é um objeto terminal. Vamos chamar, às vezes, de **morfismo característico** de M o morfismo u da definição acima, em referência ao caso particular de **Sets**, e denotá-la por χ_M - isso, claro, quando o domínio do monomorfismo for denotado por M .

Em **Sets** vimos que para qualquer objeto X vale o isomorfismo $Sub(X) \cong \mathcal{P}(X) \cong Hom(X, \Omega)$, onde Ω é um conjunto de dois elementos: trata-se da relação entre um subconjunto (de X), sua função característica e a função inclusão por ele definida. Na “linguagem” da teoria de categorias, o isomorfismo que nos interessa é $Sub(X) \cong Hom(X, \Omega)$. Vamos mostrar que esse isomorfismo se mantém verdadeiro numa categoria com classificador de subobjeto.

Lema 34 *Numa categoria com classificador de subobjetos (Ω) , dois monomorfismos $m : M \rightarrow X$, $m' : M' \rightarrow X$ são equivalentes no sentido da definição de subobjeto (definição 31) se, e só se, seus morfismos característicos são iguais. Isso garante o seguinte isomorfismo*

$$Sub(X) \cong \mathcal{C}(X, \Omega),$$

Prova. Bom, a definição de classificador nos fornece um modo de associarmos a cada monomorfismo $m : dom(m) \rightarrow X$ um único morfismo de $cod(m)$ a X ; se mostrarmos que monomorfismos equivalentes $m : M \rightarrow X$, $m' : M' \rightarrow X$ (no sentido da equivalência que usamos para definir subobjetos) são associados ao mesmo morfismo $u : X \rightarrow \Omega$, teremos bem definida uma função de $Sub(X)$ a $\mathcal{C}(X, \Omega)$. Seja $m : M \rightarrow X$ monomorfismo e $u : X \rightarrow \Omega$ a função característica de M , ou seja, o morfismo, único, que faz com que o diagrama da definição 33 seja diagrama de pullback; denotemos por $!$ o único morfismo de M a 1. Seja agora $m' : M' \rightarrow X$ monomorfismo equivalente a m e $h : M' \rightarrow M$ o isomorfismo tal que $m \circ h = m'$; temos que $u \circ m = t \circ ! \Rightarrow u \circ (m \circ h) = t \circ (! \circ h) \Leftrightarrow u \circ m' = t \circ (! \circ h)$. Escrevendo $!! \equiv ! \circ h$, isso mostra que o par $m', !!$ é cone para u, t ; o fato de h ser isomorfismo nos garante que, mais que cone, é pullback: tomando um cone $q : Q \rightarrow X$, $!!! : Q \rightarrow 1$ para u, t , temos que

existe, e é único, um isomorfismo $r : Q \rightarrow M$ tal que $q = m \circ r$, e como $m = m' \circ h^{-1}$, $q = m' \circ (h^{-1} \circ r)$; $\tilde{r} \doteq h^{-1} \circ r$ é um morfismo de Q a M' que satisfaz $q = m' \circ \tilde{r}$, $!!! = !! \circ \tilde{r}$. Por fim, a unicidade de r garante a unicidade de $\tilde{r}$: se tivermos um morfismo $\tilde{s} : Q \rightarrow M'$ tal que $q = m' \circ \tilde{s}$ e $!!! = !! \circ \tilde{s}$, então $s \doteq h \circ \tilde{s}$ satisfaz $q = m \circ s$ e $!!! = ! \circ s$, logo $s = r$, sendo que $s = r \rightarrow h \circ \tilde{s} = h \circ \tilde{r} \Rightarrow \tilde{s} = \tilde{r}$. Enfim, usando a definição de classificador de subobjetos, temos uma maneira canônica de definir, para $X \in \mathcal{C}_0$, uma função de $Sub(X)$ a $\mathcal{C}(X, \Omega)$: trata-se da função que associa ao subobjeto $[m]$ de X a função característica de $dom(m)$. Essa função é injetora pois se temos $m : M \rightarrow X, m' : M' \rightarrow X$ com a mesma função característica u , então existe, e é único, $u : M' \rightarrow M$ tal que $m' = m \circ u$ (não precisamos citar a outra componente pois a unicidade do morfismo $A \rightarrow 1$, sendo A objeto qualquer, garante que a comutatividade é sempre satisfeita), sendo que u é isomorfismo pois limites têm domínios isomorfos; enfim, se m e m' são componentes de pullbacks para o par t, u , $m \sim m'$ e $[m] = [m']$. Essa função é sobrejetora pois t é monomorfismo e porque a categoria possui limites finitos: se tivermos $u \in \mathcal{C}(X, \Omega)$, existe pullback para o par u, t , e, como t é monomorfismo, o morfismo desse pullback cujo codomínio é X será um monomorfismo, logo u será a função característica do subobjeto determinado por esse morfismo. ■

Disso podemos concluir que quando $\mathcal{C}$ (uma categoria com classificador de subobjetos) é localmente pequena, $Sub(X)$ é conjunto e consequentemente as classes de equivalência que o compõem são conjuntos, ou seja, os subobjetos de X são conjuntos. Chamamos de bem potenciada uma categoria em que $Sub(X)$ é conjunto para todo $X \in \mathcal{C}_0$. Então, uma categoria localmente pequena e com classificador de subobjetos é bem potenciada.

Em $Sub(X)$ podemos também definir uma relação de ordem parcial que generaliza a ideia de inclusão conjuntista. Com efeito, em **Sets**, temos que $A, B \subset X$ satisfazem $A \subset B$ se, e só se, existe uma função $f : A \rightarrow B$ tal que $i_B \circ f = i_A$, onde $i_A : A \rightarrow X$ e $i_B : B \rightarrow X$ são funções inclusão; mais que isso, tal f necessariamente é um monomorfismo em **Sets**. Numa categoria qualquer dizemos que $[m] \preceq [m']$, onde $[m]$ e $[m']$ são subobjetos de $X \in \mathcal{C}_0$, se, e só se, existe um monomorfismo $i : dom(m) \rightarrow dom(m')$ tal que $m' \circ i = m$. É importante notar que isso é de fato ordem parcial, e não apenas pré-ordem, em $Sub(X)$, ou seja, que se $[m] \preceq [m']$ e $[m'] \preceq [m]$ então $[m] = [m']$. Essa ordem parcial de subobjetos será usada quando formos definir a “álgebra de Heyting dos subobjetos clopen do pré-feixe espectral”

3.3 Objeto exponencial

A noção de objeto exponencial é importante para a definição de topos. Sejam A, B, C conjuntos e tomemos uma função $f : A \times B \rightarrow C$; fixando $x \in A$, podemos definir $f_x : B \rightarrow C$ por $f_x(y) \doteq f(x, y) \forall y \in B$ e assim essa função $f : A \times B \rightarrow C$ nos dá o mapa $\tilde{f} : A \rightarrow C^B$, $\tilde{f}(x) \doteq f_x \forall x \in A$, sendo que C^B é o conjunto das funções $B \rightarrow C$. Vamos mostrar que $\text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A \times B, C) \ni f \mapsto \tilde{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A, C^B)$ é uma bijeção. Primeiro, se $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A \times B, C)$, temos

$$\tilde{f} = \tilde{g} \Leftrightarrow \forall x \in A (f_x = g_x) \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in A \forall y \in B (f_x(y) = g_x(y)) \quad (3.11)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in A \times B (f(x, y) = g(x, y)) \quad (3.12)$$

$$\Leftrightarrow f = g \quad (3.13)$$

e então tal função é injetora. Seja agora $\phi : A \rightarrow C^B$; temos $\phi(x) : B \rightarrow C$ para qualquer $x \in A$. Definindo $f : A \times B \rightarrow C$ por $f(x, y) \doteq \phi(x)(y) \forall (x, y) \in A \times B$, para $x \in A$ temos que $\tilde{f}(x)(y) = f_x(y) = f(x, y) = \phi(x)(y) \forall y \in B$, logo $\phi(x) = f_x$ e assim $\phi = \tilde{f}$. Isso mostra que a função é sobrejetora e portanto temos a bijeção

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A \times B, C) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A, C^B).$$

Definamos uma função $ev : C^B \times B \rightarrow C$ (função avaliação) por $ev(g, y) \doteq g(y) \forall (g, y) \in C^B \times B$. Vamos usá-la para relacionar, através de um diagrama, $f, \tilde{f}, A \times B, C, C^B$. Tomando uma função do tipo $f_x \in C^B$ (na notação acima), temos $ev(f_x, y) = f_x(y) = f(x, y) \in C$. Tomando $\tilde{f} \times 1_B : A \times B \rightarrow C^B \times B$ dada por $\tilde{f} \times 1_B(x, y) \doteq (\tilde{f}(x), y) \forall (x, y) \in A \times B$ (note que esse é o produto de funções que definimos para um categoria), temos $ev \circ \tilde{f} \times 1_B = f$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} C^B \times B & \xrightarrow{ev} & C \\ \tilde{f} \times 1_B \uparrow & \nearrow f & \\ A \times B & & \end{array}$$

A função ev é tal que, para qualquer $f \in Hom_{\mathbf{Sets}}(A \times B, C)$, $\tilde{f} : A \rightarrow C^B$ é a função, única, que faz o diagrama acima comutar (a rigor, $\tilde{f}$ é a única função $\tilde{g} : A \rightarrow C^B$ tal que $\tilde{g} \times 1_B : A \times B \rightarrow C^B \times B$ faz o diagrama comutar). A unicidade é consequência do isomorfismo $Hom_{\mathbf{Sets}}(A \times B, C) \cong Hom_{\mathbf{Sets}}(A, C^B)$; de fato, se $\tilde{g} : A \rightarrow C^B$ faz o diagrama comutar temos, para $(x, y) \in A \times B$ qualquer, $f(x, y) = ev(\tilde{g}(x), y) = g_x(y) = g(x, y)$ e então $g = f$. Em resumo, se B, C são conjuntos, $ev : C^B \times B \rightarrow C$ é tal que, para qualquer função $f : A \times B \rightarrow C$, onde A é conjunto qualquer, a função $\tilde{f} : A \rightarrow C^B$ é a única função $\tilde{g} : A \rightarrow C^B$ tal que $\tilde{g} \times 1_B$ faz o diagrama acima comutar.

Definição 35 (Exponencial) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos binários (ou seja, uma categoria em que existe um produto binário para todo par de objetos). Diremos que um objeto X é um objeto exponencial se existir um morfismo $ev : X \times B \rightarrow C$ (B e C são objetos quaisquer) tal que, para todo morfismo $f : A \times B \rightarrow C$, onde A é objeto qualquer, existe, e é único, $\tilde{f} : A \rightarrow X$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} X \times B & \xrightarrow{ev} & C \\ \tilde{f} \times 1_B \uparrow & \nearrow f & \\ A \times B & & \end{array}$$

Denotaremos por C^B um objeto exponencial X tal que $ev : X \times B \rightarrow C$. O morfismo ev é denominado morfismo avaliação e $\tilde{f}$ é denominado transposto de f . Para fixar ideias, podemos fazer a seguinte analogia com a ideia de cone limite: dados objetos B, C , $ev : C^B \times B \rightarrow C$ é uma especie de limite dentre os morfismos do tipo $f : A \times B \rightarrow C$, onde $A \in \mathcal{C}_0$ é um objeto qualquer, pois ev é um morfismo desse tipo e, além disso, para qualquer outro morfismo f desse tipo, existe, e é único, um morfismo $\tilde{h} : A \rightarrow C^B$ tal que $\tilde{h} \times 1_B$ faz o diagrama da definição acima comutar. Note que não se trata, de fato, de um limite, já que ev não nos dá um cone para o par de objetos B, C ; há também uma diferença na unicidade do morfismo entre os domínios que faz o diagrama comutar: não necessariamente é único o morfismo de $dom(f)$ a $dom(ev)$ que faz o diagrama ser comutativo mas sim é único o morfismo (de $dom(f)$ a $dom(ev)$) do tipo $g \times 1_B$.

Vamos mostrar que, se C^B é (objeto) exponencial, então, para qualquer $A \in \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}(A \times B, C) \cong \mathcal{C}(A, C^B)$ (isomorfismo que já sabemos ser válido em **Sets**). O mapa que associa,

a cada morfismo $f : A \times B \rightarrow C$, seu transposto $\tilde{f} : A \rightarrow C^B$ é injetor por definição de exponencial (se $\tilde{f} : A \rightarrow C^B$ é transposto de $f_1, f_2 : A \times B \rightarrow C$, $f_1 = ev \circ (\tilde{f} \times 1_B) = f_2$). Vamos mostrar que é também sobrejetor. Seja $\bar{g} : A \rightarrow C^B$; podemos definir $g \doteq ev \circ (\bar{g} \times 1_B) : A \times B \rightarrow C$; novamente por definição de exponencial, sabemos que existe, e é único, $\tilde{g} : A \rightarrow C^B$ tal que $ev \circ (\tilde{g} \times 1_B) = g$, e essa unicidade nos diz que $\tilde{g} = \bar{g}$, ou seja, $\bar{g}$ é transposto de um morfismo $g : A \times B \rightarrow C$. Então, para qualquer $A \in \mathcal{C}_0$,

$$\mathcal{C}(A \times B, C) \cong \mathcal{C}(A, C^B)$$

3.4 Topoi

Nossa intenção nessa seção é introduzir uma definição de topos de modo a ficar claro que a categoria dos pré-feixes é, de fato, um topos. Porém, para ilustrar a importância da definição, reproduziremos aqui uma lista que Peter T. Johnstone atribui a André Joyal em [37] sobre o que podemos dizer que um topos “é” dependendo do “ponto de vista”.

- i *A topos is a category of sheaves on a site*
- ii *A topos is a category with finite limits and power-objects*
- iii *A topos is (the embodiment of) an intuitionistic higher-order theory*
- iv *A topos is (the extensional essence of) a first-order (infinitary) geometric theory*
- v *A topos is a totally cocomplete object in the meta-2-category CART of cartesian (i.e. , finitely complete) categories*
- vi *A topos is a generalized space*
- vii *A topos is a semantics for intuitionistic formal systems*
- viii *A topos is a Morita equivalence class of continuous groupoids*
- ix *A topos is the category of maps of a power allegory*
- x *A topos is a category whose canonical indexing over itself is complete and well-powered*

xí *A topos is the spatial manifestation of a giraud frame*

xii *A topos is a setting for synthetic differential geometry*

xiii *A topos is a setting for synthetic domain theory'*

Eis a definição que escolhemos dentre as muitas definições equivalentes.

Definição 36 (Topos) *Um topos é uma categoria com limites finitos, classificador de subobjetos e exponencial (para todo par de objetos).*

Para que não precisemos provar que a categoria dos pré-feixes possui limites finitos usaremos o seguinte lema retirado de [33]. Não o provaremos porém a prova é razoavelmente simples e pode ser encontrada nas proposições 5.14 e 5.15 desse livro.

Lema 37 *As seguintes afirmações são equivalentes sobre uma categoria $\mathcal{C}$.*

(a) *$\mathcal{C}$ possui limites finitos*

(b) *$\mathcal{C}$ possui objeto terminal e pullbacks (ou seja, todo diagrama do tipo $A \rightarrow E \leftarrow B$ possui limite)*

3.5 Transformação natural

Transformações naturais podem ser entendidas como mapas entre funtores. Elas serão os morfismos da categoria dos pré-feixes. Vamos definir transformação natural entre funtores covariantes, sendo que a definição para funtores contravariantes é análoga.

Definição 38 (Transformação natural entre funtores contravariantes) *Sejam $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores covariantes. Uma transformação natural de F a G é uma função $\mathcal{C}_0 \ni A \mapsto \eta_A \in \mathcal{D}$, que podemos entender como uma coleção de morfismos (η) em $\mathcal{D}$, satisfazendo as seguintes propriedades.*

(a) *$\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}_0$*

(b) *Para qualquer morfismo $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ o seguinte diagrama, que chamamos de “diagrama de transformação natural de η em f ”, comuta*

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\
F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B)
\end{array}$$

Acima definimos uma transformação natural como uma função. Isso é importante para que possamos falar em igualdade de transformações naturais. Na prática, porém, pensaremos em transformações naturais como coleções de morfismos. A única coisa que muda na definição de transformação natural entre funtores contravariantes é que se F e G forem contravariantes, o diagrama de transformação natural de η em $f : A \rightarrow B$ é

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\
F(f) \uparrow & & \uparrow G(f) \\
F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B)
\end{array}$$

Chamamos os morfismos $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ de componentes da transformação natural η . Diremos que uma igualdade é válida “devido a naturalidade de η no morfismo f ” para afirmar que uma igualdade é válida devido à comutatividade do diagrama de transformação natural de η em f .

Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, queremos dizer que uma transformação natural é um morfismo entre os objetos F e G na categoria cujos objetos são funtores covariantes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Vamos denotar essa categoria por $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. A classe $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_0$ será a classe de todos os funtores covariantes de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$. Porém, não vamos tomar $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_1$ como sendo a classe de todas as transformações naturais entre funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$; assim como fizemos em **Sets**, para que a categoria $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ inclua todos os morfismos desejados será necessário “fixar” o domínio e o codomínio da transformação natural no morfismo: um elemento de $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_1$ será uma tripla (F, η, G) , onde $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são funtores covariantes e η é uma transformação natural de F a G . Definiremos o domínio desse morfismo como sendo F e seu codomínio como G . Para provar a necessidade disso, tomemos $\mathcal{C}$ como sendo uma categoria que contém dois objetos

distintos A e B e apenas um morfismo $f : A \rightarrow B$ além das identidades. Seja $\mathcal{D}$ a categoria composta pelos morfismos apresentados no seguinte diagrama - além de todas as composições possíveis e identidades.

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{m} & A'' \\ f' \downarrow & & \downarrow f''' \\ B' & \xrightarrow{n} & B'' \end{array}$$

(a notação ficará clara a seguir). Exigimos também que $f' \neq f''$, que n não seja um monomorfismo e que esse diagrama comute - para se obter tal categoria, podemos pegar, por exemplo, uma função (entre conjuntos) $n : B' \rightarrow B''$ que não seja injetora (e portanto n não será monomorfismo em **Sets**), funções $f', f'' : A' \rightarrow B'$, $f''' : A'' \rightarrow B''$, $m : A' \rightarrow A''$ adequadas e tomar a menor subcategoria (em **Sets**) que contem essa coleção de morfismos (e seus domínios e codomínios, consequentemente). Enfim, entre essas duas categorias podemos definir funtores $E, F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ por $E(f) \doteq f'$, $F(f) \doteq f''$, $G(f) \doteq f'''$. A comutação do diagrama implica que o par de morfismos m, n é uma transformação natural de E a G e de F a G . Sendo assim, se tomássemos $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_1$ como sendo a classe das transformações naturais (no sentido da definição acima) entre funtores $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, ao definirmos as funções domínio e codomínio, essa transformação natural (o par de morfismos m e n) não seria um morfismo de F a G (podemos escolher F sem perda de generalidade, já que, necessariamente, esse par terá como domínio apenas um dos funtores E e F). Por isso, tomamos $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_1$ como sendo a classe das triplas (F, η, G) , onde $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são funtores e η é transformação natural de F a G . Vamos chamar essas triplas também de “transformação natural” e representá-las apenas pela transformação natural (ou seja, a coleção de morfismos) usada para defini-las - assim como fizemos em **Sets** ou com a própria definição de funtor.

Para que tenhamos de fato uma “categoria de funtores” precisamos definir a composição de transformações naturais e a identidade associada a um funtor. Para a composição, sejam $E, F, G \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_0$ e $\eta : E \rightarrow F$, $\theta : F \rightarrow G$ transformações naturais. A coleção $\theta \circ \eta \doteq \{\theta_A \circ \eta_A \in \mathcal{D}_1 \mid A \in \mathcal{C}_0\}$ nos dá uma transformação natural $\theta \circ \eta : E \rightarrow G$ (a comutatividade do diagrama do item *c* da definição 38 para essa composição fica clara quando olhamos para o diagrama apresentado abaixo). Essa composição é associativa devido à associatividade da

composição dos morfismos em $\mathcal{D}$. O seguinte diagrama ilustra a composição de transformações naturais $\eta : E \rightarrow F$, $\theta : F \rightarrow G$ (em relação a um morfismo $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$).

$$\begin{array}{ccccc}
 E(A) & \xrightarrow{\quad \eta_A \quad} & F(A) & \xrightarrow{\quad \theta_A \quad} & G(A) \\
 \downarrow E(f) & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
 E(B) & \xrightarrow{\quad \eta_B \quad} & F(B) & \xrightarrow{\quad \theta_B \quad} & G(B)
 \end{array}$$

Para a identidade, é fácil ver que, tomando a coleção $1_F \doteq \{1_{F(A)} \in \mathcal{D}_1 | A \in \mathcal{C}_0\}$, temos uma transformação natural $1_F : F \rightarrow F$ que, com relação à composição definida acima, é morfismo identidade para F .

Finalmente, podemos dizer que $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ é a categoria cujos objetos são os funtores covariantes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e cujos morfismos são as transformações naturais entre esses funtores.

Como queremos definir uma categoria de pré-feixes, a partir de agora restringiremos a discussão a caso de funtores contravariantes. Podemos entender um funtor contravariante de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ como um funtor covariante de $\mathcal{C}^{op}$ a $\mathcal{D}$ e, se fizermos isso, a diferença entre os dois casos será apenas nominal. Preferimos, porém, pensar na definição 28 de funtor contravariante, e nesse caso a relação biunívoca entre funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ e funtores covariantes em $\mathcal{C}^{op}$ a $\mathcal{D}$ que discutimos na seção 3.1 nos diz, de maneira imediata, que a coleção dos funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ também “define” uma categoria quanto tomamos como morfismos as transformações naturais entre eles - sendo que, claro, vale a mesma observação sobre domínios e codomínios feita acima.

3.6 A categoria dos pré-feixes

Seja $\mathcal{C}$ categoria pequena. Como já dissemos, a categoria dos pré-feixes de $\mathcal{C}$, que denotamos por $\widehat{\mathcal{C}}$ ou $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets}]$, é a categoria cujos objetos são funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ a $\mathbf{Sets}$ e cujos morfismos são as transformações naturais entre esses funtores. Vamos mostrar que essa categoria forma um topos e caracterizar nela “construções” que serão importantes para nós, como por exemplo subobjetos, classificador de subobjetos, objeto terminal e pullbacks. Nessa seção nossa principal referência será [34].

Diversas vezes utilizaremos o bem conhecido lema de Yoneda, e portanto é útil que apresentemos aqui os resultados que ele utilizaremos. Bom, usando a noção de funtor Hom contravariante temos bem definido um mapa $\mathcal{C}_0 \ni X \mapsto \mathcal{C}(-, X) \in \widehat{\mathcal{C}_0}$. É natural tentarmos “estender” essa função para um funtor $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$. Isso é possível, e chamamos esse funtor de funtor de Yoneda. Vamos denotá-lo aqui por Y . Esse será um funtor covariante, e assim,

$$Y(f : A \rightarrow B) = Y(f) : \mathcal{C}(-, A) \rightarrow \mathcal{C}(-, B);$$

desse modo, uma componente $X \in \mathcal{C}_0$ da transformação natural $Y(f)$ será uma função $Y(f)_X : \mathcal{C}(X, A) \rightarrow \mathcal{C}(X, B)$. Ora, conhecemos uma função entre esses conjuntos que é dada por f ; trata-se da função que obtemos quando aplicamos o funtor Hom covariante $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ em f , ou seja, a função $\mathcal{C}(X, f)(g) \doteq f \circ g \ \forall g \in \mathcal{C}(X, A)$. Verificar que essa coleção de funções define uma transformação natural de $\mathcal{C}(-, A)$ a $\mathcal{C}(-, B)$ é um exercício calculatório que ocultaremos aqui. A definição do funtor de Yoneda covariante é a seguinte.

Definição 39 (Funtor de Yoneda covariante) *Seja $\mathcal{C}$ categoria localmente pequena. O funtor de Yoneda covariante é o funtor injetor nos objetos, pleno e fiel $Y : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets}]$ definido da seguinte maneira.*

$$(a) \ Y_X \equiv Y(X) \doteq \mathcal{C}(X, -) \ \forall X \in \mathcal{C}_0$$

$$(b) \ \text{Se } f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1, \ Y(f) \equiv Y_f \equiv Y^{(f)} \equiv \mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(A, -) \rightarrow \mathcal{C}(B, -) \text{ tem componentes } Y_X^{(f)} = \mathcal{C}(X, f) : \mathcal{C}(X, B) \rightarrow \mathcal{C}(X, A).$$

Na definição afirma-se que o funtor de Yoneda é pleno e fiel. Isso é uma consequência imediata do seguinte resultado: para $F \in \widehat{\mathcal{C}_0}$ vale que

$$F_A \cong \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, A), F). \quad (3.14)$$

Esse isomorfismo é o resultado do lema de Yoneda que utilizaremos aqui. O lema afirma um pouco mais que isso: ele nos diz também que esse isomorfismo é um isomorfismo natural. Como não utilizaremos essa naturalidade, não a discutiremos; sugerimos [33] para uma apresentação completa do resultado. Note que é tomando $F = \mathcal{C}(-, B)$ que obtemos a plenitude e a fidelidade do funtor de Yoneda.

Apesar de, à primeira vista, o isomorfismo 3.14 parecer não-natural - afinal, não sabemos nada sobre o conjunto F_A -, é fácil prová-lo e compreendê-lo. Com efeito, o isomorfismo é determinado pela seguinte regra: para um elemento $a \in F_A$ existe, e é única, uma transformação natural $\mathcal{C}(-, A) \xrightarrow{\eta} F$ satisfazendo $\eta_A(1_A) = a$; ou seja, existe, e é única, uma transformação natural entre esses funtores cuja componente A , quando aplicada na identidade de A , é o elemento a . Se uma coleção η de morfismos em **Sets** é uma candidata a ser transformação natural de $\mathcal{C}(-, A)$ a F notemos que o domínio de uma componente η_X qualquer será $\mathcal{C}(X, A)$. Além disso, tomando um morfismo $f : X \rightarrow A$ qualquer, o seguinte diagrama de transformação natural deve comutar

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, A) & \xrightarrow{\eta_X} & F_X \\ \mathcal{C}(f, A) \uparrow & & \uparrow F_f \\ \mathcal{C}(A, A) & \xrightarrow{\eta_A} & F_A \end{array}$$

e essa comutatividade nos diz que $\eta_X(f) = F_f(\eta_A(1_A))$. Podemos dizer então que, fixado o “valor” de η_A quando aplicado em 1_A , só há uma escolha possível para a componente $\eta_X : \mathcal{C}(X, A) \rightarrow F_X$ que faça a coleção ser transformação natural. Note que isso só define as componentes tais que existe um morfismo de X a A ; porém, se esse não for o caso, $\mathcal{C}(X, A) = \emptyset$ e portanto a função η_X é a única função cujo domínio é o conjunto vazio. É fácil ver que a coleção de morfismos assim definida (ou seja, $\eta_X(f) \doteq F_f(\eta_A(1_A)) \forall f \in \mathcal{C}(X, A)$) é transformação natural de $\mathcal{C}(-, A) \rightarrow F$, e o que foi dito acima já garante que se $\alpha : \mathcal{C}(-, A) \rightarrow F$ satisfaz $\alpha_A(1_A) = \eta_A(1_A)$ então $\alpha = \eta$. Isso prova o isomorfismo enunciado e, consequentemente, prova que o funtor de Yoneda é pleno e fiel.

A partir de agora, como já fizemos acima, usaremos a notação F_A, F_f em vez de $F(A)$ e $F(f)$ para funtores.

3.6.1 Objeto terminal

Vamos mostrar que $\widehat{\mathcal{C}}$ possui objeto terminal. Precisamos obter um funtor $1 \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ tal que, para qualquer $F \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ exista, e seja única, uma transformação natural $F \rightarrow 1$. Como transformações naturais são dadas por componentes, vamos tomar 1_X como sendo um objeto terminal em **Sets**

(ou seja, um conjunto unitário, que na maior parte dessa dissertação denotaremos por $\{*\}$). Para que 1 seja funtor (contravariante) é necessário que, se $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ então $1_f : 1_B \rightarrow 1_A$, e só existe uma função entre esses conjuntos. Definido $1 \in \widehat{\mathcal{C}}_0$, é imediato que existe, e é única, para $F \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ qualquer, uma transformação η de F a 1 : temos $\eta_X : F_X \rightarrow \{*\}$ como sendo a função constante (única possível) e, se $f : A \rightarrow B$, $\eta_A \circ F_f = ! \circ \eta_B$ trivialmente, onde $! : 1_B \dashrightarrow 1_A$.

3.6.2 Produto binário

Tomando $F^{(1)}, F^{(2)} \in \widehat{\mathcal{C}}_0$; vamos obter um produto para esse par de objetos - e consequentemente mostrar que $\widehat{\mathcal{C}}$ possui produtos binários. Um cone para esse par é caracterizado por um funtor $P \in \widehat{\mathcal{C}}$ e um par de transformações naturais $\eta^{(i)} : P \rightarrow F^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$. Então, para que tenhamos um cone, é necessário e suficiente que tenhamos um funtor $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ e duas coleções de morfismos $\eta^{(i)} \doteq \{\eta_X^{(i)} : P_X \rightarrow F_X^{(i)} \in \mathbf{Sets}_1 | X \in \mathcal{C}_0\}$, $i \in \{1, 2\}$, tais que, para qualquer morfismo $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccccc}
 F_A^{(1)} & \xleftarrow{\eta_A^{(1)}} & P_A & \xrightarrow{\eta_A^{(2)}} & F_A^{(2)} \\
 \uparrow F_f^{(1)} & & \uparrow P_f & & \uparrow F_f^{(2)} \\
 F_B^{(1)} & \xleftarrow{\eta_B^{(1)}} & P_B & \xrightarrow{\eta_B^{(2)}} & F_B^{(2)}
 \end{array}$$

pela definição 21 sabemos que se tomarmos, para todo objeto X , $P_X \doteq F_X^{(1)} \times F_X^{(2)}$, onde $F_X^{(1)} \times F_X^{(2)}$ é um produto de $F_X^{(1)}, F_X^{(2)}$ em $\mathbf{Sets}$,² com $\eta_X^{(i)}$ sendo a projeção $\pi_X^{(i)} : F_X^{(1)} \times F_X^{(2)} \rightarrow F_X^{(i)}$, essa comutatividade será satisfeita se, e só se, P_f for o produto dos morfismos $F_f^{(1)}$ e $F_f^{(2)}$ dado por 21. Temos o seguinte lema.

Lema 40 (Produto binário em $\widehat{\mathcal{C}}$) *Sejam $F^{(1)}, F^{(2)}$ objetos em $\widehat{\mathcal{C}}$ e definamos $F^{(1)} \times F^{(2)} \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ por*

(a) $(F^{(1)} \times F^{(2)})_A = F_A^{(1)} \times F_A^{(2)} \forall A \in \mathcal{C}_0$

²Note que estamos usando uma espécie de axioma da escolha aqui. Trata-se do axioma da escolha para classes próprias. Agradecemos ao professor Hugo Luiz Mariano, do departamento de matemática pura do IME-USP, por ter-nos esclarecido essa dúvida.

(b) $(F^{(1)} \times F^{(2)})_f = F_f^{(1)} \times F_f^{(2)} \forall f \in \mathcal{C}_1$ (definição 21).

O par de transformações naturais $F^{(1)} \xleftarrow{\pi^{(1)}} F^{(1)} \times F^{(2)} \xrightarrow{\pi^{(2)}}$ cujas componentes são projetores é um produto para $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$.

Prova. Bom, já provamos que esse par é cone, falta provar que é limite. Tomemos um par de transformações naturais $\theta^{(i)} : Q \rightarrow F^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, ou seja, um cone para $F^{(1)}$, $F^{(2)}$. Queremos mostrar que existe, e é única, uma transformação natural $\alpha : Q \rightarrow F^{(1)} \times F^{(2)}$ tal que $\theta^{(i)} = \pi^{(i)} \circ \alpha$ para $i \in \{1, 2\}$; como a composição de transformações naturais é definida componente a componente, esse par de igualdades é satisfeito se, e somente se, $\theta_X^{(1)} = \pi_X^{(1)} \circ \alpha_X$ e $\theta_X^{(2)} = \pi_X^{(2)} \circ \alpha_X$ para todo $X \in \mathcal{C}_0$; como $F_X^{(1)} \times F_X^{(2)}$ é limite para $F_X^{(1)}$ e $F_X^{(2)}$, sabemos que existe, e é único, α_X satisfazendo esse par de igualdades; se mostrarmos que a coleção desses morfismos α_X é de fato uma transformação natural de Q a $F^{(1)} \times F^{(2)}$ - e a chamarmos de α - teremos, como desejado, que $\theta^{(i)} = \pi^{(i)} \circ \alpha$ para $i \in \{1, 2\}$. Para provar isso, precisamos mostrar que, para qualquer $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, o seguinte diagrama (que foi representado em “três dimensões” devido ao diagrama que o segue) comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Q_A \\
 & \nearrow \alpha_A & \uparrow \\
 F_A^{(1)} \times F_A^{(2)} & & Q_f \\
 \uparrow F_f & & \uparrow Q_B \\
 & \searrow \alpha_B & \\
 F_B^{(1)} \times F_B^{(2)} & &
 \end{array}$$

Vamos escrever novamente P_X em vez de $F_X^{(1)} \times F_X^{(2)}$, para simplificar a notação; olhemos para o seguinte diagrama (cujos nomes dos morfismos representados na diagonal foram ocultados).

Ora, o par $p_1 \doteq \theta_A^{(1)} \circ Q_f, p_2 \doteq \theta_A^{(2)} \circ Q_f$ é cone (em **Sets**) para $F_A^{(1)}, F_A^{(2)}$ e então existe, e é único, um morfismo $h : Q_B \rightarrow P_A$ tal que $p_i = \pi_A^{(i)} \circ h, i \in \{1, 2\}$; se mostrarmos que $\alpha_A \circ Q_f$ e $P_f \circ \alpha_B$ são morfismos satisfazendo essa condição, então eles serão iguais (pela unicidade de tal morfismo h) e estará provado que α é transformação natural. Tomemos primeiro $\alpha_A \circ Q_f$; temos $\pi_A^{(i)} \circ \alpha_A \circ Q_f = \theta_A^{(i)} \circ Q_f = p_i$, como queríamos. Agora, seja $h \doteq P_f \circ \alpha_B$; temos $\pi_A^{(i)} \circ P_f \circ \alpha_B = F_f \circ \pi_B^{(i)} \circ \alpha_B = F_f \circ \theta_B^{(i)} = p_i$, onde na primeira igualdade foi usado o fato de $\pi^{(i)}$ ser transformação natural. Disso concluímos que $\alpha_A \circ Q_f = F_f \circ \alpha_B$. ■

Pela definição 21 sabemos que, se tomarmos transformações naturais $\eta^i : F^{(i)} \rightarrow G^{(i)}$, está bem definido o morfismo produto $\eta^{(1)} \times \eta^{(2)} : F^{(1)} \times F^{(2)} \rightarrow G^{(1)} \times G^{(2)}$ em $\widehat{\mathcal{C}}$. Mais que isso, para $X \in \mathcal{C}_0$, vale que $(\eta^{(1)} \times \eta^{(2)})_X = \eta_X^{(1)} \times \eta_X^{(2)}$, ou seja, o produto de morfismos em $\widehat{\mathcal{C}}$ é determinado como um produto “termo a termo”. Isso se prova de maneira trivial pois para que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccccc}
 G^{(1)} & \xleftarrow{\theta^{(1)}} & G^{(1)} \times G^{(2)} & \xrightarrow{\theta^{(2)}} & G^{(2)} \\
 \uparrow \eta^{(1)} & & \uparrow \eta^{(1)} \times \eta^{(2)} & & \uparrow \eta^{(2)} \\
 F^{(1)} & \xleftarrow{\pi^{(1)}} & F^{(1)} \times F^{(2)} & \xrightarrow{\pi^{(2)}} & F^{(2)}
 \end{array}$$

é necessário que, em toda componente X o seguinte diagrama em **Sets** comute

$$\begin{array}{ccccc}
G_X^{(1)} & \xleftarrow{\theta_X^{(1)}} & G_X^{(1)} \times G_X^{(2)} & \xrightarrow{\theta_X^{(2)}} & G_X^{(2)} \\
\eta_X^{(1)} \uparrow & & \uparrow (\eta^{(1)} \times \eta^{(2)})_X & & \uparrow \eta_X^{(2)} \\
F_X^{(1)} & \xleftarrow{\pi_X^{(1)}} & F_X^{(1)} \times F_X^{(2)} & \xrightarrow{\pi_X^{(2)}} & F_X^{(2)}
\end{array}$$

isso nos dá o seguinte lema.

Lema 41 (Produto de morfismos em $\widehat{\mathcal{C}}$) Se $\eta^{(i)} : F^{(i)} \rightarrow G^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$ são morfismos em $\widehat{\mathcal{C}}$, o produto desses morfismos (definição 21) é a transformação natural $\eta^{(1)} \times \eta^{(2)} : F^{(1)} \times F^{(2)} \rightarrow G^{(1)} \times G^{(2)}$ dada por

$$(\eta^{(1)} \times \eta^{(2)})_X = \eta_X^{(1)} \times \eta_X^{(2)}$$

para todo $X \in \widehat{C}_0$.

3.6.3 Pullback

Vamos agora obter uma construção explícita para um pullback em $\widehat{\mathcal{C}}$. Como no caso anterior, vamos primeiro obter um cone para um par de morfismos $F \xrightarrow{\alpha} E \xleftarrow{\beta} G$ em $\widehat{\mathcal{C}}$; sabemos que para isso basta determinarmos um par $\theta^{(F)} : P \rightarrow F$, $\theta^{(G)} : P \rightarrow G$ de modo que $\alpha \circ \theta^{(F)} = \beta \circ \theta^{(G)}$. Novamente, como a composição de transformações naturais é definida termo a termo, essa igualdade é válida somente se $\alpha_X \circ \theta_X^{(F)} = \beta_X \circ \theta_X^{(G)} \forall X \in \mathcal{C}_0$. Então, para que tenhamos um cone para um par $F \xrightarrow{\alpha} E \xleftarrow{\beta} G$ é necessário e suficiente que tenhamos um pré-feixe P e duas coleções de morfismos $\alpha \doteq \{\alpha_X : P_X \rightarrow F_X \in \mathbf{Sets}_1 | X \in \mathcal{C}_0\}$, $\beta \doteq \{\beta_X : P_X \rightarrow G_X \in \mathbf{Sets}_1 | X \in \mathcal{C}_0\}$ de modo que, para qualquer $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccccc}
& & P_A & \xrightarrow{\theta_A^{(G)}} & G_A \\
& \nearrow \theta_A^{(F)} & \uparrow & & \nearrow \beta_A \\
F_A & \xrightarrow{\alpha_A} & E_A & & \\
& \downarrow P_f & \uparrow & & \downarrow G_f \\
& & P_B & \xrightarrow{\theta_B^{(G)}} & G_B \\
& \nearrow \theta_B^{(F)} & \uparrow & & \nearrow \beta_B \\
F_B & \xrightarrow{\alpha_B} & E_B & &
\end{array}$$

Vamos então obter um cone para um par $\alpha : F \rightarrow E, \beta : G \rightarrow E$. É necessário que $\alpha_X \circ \theta_X^{(F)} = \beta_X \circ \theta_X^{(G)} \forall X \in \mathcal{C}_0$, e como **Sets** possui pullbacks, vamos tomar, para $X \in \mathcal{C}_0$, o par $\theta_X^{(F)}, \theta_X^{(G)} \in \mathbf{Sets}_1$ como sendo um pullback para α_X e β_X ; então $P_X \doteq F_X \times_{E_X} G_X$, onde $F_X \times_{E_X} G_X$ é o domínio desse pullback para α_X e β_X . Vamos definir $P_f, f \in \mathcal{C}_1$ de modo análogo ao que fizemos para o produto. Como já vimos, se $f : A \rightarrow B$, para que $\theta^{(F)}$ e $\theta^{(G)}$ sejam transformações naturais, $P_f : F_B \times_{E_B} G_B \rightarrow F_A \times_{E_A} G_A$ deve ser tal que $\theta_A^{(F)} \circ P_f = F_f \circ \theta_B^{(F)}$ e $\theta_A^{(G)} \circ P_f = G_f \circ \theta_B^{(G)}$. No caso do produto, usamos a noção de produto um par de morfismos $f_i : A_i \rightarrow B_i, i \in \{1, 2\}$ para determinar P_f . Introduziremos, então, numa categoria $\mathcal{C}$ qualquer, a noção de “pullback” de um par de morfismos $h_A : A \rightarrow X, h_C : B \rightarrow Y$ - caso existem os pullbacks $A \times_C B, X \times_Z Y$, onde $C, Z \in \mathcal{C}_0$: tal “pullback” será um morfismo $h_A \times_C h_C : A \times_C B \rightarrow X \times_C Y$. Para a existência e unicidade do produto de morfismos foi suficiente a existência os produtos $A_1 \times A_2$ e $B_1 \times B_2$: o produto $f_1 \times f_2$ é o morfismo, único, determinado pelo fato de $f_i \circ \pi_i^{(A)}, i \in \{1, 2\}$, ser cone para B_1 e B_2 e $B_1 \times B_2$ ser limite para esse par de objetos. No caso dos pullbacks, a existência de $A \times_C B, X \times_Z Y$ não será suficiente para que possamos definir o “pullback” $h_A \times_C h_C$, pois precisaremos impor que h_A e h_C também nos deem, de algum modo, um cone para o par de morfismos do qual $X \times_C Y$ é pullback, e para ser cone desse par, precisaremos exigir que o diagrama obtido seja comutativo. Após isso, vamos obter uma condição suficiente para que essa comutatividade seja satisfeita, que será justamente a condição que p_f , quando definido, satisfará. Bom, sejam $\mathcal{C}$ categoria e $h_A : A \rightarrow X, h_B : B \rightarrow Y$ morfismos, sendo que existem pullbacks $A \times_C B$ e $X \times_Z Y$, ou

seja, para algum par de morfismos $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ existe um par $p_A : A \times_C B \rightarrow A$, $p_B : A \times_C B \rightarrow B$ que é pullback para f e g (em geral, para o que faremos aqui, precisaríamos apenas supor que p_A e p_B formam um cone para f e g) e, do mesmo modo, para algum par $r : X \rightarrow Z$, $s : Y \rightarrow Z$ existe um par $q_X : X \times_Z Y \rightarrow X$, $q_Y : X \times_Z Y \rightarrow Y$ que é pullback para r e s . Temos a seguinte situação

Por q_X, q_Y ser pullback de r e s sabemos que, se $h_A \circ p_A$, $h_B \circ p_B$ for cone para r e s , existirá, e será único, um morfismo $h : A \times_C B \rightarrow X \times_Z Y$ tal que seguinte diagrama comuta

Se supusermos que existe um morfismo $h_C : C \rightarrow Z$ que faz com que as faces do diagrama que o têm como aresta sejam comutativas - ou seja, se supusermos que existe $h_C : C \rightarrow Z$ tal que $h_C \circ f = r \circ h_A$ e $h_C \circ g = s \circ h_B$ - teremos que $h_A \circ p_A$ e $h_B \circ p_B$ será cone para r e s . De fato, assumindo que tal morfismo existe temos que $r \circ h_A \circ p_A = s \circ h_B \circ p_B$ (condição de ser cone) equivale à igualdade $h_C \circ f \circ p_A = h_C \circ g \circ p_B$ e como “a base do retângulo” é um

diagrama de pullback, ou seja, como $f \circ p_A = g \circ p_B$, essa ultima igualdade é trivial. Em resumo, concluímos que, para que o par $h_A \circ p_A, h_B \circ p_B$ seja cone para r e s (e consequentemente para que possamos associar, de modo único, um morfismo $h : A \times_C B \rightarrow X \rightarrow \times_Z Y$ ao par h_A, h_B) é suficiente que exista um morfismo $h_C : C \rightarrow Z$ fazendo as faces que o têm como aresta (no sentido descrito acima) comutarem. Figurativamente, incluindo o morfismo $h_C : C \rightarrow Z$ no diagrama, podemos descrever o que foi feito acima da seguinte maneira: se as bases do retângulo forem diagramas de pullback e as faces que têm h_C como aresta forem diagramas comutativos, existe, e é único, um morfismo $h : A \times_C B \rightarrow X \times_Z Y$ tal que as faces que o têm como aresta são diagramas comutativas (sendo que essa ultima propriedade é justamente o fato de $h_A \circ p_A, h_B \circ p_B$ ser cone para r e s , que é a condição desejada de início); consequentemente, satisfeitas essas condições, existe, e é único, um morfismo $h : A \times_C B \rightarrow X \times_Z Y$ que faz com que o diagrama (representado como um paralelepípedo) seja comutativo. Bom, voltemos ao diagrama que motivou essa discussão; incluindo nele os objetos E_A, E_B e os morfismos $E_f, \alpha_A, \alpha_B, \beta_A, \beta_B$ - e omitindo P_f , que é o morfismo que queremos determinar, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & P_A & \xrightarrow{\theta_A^{(G)}} & G_A & \\
 \theta_A^{(F)} \swarrow & & & & \searrow \beta_A \\
 F_A & \xrightarrow{\alpha_A} & E_A & & \\
 \uparrow F_f & & \uparrow E_f & \uparrow G_f & \\
 & P_B & \xrightarrow{\theta_B^{(G)}} & G_B & \\
 \theta_B^{(F)} \swarrow & & & & \searrow \beta_B \\
 F_B & \xrightarrow{\alpha_B} & E_B & &
 \end{array}$$

Bom, como $\alpha : F \rightarrow E$ é transformação natural, $\alpha_A \circ F_f = E_f \circ \alpha_B$ e como $\beta : G \rightarrow E$ é transformação natural, $E_f \circ \beta_A = \beta_B \circ G_f$ (ou seja, as faces que têm E_f como aresta são diagramas comutativos); além disso, $\alpha_A \circ \theta_A^{(F)} = \beta_A \theta_A^{(G)}$ e $\alpha_B \circ \theta_B^{(F)} = \beta_B \theta_B^{(G)}$ por construção (ou seja, as bases do retângulo são diagramas de pullback). Conforme argumentamos, essas condições são suficientes que existe, e seja único, um morfismo $P_f : P_B \rightarrow P_A$ que faça esse

paralelepípedo ser um diagrama comutativo; vamos representá-lo por $F_f \times_{E_f} G_f$. Escrevemos $P \equiv F \times_E G$. Temos o seguinte lema.

Lema 42 (Pullback em $\widehat{\mathcal{C}}$) *Sejam $F \xrightarrow{\alpha} E \xleftarrow{\beta} G$ morfismos em $\widehat{\mathcal{C}}$. Definamos $F \times_E G \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ por*

- (a) $(F \times_E G)_A = F_A \times_E G_A$ para $A \in \mathcal{C}_0$ (ou seja, um pullback em **Sets** de F_A e G_A)
- (b) $(F \times_E G)_f = F_f \times_E G_f$ para $f \in \mathcal{C}_1$, onde $F_f \times_E G_f$ é o “pullback de morfismos” definido na discussão acima.

Então um pullback para α e β é um par de morfismos $F \xleftarrow{\theta^{(F)}} F \times_E G \xrightarrow{\theta^{(G)}} G$ tal que, para todo $X \in \mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_X \times_E G_X & \xrightarrow{\theta_X^G} & G_X \\ \theta_X^{(F)} \downarrow & & \downarrow \beta_X \\ F_X & \xrightarrow{\alpha_X} & E_X \end{array}$$

é diagrama de pullback em **Sets**.

Prova. Já sabemos que isso define um cone, resta mostrar que define limite. Tomemos um par $\eta^{(F)} : Q \rightarrow F, \eta^{(G)} : Q \rightarrow G$ que seja um cone para α e β ; como já vimos, isso ocorre somente se o par $\eta_X^{(F)}, \eta_X^{(G)}$ é cone para α_X, β_X , qualquer que seja $X \in \mathcal{C}_0$. Bom, queremos mostrar que existe uma transformação natural $\gamma : Q \rightarrow P$ tal que $\eta^{(F)} = \theta^{(F)} \circ \gamma$ e $\eta^{(G)} = \theta^{(G)} \circ \gamma$, sendo que sabemos que essas igualdades equivalem a $\eta_X^{(F)} = \theta_X^{(F)} \circ \gamma_X$ e $\eta_X^{(G)} = \theta_X^{(G)} \circ \gamma_X$ para todo $X \in \mathcal{C}_0$, e sabemos que, para qualquer $X \in \mathcal{C}_0$, existe, é único, $\gamma_X \in \mathcal{C}_1$ satisfazendo essas igualdades; tomando essa coleção de morfismos para definir γ , resta-nos mostrar que se trata, de fato, de uma transformação natural $\gamma : Q \rightarrow P$, ou seja, resta-nos mostrar que, para qualquer $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, o seguinte diagrama comuta

Para provar isso, olhemos para o seguinte diagrama (ocultamos os nomes dos morfismos representados na vertical)

O par de morfismos $p \doteq \eta_A^{(F)} \circ Q_f : Q_B \rightarrow F_A$, $q \doteq \eta_A^{(G)} \circ Q_f : Q_B \rightarrow G_A$ é cone para α_A , β_A pois $\eta_A^{(F)}$, $\eta_A^{(B)}$ pois $\eta_A^{(F)}$, $\eta_A^{(G)}$ o é. Então existe, como $\theta_A^{(F)}$, $\theta_A^{(G)}$ é limite, existe e é único $h : Q_B \rightarrow E_A$ tal que $p = \theta_A^{(F)} \circ h$ e $q = \theta_A^{(G)} \circ h$; vamos mostrar que $\gamma_A \circ Q_f$ e $P_f \circ \gamma_B$ satisfazem esse par de igualdades e teremos que eles são iguais. Para $h \doteq \gamma_A \circ Q_f$ é trivial. Tomemos então $h \doteq P_f \circ \gamma_B$; temos $\theta_A^{(F)} \circ h = \theta_A^{(F)} \circ Q_f \circ \gamma_B = F_f \circ \theta_B^{(F)} = F_f \circ \theta_B^{(F)} = \eta_A^{(F)} \circ Q_f = p$, onde na segunda igualdade usamos que θ é transformação natural, na terceira usamos que P_B

é pullback para α_B e β_B e na última usamos que $\eta^{(F)}$, $\eta^{(G)}$ é cone para α , β ; temos, de modo análogo, que $\theta_A^{(G)} \circ h = \theta^{(G)} \circ G_f \circ \theta_B^{(G)} = G_f \circ \eta^{(G)} = \eta_A^{(G)} \circ Q_f = q$. Enfim, trata-se de fato de um limite. ■

3.6.4 Subobjetos em $\widehat{\mathcal{C}}$

O seguinte lema será importante nessa discussão.

Lema 43 *Em $\widehat{\mathcal{C}}$, um morfismo é mono se, e somente se, suas componentes são monomorfismos em **Sets***

Prova. Seja $\eta \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ e suponhamos que todas as suas componentes sejam monomorfismos em **Sets**; tomando morfismos paralelos $\alpha, \beta \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ com codomínio igual a $\text{dom}(\eta)$ e tais que $\eta \circ \alpha = \eta \circ \beta$, temos $\eta \circ \alpha = \eta \circ \beta \Rightarrow \eta_X \circ \alpha_X = \eta_X \circ \beta_X \forall X \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \alpha_X = \beta_X \forall X \in \mathcal{C}_0$, e essa última igualdade implica que $\alpha = \beta$, então η é monomorfismo. Agora, seja $\eta : F \rightarrow G$ monomorfismo em $\widehat{\mathcal{C}}$. Lembremos que, pelo lema 27 η ser monomorfismo é equivalente ao par de morfismos $F \xleftarrow{1_F} F \xrightarrow{1_F} F$ ser pullback para o par $F \xrightarrow{\eta} G \xleftarrow{\eta} F$. Como limites têm domínios isomorfos, existe um isomorfismo $\gamma : F \times_G F \rightarrow F$, onde $F \times_G F$ é o funtor definido acima, sendo $(F \times_G F)_X = F_X \times_{G_X} F_X \forall X \in \mathcal{C}_0$; vamos também denotar por π_{F_X} a componente X da “projeção” $\pi_F : F \times_G F \rightarrow F$. Já mostramos, porém, que numa categoria de funtores $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, $\gamma \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_1$ é isomorfismo se, e só se, suas componentes são iso em $\mathcal{D}$, portanto, para qualquer $X \in \mathcal{C}$, temos um isomorfismo $\gamma_X : F_X \times_{G_X} F_X \rightarrow F_X$. Esse isomorfismo garante que $F_X \xleftarrow{1_{F_X}} F_X \xrightarrow{1_{F_X}} F_X$ é pullback para $F_X \xrightarrow{\eta_X} G_X \xleftarrow{\eta_X} F_X$. De fato, se $f, g : C \rightarrow F_X \in \mathcal{C}_1$ é satisfaz $\eta_X \circ f = \eta_X \circ g$ (ou seja, se o par f, g é cone para o par η_X, η_X), então existe, e é único, $h : C \rightarrow F_X \times_{G_X} F_X$ satisfazendo $f = \pi_{F_X} \circ h = g$; como $\pi_{F_X} = 1_{F_X} \circ \gamma_X$, temos $f = 1_{F_X} \circ (\gamma_X \circ h) = g$; $\tilde{\gamma}_X \doteq \gamma_X \circ h$ é o único morfismo de C a F_X satisfazendo essa igualdade pois, se existisse $\tilde{u} : C \rightarrow F_X$ satisfazendo $f = 1_{F_X} \circ \tilde{u} = g$ teríamos $f = \pi_{F_X} \circ (\gamma_X^{-1} \circ \tilde{u}) = g$, logo (por $F_X \times_{G_X} F_X$ ser pullback), $\gamma_X^{-1} \circ \tilde{u} = h$ o que nos dá $\tilde{u} = \gamma_X \circ h = \tilde{\gamma}_X$. ■

Como a composição de transformações naturais é definida componente a componente e como uma transformação natural é iso se, e somente se, todas as suas componentes são iso, temos que, em $\widehat{\mathcal{C}}$, tomando $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ qualquer, dois monomorfismos $\mu : D \rightarrow F$, $\nu : E \rightarrow F$ são equivalentes (no sentido da equivalência que define os subobjetos de F - definição 31) se,

e somente se, suas componentes são equivalentes em **Sets**. Em **Sets**, mostramos que qualquer subobjeto de um objeto X tem um representante que é função inclusão para algum subconjunto de X . O lema 43 será útil para que mostremos que, numa categoria de pré-feixes, um subobjeto de um objeto F tem um representante que, componente a componente, é dado pela função inclusão de algum subconjunto de F_X . Bom, seja $F \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ e tomemos um monomorfismo $\eta : E \rightarrow F$. Para $X \in \mathcal{C}_0$, $\eta_X : E_X \rightarrow F_X$ é monomorfismo. Escrevendo $S_X \equiv \text{im}(\eta_X) = \eta_X(E_X)$, e representando por ι_{S_X} a inclusão $S_X \hookrightarrow F_X$, temos um isomorfismo $\tilde{\eta}_X : E_X \rightarrow S_X$ tal que $\eta_X = \iota_{S_X} \circ \tilde{\eta}_X$, sendo que $\tilde{\eta}_X(x) = \eta_X(x) \forall x \in E_X$ (para justificar que $\tilde{\eta}_X \neq \eta_X$ precisamos nos lembrar da definição de função entre conjuntos que foi introduzida no início da dissertação). Como já sabíamos, cada componente de η é equivalente, em **Sets**, a uma função inclusão; vamos usar esse fato para definir uma transformação natural que seja, termo a termo, determinada por essas inclusões e feito isso teremos que η é equivalente em $\widehat{\mathcal{C}}$ a essa transformação natural, já que, por construção, é equivalente termo a termo. Por enquanto, temos bem definidas as seguintes coleções de funções: $\iota_S \doteq \{\iota_{S_X} : \text{im}(\eta_X) \rightarrow F_X | X \in \mathcal{C}_0\}$ e $\tilde{\eta} \doteq \{\tilde{\eta}_X : E_X \rightarrow F_X | X \in \mathcal{C}_0\}$. Se definirmos um funtor $S \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ tal que, para todo $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\eta}_A & & \\
 & & \swarrow & & \searrow \\
 S_A & \xleftarrow{\quad} & & E_A & \\
 & \swarrow \iota_{S_A} & & \searrow \eta_A & \\
 & & F_A & & \\
 S_f \uparrow & & \uparrow F_f & & \uparrow E_f \\
 & \swarrow \iota_{S_B} & & \searrow \eta_B & \\
 S_B & \xleftarrow{\quad} & & E_B & \\
 & & \tilde{\eta}_B & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & F_B & &
 \end{array}$$

$\tilde{\eta}$ e ι_S serão transformações naturais, sendo que $\iota_S : S \rightarrow F$ será monomorfismo (onde cada componente é uma função inclusão) e $\tilde{\eta} : E \rightarrow S$ será isomorfismo tal que $\eta = \tilde{\eta} \circ \iota_S$. Ora, $F_f \circ \iota_{S_B} = F_f|_{\text{im}(\eta_B)}$, sendo que estamos considerando, por enquanto, $F_f|_{\text{im}(\eta_B)} : \text{im}(\eta_B) \rightarrow F_A$ (vou escrever $\text{im}(\eta_B)$ em vez de S_B quando for conveniente). Porém, a transformação

natural $\eta : E \rightarrow F$ nos garante que $\text{im}(F_f|_{\text{im}(\eta_B)}) \subset S_A = \text{im}(\eta_A)$. Disso concluímos que $\text{im}(F_f|_{\text{im}(\eta_B)}) \subset S_A$ e então existe o morfismo $F_f|_{\text{im}(\eta_B)} : S_B \rightarrow S_A$ (ou seja, podemos “trocar” o codomínio F_A de $F_f|_{\text{im}(\eta_B)}$ por S_A). Definamos $S_f \doteq F_f|_{\text{im}(\eta_B)} : S_B \rightarrow S_A$. É trivial que com essa escolha o diagrama acima comuta, e é fácil ver que o funtor S está bem definido - afinal, estamos apenas “trocando o codomínio” de funções de maneira apropriada. Isso prova que, de fato, todo subobjeto de F possui um representante que, componente a componente, é uma função inclusão. Vamos mostrar agora que há apenas um representante desse tipo. Bom, sejam $\mu : D \rightarrow F$, $\nu : E \rightarrow F$ monomorfismos em $\widehat{\mathcal{C}}$ tais que μ_X, ν_X sejam inclusões para todo $X \in \mathcal{C}_0$. Suponhamos que eles pertençam ao mesmo subobjeto de F , ou seja, que exista um isomorfismo $\alpha : D \rightarrow E$ tal que $\nu \circ \alpha = \mu$; isso implica, para todo $X \in \mathcal{C}_0$, que $\nu_X \circ \alpha_X = \mu_X$ e consequentemente, conforme já argumentamos para **Sets**, $\nu_X = \mu_X \forall X \in \mathcal{C}_0$ (consequentemente $D_X = E_X$). Isso implica que $\nu = \mu$. Resumimos esses resultados no seguinte lema.

Lema 44 *Em $\widehat{\mathcal{C}}$, todo subobjeto de um funtor $F \in \mathcal{C}_0$ possui um, e somente um, representante $\mu : S \rightarrow F$ cujas componentes são, todas elas, inclusões $S_X \hookrightarrow F_X$; mais que isso, para qualquer monomorfismo $\nu : T \rightarrow F$ nesse subobjeto (ou seja, $\nu \in [\mu]$) vale que $\text{im}(\nu_X) = S_X$ para qualquer $X \in \mathcal{C}_0$. Chamamos tal morfismo $\mu : S \rightarrow F$ de representante principal do subobjeto $[\mu]$.*

Escreveremos $S \hookrightarrow F$ para representar um representante principal de algum subobjeto de F . Como há uma relação biunívoca entre subobjetos e representantes principais, é natural chamarmos de subobjeto um representante principal, e faremos isso frequentemente daqui em diante.

3.6.5 classificador de subobjetos em $\widehat{\mathcal{C}}$

Para a definição de classificador de subobjetos em $\widehat{\mathcal{C}}$ será útil entendermos os subobjetos dos funtores do tipo $\text{Hom} : \mathcal{C}(-, C)$. Seja então $C \in \mathcal{C}_0$ e tomemos um monomorfismo $\mu : D \rightarrow \mathcal{C}(-, C) \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ cujas componentes são inclusões $D_X \hookrightarrow \mathcal{C}(X, A)$. Isso nos diz que $D_X \subset \mathcal{C}(X, A) \forall X \in \mathcal{C}_0$. Bom, a naturalidade de μ nos diz que, para qualquer $u : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, o seguinte deve comutar

$$\begin{array}{ccc}
D_A & \xrightarrow{\mu_A} & \mathcal{C}(A, C) \\
D_u \uparrow & & \uparrow \mathcal{C}(u, C) \\
D_B & \xrightarrow{\mu_B} & \mathcal{C}(B, C)
\end{array}$$

Pelo que foi discutido acima sabemos que D_u é a função $\mathcal{C}(u, C)|_{D_B} : D_B \rightarrow D_A$. Tomando $f \in D_B \subset \mathcal{C}(B, C)$ qualquer temos que $\mathcal{C}(u, C)(\mu_B(f)) = \mathcal{C}(u, C)|_{D_B}(f) = \mu_A(D_u(f)) = f \circ u \in D_A$ e então o fato de que $\text{im}(\mathcal{C}(u, C)|_{D_B}) \subset D_A$, onde $A = \text{dom}(u)$ e $B = \text{cod}(u)$, é caracterizado do seguinte modo: se tomarmos um morfismo $f : B \rightarrow C$, onde $B \in \mathcal{C}_0$ é um objeto qualquer, e compusermos ele com qualquer morfismo cujo codomínio é B ($u : A \rightarrow B$), a composição $f \circ u : A \rightarrow C$ pertence ao conjunto D_A . Isso nos diz que a coleção $\Psi_{C,D} \doteq \cup\{D_X | X \in \mathcal{C}_0\} = \{f \in \mathcal{C}_1 | \text{cod}(f) = C \text{ e } f \in D_{\text{dom}(f)}\}$ é “fechada por composição à esquerda”, ou seja, tomando $f \in \Psi_{C,D}$ e $u \in \mathcal{C}_1$ tal que a composição $f \circ u$ é possível ($\text{cod}(u) = \text{dom}(f)$), temos que a composição pertence a $\Psi_{C,D}$. Trata-se de uma propriedade semelhante à de um ideal à esquerda (num anel) e que precisamos na seguinte definição.

Definição 45 (Crivo) *Sejam $\mathcal{C}$ categoria, $C \in \mathcal{C}_0$ e $\Psi_C \doteq \{f \in \mathcal{C}_1 | \text{cod}(f) = C\}$. Diremos que uma subcoleção Λ de Ψ_C é um crivo para C (ou C-crivo) se para quaisquer $f \in \Lambda$ e $g \in \mathcal{C}_1$ com $\text{cod}(g) = \text{dom}(f)$ tivermos $f \circ g \in \Lambda$.*

Notemos que $\Psi_C \doteq \{f \in \mathcal{C}_1 | \text{cod}(f) = C\}$ (que nunca é vazio pois $1_C \in \Psi_C$) é um C-crivo, que chamaremos de **C-crivo maximal**. Vamos denotar por Σ_C a coleção de todos os C-crivos em $\mathcal{C}$; quando $\mathcal{C}$ é categoria pequena temos $\Sigma_C \subset \mathcal{P}(\Psi_C)$.

Voltemos agora a $\widehat{\mathcal{C}}$. Mostramos que um subobjeto $\mu : D \rightarrow \mathcal{C}(-, C)$ (o representante principal de um subobjeto, mais precisamente) nos determina um C-crivo em $\mathcal{C}$ dado por $U_{C,D} \doteq \cup\{D_X | X \in \mathcal{C}_0\} = \{f \in \mathcal{C}_1 | \text{cod}(f) = C \text{ e } f \in D_{\text{dom}(f)}\}$. Vamos mostrar que essa relação entre C-crivos e subobjetos de $\mathcal{C}(-, C)$ é biunívoca. Bom, seja U um C-crivo e, para $X \in \mathcal{C}_0$, definamos $D_X \doteq \{f \in U | \text{dom}(f) = X\}$, ou seja, $f \in D_X$ se, e só se, $f \in U$ e $f \in \mathcal{C}(X, C)$. Temos com isso que $D_X \subset \mathcal{C}(X, C) \forall X \in \mathcal{C}_0$ e, claro, qualquer que seja $f \in U$ existe $X \in \mathcal{C}_0$ tal que $f \in D_X$. Seja $\mu_X : D_X \hookrightarrow \mathcal{C}(X, C)$ a inclusão; precisamos mostrar que a coleção de inclusões $\mu \doteq \{\mu_X : D_X \hookrightarrow \mathcal{C}(X, C) \in \mathbf{Sets}_1 | X \in \mathcal{C}_0\}$ é transformação natural.

