Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Generalização do Ansatz de Kadanoff-Baym em Teorias Quânticas de Campos à Temperatura Finita

André Luiz Moura Britto

Orientador(a): Prof. Dr. _____

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Josif Frenkel - Orientador (USP)

Prof. Dr. Rafael Rodrigues Francisco (UDESC)

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto (CBPF)

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)

São Paulo
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Britto, André Luiz Moura

Generalização do Ansatz de Kadanoff-Baym em teorias quânticas de campos à temperatura finita. São Paulo, 2018.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel
Área de Concentração: Teoria Geral das Partículas Elementares e Campos

Unitermos: 1. Física teórica; 2. Teoria quântica de campos; 3. Mecânica estatística quântica; 4. Funções de Green.

USP/IF/SBI-111/2018

University of São Paulo
Physics Institute

Generalization of the Kadanoff-Baym Ansatz in Quantum Field Theory at Finite Temperature

André Luiz Moura Britto

Supervisor: Prof. Dr. _____

Thesis submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Doctor of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Josif Frenkel - Supervisor (USP)

Prof. Dr. Rafael Rodrigues Francisco (UDESC)

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto (CBPF)

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)

São Paulo
2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais: Iracema Isabel e Wilson Britto pelo apoio, amor e carinho durante toda essa trajetória. Ao meu irmão Raphael Britto pelo amor fraternal e o seu apoio.

Agradeço ao meu orientador Josif Frenkel pela orientação e pela nossa grande amizade que surgiu durante esses anos.

Agradeço a minha namorada Roseane Oliveira pelo carinho e apoio. Também gostaria de agradecer aos seus pais: Rosely Oliveira e Patrício Luís pelo carinho e amizade.

Gostaria de agradecer aos amigos residentes em Vitória da Conquista: Daniel Gonçalves e Lucas Dias. Apesar de estarmos longe a nossa amizade nunca diminuiu.

Agradeço o apoio dos meus amigos do departamento de física matemática (DFMA): Alysson Moraes, Miguel Ferreira, Rafael, Yuber Perez, Wallace Elias e Jorgivan Dias. Também gostaria de agradecer a todos os outros colegas do DFMA.

Agradeço o apoio dos amigos: Roger Montemor, Ubiratane, Gilmar, Denis, Samuel Santos, Piero Quirino, Priscila Freria, Edson Martins, Danilo.

Agradeço a amizade dos funcionários do DFMA: Simone Shinomiya, Cecília Blanco, Amélia Ferrari, Dona Lourdes e Dona Nice.

Agradeço o auxílio e cooperação dos funcionários da CPG: Éber, Paula e Andrea.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

No âmbito da teoria quântica de campos (TQC) foram estudados modelos de quench exatamente solúveis. Nestes modelos, obteve-se uma generalização do ansatz de Kadanoff-Baym que se mantém em todos intervalos de tempo. Algumas hipóteses sobre fenômenos de não-equilíbrio em TQC em temperaturas finitas foram analisadas e estendidas neste contexto. Para tanto, examinamos as funções de Green nesses modelos e os comparamos com os resultados aproximados que são frequentemente usados na literatura. Um dos modelos descreve sistemas de não-equilíbrio do tipo vítreo. Esses sistemas exibem um comportamento que é compatível com o esperado do teorema de flutuação-dissipação. As propriedades básicas foram consistentemente deduzidas e resultados explícitos para a temperatura efetiva e frequências características foram obtidas.

Palavras-chave: função de Green; ansatz de Kadanoff-Baym; teoria quântica de campos à temperatura finita.

Abstract

We have studied exactly quenched models in the context of Quantum Field Theory(QFT). In these models, a generalization of the Kadanoff-Baym ansatz was obtained which holds at all times. Some assumptions concerning non-equilibrium phenomena in QFT at finite temperatures were analysed and extended in this framework. To this end, we have examined the Green's functions in these models and compared them with the approximated results which are often used in the literature. One of the models describes non-equilibrium systems of the glassy-kind. Such systems exhibit a behaviour which is compatible with that expected from the fluctuation-dissipation theorem. The basic properties were consistently deduced and explicit results for the effective temperature and characteristic frequencies were obtained.

Keywords: Green's function; Kadanoff-Baym ansatz; quantum field theory at finite temperature.

Neste trabalho foi utilizado $\hbar = c = 1$.

Conteúdo

Introdução	11
1 Mecânica Estatística	13
1.1 Teorema de Liouville	14
1.2 Ensembles Estatísticos	17
1.2.1 Ensemble Microcanônico	17
1.2.2 Ensemble Canônico	18
1.2.3 Ensemble Grande-canônico	19
1.3 Equação de Boltzmann	21
1.4 Matriz Densidade	23
1.4.1 Representações de Schrödinger e Heisenberg	23
1.4.2 Matriz Densidade	24
1.4.3 Relação de Kubo-Martin-Schwinger	27
1.4.4 Sistema de Spins	28
2 Campo Escalar Real	30
2.1 Funcional Gerador	31
2.1.1 Função Correlação de Campos	33
2.2 Funções de Green	37
2.3 Aplicação das Funções de Green em um Líquido Quântico	39
2.4 Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita	40
2.5 Formalismo de Tempo Real	41
3 Campo Escalar Fora do Equilíbrio	47
3.1 Teorema de Flutuação-Dissipação	48
3.2 Teoria da Resposta Linear Clássica.	49
3.2.1 Susceptibilidade de um Sistema	51

3.3	Teoria da Resposta Linear Quântica	55
3.3.1	Teorema de Flutuação-Dissipação Quântico	57
3.4	Modelo Fora do Equilíbrio	59
3.4.1	Estudo no Caso em que $\Delta = 0$	61
3.5	Ansatz de Kadanoff-Baym	64
3.5.1	Funções de Green no Espaço dos Momentos	65
3.5.2	Generalização do teorema de flutuação-dissipação para Modelos com Quench	67
3.6	Relação de Kadanoff-Baym para o caso Não Relativístico	69
3.7	Sistemas Glassy	75
3.7.1	Sistema Glassy Exatamente Solúvel	76
	Considerações Finais	80
	Apêndice	82
	Apêndice A Solução da Equação Diferencial no Contorno de Keldysh	83
	Apêndice B Cálculo das Funções de Green	86
	Apêndice C Cálculo das Funções de Green no Espaço de Momentos	89
	Apêndice D Quench com $\delta m^2 = 0$	92
D.1	Verificação da relação flutuação-dissipação	92
D.1.1	Cálculo G_c e G_R no espaço do momento k^0	94

Introdução

As teorias de campos convencionais são formuladas à temperatura zero. Contudo, o mundo real é certamente em temperaturas não nulas, de maneira que as contribuições térmicas podem se tornar relevantes. Estes fenômenos podem ocorrer nas colisões de íons pesados realizadas no *Conseil européen pour la recherche nucléaire* - (CERN), onde um novo estado da matéria, denominado de plasma de quarks e glúons pode ser criado. Do ponto de vista teórico, este estado pode ser estudado no contexto de teorias de campos à temperatura finita.

Podemos também considerar os estágios iniciais do universo, ou alguns objetos astrofísicos onde as temperaturas podem ser muito elevadas. As teorias de campos térmicos são importantes para a compreensão de fenômenos tais como as transições de fase do universo primordial. Desta forma, a cosmologia e a astrofísica representam áreas relevantes onde os cálculos teóricos de teorias quânticas de campos podem ser aplicados e testados.

De especial importância são a Eletrodinâmica Quântica (QED), teoria de calibre que descreve as interações eletromagnéticas, e a Cromodinâmica Quântica (QCD), teoria que descreve as interações fortes das partículas elementares. O campo escalar também é de grande importância, já que este serve de estudo inicial para QED e QCD. Além disso, os campos escalares por possuírem spin zero, descrevem a dinâmica de algumas partículas como o Higgs, hélio-4 e alguns mésons.

Usualmente as teorias de campos são tratadas como sistemas em equilíbrio termodinâmico. Os fenômenos fora de equilíbrio são altamente não lineares e suas equações não são triviais, sendo necessário recorrer a métodos numéricos ou aproximações para poder tratar alguns dos seus problemas. Uma série de problemas físicos interessantes são apresentados como modelos com quench. Um quench consiste em uma repentina mudança na Hamiltoniana (ou Lagrangiana) do sistema. Inicialmente o sistema encontra-se em uma Hamiltoniana $H = H_0$, onde H_0 é uma hamiltoniana simples e conhecida, e em um

determinado instante t o sistema sofre uma mudança da forma $H = H_0 + H_I$, onde a hamiltoniana H_I altera o equilíbrio termodinâmico do sistema. Para tratar este tipo de problema no âmbito da teoria quântica de campos utiliza-se o formalismo de tempo real, onde domínio do tempo está sob o eixo real no plano complexo.

O primeiro capítulo deste texto consiste em uma breve revisão dos ensambles da mecânica estatística. Será abordado como é definida a matriz densidade para sistemas quânticos que é necessária para obter a importante relação de Kubo-Martin-Schwinger (KMS).

No segundo capítulo é abordado o formalismo de tempo real para a teoria quântica de campos à temperatura finita. A partir do formalismo de matriz densidade e da relação KMS é possível obter média temporal de operadores ao longo do eixo real do plano complexo. Também é apresentado o funcional gerador do campo escalar no contorno de Keldysh e as funções de Green do sistema.

No capítulo três foram estudados alguns problemas sobre fenômenos fora do equilíbrio. Através de dois modelos exatamente solúveis foi possível testar algumas hipóteses sobre as funções de Green geralmente usadas em fenômenos fora do equilíbrio. Esses modelos tem como perturbação uma mudança na massa do campo escalar no instante $t = 0$ [1–3]. Assim, foi possível analisar o ansatz de Kadanoff-Baym para esses sistemas e também uma generalização do teorema flutuação-dissipação para modelos do tipo quench. Por fim é verificado que um dos modelos estudados se comporta como um sistema do tipo de *glassy*. É visto que esse modelo possui uma relação do tipo flutuação-dissipação para sistemas vítreos [2]. Os resultados principais deste capítulo estão publicados em [1, 2].

Capítulo 1

Mecânica Estatística

Em mecânica clássica a descrição da dinâmica de um sistema é feita através das equações de movimento, se o sistema é composto de várias partículas este pode ser descrito pelas coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ ($q_1, q_2, q_3 \dots q_s$) e velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ ($\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \dots \dot{q}_s$)[†] onde s é a quantidade de graus de liberdade do sistema. Então a princípio seria possível descrever o sistema ao resolver as equações diferenciais para as coordenadas $\mathbf{q}$. No entanto, isso se torna uma tarefa impossível dado que os sistemas macroscópicos possuem uma quantidade de partículas da ordem do número de Avogadro $N_A \sim 10^{23}$. Mesmo que fosse possível resolver todas as equações de movimento, seria impraticável substituir as condições iniciais ($\mathbf{q}(t=0)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t=0)$) nas suas soluções. Com isso é visto que as propriedades mecânicas ficam cada vez mais complexas e irregulares a medida que o número de partículas N aumenta, porém, novas propriedades mais regulares e comportadas surgem. Essas novas propriedades são mais expressivas a medida que N cresce, logo não faz sentido falar delas em sistemas com poucas partículas [4–6].

Como dito anteriormente, um sistema físico pode ser descrito pelas coordenadas $\mathbf{q}$ e suas velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ onde estes representam o estado físico do sistema. Porém em mecânica estatística, é mais comum descrevê-lo através das coordenadas $\mathbf{q}$ e dos momentos generalizados $\mathbf{p}$ ($p_1, p_2, p_3 \dots p_s$)[‡]. Assim, os estados do sistema são descritos

[†]Neste capítulo, por simplificação, o conjunto das s coordenadas e velocidades generalizadas serão chamadas somente por $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$, respectivamente.

[‡]Neste capítulo, por simplificação, o conjunto dos s momentos generalizados serão chamados somente por $\mathbf{p}$.

pelos pares ordenados $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, logo é útil definir um espaço matemático de dimensão $2s$ chamado espaço de fase. Um estado no espaço de fase é obtido a partir de valores bem definidos das coordenadas q_i e momentos p_i . A medida que o estado varia com o tempo, ou seja, a configuração $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ muda, uma trajetória no espaço de fase vai sendo criada.

1.1 Teorema de Liouville

Seja um sistema isolado $\mathfrak{L}$ que contém um subsistema muito menor $\mathfrak{U}$. Apesar de $\mathfrak{U}$ ser menor que $\mathfrak{L}$, este é grande o suficiente para que não seja possível resolver suas equações de movimento. Se $\mathfrak{U}$ possui N partículas então os graus de liberdade serão $s = 3N$ e o número de equações de movimento serão $6N$ ($3N$ correspondente a $\mathbf{q}$ e $3N$ correspondente a $\mathbf{p}$), logo o espaço de fase do sistema é $6N$ -dimensional. É de se esperar que vários dos possíveis estados do sistema levem a mesma configuração macroscópica a menos das flutuações microscópicas. Devido ao caráter estocástico do sistema é mais conveniente calcular o valor médio temporal dos observáveis físicos. Se a escala de tempo microscópico é τ_c então estamos interessados em avaliar o valor médio de algum observável $O(\mathbf{t})$ em um tempo $\tau \gg \tau_c$:

$$\langle O \rangle(\mathbf{t}) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} dt' O(\mathbf{t}'). \quad (1.1)$$

Para avaliar a média temporal é necessário descrever a evolução do sistema completamente, que como já foi dito, é inviável.

Se o sistema $\mathfrak{U}$ é observado em um tempo τ muito grande este poderá acessar todos os pontos possíveis do espaço de fase. Se em um intervalo $\Delta\tau < \tau$ o sistema se encontra em um microestado* com valores entre $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $(\mathbf{q}' \equiv \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, \mathbf{p}' \equiv \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$, então o hipervolume no espaço de fase, $\Delta\Omega'$, é dado por:

$$\Delta\Omega' = \prod_{i=1}^{3N} \Delta q_i \Delta p_i. \quad (1.2)$$

Assim a probabilidade de encontrar o sistema $\mathfrak{U}$ nesse hipervolume é:

$$\Delta P = \frac{\Delta\tau(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}')}{\tau}, \quad (1.3)$$

*Usualmente os estados microscópicos de um sistema são chamados microestados.

para valores muito próximos entre q e q' e entre p e p' convém expandir em série de Taylor a expressão (1.3) *. A contribuição não nula de primeira ordem da expansão é aquela em que não aparece termos sem derivada, ou seja:

$$\Delta P = \left[\left(\prod_{k=1}^{6N} \partial_{q'_k} \partial_{p'_k} \right) \frac{\Delta \tau(q, p, q', p')}{\tau} \right] \Delta \Omega'. \quad (1.4)$$

No limite infinitesimal essa expressão se reduz a:

$$dP = \rho(q, p, t) \frac{d\Omega'}{h^{3N}} = \rho(q, p, t) d\Omega, \quad (1.5)$$

onde foi feito $d\Omega \equiv \frac{d\Omega'}{h^{3N}}$. A constante h , que tem dimensões de ação, pode ser interpretada como uma hipersuperfície de um microestado do sistema no plano (q, p) . Essa constante no caso quântico, identificada como a constante de Planck, aparece na (1.5) como um limite semiclássico de um sistema quântico. O volume no espaço de fase, h^{3N} , corresponde a um caso semi-clássico entre volume do espaço de fase e o número de estados quânticos. A função $\rho(q, p, t)$ definida como

$$\rho(q, p, t) = \left[\left(\prod_{k=1}^{6N} \partial_{q'_k} \partial_{p'_k} \right) \frac{\Delta \tau(q, p, q', p')}{\tau} \right], \quad (1.6)$$

é a densidade de estados do sistema no espaço de fase ou distribuição densidade de probabilidade.

Uma propriedade da equação (1.5) é que a função P deve ser normalizada:

$$\int dP = \int \rho(q, p, t) d\Omega = 1, \quad (1.7)$$

e o valor médio do observável O pode ser obtido:

$$\langle O \rangle(t) = \int \rho(q, p, t) O(p, q) d\Omega, \quad (1.8)$$

onde foi usada a hipótese de ergodicidade introduzida por Boltzmann, onde assume-se que o tempo de observação do sistema é grande o suficiente para que todos os pontos do

*Expansão em Taylor em várias variáveis em torno do vetor $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ é $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (X_0) (x_i - x_i^0) \right)^k$

espaço de fase sejam visitados, portanto a substituição da média temporal por uma média de *ensemble* no espaço de fase é válida.

Devido a conservação da energia os pontos do espaço de fase devem se conservar e obedecer uma equação da continuidade:

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (1.9)$$

onde $\vec{u} = \sum_{i=1}^{3N} (\dot{q}_i \hat{q}_i + \dot{p}_i \hat{p}_i)$ é a velocidade no espaço de fase e

$$\vec{\nabla} = \sum_{k=1}^{3N} \left(\hat{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \hat{p}_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right),$$

é o operador nabla no espaço de fase. A equação da continuidade fornece que:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial\rho}{\partial q_k} + \frac{\partial\rho}{\partial p_k} + \rho \left(\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial\dot{p}_k}{\partial p_k} \right) \right] = 0, \quad (1.10)$$

onde a (1.10) pode ser identificada como uma derivada total no tempo

$$\frac{d}{dt}\rho = 0, \quad (1.11)$$

ou seja, a função ρ é constante ao longo da trajetória no espaço de fase (teorema de Liouville). Utilizando as equações de Hamilton em (1.10) obtém-se que [7]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \sum_{k=1}^{3N} \{H, \rho\} = 0, \quad (1.12)$$

onde $\{H, \rho\}$ é o parênteses de Poisson. Quando o sistema está em equilíbrio, ou seja, em estado estacionário, ρ não deve depender explicitamente do tempo $\partial\rho/\partial t = 0$ e consequentemente $\{H(q, p), \rho\} = 0$, logo a função de distribuição dependerá apenas de q e p .

1.2 Ensembles Estatísticos

A função de distribuição de um sistema clássico se mantém constante ao longo das suas curvas no espaço de fase. Isso se deve ao fato que ela depende apenas de integrais de movimento* .

Se um sistema possui dois subsistemas, $\mathfrak{U}_1$ e $\mathfrak{U}_2$, estatisticamente independentes a função de distribuição estatística da união dos dois subsistemas, ρ_{12} , é o produto das funções de distribuição de cada um, $\rho_{12} = \rho_1 \rho_2$, logo o logaritmo neperiano de ρ_{12} é:

$$\ln \rho_{12} = \ln \rho_1 + \ln \rho_2, \quad (1.13)$$

portanto o logaritmo de uma função de distribuição deve ser função das integrais de movimento que são aditivas. Na mecânica clássica há sete integrais de movimento: energia total (E), momento linear[†] total ($\vec{P}$) e momento angular total ($\vec{M}$). Portanto $\ln \rho$ pode ser escrito como:

$$\ln \rho = -\alpha - \beta E + \vec{\gamma} \cdot \vec{P} + \vec{\delta} \cdot \vec{M}. \quad (1.14)$$

Onde α é uma constante de normalização ($\int \rho d\Omega = 1$). Para cada subsistema haverá uma equação do tipo (1.14) que ao serem somadas fornecem uma expressão $\ln \rho$ (1.13) para todo o sistema. As constantes β , $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ são obtidas a partir de todas as integrais de movimento dos subsistemas que formam o sistema.

1.2.1 Ensemble Microcanônico

Uma forma mais simples para ρ que satisfaça a equação de Liouville é aquele em que ρ é uma constante no espaço de fase para valores fixos de energia (E_0), momento ($\vec{P}_0$) e momento angular ($\vec{M}_0$):

$$\rho = c \delta(E - E_0) \delta(\vec{P} - \vec{P}_0) \delta(\vec{M} - \vec{M}_0), \quad (1.15)$$

onde c é uma constante e $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. A expressão (1.15) é denominada distribuição do ensemble microcanônico ou simplesmente distribuição microcanônica.

*Integrais de movimento ou integrais primeiras são funções definidas apenas no espaço de fase e são constantes de movimento.

[†]Ou simplesmente momento.

1.2.2 Ensemble Canônico

Se o sistema for dividido em um subsistema $\mathfrak{U}$ e outro $\mathfrak{R}$ com $\mathfrak{R} \gg \mathfrak{U}$, onde os dois são separados por paredes fixas e impermeáveis, a troca de calor é permitida entre eles e o subsistema $\mathfrak{R}$ é chamado de reservatório térmico. Ao escolher um referencial em repouso em relação ao observador do sistema a expressão (1.14) se reduz a

$$\ln \rho = -\alpha - \beta E. \quad (1.16)$$

Então:

$$\rho(q, p) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(q, p)}, \quad (1.17)$$

onde ρ em (1.17) é chamada distribuição canônica. A constante de normalização Z é a chamada função canônica de partição:

$$Z = \int e^{-\beta E(q, p)} d\Omega, \quad (1.18)$$

tomando o valor médio de (1.16):

$$\begin{aligned} \langle \ln \rho \rangle &= \int \rho(q, p) \ln \rho(q, p) d\Omega = -\alpha - \beta \int \rho(q, p) E(q, p) d\Omega \\ \langle \ln \rho \rangle &= -\alpha - \beta U, \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde foi utilizado o fato que o valor médio da energia é a energia interna, U , do sistema:

$$U = \int \rho(q, p) E(q, p) d\Omega, \quad (1.20)$$

tomando o diferencial total de (1.19):

$$d\langle \ln \rho \rangle = -\beta dU. \quad (1.21)$$

Pela segunda lei da termodinâmica [4–6], $TdS = dU$, onde T é a temperatura e S a entropia:

$$\begin{aligned} TdS &= -\frac{1}{\beta} d\langle \ln \rho \rangle \\ S &= -\frac{1}{T\beta} \langle \ln \rho \rangle, \end{aligned} \quad (1.22)$$

como a entropia deve depender somente da energia interna então:

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (1.23)$$

o parâmetro β é o inverso da temperatura* e o parâmetro de proporcionalidade, k_B , é a constante de Boltzmann. A entropia, a menos de uma constante, assume a seguinte forma:

$$S = -k_b \langle \ln \rho \rangle \quad (1.24)$$

1.2.3 Ensemble Grande-canônico

Se o subsistema $\mathcal{U}$ troca partículas com o reservatório a segunda lei da termodinâmica é escrita como:

$$TdS = Td\langle \ln \rho \rangle = dU - \mu dN$$

$$\langle \ln \rho \rangle = -\alpha - \beta(\langle E \rangle - \mu N)$$

$$\langle \ln \rho \rangle = -\alpha - \beta \sum_n \int d\Omega (E - \mu n), \quad (1.25)$$

onde $N = \langle n \rangle$ é o número total de partículas e μ o potencial químico. Agora, a função ρ além de ser uma integral no espaço de fase também é uma soma no número de partículas. A função de distribuição grande-canônica é definida como:

$$\rho(q, p) = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E(q, p) - \mu n)}, \quad (1.26)$$

e a constante de normalização Ξ , chamada grande-função de partição, é dada por:

$$\Xi = \sum_n \int d\Omega e^{-\beta(E(q, p) - \mu n)}. \quad (1.27)$$

É útil escrever a probabilidade de se encontrar o sistema em um determinado estado escrevendo a função de distribuição em termos da energia. Então a equação (1.5) pode ser escrita como:

$$dP = \rho(E) \frac{\partial \Omega}{\partial E} dE, \quad (1.28)$$

onde $\frac{\partial \Omega}{\partial E}$ é o número de microestados com energia entre E e $E + dE$ e $\rho(E) \frac{\partial \Omega}{\partial E}$ é a densidade

*O parâmetro β , por vício de linguagem, também é chamado de temperatura.

de microestados no espaço de energia, que deve ser uma função de distribuição com um pico bem acentuado em $E = U$ com largura ΔU . Então, utilizando a normalização da probabilidade e o fato que a integral de dP pode ser substituída pela área do retângulo de largura ΔU e a densidade de microestados como altura avaliado em U :

$$\rho(U) \frac{\partial \Omega}{\partial U} \Delta U = \rho(U) W(U) = 1$$

$$\rho(U) = \frac{1}{W(U)}, \quad (1.29)$$

onde $W(U) = \frac{\partial \Omega}{\partial U} \Delta U$ é o número de microestados que fornecem a energia U macroscópica do sistema. O valor médio do logaritmo de $\rho(E)$ pode ser visto como o logaritmo da função de distribuição avaliada no ponto U . A entropia (1.24) pode ser reescrita em termos do número de microestados $W(U)$:

$$S = k_B \ln W(U). \quad (1.30)$$

No contexto microcanônico, e levando em conta a escolha de referencial feita, a expressão (1.15) toma a forma:

$$\rho(U) = c \delta(E - U)$$

$$\rho = W^{-1} \delta(E - U), \quad (1.31)$$

onde a função delta de Dirac fixa o valor de energia em W . Sendo assim $W = e^{S(U)/k_B}$ com U fixo. Se o sistema puder trocar energia com o reservatório, então a função de distribuição não apresenta a função delta:

$$\rho(U) = e^{-S(U)/k_B} = e^{\beta(F-U)}, \quad (1.32)$$

onde foi usada a relação para energia livre de Helmholtz $F = U - TS$. Como a função de distribuição é dada por:

$$\rho = \frac{e^{-\beta E}}{Z}, \quad (1.33)$$

e portanto:

$$Z = e^{-\beta F}. \quad (1.34)$$

Para o caso em que há troca de partículas com o reservatório o procedimento é análogo e

resulta em:

$$\rho = e^{\beta(\Phi - U + \mu N)}, \quad (1.35)$$

e a grande função de partição é conectada com a termodinâmica pelo grande potencial termodinâmico:

$$\Phi = -\frac{1}{\beta} \ln \Xi. \quad (1.36)$$

1.3 Equação de Boltzmann

Até agora tudo o que foi dito constitui a mecânica estatística de equilíbrio, ou seja, a função de distribuição não possui dependência explícita com o tempo. Fenômenos fora do equilíbrio são difíceis de serem tratados e sua descrição é diferente da mecânica estatística de equilíbrio. A equação de Boltzmann é o primeiro passo para o início do estudo da mecânica estatística fora do equilíbrio. Esta é uma equação integro-diferencial que descreve a dinâmica da função de distribuição, $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$, que representa o número de moléculas com posição entre $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$ e momento entre $\vec{p}$ e $\vec{p} + d\vec{p}$ no tempo t . A distribuição de Maxwell-Boltzmann é obtida para tempos muito grandes onde o sistema entra em equilíbrio e termaliza.

