UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

*Vinculando Modelos de Energia Escura com
Idade de Galáxias em Altos Redshifts*

Riis Rhavia Assis Bachega

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador:

Prof. Dr. Elcio Abdalla.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IFUSP).

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (UNICAMP).

Prof. Dr. Jorge Ernesto Hovarth (IAG-USP).

São Paulo - SP

2014

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP
INSTITUTO DE FÍSICA - IFUSP
DEPARTAMENTO DE FÍSICA MATEMÁTICA - DFMA

*Vinculando Modelos de Energia Escura com
Idade de Galáxias em Altos Redshifts*

Riis Rhavia Assis Bachega

Orientador :

Prof. Dr. Elcio Abdalla

São Paulo - SP

2014

-
-
-

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Bachega, Riis Rhavia Assis

Vinculando modelos de energia escura com idade de galáxias me altos redshifts. São Paulo, 2014.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Depto. Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Área de Concentração: Cosmologia

Unitermos: 1.Cosmologia; 2. Física teórica; 3. Física de partículas; 4. Teoria de campos; 5. Astrofísica.

USP/IF/SBI-073/2014

Resumo

Uma série de observações advindas da medida da distância de supernovas tipo IA, idade das estrelas mais antigas, anisotropias da radiação cósmica de fundo, entre outras, evidenciam que o universo está passando por uma fase de expansão acelerada. Essa expansão está sendo causada por uma componente misteriosa denominada energia escura, que representa cerca de 70% do conteúdo total do universo, e cuja natureza é desconhecida. Para descrever a energia escura vários modelos têm sido propostos, entre eles, podemos destacar a energia do vácuo (constante cosmológica) e um campo escalar dinâmico (quintessência). Também são considerados modelos em que a energia escura interage com outro componente misterioso, a matéria escura. Existem vários testes observacionais para vincular os parâmetros desses modelos. Nesta dissertação, exploraremos um método baseado na idade de galáxias em altos redshifts e na idade do universo, conhecido em inglês como lookback time.

Palavras-chave: Energia Escura, Matéria Escura, Lookback Time.

São Paulo - SP

2014

Abstract

A number of observations arising from the measurement of distance of type IA Supernovae, age of oldest stars, anisotropy of cosmic microwave background, among others, show that the universe is undergoing a phase of accelerated expansion. This expansion is being caused by a mysterious component called dark energy, which represents about 70% of the total content of the universe, and whose nature is unknown. To describe the various dark energy models have been proposed, among them we highlight the vacuum energy (cosmological constant), and a dynamic scalar field (quintessence). Are also considered models in which dark energy interacts with another mysterious component, the dark matter. There are several observational tests to constraint the parameters of these models. In this dissertation, we explore a method based on the age of galaxies at high redshift and the age of the universe, known as lookback time.

Keywords: Dark Energy, Dark Matter, Lookback Time.

São Paulo - SP

2014

*“Aos meus pais,
irmãs e sobrinhos. ”*

*A nossa ignorância é preocupante e ilimitada.
Aliás, o espantoso progresso nas ciências naturais
reabre constantemente os olhos para nossa ignorância,
inclusive no campo das ciências naturais. A cada passo
que avançamos, a cada problema que resolvemos, não apenas
descobrimos novos problemas não solucionados, como também
descobrimos que, ali onde acreditávamos pisar em terreno
firme e seguro, tudo na verdade é inseguro e fluido;
Karl Popper*

Agradecimentos

- Aos meus pais, Adão Bachega e Eneida Assis, pelo apoio financeiro e moral.
- Aos meus familiares de São Paulo, especialmente as minhas irmãs Irene, Isis, Eva e Faimah, e a Irene Bachega, que me acolheram e me deram apoio na minha chegada em São Paulo.
- Ao Professor Dr. Elcio Abdalla pela excelente orientação
- Aos companheiros de grupo de pesquisa, Lucas Olivari, Rafael Marcondes, Ricardo Landim e Elisa Gouvea pelas excelentes discussões. Em especial, ao André Alencar pela ajuda com a parte computacional.
- Aos colegas do intituto, em especial Wallace Elias, Miguel Ferreira, André Luiz, Alys-son Moraes, Rafael Francisco, Lucas Secco, Arthur Loureiro, Gabriela Lichtenstein, Hugo Chavez, Danilo Pedrelli, Laura Raquel, Tania Medina, Pramod Padmanabhan e Maicon Siqueira pelos momentos de descontração.
- Aos colegas da república, em especial, Flávia Vasconcelos, Bassiro So, Bruno Duarte, Juliano Neves, Adriana Saavedra, Rene Rojas e Rachel Duarte pela convivência.
- Aos colegas do NASP, em especial a Anderson Araújo, Hemerson Carlos, Francisco Quiumento, Nina Gonzalez, Sean Anderson, George Lacerda, Fernando Camargo, Vilma Mendes, Marcelo Rodrigues e Thayse Almeida por me ensinarem a aproveitar São Paulo.
- As secretárias do Departamento de Física Matemática; Amélia, Cecília e Simone por sempre me atenderem com educação e simpatia.
- À Universidade Federal do Pará, onde cursei minha graduação e todos meus professores e amigos que tive por lá.
- À Universidade de São Paulo pela oportunidade dada.

Sumário

Introdução	9
1 Cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	14
1.1 Introdução	14
1.2 Relatividade Geral	15
1.2.1 Vetores de Killing	18
1.3 Homogeneidade e isotropia	21
1.3.1 Espaços homogêneos e isotrópicos	23
1.3.2 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	26
1.4 Redshift cosmológico	31
1.5 Os parâmetros de Hubble e de desaceleração	32
1.6 Equações de campo cosmológicas	35
1.7 Equações de movimento para o fluido cosmológico	37
1.8 Componentes do fluido cosmológico	39
1.8.1 Matéria	39
1.8.2 Radiação	40
1.8.3 Vácuo	41
1.9 Parâmetros cosmológicos	42
1.10 Evolução do fator de escala	44
1.11 Modelos cosmológicos analíticos	45
1.12 Lookback time e a idade do universo	47
2 Modelos de Energia Escura	51

2.1	Introdução	51
2.2	Evidência observacionais para energia escura	52
2.2.1	Idade do universo	52
2.2.2	Supernovas tipo IA	54
2.2.3	Vínculos de RCF e ELE	59
2.3	Constante Cosmológica	61
2.3.1	O problema do ajuste fino	62
2.3.2	O problema da coincidência	63
2.4	Modelos de campo escalar para energia escura	64
2.4.1	Quintessência	65
2.4.2	Campo phantom	67
2.5	Modelos fenomenológicos de energia escura interagentes	69
2.5.1	O acoplamento é proporcional à densidade de EE	70
2.5.2	O acoplamento é proporcional à densidade de ME	71
2.5.3	O acoplamento é proporcional à densidade de energia total de ME e EE	71
3	Vínculos Observacionais	73
3.1	Introdução	73
3.2	Lookback Time como teste para modelos cosmológicos	74
3.3	Dados	76
3.4	Modelo Λ CDM	79
3.5	Modelo XCDM	81
3.6	Modelos de interação	83
3.6.1	Modelo I	83
3.6.2	Modelo II	85
3.6.3	Modelo III	89
3.6.4	Modelo IV	92
	Considerações Finais	95

A	Método da máxima verossimilhança	98
B	Gás de Chaplygin	103

Introdução

Considera-se como o início da cosmologia moderna, o trabalho do físico alemão Albert Einstein de 1917 [1], apenas dois anos após ele ter publicado seu trabalho sobre a teoria do campo gravitacional, a relatividade geral. Neste trabalho, que constitui o primeiro modelo matemático em cosmologia, temos um universo espacialmente homogêneo, isotrópico e finito, além de estático. Para obter um universo com essa característica, Einstein modificou suas equações originais do campo gravitacional, introduzindo um termo repulsivo chamada constante cosmológica Λ .

No mesmo ano, o astrônomo holandês Willem de Sitter obteve soluções da relatividade geral, com constante cosmológica, estacionária, porém sem matéria [2]. Nesse modelo, a velocidade de afastamento de objetos aleatoriamente espalhados aumentaria com a distância. É importante mencionar, que assim como Einstein, de Sitter não acreditava em um universo em expansão. A velocidade de afastamento de objetos em seu modelo era considerada por ele um efeito espúrio, consequência do sistema de coordenadas adotado e não decorrente da expansão do espaço [3].

A possibilidade teórica de um universo em expansão surgiu em 1922 com os trabalhos do matemático russo Alexander Friedmann [4], que obteve as primeiras soluções expansionistas (com e sem constante cosmológica) das equações de Einstein. Outra grande contribuição foi dada pelo físico, astrônomo e padre belga, Georges Lemaître em 1927 [5]. Lemaître obteve de forma independente, equações equivalentes as de Friedmann, e previa a relação linear entre a velocidade de afastamento de objetos e sua distância, antes mesmo de ser descoberta empiricamente por Edwin P. Hubble. Posteriormente, em 1935, o matemático norte-americano Howard P. Robertson [6] e o matemático britânico Arthur G. Walker [7] provaram rigorosamente que o espaço-tempo proposto por Friedmann e

Lemaître era o único espacialmente homogêneo e isotrópico. A métrica que define esse espaço-tempo ficou conhecida como FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker).

A grande evidência empírica para a expansão do universo veio com o trabalho do astrônomo americano Edwin P. Hubble em 1929 [8], que usou as medidas dos *redshifts* de galáxias obtidas por Milton Humason. Hubble observou a existência de uma relação linear entre o redshift e a distância da galáxia, relação essa conhecida como *lei de Hubble*. Vale salientar, que a lei de Hubble só é válida para pequenos redshifts. A constante de proporcionalidade que representa a taxa de expansão do universo H_0 é chamada *constante de Hubble*.

Como o universo estava em expansão, ele deve ter sido muito quente e denso no passado. Baseado nessa ideia, o físico ucraniano radicado nos Estados Unidos, George Gamow, e seus colaboradores, Ralph Alpher e Robert Herman, buscaram tentar entender os estágios primordiais de evolução do universo e o processo de formação dos elementos químicos. O processo de formação de elementos leves (essencialmente hidrogênio, hélio e um pouco de lítio) no universo primordial é conhecido como *nucleossíntese primordial*. Outros elementos mais pesados são formados no interior das estrelas e em explosões de supernovas. Dados observacionais indicam que em torno de 75% da matéria bariônica (aquela que interage com a luz) do universo é formada por hidrogênio, aproximadamente 25% é formada por hélio, e os outros elementos químicos, menos de 1%.

Além disso, Gamow [9] em 1948 e seus colaboradores Alpher e Herman [10] em 1950, previram a existência da radiação cósmica de fundo (RCF). Essa radiação remanescente é oriunda do desacoplamento entre fótons e a matéria bariônica, depois que o universo se resfriou o suficiente para que átomos neutros pudessem se formar. Em 1964, a RCF foi descoberta por Arnold Penzias e Robert Wilson [11], o que lhes rendeu o prêmio Nobel em 1978.

Tendo como pilares a expansão do universo, a abundância de elementos leves e a radiação cósmica de fundo; o *modelo cosmológico padrão* popularmente conhecido como *modelo do Big Bang* forneceu um quadro consistente da evolução do universo e foi aceito pela comunidade científica em detrimento do *modelo do estado estacionário* de Fred Hoyle.

No entanto, esse modelo tinha problemas, a saber: o problema da planura, o problema do horizonte e o problema dos monopolos magnéticos. A solução para esses problemas dada pela *teoria da inflação*, proposta por Alan Guth [12] (e de maneira diferente por Starobinski [13]). Segundo essa teoria, o universo passou por uma fase de expansão muito acelerada logo em seus primórdios, que seria impulsionada por um campo escalar conhecido como inflaton.

O modelo cosmológico padrão munido da teoria da inflação fornece um quadro satisfatório da evolução do universo. No entanto, ainda há questões a serem esclarecidas. Uma delas é a natureza da matéria escura, que diferente da matéria bariônica, não interage com a luz. Ela foi descoberta pelo astrônomo suíço Fritz Zwicky ao analisar a dispersão de velocidades de oito galáxias do aglomerado Coma e concluir que a densidade média do aglomerado é 400 vezes maior que o estimado através da observação de matéria luminosa [3]. Hoje sabemos que existe muito mais matéria escura do que matéria bariônica, sendo que elas compõem cerca de 23% e 4% do conteúdo do universo, respectivamente.

Outro mistério ainda maior é o da energia escura, que produziria a expansão acelerada do universo. Esta expansão acelerada foi evidenciada pelos trabalhos de Saul Perlmutter *et al.*, [14] e Adam Riess *et al.*, [15] com as observações de supernovas tipo IA. Um universo constituído de cerca 30% de matéria (bariônica e escura) e 70% de energia escura é consistente não só com a distância medida para as supernovas tipo IA, assim como fornece uma idade compatível com as estrelas mais antigas conhecidas, e com os dados da RCF e de estruturas em larga escala.

No entanto, o que seria essa energia escura? A proposta mais conservadora é manter válida a teoria da relatividade geral de Einstein, e admitir que exista uma componente exótica no universo que causa a aceleração cósmica. O candidato mais simples é a constante cosmológica Λ , associada a uma densidade de energia do vácuo [16]. Porém, a constante cosmológica sofre de problemas como o *problema do ajuste fino*, já que o valor estimado para Λ é muito menor do que o valor previsto pela física de partículas para a densidade de energia do vácuo (cerca de 120 ordens de grandeza). Outra questão é entender como a densidade de energia do vácuo é comparável a densidade de energia da matéria justamente hoje, o chamado *problema da coincidência*.

Como tentativa de solução a esses problemas, muitos autores consideram a energia escura como um campo escalar dinâmico, que rola abaixo de um potencial. Esse modelo é conhecido como *quintessência* [17]. No entanto, ainda não é claro como esse campo escalar é gerado o que leva a uma grande incerteza na escolha do potencial.

Outra possibilidade são os modelos de *energia escura unificada* ou *quartessência*, que consideram a matéria escura e a energia escura como manifestações distintas de um mesmo fluido. O exemplo mais simples desse tipo de modelo é o do *gás de Chaplygin* e do *gás de Chaplygin generalizado* [18].

Outra classe de modelos são os que consideram a matéria escura e a energia escura como fluidos interagentes no intuito de resolver o problema da coincidência. Exploraremos alguns tipos de modelos fenomenológicos para esta interação.

Por fim, a título de menção, há propostas mais radicais que modificam a teoria da gravitação proposta por Einstein considerando a expansão acelerada como oriunda de termos extras na lagrangeana de Einstein-Hilbert.