Isso é verdade e decorre do fato de $U = \cup\{D_X | X \in \mathcal{C}_0\}$ ser crivo. Com efeito, para $u : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_0$ qualquer, precisamos definir $D_u : D_B \rightarrow D_A$ tal que $\mathcal{C}(u, C) \circ \mu_B = \mu_A \circ D_u$, ou seja, tal que o diagrama apresentado acima seja comutativo, e se for verdade que $im(\mathcal{C}(u, C))|_{D_B} \subset D_A$, sabemos que, tomando $D(u : A \rightarrow B) \doteq \mathcal{C}(u, C)|_{D_B} : D_B \rightarrow D_A$, a comutatividade será satisfeita. Tomando $f \in D_B \subset \mathcal{C}(B, C)$, temos $\mathcal{C}(u, C)|_{D_B}(f) = \mathcal{C}(u, C)(f) = f \circ u$; como $f \in U$, $f \circ u \in U$, e como $f \circ u : A \rightarrow C$, $f \circ u \in D_A$, como queríamos. Então, de fato, para qualquer $u : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ ($A, B \in \mathcal{C}_0$ sendo objetos quaisquer), está bem definida a função $D_u \doteq \mathcal{C}(u, C)|_{D_B} : D_B \rightarrow D_A$ e essa função satisfaz $\mathcal{C}(u, C) \circ \mu_B = \mu_A \circ D_u$. Além disso, já sabemos que essa escolha define um funtor $D \in \mathcal{D}$ pois $D(u : A \rightarrow B) = \mathcal{C}(u, C)|_{D_B}$ e portanto trata-se de um caso particular do que foi feito acima. Isso mostra que todo C -crivo define um subobjeto de $\mathcal{C}(-, C)$. Por fim, tomando um representante principal $\mu : D \rightarrow \mathcal{C}(-, C)$ e o C-Crivo $U \doteq \{f \in \mathcal{C}_1 | cod(f) = C \text{ e } f \in D_{dom(f)}\}$ vemos que o representante principal $\tilde{\mu} : \tilde{D} \rightarrow \mathcal{C}(-, C)$ que associamos a esse C-crivo pelo processo descrito acima é exatamente $\mu : D \rightarrow \mathcal{C}(-, C)$. Está provada então a enunciada relação biunívoca entre subobjetos de $\mathcal{C}(-, C)$ e C -crivos.

Vamos agora construir um classificador de subobjetos em $\widehat{\mathcal{C}}$. Se, em $\widehat{\mathcal{C}}$, existe um classificador de subobjetos Ω (definição 33) então para qualquer $F \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ vale, pelo lema 34, que $Sub_{\widehat{\mathcal{C}}}(F) \cong Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(F, \Omega)$; em particular, para qualquer objeto C temos o isomorfismo $Sub(\mathcal{C}(-, C)) \cong Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, C), \Omega)$. Por Yoneda sabemos que $Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, C), \Omega)$ e Ω_C são conjuntos isomorfismos e portanto, se Ω é classificador de objetos, deve valer que, para todo $C \in \mathcal{C}_0$, $\Omega_C \cong Sub(\mathcal{C}(-, C))$. Pelo que já discutimos vale também que

$$Sub(\mathcal{C}(-, C)) \cong \Sigma_C,$$

onde Σ_C é a coleção de todos os C -crivos em $\mathcal{C}$. Por isso definimos

$$\Omega_X \doteq \Sigma_X \quad \forall X \in \mathcal{C}_0.$$

Note que isso é de fato conjunto pois $\mathcal{C}$ é categoria pequena por hipótese. Para que tenhamos um funtor $\Omega \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ precisamos que, para $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ qualquer, $\Omega_f : \Omega_B \rightarrow \Omega_A$; seja $\Lambda \in \Omega_B$ e tomemos a coleção $\Lambda \cdot f \doteq \{g : dom(g) \rightarrow A | f \circ g \in \Lambda\}$, ou seja, a grosso modo, tomemos apenas os “caminhos” do crivo que “chegam em A através de f ”. É imediato

que $\Lambda \cdot f \subset \Psi_A$, com $\Psi_A \doteq \{g \in \mathcal{C}_1 | \text{cod}(g) = A\}$ (o A -crivo maximal) mas, mais que isso, temos $\Lambda \cdot f \in \Omega_A$. Com efeito, tomando $g \in \Lambda \cdot f$ temos $f \circ g \in \Lambda$ e portanto, para $h : \text{dom}(h) \rightarrow \text{dom}(g)$ qualquer, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \in \Lambda$, e então $g \circ h \in \Lambda \cdot f$.

Definição 46 (Funtor Ω em $\widehat{\mathcal{C}}$) Definimos em $\mathcal{C}$ um funtor Ω da seguinte maneira.

(a) Ω_X é o conjunto de todos os X -crivos (definição 45).

(b) Para um morfismo $f : A \rightarrow B$ qualquer em $\mathcal{C}$ definimos $\Omega_f \doteq \Lambda \cdot f \forall \Lambda \in \Omega_B$, onde

$$\Lambda \cdot f \doteq \{g : \text{dom}(g) \rightarrow \text{dom}(f) | f \circ g \in \Lambda\}.$$

É fácil ver que o funtor está bem definido. Com efeito, se tomarmos $A \in \mathcal{C}_0$ qualquer, temos, para $\Lambda \in \Omega_A$, que $\Lambda \cdot 1_A = \Lambda$, então $\Omega_{1_A} = 1_{\Omega_A} \forall A \in \mathcal{C}_0$. Tomando morfismos $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ quaisquer e $\Lambda \in \Omega_C$, temos

$$\Omega_f(\Omega_g(\Lambda)) = \{h : \text{dom}(h) \rightarrow A | f \circ h \in \Omega_g(\Lambda)\} \quad (3.15)$$

$$= \{h : \text{dom}(h) \rightarrow A | g \circ f \circ h \in \Lambda\} \quad (3.16)$$

$$= \Omega_{g \circ f}(\Lambda). \quad (3.17)$$

Seja Λ um C -crivo em $\mathcal{C}$; então $f \in \Lambda$ se, e somente se, $f \circ g \in \Lambda \forall g \in \Psi_{\text{dom}(f)}$. De fato, $f \in \Lambda \Rightarrow f \circ g \in \Lambda \forall g \in \Psi_{\text{dom}(f)}$ por definição; por outro lado, se $f \circ g \in \Lambda \forall g \in \Psi_{\text{dom}(f)}$ temos, em particular, para $1_{\text{dom}(f)} \in \Psi_{\text{dom}(f)}$, que $f = f \circ 1_{\text{dom}(f)} \in \Lambda$; isso prova a afirmação. Sejam $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ e $\Lambda \in \Omega_B$; então $\Omega_f(\Lambda) = \Psi_A$ se, e somente se, $f \in \Lambda$. De fato, $\Omega_f(\Lambda) = \Psi_A \Leftrightarrow \{g : \text{dom}(g) \rightarrow A | f \circ g \in \Lambda\} = \{g \in \mathcal{C}_1 | \text{cod}(g) = A\} \Leftrightarrow f \circ g \in \Lambda \forall g \in \Psi_A \Leftrightarrow f \in \Lambda$. Como caso particular disso, tomando $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ qualquer, temos que $\Omega_f(\Psi_B) = \Psi_A$; vamos nos referir a esse fato dizendo que “ Ω preserva crivos maximais”.

Queremos agora definir o “morfismo *true*” $\tau : 1 \rightarrow \Omega$. Escrevendo, para $X \in \mathcal{C}_0, 1_X \doteq \{*\}$, temos a seguinte definição.

Definição 47 Em $\widehat{\mathcal{C}}$ definimos o morfismo $\tau : 1 \rightarrow \Omega$ por

$$\tau_X(*) \doteq \Psi_X,$$

para todo $X \in \mathcal{C}_0$, ou seja, $\tau_X : 1_X \rightarrow \Omega_X$ “seleciona” o crivo maximal de X .

Essa coleção define uma transformação natural de 1 a Ω pois Ω preserva crivos maximais (no sentido descrito acima) e trata-se de um monomorfismo em $\widehat{\mathcal{C}}$ pois seu domínio é o objeto terminal de $\mathcal{C}$. Por fim, para que Ω seja classificador de subobjetos em $\mathcal{C}$ precisamos mostrar que para um monomorfismo $\mu : S \rightarrow F \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ qualquer existe, e é único, um morfismo $\phi : F \rightarrow \Omega \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ tal que o seguinte diagrama é diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} S & \overset{!}{\dashrightarrow} & 1 \\ \mu \downarrow & & \downarrow \tau \\ F & \xrightarrow{\phi} & \Omega \end{array}$$

Porém, devido ao lema 44, é suficiente que provemos essa afirmação para representantes principais pois monomorfismos equivalentes têm o mesmo morfismo característico (lema 34). Tomemos então um representante principal $i_S : S \rightarrow F$. Conforme já argumentamos, para que o diagrama acima seja diagrama de pullback é necessário que, para todo $X \in \mathcal{C}_0$, o diagrama abaixo seja diagrama de pullback em **Sets**.

$$\begin{array}{ccc} S_X & \overset{!_X}{\dashrightarrow} & 1_X \\ i_{S_X} \downarrow & & \downarrow \tau_X \\ F_X & \xrightarrow{\phi_X} & \Omega_X \end{array}$$

Para que o diagrama acima comute é necessário que $\phi_X(x) = \Psi_X$ para todo $x \in S_X$. Para que ele seja diagrama de pullback é necessário ainda que $\phi_X(x) = \Psi_X \Rightarrow x \in S_X$; de fato, suponhamos que se trata de um diagrama de pullback e seja $x \in F_X$ tal que $\phi_X(x) = \Psi_X$; tomando $Q \doteq \{x\}$, $p : Q \rightarrow F_X$ dada por $p(x) \doteq x$ e $!! : Q \rightarrow 1_X$ como a única função entre esses dois conjuntos, temos que $\phi_X \circ p = \tau_X \circ !!$, e como, por hipótese, trata-se de um diagrama de pullback, existe, e é único morfismo $h : Q \rightarrow S_X$ tal que $i_{S_X} \circ h = p$, $!_X \circ h = !!$, sendo que $i_{S_X} \circ h = p$ implica que $p(x) = i_{S_X}(h(x)) \in S_X$, ou seja, $x \in S_X$, como queríamos mostrar. Em resumo, para que o diagrama acima seja diagrama de pullback (condição que, por sua vez, é necessária para que tenhamos uma transformação natural ϕ tal que $F \xleftarrow{i_S} S \xrightarrow{!} 1$ seja

pullback para $F \xrightarrow{\phi} \Omega \xleftarrow{\tau} 1$) é necessário que a função ϕ_X satisfaça $\phi_X(x) = \Psi_X \Leftrightarrow x \in S_X$. Agora vamos ver que essa condição ($\phi_X(x) = \Psi_X \Leftrightarrow x \in S_X$) e a imposição de que a coleção de funções $\phi_X : F_X \rightarrow \Omega_X$, $X \in \mathcal{C}_0$, seja transformação natural de F a Ω determinará que há apenas uma escolha possível para a função ϕ_X (para $X \in \mathcal{C}_0$ qualquer). É útil enfatizar que, para qualquer $x \in F_X$, $\phi_X(x) \subset \Psi_X$. Tomemos um morfismo $f \in \Psi_X$ qualquer (vamos escrever $Y \equiv \text{dom}(f)$); para que $\phi \circ i_S = \tau \circ !$ é necessário que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S_Y & \dashrightarrow & 1_Y \\
 & \swarrow i_{S_Y} & \uparrow & \phi_Y & \nwarrow \tau_Y \\
 F_Y & & & \xrightarrow{\quad} & \Omega_Y \\
 & \uparrow F_f & F_f|_{S_X} & \uparrow \Omega_f & \\
 & & S_X & \dashrightarrow & 1_X \\
 & \swarrow i_{S_X} & \downarrow & \phi_X & \nwarrow \tau_X \\
 F_X & & & \xrightarrow{\quad} & \Omega_X
 \end{array}$$

e, em particular, que $\phi_Y(F_f(x)) = \Omega_f(\phi_X(x)) \forall x \in F_X$. Conforme mostramos acima, precisamos impor que $\phi_Y(y) = \Psi_Y \Leftrightarrow y \in S_Y$; em particular, para qualquer $x \in F_X$, $\phi_Y(F_f(x)) = \Psi_Y \Leftrightarrow F_f(x) \in S_Y$; essas imposições implicam que $\Omega_f(\phi_X(x)) = \Psi_Y \Leftrightarrow F_f(x) \in S_Y$. Conforme já mostramos, para qualquer $\Lambda \in \Omega_X$ vale que $\Omega_f(\Lambda) = \Psi_Y \Leftrightarrow f \in \Lambda$, então da condição $\Omega_f(\phi_X(x)) = \Psi_Y \Leftrightarrow F_f(x) \in S_Y$ concluímos que $f \in \phi_X(x) \Leftrightarrow F_f(x) \in S_Y$, sendo que isso vale para $x \in F_X$ qualquer. Como $\phi_X(x) \subset \Psi_X$ e como o $f \in \psi_X$ tomado fora um qualquer, podemos afirmar que, para que ϕ seja uma transformação natural de F a Ω e que $F \xleftarrow{i_S} S \xrightarrow{!} 1$ seja pullback para $F \xrightarrow{\phi} \Omega \xleftarrow{\tau} 1$ é necessário que

$$\phi_X(x) \doteq \{f : \text{dom}(f) \rightarrow X \mid F_f(x) \in S_{\text{dom}(f)}\}.$$

Para que fique claro que $\phi_X(x)$, $x \in F_X$, é de fato um X-crivo, tomemos, para $x \in F_X$ qualquer, $f \in \phi_X(x)$ e $h : \text{dom}(h) \rightarrow \text{dom}(f)$; queremos constatar que $F_{f \circ h}(x) \in S_{\text{dom}(f \circ h)}$, sendo que $S_{\text{dom}(f \circ h)} = S_{\text{dom}(h)}$. Temos $F_{f \circ h}(x) = F_h(F_f(x))$ e como $F_f(x) \in S_{\text{dom}(f)}$, $F_h(F_f(x)) \in S_{\text{dom}(h)}$ (devido a naturalidade de i_S), e isso mostra que se trata de fato de um X-crivo. Como

vimos, a coleção de funções $\{\phi_X : F_X \rightarrow \Omega_X | X \in \mathcal{C}_0\}$ definida acima é a única candidata a definir a transformação natural $\phi : F \rightarrow \Omega$ desejada; vamos mostrar, enfim, que essa coleção nos determina uma transformação natural de F a Ω . Seja $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$; precisamos mostrar que $\phi_A \circ F_f = \Omega_f \circ \phi_B$. Tomemos $b \in F_B$; temos $\phi_A(F_f(b)) = \{g : \text{dom}(g) \rightarrow A | F_g(F_f(b)) \in S_{\text{dom}(g)}\}$; por outro lado, $\Omega_f(\phi_B(b)) = \{h : \text{dom}(h) \rightarrow A | f \circ h \in \phi_B(b)\}$, e como $\phi_B(b) = \{e : \text{dom}(e) \rightarrow B | F_e(b) \in S_{\text{dom}(e)}\}$, temos $f \circ h \in \phi_B(b) \Leftrightarrow F_{f \circ h} \in S_{\text{dom}(f \circ h)}$, onde $\text{dom}(f \circ h) = \text{dom}(h)$, ou seja, $\Omega_f(\phi_B(b)) = \{h : \text{dom}(h) \rightarrow A | F_{f \circ h} \in S_{\text{dom}(h)}\}$; está provado que $\phi \doteq \{\phi_X : F_X \rightarrow \Omega_X | X \in \mathcal{C}_0\}$ é transformação natural de F a Ω ; em particular, qualquer que seja o morfismo $f : X \rightarrow Y$ (onde $X, Y \in \mathcal{C}_0$ são objetos quaisquer), vale que o diagrama representado acima comuta. Vamos resumir esses resultados nos seguintes lemas.

Lema 48 (Classificador de subobjetos em $\widehat{\mathcal{C}}$) *Em $\widehat{\mathcal{C}}$, o funtor Ω (definição 46) é classificador de objetos e o morfismo $\tau : 1 \rightarrow \Omega$ (definição 47) é de fato seu “morfismo true”.*

Lema 49 (Morfismo característico em $\widehat{\mathcal{C}}$) *Sejam $F \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ e $S \xrightarrow{\iota} F$ representante principal de um subobjeto de F (lema 44). O morfismo característico de ι é a transformação natural $\phi : F \rightarrow \Omega$ cuja componente X , $\phi_X : S_X \rightarrow \Omega_X$, é dada do seguinte modo: para todo $x \in S_x$,*

$$\phi_X(x) \doteq \{f : \text{dom}(f) \rightarrow X | F_f(x) \in S_{\text{dom}(f)}\}.$$

Se provarmos que $\widehat{\mathcal{C}}$ possui exponencial, o lema 37 nos dirá que essa categoria é um topos. Está provado no apêndice A.1.2 que isso de fato é satisfeito. Exponenciais não serão usadas no que faremos em teoria quântica em topoi e a prova de que $\widehat{\mathcal{C}}$ possui exponenciais é razoavelmente extensa, como se vê no apêndice, e por isso não a incluímos no texto principal. Enfim, temos

Teorema 50 *Se $\mathcal{C}$ é categoria pequena, $\widehat{\mathcal{C}}$ é um topos.*

CAPÍTULO 4

Equilíbrio termodinâmico

Nesse capítulo será usada a terminologia padrão da teoria de álgebras C^* e da mecânica quântica algébrica, cujos elementos principais estão resumidos no apêndice A.3. Como principais referências aqui usamos [38], [39], [40] e [31]. Usaremos também certa terminologia de mecânica estatística. Falaremos por exemplo em temperatura inversa, equilíbrio termodinâmico e sistema termodinâmico. É importante notar que, durante todo esse trabalho, assumiremos $\hbar = 1$.

Nossa intenção aqui é introduzir as definições de estado estacionário e de estado KMS, já que será através desses conceitos que caracterizaremos equilíbrio termodinâmico na teoria quântica em topoi. Na mecânica quântica algébrica, “estado de equilíbrio” é geralmente usado como sinônimo de estado KMS, pois a condição KMS é entendida como a generalização adequada da noção de estado de Gibbs. Porém, há outras condições que também são muito importantes quando estamos lidando com equilíbrio de sistemas termodinâmicos, e dentre elas podemos citar passividade e estacionariedade. Como introdução à relação entre esses três conceitos sugerimos o clássico [41]. Estacionariedade pode ser entendida como uma noção primária de equilíbrio termodinâmico: acredito que, ao menos em sistemas fechados, nenhuma definição de equilíbrio seria levada a sério se ela não implicasse que estados de equilíbrio são estados estacionários. Passividade, que é uma condição relativa a equilíbrio¹ mais fraca que a

¹Passividade está relacionada com a segunda lei da termodinâmica.

condição KMS - estados KMS são estados passivos, porém a afirmação contrária é falsa em geral - também implica em estacionariedade. É útil ilustrarmos essa “hierarquia de equilíbrio termodinâmico” da seguinte maneira:

$$\text{Estados KMS} \subset \text{estados passivos} \subset \text{estados estacionários}.$$

Começemos com essa definição de invariância

Definição 51 (Estado invariante) *Seja ω estado (definição 117) em uma álgebra $C^* \mathcal{A}$ (115). Dizemos que ω é invariante para um automorfismo $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (ou α -invariante) quando $\omega \circ \alpha = \omega$, ou seja, quando $\omega(\alpha(a)) = \omega(a) \forall a \in \mathcal{A}$. Se $\tau \equiv (\tau_t)$ é grupo de automorfismos, dizemos que ω é estacionário para esse grupo (τ -invariante) quando ω é invariante para todo automorfismo do grupo.*

Vamos discutir brevemente a noção de equilíbrio em dimensão finita para mostrar que a condição KMS, que será tomada como condição de equilíbrio no caso geral - o caso em que o sistema físico é representado por um sistema dinâmico C^* qualquer (definição 122) - “equivale à noção de estado de Gibbs”; mais precisamente, fixado o sistema dinâmico $(\mathcal{B}(H), \tau^h)$, um estado é (β, τ^h) -KMS se e só se o estado é o estado de Gibbs para a temperatura inversa β - o lema 55 estabelece essa relação de maneira precisa. Tentar generalizar a ideia de estado de Gibbs para álgebras C^* quaisquer mostrou-se, ao longo do tempo, uma maneira inadequada de se caracterizar equilíbrio termodinâmico em sistemas quaisquer; a condição KMS surge nesse cenário como candidato a condição geral de equilíbrio, e sabe-se que ela compre satisfatoriamente essa função.

4.1 Equilíbrio termodinâmico em sistemas de dimensão finita

Usaremos aqui resultados básicos sobre espaços de Hilbert de dimensão finita; parte deles pode ser encontrada no apêndice A.3. Lembremos que, quando H é espaço de Hilbert, $\mathcal{B}(H)$ denota o conjunto dos operadores $H \rightarrow H$ lineares e contínuos (limitados); esse conjunto, quando munido das operações usuais, forma uma álgebra C^* . Usaremos também a bem conhecida

relação biunívoca entre estados em $\mathcal{B}(H)$ (definição 117) e operadores densidade (operadores positivos - e portanto autoadjuntos - com traço igual a um). Se $d \in \mathcal{B}(H)$ é operador densidade, o mapa $\mathcal{B}(H) \ni a \mapsto \text{Tr}(ad) \in \mathbb{C}$ define trivialmente um estado, sendo que a associação $d \mapsto \omega^d$ é injetora. Temos também o seguinte lema

Lema 52 *Seja H espaço de Hilbert de dimensão finita e $\omega : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ estado (definição 117). Então existe, e é único, um operador densidade $d \in \mathcal{B}(H)$ tal que*

$$\omega(a) = \text{Tr}(ad) \quad \forall a \in \mathcal{B}(H).$$

Disso segue a relação biunívoca enunciada.

Fixando $h \in \mathcal{B}(H)$ autoadjunto e $t \in \mathbb{R}$ podemos definir, para todo $t \in \mathbb{R}$, o automorfismo $\tau_t^h : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ por $\tau_t^h(a) \doteq e^{ith} a e^{-ith} \quad \forall a \in \mathcal{B}(H)$ - é fácil provar que de fato se trata de um automorfismo, sendo que $(\tau_t^h)^{-1} = \tau_{-t}^h$, e isso nos dá um grupo uniformemente contínuo de automorfismos $\tau^h : \mathbb{R} \rightarrow \tau_t^h \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ (definições 121 e 120). É fácil constatar que se trata de fato de um grupo de automorfismos, e a continuidade é uniforme pois $\dim(\mathcal{B}(H)) < \infty$. Nosso interesse por esse tipo de grupo de automorfismos se deve ao fato de que, quando h representa o Hamiltoniano de algum sistema representado por um espaço de Hilbert de dimensão finita, τ^h representa a dinâmica do sistema. O seguinte lema será importante para o que será feito a seguir.

Lema 53 *Um operador $b \in \mathcal{B}(H)$ satisfaz $\text{Tr}(ba) = 0 \quad \forall a \in \mathcal{B}(H)$ se, e somente se, $b = 0$.*

Prova. Tomando $a = b^*$ temos $0 = \text{Tr}(bb^*)$; o operador bb^* é positivo (pois numa álgebra C^* qualquer, um elemento é positivo se, e só se, ele é da forma bb^* para algum elemento b da álgebra) e é um resultado simples que o único operador positivo em $\mathcal{B}(H)$ cujo traço é zero é o operador nulo; sendo assim, $bb^* = 0$, e é fácil ver que isso implica que $b = 0$ - por exemplo, fixando uma base de H e olhando para um elemento da diagonal da matriz que representa bb^* nessa base. ■

Vamos denotar por $\omega^{\beta, h}$ o estado de Gibbs associado ao sistema termodinâmico cujo hamiltoniano é h e cuja temperatura inversa é β :

Definição 54 (Estado de Gibbs) *Seja H espaço de Hilbert de dimensão finita, $h \in \mathcal{B}(H)$ autoadjunto e $\beta \in [0, \infty]$. O estado cujo operador densidade associado é*

$$d^{\beta,h} \doteq \frac{e^{-\beta h}}{\text{Tr}(e^{-\beta h})}, \quad (4.1)$$

é o que chamamos de “estado de Gibbs associado ao par (β, h) ”.

Num sistema termodinâmico, β representa a “temperatura inversa” do sistema, por isso frequentemente nos referimos a $\omega^{\beta,h}$ como o “estado de Gibbs, à temperatura inversa β , do sistema cujo Hamiltoniano é h ”. Vamos mostrar que, dados h e β , o estado de Gibbs $\omega^{\beta,h}$ é o único estado que satisfaz, para todo par $a, b \in \mathcal{B}(H)$, a igualdade

$$\omega(ab) = \omega(b\tau_{i\beta}^h(a)),$$

que é justamente a condição KMS para o sistema dinâmico $(\mathcal{B}(H), \tau^h)$ à temperatura inversa β . É a essa igualdade que nos referiremos por enquanto com a expressão “condição (β, h) -KMS.

Na definição acima, $\tau_{i\beta}^h(a) \doteq e^{-\beta h} a e^{\beta h}$. Em dimensão finita podemos definir τ_z^h para todo $z \in \mathbb{C}$. Porém, apesar de τ_z^h ser sempre isomorfismo, com inversa τ_{-z}^h , ele só é homomorfismo* quando $z \in \mathbb{R}$ pois $\tau_z^h(a)^* = \tau_{\bar{z}}^h(a)$; essa fato consequências importantes para a caracterização da condição KMS na teoria quântica em topoi.

É consequência da ciclicidade do traço e do fato de que $e^{-\beta h} = (e^{\beta h})^{-1}$ que o estado de Gibbs $\omega^{\beta,h}$ satisfaz a condição (β, h) - KMS. Seja agora ω estado, d^ω seu operador densidade associado e suponha que a condição (β, h) -KMS é satisfeita por ω ; vamos mostrar que $\omega = \omega^{\beta,h}$ ou, equivalentemente, que $d^\omega = d^{\beta,h}$. Bom, queremos mostrar que $d^\omega e^{\beta h} = \lambda \mathbb{1}$ onde $\lambda \doteq \frac{1}{\text{Tr}(e^{-\beta h})}$; é um resultado bem conhecido que o centro de $\mathcal{B}(H)$ é trivial, ou seja, que um operador $b \in \mathcal{B}(H)$ é da forma $\lambda \mathbb{1}$ se, e só se, $[b, a] = 0 \ \forall a \in \mathcal{B}(H)$, e portanto a igualdade $d^\omega = d^{\beta,h}$ equivale ao par de afirmações $[d^\omega e^{\beta h}, a] = 0 \ \forall a \in \mathcal{B}(H)$ e $\text{Tr}(d^\omega) = 1$. Escrevendo a condição (β, h) -KMS para ω de maneira mais explícita temos que, para todo par $a, b \in \mathcal{B}(H)$,

$$\text{Tr}(d^\omega ab) = \text{Tr}(d^\omega b e^{-\beta h} a e^{\beta h})$$

o que equivale, devido à linearidade e à propriedade cíclica do traço, à igualdade

$$\text{Tr}((bd^\omega - e^{\beta h}d^\omega b e^{-\beta h})a) = 0.$$

Para $b \in \mathcal{B}(H)$ essa igualdade deve valer para qualquer a , e então o lema 53 nos diz que a condição (β, h) -KMS implica $bd^\omega e^{\beta h} = e^{\beta h}d^\omega b$, qualquer que seja $b \in \mathcal{B}(H)$; mais que isso, se for verdade que $[d^\omega, e^{\beta h}] = 0$ para ω satisfazendo a condição (β, h) -KMS, essa igualdade se reduzirá a $[d^\omega e^{\beta h}, b] = 0$, e sendo b um elemento qualquer, isso implicará que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $d^\omega e^{\beta h} = \lambda 1$, ou seja, $d^\omega = \lambda e^{-\beta h}$; impondo $\text{Tr}(d^\omega) = 1$ concluiremos que $\lambda = \text{Tr}(e^{-\beta h})^{-1}$, como desejado. Tomando o caso particular em que $b = 1$, a comutatividade entre d^ω e $e^{\beta h}$ fica clara ao olharmos para a equação $bd^\omega e^{\beta h} = e^{\beta h}d^\omega b$, e então o que foi dito acima é de fato satisfeito. Resumimos isso no seguinte lema.

Lema 55 *Sejam h operador autoadjunto num espaço de Hilbert H de dimensão finita e β um número real não negativo. Então as seguintes afirmações sobre um estado ω são equivalentes.*

- (a) *O estado ω é o estado de Gibbs associado ao par (β, h)*
- (b) *O estado ω satisfaz a condição (β, h) -KMS, ou seja, para todo par $a, b \in \mathcal{B}(H)$ é satisfeita a igualdade*

$$\omega(ab) = \omega(b\tau_{i\beta}^h(a)).$$

Está provado então que, no caso de sistemas associados a espaços de Hilbert de dimensão finita, temos de fato uma equivalência entre a noção de estado de Gibbs e o que chamamos de condição KMS.

4.2 Equilíbrio termodinâmico em sistemas quaisquer

Tomemos agora um sistema dinâmico C^* $(\mathcal{A}, \tau)$ qualquer (definição 122). No que foi feito acima, para que $\tau_{i\beta}^h(a)$ estivesse bem definido foi importante podermos estender as funções $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t^h(a) \in \mathcal{B}(H)$ para o plano complexo. Faremos o mesmo para um sistema dinâmico C^* $(\mathcal{A}, \tau)$ qualquer: precisamos definir algo que mereça ser denotado por $\tau_{i\beta}$, e faremos isso estendendo continuamente os mapas $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a) \in \mathcal{A}$, que são contínuos, para o plano

complexo. Veremos que essa extensão não é possível, em geral, para qualquer $a \in \mathcal{A}$, mas que o é para uma coleção que forma uma subálgebra* densa de $\mathcal{A}$. Consequentemente, o homomorfismo $\tau_{i\beta}$ (que não será um homomorfismo*, como já acontecia no caso finito) não terá como domínio toda a álgebra $\mathcal{A}$ mas apenas uma subálgebra* dessa. Essa subálgebra* densa é o chamado conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos. Assim fica a definição de estado KMS.

Definição 56 (Estado KMS) *Sejam $(\mathcal{A}, \tau)$ sistema dinâmico C^* e β um número real. Dizemos que um estado é (β, τ) -KMS quando*

$$\omega(ab) = \omega(b\tau_{i\beta}(a))$$

para todo par $a, b \in \mathcal{A}_\tau$, onde $\mathcal{A}_\tau$ é o conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos.

Vamos definir de maneira apropriada tudo o que é necessário para que a definição acima faça sentido. Por fim provaremos que estados KMS são sempre estacionários.

Lembremos que, em $\mathbb{C}$, diferenciabilidade e analiticidade são condições equivalentes: uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um aberto, é analítica se, e só se, ela é diferenciável (holomorfa) em Ω . Definimos.

Definição 57 (Função analítica) *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ função, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto e $\mathcal{A}$ é álgebra C^* . Dizemos que f é analítica em $z \in \Omega$ se o seguinte limite existe em norma*

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z},$$

ou seja, se existe um elemento em $\mathcal{A}$, que denotamos por $f'(z)$, tal que

$$\lim_{z' \rightarrow z} \left\| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - f'(z) \right\| = 0.$$

Dizemos que f é analítica quando ela é analítica em todo ponto do seu domínio.

É claro que, na definição acima, se tomarmos $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ temos a definição usual de função analítica (a rigor, temos a definição de função holomorfa que, como já mencionado, é condição equivalente a analiticidade).

Definição 58 (Elemento analítico) *Seja $(\mathcal{A}, \tau)$ sistema dinâmico C^* (definição 122); dizemos que um elemento $a \in \mathcal{A}$ é τ -analítico quando a função (contínua) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a) \in \mathcal{A}$ possui uma extensão analítica no interior de alguma faixa $I_\lambda \doteq \{z' \in \mathbb{C}; |z'| < \lambda\}$, ou seja, quando existem uma faixa I_λ e uma função $f_a : I_\lambda \rightarrow \mathcal{A}$ tais que*

(a) $f_a(t) = \tau_t(a)$ quando $t \in \mathbb{R}$

(b) A função f_a é analítica (definição 57)

Quando a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a) \in \mathcal{A}$ possui uma extensão analítica para todo o plano complexo, dizemos que a é τ -inteiro-analítico. Denotamos por $\mathcal{A}_\tau$ o conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos.

Lembremos que, para funções analíticas $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definidas num aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ vale o chamado **princípio da identidade**: se o conjunto $P(f, g) \doteq \{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$ possui ponto de acumulação em Ω (ou seja, se existem $z_0 \in \Omega$ e uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in P(f, g) \setminus \{z_0\}$, tais que $z_n \rightarrow z_0$) então $f = g$. Temos um resultado análogo em álgebras C^* .

Lema 59 (Princípio da identidade em álgebras C^*) *Sejam $\mathcal{A}$ álgebra C^* , $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto conexo e $f, g : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ funções analíticas (definição 57). Se o conjunto $P(f, g) \doteq \{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$ (“equalizador”) possui ponto de acumulação em Ω (ou seja, se existem $z_0 \in \Omega$ e uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in P(f, g) \setminus \{z_0\}$, tais que $z_n \rightarrow z_0$) então as funções f e g são iguais.*

Prova. Se $h : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ é função diferenciável e ω é funcional limitado, $\omega \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é função analítica: isso é consequência simples da linearidade e da continuidade (limitação) de ω . Além disso, é uma consequência simples do teorema de Hahn-Banach que $\omega(a) = 0$ para todo funcional limitado $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, se, e só se, $a = 0$ (para que isso seja verdade é suficiente que $\mathcal{A}$ seja espaço de Banach; no caso em que $\mathcal{A}$ é álgebra C^* , sequer precisaríamos impor $\omega(a) = 0$ para todo funcional limitado, seria suficiente que isso valesse para todo estado da álgebra). Bom, para $f, g : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ analíticas com $P(f, g)$ satisfazendo a hipótese do teorema temos que $\omega \circ f, \omega \circ g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ são iguais pelo princípio da identidade para funções complexas, e portanto $\omega(f(z)) = \omega(g(z))$ para $z \in \Omega$; isso vale para todo funcional limitado, e então, pelo que foi dito acima, temos que $f(z) = g(z)$ qualquer se seja $z \in \Omega$, ou seja, $f = g$ ■

Do lema 59 segue trivialmente que a extensão de $t \mapsto \tau_t(a)$ para uma faixa I_λ (que é um aberto conexo), se existe, é única. Note também que se $\lambda' > \lambda$ e $t \mapsto \tau_t(a)$ possui extensão

analítica para $I_{\lambda'}$, a restrição dessa extensão ao conjunto I_{λ} é extensão de $t \mapsto \tau_t(a)$ para I_{λ} (a única extensão).

Fixemos $z \in \mathbb{C}$; podemos definir uma função $\tau_z : \text{Dom}(\tau_z) \rightarrow \mathcal{A}$, onde $\text{Dom}(\tau_z) \subset \mathcal{A}$, por $\tau_z(a) \doteq f_a(z)$ (note que essa função está bem definida devido à “unicidade da extensão” discutida no parágrafo acima). Ve-se que $\text{Dom}(\tau_z)$ é o conjunto dos elementos analíticos cuja extensão analítica de $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a) \in \mathcal{A}$ está definida numa faixa I_{λ} com $\lambda > \text{im}(z)$. Veremos abaixo que o conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos é não vazio, forma uma subálgebra* de $\mathcal{A}$ e, mais que isso, é denso em $\mathcal{A}$ na topologia da norma. Isso implica que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\text{Dom}(\tau_z)$ é denso em $\mathcal{A}$. Veremos que $\text{Dom}(\tau_z)$ é também subálgebra* de $\mathcal{A}$ e que τ_z é homomorfismo - porém não necessariamente é homomorfismo*.

De início suponhamos que o conjunto dos elementos τ -inteiros é não vazio (consequentemente, $\text{Dom}(\tau_z)$ é não vazio para todo $z \in \mathbb{C}$). Sejam a_1, a_2 elementos τ -analíticos, com $f_{a_k} : I_{\lambda_k} \rightarrow \mathcal{A}$ extensão de $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a_k) \in \mathcal{A}$, $k \in \{1, 2\}$. Definimos a função $f_{a_1+a_2} : I_{\lambda} \rightarrow \mathcal{A}$, onde $\lambda \doteq \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, por $f_{a_1+a_2}(z) \doteq f_{a_1}(z) + f_{a_2}(z)$; como a soma de funções analíticas é analítica, essa função é analítica em I_{λ} , e como $\tau_t(a_1+a_2) = \tau_t(a_1) + \tau_t(a_2)$, $f_{a_1+a_2}$ é extensão de $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a_1 + a_2)$. De maneira análoga mostra-se que $a_1 a_2$ é elemento τ -analítico: $f_{a_1 a_2} : I_{\lambda} \rightarrow \mathcal{A}$ é dada por $f_{a_1 a_2}(z) \doteq f_{a_1}(z) f_{a_2}(z)$. Se a é τ -analítico e $\alpha \in \mathbb{C}$, αa é τ -analítico, sendo $f_{\alpha a} \doteq \alpha f_a$ extensão de $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(\alpha a) \in \mathcal{A}$ - podemos definir $f_{\alpha a}$ no domínio de f_a . Isso mostramos que o conjunto dos elementos τ -analíticos, se é não vazio, forma uma subálgebra de $\mathcal{A}$ e que $\text{Dom}(\tau_z)$, se não vazio, também forma uma subálgebra (se $a_1, a_2 \in \text{Dom}(\tau_z)$, $z \in I_{\lambda_k}$, $k \in \{1, 2\}$, e então $z \in I_k$ para $k \doteq \min\{1, 2\}$). Para mostrar que se trata de uma subálgebra* basta definirmos, para um elemento τ -analítico a , $f_{a^*}(z) \doteq (f_a(z))^*$ como extensão analítica de $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a^*) \in \mathcal{A}$. Está provado então que o conjunto dos elementos τ -analíticos e que $\text{Dom}(\tau_z)$ são subálgebras* de $\mathcal{A}$. Dessa construção e da definição de $\tau_z : \text{Dom}(\tau_z) \rightarrow \mathcal{A}$ decorre, de maneira imediata, que τ_z é homomorfismo. Por fim, vamos mostrar que o conjunto dos elementos τ -inteiros é de fato não vazio e que ele é denso (na topologia da norma) em $\mathcal{A}$.

Para $a \in \mathcal{A}$ qualquer, o lema 123 nos diz que o seguinte elemento está bem definido

$$a_n \doteq \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2} \tau_s(a) ds,$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que a_n é τ -inteiro. Tomando $t \in \mathbb{R}$ notamos que

$$\tau_t(a_n) = \tau_t \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y e^{-ns^2} \tau_s(a) ds \right) \quad (4.2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \tau_t \left(\int_x^y e^{-ns^2} \tau_s(a) ds \right) \quad (4.3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y e^{-ns^2} \tau_{t+s}(a) ds \quad (4.4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{x+t}^{y+t} e^{-n(t-s)^2} \tau_s(a) ds \quad (4.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(s-t)^2} \tau_s(a) ds. \quad (4.6)$$

A função $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ dada por

$$f_n(z) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(s-z)^2} \tau_s(a) ds$$

está bem definida, pelo que foi discutido no apêndice A.3 e, por construção, é uma extensão de $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a) \in \mathcal{A}$ para o plano complexo. Se mostrarmos que essa função é diferenciável concluiremos que a_n é elemento analítico. Bom, sabemos que

$$\frac{d}{dz} f_n(z) = \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(s-z)^2} ds \quad (4.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} e^{-n(s-z)^2} ds \quad (4.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2n(s-z) e^{-n(s-z)^2} ds \quad (4.9)$$

(o teorema da convergência dominada de Lebesgue é uma das maneiras de se justificar a passagem da derivada para dentro da integral; de fato, aplica-se o teorema para a família de funções $\{f_z^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; z \in \mathbb{R}\}$, onde $f_z(s) \doteq e^{-n(s-z)^2}$, que são Borel-mensuráveis por serem contínuas - a rigor, suas partes real e imaginária são Borel-mensuráveis). Agora definimos, para $z \in \mathbb{C}$ qualquer,

$$f'_n(z) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} 2n(s-z) e^{-n(s-z)^2} \tau_s(a) ds$$

- que, novamente, está bem definido devido ao lema 123 - e temos que, como a notação sugere,

$f'_n(z)$ é a derivada de f_n em z ; de fato,

$$\left\| f'_n(z) - \frac{f_n(z') - f_a(z)}{z' - z} \right\| = \quad (4.10)$$

$$\left\| f'_n(z) - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-n(s-z')^2} - e^{n(s-z)^2}}{z - z'} \right) \tau_s(a) ds \right\| = \quad (4.11)$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left[2n(s-z)e^{-n(s-z)^2} - \left(\frac{e^{-n(s-z')^2} - e^{n(s-z)^2}}{z - z'} \right) \right] \tau_s(a) ds \right\| \leq \quad (4.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| 2n(s-z)e^{-n(s-z)^2} - \left(\frac{e^{-n(s-z')^2} - e^{n(s-z)^2}}{z - z'} \right) \right| \|a\| ds \quad (4.13)$$

onde usamos a continuidade da norma, propriedades básicas de limite e propriedades da integral; segue dessa desigualdade o resultado enunciado. Por fim, vamos mostrar que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, o que nos diz que o conjunto dos elementos analíticos é denso (na topologia da norma) em $\mathcal{A}$. De início notemos que

$$a = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2} ds \right) a = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2} a ds$$

e daí

$$\|a - a_n\| = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2} (a - \tau_s(a)) ds \right\| \quad (4.14)$$

$$\leq \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2} \|a - \tau_s(a)\| ds. \quad (4.15)$$

Tomemos agora $\epsilon > 0$ qualquer. Como τ é fortemente contínuo e $\tau_0 = \mathbb{1}$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $\|\tau_s(a) - a\| < \frac{\epsilon}{2}$ quando $|s| < \delta$. Mais que isso, fixado o intervalo $(-\delta, \delta)$, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{|s| \geq \delta} e^{-ns^2} ds = 0$ (note que estamos fazendo a variância $\sigma_n \equiv \frac{1}{2n}$ “ir para zero”) e portanto existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{|s| \geq \delta} e^{-ns^2} ds < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq N_\delta$. Assim,

fixando tais δ e N_δ (para o ϵ dado) temos, para todo $n \geq N_\delta$, que

$$\|a - a_n\| \leq \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2} \|a - \tau_s(a)\| ds \quad (4.16)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{|s| < t} e^{-ns^2} \|a - \tau_s(a)\| ds \quad (4.17)$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{|s| \geq t} e^{-ns^2} \|a - \tau_s(a)\| ds \quad (4.18)$$

$$< \epsilon \quad (4.19)$$

e portanto $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, como queríamos. Resumimos isso no seguinte lema.

Lema 60 *Seja $(\mathcal{A}, \tau)$ sistema dinâmico C^* . Os seguintes conjuntos formam subálgebras* de $\mathcal{A}$ e são densos na topologia da norma.*

(a) *O conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos $(\mathcal{A}_\tau)$*

(b) *O conjunto dos elementos τ -analíticos*

(c) *$\text{Dom}(\tau_z)$, o conjunto dos elementos τ -analíticos tais que a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(a) \in \mathcal{A}$ possui extensão analítica para uma faixa I_λ com $\lambda > \text{im}(z)$*

Vamos mostrar que $\tau_t(a)$ é τ -analítico quando $a \in \mathcal{A}$ o é. Seja $f_a : I_\lambda \rightarrow \mathcal{A}$ extensão analítica de $t \mapsto \tau_t(a)$; definimos $f_{\tau_t(a)} : I_\lambda \rightarrow \mathcal{A}$ por $f_{\tau_t(a)}(z) \doteq \tau_t(f_a(z)) \forall z \in I_\lambda$. Essa função é analítica devido à linearidade e à continuidade de τ_t . De fato, para $z \in I_\lambda$,

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f_{\tau_t(a)}(z') - f_{\tau_t(a)}(z)}{z' - z} = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{\tau_t(f_a(z')) - \tau_t(f_a(z))}{z' - z} \quad (4.20)$$

$$= \tau_t \left(\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f_a(z') - f_a(z)}{z' - z} \right) \quad (4.21)$$

$$= \tau_t(f'_a(z)), \quad (4.22)$$

ou seja, $f_{\tau_t(a)}$ é diferenciável e, mais que isso, $f'_{\tau_t(a)}(z) = \tau_t(f'_a(z)) \forall z \in I_\lambda$. Por fim, se $s \in \mathbb{R}$, $f_{\tau_t(a)}(s) = \tau_t(f_a(s)) = \tau_t(\tau_s(a)) = \tau_{t+s}(a)$, portanto $f_{\tau_t(a)}$ é extensão de $s \mapsto \tau_s(\tau_t(a))$ - pois, claro, $\tau_s(\tau_t(a)) = \tau_{t+s}(a)$. O que foi feito acima nos garante, trivialmente, que $\text{Dom}(\tau_z)$ e o conjunto dos elementos τ -inteiros são τ -invariantes, já que as extensões f_a e $f_{\tau_t(a)}$ possuem o mesmo domínio.

Em geral, não necessariamente podemos escrever expressões do tipo $\tau_{z+z'} = \tau_z \circ \tau_{z'}$ pois sequer sabemos se a composição à direita dessa expressão é possível, ou seja, sequer sabemos se $\text{Im}(\tau_{z'}) \subset \text{Dom}(\tau_z)$. Por isso o seguinte lema é útil.

Lema 61 *Se $a \in \mathcal{A}$ é elemento τ -inteiro-analítico temos, para todo $z, z' \in \mathbb{C}$, que*

$$\tau_{z'+z}(a) = \tau_{z'}(\tau_z(a))$$

Prova. Assumamos de início que $z \in \mathbb{R}$ e tomemos as funções $\mathbb{C} \ni z' \mapsto \tau_{z'+z}(a) \in \mathcal{A}$, $\mathbb{C} \ni z' \mapsto \tau_{z'}(\tau_z(a)) \in \mathcal{A}$. Vimos acima que $\mathcal{A}_\tau$ é τ -invariante (para todo $t \in \mathbb{R}$, $\tau_t(a) \in \mathcal{A}_\tau \forall a \in \mathcal{A}_\tau$), logo $\tau_z(a) \in \mathcal{A}_\tau$. A função $\mathbb{C} \ni z' \mapsto \tau_{z'}(\tau_z(a)) \in \mathcal{A}$ é analítica pois trata-se da função $f_{\tau_z(a)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ (com $\tau_z(a)$ τ -inteiro-analítico). Por outro lado, $\mathbb{C} \ni z' \mapsto \tau_{z'+z}(a)$ é a composição $\tau_{(\cdot)}(a) \circ (\cdot + z)$, onde $(\cdot + z)$ denota $\mathbb{C} \ni z' \mapsto z' + z \in \mathbb{C}$ e $\tau_{(\cdot)}(a)$ denota $\mathbb{C} \ni z'' \mapsto \tau_{z''}(a) \in \mathcal{A}$; trata-se da composição de duas funções analíticas (ainda que uma delas tenha uma álgebra C^* como codomínio) e a composição dessas funções é também analítica, sendo que, mais que isso, vale a “regra da cadeia” (isso se prova de maneira análoga ao caso usual - composição de funções complexas - já que todas as propriedades de limite usadas na prova do caso usual são também válidas em álgebras de Banach). Bom, então essas funções ($\mathbb{C} \ni z' \mapsto \tau_{z'+z}(a) \in \mathcal{A}$ e $\mathbb{C} \ni z' \mapsto \tau_{z'}(\tau_z(a)) \in \mathcal{A}$) são inteiro-analíticas e se igualam na reta real, e portanto o lema 59 (princípio da identidade) implica que elas são iguais. Enfim, quando $z \in \mathbb{R}$ temos que $\tau_{z'+z}(a) = \tau_{z'}(\tau_z(a))$ para $a \in \mathcal{A}_\tau$ e $z' \in \mathbb{C}$ quaisquer. Agora tomemos as funções $\mathbb{C} \ni z \mapsto \tau_{z'+z}(a) \in \mathcal{A}$, $\mathbb{C} \ni z \mapsto \tau_{z'}(\tau_z(a)) \in \mathcal{A}$, onde $z' \in \mathbb{C}$. Pelo que acabamos de provar segue essas funções, quando restritas à reta real, são iguais; se provarmos que são funções analíticas, o lema 59 nos dirá que elas são iguais em $\mathbb{C}$, e disso seguirá o teorema. A analiticidade de $\mathbb{C} \ni z \mapsto \tau_{z'}(\tau_z(a)) \in \mathcal{A}$ segue da linearidade e da continuidade de $\tau_{z'} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, e temos que $\frac{d}{dz}\tau_{z'}(\tau_z(a)) = \tau_{z'}(\frac{d}{dz}\tau_z(a))$; a analiticidade de $\mathbb{C} \ni z \mapsto \tau_{z'+z}(a) \in \mathcal{A}$ já foi provada acima. Isso conclui a prova do lema. ■

Agora queremos mostrar que estados KMS são τ -invariantes, ou seja, se ω é (β, τ) -KMS então $\omega = \omega \circ \tau_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$; nos referiremos a isso dizendo que ω é **estacionário**. Bom, seja ω estado (β, τ) -KMS. Notemos de início que se para todo $a \in \mathcal{A}_\tau$ valer que $\omega(\tau_t(a)) = \omega(a) \forall t \in \mathbb{R}$ então o estado será invariante: isso é imediato do fato de $\mathcal{A}_\tau$ ser denso em $\mathcal{A}$ e da continuidade das funções $\tau_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Como τ_0 é a identidade, provar que

$\omega(\tau_t(a)) = \omega(a) \forall t \in \mathbb{R}$ equivale a provar que a função $t \mapsto \omega(\tau_t(a))$ é constante; sendo a τ -inteiro-analítico (que é o caso dos elementos de $\mathcal{B}_\tau$), sabemos que essa função possui uma extensão analítica no plano complexo (ou seja, uma extensão inteira), sendo ela $F_a \doteq \omega \circ f_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde f_a é a função da definição 58, e é claro que se essa extensão for constante $t \mapsto \omega(\tau_t(a))$ também o será. Sabemos, pelo teorema de Liouville, que para que uma função inteira seja constante é suficiente que ela seja limitada. Enfim, se provarmos que a função $F_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde $F_a \doteq \omega \circ f_a$, é limitada para um elemento $a \in \mathcal{B}_\tau$ qualquer concluiremos disso que ω é estado τ -invariante - além disso, concluiremos que, quando $a \in \mathcal{A}_\tau$, $\omega(\tau_z(a)) = \omega(a)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Primeiro notemos que a função F_a é periódica: para $z \in \mathbb{C}$ qualquer temos

$$F_a(z - i\beta) = \omega(\tau_{z-i\beta}(a)\mathbb{1}) \quad (4.23)$$

$$= \omega(\mathbb{1}\tau_{i\beta}(\tau_{z-i\beta}(a))) \quad (4.24)$$

$$= \omega(\tau_{i\beta}(\tau_{-i\beta}(\tau_z(a)))) \quad (4.25)$$

$$= \omega(\tau_z(a)) \quad (4.26)$$

$$= F_a(z), \quad (4.27)$$

onde usamos que ω é (β, τ) -KMS e o lema 61. Sendo assim, se provarmos que F_a é limitada na faixa $I \doteq \{z \in \mathbb{C}; -i\beta \leq \text{im}(z) \leq 0\}$, F_a será limitada em $\mathbb{C}$. Tomando $z \in \mathbb{C}$ temos

$$|F_a(z)| = |\omega(\tau_z(a))| \quad (4.28)$$

$$\leq \|\tau_z(a)\| \quad (4.29)$$

$$= \|\tau_{\text{Re}(z)}(\tau_{i\text{Im}(z)}(a))\| \quad (4.30)$$

$$= \|\tau_{i\text{Im}(z)}(a)\|, \quad (4.31)$$

sendo que quando $z \in I$ temos que $\text{Im}(z) \in [-\beta, 0]$; se provarmos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|\tau_{ix}(a)\| < M \forall x \in [-\beta, 0]$ teremos que F_a é limitada em I , como desejamos. Ora, $[-\beta, 0]$ é compacto, e então se provarmos que a função $[-\beta, 0] \ni x \mapsto \|\tau_{ix}(a)\| \in \mathbb{R}$ é contínua, ela será limitada (pois funções reais contínuas com domínio compacto são limitadas), e portanto tal M existirá. Como a norma é contínua, basta que provemos que $[-\beta, 0] \ni x \mapsto \tau_{ix}(a) \in \mathcal{A}$ é contínua, e isso é verdade pois trata-se da composição $f_a \circ \gamma$, onde $\gamma : [-\beta, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ é a curva dada por $\gamma(x) \doteq ix$: sabemos que f_a é contínua, por ser analítica, e a curva γ é trivialmente

contínua, e como a composição de funções contínuas é uma função contínua, $[-\beta, 0] \ni x \mapsto \tau_{ix}(a) \in \mathcal{A}$ é contínua. Resumimos isso no seguinte lema.

Lema 62 (τ -invariância dos estados KMS) *Se um estado ω é definido em uma álgebra C^* $\mathcal{A}$ é (β, τ) -KMS então ele é estado τ -invariante (estacionário), ou seja, para todo $a \in \mathcal{A}$ vale que*

$$\omega(\tau_t(a)) = \omega(a) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, quando $a \in \mathcal{A}_\tau$ temos

$$\omega(\tau_z(a)) = \omega(a) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

CAPÍTULO 5

Teoria quântica em topoi

Vamos agora apresentar a formulação contravariante da teoria quântica em topoi. Nossas principais referências serão [9], [5], [6] e [7]. Todas as álgebras C^* - em particular as álgebras de von Neumann - com que lidaremos aqui serão unitais, portanto muitas vezes ocultaremos essa informação.

Na seção 2.3 definimos a categoria dos contextos para uma álgebra C^* qualquer. Na formulação contravariante da teoria quântica em topoi restringimo-nos a álgebras de von Neumann (definição 124), inclusive nos contextos, pois o reticulado de projetores ortogonais de uma álgebra de von Neumann é completo - lema 167 - e tal completude será necessária na definição da chamada daseinização, que é um ingrediente fundamental para a teoria. Bom, pelo bem conhecido teorema 155 sabemos que toda álgebra C^* pode ser representada (definição 152) num espaço de Hilbert e então, se aceitarmos que a categoria dos contextos do sistema dependa da representação, como faremos na discussão sobre estados KMS, não se trata de fato de uma restrição.

Seja $\mathcal{N}$ uma álgebra de von Neumann unital¹ (definição 124). A **Categoria dos contextos** de $\mathcal{N}$, que denotamos por $\mathcal{V}(\mathcal{N})$, é a categoria cujos objetos são as subálgebras de $\mathcal{N}$ von

¹Por conta dos teoremas 83 e 64 sempre assumiremos que a álgebra de von Neumann não possui fatores dos tipos I_1 e I_2 como soma direta.

Neumann comutativas diferentes de $\mathbb{C}1$, sendo 1 a unidade de $\mathcal{N}$,^{2 3} e cujos morfismos são as inclusões de contextos: mais precisamente, os pares de objetos $i_{AB} \equiv (A, B)$ tais que $A \subset B$, onde $\text{dom}(i_{AB}) \doteq A$ e $\text{cod}(i_{AB}) \doteq B$, ou seja, existe um morfismo de A a B se, e só se, $A \subset B$. Em resumo, $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ é o poset das subálgebras von Neumann (consequentemente unitais) comutativas de $\mathcal{N}$. É importante notar que nem todo elemento de $\mathcal{N}$ pertence a um contexto, apenas os elementos normais (por definição $a \in \mathcal{N}$ é normal se $[a, a^*] = 0$). Aqui é importante lembrarmos do que foi discutido na introdução: o cerne da reformulação é a ideia de se olhar para um sistema quântico através de seus contextos clássicos, e esse é o papel que a categoria dos contextos se propõe a cumprir. Na introdução e no apêndice 2.3 justificamos porque faz sentido chamar uma álgebra C^* comutativa unital de “contexto clássico”.

Como já afirmamos, o topos associado ao sistema será $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})} \equiv [\mathcal{V}(\mathcal{N})^{op}, \mathbf{Sets}]$, ou seja, a categoria dos funtores contravariantes de $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ em $\mathbf{Sets}$. É nesse topos que reconstruiremos, em certo sentido, a teoria. O uso desse topos faz com que os elementos que utilizaremos na reformulação tenham caráter contextual, já que os objetos da categoria são funtores que associam contextos a conjuntos e os morfismos dela são transformações naturais cujas componentes são contextos. Como contextos são precisamente semelhantes à maneira como descrevemos sistemas mecânicos clássicos - como discutido na introdução -, o topos escolhido se mostra, ao menos à primeira vista, como um **background** matemático adequado para uma reformulação neorrealista da mecânica quântica, como pretendido por Isham e Döring. Além disso, a maneira como a teoria é reformulada nesse topos também se aproxima de uma teoria “realista”. É introduzido no topos um objeto Σ que faz o papel de “espaços de estados” do sistema, observáveis do sistema são definidos como morfismos $\Sigma \rightarrow R^{\geq}$, onde $R^{\geq}$ é um objeto do topos no qual “observáveis tomam valores” - lembrando que, como discutido no capítulo 2, uma das pretensões da reformulação é livrar a teoria quântica do uso de números reais como valores de quantidades físicas. Proposições sobre o sistema são definidas como subobjetos de Σ , de maneira análoga ao caso clássico, no qual proposições sobre o sistema são subconjuntos do espaço de estados; estados são introduzidos tanto como “medidas de probabilidade” definidas em Σ quanto como valorações para proposições quânticas: ambas as definições são motivadas pela definição clássica de estado. Além disso, há coerência entre essas duas “faces clássicas” da

²Como uma álgebra de von Neumann é uma comutante, ela é unital.

³A exclusão da álgebra $\mathbb{C}1$ tem motivação técnica.

reformulação: a “classicalidade” decorrente do caráter contextual do topos e a “classicalidade” decorrente da maneira como construímos a teoria. Enfim, mesmo sem nos referirmos à linguagem $\mathcal{L}(S)$, que foi apresentada brevemente na seção 2.2, vemos que a teoria quântica em topoi se propõe a reformular a teoria quântica como uma teoria física neorrealista (ver capítulo 2).

5.1 Espaço de estados: O pré-feixe espectral

Na introdução desse trabalho argumentamos que há uma semelhança tanto matemática quanto interpretativa entre contextos de um sistema quântico e sistemas mecânicos clássicos. Em particular vimos o espectro de Gelfand de uma álgebra C^* comutativa unital é o conjunto dos estados puros do contexto. Seja então $\mathcal{N}$ uma álgebra de von Neumann unital e seja $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ a categoria de seus contextos. Temos bem definida uma função $\mathcal{V}(\mathcal{N})_0 \ni A \mapsto \Sigma(A) \in \mathbf{Sets}$, que associa a cada contexto seu espectro de Gelfand. Se $A, B \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ são contextos satisfazendo $A \subset B$, uma maneira simples de se relacionar seus espectros de Gelfand se dá através da restrição $\Sigma(B) \ni \omega \mapsto \omega|_A \in \Sigma(A)$. Além disso sabemos que, para contextos $A \subset B \subset C$, tomando $\omega \in \Sigma(C)$ temos $\omega|_A = (\omega|_B)|_A$. Por fim, para $\omega \in \Sigma(A)$ vale que $\omega|_A = \omega$. Isso mostra que o seguinte funtor contravariante está bem definido.⁴

Definição 63 (Pré-feixe espectral) *Sejam $\mathcal{N}$ álgebra de von Neumann e $\mathcal{V}((\mathcal{N}))$ a categoria de seus contextos. O pré-feixe espectral de $\mathcal{N}$ é o funtor $\Sigma \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}_0$ que*

- (a) *a cada contexto $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ associa seu espectro de Gelfand $\Sigma(A)$, ou seja, $\Sigma_A \doteq \Sigma(A) \forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$.*
- (b) *Se $A \subset B$ então $\Sigma_{i_{AB}}(\omega) \doteq \omega|_A \forall \omega \in \Sigma_B$.*

Se a nível qualitativo podemos dizer que a categoria dos contextos é uma maneira de “transformar” a coleção dos contextos em um “objeto matemático” com uma estrutura útil, o pré-feixe espectral é um “objeto matemático” que nos permite lidar, de maneira coerente e “simultânea”, com todos os “espaços de estados” contextuais do sistema.

Se chamamos Σ de espaço de estados de um sistema representado pela álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ é razoável que queiramos introduzir a noção de estado puro. No caso clássico,

⁴Note que para que o funtor esteja bem definido é suficiente que $\mathcal{N}$ seja álgebra C^* unital, não é necessário que seja von Neumann.

um estado puro é um elemento do espaço de estados, e como estamos numa categoria com objeto inicial, é natural que tentemos definir estado puro como um elemento global do pré-feixe espectral, ou seja, como um morfismo $1 \rightarrow \Sigma$. Essa definição tem um significado físico claro. Com efeito, num contexto A tal morfismo (que é uma transformação natural) seria uma função $\{*\} \rightarrow \Sigma_A$ (devido à definição de objeto terminal numa categoria de pré-feixes, como discutido na subseção 3.6.1); denotemos por $\omega^{(A)}$ a imagem dessa função, que é um estado puro de A . Tomando contextos $X \subset Y$, o diagrama de transformação natural implica que $\omega^{(Y)}|_X = \omega^{(X)}$; em particular para contextos A e B quaisquer temos que

$$\omega^{(B)}|_{A \cap B} = \omega^{(A)}|_{A \cap B}.$$

Essa é a condição de não perturbação usada em contextualidade (sugerimos [29] para uma introdução a contextualidade e [28] para uma apresentação da teoria na linguagem de feixes). Da teoria de contextualidade sabemos que, ao menos no caso em que $\mathcal{N} = \mathcal{B}(H)$ para um espaço de Hilbert H de dimensão finita, tal elemento global não pode existir devido ao teorema de Kochen-Specker. Uma prova simples e elucidativa disso pode ser encontrado no segundo capítulo de [16], mais precisamente na discussão que culmina no corolário 2.29. Em [1] [2], [3] e [4] prova-se que, quando $\mathcal{N} = \mathcal{B}(H)$ para um espaço de Hilbert separável qualquer, o teorema de Kochen-Specker equivale à não existência de elementos globais para o pré-feixe espectral. Para o caso geral, ou seja, para o caso em que $\mathcal{N}$ é uma álgebra de von Neumann temos [19]. Enunciemos o resultado.

Teorema 64 (Kochen-Specker) *Seja $\mathcal{N}$ uma álgebra de von Neumann sem fatores dos tipos I_1 e I_2 como soma direta. Então o pré-feixe espectral Σ (definição 63) definido em $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ não possui elemento global.*

O teorema nos diz então que não podemos definir estado puro como elemento do espaço de estado. Seguindo [6], antes de tentarmos estabelecer uma maneira coerente de se definir estado em $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ introduziremos a noção de proposição; isso se justifica pois as duas noções de estado que introduziremos farão uso desse conceito.

5.2 Proposições quânticas: a linguagem $\mathcal{PL}(S)$ e o conceito de Daseinização

Seguindo a notação do apêndice A.6, no qual procuramos discutir o que nesse trabalho utilizaremos sobre reticulado de projetores, se A é álgebra de von Neumann, vamos denotar por $Pr(A)$ o conjunto dos seus projetores ortogonais; conforme discutido no apêndice, esse conjunto se torna um reticulado completo quando munido da ordem parcial definida pela regra $p \leq q \Leftrightarrow pq = p$ para $p, q \in Pr(A)$; lembremos ainda que $p \leq q \Leftrightarrow p(H) \subset q(H)$, onde H é o espaço de Hilbert tal que $A \subset \mathcal{B}(H)$. O lema 167 é particularmente importante para o que discutiremos aqui.

Antes de prosseguirmos na discussão é importante mencionarmos a interpretação que geralmente se faz na “lógica quântica” de alguns elementos de $Pr(A)$ quando a álgebra de von Neumann A representa algum sistema físico. Bom, como já comentamos, conforme proposto por Birkhoff e von Neumann em [30] os projetores de A são entendidos como as proposições físicas relacionadas ao sistema. Todo projetor $p \in Pr(\mathcal{N})$ é do tipo $e(a \in I)$ para algum par $a \in \mathcal{N}$ autoadjunto e $I \subset \mathbb{R}$, onde, na notação do teorema espectral (teorema 129),

$$e(a \in I) \doteq \int_I 1 d e_{\lambda}^{(a)}.$$

No caso em que H tem dimensão finita temos, pelo teorema 130,

$$e(a \in I) = \sum_{\lambda \in \sigma(a) \cap I} e_{\lambda}^{(a)},$$

ou seja, $e(a \in I)$ é o projetor associado ao subespaço de H gerado pelos autovalores de a que pertencem a I . É importante notar que se $a \in \mathcal{N}$ e $I \subset \mathbb{R}$ é Boreliano, então $e(a \in I) \in \mathcal{N}$; isso é verdade pois álgebras de von Neumann são fechadas para o “cálculo funcional mensurável”. Entendemos então que, quando $p = e(a \in I)$, o projetor p está associado à proposição “ $a \in I$ ”, cujos significados possíveis foram discutidos na seção 2.2; do ponto de vista realista, trata-se da afirmação “o observável a possui um valor, e esse valor pertence ao conjunto I ”. Por fim, como lá comentamos, podemos ter $e(a \in I) = e(b \in J)$, e dessa maneira um projetor está geralmente associado a mais de uma proposição física.