Reescrevendo a eq. (1.12) e utilizando as equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_q \rho + \vec{F} \cdot \nabla_p \rho &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde $\vec{v} = \sum \dot{q}_i \hat{q}_i$ é a velocidade generalizada no espaço de fase e $\vec{F} = \sum \dot{p}_i \hat{p}_i$ é a força externa que atua no sistema. No caso da distribuição f que satisfaz a eq. (1.37) é a chamada equação de Boltzmann sem colisões:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_q f + \vec{F} \cdot \nabla_p f = 0. \quad (1.38)$$

Suponha que um determinado gás em equilíbrio, que segue a distribuição de Boltzmann, seja perturbado de forma que assuma um novo tipo de distribuição. O processo de termalização só será possível se as partículas interagirem entre si. Logo a equação (1.38) não será nula mas dependerá das interações entre as partículas. Na presença de

interação entre as partículas a função de distribuição varia no tempo através de um fator $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}}$ que contém a informação das interações. Em um intervalo de tempo dt a função de distribuição varia da seguinte forma [5, 6, 8]

$$f(\vec{r} + \vec{v}dt, \vec{p} + \vec{F}dt, t + dt) - f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{q}} f + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} dt \quad (1.39)$$

Para encontrar o fator de colisão é necessário levar em consideração que [8]:

- O gás em estudo é rarefeito e as interações binárias entre as partículas prevalecem em relação a colisões entre três partículas etc.
- Durante as colisões apenas são consideradas as forças de interação e desprezadas as forças externas.
- *Stosszahlansatz* ou hipótese do caos molecular afirma que a distribuição de duas partículas são descorrelacionadas, ou seja: $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, t) = f(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t)f(\vec{r}_2, \vec{p}_2, t)$ ou simplesmente $f_{12} = f_1 f_2$

Levando em consideração a conservação da energia e do momento, é possível computar o termo de colisão através calculo de espalhamento de duas partículas [5, 6, 8]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{q}} f + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} f = \int \sigma(\Omega) d\Omega \int d\vec{p}_1 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2), \quad (1.40)$$

onde a $\sigma(\Omega)$ é a seção de choque de espalhamento em função do ângulo sólido $d\Omega$. O último termo da equação (1.40) mostra que o equilíbrio é atingido quando $f_1 f_2 = f'_1 f'_2$ e portanto a função de distribuição obedece a eq. (1.38). No equilíbrio a função de distribuição deve ser a distribuição de Boltzmann. No equilíbrio vale que [5]

$$\ln f_1 + \ln f_2 = \ln f'_1 + \ln f'_2 \quad (1.41)$$

que é uma expressão que mostra uma lei de conservação. Escrevendo a função f em termos de grandezas que se conservam durante a colisão que no caso é a energia cinética:

$$\ln f = \ln A + B(\vec{v} - \vec{v}_0)^2, \quad (1.42)$$

assumindo a velocidade média nula $\langle \vec{v} \rangle = 0$, então $\vec{v}_0 = 0$. Usando o fato que a energia cinética média é $3k_B T/2$ e a integração da função f é igual ao número total de partículas

$$\int d\vec{r} d\vec{p} f = N,$$

então as constantes A e B são

$$A = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \quad \text{e} \quad B = -\frac{m}{2k_B T}.$$

E portanto

$$f(v) = \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2}, \quad (1.43)$$

que é a distribuição de Maxwell-Boltzmann de um gás em equilíbrio.

1.4 Matriz Densidade

1.4.1 Representações de Schrödinger e Heisenberg

Ao obter a densidade no espaço de fase, de um sistema físico, é possível obter o valor médio dos observáveis desejáveis utilizando a função de distribuição de probabilidade clássica eq. (1.8). Para sistemas quânticos há um análogo da função de probabilidades: o operador Matriz densidade.

Em mecânica quântica um estado de uma partícula não é mais representado pelos valores de coordenada, $\mathbf{q}$, e momento $\mathbf{p}$, e sim por um vetor de estado, $|\Psi(t)\rangle_S$ que contém toda a informação quântica do sistema. A dinâmica do estado é governada pela equação de Schrödinger da mecânica quântica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_S = \hat{H} |\Psi(t)\rangle_S,$$

onde $\hat{H}$ é o hamiltoniano do sistema. A solução dessa equação para o caso em que $\hat{H}$ é independente do tempo é da forma

$$|\Psi(t)\rangle_S = \mathcal{U}(t, t_i) |\Psi(t_i)\rangle_S, \quad (1.44)$$

onde $\mathcal{U}(t, t_i) = e^{-i\hat{H}(t-t_i)}$ é o operador de evolução temporal, ele é o responsável em evoluir

temporalmente o estado de t_i para t . A projeção do vetor de estado nas coordenadas é a função de onda da partícula

$$\langle q|\Psi(t)\rangle_S = \Psi(q, t),$$

onde $|q\rangle$ são os autovalores do operador $\hat{q}$. Os observáveis físicos são representados matematicamente por operadores lineares hermitianos. O valor médio de um operador $\hat{O}_S$ num instante t é obtido através do vetor de estado aplicado no operador:

$$\langle O(t) \rangle = {}_S \langle \Psi(t) | \hat{O}_S | \Psi(t) \rangle_S, \quad (1.45)$$

é importante notar que a dependência temporal está contida somente no vetor de estado $|\Psi(t)\rangle_S$ sendo o operador constante no tempo e sem dinâmica. Essa abordagem da mecânica quântica é chamada de representação de Schrödinger, representado pelo sobrescrito S.

A descrição em que os operadores evoluem no tempo e os estados permanecem constante é chamada de representação de Heisenberg. O estado $|\Psi\rangle_H$ é igual ao estados na representação de Schrödinger no instante inicial, que por simplicidade será feito $t_i = 0$. Logo $|\Psi\rangle_H = |\Psi(t_i = 0)\rangle_S$. O valor médio do operador $\hat{O}_H$ na representação de Heisenberg é:

$$\langle O(t) \rangle = {}_H \langle \Psi | \hat{O}_H(t) | \Psi \rangle_H, \quad (1.46)$$

e a evolução temporal do operador é dado pela equação de Heisenberg:

$$\frac{d}{dt} \hat{O}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}_H] + \frac{\partial O}{\partial t}. \quad (1.47)$$

1.4.2 Matriz Densidade

Assim como a densidade no espaço representa a função de distribuição de probabilidade do sistema clássico, também é possível fazer o mesmo na mecânica quântica. Um sistema quântico em equilíbrio termodinâmico $\mathfrak{L}$ pode ser descrito por um vetor de estado $|\Psi(t)\rangle_S$ na representação de Schrödinger. Esse vetor de estado será a soma de todos os possíveis autoestados do sistema. O conjunto de vetores de estados que representam todos os

estados do sistema em questão é um conjunto ortonormal e completo $|\psi_i(t)\rangle_S$, logo:

$${}_S\langle\psi_i(t)|\psi_j(t)\rangle_S = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_i |\psi_i(t)\rangle_S {}_S\langle\psi_i(t)| = \hat{1},$$

o vetor de estado é uma combinação linear dos vetores acima:

$$|\Psi(t)\rangle_S = \sum_i a_i(t) |\psi_i(t)\rangle_S, \quad (1.48)$$

com isso a média de um operador na representação de Schrödinger(1.45) fica na seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \sum_{ij} a_j^*(t) a_i(t) {}_S\langle\psi_i(t)| O_{ij} |\psi_j(t)\rangle_S \\ \langle O \rangle &= \text{Tr}[\hat{\rho}_S(t) \hat{O}_S], \end{aligned} \quad (1.49)$$

onde foi definido o operador $\hat{\rho}_S = \sum_{ij} a_i^*(t) a_j(t) |\psi_i(t)\rangle_S {}_S\langle\psi_j(t)| = |\Psi(t)\rangle_S {}_S\langle\Psi(t)|$ chamado matriz densidade. A evolução do operador matriz densidade é dada pela equação de von Neumann:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_S, \hat{H}]. \quad (1.50)$$

Como foi dito, o sistema $\mathcal{L}$ está em equilíbrio termodinâmico e a evolução temporal está ligada somente aos vetores de estado, portanto os coeficientes $a_i(t)$ são independentes do tempo. Porém, esses coeficientes estão sujeitos a flutuações térmicas estocásticas. Essas flutuações acontecem por um curto período de tempo:

$$\begin{aligned} \Delta E \cdot \Delta t &\sim \hbar \\ k_B T \cdot \Delta t &\sim \hbar \\ \tau \equiv \Delta t &\sim \frac{\hbar}{k_B T}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

então o tempo das flutuações $\tau \sim \beta$ em unidades naturais. Então, pela hipótese ergódica, os observáveis calculados são obtidos através de médias de *ensemble*. Portanto na eq. (1.49) é necessário tomar o valor médio dos coeficientes de $\hat{\rho}_S$

$$\rho_{ij}(\beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta dt a_i(t) a_j^*(t), \quad (1.52)$$

portanto,

$$\langle O \rangle_\beta = \text{Tr } \hat{\rho}_s(\beta) \hat{O}, \quad (1.53)$$

onde

$$\hat{\rho}_s(\beta) = \sum_{ij} \rho_{ij}(\beta) |\psi_i(t)\rangle_S \langle \psi_j(t)|. \quad (1.54)$$

A entropia de um sistema quântico é construída a partir do objeto que descreve completamente o sistema. Em um sistema quântico à temperatura nula o vetor de estado é suficiente para descrever a sua dinâmica. Quando o sistema está a temperatura não nula a matriz densidade é a que descreve completamente o sistema e possui a habilidade de calcular observáveis. Logo, neste último caso, a entropia é calculada a partir da matriz densidade. O procedimento feito em (1.2.2) também é válido neste caso, então de acordo com a equação (1.24):

$$\begin{aligned} S &= -k_B \langle \ln \hat{\rho} \rangle \\ S &= -k_B \text{Tr } \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \\ S &= -k_B \sum_i \rho_{ii} \ln \rho_{ii}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde foi utilizada a (1.53). De acordo com as (1.16) e (1.17) é possível escrever a matriz densidade:

$$\rho_{ii} = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}, \quad (1.56)$$

onde agora a energia E_i do i -ésimo estado. A normalização Z é a função de partição dada agora por:

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = \text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}, \quad (1.57)$$

e por fim o operador matriz densidade pode ser escrito como:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z}. \quad (1.58)$$

Se o sistema em questão tiver o potencial químico, μ , não nulo a matriz densidade assume a forma

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{\Xi}. \quad (1.59)$$

onde $\hat{N}$ é o operador número.

1.4.3 Relação de Kubo-Martin-Schwinger

A evolução temporal de um operador na representação de Heisenberg dada pela equação (1.47) possui solução, para o caso em que a hamiltoniana não depende do tempo, dada por [9]:

$$A_H(t) = e^{i\hat{H}t} A e^{-i\hat{H}t}, \quad (1.60)$$

então, com o resultado acima e a propriedade cíclica do traço de dois operadores, podemos escrever uma função de correlação térmica entre os operadores $A_H(t)$ e $B_H(t')$ [3, 10]

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) B_H(t') \rangle &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}} A_H(t) B_H(t') \right] \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}} A_H(t) e^{\beta\hat{H}} e^{-\beta\hat{H}} B_H(t') \right] \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[A_H(t + i\beta) e^{-\beta\hat{H}} B_H(t') \right] \\ &= \langle B_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle, \end{aligned} \quad (1.61)$$

onde o resultado acima é conhecido como relação de Kubo-Martin-Schwinger (KMS). No caso da correlação do operador consigo mesmo:

$$\langle A_H(t) A_H(t') \rangle = \langle A_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle \quad (1.62)$$

que é uma importante relação no estudo de mecânica quântica e teoria quântica de campos à temperatura finita. As funções de Green em teoria quântica de campos são definidas como valores médios da correlação dos operadores de campos, a relação (1.62) impõe uma condição de contorno periódica que é útil para descrição dinâmica de sistemas quânticos como no apêndice A.

Figura 1.1: Probabilidade do sistema possuir spin down (linha contínua) ou up (linha tracejada) em função da temperatura.

1.4.4 Sistema de Spins

Como exemplo, vamos considerar um sistema de spin ± 1 em um campo magnético uniforme na direção z que é regido pela hamiltoniana $\hat{H} = -\omega \hbar \sigma_z$, onde ω , $\hbar$ e σ_z são: frequência de precessão do spin, constante de Planck e a terceira componente da matriz de Pauli respectivamente. Nesse sistema será considerado que não há variação no número de partículas e portanto $\mu = 0$. Os autovalores e autovetores dessa hamiltoniana são

$$\begin{aligned} E &= -\omega \hbar & \text{para } |\uparrow\rangle \\ E &= \omega \hbar & \text{para } |\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Usando a expressão da matriz densidade (1.58) obtemos:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{\beta\omega\hbar} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + e^{-\beta\omega\hbar} |\downarrow\rangle \langle\downarrow|}{e^{\beta\omega\hbar} + e^{-\beta\omega\hbar}}, \quad (1.64)$$

onde cada componente nos fornece a probabilidade de encontrar a partícula com spin up ou down:

$$P(\uparrow) = \frac{e^{\beta\omega\hbar}}{e^{\beta\omega\hbar} + e^{-\beta\omega\hbar}} = \frac{1}{1 + e^{-2\beta\omega\hbar}}, \quad (1.65)$$

$$P(\downarrow) = \frac{1}{1 + e^{2\beta\omega\hbar}}. \quad (1.66)$$

Figura 1.2: Energia do sistema em função da temperatura.

As equações (1.65) e (1.66) são representadas pela fig.(1.1). Para $T \rightarrow 0$ vemos que há apenas spin up, pois nessa região de temperatura o sistema encontra-se no estado fundamental ou mínimo de energia $E = -\omega\hbar$. Para $T \rightarrow \infty$ vemos que os efeitos térmicos se sobrepõem aos efeitos quânticos e o sistema possui igual probabilidade de ter spin up ou down. O valor médio da energia é dado por (1.53):

$$E = \text{Tr } \hat{H}\hat{\rho} = \langle \uparrow | \hat{H}\hat{\rho} | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | \hat{H}\hat{\rho} | \downarrow \rangle = \frac{-\omega\hbar e^{\beta\omega\hbar} + \omega\hbar e^{-\beta\omega\hbar}}{e^{\beta\omega\hbar} + e^{-\beta\omega\hbar}} = -\omega\hbar \tanh[\beta\omega\hbar]. \quad (1.67)$$

Pela fig.(1.2) vemos que para $T \rightarrow 0$ a energia do sistema vai para o seu mínimo, para $T \rightarrow \infty$ a energia atinge o valor dado pela média de cada estado com probabilidade de 50% cada de acordo com a fig.(1.1), logo $E = \frac{-\omega\hbar + \omega\hbar}{2} = 0$.

Com o uso da expressão da hamiltoniana é possível obter o valor médio do operador de spin $\langle S_z \rangle = \hbar\sigma_z$ dado por

$$\langle S_z \rangle = \hbar \tanh[\beta\omega\hbar], \quad (1.68)$$

que é a conhecida fórmula de Brillouin. Fazendo análise análoga a da energia conclui-se que para $T \rightarrow 0$ temos $\langle S_z \rangle \rightarrow \hbar$, e $T \rightarrow \infty$ temos $\langle S_z \rangle \rightarrow 0$.

Capítulo 2

Campo Escalar Real

O campo escalar real faz parte do princípio dos estudos em teoria quântica de campos. Diferentemente do campo escalar complexo ele possui carga nula. Seu spin também é nulo e portanto suas partículas obedecem a estatística de Bose-Einstein.

Há duas formas de descrever quanticamente o campo escalar real: através da quantização canônica ou por integrais de trajetória.

A quantização canônica consiste em obter as equações de movimento via equações de Euler-Lagrange e impor a relação de comutação $[\phi(\vec{x}, t), \partial_0 \phi(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})$ onde ϕ é operador de campo e $\partial_0 \phi$ o seu momento canonicamente conjugado [11–14].

A quantização via integrais de trajetória consiste em encontrar o propagador quântico através da soma ponderada de todos os caminhos possíveis entre dois pontos, porém com um peso e^{iS} , onde S é a ação. Há interferência entre os termos dessa soma e como consequência o caminho clássico é o mais expressivo. Uma das vantagens desse processo de quantização vem do fato deste quantizar teorias de Yang-Mills sem problemas na fixação de calibre [11–14]. Através de integrais de trajetória é possível obter as funções de Green através da derivada funcional de um objeto chamado funcional gerador, $Z[J]$, que nada mais é do que a amplitude de transição entre o vácuo em um tempo $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$ na presença de uma fonte $J(x)$ do campo.

Neste capítulo será adotado o formalismo de integrais de trajetória. Porém, todos os resultados podem ser obtidos via quantização canônica.

2.1 Funcional Gerador

O funcional gerador do campo escalar real é da forma

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle \propto Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\phi^2(x) \right] \right\}. \quad (2.1)$$

onde o parâmetro ε é o regularizador que garante a convergência de Z , a constante N é uma normalização e $J(x)$ a fonte do campo escalar. $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangiana* do sistema. No caso do campo escalar livre a lagrangiana possui a forma

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi \quad (2.2)$$

onde $\square$ é o operador d'alembertiano e m a massa do escalar. O funcional gerador assume a forma

$$Z_0[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(\square + m^2 - i\varepsilon)\phi - J\phi \right] \right\}. \quad (2.3)$$

fazendo a seguinte mudança no campo $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$, onde ϕ_0 é o campo clássico que obedece a equação de Klein-Gordon com fontes:

$$(\square + m^2 - i\varepsilon)\phi_0(x) = J(x) \quad (2.4)$$

cuja solução é:

$$\phi_0(x) = - \int G_F(x-y)J(y)d^4y \quad (2.5)$$

onde $G_F(x-y)$ é o propagador de Feynmann ou a função de 2-pontos. Substituindo (2.5) em (2.4):

$$- \int d^4y (\square_x + m^2 - i\varepsilon)G_F(x-y)J(y) = J(x) \quad (2.6)$$

e portando a equação diferencial para o propagador, que satisfaz a relação acima, é:

$$(\square_x + m^2 - i\varepsilon)G_F(x-y) = -\delta^4(x-y). \quad (2.7)$$

*ou simplesmente lagrangiana

A solução é obtida através da transformada de Fourier da equação acima:

$$G_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.8)$$

O funcional gerador, depois da mudança de variáveis, assume a seguinte forma

$$Z_0[J] = N \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x - y) J(y) \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right] \right\}. \quad (2.9)$$

As transições vácuo-vácuo onde não há fontes devem ser normalizadas, ou seja, $Z_0[0] = 1$.