Para se poder testar esses modelos, uma série de testes observacionais foram propostos. Exploraremos nessa dissertação um teste baseado na idade de galáxias em altos valores de redshift e na idade do universo. Este teste é conhecido em inglês como *lookback time* (LBT). O LBT é observacionalmente estimado como a diferença entre a idade presente do universo e a idade de um dado objeto em um redshift z . Adotaremos a abordagem de Capozziello *et al.*, [19].

No capítulo I, desenvolveremos detalhadamente a construção do modelo cosmológico padrão. Baseado em [20, 21], construiremos a métrica FLRW a partir de simetrias consideradas. Também exploraremos as propriedades cinemáticas e dinâmicas desse espaço-tempo, o que será baseada majoritariamente em [22, 23]. Por fim, faremos uma revisão qualitativa dos métodos para se estimar a idade de objetos astrofísicos e a idade do universo, baseado em [24, 25].

O capítulo II será baseado majoritariamente em [26–29]. Revisaremos as evidências para uma expansão acelerada, a saber: a idade das estrelas mais antigas conhecidas, a distância das supernovas tipo IA e os dados de radiação cósmica de fundo e estruturas em larga escala. Depois, abordaremos alguns modelos cosmológicos de energia escura,

começando com a constante cosmológica (modelo Λ CDM) e falaremos mais detalhadamente dos problemas do ajuste fino e da coincidência. Abordaremos também o modelo de quintessência, mencionando também o caso *phantom*. Por fim abordaremos alguns modelos interagentes fenomenológicos.

No capítulo III, mostraremos como funciona o método LBT para vincular os parâmetros dos modelos. Revisaremos os resultados já presentes na literatura científica para os vários modelos estudados no capítulo II, além de resultados nossos obtidos para o modelo Λ CDM e para os modelos de interação fenomenológicos, usando os dados para idade do universo mais recentes do satélite Planck [30] e o programa CosmoMC.

Por fim, temos um apêndice explicando o método estatístico da máxima verossimilhança, que usaremos na nossa análise. Esse apêndice está basicamente baseado nas teses [31, 32]. Também temos um apêndice falando sobre o modelo do Gás de Chaplygin e vínculos usando dados de lookback time para esse modelo apresentados em [33]. Essa seção originalmente estaria no capítulo 2, mas como não implementamos o modelo do Gás de Chaplygin no CosmoMC, preferi deixá-la como um apêndice.

Capítulo 1

Cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

1.1 Introdução

Para se construir uma teoria que descreva a dinâmica do universo como um todo, é necessário apelar para preconceitos filosóficos a respeito deste, uma vez que as observações são limitadas ao curto período de vida humana ou mesmo da civilização humana, além de que só temos um único ponto de observação, no caso, o planeta Terra.

A cosmologia padrão é construída a partir do *princípio cosmológico* também conhecido como *princípio de Copérnico*, segundo o qual não ocupamos um lugar privilegiado no espaço, em um dado tempo particular o universo parece o mesmo de todos os pontos e em todas as direções, isto é, *homogêneo* e *isotrópico*.

As observações do número de galáxias, assim como de fontes de raios-X e raios γ atestam a isotropia do universo, para ser mais preciso, a partir de escalas da ordem de $100Mpc^1$ [34]. A principal evidência da isotropia do universo vem da radiação cósmica de fundo (RCF) que é isotrópica até uma parte em 10^5 .

Neste capítulo, construiremos o modelo cosmológico padrão de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Primeiro faremos uma breve menção as ferramentas que pre-

¹ $1pc \approx 3.2$ anos-luz

cisaremos advindas da teoria da relatividade geral de Einstein, construiremos a métrica de FLRW a partir das propriedades de simetria de espaços homogêneos e isotrópicos e usaremos as equações de Einstein para descrever a dinâmica do modelo.

1.2 Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral de Einstein generaliza o princípio da relatividade - que postula que as leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais - para os observadores não inerciais através do *princípio da equivalência*, segundo o qual observadores em queda livre na presença de campos gravitacionais (locais) são equivalentes a observadores inerciais na ausência de campos gravitacionais.

Assim, a relatividade geral entende o campo gravitacional como a curvatura do espaço-tempo na presença de um conteúdo de matéria-energia, o que é expresso pelas equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (1.1)$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo e G a constante da gravitação de Newton. Nesta dissertação, a partir de agora adotaremos $c = 1$. Para construirmos as equações de Einstein, temos de falar do tensor métrico (ou simplesmente métrica) $g_{\mu\nu}$ que é o objeto matemático que nos fornece as informações sobre o espaço-tempo em questão. A métrica tem como propriedade a simetria na troca dos índices, assim como a propriedade de relacionar as componentes contravariantes de um vetor A^μ com as componentes covariantes A_μ e vice versa, da forma

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad (1.2)$$

por isso se diz que a métrica tem a propriedade de “levantar e abaixar” índices de um vetor. Essa mesma propriedade é usada para tensores de ordem maior. Também, a métrica tem como propriedade

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda. \quad (1.3)$$

Nesta dissertação, adotaremos a assinatura da métrica como $(-, +, +, +)$.

O intervalo infinitesimal ds^2 é dado a partir da métrica como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad . \quad (1.4)$$

As componentes contravariantes de um vetor são as que têm como lei de transformação

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \quad (1.5)$$

enquanto as componentes covariantes tem como lei de transformação

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \quad . \quad (1.6)$$

Essa lei de transformação pode ser generalizada para tensores de ordem $[m, n]$ da forma

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\sigma_n}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_m}}{\partial x'^{\nu_m}} T^{\sigma_1 \dots \sigma_n}_{\rho_1 \dots \rho_m}(x) \quad . \quad (1.7)$$

Essa transformação característica é chamada transformação covariante. Ela garante que quando o valor de uma grandeza é nulo em um sistema de coordenadas, ele é nulo em qualquer outro, o que caracteriza o realismo da teoria.

Outro objeto matemático importante é a conexão afim $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$, que na relatividade geral tem a propriedade $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ (ausência de torsão) e é dada em função da métrica como

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad , \quad (1.8)$$

sendo $g_{\nu\lambda,\sigma} \equiv \partial g_{\nu\lambda} / \partial x^\sigma \equiv \partial_\sigma g_{\nu\lambda}$. A derivada parcial não é covariante sobre transformações gerais de coordenadas quando aplicadas a vetores e tensores de ordem maior, apenas quando aplicada a escalares. Para vetores, temos de definir a derivada covariante como

$$\begin{aligned} A^\mu_{;\nu} &\equiv A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda \\ A_{\mu;\nu} &\equiv A_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \end{aligned} \quad (1.9)$$

que também pode ser denotada como $\nabla_\nu A^\mu$. Na geometria Riemanniana sobre a qual está construída a relatividade geral, a derivada covariante da métrica é nula ($g_{\mu\nu;\sigma} = 0$).

Para tensores de ordem-2, a derivada covariante é dada como

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{;\sigma} &= T^{\mu\nu}_{,\sigma} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu\rho}_{\lambda\sigma} T^{\lambda\mu} \\ T^\mu_{\nu;\sigma} &= T^\mu_{\nu,\sigma} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} T^\mu_\lambda \\ T_{\mu\nu;\sigma} &= T_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} T^{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} T^{\lambda\mu} \quad . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Definida a derivada covariante, podemos a partir do comutador da derivada covariante de um vetor v_μ

$$v_{\sigma;\rho;\mu} - v_{\sigma;\mu;\rho} = -R_{\sigma\rho\mu}^\lambda v_\lambda \quad (1.11)$$

definir o *tensor de curvatura* ou *tensor de Riemann* $R_{\sigma\rho\mu}^\lambda$ como

$$R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \equiv \Gamma_{\sigma,\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu,\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\gamma - \Gamma_{\rho\gamma}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma \quad . \quad (1.12)$$

O tensor de curvatura obedece as seguintes propriedades de simetria:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\nu\mu\rho\sigma} \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\mu\nu\sigma\rho} \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (1.13)$$

assim como a identidade cíclica

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0 \quad (1.14)$$

e a identidade de Bianchi

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda} + R_{\mu\nu\sigma\lambda;\rho} + R_{\mu\nu\lambda\rho;\sigma} = 0 \quad . \quad (1.15)$$

O *tensor de Ricci* é definido como

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma \quad , \quad (1.16)$$

e o *escalar de Ricci* como

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad . \quad (1.17)$$

A partir de sucessivas contrações de (1.15) com a métrica, podemos definir o *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu}$ como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.18)$$

que tem como propriedade $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$.

Podemos relacionar a curvatura representada pelo tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, com a presença de matéria-energia, sendo que o objeto que representará este último será o *tensor energia-momento* $T^{\mu\nu}$ que tem como propriedade a derivada covariante nula $T_{;\nu}^{\mu\nu} =$

0. Sendo assim, podemos igualar os dois objetos inserindo a constante dimensional $\kappa = 8\pi G$ (lembrando que adotamos $c = 1$) e assim construir as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad . \quad (1.19)$$

Na cosmologia padrão, consideramos o conteúdo material do universo como um *fluido perfeito*, aquele ao qual observadores em repouso em relação ao fluido não vejam cisalhamento nem fluxo de energia. O tensor energia-momento desse fluido é

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) \quad , \quad (1.20)$$

sendo ρ a densidade de energia do fluido, p a pressão e u_μ a quadrivelocidade do elemento de volume do fluido

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \quad (1.21)$$

em que $x^\mu(s)$ representa a linha de mundo que a partícula descreve em relação a algum parâmetro s . Para partículas massivas, adotamos como parâmetro o tempo próprio τ . A linha de mundo de uma partícula em um campo gravitacional é dada pela *equação da geodésica*

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (1.22)$$

que pode ser obtida ao extremizar

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(g_{\mu\nu}(s) \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds} \right)^{1/2} ds \quad . \quad (1.23)$$

Agora exploraremos as propriedades de simetria de espaços métricos que serão necessárias para obtenção da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

1.2.1 Vetores de Killing

Em um espaço-tempo quadridimensional, $g_{\mu\nu}$ tem 10 componentes independentes, logo, temos 10 equações de campo. Essas equações são não lineares e acopladas, o que torna sua resolução uma tarefa muito complicada. No entanto, podemos considerar certas simetrias para o espaço-tempo em questão, de modo a obter soluções exatas para as equações de Einstein.

É dito que uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$ tem sua forma invariante sob uma dada transformação de coordenadas $x \rightarrow x'$ quando a métrica transformada $g'_{\mu\nu}(x')$ é a mesma função do argumento x'^μ que a métrica original $g_{\mu\nu}(x)$ era do argumento x^μ , ou seja,

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad \text{para todo } y \quad . \quad (1.24)$$

Em um dado ponto, a métrica transformada é dada em termos da métrica original pela relação

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

ou equivalentemente

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x') \quad .$$

Considerando que (1.24) é satisfeita, então podemos obter a condição para a forma invariante da métrica como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x') \quad (1.25)$$

sendo que qualquer transformação $x \rightarrow x'$ que satisfaça (1.25) é chamada *isometria*.

Consideraremos o caso de uma transformação infinitesimal de coordenadas

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x) \quad |\epsilon| \ll 1 \quad . \quad (1.26)$$

Em primeira ordem em ϵ , a equação (1.25) fica

$$\partial_\rho \xi^\mu(x) g_{\mu\sigma}(x) + \partial_\sigma \xi^\nu(x) g_{\nu\rho}(x) + \xi^\mu(x) \partial_\mu g_{\rho\sigma}(x) = 0 \quad (1.27)$$

que pode ser reescrita em termos das derivadas das componentes covariantes $\xi_\sigma = g_{\mu\sigma} \xi^\mu$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\rho \xi_\sigma + \partial_\sigma \xi_\rho + \xi^\mu (\partial_\mu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\rho\mu}) \\ &= \partial_\rho \xi_\sigma + \partial_\sigma \xi_\rho - 2\xi_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \end{aligned}$$

ou mais compactamente,

$$\xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} = 0 \quad . \quad (1.28)$$

A equação (1.28) é conhecida como *equação de Killing* e qualquer vetor $\xi_\mu(x)$ que a satisfaça é chamado *vetor de Killing*. Determinar as isometrias de um dado espaço-tempo é determinar seus vetores de Killing. Qualquer combinação linear de vetores de Killing também é um vetor de Killing.

Com equação de Killing podemos determinar toda uma função $\xi_\mu(x)$ tendo valores dados de ξ_σ e $\xi_{\sigma;\rho}$ em um ponto X . Para vermos isso, lembremos-nos da equação (1.11) para o comutador da derivada covariante

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} = -R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \xi_\lambda \quad (1.29)$$

e da identidade cíclica (1.14) para o tensor de curvatura

$$R_{\sigma\rho\mu}^\lambda + R_{\rho\mu\sigma}^\lambda + R_{\mu\sigma\rho}^\lambda = 0 \quad . \quad (1.30)$$

Substituindo (1.29) na identidade cíclica, encontraremos que qualquer deve satisfazer

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} + \xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} + \xi_{\rho;\mu;\sigma} - \xi_{\rho;\sigma;\mu} = 0 \quad (1.31)$$

que para o caso de um vetor que satisfaça (1.28), a equação (1.31) se reduzirá à

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} = 0$$

que retomando (1.29), teremos

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} = -R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \xi_\lambda \quad . \quad (1.32)$$

Portanto, dado ξ_μ e $\xi_{\mu\nu}$ em um dado ponto X , podemos determinar as segundas derivadas de $\xi_\mu(x)$ em X usando (1.32) e encontrar sucessivamente as derivadas de ordem maior de ξ_μ em X . Todas as derivadas de ξ_μ em X podem ser determinadas como combinações lineares de $\xi_\mu(X)$ e $\xi_{\mu;\nu}(X)$, e a função $\xi_\mu(x)$ pode ser construída como séries de Taylor em uma vizinhança finita de X e será novamente linear em respeito aos valores iniciais $\xi_\mu(X)$ e $\xi_{\mu;\nu}(X)$. Deste modo, qualquer vetor de Killing particular $\xi_\rho^n(x)$ da métrica $g_{\mu\nu}(x)$ pode ser expressa como

$$\xi_\rho^n(x) = A_\rho^\lambda(x; X) \xi_\lambda^n(X) + B_\rho^{\lambda\nu}(x; X) \xi_{\lambda;\nu}^n(X) \quad (1.33)$$

em que A_ρ^λ e $B_\rho^{\lambda\nu}$ são funções que dependem da métrica em X , mas não dos valores iniciais $\xi_\lambda(X)$ e $\xi_{\lambda;\nu}(X)$, sendo portanto a mesma para todos os vetores de Killing. Cada vetor

de Killing de uma dada métrica é especificado pelos valores de $\xi_\rho(X)$ e $\xi_{\rho;\sigma}(X)$ em um ponto particular X .