Quando $p \leq q$ dizemos que a proposição p é “mais forte” que a proposição q ; equivalentemente dizemos que q é “mais fraca” que p ou que p implica q . Para justificar essa nomenclatura é útil olharmos para $p(H)$ e $q(H)$. Bom, se o estado do sistema é $\psi \in H$ e $\psi \in e(a \in I)(H)$ sabemos, de acordo com os postulados da mecânica quântica, que se fizermos uma medida de a obteremos necessariamente um valor em $\sigma(a) \cap I$, e desse modo podemos dizer, a nível intuitivo, que o estado ψ associa a essa proposição um valor de verdade, e esse valor é “1” ou “true” - ou seja, podemos dizer que a proposição é verdadeira. Dos postulados da mecânica quântica segue que só podemos afirmar que um estado puro ψ associa o valor “true” para uma proposição $p \equiv e(a \in I)$ quando $\psi \in p(H)$. Ainda usando a noção intuitiva usual de verdade dada por estados, podemos dizer que uma proposição p implica outra proposição q quando q é verdadeira se p o é. Isso acontece se, e só se, $p(H) \subset q(H)$, ou seja, $p \leq q$. Assim, uma proposição p é “mais forte” que outra proposição q quando ela implica essa proposição. É elucidativo pensar no caso de proposições $e(a \in I)$ e $e(a \in J)$ com $I \subset J$. Sabemos que $e(a \in I) \leq e(a \in J)$ (isso é obvio quando H tem dimensão finita, por exemplo) e a proposição $e(a \in I)$ “nos diz mais” sobre a propriedade a que a proposição $e(a \in J)$; isso também ajuda a esclarecer a nomenclatura.

5.2.1 Daseinização

Como já adiantamos, associaremos proposições do tipo “ $a \in I$ ” a subobjetos de Σ . Na lógica quântica usual associamos proposições desse tipo a projetores - associamos “ $a \in I$ ” ao projetor $e(a \in I)$ (teorema 129). Essa associação, por si só, não é questionada por Isham e Döring: a crítica que os autores fazem - e que comumente se faz - em relação à lógica quântica está relacionada ou aos conectivos lógicos (por exemplo, com o fato do reticulado $Pr(\mathcal{N})$ não ser distributivo) ou à noção de verdade utilizada. Dessa maneira, é a princípio coerente que utilizemos os projetores de $\mathcal{N}$ para definir os subobjetos de Σ nos quais interpretaremos as proposições de $\mathcal{PL}(S)$; mais precisamente, é razoável que obtenhamos uma regra que associe um projetor $p \in Pr(\mathcal{N})$ a um subobjeto $\Delta(p)$ de Σ e que associemos uma proposição $a \in I$ tal que $e(a \in I) = p$ a $\Delta(p)$ - note que os autores também não questionam o fato de proposições que são associadas ao mesmo projetores serem consideradas proposições físicas equivalentes. Esse processo em que projetores de $Pr(\mathcal{N})$ são associados a subobjetos de Σ é o que os autores chamam de daseinização. Sugerimos [6] para uma apresentação mais completa do assunto,

principalmente no que diz respeito ao significado físico dos resultados.

Conforme o que foi discutido na subseção 3.6.4 e provado no lema 44, um subobjeto de Σ pode ser entendido como uma coleção “coerente” de subconjuntos $S_A \subset \Sigma_A$: todo subobjeto numa categoria de pré-feixes tem um, e somente um, representante que componente a componente é dado por inclusões, que é o representante que chamamos de “representante principal”. Para encontrarmos uma coleção adequada de subconjuntos para associar a p tomemos o caso clássico como motivação. Vimos na seção 2.2 que uma proposição $a \in I$ é interpretada como o subconjunto $a^{-1}(I)$ do espaço de estados Σ . Bom, $a^{-1}(I) = \{\omega \in \Sigma; a(\omega) \in I\}$. Vimos na mesma subseção que um estado $\omega \in \Sigma$ define uma valoração V^ω em $\mathcal{P}(\Sigma)$ por $V^\omega(X) = 1$ se $\omega \in X$ e $V^\omega(X) = 0$ se $\omega \notin X$ para todo $X \in \mathcal{P}(\Sigma)$ - vimos também que, compondo essa função com a interpretação de $\mathcal{PL}(S)$ em $\mathcal{P}(\Sigma)$ temos trivialmente uma valoração em $\mathcal{PL}(S)$; em resumo, estados puros associam valores de verdade a proposições sobre o sistema e essa associação tem um significado físico muito claro. É trivial que $\omega \in a^{-1}(I)$ se, e só se, $V^\omega(a \in I) = 1$, e assim a proposição $a \in I$ tem como interpretação o conjunto de estados puros do sistema que a tornam verdadeira. Voltando à álgebra de von Neumann, tomemos um contexto A tal que $p \in A$. Nesse contexto podemos entender p como a função $\hat{p} : \Sigma_A \rightarrow \{0, 1\}$ dada pela transformação de Gelfand, como está discutido no apêndice A.3.3; note que estamos usando que $\hat{a}(\Sigma) = \sigma(a)$, resultado que também está provado no apêndice. O conjunto $\hat{p}^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Sigma; \hat{p}(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Sigma; \omega(p) = 1\}$ pode ser comparado ao conjunto $\{\omega \in \Sigma; V^\omega(p) = 1\}$ do caso clássico: o espectro de um operador autoadjunto é interpretado como o conjunto de seus valores possíveis, e no caso de um projetor, esse conjunto é $\{0, 1\}$; quando um estado $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que $\rho(p) = 1$ para um projetor, comumente dizemos que, nesse estado, a proposição p (mais precisamente, todas as proposições que são interpretadas por p) é verdadeira, e sendo ω um estado do contexto - note que um estado ρ , quando restrito a um contexto, pode ser um estado puro - faz sentido dizer que para esse “estado contextual” a proposição p é verdadeira. Desse modo, se A é um contexto ao qual p pertence, o conjunto $\hat{p}^{-1}(\{1\})$ é um candidato a componente A do subobjeto que associaremos a ele. Se A é um contexto ao qual p não pertence não podemos fazer isso. Porém temos em A tanto um conjunto de proposições que implicam p ou, em outras palavras, um conjunto de proposições mais fortes que p (o conjunto $\{q \in Pr(A); q \leq p\}$) quando um conjunto de proposições que são implicadas por p , ou seja, um conjunto de proposições mais fracas que p (o

conjunto $\{q \in Pr(A); q \geq p\}$. Em relação à ordem de $Pr(\mathcal{N})$ faz sentido dizer que existe no conjunto $\{q \in Pr(A); q \leq p\}$ uma proposição que “mais se aproxima” de p , e essa proposição é $\delta^i(p)_A \equiv p_A^i \doteq \bigvee \{q \in Pr(A); q \leq p\}$ - aqui estamos usando que $Pr(A)$ é um reticulado completo, fato que foi provado no apêndice A.5. Note que se trata da proposição mais fraca de A que implica p . A proposição do conjunto $\{q \in Pr(A); q \geq p\}$ que “mais se aproxima” de p é a proposição $\delta^o(p)_A \equiv p_A^o \doteq \bigwedge \{q \in Pr(A); q \geq p\}$; note que se trata da proposição mais forte de A que é implicada por p . Explicitemos essas definições:

$$p_A^o \equiv \delta^o(p)_A \doteq \bigwedge \{q \in Pr(A) | q \geq p\} \quad (5.1)$$

$$p_A^i \equiv \delta^i(p)_A \doteq \bigvee \{q \in Pr(A) | q \leq p\} \quad (5.2)$$

Notemos que se A é um contexto ao qual p pertence, $p_A^0 = p = p_A^i$. Os índices “ i ” e “ o ” vêm de “*inner*” e “*outer*” respectivamente, e a escolha do nome é clara, principalmente quanto pensamos na ordem dos projetores do ponto de vista dos subespaços fechados de H a eles associados. Bom, conseguimos associar ao projetor p duas famílias de projetores; as famílias $\delta^o(p) \doteq \{\delta^o(p)_A; A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})\}$ e $\delta^i(p) \doteq \{\delta^i(p)_A; A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})\}$. Seguindo o que foi argumentado acima devemos olhar para os conjuntos $\Delta(p)_A \doteq \widehat{p_A^o}^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Sigma_A; \omega(p_A^o) = 1\}$ e $\Theta(p)_A \doteq \widehat{p_A^i}^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Sigma_A; \omega(p_A^i) = 1\}$ e ver se as famílias $\widetilde{\Delta(p)} \doteq \{\Delta(p)_A; A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})\}$, $\widetilde{\Theta(p)} \doteq \{\Theta(p)_A; A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})\}$ definem subobjetos de Σ . Veremos que $\widetilde{\Delta(p)}$ define porém $\widetilde{\Theta(p)}$ não. Podemos tomar $\widehat{p_A^i}^{-1}(\{0\})$ em vez de $\widehat{p_A^i}^{-1}(\{1\})$, e veremos que essa família define um subobjeto e que tal subobjeto está relacionado com a negação do subobjeto definido pela família $\widetilde{\Delta(p)}$, o que é à primeira vista consistente com o que já discutimos. Antes de continuar precisaremos de alguns resultados técnicos.

Lema 65 *Sejam $p, q \in Pr(\mathcal{N})$ e $A, B \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$. Então valem as seguintes propriedades*

- (a) $\delta^o(p)_A \geq p$ e $\delta^i(p)_A \leq p$ para todo $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$.
- (b) Se $A \subset B$ então $\delta^o(p)_A \geq \delta^o(p)_B$ e $\delta^i(p)_A \leq \delta^i(p)_B$.
- (c) Se $p \leq q$ então $\delta^o(p)_A \leq \delta^o(q)_A$ e $\delta^i(p)_A \leq \delta^i(q)_B$.
- (d) Se $A \subset B$ então $\delta^o(p)_A = \delta^o(\delta^o(p)_B)_A$ e $\delta^i(p)_A = \delta^i(\delta^i(p)_B)_A$.

(e) Se $p \in Pr(A)$, $\delta^o(p)_A = p = \delta^i(p)_A$; em particular, $\delta^o(1)_A = 1 = \delta^i(1)_A$ e $\delta^o(0)_A = 0 = \delta^i(0)_A$ para qualquer contexto A .

(f) Valem as igualdades

$$\bigvee_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0} \delta^o(p)_A = p = \bigwedge_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0} \delta^i(p)_A.$$

(g) Para uma família de projetores $\{p_j \in Pr(\mathcal{N}) | j \in J\}$ qualquer temos, para $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ qualquer,

$$\delta^o\left(\bigvee_{j \in J} p_j\right)_A = \bigvee_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \quad (5.3)$$

$$\delta^o\left(\bigwedge_{j \in J} p_j\right)_A \leq \bigwedge_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \quad (5.4)$$

e

$$\delta^i\left(\bigvee_{j \in J} p_j\right)_A \geq \bigvee_{j \in J} \delta^i(p_j)_A \quad (5.5)$$

$$\delta^i\left(\bigwedge_{j \in J} p_j\right)_A = \bigwedge_{j \in J} \delta^i(p_j)_A. \quad (5.6)$$

Se $\bigvee_{j \in J} p_j, \bigwedge_{j \in J} p_j \notin A$ as relações acima tornam-se igualdades estritas.

Prova.

(a) Temos que $\delta^o(p)_A \geq p$ pela definição de ínfimo, já que p é cota inferior do conjunto $\{q \in Pr(A) | q \geq p\}$ no reticulado $Pr(\mathcal{N})$; analogamente, $\delta^i(p)_A \leq p$ pela definição de supremo.

(b) Se $A \subset B$, então $\delta^o(p)_A \geq \delta^o(p)_B$ pois $\delta^o(p)_A \in Pr(B)$ e $\delta^o(p)_A \geq p$; de modo análogo, $\delta^i(p)_A \leq \delta^i(p)_B$.

(c) Se $p, q \in Pr(\mathcal{N})$ satisfazem $p \leq q$, então $\delta^o(p)_A \leq \delta^o(q)_A$ já que $\delta^o(q)_A \geq q \geq p$ e $\delta^o(q)_A \in Pr(A)$; de modo análogo prova-se que $\delta^i(p)_A \leq \delta^i(q)_A$.

- (d) Pelo item (b), $\delta^o(p)_A \geq \delta^o(p)_B$ e portanto $\delta^o(p)_A \geq \delta^o(\delta^o(p)_B)_A$ (já que $\delta^o(p)_A \in Pr(A)$ e $\delta^o(p)_A \geq \delta^o(p)_B$). Pelo item (a), $p \leq \delta^o(p)_B \leq \delta^o(\delta^o(p)_B)_A$ e portanto $\delta^o(\delta^o(p)_B)_A \geq \delta^o(p)_A$; isso nos dá a igualdade. De modo análogo prova-se que $\delta^i(p)_A = \delta^i(\delta^i(p)_B)_A$.
- (e) Pelo item (a), $p \leq \delta^o(p)_A$, e se $p \in Pr(A)$, $p \in \{q \in Pr(A) | q \geq p\}$, logo $p \geq \bigvee \{q \in Pr(A) | q \geq p\} = \delta^o(p)_A$ e isso nos dá a igualdade. De modo análogo prova-se que $p = \delta^i(p)_A$ quando $p \in Pr(A)$.
- (f) Temos $p \leq \bigvee_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0} \delta^o(p)_A$ já que p é cota inferior do conjunto $\{\delta^o(p)_A | A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0\}$; por outro lado, como p é projetor ortogonal, p é autoadjunto e portanto esse projetor pertence a ao menos um contexto (basta tomar a álgebra de von Neumann gerada por p e 1; vamos denotá-la por A_p), logo, pelo item (e), $p = \delta^o(p)_{A_p}$, então $p \geq \bigvee_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0} \delta^o(p)_A$ e temos a igualdade. Analogamente se prova que $p = \bigwedge_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0} \delta^i(p)_A$.
- (g) Tomando $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ qualquer temos

$$\forall i \in J \left(\bigwedge_{j \in J} p_j \leq p_j \right) \xRightarrow{(c)} \begin{cases} \forall j \in J \left(\delta^o(\bigwedge_{j \in J} p_j)_A \leq \delta^o(p_j)_A \right) \\ \forall j \in J \left(\delta^i(\bigwedge_{j \in J} p_j)_A \leq \delta^i(p_j)_A \right) \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta^o(\bigwedge_{j \in J} p_j)_A \leq \bigwedge_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \\ \delta^i(\bigwedge_{j \in J} p_j)_A \leq \bigwedge_{j \in J} \delta^i(p_j)_A \end{cases} \quad (5.8)$$

e analogamente se prova que, para $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ qualquer,

$$\delta^o\left(\bigvee_{j \in J} p_j\right)_A \geq \bigvee_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \quad (5.9)$$

$$\delta^i\left(\bigvee_{j \in J} p_j\right)_A \geq \bigvee_{j \in J} \delta^i(p_j)_A. \quad (5.10)$$

Temos $\delta^o(p_j)_A \geq p_j$ e $\delta^i(p_j)_A \leq p_j$ para todo $j \in J$, daí $\bigvee_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \geq \bigvee_{j \in J} p_j$ e $\bigwedge_{j \in J} \delta^i(p_j)_A \leq \bigwedge_{j \in J} p_j$; como $\bigvee_{j \in J} \delta^o(p_j)_A, \bigwedge_{j \in J} \delta^i(p_j)_A \in Pr(A)$ (ou pelo item c) isso implica que $\bigvee_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \geq \delta^o(\bigvee_{j \in J} p_j)_A$ e $\bigwedge_{j \in J} \delta^i(p_j)_A \leq \delta^i(\bigwedge_{j \in J} p_j)_A$; está provada a primeira parte do item. Seja agora $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ tal que $\bigvee_{j \in J} p_j, \bigwedge_{j \in J} p_j \notin A$.

Nesse caso,

$$\delta^o(\bigwedge_{j \in J} p_j)_A = \bigwedge \{q \in Pr(A) \mid q > \bigwedge_{j \in J} p_j\} \quad (5.11)$$

$$\delta^i(\bigvee_{j \in J} p_j)_A = \bigvee \{r \in Pr(A) \mid r < \bigvee_{j \in J} p_j\} \quad (5.12)$$

sendo que $a < b$ se, e só se, $a \leq b$ e $a \neq b$; $a > b$ se, e só se, $a \geq b$ e $a \neq b$. Bom, $q > \bigwedge_{j \in J} p_j$ implica que existe $j \in J$ tal que $q \geq p_j$, e daí $q \geq \delta^o(p_j)_A$ - pois $q \in Pr(A)$ ou pelo item c -; temos $\bigwedge_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \leq \delta^o(p_j)_A \leq q$, e então $\bigwedge_{j \in J} \delta^o(p_j)_A \leq \delta^o(\bigwedge_{j \in J} p_j)_A$. Analogamente se prova que $\delta^i(\bigvee_{j \in J} p_j)_A \geq \bigvee_{j \in J} \delta^i(p_j)_A$, o que completa o item.

■

Vamos agora mostrar que a família de conjuntos $\widetilde{\Delta(p)}$ acima definida determina um subobjeto de Σ . Tomando um projetor ortogonal p de $\mathcal{N}$ temos associado a ele a família de inclusões $\{S_A^p \hookrightarrow \Sigma_A \mid A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0\}$, onde $S_A^p \doteq \widehat{p_A^o}^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(p_A^o) = 1\}$. Queremos definir uma transformação natural $S^p \rightarrow \Sigma \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1$, e para isso precisamos definir o funtor $S \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ (cuja ação nos objetos já está definida, claro); já vimos na subseção 3.6.4 que necessariamente temos que tomar $S_{i_{AB}} \doteq \Sigma_{i_{AB}}|_{S_A^p}$ para qualquer $i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1$; resta então ver se $\Sigma_{i_{AB}}|_{S_A^p}(S_B^p) \subset S_A^p$ - para que o diagrama de transformação natural, no morfismo qualquer $i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1$, comute. Isso equivale a mostrar que para contextos tais que $A \subset B$, se $\omega \in \Sigma_B$ é tal que $\omega(p_B^o) = 1$ então $\omega|_A(p_A^o) = 1$. Isso é válido e decorre do item (b) do lema 65: de fato, temos $p_A^o \geq p_B^o$, ou seja, $p_A^o p_B^o = p_B^o$, assim $1 = \omega(p_B^o) = \omega(p_A^o p_B^o) = \omega(p_A^o) \omega(p_B^o) = \omega(p_A^o) = \omega|_A(p_A^o)$. Enfim, para $p \in Pr(\mathcal{N})$ está bem definido o funtor S^p tal que $S_A^p \doteq \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(p_A^o) = 1\}$ e a transformação natural $S^p \hookrightarrow \Sigma$, cujas componentes são as inclusões $S_A^p \hookrightarrow \Sigma_A$ - a rigor precisaríamos mostrar ainda que S^p preserva a composição de morfismos de $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ e morfismos, mas isso é garantido pelo item d do lema 65. Temos a definição.

Definição 66 (Daseinização externa de um projetor) ⁵ *Seja $p \in \mathcal{N}$ um projetor ortogonal. Chamamos de “daseinização externa de p ” o subobjeto de Σ definido de maneira única (lema*

⁵O neologismo “daseinização” vem do termo “dasein”, que expressa uma ideia fundamental da filosofia de Heidegger. Uma justificativa dessa escolha pode ser encontrada em [9]. Note que não é a primeira vez que a filosofia Heideggeriana aparece como “background filosófico” da visão neorrealista apresentada em [9]. Landsman, apesar de considerar a ideia de “daseinização” como uma das características mais interessantes da formulação contravariante, critica a escolha do nome - ver por exemplo [16].

44) pelo funtor $\Delta(p)$ dado por

$$(a) \Delta(p)_A \doteq \widehat{\delta^o(p)_A}^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(\delta^o(p)_A) = 1\} \text{ para todo } A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$$

$$(b) \Delta(p)_{i_{AB}} \doteq \Sigma_{i_{AB}}|_{S_B^p} \text{ para todo } i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1.$$

Geralmente ocultamos o termo “externa” e nos referimos somente à “daseinização de p ”. Costumamos chamar também o funtor $\Delta(p)$ de daseinização de p .

Temos bem definido um mapa $Pr(\mathcal{N}) \ni p \mapsto \Delta(p) \in Sub(\Sigma)$, onde, agora, $\Delta(p)$ denota o subobjeto associado a $\Delta(p) \hookrightarrow \Sigma$. Essa é a chamada “daseinização externa” ou, de maneira mais simples, “daseinização”.

Definição 67 (Daseinização externa) Chamamos de “daseinização externa” a função dada por $Pr(\mathcal{N}) \ni p \mapsto \Delta(p) \in Sub(\Sigma)$.

É útil resumirmos o que foi feito até aqui. Primeiro, tomamos um projetor $p \in \mathcal{N}$ e “olhamos para ele” do ponto de vista da categoria dos contextos: transformamos esse projetor em uma família contextual de projetores. A essa família associamos uma família contextual de subconjuntos dos espectros de Gelfand dos contextos, e dessa maneira obtivemos um subobjeto de Σ . Vemos assim que $\Delta(p)$, o subobjeto de Σ ao qual associamos o projetor $p \in \mathcal{N}$, possui características tanto da definição quântica usual de proposição, já que se trata de uma coleção de projetores, quanto da definição clássica de proposição, já que se trata de um subobjeto de pré-feixe espectral, objeto esse que se propõe a ser o espaço de estados do sistema.

A daseinização externa é uma injetora, e isso é importante para que essa associação não nos faça “perder proposições” de $\mathcal{PL}(S)$, ou seja, não torne equivalentes proposições que no sentido usual não o são (ou seja, proposições que não são associadas ao mesmo projetor). Por isso é importante o seguinte lema.

Lema 68 A daseinização $Pr(\mathcal{N}) \ni p \mapsto \Delta(p) \in Sub(\Sigma)$ é uma função injetora.

Prova. Graças ao lema 44 é suficiente que provemos que $\Delta(p) = \Delta(q)$ implica $p = q$. Bom, sejam $p, q \in Pr(\mathcal{N})$ tais que $\Delta(p) = \Delta(q)$ (é mais coerente entender essa igualdade como uma igualdade de transformações naturais). Temos que $\Delta(p)_A = \Delta(q)_A$ para todo contexto A e, em particular, para um contexto C ao qual p pertença (que sempre existe; podemos tomar por

exemplo a álgebra de von Neumann gerada por 1 e p). Temos nesse contexto que $\widehat{p}^{-1}(\{1\}) = \widehat{\delta^o(q)_C}^{-1}(\{1\})$, e sendo p e $\delta^o(q)_C$ projetores isso implica, pela injetividade da transformação de Gelfand, que $p = \delta^o(q)_C$. Mas pelo item f do lema 65 sabemos que $q = \bigvee_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0} \delta^o(q)_A$, e dissemos que $q \leq p$. Isso também prova que $p \leq q$ - basta trocarmos a notação e tomarmos um contexto ao qual q pertença. Portanto vale a igualdade. ■

Numa álgebra de von Neumann comutativa A há uma bem conhecida relação biunívoca entre projetores de A e subconjuntos clopen (aberto e fechado) do espectro de Gelfand Σ_A - quando munido da topologia de Gelfand (137). Uma maneira de se obter essa relação é associando o projetor $p \in A$ ao conjunto $\widehat{p}^{-1}(\{1\})$ - abaixo provaremos que isso de fato estabelece uma relação biunívoca. Assim, em contextos, a noção de “subconjunto clopen” caracteriza o tipo de subconjunto de Σ_A que deve ser considerado caso pretendamos estudar “lógica quântica” do ponto de vista de Σ_A . É coerente então afirmar que nem todo subobjeto de Σ faz sentido enquanto proposição de uma “lógica quântica”. Uma maneira simples de se tentar caracterizar os subobjetos que façam sentido enquanto proposições é impor que o subobjeto esteja, em cada contexto, relacionado a um projetor. Temos a seguinte definição.

Definição 69 (Subobjeto clopen) *Seja $[\iota]$ um subobjeto de Σ e seja $S \xrightarrow{\iota} \Sigma$ seu único representante principal (lema 44). Dizemos que $[\iota]$ é um subobjeto clopen de Σ se $S_A \subset \Sigma_A$ é subconjunto clopen (aberto e fechado) de Σ_A em todo contexto A . Denotamos por $Sub_{cl}(\Sigma)$ a coleção de todos os subobjetos clopen de Σ*

A daseinização de um projetor $p \in Pr(\mathcal{N})$ é trivialmente um subobjeto clopen, e portanto a daseinização é uma função injetora $\Delta : Pr(\mathcal{N}) \rightarrow Sub_{cl}(\Sigma)$. Porém, como afirmado em [6], a daseinização não é uma função sobrejetora. Assim, nem todo subobjeto clopen do pré-feixe espectral é a daseinização de um projetor. Veremos que a coleção $Sub_{cl}(\Sigma)$ forma uma álgebra de Heyting completa e que essa álgebra pode ser usada para interpretar a linguagem $\mathcal{PL}(S)$ através da daseinização. Veremos também que, dentre os elementos de $Sub_{cl}(\Sigma)$, os elementos do tipo “daseinização de um projetor” têm características importantes. Além disso, é razoável pensar que $Sub_{cl}(\Sigma)$ nos permite definir proposições que, apesar de fazerem sentido enquanto proposições sobre o sistema, não poder ser associadas a projetores.

A relação biunívoca entre o conjunto dos projetores de uma álgebra comutativa A e o conjunto dos subconjuntos clopen de Σ_A é fácil de se provar. Com efeito, seja A álgebra de

von Neumann comutativa; primeiro notemos que, devido ao lema 164, um projetor p em A é necessariamente ortogonal já que ele é normal. Seja então $p \in Pr(A)$ e tomemos a função contínua $\hat{p} : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{C}$. Sabemos que $\hat{p}(\Sigma_A) = \sigma(p) = \{0, 1\}$. Seja $S_A^{(p)} \doteq \hat{p}^{-1}(\{1\})$. A bola aberta $B_{\frac{1}{2}}(1) \doteq \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| < \frac{1}{2}\}$ é um conjunto aberto e $\hat{p}^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(1)) = S_A^{(p)}$, logo, por $\hat{p}$ ser contínua, $S_A^{(p)}$ é aberto; tomando a bola fechada $\overline{B_{\frac{1}{2}}(1)}$ e usando o fato de que uma função entre espaços topológicos é contínua se, e só se, a pré-imagem de fechados é sempre um fechado, concluímos que $S_A^{(p)}$ é fechado; enfim, $S_A^{(p)} \subset \Sigma_A$ é um conjunto clopen (aberto e fechado) no espaço topológico Hausdorff compacto Σ_A (proposição 138). Por outro lado, seja $S_A \subset \Sigma_A$ conjunto clopen. Definindo uma função $\hat{p} : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{C}$ por $\hat{p}(\omega) \doteq 1$ se $\omega \in S_A$ e $\hat{p}(\omega) \doteq 0$ se $\omega \notin S_A$, temos que $\hat{p}$ é contínua (pois S_A é clopen), que $\hat{p}(\Sigma_A) \subset \mathbb{R}$ e que $\hat{p}^2 = \hat{p}$; essas propriedades e a transformação de Gelfand 139 implicam que o elemento $p \in A$ ao qual $\hat{p}$ está associada (pela transformação de Gelfand) é um projetor. Em resumo, se A é álgebra de von Neumann comutativa, todo subconjunto clopen de Σ_A é da forma $\hat{p}^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Sigma_A | \omega(p) = 1\}$ para um, e somente um, projetor $p \in pr(A)$ - a unicidade decorre da injetividade da transformação de Gelfand. Além disso, é claro que o projetor $p^\perp \doteq 1 - p$ é o único projetor $q \in A$ tal que $\omega(q) = 1 \Leftrightarrow \omega(p) = 0$ e $\omega(q) = 0 \Leftrightarrow \omega(p) = 1$, e portanto todo subconjunto clopen de Σ_A é da forma $\hat{q}^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Sigma(A) | \omega(p) = 0\}$ para um, e somente um, projetor $q \in pr(A)$.

Para finalizar essa subseção falaremos um pouco sobre a noção de daseinização interna e mostraremos que a daseinização interna de um projetor não é nada mais que a daseinização externa da negação (pseudo-complemento) desse projetor. Isso nos diz que é suficiente que trabalhemos com apenas uma delas; escolheremos a externa por conveniência. Bom, tomando contextos $A \subset B$, é falso em geral que, para $\omega \in \Sigma_B$ e $p \in Pr(\mathcal{N})$, $\omega(\delta^i(p)_B) = 1$ implique $\omega(\delta^i(p)_A) = 1$ pois não temos, como no caso da daseinização externa, que $\delta^i(p)_A \geq \delta^i(p)_B$; porém pelo lema 65 sabemos que $\delta^i(p)_A \leq \delta^i(p)_B$, e portanto $\omega(\delta^i(p)_B) = 0$ implica $\omega(\delta^i(p)_A) = 0$ (basta usar a multiplicidade de ω ou o fato de estados preservarem ordem de projetores). Isso nos diz que a seguinte definição faz sentido.

Definição 70 (Daseinização interna de um projetor) *Seja $p \in \mathcal{N}$ um projetor ortogonal. Chamamos de “daseinização interna de p ” o subobjeto de Σ definido de maneira única (lema 44) pelo funtor $\Theta(p)$ dado por*

$$(a) \Theta(p)_A \doteq \widehat{\delta^o(p)_A}^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(\delta^o(p)_A) = 0\} \text{ para todo } A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$$

$$(b) \Theta(p)_{i_{AB}} \doteq \Sigma_{i_{AB}}|_{S_B^p} \text{ para todo } i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1.$$

$\Theta(p)_A$ é subconjunto clopen de Σ_A pois seu complemento $\Delta(p)_A$ o é. Temos

Definição 71 (Daseinização interna) Chamamos de “daseinização interna” a função dada por $Pr(\mathcal{N}) \ni p \mapsto \Theta(p) \in Sub(\Sigma)$.

Assim como no caso da daseinização externa, essa função é injetora. A prova é análoga e também utiliza o item *f* do lema 65.

Lema 72 A daseinização interna $Pr(\mathcal{N}) \ni p \mapsto \Theta(p) \in Sub(\Sigma)$ é uma função injetora.

Vamos agora à mencionada relação entre essas duas noções de daseinização. É importante notar que, como de costume, chamaremos de “negação” de um projetor p o seu pseudo-complemento $p^\perp = 1 - p$. Bom, é um resultado bem conhecido que, para uma coleção de projetores $\{p_i \in (Pr(\mathcal{N})), i \in I\}$ qualquer,

$$\bigvee_{i \in I} p_i = 1 - \bigwedge_{i \in I} (1 - p_i) \quad (5.13)$$

$$\bigwedge_{i \in I} p_i = 1 - \bigvee_{i \in I} (1 - p_i) \quad (5.14)$$

(ver por exemplo [48]). Usando isso fica fácil provar que

$$\delta^i(p)_A = 1 - \delta^o(1 - p)_A \quad (5.15)$$

para quaisquer $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ e $p \in Pr(\mathcal{N})$. Com efeito, sabemos que o mapa $Pr(A) \ni p \mapsto p^\perp = 1 - p \in A$ é uma involução, ou seja, é uma bijeção cuja inversa é ela mesma $((p^\perp)^\perp = p)$

e, mais que isso, que $q \leq p \Leftrightarrow q^\perp \geq p^\perp$, e assim

$$\delta^o(p^\perp)_A = \bigwedge \{q \in Pr(A); q \geq p^\perp\} \quad (5.16)$$

$$= \bigwedge \{q \in Pr(A); q^\perp \leq p\} \quad (5.17)$$

$$= \bigwedge \{r^\perp \in Pr(A); r \leq p\} \quad (5.18)$$

$$= 1 - \bigvee \{r \in Pr(A); r \leq p\} \quad (5.19)$$

$$= 1 - \delta^i(p)_A. \quad (5.20)$$

Disse é imediato que

$$\Theta(p) = \Delta(p^\perp).$$

Assim, como já afirmamos, a daseinização interna de um projetor p é a daseinização externa da negação desse projetor.

Vamos agora mostrar que $Sub_{cl}(\Sigma)$ forma uma álgebra de Heyting quando munido da ordem contextual ($S \preceq T$ se, e só se, $S_A \subset T_A$ para todo contexto A).

5.2.2 Álgebra de Heyting de subobjetos clopen

No apêndice A.5 procuramos reunir resultados fundamentais sobre reticulados e álgebras de Heyting que utilizaremos aqui.

Queremos introduzir uma ordem parcial em $Sub_{cl}(\Sigma)$ que faça desse conjunto uma álgebra de Heyting completa. Sabe-se que há uma maneira canônica de se definir uma ordem parcial em $Sub(D)$ - a coleção dos subobjetos de $D \in \mathcal{C}_0$, onde $\mathcal{C}$ é um topos qualquer - que faz desse conjunto uma álgebra de Heyting; apresentamos essa ordem brevemente ao fim da subseção 3.2. A ordem parcial que usaremos em $Sub_{cl}(\Sigma)$ é, como se poderia esperar, a ordem canônica de subobjetos. Porém, é importante notar que o supremo de um conjunto infinito em $Sub_{cl}(\Sigma)$ não é igual ao supremo desse conjunto em $Sub(\Sigma)$, e consequentemente o mesmo se aplica para ínfimos infinitos, implicações $S \rightarrow T$ e negações $\neg S$ (isso segue da definição desses elementos, como foi discutido em A.5). Isso acontece porque, dada uma coleção $\mathcal{S}$ de subobjetos clopen de Σ , em geral o subobjeto $\inf\{T \in Sub(\Sigma); \forall S \in \mathcal{S} (T \succeq S)\}$ (quando introduzirmos a “ordem contextual”, que é a ordem canônica de subobjetos, ficará claro que esse subobjeto existe) não é subobjeto clopen; porém, apesar disso, o seguinte subobjeto existe e é clopen:

$\inf\{T \in Sub_{cl}(\Sigma); \forall S \in \mathcal{S}(T \succeq S)\}$. A partir de agora, vamos apresentar a construção sem fazer referência ao caso geral (à álgebra de Heyting $Sub(\Sigma)$). Apresentaremos a ordem de subobjetos enfatizando seu caráter contextual. É interessante notar também que a álgebra de Heyting $Sub_{cl}(\Sigma)$ “emerge” de uma coleção contextual de álgebras de Boole $Cl(\Sigma_a)$ ⁶, o que, do ponto de vista de uma teoria que se propõe estudar um sistema quântica a partir de seus contextos clássicos, é interessante: uma estrutura de álgebra de Heyting (intuicionista, não clássica), que será utilizada como modelo para a lógica quântica intuicionista, emerge da “lógica clássica dos contextos”, interpretada, no contexto A, em $Cl(A)$.

Antes de começarmos a construção vale a pena explicitarmos como interpretamos $\mathcal{PL}(S)$ - a linguagem proposicional sobre um sistema S que foi introduzida na seção 2.2 - em $Sub_{cl}(\Sigma)$. Se $\mathcal{PL}(S)_0$ denota a coleção das proposições primitivas da linguagem - proposições do tipo $a \in I$ - então a composição

$$\mathcal{PL}(S)_0 \ni a \in I \mapsto e(a \in I) \mapsto \Delta(e(a \in I)) \in Sub_{cl}(\Sigma)$$

define uma função $\pi : \mathcal{PL}(S)_0 \rightarrow Sub_{cl}(\Sigma)$. Estendemos π para $\mathcal{PL}(S)$ da maneira canônica: π é a única função de $\mathcal{PL}(S)$ a $Sub_{cl}(\Sigma)$ tal que $\pi(P) = \Delta(e(P))$ para toda proposição primitiva $P \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e que satisfaz, para todo $P, Q \in \mathcal{PL}(S)$

$$\pi(P \vee Q) = \pi(P) \vee \pi(Q) \quad (5.21)$$

$$\pi(P \wedge Q) = \pi(P) \wedge \pi(Q) \quad (5.22)$$

$$\pi(P \rightarrow Q) = \pi(P) \rightarrow \pi(Q) \quad (5.23)$$

$$\pi(\neg P) = \neg \pi(P). \quad (5.24)$$

Sendo $Sub_{cl}(\Sigma)$ álgebra de Heyting, como provaremos, podemos entender $\mathcal{PL}(S)$ como uma linguagem proposicional intuicionista.

Seja A álgebra de von Neumann unital comutativa. Sabemos que $Pr(A)$ forma um reticulado pseudocomplementado completo distributivo (corolário 169) e que há uma bijeção entre $Cl(\Sigma_A)$, o conjunto dos subconjuntos clopen de Σ_A , e $Pr(A)$. Se p é projetor vamos escre-

⁶ $Cl(S)$ é a álgebra de Boole formada pelos subconjuntos clopen de A , sendo que a ordem tomada é a inclusão conjuntista.

ver $S^p \doteq \widehat{p}^{-1}(\{1\})$, sendo que, como já mostramos, a função $Pr(A) \ni p \xrightarrow{S} S^p \in Cl(\Sigma_A)$ é bijeção. Bom, usando a multiplicidade dos estados puros é fácil ver que $p \leq q$ implica $S^p \subset S^q$; por outro lado, se $S^p \subset S^q$ temos que $\widehat{p} \leq \widehat{q}$ na ordem “ponto a ponto” de funções, e como a transformação de Gelfand preserva a ordem dos elementos positivos da álgebra, temos $p \leq q$ (já que a ordem de projetores “é” a ordem dos elementos positivos). Enfim, temos $p \leq q$ se, e só se, $S^p \subset S^q$, sendo que a inclusão é ordem parcial em $Cl(\Sigma_A)$. A função $S : Pr(A) \rightarrow Cl(\Sigma_A)$ é um homomorfismo entre os posets $(Pr(A), \leq)$ e $(\Sigma_A, \subset)$, e disso é imediato que, por $(Pr(A), \leq)$ ser reticulado completo distributivo, $(\Sigma_A, \subset)$ também o é. Note que $S^1 = \Sigma_A$ e $S^0 = \emptyset$ são maior e menor elementos de $(\Sigma_A, \subset)$ respectivamente, e portanto temos um reticulado completo distributivo limitado. É fácil ver que $S^{p \vee q} = S^p \cup S^q$ e que $S^{p \wedge q} = S^p \cap S^q$, porém não é igualmente simples caracterizar em $Cl(\Sigma_A)$ supremos e ínfimos de coleções quaisquer. Trata-se porém de um resultado bem conhecido. Se $\mathcal{S} \subset Cl(\Sigma_A)$, ou seja, se $\mathcal{S}$ é uma coleção de subconjuntos clopen de Σ_A , então ⁷

$$\bigvee \mathcal{S} = \overline{\bigcup \mathcal{S}} \quad (5.25)$$

$$\bigwedge \mathcal{S} = \text{int} \left(\bigcap \mathcal{S} \right). \quad (5.26)$$

Podemos ir além. Usando essa bijeção podemos provar que tanto $Pr(A)$ quanto $Cl(\Sigma_A)$ são álgebras de Boole completas, e portanto álgebras de Heyting.

Em $Sub_{cl}(\Sigma)$ podemos definir uma relação $\preceq$ pela regra $S \preceq T \Leftrightarrow S_A \subset T_A \forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$, onde $S, T \in Sub_{cl}(\Sigma)$, e é imediato que essa relação é uma ordem parcial em $Sub_{cl}(\Sigma)$ (para a antissimetria de $\preceq$ é importante notar que a imagem de $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ quando aplicado a um morfismo $i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1$ qualquer é, necessariamente, a restrição de $\Sigma_{i_{AB}}$ a S_B). Como comentamos, essa é a ordem parcial canônica que define para subobjetos. Vamos mostrar que $(Sub_{cl}(\Sigma), \preceq)$ é uma álgebra de Heyting completa. De início, é útil provarmos alguns resultados preliminares que serão importantes para a completude da álgebra.

Lema 73 *Seja Σ_X o espectro de Gelfand associado à álgebra de Banach X (definição 134) munido da topologia de Gelfand (definição 137). Se B é álgebra de Banach e A é subálgebra de Banach de B , o mapa $\Sigma_{i_{AB}} : \Sigma_B \rightarrow \Sigma_A$, onde $\Sigma_{i_{AB}}(\omega) \doteq \omega|_A \forall \omega \in \Sigma_B$, é contínuo.*

⁷Note que estamos afirmando que o fecho de um conjunto aberto é um conjunto aberto e que o interior de um fechado é um conjunto fechado. Essas propriedades não são usuais se devem ao fato do espectro de Gelfand ser um espaço topológico extremamente desconexo.

Prova. Para provar que $\Sigma_{i_{AB}}$ é contínua é suficiente que provemos que a pré-imagem de um aberto básico qualquer de Σ_A é um aberto de Σ_B . Sendo a topologia de Gelfand a topologia gerada por uma família de funções (as funções definidas pela transformação de Gelfand; definições 136 e 137), os abertos básicos de Σ_X (onde X é álgebra de Banach qualquer) são os conjuntos da forma $\cap_{n=1}^N \widehat{x_n}^{-1}(O_n)$, onde $N \in \mathbb{N}$, $O_n \subset \mathbb{C}$ é aberto, $x_n \in X$ e $\widehat{x_n}$ é a função definida pela transformação de Gelfand. Se $a_1, \dots, a_N \in A$ temos

$$\Sigma_{i_{AB}}^{-1} \left(\cap_{n=1}^N \widehat{a_n}^{-1}(O_n) \right) = \{ \omega \in \Sigma_B; \omega|_A(a_n) \in O_n, n = 1, \dots, N \} \quad (5.27)$$

$$= \{ \omega \in \Sigma_B; \omega(a_n) \in O_n, n = 1, \dots, N \} \quad (5.28)$$

$$= \cap_{n=1}^N \widehat{a_n}^{-1}(O_n). \quad (5.29)$$

Note que $\widehat{a_n}$ denota tanto a função de Σ_A a $\mathbb{C}$ definida pela transformação de Gelfand $G : A \rightarrow \mathbf{F}(\Sigma_A, \mathbb{C})$ aplicada em $a_n \in A$ quanto a função de Σ_B a $\mathbb{C}$ definida pela transformação de Gelfand $\tilde{G} : B \rightarrow \mathbf{F}(\Sigma_B, \mathbb{C})$ aplicada em $a_n \in A \subset B$. ■

A prova que conhecemos do seguinte lema é não trivial (por exemplo, envolve resultados sobre o espectro de Stone da álgebra); por isso não a exibiremos.

Lema 74 *Seja B álgebra de von Neumann comutativa e $A \subset B$ subálgebra de von Neumann de B . Então o mapa $\Sigma_{i_{AB}} : \Sigma_B \rightarrow \Sigma_A$, onde $\Sigma_{i_{AB}}(\omega) \doteq \omega|_A \forall \omega \in \Sigma_B$, é aberto.*

Seja agora $\mathcal{S} \subset \text{Sub}_{cl}(\Sigma)$; podemos definir, para todo $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$,

$$(\bigvee \mathcal{S})_A \doteq \bigvee_{S \in \mathcal{S}} S_A = \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_A},$$

que é um subconjunto clopen de Σ_A (sendo que, claro, $\bigvee_{S \in \mathcal{S}} S_A \equiv \bigvee \{S_A \in \Sigma_A | S \in \mathcal{S}\}$ denota o supremo tomado no reticulado completo formado pelos subconjuntos clopen de Σ_A). Para $i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1$ qualquer, vamos mostrar que, quando $\omega \in (\bigvee \mathcal{S})_B$, $\omega|_A \in (\bigvee \mathcal{S})_A$, e então, pelo que já discutimos, estará bem definido o subobjeto (clopen) $\bigvee \mathcal{S}$ - que, como a notação indica, será o supremo do conjunto $\mathcal{S}$. Bom, se $\omega \in \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_B$ então $\omega \in S_B$ para algum $S \in \mathcal{S}$ e daí $\omega|_A \in S_A \subset \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_B}$, já que S é subobjeto de Σ . Para $\omega \in \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_B}$ suponhamos, por absurdo, que $\omega|_A \notin \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_A}$. Nesse caso, existe uma vizinhança aberta V de $\omega|_A$ tal que $V \cap \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_A} = \emptyset$ (pois Σ_A é compacto Hausdorff e, portanto, regular), e daí

$\emptyset = \Sigma_{i_{AB}}^{-1}(V \cap \overline{\cup_{S \in \mathcal{S}} S_A}) = \Sigma_{i_{AB}}^{-1}(V) \cap \Sigma_{i_{AB}}^{-1}(\overline{\cup_{S \in \mathcal{S}} S_A})$, e como $\cup_{S \in \mathcal{S}} S_B \subset \Sigma_{i_{AB}}^{-1}(\overline{\cup_{S \in \mathcal{S}} S_A})$, temos $\Sigma_{i_{AB}}^{-1}(V) \cap \cup_{S \in \mathcal{S}} S_B = \emptyset$; sendo $\Sigma_{i_{AB}}$ contínua e V aberto em Σ_A , $\Sigma_{i_{AB}}^{-1}(V)$ é vizinhança aberta de ω em Σ_B , e disso concluímos que $\omega \notin \overline{\cup_{S \in \mathcal{S}} S_B}$, contrariando a hipótese. Enfim, está bem definido o subobjeto clopen $\bigvee \mathcal{S}$ de Σ . $\bigvee \mathcal{S}$ é supremo, em $(Sub_{cl}(\Sigma), \preceq)$, do conjunto $\mathcal{S} \subset Sub_{cl}(\Sigma)$ pois $\bigvee_{S \in \mathcal{S}} S_A = \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_A}$, ou seja, porque $\overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_A}$ é o supremo de $\{S_A, S \in \mathcal{S}\}$ no reticulado completo formado pelos subconjuntos clopen de Σ_A . No caso em que $\mathcal{S}$ contém apenas dois elementos temos

$$(S \vee T)_A = S_A \cup T_A.$$

De maneira semelhante podemos definir, para todo $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$,

$$(\bigwedge \mathcal{S})_A \doteq \bigwedge_{S \in \mathcal{S}} S_A = \text{int} \left(\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S_A \right).$$

Vamos mostrar que isso define um subobjeto de Σ , ou seja, mostremos que para contextos $A \subset B$ temos $\omega|_A \in (\bigwedge \mathcal{S})_A$ quando $\omega \in (\bigwedge \mathcal{S})_B$. Bom, é trivial que $\Sigma_{i_{AB}}(\bigwedge_{S \in \mathcal{S}} S_B) \subset \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S_A$; do lema 74 segue que $\Sigma_{i_{AB}}(\bigwedge_{S \in \mathcal{S}} S_B)$ é aberto em Σ_A , e sendo o interior de um conjunto o maior aberto nele contido, temos $\Sigma_{i_{AB}}((\bigwedge \mathcal{S})_B) \subset (\bigwedge \mathcal{S})_A$. Isso prova que temos um subobjeto (clopen) de Σ . Esse subobjeto é, claro, o ínfimo de $\mathcal{S}$ em $(Sub_{cl}(\Sigma), \preceq)$. Se $\mathcal{S}$ contem apenas dois elementos temos

$$(S \wedge T)_A \doteq S_A \wedge T_A = S_A \cap T_A.$$

Até aqui mostramos que $(Sub_{cl}(\Sigma), \preceq)$ é um reticulado; como $\preceq$ é definida “componente a componente”, e como a coleção dos subconjuntos clopen de Σ_A é um reticulado distributivo, $(Sub_{cl}(\Sigma), \preceq)$ também o é - a partir daqui escreveremos $Sub_{cl}(\Sigma)$ para denotar também $(Sub_{cl}(\Sigma), \preceq)$. Note que, mais que distributivo, $Sub_{cl}(\Sigma)$ é “infinitamente distributivo”, ou seja,

$$T \wedge \bigvee_{S \in \mathcal{S}} S = \bigvee_{S \in \mathcal{S}} T \wedge S,$$

pois essa propriedade é válida contextualmente.

Temos trivialmente que Σ é maior elemento de $Sub_{cl}(\Sigma)$; além disso, o pré-feixe 0 definido por $0_A \doteq \emptyset \forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ é subobjeto clopen de Σ (por construção) e, claro, $0 \preceq S \forall S \in$

$Sub_{cl}(\Sigma)$, logo 0 é menor elemento de $Sub_{cl}(\Sigma)$ - estamos seguindo a terminologia do apêndice A.5. Enfim, $Sub_{cl}(\Sigma)$ é um reticulado (infinitamente) distributivo limitado. Para que $Sub_{cl}(\Sigma)$ seja álgebra de Heyting é necessário que, para qualquer par $S, T \in Sub_{cl}(\Sigma)$, o conjunto

$$\{U \in Sub_{cl}(\Sigma) | U \wedge S \preceq T\}$$

possua um maior elemento (definição 162). Bom, se $U \wedge S \preceq T$ então $U_A \cap S_A \subset T_A$ para todo contexto A ; mais que isso, tomando $\omega \in U_A \cap S_A$ temos, para todo contexto $A' \subset A$, que $\omega|_{A'} \in U_{A'} \cap S_{A'}$. Concluimos disso que, para U no conjunto acima, vale que $U_A \subset \{\omega \in \Sigma_A; \omega|_{A'} \in S_{A'} \Rightarrow \omega|_{A'} \in T_{A'} \forall A' \subset A\}$. Queremos o maior elemento da coleção, e para isso definimos, num contexto A qualquer,

$$(\widetilde{S \rightarrow T})_A \doteq \{\omega \in \Sigma_A; \omega|_{A'} \in S_{A'} \Rightarrow \omega|_{A'} \in T_{A'} \forall A' \subset A\}, \quad (5.30)$$

sendo que

$$(\widetilde{S \rightarrow T})_A = \bigcap_{A' \in \downarrow A} \{\omega \in \Sigma_A; \omega|_{A'} \in S_{A'} \Rightarrow \omega|_{A'} \in T_{A'}\} \quad (5.31)$$

$$= \bigcap_{A' \in \downarrow A} \left\{ \omega \in \Sigma_A; \omega \in \Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(S_{A'}) \Rightarrow \omega \in \Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(T_{A'}) \right\} \quad (5.32)$$

$$= \bigcap_{A' \in \downarrow A} \left[\left(\Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(S_{A'}) \cap \Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(T_{A'}) \right) \cup \left(\Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(S_{A'}) \right)^c \right] \quad (5.33)$$

$$= \bigcap_{A' \in \downarrow A} \left[\left(\Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(S_{A'}) \right)^c \cup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(T_{A'}) \right] \quad (5.34)$$

$$= \bigcap_{A' \in \downarrow A} \left[\Sigma_{i_{A'A}}^{-1}((S_{A'})^c) \cup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1}(T_{A'}) \right]. \quad (5.35)$$

Assim, $(\widetilde{S \rightarrow T})_A$ é a interseção de uma coleção (não necessariamente contável) de subconjuntos clopen de Σ_A - pois $\Sigma_{i_{A'A}}$ é contínua (lema 73). Queremos que $(S \rightarrow T)$ seja um subobjeto

clopen de Σ , e portanto definimos

$$(S \rightarrow T)_A \doteq \text{int} \left(\bigcap_{A' \in \downarrow A} \left[\Sigma_{i_{A'A}}^{-1} ((S_{A'})^c) \bigcup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1} (T_{A'}) \right] \right) \quad (5.36)$$

$$= \bigwedge_{A' \in \downarrow A} \left[\Sigma_{i_{A'A}}^{-1} ((S_{A'})^c) \bigcup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1} (T_{A'}) \right] \quad (5.37)$$

sendo que o ínfimo acima é o ínfimo tomado no reticulado completo formado pelos subconjuntos clopen de Σ_A . Precisamos provar ainda que isso define um subobjeto de Σ . Bom, tomando contextos A, B tais que $A \subset B$, é fácil ver que, se

$$\omega \in \bigcap_{B' \in \downarrow B} \left[\left(\Sigma_{i_{B'B}}^{-1} (S_{B'}) \right)^c \bigcup \Sigma_{i_{B'B}}^{-1} (T_{B'}) \right],$$

então

$$\omega|_A \in \bigcap_{A' \in \downarrow A} \left[\left(\Sigma_{i_{A'A}}^{-1} (S_{A'}) \right)^c \bigcup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1} (T_{A'}) \right].$$

Usando o lema 74 concluímos então que $\Sigma_{i_{AB}}((S \rightarrow T)_B) \subset (S \rightarrow T)_A$ e portanto temos, de fato, um subobjeto de Σ . $S \rightarrow T$ é, por construção, o máximo do conjunto $\{U \in \text{Sub}_{cl}(\Sigma) | U \wedge S \preceq T\}$. Resumimos esses resultados no seguinte teorema

Teorema 75 (Álgebra de Heyting completa de subobjetos clopen) $(\text{Sub}_{cl}(\Sigma), \preceq)$, onde $S \preceq T \Leftrightarrow S_A \subset T_A \forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$, é uma álgebra de Heyting completa (consequentemente infinitamente distributiva). Temos, para $\mathcal{S} \subset \text{Sub}_{cl}(\Sigma)$ e $S, T \in \text{Sub}_{cl}(\Sigma)$,

$$(a) \quad (\bigvee \mathcal{S})_A = \bigvee_{S \in \mathcal{S}} S_A = \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S_A}$$

$$(b) \quad (\bigwedge \mathcal{S})_A \doteq \bigwedge_{S \in \mathcal{S}} S_A = \text{int} \left(\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S_A \right).$$

(c)

$$(S \rightarrow T)_A \doteq \text{int} \left(\bigcap_{A' \in \downarrow A} \{ \omega \in \Sigma_A; \omega|_{A'} \in S_{A'} \Rightarrow \omega|_{A'} \in T_{A'} \} \right) \quad (5.38)$$

$$= \text{int} \left(\bigcap_{A' \in \downarrow A} \left[\Sigma_{i_{A'A}}^{-1} ((S_{A'})^c) \bigcup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1} (T_{A'}) \right] \right) \quad (5.39)$$

$$= \bigwedge_{A' \in \downarrow A} \left[\Sigma_{i_{A'A}}^{-1} ((S_{A'})^c) \bigcup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1} (T_{A'}) \right] \quad (5.40)$$

Por fim, é útil explicitarmos a “negação” de um subobjeto, sendo que, em qualquer álgebra de Heyting, $\neg S = S \rightarrow 0$. No nosso caso temos

$$(\neg S)_A = (S \rightarrow 0)_A \quad (5.41)$$

$$= \bigwedge_{A' \in \downarrow A} \left[\Sigma_{i_{A'A}}^{-1} ((S_{A'})^c) \bigcup \Sigma_{i_{A'A}}^{-1} (\emptyset) \right] \quad (5.42)$$

$$= \bigwedge_{A' \in \downarrow A} \Sigma_{i_{A'A}}^{-1} ((S_{A'})^c) \quad (5.43)$$

$$= \text{int} \bigcap_{A' \in \downarrow A} \{ \omega \in \Sigma_A; \omega|_{A'} \notin S_{A'} \} \quad (5.44)$$

$$= \text{int} \bigcap_{A' \in \downarrow A} \{ \omega \in \Sigma_A; \omega(p_{A'}^S) = 0 \}. \quad (5.45)$$

Os resultados do seguinte lema têm claro interesse prático. Note que a desigualdade $\Delta(p \wedge q) \preceq \Delta(q) \wedge \Delta(q)$, que decorre do lema, não indica um problema na interpretação da linguagem $\mathcal{PL}(S)$ em $Sub_{cl}(\Sigma)$. De fato, se p é o projetor associado à proposição $A \equiv a \in I$ e q é o projetor associado a $B \equiv b \in J$, o termo $A \vee B$ é interpretado como $\Delta(p) \vee \Delta(q)$ por definição. É justamente de ideias do tipo “ $p \vee q$ interpreta $A \vee B$ ” que queremos nos livrar, já que $Pr(\mathcal{N})$ é um reticulado não distributivo, e então desse ponto de vista, a não validade geral da igualdade $\Delta(p \wedge q) = \Delta(q) \wedge \Delta(q)$ não é problemática.

Lema 76 *Seja agora $\mathcal{P} \subset Pr(\mathcal{N})$ uma coleção de projetores ortogonais na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Então vale que*

$$\Delta\left(\bigvee_{p \in \mathcal{P}} p\right) = \bigvee_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p) \quad (5.46)$$

$$\Delta\left(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} p\right) \preceq \bigwedge_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p) \quad (5.47)$$

Prova. Para um contexto A temos

$$\Delta(\bigvee_{p \in \mathcal{P}} p)_A = \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(\delta^o(\bigvee_{p \in \mathcal{P}} p)_A) = 1\} \quad (5.48)$$

$$= \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(\bigvee_{p \in \mathcal{P}} \delta^o(p)_A) = 1\} \quad (5.49)$$

$$= \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(\delta^o(p)_A) = 1\} \quad (5.50)$$

$$= \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p)_A \quad (5.51)$$

$$= \overline{\bigcup_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p)_A} \quad (5.52)$$

$$= \left(\bigvee_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p) \right)_A. \quad (5.53)$$

Na segunda igualdade acima usamos o item g do lema 65; na terceira usamos que, se $\mathcal{Q}$ é uma família de projetores qualquer na álgebra comutativa A , então $\omega(\bigvee_{q \in \mathcal{Q}} q) = 1$ se e só se existe $q \in \mathcal{Q}$ tal que $\omega(q) = 1$; por fim, na quinta igualdade usamos que $\bigcup_{j \in J} \Delta(p_j)_A (= \Delta(\bigvee_{j \in J} p_j)_A)$ é subconjunto clopen de Σ_A .

Provemos agora a segunda afirmação do lema. Pelo item g do lema 65 temos a desigualdade $\delta^o(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} p)_A \leq \bigwedge_{p \in \mathcal{P}} \delta^o(p)_A$, e portanto para $\omega \in \Sigma_A$, $\omega(\delta^o(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} p)_A) = 1$ implica $\omega(\delta^o(p)_A) = 1$ para todo $p \in \mathcal{P}$; daí

$$\Delta(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} p)_A = \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(\delta^o(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} p)_A) = 1\} \quad (5.54)$$

$$\subset \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega(\delta^o(p)_A) = 1\} \quad (5.55)$$

$$= \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p)_A. \quad (5.56)$$

Mas $\Delta(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} p)_A$ é aberto em Σ_A , por ser clopen, e por definição de interior concluímos que

$$\Delta(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} p)_A \subset \text{int} \left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p)_A \right) = \left(\bigwedge_{p \in \mathcal{P}} \Delta(p) \right)_A.$$

■

Por fim, usando a igualdade $\Theta(p) = \Delta(p^\perp)$, que já provamos, é fácil ver que não é válido em geral que $\Delta(p^\perp) = \neg\Delta(p)$, ou seja, em geral

$$\Delta(p^\perp) \neq \neg\Delta(p).$$

Bom, vimos então que $Sub_{cl}(\Sigma)$, quando munido da ordem contextual, que é uma escolha muito natural dentro do que estamos fazendo, forma uma álgebra de Heyting e, desse modo, pode ser usada para interpretar a linguagem $\mathcal{PL}(S)$. Podemos dizer então que a teoria quântica em topoi nos fornece naturalmente uma “lógica quântica” que, por ser interpretada em um reticulado distributivo, é mais apropriada que a lógica quântica que naturalmente emerge da mecânica quântica em sua formulação usual - o reticulado não-distributivo formado pelos projetores da álgebra de von Neumann que representa o sistema. Por ser Heyting, trata-se de uma lógica quântica intuicionista.

Introduziremos agora a noção de estado na teoria quântica em topoi, e desse modo poderemos, finalmente, tentar caracterizar equilíbrio do ponto de vista da teoria quântica em topoi.

5.3 Estados

Introduziremos a noção de “estado” na teoria quântica em topoi de duas maneiras. Primeiro usaremos a ideia já discutida de que estados geralmente são usados para se atribuir “valores de verdade” a proposições sobre o sistema. Também introduziremos uma definição de estado como “medida de probabilidade”; isso se justifica pela ideia de que uma teoria física construída em topoi da maneira proposta em [5] deve “se parecer” com a física clássica. Para a primeira noção de estados tomaremos [9] como referência; para a segunda, [11].

5.3.1 Pseudoestado

Atribuiremos “valores de verdade” a proposições usando o topos $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ e, portanto, um valor de verdade será um elemento global do classificador de subobjetos Ω , ou seja, um morfismo $1 \rightarrow \Omega$. Seja ν um valor de verdade no topos; vamos escrever $V_A \equiv \nu_A(*)$, sendo que estamos usando a notação da subseção 3.6.1 ($1_A = \{*\}$ para qualquer contexto A). A primeira coisa que se nota é que podemos falar em “valor de verdade contextual”, o que é aparentemente coerente

com o ponto de vista apresentado no capítulo 2. Pelo que discutimos na subseção 3.6.4 sabemos que V_A é um A -crivo (definição 45), pois Ω_A é o conjunto de todos os A -crivos. No caso da categoria $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ um A -crivo é uma coleção de subcontextos de A “fechada para subálgebras”; mais precisamente, se $\downarrow A$ denota a coleção de todos os subcontextos de A , um A -crivo é um conjunto $\Lambda \subset \downarrow A$ tal que, se $A' \in \Lambda$ e $A'' \subset A'$, então $A'' \in \Lambda$. Desse modo, um “valor de verdade contextual” num contexto A será uma coleção adequada de subcontextos de A . Note ainda que a “ação” de Ω num morfismo i_{AB} leva um B -crivo Λ no A -crivo $\Lambda' \doteq \{B' \in \Lambda; B' \subset A\}$, ou seja, trata-se da “restrição” aos elementos do crivo que são subcontextos de A . Um valor de verdade $1 \xrightarrow{\nu} \Omega$ pode então ser entendido então como uma coleção de crivos $V_A \in \Omega_A$ tal que, se $A \subset B$, $V_A = \{B' \in V_B; B' \subset A\}$. O elemento global “true” é dado pela coleção $V_A = \downarrow A$, $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$.

Queremos usar estados para atribuir valores de verdade para proposições. Seja $a \in I$ uma proposição primitiva de $\mathcal{N}$ e seja $\Delta(p)$ sua representação em $Sub_{cl}(\Sigma)$ - ou seja, $p \equiv e(a \in I)$. Num contexto A é compreensível que digamos que um estado $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ (definição 117) associa o seguinte “valor de verdade contextual” a essa proposição.

$$V^\rho(a \in I)_A \doteq \{A' \subset A; \rho(\delta^0(p)_{A'}) = 1\}.$$

Vamos mostrar que essa coleção de fato define um elemento global de Ω e, feito isso, justificaremos a definição apresentando uma interpretação para ela. Primeiro, é trivial que $V^\rho(a \in I)_A = \{B' \in V^\rho(a \in I)_B; B' \subset A\}$ quando $A \subset B$; para que tenhamos um elemento global de Ω falta provarmos que $V^\rho(a \in I)_A$ é A -crivo, ou seja, que se $\rho(\delta^0(p)_{A'}) = 1$ para $A' \subset A$ então $\rho(\delta^0(p)_{A''}) = 1$ para todo $A'' \subset A'$. Bom, por ρ ser estado sabemos que, para qualquer elemento autoadjunto a de $\mathcal{N}$, $\rho(a) \leq \max \sigma(a)$: ver por exemplo [31], lembrando que o espectro possui máximo pois um elemento autoadjunto de uma álgebra C^* possui espectro compacto em $\mathbb{R}$. Se a é projetor temos $\sigma(a) = \{0, 1\}$, e daí $\rho(a) \leq 1$. Pelo item b do lema 65 sabemos que $\delta^0(p)_{A''} \geq \delta^0(p)_{A'}$ quando $A'' \subset A'$, e como estados preservam ordem temos $\rho(\delta^0(p)_{A''}) \geq \rho(\delta^0(p)_{A'})$ nesse caso. Da cota superior igual a um acima obtida temos que se $\rho(\delta^0(p)_{A'}) = 1$ então $\rho(\delta^0(p)_{A''}) = 1$ para todo $A'' \subset A'$, e portanto temos de fato um A -crivo. Note que num contexto A onde $\rho(\delta^0(p)_{A'}) = 1$ temos que o valor de verdade $V^\rho(a \in I)_A$ é “true”. Além disso, num contexto A qualquer, o valor de verdade $V^\rho(a \in I)_A$ é a coleção dos

subcontextos em que a proposição é verdadeira (valor de verdade “true”).

Esse tipo de valoração é discutido em extensão em [1], [2], [3], [4]. Note que quando ρ é estado puro dado por um vetor normalizado $\phi \in H$, sendo H espaço de Hilbert tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(H)$, temos

$$V^\psi(a \in I)_A \doteq \{A' \subset A; \langle \psi, \delta^o(p)_{A'} \psi \rangle = 1\},$$

onde, claro, escrevemos $V^\psi(a \in I)_A \equiv V^{p^\psi}(a \in I)_A$ para p^ψ o projetor associado ao subespaço fechado $\mathbb{C}\psi$, ou seja, $p^\psi \equiv \langle \psi, \cdot \rangle \psi$.

Como o “valor de verdade” é o mesmo para proposições fisicamente equivalentes - ou seja, proposições que são interpretadas pelo mesmo subobjeto $\Delta(p)$, podemos falar, por simplicidade, sobre o valor de verdade da “proposição” $\Delta(p)$.