Logo a constante de normalização N pode ser escrita como:

$$N = \left\{ \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi(\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right) \right] \right\}^{-1}.$$

Assim, o funcional gerador é dado por

$$Z_0[J] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x - y) J(y) \right\}, \quad (2.10)$$

ou pela (2.1):

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(\square + m^2 - i\epsilon) \phi - J\phi \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi(\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right) \right]}. \quad (2.11)$$

Através da derivada funcional da equação (2.10) é possível obter a função de dois pontos

$$\frac{\delta Z}{\delta J(x)} = -\frac{i}{2} \int d^4z d^4z' 2G_F(z - z') J(z') \delta^4(x - z) Z_0[J] = -i \int d^4z G_F(x - z') J(z') Z_0[J]$$

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0} = -i G_F(x - y) \equiv -\tau(x, y) \quad (2.12)$$

que é a função de 2 pontos do campo escalar. Portanto é possível gerar as funções de n -pontos, $\tau(x_1, x_2, \dots, x_n)$, através da derivada do funcional gerador:

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta Z}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \quad (2.13)$$

2.1.1 Função Correlação de Campos

Para calcular as funções de correlação de campos no formalismo de integrais de trajetória podemos analisar o seguinte funcional:

$$I = N \int \mathcal{D}\phi \phi(x_i)\phi(x_j) \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi) + \frac{i}{2} \varepsilon \phi^2(x) \right] \right\} = N \int \mathcal{D}\phi \phi(x_i)\phi(x_j) \exp \{ iS[\phi] \}$$

onde $S[\phi]$ é a ação do campo. A construção do funcional Z é demonstrada em [12–14] e o procedimento para obtenção das funções de correlação é análogo. O funcional I pode ser escrito através da inserção de relações de completude do campo ϕ em diferentes valores de x^μ :

$$I = N \int d\phi_1 \dots d\phi_n \langle 0 | e^{-iHt_n \delta t} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \dots | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | e^{-iHt_2} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-iHt_1} | 0 \rangle \phi_i(x_i) \phi_j(x_j) \quad (2.14)$$

usando o fato que $\phi_i | \phi_i \rangle = \hat{\phi}_i | \phi_i \rangle$ e que os operadores podem sair das integrais. Um fato importante é a ordem em que aparecem os operadores $\hat{\phi}_1$ e $\hat{\phi}_2$; o operador que for função de tempos futuros fica a esquerda e tempos passados a direita. Logo é interessante definir o produto temporalmente ordenado $T[\phi(x_1)\phi(x_2)]$ onde

$$T[\phi(x_1)\phi(x_2)] = \begin{cases} \phi(x_1)\phi(x_2) & \text{se } t_1 > t_2 \\ \phi(x_2)\phi(x_1) & \text{se } t_2 > t_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

então o funcional I fornece a função de correlação dos campos

$$\langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) \exp \{ i \int d^4x \mathcal{L}[\phi] \}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \{ i \int d^4x \mathcal{L}[\phi] \}} \quad (2.16)$$

É interessante notar que o lado direito da equação acima nada mais é que a derivada segunda do funcional gerador em relação a J tomando em seguida o limite $J \rightarrow 0$.

$$\langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \quad (2.17)$$

$$\langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle = iG_F(x_1 - x_2) \quad (2.18)$$

Logo o valor da função de correlação de $T[\phi(x_1)\phi(x_2)]$ é o propagador de Feynmann. A função correlação para n campos é obtida de modo similar a de dois campos:

$$\langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}[\phi] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}[\phi] \right\}} \quad (2.19)$$

$$\langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1) \dots J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (2.20)$$

Se o campo escalar tiver interações com si próprio então a lagrangiana terá um termo que será um polinômio do campo. As teorias mais utilizadas para estudo são as teorias *lambda phi 4* ($\frac{\lambda}{4!} \phi^4$) e *lambda phi 3* ($\frac{\lambda}{3!} \phi^3$) onde λ é o acoplamento da interação. A lagrangiana terá a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\phi] + \mathcal{L}_I[\phi]$$

onde $\mathcal{L}_I$ é o termo de interação da lagrangiana. O funcional gerador (2.1) mantém sua forma e é possível escrevê-lo como

$$Z[J] = N' \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I[\phi] \right\} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_0(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2} \epsilon \phi^2(x) \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Realizando uma expansão em série da primeira exponencial e utilizando que

$$\phi(x) \exp \left(i \int d^4x j \phi \right) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \exp \left(i \int d^4x j \phi \right),$$

o funcional gerador assume a seguinte forma:

$$Z[J] = N' \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_0(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2} \epsilon \phi^2(x) \right] \right\}$$

$$Z[J] = N' \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right\} Z_0[J], \quad (2.22)$$

onde N' é a nova constante de normalização que satisfaz $Z[0] = 1$:

$$N' = \left\{ \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right] Z_0[J] \right\}_{j=0}^{-1}.$$

Agora utilizando a (2.10), o funcional gerador é dado por

$$Z[j] = \frac{\exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right\}}{\exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right\}} \Big|_{j=0}. \quad (2.23)$$

O funcional gerador com interações pode ser utilizado para escrever a função de correlação de dois pontos ao expandir o exponencial da interação e obter correções do propagador livre. O propagador exato é obtido através de uma soma entre o propagador livre e infinitos termos. Em uma teoria em que a lagrangiana de interação é $\mathcal{L}_I = \frac{\lambda \Phi^4}{4!}$ é possível achar o funcional gerador através das derivadas do funcional gerador livre. Expandindo o exponencial que contem o termo de interação em primeira ordem em λ temos $1 + i\mathcal{L}_I$ e haverá 4 derivadas em relação a J no mesmo ponto do espaço-tempo. Realizando as 4 derivadas do numerador temos [14]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)} \right)^4 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right\} = \\ & \left[-3G_F(0)^2 + 6iG_F(0) \left(\int G_F(z-x) J(x) \right)^2 + \left(\int G_F(z-x) J(x) \right)^4 \right] \times \\ & \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

O propagador $G_F(x-y)$ representa a amplitude de probabilidade de uma partícula ir de x para y ou vice-versa. Logo é melhor representa-lo através dos diagramas de Feynman: $G_F(x-y) \rightarrow x \text{ --- } y$. A propagação entre pontos iguais é representada como: $G_F(0) \rightarrow \bigcirc$. Então é possível reescrever o numerador como:

$$\left[1 - \int d^4z \frac{\lambda}{4!} \left(-3 \bigcirc \bigcirc + 6i \text{ } \times \text{---} \bigcirc \text{---} \times + \text{ } \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \right) \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right] \quad (2.25)$$

onde a cruz nos diagramas representa a fonte J . Fazendo $J = 0$ obtém-se o denominador

$$\left\{ 1 + \int d^4z \frac{3\lambda}{4!} \bigcirc \bigcirc \right\}^{-1} \rightarrow 1 - \int d^4z \frac{3\lambda}{4!} \bigcirc \bigcirc$$

onde foi utilizado $(1+x)^{-1} = 1-x$ para x pequeno. Juntando o numerador e denominador o funcional gerador assume a forma:

$$Z[J] = \left[1 - \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \left(6i \text{ } \times \text{---} \bigcirc \text{---} \times + \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \end{array} \right) \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right] \quad (2.26)$$

A função de dois pontos com a primeira correção é dada pela derivada em relação a $J(x)$ e $J(y)$ na equação acima. A derivada do primeiro termo do funcional gera o propagador livre. A derivada segunda do segundo termo consiste em tirar as cruces do diagrama e substituir pelos pontos x e y e multiplicar por 2 já que as derivadas atuam analogamente a $dx^2/d^2x = 2$. A função de dois pontos até primeira ordem em teoria de perturbação é:

$$\tau(x, y) = i \text{---} - \frac{\lambda}{2} \text{---} \bigcirc \text{---}$$

A medida em que se vai aumentando a ordem em teoria de perturbação mais diagramas vão surgindo e suas diferentes formas vão depender da estrutura da interação. Se considerarmos todos os diagramas 1PI* (one particle irreducible) como perturbação então pode-se escrever o propagador completo como:

$$\begin{aligned} \text{---} \text{---} &= \text{---} + \text{---} \text{ } \text{ } \text{---} + \text{---} \text{ } \text{ } \text{ } \text{---} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{---} \text{ } \text{ } \text{ } \text{---}^n \\ &= \frac{\text{---}}{1 - \text{---}}. \end{aligned}$$

o diagrama da esquerda é o propagador exato, os círculos listrados representam as interações $\Sigma(p)$. Se estivermos no espaço dos momentos o diagrama acima pode ser escrito como

$$\Delta(p) = \frac{G_F^{(0)}(p)}{1 - \Sigma(p) G_F^{(0)}(p)} \quad (2.27)$$

*Diagramas que não podem ser separados em partes menores iguais a primeira

e por fim chega-se na equação de Dyson para o propagador

$$\Delta(\mathbf{p}) = G_F^{(0)}(\mathbf{p}) + \Delta(\mathbf{p})\Sigma(\mathbf{p})G_F^{(0)}(\mathbf{p}) \quad (2.28)$$

No espaço das configurações possui a seguinte forma:

$$\Delta(x, y) = G_F^{(0)}(x - y) + \int d^4z d^4z' \Delta(x, z) \Sigma(z, z') G_F^{(0)}(z' - y) \quad (2.29)$$

2.2 Funções de Green

Foi apresentado na seção anterior o propagador de Feynmann que é útil para descrever dinâmica dos campos. A partir da definição da função de Green de Feynmann é possível escrevê-la como:

$$iG_F(t, t') = \langle T[\phi(t)\phi(t')] \rangle = \theta(t - t') \langle \phi(t)\phi(t') \rangle + \theta(t' - t) \langle \phi(t')\phi(t) \rangle \quad (2.30)$$

Introduziremos as funções *greater*, $G^>$, e *lesser* $G^<$ da seguinte forma

$$G_F(t, t') = \theta(t - t') G^>(t, t') + \theta(t' - t) G^<(t, t') \quad (2.31)$$

onde $iG^>(t, t') = \langle \phi(t)\phi(t') \rangle$ e $iG^<(t, t') = \langle \phi(t')\phi(t) \rangle$. Escreveremos as funções de Green no espaço misto onde as variáveis do propagador são o tempo $t = x^0 - y^0$ e frequência $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$. Então

$$G_F(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{k^0^2 - \omega^2 + i\epsilon}$$

então temos que:

$$iG_F = \frac{1}{2\pi} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{2\omega} \left[\frac{1}{k^0 - (\omega - i\epsilon)} - \frac{1}{k^0 + (\omega - i\epsilon)} \right] \quad (2.32)$$

Usando a relação para a função de Heaviside $\int dk^0 \frac{e^{-i\omega t}}{k^0 \mp (\omega - i\epsilon)} = \mp 2\pi i e^{-i\omega t} \theta(\pm t)$ a função de Green de Feynmann assume a forma

$$G_F = \frac{-i}{2\omega} [e^{-i\omega t} \theta(t) + e^{i\omega t} \theta(-t)] \quad (2.33)$$

Comparando com (2.31) é possível identificar as funções *greater* e *lesser*:

$$\begin{aligned} G^>(t, t') &= \frac{-i}{2\omega} e^{-i\omega t} \\ G^<(t, t') &= \frac{-i}{2\omega} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Outras funções de Green interessantes são as causais. Por exemplo, o valor esperado de vácuo do comutador é dado por (assumindo $x^0 > y^0$)

$$\langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle = iG^> - iG^< = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \quad (2.35)$$

Supondo $(x-y)^2 < 0$ e realizando uma transformação de Lorentz no segundo termo (isso é possível pois cada termo é invariante de Lorentz) $(x-y) \rightarrow -(x-y)$ o comutador se anula. Logo não há transformação de Lorentz capaz de gerar a mudança $(x-y) \rightarrow -(x-y)$ sem anular o comutador. Logo esse é um comutador causal que tem valor não nulo para deslocamentos do tipo tempo. Esse comutador é chamado de propagador retardado

$$iG_R = \theta(x^0 - y^0) \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle. \quad (2.36)$$

O caso contrário em que $y^0 > x^0$ é chamado de propagador avançado

$$iG_A = \theta(y^0 - x^0) \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle \quad (2.37)$$

Utilizando as expressões (2.34) é possível expressar as funções de Green avançada e retardada

$$\begin{aligned} G_R &= -\frac{\theta(x^0 - y^0)}{\omega} \sin \omega(x^0 - y^0) \\ G_A &= \frac{\theta(y^0 - x^0)}{\omega} \sin \omega(x^0 - y^0) \end{aligned} \quad (2.38)$$

outra função importante é a propagador Hadamard ou apenas função correlação é dada pelo anti comutador dos campos:

$$G_c(x^0, y^0) = -i \langle \{ \phi(x^0) \phi(y^0) \} \rangle = -\frac{i}{\omega} \cos \omega(x^0 - y^0) \quad (2.39)$$

A função de Green dada pela equação (2.35) é chamada propagador de Jordan ou função

espectral

$$\begin{aligned} G_\rho &= \langle [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] \rangle \\ G_\rho &= -\frac{1}{\omega} \sin \omega(\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}^0) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Outra relação importante entre a função de Green retardada e a função espectral é:

$$\begin{aligned} G_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= G_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= G_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_R(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Realizando a transformada de Fourier na expressão acima temos que $\tilde{G}_\rho(\mathbf{k}) = 2i\text{Im}\tilde{G}_R(\mathbf{k})$

2.3 Aplicação das Funções de Green em um Líquido Quântico

Um exemplo mais prático do uso dessas funções de Green é sobre a teoria dos líquidos quânticos na matéria condensada onde a descrição do sistema é não relativística [15]. No presente caso é mais útil e intuitivo utilizar o formalismo de segunda quantização à integrais de trajetória devido ao fato que no primeiro as propriedades estatísticas como as distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein são melhor assimiladas aos conceitos de operadores de criação e destruição. No âmbito da segunda quantização os operadores de campo podem ser descritos como operadores de criação, $\mathbf{a}^\dagger$ e destruição, $\mathbf{a}$. Os operadores de campo podem ser escritos como

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) \quad (2.42)$$

onde $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ a função de onda no âmbito da primeira quantização. Um caso interessante são os de elétrons livres onde a hamiltoniana é dada por

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \quad (2.43)$$

onde temos a relação de anticomutação $\{\Psi(\vec{r})\Psi^\dagger(\vec{r}')\} = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. A função greater é dada por $G^>(\mathbf{k}, t, t') = -i\langle a_k^\dagger(t)a_k(t') \rangle$ [15] onde foi usado o fato que $iG^> = \langle \Psi(\mathbf{r})\Psi^\dagger(\mathbf{r}') \rangle$. Pela equação de Heisenberg o operador a evolui como $a(t) = a_k e^{-i\xi_k t}$. Logo a função greater assume a seguinte forma:

$$G^>(\mathbf{k}, t, t') = -i\langle a_k a_k^\dagger \rangle e^{-i\xi_k(t-t')} - i(1 - n_F(k))e^{i\xi_k(t-t')}$$

onde foi usado a relação de anti comutação para os operadores de criação e destruição e o fato que o valor médio do operador número é a distribuição de Fermi-Dirac $\langle a_k^\dagger a_k \rangle = n_F(k)$. A função lesser pode ser obtida de forma análoga $G^< = i n_F(k) e^{-i\xi_k(t-t')}$. A função de Green retardada é obtida através do comutador dos operadores de campo acompanhados da função de Heaviside:

$$G_R = -i\theta(t - t')e^{-i\xi_k(t-t')}$$

.

A função de Green greater mostra a propagação dos elétrons pois a distribuição $1 - n_F$ representa a distribuição de buracos (vacância de elétrons) que é justamente os estados vazios onde os elétrons podem se acomodar. A função lesser representa a propagação dos buracos para uma região onde há elétrons. Por não depender da temperatura a função de Green retardada possui uma natureza dinâmica e não térmica. A função espectral é dada por $G_\rho = -ie^{-i\xi_k(t-t')}$. Realizando uma transformada de Fourier em G_ρ temos que:

$$\tilde{G}_\rho(k) = 2\pi\delta(\omega - \xi_k) \quad (2.44)$$

no presente caso de elétrons livres a função delta de Dirac diz que a energia ω só ocorre caso um elétron ocupe o estado k com energia $\xi_k = \omega$.

2.4 Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita

Como visto anteriormente o formalismo de matriz densidade é muito útil para tratar sistemas quânticos com temperatura. Nesse mesmo ponto de vista é possível aplicá-lo a teoria quântica de campos. A mecânica quântica pode ser descrita através das representações de Heisenberg e Schrödinger. Na representação de Heisenberg os operadores evoluem no tempo enquanto os estados quânticos permanecem fixos. Se estivermos na

representação de Schrödinger os estados quânticos evoluem temporalmente enquanto os operadores permanecem fixos, o único operador nessa representação que não é constante no tempo é o operador matriz densidade pois ele é criado através do produto externo dos estados quânticos.

Para o estudo da TQCTF são muito utilizados dois formalismos: o formalismo de tempo imaginário e o formalismo de tempo real. O formalismo de tempo imaginário visa tratar fenômenos em que o sistema se encontra a uma temperatura β^{-1} e está em equilíbrio termodinâmico. O formalismo de tempo real estuda sistemas também a uma temperatura β^{-1} , mas que não necessariamente encontram-se em equilíbrio termodinâmico. A Hamiltoniana destes sistemas tem como característica uma dependência explícita do tempo. Com isso as funções de Green não dependem somente das diferenças de tempo $x_0 - y_0$, mas também do tempo médio $\frac{x_0 + y_0}{2}$ e perdem a invariância por translação temporal.

2.5 Formalismo de Tempo Real

Como visto antes, podemos descrever um sistema quântico através de sua matriz densidade, onde esse operador possui toda informação do sistema. Ela é composta pelo estado quântico do sistema de acordo com a eq.(1.58). Seja um estado quântico, num instante t , dado por $|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n |\psi_n(t)\rangle$, onde a_n é a amplitude de probabilidade do sistema está em um autoestado $|\psi_n(t)\rangle$. A matriz densidade assume a seguinte forma [9]:

$$\rho = \sum_n a_n^* a_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|, \quad (2.45)$$

onde esses auto estados obedecem a equação de Schrödinger $i\frac{d}{dt}|\psi_n(t)\rangle = H|\psi_n(t)\rangle$. Derivando (2.45) obtemos:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\rho &= \sum_n ip_n \left(|\dot{\psi}_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| + |\psi_n(t)\rangle \langle \dot{\psi}_n(t)| \right) \\ &= \sum_n p_n (H|\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| + |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| H) = H\rho - \rho H = [H, \rho] \end{aligned}$$

$$i\frac{d}{dt}\rho = [H, \rho], \quad (2.46)$$

cuja solução é

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt}, \quad (2.47)$$

para uma hamiltoniana independente do tempo. Se a matriz $\rho(0)$ comuta com a hamiltoniana, então não há variação temporal na matriz densidade. Isso pode ocorrer no caso em que a matriz densidade é dada por (1.58). Agora para o caso em que o sistema não necessariamente está em equilíbrio a evolução temporal da matriz densidade é através do operador de evolução temporal $U(t, t')$

$$\rho(t) = U(t, t')\rho(t')U^\dagger(t, t'), \quad (2.48)$$

onde $U(t)$ é obtido através da equação (2.46)

$$i\frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = HU(t, t'), \quad (2.49)$$

e

$$U(t, t') = T \left[\exp \left(-i \int_{t'}^t H(t'') dt'' \right) \right]. \quad (2.50)$$

Se assumirmos uma distribuição térmica para $\rho(0)$ através da eq(1.58), podemos escrever

$$\rho(0) = \frac{e^{-\beta H_i}}{\text{Tr } e^{-\beta H_i}}, \quad (2.51)$$

onde vamos supor que o sistema possui uma hamiltoniana $H(t) = H_i + \theta(t)\mathcal{H}(t)$. Logo, o sistema está em uma situação de equilíbrio para tempos negativos e pode ser regido pela equação (2.47). Quando o tempo se torna positivo a hamiltoniana torna-se dependente do tempo e o operador de evolução temporal assume a forma (2.50). Seja T um grande valor de tempo negativo, logo o operador de evolução temporal é dado por $e^{-iH_i t}$ e a matriz densidade $\rho(0)$ pode ser escrita como [3]:

$$\rho(0) = \frac{e^{-\beta H_i}}{\text{Tr } e^{-\beta H_i}} = \frac{e^{-i(T-i\beta-T)H_i}}{\text{Tr } e^{-i(T-i\beta-T)H_i}} = \frac{U(T-i\beta, T)}{\text{Tr } U(T-i\beta, T)}. \quad (2.52)$$

Com isso a matriz densidade em um instante t assume a seguinte forma:

$$\rho(t) = \frac{U(t, 0)U(T-i\beta, T)U(0, t)}{\text{Tr } U(T-i\beta, T)}. \quad (2.53)$$

Figura 2.1: Contorno temporal, também chamado de contorno de Keldysh.

Utilizando a equação (1.49) e utilizando o fato que o traço é invariante por permutações cíclicas de operadores, podemos tirar o valor médio do operador O [3, 10]

$$\begin{aligned}
 \langle O(t) \rangle &= \text{Tr} \left[\frac{U(t, 0)U(T - i\beta, T)U(0, t)O(t)}{\text{Tr} U(T - i\beta, T)} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[\frac{U(T - i\beta, T)U(0, t)O(t)U(t, 0)U(0, T)U(T, 0)}{\text{Tr} U(T - i\beta, T)} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[\frac{U(T - i\beta, T)U(T, t)O(t)U(t, T)}{\text{Tr} U(T - i\beta, T)} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[\frac{U(T - i\beta, T)U(T, T')U(T', T)U(T, t)O(t)U(t, T)}{\text{Tr} U(T - i\beta, T)} \right] \\
 &= \frac{\text{Tr} [U(T - i\beta, T)U(T, T')U(T', t)O(t)U(t, T)]}{\text{Tr} U(T - i\beta, T)U(T', T)U(T, T')}. \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

O que a (2.54) nos diz é que o sistema evolui do instante negativo T até o instante t onde há ação do operador O . Em seguida o sistema vai até um tempo suficientemente grande T' . Depois o sistema volta ao instante T que em seguida vai para $T - i\beta$, como mostrado na fig.(2.1) [16].

Com (2.54) podemos definir o funcional gerador como:

$$Z[J_c] = \text{Tr} U_{J_c}(T - i\beta, T)U_{J_c}(T', T)U_{J_c}(T, T'), \tag{2.55}$$

onde J_c corresponde aos termos de fonte e c a parte do contorno temporal em que a função Z está.

Se, por exemplo, tivermos um campo escalar real livre ϕ , a função $Z[J_c]$ assume a

seguinte forma [3]:

$$Z[J_c] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_c dt \int d^3x (\mathcal{L} + J_c \phi) \right]. \quad (2.56)$$

E a Lagrangiana do sistema, $\mathcal{L}$, é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (2.57)$$

A integral sobre o contorno temporal c é feita pela parte superior do contorno somada a parte inferior, fig.(2.1). De acordo com a (2.54), vemos que o tempo corre no sentido negativo para o positivo na parte superior do contorno e no sentido contrário para a parte inferior. Assim temos que

$$\int_c dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt_+ + \int_{\infty}^{-\infty} dt_- \quad (2.58)$$

onde os sobrescritos $+$ e $-$ indicam os contornos temporais superior e inferior respectivamente. A função (2.56) também pode ser escrita da seguinte forma [3]

$$Z[J_c] = N \exp \left[-\frac{i}{2} \int_c dt dt' \int d^3x d^3y J_c(\vec{x}, t) G_c(\vec{x} - \vec{y}, t - t') J_c(\vec{y}, t') \right], \quad (2.59)$$

onde N é um fator de normalização e o propagador G_C é definido a partir do campo ϕ e do contorno c

$$G_C(t - t') = \theta_c(t - t') \langle \phi(t) \phi(t') \rangle + \theta_c(t' - t) \langle \phi(t') \phi(t) \rangle = (-i)^2 \frac{1}{Z[J_c]} \frac{\delta^2 Z[J_c]}{\delta J_c(t) \delta J_c(t')} \Big|_{J_c=0}, \quad (2.60)$$

onde a função θ_c é definida como:

$$\theta_c(t - t') = \begin{cases} \theta(t - t') & t, t' \text{ em } C_+ \\ \theta(t' - t) & t, t' \text{ em } C_- \\ 0 & t \text{ em } C_+, t' \text{ em } C_- \\ 1 & t' \text{ em } C_+, t \text{ em } C_- \end{cases} \quad (2.61)$$

A equação diferencial para G_C é:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G_C(\vec{x} - \vec{y}, t - t') = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \frac{d\theta_c(t - t')}{dt} \equiv -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_c(t - t'), \quad (2.62)$$

ou melhor

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right) G_c(t - t', \omega) = -\delta_c(t - t'), \quad (2.63)$$

onde foi tomada a transformada de Fourier da parte espacial e fazendo $\omega^2 = |\vec{k}|^2 + m^2$.