Um conjunto de vetores de Killing $\xi_\rho^n(x)$ é dito independente se eles não satisfazem qualquer relação linear da forma

$$\sum_n c_n \xi_\rho^n(x) = 0 \quad (1.34)$$

com coeficientes constantes c_n . Qual o número máximo de vetores de Killing independentes que podemos ter em N dimensões? Sejam os vetores de Killing $\xi_\rho^n(x)$ com $n = 1, \dots, M$. Para cada n , há uma quantia N vetores $\xi_\rho^n(X)$ e uma quantia de $N(N-1)/2$ derivadas independentes $\xi_{\rho;\nu}^n(X)$ - lembrando da propriedade de antissimetria das derivadas covariantes dos vetores de Killing dadas por (1.28) - então teremos uma quantidade de $N + N(N-1)/2 = N(N+1)/2$ $\xi_\rho^n(X)$ e $\xi_{\rho;\nu}^n(X)$ para cada n . Se $M > N(N+1)/2$, então esses M vetores de Killing não podem ser linearmente independentes, e devem satisfazer relações da forma

$$\sum_n c_n \xi_\rho^n(X) = \sum_n c_n \xi_{\rho;\nu}^n(X) = 0 \quad .$$

O número máximo de vetores de Killing independentes que podemos ter em um espaço de N dimensões é $N(N+1)/2$. Quando um espaço possui esse número máximo de vetores de Killing independentes, ele é dito *maximamente simétrico*.

1.3 Homogeneidade e isotropia

Agora que temos as ferramentas necessárias, podemos construir a métrica que descreve um espaço-tempo com as propriedades exigidas pelo princípio cosmológico. Primeiramente, temos que definir o que queremos dizer como um “tempo particular”. Como na relatividade geral não há referenciais inerciais globais, então a noção de um ‘momento de tempo’ que seja válido globalmente fica ambígua, e temos de troca-la pela noção de uma *hipersuperfície tridimensional tipo espaço* Σ_t .

Para definir um parâmetro “tempo” que seja válido globalmente, se “fatia” o espaço-tempo em uma série de hipersuperfícies tipo espaço que não se intercedem e que são caracterizadas por algum parâmetro t . Então, falar de um “tempo particular” significa falar do tempo dado sobre uma hipersuperfície Σ_t .

Quanto as linhas de mundo, adotamos o *postulado de Weyl* [35] segundo o qual às linhas de mundo das galáxias são feixes de uma congruência de geodésicas que divergem de um ponto (finito ou infinito) no passado, ou convergem em um ponto no futuro, ou ambos. Essas geodésicas não se intercedem, exceto em um ponto singular no futuro, ou no passado ou em ambos. Dessa forma, só existe uma única linha de mundo passando através de cada ponto (não singular) do espaço-tempo.

Nós construímos as hipersuperfícies Σ_t de tal maneira que a superfície de simultaneidade do referencial local de Lorentz de uma galáxia coincida com a da hipersuperfície. Isso implica que a quadrivelocidade da galáxia é ortogonal a hipersuperfície. As hipersuperfícies são caracterizadas por um parâmetro t que é o tempo próprio ao longo da linha de mundo de qualquer observador fundamental, sendo o parâmetro t chamado de *coordenada temporal sincronizada* ou simplesmente *tempo cósmico*. Cada hipersuperfície Σ_t é coberta por coordenadas $\{x^i\}_{i=1,2,3}$ constantes ao longo de qualquer linha de mundo, chamadas de *coordenadas comóveis*. Satisfazendo essas exigências, o elemento de linha sobre cada hipersuperfície Σ_t fica escrito como

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad , \quad (1.35)$$

sendo $g_{i,j}$ função das coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) .

Para implantarmos os postulados da homogeneidade e isotropia, precisamos fazer algumas mudanças no elemento de linha (1.35). Vamos analisar apenas a parte espacial

$$d\sigma^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad .$$

Se considerarmos um triângulo formado por três galáxias vizinhas em um dado tempo t , a isotropia exige que um triângulo formado por essas mesmas três galáxias em um tempo $t + \Delta t$ seja similar ao triângulo original. Como a homogeneidade requer que o fator de magnificação seja independente da posição no espaço tridimensional, então h_{ij}

deve depender da coordenada temporal t apenas como um fator comum, de maneira que a razão entre pequenas distâncias é a mesma em todos os tempos. Assim, a métrica deve ter a forma

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad , \quad (1.36)$$

em que $R(t)$ é o *fator de escala* dependente do tempo e h_{ij} só depende das coordenadas comóveis $\{x^i\}_{i=1,2,3}$.

1.3.1 Espaços homogêneos e isotrópicos

Um espaço é dito *homogêneo* se existem isometrias infinitesimais (1.26) que carrega qualquer ponto X em um outro ponto vizinho na sua vizinhança imediata. Isso equivale a dizer que a equação de Killing (1.28) tem soluções, para uma dada métrica e um dado ponto, que podem assumir todos os valores possíveis. Em particular, para um espaço de N dimensões, podemos escolher um conjunto de vetores de Killing $\xi_\lambda^{(\mu)}(x; X)$ com

$$\xi_\lambda^{(\mu)}(X; X) = \delta_\lambda^\mu \quad , \quad \mu = 1, \dots, N \quad .$$

Estes são independentes, porque qualquer relação na forma $c_\mu \xi_\lambda^{(\mu)}(x; X) = 0$ em $x = X$ implica que todos os c_λ somem.

Um espaço métrico é dito *isotrópico* sobre um dado ponto X se existem isometrias infinitesimais (1.26) que deixam o ponto X fixo: $\xi^\lambda(X) = 0$, enquanto as derivadas $\xi_{\lambda;\nu}(X)$ assume todos os valores possíveis, submetidos somente a condição de assimetria (1.28). Para N dimensões, podemos escolher um conjunto de $N(N-1)/2$ vetores de Killing $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)$ com

$$\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) \equiv -\xi_\lambda^{(\nu\mu)}(x; X) \quad , \quad (1.37)$$

$$\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(X; X) \equiv 0 \quad , \quad (1.38)$$

$$\xi_{\lambda;\rho}^{(\mu\nu)}(X; X) \equiv [\partial_\rho \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)]_{x=X} \quad (1.39)$$

$$\equiv \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\nu \quad , \quad \mu, \nu = 1, \dots, N(N-1)/2 \quad , \quad (1.40)$$

que satisfaz (1.34) para qualquer forma $c_{\mu\nu} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) = 0$ com $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$ que em X implica que $c_{\lambda\rho} - c_{\rho\lambda} = 2c_{\lambda\rho} = 0$.

Espaços que são isotrópicos sobre todos os pontos são os que estamos interessados em cosmologia. Para isso, é suficiente considerar dois pontos vizinhos X e $X + dX$ com seus respectivos vetores de Killing $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)$ e $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X + dX)$ satisfazendo as condições (1.37, 1.38, 1.39). Qualquer combinação linear desses vetores de Killing será um vetor de Killing, e suas derivadas $\partial \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) / \partial X^\rho$ também será um vetor de Killing da métrica. Lembrando da condição (1.38), sua derivada também será nula. Sendo assim,

$$0 = \frac{\partial}{\partial X^\rho} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(X; X) = \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) \right]_{x=X} + \left[\frac{\partial}{\partial X^\rho} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) \right]_{x=X} . \quad (1.41)$$

Com a condição (1.39), temos

$$\left[\frac{\partial}{\partial X^\rho} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) \right]_{x=X} = -\delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\nu .$$

Com o resultado acima, podemos construir um vetor de Killing $\xi_\lambda(x)$ que assume qualquer valor arbitrário a_λ em $x = X$ da forma

$$\xi_\lambda(x) = \frac{a_\nu}{N-1} \frac{\partial}{\partial X^\mu} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) \quad (1.42)$$

o que pode ser verificado com um simples teste de consistência. Esse resultado é importante, por que mostra que qualquer espaço que seja isotrópico sobre todos os pontos também é homogêneo.

Já falamos que um espaço com o número máximo $N(N+1)/2$ de vetores de Killing é dito maximamente simétrico. Espaços homogêneos e isotrópicos sobre todos os pontos são espaços maximalmente simétricos. O contrário também é válido: Espaços maximalmente simétricos são homogêneos e isotrópicos sobre todos os pontos [20].

Agora estamos interessados nas propriedades do tensor de curvatura em espaços maximalmente simétricos. Primeiramente, tomemos o comutador de (1.32)

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\rho;\mu;\nu;\sigma} = -R_{\rho\sigma\nu}^\lambda \xi_{\lambda;\mu} - R_{\mu\sigma\nu}^\lambda \xi_{\rho;\lambda}$$

que pode ser desenvolvido em

$$R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \xi_{\lambda;\nu} - R_{\nu\rho\mu}^\lambda \xi_{\lambda;\sigma} + (R_{\sigma\rho\mu;\nu}^\lambda - R_{\nu\rho\mu;\sigma}^\lambda) \xi_\lambda = -R_{\rho\sigma\nu}^\lambda \xi_{\lambda;\mu} - R_{\mu\sigma\nu}^\lambda \xi_{\rho;\lambda} ,$$

e usando (1.28) chegamos a

$$(-R_{\rho\sigma\nu}^\lambda \delta_\mu^\kappa + R_{\mu\sigma\nu}^\lambda \delta_\rho^\kappa - R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \delta_\nu^\kappa + R_{\nu\rho\mu}^\lambda \delta_\sigma^\kappa) \xi_{\lambda;\kappa} = (R_{\sigma\rho\mu;\nu}^\lambda - R_{\nu\rho\mu;\sigma}^\lambda) \xi_\lambda . \quad (1.43)$$

Vimos que em um dado ponto x de um espaço maximamente simétrico, nós podemos encontrar vetores de killing para os quais $\xi_\lambda(x)$ se anula e $\xi_{\lambda;\kappa}(x)$ é uma matriz arbitrária antissimétrica. Para que o lado esquerdo de (1.43) seja nulo, os coeficientes de $\xi_{\lambda;\kappa}$ deve ser uma matriz simétrica, pois quando uma matriz simétrica está contraída com uma antissimétrica, o resultado é nulo. Dessa forma, segue-se que

$$-R_{\rho\sigma\nu}^\lambda\delta_\mu^\kappa + R_{\mu\sigma\nu}^\lambda\delta_\rho^\kappa - R_{\sigma\rho\mu}^\lambda\delta_\nu^\kappa + R_{\nu\rho\mu}^\lambda\delta_\sigma^\kappa = R_{\rho\sigma\nu}^\kappa\delta_\mu^\lambda + R_{\mu\sigma\nu}^\kappa\delta_\rho^\lambda - R_{\sigma\rho\mu}^\kappa\delta_\nu^\lambda + R_{\nu\rho\mu}^\kappa\delta_\sigma^\lambda \quad . \quad (1.44)$$

Também mostramos que em um dado ponto x de um espaço maximamente simétrico, existem vetores de Killing para os quais $\xi_\lambda(x)$ assume qualquer valor que quisermos, então (1.43) e (1.44) exigem que

$$R_{\sigma\rho\mu;\nu}^\lambda = R_{\nu\rho\mu;\sigma}^\lambda \quad . \quad (1.45)$$

Contraindo κ com μ em (1.44), temos

$$-NR_{\rho\sigma\nu}^\lambda + R_{\rho\sigma\nu}^\lambda - R_{\sigma\rho\nu}^\lambda + R_{\nu\rho\sigma}^\lambda = -R_{\rho\sigma\nu}^\lambda + R_{\sigma\rho}^\lambda\delta_\nu^\lambda - R_{\nu\rho}^\lambda\delta_\sigma^\lambda \quad ,$$

lembrando que $R_{\kappa\sigma\nu}^\kappa$ é nulo devido a propriedade de antissimetria do tensor de Riemann, $-R_{\sigma\rho\kappa}^\kappa$ é o tensor de Ricci $R_{\sigma\rho}$, e em um espaço de N dimensões $\delta_\kappa^\kappa = N$. Usando a regra ciclica (1.14) e a antissimetria do tensor de Riemann, encontramos

$$(N-1)R_{\lambda\rho\sigma\nu} = R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} \quad . \quad (1.46)$$

Contraímos λ com ν e encontramos o tensor de Ricci dado em termos do escalar de curvatura da forma

$$R_{\sigma\rho} = \frac{1}{N}g_{\sigma\rho}R \quad . \quad (1.47)$$

Substituindo esse resultado em (1.46), obtemos

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = \frac{R}{N(N-1)}(g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}) \quad . \quad (1.48)$$

podemos analisar a dependência do escalar de curvatura em todos os pontos, substituindo os resultados obtidos na expressão do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ e lembrando que $G_{\mu\nu;\sigma} = 0$ de forma que

$$0 = \nabla_\sigma \left(R_\rho^\sigma - \frac{1}{2}\delta_\rho^\sigma R \right) = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2} \right) \nabla_\sigma R \quad ,$$

ou

$$0 = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x^\rho} R$$

já que a derivada covariante de um escalar é igual à sua derivada parcial. Dessa forma, qualquer espaço de três ou mais dimensões em que o tensor de Ricci possa ser escrito em termos do escalar de curvatura, terá R constante. É conveniente definir a *constante de curvatura* K como

$$R \equiv -N(N-1)K \quad . \quad (1.49)$$

Substituindo (1.49) em (1.47) e (1.48), respectivamente, obtemos

$$R_{\sigma\rho} = -(N-1)K g_{\sigma\rho} \quad , \quad (1.50)$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}) \quad . \quad (1.51)$$

Em geometria diferencial, um espaço que satisfaz as propriedades acima é chamado de *espaço de curvatura constante*.

1.3.2 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Agora que já enunciamos as propriedades de espaços maximalmente simétricos, podemos aplicá-las para construir a forma explícita da métrica tridimensional h_{ij} . Partindo de (1.51), temos o tensor de Ricci tridimensional dado por (1.50) como

$$R_{ij} = -2Kh_{ij} \quad ,$$

e o escalar de Ricci dado por (1.49) como

$$R = -6K \quad .$$

A métrica estática isotrópica mais geral no espaço tridimensional será aquela que deve depender somente dos três invariantes rotacionais

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \equiv r^2, \quad d\vec{x} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x},$$

e em coordenadas esféricas polares (r, θ, ϕ) deve ter a forma

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= C(r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + D(r)(d\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 \\ &= C(r)r^2 dr^2 + D(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad . \end{aligned}$$

que pode ser simplificada com a redefinição da coordenada radial $\bar{r}^2 = r^2 D(r)$. Sumindo com as barras na variável radial, a parte espacial da métrica pode ser escrita como

$$d\sigma^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad ,$$

sendo $B(r)$ uma função arbitrária de r .