Tanto um estado quanto a valoração a ele associada são elementos externos ao topos, ou seja, não são elementos do topos. É importante que tenhamos alguma noção interna de estado. Faremos isso para o caso de estados vetor tais que $p^\psi \in \mathcal{N}$. Bom, Primeiro notemos que, para um projetor $q \in \mathcal{N}$ temos que $\langle \psi, q\psi \rangle = 1$ se, e só se, $p^\psi \leq q$; isso é consequência simples do teorema da decomposição ortogonal ($H = q(H) \oplus q(H)^\perp$). Daí, se $q \in A$, $\langle \psi, q\psi \rangle = 1$ equivale a $p^\psi \leq q$ o que, por sua vez, equivale a $\delta^0(p^\psi)_A \leq q$. Então $\langle \psi, \delta^0(r)_{A'} \psi \rangle = 1$ equivale a $\delta^o(p^\psi)_{A'} \leq \delta^o(r)_{A'}$, o que sabemos ser equivalente a $\Delta(p^\psi)_{A'} \subset \Delta(r)_{A'}$. Enfim,

$$V^\psi(\Delta(r))_A \doteq \{A' \subset A; \Delta(p^\psi)_{A'} \subset \Delta(r)_{A'}\}.$$

Faz sentido entendermos $\Delta(p^\psi)$ como algo comparável a um estado. Trata-se de um elemento do topos que nos permite associar “valores de verdade” a proposições. Além disso, é comum no caso clássico que se associe estados não puros a subconjuntos do espaço de estados. A motivação é simples: há uma falta de informação que faz com que o estado puro exato do sistema seja desconhecido, porém há informação suficiente para que saibamos que certos estados não são possíveis, e portanto temos um “conjunto de estados puros possíveis” que é o conjunto associado ao estado. Tal estado não nos permite associar valores de verdade a proposições de maneira binária, como fazem os estados puros, mas ainda assim nos permite associar valores de verdade a proposições: grosseiramente falando, quanto “maior” a interseção entre o estado D^ρ e a proposição X (ambos são subconjuntos do espaço de estados) “mais verdadeira” é a proposição X na valoração não-binária definida por esse estado, sendo que a proposição é falsa

se e só se os conjuntos são disjuntos e verdadeira se e só se $D^p \subset X$. O elemento $\Delta(p^\psi)$ é um subobjeto do espaço de estados Σ , portanto está em analogia com a ideia clássica de subconjunto do espaço de estados, sendo que, contextualmente, temos de fato um subconjunto. Além disso, usamos tal subobjeto para associar valores de verdade a proposições, de maneira não binária, através da noção de inclusão, sendo que uma proposição $\Delta(r)$ é verdadeira num contexto A se, e somente se, $\Delta(p^\psi)_A \subset \Delta(r)_A$, assim como no caso clássico. Por fim, a proposição $\Delta(r)$ é verdadeira se e só se $\Delta(p^\psi)_A \subset \Delta(r)_A$ em todo contexto A e portanto uma proposição é verdadeira se, e somente se, $\Delta(p^\psi) \preceq \Delta(r)$, como no caso clássico. Mais que isso, é fácil provar que $\Delta(r)$ é falsa (possui o “morfismo *false*” como valor de verdade) quando $\Delta(r) \wedge \Delta(p^\psi) = 0$. Para uma apresentação mais completa dessas ideias sugerimos [12]. Enfim, definimos.

Definição 77 (Pseudoestado) *Sejam H espaço de Hilbert H , $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(H)$ álgebra de von Neumann que representa um sistema físico e ψ um estado normalizado de H tal que $p^\psi \in \mathcal{N}$, onde $p^\psi \equiv \langle \psi, \cdot \rangle \psi$ é o projetor associado ao subespaço fechado $\mathbb{C}\psi$. Chamamos de pseudoestado associado a ψ o subobjeto $\Delta(p^\psi)$ do pré-feixe espectral (definição 66).*

Há outras maneiras de se definir “estado” no topos usando a ideia de valoração. Em [6], por exemplo, é introduzido o conceito de “*truth object*”. Tais objetos são, em certo sentido, análogos aos pseudoestados; escolhemos definir pseudoestado pois este é um subobjeto do espaço de estados, enquanto o outro é subobjeto do “pré-feixe de de Groote” que sequer definimos aqui. Tal pré-feixe é um objeto isomorfo ao pré-feixe espectral e portanto é suficiente, ao menos para os nossos propósitos, trabalhar com apenas um deles. Vale comentar que o pré-feixe de de Groote - e diversas outras ideias deste - foi de grande importância para os trabalhos de Isham e Döring.

Note que podemos usar pseudoestados para atribuir “valor de verdade” a qualquer elemento de $Sub_{cl}(\Sigma)$. De fato, se $\psi \in H$ satisfaz a hipótese da definição 77 e $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ definimos, para todo contexto A ,

$$V^\psi(S)_A \doteq \{A' \subset A; \Delta(p^\psi)_{A'} \subset S_{A'}\}.$$

Note que não é imediato que temos um A -crivo; isso é consequência de uma propriedade importante da daseinização de um projetor p , a saber, o fato da função $\Delta(p)_B \ni \omega \mapsto \omega|_A \in \Delta(p)_A$ ser sobrejetora (onde, claro $A \subset B$). Essa propriedade não é válida para qualquer subobjeto de Σ , como já comentamos. Sabendo disso fica fácil provar que temos um A -crivo.

Com efeito, seja $A' \subset A$ um contexto tal que $\Delta(p^\psi)_{A'} \subset S_{A'}$ e tomemos $A'' \subset A'$. Como $\Delta(p^\psi)_{A''} = \{\omega|_{A''} \in \Sigma_{A''}; \omega \in \Delta(p^\psi)_{A'}\}$ e como $\Delta(p^\psi)_{A'} \subset S_{A'}$ temos que $\Delta(p^\psi)_{A''} \subset \{\omega|_{A''}; \omega \in S_{A'}\}$, mas por S ser subobjeto de Σ temos que $\{\omega|_{A''}; \omega \in S_{A'}\} = \Sigma_{i_{A''A'}}(S_{A'}) \subset S_{A''}$, e daí $\Delta(p^\psi)_{A''} \subset S_{A''}$, como queríamos.

Temos então uma função $V^\psi : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma\Omega$, onde $\Gamma\Omega$ é o conjunto dos elementos globais de Ω .

Vamos introduzir agora a noção de estado enquanto “medida” definida no pré-feixe espectral.

5.3.2 Estados como medidas no pré-feixe espectral

Seguindo [11] vamos mostrar que, na formulação contravariante da teoria quântica em topoi, estados podem ser entendidos como “medidas de probabilidade” definidas no pré-feixe espectral: introduzindo uma noção de “medida” no pré-feixe espectral pode-se mostrar que há uma relação biunívoca coerente entre essas medidas e estados da álgebra. Como já mencionado, uma motivação possível para isso é a analogia com o caso clássico.

Definiremos algo análogo a uma medida e para isso precisaremos de algo análogo a uma σ -álgebra; tal conjunto será $Sub_{cl}(\Sigma)$. Seja $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ um estado e denotemos por μ^ρ a “medida” que associaremos a ele. No capítulo 2 dissemos que na linguagem $\mathcal{L}(S)$ havia certo símbolo $\mathcal{R}$ que seria interpretado por um objeto no topos que faria o papel de objeto no qual observáveis “assumem valores”, sendo que observáveis seriam interpretados como morfismos $\Sigma \rightarrow R$. Na teoria quântica em topoi tal objeto é introduzido em [7]; os autores propõem três candidatos, que denotaremos por $R^\preceq$, $R^\succeq$ e $R^{\leftrightarrow}$. Uma das propostas da teoria é fazer com que “livremos” a teoria quântica do uso “*a priori*” de números reais como valores de observáveis e de probabilidades⁸ e portanto faz sentido que μ^ρ “tome valores” em $R^\succeq$ - ou em qualquer objeto que escolhamos para interpretar $\mathcal{R}$. Como o domínio de μ^ρ é “externo” ao topos, não podemos definir μ^ρ como uma transformação natural, mas ainda assim podemos fazer com que μ^ρ associe elementos de $Sub_{cl}(\Sigma)$ a “valores” em $R^\succeq$: associamos $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ a um elemento global de $R^\succeq$, que é justamente a generalização da ideia de “ponto”.

Vamos primeiro definir $R^\preceq$ e $R^\succeq$ - não definiremos $R^{\leftrightarrow}$ pois não o utilizaremos. Sejam P, Q conjuntos parcialmente ordenados. Vamos dizer que uma função $f : P \rightarrow Q$ é um anti-

⁸Não falamos sobre probabilidades no capítulo 2 porém isso é argumentado pelos autores; ver por exemplo [5].

homomorfismo se, para quaisquer $p_1, p_2 \in P$ satisfazendo $p_1 \leq p_2$, tivermos $f(p_1) \geq f(p_2)$. Vamos denotar por $OR(P, Q)$ o conjunto de todos os anti-homomorfismos de P a Q . Vamos denotar por $OP(P, Q)$ o conjunto dos homomorfismos de P a Q ($f : P \rightarrow Q$ é tal que $p_1 \leq p_2$ implica $f(p_1) \leq f(p_2)$). Para um contexto A de $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ temos o poset $\downarrow A \doteq \{A' \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0 \mid A' \subset A\}$. Tomando um poset P , estão bem definidos os conjuntos $OP(\downarrow A, P)$, $OR(\downarrow A, P)$. Se $A \subset B$ e $f \in OP(\downarrow B, P)$, é trivial que $f|_{\downarrow A} : \downarrow A \rightarrow P$ é um anti-homomorfismo - e a afirmação análoga vale para a restrição de homomorfismos. Sendo assim, temos a definição

Definição 78 *Seja P um poset. Definimos $P^\succeq \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}_0$ por*

$$(a) \ P_A^\succeq \doteq OR(\downarrow A, P) \ \forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$$

$$(b) \ \text{Para } i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1 \text{ qualquer, } P_{i_{AB}}^\succeq : P_B^\succeq \rightarrow P_A^\succeq \text{ é definido por}$$

$$P_{i_{AB}}^\succeq(f) \doteq f|_{\downarrow A} \ \forall f \in P_B^\succeq.$$

De modo análogo definimos $P^\preceq \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}_0$: $P_A^\preceq \doteq OP(\downarrow A, P)$, $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$.

Não tentaremos justificar a definição; uma discussão sobre isso pode ser encontrada em [7] ou [9]. No caso das medidas os valores terão um significado cuja interpretação é simples. $R^\succeq$ e $R^\preceq$ são definidos tomando-se o poset $\mathbb{R}$. Tomando o poset $[0, 1]$ (ordem usual de $\mathbb{R}$), temos $[0, 1]^\succeq$ e $[0, 1]^\preceq$. É fácil ver que $[0, 1]^\succeq$ é subobjeto de $R^\succeq$ e que $[0, 1]^\preceq$ é subobjeto de $R^\preceq$. Note porém que a inclusão $[0, 1]_A^\succeq \subset R_A^\succeq$ é falsa pois, como discutido no início do capítulo 3, precisamos “trocar o codomínio” das funções; mas é obviamente trivial definir um monomorfismo $[0, 1]_A^\succeq \hookrightarrow R^\succeq$ (o monomorfismo é justamente definido pela operação de “trocar codomínios”).

À primeira vista, entender como valor de um observável (ou de uma medida) uma certa coleção de funções pode parecer algo artificial e sem utilidade prática. Essa crítica, porém, não se autojustifica. O que é relevante nesse objetos não é seu conteúdo matemático mas sim suas propriedades e as operações formais que eles nos permitem fazer, pois é isso que nos permite interpretar os elementos que os constituem, e é assim na construção de qualquer teoria física. Se formos apresentar uma construção explícita de $\mathbb{R}$, por exemplo, definiremos número como uma classe de equivalência de sequências de Cauchy ou como um corte de Dedekind. Dessa maneira,

numa teoria como a mecânica clássica, estaríamos afirmando que o valor de uma quantidade física é um elemento desse tipo, e isso não é menos estranho que uma coleção contextual de funções. Porém sabemos que o que nos interessa em $\mathbb{R}$ não é seu conteúdo matemático - seu conteúdo conjuntista, o tipo de objeto matemático que utilizamos para obter o conjunto com as propriedades que queremos - mas sim as propriedades de corpo ordenado completo, ou seja, as operações formais que ele nos permite fazer, pois é isso que torna coerente interpretar seus elementos como números. A situação aqui é semelhante. Precisamos de um conjunto com certas propriedades e do ponto de vista físico isso é tudo o que importa; o conteúdo matemático dos elementos que constituem esse conjunto não necessariamente é relevante, o que nos interessa é que o objeto satisfaça propriedades que nos permitam interpretar seus elementos da maneira que queremos, e é isso que Isham e Döring buscaram fazer com essa definição. A justificativa da escolha, ou seja, a interpretação física dos elementos desse conjunto de valores, pode ser em [7] - eles discutem o caso $R^{\leftrightarrow}$. Mostra-se lá que os valores dos observáveis físicos, quando esses são definidos como morfismos $\Sigma \rightarrow R^{\leftrightarrow}$, podem ser entendidos como certos “intervalos contextuais de valores possíveis”.

Bom, já temos domínio e codomínio de μ^ρ escolhidos: $Sub_{cl}(\Sigma)$ e $\Gamma[0, 1]^\succeq$ respectivamente, onde $\Gamma[0, 1]^\succeq$ denota o conjunto dos elementos globais de $[0, 1]^\succeq$. Vale a pena caracterizarmos explicitamente um elemento global $1 \xrightarrow{\gamma} [0, 1]^\succeq$. Como $1_A = \{*\}$ temos $\gamma_A(*) \in OR(\downarrow A, [0, 1])$. Assim, um elemento global pode ser entendido como uma coleção de funções $F \doteq \{F_A : \downarrow A \rightarrow [0, 1]; A \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}_0\}$ sendo que, se $A \subset B$, $F_A = F_B|_A$.

Se fossemos usar ρ para associar contextualmente valores numéricos de probabilidade a $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ seria razoável associarmos a S_A o número $\rho(p_A^S) \in [0, 1]$, onde $p_A^S \in Pr(A)$ é o projetor associado a S no contexto A , ou seja, $S_A = \widehat{p_A^S}^{-1}(\{1\})$. Porém μ^ρ associa S a um elemento global $1 \xrightarrow{\mu^\rho(S)} [0, 1]^\succeq$. No contexto A teremos como valor de S através de μ^ρ uma função $\mu^\rho(S)_A(*)$ de $OR(\downarrow A, [0, 1])$. Ora, usando a associação numérica citada acima é fácil definir uma função desse tipo. Com efeito, sabemos que se $A' \subset A$ então $p_{A'}^S \geq p_A^S$; mais que isso, estados preservam ordem. Desse modo, o mapa $\downarrow A \ni A' \mapsto \rho(p_{A'}^S) \in [0, 1]$ é um anti-homomorfismo e portanto um elemento de $[0, 1]^\succeq$; definimos $\mu^\rho(S)_A(*)$ como sendo essa função, ou seja, $\mu^\rho(S)_A(*) (A') = \rho(p_{A'}^S)$ - vamos limpar essa notação no parágrafo seguinte. Por construção, a coleção $\{\mu^\rho(S)_A : \{*\} \rightarrow [0, 1], A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0\}$ é uma transformação natural de 1 a $[0, 1]^\succeq$ (os diagramas de transformação natural comutam trivialmente).

Para que tenhamos uma notação mais limpa vamos escrever $\mu^\rho(S)_A \equiv \mu^\rho(S)_A(*)$. Entender $\mu^\rho(S)$ como elemento global de $[0, 1]^\succeq$ é certamente importante na teoria, porém, para efeitos práticos, podemos pensar em $\mu^\rho(S)$ como a coleção numérica $\{\mu^\rho(S)_A(A) \equiv \rho(p_A^S); A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0\}$, ou seja, como a função $\mathcal{V}(\mathcal{N})_0 \ni A \mapsto \rho(p_A^S) \in [0, 1]$.

Definição 79 (Medida associada a um estado) *Seja $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ um estado na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Chamamos de “medida de probabilidade associada a esse estado” a função $Sub_{cl}(\Sigma) \ni S \mapsto \mu^\rho(S) \in \Gamma[0, 1]^\succeq$ dada por $\mu^\rho(S)_A(*) (A') \doteq \rho(p_{A'}^S)$. Conforme discutido acima escrevemos $\mu^\rho(S)_A \equiv \mu^\rho(S)_A(*)$ e $\mu^\rho(S)(A) \equiv \mu^\rho(S)_A(A)$ - note que $\mu^\rho(S)_A$ é uma função e $\mu^\rho(S)(A)$ é um número. Além disso, o elemento global $\mu^\rho(S)$ pode ser entendido “externamente” como a função $\mathcal{V}(\mathcal{N})_0 \ni A \mapsto \rho(p_A^S) \in [0, 1]$, já que $\mu^\rho(S)_{B_1}(A) = \rho(p_A^S) = \mu^\rho(S)_{B_2}(A)$ para quaisquer contextos B_1, B_2 que contenham A .*

Vamos agora mostrar que $\mu^\rho : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow [0, 1]^\succeq$ possui propriedades que justificam, em certo sentido, chamá-la de medida. Primeiro, vamos mostrar que faz sentido dizer que a medida do “espaço todo” Σ é máxima e “igual a um”. Bom, como $p_A^\Sigma = 1$, temos $\mu^\rho(\Sigma)_A \in OR(\downarrow A, [0, 1])$ como sendo a função “constante igual a um” (por isso dizemos que a medida é “igual a um”); trata-se da maior função de $OR(\downarrow A, [0, 1])$ em relação à ordem pontual de funções (por isso dizemos que a medida é “máxima”). É fácil ver também que a medida do menor elemento de $Sub_{cl}(\Sigma)$, que é o subobjeto 0 tal que $0_A = \emptyset$ para todo contexto A , é a menor possível e “igual a zero”. Com efeito, $p_A^0 = 1 - 1 = 0$, daí $\mu^\rho(0)_A$ é a função “constante igual a zero”, que é a menor função de $OR(\downarrow A, [0, 1])$ na ordem pontual. Mostremos que μ^ρ é “aditiva”, ou seja, que $\mu^\rho(S \vee T) = \mu^\rho(S) + \mu^\rho(T)$ quando $S \wedge T = 0$. Para isso precisamos de uma noção de soma em $\Gamma[0, 1]^\succeq$; faremos isso contextualmente. Definiremos a soma em $R^\succeq$ pois a soma de dois números entre 0 e 1 não necessariamente é um número entre 0 e 1; porém, como $[0, 1]^\succeq$ trivialmente define um subobjeto de $R^\succeq$, podemos falar sobre a soma de elementos de $[0, 1]^\succeq$ - que não necessariamente é um elemento de $[0, 1]^\succeq$ mas que define um elemento de $R^\succeq$.

Definição 80 *Seja $R^\succeq$ o objeto de $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ definido por 78 quanto tomamos $P = R$. Definimos a operação $\Gamma R^\succeq \times \Gamma R^\succeq \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta \in \Gamma R^\succeq$ por*

$$(\alpha + \beta)_A(A') \doteq \alpha_A(A') + \beta_A(A') \quad \forall A' \in \downarrow A,$$

ou seja, a função $(\alpha + \beta)_A : \downarrow A \rightarrow R$ é a soma pontual das funções α_A e β_A . Isso trivialmente define uma transformação natural $\alpha + \beta : 1 \rightarrow R^\succeq$.

Tomemos agora $\mu^\rho(S), \mu^\rho(T) \in \Gamma[0, 1]^\succeq$; temos

$$(\mu^\rho(S) + \mu^\rho(T))_A(A') = \mu^\rho(S)_A(A') + \mu^\rho(T)_A(A') \quad (5.57)$$

$$= \rho(p_{A'}^S) + \rho(p_{A'}^T) \quad (5.58)$$

$$= \rho(p_{A'}^S + p_{A'}^T). \quad (5.59)$$

Se $S \wedge T = 0$ então $p_{A'}^S \wedge p_{A'}^T = 0$ e assim $p_{A'}^S \vee p_{A'}^T = p_{A'}^S + p_{A'}^T$. Com efeito, $S \wedge T = 0$ implica $\emptyset = 0_{A'} = (S \wedge T)_{A'} = S_{A'} \cap T_{A'}$, daí $\omega(p_{A'}^S) = 1$ implica $\omega(p_{A'}^T) = 0$ e $\omega(p_{A'}^T) = 1$ implica $\omega(p_{A'}^S) = 0$; a multiplicidade dos estados puros de A' nos diz então que $\omega(p_{A'}^S p_{A'}^T) = 0$ para todo $\omega \in \Sigma_{A'}$, e isso implica $p_{A'}^S p_{A'}^T = 0$ (pois a função $\widehat{p_{A'}^S p_{A'}^T}$ é “constante igual a zero” e a transformação de Gelfand é isomorfismo ou porque “estados puros separam pontos”). A prova se completa pelo bem conhecido lema 168. Mais que isso, sabemos que $p_{A'}^{S \vee T} = p_{A'}^S \vee p_{A'}^T$, e então, quando $S \wedge T = 0$,

$$(\mu^\rho(S) + \mu^\rho(T))_A(A') = \rho(p_{A'}^S \vee p_{A'}^T) \quad (5.60)$$

$$= \rho(p_{A'}^{S \vee T}) \quad (5.61)$$

$$= \mu^\rho(S \vee T)_A(A') \quad (5.62)$$

e disso segue que, quando $S \wedge T = 0$,

$$\mu^\rho(S \vee T) = \mu^\rho(S) + \mu^\rho(T).$$

Seria natural tentarmos definir agora uma σ -aditividade. Não faremos isso, e uma justificativa pode ser encontrada em [11].

No caso geral, ou seja, para $S, T \in \text{Sub}_{cl}(\Sigma)$ quaisquer, temos $p_{A'}^S \vee p_{A'}^T = p_{A'}^S + p_{A'}^T - p_{A'}^S \wedge p_{A'}^T$ (lema 168), ou seja, $p_{A'}^S + p_{A'}^T = p_{A'}^S \vee p_{A'}^T + p_{A'}^S \wedge p_{A'}^T = p_{A'}^{S \vee T} + p_{A'}^{S \wedge T}$, e assim

$$(\mu^\rho(S) + \mu^\rho(T))_A(A') = \rho(p_{A'}^S + p_{A'}^T) \quad (5.63)$$

$$= \rho(p_{A'}^{S \vee T}) + \rho(p_{A'}^{S \wedge T}) \quad (5.64)$$

$$= \mu^\rho(S \vee T)_A(A') + \mu^\rho(S \wedge T)_A(A') \quad (5.65)$$

o que implica

$$\mu^\rho(S) + \mu^\rho(T) = \mu^\rho(S \vee T) + \mu^\rho(S \wedge T). \quad (5.66)$$

Uma última propriedade técnica que será importante para a definição geral de medida é a seguinte: se $S, T \in \text{Sub}_{cl}(\Sigma)$ são iguais em algum contexto A' , ou seja, se $S_{A'} = T_{A'}$, então $\mu^\rho(S)_A(A') = \mu^\rho(T)_A(A')$ qualquer que seja A tal que $A' \subset A$. Note que isso não implica que $\mu^\rho(S)_{A'} = \mu^\rho(T)_{A'}$, a menos que $S = \Delta(p)$ e $T = \Delta(q)$ para $p, q \in \text{Pr}(\mathcal{N})$.

Resumimos esses resultados no seguinte lema.

Lema 81 *Seja $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ estado na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Então a medida $\mu^\rho : \text{Sub}_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\succeq$ a ele associada (definição 79) satisfaz as seguintes propriedades.*

- (a) $\mu^\rho(S)_{B_1}(A) = \mu^\rho(S)_{B_2}(A)$ para quaisquer contextos $B_1, B_2 \supset A$
- (b) Se $S_{A'} = T_{A'}$ em algum contexto A' , onde $S, T \in \text{Sub}_{cl}(\Sigma)$, então vale a igualdade $\mu^\rho(S)_A(A') = \mu^\rho(T)_A(A')$ para qualquer contexto $A \supset A'$.
- (c) $\mu^\rho(\Sigma) = \mathbb{1}$, onde $\mathbb{1}_A(*) (A') = 1 \forall A' \in \downarrow A$
- (d) $\mu^\rho(0) = \mathbb{0}$, onde $\mathbb{0}_A(*) (A') = 0 \forall A' \in \downarrow A$
- (e) para $S, T \in \text{Sub}_{cl}(\Sigma)$ quaisquer vale que

$$\mu^\rho(S \vee T) = \mu^\rho(S) + \mu^\rho(T) - \mu^\rho(S \wedge T)$$

e, em particular, se $S \wedge T = 0$,

$$\mu^\rho(S \vee T) = \mu^\rho(S) + \mu^\rho(T).$$

Motivamos por esse lema vamos introduzir uma “noção geral” de medida no pré-feixe espectral. Como provado em [11], porém, toda medida será do tipo μ^ρ (definição 79) para um, e somente um, estado da álgebra.

Definição 82 (Medida de probabilidade no pré-feixe espectral) *Seja $\mathcal{N}$ álgebra de von Neumann. Chamamos uma função $\mu : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\succeq$ de “medida de probabilidade definida no pré-feixe espectral” se ela satisfizer as seguintes propriedades*

- (a) $\mu(S)_{B_1}(A) = \mu(S)_{B_2}(A)$ para quaisquer contextos $B_1, B_2 \supset A$
- (b) Se $S_{A'} = T_{A'}$ em algum contexto A' , onde $S, T \in Sub_{cl}(\Sigma)$, então $\mu(S)_A(A') = \mu(T)_A(A')$ para qualquer contexto A que contenha A'
- (c) $\mu(\Sigma) = 1$, onde $\mathbb{1}_A(*) (A') = 1 \forall A' \in \downarrow A$
- (d) para $S, T \in Sub_{cl}(\Sigma)$ quaisquer vale que

$$\mu(S \vee T) = \mu(S) + \mu(T) - \mu(S \wedge T).$$

Denotamos por $\mathcal{M}(\Sigma)$ o conjunto de todas as medidas definidas em Σ .

Não é claro à primeira vista que essa definição é equivalente à definição apresentada em [11] (ver item D do artigo), então é razoável que mostremos isso. No artigo é dito que a função $\tilde{\mu} : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\succeq$ é um mapa “ $S = (S_A)_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0} \mapsto \tilde{\mu}(S_A)_{A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0}$ ” - estamos usando $\tilde{\mu}$ para diferenciar essa definição na nossa. Note que o significado dessa notação não é obvio e então precisamos tentar entendê-lo antes de comparar as definições. Façamos isso. Bom, é razoável supormos que temos $\tilde{\mu}(S)_B(A) = \tilde{\mu}(S_A)$ quaisquer que sejam os contextos $A \subset B$ e por isso podemos entender $\tilde{\mu}(S)$ como um mapa $\mathcal{V}(\mathcal{N})_0 \ni A \mapsto \tilde{\mu}(S)_A(A)$. Além disso, a notação sugere que, se $S_A = T_A$ para $S, T \in Sub_{cl}(\Sigma)$, então $\tilde{\mu}(S)_A(A) = \tilde{\mu}(S_A)$ “=” $\tilde{\mu}(T_A) = \tilde{\mu}(T)_A(A)$, e dessa maneira valeria o item (b) da nossa definição. Estudando o artigo vê-se, por outro lado, que tal item b é lá provado (equação 41) e que a prova apresentada não é completamente trivial, ou seja, o autor não entende que o resultado seguiria da definição; isso sugeriria que nossa interpretação da notação está incorreta. Porém, olhando com atenção a prova apresentada percebemos que o argumento utilizado é circular: o autor usou que “ $S_A = T_A$ implica $\tilde{\mu}(S)_A(A) = \tilde{\mu}(T)_A(A)$ ” para provar essa mesma afirmação (equação 41 do artigo). Assim, ou nossa interpretação da definição está correta e o autor provou o que já é válido por

definição ou nossa interpretação está incorreta e a prova por ele apresentada é falsa. Conforme confirmado a nós pelo autor, Andreas Döring, via email, nossa interpretação está sim correta e ele de fato provou o que já havia definido.⁹ Desse modo, na definição por ele apresentada impõe-se, sim, nosso item (b). Nossos itens (c) e (d) também fazem parte da sua definição e portanto temos de fato a mesma definição de medida apresentada em [11].

Usando o fato de que $\mu(S)_A : \downarrow A \rightarrow [0, 1]$ é anti-homomorfismo é fácil provar que $\mu(0) = 0$, propriedade que sabemos ser válido para medidas definidas por estados. Em [11] outras propriedades interessantes de medidas são provadas.

O seguinte teorema (teorema IV.1 de [11]) é importante. Para entendê-lo precisamos lembrar que o conjunto $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ dos estados em $\mathcal{N}$ é um conjunto convexo. Da definição de soma em $\Gamma[0, 1]^\succeq$ (definição 80) segue trivialmente que o conjunto $\{\mu^\rho \in \mathcal{M}(\Sigma); \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{N})\}$ é convexo e que o mapa $\mathcal{N} \ni \rho \mapsto \mu^\rho \in \mathcal{M}(\Sigma)$ é função convexa.

Teorema 83 *Sejam $\mathcal{N}$ álgebra de von Neumann sem fatores do tipo I_2 como soma direta, $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ o conjunto de estados em $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}(\Sigma)$ o conjunto de medidas de probabilidade definidas no pré-feixe espectral dessa álgebra. Então o mapa $\mathcal{N} \ni \rho \mapsto \mu^\rho \in \mathcal{M}(\Sigma)$ é uma bijeção. Pelo que foi comentado no parágrafo anterior, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}(\Sigma)$ são isomorfos enquanto conjuntos convexos.*

Medidas no pré-feixe espectral pode ser relacionadas com pseudoestados; isso também é feito em [11].

Já introduzimos as duas noções de estado que utilizaremos para estudar equilíbrio na teoria quântica em topoi. Poderíamos parar por aqui a apresentação da teoria e ir de vez à discussão sobre equilíbrio. Introduziremos, porém, observáveis na teoria quântica em topoi. O primeiro motivo para que façamos isso é a pretensão de fornecer uma apresentação minimamente completa da teoria. Não apresentar ao menos um esboço da definição de observável enquanto morfismo deixaria uma lacuna na nossa apresentação, e como colocamos essa apresentação como um objetivo secundário da dissertação, seria incoerente fazermos isso. Outro motivo é que estamos tentando, para um trabalho futuro, caracterizar a condição KMS utilizando estados enquanto morfismos, e assim seria útil termos a definição já apresentada aqui.

⁹Aproveitamos para agradecer a Andreas Döring por ter nos ajudado - de maneira solícita, simpática e gentil - em todas as vezes que lhe solicitamos.

5.4 Observáveis

Vamos apresentar, de maneira sucinta, a noção de observável enquanto elemento de $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$, como exige a linguagem $\mathcal{L}(S)$. Isso é introduzido em [7]; ¹⁰ no artigo podem ser encontradas muitas discussões interessantes, em especial em relação à interpretação dos conceitos utilizados, que omitiremos aqui.

Já dissemos que um observável $a \in \mathcal{N}$ será associado a um morfismo $\Sigma \rightarrow R^\succeq$, onde $R^\succeq$ é dado pela definição 78. Como é discutido em [7], $R^\succeq$ não é a única escolha coerente de objeto onde observáveis tomam valores, sendo que podemos escolher também $R^\preceq$ e $R^{\leftrightarrow}$.

Seja $a \in \mathcal{N}$ autoadjunto. O morfismo que associaremos a ele será determinado pela daseinização desse operador autoadjunto; definiremos agora essa daseinização. Assim como no caso de projetores, introduziremos tanto uma daseinização interna quanto uma daseinização externa de elementos autoadjuntos. A daseinização externa nos permitirá definir um morfismo $\Sigma \rightarrow R^\succeq$, enquanto a daseinização interna nos dará um morfismo $\Sigma \rightarrow R^\preceq$. O teorema espectral (teorema 129) terá importância central aqui pois a daseinização de um operador autoadjunto será obtida através da daseinização (no sentido já definido para projetores) da resolução da identidade associada a ele. Utilizaremos aqui a terminologia do apêndice A.3.2 mas, por simplicidade, vamos denotar por $\{e_\lambda^a\}$ a resolução da identidade associada ao operador autoadjunto $a \in \mathcal{B}(H)$. lembremos que

$$a = \int_{\mathbb{R}} \lambda de_\lambda^a.$$

A noção de ordem espectral será muito importante.

Definição 84 (ordem espectral) *Sejam $a, b \in \mathcal{N}$ autoadjuntos com resoluções da identidade $\{e_\lambda^a\}$ e $\{e_\lambda^b\}$ respectivamente. Definimos uma ordem parcial $\leq_{\mathbb{R}}$ em $\mathcal{B}(H)^{\mathbb{R}}$ por*

$$a \leq_{\mathbb{R}} b \Leftrightarrow e_\lambda^a \geq e_\lambda^b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Precisamos relacionar essa ordem com a ordem usual de projetores. Para um projetor $p \in$

¹⁰Como informado pelos autores, muitas das ideias aqui utilizadas foram retiradas dos trabalhos de de Groot ([26] e [27], em especial).

$Pr(\mathcal{N})$ sabemos que

$$e_\lambda^p = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < 0 \\ 1 - p & \text{se } \lambda \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (5.67)$$

(isso pode ser provado utilizando-se o cálculo funcional mensurável, por exemplo) e disso é imediato que

$$p \leq q \Leftrightarrow p \leq_{\mathbb{R}} q$$

. Bom, sejam $a \in \mathcal{N}$ autoadjunto e $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$; queremos definir $\delta^o(a)_A, \delta^i(a)_A \in A$ e queremos que eles sejam elementos autoadjuntos. Sabemos que $\delta^o(e_\lambda^a)_A, \delta^i(e_\lambda^a)_A \in Pr(A) \forall \lambda \in \mathbb{R}$, e por isso temos bem definidas as famílias de projetores $\{\delta^o(e_\lambda^a)_A \in Pr(A) | \lambda \in \mathbb{R}\}, \{\delta^i(e_\lambda^a)_A \in Pr(A) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Porém, a família $\{\delta^o(e_\lambda^a)_A \in Pr(A) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ não é contínua à direita, com foi apontado por De Groote, e portanto não define uma resolução da identidade. Por isso definimos, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\bigwedge_{\mu > \lambda} \delta^o(e_\mu^a)_A$, que é um projetor, e pode-se mostrar que a família de projetores $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \bigwedge_{\mu > \lambda} \delta^o(e_\mu^a)_A \in Pr(A)$ é resolução da identidade. Em resumo, se $a \in \mathcal{N}$ é autoadjunto, para um contexto A qualquer definimos $\delta^o(a)_A, \delta^i(a)_A \in A^{\mathbb{R}}$ por

$$\delta^o(a)_A \doteq \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\delta^i(e_\lambda^a)_A) \quad (5.68)$$

$$\delta^i(a)_A \doteq \int_{\mathbb{R}} \lambda d\left(\bigwedge_{\mu > \lambda} \delta^o(e_\mu^a)_A\right). \quad (5.69)$$

O seguinte lema ajuda a esclarecer a definição.

Lema 85 *Para $a \in \mathcal{N}$ autoadjunto temos que*

$$\delta^o(a)_A = \bigwedge \{b \in A^{\mathbb{R}} | b \geq_{\mathbb{R}} a\} \quad (5.70)$$

$$\delta^i(a)_A = \bigvee \{b \in A^{\mathbb{R}} | b \leq_{\mathbb{R}} a\} \quad (5.71)$$

Não provaremos o lema para evitar technicalidades sobre convergência forte, que são necessárias para a prova do item b . O item (a) , por sua vez, pode ser provado de maneira simples

através de argumentos referentes à ordem espectral. O seguinte resultado segue do lema acima, e sua prova é análoga à prova já feita para projetores.

Lema 86 *Sejam $a \in \mathcal{N}$ autoadjunto e $A \subset B$ contextos. Então*

$$\delta^o(a)_A \geq \delta^o(a)_B \quad (5.72)$$

$$\delta^i(a)_A \leq \delta^i(a)_B \quad (5.73)$$

Vamos agora definir os morfismos associado ao elemento autoadjunto a . Bom, queremos transformações naturais $\vec{a} : \Sigma \rightarrow R^{\succeq}$ e $\tilde{a} : \Sigma \rightarrow R^{\preceq}$, que, como já dissemos, serão dadas pelas daseinizações externa e interna respectivamente. Olhemos primeiro para $\vec{a} : \Sigma \rightarrow R^{\succeq}$. Uma componente A será uma função $\vec{a}_A : \Sigma_A \rightarrow OR(\downarrow A, \mathbb{R})$ (definição 78), logo $\vec{a}_A(\omega) : \downarrow A \rightarrow \mathbb{R}$ será um anti-homomorfismo. A escolha $\vec{a}_A(\omega)(A') \doteq \omega(\delta^o(a)_{A'}) \forall A' \subset A$ parece coerente. Além disso, o lema 86 nos diz que $\vec{a}_A(\omega)$ é de fato anti-homomorfismo. Está bem definida, então, a componente $\vec{a}_A$, para qualquer contexto A , e é trivial constatar que essa coleção define uma transformação natural de Σ a $R^{\succeq}$. De modo análogo definimos $\tilde{a} : \Sigma \rightarrow R^{\preceq}$. Em resumo,

Definição 87 *A um operador autoadjunto $a \in \mathcal{N}$ associamos as transformações naturais $\vec{a} : \Sigma \rightarrow R^{\succeq}$ e $\tilde{a} : \Sigma \rightarrow R^{\preceq}$ cujas componentes $\vec{a}_A : \Sigma_A \rightarrow OR(\downarrow A \rightarrow R)$ e $\tilde{a}_A : \Sigma_A \rightarrow OP(\downarrow A, R)$ são dadas por*

$$\vec{a}_A(\omega)(A') \doteq \omega(\delta^o(a)_{A'}) \forall A' \subset A \quad (5.74)$$

$$\tilde{a}_A(\omega)(A') \doteq \omega(\delta^i(a)_{A'}) \forall A' \subset A, \quad (5.75)$$

qualquer que seja $\omega \in \Sigma_A$.

Uma discussão sobre essa definição pode ser encontrada em [7] ou [9]. Tomando $R^{\leftrightarrow}$ como objeto em que os observáveis tomam valores, é fácil mostrar que o valor de um morfismo $\Sigma \rightarrow R^{\leftrightarrow}$ dada por um observável a - morfismo que, grosseiramente falando, é definido pelo par “daseinização interna e daseinização externa de a ” - pode ser entendido contextualmente como um certo intervalo de valores possíveis (dado um estado puro do contexto) para o observável a .

Não nos estenderemos com essas discussões. Apresentamos a discussão de observável enquanto morfismo de maneira matematicamente precisa e era isso que pretendíamos aqui.

Estados invariantes na teoria quântica em topoi

Caracterizaremos agora estados invariantes (definição 51) na formulação contravariante da teoria quântica em topoi. Mais precisamente, determinaremos uma condição para medidas de probabilidade definidas no pré-feixe espectral (definição 79) que equivale à invariância de estados de $\mathcal{N}$, já que há uma relação biunívoca entre o conjunto de tais medidas e o conjunto dos estado da álgebra (teorema 83). Uma tentativa de se fazer isso pode ser encontrada em [15], e a caracterização que faremos aqui segue a proposta lá apresentada. Porém, se entendemos o que foi feito por esses autores, os resultados por eles apresentados estão, infelizmente, incorretos.

Para uma definição de ação de grupos de automorfismos (“evolução temporal”) em $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ e uma discussão sobre as noções de representações de Schrödinger e Heisenberg no topos sugerimos [10]. A definição 89, que será fundamental para a nossa caracterização de estados invariantes, pode ser entendida como um caso particular de resultados lá apresentados.

Seja $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ um automorfismo e $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. A primeira coisa que precisamos fazer é “representar” α no topos do sistema. Bom, é fácil “transformar” α em um funtor covariante $\tilde{\alpha} : \mathcal{V}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{N})$, basta associarmos o contexto A ao contexto $\alpha(A)$, sendo que, em $i_{AB} \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_1$ qualquer, $\tilde{\alpha}_{i_{AB}} \doteq i_{\alpha(A)\tau(B)}$ é a única opção: associamos a inclusão $A \subset B$ à inclusão $\alpha(A) \subset \alpha(B)$. É importante notar que $\alpha(A)$ é, de fato, um contexto. Com efeito, $\alpha(A)$ é trivialmente uma álgebra* unital; além disso, essa álgebra é fechada para a topologia

forte de operador, e portanto von Neumann (teorema 126), e isso é consequência da continuidade de α : isso se prova facilmente usando a bem conhecida caracterização de topologia forte através de seqüências de Moore-Smith (“nets”) - se $T(t)$ é elemento da seqüência, $T(t) \circ \alpha$ é também operador linear limitado, e isso nos dará uma nova seqüência de Moore-Smith, e portanto, grosseiramente falando, “o fechamento de $\alpha(A)$ para $(T(t))_{t \in I}$ equivale ao fechamento de A para $(T(t) \circ \alpha)_{t \in I}$ ”. Bom, temos um funtor covariante $\tilde{\alpha} : \mathcal{V}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{N})$ e há uma maneira simples e bem conhecida de “transformar” esse funtor em um funtor de $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ a $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$. A ideia é simples: se $F : \mathcal{V}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbf{Sets}$ é pré-feixe e o compusermos com $\tilde{\alpha}$ teremos novamente um pré-feixe $F \circ \tilde{\alpha} : \mathcal{V}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbf{Sets}$, pois a composição de um funtor contravariante com um funtor covariante é um funtor contravariante, como já provamos. A ação em morfismos de $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ também é simples. Vamos discutir isso de maneira mais precisa no próximo parágrafo.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtor covariante; temos bem definida a função $\widehat{\mathcal{D}}_0 \ni F \mapsto F \circ H \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ e é fácil “estendê-la” para um funtor covariante de $\widehat{\mathcal{D}}$ a $\widehat{\mathcal{C}}$ - que vamos denotar por H^* . De fato, seja $\gamma : F \rightarrow G \in \widehat{\mathcal{D}}_1$; definimos $H^*(\gamma) : F \circ H \rightarrow G \circ H \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ por $H^*(\gamma)_C \doteq \gamma_{H(C)} \forall C \in \mathcal{C}_0$. É fácil ver que $H^*(\gamma) : H^*(F) \rightarrow H^*(G)$ é transformação natural ($H^*(F) \in \widehat{\mathcal{C}}_1$) e que $H^* : \widehat{\mathcal{D}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ é funtor.

Pelo que foi dito acima temos um funtor $\alpha^* : \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})} \rightarrow \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ tal que $\alpha^*(F) \doteq F \circ \tilde{\alpha} \forall F \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}_0$, e daí $(\alpha^*(F))_A = F_{\alpha(A)} \forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$. Vamos explicitar essa definição.

Definição 88 Se $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ é automorfismo na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ está bem definido o funtor covariante $\alpha^* : \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})} \rightarrow \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$ tal que

- (a) Nos objetos: $(\alpha^*(F))_A = F_{\alpha(A)}$ em todo contexto $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ e $(\alpha^*(F))_{i_{AB}} : F_{\alpha(B)} \rightarrow F_{\alpha(A)}$ é a função $F_{i_{\alpha(A)\alpha(B)}}$.
- (b) Nos morfismos: Dado um morfismo $F \xrightarrow{\gamma} G \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}_1$ temos $\alpha^*(F) \xrightarrow{\alpha^*(\gamma)} \alpha^*(G)$ dado componente a componente por $(\alpha^*(\gamma))_A \doteq \gamma_{\alpha(A)}$

Em [15] afirma-se, pelo que entendemos, que se $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é estado (β, τ) -KMS então a medida associada a ele satisfaz

$$\mu^\rho(S) = \mu^\rho(\alpha^*(S)) \forall S \in Sub_{cl}(\Sigma),$$

onde escrevemos $\alpha \equiv \tau_t$ para mantermo-nos na nossa notação. Essa supostamente seria a

tradução da condição de invariância que ρ satisfaz em relação a $\alpha \equiv \tau_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Primeiro, para que essa $\mu^\rho(\alpha^*(S))$ faça sentido com a definição usual de μ^ρ é necessário que possamos entender $\alpha^*(S)$ como um subobjeto de Σ , ou seja, é necessário que exista um homomorfismo $\alpha(S) \rightarrow \Sigma$. A definição 89 nos dá de imediato um monomorfismo $\alpha^*(S) \hookrightarrow \alpha^*(\Sigma)$ mas disso não segue trivialmente que temos um subobjeto de Σ . Uma outra opção seria definir $\tilde{\mu}^\rho : Sub_{cl}(\alpha^*(\Sigma)) \rightarrow [0, 1]^\mathbb{Z}$, mas essa não parece ser uma boa escolha: primeiro porque, como já dissemos, já existe uma noção razoavelmente bem estabelecida de ação de grupos de automorfismos na teoria quântica em topoi, e nessa noção o pré-feixe espectral é sempre o mesmo; além disso, queremos entender Σ como espaço de estados do sistema e não me parece razoável que, ao introduzirmos uma noção de evolução temporal, tenhamos um espaço de estados para cada instante de tempo. Vamos portanto determinar um monomorfismo $\alpha^*(S) \rightarrow \Sigma$ para que tenhamos um subobjeto de Σ . Bom, já temos um monomorfismo $\alpha^*(S) \hookrightarrow \alpha^*(\Sigma)$; vamos determinar um monomorfismo $\alpha^*(\Sigma) \xrightarrow{\iota} \Sigma$ cuja composição $\alpha^*(S) \hookrightarrow \alpha^*(\Sigma) \xrightarrow{\iota} \Sigma$ será o monomorfismo desejado. É fácil ver, porém, que $\alpha^*(\Sigma)$ e Σ são objetos isomorfismos. De fato, sabemos que A e $\alpha(A)$ são isomorfos enquanto álgebras C^* , e isso implica que $\Sigma_{\alpha(A)}$ e Σ_A são isomorfos enquanto conjuntos. Com efeito, olhemos para as seguintes funções

$$\Sigma_{\alpha(A)} \ni \omega' \xrightarrow{\iota_A} \omega' \circ (\alpha|_A) \in \Sigma_A \quad (6.1)$$

$$\Sigma_A \ni \omega \xrightarrow{\iota_A^{-1}} \omega \circ (\alpha|_A^{-1}) \in \Sigma_{\alpha(A)}. \quad (6.2)$$

Bom $\omega \circ \alpha|_A$ é homomorfismo de A a $\mathbb{C}$ pois $\alpha|_A$ é isomorfismo de A a $\alpha(A)$, e então as funções estão bem definidas. É trivial que ι_A e ι_A^{-1} são funções injetoras: tomando $\omega', \omega'' \in \Sigma_{\alpha(A)}$ temos $\iota_A(\omega') = \iota_A(\omega'')$ se, e só se, $\omega'(\alpha(a)) = \omega''(\alpha(a)) \forall a \in A$, que equivale a $\omega(b) = \omega'(b) \forall b \in \alpha(A)$, ou seja, $\omega = \omega'$. Além disso, ι_A é claramente sobrejetora e sua inversa é, como a notação sugere, ι_A^{-1} : se $\omega \in \Sigma_A$ então $\omega = \omega \circ (\alpha|_A^{-1}) \circ (\alpha|_A) = \omega' \circ (\alpha|_A)$, onde $\omega' \equiv \omega \circ (\alpha|_A^{-1}) \in \Sigma_{\alpha(A)}$. Enfim, $\Sigma_{\alpha(A)}$ e Σ_A são conjuntos isomorfismos, sendo ι_A isomorfismo.

É trivial constatar que a coleção $\iota = \{\Sigma_{\alpha(A)} \xrightarrow{\iota_A} \Sigma_A; A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0\}$ define transformação natural de $\alpha^*(\Sigma)$ a Σ e portanto temos um isomorfismo $\alpha^*(\Sigma) \xrightarrow{\iota} \Sigma$.

Agora, para $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$, $\tau^*(S) \xrightarrow{\iota \circ \gamma} \Sigma$ é monomorfismo. Pelo lema 44 sabemos que o representante principal (definição 31) do subobjeto de Σ ao qual ele pertence tem como

componente, para um contexto A qualquer, a inclusão $(\iota \circ \gamma)_A(S_{\alpha(A)}) \hookrightarrow \Sigma_A$, sendo que $(\iota \circ \gamma)_A(S_{\alpha(A)}) = \iota_A(S_{\alpha(A)}) = \{\omega' \circ \alpha|_A; \omega' \in S_{\tau(A)}\}$. Usando o isomorfismo discutido acima temos que

$$\iota_A(S_{\alpha(A)}) \doteq \{\omega' \circ \alpha|_A \in \Sigma_A; \omega' \in S_{\alpha(A)}\} \quad (6.3)$$

$$= \{\omega \in \Sigma_A; \omega \circ (\alpha|_A^{-1}) \in S_{\alpha(A)}\} \quad (6.4)$$

$$= \{\omega \in \Sigma_A; \omega \circ (\alpha|_A^{-1})(p_{\alpha(A)}^S) = 1\} \quad (6.5)$$

$$= \{\omega \in \Sigma_A; \omega(\alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)) = 1\}. \quad (6.6)$$

Lembremos novamente que, para $B \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ qualquer e $T \in Sub_{cl}(\Sigma)$, denotamos por p_B^T o único projetor de B tal que $\widehat{p_B^T}^{-1}(\{1\}) = T_B$. Ora, $\alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)$ é projetor pois α^{-1} é automorfismo e $p_{\alpha(A)}^S$ é projetor.¹ Disso segue que $\iota_A(S_{\alpha(A)})$ é subconjunto clopen de Σ_A . Assim, o monomorfismo $\tau^*(S) \xrightarrow{\iota \circ \gamma} \Sigma$ pertence a um subobjeto clopen de Σ , cujo representante principal tem como domínio o seguinte funtor.

Definição 89 *Sejam $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ automorfismo na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ e $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$. Definimos o funtor $\alpha(S) \equiv S^\alpha$ por*

$$S_A^\alpha \doteq \{\omega \in \Sigma_A; \omega(\alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)) = 1\},$$

e para que tenhamos uma transformação natural $S^\alpha \hookrightarrow \Sigma$ usando inclusões contextuais, $S_{i_{AB}}^\alpha \doteq \Sigma_{i_{AB}}|_{S_B^\alpha}$. Temos ainda que

$$S^\alpha \in Sub_{cl}(\Sigma) \quad (6.7)$$

$$p_A^{S^\alpha} = \alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S). \quad (6.8)$$

Note que $S_A^\alpha = S_A$ se, e só se, $p_{\alpha(A)}^S = \alpha(p_A^S)$. Com efeito, sabemos que $p_{\alpha(A)}^S = \alpha(p_A^{S^\alpha})$, e da injetividade de α segue que $p_{\alpha(A)}^S = \alpha(p_A^S) \Rightarrow p_A^{S^\alpha} = p_A^S$, o que nos dá $S_A^\alpha = S_A$; por outro lado, é trivial que $S_A^\alpha = S_A$ implica $p_{\alpha(A)}^S = \alpha(p_A^S)$.

¹Aqui é muito importante o fato de α ser homomorfismo*. Se fosse apenas um isomorfismo, $\alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)$ seria projetor, ou seja, teríamos $(\alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S))^2 = \alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)$ mas não necessariamente seria projetor ortogonal, ou seja, não necessariamente seria autoadjunto. Lembrando que, como comentado no apêndice A.6, por “projetor” nesse trabalho geralmente queremos dizer “projetor ortogonal”.

Definição 90 Seja $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ um automorfismo na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Usando a definição 89 podemos definir as seguintes funções

(a) A função à qual nos referiremos por “atuação de α em $Sub_{cl}(\Sigma)$ ”:

$$Sub_{cl}(\Sigma) \ni S \xrightarrow{\alpha_{cl}} S^\alpha \equiv \alpha(S) \in Sub_{cl}(S)$$

(b) A função que chamaremos de “ação do grupo de automorfismos $\tau \equiv (\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (definição 121) em $Sub_{cl}(\Sigma)$ ” ou “evolução temporal”:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(S) \in Sub_{cl}(S).$$

Vamos usar a notação S^α quando quisermos expressões mais limpas, porém escrever $\alpha(S)$ geralmente atribui maior apelo formal às expressões.

Vamos, finalmente, tentar caracterizar α -invariância de um estado $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ através de uma propriedade satisfeita por $\mu^\rho : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\succeq$. Para isso, usaremos a definição 89. É importante lembrar que se ρ é α -invariante então ρ é α^{-1} -invariante: suponto $\rho = \rho \circ \alpha$, ou seja, α -invariante, temos, para todo $a \in \mathcal{N}$, que $\rho(\alpha(a)) = \rho(a) = \rho(\alpha^{-1}(\alpha(a))) = \rho \circ \alpha^{-1}(\alpha(a))$, e sendo $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ bijeção isso equivale a $\rho(\alpha^{-1}(b)) = \rho \circ \alpha^{-1}(b)$ para todo $b \in \mathcal{N}$, ou seja, $\rho = \rho \circ \alpha^{-1}$.

Suponhamos que ρ é α -invariante. Temos

$$\mu^\rho(\alpha(S))(A) = \rho(p_A^{\alpha(S)}) \tag{6.9}$$

$$= \rho(\alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)) \tag{6.10}$$

$$= \rho(p_{\alpha(A)}^S) \tag{6.11}$$

$$= \mu^\rho(S)(\alpha(A)). \tag{6.12}$$

Note que isso não implica que $\mu^\rho(\alpha(S)) = \mu^\rho(S)$, que seria um resultado formalmente semelhante ao apresentado em [15]. Nossa igualdade, porém, também admite uma interpretação coerente se pensarmos nas definições 88 e 90. De fato, faz sentido dizer que, para obtermos o valor $\mu^\rho(S)_{\alpha(A)}$ “fixamos o subobjeto S e aplicamos o automorfismo α em $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ ”; por outro lado, podemos dizer que, em $\mu^\rho(\alpha(S))(A)$, “fixamos o contexto A e atuamos α em $Sub_{cl}(\Sigma)$ ”. Dessa modo, para um estado α -invariante essas duas “operações” seriam equiva-

lentes. Bom, vamos provar agora que a validade da igualdade $\mu^\rho(\alpha(S))(A) = \mu^\rho(S)(\alpha(A))$, para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e todo contexto A , implica que o estado ρ é invariante. Suponhamos então que $\mu^\rho(S)(\alpha(A)) = \mu^\rho(\alpha(S))(A)$ para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$. Notemos que $\rho(p_{\alpha(A)}^S) = \mu^\rho(S)(\alpha(A)) = \mu^\rho(\alpha(S))(A) = \rho(p_A^{\alpha(S)}) = \rho(\alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)) = \rho \circ \alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^S)$, e notando ainda que todo $B \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ é da forma $B = \alpha(A)$ para algum $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ (basta tomar $A = \alpha^{-1}(B)$), podemos afirmar que a equação acima equivale a $\rho(p_A^S) = \rho \circ \alpha^{-1}(p_A^S)$, para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$. Porém, qualquer projetor ortogonal $q \in Pr(\mathcal{N})$ é da forma $q = p_A^S$ para algum $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e algum $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$: de fato, se tomarmos $S = \Delta(q)$ (definição 66) sabemos que, para qualquer contexto A que contenha q temos $p_A^{\Delta(q)} = \delta^o(q)_A = q$ - um contexto que contenha q sempre existe pois projetores ortogonais são operadores normais. Disso concluímos que $\rho(p) = \rho \circ \alpha^{-1}(p)$ para todo projetor ortogonal $p \in pr(N)$, e como estamos numa álgebra de von Neumann isso implica $\rho = \rho \circ \alpha^{-1}$: basta usar o lema 127 e o fato de ρ e $\rho \circ \alpha^{-1}$ serem lineares e contínuos. Assim, ρ é α^{-1} -invariante, e como já provamos, isso implica que ρ é α -invariante. Resumimos esses resultados no seguinte lema.

Lema 91 *Seja ρ um estado da álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ e $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ um automorfismo. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) ρ é invariante por α , ou seja, $\rho \circ \alpha = \rho$
- (b) A medida $\mu^\rho : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\Sigma$ associada a ρ (definição 79) satisfaz, para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$,

$$\mu^\rho(S)(\alpha(A)) = \mu^\rho(\alpha(S))(A)$$

em qualquer contexto A .

Note que é equivalente afirmar que a igualdade $\mu^\rho(S)(\alpha(A)) = \mu^\rho(\alpha(S))(A)$ vale para todo contexto A ou que a igualdade $\mu^\rho(S)(A) = \mu^\rho(\alpha(S))(\alpha^{-1}(A))$ vale para todo contexto A .

Comentemos a invariância de estados em relação a um grupo de automorfismos $\tau \equiv (\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (definição 121), ou seja, a condição de estacionariedade, que é satisfeita por estados KMS e que é o tipo de invariância de interesse em mecânica estatística, já que a dinâmica do sistema (evolução temporal) é determinada por um grupo de automorfismos. Sabemos que, por

definição, um estado ρ é τ -invariante $\rho \circ \tau_t = \rho$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos então o seguinte corolário

Corolário 92 *Sejam ρ um estado e $\tau \equiv (\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ grupo de automorfismos numa álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) ρ é τ -invariante (estacionário), ou seja, $\rho \circ \tau_t = \rho \forall t \in \mathbb{R}$
- (b) A medida $\mu^\rho : \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\geq$ associada a ρ (definição 79) satisfaz, para todo $S \in \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma)$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu^\rho(S)(\tau_t(A)) = \mu^\rho(\tau_t(S))(A)$$

em qualquer contexto A .

Para finalizar, introduzimos a seguinte definição, que se justifica pelo teorema 83 e pelos resultados que obtivemos.

Definição 93 (Medida invariante) *Sejam α um automorfismo e $\tau \equiv (\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ um grupo de automorfismos na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Sobre uma medida $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$ (definição 82) dizemos que*

- (a) μ é α -invariante quando, para todo $S \in \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma)$,

$$\mu(S)(\alpha(A)) = \mu(\alpha(S))(A)$$

em qualquer contexto A .

- (b) μ é τ -invariante (estacionário) ela é τ_t -invariante para todo $t \in \mathbb{R}$

Em resumo, um estado ρ é α -invariante se, e só se, a medida a ele associada é medida α -invariante.

6.1 Internalizando o resultado

Seria interessante que conseguíssemos caracterizar estados invariantes sem fazer referência a contextos. Lembremos que, numa notação mais precisa, devemos compreender a equação

$\mu(S)(\alpha(A)) = \mu(S^\alpha)(A)$ como $\mu(S)_{\alpha(A)}(*) (\alpha(A)) = \mu(S^\alpha)_A(*) (A)$, e então nossa igualdade se dá entre funções distintas quando aplicadas a pontos distintos de seus domínios. Além disso, trata-se de uma caracterização externa ao topos. Por isso, gostaríamos de caracterizar a invariância comparando elementos globais de $[0, 1]^\succeq$ de maneira direta, ou seja, interna ao topos: nosso resultado anterior caracteriza a invariância através de uma igualdade entre números; queremos uma igualdade de transformações naturais (a rigor, um diagrama comutativo). Para isso usaremos a definição 88 para introduzir uma “ação de α em $\Gamma[0, 1]^\succeq$ ”. Dessa maneira, para $1 \xrightarrow{\gamma} [0, 1]^\succeq$ teremos $\alpha(\gamma) : 1 \rightarrow [0, 1]^\succeq$. Veremos que, com a definição que introduziremos, valerá a igualdade

$$\mu^\rho(\alpha(S)) = \alpha(\mu^\rho(S)).$$

Façamos isso. Para limpar a notação escrevamos ρ^S em vez de $\mu^\rho(S)$. Notemos que $\rho^S : 1 \rightarrow [0, 1]^\succeq$. Para um automorfismo α já vimos que $\alpha^*(\rho^S) : \alpha^*(1) \rightarrow \alpha^*([0, 1]^\succeq)$. É trivial que $\alpha^*(1)$ é também objeto terminal de $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$, então vamos escrever $1 \equiv \alpha^*(1)$ (como já discutimos, denotamos por 1 qualquer terminal da categoria, sendo que objetos terminais são únicos a menos de isomorfismos); $\alpha^*(\rho^S)$ é elemento global de $\alpha^*([0, 1]^\succeq)$. Assim como obtivemos um isomorfismo $\alpha^*(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ podemos definir um isomorfismo entre $[0, 1]^\succeq$ e $\alpha^*([0, 1]^\succeq)$. De fato, em um contexto A qualquer temos que $\alpha^*([0, 1]^\succeq)_A = [0, 1]^\succeq_{\alpha(A)} = OR(\downarrow \tau(A), [0, 1])$ e $[0, 1]^\succeq_A = OR(\downarrow A, [0, 1])$, e então definimos $\iota_A : \alpha^*([0, 1]^\succeq)_A \rightarrow [0, 1]^\succeq_A$ por

$$\iota_A(f) \doteq f \circ t_A \quad \forall f \in OR(\downarrow \alpha(A), [0, 1]),$$

sendo que $t_A : \downarrow A \rightarrow \downarrow \alpha(A)$ é definido por $t_A \doteq \tilde{\alpha}|_{\downarrow A}$, ou seja, $t_A(A') = \alpha(A') \quad \forall A' \in \downarrow A$. O fato de $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ ser bijeção implica que $t_A : \downarrow A \rightarrow \downarrow \alpha(A)$ também o é, e disso decorre que $\iota_A : \alpha^*([0, 1]^\succeq)_A \rightarrow [0, 1]^\succeq_A$ é bijeção. É fácil ver que a coleção $\{\iota_A \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}_1; A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0\}$ é transformação natural de $\alpha^*([0, 1]^\succeq)$ a $[0, 1]^\succeq$, logo temos um isomorfismo $\alpha^*([0, 1]^\succeq) \xrightarrow{\iota} [0, 1]^\succeq$. Assim, tomando $1 \xrightarrow{\gamma} [0, 1]^\succeq$ podemos definir o elemento global de $[0, 1]^\succeq$ por $\alpha(\gamma) \doteq \iota \circ \alpha^*(\gamma)$. Note que $\alpha(\gamma)_A(*) = (\iota \circ \alpha^*(\gamma))_A(*) = (\iota_A \circ \gamma_{\alpha(A)})(*) = \iota_A \circ \gamma_{\alpha(A)}(*) = \gamma_{\alpha(A)}(*) \circ t_A$, daí, para $A' \in A$, $\alpha(\gamma)_A(*) (A') = \gamma_{\alpha(A)}(*) (\alpha(A'))$.

Definição 94 *Sejam α um automorfismo na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ e γ elemento global*

de $[0, 1]^{\succeq}$. Então $\alpha(\gamma) \in \Gamma[0, 1]^{\succeq}$ é definido por

$$\alpha(\gamma)_A(A') \doteq \gamma_{\alpha(A)}(\alpha(A')) \quad \forall A' \in \downarrow A.$$

Na definição acima estamos ocultando, como já fazíamos antes, o símbolo “*”, ou seja, se $\gamma : 1 \rightarrow [0, 1]^{\succeq}$, $\gamma_A(*) \equiv \gamma_A$. Tomando $\gamma = \rho^S$ temos que

$$\alpha(\rho^S)_A(A') = \rho_{\alpha(A)}^S(\alpha(A')) \quad (6.13)$$

$$= \mu^\rho(S)_{\alpha(A)}(\alpha(A')) \quad (6.14)$$

$$\equiv \mu^\rho(S)(\alpha(A')), \quad (6.15)$$

sendo que por outro lado,

$$\rho_A^{\alpha(S)}(A') = \mu^\rho(\alpha(S))_A(A') \quad (6.16)$$

$$\equiv \mu^\rho(A'). \quad (6.17)$$

Segue do lema 91 que $\alpha(\rho^S)_A = \rho_A^{S\alpha}$ para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ se, e só se, ρ é α -invariante. Isso equivale a dizer que, para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$,

$$\alpha(\rho^S) = \rho^{\alpha(S)}$$

ou, na notação usual,

$$\mu^\rho(\alpha(S)) = \alpha(\mu^\rho(S)).$$

É importante notar que há geralmente certo abuso de notação quando escrevemos igualdades em categorias. Nesse caso, por exemplo, se entendermos $\alpha(\rho^S)$ como composição $\iota \circ \alpha^*(\rho^S)$, a igualdade acima deve ser entendida como uma igualdade formal que representa a comutatividade do seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} 1' & \overset{!}{\dashrightarrow} & 1 \\ \alpha(\rho^S) \searrow & & \swarrow \rho^{\alpha(S)} \\ & [0, 1]^{\succeq} & \end{array}$$

onde $!$ é o único morfismo de $1'$ a 1 - como sabemos, $!$ é iso. Resumimos esses resultados nos seguintes lema e corolário.