Para as diferentes situações em que t e t' estão sobre diferentes partes do contorno c resolve-se a equação (2.63) (vide o apêndice A) para as funções de Green:

$$\begin{aligned} G_{++}(t - t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left((\theta(t - t') + n_B(\omega)) e^{-i\omega(t-t')} + (\theta(t' - t) + n_B(\omega)) e^{i\omega(t-t')} \right) \\ G_{--}(t - t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left((\theta(t' - t) + n_B(\omega)) e^{-i\omega(t-t')} + (\theta(t - t') + n_B(\omega)) e^{i\omega(t-t')} \right) \\ G_{+-}(t - t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left(n_B(\omega) e^{-i\omega(t-t')} + (1 + n_B(\omega)) e^{i\omega(t-t')} \right) \\ G_{-+}(t - t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left(n_B(\omega) e^{i\omega(t-t')} + (1 + n_B(\omega)) e^{-i\omega(t-t')} \right), \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde n_B é a função de distribuição Bose-Einstein.

No entanto, é mais interessante trabalhar com as funções de Green físicas usuais. Então, para o campo escalar, as funções de Green retardada, avançada e de correlação são, respectivamente:

$$iG_R = \theta(t - t') \langle [\phi(t), \phi(t')] \rangle \quad (2.65)$$

$$iG_A = \theta(t' - t) \langle [\phi(t), \phi(t')] \rangle \quad (2.66)$$

$$iG_c = \langle \{\phi(t), \phi(t')\} \rangle, . \quad (2.67)$$

Com isso é possível relacionar as funções de Green físicas com as causais no contorno de Keldysh.

$$\begin{aligned} G_R &= G_{++} - G_{+-} = G_{-+} - G_{--} \\ G_A &= G_{++} - G_{-+} = G_{+-} - G_{--} \\ G_c &= G_{++} + G_{--} = G_{-+} - G_{+-}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

É possível definir uma estrutura matricial relacionando ambos os lados de (2.68). Definindo a matriz $\hat{G}$ como:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & G_A \\ G_R & G_c \end{pmatrix} = Q G Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} G_{++} & G_{+-} \\ G_{-+} & G_{--} \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad (2.69)$$

onde

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

e por fim utilizando as (2.64)

$$G_R(t - t') = -\frac{\theta(t - t')}{\omega} \sin \omega(t - t'), \quad (2.71)$$

$$G_A(t - t') = \frac{\theta(t' - t)}{\omega} \sin \omega(t - t'), \quad (2.72)$$

$$G_c(t - t') = -\frac{i}{\omega} (1 + 2n_B(\omega)) \cos \omega(t - t'), \quad (2.73)$$

onde as funções estão sendo expressadas no espaço misto, ou seja, por ω e t .

Capítulo 3

Campo Escalar Fora do Equilíbrio

Na física, sistemas fora do equilíbrio térmico são muito frequentes. Desde a matéria condensada à cosmologia esses sistemas são de grande interesse de estudo [17–21]. Porém, tratá-los não é uma tarefa fácil devido à alta não linearidade das equações que descrevem sua dinâmica. Em especial, sistemas que possuem pequenas variações da condição de equilíbrio conseguem ser bem descritos pela teoria da resposta linear [4, 6, 10, 22].

Uma das formas de se estudar fenômenos fora do equilíbrio é através de um procedimento chamado quench. Um sistema físico sofre um quench através de uma mudança brusca na sua hamiltoniana, como por exemplo: uma alteração nas constantes de acoplamento ou em parâmetros externos como um campo magnético. Após essa mudança o sistema em questão passa para um regime de não equilíbrio.

Em física clássica os fenômenos fora do equilíbrio em sistemas de muitos corpos podem ser tratados através da equação de Boltzmann vista no capítulo 1. No caso quântico os fenômenos fora do equilíbrio são tratados através do formalismo do tempo real da TQCTF visto no capítulo 2. A equação que governa a dinâmica fora do equilíbrio na mecânica quântica é a equação de Kadanoff-Baym [23, 24]. Ela é utilizada para obter o comportamento das funções de Green com o tempo. No limite clássico ela se reduz a equação de Boltzmann.

No começo deste capítulo será mostrado o teorema de flutuação-dissipação, para sistemas clássicos e quânticos em equilíbrio termodinâmico, que descreve como termos dissipativos se relacionam com os termos de flutuações do sistema. Também será estudado um sistema constituído de um campo escalar real livre que no instante de tempo $t = 0$ sofre um quench onde é alterada a sua energia. Uma característica peculiar e impor-

tante é que a perturbação escolhida ainda mantém as equações diferenciais exatamente solúveis. Com este fato podemos testar a hipótese que diz que as funções de Green são dominadas pelo seu termo diagonal e obter e verificar o teorema de flutuação-dissipação para esse sistema. Logo em seguida será apresentado o ansatz de Kadanoff-Baym [23]. E por fim será mostrado o trabalho realizado em [1, 2] sobre uma generalização do teorema de flutuação-dissipação e a identificação de um desses modelos como um sistema do tipo vítreo (ou *glassy*).

Neste capítulo as funções de green para o campo livre serão representadas com sobrescritos (0) . Por exemplo, uma função de Green Retardada do campo escalar livre será representada como $G_R^{(0)}$. Omitiremos também a dependência das funções de Green com o parâmetro ω afim de não carregar a notação.

3.1 Teorema de Flutuação-Dissipação

Fenômenos fora do equilíbrio são sempre muito difíceis de serem tratados devido a grande complexidade de suas equações. Dentre esses sistemas há aqueles que se encontram perto do equilíbrio, ou tendem vagarosamente para o equilíbrio. Uma importante relação para sistemas a uma temperatura β^{-1} é o teorema flutuação-dissipação. Nesta seção será exemplificado um dos sistemas que possuem o teorema de flutuação-dissipação mais simples. Se uma esfera, de raio a está em movimento unidimensional em um meio de viscosidade η sua equação de movimento é dada por [25]

$$m \frac{dv}{dt} = -\zeta v, \quad (3.1)$$

onde $\zeta = 6\pi\eta a$. Se a partícula for pequena o suficiente (partícula browniana) para efeitos térmicos influenciarem na sua dinâmica então (3.1) deve ser modificada. Ao lado direito de (3.1) deve ser adicionada uma força aleatória $\delta F(t)$. Essa força, de natureza estocástica, surge devido as colisões das moléculas do meio com a partícula browniana. Essa força pode ser descrita com as seguintes propriedades

$$\langle \delta F(t) \rangle = 0, \quad \langle \delta F(t) \delta F(t') \rangle = 2B\delta(t - t'), \quad (3.2)$$

onde B é o valor médio do módulo da força flutuante. De acordo com a primeira expressão de (3.2) e (3.1), se uma partícula tiver velocidade nula, sua posição média será $\langle \mathbf{x}(\mathbf{t}) \rangle = 0$. A segunda expressão de (3.2) é a função de correlação entre $\delta F(\mathbf{t})$, onde neste caso estamos considerando um tempo de observação maior que o tempo das interações do meio com a partícula browniana, logo o sistema não possui correlação para a força $\delta F(\mathbf{t})$ em instantes $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$ e esta pode ser aproximada por uma função delta de Dirac. Para tempos longos a viscosidade do meio faz a velocidade média ir a zero $\langle \mathbf{v}(\mathbf{t}) \rangle \rightarrow 0$. Mas por outro lado $\langle \mathbf{v}(\mathbf{t})^2 \rangle = \beta^{-1}/2$ não vai a zero [5]. Logo, ao resolver (3.1) e fazendo $\mathbf{t} \rightarrow \infty$, obtêm-se o teorema da flutuação-dissipação:

$$B = \zeta \beta^{-1} T, \quad (3.3)$$

essa expressão relaciona força flutuante, B , com o termo dissipativo ζ . Logo, a partícula nunca estará parada, mas flutuando em torno da sua posição média com $\langle \mathbf{v}(\mathbf{t})^2 \rangle \neq 0$, porém ela é freada pela viscosidade do meio. Existem vários outros exemplos que obedecem a relação de flutuação-dissipação [25].

3.2 Teoria da Resposta Linear Clássica.

Os sistemas em equilíbrio termodinâmico são muito bem tratados através da mecânica estatística de Gibbs. Porém, sistemas fora do equilíbrio são sistemas que possuem equações que são muito custosas de serem resolvidas e de serem descritas. Uma forma de tentar entender esses fenômenos de não equilíbrio e conseguir alguns resultados úteis consiste em estudar sistemas que sofrem apenas pequenos desvios dos seus estados de equilíbrio. Em um sistema clássico em equilíbrio os valores médios das variáveis termodinâmicas relevantes são dadas pela distribuição canônica (1.17), que a partir de agora será escrita como ρ_{eq} onde o subscrito informa que essa é a distribuição no equilíbrio. O valor médio da grandeza A_i é dado por [26]

$$\langle A_i \rangle_{eq} = \int dp dq A_i \rho_{eq}(p, q). \quad (3.4)$$

Seja uma perturbação $V = - \sum_i f_i A_i$ sobre a hamiltoniana H_0 . Então o sistema será descrito por uma nova hamiltoniana $H = H_0 - \sum_i f_i A_i$, onde f_i é dita uma força generalizada conjugada a variável A_i (analogamente ao que é feito no oscilador harmônico com

perturbação $-f(t)x(t)$). A função canônica de partição será

$$Z = \int dp dq e^{-\beta H_0 + \beta \sum_i f_i A_i}. \quad (3.5)$$

A derivada do logaritmo da função de partição em função de f_i fornece o valor médio de A_i

$$\langle A_i \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial f_i}, \quad (3.6)$$

e a derivada segunda fornece o valor médio de A_i e A_j

$$Z \langle A_i A_j \rangle = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial f_i \partial f_j}. \quad (3.7)$$

Agora é possível obter a derivada segunda de (3.6)

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle A_i \rangle}{\partial f_j} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial f_i \partial f_j} = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial f_i \partial f_j} - \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial f_i} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial f_j},$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle A_i \rangle}{\partial f_j} = \langle A_i A_j \rangle - \langle A_i \rangle \langle A_j \rangle = \langle (A_i - \langle A_i \rangle)(A_j - \langle A_j \rangle) \rangle = \langle \delta A_i \delta A_j \rangle, \quad (3.8)$$

onde $\delta A_i \equiv A_i - \langle A_i \rangle$. Para o caso em que há apenas pequenas alterações do estado de equilíbrio é possível tomar o limite em que $f_i \rightarrow 0$ e as médias podem ser computadas com a distribuição de equilíbrio:

$$\frac{\partial \langle A_i \rangle}{\partial f_j} = \beta \langle \delta A_i \delta A_j \rangle_{eq}. \quad (3.9)$$

Então na aproximação linear é possível integrar a equação (3.9)

$$\langle A_i \rangle = \langle A_i \rangle_{eq} + \beta \sum_j f_j \langle \delta A_i \delta A_j \rangle_{eq}. \quad (3.10)$$

Agora no caso em que a hamiltoniana é igual a H para valores de tempo $t < 0$ e H_0 para $t > 0$, ou seja, o termo $f_j A_j$ é desligado subitamente em $t = 0$. A hamiltoniana pode

ser escrita como:

$$H = H_0 - \theta(-t) \sum_j f_j A_j. \quad (3.11)$$

No caso em que a perturbação é fraca pode-se utilizar a relação (3.10) em que $t \leq 0$. Em particular para $t = 0$

$$\langle \delta A_i(t=0) \rangle = \beta \sum_j f_j \langle \delta A_i(t=0) \delta A_j \rangle_{eq}, \quad (3.12)$$

Para o caso em que $t > 0$ o sistema é dependente do tempo e o observável A_i evolui de acordo com (1.12) e para tempos muito grandes espera-se que o sistema entre em equilíbrio. Para a evolução temporal de $A(t)$ ser obtida é necessário realizar uma média nas suas condições iniciais utilizando a função de distribuição de (3.5)

$$\langle A_i(t) \rangle = \int dp dq \rho(p(t=0), q(t=0)) A_i(t, p(t=0), q(t=0)), \quad (3.13)$$

e da equação (3.10) obtém-se

$$\langle \delta A_i(t) \rangle = \beta \sum_j f_j \langle \delta A_i(t) \delta A_j(0) \rangle_{eq} \equiv \beta \sum_j f_j C_{ij}(t), \quad (3.14)$$

onde $C_{ij}(t) = \langle \delta A_i(t) \delta A_j(0) \rangle_{eq}$ é a função de Kubo [26]. A expressão acima mostra que para pequenas perturbações o sistema tende ao equilíbrio devido a flutuações térmicas. O sistema é retirado do equilíbrio por uma perturbação ou por flutuações espontâneas. Nos dois casos, o relaxamento para o equilíbrio é descrito pelas mesmas leis físicas [26].

3.2.1 Susceptibilidade de um Sistema

Quando o sistema é retirado do equilíbrio através de um pequeno desvio a sua função de distribuição sofre uma pequena mudança e os observáveis físicos contém a informação sobre como o sistema reage devido a essas pequenas perturbações. Considerando agora a hamiltoniana da seção anterior com a seguinte forma:

$$H = H_0 - f(t)A, \quad (3.15)$$

onde o segundo termo do lado direito é um pequeno desvio da hamiltoniana de equilíbrio H_0 . A função de distribuição sofrerá um desvio da forma $\rho = \rho_{eq} + \delta\rho$ onde ρ satisfaz a equação de Liouville $\dot{\rho} + \{\rho, H\} = 0$. A equação de movimento para $\delta\rho$ é:

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \{\delta\rho, H\} + \{\rho_{eq}, -f(t)A\} = 0, \quad (3.16)$$

onde foi usado o fato que $\dot{\rho}_{eq} + \{\rho_{eq}, H_0\} = 0$. A solução para essa equação é dada por [27]:

$$\delta\rho = - \int_{-\infty}^t e^{-i(t-t')\mathcal{L}_0} \{A, \rho_{eq}\} f(t') dt', \quad (3.17)$$

onde o operador $i\mathcal{L}_0 = \{, H_0\}$ é o operador de Liouville somente na presença de H_0 . A função de distribuição perturbada assume agora a seguinte forma:

$$\rho(t) = \rho_{eq} - \int_{-\infty}^t e^{-i(t-t')\mathcal{L}_0} \{A, \rho_{eq}\} f(t') dt', \quad (3.18)$$

e o valor médio de um observável B é obtido utilizando o resultado acima:

$$\langle B(t) \rangle = \langle B \rangle_{eq} - \int dp dq \int_{-\infty}^t B e^{-i(t-t')\mathcal{L}_0} \{A, \rho_{eq}\} f(t') dt', \quad (3.19)$$

usando a propriedade para o operador $e^{-i(t-t')\mathcal{L}_0}$:

$$\int dp dq B \left(e^{-i(t-t')\mathcal{L}_0} A \right) = \int dp dq \left(e^{i(t-t')\mathcal{L}_0} B \right) A,$$

e o fato que $B(t-t') = e^{i(t-t')\mathcal{L}_0} B$ é a evolução temporal de B somente sob influência da hamiltoniana H_0 [27] (que é o análogo clássico da representação de Dirac da mecânica quântica) é possível reescrever (3.19) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle B(t) \rangle - \langle B \rangle_{eq} &= - \int dp dq \int_{-\infty}^t B(t-t') \{A, \rho_{eq}\} f(t') dt' \\ &= - \int_{-\infty}^t \left[\int dp dq \{A, B(t-t')\} \rho_{eq} \right] f(t') dt' \\ &= - \int_{-\infty}^t dt' f(t') \langle \{A, B(t-t')\} \rangle_{eq} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \theta(t-t') \langle \{A, B(t-t')\} \rangle_{eq} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \chi_{A,B}(t-t'), \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde a grandeza $\chi_{A,B}(t, t') = -\theta(t-t')\langle\{A, B(t-t')\}\rangle_{eq}$ é a susceptibilidade dinâmica ou função resposta. A integração até $+\infty$ em (3.20) aparentemente viola a causalidade por inserir no cálculo valores de tempo posteriores a t onde B é avaliado. Porém, a causalidade nessa expressão é mantida devido a função de Heaviside.

A variação de um operador A_i devido a vários operadores A_j com susceptibilidade χ_{ij} , para um tempo $t > t'$ é dada por (3.20).

$$\langle\delta A_i(t)\rangle = \sum_j \int_{-\infty}^t dt' f_j(t') \chi_{ij}(t-t'). \quad (3.21)$$

Se a perturbação for desligada subitamente em $t = 0$ então:

$$\langle\delta A_i(t)\rangle = \sum_j \int_{-\infty}^0 dt' f_j \chi_{ij}(t-t') = \sum_j \int_t^{\infty} d\tau f_j \chi_{ij}(\tau), \quad (3.22)$$

onde foi realizada a mudança de variável de integração $\tau = t - t'$. Derivando a equação acima em relação ao tempo temos que:

$$\frac{d\langle\delta A_i(t)\rangle}{dt} = - \sum_j f_j \chi_{ij}(t), \quad (3.23)$$

comparando lado esquerdo dessa equação com (3.14) temos que [26]

$$\chi_{ij}(t) = -\beta\theta(t)\frac{d}{dt}C_{ij}(t). \quad (3.24)$$

Essa é uma das formas do teorema de flutuação-dissipação que diz que, em aproximações lineares, os termos dissipativos são diretamente relacionados com as flutuações térmicas do sistema. A função de Kubo contém a característica de flutuação do sistema. Para vermos o caráter dissipativo da susceptibilidade será adotado aqui algo análogo ao que é feito em [4]. Utilizando a equação (3.20) para o caso em que perturbação é do tipo $-f(t)A$ e que $\langle A \rangle_{eq} = 0$:

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^t dt' f(t') \chi(t-t') = \int_0^{\infty} f(t-t') \chi(t') dt'. \quad (3.25)$$

No espaço de Fourier $\tilde{A}(\omega) = \int dt A(t)e^{-i\omega t}$ e $\tilde{f}(\omega) = \int dt f(t)e^{-i\omega t}$ e consequentemente

$$\tilde{A}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega)\tilde{f}(\omega), \quad (3.26)$$

onde

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_0^\infty \chi(t)e^{i\omega t}, \quad (3.27)$$

pela expressão acima fica evidente que $\tilde{\chi}(-\omega) = \tilde{\chi}^*(\omega)$. Também pela expressão acima a susceptibilidade é um número complexo $\tilde{\chi}(\omega) = \tilde{\chi}'(\omega) + i\tilde{\chi}''(\omega)$ onde $\tilde{\chi}'$ e $\tilde{\chi}''$ são as partes real e imaginária de $\tilde{\chi}$ respectivamente. Se a força externa for da forma $f(t) = \Re[f_0 e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2}(f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t})$ então a expressão (3.25), com o auxílio de (3.27), se torna:

$$\langle A \rangle = \int_0^\infty dt' \frac{\chi(t')}{2} (f_0 e^{-i\omega(t-t')} + f_0^* e^{i\omega(t-t')}) = \frac{1}{2} [\tilde{\chi}(\omega) f_0 e^{-i\omega t} + \tilde{\chi}(-\omega) f_0^* e^{i\omega t}].$$

A presença de f altera o estado do sistema com a mudança de energia. Essa energia é absorvida e convertida em calor. A taxa de variação de energia do sistema é dada pela derivada temporal da hamiltoniana. Como somente a perturbação é dependente do tempo então a variação de energia por tempo $\frac{dE}{dt} = \langle \frac{dH}{dt} \rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\langle A \rangle \frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{4} [\tilde{\chi} f_0 e^{-i\omega t} + \tilde{\chi}^* f_0^* e^{i\omega t}] (-i\omega f_0 e^{-i\omega t} + i\omega f_0^* e^{i\omega t}) \\ &= -\frac{i}{4} [+\omega \tilde{\chi} |f_0|^2 - \omega \tilde{\chi}^* |f_0|^2 - \tilde{\chi} \omega f_0^2 e^{-i2\omega t} + \tilde{\chi}^* \omega (f_0^*)^2 e^{i2\omega t}]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A energia média dissipada por unidade de tempo, Q , é encontrada ao tomar o valor médio temporal da equação acima. Os termos com exponenciais possuem valor médio nulo. Por fim, temos que [4]

$$Q = -\frac{i}{4} \omega \tilde{\chi} |f_0|^2 - \omega \tilde{\chi}^* |f_0|^2 = \frac{1}{2} \omega \tilde{\chi}'' |f_0|^2. \quad (3.29)$$

Como é possível ver a função $\tilde{\chi}''(-\omega) = -\tilde{\chi}''(\omega)$ é ímpar e então $Q > 0$. Ou seja, a função χ está relacionada com a dissipação através da sua parte imaginária no espaço de Fourier. Tomando a transformada de Fourier de (3.24) e tomando a parte imaginária

obtém-se:

$$\chi''(\omega) = \frac{\beta\omega}{2}C(\omega). \quad (3.30)$$

3.3 Teoria da Resposta Linear Quântica

Em mecânica quântica também é possível descrever as respostas do sistema devido a presença de uma perturbação dependente do tempo. Se um sistema quântico possui uma hamiltoniana da forma:

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad (3.31)$$

onde H_0 é a hamiltoniana que caracteriza toda a dinâmica do sistema na ausência da interação $V(t)$. A descrição das propriedades do sistema é regida pela matriz densidade que evolui de acordo com a (1.50). Na representação de Dirac da mecânica quântica o operador matriz densidade assume a forma [10, 15, 22, 26]

$$\rho_D = e^{iH_0 t} \rho(t) e^{-iH_0 t}, \quad (3.32)$$

e a equação de Liouville para o operador ρ_D é:

$$i \frac{d}{dt} \rho_D(t) = [V_D(t), \rho_D(t)], \quad (3.33)$$

integrando a equação acima no tempo:

$$\rho_D(t) = \rho_D(-\infty) - i \int_{-\infty}^t dt' [V_D(t'), \rho_D(t')]. \quad (3.34)$$

Assumindo a hipótese que no tempo $t = -\infty$ a perturbação é nula mas é adiabaticamente ligada, então a $\rho_D(-\infty) = \rho_0 \equiv e^{-\beta H_0}$. Então, em primeira ordem, a equação (3.34) é dada por [22]:

$$\rho_D(t) \approx \rho_0 - i \int_{-\infty}^t dt' [V_D(t'), \rho_0], \quad (3.35)$$

analogamente ao que foi feito anteriormente no caso clássico, o cálculo da variação de um operador A é obtido através do seu valor médio utilizando a variação da matriz densidade

$$\Delta\rho_D(t) = \rho_D(t) - \rho_0$$

$$\begin{aligned}\Delta A(t) &= \text{Tr}\{\Delta\rho_D(t)A_D(t)\} \\ &= -i \int_{-\infty}^t dt' \text{Tr}\{[V_D(t'), \rho_0]A_D(t)\} \\ &= -i \int_{-\infty}^t dt' \langle [A_D(t), V_D(t')] \rangle_{eq},\end{aligned}\tag{3.36}$$

onde na última linha de (3.36) foi utilizada a propriedade cíclica do traço. Se a perturbação da hamiltoniana for do tipo $V(t) = -f(t)B$ onde $f(t)$ é uma função do tempo. Reescrevendo a expressão (3.36) em termos do operador B e função f e tendo em vista que $V_D(t) = -f(t)B_D(t')$ temos:

$$\Delta A(t) = i \int_{-\infty}^t dt' f(t') \langle [A_D(t), B_D(t')] \rangle_{eq} = i \int_{-\infty}^t dt' f(t') \langle [A(t), B(t')] \rangle_{eq},$$

em que, no último passo, foi considerado que os operadores estão na representação de Heisenberg, pois em aproximação linear considera-se que os operadores são escritos equivalentemente nas duas representações. Com a equação acima é possível definir a susceptibilidade do sistema ou função de Green retardada [22]

$$\ll A(t); B(t') \gg^R = -\chi(t, t') = -i\theta(t - t') \langle [A(t), B(t')] \rangle_{eq}.$$

A função retardada expressa a resposta do sistema sobre o operador A em um instante tempo t devido a ação de uma perturbação externa ocorrida em um tempo posterior $t' < t$. Portanto a variação do operador A é dada por:

$$\Delta A(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \ll A(t); B(t') \gg^R,\tag{3.37}$$

novamente é interessante notar que apesar do limite de integração superior ser $+\infty$ a expressão acima não viola a causalidade pois a função de Heaviside trunca o limite de integração similar ao que ocorre em (3.20). Analogamente ao que é feito em (3.26) é possível obter a expressão da função de Green retardada no espaço ω [22]:

$$\Delta \tilde{A}(\omega) = -\tilde{f}(\omega) \ll A; B \gg_{\omega}^R,\tag{3.38}$$

onde $\ll A; B \gg_{\omega}^R = -\chi(\omega)$.