Os únicos elementos não nulos da conexão afim para esta métrica são

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{B(r)}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)} \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta. \end{aligned}$$

E os elementos não nulos do tensor de Ricci serão

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -\frac{1}{rB} \frac{dB}{dr} \quad , \\ R_{\theta\theta} &= \frac{1}{B} - 1 - \frac{r}{2B^2} \frac{dB}{dr} \quad , \\ R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad . \end{aligned}$$

Já vimos que para o espaço tridimensional maximalmente simétrico, o tensor de Ricci é dado por

$$R_{ij} = -2K h_{ij} \quad ,$$

o que significa que

$$\frac{1}{rB} \frac{dB}{dr} = 2KB(r) \quad , \tag{1.52}$$

$$\frac{1}{B} - 1 - \frac{r}{2B^2} \frac{dB}{dr} = -2Kr^2 \quad . \tag{1.53}$$

Integrando (1.52), obtemos

$$B(r) = \frac{1}{A - Kr^2} \quad ,$$

sendo A uma constante de integração. Substituindo essa expressão dentro de (1.53), obtemos

$$1 - A + Kr^2 = Kr^2 \quad ,$$

o que nos mostra que $A = 1$. Deste modo, construímos o elemento de linha de um espaço tri-dimensional maximalmente simétrico dado por

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad . \quad (1.54)$$

Para esta métrica, a origem da coordenada radial é completamente arbitrária, pois como todos os pontos são equivalentes, podemos escolher qualquer ponto como origem. Não há centro nesse espaço.

Podemos incorporar o elemento de linha (1.54) para o espaço tridimensional maximalmente simétrico no elemento de linha (1.36) que incorpora o princípio cosmológico e o postulado de Weyl, e obtemos

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad . \quad (1.55)$$

Redefinimos a métrica de tal maneira que o valor arbitrário da magnitude de K é absorvido pela coordenada radial e o fator de escala. Assumindo que $K \neq 0$, definimos a variável $k = K/|K|$ de tal maneira que $k = \pm 1$ dependendo de onde K for positivo ou negativo. Introduzimos a nova coordenada radial

$$\bar{r} = |K|^{1/2} r \quad ,$$

então (1.55) se torna

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)}{|K|} \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad . \quad (1.56)$$

Por fim, redefinimos o fator de escala reescalonado $a(t)$ como

$$a(t) = \begin{cases} \frac{R(t)}{|K|^{1/2}} & \text{se } K \neq 0 \quad , \\ R(t) & \text{se } K = 0 \quad . \end{cases} \quad (1.57)$$

Sumindo com as barras na coordenada radial, nós obtemos a forma padrão para o elemento de linha de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW),

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad , \quad (1.58)$$

em que k assume valores $-1, 0, 1$ dependendo se a sessão espacial tem curvatura negativa, nula ou positiva, respectivamente.

As propriedades geométricas da hipersuperfície Σ_t dependem se $k = -1, 0$ ou 1 . Se $k = 1$ a métrica torna-se singular quando $r \rightarrow 1$. Introduzimos uma nova coordenada radial χ definida por

$$r = \sin \chi \quad \Rightarrow \quad dr = \cos \chi d\chi = (1 - r^2)^{1/2} d\chi \quad ,$$

e assim a parte espacial da métrica de FLRW assume a forma

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad ,$$

sendo a o valor do fator de escala definido sobre uma determinada hipersuperfície Σ_t . Essa geometria corresponde a uma 3-esfera inserida em um espaço euclidiano quadridimensional com coordenadas (w, x, y, z) sendo

$$\begin{aligned} w &= a \cos \chi \quad , \\ x &= a \sin \chi \sin \theta \cos \phi \quad , \\ y &= a \sin \chi \sin \theta \sin \phi \quad , \\ z &= a \sin \chi \cos \theta \quad . \end{aligned}$$

Podemos visualizar melhor essa geometria ao constatarmos que

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad ,$$

com a equação de vínculo

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad ,$$

e com as coordenadas (χ, θ, ϕ) delimitadas por

$$0 \leq \chi \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad .$$

Para o caso de $k = 0$, fazemos $r = \chi$ e o a parte espacial do elemento de linha ficará

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad ,$$

que corresponde a um 3-plano, o que pode ser visualizado com a transformação

$$x = a\chi \sin \theta \cos \phi \quad , \quad y = a\chi \sin \theta \sin \phi \quad , \quad z = a\chi \cos \theta \quad ,$$

pela qual o elemento de linha se torna

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad .$$

Por fim, para o caso de $k = -1$, fazemos

$$r = \sinh \chi \Rightarrow dr = \cosh \chi d\chi = (1 + r^2)^{1/2} d\chi \quad ,$$

com o elemento de linha tomando a forma

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad .$$

Essa geometria corresponde a um 3-hiperboloide embutido em um espaço de Minkowski quadridimensional com coordenadas (w, x, y, z) dadas por

$$\begin{aligned} w &= a \cosh \chi \quad , \\ x &= a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \quad , \\ y &= a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \quad , \\ z &= a \sinh \chi \cos \theta \quad . \end{aligned}$$

Essas coordenadas satisfazem

$$d\sigma^2 = dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad ,$$

com a equação de vínculo

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2 \quad ,$$

e com as coordenadas (χ, θ, ϕ) delimitadas por

$$0 \leq \chi \leq \infty \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad .$$

Dessa forma, podemos reescrever a métrica de FLRW como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + S^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad , \quad (1.59)$$

com (χ, θ, ϕ) sendo as coordenadas comoveis. A função $S(\chi)$ é dada por

$$S(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{se } k = 1 \\ \chi & \text{se } k = 0 \\ \sinh \chi & \text{se } k = -1 \end{cases} . \quad (1.60)$$

1.4 Redshift cosmológico

Consideremos um fóton emitido em um instante de tempo t_E por um observador comóvel com coordenadas espaciais fixas $(\chi_E, \theta_E, \phi_E)$. O fóton é recebido por um outro observador em um tempo t_R também com coordenadas espaciais fixas. Escolhemos o receptor como estando na origem do sistema de coordenadas. Para um fóton com $ds = 0$, temos $d\theta = d\phi = 0$ ao longo da geodésica do fóton. Então, (1.59) nos dá para um fóton incidente,

$$\int_{t_E}^{t_R} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{\chi_E} d\chi .$$

Posteriormente, o emissor envia um segundo pulso em um tempo $t_E + \delta t_E$ que é recebido em um tempo $t_R + \delta t_R$, então

$$\int_{t_E + \delta t_E}^{t_R + \delta t_R} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{\chi_E} d\chi = \int_{t_E}^{t_R} \frac{dt}{a(t)} ,$$

do qual decorre

$$\int_{t_R}^{t_R + \delta t_R} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_E}^{t_E + \delta t_E} \frac{dt}{a(t)} .$$

Assumindo que δt_E e δt_R sejam pequenos, então $a(t)$ é constante em ambas as integrais, então

$$\frac{\delta t_R}{a(t_R)} = \frac{\delta t_E}{a(t_E)} .$$

Considerando que os pulsos são sucessivas cristas de ondas de uma onda eletromagnética, podemos definir o *redshift cosmológico* z como

$$1 + z \equiv \frac{\nu_E}{\nu_R} = \frac{\delta t_R}{\delta t_E} = \frac{a(t_R)}{a(t_E)} . \quad (1.61)$$

Deste modo, vemos que se o fator de escala $a(t)$ cresce com o tempo cósmico, então o universo está se expandindo e o fóton é “deslocado para o vermelho” por um fator z . Se o universo está se contraindo, então o fóton é “deslocado para o violeta”. Se o universo é estático, $a = \text{constante}$ e não há nenhum desvio na frequência.

1.5 Os parâmetros de Hubble e de desaceleração

Costuma-se denotar o tempo cosmológico presente como t_0 . Deste modo, fótons que recebemos hoje de galáxias distantes são recebidos no instante t_0 . Se a galáxia emissora é próxima e emite o fóton em um tempo t , então podemos escrever $t = t_0 - \delta t$, com $\delta t \ll t_0$. Dessa forma, podemos expandir a série de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{a(t_0)} &= 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0)^2 + \mathcal{O}(t_0 - t)^3 \\ &= 1 + H(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2} q(t_0) H^2(t_0)(t - t_0)^2 + \mathcal{O}(t_0 - t)^3 \quad , \end{aligned} \quad (1.62)$$

em que introduzimos o *parâmetro de Hubble* $H(t)$ e o *parâmetro de desaceleração* $q(t)$. Eles são dados por

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad , \\ q(t) &\equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad . \end{aligned} \quad (1.63)$$

Para o tempo presente, esses parâmetros são usualmente representados por $H_0 \equiv H(t_0)$ e $q_0 \equiv q(t_0)$.

Usando essas definições, podemos expressar o “redshift” z em termos do “*lookback time*”, $t_0 - t$, fazendo

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 - H_0(t - t_0) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + H_0^2(t - t_0)^2 + \mathcal{O}(t_0 - t)^3 \quad .$$

Supondo-se $t_0 - t \ll t_0$, teremos

$$z = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) H_0^2(t_0 - t)^2 + \mathcal{O}(t_0 - t)^3 \quad . \quad (1.64)$$

Como o redshift é uma quantidade observável, é mais útil inverter (1.64), o que pode ser feito ao resolvermos a equação de segundo grau acima e expressando $t_0 - t$ em termos de

z da forma

$$t_0 - t = H_0^{-1}z - H_0^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad . \quad (1.65)$$

É importante notar que as expressões (1.64) e (1.65) dependem apenas dos valores de H_0 e q_0 e podem ser evoluídas sem o conhecimento de $a(t)$ ao longo de toda a história do universo.

Usando novamente a expansão de Taylor, podemos obter uma expressão observada para a coordenada χ da galáxia emissora, dada por

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{t_0-t} a_0^{-1} [1 - (t_0 - t')H_0 - \mathcal{O}(t_0 - t)^3] d(t_0 - t') \quad .$$

Assumindo que $t_0 - t \ll t_0$, nós temos

$$\chi = a_0^{-1} \left[(t_0 - t) + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t)^2 + \mathcal{O}(t_0 - t)^3 \right] \quad . \quad (1.66)$$

Substituindo o lookback time $t_0 - t$ nesse resultado usando (1.65), obtemos a expressão para a distância comóvel χ da galáxia emissora em função do redshift (assumindo $z \ll 1$), o que nos dá

$$\chi = \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \quad . \quad (1.67)$$

Na métrica de FLRW, a distância própria d da galáxia emissora em um tempo cósmico t_0 é $d = a_0 \chi$. Se interpretarmos o redshift cosmológico como um efeito Doppler devido a velocidade de afastamento das galáxias v que é dado para $v \ll 1$ como $v = z$, então obtemos

$$v = z = H_0 d \quad , \quad (1.68)$$

que é válida para pequenos valores de z . As galáxias irão se afastar de nós com uma velocidade proporcional à distância que elas estão de nós. Esta é a *lei de Hubble* que foi descoberta por Edwin Hubble em 1929, ao usar a relação período-luminosidade das variáveis Cefeidas descoberta por Henrietta Leavitt em 1912, para comparar o redshift de galáxias próximas com suas distâncias. Este resultado implica que o universo partiu de um estado muito denso em um tempo finito no passado.

A constante de Hubble H_0 tem dimensão inversa do tempo. A medida da idade do universo está relacionada à medida de H_0^{-1} . Há muitas complicações para medir H_0 ,

entre elas, o movimento aleatório peculiar das galáxias que é da ordem de 200 km s^{-1} , as anisotropias locais que são bastante significativas em largas escalas e podem distorcer o campo de velocidades, e também o movimento do Sol ao redor do centro da Via Láctea que é da ordem de 300 km s^{-1} na direção da constelação de Cisne [21]. Devido a todos esses erros, além de imprecisões nas distâncias medidas usando variáveis cefeídas, Hubble mediu em 1936 um valor de $538 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para H_0 . Os modelos cosmológicos mais simples davam uma idade para o universo de 1.8 Gyr^2 , o que era menos do que a idade da Terra conhecida na época usando elementos radioativos, cerca de 7 Gyr [21]. Posteriormente, medidas mais precisas de H_0 foram obtidas e a idade do universo era obtida na faixa dos 13 a 20 Gyr.

Combinando as expressões (1.62), (1.63) e (1.64), podemos obter a expressão com a qual o parâmetro de Hubble varia com valores pequenos de z . Essa expressão é dada por

$$H(z) = H_0[1 + (1 + q_0)z + \mathcal{O}(z^2)] \quad . \quad (1.69)$$

Para obtermos expressões mais gerais para o lookback time e para a distância comóvel como função do redshift z , tomemos que

$$dz = d(1 + z) = d\left(\frac{a_0}{a}\right) = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} dt = -(1 + z)H(z)dt \quad ,$$

o qual pode ser usado para reparametrizarmos funções antes dadas em termos do tempo para ser dada em termos do redshift. Dessa forma, o lookback time fica dado por

$$t_0 - t = \int_t^{t_0} dt' = \int_0^z \frac{dz'}{(1 + z')H(z')} \quad , \quad (1.70)$$

e a distância comóvel da galáxia é dada por

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad . \quad (1.71)$$

Para fazermos essas integrais, precisamos saber a evolução do parâmetro de Hubble, o que significa conhecer a evolução do fator de escala.

² $1\text{Gyr} = 10^9\text{yr}$, do inglês years

1.6 Equações de campo cosmológicas

A dinâmica do espaço-tempo de FLRW é caracterizada pelo fator de escala $a(t)$. Para determinar a função $a(t)$, temos de usar as equações do campo gravitacional na presença de um conteúdo de matéria-energia. Para isso, usaremos as equações de Einstein (1.1), mas adicionado do termo conhecido como *constante cosmológica* Λ , de modo que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad ,$$

sendo $\kappa = 8\pi G$. Discutiremos o significado da constante cosmológica Λ posteriormente. Podemos expressar as equações de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad , \quad (1.72)$$

com $T \equiv T^\mu_\mu$. Como já havíamos falado anteriormente, na cosmologia padrão, adotamos o tensor momento-energia de um fluido perfeito, dado por (1.20). Como estamos tratando de um espaço homogêneo e isotrópico, a densidade ρ e a pressão P devem depender somente do tempo cósmico t .