Lema 95 *Sejam ρ estado e α automorfismo na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *O estado ρ é α -invariante.*

(b) *A medida $\mu^\rho : \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\geq$ associada a ρ (definição 79) satisfaz, para todo $S \in \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma)$,*

$$\mu^\rho(\alpha(S)) = \alpha(\mu^\rho(S))$$

onde $\alpha(S) \equiv S^\alpha$ é dado na definição 89. Numa notação categorialmente mais precisa, dizemos que o seguinte diagrama comuta para todo $S \in \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma)$

$$\begin{array}{ccc} 1' & \xrightarrow{\quad ! \quad} & 1 \\ \alpha(\mu^\rho(S)) \searrow & & \swarrow \mu^\rho(\alpha(S)) \\ & [0, 1]^\geq & \end{array}$$

Corolário 96 *Sejam ρ um estado e $\tau \equiv (\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ grupo de automorfismos numa álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) *ρ é τ invariante, ou seja, $\rho \circ \tau_t = \rho \forall t \in \mathbb{R}$*

(b) *A medida $\mu^\rho : \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\geq$ associada a ρ (definição 79) satisfaz, para todo $S \in \text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma)$ e $t \in \mathbb{R}$,*

$$\tau_t(\mu^\rho(S)) = \mu^\rho(\tau_t(S)).$$

A mesma observação feita no lema sobre a notação de igualdade se aplica aqui, é claro.

Bom, conseguimos então caracterizar a condição de estacionariedade (ou seja, invariância em relação à dinâmica do sistema) utilizando as medidas de probabilidade definidas no pré-feixe espectral, que é uma das propostas da definição de estado na teoria quântica em topoi. Podemos entender a igualdade $\mu(S)(\tau_t(A)) = \mu(\tau_t(S))(A)$, que equivale à estacionariedade (τ -invariância), como a afirmação de que “fixar um subobjeto e evoluir o contexto no tempo” e “fixar o contexto e evoluir um subobjeto no tempo” são “operações” equivalentes quando o

estado é estacionário, o que por sua vez indica que a evolução temporal definida nos contextos é coerente com a evolução temporal definida nos subobjetos já que, quando o estado é estacionário, as duas evoluções são operações equivalentes do ponto de vista da sua aplicação. A igualdade $\tau_t(\mu(S)) = \mu(\tau_t(S))$, que também equivale à estacionariedade, nos diz que quando um estado $\mu : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\succeq$ é estacionário, “evoluir S no tempo e depois aplicar μ ” equivale a “aplicar μ e depois evoluir $\mu(S)$ no tempo”, e isso indica que as noções de evolução temporal que introduzimos em $Sub_{cl}(\Sigma)$ e em $\Gamma[0, 1]^\succeq$ são também consistentes entre si. Note que não estamos propondo aqui interpretações físicas para os resultados obtidos; procuramos apenas mostrar que eles são simples e inteligíveis. Além disso, dada uma interpretação física precisa para noções como “evolução temporal do contexto A ”, “evolução temporal do subobjeto S ” entre outras, nossos resultados terão uma interpretação física simples e aparentemente coerente com o que se espera da condição de estacionariedade.

O fato de podermos caracterizar estacionariedade através das medidas definidas no pré-feixe espectral, que é o que foi provado nesse capítulo, é certamente importante para a defesa da ideia de que essas medidas são a definição adequada de estado na teoria quântica em topoi.

² Podemos pensar algo semelhante em relação à condição KMS em dimensão finita. Se na definição de estado enquanto medida não for possível caracterizar a condição KMS (estados de Gibbs), então talvez essa não seja a definição adequada de estado na teoria quântica em topoi. No capítulo seguinte tentaremos mostrar que provavelmente não é possível utilizar medidas definidas no pré-feixe espectral para caracterizar a condição KMS. Se de fato existe a pretensão de que as medidas definidas no pré-feixe espectral sejam a única noção de estado utilizada na teoria quântica em topoi então, caso prove-se que não é possível caracterizar a condição KMS através delas, é de se esperar que essa pretensão seja abandonada.

²Segundo Isham e Döring, a razão primária para que eles aspirem a mudar o formalismo quântico é a necessidade de se encontrar um *framework* em que novos “tipos de teoria” possam ser construídos, sendo que a teoria quântica da gravitação é apresentada como exemplo central de “tipo de teoria”. Pelo pouco que entendo do assunto acredito que uma teoria quântica da gravitação deveria ter a mecânica quântica como caso particular, e se assim o for, uma teoria quântica da gravitação fundamentada na teoria quântica em topoi deveria ser capaz de nos fornecer os resultados já conhecidos da mecânica quântica usual. Se isso estiver correto e se quisermos que as medidas sejam a única definição de estado utilizada na reformulação, esse objetivo apresentado pelos autores sugere que exijamos que as medidas sejam capazes de caracterizar a condição KMS em dimensão finita.

Preâmbulo sobre estados KMS na teoria quântica em topoi

No capítulo anterior conseguimos determinar uma condição que é satisfeita por uma medida μ se, e só se, o estado ao qual ela está associada (teorema 83) é invariante para um grupo de automorfismos. Seria agora natural fazermos o mesmo para a condição KMS, ou seja, determinar uma condição que seja satisfeita por uma medida se, e somente se, o estado ao qual ela está associada é (β, τ) -KMS. Não conseguimos fazer isso e cremos que tal caracterização não é possível; queremos nesse capítulo apresentar argumentos em favor disso. *En passant*, apresentamos outra caracterização para as medidas α -invariantes (definição 93).

Consideremos o caso em que $\mathcal{N} = \mathcal{B}(H)$ para um espaço de Hilbert H de dimensão finita e que o grupo de automorfismos é do tipo $\tau_t(a) \doteq e^{ith} a e^{-ith} \forall a \in \mathcal{B}(H)$, onde $h \in \mathcal{B}(H)$ é autoadjunto; como já discutimos, num sistema dinâmico desse tipo um estado é (β, τ^h) -KMS se, e só se, ele é o estado de Gibbs para o par (β, h) (lema 55). Bom, um estado ρ é (β, τ^h) -KMS se e só se

$$\rho(ab) = \rho(b\tau_{i\beta}(a))$$

para todo par $a, b \in \mathcal{B}(H)$. Como ρ , o produto de $\mathcal{B}(H)$ e $\tau_{i\beta}$ são contínuos e lineares (mais precisamente, o produto é bilinear), é suficiente que essa igualdade seja satisfeita para projetores, devido ao lema 127, ou seja, devido ao fato de uma álgebra de von Neumann ser “gerada pelo seu conjunto de projetores ortogonais”. Assim, a condição KMS equivale à igualdade acima

restrita a $Pr(H)$. Lembremos que num contexto A temos $p_A^{S \wedge T} = p_A^S \wedge p_A^T = p_A^S p_A^T$ (usamos aqui o lema 168 e o isomorfismo que existe entre $Pr(A)$ e o reticulado de subconjuntos clopen de Σ_A). Isso nos diz que $\mu^\rho(S \wedge T)_A = \rho(p_A^S p_A^T)$. Desse modo, se $\tau_{-i\beta}$ fosse homomorfismo*,

$$\mu^\rho(S \wedge \tau_{-i\beta}(T))(A) = \rho(p_A^{S \wedge \tau_{-i\beta}(T)}) = \rho(p_A^S p_A^{\tau_{-i\beta}(T)}) \quad (7.1)$$

$$= \rho(p_A^S \tau_{i\beta}(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^T)) \quad (7.2)$$

e assim teríamos, no caso em que ρ é (β, τ) -KMS,

$$\mu^\rho(S \wedge \tau_{-i\beta}(T))(A) = \rho(p_A^S \tau_{i\beta}(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^T)) \quad (7.3)$$

$$= \rho(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^T p_A^S) \quad (7.4)$$

$$= \rho(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^T \tau_{i\beta}(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^{\tau_{i\beta}(S)})) \quad (7.5)$$

$$= \rho(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^{\tau_{i\beta}(S)} p_{\tau_{-i\beta}(A)}^T) \quad (7.6)$$

$$= \rho(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^{\tau_{i\beta}(S) \wedge T}) \quad (7.7)$$

$$= \mu^\rho(\tau_{i\beta}(S) \vee T)(\tau_{-i\beta}(A)), \quad (7.8)$$

sendo que na terceira igualdade acima usamos que $p_{\tau_{-i\beta}(A)}^{\tau_{i\beta}(S)} = \tau_{-i\beta}(p_A^S)$, (o que, claro, implica $p_A^S = \tau_{i\beta}(p_{\tau_{-i\beta}(A)}^{\tau_{i\beta}(S)})$). Vemos então que, se $\tau_{-i\beta}$ fosse homomorfismo*, a propriedade KMS implicaria que

$$\mu^\rho(S \wedge \tau_{-i\beta}(T))(A) = \mu^\rho(\tau_{i\beta}(S) \vee T)(\tau_{-i\beta}(A)).$$

À primeira vista seria razoável esperar que a volta disso valeria, ou seja, que se uma medida μ^ρ satisfaz essa igualdade para todo par de subobjetos S, T e todo contexto A então o estado é (β, τ) KMS. Isso, porém, não é verdade, e essa igualdade implicaria apenas que o estado é invariante para o automorfismo $\tau_{i\beta}$. De maneira mais geral, é fácil provar o seguinte lema

Lema 97 *Sejam $\mathcal{N}$ álgebra de von Neumann e $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ automorfismo*. Então um estado $\rho : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é α -invariante se, e só se,*

$$\mu^\rho(S \wedge \alpha(T))(A) = \mu^\rho(\alpha^{-1}(S) \wedge T)(\alpha(A))$$

para todo par $S, T \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e todo contexto A .

Note que essa caracterização de invariância é análoga à seguinte: um estado é α invariante se e só se $\rho(\alpha(a)b) = \rho(\alpha^{-1}(a)b)$ para todo par $a, b \in \mathcal{N}$.

A tentativa feita acima para caracterizar estados KMS não funciona e cremos, como já afirmamos, que nenhuma equação envolvendo a ação de uma medida μ em subobjetos é capaz de fazer isso. Primeiro, $\tau_{-i\beta}$ é homomorfismo porém não é homomorfismo*, e dessa maneira ele não define um funtor no sentido da definição 88 pois “não leva álgebras de von Neumann em álgebras de von Neumann”, e assim a aplicação $\tau_{-i\beta}(T)$ não está bem definida. Isso, por si só, já impossibilita a determinação de uma condição KMS da maneira proposta acima, envolvendo medidas no pré-feixe espectral e a ação de $\tau_{-i\beta}$ nos subobjetos clopen. Mais que isso, para um automorfismo α temos $\mu^\rho(S \wedge \alpha(T))(A) = \rho(p_A^S \alpha^{-1}(p_{\alpha(A)}^T))$, mas nem todo par de projetores s, t satisfará $s = p_A^S$ e $t = p_{\alpha(A)}^T$ para subobjetos S, T e algum contexto A pois é falso em geral que $[\alpha(s), t] = 0$. Assim, mesmo que conseguíssemos definir uma “ação de $\tau_{i\beta}$ nos subobjetos”, não poderíamos usar $\mu^\rho(S \wedge \tau_{-i\beta}(T))(A)$, uma igualdade adequada e o lema 127 para concluir que o estado é (β, τ) -KMS pois a igualdade que obteríamos não seria válida para todo par de projetores ortogonais da álgebra. O mesmo acontecerá com qualquer subobjeto envolvendo o conectivo $\wedge$ e a suposta ação de $\tau_{i\beta}$ em subobjetos. Sendo assim, cremos não ser possível caracterizar a propriedade KMS através de medidas definidas no pré-feixe espectral. Seja isso verdade ou não, o fato é que não conseguimos fazê-lo; além disso, o a caracterização de estados KMS através de medidas apresentada em [15], se entendemos corretamente o que lá foi feito, está incorreta. Por isso buscamos outra maneira de caracterizar a condição KMS através da teoria quântica em topoi. Olhando para as noções de estado que apresentamos, temos o pseudoestado, cuja função é atribuir valores de verdade para proposições. Faz sentido então pensarmos em uma “proposição KMS”, ou seja, uma proposição que é verdadeira se, e só se, o estado é KMS.¹ Foi basicamente isso que fizemos, e para tal introduzimos a noção de “topos associado a um estado”. Mostramos que um estado é (β, τ) -KMS se, e só se, a “proposição KMS” é verdadeira no topos a ele associado. Mais que isso, mostramos que há ao menos duas possíveis proposições com essa propriedade, sendo que uma delas não é determinada pela daseinização de um projetor. Isso pode ser usado para dar significado físico a uma proposição que a princípio não está na interpretação da linguagem $\mathcal{PL}(S)$.

¹ Estamos usando a palavra “proposição” aqui como sinônimo de subobjeto clopen. Para isso não precisamos pensar na linguagem $\mathcal{PL}(S)$.

CAPÍTULO 8

O topos associado a um estado

A introdução da noção de topos associado a um estado é motivada pela nossa intenção de caracterizar estados KMS na teoria quântica em topoi, como já mencionamos, porém sua utilidade não se restringe a isso. Na formulação contravariante da teoria precisamos usar álgebras de von Neumann para que a daseinização de um projetor esteja bem definida. Porém, em mecânica estatística quântica um sistema físico é geralmente representado por uma álgebra C^* que não é von Neumann e nesse caso não podemos a princípio definir o topos associado ao sistema. Uma maneira de se livrar desse impedimento se dá através da bem conhecida noção de representação de uma álgebra C^* . No apêndice A.3.4 discutimos basicamente tudo o que usaremos sobre teoria da representação de álgebras C^* ; porém, para facilitar uma leitura linear da dissertação, vale a pena exibirmos os resultados principais aqui. Grosseiramente falando, representar uma álgebra* em um espaço de Hilbert H é associá-la, através de um homomorfismo*, a uma subálgebra* de $\mathcal{B}(H)$. Mais precisamente, conforme a definição 152, podemos dizer que uma representação de uma álgebra* $\mathcal{A}$ é um par (H, π) onde H é espaço de Hilbert e $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é um homomorfismo*. Um vetor cíclico numa representação (H, π) é um vetor $\Phi \in H$ para o qual o conjunto $\pi(\mathcal{A})\Phi$ é denso em H , e uma representação cíclica de $\mathcal{A}$ é uma tripla (H, π, Φ) onde (H, π) é representação de $\mathcal{A}$ e Φ é um vetor normalizado que é cíclico em (H, π) . A bem conhecida construção GNS (teorema 155) nos diz que, se $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ é estado, existe uma representação

cíclica $(H_\rho, \pi_\rho, \Phi_\rho)$ de $\mathcal{A}$ tal que

$$\rho(a) = \langle \Phi_\rho, \pi_\rho(a) \Phi_\rho \rangle.$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. É útil representar a igualdade acima através de um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C} \\ \pi_\rho \downarrow & \nearrow \langle \Phi_\rho, (\cdot) \Phi_\rho \rangle & \\ \mathcal{B}(H_\rho) & & \end{array}$$

Isso nos diz que, na sua representação, ρ pode ser entendido como um estado vetor - o estado $\langle \Phi_\rho(\cdot) \Phi_\rho \rangle$. Como está provado no apêndice, há uma relação biunívoca entre estados e classes de equivalência de representações cíclicas. Mais que isso, um estado KMS determina uma representação cíclica fiel (definição 153), e nesse caso podemos dizer que $\mathcal{A}$ é isomorfa a $\pi(\mathcal{A})$. Bom, representações nos permitem “transportar” uma álgebra C^* para $\mathcal{B}(H)$, e dessa maneira é fácil associar uma álgebra de von Neumann ao sistema, sendo que essa álgebra depende da representação. Para um estado ρ , o mais natural seria tomarmos $\pi_\rho(\mathcal{A})''$ como álgebra de von Neumann a ele associada, que é a menor álgebra de von Neumann que contém $\pi(\mathcal{A})$ e é a álgebra que geralmente se usa em teoria da representação. Nessa álgebra, porém, determinar uma “proposição KMS” mostrou-se uma tarefa complicada e resolvemos deixá-la para um trabalho posterior. ¹ Nessa dissertação, tomaremos $\mathcal{B}(H_\rho)$ como álgebra de von Neumann associada a ρ . Isso nos permite definir

Definição 98 (Topos associado a um estado) *Sejam $\mathcal{A}$ álgebra C^* e $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. Seja $(H_\rho, \pi_\rho, \Phi_\rho)$ a representação GNS de $\mathcal{A}$ através de ρ . Chamamos de “topos associado ao estado ρ ” o topos*

$$\mathcal{V}(\widehat{\mathcal{B}(H_\rho)}) \equiv [\mathcal{V}(\mathcal{B}(H_\rho))^{op}, \mathbf{Sets}].$$

É claro que afirmar que o topos $\mathcal{V}(\widehat{\mathcal{B}(H)})$ representa, em algum sentido, o sistema que antes representávamos através de $\mathcal{A}$ é questionável. É igualmente questionável, porém, afirmar que a álgebra de von Neumann $\pi(\mathcal{A})''$ representa esse sistema, coisa que frequentemente é feita

¹ Estamos tentando determinar uma condição KMS em $\pi(\mathcal{A})''$ e produzir um artigo sobre isso em parceria com o prof. Jean Bernard Bru.

na mecânica quântica algébrica. Podemos dizer que é igualmente questionável afirmar que a própria álgebra C^* $\mathcal{A}$ representa o sistema. Não abordaremos aqui essa questão pois encontrar uma resposta para ela seria tão complicado quanto encontrar uma resposta para esses outros exemplos apresentados. Uma definição em física é geralmente justificada pela sua aplicabilidade em casos concretos, e não por argumentos que sustentem a razoabilidade da definição. O mesmo deve se aplicar à definição introduzida acima; cabe a nós usá-la.

No começo desse capítulo dissemos que em mecânica estatística um sistema é geralmente representado por uma álgebra C^* que não é von Neumann. Na caracterização de estados invariantes através de medidas no pré-feixe espectral, porém, partimos de uma álgebra de von Neumann. Seria interessante então tentarmos usar o topos associado a um estado para obter uma caracterização de estados invariantes definidos em álgebras C^* qualquer; fizemos isso no apêndice [A.7](#).

Já temos a definição de topos associado a um estado e com ela podemos introduzir nossa “proposição KMS”. Faremos isso no próximo capítulo.

Estados KMS na teoria quântica em topoi

Conforme discutimos, vamos utilizar a noção de topos associado a um estado para determinar uma proposição que é válida no topos associado a um estado se, e só se, esse estado é (β, τ) -KMS. Sejam $(\mathcal{A}, \tau)$ sistema dinâmico C^* (Definição 122) e $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. Seja $\mathcal{A}_\tau$ o conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos (definição 58), que sabemos ser uma subálgebra* densa na topologia da norma. Pela definição de estado KMS (definição 56) sabemos que ρ é (β, τ) -KMS se e só se, para todo par $a, b \in \mathcal{A}_\tau$,

$$\rho(ab - b\tau_{i\beta}(a)) = 0. \quad (9.1)$$

Queremos agora escrever uma igualdade que faz referência apenas a um elemento τ -inteiro-analítico e não a um par deles. Primeiro, $\mathcal{A}_\tau$ é conjunto autoadjunto e então todo elemento $a \in \mathcal{A}_\tau$ pode ser escrito como c^* para algum $c \in \mathcal{A}_\tau$, sendo, claro, $c = a^*$, e portanto podemos dizer que ρ é (β, τ) -KMS se e só se para todo par $a, b \in \mathcal{A}_\tau$ vale a igualdade $\rho(a^*b - b\tau_{i\beta}(a^*)) = 0$. Notemos agora que as funções $\mathcal{A}_\tau \times \mathcal{A}_\tau \ni (a, b) \mapsto f(a, b) \doteq \rho(a^*b) \in \mathbb{C}$ e $\mathcal{A}_\tau \times \mathcal{A}_\tau \ni (a, b) \mapsto g(a, b) \doteq -\rho(b\tau_{i\beta}(a^*)) \in \mathbb{C}$ são formas sesquilineares, ou seja, são funções lineares em relação ao segundo argumento e antilineares em relação ao primeiro. Sabemos que a soma de formas

sesquilineares é uma forma sesquilinear e portanto o mapa

$$\mathcal{A}_\tau \times \mathcal{A}_\tau \ni (a, b) \mapsto h(a, b) \doteq (f + g)(a, b) = \rho(a^*b - b\tau_{i\beta}(a^*)) \in \mathbb{C}$$

é forma sesquilinear. Ora, para formas sesquilineares temos a bem conhecida identidade de polarização:

Lema 99 *Seja A espaço vetorial complexo e $f : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ forma sesquilinear. Então para todo par $(a, b) \in A \times A$ vale que*

$$f(a, b) = \sum_{n=0}^3 \frac{1}{4} (-i)^n f(a + i^n b, a + i^n b).$$

Disso decorre que se $h(a + i^n b, a + i^n b) = 0$ para todo $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ e todo par $a, b \in \mathcal{A}_\tau$ então $h(a, b) = 0$ para todo $a, b \in \mathcal{A}_\tau$, sendo a afirmação contrária trivialmente válida. Porém, afirmar que para todo $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ e todo par $a, b \in \mathcal{A}_\tau$ temos $h(a + i^n b, a + i^n b) = 0$ equivale a afirmar que $h(c, c) = 0$ para todo $c \in \mathcal{A}$, já que todo c pode ser escrito como $a + i^n b$ - basta tomarmos $b = 0$. Com isso está provado o seguinte lema. ¹

Lema 100 *Um estado ρ definido numa álgebra C^* $\mathcal{A}$ é (β, τ) -KMS se, e só se,*

$$\rho(a^*a - a\tau_{i\beta}(a^*)) = 0$$

para todo a τ -inteiro-analítico.

Seja $(H_\rho, \pi_\rho, \Phi_\rho)$ a representação GNS de $\mathcal{A}$ dada pelo estado ρ (teorema 155). Temos que $\rho(a) = \langle \Phi_\rho, \pi_\rho(a) \Phi_\rho \rangle \forall a \in \mathcal{A}$, e daí podemos afirmar que a condição (β, τ) -KMS equivale a dizer que para todo $a \in \mathcal{A}_\tau$,

$$\Phi_\rho \perp \pi_\rho(a^*a - a\tau_{i\beta}(a^*))\Phi_\rho. \quad (9.2)$$

Vamos olhar para essa relação de ortogonalidade do ponto de vista dos projetores de $\mathcal{B}(H_\rho)$. Para um estado ψ qualquer, denotamos por p_ψ o único projetor cuja imagem é o subespaço

¹Não encontramos esse resultado na literatura e portanto, até onde sabemos, trata-se de um resultado novo - apesar de simples. A prova aqui apresentada se deve ao prof. Walter Pedra.

fechado $\mathbb{C}(\psi) \doteq \{\lambda\psi; \lambda \in \mathbb{C}\}$ - a bem conhecida relação biunívoca entre projetores ortogonais e subespaços fechados de H foi discutida no apêndice A.5. É fácil ver que dois vetores $\psi, \phi \in H$ não nulos são ortogonais se, e só se, $p_\psi \leq 1 - p_\phi$; com efeito, $p_\psi \leq 1 - p_\phi \Leftrightarrow p_\psi(H) \subset (1 - p_\phi)(H) \Leftrightarrow p_\psi(H) \subset \ker(p_\phi) \Leftrightarrow \psi \in \ker(p_\phi) \Leftrightarrow \langle \phi, \psi \rangle = 0$. Para todo $a \in \mathcal{A}_\tau$ definamos

$$p^{(a)} \doteq 1 - p_{\pi_\rho(a^*a - a\tau_{i\beta}(a^*))\Phi_\rho}.$$

Esse projetor não necessariamente pertence a $\pi_\rho(\mathcal{A})''$, por isso tomamos $\widehat{\mathcal{B}(H_\rho)}$ como topos associado a ρ na definição 98. Bom, pela equação 9.2 temos que ρ é (β, τ) -KMS se, e só se,

$$p_\rho \leq p^{(a)}, \quad (9.3)$$

para todo $a \in \mathcal{A}_\tau$, onde $p_\rho \equiv p_{\Phi_\rho} \equiv \langle \Phi_\rho, \cdot \rangle \Phi_\rho$. Será essa relação de ordem entre projetores o nosso ponto de partida para as definições das duas “proposições KMS” que introduziremos. Para a primeira proposição KMS tomaremos um ínfimo no reticulado de projetores $Pr(H_\rho)$, processo que nos “reduzirá” o esquema de desigualdades determinado por 9.3 a uma desigualdade de $Pr(H_\rho)$ equivalente a esse esquema, e em seguida utilizaremos a daseinização de projetores (definição 66) para “transferir” essa desigualdade para o reticulado $Sub_{cl}(\Sigma)$, e assim obteremos uma desigualdade em $Sub_{cl}(\Sigma)$ equivalente ao esquema; para a segunda proposição KMS utilizaremos a daseinização para “transferir” para $Sub_{cl}(\Sigma)$ o esquema de desigualdades, tendo como resultado um esquema equivalente ao inicial, e em seguida tomaremos um ínfimo na álgebra de Heyting completa $Sub_{cl}(\Sigma)$, o que determinará uma desigualdade equivalente ao esquema obtido através da daseinização. Note que nos dois caso será importante o fato de que a daseinização é um mapa que preserva e reflete ordem. No lema 65 provamos que a daseinização preserva ordem; provemos agora que ela também a reflete.

Lema 101 *Sejam p, q projetores ortogonais numa álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Então $p \leq q$ se, e só se, $\Delta(p) \preceq \Delta(q)$*

Prova. Já provamos que $p \leq q$ implica $\Delta(p) \preceq \Delta(q)$, então basta provarmos a outra afirmação. Por definição de $\preceq$ temos que $\Delta(p) \preceq \Delta(q)$ se e só se $\Delta(p)_A \preceq \Delta(q)_A$ em todo contexto A , que por sua vez equivale à desigualdade $\delta^0(p)_A \leq \delta^0(q)_A$ em $Pr(A)$. Tomando um contexto A ao

qual q pertença (que sempre existe pois q é projetor ortogonal - lema 164²) temos $\delta^0(p)_A \preceq q$, que por sua vez implica $p \leq q$ já que $p \leq \delta^0(p)_A$ em qualquer contexto A . ■

Vamos à primeira proposição. O esquema de desigualdades determinado por 9.3 equivale a

$$p_\rho \leq \bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} p^{(a)},$$

que por sua vez, graças ao lema 101, equivale a

$$\Delta(p_\rho) \preceq \Delta\left(\bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} p^{(a)}\right).$$

Sabemos que $\Delta(p_\rho)$ é o pseudoestado (definição 77) determinado pelo estado puro Φ_ρ (mais precisamente, o estado $\langle \Phi_\rho, (\cdot) \Phi_\rho \rangle$), e que esse é o estado em $\mathcal{B}(H_\rho)$ canonicamente associado a ρ . Conforme discutimos na subseção 5.3.1, um estado ψ atribui “valores de verdade no topos” - elementos globais do classificador de subobjetos - a elementos de $Sub_{cl}(\Sigma)$ através da regra

$$V^\psi(S)_A \doteq \{A' \subset A; \Delta(p^\psi) \subset S_{A'}\},$$

Lembremos também que uma proposição S^3 é verdadeira para ψ ($V^\psi(S) : 1 \rightarrow \Omega$ é o “morfismo *true*”) se, e só se, $\Delta(p^\psi) \preceq S$ ou seja, se e só se o a proposição S é maior que o pseudoestado $\Delta(p_\rho)$. Concluimos portanto que um estado ρ é (β, τ) -KMS se, e só se, no topos a ele associado a proposição

$$K_0^\rho \doteq \Delta\left(\bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} p^{(a)}\right),$$

onde

$$p^{(a)} \doteq 1 - p_{\pi_\rho(a^*a - a\tau_{i\beta}(a^a))\Phi_\rho},$$

satisfaz

$$\Delta(p_\rho) \preceq K_0^\rho,$$

ou seja, se e só se essa proposição é verdadeira para a valoração definida por ρ . Vamos agora

² $Pr(H_\rho)$ é o conjunto dos projetores ortogonais de H_ρ . Projetores ortogonais são autoadjuntos e normais devido ao lema e por isso eles pertencem a algum contexto - basta tomarmos a álgebra de von Neumann unital gerada por $\{1, q\}$.

³Estamos usando o termo “proposição” para fazer referência a qualquer subobjeto clopen de Σ

à segunda proposição. Como comentamos, nosso ponto de partida é novamente o fato de ρ ser (β, τ) -KMS se e só se, em $\mathcal{B}(H_\rho)$, valer que $p_\rho \leq p^{(a)}$ para todo $a \in \mathcal{A}_\tau$. Pelo lema 101 isso equivale a

$$\Delta(p_\rho) \preceq \Delta(p^{(a)})$$

para todo $a \in \mathcal{A}_\tau$, que por sua vez equivale a

$$\Delta(p_\rho) \preceq \bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} \Delta(p^{(a)}).$$

A proposição $K_1^\rho \doteq \bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} \Delta(p^{(a)})$ é a nossa segunda “proposição KMS”. Pelo lema 76 sabemos que

$$K_0^\rho \doteq \Delta\left(\bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} p^{(a)}\right) \preceq \bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} \Delta(p^{(a)}) \doteq K_1^\rho$$

e portanto esses dois subobjetos são em geral diferentes. O lema 104 nos diz ainda que $K_0^\rho = K_1^\rho$ se e só se K_1^ρ é do tipo “daseinização de um projetor”, ou seja, se e só se existe $q \in Pr(H_\rho)$ tal que $\Delta(q) = \bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} \Delta(p^{(a)})$. Consequentemente temos uma “proposição KMS” que não necessariamente é determinada pela daseinização de um projetor. Vamos enunciar uma proposição com esses resultados; para isso é útil introduzir a seguinte definição.

Definição 102 (Proposições KMS) *Sejam $(\mathcal{A}, \tau)$ sistema dinâmico C^* e $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. No topos $\mathcal{V}(\widehat{\mathcal{B}(H_\rho)})$ associado a esse estado (definição 98) chamamos de “proposição KMS” as seguintes proposições.*

$$K_0^\rho \doteq \Delta\left(\bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} p^{(a)}\right) \tag{9.4}$$

$$K_1^\rho \doteq \bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} \Delta(p^{(a)}), \tag{9.5}$$

onde $\mathcal{A}_\tau$ é o conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos e $p^{(a)} \doteq p_{1-\pi_\rho(a^*a-a\tau_{i\beta}(a^a))\Phi_\rho}$.

Podemos agora enunciar a proposição.

Proposição 103 *Sejam $(\mathcal{A}, \tau)$ sistema dinâmico C^* e $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *O estado ρ é (β, τ) -KMS*

(b) A proposição KMS K_0^ρ (definição 102), definida no topos associado a esse estado, é verdadeira para a valoração determinada por ρ , ou seja,

$$\Delta(p_\Phi) \preceq K_0^\rho$$

(c) A proposição K_1^ρ (definição 102), definida no topos associado a esse estado, é verdadeira para a valoração determinada por ρ , ou seja,

$$\Delta(p_\Phi) \preceq K_1^\rho.$$

Como $\Delta(\bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} p^{(a)}) \preceq \bigwedge_{a \in \mathcal{A}_\tau} \Delta(p^{(a)})$, é imediato que, no lema acima, (b) implique (c); por outro lado, do ponto de vista da teoria de ordem, o fato de (c) implicar (b) parece não natural: estamos afirmando que temos “ $x \leq y$ ” e “ $n \leq y$ ” e disso estamos concluindo que “ $n \leq x$ ”. Por isso, pode-se ter a impressão de que a validade dessa afirmação é consequência da família de projetores que tomamos, ou seja, consequência da condição KMS. Mostraremos agora, porém, que não é esse o caso e que essa propriedade pode ser entendida como uma propriedade do ordenamento de $Sub_{cl}(\Sigma)$ e do fato de estarmos lidando com subobjetos do tipo “daseinização de um projetor”.⁴ Mostraremos que para uma família $\{p_i \in Pr(\mathcal{N}), i \in I\}$ qualquer de projetores em $\mathcal{N}$ ⁵, se $q \in Pr(\mathcal{N})$ satisfaz $\Delta(q) \preceq \bigwedge_{i \in I} \Delta(p_i)$ então $\Delta(q) \preceq \Delta(\bigwedge_{i \in I} p_i)$. Isso nos diz que, em $(Sub_{cl}(\Sigma), \preceq)$, o intervalo

$$\left[\Delta\left(\bigwedge_{i \in I} p_i\right), \bigwedge_{i \in I} \Delta(p_i) \right]$$

não possui no seu interior nenhum elemento do tipo “daseinização de um projetor”, ou seja, se $q \in Pr(\mathcal{N})$ satisfaz

$$\Delta\left(\bigwedge_{i \in I} p_i\right) \preceq \Delta(q) \preceq \bigwedge_{i \in I} \Delta(p_i)$$

então $\Delta(\bigwedge_{i \in I} p_i) = \Delta(q)$, o que implica $q = \bigwedge_{i \in I} p_i$ (por causa do lema 101). Consequentemente, $\bigwedge_{i \in I} \Delta(p_i) = \Delta(q)$ para algum $q \in Pr(\mathcal{N})$ se e só se $\Delta(\bigwedge_{i \in I} p_i) = \bigwedge_{i \in I} \Delta(p_i)$. Vamos agora entender a implicação “c implica b” da proposição 103 sob a luz desse resultado. Acima representamos formalmente essa implicação dizendo que de “ $x \leq y$ ” e “ $n \leq y$ ” concluíamos

⁴Essa observação foi feita pelo prof. Jean Bernard Bru.

⁵Note que $\mathcal{N}$ é uma álgebra de von Neumann qualquer e portanto o resultado não se restringe ao caso do topos associado a um estado

$n \leq x$; na verdade, concluímos “ $n \leq x$ ” de “ $x \leq y$ ” e “ n é do tipo de se-inização de um projetor”. Comparando com o caso numérico, poderíamos tomar $x = 1$, $y = 1,99999$, que claro, satisfazem $x \leq y$, que do par de afirmações “ $n \leq y$ ” e “ n é natural” concluiríamos “ $n \leq x$ ”.

Bom, vamos à prova

Lema 104 *Seja $\{p_i \in Pr(\mathcal{N}); i \in I\}$ família de projetores ortogonais numa álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes sobre $q \in Pr(\mathcal{N})$.*

$$(a) \Delta(q) \preceq \bigwedge_{i \in I} \Delta(p_i)$$

$$(b) \Delta(q) \preceq \Delta(\bigwedge_{i \in I} p_i).$$

Prova.

$$\Delta(q) \preceq \bigwedge_{i \in I} \Delta(p_i) \Leftrightarrow \quad (9.6)$$

$$\forall i \in I (\Delta(q) \preceq \Delta(p_i)) \Leftrightarrow \quad (9.7)$$

$$\forall i \in I (q \leq p_i) \Leftrightarrow \quad (9.8)$$

$$q \leq \bigwedge_{i \in I} p_i \Leftrightarrow \quad (9.9)$$

$$\Delta(q) \leq \Delta(\bigwedge_{i \in I} p_i). \quad (9.10)$$

■

Com isso concluímos nossa caracterização de estados KMS na teoria quântica em topoi. Cabem ainda alguns comentários. Mostramos que é possível determinar uma “proposição KMS” que não é determinada pela se-inização de um projetor e que, a princípio, não está na interpretação da linguagem $\mathcal{P}\mathcal{L}(S)$. Porém, existe uma proposição em $\widehat{\mathcal{B}(H_\rho)}$, a proposição K_0^ρ , que é determinada pela se-inização de um projetor e que também merece ser chamada de “proposição KMS”, já que é verdadeira se, e só se, o estado é KMS. Nossa crença inicial era a de que, tomando $\mathcal{N} \equiv \pi_\rho(\mathcal{A})''$ como álgebra de von Neumann associada ao estado ρ , não poderíamos definir um projetor $p \in \mathcal{N}$ cuja se-inização fosse uma “proposição KMS” mas, usando o fato de $Sub_{cl}(\Sigma)$ ser álgebra de Heyting completa e algumas outras propriedades válidas exclusivamente no topos, conseguiríamos determinar uma “proposição KMS” em $\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{N})}$. Isso nos diria que, assumindo que o sistema é representado pela álgebra de von

Neumann $\pi_\rho(\mathcal{A})''$, que é o que geralmente fazemos em mecânica estatística quântica, haveria proposições de relevância física que podem ser representadas no topos mas não podem ser representadas no reticulado completo de projetores da álgebra. Não conseguimos, porém, chegar a esse resultado, e a questão continua em aberto. De qualquer modo, ainda que em $\mathcal{B}(H_\rho)$ exista uma “proposição KMS” que é determinada por projetor, mostramos que é possível definir uma proposição KMS que, a princípio, não pode ser representada no reticulado de projetores de $\mathcal{B}(H_\rho)$, e portanto, como já comentamos diversas vezes, atribuímos certo significado físico a uma proposição que, a princípio, está fora da interpretação de $\mathcal{PL}(S)$. Além disso, Isham e Döring - e diversos outros autores - defendem que a coleção dos projetores de uma álgebra de von Neumann não comutativa, por ser um reticulado não-distributivo, não faz sentido enquanto “lógica quântica”. Sob esse ponto de vista, o fato de podermos definir um “projetor KMS” p_K que satisfaz $p_\rho \leq p_K$ não é relevante pois o que se chama de “lógica quântica usual” não é, sob esse ponto de vista, uma estrutura lógica adequada à mecânica quântica. Sendo assim, o que é relevante é o fato de termos definido uma proposição KMS na lógica quântica intuicionista subjacente da teoria quântica em topoi. Por fim, podemos dizer que a própria ideia de se definir uma “proposição KMS” apenas surgiu devido ao ponto de vista imposto pela formulação contravariante da teoria quântica em topoi, e portanto tal formulação teve papel central nos resultados apresentados. É importante notar também que a proposição K_1^ρ nos fornece uma maneira de se verificar a condição KMS que, do ponto de vista técnico, é diferente da maneira como comumente fazemos isso; mais que isso, à primeira vista parece ser uma maneira tecnicamente vantajosa de se verificar a condição, e portanto o resultado pode ser útil na mecânica estatística por razões puramente práticas.

CAPÍTULO 10

Conclusão

Mostramos nesse trabalho que as medidas definidas no pré-feixe espectral, introduzidas por Andreas Döring em [11] como uma tentativa de se definir estado na teoria quântica em topoi, são capazes de caracterizar a invariância de um sistema em relação à ação de um automorfismo ou grupo de automorfismos: mostramos que um estado é invariante para um automorfismo α se, e somente se, a medida μ a ele associada é α -invariante no seguinte sentido: $\mu(\alpha(S))(A) = \mu(S)(\alpha(A))$ para quaisquer $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ (lema 95); em seguida internalizamos esse resultado no topos e provamos que μ é α -invariante se e só se $\alpha(\mu(S)) = \mu(\alpha(S))$ para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$. Como há uma relação biunívoca entre estados e medidas, essa equação nos fornece uma condição para medidas que equivale à α -invariância dos estados. Vimos, por outro lado, que há bons motivos para se acreditar que a condição KMS, mesmo em dimensão finita, não pode ser caracterizada através de medidas definidas no pré-feixe espectral. Se a possibilidade de se caracterizar α -invariância através de medidas pode ser entendida como um parecer favorável à ideia de que tais medidas seriam a definição adequada de estado na teoria, esse último resultado indica o contrário, já que, possivelmente, essas medidas não são capazes de representar a condição KMS em dimensão finita - e consequentemente não são capazes de representar tudo o que em física consideramos relevante com respeito à noção de estado. Não pretendíamos nesse trabalho estudar qual é a definição adequada de estado na teoria quântica em

topoi e então, apesar dessa questão se impor de maneira natural a partir dos nossos resultados, não concluiremos nada sobre ela; trata-se de uma questão em aberto e que pode ser interessante para um estudo futuro. Ante a nossa incapacidade de caracterizar a condição KMS através de medidas procuramos caracterizá-la por meio da noção de pseudoestado, que é outra proposta de definição de estado na teoria quântica em topoi. Para isso introduzimos o conceito de “topos associado a um estado” (definição 98) e mostramos que no topos de qualquer estado existem duas proposições, que chamamos de “proposições KMS” (definição 102), que são verdadeiras se, e somente se, esse estado é KMS (lema 103). Como uma dessas proposições não é do tipo “daseinização de um projetor”, isso nos permite atribuir significado físico a uma proposição sem que usemos a linguagem proposicional $\mathcal{P}\mathcal{L}(S)$ introduzida em [5]. Mais que isso, essa proposição nos fornece uma maneira de verificar a condição KMS que é tecnicamente diferente do modo como usualmente o fazemos e portanto, ainda que se queira ignorar questões referentes a lógica quântica, o resultado pode ser útil na mecânica estatística quântica por razões práticas

A.1 Categorias e topoi

A.1.1 Lema do Pullback

Lema 105 (Lema do Pullback) *Numa categoria $\mathcal{C}$, tomemos o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \xrightarrow{h'} & E & \xrightarrow{f'} & B \\
 \downarrow g'' & & \downarrow g' & & \downarrow g \\
 D & \xrightarrow{h} & A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

e suponhamos que o quadrado da direita é diagrama de pullback. Então o retângulo externo é diagrama de pullback se, e somente se, o quadrado da esquerda o é.

Prova. Suponhamos que os dois quadrados são diagrama de pullback e tomemos um cone para o par $g, f \circ h$, ou seja, um par de morfismos $q : Q \rightarrow D, r : Q \rightarrow B$ satisfazendo $(f \circ h) \circ q = g \circ r$; precisamos mostrar que existe, e é único, $u : Q \rightarrow F$ satisfazendo $(f' \circ h') \circ u = r, g'' \circ u = q$. Temos $f \circ (h \circ q) = g \circ r$ e então o par $h \circ q, r$ é cone para f e g , o que nos diz que existe, e

é único, $u' : Q \rightarrow E$ satisfazendo $r = f' \circ u'$, $h \circ q = g' \circ u'$. Essa última igualdade nos diz que o par u', q é cone para g', h , e portanto existe, e é único, $u : Q \rightarrow F$ tal que $q = g'' \circ u$ e $u' = h' \circ u$. Dessa última igualdade temos que $f' \circ u' = f' \circ h' \circ u$, e como $f' \circ u' = r$, concluímos que $r = (f' \circ h') \circ u$. Obtivemos, então, as duas equações necessárias, falta mostrar que o morfismo $u : Q \rightarrow F$ obtido acima é o único que as satisfaz. Se mostrarmos que um morfismo $\tilde{u} : Q \rightarrow F$ satisfaz $h' \circ \tilde{u} = h' \circ u$ e $g'' \circ \tilde{u} = g'' \circ u$, então $\tilde{u} = u$ pois o par $g'' \circ u, h' \circ u$ é cone para h, g' e portanto existe, e é único, $m : Q \rightarrow F$ satisfazendo $g'' \circ m = g'' \circ u$, $h' \circ m = h' \circ u$, sendo, trivialmente, $m = u$ a solução. Enfim, seja $\tilde{u} : Q \rightarrow F$ satisfazendo $r = f' \circ h' \circ \tilde{u}$ e $q = g'' \circ \tilde{u}$; temos $q = g'' \circ \tilde{u} \Rightarrow h \circ q = h \circ g'' \circ \tilde{u} \Leftrightarrow h \circ q = g' \circ h' \circ \tilde{u}$. As equações $h \circ q = g' \circ (h' \circ \tilde{u})$ e $r = f' \circ (h' \circ \tilde{u})$ implicam que $h' \circ \tilde{u} = u'$, sendo $u' = h' \circ u$, ou seja $h' \circ \tilde{u} = h' \circ u$. A outra igualdade ($g'' \circ \tilde{u} = g'' \circ u$) já foi obtida e portanto a unicidade está provada.

Suponhamos agora que o retângulo externo e o quadrado da direita são diagramas de pull-back e seja $q : Q \rightarrow D$, $r : Q \rightarrow E$ um cone para h, g' ($h \circ q = g' \circ r$). $h \circ q = g' \circ r \Rightarrow f \circ h \circ q = f \circ g' \circ r \Rightarrow (f \circ h) \circ q = g \circ (f' \circ r)$, então existe, e é único $u : Q \rightarrow F$ satisfazendo $f' \circ h' \circ u = f' \circ r$, $g'' \circ u = q$; precisamos mostrar que $h' \circ u = q$ (pois já temos que $g'' \circ u = q$). Como $h \circ q = g' \circ h' \circ \tilde{u}$ o quadrado da direita é diagrama de pullback, sabemos que é único o morfismo $f \circ (h \circ q) = g \circ (f' \circ r)$, existe, e é único, $u' : Q \rightarrow E$ tal que $f' \circ u' = f' \circ r$ e $g' \circ u' = h \circ q$. Esse par de igualdades é satisfeito por r (a primeira, trivialmente; a segunda, por hipótese). Tomando agora $u' = h' \circ u$, sabemos que a primeira equação é satisfeita; para a segunda, temos que $q = g'' \circ u \Rightarrow h \circ q = h \circ g'' \circ u \Rightarrow h \circ q = g' \circ (h' \circ u)$. A unicidade de tal u se prova de modo análogo ao que foi feito acima. ■

A.1.2 Exponencial em $\widehat{\mathcal{C}}$

Vamos construir um exponencial para um par de funtores $F, G \in \widehat{\mathcal{C}}$. Antes de começar lembremos que, em **Sets**, se $B, C \in \mathbf{Sets}_0$, $C^B \equiv \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(B, C)$. Tomemos agora $F, G \in \widehat{\mathcal{C}}_0$; se existir um objeto exponencial $P \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ para esse par, então, para qualquer $E \in \widehat{\mathcal{C}}_0$ deve valer que $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(E \times B, C) \cong \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(E, P)$; em particular, se $E = \mathcal{C}(-, X)$, $X \in \mathcal{C}_0$, teremos $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X) \times B, C) \cong \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X), P)$. Pelo lema de Yoneda (isomorfismo 3.14) sabemos que $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X), P) \cong P_X \forall X \in \mathcal{C}_0$, e portanto deve valer que $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X) \times B, C) \cong P_X \forall X \in \mathcal{C}_0$. Definamos $P_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbf{Sets}$ por $P_0(X) \equiv$

$P_X \doteq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X) \times F, G) \quad \forall X \in \mathcal{C}_0$. Queremos, claro, usar essa função para definir um objeto exponencial de F e G ; para $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, teremos $P_1(f) \equiv P_f : \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, A) \times F, G)$; vamos construir uma função entre esses conjuntos. Notemos que precisamos de uma função entre dois conjuntos Hom , sendo que ambos são conjuntos de morfismos com o mesmo codomínio (G); isso sugere que P_f seja uma função do tipo $\widehat{\mathcal{C}}(\theta, G)$, onde $\theta : \mathcal{C}(-, A) \times F \rightarrow \mathcal{C}(-, B) \times F$ e $\widehat{\mathcal{C}}(\theta, B)$ seria determinada por composição à esquerda dos elementos de $\mathcal{C}(-, A) \times F$ com θ (grosseiramente falando, seria o funtor $\text{Hom } \widehat{\mathcal{C}}(-, G) : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ aplicado no morfismo $\theta \in \widehat{\mathcal{C}}_0$); vamos ver que, de fato, P_f será assim definido. Tomando $\eta \in \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G)$ deveremos associar a ela (usando $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$) uma, e somente uma, transformação natural de $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, A) \times F, G)$, que vamos denotar por $\tilde{\eta}$. Para $X \in \mathcal{C}_0$, teremos $\tilde{\eta}_X : \mathcal{C}(X, A) \times F_X \rightarrow G_X$ e $\eta_X : \mathcal{C}(X, B) \times F_X \rightarrow G_X$; como para $a \in \mathcal{C}(X, A)$ temos $f \circ a \in \mathcal{C}(X, B)$, podemos definir a função $\tilde{\eta}_X$ por $\tilde{\eta}_X(a, y) \doteq \eta_X(f \circ a, y) \quad \forall (a, y) \in \mathcal{C}(X, A) \times F_X$. Lembrando que, se $C \in \mathcal{C}_0$ e $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$, temos a função $\mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) \rightarrow \mathcal{C}(C, B)$ definida por $\mathcal{C}(C, f)(a) \doteq f \circ a \quad \forall a \in \mathcal{C}(C, A)$ (funtor covariante $\mathcal{C}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ aplicado em $f : A \rightarrow B$ ou componente C da transformação natural $Y^{(f)} \equiv \mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, A) \rightarrow \mathcal{C}(-, B)$ determinada pela aplicação do funtor de Yoneda $Y : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ no morfismo $f : A \rightarrow B$ vemos que, para $C \in \mathcal{C}_0$ qualquer, $\eta_C \circ (\mathcal{C}(C, f) \times 1_{F_C}) = \tilde{\eta}_C$, já que, para $(c, y) \in \mathcal{C}(C, A) \times 1_{F_C}$, temos $(\mathcal{C}(C, f) \times 1_{F_C})(c, y) = (f \circ c, y)$. Para fixar ideias, tomando $C \in \mathcal{C}_0$ qualquer, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(C, B) \times F_C & \xrightarrow{\eta_C} & G_C \\
 \uparrow \mathcal{C}(C, f) \times 1_{F_C} & \nearrow \tilde{\eta}_C & \\
 \mathcal{C}(C, A) \times F_C & &
 \end{array}$$

Tomemos $\mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, A) \rightarrow \mathcal{C}(-, B) \in \widehat{\mathcal{C}}_1$ (a transformação natural dada pelo funtor de Yoneda aplicado em $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$) e $1_F : F \rightarrow F \in \widehat{\mathcal{C}}_1$. Temos bem definido o produto (de morfismos) $\mathcal{C}(-, f) \times 1_F : \mathcal{C}(-, A) \times F \rightarrow \mathcal{C}(-, B) \times F$ que, como já vimos, é determinado termo a termo : $(\mathcal{C}(-, f) \times 1_F)_X = \mathcal{C}(X, F) \times 1_{F_X} : \mathcal{C}(X, A) \times F_X \rightarrow \mathcal{C}(X, B) \times F_X \in \mathbf{Sets}_1 \quad \forall X \in \mathcal{C}_0$. Dessa definição e da comutatividade do diagrama acima (e do fato da composição de transformações naturais ser definida componente a componente)

temos que a função $P_f : Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G) \rightarrow Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, A) \times F, G)$ é definida por é definido por $P_f(\eta) \doteq \eta \circ (\mathcal{C}(-, f) \times 1_F) \forall \eta \in Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G)$; em resumo, o seguinte diagrama (de $\widehat{\mathcal{C}}$) comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(-, B) \times F & \xrightarrow{\eta} & G \\ \uparrow \mathcal{C}(-, f) \times 1_F & \nearrow P_f(\eta) & \\ \mathcal{C}(-, A) \times F & & \end{array}$$

Vê-se que, para definir a função $P_f : Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G) \rightarrow Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, A) \times F, G)$, associamos a $f : A \rightarrow B$ a transformação natural $\mathcal{C}(-, f) \times 1_F : \mathcal{C}(-, A) \times F \rightarrow \mathcal{C}(-, B) \times F$ e definimos P_f fazendo composição à esquerda dos elementos de $Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G)$ com essa função; é como se P_f fosse a função determinada pela aplicação do funtor Hom contravariante $\widehat{\mathcal{C}}(-, G) : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ no morfismo $\mathcal{C}(-, f) \times 1_F : \mathcal{C}(-, A) \times F \rightarrow \mathcal{C}(-, B) \times F \in \widehat{\mathcal{C}}_1$, ou seja, $P_f = \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, f) \times 1_F, G) : Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G) \rightarrow Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, A) \times F, G)$. Essa caracterização nos diz que, que fato, P definido por P_0 e P_1 dados acima é, de fato, funtor $P : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$. Para fixar ideias, escrevendo $G^F \equiv P$, temos

$$\begin{array}{ccccc} A & \mathcal{C}(-, A) \times F & Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G) \\ \downarrow f \in \mathcal{C}_1 & \downarrow \mathcal{C}(-, f) \times 1_F \in \widehat{\mathcal{C}}_1 & \uparrow G_f^F \equiv \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, f) \times 1_F, G) \in \mathbf{Sets}_1 \\ B & \mathcal{C}(-, B) \times F & Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, A) \times F, G) \end{array}$$

Agora precisamos definir a transformação natural $ev : G^F \times F \rightarrow G$. Para $X \in \mathcal{C}_0$, temos a componente $ev_X : Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X) \times F, G) \times F_X \rightarrow G_X$. Tomando $\eta : \mathcal{C}(-, X) \times F \rightarrow G$, a única componente de η em que faz sentido definir uma “avaliação” em $y \in F_X$ qualquer é $\eta_X : \mathcal{C}(X, X) \times F_X \rightarrow G_X$; além disso, sobre $\mathcal{C}(X, X)$ podemos afirmar apenas que $1_X \in \mathcal{C}\mathcal{C}(X, X)$. Por isso, definimos a componente $ev_X : Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X) \times F, G) \times F_X \rightarrow G_X$ por $ev_X(\eta, y) \doteq \eta_X(1_X, y) \forall (\eta, y) \in Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-, X) \times F, G) \times F_X$. Vamos mostrar que a coleção dessas funções ev_X nos determina uma transformação natural de $G^F \times F$ a G . Tomando $f : A \rightarrow B$ qualquer, precisamos mostrar que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc}
G_A^F \times F_A & \xrightarrow{\quad ev_A \quad} & G_A \\
\uparrow G_f^F \times F_f & & \uparrow G_f \\
G_B^F \times F_B & \xrightarrow{\quad ev_B \quad} & G_B
\end{array}$$

Tomando $(\eta, y) \in G_B^F \times F_B = Hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, B) \times F, G) \times G_B$, temos

$$(G_f^F \times F_f)(\eta, y) = (G_f^F(\eta), F_f(y)) = (\eta \circ (\mathcal{C}(-, f) \times 1_F), F_f(y)) \quad (\text{A.1})$$

e

$$ev_A(\eta \circ (\mathcal{C}(-, f) \times 1_F), F_f(y)) = (\eta \circ (\mathcal{C}(-, f) \times 1_F)_A(1_A, F_f(y))) \quad (\text{A.2})$$

$$= (\eta_A \circ (\mathcal{C}(A, f) \times 1_{F_A}))(1_A, F_f(y)) \quad (\text{A.3})$$

$$= \eta_A(\mathcal{C}(A, f)(1_A), 1_{F_A}(F_f(y))) \quad (\text{A.4})$$

$$= \eta_A(f, F_f(y)); \quad (\text{A.5})$$

Em resumo, $(ev_A \circ (G_f^F \times F_f))(\eta, y) = \eta_A(f, F_f(y))$. Para esse mesmo $(\eta, y) \in G_B^F \times F_B$ temos $(G_f \circ ev_B)(\eta, y) = G_f(ev_B(\eta, y)) = G_f(\eta_B(1_B, y))$. Como $\eta : \mathcal{C}(-, B) \times F \rightarrow G$ é transformação natural, temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(A, B) \times F_A & \xrightarrow{\quad \eta_A \quad} & G_A \\
\uparrow \mathcal{C}(f, B) \times F_f & & \uparrow G_f \\
\mathcal{C}(B, B) \times F_B & \xrightarrow{\quad \eta_B \quad} & G_B
\end{array}$$

Para $(1_B, y) \in \mathcal{C}(B, B) \times F_B$ qualquer temos

$$(\eta_A \circ \mathcal{C}(f, B) \times F_f)(1_B, y) = \eta_A(\mathcal{C}(f, B)(1_B), F_f(y)) \quad (\text{A.6})$$

$$= \eta_A(f, F_f(y)) \quad (\text{A.7})$$

e

$$(G_f \circ \eta_B)(1_B, y) = G_f(\eta_B(1_B, y)), \quad (\text{A.8})$$

sendo que a comutatividade nos diz que $\eta_A(f, F_f(y)) = G_f(\eta_B(1_B, y))$; como $y \in F_B$ é qualquer, isso implica a comutatividade desejada e portanto temos uma transformação natural $ev : G^F \times F \rightarrow G$.

Por fim, vamos mostrar que, para uma transformação natural $\theta : E \times F \rightarrow G$, existe, e é único, $\tilde{\theta} : E \rightarrow G^F$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} G^F \times F & \xrightarrow{ev} & G \\ \tilde{\theta} \times 1_F \uparrow & \nearrow \theta & \\ E \times F & & \end{array}$$

Notemos que para uma transformação natural $\eta : E \rightarrow G^F$ temos, para $X \in \mathcal{C}_0$, $\eta_X : E_X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, X) \times F, G)$ e tomando $a \in E_X$ qualquer, $\eta_X(a) : \mathcal{C}(-, X) \times F \rightarrow G$, ou seja, $\eta_X(a)$ é transformação natural de $\mathcal{C}(-, X) \times F$ a G . Para definir a transformação natural $\tilde{\theta} : E \rightarrow G^F$ que faz o diagrama acima comutar (para θ dado) definiremos primeiro, para $X \in \mathcal{C}_0$ e $a \in E_X$, uma transformação $\tilde{\theta}_X(a) : \mathcal{C}(-, X) \times F \rightarrow G$; isso feito, teremos bem definida a função $\tilde{\theta}_X : E_X \rightarrow G_X^F$ e como o $X \in \mathcal{C}_0$ tomado fora um qualquer, teremos uma coleção $\tilde{\theta} \doteq \{\tilde{\theta}_X : E_X \rightarrow G_X^F | X \in \mathcal{C}_0\}$; mostraremos então que essa coleção é transformação natural de E a G^F e, por fim, que a comutatividade o diagrama é satisfeita. Bom, seja $\theta : E \times F \rightarrow G$ uma transformação natural; $\tilde{\theta} : E \rightarrow G^F$ (transformação natural) fará o diagrama acima comutar se, e somente se, para $X \in \mathcal{C}_0$ qualquer, o seguinte diagrama em **Sets** for comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, X) \times F, G) \times F_X & \xrightarrow{ev_X} & G_X \\ \tilde{\theta}_X \times 1_{F_X} \uparrow & \nearrow \theta_X & \\ E_X \times F_X & & \end{array}$$

Esse diagrama comuta e, e só se, para $(a, b) \in E_X \times F_X$ qualquer, tivermos $\theta_X(a, b) = ev_X(\tilde{\theta}_X(a), b) = (\tilde{\theta}_X(a))_X(1_X, b)$. Vemos com isso que se existir uma transformação natural $(\tilde{\theta})$ tal que $\theta_X(a, b) = (\tilde{\theta}_X(a))_X(1_X, b)$, a comutatividade do diagrama é necessariamente satisfeita para esse $\theta : E \times F \rightarrow G$; vamos mostrar que tal transformação natural existe e é única. De modo análogo ao que se faz para o lema de Yoneda, o valor de $(\tilde{\theta}_X(a))_X$ no ponto $(1_X, b) \in \mathcal{C}(X, X) \times F_X$ e a exigência de que a coleção $\{(\tilde{\theta}_X(a))_Y : \mathcal{C}(Y, X) \times F_Y \rightarrow G_Y | Y \in \mathcal{C}_0\}$ determine uma transformação natural de $\mathcal{C}(-, X) \times F$ a G determinará univocamente como devem ser as funções $(\tilde{\theta}_X(a))_Y$. De fato, seja $Y \in \mathcal{C}_0$ tal que existe $f : Y \rightarrow X$. Para que $\tilde{\theta}_X(a)$ seja transformação natural de $\mathcal{C}(-, X) \times F$ a G é necessário que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y, X) \times F_Y & \xrightarrow{(\tilde{\theta}_X(a))_Y} & G_Y \\ \uparrow \mathcal{C}(f, X) \times F_f & & \uparrow G_f \\ \mathcal{C}(X, X) \times F_X & \xrightarrow{(\tilde{\theta}_X(a))_X} & G_X \end{array}$$

A comutatividade e o fato de que $(\tilde{\theta}_X(a))_X(1_X, b) = \theta_X(a, b)$ ($b \in F_X$ qualquer) implicam que, para um ponto $(1_X, b) \in \mathcal{C}(X, X) \times F_X$, $(\tilde{\theta}_X(a))(f, F_f(b)) = G_f((\tilde{\theta}_X(a))_X(1_X, b)) = G_f(\theta_X(a, b))$. Como $\theta : E \times F \rightarrow G$ é transformação natural, tomando esse mesmo morfismo $F : Y \rightarrow X$ temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E_Y \times F_Y & \xrightarrow{\theta_Y} & G_Y \\ \uparrow E_f \times F_f & & \uparrow G_f \\ E_X \times F_X & \xrightarrow{\theta_X} & G_X \end{array}$$

e portanto, para $(a, b) \in G_X \times F_X$ qualquer, $G_f(\theta(a, b)) = \theta_Y(E_f(a), E_f(b))$. Então, para que $(\tilde{\theta}_X(a))$ (enquanto coleção de funções $(\tilde{\theta}_X(a))_Y, Y \in \mathcal{C}_0$) seja transformação natural de $\mathcal{C}(-, X) \times F$ a G é necessário que, para $Y \in \mathcal{C}_0$ tal que $\mathcal{C}(Y, X) \neq \emptyset$, $(\tilde{\theta}_X(a))_Y(f, F_f(b)) = \theta_Y(E_f(a), F_f(b))$ (note que $(\tilde{\theta}_X(a))_X(1_X, b) = \theta_X(a, b)$ é um caso particular disso: componente X e $f = 1_X$). Se $Y \in \mathcal{C}_0$ é tal que $\mathcal{C}(Y, X) = \emptyset$, $(\tilde{\theta}_X(a))_Y : \emptyset \times F_Y \rightarrow G_Y$ e $\emptyset \times G_Y = \emptyset$, e só há uma função de $\emptyset$ a G_Y (trata-se do par $(!, G_Y)$, onde $! : \emptyset \rightarrow \emptyset$ é a única

função entre esses conjuntos). Enfim, precisamos que $(\tilde{\theta}_X(a))_Y : \mathcal{C}(Y, X) \times F_Y \rightarrow G_Y$ seja tal que $(\tilde{\theta}_X(a))_Y(f, F_f(b)) = \theta_Y(E_f(a), F_f(b))$; definimos então $(\tilde{\theta}_X(a))_Y : \mathcal{C}(Y, X) \times F_Y \rightarrow G_Y$ por

$$(\tilde{\theta}_X(a))_Y(f, y) \doteq \theta_Y(E_f(a), y) \quad \forall (f, y) \in \mathcal{C}(Y, X) \times F_Y.$$

É consequência da naturalidade de θ que $\tilde{\theta}_X(a)$ é transformação natural. De fato, tomemos $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$; precisamos mostrar que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, X) \times F_A & \xrightarrow{(\tilde{\theta}_X(a))_A} & G_A \\ \uparrow \mathcal{C}(f, X) \times F_f & & \uparrow G_f \\ \mathcal{C}(B, X) \times F_B & \xrightarrow{(\tilde{\theta}_X(a))_B} & G_B \end{array}$$

Para $(x', b) \in \mathcal{C}(B, X) \times F_B$ qualquer temos $(\mathcal{C}(f, X) \times F_f)(x', b) = (x' \circ f, F_f(b))$ e $(\tilde{\theta}_X(a))_A(x' \circ f, F_f(b)) = \theta_A(E_{x' \circ f}(a), F_f(b)) = \theta_A(E_f(E_{x'}(a)), F_f(b))$. Por outro lado, $G_f((\tilde{\theta}_X(a))_B(x', b)) = G_f(\theta_B(E_{x'}(a), b))$; usando a naturalidade de $\theta : E \times F \rightarrow G$ nesse morfismo $f : A \rightarrow B$ e tomando o ponto $(E_{x'}, b) \in E_B, F_B$ temos que $G_f(\theta_B(E_{x'}(a), b)) = \theta_A(E_f(E_{x'}(a)), F_f(b))$, e isso prova que o diagrama comuta. Enfim, temos bem definida uma transformação natural $\tilde{\theta}_X(a) : \mathcal{C}(-, X) \times F \rightarrow G$. Como isso vale para $a \in E_X$ qualquer, temos definida a função $\tilde{\theta}_X : E_X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, X) \times F, G)$; precisamos mostrar que a coleção $\tilde{\theta}$ desses funções determina uma transformação natural de E a G^F , ou seja, que para $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}_1$ qualquer, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} E_A & \xrightarrow{\tilde{\theta}_A} & G_A^F \\ \downarrow E_f & & \downarrow G_f^F \\ E_B & \xrightarrow{\tilde{\theta}_B} & G_B^F \end{array}$$

Precisamos então mostrar que, para $a \in E_B$ qualquer, $\tilde{\theta}_A(E_f(a)) = G_f^F(\tilde{\theta}_B(a))$; como tratam-se de transformações naturais de $\mathcal{C}(-, A) \times F$ a G , basta mostrarmos que, para $X \in \mathcal{C}_0$ qualquer, as componentes

$$(\tilde{\theta}_A(E_f(a)))_X : \mathcal{C}(X, A) \times F_X \rightarrow G_X$$

e

$$(G_f^F(\tilde{\theta}_B(a)))_X : \mathcal{C}(X, A) \times F_X \rightarrow G_X$$

são iguais. De início, $G_f^F(\tilde{\theta}_B(a)) = \tilde{\theta}_B(a) \circ (\mathcal{C}(-, f) \times 1_F)$, então vale que $(G_f^F(\tilde{\theta}_B(a)))_X = \tilde{\theta}_B(a)_X \circ ((\mathcal{C}(X, f) \times 1_{F_X}))$. Tomemos agora um par $(u, b) \in \mathcal{C}(X, A) \times F_X$ qualquer; temos

$$\tilde{\theta}_A(E_f(a))_X(u, b) = \theta_X(E_u(E_f(a)), b) = \theta_X(E_{f \circ u}(a), b) \quad (\text{A.9})$$

e, por outro lado,

$$(\tilde{\theta}_B(a))_X((\mathcal{C}(X, f) \times 1_{F_X})(u, b)) = (\tilde{\theta}_B(a))_X(f \circ u, b) = \theta_X(E_{f \circ u}(a), b), \quad (\text{A.10})$$

e vemos que vale a igualdade desejada, portanto o diagrama comuta e de fato $\tilde{\theta} : E \rightarrow G^F$ é transformação natural. Em resumo, mostramos que, dado $\theta : E \times F \rightarrow G$ existe uma transformação natural $\tilde{\theta} : E \times G^F$ tal que, para $X \in \mathcal{C}_0$ qualquer, $(\tilde{\theta}_X(a))_X(1_X, b) = \theta_X(a, b) \forall (a, b) \in E_X \times F_X$; como vimos, essa última é condição necessária e suficiente para $\tilde{\theta}$ seja a única transformação natural de E a G^F tal que $\tilde{\theta} \times 1_F$ faz o diagrama de exponencial comutar para o θ dado. Está provado então que, quaisquer que sejam os objetos $E, F \in \widehat{\mathcal{C}}_0$, existe um objeto exponencial para esse par; então, $\widehat{\mathcal{C}}$ é categoria cartesiana fechada.