3.3.1 Teorema de Flutuação-Dissipação Quântico

Agora é possível construir o teorema de flutuação-dissipação na mecânica quântica desenvolvido por Kubo [15, 22, 26, 28]. A função de autocorrelação de um observável A , que geralmente não comuta com si mesmo em tempos diferentes, é definida através do seu anti-comutador:

$$C_A(t, t') = \frac{1}{2} \langle \{A(t), A(t')\} \rangle. \quad (3.39)$$

Para o caso estacionário os observáveis são independentes do tempo e a função de autocorrelação depende de uma diferença entre t e t' :

$$C_A(t - t') = \frac{1}{2} \langle \{A(t), A(t')\} \rangle. \quad (3.40)$$

Para achar a função de correlação no espaço de Fourier deve-se realizar a transformada em relação a $\tau = t - t'$, então:

$$\tilde{C}_A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} C_A(\tau) d\tau. \quad (3.41)$$

Utilizando a relação de Kubo-Martin-Schwinger é possível reescrever a função de correlação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{1}{2} (\langle A(t)A(t') \rangle + \langle A(t'), A(t) \rangle) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{1}{2} (\langle A(t')A(t + i\beta) \rangle + \langle A(t'), A(t) \rangle) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{i\omega\tau} e^{\omega\beta} \langle A(t')A(t) \rangle + e^{i\omega\tau} \langle A(t'), A(t) \rangle) d\tau \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{\beta\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle A(t')A(t) \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Essa expressão representa a transformada de Fourier para o anti-comutador. Para encontrar o comutador no espaço de fourier, $([A, A])_{\omega}$ o cálculo é análogo ao realizado

acima [22]

$$([A, A])_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle [A(t), A(t')] \rangle d\tau = (e^{\beta\omega} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle A(t') A(t) \rangle d\tau. \quad (3.43)$$

Além disso é possível escrever o comutador acima em termos do imaginário da função de Green retardada:

$$\begin{aligned} ([A, A])_\omega &= \int_{-\infty}^0 e^{i\omega\tau} \langle [A(t), A(t')] \rangle d\tau + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle [A(t), A(t')] \rangle d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega\tau} \langle A(t'), A(t) \rangle d\tau + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle [A(t), A(t')] \rangle d\tau \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} \langle [A(t), A(t')] \rangle d\tau + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle [A(t), A(t')] \rangle d\tau \\ &= -2\Im m \ll A; B \gg_\omega^R. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Utilizando as equações (3.42), (3.43) e (3.44):

$$\tilde{C}_A(\omega) = -\frac{1 + e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} \Im m \ll A; B \gg_\omega^R,$$

$$\tilde{C}_A(\omega) = -\coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \Im m \ll A; B \gg_\omega^R, \quad (3.45)$$

a expressão acima é o teorema de flutuação-dissipação. A função de Green retardada representa a parte dissipativa (parte imaginária da susceptibilidade) do sistema e $\tilde{C}_A(\omega)$ as flutuações. O teorema de flutuação-dissipação é um forte vínculo de dois entes que a priori não possuem relação um com o outro. Uma das mais famosas aplicações desse teorema é a flutuação da voltagem em circuitos elétricos que podem ser relacionadas com a reatância (Teorema de Nyquist) [22]. Outra aplicação é na obtenção da dependência da temperatura do condensado de quatro-quarks obtida através do teorema de flutuação-dissipação [22, 29]

Para transpor o pensamento realizado acima para o campo escalar real é interessante notar o caso em que o potencial $V(t)$, em (3.31), é da seguinte forma [26]:

$$V(t) = \int d^3x j(\vec{x}, t) \phi_S(\vec{x}), \quad (3.46)$$

e da equação (3.37) é possível obter a variação do campo

$$\delta\phi(x) = -i \int d^4x' \theta(t - t') \langle [\phi(x), \phi(x')] \rangle j(x'), \quad (3.47)$$

onde a função de Green retardada coincide com a definição dada em (2.65):

$$iG_R = \theta(t - t') \langle [\phi(x), \phi(x')] \rangle, \quad (3.48)$$

a função (3.39) é relacionada com a função de green (2.35) da seguinte forma $iG_c(t, t') = 2C(t, t')$, então o teorema de flutuação-dissipação no caso de equilíbrio termodinâmico pode ser verificado através

$$\tilde{G}_c = 2i[1 + 2n_B(\omega)]\text{Im}\tilde{G}_R. \quad (3.49)$$

3.4 Modelo Fora do Equilíbrio

O modelo a seguir foi estudado através do formalismo de tempo real do capítulo 2. Seja $\phi(x)$ um campo escalar, a uma temperatura β , onde sua dinâmica é regida pela seguinte densidade de Lagrangiana [3]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{1}{2} \Pi(x^0) \phi^2, \quad (3.50)$$

onde

$$\Pi(x^0) = \delta m^2 \theta(x^0) + \Delta \delta(x^0), \quad (3.51)$$

é um quench no instante $x^0 = 0$. Para encontrar as funções de Green através dessa Lagrangiana é necessário utilizar a TQCTF com o formalismo de tempo real [3]. Temos que as funções de Green (ordem zero), no contorno de Keldysh, são:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} x \\ \hline + \end{array} \begin{array}{c} y \\ \hline + \end{array} &= iG_{++}^{(0)}(x - y) \\ \begin{array}{c} x \\ \hline + \end{array} \begin{array}{c} y \\ \hline - \end{array} &= iG_{+-}^{(0)}(x - y) \\ \begin{array}{c} x \\ \hline - \end{array} \begin{array}{c} y \\ \hline + \end{array} &= iG_{-+}^{(0)}(x - y) \\ \begin{array}{c} x \\ \hline - \end{array} \begin{array}{c} y \\ \hline - \end{array} &= iG_{--}^{(0)}(x - y) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Os vértices são dados pelos seguintes diagramas

$$\begin{aligned} \text{---} \times \text{---} &= i\Pi(x^0)\delta(x-y) \\ \text{---} \times \text{---} &= -i\Pi(x^0)\delta(x-y) \end{aligned} \quad (3.53)$$

As funções de Green físicas [3] são obtidas através da transformação unitária Q , de acordo com a (2.69) e (2.70). A matriz de correção do propagador Σ é

$$\Sigma(x^0) = \begin{pmatrix} \Pi(x^0)\delta(x-y) & 0 \\ 0 & -\Pi(x^0)\delta(x-y) \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Usando a equação de Dyson para o propagador [3]

$$\begin{aligned} G &= \left((G^{(0)})^{-1} + \Sigma \right)^{-1} = \left[G^{(0)-1} (1 + G^{(0)}\Sigma) \right]^{-1} = \\ &= (1 + G^{(0)}\Sigma)^{-1} G^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde o produto entre os elementos da matriz, gerado pelo produto matricial, é um produto interno no espaço de configurações. Sendo $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções bem comportadas, então o produto fg é:

$$(fg)(x, y) = \int dz f(x, z) g(z, y) \quad (3.56)$$

usando a propriedade de produto de matrizes $A^{-1}B = (B^{-1}A)^{-1}$ é possível reescrever (3.55)

$$\begin{aligned} \hat{G} &= QGQ^{-1} = Q(1 + G^{(0)}\Sigma)^{-1} G^{(0)} Q^{-1} = \left[Q(1 + G^{(0)}Q^{-1}Q\Sigma)^{-1} Q^{-1} \right] \overbrace{QG^{(0)}Q^{-1}}^{\hat{G}^{(0)}} = \\ &= \left[\left(Q^{-1} + G^{(0)}Q^{-1} \overbrace{Q\Sigma Q^{-1}}^{\hat{\Sigma}} \right)^{-1} Q \right] \hat{G}^{(0)} = (1 + \hat{G}^{(0)}\hat{\Sigma})^{-1} \hat{G}^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde

$$\hat{\Sigma} = Q\Sigma Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \Pi(x^0) \\ \Pi(x^0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Expandindo (3.57) em série de potências

$$\hat{G} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{G}^{(0)} \Sigma)^n \right] \hat{G}^{(0)}, \quad (3.59)$$

e após algumas manipulações algébricas, apêndice (B):

$$G_A = (1 + G_A^{(0)} \Pi)^{-1} G_A^{(0)}, \quad (3.60a)$$

$$G_R = (1 + G_R^{(0)} \Pi)^{-1} G_R^{(0)}, \quad (3.60b)$$

$$G_c = (1 + G_R^{(0)} \Pi)^{-1} G_c^{(0)} (1 + \Pi G_A^{(0)})^{-1}. \quad (3.60c)$$

Com isso é possível obter as funções de Green físicas exatamente em todas as ordens em teoria de perturbação. Como o quench ocorre num determinado instante de tempo é mais fácil trabalhar no espaço misto. As funções de Green no equilíbrio são dadas pelas eq. (2.71), (2.72) e (2.73).

3.4.1 Estudo no Caso em que $\Delta = 0$

Primeiramente, iremos trabalhar o caso em que temos um quench proporcional a função de Heaviside, ou seja, estudaremos o caso em que temos $\Delta = 0$ na equação (3.51). Para isso, computaremos as (3.60) [3].

$$\begin{aligned} (G_R^{(0)} \delta m^2)(x^0, y^0) &= \int dz^0 \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x^0 - y^0)}}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2} \delta m^2 \theta(z^0) \delta(z^0 - y^0) \\ &= \theta(y^0) \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x^0 - y^0)}}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2} \delta m^2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

e também podemos fazer

$$\begin{aligned} (G_R^{(0)} \delta m^2)^n(x^0, y^0) &= \\ &\int \prod_{i=1}^n dz^{(i)} \theta(z^{(i-1)}) \delta(z^{(i-1)} - z^{(i)}) \times \\ &\times \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0[(x^0 - z^{(1)}) + (z^{(1)} - z^{(2)}) + \dots + (z^{(n)} - y^0)]} \left(\frac{\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2} \right)^n \theta(z^{(n)}) \delta(z^{(n)} - y^0) = \\ &= \theta(y^0) \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(x^0 - y^0)} \left(\frac{\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2} \right)^n. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Então é possível obter o termo $(1 + G_R^{(0)}\delta m^2)^{-1}$ em (3.60b)

$$\begin{aligned}
(1 + G_R^{(0)}\delta m^2)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-G_R^{(0)}\delta m^2\right)^n = \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(x^0-y^0)} \left[1 + \theta(y^0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2}\right)^n\right] = \\
&\int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(x^0-y^0)} \left\{1 + \theta(y^0) \left[\frac{-\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2} + \left(\frac{\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2}\right)^3 \dots\right]\right\} \\
&\int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(x^0-y^0)} \left\{1 + \theta(y^0) \frac{(-\delta m^2)}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2} \underbrace{\left[1 - \left(\frac{\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2}\right) + \left(\frac{\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2}\right)^2 \dots\right]}_{\left\{1 + \frac{\delta m^2}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2}\right\}^{-1}}\right\} \\
&= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(x^0-y^0)} \left\{1 - \theta(y^0) \frac{(\delta m^2)}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \omega^2 + \delta m^2}\right\}, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

e por fim temos

$$(1 + G_R^{(0)}\delta m^2)^{-1}(x^0, y^0) = \delta(x^0 - y^0) + \theta(x^0 - y^0)\theta(y^0) \frac{\delta m^2}{\Omega} \sin \Omega(x^0 - y^0), \tag{3.64}$$

onde $\Omega^2 = \omega^2 - \delta m^2$, e analogamente a (3.64) temos

$$(1 + G_A^{(0)}\delta m^2)^{-1}(x^0, y^0) = \delta(x^0 - y^0) - \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0) \frac{\delta m^2}{\Omega} \sin \Omega(x^0 - y^0). \tag{3.65}$$

Assim a função de correlação assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
G_c(x^0, y^0) &= (1 + G_R^{(0)}\delta m^2)^{-1} G_c^{(0)} (1 + G_A^{(0)}\delta m^2)^{-1} \\
&= \int dz dz' \left\{ \left(\delta(x^0 - z) + \theta(x^0 - z)\theta(z) \frac{\delta m^2}{\Omega} \sin \Omega(x^0 - z) \right) \left(\frac{-i}{\omega} (1 + 2n_B(\omega)) \cos \omega(z - z') \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\delta(z' - y^0) - \theta(y^0 - z')\theta(z') \frac{\delta m^2}{\Omega} \sin \Omega(z' - y^0) \right) \right\}, \tag{3.66}
\end{aligned}$$

cujo valor é

$$\begin{aligned}
G_c(x^0, y^0) = & \frac{-i}{\omega}(1 + 2n_B(\omega)) \\
& \left\{ \cos \omega(x^0 - y^0) + \theta(y^0) \left(-\cos \omega(x^0 - y^0) + \cos \omega x^0 \cos \Omega y^0 + \frac{\omega}{\Omega} \sin \omega x^0 \sin \Omega y^0 \right) \right. \\
& + \theta(x^0) \left(-\cos \omega(x^0 - y^0) + \cos \Omega x^0 \cos \omega y^0 + \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega x^0 \sin \omega y^0 \right) - \\
& - \theta(x^0)\theta(y^0) \left[-\cos \omega(x^0 - y^0) + \cos \Omega x^0 \cos \omega y^0 + \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega x^0 \sin \omega y^0 + \cos \Omega y^0 (\cos \omega x^0 - \cos \Omega x^0) \right. \\
& \left. \left. + \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega y^0 \left(\sin \omega x^0 - \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega x^0 \right) \right] \right\}. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

A expressão acima descreve o sistema em qualquer instante de tempo. O primeiro termo (desacompanhado da função de Heaviside) é um termo comum para qualquer instante de tempo, os outros descrevem instantes posteriores ao tempo zero e não há, explicitamente, termos com instantes negativos. Estamos interessados em expressar a função de Green de correlação em instantes: antes do quench ($x^0, y^0 < 0$), durante o quench ($x^0 \leq 0$ e $y^0 \geq 0$) e após o quench ($x^0, y^0 > 0$). Para isso basta multiplicar G_c pelos termos: $\theta(-x^0)\theta(-y^0)$, $\theta(x^0)\theta(-y^0)$, $\theta(-x^0)\theta(y^0)$ e $\theta(x^0)\theta(y^0)$ afim de reescrever a função de Green adequadamente.

$$\begin{aligned}
G_c(x^0, y^0) = & -\frac{i}{\omega}(1 + 2n(\omega)) \left[\theta(-x^0)\theta(-y^0) \cos \omega(x^0 - y^0) \right. \\
& + \frac{1}{2}\theta(-x^0)\theta(y^0) \left(\left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\omega x^0 - \Omega y^0) + \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\omega x^0 + \Omega y^0) \right) \\
& + \frac{1}{2}\theta(x^0)\theta(-y^0) \left(\left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\Omega x^0 - \omega y^0) + \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\Omega x^0 + \omega y^0) \right) \\
& \left. + \frac{1}{2}\theta(x^0)\theta(y^0) \left(\frac{(\Omega^2 + \omega^2)}{\Omega^2} \cos \Omega(x^0 - y^0) + \frac{(\Omega^2 - \omega^2)}{\Omega^2} \cos \Omega(x^0 + y^0) \right) \right]. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

onde foi usada a propriedade trigonométrica $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$.

Para função de Green Retardada utilizamos a (3.60b)

$$G_R(x^0, y) = \int dz^0 \left[\delta(x^0 - z^0) + \theta(x^0 - z^0)\theta(z^0) \frac{\delta m^2}{\Omega} \sin \Omega(x^0 - z^0) \right] \left[-\frac{\theta(z^0 - y^0)}{\omega} \sin \omega(z^0 - y^0) \right], \tag{3.69}$$

o segundo membro dessa integral possui o termo $\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)\theta(z^0)$. Para este termo ser não nulo devemos ter $x^0 > 0$ e $y^0 < x^0$. Também é importante notar que os

limites de integração mudam para y^0 maior ou menor que zero. Para $y^0 > 0$ temos que $y^0 \leq z^0 \leq x^0$. Para o caso em que $y^0 < 0$ temos $0 \leq z^0 \leq x^0$, pois z^0 não assume valores negativos devido ao termo $\theta(z^0)$. Assim, o segundo termo dessa integral é da forma

$$\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega\omega} \left\{ \theta(x^0)\theta(y^0) \int_{y^0}^{x^0} dz^0 \sin \Omega(x^0 - z^0) \sin \omega(x^0 - y^0) + \right. \\ \left. + \theta(x^0)\theta(-y^0) \int_0^{x^0} dz^0 \sin \Omega(x^0 - z^0) \sin \omega(x^0 - y^0) \right\},$$

integrando e fazendo o mesmo procedimento utilizado para obter G_c temos:

$$G_R(x^0, y^0) = \theta(x^0 - y^0) \left[-\frac{1}{\omega} \theta(-x^0)\theta(-y^0) \sin \omega(x^0 - y^0) - \frac{1}{\Omega} \theta(x^0)\theta(y^0) \sin \Omega(x^0 - y^0) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\omega} \theta(x^0)\theta(-y^0) \left(\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \sin(\Omega x^0 + \omega y^0) - \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \sin(\Omega x^0 - \omega y^0) \right) \right]. \quad (3.70)$$

onde foi usado o fato que

$$\theta(x^0 - y^0)[1 - \theta(x^0)\theta(y^0) - \theta(x^0)\theta(-y^0) - \theta(-x^0)\theta(y^0)] = \theta(x^0 - y^0)\theta(-x^0)\theta(-y^0)$$

.

3.5 Ansatz de Kadanoff-Baym

Kadanoff e Baym [23], propuseram uma generalização do teorema de flutuação-dissipação [28, 30, 31] para sistemas quânticos que estão perto do equilíbrio. Para um sistema em equilíbrio há a seguinte relação no espaço de momentos:

$$\tilde{G}_c^{(0)}(k) = 2i (1 + 2n_B(k_0)) \text{Im}[\tilde{G}_R^{(0)}(k)]. \quad (3.71)$$

O ansatz de Kadanoff-Baym para sistemas perto do equilíbrio é dado por:

$$\tilde{G}(k, T) = 2i (1 + 2f(k_0, T)) \text{Im}[\tilde{G}_R(k, T)], \quad (3.72)$$

onde $f(k_0, T)$ é uma função de distribuição mais complicada a ser determinada, e $T = \frac{x^0 + y^0}{2}$.

Com isso vemos que as funções de Green perdem invariância translacional no tempo e

dependem explicitamente deste.

3.5.1 Funções de Green no Espaço dos Momentos

Para saber se a lagrangiana (3.50) gera funções de Green que obedecem o ansatz de Kadanoff-Baym (3.72) é necessário realizar transformadas de Fourier das equações (3.68) e (3.70). Em seguida tomar a parte imaginária de G_R e comparar com G_c . Para realizar a transformada de Fourier é necessário fazer a seguinte mudança de variáveis: $t = x^0 - y^0$ e $T = \frac{x^0 + y^0}{2}$. Então a transformada de Fourier de uma função g qualquer é da forma:

$$\tilde{g}(k_0, T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0 t} g(t, T) dt, \quad (3.73)$$

As expressões para G_R e G_c no espaço de momentos são demonstradas no apêndice (C) :

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{G}_R(k_0, T, \omega) = & \frac{\theta(T)}{2\Omega} \left[\frac{\sin 2(k_0 + \Omega)T}{k_0 + \Omega} - \frac{\sin 2(k_0 - \Omega)T}{k_0 - \Omega} \right] + \frac{\theta(-T)}{2\omega} \left[\frac{\sin 2(k_0 - \omega)T}{k_0 - \omega} - \frac{\sin 2(k_0 + \omega)T}{k_0 + \omega} \right] \\ & + \left\{ \frac{1 + \frac{\omega}{\Omega}}{4\omega} \left[\theta(T) \left(\frac{\sin 2(k_0 - \Omega)T}{k_0 - \frac{\Omega + \omega}{2}} - \frac{\sin 2(k_0 + \Omega)T}{k_0 + \frac{\Omega + \omega}{2}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta(-T) \left(\frac{\sin 2(k_0 + \omega)T}{k_0 + \frac{\Omega + \omega}{2}} - \frac{\sin 2(k_0 - \omega)T}{k_0 - \frac{\Omega + \omega}{2}} \right) \right] + (\omega \rightarrow -\omega) \right\} \\ & + \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{1 + \frac{\omega}{\Omega}}{2\omega} \right) \cos(\Omega - \omega)T \left[\delta \left(k_0 + \frac{\Omega + \omega}{2} \right) - \delta \left(k_0 - \frac{\Omega + \omega}{2} \right) \right] + (\omega \rightarrow -\omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_c(k_0, T, \omega) = & \frac{\coth \frac{\beta\omega}{2}}{i\omega} \left\{ -\theta(-T) \left[\frac{\sin 2(k_0 + \omega)T}{k_0 + \omega} + \frac{\sin 2(k_0 - \omega)T}{k_0 - \omega} \right] \right. \\
& + \theta(T) \left[\frac{\Omega^2 + \omega^2}{2\Omega^2} \left(\frac{\sin 2(k_0 + \Omega)T}{k_0 + \Omega} + \frac{\sin 2(k_0 - \Omega)T}{k_0 - \Omega} \right) + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} \cos(2\Omega T) \frac{\sin 2k_0 T}{k_0} \right] \\
& + \left[-\frac{\theta(T)}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \left(\frac{\sin 2(k_0 + \Omega)T}{k_0 + \frac{\Omega+\omega}{2}} + \frac{\sin 2(k_0 - \Omega)T}{k_0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} \right) + \right. \\
& + \frac{\theta(-T)}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \left(\frac{\sin 2(k_0 + \omega)T}{k_0 + \frac{\Omega+\omega}{2}} + \frac{\sin 2(k_0 - \omega)T}{k_0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} \right) + (\omega \rightarrow -\omega) \left. \right] \\
& + \frac{\pi}{2} \left[\left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \cos(\Omega - \omega)T \left[\delta \left(k_0 + \frac{\Omega + \omega}{2} \right) + \delta \left(k_0 - \frac{\Omega + \omega}{2} \right) \right] + (\omega \rightarrow -\omega) \right] \left. \right\}, \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Nas equações (3.74) e (3.75) há termos finitos que aparentemente possuem polos. Estes termos estão na primeira linha de (3.74) e na segunda linha de (3.75). Eles surgem através da integração em t cujo domínio é limitado por $|t| < 2|T|$, como $x^0 = T + \frac{t}{2}$ e $y^0 = T - \frac{t}{2}$ então segue que os termos finitos correspondem ao caso em que x^0 e y^0 possuem o mesmo sinal.