Adotaremos a métrica de FLRW dada por (1.58) em que adotamos o sistema de coordenadas $[x^\mu] = (t, r, \theta, \phi)$. As componentes covariantes da métrica são

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = a^2(t)r^2, \quad g_{33} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \quad .$$

Como a métrica só tem componentes diagonais, as componentes contravariantes são simplesmente o inverso das covariantes. Usamos (1.8) para calcular as componentes da conexão afim $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ e (1.12) para calcular as componentes do tensor de Ricci $R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$. Após todo um procedimento algébrico, encontramos que os únicos componentes não nulos do tensor de Ricci são os diagonais, dados por

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\ddot{a}/a \quad , \\ R_{11} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)/(1 - kr^2) \quad , \\ R_{22} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \quad , \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \quad . \end{aligned}$$

Quanto ao lado direito das equações de Einstein, começamos pela quadrivelocidade, cujas componentes contravariantes no referencial comóvel são simplesmente

$$[u^\mu] = (1, 0, 0, 0) \quad ,$$

que podem ser escritas da forma $u^\mu = \delta_0^\mu$. As covariantes são dadas em termos das contravariantes por

$$u_\mu = g_{\mu\nu}\delta_0^\nu = g_{\mu 0} = -\delta_\mu^0 \quad ,$$

sendo que podemos escrever o tensor energia-momento em suas componentes covariantes como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 + Pg_{\mu\nu} \quad ,$$

enquanto as componentes mistas são dadas por

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3P \quad .$$

Portanto, podemos escrever a parte das equações de Einstein que dependem do tensor energia-momento como

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} = (\rho + P)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 + \frac{1}{2}(\rho - P)g_{\mu\nu} \quad .$$

Incluindo o termo de Λ , encontramos que o lado direito das equações de Einstein em suas componentes diagonais é dado por

$$\begin{aligned} \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00} \right) + \Lambda g_{00} &= \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3P) - \Lambda \quad , \\ \kappa \left(T_{11} - \frac{1}{2}Tg_{11} \right) + \Lambda g_{11} &= \left[\frac{1}{2}\kappa(\rho - P) + \Lambda \right] a^2/(1 - kr^2) \quad , \\ \kappa \left(T_{22} - \frac{1}{2}Tg_{22} \right) + \Lambda g_{22} &= \left[\frac{1}{2}\kappa(\rho - P) + \Lambda \right] a^2 r^2 \quad , \\ \kappa \left(T_{33} - \frac{1}{2}Tg_{33} \right) + \Lambda g_{33} &= \left[\frac{1}{2}\kappa(\rho - P) + \Lambda \right] a^2 r^2 \sin^2 \theta \quad . \end{aligned}$$

Devido a homogeneidade e isotopia da métrica de FRW, as três equações da parte espacial são essencialmente as mesmas. Dessa forma, só temos duas equações independentes

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3P) - \Lambda \quad , \\ a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k &= \left[\frac{1}{2}\kappa(\rho - P) + \Lambda \right] a^2 \quad . \end{aligned}$$

Eliminando $\ddot{a}$ da segunda equação e lembrando que $\kappa = 8\pi G$, chegamos as *equações de campo cosmológicas*

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)a + \frac{1}{3}\Lambda a \quad , \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \quad .\end{aligned}\tag{1.73}$$

Essas duas equações diferenciais que determinam a evolução do fator de escala $a(t)$ são chamadas *equações de Friedmann-Lemaître*. No caso de $\Lambda = 0$, elas são chamadas simplesmente de *equações de Friedmann* [22]. Se $\Lambda = 0$, uma expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$) acontecerá se $P < \rho/3$.

1.7 Equações de movimento para o fluido cosmológico

Além das equações (1.73), que são suficientes para determinar $a(t)$, podemos derivar equações úteis a partir do fato de que o tensor energia-momento é conservado, o que é expresso a seguir:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad .\tag{1.74}$$

Para um fluido perfeito na forma (1.20), a equação de conservação pode ser decomposta nas equações da continuidade e de Euler relativísticas

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} + P u^\mu_{;\mu} = 0 \quad ,\tag{1.75}$$

$$(\rho + P)u^\mu u^\nu_{;\mu} = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)P_{;\mu} \quad .\tag{1.76}$$

A equação da continuidade (1.75) pode ser desenvolvida da forma

$$\rho_{;\mu} u^\mu + (\rho + P)(u^\mu_{;\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu} u^\nu) = 0 \quad .$$

Como p é função somente do tempo e $u^\mu = \delta^\mu_0$, a equação da continuidade se reduz a

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad ,\tag{1.77}$$

expressando a conservação da energia. Essa equação pode ser obtida diretamente das equações de campo (1.73) ao eliminarmos $\ddot{a}$.

A equação (1.77) pode ser rearranjada da forma

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -3P\dot{a}a^2 \quad ,$$

e podemos trocar a derivada em respeito a t por uma derivada com respeito a o fator de escala a , obtendo

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3Pa^2 \quad .$$

Em cosmologia, é usual assumir que a densidade e a pressão de um fluido estão relacionadas por uma equação de estado na forma

$$P = \omega \rho \quad , \quad (1.78)$$

em que o *parâmetro da equação de estado* ω é constante. Assim, a equação da continuidade fica dada por

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3\omega \rho a^2 \quad ,$$

que tem como solução imediata

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad . \quad (1.79)$$

A equação (1.79) nos dá a evolução da densidade de energia do fluido como função do fator de escala. Para “poeira” sem pressão $\omega = 0$, para radiação $\omega = 1/3$ e para o vácuo (se $\Lambda \neq 0$) $\omega = -1$ (para modelos de energia escura dinâmica, o parâmetro *omega* tem valor variável).

Se o fluido cosmológico tem vários componentes distintos não interagentes, o tensor energia momento pode ser escrito como a soma do tensor energia-momento dos componentes individuais, que se conservam independentemente, e cuja pressão e densidade são somas das pressões e densidades dos componentes individuais. Para um fluido com múltiplas componentes, a equação (1.79) fica reescrita como

$$\rho_i \propto a^{-3(1+\omega_i)} \quad , \quad (1.80)$$

em que o índice i denota um componente individual do fluido cosmológico. Posteriormente, quando formos falar de modelos de interação entre matéria escura e energia escura, o tensor energia-momento desses dois constituintes não se conservará individualmente e a equação (1.80) não será válida, pois pressupõe que os fluidos não são interagentes.

1.8 Componentes do fluido cosmológico

Iremos considerar o fluido cosmológico como constituído de três componentes, a matéria, a radiação e o vácuo; cada qual com suas respectivas equações de estado. A densidade de energia total do universo é a soma da densidade de energia de cada um desses componentes (assumindo que eles não são interagentes) individuais

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t) \quad , \quad (1.81)$$

sendo ρ_m a densidade de matéria, ρ_r a densidade de radiação e ρ_Λ a densidade de energia do vácuo.

1.8.1 Matéria

A matéria é a componente do universo que tem pressão desprezível, e, portanto, tem $\omega = 0$. Existem dois tipos de matéria, a *bariônica* e a *matéria escura* (ME).

A matéria bariônica é aquela constituída de prótons, nêutrons e elétrons, as duas primeiras conhecidas como bárions³. A maneira mais simples de se observar bárions é nas galáxias. A principal contribuição à matéria bariônica não vem das estrelas nas galáxias, mas sim do gás em grupos de galáxias. Outra maneira de estimar a densidade de energia dos bárions é através da luz advinda de quasares distantes, cuja quantidade de luz absorvida é uma medida da quantidade de matéria bariônica que está no caminho entre as fontes e observador, no caso, nós [36].

No entanto, esses métodos mencionados acima são basicamente mensurações que têm como base a interação entre a matéria e a radiação. No entanto, temos fortes evidências de que maior parte da matéria não interage com a radiação, a qual chamamos de matéria escura. Esta se divide em *matéria escura fria* (CDM - do inglês *Cold Dark Matter*) que é não-relativística e a *matéria escura quente* que é relativística.

A mais convincente evidência para a matéria escura em escalas galácticas vem da observação das *curva de rotação* das galáxias, cuja a velocidade decai muito mais lentamente

³Elétrons são classificados como léptons, mas por terem massa desprezível em relação à prótons e nêutrons, considera-se que toda a massa pertence aos bárions

do que o previsto se considerarmos somente a quantidade de matéria observada. Foi na escala de aglomerados de galáxias que tivemos as primeiras evidências da ME ao medir a velocidade de dispersão no aglomerado Coma, em 1933 [37]. Medidas das anisotropias da RCF também apontam para o fato de que existe muito mais matéria do que aquela que interage com a radiação. As observações das lentes gravitacionais fracas, resultado do desvio gravitacional da luz na presença de matéria, aponta para a existência da ME. Entre os candidatos a explicarem a matéria escura, estão partículas supersimétricas tais como o *neutralino* e os *axinos*, e efeitos de dimensões extras chamados de *estados de Kaluza-Klein*.

Também temos teorias que consideram que não existe ME e tentam explicar as discordâncias entre teoria e observação mencionadas acima como efeito de modificações na teoria Newtoniana da gravitação. Essas teorias são conhecidas como *Modified Newtonian Dynamics* (MOND). Para uma boa revisão a cerca das evidências, candidatos e detecção da ME, ver [38].

Por enquanto, não iremos fazer distinção entre a matéria bariônica e a matéria escura, e consideraremos a densidade de matéria simplesmente como a soma da densidade de bárions e de ME

$$\rho_m(t) = \rho_b(t) + \rho_{me}(t) \quad .$$

Posteriormente, ao considerarmos a ME como interagente com a energia escura, essa suposição não irá valer. Como já falamos, a matéria é considerada não pressurizada e o parâmetro da equação de estado $\omega = 0$. Deste modo, de (1.80), temos que

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^3 \quad \text{ou} \quad \rho_m(z) = \rho_{m,0} (1+z)^3 \quad , \quad (1.82)$$

em que $\rho_{m,0}$ denota o valor da densidade de matéria hoje.

1.8.2 Radiação

A radiação inclui os fótons, que possuem massa de repouso nula, e os três tipos de neutrinos (neutrino do elétron, neutrino do múon e neutrino do tau), que possuem uma massa de repouso muito pequena, mas não nula. A densidade de radiação é escrita como

a soma dessas duas contribuições

$$\rho_r(t) = \rho_\gamma(t) + \rho_\nu(t) \quad ,$$

em que o subscrito γ representa o fóton e o subscrito ν representa os neutrinos. Para a radiação, $\omega = 1/3$, e portanto

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^4 \quad \text{ou} \quad \rho_r = \rho_{r,0}(1+z)^4 \quad . \quad (1.83)$$

Nesse caso, temos que a densidade dos fótons decai com $(1+z)^3$ tal como a matéria, acrescido de um termo $(1+z)$ devido ao redshift cosmológico sofrido por cada fóton.

Podemos relacionar a temperatura com a densidade de energia do fóton pela equação

$$\rho_\gamma = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{p/T} - 1} p \quad , \quad (1.84)$$

em que o número 2 representa os dois estados de spin do fóton e temos no integrando a distribuição de Bose-Einstein, além do termo p referente a energia do fóton. A integral na parte angular dá 4π e fazendo a mudança de variável $x \equiv p/T$, temos a integral

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi T^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad ,$$

que pode ser expressa em termos de funções de Riemann ζ ; como $6\zeta(4) = \pi^4/15$. Então

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad , \quad (1.85)$$

que nos relaciona a densidade de energia do fóton com a temperatura. Comparando (1.83) com (1.85), temos que a temperatura dos fótons decai quando o universo expande pela relação

$$T(t) = T_0 \left[\frac{a_0}{a(t)} \right] \quad \text{ou} \quad T(z) = T_0(1+z) \quad , \quad (1.86)$$

o que significa que o universo foi muito mais quente no passado. Adotamos $T_0 = 2.725 \pm 0.002K$ como a atual temperatura da radiação cósmica de fundo [36].

1.8.3 Vácuo

O vácuo pode ser modelado quando nos perguntamos qual o tensor energia-momento mais geral possível que podemos construir usando apenas a métrica [39]. A resposta é

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad , \quad (1.87)$$

sendo Λ a constante cosmológica. A densidade do vácuo fica dada por $\rho = \Lambda/8\pi G$ e a pressão dada por $P = -\Lambda/8\pi G$, e portanto $P = -\rho$ e $\omega = -1$. Para um fluido com essas propriedades, vemos de (1.77) que a densidade de energia do vácuo permanece constante.

1.9 Parâmetros cosmológicos

O modelo cosmológico padrão de FLRW é descrito em termos dos chamados *parâmetros cosmológicos*. Esses parâmetros são os valores presentes do parâmetro de Hubble H_0 , da densidade de matéria $\rho_{m,0}$, da densidade de radiação $\rho_{r,0}$ e da densidade de energia do vácuo $\rho_{\Lambda,0}$. É usual expressar essas densidades em quantidades adimensionais, conhecidas como *parâmetros de densidade* ou simplesmente *densidades*, as quais são definidas como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho_i(t) \quad , \quad (1.88)$$

em que $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, e o índice i denota “ m ”, “ r ” ou “ Λ ”. É importante notar que Ω_Λ é em geral, função do tempo cósmico t , apesar de ρ_Λ ser constante. Trabalhamos com os valores presentes das densidades, então temos o modelo cosmológico escrito em termos de quatro parâmetros: H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$.

Medir esses parâmetros é o objetivo da cosmologia observacional, para assim podermos dar uma descrição precisa da evolução do universo. Os dados mais recentes, advindo do satélite Planck [30]⁴, nos dão que

$$H_0 = 67.11 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad \Omega_{m,0} = 0.3175, \quad \Omega_{r,0} = 5 \times 10^{-5}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0.6825 \quad . \quad (1.89)$$

É comum expressar a constante de Hubble em termos do parâmetro adimensional h dado por $H_0/100 \text{ km s}^{-1} / \text{Mpc}$. As medidas nos dão $h = 0.72 \pm 0.08$. A chamada *densidade física* de alguma espécie de partículas é dada pela multiplicação do parâmetro de densidade da mesma pelo parâmetro h^2 . As densidades físicas de bárions e ME hoje dados pelo satélite Planck [30] são

$$\Omega_{b,0}h^2 = 0.022068, \quad \Omega_{dm,0}h^2 = 0.12029 \quad , \quad (1.90)$$

em que podemos notar que apenas cerca de um sexto da densidade de matéria é constituída de bárions.

⁴O valor da densidade de radiação foi retirado de [22]

Podemos expressar as equações de campo cosmológicas (1.73) em termos das densidades. Dividimos a segunda equação por a^2 e lembremos que $H = \dot{a}/a$, obtemos

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - \frac{k}{H^2 a^2} \quad , \quad (1.91)$$

e definimos o parâmetro de *densidade de curvatura* da forma

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{H^2(t)a^2(t)} \quad , \quad (1.92)$$

e para todos os tempos cósmicos t temos válida a relação

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad . \quad (1.93)$$

A equação (1.52) nos permite determinar a curvatura espacial do universo de uma maneira muito simples. Temos três casos:

- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1 \Leftrightarrow$ curvatura espacial negativa ($k = -1$) $\Leftrightarrow$ “aberto”,
- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \Leftrightarrow$ curvatura espacial nula ($k = 0$) $\Leftrightarrow$ “plano”,
- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1 \Leftrightarrow$ curvatura espacial positiva ($k = 1$) $\Leftrightarrow$ “fechado”.