A.2 Topologia

Nessa dissertação conceitos topológicos terão papel central e por isso esse apêndice foi introduzido. Nossas principais referências são [31], [43] e [44].

Seja X conjunto não vazio. Lembremos que um conjunto $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ é uma **topologia** se $\emptyset, X \in \tau$ e se τ é fechado para uniões quaisquer (se $\tau' \subset \tau$ então $\cup \tau' \in \tau$) e interseções finitas (se $\tau' \subset \tau$ é conjunto finito então $\cap \tau' \in \tau$); se $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ é uma topologia em X , o par (X, τ) é chamado de **espaço topológico** - e frequentemente representamos o espaço topológico (X, τ) apenas por X . Os elementos da topologia de um espaço topológico (X, τ) são chamados de abertos, e de fechados são chamados os subconjuntos de X cujo complemento (em relação ao conjunto total X) é um conjunto aberto. Um espaço topológico (X', τ') é dito ser **subespaço topológico** de (X, τ) quando $X' \subset X$ e $\tau' = \{O \cap X'; O \in \tau\}$; τ' é dita ser a **topologia**

induzida de (X, τ) e, X' .

Se τ, τ' são topologias em X , dizemos que τ é menor, ou mais fraca, que τ' quando $\tau \subset \tau'$. Uma **base de abertos** num espaço topológico (X, τ) - ou uma base da topologia τ - é um conjunto $\beta \subset \tau$ com a propriedade de que todo aberto de (X, τ) pode ser escrito como a união de elementos de β , ou seja, dado $A \in \tau$ existe $\beta' \subset \beta$ tal que $A = \cup \beta'$. Se β é base de abertos da topologia τ e τ' é uma topologia em X que contém β , então $\tau' \supset \tau$, já que topologias são fechadas por uniões; disso concluímos que se um conjunto β é base de uma topologia τ , então τ é a menor topologia (em relação à inclusão) que contém β . Para qualquer conjunto $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ definimos a **topologia gerada** por σ em X como sendo a menor topologia em X que contém σ e é fácil ver que tal topologia é a interseção de todas as topologias que o contém. Se β é base de abertos da topologia τ , τ é a topologia gerada por β . Dizemos que um aberto $A \in \tau$ é **vizinhança aberta** de um ponto $x \in X$ se $x \in A$; um conjunto $B \in \mathcal{P}(X)$ é dito ser uma **vizinhança** de x se existe uma vizinhança aberta A de x tal que $x \in A \subset B$. Uma **base local** para um ponto $x \in X$ é uma coleção (conjunto) β_x de vizinhanças abertas de x tal que, se B é vizinhança de x , existe $A \in \beta_x$ satisfazendo $A \subset B$. Um conjunto $\beta \subset \tau$ é base de abertos do espaço topológico (X, τ) se, e só se, o conjunto $\beta_x \doteq \{A \in \beta | x \in A\}$ é base de abertos de x para todo $x \in X$; note que $\beta = \cup_{x \in X} \beta_x$. O seguinte simples resultado será importante.

Lema 106 *Seja X conjunto e suponha que $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaz as duas seguintes propriedades.*

- (a) *Se $x \in X$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$*
- (b) *Se $B_1, B_2 \in \beta$ então, para $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Então o conjunto $\beta^ \doteq \{\cup \beta' | \beta' \subset \beta\}$ é uma topologia em X e β é uma base para ela.*

É trivial porém importante notar que se um conjunto é base de abertos para duas topologias, essas topologias são iguais.

Um espaço topológico (X, τ) é dito ser T_1 se, dados $x, y \in X$ distintos, existe uma vizinhança aberta de x que não contém y ; se, mais que isso, x e y possuem ao menos um par de vizinhanças disjuntas (ou seja, existem abertos A, B disjuntos tais que $x \in A, y \in B$) dizemos que o espaço topológico é **Hausdorff** (ou T_2). Chamamos de **regular** um espaço topológico no qual os abertos “separam pontos de fechados” no seguinte sentido: se $x \in X, F \in \mathcal{P}(X)$ é fechado e $x \notin F$, então existem abertos A, B disjuntos tais que $x \in A$ e $F \subset B$; Dizemos que

o espaço é T_3 se ele é regular e Hausdorff. Por fim, um espaço é dito ser **normal** quando seus abertos “separam fechados”: se F, G são fechados disjuntos, existem abertos disjuntos A, B tais que $A \subset F, B \subset G$; um espaço topológico normal e Hausdorff é dito ser T_4 . Num espaço topológico (X, τ) , uma **cobertura aberta** para um conjunto $A \subset X$ é uma coleção $\gamma \subset \tau$ que satisfaz $A \subset \cup \gamma$; se γ, γ' são coberturas de A dizemos que γ' é subcobertura de γ em A se $\gamma' \subset \gamma$. Um **conjunto compacto** em (X, τ) é um conjunto $A \subset X$ tal que, se γ é cobertura aberta de A , existe uma subcobertura de γ em A que é finita (enquanto conjunto); quando X é conjunto compacto em (X, τ) dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico compacto**. É trivial que A é subconjunto compacto de (X, τ) se, e somente se, A , quando munido da topologia induzida de (X, τ) , é espaço topológico compacto. Todo subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto.

Agora discutiremos brevemente a ideia de topologia gerada por uma família de funções. A topologia de Gelfand, que será muito importante nessa dissertação, é uma topologia desse tipo, e por isso a discussão se justifica. As topologias forte e fraca de operador também podem ser entendidas como topologias geradas por famílias de funções se levarmos em conta translações. Não faremos isso pois definiremos essas topologias através de uma base que, na prática, será útil para nós.

Se $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ são espaços topológicos, uma função $f : X_1 \rightarrow X_2$ é dita ser **contínua** - entre esse dois espaços topológicos - se $f^{-1}(B) \in \tau_1 \forall B \in \tau_2$. Dizemos que f é **contínua num ponto** $x \in X_1$ se para qualquer vizinhança aberta U de $f(x)$ existe uma vizinhança aberta O de x tal que $f(O) \subset U$; é bem sabido que uma função é contínua se, e só se, ela é contínua em todo ponto de seu domínio. Além disso, se β_2 é base de τ_2 , é consequência simples e bem conhecida do fato de pré-imagens preservarem uniões que se a pré-imagem de todo aberto básico de τ_2 é um aberto de τ_1 então f é contínua, valendo a afirmação análoga para a continuidade num ponto de x_1 . A menor topologia τ_1 em X_1 que faz com que uma função $f : X_1 \rightarrow X_2$ seja contínua entre (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) é o conjunto $\{f^{-1}(B) | B \in \tau_2\}$ (e é fácil ver, usando o fato de que pré-imagens preservam uniões e interseções, que esse conjunto é de fato uma topologia). Sejam agora $(X_i, \tau_i), i \in I$, espaços topológicos (onde I é conjunto não vazio), X conjunto não vazio e $f_i : X \rightarrow X_i$ função (para todo $i \in I$); seja $\mathcal{F} \doteq \{f_i | i \in I\}$. A menor topologia em X que faz com que todas as funções da família $\mathcal{F}$ sejam contínuas é a

topologia cuja base de abertos é o conjunto

$$\beta \doteq \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(B_j) \mid J \in \mathcal{P}_{fin}(I), B_j \in \tau_j \right\},$$

onde $\mathcal{P}_{fin}(I) \subset \mathcal{P}(I)$ é a coleção de todos os subconjuntos finitos do conjunto I (incluindo o conjunto vazio). Bom, se τ é uma topologia em X tal que f_i é contínua para todo $i \in I$, então temos $\tilde{\beta} \doteq \{f_i^{-1}(B) \mid B \in \tau_i, i \in I\} \subset \tau$, e como topologias são fechadas por interseções finitas, $\beta \subset \tau$; mais que isso, como $\tilde{\beta} \subset \beta$, podemos afirmar que $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ faz com que todas as funções de $\mathcal{F}$ sejam contínuas se, e somente se, $\beta \subset \tau$. Seja $\beta^* \doteq \{\cup \beta'; \beta' \subset \beta\}$. Por construção, β^* é topologia; de fato, se $\beta' \equiv \{B'_i \in \beta; i \in I\}$, $\beta'' \equiv \{B''_i \in \beta; j \in J\}$, temos que $(\cup \beta') \cap (\cup \beta'') = \cup_{(i,j) \in I \times J} B'_i \cap B''_j \in \beta^*$, sendo que as outras propriedades são trivialmente satisfeitas. Note que o fato de pré-imagens preservarem interseção é importante para que β seja fechado para interseção, fato que usamos para concluir que β^* é topologia. Bom, β^* é menor topologia que contém β - e portanto a menor topologia que faz com que todas as funções da família $\mathcal{F}$ sejam contínuas -; β^* tem β como base de abertos. Definimos.

Definição 107 (Topologia gerada por uma família de funções) *Sejam X conjunto, (X_i, τ_i) , $i \in I$, espaços topológicos (I conjunto não vazio) e $f_i : X \rightarrow X_i$ função para todo $i \in I$. Chamamos a menor topologia em X que faz com que todas as funções de $\mathcal{F}$ sejam contínuas de “topologia gerada pela família de funções $\mathcal{F} \doteq \{f_i; i \in I\}$ ”, e a denotamos por $\sigma(X, \mathcal{F})$. Trata-se da topologia cuja base de abertos é o conjunto*

$$\beta \doteq \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(B_j) \mid J \in \mathcal{P}_{fin}(I), B_j \in \tau_j \right\},$$

onde $\mathcal{P}_{fin}(I) \subset \mathcal{P}(I)$ denota a coleção de todos os subconjuntos finitos de um conjunto I (incluindo o conjunto vazio). Temos

$$\sigma(X, \mathcal{F}) \doteq \{\cup \beta' \mid \beta' \subset \beta\}$$

.

Lembremos que o produto cartesiano de uma família de conjuntos $\{X_i, i \in I\}$ não vazios é, por definição, o conjunto de funções $\prod_{i \in I} \doteq \{x : I \rightarrow \cup_{i \in I} X_i; x_i \in X_i (i \in I)\}$, onde

escrevemos $x(i) \equiv x_i$; tal conjunto é não vazio devido ao axioma da escolha. Se (X_i, τ_i) é espaço topológico para todo $i \in I$, chamamos de **topologia produto** a topologia em $\prod_{i \in I} X_i$ gerada, no sentido definido acima, pela família de projeções $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$, $\pi_i(x) \doteq x_i \forall i \in I$. Note que quando I é finito a topologia produto tem como base a família $\beta = \{A_1 \times A_2, \dots, A_N; A_n \in \tau_n (n = 1, \dots, N)\}$, onde N é o numero de elementos de I e onde estamos usando $I \equiv \{1, \dots, N\}$.

Já podemos introduzir as seguintes definições

Definição 108 (Topologias fraca e fraca*) *Sejam X espaço normado e X^* seu dual topológico (o conjunto dos funcionais lineares limitados definimos em X , que munido das operações usuais de funções e da norma operacional é também um espaço normado - apêndice A.3). Definimos*

- (a) *A **topologia fraca em X** é a topologia $\sigma(X, X^*)$, ou seja, a menor (ou mais fraca) topologia em X que faz com que todos os funcionais lineares limitados em X sejam contínuos.*
- (b) *A **topologia fraca* em X^*** é a topologia $\sigma(X^*, X^{**})$, onde $X^{**} \equiv (X^*)^*$. Denotamos a topologia fraca* por $\sigma(X^*, X)$*

É comum também chamar-se de topologia fraca o conceito mais geral, que chamamos de topologia gerada por uma família de funções.

As topologias forte e fraca de operador também são topologias geradas, no sentido acima, por famílias funções, porém, como já comentamos, vamos introduzi-las através de bases apropriadas. Primeiro lembremos que ma **seminorma** num espaço vetorial $\mathcal{A}$ é uma função $p : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ tal que $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$ (desigualdade triangular) e $p(\alpha a) = |\alpha|p(a)$ para $a, b \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$; note que uma norma é uma seminorma não-degenerada, ou seja, uma seminorma onde $p(a) = 0$ somente se $a = \mathbb{0}$. Seja $\mathcal{A} \equiv (A, +, \cdot)$ espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e τ topologia em A ; se as funções $+: A \times A \rightarrow A$, $\cdot: \mathbb{K} \times A \rightarrow A$ forem contínuas quando no seus domínios tomamos a topologia produto definida acima dizemos que o par $(\mathcal{A}, \tau)$ é **espaço vetorial topológico**. O seguinte lema (uma adaptação do lema 1.2.6 de [31]) nos permite definir as topologias forte e fraca de operador.

Lema 109 *Seja $\mathcal{A}$ espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{F}$ uma família de seminormas em $\mathcal{A}$. Então a família dos conjuntos do tipo*

$$V(a, \mathcal{F}', \epsilon) \doteq \{b \in \mathcal{A}; p(b-a) < \epsilon \forall p \in \mathcal{F}'\},$$

onde $a \in \mathcal{A}$, $\epsilon > 0$ e $\mathcal{F}' \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{F})$ (escrevemos também $V(a, p_1, \dots, p_n, \epsilon) \equiv V(a, \mathcal{F}', \epsilon)$ quando $\{p_1, \dots, p_n\} = \mathcal{F}'$) gera uma topologia em $\mathcal{A}$. Mais que isso, para $a \in \mathcal{A}$, o conjunto $\beta_a^{\mathcal{F}} \doteq \{V(a, \mathcal{F}', \epsilon); \mathcal{F}' \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{F}), \epsilon > 0\}$ é base local de a . Por fim, $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{F}))$ é espaço vetorial topológico localmente convexo e toda seminorma de $\mathcal{F}$ é contínua de $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{F}))$ a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Prova. Vamos primeiro mostrar que a coleção de todos os conjuntos desse tipo, ou seja, o conjunto $\{V(a, \mathcal{F}', \epsilon) | a \in \mathcal{A}, \mathcal{F}' \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{F}), \epsilon > 0\}$, gera uma topologia em $\mathcal{A}$. Para isso mostraremos que essa coleção satisfaz as hipóteses do lema 106. É trivial que o item (a) do lema é satisfeito, então provaremos apenas o item (b). Bom, seja $a \in V(a_1, \mathcal{F}_1, \epsilon_1) \cap V(a_2, \mathcal{F}_2, \epsilon_2)$; mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que $V(a, \mathcal{F}', \delta) \subset V(a_1, \mathcal{F}_1, \epsilon_1) \cap V(a_2, \mathcal{F}_2, \epsilon_2)$, onde $\mathcal{F}' \doteq \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Para simplificar a notação escrevamos $V_k \equiv V(a_k, \mathcal{F}_k, \epsilon_k)$, $k \in \{1, 2\}$ e $V \equiv V(a, \mathcal{F}', \delta)$. Precisamos definir $\delta > 0$ de modo que $b \in V$ implique $b \in V_1$ e $b \in V_2$, ou seja, $p(b - a_1) < \epsilon_1 \forall p \in \mathcal{F}_1$ e $p(b - a_2) < \epsilon_2 \forall p \in \mathcal{F}_1$. Usando a desigualdade triangular vemos que $p(b - a_1) = p(b - a + a - a_1) \leq p(b - a) + p(a - a_1) < \delta + p(a - a_1)$ e, de maneira análoga, $q(b - a_2) < \delta + q(a - a_2)$, e portanto se definirmos δ tal que $\delta + d_k < \epsilon_k$, $k \in \{1, 2\}$, onde $d_k \doteq \max\{p(a - a_k), p \in \mathcal{F}_k\}$, teremos a inclusão desejada; basta tomarmos, portanto, $0 < \delta < \min\{\epsilon_1 - d_1, \epsilon_2 - d_2\}$ (note que $\epsilon_k - d_k > 0$: consequência simples e intuitiva da desigualdade triangular). Enfim, está provado que esse conjunto gera uma topologia em $\mathcal{A}$; denotemos por $\tau_{\mathcal{F}}$ essa topologia. Outra consequência simples da desigualdade triangular é que o conjunto $\beta_a^{\mathcal{F}} \doteq \{V(a, \mathcal{F}', \epsilon); \mathcal{F}' \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{F}), \epsilon > 0\}$ é base local de a .

Agora provaremos que $(\mathcal{A}, \tau_{\mathcal{F}})$ é espaço vetorial topológico. É fácil ver que $+: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é contínua num ponto $(a_0, b_0) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ qualquer; de fato, tomando uma vizinhança de $a_0 + b_0$ na base local $\beta_a^{\mathcal{F}}$, ou seja, um conjunto $V(a_0 + b_0, \mathcal{F}', \epsilon)$, temos que $+^{-1}(V(a_0 + b_0, \mathcal{F}', \epsilon)) = \{(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}; p(a + b - (a_0 + b_0)) < \epsilon \forall p \in \mathcal{F}'\}$, e como $p(a + b - (a_0 + b_0)) \leq p(a - a_0) + p(b - b_0)$, se $(a, b) \in V(a_0, \mathcal{F}', \frac{\epsilon}{2}) \times V(b_0, \mathcal{F}', \frac{\epsilon}{2})$ temos $a + b \in V(a_0 + b_0, \mathcal{F}', \epsilon)$, e isso prova a continuidade da soma. Provemos agora a continuidade de $\cdot: \mathbb{K} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Para $(\alpha_0, a_0) \in \mathbb{K} \times \mathcal{A}$ tomemos a vizinhança (básica) $V(\alpha_0 a_0, \mathcal{F}', \epsilon)$ de $\alpha_0 a_0$; vamos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que o conjunto $B_\delta(\alpha_0) \times V(a_0, \mathcal{F}', \delta)$, que é um aberto de $\mathbb{K} \times \mathcal{A}$ (topologia produto), satisfaz $\cdot(B_\delta(\alpha_0) \times V(a_0, \mathcal{F}', \delta)) \subset V(\alpha_0 a_0, \mathcal{F}', \epsilon)$. Para isso notemos que os termos “controláveis” são $p(a - a_0)$ e $|\alpha - \alpha_0|$. Escrevemos $p(\alpha a - \alpha_0 a_0) = p(\alpha_0(a - a_0) + (\alpha - \alpha_0)a_0 + (\alpha - \alpha_0)(a - a_0)) \leq |\alpha_0|p(a - a_0) + |\alpha - \alpha_0|p(a_0) + |\alpha - \alpha_0|p(a - a_0)$ e portanto se escolhermos $\delta > 0$ tal que

$(|\alpha_0| + p(a_0)\delta + \delta^2 < \epsilon$ teremos a inclusão desejada - e a existência de tal δ é trivial.

As funções $p \in \mathcal{F}$ são contínuas em $(\mathcal{A}, \tau_{\mathcal{F}})$. Vamos provar isso, de onde decorrerá que $\tau_{\mathcal{F}} \supset \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{F})$. Para isso usaremos que seminormas definidas em espaços vetoriais topológicos são contínuas quando são limitadas em algum aberto centrado na origem. De fato, seguindo o lema 1.2.4 de [31] tomemos uma seminorma $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, com $(\mathcal{A}, \tau)$ espaço vetorial topológico, e suponhamos que exista $k \in \mathbb{R}$ tal que $p(a) \leq k$ para todo a numa vizinhança aberta V de 0. Tomemos $a_0 \in \mathcal{A}$ qualquer; queremos provar que, para $\epsilon > 0$ qualquer, existe uma vizinhança aberta V' de a_0 tal que $p(V') \subset B_{\epsilon}(p(a_0))$, ou seja, $|p(a) - p(a_0)| < \epsilon$ para $a \in V'$. Ora, sabemos que seminormas satisfazem $|p(a) - p(b)| \leq p(a - b)$ (essa desigualdade bem conhecida e simples de se provar é a desigualdade que geralmente se usa para provar que normas são contínuas em relação à sua própria topologia) e então é suficiente que definamos uma vizinhança V' de a_0 onde $p(a - a_0) < \epsilon$ quando $a \in V'$; para isso basta que tomemos o conjunto $a_0 + \frac{\epsilon}{k}V = \{a_0 + \frac{\epsilon}{k}a; a \in V\}$. É bem conhecido que, em espaços vetoriais topológicos, translações e multiplicação por escalar de abertos são conjuntos abertos: isso é consequência da continuidade da soma e da multiplicação por escalar; no nosso caso, por exemplo, basta notar que $\frac{\epsilon}{k}V$ é a pré-imagem do conjunto aberto V através da função contínua $a \mapsto \frac{k}{\epsilon}a$, sendo que para a soma um argumento análogo se aplica. Então $a_0 + \frac{\epsilon}{k}V$ é aberto em τ e é trivialmente uma vizinhança de a_0 , pois $0 \in V$. Enfim, está provado que para que uma seminorma definida num espaço vetorial topológico seja contínua é suficiente que ela seja limitada em alguma vizinhança aberta da origem. Voltando para $(\mathcal{A}, \tau_{\mathcal{F}})$ temos que $p \in \mathcal{F}$ é tautologicamente limitado na vizinhança aberta $V(0, p, 1)$ de 0, e então p é contínuo. Como já dito, temos que $\tau_{\mathcal{F}} \supset \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{F})$. ■

Lema 110 *Sejam $\mathcal{A}$ espaço vetorial e $\mathcal{F}$ família de seminormas em $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{F}$ “separa pontos”, ou seja, se temos $a = 0$ sempre que $p(a) = 0 \forall p \in \mathcal{F}$, então $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{F}))$ é Hausdorff, ou seja, os abertos de $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{F}))$ também “separam pontos”.*

Prova. Se $a_1 \neq a_2$ existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(a_1 - a_2) > 0$, daí tomando $\epsilon \doteq p(a_1 - a_2)$ temos que $V(a_1, p, \frac{\epsilon}{2}) \cap V(a_2, p, \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$. Com efeito, se $a \in V(a_1, p, \frac{\epsilon}{2}) \cap V(a_2, p, \frac{\epsilon}{2})$ então $p(a - a_k) < \frac{\epsilon}{2}$, $k \in \{1, 2\}$, e portanto $\epsilon = p(a_1 - a_2) = p(a_1 - a + a - a_2) \leq p(a_1 - a) + p(a - a_2) < \epsilon$, um absurdo. ■

Teremos que utilizar aqui bem conhecidos conceitos referentes a espaços de Hilbert, que estão discutidos brevemente no apêndice A.3. Bom, seja H espaço de Hilbert. É fácil ver que,

fixado $x \in H$, a função $\mathcal{B}(H) \ni a \mapsto \|a(x)\| \equiv p_x(a) \in \mathbb{R}^+$ é seminorma em $\mathcal{B}(H)$. Temos a seguinte definição

Definição 111 (Topologia forte de operador) *Seja H espaço de Hilbert. A topologia forte de operador é a topologia em $\mathcal{B}(H)$ cuja base é a coleção dos conjuntos (convexos) do tipo*

$$V(a, x_1, \dots, x_n, \epsilon) \doteq \{b \in \mathcal{B}(H); \|(a - b)x_i\| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}$$

onde $a \in \mathcal{B}(H)$, $x_1, \dots, x_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$ qualquer) e $\epsilon > 0$. Os lemas 109, 110 nos dizem que $\mathcal{B}(H)$ munido dessa topologia é um espaço vetorial topológico Hausdorff localmente convexo.

Agora, fixados $x, y \in H$, temos uma seminorma $\mathcal{B}(H) \ni a \mapsto |\langle x, ay \rangle| \equiv q_{xy}(a) \in \mathbb{R}^+$ em $\mathcal{B}(H)$ e definimos

Definição 112 (Topologia fraca de operador) *Seja H espaço de Hilbert. A topologia fraca de operador é a topologia em $\mathcal{B}(H)$ cuja base é a coleção dos conjuntos (convexos) do tipo*

$$V(a, q_{x_1 y_1}, \dots, q_{x_n y_n}, \epsilon) \doteq \{b \in \mathcal{B}(H); |\langle x_i, (a - b)y_i \rangle| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}$$

onde $a \in \mathcal{B}(H)$, $x_1, \dots, x_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$ qualquer) e $\epsilon > 0$. Os lemas 109, 110 nos dizem que $\mathcal{B}(H)$ munido dessa topologia é um espaço vetorial topológico Hausdorff localmente convexo

O seguinte lema fundamental justifica as escolhas dos nomes.

Lema 113 *Seja H espaço de Hilbert. Então a topologia fraca de operador é menor (mais fraca) que a topologia forte de operador, que por sua vez é menor que a topologia uniforme de operador (a topologia da norma).*

A.3 Álgebras C^* e mecânica quântica algébrica

Na formulação algébrica da mecânica quântica associamos a um sistema quântico uma álgebra C^* satisfazendo as seguintes propriedades.

- (a) Os observáveis do sistema são representados por elementos autoadjuntos dessa álgebra

(b) Estados do sistema são representados por funcionais lineares normalizados na álgebra definidos (definição 117)

(c) A evolução temporal do sistema, ou seja, sua dinâmica, é determinada por um grupo fortemente contínuo de automorfismos na álgebra (definição 121)

e é basicamente a isso que nos referimos com a expressão “mecânica quântica algébrica”. Não pretendemos explicar de maneira mais completa do que se trata a abordagem, já que é uma área muito bem estabelecida da física-matemática. É útil, porém, apresentarmos suas técnicas de maneira um pouco mais precisa já que, apesar de serem conceitos muito bem conhecidos na física-matemática, eles não o são, em geral, na física teórica. Faremos isso nesse apêndice.

Primeiro recordemos a definição de norma de operador e algumas propriedades importantes sobre operadores limitados. Sejam H_1, H_2 espaços normados (com normas denotadas respectivamente por $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$). Dizemos que um operador linear $a : D(a) \rightarrow H_2$ é limitado, onde $D(a)$ é subespaço de H_1 , quando o conjunto $\left\{ \frac{\|a\psi\|_2}{\|\psi\|_1}; \psi \in D(a) \setminus \{0\} \right\} \subset [0, \infty)$ é limitado; se a é operador limitado associamos a ele o número $\|a\|_{op} \doteq \sup \left\{ \frac{\|a\psi\|_2}{\|\psi\|_1}; \psi \in D(a) \setminus \{0\} \right\}$. É fácil ver que o conjunto dos operadores $H_1 \rightarrow H_2$ limitados (que é sempre não vazio já que contém o operador nulo) forma um espaço vetorial quando munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar definidas para funções (ou seja, ponto a ponto); mais que isso, denotando por $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ esse conjunto, o mapa $\mathcal{B}(H_1, H_2) \ni a \mapsto \|a\|_{op} \in \mathbb{R}$ define uma norma em $(\mathcal{B}(H_1, H_2), +, \cdot)$, que chamamos de **norma operacional**. Quando $H_1 = H_2$, escrevemos $\mathcal{B}(H_1)$ em vez de $\mathcal{B}(H_1, H_2)$. Um resultado central em análise funcional é que $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ é um espaço de Banach quando H_2 o é. É um resultado bem conhecido também que quando H tem dimensão finita $\mathcal{B}(H)$ também o tem. Por fim, continuidade e limitação são noções equivalentes em espaços normados: uma função linear $a : H_1 \rightarrow H_2$ é contínua entre os espaços normados H_1 e H_2 se, e só se, ela é limitada; mais que isso, podemos dizer que ela é contínua se, e só se, é contínua num ponto qualquer.

A primeira constatação importante é a de que a mecânica quântica na sua formulação usual, através de espaços de Hilbert, pode ser entendida como um caso particular da “mecânica quântica algébrica”. Se um sistema é representado por H , a álgebra C^* que a ele associamos é $\mathcal{B}(H)$ (a álgebra C^* formada pelos operadores lineares limitados $H \rightarrow H$), sendo que tanto estados puros (elementos normalizados de H) quanto estados não-puros (estados determinados

por operadores densidade) podem ser entendidos como estados no sentido acima: trata-se do funcional linear normalizado $\mathcal{B}(H) \ni a \mapsto \text{Tr}(da) \in \mathbb{C}$, onde d é o operador densidade que usualmente chamamos de estado - no caso de um estado puro ψ , d é o projetor $p^\psi \equiv \langle \psi, \cdot \rangle \psi$, ou seja, o único projetor cuja imagem é o subespaço fechado $\mathbb{C}\psi$. Vamos à teoria.

De início, lembremos que um **espaço de Banach** é um espaço normado que é completo em relação a métrica induzida pela sua norma. Um **espaço de Hilbert** é um espaço de Banach cuja norma é induzida por um produto interno, ou seja, denotando por $(H, +, \cdot, \|\cdot\|)$ esse espaço de Banach, existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} \forall \psi \in H$.

Se H é espaço normado, a composição de operadores define uma função bilinear $\circ : \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ associativa, distributiva à direita e à esquerda em relação à soma e que satisfaz $\alpha a \circ \beta b = \alpha \beta (a \circ b) = \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall a, b \in \mathcal{B}(H)$. É fácil ver também que $\|ab\|_{op} \leq \|a\|_{op} \|b\|_{op}$, sendo que, como de costume, estamos ocultando o simbolo da operação de composição.

Se H_1, H_2 são espaços com produto interno e $a \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, chamamos de **adjunto** de a um operador $a^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ tal que, para todo $(\psi_1, \psi_2) \in H_1 \times H_2$ a igualdade $\langle a\psi_1, \psi_2 \rangle_2 = \langle \psi_1, a^*\psi_2 \rangle_1$ é satisfeita; é fácil ver que $(a^*)^* = a$. Se H_1 e H_2 são espaços de Hilbert, o adjunto de um operador $a \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ existe, é único, limitado e possui norma igual à norma de a . Isso é consequência do teorema da decomposição ortogonal, do qual falaremos abaixo. Um **operador normal** em $\mathcal{B}(H_1, H_2)$, com H_1, H_2 espaços de Hilbert, é um operador que comuta com seu adjunto; um **operador unitário** em $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ é um operador cujo adjunto é sua inversa, ou seja, um operador tal que $aa^* = a^*a = 1$; chamamos de **operador positivo** um operador a tal que $\langle a\psi_1, \psi_2 \rangle \geq 0 \forall (\psi_1, \psi_2) \in H_1 \times H_2$. Em $\mathcal{B}(H)$, chamamos de **operador autoadjunto** um operador que é igual ao seu adjunto; operadores positivos em $\mathcal{B}(H)$ são sempre autoadjuntos, e isso se prova, por exemplo, usando-se a bem conhecida “identidade de polarização”.

Lembremos que, num espaço com produto interno H , dizemos que dois elementos ψ, ϕ são ortogonais - condição representada por $\psi \perp \phi$ - quando $\langle \psi, \phi \rangle = 0$; se $\psi \in H$ e $A \subset H$, dizemos que ψ é ortogonal a A se $\langle \psi, \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in A$, e dizemos que dois conjuntos A, B são ortogonais se todo elemento de A é ortogonal ao conjunto B ; por fim, dado um conjunto $A \subset H$, definimos seu **complemento ortogonal** por $A^\perp \doteq \{\psi \in H; \langle \psi, \phi \rangle = 0 \forall \phi \in A\}$, ou seja, $A^\perp$ é o maior conjunto que é ortogonal a A . Para qualquer subconjunto A de H ,

$A^\perp$ é subespaço vetorial fechado de H - é trivial que se trata de um subespaço, e o fato de ser um subespaço fechado é consequência da continuidade do produto interno (mais precisamente, da continuidade do mapa $H \ni \phi \mapsto \langle \psi, \phi \rangle \in \mathbb{C}$, para todo $\psi \in H$, ou equivalentemente, do mapa $H \ni \psi \mapsto \langle \psi, \phi \rangle \in \mathbb{C}$, para todo $\phi \in H$). Dizemos que um espaço vetorial H é a **soma direta** dos subespaços H_1, H_2 se todo elemento $\psi \in H$ pode ser escrito de maneira única como $\psi = \psi_1 + \psi_2$, onde $\psi_k \in H_k$, $k \in \{1, 2\}$; no caso em que H é espaço com produto interno, exigimos ainda que os subespaços H_1 e H_2 sejam ortogonais. Escrevemos $H = H_1 \oplus H_2$ quando H é a soma direta de H_1 e H_2 . Temos

Teorema 114 (Decomposição ortogonal) *Seja H um espaço de Hilbert e $A \subset H$ subespaço fechado. Então vale que*

$$H = A \oplus A^\perp.$$

Uma **álgebra** sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é corpo, é uma estrutura algébrica $(\mathcal{A}, +, \cdot, \circ)$ onde $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é uma operação associativa (chamada de produto da álgebra) distributiva à direita e à esquerda em relação à soma e tal que $\alpha a \circ \beta b = \alpha \beta (a \circ b) = \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall a, b \in \mathcal{A}$. Uma **álgebra normada** é uma álgebra munida de uma norma $\|\cdot\|$ (quando vista como espaço vetorial) tal que, para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $\|a \circ b\| \leq \|a\| \|b\|$; dizemos que a norma é submultiplicativa em relação ao produto. Uma **álgebra de Banach** é uma álgebra que, enquanto espaço vetorial, é completa em relação à métrica induzida pela norma - mais precisamente, é uma álgebra normada $(\mathcal{A}, +, \cdot, \circ, \|\cdot\|)$ tal que $(\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ é espaço de Banach. Uma **involução** numa álgebra $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}, +, \cdot, \circ)$ é uma função $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisfaz, para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(a^*)^* = a$ (ou seja, $*$ é uma bijeção e é a inversa de si mesma), $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*$ (é uma função antilinear) e $(a \circ b)^* = b^* \circ a^*$. Uma **álgebra*** é uma álgebra munida de uma involução, e uma **álgebra de Banach*** é uma álgebra de Banach munida de uma involução que preserva a norma, ou seja, onde vale $\|a^*\| = \|a\|$ para todo elemento a da álgebra. A submultiplicidade da norma e o fato de involuções preservarem normas implicam que, para uma álgebra de Banach* $\mathcal{A}$, $\|a^* \circ a\| \leq \|a\|^2 \forall a \in \mathcal{A}$. A desigualdade contrária ($\|a^* \circ a\| \geq \|a\|^2$), porém, não é consequência da definição de álgebra de Banach* e portanto não é verdade nessas álgebras, em geral, a igualdade $\|a^* \circ a\| = \|a\|^2 \forall a \in \mathcal{A}$. Uma álgebra C^* é uma álgebra de Banach* na qual essa igualdade é sempre satisfeita:

Definição 115 (Álgebra C*) *É uma álgebra de Banach* onde vale, para todo elemento a da álgebra, que*

$$\|a^* \circ a\| = \|a\|^2.$$

Comumente o símbolo do produto é ocultado e escrevemos, por exemplo, ab em vez de $a \circ b$. Todas as álgebras C* às quais nos referiremos nessa dissertação serão álgebras sobre o corpo $\mathbb{C}$. Uma **álgebra unital** é uma álgebra na qual existe um elemento neutro da identidade, ou seja, um elemento $\mathbb{1}$ tal que, para todo elemento a da álgebra, $\mathbb{1}a = a\mathbb{1} = a$; tal elemento, quando existe, é único. Numa álgebra* unital, a identidade é sempre autoadjunta, e isso é consequência simples da bijetividade da involução; numa álgebra C* unital temos $\|\mathbb{1}\| = 1$ pois $\|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}\mathbb{1}^*\| = \|\mathbb{1}\|^2$. Sempre que nesse trabalho nos referirmos a uma álgebra qualquer estaremos assumindo que essa álgebra é unital. Numa álgebra unital, dizemos que um elemento a é inversível quando existe um elemento b tal que $ab = ba = \mathbb{1}$ - chamado de elemento inverso de a ; como de costume, denotamos por a^{-1} o elemento inverso de a , já que tal elemento, quando existe, é único. O exemplo protótipo de álgebra C* (unital) é $\mathcal{B}(H)$, o conjunto dos operadores lineares limitados definidos num espaço de Hilbert H munido das operações de soma, produto (composição) e multiplicação por escalar usuais para operadores, da norma operacional e da adjunção.

Sejam $\mathcal{A}$ álgebra e $a \in \mathcal{A}$. Chamamos de **valor regular** de a qualquer número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha\mathbb{1} - a$ é elemento inversível da álgebra; o **conjunto resolvente** de a é o conjunto dos valores regulares que a , que denotamos por $\rho(a)$. O **espectro** de a é o conjunto $\sigma(a) \doteq \mathbb{C} \setminus \rho(a)$, ou seja, o conjunto dos números α tais que $\alpha\mathbb{1} - a$ não é inversível em $\mathcal{A}$. É um resultado bem conhecido de análise funcional que, num espaço de Banach (em particular, num espaço de Hilbert), quando um operador limitado é inversível, sua inversa é também limitada; portanto, no caso de $\mathcal{B}(H)$, essa definição de espectro coincide com a definição usual de espectro de um operador quando aplicada a operadores limitados.

Dizemos que um elemento a de uma álgebra* é **normal** se ele comuta (em relação ao produto) com seu adjunto, ou seja, se $aa^* = a^*a$; um elemento é dito ser **unitário** se seu adjunto é sua inversa (em relação ao produto), ou seja, se $aa^* = a^*a = \mathbb{1}$, e é fácil ver que, em álgebras C*, operadores unitários têm sempre norma igual a um; um elemento **autoadjunto** é um elemento cujo adjunto é ele mesmo: $a^* = a$. Chamamos de **positivo** um elemento autoadjunto cujo espectro está contido em $[0, \infty)$. Denotamos por $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}$ o conjunto dos elementos autoadjun-

tos de $\mathcal{A}$ e por $\mathcal{A}^+$ o conjunto dos elementos positivos. No caso de $\mathcal{B}(H)$, a definição usual de operador positivo coincide com a definição acima. É importante lembrar também que, se $a \in \mathcal{B}(H)$ é operador limitado, seu adjunto existe, é único, limitado e tal que $\|a\| = \|a^*\|$ - se assim não fosse não teríamos uma álgebra C^* .

Enunciaremos alguns resultados fundamentais sobre o espectro de um elemento numa álgebra C^* .

Lema 116 *Sejam A álgebra C^* e $a \in A$. Então*

- (a) *O espectro $\sigma(a)$ de a em A é um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{C}$.*
- (b) *Se a é autoadjunto, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$*
- (c) *Se B é uma subálgebra C^* de A e $a \in B$, então $\sigma_B(a) = \sigma(a)$, onde $\sigma_B(a)$ é o espectro de a em B , ou seja, o conjunto dos números $\alpha \in \mathbb{C}$ tais que $\alpha 1 - a$ não possui uma inversa em B .*

O item c do lema acima nos diz que o espectro é “invariante por subálgebras C^* ”. Isso é um resultado muito importante nessa dissertação pois nos diz que o espectro de um elemento “independe de contextos”.

A definição precisa de estado numa álgebra C^* é a seguinte.

Definição 117 (Estado) *Seja $\mathcal{A}$ álgebra C^* . Um estado em $\mathcal{A}$ é um funcional linear ω que satisfaz as seguintes propriedades.*

- (a) *Normalização: $\omega(1) = 1$*
- (b) *Positividade: $\omega(a) \geq 0$ se a é elemento positivo.*

Denotamos por $S(\mathcal{A})$ o conjunto dos estados de $\mathcal{A}$. O seguinte lema é útil

Lema 118 *Seja ω funcional linear definido numa álgebra C^* $\mathcal{A}$. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) *ω é estado*
- (b) *$\|\omega\| = \omega(1) = 1$.*

A norma $\|\omega\|$ utilizada no lema acima é a norma operacional (considerando ω como operador linear entre os espaços vetoriais normados $\mathcal{A}$ e $\mathbb{C}$). O lema nos diz que estados são funcionais limitados.

Há uma bem conhecida relação biunívoca entre estados no sentido acima e operadores densidades quando $\dim(H) < \infty$: dado um estado ω em $\mathcal{B}(H)$, existe, e é único, um operador densidade d^ω tal que $\omega(a) = \text{Tr}(d^\omega a) \forall a \in \mathcal{B}(H)$, sendo que a biunivocidade da relação é consequência do lema 53.

Podemos generalizar a noção de estado puro para uma álgebra C^* qualquer. Para isso precisamos antes notar que o conjunto $S(\mathcal{A})$ dos estados de $\mathcal{A}$ se torna um conjunto convexo quando munido da soma usual de funções (ou seja, é um subconjunto convexo de $\mathcal{A}^*$, o dual topológico de $\mathcal{A}$ - conjunto dos funcionais lineares limitados definidos em $\mathcal{A}$). Estados puros são os pontos extremos desse conjunto convexo.

Definição 119 (Estado puro) *Seja $\mathcal{A}$ álgebra C^* . Dizemos que um estado $\omega \in S(\mathcal{A})$ é puro quando ele é um ponto extremo do conjunto convexo $S(\mathcal{A})$, ou seja, quando não existem estados distintos cuja combinação convexa seja igual a ω . De maneira mais explícita, dizemos que um estado ω é puro quando a igualdade*

$$\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2,$$

sendo $\omega_1, \omega_2 \in S(\mathcal{A})$ e $\lambda \in (0, 1)$, implica $\omega_1 = \omega = \omega_2$

Não é trivial porém é verdade que, se $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$, então um estado é puro no sentido acima se, e só se, ele é estado puro no sentido usual (ou seja, estado vetor).

Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ são álgebras* unitais, uma função $\alpha : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ é dita ser um **homomorfismo*** se ela for um homomorfismo entre álgebras que preserva a identidade e a involução, ou seja, uma função linear tal que, para todo $a, b \in \mathcal{A}_1$, $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$, $\alpha(1_1) = 1_2$ e $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$, sendo 1_k a identidade de $\mathcal{A}_k$. Um **isomorfismo*** é um homomorfismo* bijetivo (a inversa de um isomorfismo* é também isomorfismo*), e um **automorfismo*** é um isomorfismo* entre uma álgebra e ela mesma. Nesse trabalho nos referiremos a automorfismos* apenas por “automorfismo”. Quando $\mathcal{A}$ é álgebra C^* , um automorfismo $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ sempre preserva norma ($\|\alpha(a)\| = \|a\|$) e os elementos positivos, ou seja, se $a \in \mathcal{A}^+$, $\alpha(a) \in \mathcal{A}^+$. Denotamos

por $\text{Aut}(\mathcal{A})$ o conjunto dos automorfismos em $\mathcal{A}$, que é não vazio, já que a função identidade $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ pertence a ele, e que está contido em $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, o conjunto dos operadores lineares limitados definidos em $\mathcal{A}$, sendo que estamos considerando $\mathcal{A}$ como espaço vetorial normado. Sendo assim, podemos falar sobre continuidade uniforme e forte de mapas $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definição 120 (Continuidades uniforme e forte) *Seja X espaço normado. Dizemos que uma função $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{B}(X)$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, é*

- (a) **Uniformemente contínua** se ela é contínua entre os espaços normados $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}(X)$, ou seja, se $\lim_{t' \rightarrow t} \|\tau_{t'} - \tau_t\|_{op} = 0$ para todo $t \in \mathbb{K}$.
- (b) **Fortemente contínua** se, para todo $x \in X$, o mapa $\mathbb{K} \ni t \mapsto \tau_t(x) \in X$ é contínuo (entre os espaços $\mathbb{K}$ e X), ou seja, se $\lim_{t' \rightarrow t} \|\tau_{t'}x - \tau_tx\| = 0$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

Note que acima escrevemos $\tau_t \equiv \tau(t)$. É consequência imediata da definição de norma operacional que, se τ é uniformemente contínua, ela é fortemente contínua; se a dimensão de X é finita, essas duas noções de continuidade são equivalentes.

Da definição acima podemos dizer que $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{B}(X)$ é uniformemente contínua se e só se ela é contínua entre os espaços topológicos $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|})$ e $(\mathcal{B}(X), \tau_{\|\cdot\|})$, sendo $\tau_{|\cdot|}$ e $\tau_{\|\cdot\|}$ as topologias induzidas pelas normas de $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}(X)$ respectivamente. Usando na noção de topologia forte de operador (definição 111) é fácil ver que τ é fortemente contínua se e só se ela é contínua entre os espaços topológicos $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|})$ e $(\mathcal{B}(X), \tau_s)$, onde τ_s é a topologia forte em $\mathcal{B}(X)$.

Definição 121 (Grupo de automorfismos) *Seja $\mathcal{A}$ álgebra C^* . Uma função $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, é dita ser um grupo de automorfismos se*

- (a) $\tau_t \tau_s = \tau_{t+s}$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$
- (b) $\tau_0 = \mathbb{1}$.

Decorre da definição que o par $(\tau(\mathcal{A}), \circ)$ é de fato um grupo; note também que $(\text{Aut}(\mathcal{A}), \circ)$ é grupo. Se $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$ é fortemente contínua, dizemos que se trata de um **grupo fortemente contínuo**, e analogamente se define grupo uniformemente contínuo de automorfismos. É comum representarmos um grupo $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$ por $(\tau_t)_{t \in \mathbb{K}}$.

Definição 122 (Sistema dinâmico C^*) *É uma tripla $(\mathcal{A}, \mathbb{K}, \tau)$, onde $\mathcal{A}$ é álgebra C^* , $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\tau : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$ é grupo de automorfismos fortemente contínuo.*

Quando está claro qual é o corpo $\mathbb{K}$, representamos o sistema dinâmico C^* apenas por $(\mathcal{A}, \tau)$.

Numa álgebra de Banach $\mathcal{A}$, para qualquer elemento de $\mathcal{A}$ podemos sempre definir a “exponencial” $e^a \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{a^n}{n!}$, limite tomado na norma de $\mathcal{A}$, é claro, e onde $a^0 \doteq \mathbb{1}$. A exponencial e^a é sempre inversível e sua inversa é e^{-a} . As propriedades usuais válidas para a exponencial complexa são também válidas em $\mathcal{A}$ (por exemplo, $e^a e^b = e^{a+b}$); de fato, a exponencial complexa é um caso particular da exponencial acima definida. Se $\mathcal{A}$ é álgebra C^* , temos que $(e^a)^* = e^{a^*}$ - isso decorre da continuidade da involução, e a involução é contínua pois preserva norma - e portanto, se a é autoadjunto, e^a também o é. No caso de um sistema que representamos através de um espaço de Hilbert H e cujo Hamiltoniano é $h \in \mathcal{B}(H)$ definimos a evolução temporal de um operador $a \in \mathcal{B}(H)$ através do mapa $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{ith} a e^{-ith} \in \mathcal{B}(H)$.¹ Esse mapa é contínuo para qualquer a limitado. Fixado $t \in \mathbb{R}$, é fácil ver que a função $\mathcal{A} \ni a \xrightarrow{\tau_t^h} e^{ith} a e^{-ith} \in \mathcal{A}$ é automorfismo e que $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t^h$ é grupo de automorfismos em $\mathcal{A}$. Assim, a evolução temporal usual da mecânica quântica na representação de Heisenberg é dada por um grupo de automorfismos.

Apresentaremos agora um lema que será útil para a definição do conjunto dos elementos τ -inteiro-analíticos, que será usado na definição de estado KMS. Note que usaremos a noção de “integral em espaço de Banach”; mais precisamente, integração de curvas $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) \in \mathcal{A}$ num espaço de Banach $\mathcal{A}$. A definição é uma generalização simples da integral de Riemann em $\mathbb{R}$, e isso funciona pois nesta não usamos muito mais que o fato de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ser espaço de Banach.

Lema 123 *Sejam X espaço de Banach e $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ função contínua limitada (existe $K \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\|f(t)\| \leq K \forall t \in \mathbb{R}$). Suponha que $\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\| dt$ está bem definida (consequentemente $\int_x^{\infty} \|f(t)\| dt$ e $\int_{-\infty}^x \|f(t)\| dt$ estão bem definidas). Então existem os limites*

$$\int_x^{\infty} f(t) dt \doteq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y f(t) dt \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{-\infty}^y f(t) dt \doteq \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^y f(t) dt \quad (\text{A.12})$$

¹ Em todo este trabalho consideramos $\hbar = 1$.

e, mais que isso, eles comutam, ou seja

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y f(t) dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^y f(t) dt, \quad (\text{A.13})$$

o que nos permite definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \doteq \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{\infty} f(t) dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^y f(t) dt$$

.

Prova. Para todo $y \in \mathbb{R}$ definimos $g_y : \mathbb{R} \rightarrow X$ por

$$g_y(x) \doteq \int_x^y f(t) dt,$$

sendo que quando $x \geq y$ usamos a convenção usual $\int_x^y f(t) dt \doteq -\int_y^x f(t) dt$. A função g_y é contínua - mais que isso, uniformemente contínua. De fato, se $x, x' \in \mathbb{R}$,

$$\|g_y(x) - g_y(x')\| = \left\| \int_x^y f(t) dt - \int_{x'}^y f(t) dt \right\| = \left\| \int_{x'}^x f(t) dt \right\| \quad (\text{A.14})$$

$$\leq \int_{x'}^x \|f(t)\| dt \leq K|x - x'|, \quad (\text{A.15})$$

onde K é majorante de f , ou seja, $\|f(t)\| \leq K \forall t \in \mathbb{R}$. Vamos provar que existe o limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_y(x) \equiv \int_{-\infty}^y f(t) dt$. Sendo g_y contínua, é suficiente que provemos que, dada uma sequência numérica (x_n) tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, a sequência $g_y(x_n)$ é convergente em X , e sendo X completo, para isso é suficiente que provemos que essa sequência é Cauchy; valerá então que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_y(x_n)$. Bom, para $n, m \in \mathbb{N}$ e supondo, sem perda de generalidade, $x_n \leq x_m$, temos

$$\|g_y(x_n) - g_y(x_m)\| \leq \int_{x_n}^{x_m} \|f(t)\| dt = \int_{x_n}^y \|f(t)\| dt - \int_{x_m}^y \|f(t)\| dt; \quad (\text{A.16})$$

a sequência $\left(\int_{x_n}^y \|f(t)\| dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy em $\mathbb{R}$, já que é convergente, e da desigualdade acima concluímos que $(g_y(x_n))$ é Cauchy. Enfim, o limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^y f(t) dt$.

O limite $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y f(t) dt$ também existe e isso se prova por argumentos análogos aos

apresentados acima e portanto está bem definida a função $g_\infty : \mathbb{R} \rightarrow X$ onde

$$g_\infty(x) \doteq \int_x^\infty f(t)dt.$$

Temos, claro, $\lim_{y \rightarrow \infty} g_y(x) = g_\infty(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Mais que isso, g_∞ é também uniformemente contínua: isso se prova de maneira análoga ao que foi feito para g_y , usando o fato de que o limite é contínuo em relação à norma; conclui-se, também de maneira análoga ao que foi feito acima, que existe o limite $g_\infty(-\infty) \doteq \lim_{x \rightarrow -\infty} g_\infty(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^\infty f(t)dt$.

Já sabemos que a expressão $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y f(t)dt$ está bem definida. Vamos agora provar que existe o limite $\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^y f(t)dt$ e que a igualdade enunciada é verdadeira (na notação atual, que $g_\infty(-\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} g_y(-\infty)$, onde $g_y(-\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow -\infty} g_y(x)$). Temos

$$\|g_\infty(-\infty) - g_y(-\infty)\| = \|g_\infty(-\infty) - g_\infty(x) + g_\infty(x) - g_y(x) + g_y(x) - g_y(-\infty)\| \quad (\text{A.17})$$

$$\leq \|g_\infty(-\infty) - g_\infty(x)\| + \|g_\infty(x) - g_y(x)\| \quad (\text{A.18})$$

$$+ \|g_y(x) - g_y(-\infty)\|. \quad (\text{A.19})$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $R \in \mathbb{R}$ tal que, se $y \geq R$, $\|g_\infty(x) - g_y(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$\|g_\infty(x) - g_y(x)\| = \left\| \int_x^\infty f(t)dt - \int_x^y f(t)dt \right\| \leq \int_y^\infty \|f(t)\|dt \quad (\text{A.20})$$

e porque $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^\infty \|f(t)\|dt = 0$. Assim, fixado $y \geq R$ qualquer, podemos escolher $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça $\|g_\infty(-\infty) - g_\infty(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$ e $\|g_\infty(x) - g_y(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$ (por causa dos limites que já provamos). Decorre disso que, dado $\epsilon > 0$ existe $R \in \mathbb{R}$ tal que $\|g_\infty(x) - g_y(x)\| < \epsilon$ quando $y \geq R$, ou seja, podemos afirmar que $g_\infty(-\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} g_y(-\infty)$; isso completa a prova. ■

Já apresentamos de maneira resumida o conteúdo matemático dos três itens enunciados no início desse apêndice. A noção de álgebra de von Neumann é fundamental nessa dissertação e a introduziremos agora.

A.3.1 Álgebras de von Neumann

Seja H espaço de Hilbert e $\mathcal{N}$ subconjunto de $\mathcal{B}(H)$. A **comutante** de $\mathcal{N}$ é o conjunto dos elementos de $\mathcal{B}(H)$ que comutam com todo elemento do conjunto $\mathcal{N}$, ou seja, $\mathcal{N}' \doteq \{b \in \mathcal{B}(H); [b, a] = 0 \forall a \in \mathcal{N}\}$, onde $[a, b] \doteq ab - ba$ é o bem conhecido “comutador” do par $(a, b) \in \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H)$. A comutante $\mathcal{N}'$ é trivialmente uma subálgebra unital de $\mathcal{B}(H)$ (note que $[a, bc] = b[a, c] + [a, b]c$, e da continuidade da soma e do produto em relação à topologia da norma temos que $\mathcal{N}'$ é uma subálgebra fechada de $\mathcal{B}(H)$, portanto álgebra de Banach (pois uma subálgebra fechada de uma álgebra de Banach é também álgebra de Banach). Quando $\mathcal{N}$ é conjunto autoadjunto (ou seja, $a \in \mathcal{V}$ implica $a^* \in \mathcal{V}$) temos que $\mathcal{N}'$ é também autoadjunto: basta notar que $[a, b^*] = [b, a^*]^*$ e tomar $a \in \mathcal{V}$, $b \in \mathcal{B}(H)$. Concluimos disso que quando $\mathcal{N}$ é conjunto autoadjunto $\mathcal{N}'$ é álgebra C^* , pois uma subálgebra* fechada de uma álgebra C^* é também álgebra C^* . Definimos a **bicomutante** $\mathcal{N}''$ do conjunto $\mathcal{N}$ por $\mathcal{N}'' \doteq (\mathcal{N}')'$. É imediato que $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}''$. Além disso, quando $\mathcal{N}$ é autoadjunto, $\mathcal{N}'$ também o é e portanto $\mathcal{N}''$ é álgebra C^* . Definimos.

Definição 124 (Álgebra de von Neumann) *Seja H espaço de Hilbert. Uma álgebra de von Neumann em H é uma subálgebra* $\mathcal{N}$ de $\mathcal{B}(H)$ tal que*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}''.$$

Como já mostramos:

Lema 125 *Álgebras de von Neumann são álgebras C^**

O seguinte teorema é fundamental.

Teorema 126 *Sejam H espaço de Hilbert e $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(H)$ subálgebra* de $\mathcal{B}(H)$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) $\mathcal{N} = \mathcal{N}''$
- (b) $\mathcal{N}$ é fechada para a topologia forte de operador, ou seja, $\mathcal{N}$ é um conjunto fechado em $(\mathcal{B}(H), \tau_s)$, onde τ_s é a topologia forte de operador (definição 111)
- (c) $\mathcal{N}$ é fechada para a topologia fraca de operador.

Outra propriedade fundamental de álgebras de von Neumann, e que será usado diretamente nesse trabalho, é o fato dela ser gerada pelo seu conjunto de projetores ortogonais. Com isso queremos dizer que uma álgebra de von Neumann é igual ao fecho (em relação à norma de $\mathcal{B}(H)$) do subespaço vetorial de $\mathcal{B}(H)$ gerado pelo conjunto de seus projetores ortogonais. Explicitemos isso.

Lema 127 *Sejam $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(H)$ álgebra de von Neumann e $Pr(\mathcal{N})$ o conjunto de seus projetores ortogonais. Então*

$$\mathcal{N} = \overline{\text{span}(Pr(\mathcal{N}))},$$

sendo que $\text{span}(Pr(\mathcal{N}))$ é o subespaço vetorial de $\mathcal{B}(H)$ gerado pelo conjunto $Pr(\mathcal{N})$ e onde $\overline{\text{span}(Pr(\mathcal{N}))}$ é o fecho desse subespaço em relação à topologia da norma.

O teorema espectral será usado muitas vezes nesse trabalho. Para evitar repetições de argumentos e para fixar a notação, vamos apresentar algumas de suas versões que usaremos.

A.3.2 Teorema espectral

Vamos primeiro enunciar o teorema espectral para operadores autoadjuntos limitados definidos num espaço de Hilbert. Para isso a seguinte noção é fundamental.

Definição 128 (Resolução da identidade) *Seja H espaço de Hilbert. Uma função $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto e_\lambda \in Pr(H)$, sendo $Pr(H)$ o conjunto dos projetores de H , é dita ser uma resolução da identidade se*

(a) $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto e_\lambda \in \mathcal{B}(H)$ preserva ordem, ou seja $\lambda_1 \leq \lambda_2$ implica $e_{\lambda_1} \leq e_{\lambda_2}$ em $Pr(H)$.

(b) $e_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 1$ e $e_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty} 0$ na topologia forte de operador, ou seja, para todo $x \in H$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e_\lambda x = x \tag{A.21}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e_\lambda x = 0. \tag{A.22}$$

(c) $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto e_\lambda \in \mathcal{N}$ é contínuo à direita na topologia forte de operador, ou seja, para todo $x \in H$,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} e_{\lambda+\epsilon} x = e_\lambda x.$$

Em A.5 está definida bem conhecida ordem de projetores. Usaremos a notação $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ para representar a resolução da identidade $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto e_\lambda \in Pr(H)$. Chamaremos de limitada uma resolução da identidade $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ que satisfaz $e_\lambda = 1 \ \forall \lambda \geq \lambda_2$ e $e_\lambda = 0 \ \forall \lambda \leq \lambda_1$ para algum intervalo $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathbb{R}$. O teorema espectral nos diz que há uma relação biunívoca entre resoluções da identidade limitadas e operadores autoadjuntos limitados. Vamos enuncia-lo, então, da seguinte maneira.

Teorema 129 (teorema espectral para operadores limitados) *Num espaço de Hilbert existe uma relação biunívoca entre resoluções da identidade limitadas e operadores autoadjuntos limitados.*

Para uma versão mais completa do teorema sugerimos o capítulo 41 de [45]. Bom, se $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é resolução da identidade limitada podemos denotar o operador a ela associado por

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda de_\lambda.$$

Não usamos a notação de integral à toa. Trata-se de fato de uma integral - a integral de Stieljes - e é justamente a construção dessa integral que nos dá a relação biunívoca mencionada. Para nós é suficiente que entendamos como uma notação. Se a é operador autoadjunto limitado denotaremos por $(e_\lambda^{(a)})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a resolução da identidade à qual ele está associado. Temos, claro, que

$$a = \int_{\mathbb{R}} \lambda de_\lambda^{(a)}.$$

Sabemos que o espectro de um operador autoadjunto limitado a é um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}$ - de maneira mais geral, é verdade que o espectro de um elemento autoadjunto de uma álgebra C^* unital qualquer é subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}$. Sendo compacto e não vazio, o espectro possui máximo e mínimo. Pode-se mostrar que $e_\lambda^{(a)} = 1$ para todo $\lambda \geq \max \sigma(a)$ e $e_\lambda^{(a)} = 0$ para todo $\lambda \leq \min \sigma(a)$

No caso em que H tem dimensão finita sabemos que $\sigma(a)$ é finito (se $\dim(H) = N$, $\sigma(a)$ possui no máximo N elementos). Nesse caso, é mais simples referir-se à bem conhecida decomposição espectral do operador. Com efeito, seja a operador autoadjunto. sabemos que podemos associar a um elemento $\lambda \in \sigma(a)$ um subespaço H_λ de H , que é o subespaço gerado pelos autovetores de a que têm λ como autovalor, ou seja, os elementos $\psi \in H$ não nulos tais

que $a\psi = \lambda\psi$. Sabemos também que não pode existir $\psi \in H$ não nulo tal que $a\psi = \lambda_1\psi$ e $a\psi = \lambda_2\psi$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e desse modo esses subespaços têm interseção trivial: o conjunto $\{0\}$. Por fim, sabemos que, por a ser autoadjunto, existe uma base de H dada por autovetores distintos de a , e disso decorre que H é soma direta desses subespaços, ou seja, $H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(a)} H_\lambda$. Sabemos que subespaços de dimensão finita de um espaço de Banach qualquer são fechados, e portanto H , por ter dimensão finita, e todo subespaço de H tem dimensão finita. Como discutido no apêndice A.5, sabemos que há uma relação biunívoca trivial entre subespaços fechados de um espaço de Hilbert e projetores nesse espaço (ao projetor $p \in Pr(H)$ associamos o subespaço fechado $p(H)$, ou seja, sua imagem, sendo que $p \leq q$ se e só se $p(H) \subset q(H)$), e sabendo disso a seguinte versão do teorema espectral, que adaptamos do segundo capítulo de [45], segue facilmente do que foi dito acima.

Teorema 130 (Teorema espectral em dimensão finita) *Seja $a \in \mathcal{B}(H)$ autoadjunto, onde H é espaço de Hilbert de dimensão finita. Então existe, e é única, uma única família de projetores $\{p_\lambda^a, \lambda \in \sigma(a)\}$ tal que*

$$a = \sum_{\lambda \in \sigma(a)} \lambda p_\lambda^a \quad (\text{A.23})$$

$$\sum_{\lambda \in \sigma(a)} p_\lambda^a = 1 \quad (\text{A.24})$$

$$p_\lambda^a p_{\lambda'}^a = \delta_{\lambda\lambda'} p_\lambda^a \quad (\text{A.25})$$

É fácil relacionar a resolução da identidade $(e_\lambda^{(a)})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ e a família $(p_\lambda^a)_{\lambda \in \sigma(a)}$. De fato, temos

$$e_\lambda^{(a)} = \sum_{\substack{\lambda' \in \sigma(a) \\ \lambda' \leq \lambda}} p_{\lambda'}^a.$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que isso nos dá uma função “contínua por partes”, com descontinuidades nos elementos do espectro de a .