Diferentemente, os termos não finitos com polo correspondem a uma integração em t não limitada $2|T| < t < \infty$ que é o caso em que x^0 e y^0 possuem sinais opostos. Analisando (3.74) e (3.75) é possível ver que quando $k_0 \rightarrow \frac{\Omega \pm \omega}{2}$ os termos dominantes são aqueles que possuem polo. Por exemplo, para $k_0 \rightarrow \frac{\Omega + \omega}{2}$ temos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_c(k_0, T) \approx & \frac{\coth \frac{\beta\omega}{2}}{2i\omega} \left\{ \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \left[\frac{-\sin 2T(k_0 - \Omega)}{k_0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} \theta(T) + \frac{\sin 2T(k_0 - \omega)}{k_0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} \theta(T) \right] \right. \\
& \left. + \pi \cos T(\Omega - \omega) \delta \left(k_0 - \frac{\Omega + \omega}{2} \right) \right\}, \tag{3.76}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Im} \widetilde{G}_R(k_0, T) \approx & \frac{1}{4\omega} \left\{ \left(1 + \frac{\omega}{\Omega} \right) \left[\frac{\sin 2T(k_0 - \Omega)}{k_0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} \theta(T) - \frac{\sin 2T(k_0 - \omega)}{k_0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} \theta(T) \right] \right. \\
& \left. - \pi \cos T(\Omega - \omega) \delta \left(k_0 - \frac{\Omega + \omega}{2} \right) \right\}, \tag{3.77}
\end{aligned}$$

onde podemos concluir que:

$$\widetilde{G}_c(k_0, T) = 2i \coth \frac{\beta\omega}{2} \text{Im} \widetilde{G}_R(k_0, T), \tag{3.78}$$

então para valores $k_0 \approx \frac{\Omega \pm \omega}{2}$ temos a seguinte relação

$$\widetilde{G}_c(k_0, T) = \pm 2i \left(1 + 2n_B \left(\frac{\beta k_0 \omega}{\Omega \pm \omega} \right) \right) \text{Im} \widetilde{G}_R(k_0, T), \quad (3.79)$$

que está de acordo com o ansatz de Kadanoff-Baym (3.72) onde $f(k_0, T) = n_B \left(\frac{\beta k_0 \omega}{\Omega \pm \omega} \right)$. O caso em que $\delta m^2 = 0$ na equação (3.51) está no apêndice (D).

3.5.2 Generalização do teorema de flutuação-dissipação para Modelos com Quench

O teorema de flutuação-dissipação para o campo escalar real é obtido utilizando as funções de Green retardada e correlação no equilíbrio (2.71) e (2.73).

$$i\omega \coth \frac{\beta\omega}{2} G_\rho(x_0, y_0) = -\frac{\partial}{\partial x_0} G_c(x_0, y_0), \quad (3.80)$$

porém sistemas fora do equilíbrio podem respeitar essa relação ou não dependendo do quão afastado estão do equilíbrio. Nesta seção será obtida uma generalização do teorema flutuação-dissipação que é válida para qualquer tipo de perturbação do tipo $\Pi(x_0)$. Primeiramente definiremos as funções de Green greater e lesser como:

$$iG_>(x, y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle, \quad iG_<(x, y) = \langle \phi(y)\phi(x) \rangle. \quad (3.81)$$

A partir de agora Σ e Π representam um quench genérico da forma

$$\Sigma(x^0) = \begin{pmatrix} \Sigma_{++} & \Sigma_{<} \\ \Sigma_{>} & \Sigma_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi(x^0)\delta(x-y) & 0 \\ 0 & -\Pi(x^0)\delta(x-y) \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Sendo M uma matriz utilizaremos a transformação $\bar{M} = \sigma_3 M$ é possível reescrever a equação de Dyson (3.57) como:

$$\bar{G}^{-1} = \bar{G}^{(0)-1} - \bar{\Sigma}$$

$$\begin{pmatrix} G_{++} & G_{<} \\ -G_{>} & -G_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{++}^{(0)} & G_{<}^{(0)} \\ -G_{>}^{(0)} & -G_{--}^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma_{++} & \Sigma_{<} \\ -\Sigma_{>} & -\Sigma_{--} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_R^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{++} & \mathbf{G}_{<} \\ -\mathbf{G}_{>} & -\mathbf{G}_{--} \end{pmatrix} \mathbf{G}_A^{-1} = \mathbf{G}_R^{(0)-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{++}^{(0)} & \mathbf{G}_{<}^{(0)} \\ -\mathbf{G}_{>}^{(0)} & -\mathbf{G}_{--}^{(0)} \end{pmatrix} \mathbf{G}_A^{(0)-1} - \begin{pmatrix} \Sigma_{++} & \Sigma_{<} \\ -\Sigma_{>} & -\Sigma_{--} \end{pmatrix},$$

onde foi usado o fato que $\bar{\mathbf{G}}^{-1} = \mathbf{G}_R^{-1} \bar{\mathbf{G}}^T \mathbf{G}_A^{-1}$. A partir da equação acima é possível obter as funções $\mathbf{G}_{\gtrless}$ (greater ou lesser):

$$\mathbf{G}_{\gtrless} = \mathbf{G}_R (\mathbf{G}_R^{(0)-1} \mathbf{G}_{\gtrless}^{(0)} \mathbf{G}_A^{(0)-1} + \Sigma_{\gtrless}) \mathbf{G}_A. \quad (3.83)$$

e lembrando que as relações (3.60) continuam válidas para um quench genérico

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_R &= (1 - \mathbf{G}_R^{(0)} \Sigma_R)^{-1} \mathbf{G}_R^{(0)} \\ \mathbf{G}_A &= \mathbf{G}_R^{(0)} (1 - \mathbf{G}_A^{(0)} \Sigma_A)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_R(x^0, y^0) &= \Sigma_A(x^0, y^0) = \Pi(x^0) \delta(x^0 - y^0), \\ \Sigma_{\gtrless} &= 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

As funções de Green de correlação e a função de Green espectral podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_c(x, y) &= \mathbf{G}_{>}(x, y) + \mathbf{G}_{<}(x, y), \\ \mathbf{G}_\rho(x, y) &= \mathbf{G}_{>}(x, y) - \mathbf{G}_{<}(x, y), \end{aligned} \quad (3.86)$$

onde a função de Green espectral é da forma $\mathbf{G}_\rho(x, y) = \mathbf{G}_R(x, y) - \mathbf{G}_R(y, x)$. Utilizando (3.83), (3.84) e (3.85)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{c,\rho} &= \mathbf{G}_R \mathbf{G}_R^{(0)-1} \mathbf{G}_{<}^{(0)} \mathbf{G}_A^{(0)-1} \mathbf{G}_A \pm \mathbf{G}_R \mathbf{G}_R^{(0)-1} \mathbf{G}_{>}^{(0)} \mathbf{G}_A^{(0)-1} \mathbf{G}_A \\ \mathbf{G}_{c,\rho} &= (1 - \mathbf{G}_R^{(0)} \Sigma_R)^{-1} (\mathbf{G}_{<}^{(0)} \pm \mathbf{G}_{>}^{(0)}) (1 - \mathbf{G}_A^{(0)} \Sigma_A)^{-1} \\ \mathbf{G}_{c,\rho} &= (1 - \mathbf{G}_R^{(0)} \Sigma_R)^{-1} \mathbf{G}_{c,\rho}^{(0)} (1 - \Sigma_A \mathbf{G}_A^{(0)})^{-1}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

As funções de Green livres contendo a seguinte forma;

$$G_c^{(0)}(x^0, y^0, \omega) = -\frac{i}{\omega} \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \cos \omega(x^0 - y^0), \quad (3.88)$$

$$G_\rho^{(0)}(x^0, y^0, \omega) = -\frac{1}{\omega} \sin \omega(x^0 - y^0). \quad (3.89)$$

consequentemente levam a relação de flutuação dissipação no equilíbrio (3.80). Utilizando (3.80) em (3.87) temos:

$$G_\rho(x^0, y^0) = (1 - G_R^{(0)} \Sigma_R)^{-1}(x^0, z) \frac{i}{\omega} \tanh \frac{\beta\omega}{2} \frac{\partial G_c^{(0)}(z, z')}{\partial z^0} (1 - \Sigma_A G_A^{(0)})^{-1}(z', y^0). \quad (3.90)$$

E realizando integração por partes [1]

$$i\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) G_\rho(x^0, y^0) = -\frac{\partial}{\partial x^0} G_c(x^0, y^0) + G_R(x^0, z^0) \frac{d\Pi(z^0)}{dz^0} G_c(z^0, y^0). \quad (3.91)$$

onde a equação (3.91) é uma generalização do teorema de flutuação-dissipação para qualquer tipo de quench $\Pi(z^0)$. A equação acima é uma generalização do ansatz de Kadanoff-Baym para o caso do campo escalar. Este é um dos principais resultados deste trabalho por ser independente da forma do quench Π .

3.6 Relação de Kadanoff-Baym para o caso Não Relativístico

Agora vamos considerar o caso não relativístico onde temos $\psi(x)$ a parte de frequência positiva do campo e $\psi^\dagger(x)$ a parte de frequência negativa. Definiremos os seguintes propagadores greater e lesser não relativísticos

$$ig_>(x, y) = \langle \psi(x) \psi^\dagger(y) \rangle, \quad ig_<(x, y) = \langle \psi^\dagger(y) \psi(x) \rangle. \quad (3.92)$$

De onde tiramos as funções de Green retardada e avançada:

$$\begin{aligned} G_R(x, y) &= \theta(x^0 - y^0) [g_>(x, y) - g_<(x, y)], \\ G_A(x, y) &= G_R^*(y, x). \end{aligned} \quad (3.93)$$

No caso não relativístico as funções de Green são regidas pela seguinte equação diferencial de Schrödinger com quench:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial x^0} - E - \frac{\Pi(x^0)}{m} \right] G_R(x^0, y^0, E) = \delta(x^0 - y^0), \quad (3.94)$$

onde $E = \vec{k}^2/2m$. A solução dessa equação é

$$\begin{aligned} G_R(x_0, y_0, E) \\ = -i\theta(x^0 - y^0) \exp \left(-i \int_{y^0}^{x^0} d\tau [E + \Pi(\tau)/m] \right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Devido a forma de (3.95) vemos que a função de Green apresenta uma propriedade de semigrupo

$$G_R(x^0, y^0) = i G_R(x^0, z^0) G_R(z^0, y^0). \quad (3.96)$$

Analogamente ao que foi feito para obter (3.83) é possível escrever a relação de Dyson-Keldysh para este caso:

$$g_{\geq} = G_R [G_R^{(0)-1} g_{\geq}^{(0)} G_A^{(0)-1} + \Sigma_{\geq}] G_A. \quad (3.97)$$

A expressão acima nos induz a fazer a seguinte análise: a equação (3.97) deve ser aproximadamente diagonal no espaço do tempo, o que deve ser esperado já que há deltas de Dirac com picos em $z = z'$ [32, 33]. Assumindo que termos não diagonais e Σ não contribuem podemos escrever:

$$g_{\geq}(y^0, y^0) = G_R(y^0, z) G_R^{(0)-1}(z, z') g_{\geq}^{(0)}(z', z'') G_A^{(0)-1}(z'', z''') G_A(z''', y^0) \quad (3.98)$$

então para $x^0 > y^0$ temos

$$\begin{aligned} g_{\geq} &= G_R(x^0, z) G_R^{(0)-1} g_{\geq}^{(0)} G_A^{(0)-1} G_A(z''', y^0) \\ &= i G_R(x^0, y^0) G_R(y^0, z) G_R^{-1} g_{\geq} G_A^{(0)-1} G_A(z''', y^0) \\ &= i G_R(x^0, y^0) g_{\geq}(y^0, y^0), \end{aligned} \quad (3.99)$$

para o caso em que $y^0 < x^0$ o procedimento é análogo ao anterior:

$$g_{\geq} = -g_{\geq}(x^0, x^0) i G_A(x^0, y^0), \quad (3.100)$$

portanto [32, 33]:

$$\begin{aligned} g_{\geq}(x^0, y^0) &= i G_R(x^0, y^0) g_{\geq}(y^0, y^0) \\ &\quad - i g_{\geq}(x^0, x^0) G_A(x^0, y^0). \end{aligned} \quad (3.101)$$

que é uma expressão aproximada de (3.97). Para analisar (3.101) usaremos a solução exata (3.97), com um quench exatamente solúvel quando $\Sigma_{\geq} = 0$. Temos que a função de Green greater e lesser livres são da forma [3, 10]:

$$\begin{aligned} g_{<}^{(0)}(x^0, y^0) &= -i n_B(E) e^{-iE(x^0 - y^0)}, \\ g_{>}^{(0)}(x^0, y^0) &= -i(1 + n_B(E)) e^{-iE(x^0 - y^0)}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

podemos reescrever (3.97) como

$$\begin{aligned} g_{\geq}(x^0, y^0) &= (1 - G_R^{(0)} \Sigma_R)^{-1}(x^0, z^0) g_{\geq}^{(0)}(z^0, z^{0'}) (1 - \Sigma_A G_A^{(0)})^{-1}(z^{0'}, y^0) \\ &= (1 + G_R \Sigma_R)(x^0, z^0) g_{\geq}^{(0)}(z^0, z^{0'}) (1 + \Sigma_A G_A)(z^{0'}, y^0), \end{aligned} \quad (3.103)$$

onde foi utilizado (3.84) da seguinte forma:

$$1 + G_R \Sigma_R = 1 + (1 - G_R^{(0)} \Sigma_R)^{-1} G_R^{(0)} \Sigma_R = (1 - G_R^{(0)} \Sigma_R)^{-1}, \quad (3.104)$$

com (3.102) e (3.103) é possível obter a expressão exata de $g_{<}$ com um quench dado por (3.51) e com $\delta m^2 = 0$

$$\begin{aligned}
g_{<}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= g_{<}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + N(E) \int d\mathbf{z} d\mathbf{z}' e^{-iE(\mathbf{x}-\mathbf{z})} \frac{\Delta}{m} \delta(\mathbf{z}) \delta(\mathbf{z}-\mathbf{z}') \theta(\mathbf{y}-\mathbf{z}') e^{-i[E(\mathbf{z}'-\mathbf{y})-\frac{\Delta}{m}\theta(\mathbf{y})\theta(-\mathbf{z}')]}} \\
&- i \int d\mathbf{z} d\mathbf{z}' \theta(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \delta(\mathbf{z}) \delta(\mathbf{z}-\mathbf{z}') n_B(E) e^{-iE(\mathbf{z}'-\mathbf{y})} e^{-i[E(\mathbf{x}-\mathbf{z})-\frac{\Delta}{m}\theta(\mathbf{x})\theta(-\mathbf{z}')]}} \\
&- i \left(\frac{\Delta}{m} \right)^2 \int d\mathbf{z} d\mathbf{z}' d\mathbf{z}'' \theta(\mathbf{x}-\mathbf{z}) e^{-iE(\mathbf{z}'-\mathbf{y})} e^{-i[E(\mathbf{x}-\mathbf{z})-\frac{\Delta}{m}\theta(\mathbf{x})\theta(-\mathbf{z}')]}} \times \\
&\times \delta(\mathbf{z}) \delta(\mathbf{z}-\mathbf{z}') n_B(E) e^{-iE(\mathbf{z}-\mathbf{z}')}\delta(\mathbf{z}')\delta(\mathbf{z}'-\mathbf{z}'')\theta(\mathbf{y}-\mathbf{z}'') e^{-i[E(\mathbf{y}-\mathbf{z}'')-\frac{\Delta}{m}\theta(\mathbf{y})\theta(-\mathbf{z}'')]} \quad (3.105)
\end{aligned}$$

realizando as integrais, e tomando cuidado com os domínios de integração temos que a função $g_{<}$ é:

$$g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = -in_B(E) e^{-iE(\mathbf{x}^0-\mathbf{y}^0)} \left[1 - i \frac{\Delta}{m} \theta(\mathbf{x}^0) e^{-i\frac{\Delta}{2m}} \right] \left[1 + i \frac{\Delta}{m} \theta(\mathbf{y}^0) e^{i\frac{\Delta}{2m}} \right]. \quad (3.106)$$

utilizando a expressão (3.106) em (3.101) para $\mathbf{x}^0 > \mathbf{y}^0$

$$\begin{aligned}
g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= \\
&- in_B(E) \theta(\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}^0) e^{-i \left[E(\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}^0) + \frac{\Delta \theta(\mathbf{x}^0) \theta(-\mathbf{y}^0)}{m} \right]} \left(1 - i \frac{\Delta}{m} \theta(\mathbf{y}^0) e^{-i\frac{\Delta}{2m}} \right) \left(1 + i \frac{\Delta}{m} \theta(\mathbf{y}^0) e^{-i\frac{\Delta}{2m}} \right) \\
&= -in_B(E) e^{-iE(\mathbf{x}^0-\mathbf{y}^0)} e^{-i\frac{\Delta}{m}\theta(\mathbf{x}^0)\theta(-\mathbf{y}^0)} \times \left[1 + \left(\frac{\Delta}{m} \right)^2 \theta(\mathbf{y}^0) \right], \quad (3.107)
\end{aligned}$$

onde claramente nota-se que (3.107) difere de (3.106). Para o caso em que $\Delta = 0$ e $\delta m \neq 0$ a função de Green Retardada assume a forma:

$$G_R(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = -i\theta(\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}^0) \exp \left(-i \left[\left(E + \frac{\delta m^2}{m} \theta(\mathbf{x}^0) \right) \mathbf{x}^0 - \left(E + \frac{\delta m^2}{m} \theta(\mathbf{y}^0) \right) \mathbf{y}^0 \right] \right). \quad (3.108)$$

e $G_A(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = G_R^*(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0)$. Para calcular $g_{<}$ é necessário integrar os termos da eq. (3.103) utilizando (3.108).

$$g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = -in_B(E) e^{-iE(\mathbf{x}^0-\mathbf{y}^0)} \left\{ \left[1 + \theta(\mathbf{y}^0) (e^{i\mathbf{y}^0 \frac{\delta m^2}{m}} - 1) \right] \left[1 + \theta(\mathbf{x}^0) (e^{-i\mathbf{x}^0 \frac{\delta m^2}{m}} - 1) \right] \right\}, \quad (3.109)$$

para reescrever esta expressão usa-se a seguinte relação: seja uma função $h(t)$ em que $h(0) = 1$ então vale a seguinte propriedade

$$1 + \theta(t)(h(t) - 1) = h(\theta(t)t), \quad (3.110)$$

sendo assim a equação (3.109) fica:

$$\begin{aligned} g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= -i n_B(E) e^{-iE(\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}^0)} e^{-i \frac{\delta m^2}{m} (\mathbf{x}^0 \theta(\mathbf{x}^0) - \mathbf{y}^0 \theta(\mathbf{y}^0))} \\ &= -i n_B(E) (\theta(\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}^0) + \theta(\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0)) e^{-iE(\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}^0)} e^{-i \frac{\delta m^2}{m} (\mathbf{x}^0 \theta(\mathbf{x}^0) - \mathbf{y}^0 \theta(\mathbf{y}^0))} \\ &= g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0) [G_R(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) - i G_A(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)], \end{aligned} \quad (3.111)$$

e por fim

$$g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = G_R(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) g_{<}(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^0) - i g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0) G_A(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0), \quad (3.112)$$

então, de acordo com (3.112), é possível ver que para esse tipo de quench as eqs. (3.97) e (3.101) estão em concordância. Como:

$$\begin{aligned} G_c(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= g_{>}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) + g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \\ G_\rho(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= g_{>}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) - g_{<}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0), \end{aligned} \quad (3.113)$$

e $g_{<} = e^{\beta E} g_{>}$ é possível obter uma simples relação do tipo Kadanoff-Baym

$$G_c(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \coth\left(\frac{\beta E}{2}\right) G_\rho(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0). \quad (3.114)$$

A aproximação (3.101) leva em consideração a suposição que o termo com polo, que contem termos do tipo delta de Dirac, é o que mais contribui para as funções de Green no espaço misto. Para o caso da função retardada (3.108), que é exata, é interessante analisar essa suposição analisando-a no espaço de momentos.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_R(k_0, T) &= \theta(T) \left[\frac{1 - e^{2i(k_0 - E - \frac{\delta m^2}{m})T}}{k_0 - E - \frac{\delta m^2}{m}} + \frac{e^{2i(k_0 - E - \frac{\delta m^2}{m})T}}{k_0 + i\epsilon - E - \frac{\delta m^2}{2m}} \right] + \\ &\quad \theta(-T) \left[\frac{1 - e^{-2i(k_0 - E)T}}{k_0 - E} + \frac{e^{-2i(k_0 - E)T}}{k_0 + i\epsilon - E - \frac{\delta m^2}{2m}} \right], \end{aligned} \quad (3.115)$$

a equação (3.115) possui um polo em $k_0 = E + \delta m^2/2m - i\epsilon$ que contribui com uma função delta ao fazer $G_\rho = 2i\text{Im}\tilde{G}_R$. Este termo no espaço misto fornece uma forma aproximada da função de Green

$$G_R^q(x^0, y^0) = -i\theta(x^0 - y^0)e^{-iE(x^0 - y^0)}e^{-i\frac{\delta m^2 x^0}{m}}. \quad (3.116)$$

que concorda com (3.108) para $x^0 > 0$ e $y^0 < 0$. Isso ocorre pois esse termo de $\tilde{G}_R$ em (3.116) possui um intervalo de integração não finito. Para $x^0 < 0$ ou $y^0 > 0$, (3.116) e (3.108) não concordam entre si e a aproximação (3.101) não é verificada.

Foi analisado um modelo não-relativístico e exatamente solúvel. Esse modelo ajuda a entender certas suposições usadas em teorias de muitos corpos, sobre generalizações do ansatz de Kadanoff-Baym. Para quenches com picos acentuados, a omissão dos termos não-diagonais não deve ser feita pois eles tem uma contribuição significativa para as funções de Green. Por outro lado, em quenches suaves a aproximação é válida. Porém, essa aproximação não é consistente para todos os setores de tempo como se pode ver ao analisar (3.116) com (3.108).

3.7 Sistemas Glassy

Como visto na seção anterior, fenômenos de não equilíbrio são um dos objetivos de estudo da mecânica estatística. Comparando com a mecânica estatística de Boltzmann, que tem como base o princípio de probabilidades iguais a priori, um princípio geral para a mecânica estatística de não equilíbrio não é bem estabelecido. Porém uma vertente de estudo de fenômenos de não equilíbrio é estabelecer padrões entre diferentes fenômenos de não equilíbrio. Então, é importante procurar princípios que façam sistemas diferentes caírem na mesma categoria. Uma dessas categorias são os sistemas vítreos (*glassy systems*).