As relações acima são válidas para qualquer tempo cósmico. Como as densidades são funções do tempo cósmico t , a soma delas não podem mudar de sinal e dessa forma, o universo não pode passar de uma geometria de FRW para outra. Costuma-se definir o *parâmetro de densidade total* como

$$\Omega \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k \quad , \quad (1.94)$$

que pode se relacionar com densidade de energia equivalente (1.81) por $\Omega = 8\pi G\rho/3H^2$. De (1.89) vemos que nosso universo se aproxima muito de ser espacialmente plano ($k = 0$). Costuma-se designar a *densidade crítica* como aquela necessária para que o universo seja espacialmente plano. A densidade crítica é dada por

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad . \quad (1.95)$$

O valor mensurado de ρ_{crit} é

$$\rho_{crit} = 1.879h^2 \times 10^{-29} g/cm^3 \quad .$$

1.10 Evolução do fator de escala

Iremos agora especificar as equações de campo (1.73) em termo dos parâmetros cosmológicos H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$. Começemos pela segunda equação de Friedmann-Lemâitre, levando em conta que $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ e que adotaremos $a_0 = 1$. Assim,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\sum_i \rho_i \right) - \frac{k}{a^2} \quad ,$$

e de (1.81), (1.88) e (1.92), chegaremos a

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2}) \quad , \quad (1.96)$$

e se lembrarmos que $a = (1+z)^{-1}$, a equação (1.96) pode ser trivialmente expressa para o parâmetro de Hubble $H(z)$. Também pode ser escrita em termos do parâmetro ω da equação de estado (1.78), que para um universo plano ($\Omega_k = 0$) fica elegantemente escrita como

$$H^2(z) = H_0^2 \sum_i \Omega_{i,0} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \quad . \quad (1.97)$$

Agora, expressaremos a equação (1.96) explicitamente em termos do fator de escala $a(t)$. Para isso, lembremos que $H = \dot{a}/a$ e da equação de vínculo (1.94), e chegamos a

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}) \quad . \quad (1.98)$$

É conveniente introduzir uma nova variável adimensional

$$\hat{t} = H_0(t - t_0) \quad , \quad (1.99)$$

que mede o tempo cósmico relativo a época atual em termos do “tempo de Hubble” H_0^{-1} .

Em termos dessa nova variável, (1.98) torna-se

$$\left(\frac{da}{d\hat{t}} \right)^2 = \Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0} \quad . \quad (1.100)$$

A equação (1.100) só admite soluções analíticas para casos muito específicos. Podemos obter soluções das equações (1.73) em termos do parâmetro ω . Uma delas é a conhecida (1.79), e outras decorrentes para $k = 0$ são

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad , \quad (1.101)$$

$$H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)(t - t_0)} \quad , \quad (1.102)$$

em que t_0 é uma constante de integração. Notemos que a solução acima não é válida para $\omega = -1$.

1.11 Modelos cosmológicos analíticos

Para casos gerais, só podemos resolver (1.100) e obter $a(t)$ numericamente, no entanto, para casos específicos, podemos obter soluções analíticas. Esses modelos cosmológicos analíticos, para casos de constante cosmológica nula, são chamados *modelos de Friedmann*. Para casos com constante cosmológica não nula, esses modelos são conhecidos como *modelos de Lemâitre* [22]. Esses modelos tem uma origem em um Big-Bang em que $a(0) = 0$.

- *Modelo de Friedmann somente com matéria* ($\Omega_{\Lambda,0} = 0$, $\Omega_{r,0} = 0$): Nesse caso (1.96) torna-se

$$\dot{a}^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-1} + 1 - \Omega_{m,0}) \Rightarrow t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \left[\frac{a'}{\Omega_{m,0} + (1 - \Omega_{m,0})a'} \right]^{1/2} da' ,$$

que para o caso plano, $\Omega_{m,0} = 1$ é

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} , \quad (1.103)$$

solução essa que pode também ser obtida (a menos de constantes de proporcionalidade) de (1.101). Esse caso particular é conhecido como modelo de *Einstein-de-Sitter* (EdS). Para $\Omega_{m,0} > 1$ ($k = 1$) a integral (1.103) pode ser feita fazendo a substituição $a' = \Omega_{m,0}/(\Omega_{m,0} - 1) \sin^2(\psi/2)$ com ψ variando entre o intervalo $[0, \pi]$. Dessa forma, obtemos

$$a = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)} (1 - \cos \psi) , \quad t = \frac{\Omega_{m,0}}{2H_0(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} (\psi - \sin \psi) , \quad (1.104)$$

o que corresponde a uma curva cicloide para $a(t)$. Para $\Omega_{m,0} < 1$ ($k = -1$), a integral (1.103) pode ser feita fazendo $a' = \Omega_{m,0}/(\Omega_{m,0} - 1) \sinh^2(\psi/2)$, e obtemos

$$a = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)} (\cosh \psi - 1) , \quad t = \frac{\Omega_{m,0}}{2H_0(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} (\sinh \psi - \psi) . \quad (1.105)$$

- *Modelo de Friedmann somente com radiação* ($\Omega_{\Lambda,0} = 0$, $\Omega_{m,0} = 0$): Nesse caso (1.96) fica

$$\dot{a}^2 = H_0^2(\Omega_{r,0}a^{-2} + 1 - \Omega_{r,0}) \Rightarrow t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \left[\frac{a'}{\Omega_{r,0} + (1 - \Omega_{r,0})a'^2} \right]^{1/2} da' ,$$

que para o caso $\Omega_{r,0}$ ($k = 0$) fica

$$a(t) = (2H_0t)^{1/2} , \quad (1.106)$$

que também pode ser obtida de (1.101) a menos de constantes de proporcionalidade.

Para os casos $\Omega_{r,0} > 1$ ($k = 1$) e $\Omega_{r,0} < 1$ ($k = -1$), a integral (1.106) resulta em

$$a(t) = (2\Omega_{r,0}^{1/2}H_0t)^{1/2} \left[1 + \frac{1 - \Omega_{r,0}}{2\Omega_{r,0}^{1/2}}H_0t \right]^{1/2} . \quad (1.107)$$

- *Modelo de Friedmann espacialmente plano* ($\Omega_{\Lambda,0} = 0$, $\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} = 1$): Nesse caso (1.96) fica

$$\dot{a}^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2}) \Rightarrow t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{a'}{(\Omega_{m,0}a' + \Omega_{r,0})^{1/2}} da' ,$$

que pode ser integrada fazendo a substituição $y = \Omega_{m,0}a' + \Omega_{r,0}$ para se obter

$$H_0t = \frac{2}{3\Omega_{m,0}^2} [(\Omega_{m,0}a + \Omega_{r,0})^{1/2}(\Omega_{m,0}a - 2\Omega_{r,0}) + 2\Omega_{r,0}^{3/2}] . \quad (1.108)$$

- *Modelo de Lemaître espacialmente plano somente com matéria* ($\Omega_{r,0} = 0$, $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$): Para esse modelo, a equação (1.96) fica escrita como

$$\dot{a}^2 = H_0^2[(1 - \Omega_{\Lambda,0})a^{-1} + \Omega_{\Lambda,0}a^{-2}] \Rightarrow t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \left[\frac{a'}{(1 - \Omega_{\Lambda,0})a' + \Omega_{\Lambda,0}a'^4} \right]^{1/2} da' ,$$

que pode ser feita usando a substituição $y^2 = a^3|\Omega_{\Lambda,0}|/(1 - \Omega_{\Lambda,0})$ o que nos dá

$$H_0t = \frac{2}{3\sqrt{|\Omega_{\Lambda,0}|}} \int_0^{\sqrt{a^3|\Omega_{\Lambda,0}|/(1 - \Omega_{\Lambda,0})}} \frac{dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} ,$$

em que o sinal positivo no integrando corresponde ao caso $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ e o sinal negativo corresponde ao caso $\Omega_{\Lambda,0} < 0$. Podemos integrar facilmente, obtendo

$$H_0t = \frac{2}{3\sqrt{|\Omega_{\Lambda,0}|}} \begin{cases} \sinh^{-1} \sqrt{a^3|\Omega_{\Lambda,0}|/(1 - \Omega_{\Lambda,0})} & \text{se } \Omega_{\Lambda,0} > 0 \\ \sin^{-1} \sqrt{a^3|\Omega_{\Lambda,0}|/(1 - \Omega_{\Lambda,0})} & \text{se } \Omega_{\Lambda,0} < 0 \end{cases} . \quad (1.109)$$

- *Modelo de de Sitter* ($\Omega_{m,0} = \Omega_{r,0} = 0$, $\Omega_{\Lambda,0} = 1$): Modelo que é espacialmente plano ($k = 0$) para o qual (1.96) fica dada por

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \quad ,$$

o que nos dá de imediato que

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} = e^{\sqrt{\Lambda/3}(t-t_0)} \quad .$$

É importante reparar que este modelo não tem uma singularidade em um tempo finito no passado.

1.12 Lookback time e a idade do universo

Ao termos acesso aos valores dos parâmetros cosmológicos H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$, podemos determinar em função dos mesmos, certas características do universo descrito pelo modelo. Nesta dissertação daremos enfoque ao “lookback time” e à idade do universo, como eles podem ser obtidas em função dos parâmetros cosmológicos e como eles podem ser usados para impor vínculos aos modelos cosmológicos. Mas antes, falaremos um pouco sobre métodos de datação de objetos astronômicos e como eles são usados para fornecer um limite mínimo para a idade do universo e para podermos dizer quais modelos cosmológicos fornecem uma descrição viável para o universo observado e quais não.

Como metais (elementos mais pesados que o hélio) encontrados na parte externa das estrelas surgem principalmente de estrelas mais novas que explodiram como supernovas, então as estrelas mais antigas devem apresentar uma abundância menor de metais. Essa população de estrelas são conhecidas como de População-II, e são encontradas no halo da Via láctea e em especial, em aglomerados globulares⁵. Existem três maneiras padrões de se estimar a idade de estrelas velhas: a nucleocronologia, as curvas de resfriamento de anãs brancas e o desvio da sequência principal.

⁵Aglomerados globulares são sistemas estelares compactos contendo $\sim 10^5$ estrelas. Essas estrelas contém uma abundância muito baixa de elementos pesados (de 1/10 a 1/100 da encontrada no Sol) e se distribuem esfericamente ao redor do centro da galáxia, o que nos leva a crer que são os primeiros objetos formados na galáxia.

O método da nucleocronologia, que é o mesmo utilizado para se datar a idade de rochas na Terra, se faz utilizando decaimento radioativo. A idade da estrela é estimada usando a abundância de núcleos radioativos duradouros com uma meia-vida conhecida. A dificuldade em aplicar este método está em determinar a abundância original do elemento radioativo. Uma aplicação muito bem sucedida deste método foi a mensuração da abundância de tório na estrela *CS22892*, em que foi obtida uma idade de $15.2 \pm 3.7 \text{ Gyr}$ [40, 41].

Outro método para se estimar idades de estrelas é pelo desvio da sequência principal. As estrelas que estão fundindo hidrogênio em hélio em seus núcleos são ditas de *sequência principal*, e há uma relação característica entre sua luminosidade absoluta e a temperatura superficial. Quando acaba o hidrogênio do núcleo, a fundição de hidrogênio continua ao redor de um núcleo temporariamente inerte de hélio. Quanto mais massiva uma estrela durante a sequência principal, mais brilhante ela é. Quando a estrela sai da sequência principal, aumenta sua luminosidade e diminui a temperatura da superfície. Estrelas mais massivas tem vidas mais curtas e evoluem mais rapidamente que estrelas menos massivas. Assim, à medida que o tempo passa, as estrelas de sequência principal presentes em um aglomerado com diferentes massas, mas da mesma idade apresentam um desvio para luminosidades cada vez mais baixas como mostra a figura (1.1).

Simploriamente falando, a luminosidade das estrelas no ponto de desvio da sequência principal é inversamente proporcional à idade do aglomerado. As incertezas nesse método se devem a incertezas nos modelos de evolução estelar. Outra dificuldade desse método é que ele exige medidas muito precisas da distância até as estrelas. Um erro de 10% na distância até o aglomerado resulta em um erro de 20% na idade estimada (em contrapartida, o mesmo erro numa medida de distâncias resulta em um erro de 10% na estimativa de H_0) [42]. Usando medidas de distâncias de nove aglomerados globulares pelo satélite Hipparcos, estimou-se a idade da nossa galáxia em $13.2 \pm 2.0 \text{ Gyr}$ [43].

A idade de alguns aglomerados globulares em bilhões de anos (Gyr) obtidas por esse método foram de 11.5 ± 1.3 , 12 ± 1 , 11.8 ± 1.2 , 14.0 ± 1.2 , 12 ± 1 e 12.2 ± 1.8 ⁶. Segundo a referência [25], que considerou uma série de indicadores de distâncias e um estudo de

⁶Para referências, ver [25]

Figura 1.1: Diagrama cor-magnitude do aglomerado globular M15. O eixo vertical representa a magnitude (luminosidade) das estrelas e o eixo horizontal representa a cor (temperatura superficial) das estrelas, com as estrelas mais frias ficando a direita [25].

Monte Carlo para os possíveis erros dos modelos teóricos de evolução estelar, a idade para os aglomerados globulares mais antigos é de 11.5 ± 1.3 Gyr, implicando em uma idade mínima para o universo de $t \geq 9.5$ Gyr com um nível de confiança de 95%.

Outro método utilizado para estimar idades são as curvas de resfriamentos das anãs brancas. Anãs brancas são o estágio final da evolução de estrelas menos massivas que $\sim 8M_{\odot}$ ⁷. Quanto mais antiga a anã branca, mais ela se resfria e mais fraco torna-se o seu brilho. Incertezas nesse método estão relacionadas a dificuldades nos modelos teóricos de anãs brancas. Também há dificuldades observacionais, pois como o brilho delas é muito fraco, são difícil de serem observadas, sendo que a maioria das anãs brancas conhecidas se situam na vizinhança solar. No entanto, com o Telescópio Espacial Hubble (HST), é possível observar anãs brancas na vizinhança de aglomerados globulares.. Usando esse método, Richer *et al* [44] e Hansen *et al* [45] obtiveram a idade para o aglomerado globular M4 em $t = 12.7 \pm 0.7$ Gyr.

⁷O termo $M_{\odot}$ significa “massas solares” sendo que $1M_{\odot} = 1.989g$.

Falamos apenas da medida de objetos na Via Láctea. No entanto, é possível estimar a idade de outras galáxias em grandes redshifts (em que estaremos interessados para vincular modelos cosmológicos) no momento em que a luz que agora observamos foi emitida por essas galáxias. Não é possível distinguir estrelas individuais dessas galáxias, mas seus espectros podem fornecer uma boa estimativa de suas idades. Quanto mais avermelhada a galáxia, mais estrelas azuis deixaram a sequência principal, e, portanto, mais antiga é a galáxia [24].