Por fim, temos o cálculo funcional contínuo, que também é geralmente apresentado como uma versão do teorema espectral. Ele nos permite escrever, em álgebras C^* unitais quaisquer, “funções contínuas” de elementos autoadjuntos da álgebra. Bom, sejam $\mathcal{A}$ álgebra C^* e $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto. Se $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio $p(x) = \lambda_0 x^0 + \dots + \lambda_n x^n$ então podemos definir

$p(a) \doteq \lambda_0 a^0 + \dots + \lambda_n a^n$. De maneira semelhante gostaríamos de escrever $f(a)$ para uma função contínua f . Bom, sabemos pelo teorema de Weierstrass que funções contínuas definidas em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ podem ser sempre aproximadas uniformemente por polinômios; de maneira mais precisa, se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto não vazio, $C(X)$ é o conjunto das funções contínuas complexas cujo domínio é X e $P(X) \subset C(X)$ é o conjunto dos polinômios em X , então $P(X)$ é denso em $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$, onde $\|\cdot\|_\infty$ é a bem conhecida norma do supremo. Ora, o espectro de um elemento autoadjunto $a \in \mathcal{A}$ é compacto e não vazio, e podemos definir trivialmente uma função $P(\sigma(a)) \ni p \xrightarrow{F} F(p) \doteq p(a) \in \mathcal{A}$. Sabemos também que $C(\sigma(a))$ é uma álgebra C^* unital comutativa (operações definida ponto a ponto, sendo a conjugação complexa a adjunção e sendo a norma do supremo a norma da álgebra). É fácil ver que o mapa acima definido é uma função linear; mais que isso, ele preserva a norma, e isso decorre da bem conhecida igualdade $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$ (“cálculo espectral”). Assim $F : P(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$ é contínuo e tem norma igual a um ($\|F(p)\| = \|p(a)\| = \|p\|_\infty \forall p \in P(\sigma(a))$). Sabemos, pelo bem conhecido teorema BLT (*bounded linear transformation*) que para um operador linear limitado qualquer $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}$, onde $\mathcal{V}$ é espaço normado, $\mathcal{U}$ é espaço de Banach e $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ é um subespaço denso, existe, e é única, uma extensão limitada $\tilde{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ e, mais que isso, $\tilde{T}$ é linear e tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Assim, como $C(\sigma(A))$ e $\mathcal{A}$ são espaços de Banach existe, e é única, uma extensão linear limitada $\tilde{F} : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\|\tilde{F}\| = 1$. Seja $\mathcal{V}(a) \doteq \tilde{F}(C(\sigma(a))) \subset \mathcal{A}$. Escrevendo $f(a) \doteq \tilde{F}(f)$, o fato de $\tilde{F}$ ser isometria garante que todas as propriedades referentes a limite em $C(\sigma(a))$ serão válidas em $\mathcal{V}(a)$ - por exemplo, todo $f(a) \in \mathcal{V}(a)$ será limite de uma sequência de polinômios $(p_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$ (que existe já que $P(\sigma(A)) \subset C(\sigma(A))$ é denso). Enfim,

Teorema 131 (Cálculo funcional contínuo para autoadjuntos) *Sejam $\mathcal{A}$ álgebra C^* , $a \in \mathcal{A}$ elemento autoadjunto e $C(\sigma(a))$ a álgebra C^* formada pelas funções contínuas definidas no compacto $\sigma(a)$. Então existe, e é única, uma função $F : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $F(p) = p(a)$ para todo polinômio $p : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$. Mais que isso, trata-se de um homomorfismo entre as álgebras $C^* C(\Sigma(a))$ e $\mathcal{A}$, ou seja, denotando $F(f) \doteq f(a) \forall f \in C(\sigma(a))$ vale que*

$$(a) \quad \|f(a)\| = \|f\|_\infty$$

$$(b) \quad (f + ag)(a) = f(a) + ag(a)$$

$$(c) \quad (fg)(a) = f(a)g(a)$$

$$(d) f^*(a) = (f(a))^*$$

(e) $f(A)$ é normal

Prova. O primeiro item já foi provado. O segundo é verdadeiro pois a extensão é linear. Sejam $f, g \in C(\sigma(a))$ e $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P(\sigma(a))$ sequências de polinômios tais que $p_n \rightarrow f$ e $q_n \rightarrow g$ em $C(\sigma(a))$. sei que $p_n(a) \rightarrow f(a)$ e $q_n(a) \rightarrow g(a)$ e assim

(c)

$$(fg)(a) = F(fg) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(p_n q_n) \quad (\text{A.26})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} F(p_n)F(q_n) = F(f)F(g) = f(a)g(a) \quad (\text{A.27})$$

A quarta igualdade é valida pois o produto em $\mathcal{A}$ é distributivo como em $\mathbb{C}$.

(d) Como a involução é isometria, e portanto contínua, temos

$$(f(a))^* = (\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a))^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n(a))^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_n(a) = \bar{f}(a) = f^*(a).$$

(e) $f(a)(f(a))^* = f(a)\bar{f}(a) = (f\bar{f})(a) = (\bar{f}f)(a) = \bar{f}(a)f(a) = (f(a))^*f(a)$ onde foram usados os itens c e d.

■

Note que se $\mathcal{A}(a) \doteq \{f(a), f \in C(\sigma(a))\}$ temos

Corolário 132 A função $C(\sigma(a)) \ni f \mapsto f(a) \in \mathcal{A}(a)$ é um isomorfismo* entre as álgebras $C^* C(\sigma(a))$ e $\mathcal{A}(a)$.

O seguinte lema é fácil de ser provado.

Lema 133 A álgebra $C^* \mathcal{A}(a)$ é a menor subálgebra C^* de $\mathcal{A}$ que contém a , ou seja, é a álgebra C^* gerada por a .

A transformação de Gelfand é fundamental para a definição do pré-feixe espectral na teoria quântica em topoi, que é um dos elementos principais da construção, já que tem o papel de espaço de estados do sistema. Isso justifica o seguinte apêndice.

A.3.3 Transformação de Gelfand

Todas as álgebras a que nos referirmos nessa subseção serão unitais e complexas. Nossa principal referência aqui é [46].

A intenção dessa seção é provar que toda álgebra C^* unital comutativa é isomorfa a uma álgebra de funções contínuas definidas num espaço topológico Hausdorff compacto (teorema 139) e, principalmente, esclarecer as propriedades do espectro e da transformação de Gelfand que serão importantes na abordagem de sistemas quânticos através da teoria de topoi (proposição 138). Para obter o isomorfismo citado acima, tomamos como espaço topológico o espectro de Gelfand da álgebra, que é seu conjunto de estados puros, e dessa maneira todo elemento de álgebra pode ser visto como uma função contínua definida nesse conjunto de estados puros.

Definição 134 (Espectro de Gelfand) *Seja A uma álgebra de Banach. O espectro de Gelfand de A é o conjunto $\Sigma(A)$ de todos os homomorfismos² entre as álgebras A e $\mathbb{C}$, ou seja, o conjunto de todos os funcionais lineares não nulos $\omega : A \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem*

$$\omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \quad \forall x, y \in A$$

De início, vamos precisar a definição de ideal numa álgebra: se A é álgebra, um conjunto $J \subset A$ é dito ser um ideal se J for um subespaço de A tal que, para $j \in J$ qualquer, $xj \in J$ e $jx \in J$ para todo $x \in A$. Dizemos que um ideal em A é próprio se ele for diferente de A , e é fácil ver que um ideal é próprio se, e só se, ele não contém nenhum elemento inversível de A . Um ideal próprio é maximal se ele não está estritamente contido em nenhum outro ideal próprio, ou seja, M é ideal maximal se, para qualquer ideal J satisfazendo $M \subset J$, temos $J = A$ ou $J = M$. Se A é uma álgebra normada e J é um ideal em A , então $\overline{J}$ (fecho tomado na topologia da norma) é um ideal, e isso é consequência do fato de que a soma, o produto e a multiplicação por escalar são contínuas “em relação à norma”. Disso decorre que, se A for álgebra de Banach, então todo ideal maximal em A será fechado. De fato, se M é um ideal maximal, sabemos que ele não contém nenhum elemento inversível de A (já que ele é ideal próprio), e sabemos também que o conjunto dos elementos inversíveis de uma álgebra de Banach é aberto (uma prova desse bem conhecido resultado pode ser encontrada em [31]); assim sendo, $\overline{M}$ não contém nenhum

²Estamos assumindo que homomorfismos preservam a identidade, ou seja, que $\omega(1) = 1$.

elemento inversível de A e portanto $\overline{M}$ é ideal próprio, e a maximalidade de M implica que $\overline{M} = M$, sendo então M fechado.

Notemos que, por A ser álgebra de Banach, todo funcional linear em $\Sigma(A)$ é contínuo e, mais que isso, $\|\omega\| = 1 = \omega(1_A)$. De fato, sejam $\omega \in \Sigma(A)$ e $x \in A$; temos $\omega(x)1_A - x \in \ker(\omega)$ trivialmente, e como o núcleo de ω é ideal próprio, $\omega(x) \in \sigma(x)$ (pois um ideal é próprio se, e só se, ele não possui nenhum elemento inversível da álgebra). Mas sabemos que, numa álgebra de Banach, $r_A(x) \doteq \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(x)\} \leq \|x\|$ (esse também é um resultado bem conhecido que pode ser encontrado em [31]), logo $|\omega(x)| \leq \|x\| \forall x \in A$, então $\|\omega\| \leq 1$ (e ω é contínuo). Mais que isso, $\omega(1_A) = 1$, por $\omega : A \rightarrow \mathbb{C}$ ser homomorfismo, e então da definição de norma de operador temos $\|\omega\| \geq 1$; enfim, $\|\omega\| = 1 = \omega(1_A)$. É útil notar que isso implica que $\{\omega(x) \in \mathbb{C} | \omega \in \Sigma(A)\} \subset \sigma(x)$. Em resumo, quando A é álgebra de Banach, se A^* denota seu dual topológico, ou seja, o conjunto dos funcionais lineares contínuos (equivalentemente limitados) nele definidos temos

$$\Sigma(A) \subset A^*,$$

sendo que $\Sigma(A)$ está contido em $D_1(0) \doteq \{\phi \in A^* | \|\phi\| = 1\}$ e $\{\omega(x) \in \mathbb{C} | \omega \in \Sigma(A)\} \subset \sigma(x)$ para todo $x \in A$. No caso em que A é álgebra C^* unital, é imediato que $\Sigma(A) \subset S(A)$, onde $S(A)$ denota o conjunto dos estados de A (definição 117). Em particular, todo elemento de $\Sigma(A)$ é hermitiano. Mais que isso, quando A é C^* unital, que é o caso de interesse aqui, pode-se mostrar que $\omega \in \Sigma(A)$ se, e só se, ω é estado puro (definição 119). Essa constatação será muito importante na teoria quântica em topoi.

Vamos denotar por $\tau(A^*, A)$ a topologia fraca* em A^* (definição 108). Se $B \subset A^*$, $\tau(B, A)$ vai denotar a topologia induzida em B por $(A^*, \tau(A^*, A))$. Sabemos que $(A^*, \tau(A^*, A))$ é Hausdorff, e portanto $(\Sigma(A), \tau(\Sigma(A), A))$ também o é. Vimos acima que $\Sigma(A)$ está contido em $B_{A^*} \doteq \{\phi \in A^*; \|\phi\| \leq 1\}$. Pelo bem conhecido teorema de Banach-Alaoglu temos que B_{A^*} é um compacto em $(A^*, \tau(A^*, A))$; se provarmos que $\Sigma(A)$ é fechado em $(A^*, \tau(A^*, A))$, teremos que $(\Sigma(A), \tau(\Sigma(A), A))$ é um espaço topológico Hausdorff compacto.

Proposição 135 *Seja A álgebra de Banach. Então $(\Sigma(A), \tau(\Sigma(A), A))$ é um espaço topológico Hausdorff compacto.*

Prova. Pela discussão feita acima, só precisamos mostrar que $\Sigma(A)$ é fechado no espaço topológico $(A^*, \tau(A^*, A))$. Se $\phi \in A^*$, $\phi \in \Sigma(A)$ se, e só se, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \forall x, y \in A$ e

$\phi(1_A) = 1$. Tomemos $\phi \in \overline{\Sigma(A)}$. Para $\epsilon > 0$, temos que ϕ pertence ao aberto básico $B(\phi, 1_A, \epsilon)$, onde

$$B(\phi, 1_A, \epsilon) \doteq \{\omega \in A^*; |\phi(1_A) - \omega(1_A)| < \epsilon\},$$

e como $\phi \in \overline{\Sigma(A)}$, existe $\omega \in \Sigma(A)$ nesse aberto, logo $|1 - \phi(1_A)| < \epsilon$; isso vale para qualquer $\epsilon > 0$ se e só se $\phi(1_A) = 1$. Tomemos agora $x_1, x_2, x_3 \in A$, sendo que $x_3 \doteq x_1 x_2$; temos o aberto básico

$$B(\phi, x_1, x_2, x_3, \epsilon) \doteq \{\omega \in A^*; |\phi(x_i) - \omega(x_i)| < \epsilon (i \in \{1, 2, 3\})\}.$$

Novamente temos algum $\omega \in \Sigma(A)$ nesse aberto; para esse ω , escrevamos

$$\phi(x_1 x_2) - \omega(x_1) \omega(x_2) = \phi(x_1 x_2) - \omega(x_1 x_2) + (\omega(x_2) - \phi(x_2)) \omega(x_1) + (\omega(x_1) - \phi(x_1)) \phi(x_2).$$

Essa igualdade e o fato de que ω está no aberto nos dizem que

$$|\phi(x_1 x_2) - \phi(x_1) \phi(x_2)| \leq \epsilon(1 + \|\omega\| + |\phi(x_2)|),$$

sendo que essa desigualdade vale para $\epsilon > 0$ qualquer se e só se $\phi(x_1 x_2) = \phi(x_1) \phi(x_2)$. ■

Seja A uma álgebra de Banach. Para $a \in A$, podemos definir uma função $\hat{a} : \Sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ por $\hat{a}(\omega) \doteq \omega(a) \forall \omega \in \Sigma(A)$ - ou seja, estamos restringindo ao subconjunto $\Sigma(A)$ o domínio do elemento $\tilde{a} \in A^{**}$ canonicamente associado a a : $\hat{a} = \tilde{a}|_{\Sigma(A)}$. Definimos

Definição 136 (Transformação de Gelfand) *É o mapa $A \ni a \mapsto \hat{a} \in F(\Sigma(A), \mathbb{C})$, onde $F(\Sigma(A), \mathbb{C})$ é o conjunto das funções de $\Sigma(A)$ a $\mathbb{C}$ e $\hat{a}(\omega) \doteq \omega(a) \forall \omega \in \Sigma(A)$. Vamos denotar por G esse mapa.*

Da definição de topologia fraca* (definição 108) e da definição de topologia gerada por uma família de funções (definição 107), é fácil ver que a topologia gerada, em $\Sigma(A)$, pela família de funções $\hat{A} \doteq \{\hat{a} : \Sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}; a \in A\}$ é justamente a topologia $\tau(\Sigma(A), A^*)$. Sendo assim, $\hat{a}$ é uma função contínua de $(\Sigma(A), \tau(\Sigma(A), A^*))$ a $\mathbb{C}$. Definimos:

Definição 137 (Topologia de Gelfand) *É a topologia em $\Sigma(A)$ gerada pela família de funções $\hat{A} \doteq G(A)$ (ou seja, a imagem da transformação de Gelfand).*

A seguinte proposição segue do que foi discutido acima.

Proposição 138 *Munido da topologia de Gelfand, $\Sigma(A)$ é espaço topológico Hausdorff compacto. Mais que isso, a topologia de Gelfand coincide com a topologia $\tau(\Sigma(A), A)$, ou seja, com a topologia induzida em $\Sigma(A)$ por $(A^*, \tau(A^*, A))$ (o dual de A munido da topologia fraca*).*

Seja X um espaço topológico Hausdorff compacto. Sabemos que o conjunto das funções de X a $\mathbb{C}$ contínuas, munido da soma, multiplicação por escalar e multiplicação usuais de funções (ponto a ponto), da involução dada, ponto a ponto, pela conjugação complexa ($f^*(x) \doteq \overline{f(x)} \forall x \in X$) e da norma do supremo, é uma álgebra C^* unital, sendo que a unidade é a função “constante igual a um”. Denotamos por $C(X)$ essa álgebra. É elementar constatar que a transformação de Gelfand G é um homomorfismo que leva a álgebra A em $C(\Sigma(A))$ (onde $\Sigma(A)$ representa o espaço topológico dado pelo espectro de Gelfand munido da topologia de Gelfand), e portanto $\hat{A}$ é uma subálgebra unital de $C(\Sigma(A))$. Se A for C^* (unital), temos ainda que $\hat{A}$ é conjunto autoadjunto, sendo que $\hat{x}^* = \hat{x}^*$; isso equivale a dizer que G é um homomorfismo*. De fato, como todo elemento de $\Sigma(A)$ é estado, temos que $\hat{x}(\Sigma(A)) \subset \mathbb{R}$ para x autoadjunto; isso e a decomposição em partes real e imaginária de um elemento $x \in A$ ³ implicam que $\hat{x}^* = \hat{x}^*$ (ou seja, que G é homomorfismo*) e, em particular, que $\hat{A}$ é subconjunto autoadjunto de $C(\Sigma(A))$; como dito.

Um elemento $f \in C(X)$, onde X é espaço topológico Hausdorff compacto, é inversível se, e só se, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$; sendo assim, como o espectro é invariante por subálgebras (lema 116), $\lambda \in \sigma(\hat{x})$ se, e só se, $\lambda = \omega(x)$ para algum $\omega \in \Sigma(A)$ e então $\sigma(\hat{x}) = \{\omega(x) \in \mathbb{C} | \omega \in \Sigma(A)\} = \hat{x}(\Sigma(A))$. Vimos acima que $\{\omega(x) \in \mathbb{C} | \omega \in \Sigma(A)\} \subset \sigma(x)$, e portanto temos

$$\sigma(\hat{x}) = \hat{x}(\Sigma(A)) \subset \sigma(x).$$

Isso implica que, para $x \in A$ qualquer, $\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\omega(x)|; \omega \in \Sigma(A)\} \leq \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\} \leq r_A(x) \leq |x|$, e como $G : A \rightarrow C(\Sigma(A))$ é função linear, temos G contínua com $\|G\| \leq 1$.

³É um resultado primário da teoria de álgebras C^* que todo elemento a pode ser escrito de maneira única como uma soma $a = Re(a) + iIm(a)$, onde $Re(a), Im(a)$ são elementos autoadjuntos da álgebra (que chamamos, como sugere a notação, de partes real e imaginária de a) e i é a unidade imaginária.

Veremos que quando A é álgebra de Banach comutativa (unital), $\sigma(x) = \sigma(\hat{x})$ (item *c* do corolário 150) e que quando A é álgebra C^* unital comutativa, $G : A \rightarrow C(\Sigma(A))$ é um isomorfismo* isométrico, ou seja, G é isomorfismo* bijetivo com $\|G\| = 1$. Disso concluímos que, quando A é C^* unital comutativa, A e $C(\Sigma(A))$ são álgebras C^* isomorfas satisfazendo $\sigma(x) = \sigma(\hat{x})$ para todo $x \in A$, que é justamente o resultado que queremos. Vamos enunciar um teorema com esse resultado. A discussão que o sucede tem como objetivo provar a igualdade $\sigma(x) = \sigma(\hat{x})$, que é o resultado que falta para que o teorema esteja demonstrado.

Teorema 139 *Toda álgebra C^* unital comutativa é isomorfa (enquanto álgebra C^* , ou seja, através de um isomorfismo*) a $C(X)$ para algum espaço topológico Hausdorff compacto X . Uma maneira de se obter esse isomorfismo é tomar X como sendo o espectro de Gelfand da álgebra (definição 134) munido da topologia de Gelfand (137).*

A igualdade $\sigma(x) = \sigma(\hat{x})$ será obtida como consequência da relação biunívoca que existe, numa álgebra de Banach comutativa, entre ideais maximais e homomorfismos com codomínio em $\mathbb{C}$ (teorema 149). Como dissemos, provar essa relação é a função de boa parte da discussão abaixo.

Seja P um poset⁴. Uma cadeia em P é um subconjunto totalmente ordenado de P , ou seja, um conjunto $P' \subset P$ tal que, se $p, q \in P'$, $p \leq q$ ou $q \leq p$ necessariamente. Vamos denotar por $Ch(P)$ a coleção de todas as cadeias em P ($Ch(P) \subset \mathcal{P}(P)$). $(Ch(P), \subset)$ é um poset. Tomemos agora uma cadeia no poset $(Ch(P), \subset)$ - uma coleção totalmente ordenada $\mathcal{U}$ de cadeias em P , ou seja, se $C, D \in \mathcal{U}$ então $C, D \subset P$ são cadeias em P e, mais que isso, vale que $C \subset D$ ou $D \subset C$ necessariamente. Temos, claro, $\cup \mathcal{U} \subset P$. Mais que isso, $\cup \mathcal{U}$ é uma cadeia em P ; de fato, $x, y \in \cup \mathcal{U}$ se, e só se, existem $C, D \in \mathcal{U}$ tais que $x \in C, y \in D$, e sendo $\mathcal{U}$ uma cadeia em $(Ch(P), \subset)$ temos $C \subset D$ ou $D \subset C$, e supondo $C \subset D$ (sem perda de generalidade), temos $x, y \in D$. Sendo D uma cadeia em P temos $x \leq y$ ou $y \leq x$ necessariamente. Daí $\cup \mathcal{U} \in Ch(P)$, sendo que, trivialmente, $C \subset \cup \mathcal{U}$ para todo $C \in \mathcal{U}$. Em resumo, dada uma cadeia $\mathcal{U}$ em $(Ch(P), \subset)$, $\cup \mathcal{U} \in Ch(P)$ e $C \subset \cup \mathcal{U} \forall C \in \mathcal{U}$. Isso prova que toda cadeia em $(Ch(P), \subset)$ possui maior elemento e, pelo lema de Zorn, podemos concluir que $(Ch(P), \subset)$ possui máximo, ou seja, que existe $C \in Ch(P)$ tal que, para todo $D \in Ch(P)$, $D \supset C \Rightarrow C = D$.

⁴Usaremos aqui a terminologia do apêndice A.5.

Lema 140 (Zorn) *Seja P um poset não vazio tal que toda cadeia em P possua cota superior. Então P possui um elemento maximal.*

Diremos que cadeia C em P é uma **cadeia maximal** se ela for um elemento maximal do poset $(Ch(P), \subset)$, ou seja, se for uma cadeia (em P) tal que, dada uma cadeia $D \subset P$ satisfazendo $C \subset D$, valer necessariamente que $D = C$ - note que, no caso em que P é uma cadeia, então P é a única cadeia maximal em P . A discussão feita acima garante a existência de cadeias maximais, e isso prova a proposição seguinte

Proposição 141 (Princípio maximal de Hausdorff) *Em qualquer poset existe ao menos uma cadeia maximal.*

É importante notar que uma cadeia maximal não necessariamente contém todas as cadeias de P .

Proposição 142 *Seja A uma álgebra. Então todo ideal próprio de A está contido em um ideal maximal de A .*

Prova. Sejam J um ideal próprio em A e $P \subset \mathcal{P}(A)$ a coleção de todos os ideais próprios em A que contêm J ($P \neq \emptyset$ já que $J \in P$). $(P, \subset)$ é um poset e o princípio maximal de Hausdorff nos diz que existe uma cadeia maximal em $(P, \subset)$; sendo $\mathcal{J}$ essa cadeia, é fácil ver que $M \doteq \cup \mathcal{J}$ é um ideal em A e que esse ideal contém J . Temos $M \subsetneq A$ pois, de contrário, teríamos $1 \in M$, conseqüentemente $1 \in C$ para algum ideal $C \in M$, contrariando o fato de C ser ideal próprio, e portanto $M \in P$. Vamos mostrar que M é um elemento maximal de $(P, \subset)$, ou seja, que M é um ideal maximal contendo J . Tomando $J' \in P$ qualquer temos trivialmente que $\{J'\}$ é uma cadeia em $(P, \subset)$, e como $\mathcal{J}$ é cadeia maximal, $\{J'\} \subset \mathcal{J}$, o que equivale a $J' \in \mathcal{J}$, sendo que isso implica $J' \subset \cup \mathcal{J}$. Assim, $M \supset J' \forall J' \in P$ e portanto M é elemento maximal de $(P, \subset)$. ■

Agora vamos descrever brevemente o bem conhecido conjunto quociente de um grupo (abeliano) em relação a um subgrupo. Sejam $(A, +)$ um grupo abeliano (comutativo) e N um subgrupo de A . É fácil ver que o conjunto $E \doteq \{(x, y) \in A \times A | x - y \in N\}$ é uma relação de equivalência em A (escreveremos $x \sim y$ para afirmar que $(x, y) \in E$). De fato, $x \sim x$ pois N contém o elemento neutro e $x \sim y$ implica $y \sim x$ pois um elemento pertence a N

se, e só se, seu inverso também pertence; por fim, $x \sim y$ e $y \sim z$ se e só se $y - x \in N$ e $z - y \in N$, e daí $N \ni (y - x) + (z - y) = z - x$. Tomando as classes de equivalência $[x] \doteq \{y \in A | y \sim x\} = \{y \in A | x - y \in N\}$ temos o conjunto quociente

$$A/N \doteq \{[x]; x \in A\}.$$

É fácil ver que $[x] = x + N \doteq \{x + n | n \in N\}$. De fato, se $y \in x + N$, $y = x + n$ para algum $n \in N$, o que implica $x - y = -n \in N$, e daí $y \in [x]$; por outro lado, se $y \in [x]$ então $x - y \in N$, e daí a igualdade $y = y + (x - y)$ nos dá $y \in [x]$. Enfim,

$$[x] = x + N.$$

Temos $[x] = N$ e, e só se, $x \in N$, já que $[0] = N$ e que $[x] = [y]$ se, e só se, $x \sim y$ (e daí $[x] = [0] \Leftrightarrow x \in N$). É fácil ver que a função $+: A/N \times A/N \rightarrow A/N$ dada por $+[x], [y] \equiv [x] + [y] \doteq [x + y]$ está bem definida (basta provar que, quando $x \sim x'$ e $y \sim y'$, temos $[x + y] = [x' + y']$, ou seja, $x + y \sim x' + y'$). Daí, é fácil ver que as propriedades satisfeitas pela operação de A (associatividade e comutatividade) são satisfeitas pela operação de A/N , e então A/N , munido dessa operação, é um grupo, sendo $[0] = N$ seu elemento neutro e $-[x] = [-x]$, sendo que, claro, $-[x]$ denota o inverso de $[x]$ em A/N . A operação $A \ni x \xrightarrow{\pi} [x] \equiv \pi(x) \in A/N$ é um homomorfismo entre grupos. Vou alternar as notações $[x]$ e $x + N$ conforme for conveniente. Como bem sabido, os elementos de A/N são chamados de cosets.

Sejam Agora $(A, +, \cdot)$ um espaço vetorial e N um subespaço vetorial de A . $(A, +)$ é um grupo e $(N, +)$ é subgrupo, então temos bem definidos o conjunto quociente A/N e o grupo $(A/N, +)$ dados acima. Além disso, é fácil ver que a função $\cdot: \mathbb{C} \times A/N \rightarrow A/N$ dada por $\cdot(\lambda, [x]) \equiv \lambda[x] \doteq [\lambda x]$ está bem definida (novamente, basta provar que se $x \sim x'$, então $\lambda x \sim \lambda x'$, o que é trivial) e que $(A/N, +, \cdot)$ é um espaço vetorial, sendo $A \ni x \xrightarrow{\pi} [x] \equiv \pi(x) \in A/N$ uma operação linear. Aqui é intuitivo entender A/N como o conjuntos das translações do subespaço N ; notemos que $[x]$ é subespaço se e só se $x \in N$, ou seja, $[x] = N$. Se A é espaço

normado, (a norma de A vai ser denotada por $\|\cdot\|$), definamos em A/N , para todo $[x] \in A/N$,

$$\|[x]\|_{A/N} \doteq \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{n \in N} \|x + n\|.$$

Na “linguagem” de espaços métricos, $\|[x]\|_{A/N}$ é a distância, no espaço A , do conjunto $[x]$ até a origem de A . É fácil ver que a operação $A/N \ni [x] \mapsto \|[x]\|_{A/N} \in \mathbb{R}$ é uma seminorma em A/N (basta usar as propriedades da norma de A , do ínfimo de um conjunto de números reais e as propriedades do subespaço N - como por exemplo que $n \in N$ se e só se $\lambda n \in N$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Temos ainda o seguinte lema.

Lema 143 *Sejam A um espaço vetorial e N um subespaço de A . Então a função (que é uma seminorma em A/N) $\|\cdot\|_{A/N} : A/N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\|[x]\|_{A/N} \doteq \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{n \in N} \|x + n\|$$

é uma norma em A/N se, e só se, N é subconjunto fechado de A .

Prova.

($\Leftarrow$) Sejam N fechado e $x \in A$ satisfazendo $\|[x]\|_{A/N} = 0$. Temos $0 = \inf\{\|x + n\|; n \in N\}$, logo existe uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x + n_k\| = 0$, o que equivale a $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x + n_k$ em A , sendo que $\lim_{k \rightarrow \infty} x + n_k = x + \lim_{k \rightarrow \infty} n_k \in N$ (onde usamos a continuidade da soma e o fato de N ser fechado). Daí, $0 \in x + N = [x]$ e portanto $[x] = [0]$. Enfim, $\|[x]\|_{A/N} = 0 \Rightarrow [x] = [0]$ e portanto $\|\cdot\|_{A/N}$ é norma (pois já sabíamos que era seminorma)

($\Rightarrow$) Vamos mostrar que, se N não é fechado, $\|\cdot\|_{A/N}$ necessariamente não é norma. Seja N não fechado e tomemos $x \in \overline{N} \setminus N$. Por x estar no fecho de N existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N$ convergindo para x em A , o que equivale a $\|x - x_k\| \rightarrow 0$; por x não pertencer a N temos que $[x] \neq [0]$. Como N é subespaço, a sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde $n_k \doteq -x_k \forall k \in \mathbb{N}$, está contida em N , e $\|x + n_k\| \rightarrow 0$, o que implica $0 = \inf\{\|x + n\|; n \in N\} = \|[x]\|_{A/N}$. Em resumo, temos $[x] \neq [0]$ e $\|[x]\|_{A/N} = 0$, logo $\|\cdot\|_{A/N}$ não pode ser uma norma em A/N .

■

Proposição 144 *Sejam A espaço de Banach e $N \subset A$ subespaço fechado. Então A/N , munido da norma definida no lema 143, é um espaço de Banach.*

Agora seja A uma álgebra. Já sabemos que, se J é subespaço vetorial de A , A/J , munido das operações adequadas, é um espaço vetorial; queremos, porém, que seja também uma álgebra. Para isso, seja J um ideal em A (consequentemente um subespaço) e definamos $\circ : A/J \times A/J \rightarrow A/J$ por $\circ([x], [y]) \equiv [x][y] \doteq [xy]$. Essa função está bem definida. De fato, sejam $x, x', y, y' \in A$ satisfazendo $x \sim x'$ e $y \sim y'$; temos $x - x' \in J$, $y - y' \in J$, e como J é ideal, $(x' - x)y' \in J \ni x(y' - y)$, e então $J \ni (x' - x)y' + x(y' - y) = x'y' - xy$, ou seja, $xy \sim x'y'$. Da definição de “ $\circ$ ” temos, para qualquer $x \in A$, que $[x][1_A] = [x1_A] = [1_Ax] = [1_A][x] = [x]$ (ou seja, $[1_A]$ é a unidade do semigrupo $(A/J, \circ)$); temos também que $[x][0] = [0][x] = [0]$. É fácil ver que $(A/J, +, \circ)$ é uma álgebra; mais que isso, essa álgebra será comutativa quando A o for. Porém, sabemos que A/J é trivial ($A/J = \{[0]\}$) se, e só se, $[0] = [1]$, ou seja, $1 \in J$; assim, A/J é não trivial se, e só se, J é ideal próprio de A . Por outro lado, se $J = 0$, $[x] = \{x\} \forall x \in A$, logo A e A/J são trivialmente isomorfas. Por fim, $\pi : A \rightarrow A/J$, onde $\pi(x) \doteq [x] \forall x \in A$, é um homomorfismo entre álgebras.

Seja A álgebra normada e J um ideal próprio fechado em A ; para que o quociente A/J , munido das operações definidas acima e da norma $\|\cdot\|_{A/J}$, seja uma álgebra de Banach, falta mostrarmos que “ $\circ$ ” é submultiplicativa, ou seja, que $\|[x][y]\|_{A/J} \leq \| [x] \|_{A/J} \| [y] \|_{A/J}$ para quaisquer $x, y \in A$. Bom, $\pi : A \rightarrow A/J$ é um homomorfismo entre álgebras e, em particular, é uma função linear; assim, para que $\pi : A \rightarrow A/J$ seja contínuo é suficiente que ele seja limitado. Para $x \in A$ qualquer temos

$$\|\pi(x)\|_{A/J} = \inf\{\|x + j\|; j \in J\} \quad (\text{A.28})$$

$$\leq \|x\| \quad (\text{A.29})$$

(pois $0 \in J$) e portanto π é limitado, sendo que $\|\pi\| \leq 1$. Enfim, $\pi : A \rightarrow A/J$ é contínuo. Vamos agora mostrar que a composição definida em A/J é submultiplicativa em relação a $\|\cdot\|_{A/J}$, ou seja, que $\|\pi(x)\pi(y)\|_{A/J} \leq \|\pi(x)\|_{A/J} \|\pi(y)\|_{A/J}$. Bom, se $x', y' \in J$, temos $x + x' \in$

$\pi(x) = x + J, y + y' \in \pi(y) = y + J$, logo $(x + x')(y + y') \in \pi(xy)$ e então

$$\|\pi(xy)\|_{A/J} = \inf\{\|z\|; z \in \pi(xy)\} \quad (\text{A.30})$$

$$\leq \| (x + x')(y + y') \| \quad (\text{A.31})$$

$$\leq \| (x + x') \| \| (y + y') \|, \quad (\text{A.32})$$

sendo essa desigualdade válida para quaisquer $x', y' \in J$. Por outro lado, a definição de $\|\cdot\|_{A/J}$ nos diz que, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existem $j_x, j_y \in J$ tais que $\|x + j_x\| \leq \|\pi(x)\|_{A/J} + \epsilon$, $\|y + j_y\| \leq \|\pi(y)\|_{A/J} + \epsilon$, e tomando $x' = j_x, y' = j_y$, a desigualdade acima nos diz que

$$\|\pi(xy)\|_{A/J} \leq (\|\pi(x)\|_{A/J} + \epsilon)(\|\pi(y)\|_{A/J} + \epsilon) \quad (\text{A.33})$$

$$= \|\pi(x)\|_{A/J} \|\pi(y)\|_{A/J} + \epsilon(\|\pi(x)\|_{A/J} + \|\pi(y)\|_{A/J}) + \epsilon^2, \quad (\text{A.34})$$

sendo que essa desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$ se, e só se,

$$\|\pi(xy)\|_{A/J} \leq \|\pi(x)\|_{A/J} \|\pi(y)\|_{A/J}.$$

Por último, $\|[1_A]\|_{A/J} = 1$. De fato, $\|[1_A]\|_{A/J} \geq 1$ pois sabemos que $\|[1_A]\|_{A/J} = \|[1_A][1_A]\|_{A/J} \leq \|[1_A]\|_{A/J}^2$, o que implica $\|[1_A]\|_{A/J} \in \{0, 1\}$ e como J é ideal próprio e $\|\cdot\|_{A/J}$ é norma, $\|[1_A]\|_{A/J} = 1$). A proposição 144 nos diz ainda que A/J é uma álgebra de Banach quando A o for. Resumimos esses resultados no seguinte teorema.

Teorema 145 *Sejam A uma álgebra e J um subconjunto de A . Temos*

- (a) *J é um ideal próprio se, e só se, ele é o núcleo de um homomorfismo não nulo cujo domínio é A .*
- (b) *Se A é álgebra normada, J é ideal próprio fechado se, e só se, ele é núcleo de um homomorfismo contínuo não nulo (entre álgebras normadas) cujo domínio é A .*

Prova.

- (a) Como vimos, é trivial que o núcleo de um homomorfismo não nulo entre álgebras é um ideal próprio de A . Por outro lado, dado um ideal próprio J , temos o homomorfismo não nulo $\pi : A \rightarrow A/J$, sendo que $\ker(\pi) = \{x \in A | x \sim 0\} = J$.

(b) É simples e bem conhecido o fato de que o núcleo de um operador linear contínuo entre espaços vetoriais normados é fechado; em particular, o núcleo de um homomorfismo entre álgebras é fechado. Sabemos também que esse núcleo é um ideal próprio se esse homomorfismo é não nulo, então é verdade que o núcleo de um homomorfismo não nulo é um ideal próprio fechado. Por outro lado, vimos que quando J é ideal próprio fechado em A , A/J é álgebra normada não trivial (com a norma $\|\cdot\|_{A/J}$) e que $\pi : A \rightarrow A/J$ é homomorfismo contínuo, sendo $J = \ker(\pi)$; isso completa a prova.

■

Vamos obter a relação entre ideias maximais e homomorfismos com codomínio nos complexos.

Lema 146 (Gelfand-Mazur) *Seja A álgebra de Banach na qual todo elemento não nulo é inversível. Então A é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$ ($A \cong \mathbb{C}1_A$).*

Prova. Seja $x \in A$. Como A é álgebra de Banach, sabemos que $\sigma(x) \neq \emptyset$; como todo elemento não nulo de A é inversível, $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow \lambda 1_A = x$, e essa igualdade nos diz ainda que $\sigma(x)$ possui apenas um elemento. Por outro lado, se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda 1_A$ é não nulo e $\sigma(\lambda 1_A) = \lambda$. Em resumo, $A = \{\lambda 1_A | \lambda \in \mathbb{C}\}$. É trivial que o mapa $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda 1_A \in A$ é um homomorfismo (entre álgebras) bijetivo, e $\|\lambda 1_A\| = |\lambda| \|1_A\| = |\lambda|$ mostra que esse homomorfismo é isométrico. ■

Se A é espaço vetorial (complexo) e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ é funcional linear não nulo, sabemos que $A = \text{span}(a) \oplus \ker(f)$ para qualquer $a \in A \setminus \ker(f)$, sendo que a decomposição, única, de $x \in A$ nesses dois subespaços é $x = x_1 + x_0$, onde $x_1 \doteq \frac{f(x)}{f(a)}a \in \text{span}(a)$ e $x_0 \doteq x - \frac{f(x)}{f(a)}a \in \ker(f)$. Disso é fácil concluir que se $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ é outro funcional linear, então $\ker(g) \supset \ker(f)$ se, e só se, $g = \alpha f$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$, sendo que $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(g)$. Mais que isso, é fácil ver também que, se A é espaço vetorial e $A = B \oplus C$, com $\dim(B) = 1$ (ou seja, $B = \text{span}(b)$ para qualquer $b \in B \setminus \{0\}$), então se $D \supsetneq M$ é subespaço de A , $D = A$.

Do parágrafo acima concluímos que se A é álgebra e $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo, então o ideal $\ker(\phi)$ tem que ser maximal; de fato, temos $A = \text{span}(a) \oplus \ker(\phi)$, e se $J \supsetneq \ker(\phi)$ é ideal (em particular, subespaço), temos $J = A$.

Lema 147 *Seja A álgebra de Banach comutativa e M um ideal maximal em A . Então todo elemento não nulo de A/J é inversível.*

Prova. Como já argumentamos, A ser álgebra de Banach e M ser ideal maximal implicam que M é fechado; assim, a proposição 144 nos diz que A/M é álgebra de Banach (comutativa). Para $x \in A \setminus M$, definamos

$$J_x \doteq \bigcup_{a \in A} \pi(ax) = \{ax + m \mid m \in M\}.$$

J_x é um ideal em A e $M \subset J_x$ (pois $M = \pi(0x)$), e então $J_x = A$ (pela maximalidade de M). Assim $1_A \in J_x$, ou seja, existem $a \in A$ e $m \in M$ tais que $1_A = ax + m$; daí $\pi(1_A) = \pi(a)\pi(x) + \pi(m) = \pi(a)\pi(x) = \pi(x)\pi(a)$, e portanto $\pi(a) = \pi(x)^{-1}$. Assim, todo elemento não nulo de A/M é inversível. ■

O seguinte corolário é consequência do lema 147 e do lema de Gelfand-Mazur (lema 146).

Corolário 148 *Se A é álgebra de Banach comutativa e M é ideal maximal em A , então A/M é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$*

Teorema 149 *Sejam A álgebra de Banach comutativa e M um subconjunto de A . Então M é ideal maximal em A se, e só se, M é o núcleo de um elemento de $\Sigma(A)$; mais que isso, é único o elemento $\omega \in \Sigma(A)$ tal que $\ker(\omega) = M$.*

Prova. Já vimos que o núcleo de um homomorfismo é um ideal maximal. Por outro lado, se M for ideal maximal, temos o homomorfismo contínuo $\pi : A \rightarrow A/M$, cujo núcleo é M , e pelo corolário 148, um isomorfismo isométrico $\theta : A/M \rightarrow \mathbb{C}$, então $\gamma \doteq \theta \circ \pi$ é um homomorfismo de A a $\mathbb{C}$, sendo que $\gamma : A \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo e $\|\gamma\| = \|\theta \circ \pi\| \leq \|\theta\|\|\pi\| \leq \|\pi\| \leq 1$. Mais que isso, temos $\ker(\theta) = \pi(0)$ (pois θ é função linear injetora) e então $\ker(\gamma) = \ker(\pi)$. Enfim, isso prova que todo ideal é o núcleo de um elemento de $\Sigma(A)$. Por fim, vamos provar a unicidade enunciada. Como já argumentamos, se $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ são funcionais lineares (A é espaço vetorial), $\ker(f) = \ker(g) \Leftrightarrow g = \alpha f$ para algum $\alpha \neq 0$; assim, se $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma(A)$ satisfazem $\ker(\omega_1) = \Sigma(A) = \ker(\omega_2)$, temos $\omega = \alpha\omega_1$; porém, homomorfismos preservam a identidade ($\omega_1(1_A) = 1$) e isso implica que $\alpha = 1$. ■

Corolário 150 *As seguintes propriedades valem numa álgebra de Banach comutativa A .*

(a) $x \in A$ é inversível se, e só se, $\omega(x) \neq 0 \forall \omega \in \Sigma(A)$

(b) $x \in A$ é inversível se, e só se, x não pertence a nenhum ideal próprio de A .

$$(c) \sigma(x) = \{\omega(x) | \omega \in \Sigma(A)\} = \hat{x}(\Sigma(A)) = \sigma(\hat{x}).$$

Prova.

- (a) É imediato que se x é inversível então $\omega(x) \neq 0 \forall \omega \in \Sigma(A)$. Por outro lado, se x é não inversível, então o conjunto $j_x \doteq \{ax | a \in A\}$ é um ideal em A que contém x mas não contém 1_A , logo é um ideal próprio em A ao qual x pertence. Pela proposição 142, x pertence a um ideal maximal e, pelo teorema 149, $\omega(x) = 0$ para algum $\omega \in \Sigma(A)$.
- (b) É imediato que se x é inversível então x não pertence a nenhum ideal próprio; por outro lado, se x não pertence a nenhum ideal próprio, em particular x não pertence a nenhum ideal maximal, e o item (a) acima nos diz que x é inversível.
- (c) É consequência simples da definição do espectro de x , do item (a) acima, do fato de que $\omega(1_A) = 1$ e da igualdade $\sigma(\hat{x}) = \hat{x}(\Sigma(A))$.

■

Seja agora A álgebra C^* comutativa. Vamos mostrar que $G : A \rightarrow C(\Sigma(A))$ é isometria, o que implicará que G é injetor e que $\hat{A}$ é um subespaço fechado de $C(\Sigma(A))$. Assim, $\hat{A}$ será subálgebra C^* de $C(\Sigma(A))$; o teorema de Weierstrass nos dirá que G é sobrejetor e teremos, finalmente, que $\hat{A} = C(\Sigma(A))$, ou seja, que A e $C(\Sigma(A))$ são álgebras C^* isomorfas. Bom, para $x \in A$, $y \doteq xx^*$ é autoadjunto e sabemos que, por isso, $r_A(y) = \|y\|$ (o raio espectral; ver, por exemplo, [31]); usando que $\sigma(x) = \hat{x}(\Sigma(A)) \forall x \in A$ temos

$$\|\hat{y}\|_\infty = \sup\{|\omega(y)|; \omega \in \Sigma(A)\} = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(y)\} = r_A(y) = \|y\|$$

e então $\|x\|^2 = \|xx^*\| = \|\widehat{xx^*}\|_\infty = \|\hat{x}\hat{x}^*\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2$ e enfim $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$. Por fim, do teorema de Stone-Weierstrass concluímos que $\hat{A} = C(\Sigma(A))$.

Teorema 151 (Stone-Weierstrass) *Seja X espaço topológico Hausdorff. Toda subálgebra autoadjunta de $C(X)$ que contém a identidade de $C(X)$ e que separa pontos (se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe f pertencente a essa subálgebra tal que $f(x) \neq f(y)$) é densa em $C(X)$.*

A.3.4 Estados e representações

Os resultados desse apêndice serão importantes para a definição do “topos associado a um estado”.

Definição 152 (Representação de uma álgebra*) *Uma representação de uma álgebra* $\mathcal{A}$ é um par (H, π) onde H é espaço de Hilbert e $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é um homomorfismo.*

Quando π é injetor dizemos que a representação (H, π) é **fiel**. Quando o único elemento $x \in H$ que satisfaz $\pi(a)x = 0 \forall a \in \mathcal{A}$ é o elemento nulo dizemos que a representação é **não-degenerada**. A representação é dita ser **irredutível** quando não há um subespaço não trivial de H (ou seja, um subespaço X tal que $\{0\} \subsetneq X \subsetneq H$) que seja invariante por $\pi(\mathcal{A})$, ou seja, tal que $\pi(a)(X) \subset X$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Um **vetor cíclico** para uma representação (H, π) de $\mathcal{A}$ é um vetor $x \in H$ tal que $\pi(\mathcal{A})(x)$ é denso em H , onde $\pi(\mathcal{A})(x) \equiv \{\pi(a)x; a \in \mathcal{A}\}$, e uma **representação cíclica** de $\mathcal{A}$ é uma tripla (H, π, x) onde x é vetor normalizado e cíclico para a representação (H, π) .

Sejam $R_1 \equiv (H_1, \pi_1)$ e $R_2 \equiv (H_2, \pi_2)$ representações de $\mathcal{A}$. Dizemos que R_1 é equivalente a R_2 , e escrevemos $R_1 \sim R_2$, quando existe um operador unitário $u : H_1 \rightarrow H_2$ tal que, para todo $a \in \mathcal{A}$, $\pi_2(a) = u \circ \pi_1(a) \circ u^{-1}$. É claro que $R_1 \sim R_2$ implica $R_2 \sim R_1$ e portanto temos uma relação reflexiva (relação definida no conjunto das representações de $\mathcal{A}$, que estamos supondo ser não vazio). Como o operador identidade é unitário, segue que essa relação é reflexiva. Por fim, vamos mostrar que a relação é também transitiva. Sejam $R_i \equiv (H_i, \pi_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ relações, com $R_1 \sim R_2$ e $R_2 \sim R_3$; sejam $u_i : H_{i-1} \rightarrow H_i$ os operadores unitários tais que $\pi_{i-1}(a) = u_i^{-1} \pi_i(a) u_i$, onde $i \in \{2, 3\}$. A composição $u_3 \circ u_2$ é unitária (pois a composição de unitários é um operador unitário) e temos que $\pi_1(a) = u_2^{-1} \pi_2(a) u_2 = u_2^{-1} (u_3^{-1} \pi_3(a) u_3) u_2 = (u_2^{-1} u_3^{-1}) \pi_3(a) (u_3 u_2) = (u_3 u_2)^{-1} \pi_3(a) (u_3 u_2)$, e isso prova que $R_1 \sim R_3$. Sejam agora $R_1 \equiv (H_1, \pi_1, \Phi_1)$, $R_2 \equiv (H_2, \pi_2, \Phi_2)$ representações cíclicas de $\mathcal{A}$; dizemos que R_1 é equivalente a R_2 , e escrevemos $R_1 \sim R_2$, quando as representações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) são equivalentes no sentido acima e, mais que isso, $\Phi_2 = u(\Phi_1)$, onde $u : H_1 \rightarrow H_2$ é operador unitário tal que $\pi_2(a) = u \circ \pi_1(a) \circ u^{-1} \forall a \in \mathcal{A}$. É imediato que isso define uma relação de equivalência no conjunto das representações cíclicas de $\mathcal{A}$ (supondo que esse conjunto é não vazio). De maneira mais explícita definimos.

Definição 153 (Representações e representações cíclicas equivalentes) *Seja $\mathcal{A}$ álgebra*. Dizemos que duas representações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) são **representações equivalentes** de $\mathcal{A}$ se existir um operador unitário $u : H_1 \rightarrow H_2$ tal que, para todo $a \in \mathcal{A}$, $\pi_2(a) = u \circ \pi_1(a) \circ u^{-1}$. Duas representações cíclicas (H_1, π_1, Φ_1) , (H_2, π_2, Φ_2) são ditas ser **representações cíclicas equivalentes** quando (H_1, π_1) , (H_2, π_2) são representações equivalentes de $\mathcal{A}$ e, mais que isso, $\Phi_2 = u(\Phi_1)$, onde $u : H_1 \rightarrow H_2$ é operador unitário tal que $\pi_2(a) = u \circ \pi_1(a) \circ u^{-1} \forall a \in \mathcal{A}$.*

Vamos mostrar que uma álgebra C^* $\mathcal{A}$ sempre possui representações cíclicas e que, mais que isso, há uma relação biunívoca entre os estados de $\mathcal{A}$ e as classes de equivalência das representações cíclicas de $\mathcal{A}$ (aqui é importante a discussão que precede a definição 153).

Primeiro vamos mostrar que, quando $\mathcal{A}$ é álgebra C^* , o conjunto das representações cíclicas de $\mathcal{A}$ é não vazio (consequentemente o conjunto das representações é não vazio) e obter uma maneira canônica de associar uma representação cíclica (consequentemente uma classe de equivalência de representações cíclicas) a um estado. Para isso usaremos a chamada construção GNS.

Sejam $\mathcal{A}$ álgebra C^* e $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. podemos definir a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle a, b \rangle_\omega \doteq \omega(a^*b) \quad \forall (a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},$$

e é consequência simples da linearidade, positividade e Hermitianicidade de ω e da antilinealidade da involução que essa função é um semi-produto interno no espaço vetorial $\mathcal{A}$. Tomemos o conjunto $N_\omega \doteq \{a \in \mathcal{A}; \omega(a^*a) = 0\}$, ou seja, o “núcleo” da seminorma associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$. Esse conjunto é subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ porque $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ é semi-produto interno; do fato de ω , $*$ e do produto da álgebra serem operações contínuas segue facilmente que esse conjunto é fechado em $\mathcal{A}$. Lembremos que um **ideal à esquerda** (à direita) numa álgebra $\mathcal{A}$ é um subespaço vetorial $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que para todo $b \in \mathcal{B}$ temos $ab \in \mathcal{B} \forall a \in \mathcal{A}$ ($ba \in \mathcal{B} \forall a \in \mathcal{A}$). Vamos agora provar que N_ω é ideal à esquerda; tendo um ideal poderemos definir uma relação de equivalência e, tomando o quociente $\mathcal{A}$ em relação a essa relação de equivalência teremos um espaço vetorial no qual $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ determinará um produto interno. Se $b \in N_\omega$ temos que $\langle a, b \rangle_\omega = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$ já que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz ⁵, $|\langle a, b \rangle_\omega|^2 \leq \langle a, a \rangle_\omega \langle b, b \rangle_\omega = 0$; em particular,

⁵ Apesar de ser mais conhecida para normas, a desigualdade também é válida para semi-norma.

para $a \in \mathcal{A}$ qualquer vale que $\langle a * ab, b \rangle_\omega = 0$, e daí

$$0 = \langle a^* ab, b \rangle_\omega = \omega((a^* ab)^* b) = \omega((ab)^* ab) = \langle ab, ab \rangle_\omega.$$

Está provado então o seguinte lema

Lema 154 *Sejam $\mathcal{A}$ álgebra C^* e $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. O conjunto*

$$N_\omega \doteq \{a \in \mathcal{A}; \omega(a^* a) = 0\}$$

é um ideal à esquerda em $\mathcal{A}$ e, mais que isso, é fechado.

Pelo que já foi feito no apêndice A.3.3, o fato de N_ω ser subespaço implica que está bem definida a relação de equivalência $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in N_\omega$. Tomando o quociente $\mathcal{A}/N_\omega \doteq \{[a]; a \in \mathcal{A}\}$, onde $[a]$ é a classe de equivalência $[a] \doteq \{a' \in \mathcal{A}; a' \sim a\} = a + N_\omega \doteq \{a + b; b \in N_\omega\}$, podemos definir operações $+$: $\mathcal{A}/N_\omega \times \mathcal{A}/N_\omega \rightarrow \mathcal{A}/N_\omega$, $\cdot$: $\mathbb{C} \times \mathcal{A}/N_\omega \rightarrow \mathcal{A}/N_\omega$ por

$$[a] + [b] \doteq [a + b] \tag{A.35}$$

$$\alpha \cdot [a] \doteq [\alpha a] \tag{A.36}$$

e $\mathcal{A}/N_\omega$ munido dessas operações é um espaço vetorial cujo elemento neutro é $[0] = N_\omega$. Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 : \mathcal{A}/N_\omega \times \mathcal{A}/N_\omega \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle [a], [b] \rangle_0 \doteq \langle a, b \rangle_\omega = \omega(a^* b),$$

sendo que a linearidade do semi-produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ implica que a função está bem definida. De fato, se $a \sim a'$ e $b \sim b'$ temos

$$\langle a, b \rangle_\omega = \langle a - a' + a', b - b' + b' \rangle_\omega \tag{A.37}$$

$$= \langle a - a', b - b' \rangle_\omega + \langle a - a', b' \rangle_\omega + \langle a', b - b' \rangle_\omega + \langle a', b' \rangle_\omega \tag{A.38}$$

$$= \langle a', b' \rangle_\omega, \tag{A.39}$$

onde usamos que $a - a', b - b' \in N_\omega$ e que, quando $c \in N_\omega$, $\langle d, c \rangle_\omega = 0 \forall d \in \mathcal{A}$. Por construção, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ é semi-produto escalar em $\mathcal{A}$; mais que isso, $\langle [a], [a] \rangle_0 = 0$ se, e só se, $\omega(a^* a) = 0$, ou

seja, se e só se $[a] = [0] = N_\omega$, e disso concluímos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno em $\mathcal{A}/N_\omega$. A uma maneira canônica de se associar um espaço com produto interno a um espaço de Hilbert, que é noção de completamento: prova-se que para qualquer espaço com produto interno H existe um espaço de Hilbert $\tilde{H}$ com a propriedade de que H é isomorfo (enquanto espaço com produto interno) a um subespaço denso de $\tilde{H}$, sendo que o produto interno de H é a restrição do produto interno de $\tilde{H}$ (ver, por exemplo [45]). Definimos H_ω como um completamento de $\mathcal{A}/N_\omega$; denotamos por $\langle \cdot \rangle$ o produto interno de H_ω e por $\| \cdot \|$ a norma por ele induzida.

Vamos agora definir o homomorfismo* $\pi_\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\omega)$. Como $\mathcal{A}/N_\omega$ é denso em H_ω , sabemos, devido ao bem conhecido teorema BLT, que é suficiente que associamos a $a \in \mathcal{A}$ um operador linear limitado $\pi_\omega(a) : \mathcal{A}/N_\omega \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ - usamos a mesma notação para esse operador e para sua única extensão para H_ω . Bom, definimos $\pi_\omega(a) : \mathcal{A}/N_\omega \rightarrow H_\omega$ por $\pi_\omega(a)[b] \doteq [ab] \forall [b] \in \mathcal{A}/N_\omega$. Essa função está bem definida pois N_ω é ideal à esquerda. De fato, se $b \sim b'$ temos $[ab] = [ab'] \Leftrightarrow ab \sim ab' \sim a(b - b') \in N_\omega$; $b - b' \in N_\omega$, pois $b \sim b'$, e então, $a(b - b') \in N_\omega$ pois N_ω é ideal à esquerda. Da definição de soma e multiplicação por escalar em $\mathcal{A}/N_\omega$ segue que $\pi_\omega(a)$ é linear. Precisamos agora mostrar que $\pi_\omega(a)$ é operador limitado, ou seja, que existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\pi_\omega(a)[b]\| \leq K\|[b]\| \forall b \in \mathcal{A}$. Para qualquer $K \in \mathbb{R}^+$ temos

$$\|\pi_\omega(a)[b]\| \leq K\|[b]\| \Leftrightarrow \quad (\text{A.40})$$

$$\|\pi_\omega(a)[b]\|^2 \leq K^2\|[b]\|^2 \Leftrightarrow \quad (\text{A.41})$$

$$\|\pi_\omega(a)[b]\|^2 - K^2\|[b]\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \quad (\text{A.42})$$

$$\omega((ab)^*ab) - K^2\omega(b^*b) \leq 0 \Leftrightarrow \quad (\text{A.43})$$

$$\omega(b^*a^*ab - K^2b^*b) \leq 0 \Leftrightarrow \quad (\text{A.44})$$

$$\omega(b^*(a^*a - K^2\mathbb{1})b) \leq 0 \Leftrightarrow \quad (\text{A.45})$$

$$\omega(b^*(K^2\mathbb{1} - a^*a)b) \geq 0. \quad (\text{A.46})$$

A penúltima equivalência é útil pois sabemos que estados são funcionais positivos, ou seja, se $c \in \mathcal{A}^+$ então $\omega(c) \geq 0$, e então se provarmos que existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $b^*(K^2\mathbb{1} - a^*a)b \in \mathcal{A}^+$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, teremos que $\pi_\omega(a)$ é limitado e $\|\pi_\omega(a)\| \leq K$. Bom, sabemos que, para $d \in \mathcal{A}$ autoadjunto, $\|d\|\mathbb{1} - d$ é elemento positivo; a^*a é positivo, e portanto autoadjunto, então, se $K^2 \doteq \|a^*a\| (= \|a\|^2)$, $K^2\mathbb{1} - a^*a$ é positivo. Isso implica que $b^*(K^2\mathbb{1} - a^*a)b$ é positivo

(ver por exemplo [31]). Enfim, $\pi_\omega(a) : \mathcal{A}/N_\omega \rightarrow H_\omega$ é limitado com $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$, e pelo teorema BLT concluímos o mesmo para a extensão $\pi(a) : H_\omega \rightarrow H_\omega$. Por fim, vamos provar que $\pi_\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\omega)$ é homomorfismo*. Vamos primeiro provar que $\pi_\omega(a^*) = \pi_\omega(a)^*$. Para $b, c \in \mathcal{A}$ temos

$$\langle [b], \pi_\omega(a)[c] \rangle = \langle [b], [ac] \rangle \quad (\text{A.47})$$

$$= \omega(b^*ac) \quad (\text{A.48})$$

$$= \omega((a^*b)^*c) \quad (\text{A.49})$$

$$= \langle [a^*b], [c] \rangle \quad (\text{A.50})$$

$$= \langle \pi_\omega a^* \rangle [b], [c] \rangle \quad (\text{A.51})$$

e devido à continuidade do produto interno em relação aos seus dois argumentos e à continuidade de $\pi_\omega(a)$ e $\pi_\omega(a^*)$ podemos “estender” essa igualdade para todo par x, y em H_ω , ou seja, podemos escrever $\langle x, \pi_\omega(a)y \rangle = \langle \pi_\omega(a^*)x, y \rangle$, e portanto $\pi_\omega(a^*) = \pi_\omega(a)^*$. Para provar que π é homomorfismo é suficiente que provemos, devido ao teorema BLT, que provemos que $\pi_\omega(\alpha a + \beta b)[c] = \alpha \pi_\omega(a)[c] + \beta \pi_\omega(b)[c]$, $\pi_\omega(ab)[c] = \pi_\omega(a)\pi_\omega(b)[c]$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $a, b, c \in \mathcal{A}$ quaisquer, e isso é consequência imediata das definições de π_ω e $\mathcal{A}/N_\omega$. Até aqui já provamos que (H_ω, π_ω) é representação de $\mathcal{A}$; vamos provar que esse representação é cíclica. Seja $\Phi_\omega \doteq [1]$; temos que $\pi(a)\Phi_\omega = [a]$, e daí $\pi(\mathcal{A})(\Phi_\omega) = \mathcal{A}/N_\omega$ é denso em H_ω , onde $\pi(\mathcal{A})(\Phi_\omega) \equiv \{\pi(a)\Phi_\omega; a \in \mathcal{A}\}$. Temos também que $\|\Phi_\omega\| = \langle [1], [1] \rangle = \omega(1) = \|\omega\| = 1$. Assim, $\Phi_\omega \doteq [1]$ é vetor cíclico em (H_ω, π_ω) e $(H_\omega, \pi_\omega, \Phi_\omega)$ é representação cíclica de $\mathcal{A}$. Mais que isso, podemos escrever, para todo $a \in \mathcal{A}$,

$$\omega(a) = \omega(1a) = \langle [1], [a] \rangle = \langle \Phi_\omega, \pi_\omega(a)\Phi_\omega \rangle. \quad (\text{A.52})$$

Bom, conseguimos mostrar que existe uma representação cíclica de $\mathcal{A}$ associada ao estado ω no seguinte sentido: se ω é estado na álgebra C^* $\mathcal{A}$, existe uma representação cíclica (H, π, Φ) de $\mathcal{A}$ tal que

$$\omega(a) = \langle \Phi, \pi(a)\Phi \rangle \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Tal representação associada não necessariamente é única, ou seja, essa regra não necessariamente define uma função que leva estados em representações cíclicas, mas vamos ver que

ela define uma função que leva estados em classes de equivalência de representações cíclicas. Seja (H, π, Φ) representação cíclica de $\mathcal{A}$ satisfazendo a propriedade acima e seja (H', π', Φ') representação cíclica de $\mathcal{A}$ equivalente a ela, sendo $u : H' \rightarrow H$ o unitário da definição 153. Temos

$$\omega(a) = \langle \Phi, \pi(a)\Phi \rangle \quad (\text{A.53})$$

$$= \langle u(\Phi'), \pi(a)u(\Phi') \rangle \quad (\text{A.54})$$

$$= \langle \Phi', (u^{-1}\pi(a)u)(\Phi') \rangle \quad (\text{A.55})$$

$$= \langle \Phi', \pi'(a)\Phi' \rangle, \quad (\text{A.56})$$

e está prova o seguinte teorema.

Teorema 155 *Se $\mathcal{A}$ é álgebra C^* e ω é estado, existe uma representação cíclica $(H_\omega, \pi_\omega, \Phi_\omega)$ de $\mathcal{A}$ tal que*

$$\omega(a) = \langle \Phi_\omega, \pi_\omega(a)\Phi_\omega \rangle$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Mais que isso, se (H, π, Φ) é representação cíclica equivalente a $(H_\omega, \pi_\omega, \Phi_\omega)$ então também vale que

$$\omega(a) = \langle \Phi, \pi(a)\Phi \rangle.$$

Portanto, denotando por $C_{\mathcal{A}}$ o conjunto das classes de equivalência das representações cíclicas de $\mathcal{A}$ e por $S(\mathcal{A})$ o conjunto dos estados em $\mathcal{A}$ temos bem definida uma função $F_{\mathcal{A}} : S(\mathcal{A}) \rightarrow C_{\mathcal{A}}$ que associa ao estado ω a classe de equivalência $[(H, \pi, \Phi)]$, onde a representação cíclica (H, π, Φ) é tal que $\omega(a) = \langle \Phi, \pi(a)\Phi \rangle \forall a \in \mathcal{A}$.

É fácil ver que a função $F_{\mathcal{A}}$ é sobrejetora. De fato, se (H, π, Φ) é representação cíclica da álgebra C^* $\mathcal{A}$, a função $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\omega(a) \doteq \langle \Phi, \pi(a)\Phi \rangle$$

é trivialmente um estado em $\mathcal{A}$, e portanto $F_{\mathcal{A}}(\omega) = [(H, \pi, \Phi)]$, o que nos diz que a função é sobrejetora. Do seguinte lema concluímos que a função é também injetora.

Lema 156 *Duas representações cíclicas (H_1, π_1, Φ_1) , (H_2, π_2, Φ_2) de uma álgebra C^* $\mathcal{A}$ são*

equivalentes se, e só se, os estados $\omega_1, \omega_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ dados por

$$\omega_i(a) \doteq \langle \Phi_i, \pi_i(a)\Phi_i \rangle \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

$i \in \{1, 2\}$, são iguais.

Prova.