Os sistemas vítreos são muito comuns na natureza: vidros comuns, vidros de spin, condensado de vidro de cor, proteínas etc [34–36]. Uma propriedade particular dos sistemas vítreos é o tempo de relaxação exponencial das funções de correlação $e^{-t/\tau}$. O fato desse tempo ser muito maior que o tempo de observação do experimentador traz uma característica de uma exponencial "esticada". O exemplo mais clássico é o do vidro estrutural*. O vidro é formado através do resfriamento rápido de um líquido. Se o líquido resfriado abaixo da temperatura de fusão não cristalizar ele entra em estado metaestável, onde localmente possui propriedades de equilíbrio e são chamados de líquidos superresfriados. A medida que o resfriamento continua o líquido atinge um estado de não equilíbrio onde o movimento molecular ocorre muito vagarosamente devido ao baixo volume específico. Em nível molecular e a temperaturas próximas a transição para vidro, T_g , leva minutos ou até horas para uma molécula de menos de $10\text{\AA}$ se reorientar [35,36]. Então, o estado vítreo são líquidos que são "congelados" na escala de tempo de experimentação.

Outro exemplo são os vidros de spin. Seja um sistema de spins cujo os entes da rede possuem o sinal do acoplamento com o seu vizinho distribuído aleatoriamente entre $+1$ e -1 . Pensando em uma rede triangular, onde um dos entes possui interação ferromagnética com os outros, enquanto os restantes têm interação anti-ferromagnética de acordo com a fig.(3.1). Assim o mínimo de energia não é atingido para cada ligação. Estendendo esse raciocínio para uma rede macroscópica vê-se que esse sistema se assemelha com o vidro, onde agora a desordem se manifesta nos momentos magnéticos e não mais na mobilidade molecular.

*O vidro comum é o exemplo mais conhecido de vidro estrutural

Figura 3.1: Sistema triangular de spins.

Além do mais, outra importante propriedade dos sistemas vítreos é a noção de temperatura efetiva que é importante para estudos das propriedades de não-equilíbrio. Ela representa o processo de fluxo de calor entre o sistema e o banho térmico. Uma das formas de se obter a temperatura é através das violações do teorema de flutuação-dissipação.

Como sistemas deste tipo se encontram numa situação de equilíbrio e não equilíbrio, pode-se pensar em uma relação do tipo flutuação-dissipação para estes sistemas análoga a de um sistema em equilíbrio. Uma generalização do teorema de flutuação-dissipação para sistemas tipo glassy é da forma:

$$\frac{1}{\beta_{\text{eff}}} G_R(x^0, y^0, \omega) = -\theta(x^0 - y^0) \frac{\partial C(x^0, y^0, \omega)}{\partial y^0}, \quad (3.117)$$

onde β_{eff} é o inverso de uma temperatura efetiva de equilíbrio, que é uma função que varia suavemente e vagarosamente no tempo e deve ser determinada em termos das variáveis do sistema como temperatura e energia [35]. A função de correlação C é definida como $G_c(x, y) = -2iC(x, y)$. Em alguns outros modelos também vale a relação

$$\frac{\Omega_{\text{eff}}}{2} \coth \frac{\beta_{\text{eff}} \Omega_{\text{eff}}}{2} G_R(x^0, y^0; \omega) = -\theta(x^0 - y^0) \frac{\partial C(x^0, y^0; \omega)}{\partial y^0}, \quad (3.118)$$

onde Ω_{eff} é a energia efetiva. Essa expressão se reduz a (3.117) no limite de altas temperaturas.

3.7.1 Sistema Glassy Exatamente Solúvel

O modelo de quench descrito pela lagrangiana (3.50) se comporta como um sistema glassy para a função $\Pi(x^0) = \delta m^2 \theta(t)$. As expressões das funções de Green retardada e

de correlação já foram obtidas (3.68) e (3.70)

$$\begin{aligned}
G_c(x^0, y^0) = & -\frac{i}{\omega}(1 + 2n(\omega)) \left[\theta(-x^0)\theta(-y^0) \cos \omega(x^0 - y^0) \right. \\
& + \frac{1}{2}\theta(-x^0)\theta(y^0) \left(\left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\omega x^0 - \Omega y^0) + \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\omega x^0 + \Omega y^0) \right) \\
& + \frac{1}{2}\theta(x^0)\theta(-y^0) \left(\left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\Omega x^0 - \omega y^0) + \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \cos(\Omega x^0 + \omega y^0) \right) \\
& \left. + \frac{1}{2}\theta(x^0)\theta(y^0) \left(\frac{(\Omega^2 + \omega^2)}{\Omega^2} \cos \Omega(x^0 - y^0) + \frac{(\Omega^2 - \omega^2)}{\Omega^2} \cos \Omega(x^0 + y^0) \right) \right]. \quad (3.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_R(x^0, y^0) = & \theta(x^0 - y^0) \left[-\frac{1}{\omega}\theta(-x^0)\theta(-y^0) \sin \omega(x^0 - y^0) - \frac{1}{\Omega}\theta(x^0)\theta(y^0) \sin \Omega(x^0 - y^0) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\omega}\theta(x^0)\theta(-y^0) \left(\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \sin(\Omega x^0 + \omega y^0) - \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \sin(\Omega x^0 - \omega y^0) \right) \right]. \quad (3.120)
\end{aligned}$$

Ao analisarmos a equação (3.119) para $x^0, y^0 > 0$ e mantendo os fatores regularizadores, ϵ , G_c assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
G_c(x^0, y^0) = & -\frac{i}{2\omega}(1 + 2n(\omega)) \times \\
& \times \left(\frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2} e^{-\epsilon|x^0 - y^0|} \cos \Omega(x^0 - y^0) + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} e^{-\epsilon(x^0 + y^0)} \cos \Omega(x^0 + y^0) \right). \quad (3.121)
\end{aligned}$$

Vemos que o regularizador faz o papel do inverso do tempo de relaxação do sistema. Nesse caso esse tempo é grande, e podemos afirmar que esse modelo se comporta como um sistema *glassy* [2].

O objetivo agora é tentar verificar se as equações (3.119) e (3.120) são condizentes com (3.117) ou (3.118). Em (3.119) não será necessário utilizar o termo em que $x^0 < y^0$, já que (3.117) e (3.118) possuem um termo $\theta(x^0 - y^0)$. Então, derivando (3.121) em relação a y^0 temos que:

$$\begin{aligned}
\theta(x^0 - y^0) \frac{\partial C(x^0, y^0; \omega, \Omega)}{\partial y^0} = & \theta(x^0 - y^0) \frac{(1 + 2n(\omega))}{2\omega} \left[\theta(-x^0)\theta(-y^0) \omega \sin \omega(x^0 - y^0) \right. \\
& + \frac{\theta(x^0)\theta(-y^0)}{2} \left(\left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \omega \sin(\Omega x^0 - \omega y^0) - \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \omega \sin(\Omega x^0 + \omega y^0) \right) \\
& \left. + \frac{\theta(x^0)\theta(y^0)}{2} \left(\frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega} \sin \Omega(x^0 - y^0) - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega} \sin \Omega(x^0 + y^0) \right) \right]. \quad (3.122)
\end{aligned}$$

Nestas expressões é possível ver, através das funções de Heaviside, a contribuição para as funções de Green para cada intervalo de tempo: antes do quench ($x^0 < 0$ e $y^0 < 0$), durante o quench ($x^0 > 0$ e $y^0 < 0$ ou o contrário) e após o quench ($x^0 > 0$ e $y^0 > 0$). Os parâmetros de regularização foram omitidos dessas expressões para facilitar a notação, mas eles são importantes para a compreensão do sistema a tempos grandes.

No nosso caso analisaremos primeiramente o intervalo de tempo em que $x^0, y^0 \gg 0$. Ao tomarmos x^0 e y^0 grandes e mantendo sua diferença finita nas eqs. (3.120) e (3.122), temos que

$$\theta(x^0 - y^0) \frac{\partial C(x^0, y^0; \omega, \Omega)}{\partial y^0} = \theta(x^0 - y^0) \frac{(1 + 2n(\omega))}{4\omega} \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega} \sin \Omega(x^0 - y^0), \quad (3.123)$$

mas utilizando a equação (3.120) para tempos positivos e comparando com (3.118):

$$-\theta(x^0 - y^0) \frac{\partial C}{\partial y^0} = \frac{(\Omega^2 + \omega^2)}{4\omega} \coth \frac{\beta\omega}{2} G_R = \frac{\Omega_{\text{eff}}}{2} \coth \frac{\beta_{\text{eff}} \Omega_{\text{eff}}}{2} G_R, \quad (3.124)$$

onde é intuitivo fazer a energia efetiva do sistema igual a energia total ($\Omega_{\text{eff}} = \Omega$), e a temperatura efetiva pode ser obtida invertendo a equação (3.124) seguinte forma

$$\begin{aligned} \beta_{\text{eff}} &= \frac{2}{\Omega} \text{Arcth} \left[\frac{\Omega^2 + \omega^2}{2\omega\Omega} \coth \frac{\beta\omega}{2} \right] \\ &= \frac{4\omega}{\Omega^2 + \omega^2} \tanh \frac{\beta\omega}{2} + \dots \end{aligned} \quad (3.125)$$

Para altas temperaturas $\beta\omega \ll 1$

$$\frac{1}{\beta_{\text{eff}}} \simeq \frac{\Omega^2 + \omega^2}{2\omega^2} \frac{1}{\beta} = \left(1 + \frac{\delta m^2}{2\omega^2} \right) \frac{1}{\beta}. \quad (3.126)$$

Em (3.126) é possível ver que se $\delta m^2 > 0$ o sistema está sofrendo uma rápida contração, tendo um aumento de temperatura e, conseqüentemente, elevando o valor da temperatura efetiva. $\delta m^2 < 0$ corresponde a uma rápida expansão do sistema e levando a uma baixa temperatura efetiva. Sendo assim, vemos que para um tempo muito maior que o instante do quench, onde o sistema está muito próximo do equilíbrio, é válida a equação (3.118).

Para os intervalos de tempo em que $y^0 < 0$ e qualquer x^0 , nas equações (3.119) e (3.120), o sistema também obedece o teorema flutuação-dissipação onde $\beta_{\text{eff}} = \beta$ e

$$\Omega_{\text{eff}} = \omega.$$

$$-\theta(x^0 - y^0) \frac{\partial C}{\partial y^0} = \frac{\omega}{2} \coth \frac{\beta\omega}{2} G_R, \quad (3.127)$$

devido ao fato que $y^0 < 0$, o sistema mantém a relação de flutuação-dissipação mesmo com as funções de Green possuindo formas diferentes para $x^0 > 0$ e $x^0 < 0$. O fato de $y^0 < 0$, faz manter uma relação causal entre: equilíbrio, quench e não equilíbrio, quando $x^0 > 0$. Para instantes logo após o quench ($x^0, y^0 > 0$) a relação não é estabelecida pois o sistema está altamente fora do equilíbrio, como pode-se ver ao comparar (3.120) e (3.122).

O modelo estudado se comporta como um sistema do tipo glassy. Foram obtidas a β_{eff} e Ω_{eff} desse sistema para $y^0 < 0$ e $y^0 \gg 0$. Para y^0 negativo, o teorema flutuação-dissipação se mantém devido a causalidade, já que o quench começa a partir do instante zero. Com y^0 muito maior que o tempo de observação do sistema o teorema flutuação-dissipação estendido para sistemas glassy surge devido ao fato do regularizador das funções de Green fazer o papel de tempo de relaxação e o sistema se comportar em estado de quase-equilíbrio.

Considerações Finais

Neste texto estudamos modelos fora do equilíbrio termodinâmico para verificação de algumas hipóteses acerca de fenômenos fora do equilíbrio. Mais especificamente, foi estudado dois modelos fora do equilíbrio no âmbito da teoria quântica de campos à temperatura finita. Esses modelos possuem a característica de que o termo de massa do campo escalar em um determinado instante de tempo é alterado. Esses tipos de modelo são chamados de quench, que consistem em uma mudança repentina no acoplamento ou outras grandezas físicas.

O modelo onde o termo que altera a lagrangiana é do tipo $\delta(t)$ obedece a relação de flutuação-dissipação para certos intervalos de tempo como visto no apêndice (D). Outro fato importante é que, de acordo com (3.106) e (3.107), este modelo contraria a hipótese de que as funções de Green $g^>$ e $g^<$ podem ser descritas sempre por (3.101).

O outro modelo utilizado é aquele cuja a mudança de massa é proporcional $\theta(t)$. Esse sistema também obedece a relação de flutuação-dissipação analogamente ao exemplo anterior. Entretanto, a aproximação (3.101) é válida e compatível com (3.112). Esse sistema também possui uma interessante característica pois este se comporta como um sistema *glassy*. O regularizador faz o papel de tempo de relaxação e as funções de Green tendem ao equilíbrio ao fazer o tempo muito maior que o período de medição do sistema. Com isso é possível obter a temperatura e frequência efetiva.

Ambos os sistemas possuem uma interessante propriedade. Ao tomar a transformada de Fourier das funções de Green é constatado que elas não obedecem a relação de Kadanoff-Baym. Entretanto, os termos das funções de correlação e espectral que possuem polos obedecem as relações de Kadanoff-Baym quando k^0 tende para as estas singularidades.

Um aspecto interessante, é que a (3.101) não é válida para quenches que são bem acentuados como no caso $\delta(t)$, mas funciona muito bem para casos em que o quench é mais suave como no caso $\theta(t)$. Outro aspecto importante estudado sobre os modelos com

quench é uma generalização do teorema de flutuação-dissipação. Através da equação de Dyson foi possível obter a equação (3.91) que é uma relação válida para qualquer que seja $\Pi(x^0)$.

Apêndices

Apêndice A

Solução da Equação Diferencial no Contorno de Keldysh

A solução para equação diferencial (2.63) é a soma da solução homogênea (sem o delta de Dirac) somada a solução particular (com o delta de Dirac). Para o caso em que t e t' estão no sentido positivo do contorno temos que $G_C(t - t', \omega) \equiv G_{++}(t - t', \omega)$ e $\delta_c(t - t') \equiv \delta(t - t')$ de acordo com as (2.61). Tomando a transformada de Fourier de $t - t'$ para p_0 a equação homogênea assume a seguinte forma:

$$(k_0^2 - \omega^2) G_{++}(k_0, \omega) = 0. \quad (A.1)$$

Logo a solução para forçar $k_0^2 = \omega^2$ deve ser $G_{++}(k_0, \omega) = A\delta(k_0^2 - \omega^2)$, onde A é uma constante. A solução solução particular para $G_{++}(k_0, \omega)$ é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (-k_0^2 + \omega^2) G_{++}(k_0, \omega) &= -1 \\ G_{++}(k_0, \omega) &= \frac{1}{k_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (A.2)$$

Então a solução mais geral para $G_{++}(k_0, \omega)$ é:

$$G_{++}(k_0, \omega) = \frac{1}{k_0^2 - \omega^2} + A\delta(k_0^2 - \omega^2), \quad (A.3)$$

a transformada inversa é do tipo:

$$G_{++}(t - t', \omega) = \int \frac{dk_0}{2\pi} \left[\frac{e^{-ik_0(t-t')}}{k_0^2 - \omega^2} + Ae^{-ik_0(t-t')}\delta(k_0^2 - \omega^2) \right], \quad (A.4)$$

 Figura A.1: Contorno de integração para $\Delta t = t - t' > 0$.

o segundo termo do lado direito é integrado usando a relação $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x - a) + \delta(x + a))$ e fornece

$$\frac{A}{4\omega\pi} \left[e^{+i\omega(t-t')} + e^{-i\omega(t-t')} \right], \quad (\text{A.5})$$

o outro termo da integral deve ser resolvido através do método dos resíduos. Para o caso em que $\Delta t = t - t' > 0$ é necessário fazer a integração através do contorno no plano complexo em que o termo $e^{-ik_0\Delta t}$ se anule para grandes valores de $|k_0|$, esse contorno é indicado pela fig.(A.1). Os resíduos para os polos $\pm\omega$ são

$$\begin{aligned} \text{Res}(k_0 = \omega) &= \frac{1}{4\pi\omega} e^{-i\omega\Delta t} \\ \text{Res}(k_0 = -\omega) &= -\frac{1}{4\pi\omega} e^{i\omega\Delta t}, \end{aligned}$$

com isso a integral deste termo é da forma

$$-\frac{1}{4i\omega} (e^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t}). \quad (\text{A.6})$$

Então a função de Green é

$$G_{++}(t - t', \omega) = -\frac{1}{4i\omega} (e^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t}) + \frac{A}{4\omega\pi} \left[e^{+i\omega(t-t')} + e^{-i\omega(t-t')} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Agora, para determinar a constante Λ , é necessário utilizar a condição KMS (1.61) na equação (A.7):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4i\omega} (e^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t}) + \frac{\Lambda}{4\omega\pi} [e^{+i\omega\Delta t} + e^{-i\omega\Delta t}] = \\ & = -\frac{1}{4i\omega} (e^{-i\omega\Delta t} e^{\beta\omega} - e^{i\omega\Delta t} e^{-\beta\omega}) + \frac{\Lambda}{4\omega\pi} [e^{-i\omega\Delta t} e^{\beta\omega} + e^{i\omega\Delta t} e^{-\beta\omega}], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

devido a independência linear das exponenciais pode-se isolar os termos proporcionais a $e^{i\omega\Delta t}$ e $e^{-i\omega\Delta t}$:

$$i\pi + \Lambda = -\pi i e^{-\beta\omega} + \Lambda e^{-\beta\omega}, \quad (\text{A.9})$$

onde a constante Λ é dada por

$$\Lambda = \frac{\pi}{i} - 2\pi i n_B(\omega). \quad (\text{A.10})$$

Agora, para termos uma solução completa, é necessário levar em consideração $\Delta t < 0$ na integral (A.4). O processo é similar ao feito anteriormente onde a diferença consiste em tomar o contorno de integração na parte superior do plano complexo. Com isso a solução completa para a função de Green é:

$$\begin{aligned} G_{++}(t - t', \omega) = & -\frac{\theta(t - t')}{4i\omega} (e^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t}) + \frac{\theta(t' - t)}{4i\omega} (e^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t}) + \frac{\frac{\pi}{i} - 2\pi i n_B(\omega)}{4\omega\pi} [e^{+i\omega\Delta t} + e^{-i\omega\Delta t}], \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e por fim:

$$G_{++}(t - t', \omega) = -\frac{i}{2\omega} \left((\theta(t - t') + n_B(\omega)) e^{-i\omega(t-t')} + (\theta(t' - t) + n_B(\omega)) e^{i\omega(t-t')} \right), \quad (\text{A.12})$$

onde n_B é a função de distribuição Bose-Einstein e foi utilizado $\theta(t - t') + \theta(t' - t) = 1$

Apêndice B

Cálculo das Funções de Green

Para encontrar as relações (3.60) usaremos a expressão (3.59). Para isso faremos a seguinte notação

$$M \equiv \hat{G}^{(0)} \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & G_A^{(0)} \\ G_R^{(0)} & G_c^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Pi(x^0) \\ \Pi(x^0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_A^{(0)} \Pi(x^0) & 0 \\ G_c^{(0)} \Pi(x^0) & G_R^{(0)} \Pi(x^0) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (B.1)$$

e o propagador livre pode ser escrito da seguinte forma

$$\hat{G}^{(0)} = \begin{pmatrix} a/\delta & 0 \\ b/\delta & c/\delta \end{pmatrix}, \quad (B.2)$$

onde $\delta \equiv \Pi(x^0)$.

A partir de (B.1) podemos obter as suas potências superiores

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ba + cb & c^2 \end{pmatrix}; & M^3 &= \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ba^2 + cba + c^2b & c^3 \end{pmatrix} \\ M^4 &= \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ ba^3 + cba^2 + c^2ba + c^3b & c^4 \end{pmatrix}; & M^5 &= \begin{pmatrix} a^5 & 0 \\ ba^4 + cba^3 + c^2ba^2 + c^3ba + c^4b & c^5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} c^m ba^{n-m-1} & c^n \end{pmatrix}. \quad (B.3)$$

Com isso podemos escrever

$$M^n \hat{G}^{(0)} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} c^m b a^{n-m-1} & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/\delta & 0 \\ b/\delta & c/\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^n a/\delta \\ c^n c/\delta & \frac{a}{\delta} \sum_{m=0}^{n-1} c^m b a^{n-m-1} + c^n \frac{b}{\delta} \end{pmatrix}, \quad (B.4)$$

$$\text{como } \hat{G} = \hat{G}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} M^n \hat{G}^{(0)},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & G_A \\ G_R & G_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G_A^{(0)} \\ G_R^{(0)} & G_c^{(0)} \end{pmatrix} + \sum_{n=1} \begin{pmatrix} 0 & a^n a/\delta \\ c^n c/\delta & \frac{a}{\delta} \sum_{m=0}^{n-1} c^m b a^{n-m-1} + c^n \frac{b}{\delta} \end{pmatrix}, \quad (B.5)$$

de acordo com (B.5), então temos que a função de Green avançada assume a forma

$$\begin{aligned} G_A &= G_A^{(0)} + \sum_{n=1} (-1)^n (G_A^{(0)} \Pi)^n G_A^{(0)} = \sum_{n=1} (-1)^n (G_A^{(0)} \Pi)^n G_A^{(0)} = \\ &= (1 + G_A^{(0)} \Pi)^{-1} G_A^{(0)}. \end{aligned} \quad (B.6)$$

E analogamente para a função de Green retardada

$$G_R = (1 + G_R^{(0)} \Pi)^{-1} G_R^{(0)}. \quad (B.7)$$

Para a função de Green de correlação temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} G_c - G_c^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^n (G_R^{(0)} \Pi)^m G_c^{(0)} (G_A^{(0)} \Pi)^{n-m} + \underbrace{(-1)^n (G_R^{(0)} \Pi)^n G_c^{(0)}}_{\text{Termo enésimo}} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n (-1)^n (G_R^{(0)} \Pi)^m G_c^{(0)} (G_A^{(0)} \Pi)^{n-m} \right]; \\ G_c &= G_c^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n (-1)^n (G_R^{(0)} \Pi)^m G_c^{(0)} (G_A^{(0)} \Pi)^{n-m} \right], \end{aligned} \quad (B.8)$$

e por fim:

$$G_c = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^n (G_R^{(0)} \Pi)^m G_c^{(0)} (G_A^{(0)} \Pi)^{n-m}, \quad (B.9)$$

essa soma pode ser feita rearranjando os termos da seguinte soma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^n x^m y^{n-m} &= \\ 1 - (y + x) + (y^2 + xy + x^2) - (y^3 + xy^2 + x^2y + x^3) + (y^4 + xy^3 + x^2y^2 + x^3y + x^4) + \dots &= \\ = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + \dots - x + xy - xy^2 + xy^3 - \dots + x^2 - x^2y + x^2y^2 - \dots - x^3 + x^3y - \dots + x^4 \dots &= \\ = (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots)(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \dots) &= \\ = (1 + x)^{-1}(1 + y)^{-1}, & \end{aligned} \quad (B.10)$$

essa soma é analoga a soma em (B.9). Com isso é possível concluir que

$$G_c = (1 + G_R^{(0)} \Pi)^{-1} G_c^{(0)} (1 + \Pi G_A^{(0)})^{-1}. \quad (B.11)$$

Logo as equações (B.6), (B.7) e (B.11) correspondem as equações (3.60).