Um modelo cosmológico viável deve prever uma idade para o universo que seja mais antiga do que os objetos mais antigos conhecidos. Já havíamos mostrado que se uma partícula comóvel (galáxia) emite um fóton em um tempo cósmico t e é recebido por um observador em $t = t_0$, então o “lookback time” $t_0 - t$ como função do redshift z é dado por

$$t_0 - t = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')H(z')} \quad . \quad (1.110)$$

Da equação (1.96) e notando que $a = (1+z)^{-1}$, obtemos o resultado

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2] \quad . \quad (1.111)$$

Desta forma, o lookback time de um objeto comóvel é dado por

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z')^3 + \Omega_{r,0}(1+z')^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z')^2}} \quad . \quad (1.112)$$

Para qualquer modelo cosmológico com uma origem em um big bang, a idade do universo é dada como o intervalo de tempo cósmico na origem em que $a(t) = 0$ e a época presente $t = t_0$. No big bang $z \rightarrow \infty$, e obtemos a idade do universo resolvendo a integral (1.112), que em geral só pode ser resolvida numericamente [22].

Posteriormente, veremos como o lookback time nos fornece uma forte evidência para a hipótese de que uma componente “escura” domina o universo (em torno de 70% de sua constituição) que chamaremos de *energia escura*. Também mostraremos como o lookback time de objetos em altos redshifts pode ser usado para impor vínculos a modelos cosmológicos.

Capítulo 2

Modelos de Energia Escura

2.1 Introdução

A partir dos trabalhos de Perlmutter *et al* [14] e Riess *et al* [44] com supernovas tipo IA, temos evidências de que o universo está passando por uma fase de expansão acelerada. Por outro lado, observações do espectro de anisotropias da radiação cósmica de fundo (RCF), como BOOMERanG [46, 47] e MAXIMA [48] apontam para o fato de que o universo possui uma geometria plana. Observações de RCF combinadas com observações de aglomerados de galáxias nos indicam que a matéria não relativística contribui cerca de 30% da densidade crítica do universo. No contexto da teoria da relatividade geral, o 70% restante da densidade de energia do universo se deveria a energia escura, uma componente com pressão negativa e que seria responsável pela expansão acelerada do universo.

Neste capítulo, apresentaremos as principais evidências observacionais para uma energia escura; como o teste da idade do universo, o da distância luminosa e os vínculos de RCF e estruturas em larga escala. Depois exploraremos os modelos de energia escura, tais como o da constante cosmológica, conhecido como Λ CDM, os modelos de campos escalares (quintessência, *phantom*). Por fim, falaremos dos modelos fenomenológicos de interação matéria/energia escura.

2.2 Evidência observacionais para energia escura

2.2.1 Idade do universo

Como vimos na última seção do capítulo anterior, para que um modelo cosmológico seja viável, é necessário que ele preveja uma idade para o universo que seja superior a idade dos objetos mais antigos conhecidos.

Vimos que o trabalho de Chaboyer [25], estabeleceu a idade para os aglomerados globulares mais antigos como 11.5 ± 1.3 Gyr, implicando em uma idade mínima para o universo de $t \geq 9.5$ Gyr. Também falamos do trabalho de Richer *et al* [44] e Hansen *et al* [45] com curvas de resfriamento de anãs brancas, obtendo a idade para o aglomerado globular M4 em $t = 12.7 \pm 0.7$ Gyr. O trabalho de Jimenez *et al* [49] determinou a idade dos aglomerados globulares da Via Láctea em $t = 13.5 \pm 2$ Gyr. Assim, um modelo cosmológico viável tem que satisfazer uma idade para universo superior a $t > 11 - 12$ Gyr. Os dados mais recentes do satélite Planck (que assume o modelo Λ CDM) estabelecem uma idade para o universo de 13.813 ± 0.058 Gyr [30].

Já vimos que a idade do universo pode ser calculada por (1.112) fazendo $t \rightarrow \infty$. É uma boa aproximação desprezarmos a contribuição da radiação na equação (1.112) uma vez que o período dominado pela radiação é muito mais curto que a idade total do universo. Então, fazemos $\Omega_{r,0} = 0$ quando calculamos a idade do universo.

Para o caso de universo plano somente com matéria, a idade do universo é dada por (1.103). Lembrando que $a_0 = 1$, então $t_0 = 2/3H_0$. As observações do *Hubble Space Telescope key project* [50], o valor do inverso da constante de Hubble é dado por $H_0^{-1} = 9.776h^{-1}Gyr$ com $0.64 < h < 0.80$. Com esse valor de H_0^{-1} , a equação (1.103) nos dá $t_0 = 8 - 10$ Gyr, o que não satisfaz o limite mínimo imposto pela idade dos objetos mais antigos conhecidos, que é $t_0 > 11 - 12$ Gyr. Dessa forma, o modelo somente com matéria se revela inviável do ponto de vista da idade de objetos astrofísicos.

Para o caso de um universo aberto $\Omega_{m,0} < 1$, a idade deste é dada por (1.105). Como já vimos, as observações de RCF estabelecem que a curvatura do universo é muito próxima de zero, i.e. $|\Omega_{k,0}| = |\Omega_{m,0} - 1| \ll 1$ [51]. Assim, com $\Omega_{m,0} \simeq 1$, a idade do universo não se torna muito maior que a das estrelas mais antigas.

Figura 2.1: A idade do universo (em unidades de H_0^{-1} para (i) universo plano com $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ (curva sólida) e (ii) universo aberto (curva traçada). temos o limite de $t = 11$ Gyr imposto pelas estrelas mais antigas. O modelo com constante cosmológica é o mais consistente com esse limite. Imagem retirada de [26]

O problema das idades é bastante aliviado quando consideramos um universo plano com constante cosmológica, em que a idade do universo fica dada por (1.109). Com $h = 0.72$, $\Omega_{m,0} = 0.3$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$, temos uma idade para o universo de $t_0 = 13,1$ Gyr, o que satisfaz o limite $t > 11 - 12$ Gyr. Dessa forma, a presença de uma constante cosmológica Λ em um universo plano resolve elegantemente o problema das idades.

Recentemente, o problema das idades tem vindo novamente à tona, como mostrado em Wang *et al* [52]. Os resultados de dados fotométricos adquiridos do sistema Beijing-Arizona-Taiwan-Connecticut com um modelo sintético atualizado permitiram estimar a idade de 35 aglomerados globulares na galáxia de Andrômeda (M31), como mostrados em Ma *et al* [53, 54]. Posteriormente, as idades de outros 104 aglomerados globulares na galáxia M31 foram obtidos pelo mesmo grupo de pesquisa. Desses resultados, havia 9 aglomerados globulares mais antigos do que a idade do universo estabelecida pelas observações do 7º ano do WMAP, que é de 13.75 Gyr.

Também se tem observações de objetos a altos redshifts, como o quasar APM 08279+5255 em $z = 3.91$ [55–57], cuja idade prevista pelo modelo Λ CDM para esse objeto é de $t = 1.63$ Gyr, enquanto o limite mínimo para a idade do quasar é de 1.8 Gyr [57]. Para boas revisões sobre o problema das idades, ver [52, 58].

2.2.2 Supernovas tipo IA

A expansão acelerada do universo foi evidenciada em 1998 pelos grupos de Perlmutter *et al.* [14] (Supernova Cosmology Project(SCP)) e Riess *et al.* [15] (High- z Supernova Team (HSST)) a partir das observações de supernovas tipo IA (SN IA). Antes de discutir propriamente os resultados desses dois grupos, iremos introduzir o conceito de *distância luminosa*.

Existem diferentes formas de se definir distâncias em um universo em expansão. Temos a distância comóvel que não muda durante a evolução do universo e a distância física que é dada por $a(t)\chi$ sendo χ a coordenada comóvel do objeto. No entanto, a distância física não pode ser medida diretamente, e temos de dar uma definição operacional para distância. Uma dessas definições é através da luminosidade de uma estrela, que se chama de distância luminosa d_L .

No espaço-tempo de Minkowski, a luminosidade absoluta L_S de uma fonte e o fluxo de energia $\mathcal{F}$ a uma distância d da mesma são relacionadas por $\mathcal{F} = L_S/4\pi d^2$. Generalizando para um universo em expansão, temos a distância luminosa definida como

$$d_L^2 \equiv \frac{L_S}{4\pi\mathcal{F}} \quad . \quad (2.1)$$

Consideremos um objeto com luminosidade absoluta L_S localizado em uma coordenada comóvel χ_S de um observador em $\chi = 0$. A energia emitida do objeto em um intervalo de tempo Δt_1 é denotada ΔE_1 , enquanto a energia que chega a uma esfera de raio χ_S é denotada como ΔE_0 . As energias ΔE_1 e ΔE_0 são proporcionais as frequências da luz em $\chi = \chi_S$ e $\chi = 0$, repectivamente, i.e. $\Delta E_1 \propto \nu_1$ e $\Delta E_0 \propto \nu_0$. As luminosidades L_s e L_0 são dadas por

$$L_S = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} \quad , \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \quad . \quad (2.2)$$

A velocidade da luz é dada por $c = \nu_1 \lambda_1 = \nu_0 \lambda_0$, em que λ_1 e λ_0 são os comprimentos de onda em $\chi = \chi_S$ e $\chi = 0$ respectivamente. Da equação (1.61), temos que

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z \quad , \quad (2.3)$$

em que também usamos que $\nu_0 \Delta t_0 = \nu_1 \Delta t_1$. Combinado as equações (2.2) e (2.1), obtemos

$$L_S = L_0(1 + z)^2 \quad . \quad (2.4)$$

Da métrica (1.59), encontramos que a área de uma esfera em $t = t_0$ é dada por $S = 4\pi a_0^2 S^2(\chi_S)$. Portanto, o fluxo de energia observado é

$$\mathcal{F} = \frac{L_0}{4\pi a_0^2 S^2(\chi_S)} \quad . \quad (2.5)$$

Substituindo as equações (1.71), (2.5) em (2.1), obtemos a distância luminosa em um universo em expansão:

$$d_L = a_0 S(\chi_S)(1 + z) \quad . \quad (2.6)$$

Em uma métrica FRW plana, com $S(\chi) = \chi$, encontramos

$$d_L = \frac{1 + z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad , \quad (2.7)$$

em que $E(z) = H(z)/H_0$. Usando a expressão (1.97) para o parâmetro de Hubble $H(z)$, obtemos que a distância luminosa em uma geometria plana é dada por

$$d_L = \frac{1 + z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0}(1 + z')^{3(1+\omega_i)}}} \quad . \quad (2.8)$$

Na Figura (2.2) temos a distância luminosa (2.7) para dois componentes de um universo plano (poeira não pressurizada com $\omega_m = 0$ e constante cosmológica com $\omega_\Lambda = -1$ satisfazendo a equação de vínculo (1.94). A distância luminosa $d_L \simeq z/H_0$ para pequenos valores de z , e se torna maior quando a constante cosmológica está presente.

Figura 2.2: Distância luminosa d_L em termos de unidades de H_0^{-1} para dois componentes de um universo plano com poeira ($\omega_m = 0$) e constante cosmológica ($\omega_\Lambda = -1$). Temos a plotagem $H_0 d_L$ para vários valores de $\Omega_{\Lambda,0}$. Retirado de [26]

Para se medir a distância luminosa em astronomia, se redefine o fluxo de energia $\mathcal{F}$ e a luminosidade intrínseca L_S em termos de seus logaritmos na base 10. O fluxo de energia $\mathcal{F}$ é expresso em termos da *magnitude bolométrica aparente* m_{bol} , ou simplesmente m , definida como

$$\mathcal{F} = 10^{-2m/5} \times 2,52 \times 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \text{ s} \quad , \quad (2.9)$$

enquanto a *magnitude bolométrica absoluta* M é definida como a magnitude bolométrica aparente que a fonte teria a uma distância de 10 pc, e é dada por

$$L_S = 10^{-2M/5} \times 3,02 \times 10^{35} \text{ erg/s} \quad . \quad (2.10)$$

Dessa forma, o *módulo da distância* $m - M$ pode ser definido como

$$d_L = 10^{1+(m-M)/5} \text{ pc} \quad , \quad (2.11)$$

que pode ser invertido, resultando na expressão

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 \text{ pc}} \right) + 25 \quad . \quad (2.12)$$

As supernovas tipo IA (SN IA) são observadas quando uma anã branca que está e, um sistema binário ultrapassa o limite de Chandasekhar após absorver gás da estrela companheira. Acredita-se que as SN IA se formam da mesma maneira em qualquer lugar do universo, o que significa que elas tem uma magnitude absoluta M comum independente de redshift z . Dessa forma, elas podem ser tratadas como uma “vela padrão” ideal. A magnitude aparente m e o redshift z podem ser medidos observacionalmente.

Primeiro tomemos algumas supernovas em baixos redshifts, para as quais podemos usar a aproximação $d_L(z) \simeq z/H_0$ para $z \ll 1$. Consideremos as seguintes supernovas: 1992P em $z = 0.026$ e $m = 16.08$, 1990O com $z = 0.03$ e $m = 16.26$ e 1992bg com $z = 0.036$ e $m = 16.66$. Usando a expressão aproximada da distância luminosa para baixos redshifts e substituindo os valores de redshifts e magnitudes aparentes na equação (2.12), se obtém as respectivas magnitudes absolutas $M = -19.09$, $M = -19.29$ e $M = -19.28$ [14], em que se usou o valor $H_0^{-1} = 2998h^{-1}Mpc$ com $h = 0.72$. Com isso, vemos que o valor da magnitude absoluta para SN IA é de $M \simeq -19$ e generalizamos esse valor para SN IA em redshifts maiores.

O grupo de Perlmutter *et al* descobriu 42 SN IA na faixa de redshift $z = 0.18 - 0.83$ [14] enquanto Riess *et al* [15, 59] encontrou 14 SN IA na faixa de $z = 0.16 - 0.62$ e 34 SN IA próximas. Assumindo um universo plano ($\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$), Perlmutter *et al* encontraram $\Omega_{m,0} = 0.28_{-0.08}^{+0.09}$ (1σ estatístico) $_{-0.04}^{+0.05}$ (sistemática identificada), desta forma mostrando que cerca de 70% da densidade de energia do universo corresponde à energia escura.

Em 2004 Riess *et al* [60]. mediram 16 SN-IA em altos redshifts com $z > 1,25$ com o Telescópio Espacial Hubble (TEH). Incluindo os dados de 170 SN IA previamente conhecidas, eles mostraram que a expansão universo exibiu uma transição da desaceleração para a aceleração com um nível de confiança $> 99\%$. O melhor ajuste da densidade de matéria encontrado foi $\Omega_{m,0} = 0.29_{-0.03}^{+0.05}$ (a barra de erro é de 1σ).