Já provamos que se as representações são equivalentes então $\Phi_1 = \Phi_2$. Suponhamos então que $\Phi_1 \neq \Phi_2$. Vamos definir $\tilde{u} : \pi_1(\mathcal{A})\Phi_1 \rightarrow \pi_2(\mathcal{A})\Phi_2$ e depois estendê-lo para uma função $H_1 \rightarrow H_2$. Uma maneira canônica de se associar os elementos de $\pi_1(\mathcal{A})\Phi_1$ a elementos de $\pi_2(\mathcal{A})\Phi_2$ é o mapa $\pi_1(\mathcal{A})\Phi_1 \ni \pi_1(a)\Phi_1 \mapsto \pi_2(a)\Phi_2 \in \pi_2(\mathcal{A})\Phi_2$, que está bem definido pois

$$\|\pi_2(a)\Phi_2 - \pi_2(b)\Phi_2\|^2 = \|\pi_2(a - b)\Phi_2\|^2 \quad (\text{A.57})$$

$$= \langle \pi_2(a - b)\Phi_2, \pi_2(a - b)\Phi_2 \rangle \quad (\text{A.58})$$

$$= \langle \Phi_2, \pi_2((a - b)^*(a - b))\Phi_2 \rangle \quad (\text{A.59})$$

$$= \langle \Phi_1, \pi_1((a - b)^*(a - b))\Phi_1 \rangle \quad (\text{A.60})$$

$$= \|\pi_1(a - b)\Phi_1\|^2 \quad (\text{A.61})$$

$$= \|\pi_1(a)\Phi_1 - \pi_1(b)\Phi_1\|^2, \quad (\text{A.62})$$

onde usamos a igualdade $\omega_1 = \omega_2$ e o fato de π_2 ser homomorfismo. Isso nos diz que $\tilde{u} : \pi_1(\mathcal{A})\Phi_1 \rightarrow \pi_2(\mathcal{A})\Phi_2$, $\tilde{u}(\pi_1(a)\Phi_1) \doteq \pi_2(a)\Phi_2$, está bem definido (pois $\pi_1(a)\Phi_1 = \pi_1(b)\Phi_1$ implica $\pi_2(a)\Phi_2 = \pi_2(b)\Phi_2$) e, mais que isso, que essa função é uma isometria (portanto injetora); é claro que a inversa de $\tilde{u}$ é o mapa $\pi_2(\mathcal{A})\Phi_2 \ni \pi_2(a)\Phi_2 \mapsto \pi_1(a)\Phi_1 \in \pi_1(\mathcal{A})\Phi_1$. É importante e trivial notar que $\pi_i(\mathcal{A})\Phi_i$ é subespaço vetorial de H_i . A função $\tilde{u} : \pi_1(\mathcal{A})\Phi_1 \rightarrow \pi_2(\mathcal{A})\Phi_2$ é linear por construção (pois π_2 é homomorfismo). Pelo teorema BLT temos a extensão $u : H_1 \rightarrow H_2$ (note que para que possamos usar o teorema precisamos que o codomínio de $\tilde{u}$ seja completo, por isso temos que tomar H_2). Da continuidade da norma decorre que a extensão u também é uma isometria (portanto injetora) e sendo a imagem de $\tilde{u}$ densa em H_2 , u é sobrejetora, logo u é inversível. Vamos, por fim, mostrar que u é unitário. Temos, para

$a, b \in \mathcal{A}$ quaisquer,

$$\langle \pi_2(b)\Phi_2, u(\pi_1(a)\Phi_1) \rangle = \langle \pi_2(b)\Phi_2, \pi_2(a)\Phi_2 \rangle \quad (\text{A.63})$$

$$= \langle \Phi_2, \pi_2(b^*a)\Phi_2 \rangle \quad (\text{A.64})$$

$$= \langle \Phi_1, \pi_1(b^*a)\Phi_1 \rangle \quad (\text{A.65})$$

$$= \langle u^{-1}(\pi_2(b)\Phi_2), \pi_1(a)\Phi_1 \rangle. \quad (\text{A.66})$$

Da continuidade do produto interno (em relação aos seus dois argumentos), da continuidade de $\pi_1(a)$, $\pi_2(b)$ e do fato de $\pi_i(\mathcal{A})\Phi_i$ ser denso em H_i decorre que $\langle y, u(x) \rangle = \langle u^{-1}(y), x \rangle$ para todo par $(x, y) \in H_1 \times H_2$, e daí $u^{-1} = u^*$. Enfim, $u : H_1 \rightarrow H_2$ é unitário. Para provar que $\pi_1(a) = u^{-1} \circ \pi_2(a) \circ u$ escrevemos

$$(u^{-1} \circ \pi_2(a) \circ u)\pi_1(b)\Phi_1 = u^{-1} \circ \pi_2(a)(\pi_2(b)\Phi_2) \quad (\text{A.67})$$

$$= u^{-1}(\pi_2(ab)\Phi_2) \quad (\text{A.68})$$

$$= \pi_1(ab)\Phi_1 \quad (\text{A.69})$$

$$= \pi_1(a)(\pi_1(b)\Phi_1) \quad (\text{A.70})$$

e a igualdade decorre do fato de $\pi_1(\mathcal{A})\Phi_1$ ser denso - e, claro, do teorema BLT. Por fim, temos $u(\Phi_1) = u(\pi_1(1)\Phi_1) = \pi_2(1)\Phi_2 = \Phi_2$, e isso completa a prova. ■

Se ω é estado na álgebra C^* $\mathcal{A}$ denotaremos por $(H_\omega, \pi_\omega, \Phi_\omega)$ uma representação cíclica qualquer de $F_{\mathcal{A}}(\omega)$; chamaremos a representação obtida através da construção GNS de de representação cíclica canônica associada a ω .

Por fim, seja (H, π) representação da álgebra C^* $\mathcal{A}$ e $\tau_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ automorfismo. O mapa $\pi \circ \tau_t : \mathcal{A} \rightarrow H$ é homomorfismo (por ser a composição de homomorfismos*), e portanto $(H, \pi \circ \tau_t)$ é representação de $\mathcal{A}$. Se (H, π, Φ) é representação cíclica de $\mathcal{A}$, $(H, \pi \circ \tau_t, \Phi)$ também é representação cíclica, já que $(\pi \circ \tau_t)(\mathcal{A})\Phi = \pi(\mathcal{A})\Phi$ pois τ_t é isomorfismo*. É imediato que $(H, \pi \circ \tau_t, \Phi) = F_{\mathcal{A}}(\omega \circ \tau_t)$. Concluimos então que se ω é estado e $(H_\omega, \pi_\omega, \Phi_\omega)$ é representação cíclica associada a ele (através de $F_{\mathcal{A}}$), $(H_\omega, \pi_\omega, \Phi_\omega)$ e $(HH_\omega, \pi_\omega \circ \tau_t, \Phi_\omega)$ são representações cíclicas equivalentes se, e só se, $\omega = \omega \circ \tau_t$, ou seja, se e só se o estado é invariante em relação ao automorfismo τ_t .

A.4 Contextos clássicos

Seja H espaço de Hilbert de dimensão finita. Como sempre, $\mathcal{B}(H)$ denota o conjunto dos operadores $H \rightarrow H$ lineares e limitados, que forma uma álgebra C^* (ver apêndice A.3). Como estamos em um espaço de dimensão finita, qualquer operador linear $H \rightarrow H$ é limitado. Se $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}(H)$ são autoadjuntos e comutam entre si, denotamos por $C^*(a_1, \dots, a_n)$ a menor subálgebra C^* unital de $\mathcal{B}(H)$ que contém esse conjunto de operadores; essa álgebra é comutativa e é determinada pelo cálculo funcional, ou seja, em certo sentido todo elemento de $C^*(a_1, \dots, a_n)$ pode ser escrito como uma função de $a_1, \dots, a_n$. Veremos nesse apêndice que todo contexto de $\mathcal{B}(H)$, quando a dimensão de H é finita, é do tipo $C^*(a_1, \dots, a_n)$ para um conjunto finito de operadores autoadjuntos $a_1, \dots, a_n$ que comutam entre si, e portanto esse é o caso mais geral de contexto. Como discutido na introdução, há uma semelhança precisa entre álgebras C^* comutativas e a descrição clássica que fazemos de sistemas mecânicos. Com efeito, a transformação de Gelfand (teorema 139) nos diz que

$$C(\Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n))) \cong C^*(a_1, \dots, a_n),$$

ou seja, que há uma bijeção entre a álgebra comutativa $C^*(a_1, \dots, a_n)$ e as funções contínuas definidas no seu espectro de Gelfand, cujos elementos sabemos ser os estados puros da álgebra. Podemos então entender o contexto como o conjunto das funções contínuas definidas num conjunto de estados puros (conjunto que chamamos de espaço de estados do contexto); se em $\Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n))$ tomarmos a σ -álgebra de Borel, podemos afirmar que são funções mensuráveis. Na discussão que segue queremos mostrar que a semelhança entre contextos e sistema mecânicos clássicos vai além disso. Com efeito, mostraremos que há uma relação biunívoca entre estados de $C^*(a_1, \dots, a_n)$ (definição 117) e medidas de probabilidade definidas no espectro de Gelfand - isso é, na verdade, uma bem conhecida versão do teorema espectral. Em resumo, mostraremos que os elementos do contexto podem ser entendidos como funções mensuráveis definidas num certo espaço de estados (que é um espaço de probabilidade) e que seus estados podem ser entendidos como medidas de probabilidade nesse espaço; é precisamente desse modo que descrevemos sistemas mecânicos clássicos - estados puros são as medidas de Dirac e estados não puros (como por exemplo o estado de Gibbs) são representados por medidas que não as medidas de Dirac. Também deixaremos explícita a relação entre estados puros de $C^*(a_1, \dots, a_n)$

e os elementos de $\sigma(a_1) \times \dots \times \sigma(a_n)$ - elementos que, na interpretação ortodoxa da mecânica quântica, entendemos como medições simultâneas dos observáveis $a_1, \dots, a_n$. Essa comparação ajuda a esclarecer que tal espaço de estados - e consequentemente tal comparação com sistemas clássicos - não é uma abstração cujo apelo é puramente formal. Vale ainda comentar que um contexto do tipo $C^*(a_1, \dots, a_n)$ se assemelha ao caso clássico de maneira especial. Fixamos certo conjunto finitos de observáveis compatíveis e consideramos a coleção dos observáveis que podem ser entendidos como funções desses. Na mecânica clássica fazemos exatamente isso: fixamos os observáveis posição e momento e consideramos apenas os observáveis que podem ser entendidos como funções desses. Não podemos fazer o mesmo com $\mathcal{B}(H)$; esse álgebra é necessariamente não comutativa quando a dimensão de H é diferente de 1 e portanto ela não pode ser gerada por uma coleção finita de observáveis que comutam dois a dois, como no caso clássico ou no caso contextual. Por fim, o valor de um observável na mecânica clássica é determinada por uma valoração dos observáveis posição e momento pois essas valorações são os estados puros do sistema; no contexto $C^*(a_1, \dots, a_n)$ mostraremos que todo estado puro pode ser entendido como um elemento de $\sigma(a_1) \times \sigma(a_n)$ e disso decorrerá que o valor de um observável do contexto será determinado por uma valoração dos observáveis $a_1, \dots, a_n$.

Como já dissemos, vamos restringir nossa discussão ao caso em que o sistema é representado por um espaço de Hilbert de dimensão finita. Uma boa referência para o caso geral é [16], a mesma que utilizamos para o que fizemos aqui. Bom, sejam H um espaço de Hilbert de dimensão finita (cuja dimensão denotaremos por N) e $a \in \mathcal{B}(H)$ autoadjunto. O cálculo funcional contínuo e a transformação de Gelfand nos dizem que

$$C(\sigma(a)) \cong C^*(a) \cong C(\Sigma(C^*(a))),$$

e é fácil que $\sigma(a) \cong \Sigma(C^*(a))$ (isso será provado adiante). Vamos primeiro generalizar esse resultado para uma coleção finita $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}(H)$ de elementos autoadjuntos que comutam dois a dois, ou seja, vamos mostrar que

$$C(\sigma(a_1, \dots, a_n)) \cong C^{(a_1, \dots, a_n)} \cong C(\Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n))), \quad (\text{A.71})$$

$$\sigma(a_1, \dots, a_n) \cong \Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n)) \quad (\text{A.72})$$

onde $\sigma(a_1, \dots, a_n)$ é o espectro conjunto da família $\{a_1, \dots, a_n\}$ e será definido na discussão que se segue. Após isso provaremos a bijeção entre estados em $C^*(a_1, \dots, a_n)$ e medidas de probabilidade em $\Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n))$ enunciada.⁶

Seja $\sigma(\underline{a})' \equiv \sigma(a_1) \times \dots \times \sigma(a_n)$; vamos escrever $\underline{\lambda} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ para $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \sigma(\underline{a})'$. Pelo teorema espectral em dimensão finita (teorema 130)

$$a_k = \sum_{\lambda_k \in \sigma(a_k)} \lambda_k e_{\lambda_k}^{(k)}$$

onde $e_{\lambda_k}^{(k)} \equiv e_k^{(a_k)}$. Como trata-se de um conjunto de operadores autoadjuntos que comutam dois a dois é verdade que $[e(i)_{\lambda_i}, e(j)_{\lambda_j}] = 0$ para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $\lambda_i \in \sigma(a_i)$, $\lambda_j \in \sigma(a_j)$. Fixada uma n -upla $\underline{\lambda} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ no conjunto $\sigma(a_1) \times \dots \times \sigma(a_n)$ definimos o operador

$$e_{\underline{\lambda}} \doteq \prod_{k=1}^n e_{\lambda_k}^{(k)}$$

e fácil ver que $e_{\underline{\lambda}}$ é um projetor - basta usar a comutatividade e o fato de $e_{\lambda_k}^{(k)}$ ser projetor. Mais que isso, da comutatividade dos elementos do conjunto e da distributividade do produto em relação à soma em $\mathcal{B}(H)$ decorre que $\sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(a_1) \times \dots \times \sigma(a_n)} e_{\underline{\lambda}} = 1$. O espectro conjunto citado acima é definido por $\sigma(\underline{a}) \equiv \sigma(a_1, \dots, a_n) \doteq \{\underline{\lambda} \in \sigma(a_1) \times \dots \times \sigma(a_n); e_{\underline{\lambda}} \neq 0\}$. Temos a família $\{e_{\underline{\lambda}}; \underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})\}$ de projetores não nulos que comutam dois a dois e que satisfazem

$$\sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})} e_{\underline{\lambda}} = 1 \quad (\text{A.73})$$

$$e_{\underline{\lambda}} e_{\underline{\mu}} = \delta_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}} e_{\underline{\lambda}} \text{ para } \underline{\lambda}, \underline{\mu} \in \sigma(\underline{a}), \quad (\text{A.74})$$

sendo que a última igualdade decorre da propriedade análoga que sabemos ser válida para $\{e_{\lambda_k}^{(k)}; \lambda_k \in \sigma(a_k)\}$ (e, claro, da comutatividade). Bom, para um conjunto de números distintos dois a dois $\{\alpha_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{R}; \underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})\}$ temos o operador autoadjunto $\tilde{a} \doteq \sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})} \alpha_{\underline{\lambda}} e_{\underline{\lambda}}$, sendo

⁶O espectro conjunto $\sigma(\underline{a})$ que definiremos é um subconjunto de $\sigma(a_1) \times \dots \times \sigma(a_n)$ e, portanto, é um conjunto finito. Podemos então tomar como σ -álgebra o conjunto das partes de $\sigma(\underline{a})$. A finitude do conjunto implica que toda função complexa nele definida é tanto contínua (na topologia usual) quanto mensurável (quando a σ -álgebra é o conjunto das partes).

que, na notação do teorema espectral, $e_{\underline{\lambda}} = e_{\alpha_{\underline{\lambda}}}^{(\tilde{a})}$. Por construção temos que

$$\sigma(\tilde{a}) \cong \sigma(\underline{a})$$

(pois $\sigma(\tilde{a}) = \{\alpha_{\underline{\lambda}}; \underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})\}$ graças ao teorema espectral), e disso é imediato que o isomorfismo $C(\sigma(\tilde{a})) \cong C(\sigma(\underline{a}))$ é válido. Sendo $C^*(a)$ dada pelo cálculo funcional temos $C(\sigma(\tilde{a})) \cong C^*(\tilde{a})$. Vamos agora mostrar que $C^*(a_1, \dots, a_n) = C^*(\tilde{a})$, e disso concluiremos que $C(\sigma(\underline{a})) \cong C^*(a_1, \dots, a_n)$, como queríamos. Temos $C^*(\tilde{a}) \subset C^*((a_1, \dots, a_n))$ trivialmente já que $e_{\underline{\lambda}} \in C^*((a_1, \dots, a_n))$. Por outro lado, notando que

$$e_{\lambda_k}^{(k)} = \sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a}); (\underline{\lambda})_k = \lambda_k} e_{\underline{\lambda}}, \quad (\text{A.75})$$

igualdade decorrente da distributividade do produto em relação à soma e da igualdade

$$\sum_{\lambda_i \in \sigma(a_i)} e_{\lambda_i}^{(i)} = 1,$$

temos $a_i \in C^*(\tilde{a})$; sendo $C^*(a_1, \dots, a_n)$ a menor subálgebra C^* de $\mathcal{B}(H)$ que contém o conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ concluímos que $C^*(a_1, \dots, a_n) \subset C^*(\tilde{a})$ e, enfim, temos $C^*(a_1, \dots, a_n) = C^*(\tilde{a})$. Pelo cálculo funcional sabemos que todo elemento dessa álgebra é do tipo $f(\tilde{a}) = \sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})} f(\alpha_{\underline{\lambda}}) e_{\underline{\lambda}}$, onde $f : \sigma(\tilde{a}) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, e sendo $\sigma(\tilde{a})$ finito, qualquer função complexa nele definido é contínua. Daí $C^*(\tilde{a}) = \text{span}(\{e_{\underline{\lambda}}; \underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})\})$ e assim

$$C^*(a_1, \dots, a_n) = \text{span}(\{e_{\underline{\lambda}}; \underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})\}) \quad (\text{A.76})$$

$$= \text{span}(\{e_{\lambda_1}^{(1)} \dots e_{\lambda_n}^{(n)}; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \sigma(\underline{a})\}). \quad (\text{A.77})$$

Pelo que já argumentamos segue disso que $C(\sigma(\underline{a})) \cong C^*(a_1, \dots, a_n)$. É útil, porém, obter esse isomorfismo explicitamente: há uma imediata relação biunívoca entre a coleção de todas as funções complexas definidas num conjunto finito de n elementos e n -uplas complexas, e assim $C(\sigma(\underline{a})) \cong \mathbb{C}^{|\sigma(\underline{a})|} \cong C^*(a_1, \dots, a_n)$, onde $|\sigma(\underline{a})|$ é o número de elementos do conjunto $\sigma(\underline{a})$ e sendo o último isomorfismo válido pois $\{e_{\underline{\lambda}}; \underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})\}$ é base de $C^*(a_1, \dots, a_n)$ (enquanto espaço vetorial). Por fim, a nível interpretativo é importante notar que uma função $f : \sigma(\underline{a}) \rightarrow \mathbb{C}$ tem imagem contida em $\mathbb{R}$ se, e só se, elemento de $C^*(a_1, \dots, a_n)$ a ele associado é autoadjunto

- isso decorre facilmente do teorema espectral.

Vamos agora mostrar que $\Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n)) \cong \sigma(a_1, \dots, a_n)$. Tomemos para isso $\omega \in \Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n))$. Bom, $\omega(e_{\underline{\lambda}}) \in \sigma(e_{\underline{\lambda}}) = \{0, 1\}$ (isso está discutido no apêndice A.3.3); como $\sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})} e_{\underline{\lambda}} = 1$, $\omega(e_{\underline{\lambda}}) = 1$ para um, e somente um, $\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})$, sendo que, de resto, vale zero. Seja $\omega^{\underline{\lambda}}$ o único estado puro de $C^*(a_1, \dots, a_n)$ tal que $e^{\underline{\lambda}}(e_{\underline{\lambda}'}) = \delta_{\underline{\lambda}', \underline{\lambda}}$; temos de imediato uma bijeção $\sigma(\underline{a}) \ni \underline{\lambda} \mapsto \omega^{\underline{\lambda}} \in \Sigma(C^*(a_1, \dots, a_n))$.

Finalmente mostremos que

$$E(C^*(a_1, \dots, a_n)) \cong M(\sigma(a_1, \dots, a_n)),$$

onde $E(C^*(a_1, \dots, a_n))$ denota o conjunto dos estados da álgebra $C^*(a_1, \dots, a_n)$ e onde denotamos por $M(\sigma(a_1, \dots, a_n))$ o conjunto das medidas de probabilidade definidas em $\sigma(a_1, \dots, a_n) \equiv \sigma(\underline{a})$ - ambos são conjuntos convexos quando munidos da soma usual de funções, como bem se sabe. Bom, se $\rho : C^*(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbb{C}$ é estado podemos definir $\rho^p : \sigma(\underline{a}) \rightarrow [0, 1]$ por $\rho^p(\underline{\lambda}) \doteq \rho(e_{\underline{\lambda}}) = \rho(e_{\lambda_1}^{(1)} \dots e_{\lambda_n}^{(n)})$, e sabemos que isso define uma medida de probabilidade⁷. Por outro lado, se $p : \sigma(\underline{a}) \rightarrow [0, 1]$ define medida de probabilidade, ou seja, se $\sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})} p(\underline{\lambda}) = 1$, podemos definir $\rho^p : C^*(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbb{C}$ linear por $\rho^p(e_{\underline{\lambda}}) \doteq p(\underline{\lambda})$ - como queremos uma função linear, é suficiente que estabeleçamos sua definição na base do seu domínio. A positividade de ρ^p decorre do teorema espectral: como $C^*(a_1, \dots, a_n) = C^*(\tilde{a})$, um elemento positivo nessa álgebra é do tipo $b = \sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})} \alpha_{\underline{\lambda}} e_{\underline{\lambda}}$ com $\alpha_{\underline{\lambda}} \geq 0$, daí $\rho^p(b) = \sum_{\underline{\lambda} \in \sigma(\underline{a})} \alpha_{\underline{\lambda}} \rho^p(e_{\underline{\lambda}}) \geq 0$. É trivial que $\rho^p(1) = 1$ e concluímos então que ρ^p é estado em $C^*(a_1, \dots, a_n)$. Por fim, é trivial provar que a relação é de fato biunívoca.

Acima provamos, *en passant*, que quando a dimensão do espaço é finita a álgebra C^* gerada por uma coleção finita de operadores autoadjuntos que comutam entre si é uma álgebra do tipo $C^*(a)$, ou seja, é a álgebra unital gerada por um operador autoadjunto a - que, em particular, é comutativa. Vamos mostrar que toda subálgebra C^* unital e comutativa de $\mathcal{B}(H)$ é gerada por uma coleção finita de operadores autoadjuntos que comutam entre si, ou seja, que o tipo de contexto com que lidamos acima é o caso mais geral possível; em particular, provaremos que toda subálgebra comutativa unital de $\mathcal{B}(H)$ é do tipo $C^*(a)$ para um a autoadjunto. Seja A uma subálgebra unital C^* de $\mathcal{B}(H)$; A é espaço vetorial de dimensão finita e portanto possui

⁷Há uma trivial e bem conhecida relação biunívoca entre medidas de probabilidade definidas num conjunto finito X e funções $p : X \rightarrow [0, 1]$ tais que $\sum_{x \in X} p(x) = 1$ (distribuições).

base finita $B \equiv \{f_1, \dots, f_n\}$, ou seja, $A = \text{span}(B)$. Mas é imediato que se $\text{span}(C)$, para um conjunto $C \subset \mathcal{B}(H)$ qualquer, é álgebra C^* unital, então $\text{span}(C)$ é a álgebra C^* unital gerada por C , e por isso podemos afirmar que $A = \text{span}(B) = C^*(\{f_1, \dots, f_n\})$. Porém, B não necessariamente é um conjunto de elementos autoadjuntos; por isso usamos a bem conhecida decomposição em partes real e imaginária de um elemento numa álgebra C^* . Temos $a_k \equiv \text{Re}(f_k) \doteq \frac{1}{2}(f_k + f_k^*)$, $b_k \equiv \text{Im}(f_k) \doteq \frac{-i}{2}(f_k - f_k^*)$, com a_k e b_k autoadjuntos, e $f_k = a_k + ib_k$. Os elementos a_k e b_k pertencem a A por serem combinações lineares de elementos de A , e portanto os elementos do conjunto $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ comutam entre si. Da definição de a_k, b_k segue que $C^*(\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}) = C^*(\{f_1, \dots, f_n\})$, e isso prova nossa afirmação inicial.

Os resultados desse apêndice podem ser generalizados para espaços de Hilbert quaisquer e para álgebras C^* sem grandes dificuldades, e uma boa referência para isso é [16] - a mesma que foi usada em boa parte do que foi feito aqui. Vale a pena fazer alguns comentários sobre isso. Seja $\mathcal{A}$ álgebra C^* . Do cálculo funcional e da transformação de Gelfand segue que $C(\sigma(a)) \cong C^*(a) \cong C(\sigma(C^*(a)))$, onde $a \in \mathcal{A}$ é autoadjunto. O isomorfismo entre estados de $C^*(a)$ e medidas de probabilidade definidas em $\Sigma(C^*(a))$ (quando a esse associamos uma σ -álgebra apropriada) segue da bem conhecida bijeção entre estados e medidas de probabilidade em $C(X)$, onde X é espaço topológico Hausdorff compacto. Tomando um espaço de Hilbert separável qualquer e uma coleção $a_1, \dots, a_n$ finita de operadores limitados autoadjuntos que comutam dois a dois, podemos definir, usando o espectro de Gelfand, o espectro conjunto dessa coleção de modo a generalizar o que fizemos acima.

A.5 Reticulados e álgebras e Heyting

Conjuntos parcialmente ordenados, reticulados e álgebras de Heyting têm papel central nessa dissertação. Nossas principais referências aqui são [47], [16] e [48].

Uma **ordem parcial** num conjunto P é uma relação binária reflexiva, transitiva e antisimétrica, ou seja, é um conjunto $R \subset P \times P$ tal que $(x, x) \in R \ \forall x \in P$ (**reflexividade**), $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ implica $(x, z) \in R$ (**transitividade**) e, por último, $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ implica $x = y$ (**antissimetria**). O par (P, R) é chamado de **conjunto parcialmente ordenado**, ou **poset**, geralmente representado apenas por P . Como de costume, escrevemos

$x \leq y$ (ou $y \geq x$) para afirmar que $(x, y) \in R$. Se a relação R não necessariamente for reflexiva, diremos que se trata de uma **pré-ordem**, e o par (P, R) será chamado de **conjunto pré-ordenado**; se para $x, y \in P$ qualquer tivermos, necessariamente, $x \leq y$ ou $y \leq x$, diremos que R é uma **ordem total** e que (P, R) é **conjunto totalmente ordenado**. Se (P, R) é poset e $P' \subset P$ é não vazio, é fácil ver que $R \cap P' \times P'$ é ordem parcial em P' , e chamaremos essa ordem parcial de **ordem parcial induzida** em P' . Se (P, R) é poset, diremos que $P' \subset P$ é uma **cadeia** em P se P' for totalmente ordenado quando munido da ordem parcial induzida de P .

Seja P um poset. Uma **cota superior** para um conjunto $P' \subset P$ é um elemento $q \in P$ tal que $p' \leq q \forall p' \in P'$, e de maneira análoga se define **cota inferior**. Um elemento $p \in P$ é dito ser o **supremo** de $P' \subset P$ se p for a menor das cotas superior de P' , ou seja, se for uma cota superior tal que $p \leq q$ para toda cota superior q de P' ; de maneira análoga se define o **ínfimo** de P' . Denotamos por $\bigvee P'$ o supremo (que é único, caso exista, devido à antissimetria da ordem parcial) de P' e por $\bigwedge P'$ o ínfimo (único, caso exista) de P' ; se P' for um conjunto de dois elementos ($P' = \{x, y\}$), escrevemos $x \vee y$ (ou $y \vee x$) em vez de $\bigvee P'$ e $x \wedge y$ (ou $y \wedge x$) em vez de $\bigwedge P'$. Quanto o supremo de P' pertence a P' chamamos tal supremo de **máximo** de P' ; o **mínimo** de P' é o análogo do máximo para o caso do ínfimo. Chamamos de **menor elemento** do poset P um elemento 0 tal que $0 \leq x \forall x \in P$ - ou seja, um mínimo de P , e de **maior elemento** chamamos um elemento 1 tal que $x \leq 1 \forall x \in P$ (máximo de P); esses elementos, quando existem, são únicos.

Notemos que, se $x \leq y$, então $x \vee z \leq y \vee z$ e $x \wedge z \leq y \wedge z$ para qualquer $z \in P$.

Definição 157 (Reticulado) *Um reticulado é um poset P onde todo conjunto de dois elementos possui supremo e ínfimo, ou seja, um poset tal que, se $x, y \in P$, existem $x \vee y$ e $x \wedge y$. Um **reticulado completo** é um poset P onde todo conjunto não vazio possui supremo e ínfimo. Um **reticulado limitado** é um reticulado que possui maior e menor elementos.*

É fácil ver que, num reticulado P , temos $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (**associatividade**), $x \vee x = x = x \wedge x$ (**idempotência**), $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$ (**lei de absorção**) para quaisquer $x, y, z \in P$. Tautologicamente temos também que $x \vee y = y \vee x$ (**comutatividade**). O seguinte lema, cuja prova é trivial, é importante.

Lema 158 Num reticulado P vale, para todo $x, y \in P$, que

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$$

.

Corolário 159 Num reticulado limitado são equivalentes

- (a) 1 e 0 são, respectivamente, maior e menor elemento
- (b) $1 \vee x = 1$ e $0 \wedge x = 0$ para todo $x \in P$
- (c) $x \wedge 1 = x$ e $x \vee 0 = x$ para todo $x \in P$.

O seguinte lema, cuja prova é um exercício simples, é útil para se definir reticulado distributivo.

Lema 160 Num reticulado P as seguintes afirmações são equivalentes

- (a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \forall x, y, z \in P$
- (b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \forall x, y, z \in P$

Definimos

Definição 161 (Reticulado distributivo) É um reticulado que satisfaz uma (e portanto todas) das afirmações do lema 160.

Dizemos que dois elementos x, y num reticulado com menor elemento (0) são **disjuntos** quando $x \wedge y = 0$. Se o conjunto dos elementos disjuntos a $x \in P$, ou seja, o conjunto $D_x \doteq \{y \in P; y \wedge x = 0\}$, possui um máximo chamamos tal máximo de pseudo-complemento de x . Um **reticulado pseudo-complementado** é um reticulado em que todo elemento possui pseudo-complemento. O **pseudo-complemento de x relativo a y** , se existe, é o máximo do conjunto $\{z \in P; z \wedge x \leq y\}$; note que o “pseudo complemento de x ” é o “pseudo complemento de x relativo a 0 ”. Um **reticulado relativamente pseudo-complementado** é um reticulado P tal que, para todo par $x, y \in P$, existe o complemento de x relativo a y . Denotamos por $x \rightarrow y$ tal complemento relativo. Denotamos por $x^\perp$ o pseudo-complemento de x e, como já afirmamos, temos que $x^\perp = (x \rightarrow 0)$. Definimos

Definição 162 (Álgebra de Heyting) *Uma álgebra de Heyting é um reticulado limitado relativamente pseudo-complementado, ou seja, é um reticulado limitado P onde, para qualquer par $(x, y) \in P \times P$, o conjunto*

$$H_{(x,y)} \doteq \{z \in P; z \wedge x \leq y\}$$

possui máximo. Denotamos por $(x \rightarrow y)$ tal elemento. De maneira mais explícita, $(x \rightarrow y)$ satisfaz $(x \rightarrow y) \wedge x \leq y$ e se $z \wedge x \leq y$, então $z \leq (x \rightarrow y)$. Disso decorre que

$$z \wedge x \leq y \Leftrightarrow z \leq (x \rightarrow y).$$

Note que o conjunto $H_{(x,y)}$ nunca é vazio pois 0 , o menor elemento de P , pertence a ele.

O seguinte lema, cuja prova extraímos de [47], é importante

Lema 163 *Álgebras de Heyting são reticulados distributivos.*

Prova. Seja P álgebra de Heyting. Para $x, y, z, t \in P$ quaisquer temos

$$x \wedge (y \vee z) \leq t \Leftrightarrow (y \vee z) \leq (x \rightarrow t) \quad (\text{A.78})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq (x \rightarrow t) \text{ e} \\ z \leq (x \rightarrow t) \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \wedge y \leq t \text{ e} \\ x \wedge z \leq t \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

$$\Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq t. \quad (\text{A.81})$$

Tomando $t = x \wedge (y \vee z)$ concluímos que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$; tomando $t = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ concluímos que $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. O resultado segue então do lema 160 ■

A.6 Reticulado de projetores

Usaremos aqui a terminologia do apêndice A.3.

Um **projetor ortogonal** é um operador linear limitado autoadjunto tal que $p^2 = p$. Nesse trabalho, vamos geralmente nos referir a projetores ortogonais apenas por “projetor”, como comumente se faz. É importante notar porém que na literatura projetores e projetores ortogonais são duas definições distintas, sendo que um projetor é um operador linear limitado tal que $p^2 = p$ e portanto um projetor ortogonal é um projetor autoadjunto. Nesse trabalho, com exceção do capítulo 7, estaremos sempre lidando com projetores ortogonais e portanto por “projetor” queremos dizer “projetor ortogonal”, salvo quando o contrário for afirmado. Isso acontece porque lidaremos com projetores que pertencem a contextos, ou seja, a álgebras de von Neumann comutativas, e isso implica que esses projetores são normais (um operador é normal quando ele comuta com seu adjunto). Com efeito, temos o seguinte lema.

Lema 164 *Seja p um projetor definido num espaço de Hilbert H . São equivalentes as seguintes afirmações.*

(a) p é projetor ortogonal

(b) p é normal.

Seja H espaço de Hilbert e p projetor ortogonal em H . É um resultado simples que $\psi \in \text{Ran}(p)$ se, e só se, $p\psi = \psi$. $\ker(p) = \text{Ran}(p)^\perp$

Como já comentamos no apêndice A.3, é um resultado bem conhecido de análise funcional que $H = \text{Ran}(p) \oplus \ker(p)$. Isso é consequência do teorema da decomposição ortogonal para espaços de Hilbert, já que $p(H)$ é subespaço fechado de H (e consequentemente $(p(H)^\perp)^\perp = p(H)$) e que $\ker(p) = p(H)^\perp$. Também não é difícil de se ver que, quando $p, q \in \mathcal{B}(H)$ são projetores, $p = q$ se, e só se, $p(H) = q(H)$ ou, equivalentemente, $\ker(p) = \ker(q)$. Por último, se $X \subset H$ é um subespaço fechado, o teorema da decomposição ortogonal nos diz que $H = X \oplus X^\perp$; para todo $x = x_1 + x_2 \in H$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X^\perp$, podemos definir $p_X : H \rightarrow H$ por $p_X(x) \doteq x_1 \in X$ (a função está bem definida pois a representação de x como soma de elementos $x_1 \in X$, $x_2 \in X^\perp$ é única), e é fácil ver que p_X é um projetor tal que $p_X(H) = X$. Disso podemos concluir que há uma relação biunívoca entre projetores de H e subespaços fechados de H , sendo essa relação dada por $\text{Pr}(H) \ni p \mapsto p(H) \subset H$, sendo que $\text{Pr}(H) \equiv \text{Pr}(\mathcal{B}(H)) \subset \mathcal{B}(H)$ é o conjunto de todos os projetores de H .

Podemos definir uma ordem parcial em $\text{Pr}(H)$ por $p \leq q \Leftrightarrow p(H) \subset q(H)$. É fácil ver que $p \leq q$ se, e só se, $pq = p$ ou, equivalentemente, $qp = p$ (essa última equivalência se

deve à auto-adjunção dos projetores). O conjunto $Pr(H)$, munido dessa ordem parcial, é um **reticulado completo e limitado**. Primeiro mostremos que todo subconjunto de $Pr(H)$ possui ínfimo. Bom, a interseção de uma coleção qualquer de subespaços fechados é um subespaço fechado; tal subespaço está, claro, contido em todo subespaço da coleção e, mais que isso, contém qualquer subespaço (em particular qualquer subespaço fechado) que esteja contido em todos eles; enfim, o projetor univocamente associado a esse subespaço fechado é o ínfimo da coleção. Disso já poderíamos concluir que todo subconjunto de $Pr(H)$ possui supremo, pois o supremo de um conjunto é o ínfimo do conjunto de cotas superiores de tal conjunto (que, nesse caso, saber ser não vazio). Porém é útil mostrar isso de maneira explícita. Seja então $P \subset Pr(H)$ uma coleção de projetores. Queremos encontrar o menor subespaço fechado de H que contém o conjunto $\{p(H), p \in P\}$. Tal subespaço é necessariamente o subespaço $\overline{\text{span}(\bigcup_{p \in P} p(H))}$ - pois $\text{span}(\bigcup_{p \in P} p(H))$ é o menor subespaço que contém o conjunto $\bigcup_{p \in P} p(H)$ (subespaço gerado), e o fecho de um conjunto A é o menor conjunto fechado que o contém. Concluimos que $Pr(H)$ é um reticulado completo, e é fácil ver que se trata de um reticulado limitado já que H (cujo projetor associado é o operador identidade) e $\{0\}$ (cujo projetor associado é o operador nulo) são subespaços fechados de H . Mostremos agora que $Pr(H)$ é **pseudo-complementado**, sendo $p^\perp \equiv 1 - p$ o pseudo complemento de p ; para isso lembremos que $p^\perp(H) = p(H)^\perp = \ker(p)$. É trivial que $p \wedge p^\perp = 0$ (pois se $x \in p(H) \cap p(H)^\perp$ então $\|x\| = 0$). Tomemos $q \in Pr(H)$ tal que $p \wedge q = 0$, ou seja, $p(H) \wedge q(H) = \{0\}$; precisamos mostrar que $q(H) \subset p^\perp(H)$. Para $x = x_1 + x_2 \in q(H)$ qualquer, onde $x_1 \in p(H)$ e $x_2 \in p^\perp(H)$; temos $p(H) \ni x_1 = x - x_2 \in q(H)$, e a hipótese implica $x_1 = 0$, de onde decorre que $x \in p^\perp(H)$, e então vale a inclusão enunciada. Mostremos agora que, se $\dim(H) \geq 2$ (possivelmente infinito), $Pr(H)$ **não é distributivo** e conseqüentemente, por causa do lema 163, $Pr(H)$ **não é álgebra de Heyting**. Seja H espaço de Hilbert tal que $\dim(H) \geq 2$ e tomemos dois vetores ortonormais $e_1, e_2 \in H$. Seja p_i o projetor associado ao subespaço $\mathbb{K}e_i \equiv \{\lambda e_i; \lambda \in \mathbb{K}\}$, $i \in \{1, 2\}$; seja $p_{1,2}$ o projetor associado ao subespaço $\mathbb{K}(e_1 + e_2)$. Trivialmente vale que $p_1 \wedge p_2 = p_1 \wedge p_{1,2} = p_{2 \vee p_{1,2}} = 0$ (basta olhar as interseções dos subespaços). Temos $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_{1,2}) = \{0\} \vee \{0\} = \{0\}$. Por outro lado, $p_1 \wedge (p_2 \vee p_{1,2}) = p_1 \wedge (p') = p_1$, onde p' é o projetor associado ao subespaço H' de H gerado por $\{e_1, e_2\}$ (note que $H' = \text{span}(\{e_1, e_2\}) = \text{span}(\{e_1, e_1 + e_2\}) = \text{span}(p_2(H) \cup p_{1,2}(H)) = \overline{\text{span}(p_2(H) \cup p_{1,2}(H))}$, onde usamos que subespaços de dimensão finita são sempre fechados). Concluimos então que $p_1 \wedge (p_2 \vee p_{1,2}) \neq (p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_{1,2})$ e portanto, como afirmado,

$Pr(H)$ não é um reticulado distributivo (consequentemente não é álgebra de Heyting). Esse contra-exemplo foi retirado de [49]

Tomemos agora uma álgebra de von Neumann unital $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(H)$ (definição 124). Vamos mostrar que $Pr(\mathcal{N})$ é também um reticulado completo pseudocomplementado⁸ - usamos, claro, a mesma ordem de $Pr(H)$ (a rigor, a restrição dessa ordem ao conjunto $Pr(\mathcal{N})$). Mostraremos também que, no caso em que a álgebra é comutativa, o reticulado é distributivo. Bom, para $p \in Pr(\mathcal{N})$ temos $p^\perp \in \mathcal{N}$ trivialmente, já que $\mathcal{N}$ é unital; como $Pr(\mathcal{N}) \subset Pr(H)$ e como a ordem é dada pela restrição, esse elemento é claramente o pseudo-complemento de p em $Pr(\mathcal{N})$, e então $Pr(\mathcal{N})$ é fechado para pseudocomplemento. Seja P uma coleção de projetores em $\mathcal{N}$. Queremos mostrar que $\bigvee P$ e $\bigwedge P$, supremo e ínfimo em $Pr(H)$, são elementos de $\mathcal{N}$. Disso decorrerá, trivialmente, que $\bigvee P$ e $\bigwedge P$ são supremo e ínfimo, respectivamente, do conjunto P em $Pr(\mathcal{N})$, e consequentemente $Pr(\mathcal{N})$ será um reticulado completo. Para isso usaremos os seguintes resultados.

Lema 165 *Seja $N \subset \mathcal{B}(H)$ subconjunto autoadjunto (fechado para involução) de $\mathcal{B}(H)$ e seja $K \subset H$ subespaço fechado de H , onde H é espaço de Hilbert. Então $NK \subset K$ se, e só se, $NK^\perp \subset K^\perp$.*

Prova. Sendo o mapa $K \mapsto K^\perp$, quando restrito ao conjunto dos subespaços fechados de H , uma involução (bijeção cuja inversa é ela mesma), basta provarmos que $NK \subset K$ implica $NK^\perp \subset K^\perp$. Suponhamos então que $NK \subset K$, tomemos $\psi \in K^\perp$ e $a \in N$; temos, para $\phi \in K$,

$$\langle \phi, a\psi \rangle = \langle a^*\phi, \psi \rangle = 0,$$

ou seja, $a\psi \in K^\perp$ ■

Corolário 166 *Num espaço de Hilbert H tomemos um projetor p e um conjunto autoadjunto de operadores lineares limitados $N \subset \mathcal{B}(H)$. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) $p \in N'$, onde $N' = \{b \in \mathcal{B}(H); [a, b] = 0 \forall a \in N\}$
- (b) *O subespaço fechado $p(H)$ é invariante por N , ou seja, $Np(H) \subset p(H)$.*

⁸Mais que isso, trata-se de um reticulado complementado. Omitiremos esse tipo de discussão pois não terá utilidade para nós.

Prova. É trivial que (a) implica (b) (pois $a\psi = ap\psi = pa\psi \in p(H)$ para todo $\psi \in p(H)$). Supondo agora (b) e usando o lema acima concluímos que, para $a \in N$ e $H \ni \psi = \psi_1 + \psi_2$ quaisquer (onde $\psi_1 \in p(H)$ e $\psi_2 \in p(H)^\perp$) temos

$$ap\psi = a\psi_1 \quad (\text{A.82})$$

$$pa\psi = pa(\psi_1 + \psi_2) = p(a\psi_1 + a\psi_2) = a\psi_1 \quad (\text{A.83})$$

onde usamos que $a\psi_1 \in p(H)$ e $a\psi_2 \in p(H)^\perp$. ■

Tomemos agora uma família de projetores P na álgebra de von Neumann $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(H)$; como dito acima queremos mostrar que $\bigwedge P \in N \ni \bigvee P$. Ora, $\mathcal{N} = \mathcal{N}''$, e portanto estamos tentando provar que certos projetores pertencem à comutante do conjunto $\mathcal{N}'$ (que é uma subálgebra* de $\mathcal{B}(H)$, portanto conjunto autoadjunto). Pelo corolário 166 sabemos que isso equivale a provar que a imagem desses projetores é invariante por $\mathcal{N}'$. Bom, as imagens de $\bigwedge P$ e $\bigvee P$ são, respectivamente, $\bigcap_{p \in P} p(H)$ e $\overline{\text{span}(\bigcup_{p \in P} p(H))}$. Tomando $a \in \mathcal{N}'$ temos $[a, p] = 0$ para todo $p \in P$ (por definição de $\mathcal{N}'$, já que $P \subset \mathcal{N}$), e novamente pelo corolário temos que $\mathcal{N}'p(H) \subset p(H) \forall p \in P$. Disso é imediato que $\bigcap_{p \in P} p(H)$ é invariante por $\mathcal{N}'$, e então pelo corolário, $\bigwedge P \in \mathcal{N}'' (= \mathcal{N})$. Dessa última inclusão também segue que $\bigcup_{p \in P} p(H)$ é invariante por $\mathcal{N}$; como todo $a \in \mathcal{N}'$ é linear temos que $\text{span}(\bigcup_{p \in P} p(H))$ é invariante e, por fim, como $a \in \mathcal{N}'$ é contínuo, que $\overline{\text{span}(\bigcup_{p \in P} p(H))}$ também o é, e portanto concluímos, graças ao corolário, que $\bigvee P \in \mathcal{N}$. Está provado então o seguinte lema.

Lema 167 *Seja $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(H)$ álgebra de von Neumann e $Pr(\mathcal{N})$ o conjunto de todos os seus projetores. Então $Pr(\mathcal{N})$, munido da ordem usual de projetores em $\mathcal{B}(H)$, é fechado para supremos, ínfimos e pseudocomplementos, ou seja, se $P \subset Pr(\mathcal{N})$ então $\bigvee P, \bigwedge P \in \mathcal{N}$ (supremo e ínfimo de $\mathcal{B}(H)$) e $p^\perp \in \mathcal{N}$ para todo $p \in Pr(\mathcal{N})$ - pseudocomplemento de $\mathcal{B}(H)$. Consequentemente, $\mathcal{N}$ é um reticulado pseudocomplementado completo.*

Por fim, o seguinte lema, simples e bem conhecido, será útil quando formos lidar com álgebras de von Neumann comutativas. A prova é um exercício simples, basta lembrar que para quaisquer projetores p e q , $p \leq q$ se, e só se, $pq = p$, o que equivale a $qp = p$. Isso nos fornece uma caracterização algébrica do supremo e do ínfimo de um par de projetores em álgebras de von Neumann comutativas. Com essa caracterização é um exercício trivial mostrar que $pr(\mathcal{N})$ é um reticulado distributivo quando $\mathcal{N}$ é álgebra de von Neumann comutativa.

Lema 168 *Sejam p e q projetores num espaço de Hilbert. Então se p e q comutam vale que*

$$(a) \quad p \wedge q = pq$$

$$(b) \quad p \vee q = p + q - pq$$

a prova do seguinte corolário é uma aplicação simples do lema acima.

Corolário 169 *Se $\mathcal{N}$ é uma álgebra de von Neumann comutativa então $Pr(\mathcal{N})$ é um reticulado pseudo-complementado completo, limitado e distributivo.*

A.7 Estados invariantes no topos associado ao estado

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* e $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ um estado em $\mathcal{A}$. Seja (H, π, Φ) a representação GNS de $\mathcal{A}$ dada por ρ . Sabemos que, para todo $a \in \mathcal{A}$, $\rho(a) = \langle \Phi, \pi(a)\Phi \rangle$, ou seja, que $\rho = \rho_\Phi \circ \pi$, onde ρ_Φ é o estado vetor associado ao vetor $\Phi \in H$ ($\rho_\Phi(T) \doteq \langle \Phi, T\Phi \rangle \forall T \in \mathcal{B}(H)$). Seja $\mathcal{N} \doteq \pi(\mathcal{A})''$; vamos denotar por $\tilde{\rho}$ a restrição $\rho_\Phi|_{\mathcal{N}}$, que é um estado em $\mathcal{N}$ e que satisfaz $\rho = \tilde{\rho} \circ \pi$. Se $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é automorfismo em relação ao qual ρ é invariante ($\rho \circ \alpha = \rho$), vamos denotar por $\tilde{\alpha}$ o único automorfismo* de $\mathcal{N}$ tal que $\tilde{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$, ou seja, tal que $\tilde{\alpha}(\pi(a)) = \pi(\alpha(a)) \forall a \in \mathcal{A}$ - diremos que esse é o automorfismo de $\mathcal{N}$ induzido por α - e vamos mostrar também que o estado $\tilde{\rho}$ é invariante por $\tilde{\alpha}$. Primeiro, para mostrar que tal automorfismo existe, definamos uma função $\tilde{\alpha} : \pi(\mathcal{A}) \rightarrow \pi(\mathcal{A})$ por $\tilde{\alpha}(\pi(a)) \doteq \pi(\alpha(a)) \forall a \in \mathcal{A}$. Para que tal regra de fato defina uma função precisamos provar que, se $a, b \in \mathcal{A}$ são tais que $\pi(a) = \pi(b)$, então $\pi(\alpha(a)) = \pi(\alpha(b))$; sejam então $a, b \in \mathcal{A}$ elementos que satisfazem essa hipótese; usando o fato de que $\pi(\mathcal{A})\Phi \subset H$ é denso, basta provarmos que, para $c \in \mathcal{A}$ qualquer,

$\pi(\alpha(a))\pi(c)\Phi = \pi(\alpha(b))\pi(c)\Phi$; para isso,

$$\|\pi(\alpha(a))\pi(c)\Phi - \pi(\alpha(b))\pi(c)\Phi\|^2 = \|\pi(\alpha(a)c - \alpha(b)c)\Phi\|^2 \quad (\text{A.84})$$

$$= \rho((\alpha(a)c - \alpha(b)c)^*(\alpha(a)c - \alpha(b)c)) \quad (\text{A.85})$$

$$= \rho \circ \alpha((a\alpha^{-1}(c) - b\alpha^{-1}(c))^*(a\alpha^{-1}(c) - b\alpha^{-1}(c))) \quad (\text{A.86})$$

$$= \rho((a\alpha^{-1}(c) - b\alpha^{-1}(c))^*(a\alpha^{-1}(c) - b\alpha^{-1}(c))) \quad (\text{A.87})$$

$$= \|\pi((a - b)\alpha^{-1}(c))\Phi\|^2 \quad (\text{A.88})$$

$$= \|\pi(a - b)\pi(\alpha^{-1}(c))\Phi\|^2. \quad (\text{A.89})$$

Dessa expressão concluímos que $\pi(a) = \pi(b)$ se, e só se, $\tilde{\alpha}(\pi(a)) = \tilde{\alpha}(\pi(b))$, ou seja, a função $\tilde{\alpha} : \pi(\mathcal{A}) \rightarrow \pi(\mathcal{A})$ está bem definida e, mais que isso, é injetora. Da definição de $\tilde{\alpha}$ e do fato de π e α serem homomorfismos* segue que $\tilde{\alpha}$ é um homomorfismo da álgebra* $\pi(\mathcal{A})$; mais que isso, $\tilde{\alpha}$ é sobrejetora pois α é bijeção. Temos portanto que $\tilde{\alpha} : \pi(\mathcal{A}) \rightarrow \pi(\mathcal{A})$ é automorfismo. Vamos agora mostrar que existe um operador unitário $U_\alpha : H \rightarrow H$ tal que $\tilde{\alpha}(\pi(a)) = U_\alpha \circ \pi(a) \circ U_\alpha^{-1} \forall \pi(a) \in \pi(\mathcal{A})$, e isso nos permitirá definir a extensão (que também vamos denotar por $\tilde{\alpha}$) $\tilde{\alpha} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ por $\tilde{\alpha}(T) \doteq U_\alpha \circ T \circ U_\alpha^{-1} \forall T \in \mathcal{N}$, extensão que sabemos ser um automorfismo em $\mathcal{N}$. Bom, Vamos definir U_α no denso (pré-Hilbert) $\pi(\mathcal{A})\Phi$, mostrar que se trata de um operador linear limitado unitário e daí $U_\alpha : H \rightarrow H$ será a única extensão linear contínua desse operador (cuja existência e unicidade é garantida pelo teorema BLT). Para $\pi(a)\Phi \in \pi(\mathcal{A})\Phi$ qualquer definimos $U_\alpha \pi(a)\Phi \doteq \tilde{\alpha}(\pi(a))\Phi = \pi(\alpha(a))\Phi$. A linearidade de $U_\alpha : \pi(\mathcal{A})\Phi \rightarrow \pi(\mathcal{A})\Phi$ decorre do fato de α e π serem homomorfismos, e é fácil ver que $U_\alpha : \pi(\mathcal{A})\Phi \rightarrow \pi(\mathcal{A})\Phi$ é uma isometria cuja inversa é $U_{\alpha^{-1}}$ (α^{-1} é homomorfismo e portanto tudo o que fizemos acima se aplica a ele). É fácil ver que $U_{\alpha^{-1}}$ é a inversa de U_α , e temos $\|U_\alpha\| = 1$ pois $\|U_\alpha \pi(a)\Phi\|^2 = \|\pi(\alpha(a))\Phi\|^2 = \rho(\alpha(a)^* \alpha(a)) = \rho \circ \alpha(a^* a) = \rho(a^* a) = \|\pi(a)\Phi\|^2$ para qualquer $\pi(a)\Phi \in \pi(\mathcal{A})\Phi$. Por fim, vamos mostrar que $U_\alpha^{-1} = U_\alpha^*$; tomando $\pi(a)\Phi, \pi(b)\Phi$

quaisquer,

$$\langle \pi(a)\Phi, U_\alpha \pi(b)\Phi \rangle = \langle \Phi, \pi(a^* \alpha(b))\Phi \rangle \quad (\text{A.90})$$

$$= \rho \circ \alpha(b^* \alpha^{-1}(a) \alpha^{-1}(a^*)b) \quad (\text{A.91})$$

$$= \rho(b^* \alpha^{-1}(a) \alpha^{-1}(a^*)b) \quad (\text{A.92})$$

$$= \rho((\alpha^{-1}(a^*)b)^*(\alpha^{-1}(a^*)b)) \quad (\text{A.93})$$

$$= \langle \Phi, \pi(\alpha^{-1}(a^*)b)\Phi \rangle \quad (\text{A.94})$$

$$= \langle \pi(\alpha^{-1}(a))\Phi, \pi(b)\Phi \rangle \quad (\text{A.95})$$

$$= \langle U_{\alpha^{-1}} \pi(a)\Phi, \pi(b)\Phi \rangle. \quad (\text{A.96})$$

Concluimos então que $U_\alpha : \pi(\mathcal{A})\Phi \rightarrow \pi(\mathcal{A})\Phi$ é operador linear limitado e unitário, e denotamos também por U_α a única extensão linear contínua de U_α a H - ou seja, $U_\alpha : H \rightarrow H$ -, que sabemos que também é limitada e unitária (e consequentemente $\|U_\alpha\| = 1$); denotamos por $U_{\alpha^{-1}}$ a extensão (em H) $U_{\alpha^{-1}} : \pi(\mathcal{A})\Phi \rightarrow \pi(\mathcal{A})\Phi$. Por fim, é fácil ver que $\tilde{\alpha}(\pi(a)) = U_\alpha \circ \pi(a) \circ U_\alpha^{-1} \forall \pi(a) \in \pi(\mathcal{A})$ (basta constatar que esses operadores são iguais em $\pi(\mathcal{A})\Phi$) e então, de fato, $\tilde{\alpha} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ dado por $\tilde{\alpha}(T) \doteq U_\alpha \circ T \circ U_\alpha^{-1}$ é de fato a extensão do automorfismo desejada. Como foi dito, temos $\tilde{\rho} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\rho}$; de fato, temos $U_\alpha \Phi = U_\alpha \pi(1_{\mathcal{A}})\Phi = \pi(\alpha(1_{\mathcal{A}}))\Phi = \pi(1_{\mathcal{A}})\Phi = \Phi$ e, consequentemente, $U_\alpha^{-1}\Phi = U_{\alpha^{-1}}\Phi = \Phi$; daí

$$\tilde{\rho} \circ \tilde{\alpha}(T) = \langle U_\alpha^{-1}\Phi, T U_\alpha^{-1}\Phi \rangle = \langle \Phi, T\Phi \rangle = \tilde{\rho}(T) \quad (\text{A.97})$$

para qualquer $T \in \mathcal{N}$. Temos o seguinte lema.

Lema 170 *Se $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ é estado da álgebra $C^* \mathcal{A}$ e $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é um automorfismo em relação ao qual ρ é invariante ($\rho \circ \alpha = \rho$), então, para uma representação cíclica (H, π, Φ) dada por ρ , existe, e é único, um automorfismo $\tilde{\alpha} : \mathcal{N}_\rho \rightarrow \mathcal{N}_\rho$, onde $\mathcal{N}_\rho \doteq \pi(\mathcal{A}'')$ tal que $\tilde{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$, e esse automorfismo satisfaz $\tilde{\rho} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\rho}$, sendo que $\tilde{\rho}(T) \doteq \langle \Phi, T\Phi \rangle \forall T \in \mathcal{N}_\rho$ e, consequentemente, $\tilde{\rho} \circ \pi = \rho$. O seguinte diagrama comutativo ilustra essas afirmações - estamos usando a palavra diagrama num sentido informal aqui, sem fazer referência a uma categoria:*

(a função $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ representada no diagrama é a função identidade). Mais que isso, que existe um operador limitado unitário $U_\alpha : H \rightarrow H$ tal que $\tilde{\alpha}(T) = U_\alpha \circ T \circ U_\alpha^{-1} \forall T \in \mathcal{N}$, sendo que $U_\alpha \pi(b)\Phi = \pi(\alpha(b))\Phi \forall \pi(b)\Phi \in \pi(\mathcal{A})\Phi$.

Vamos dizer que $\tilde{\rho}$ é o estado de $\mathcal{N}_\rho$ induzido por ρ e que $\tilde{\alpha}$ é o homomorfismo de $\mathcal{N}_\rho$ induzido por α .

Como $\tilde{\rho}$ é um estado na álgebra de von Neumann $\mathcal{N}_\rho$, ele define uma medida de probabilidade $\mu^{\tilde{\rho}} : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\geq$, e como $\tilde{\rho} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\rho}$, sabemos que, para $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$ quaisquer,

$$\mu^{\tilde{\rho}}(S)(\tilde{\alpha}(A)) = (\mu^{\tilde{\rho}})(\alpha(S))(A).$$

Os lemas 91 e 170 nos dão a seguinte proposição.

Proposição 171 *Sejam $(\mathcal{A}, \tau)$ sistema dinâmico C^* e $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ estado. Seja (H, π, Φ) a representação GNS de $\mathcal{A}$ dada por ρ . Então as seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) ρ é invariante por α , ou seja, $\rho \circ \alpha = \rho$
- (b) Existe um automorfismo $\tilde{\alpha} : \mathcal{N}_\rho \rightarrow \mathcal{N}_\rho$ tal que $\tilde{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$ e $\tilde{\rho} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\rho}$, onde $\tilde{\rho}(T) \doteq \langle \Phi, T\Phi \rangle \forall T \in \mathcal{N}_\rho$
- (c) Existe um automorfismo $\tilde{\alpha} : \mathcal{N}_\rho \rightarrow \mathcal{N}_\rho$ tal que $\tilde{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$ e a medida $\mu^{\tilde{\rho}} : Sub_{cl}(\Sigma) \rightarrow \Gamma[0, 1]^\geq$ associada a $\tilde{\rho}$ satisfaz, para todo $S \in Sub_{cl}(\Sigma)$ e $A \in \mathcal{V}(\mathcal{N})_0$,

$$\tilde{\rho}^S(\tilde{\alpha}(A)) = \tilde{\rho}^{S(\alpha)}(A)$$

Prova. Já provamos que a implica b , e os itens b e c são equivalentes por consequência do lema 91. Vamos então provar que b implica a . Assumindo b podemos escrever

$$\rho = \tilde{\rho} \circ \pi = \tilde{\rho} \circ \tilde{\alpha} \circ \pi = \tilde{\rho} \circ \pi \circ \alpha = \rho \circ \alpha, \quad (\text{A.98})$$

e isso completa a prova. ■

Referências Bibliográficas

- [1] J. Butterfield, C.J. Isham. *A topos perspective on the Kochen-Specker theorem I. Quantum states as generalised valuations*. Int. J. Theor. Phys. 37, 2669 - 2733, (1998).
- [2] J. Butterfield, C.J. Isham. *A topos perspective on the Kochen-Specker theorem II. Conceptual Aspects and Classical Analogues*. Int. J. Theor. Phys. (1999) 38: 827.
- [3] J. Hamilton, C.J. Isham e J. Butterfield, *Topos Perspective on the Kochen Specker Theorem: III. Von Neumann Algebras as the Base Category*. Int. J. Theor. Phys. (2000) 39: 1413
- [4] J. Butterfield, C.J. Isham. *Topos Perspective on the Kochen–Specker Theorem: IV. Interval Valuations* Int. J. Theor. Phys. (2002)
- [5] A. Döring e C. J. Isham. *A topos foundation for theories of physics: I. Formal languages for physics*. Journal of Mathematical Physics 49, 053515 (2008)
- [6] A. Döring e C. J. Isham. *A topos foundation for theories of physics: II. Daseinisation and the liberation of quantum theory*. Journal of Mathematical Physics 49, 053516 (2008)
- [7] A. Döring e C. J. Isham. *A topos foundation for theories of physics: III. The representation of physical quantities with arrows*. Journal of Mathematical Physics 49, 053517 (2008)

- [8] A. Döring e C. J. Isham. *A Topos Foundation for Theories of Physics IV. Categories of Systems..* Journal of Mathematical Physics 49, 053517 (2008)
- [9] A. Döring e C. J. Isham. *What Is a Thing?': Topos Theory in the Foundations of Physics.* New Structures for physics. Lecture Notes in Physics (2010): 753–937
- [10] A. Döring. *Flows on Generalised Gelfand Spectra of Nonabelian Unital C*-Algebras and Time Evolution of Quantum Systems.* arXiv: 1212.4882 (2012)
- [11] A. Döring. *Quantum States and Measures on the Spectral Presheaf.* Adv. Sci. Lett. 2, Number 2, Special Issue on Quantum Gravity, Cosmology and Black Holes, Hrsg. Martin Bojowald, 291–301 (2009)
- [12] C. Isham. *Is it True; or is it False; or Somewhere in Between? The Logic of Quantum Theory.* In: Demopoulos W., Pitowsky I. (eds) Physical Theory and its Interpretation. The Western Ontario Series in Philosophy of Science, vol 72. Springer, Dordrecht (2006)
- [13] C. Flori, *A first course in topos quantum theory.* Lecture Notes in Physics 868. Springer, Berlin, Heidelberg (2013)
- [14] C. Flori, *A second course in topos quantum theory.* Lecture Notes in Physics 944. Springer, Berlin, Heidelberg (2018)
- [15] J. Ben Geloun, C. Flori. *Topos Analogues of the KMS State.* arXiv:1207.0227 (2013)
- [16] K. Landsman. *Foundations of Quantum Mechanics - from Classical Concepts to Operator Algebras.* Fundamental Theories of Physics, Vol. 188. Springer Verlag (2017)
- [17] K. Landsman. *Bohrification: from classical concepts to commutative algebras* (2017)
- [18] A. Döring, J. Harding. *Abelian subalgebras and the Jordan structure of a von neumann Algebra.* 42. 559-568 (2016).
- [19] A. Döring. *Kochen–Specker Theorem for von Neumann Algebras* Int J Theor Phys (2005) 44: 139
- [20] C. Heunen, N.P. Landsman e Bas Spitters. *A Topos for Algebraic Quantum Theory.* Communications in Mathematical Physics 291.1 (2009): 63–110. Crossref. Web.

- [21] C.Heunen, N.P.Landsman. e B.Spitters. *Bohrification of operator algebras and quantum logic*. Synthese 186, 719–752 (2012)
- [22] H.Folse. *The philosophy of Niels Bohr: The framework of complementarity*. North-Holland Personal Library. First edition (1985)
- [23] K.Landsman *Bohrification: From classical concepts to commutative algebras*. To appear in "Niels Bohr in the 21st Century", eds. J. Faye and H. Folse
- [24] S.A.M. Wolters: *Quantum toposophy*. Doctoral thesis. NIJMEGEN October 3, 2013
- [25] S.Abramsky, A.Brandenburger. *A Unified Sheaf-Theoretic Account Of Non-Locality and Contextuality*. CoRR. abs/1102.0264. (2011)
- [26] Hans F. de Groote. *Observables I: Stone spectra*. arxiv.org/abs/math-ph/0509020, (2005).
- [27] Hans F. de Groote. *Observables II : Quantum Observables*. arxiv.org/abs/math-ph/0509075 (2005)
- [28] S.Abramsky and A. Brandenburger. *The Sheaf-Theoretic Structure of Non-Locality and Contextuality*. New Journal of Physics 13.11 (2011): 113036
- [29] Barbara Amaral e Marcelo Terra Cunha. *On Graph Approaches to Contextuality and their Role in Quantum Theory*. Springer briefs in mathematics (2018)
- [30] G.Birkhoff, J.Von Neumann. *The Logic of Quantum Mechanics*. Annals of Mathematics, 37(4), second series, 823-843 (1936).doi:10.2307/1968621
- [31] R.V. Kadison e J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras*. Volume 1 - elementary theory. Pure and applied mathematics (Academic Press) (1983)
- [32] M. Heidegger. *What is a Thing?* Regenery/Gateway, Indiana (1967).
- [33] S. Awodey. *Category Theory*. Oxford Logic Guides 52. Oxford University Press. (2010).
- [34] S. MacLane e I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag (1997)
- [35] R. Goldblatt, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*. Dover (2006)

- [36] S.MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York (1978).
- [37] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford Logic guides (Book 43). Clarendon Press; 1 edition (2003)
- [38] O. Bratteli, Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1987)
- [39] O. Bratteli, Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1981)
- [40] N.Brownlowe. *An introduction to KMS states*. Lecture notes: CIMPA Research School - “Noncommutative geometry and applications to quantum physics”, Quy Nhon, Vietnam.
- [41] Pusz, W., Woronowicz, S.L. *Passive states and KMS states for general quantum systems*. Commun.Math. Phys. 58, 273–290 (1978)
- [42] C.Held. *The Kochen-Specker Theorem*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/kochen-specker/>.
- [43] G. Ramesh. *Weak topologies*. Indian Institute of Technology, Hyderabad, India
- [44] Ofélia Alas, Lucia Junqueira, Marcelo D. Passos, Artur Tomita. *Topologia Geral*.
- [45] J. C. A. Barata. *Curso de física matemática*. Livro on-line, São Paulo.
- [46] W.Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics (1991)
- [47] Daniel V. Tausk. *Álgebras de Heyting*. Notas de aula.
- [48] B.Nelson. *Math 209: von Neumann algebras*. Notas de aula.
- [49] V.Moretti. *Spectral Theory and Quantum Mechanics*. Mathematical Foundations of Quantum Theories, Symmetries and Introduction to the Algebraic Formulation. Springer International Publishing (2017)

- [50] G. Emch *Mathematical and Conceptual Foundations of 20th-Century Physics*. North Holland (2012)