Apêndice C

Cálculo das Funções de Green no Espaço de Momentos

O cálculo das funções de Green (3.74) e (3.75), no espaço de momentos, é bastante trabalhoso. No entanto não há muitas dificuldades operacionais devido ao fato que a transformada de Fourier consistir em integrais simples. Para efetuar a integração é necessário fazer as seguintes mudanças de variáveis: $t = x^0 - y^0$ e $T = \frac{x^0 + y^0}{2}$. Então, (3.70) assume a forma:

$$G_R(t, T) = \theta(t) \left[\overbrace{-\frac{1}{\omega} \theta(-2T - t) \theta(-2T + t) \sin \omega t}^{\text{I}} - \overbrace{\frac{1}{\Omega} \theta(2T + t) \theta(2T - t) \sin \Omega t}^{\text{II}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\omega} \theta(2T + t) \theta(-2T + t) \overbrace{\left(\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \sin \left(\frac{t}{2} (\Omega - \omega) + T(\Omega + \omega) \right) \right)}^{\text{III}} \right. \\ \left. - \overbrace{\left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \sin \left(\frac{t}{2} (\Omega + \omega) + T(\Omega - \omega) \right)}^{\text{IV}} \right]. \quad (\text{C.1})$$

Para efetuar os cálculos é necessário notar que os limites de integração dependem das funções de Heaviside em (C.1). Para o termo $\theta(t)\theta(-t - 2T)\theta(t - 2T)$ o intervalo de integração, para $T < 0$, é dado pela fig. C.1.

E para $T > 0$ o termo $\theta(t)\theta(-t - 2T)\theta(t - 2T)$ é nulo. Sendo assim, a transformada

 Figura C.1: Domínio da variável t , com $T < 0$, para o termo I em (C.1).

 Figura C.2: Domínio da variável t , com $T > 0$, para o termo IV em (C.1)

de Fourier para o primeiro termo de G_R é da forma:

$$\frac{\theta(-T)}{\omega} \int_0^{-2T} dt \exp^{ikt} \sin \omega t = \frac{\theta(-T)}{2\omega} \left[\frac{\cos 2T(k^0 - \omega)}{k^0 - \omega} + i \frac{\sin 2T(k^0 + \omega)}{k^0 + \omega} + \frac{1}{k^0 + \omega} - (\omega \rightarrow -\omega) \right], \quad (C.2)$$

Para verificar a relação de Kadanoff-Baym precisamos tomar a parte imaginária de G_R no espaço de momentos. Então, a parte imaginária do termo acima é da forma:

$$\frac{\theta(-T)}{2\omega} \left[\frac{\sin 2T(k^0 + \omega)}{k^0 + \omega} - (\omega \rightarrow -\omega) \right]. \quad (C.3)$$

Que é um termo que não possui polos devido ao intervalo de integração finito. O termo II é análogo ao termo I bastando fazer $T \rightarrow -T$ e $\omega \rightarrow \Omega$.

O termo IV é acompanhado de funções de Heaviside que restringem o domínio de tempo de acordo com a fig. (C.2).

Como o domínio vai ao infinito é utilizado regularizadores para que a integral seja convergente. Na transformada de Fourier temos que $k^0 \rightarrow k^0 + i\epsilon$. Assim, a parte

imaginária da transformada de Fourier de IV é da forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}\widetilde{\mathfrak{mIV}} = \frac{1}{4\omega} \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \left\{ \left[\frac{\sin 2\mathsf{T}(\mathsf{k}^0 - \Omega)}{\mathsf{k}^0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} - \frac{\sin 2\mathsf{T}(\mathsf{k}^0 + \Omega)}{\mathsf{k}^0 + \frac{\Omega+\omega}{2}} \right] \theta(\mathsf{T}) + \right. \\ \left. \theta(-\mathsf{T}) \left[-\frac{\sin 2\mathsf{T}(\mathsf{k}^0 + \omega)}{\mathsf{k}^0 + \frac{\Omega+\omega}{2}} - \frac{\sin 2\mathsf{T}(\mathsf{k}^0 - \omega)}{\mathsf{k}^0 - \frac{\Omega+\omega}{2}} \right] + \pi \cos \mathsf{T}(\Omega - \omega) \left[\delta \left(\mathsf{k}^0 - \frac{\Omega + \omega}{2} \right) - \delta \left(\mathsf{k}^0 + \frac{\Omega + \omega}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

as funções delta de Dirac surgem devido ao fato de tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x \mp i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp \frac{i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x). \quad (\text{C.5})$$

O termo III é análogo ao termo IV bastando fazer $\omega \rightarrow -\omega$. Ao integrar completamente a (C.1) obtêm-se a (3.74).

Apêndice D

Quench com $\delta m^2 = 0$

D.1 Verificação da relação flutuação-dissipação

Fazendo $\delta m^2 = 0$ em (3.51) temos que $\Pi(x^0) = \Delta\delta(x^0)$. Com isso, utilizando (3.60b), a função de Green Retardada assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} G_R(x^0, y^0) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (G_R^{(0)} \Delta)^n G_R^{(0)} \\ &= G_R^{(0)} + \int dz dz' G_R^{(0)}(x^0, z) \Delta \delta(z) \delta(z - z') G_R^{(0)}(z', y^0) \\ &= G_R^{(0)}(x^0, y^0) + \Delta G_R^{(0)}(x^0, 0) G_R^{(0)}(0, y^0), \end{aligned} \quad (D.1)$$

onde os termos com $n > 2$ se anulam pois aparecem integrais do tipo

$$\int G_R^{(0)} \delta(z) \delta(z - z') \overbrace{G_R^{(0)}(z', z'')}^{=0} \delta(z'') \delta(z'' - z''') G_R^{(0)}. \quad (D.2)$$

A função de Green de correlação também possui termos parecidos com (D.2) e por isso assume a seguinte forma

$$G_c = G_c^{(0)} + \overbrace{G_c^{(0)} \Pi G_A^{(0)}}^I + \overbrace{G_R^{(0)} \Pi G_c^{(0)}}^{II} + \overbrace{G_R^{(0)} \Pi G_c^{(0)} \Pi G_A^{(0)}}^{II}. \quad (D.3)$$

Onde as integrais são dadas por:

$$I = \int dz dz' G_c^{(0)}(x^0, z) \Delta \delta(z) \delta(z - z') G_A^{(0)}(z', y^0) = \Delta G_c^{(0)}(x^0, 0) G_A^{(0)}(0, y^0) \quad (D.4a)$$

$$II = \int dz dz' G_R^{(0)}(x^0, z) \Delta \delta(z) \delta(z - z') G_c^{(0)}(z', y^0) = \Delta G_R^{(0)}(x^0, 0) G_c^{(0)}(0, y^0) \quad (D.4b)$$

$$\begin{aligned} III &= \\ &= \int dz dz' dz'' dz''' G_R^{(0)}(x^0, z) \Delta \delta(z) \delta(z - z') G_c^{(0)}(z', z'') \Delta \delta(z'') \delta(z'' - z''') G_A^{(0)}(z''', y^0) \\ &= \Delta^2 G_R^{(0)}(x^0, 0) G_c^{(0)}(0, 0) G_A^{(0)}(0, y^0). \end{aligned} \quad (D.4c)$$

Como $iG_c(x, x') = \langle \{\phi(x), \phi(x')\} \rangle$ é simétrico em x e x' então $G_c(0, x^0) = G_c(x^0, 0)$, e usando o fato que $G_A^{(0)}(x^0, y^0) = G_R^{(0)}(y^0, x^0)$, utilizando as (D.4a), (D.4b) e (D.4c) podemos escrever G_c exatamente da seguinte forma

$$\begin{aligned} G_c &= G_c^{(0)} + \Delta \left(G_c^{(0)}(x^0, 0) G_R^{(0)}(y^0, 0) + G_R^{(0)}(x^0, 0) G_c^{(0)}(0, y^0) \right) + \\ &\quad + \Delta^2 G_R^{(0)}(x^0, 0) G_R^{(0)}(y^0, 0) G_c^{(0)}(0, 0). \end{aligned} \quad (D.5)$$

Utilizando as equações as (2.71) e (2.73) é possível verificar que as funções de green satisfazem a relação de flutuação-dissipação.

$$\theta(x^0 - y^0) \frac{dG_c^{(0)}(x^0, y^0)}{dy^0} = i\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) G_R^{(0)}(x^0, y^0) \quad (D.6)$$

Verificaremos se a relação de flutuação-dissipação é satisfeita para (D.1) e (D.5). Derivando (D.5) em relação a y^0 temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_c(x^0, y^0)}{dy^0} &= \frac{dG_c^{(0)}(x^0, y^0)}{dy^0} + \Delta \left(G_c^{(0)}(x^0, 0) \frac{dG_R^{(0)}(y^0, 0)}{dy^0} + G_R^{(0)}(x^0, 0) \frac{dG_c^{(0)}(0, y^0)}{dy^0} \right) + \\ &\quad + \Delta^2 G_R^{(0)}(x^0, 0) \frac{dG_R^{(0)}(y^0, 0)}{dy^0} G_c^{(0)}(0, 0). \end{aligned} \quad (D.7)$$

Para $x^0 > 0$ e $y^0 < 0$, temos que a (D.7) assume a forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dG_c(x^0, y^0)}{dy^0} &= \frac{dG_c^{(0)}(x^0, y^0)}{dy^0} + \Delta G_R^{(0)}(x^0, 0) \frac{dG_c^{(0)}(0, y^0)}{dy^0} \\
&= \frac{dG_c^{(0)}(x^0, y^0)}{dy^0} + \Delta G_R^{(0)}(x^0, 0) i \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \sin \omega(-y^0) \\
&= i\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) G_R^{(0)}(x^0, y^0) + \Delta i\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) G_R^{(0)}(x^0, 0) G_R^{(0)}(0, y^0) \\
&= i\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \left(G_R^{(0)}(x^0, y^0) + \Delta G_R^{(0)}(x^0, 0) G_R^{(0)}(0, y^0) \right), \tag{D.8}
\end{aligned}$$

e utilizando a (D.1) na equação acima obtemos

$$\frac{dG_c(x^0, y^0)}{dy^0} = i\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) G_R(x^0, y^0). \tag{D.9}$$

Para o caso em que $x^0 > 0$ e $y^0 > 0$ temos que G_c e G_R não satisfazem a relação de Kadanoff-Baym pois G_c tem termos com Δ^2 enquanto os termos em G_R só possuem grau 1 em Δ , como se pode ver em (D.5) e (D.1). O sistema encontra-se altamente fora do equilíbrio.

D.1.1 Cálculo G_c e G_R no espaço do momento k^0

Temos que em ordem zero a função de Green de correlação, no espaço do momento k^0 , é dada por

$$\tilde{G}_c^{(0)} = -2\pi i \coth\left(\frac{\beta k^0}{2}\right) \delta(k^{02} - \omega^2), \tag{D.10}$$

e realizando as mudanças de variáveis $t = x^0 - y^0$ e $T = \frac{x^0 + y^0}{2}$ com isso: $y^0 = T - \frac{t}{2}$, $x^0 = T + \frac{t}{2}$, a transformada de Fourier, da variável t para k^0 , do termo $G_c^{(0)}(x^0, 0) G_R^{(0)}(y^0, 0)$ em (D.5)

$$\frac{i}{2\omega^2} \coth\left(\frac{\beta k^0}{2}\right) \left[\frac{e^{2ik^0 T}}{ik^0} \sin 2\omega T + \pi \delta(k^0) \sin 2\omega T + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(k^0 + \omega)2T}}{k^0 + \omega} - \frac{e^{i(k^0 - \omega)2T}}{k^0 - \omega} \right) \right]. \tag{D.11}$$

Para o termo $G_R^{(0)}(x^0, 0)G_c^{(0)}(0, y^0)$

$$= \frac{i}{2\omega^2} \coth\left(\frac{\beta k^0}{2}\right) \left[-\frac{e^{-2ik^0T}}{ik^0} \sin 2\omega T + \pi\delta(k^0) \sin 2\omega T + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-i(k^0+\omega)2T}}{k^0+\omega} - \frac{e^{-i(k^0-\omega)2T}}{k^0-\omega} \right) \right]. \quad (D.12)$$

Somando (D.10) com (D.11)

$$\begin{aligned} & \overline{G_c^{(0)} G_R^{(0)}}(k^0, T) + \overline{G_R^{(0)} G_c^{(0)}}(k^0, T) = \\ &= \frac{i}{2\omega^2} \coth\left(\frac{\beta k^0}{2}\right) \left[\frac{e^{2ik^0T} - e^{-2ik^0T}}{ik^0} \sin 2\omega T + 2\pi\delta(k^0) \sin 2\omega T + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(k^0+\omega)2T}}{k^0+\omega} - \frac{e^{i(k^0-\omega)2T}}{k^0-\omega} + \frac{e^{-i(k^0+\omega)2T}}{i(k^0+\omega)} - \frac{e^{-i(k^0-\omega)2T}}{i(k^0-\omega)} \right) \right] \\ &= \frac{i}{\omega^2} \coth\left(\frac{\beta k^0}{2}\right) \left[\frac{\sin 2k^0T}{k^0} \sin 2\omega T + \pi\delta(k^0) \sin 2\omega T + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(k^0+\omega)2T}{k^0+\omega} - \frac{\cos(k^0-\omega)2T}{k^0-\omega} \right) \right]. \end{aligned} \quad (D.13)$$

Por fim, a transformada de Fourier do termo em Δ^2 é $G_R(x^0, 0)G_R(y^0, 0)G_c(0, 0)$

$$\begin{aligned} & \overline{G_R^{(0)} G_R^{(0)} G_c}(k^0, T) = \frac{-i \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)}{\omega^3} \int \theta(x^0)\theta(y^0) \sin(x^0\omega) \sin(y^0\omega) e^{ik^0t} \\ &= \frac{-i \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)}{2\omega^3} \theta(T) \left\{ \frac{\sin(k^0-\omega)T}{k^0-\omega} + \frac{\sin(k^0+\omega)T}{k^0+\omega} - 2 \cos 2\omega T \left(\frac{\sin 2k^0T}{k^0} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (D.14)$$

Somando (D.10) com (D.13) e (D.14)

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_c &= -2\pi i \coth\left(\frac{\beta k^0}{2}\right) \delta(k^{02} - \omega^2) + \\
&\frac{i}{\omega^2} \coth\left(\frac{\beta \omega}{2}\right) \left[\frac{\sin 2k^0 T}{k^0} \sin 2\omega T + \pi \delta(k^0) \sin 2\omega T + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(k^0 + \omega) 2T}{k^0 + \omega} - \frac{\cos(k^0 - \omega) 2T}{k^0 - \omega} \right) \right] + \\
&- \frac{\coth\left(\frac{\beta \omega}{2}\right)}{2\omega^3} e^{-2\epsilon T} \theta(T) \left\{ \frac{\sin(k^0 - \omega) T}{k^0 - \omega} + \frac{\sin(k^0 + \omega) T}{k^0 + \omega} - 2 \cos 2\omega T \left(\frac{\sin 2k^0 T}{k^0} \right) \right\} \\
&= -2i \coth\left(\frac{\beta \omega}{2}\right) \left\{ \pi \operatorname{sgn}(k^0) \delta(k^{02} - \omega^2) + \right. \\
&- \frac{\Delta}{2\omega^2} \left[\frac{\sin 2k^0 T}{k^0} \sin 2\omega T + \pi \delta(k^0) \sin 2\omega T + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(k^0 + \omega) 2T}{k^0 + \omega} - \frac{\cos(k^0 - \omega) 2T}{k^0 - \omega} \right) \right] + \\
&+ \left. \frac{\Delta^2}{2\omega^3} e^{-2\epsilon T} \theta(T) \left\{ \frac{\sin(k^0 - \omega) T}{k^0 - \omega} + \frac{\sin(k^0 + \omega) T}{k^0 + \omega} - 2 \cos 2\omega T \left(\frac{\sin 2k^0 T}{k^0} \right) \right\} \right\}. \quad (D.15)
\end{aligned}$$

Agora será realizado o cálculo da transformada de Fourier para G_R . Temos que a função de Green Retardada no espaço de configurações é

$$G_R(x^0, y^0) = G_R^{(0)}(x^0, y^0) + \Delta G_R^{(0)}(x^0, 0) G_R^{(0)}(0, y^0). \quad (D.16)$$

Iremos tomar a transformada de Fourier dessa função e depois tomar a parte imaginária.

Temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_R^{(0)}(k^0) &= \frac{1}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \omega^2} = \frac{1}{(k^{02} - \omega^2) + 2i\epsilon k^0} \frac{(k^{02} - \omega^2) - 2i\epsilon k^0}{(k^{02} - \omega^2) - 2i\epsilon k^0} \\
&= \frac{(k^{02} - \omega^2) - 2i\epsilon k^0}{(k^{02} - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2 k^{02}}; \\
\operatorname{Im} \tilde{G}_R^{(0)}(k^0) &= \frac{-2\epsilon k^0}{(k^{02} - \omega^2) + 4\epsilon^2 k^{02}} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\equiv} -\pi \operatorname{sgn}(k^0) \delta(k^{02} - \omega^2). \quad (D.17)
\end{aligned}$$

O termo de ordem Δ no espaço de Fourier é dado por

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{\theta(x^0)\theta(-y^0)}{\omega^2} \sin(x^0\omega) \sin(y^0\omega) e^{ik^0t} \\
& = - \int \frac{\theta(x^0)\theta(-y^0)}{\omega^2} \frac{1}{2} (\cos \omega(x^0 - y^0) - \cos \omega(x^0 + y^0)) e^{ik^0t} \\
& = \frac{-1}{2\omega^2} \left[\frac{ie^{i(k^0+\omega)T}}{2(k^0+\omega)} + \frac{ie^{i(k^0-\omega)T}}{2(k^0-\omega)} - i \cos 2\omega t \frac{e^{2ik^0T}}{k^0} \right], \tag{D.18}
\end{aligned}$$

então a parte imaginária de $\widetilde{G}_R$ em ordem Δ é

$$\frac{-1}{2\omega^2} \left[\frac{\cos(k^0 + \omega)T}{2(k^0 + \omega)} + \frac{\cos(k^0 - \omega)T}{2(k^0 - \omega)} - \cos 2\omega t \frac{\cos 2k^0T}{k^0} \right]. \tag{D.19}$$

Então

$$\text{Im} \widetilde{G}_R = -\pi \text{sgn}(k^0) \delta(k^{02} + \omega^2) - \Delta \frac{1}{2\omega^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(k^0 + \omega)T}{(k^0 + \omega)} + \frac{\cos(k^0 - \omega)T}{(k^0 - \omega)} \right) - \cos 2\omega T \frac{\cos 2k^0T}{k^0} \right] \tag{D.20}$$

onde leva a relação de Kadanoff-Baym

$$\widetilde{G}_c(k_0, T) \simeq 2i \coth(\beta k_0/2) \text{Im} \widetilde{G}_R(k_0, T). \tag{D.21}$$

Bibliografia

- [1] ALM Britto, Ashok K Das, and J Frenkel. Generalized kadanoff-baym relation in nonequilibrium quenched models. *Physical Review D*, 93(10):105034, 2016.
- [2] ALM Britto, Ashok K Das, and J Frenkel. Generalized fluctuation-dissipation theorem in a soluble out of equilibrium model. *Physical Review D*, 92(2):025020, 2015.
- [3] Ashok Das. *Finite temperature field theory*. World scientific, 1997.
- [4] Lev Davidovich Landau, Evgenii M Lifshitz, and LP Pitaevskii. *Statistical physics, part I*. pergamon, Oxford, 1980.
- [5] Sílvia RA Salinas. *Introdução a Física Estatística Vol. 09*. Edusp, 1997.
- [6] Peter William Millington. Thermal quantum field theory and perturbative non-equilibrium dynamics. 2012.
- [7] LD Landau and EM Lifshitz. Mechanics, vol. 1. *Course of theoretical physics*, 3, 1976.
- [8] Gilberto Medeiros Kremer. *Introdução à Equação de Boltzmann, Uma*. Edusp, 2005.
- [9] Ramamurti Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] Michel Le Bellac. *Thermal field theory*. Cambridge University Press, 2000.
- [11] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. A Wiley-Interscience publication. John Wiley & Sons, 2010.
- [12] Michael E Peskin and Daniel V Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. Westview Press Incorporated, 1995.

- [13] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [14] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [15] Henrik Bruus and Karsten Flensberg. *Many-body quantum theory in condensed matter physics: an introduction*. Oxford university press, 2004.
- [16] Leonid V Keldysh. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Sov. Phys. JETP*, 20(4):1018–1026, 1965.
- [17] D Boyanovsky, HJ De Vega, R Holman, D-S Lee, and A Singh. Dissipation via particle production in scalar field theories. *Physical Review D*, 51(8):4419, 1995.
- [18] Jürgen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, 363(4):223–386, 2002.
- [19] Manfred Lindner and Markus Michael Müller. Comparison of boltzmann equations with quantum dynamics for scalar fields. *Physical Review D*, 73(12):125002, 2006.
- [20] Enzo Marinari, Giorgio Parisi, Federico Ricci-Tersenghi, and Juan J Ruiz-Lorenzo. Violation of the fluctuation-dissipation theorem in finite-dimensional spin glasses. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(11):2611, 1998.
- [21] Alexander Altland and Ben D Simons. *Condensed matter field theory*. Cambridge University Press, 2010.
- [22] AM Zagoskin. Quantum theory of many-body systems (techniques and applications), graduate texts in contemporary physics, 1998.
- [23] Leo P Kadanoff; Gordon Baym. *Quantum statistical mechanics; Green's function methods in equilibrium and nonequilibrium problems*. Frontiers in physics. New York, W.A. Benjamin, 1962.
- [24] Esteban A Calzetta and Bei-Lok Hu. *Nonequilibrium quantum field theory*, volume 10. Cambridge University Press Cambridge UK, 2008.

- [25] Robert Zwanzig. *Nonequilibrium statistical mechanics*. Oxford University Press, 2001.
- [26] Michel Le Bellac, Maurice Le Bellac, Fabrice Mortessagne, George Batrouni, G George Batrouni, et al. *Equilibrium and non-equilibrium statistical thermodynamics*. Cambridge University Press, 2004.
- [27] Nicolas Borghini. Topics in nonequilibrium physics. <https://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/Teaching/Nonequilibrium/Nonequilibrium.pdf>, 2014. Accessado: 05-10-2018.
- [28] Rep Kubo. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on progress in physics*, 29(1):255, 1966.
- [29] AI Bochkarev and Mikhail E Shaposhnikov. The spectrum of hot hadronic matter and finite-temperature qcd sum rules. *Nuclear Physics B*, 268(1):220–252, 1986.
- [30] Herbert B Callen and Theodore A Welton. Irreversibility and generalized noise. *Physical Review*, 83(1):34, 1951.
- [31] Ashok K Das and J Frenkel. Derivation of the fluctuation–dissipation theorem from unitarity. *Modern Physics Letters A*, 30(32):1550163, 2015.
- [32] Václav Špička, Bedřich Velický, and Anděla Kalvová. Electron systems out of equilibrium: Nonequilibrium green’s function approach. *International Journal of Modern Physics B*, 28(23):1430013, 2014.
- [33] P. Lipavský, V. Špička, and B. Velický. Generalized kadanoff-baym ansatz for deriving quantum transport equations. *Phys. Rev. B*, 34:6933–6942, Nov 1986.
- [34] Raju Venugopalan. The color glass condensate: an overview. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 43(1-4):337–344, 2005.
- [35] A Crisanti and F Ritort. Violation of the fluctuation-dissipation theorem in glassy systems: basic notions and the numerical evidence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(21):R181, 2003.
- [36] Mark D Ediger, C Austen Angell, and Sidney R Nagel. Supercooled liquids and glasses. *The journal of physical chemistry*, 100(31):13200–13212, 1996.