Na referência [61], é feita a análise da verossimilhança usando os dados de SN IA de Tonry *et al.* [62] com os de Riess *et al* [60]. Na figura (2.3), temos os valores observacionais da distância luminosa d_L versus o redshift z junto as curvas teóricas derivadas da equação (2.8). Isso mostra que o modelo de universo dominado pela matéria ($\Omega_{m,0} = 1$) não fitam

os dados. O valor de melhor ajuste foi $\Omega_{m,0} = 0.31 \pm 0.08$ o que é consistente com a análise de Riess *et al.*

Figura 2.3: A distância luminosa $H_0 d_L$ (em escala logarítmica) versus o redshift z para modelos cosmológicos planos. Os pontos pretos vem dos dados de Riess *et al.* enquanto que os pontos vermelhos vem de dados do TEH. As três curvas mostram os valores teóricos $H_0 d_L$ de (i) $\Omega_{m,0} = 0, \Omega_{\Lambda,0} = 1$ (ii) $\Omega_{m,0} = 0.31, \Omega_{\Lambda,0} = 0.69$ (iii) $\Omega_{m,0} = 1, \Omega_{\Lambda,0} = 0$. Retirado de [26].

A descoberta da expansão acelerada do universo a partir dos dados de supernovas tipo IA foi a maior surpresa desde que Edwin Hubble descobriu a expansão do universo em 1929. Por essa descoberta, Saul Perlmutter, Adam Riess e Brian Schmidt ganharam o prêmio Nobel de física em 2011.

Nos últimos anos, os “*surveys*” de SN IA tem recebido muita atenção [62–64]. Há muitos grupos de pesquisa focados nessa área, como o Higher-Z Team [60, 65], o Supernova Legacy Survey (SNLS) [66, 67], o ESSENCE (Equation of State: SuperNovae trace Cosmic Expansion) [68], o Nearby Supernova Factory (NSF) [69], o Carnegie Survey Project (CSP) [70], o Lick Observatory Supernova Search (LOSS) [71] e o Sloan Digital Sky Survey (SDSS) SN Survey [72], etc.

Em 2008, o Supernova Cosmology Project (SCP) forneceu um método de analisar os dados de SN IA de maneira homogênea. De uma amostra de 414 SN IA, eles selecio-

naram 307 SN IA de alta qualidade, compondo o conjunto de dados “União” [73]. Em 2009, o Center for Astrophysics (CfA) SN project combinou a amostra de 90 SN IA a baixos redshifts com o conjunto de dados União e obtiveram o que chamaram de amostra “Constituição” [74]. Em 2010, o SCP atualizou sua amostra de SN IA e lançou o conjunto de dados “União 2” que constitui de 557 SN IA [75]. Além disso, mais recentemente, lançaram o conjunto de dados de SN IA “União 2.1” constituindo de 580 SN IA [76].

Além das SN IA, outros objetos tem sido propostos como “velas padrão”, tais como as radio galáxias FRIIb [77, 78] e as Explosões de Raios Gamma (em inglês, GRB), que permitem medir a razão de expansão do universo em redshifts muito altos ($z > 5$) [79].

2.2.3 Vínculos de RCF e ELE

A Radiação Cósmica de Fundo (RCF) é a radiação residual da época da recombinação, quando os elétrons foram capturados pelos núcleos atômicos e os fótons passaram a se propagar livremente. A RCF foi descoberta por Penzias e Wilson em 1964 [11], o que lhes rendeu o prêmio Nobel de física em 1978. A RCF forneceu a grande evidência para a teoria do Big Bang. Em 1989 o primeiro satélite para realizar medidas da RCF foi lançado. O Cosmic Background Explorer (COBE) descobriu as anisotropias da RCF [80] e seus principais pesquisadores, Smoot e Mather receberam o Nobel de física em 2006. Em 1999, os experimentos TOCO, BOOMERanG e MAXIMA mediram as oscilações acústicas do espectro de potências das anisotropias da RCF ¹. Em 2001, a segunda geração de satélites de RCF, o Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) mediu precisamente o espectro da RCF e vários parâmetros cosmológicos com alta precisão [51]. O seu sucessor, o satélite Planck, foi lançado em 2009 e seus primeiros resultados foram publicados recentemente [30].

Medidas de RCF feitas pela sonda WMAP vinculam a curvatura do universo em $|\Omega_{k,0}| = |\Omega_{total,0} - 1| = 0.030^{+0.026}_{-0.025} \ll 1$ [81]. Dados do WMAP [51] que assumem a equação de estado $\omega_{DE} = -1$ para energia escura, e combinam dados do WMAP com os do SNLS, implicam em $\Omega_{k,0} = -0.015^{+0.02}_{-0.016}$ consistentes com um universo plano. Combinando com dados do HST key project provém vínculos ainda mais precisos de $\Omega_{k,0} = -0.010^{+0.016}_{-0.009}$ e

¹Referências em [28]

$\Omega_{\Lambda,0} = 0.72 \pm 0.04$. As medidas de RCF mais recentes feitas pelo satélite Planck dão uma densidade de energia escura de $\Omega_{\Lambda,0} = 0.686 \pm 0.020$ [30].

Figura 2.4: As regiões de confiança $\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$ vinculadas das observações de SN IA, RCF e ELE. Também temos a região de confiança esperada do satélite SNAP para um universo plano com $\Omega_{m,0} = 0,28$. Imagem retirada de [26].

Na figura (2.4) temos as regiões de confiança de SN IA, RCF (WMAP1) e de estruturas em larga escala (ELE) como aglomerados de galáxias [82]. Vemos que um universo somente com matéria sem constante cosmológica está descartado. O que esses três observáveis cosmológicos reforçam é que o universo é dominado por uma energia escura com $\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0,7$ e $\Omega_{m,0} \simeq 0,3$. Além disso, como já havíamos discutido antes, a matéria bariônica constitui apenas 4% do conteúdo de matéria do universo. O restante (27%) é constituído pela matéria escura fria (do inglês, CDM), com $\omega = 0$. A energia escura possui $\omega < -1/3$ e dá origem à expansão acelerada.

Além dos testes observacionais discutidos, temos também as observações de oscilações acústicas de bárions (OAB), lentes gravitacionais fracas, observações de raios-X e medidas do parâmetro de Hubble; que fornecem evidências para um universo dominado pela energia escura.

Até aqui, assumimos que a equação de estado da energia escura é constante ($\omega_\Lambda = -1$). Esse é o chamado modelo Λ CDM. No entanto, modelos em que a energia escura é originada de um campo escalar dinâmico têm sido propostos.

2.3 Constante Cosmológica

A constante cosmológica Λ foi originalmente introduzida por Einstein em 1917 para obter um modelo de universo estático. No entanto, após a descoberta da expansão do universo por Hubble em 1929, ela foi abolida. Nas equações de Einstein, ela é introduzida ao adicionarmos um termo proporcional a métrica (lembrando que $g^\mu{}_\nu = 0$) e obtendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad ,$$

e que pode ser invertida da forma (1.72), e na presença dela, as equações de campo são as equações de Friedmann-Lemaître (1.73). Vemos da primeira equação de Friedmann-Lemaître que o termo da constante cosmológica tem um sinal positivo, atuando assim como uma força repulsiva contrária a gravidade.

Já vimos que a constante cosmológica está relacionada a uma energia do vácuo. Ela é obtida ao nos perguntarmos qual o tensor energia-momento que pode ser construído somente com a métrica, cuja a resposta é dada por (1.87), do qual obtemos uma densidade de energia e pressão do vácuo como

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad , \quad P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad ,$$

com $\omega_\Lambda = -1$, satisfazendo a condição para $\ddot{a} > 0$ que é $\omega < -1/3$. O vácuo tem a estranha propriedade o fato que sua densidade de energia permanece constante com a expansão do universo.

Por essas propriedades que a constante cosmológica é o candidato mais simples para explicar a expansão acelerada do universo. No entanto, veremos que a interpretação da constante cosmológica como estando relacionada a uma energia do vácuo é problemática.

São o *problema do ajuste fino* e o *problema da coincidência*.

2.3.1 O problema do ajuste fino

Podemos ver da segunda equação de campo (1.73), que para Λ dar origem a uma expansão acelerada, ela deve ser da ordem do quadrado do presente valor do parâmetro de Hubble, o que significa que

$$\Lambda \approx H_0^2 = (2,13h \times 10^{-42} GeV)^2 \quad . \quad (2.13)$$

Isso corresponde a uma densidade de energia crítica ρ_Λ

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda m_{pl}^2}{8\pi} \approx 10^{-47} GeV^4 \quad , \quad (2.14)$$

em que $m_{pl} = G^{-1} = 1,22 \times 10^{19} GeV$ é a massa de Planck.

Admitindo que a densidade de energia (2.14) venha da energia do vácuo $\langle \rho \rangle$ de um espaço vazio. A energia de ponto zero de um campo de massa m , momento k e frequência ω é $E = \omega/2 = \sqrt{k^2 + m^2}/2$ (em unidades de $\hbar = c = 1$). Somando sobre todos os possíveis valores de k , obtemos a densidade de energia do vácuo

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Essa integral exibe divergências no ultravioleta: $\rho_{vac} \propto k^4$. Entretanto, esperamos que a teoria quântica de campos seja válida até uma escala de corte $k_{max} \gg m$ em que a integral (2.15) é finita:

$$\rho_{vac} \approx \frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \quad . \quad (2.16)$$

Espera-se que os efeitos da Relatividade Geral só aparecerão na escala da massa de Planck m_{pl} . Nesse caso, tomamos a massa de Planck como escala de corte $k_{max} = m_{pl}$, encontramos que a densidade de energia do vácuo é estimada em

$$\rho_{vac} \approx 10^{74} GeV^4 \quad , \quad (2.17)$$

que é de cerca de 10^{121} ordens de magnitude maior que o valor observado dado na equação (2.14). Mesmo na escala de energia da Cromodinâmica Quântica (QCD), se obtem $\rho_{vac} \approx 10^{-3} GeV^4$, o que é muito maior que ρ_Λ [26].

Pode-se aliviar tamanha discrepância pela adição de contratermos na densidade de energia do vácuo, no entanto eles precisariam estar finamente ajustados para que se obtenha um valor de ρ_{vac} mais condizente com a densidade de energia do vácuo observada no universo.

Essa razão entre a densidade de energia prevista para o vácuo e a observada pode ser mais naturalmente contornado se supusermos a *supersimetria* (SUSY), em que para cada grau de liberdade bosônico, existe um fermiônico correspondente, de tal maneira que suas contribuições para a energia do ponto zero desaparecem. Se a supersimetria é quebrada, o que certamente aconteceu, pois não vivemos em um universo supersimétrico, então a energia do vácuo terá um valor não nulo. Sabe-se que a supersimetria deve ter quebrado em uma escala de $M_{SUSY} \approx 10^3 GeV$, o que reduz a razão em 60 ordens de magnitude, o que ainda não é suficiente para reduzir o valor previsto ao observado [29].

2.3.2 O problema da coincidência

Outro problema em descrever a energia escura como uma constante cosmológica está relacionado ao valor atual de sua densidade de energia, que é comparável a densidade de energia da matéria, o que é estranho, pois a princípio os dois valores não estão relacionados. Em outras palavras, o valor de $\Omega_{\Lambda,0}$ é comparável ao valor de $\Omega_{m,0}$ sem nenhuma razão óbvia.

A densidade de matéria $\rho_m = \rho_{m,0}(1+z)^3$ coincide com a densidade cosmológica ρ_Λ em

$$z_{coinc} = \left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{1 - \Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} - 1 \quad , \quad (2.18)$$

que, para $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$, $z_{coinc} \approx 0,3$, o que é muito próxima da época presente ($z = 0$). Entender por que esses valores são tão próximos justamente hoje é o que chamamos de problema da coincidência.

Para ilustrarmos melhor o problema, temos a figura (2.5) mostrando Ω_Λ como função do fator de escala para o modelo ΛCDM . Como pode ser visto, antigamente a densidade de energia do vácuo era considerada desprezível, enquanto no futuro a densidade de matéria será nula e o universo será totalmente vazio. Estranhamente, estamos vivendo

em uma curta era (cosmologicamente falando) em que a matéria escura e a energia escura são comparáveis em magnitude.

O problema da coincidência não é específico do modelo Λ CDM. Outros modelos que veremos a seguir também apresentam z_{coinc} muito próximo de zero.

Figura 2.5: Gráfico de Ω_Λ versus $\log a$ assumindo um universo plano com $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$. Mostra-se também a transição de fase eletrofraca (EW) e a nucleossíntese do Big Bang (BBN). Imagem retirada de [29].

2.4 Modelos de campo escalar para energia escura

A constante cosmológica corresponde a um fluido com equação de estado constante $\omega = -1$. No entanto, se considera modelos em que o parâmetro ω varia com o tempo, tal como na cosmologia inflacionária. A energia escura como um campo escalar dinâmico contrapõe a hipótese da energia escura associada à energia do vácuo contante e uniforme. Existe uma ampla variedade de campos escalares propostos, entre eles podemos citar: quintessência, *phantoms*, K-essência, condensados fantasmas e energia escura dilatônica.

Neste texto, iremos nos ocupar de campos de quintessência e *phantoms*, que podem ser agrupados em um único modelo conhecido como XCDM (o modelo Λ CDM é um caso

particular para $\omega = -1$) em que o parâmetro $\omega = \omega_X$ é variável. Neste modelo, temos a densidade de energia escura escrita como

$$\Omega_X(z) = \Omega_{X,0}(1+z)^{3(1+\omega_X)} \quad , \quad (2.19)$$

e o parâmetro de Hubble $H(z)$ (para um universo plano e desprezando a radiação) dado por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+\omega_X)}} \quad . \quad (2.20)$$

Agora veremos com um pouco mais de detalhes sobre o campo de quintessência e o campo phantom.

2.4.1 Quintessência

A quintessência é descrita como um campo escalar ordinário ϕ minimamente acoplado com a gravidade, mas com potenciais característicos que levam a uma inflação tardia. A ação da quintessência é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad , \quad (2.21)$$

em que $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ e $V(\phi)$ é o potencial do campo. Em uma métrica FLRW plana, a variação da ação (2.21) com respeito a ϕ leva a equação de movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad . \quad (2.22)$$

O tensor energia-momento do campo é obtido variando a ação (2.21) em relação a métrica $g^{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad . \quad (2.23)$$

Usando que $\delta\sqrt{-g} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, encontramos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right] \quad . \quad (2.24)$$

Para uma métrica FRW plana, obtemos a densidade de energia e a pressão do campo escalar como

$$\rho = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \quad P = T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad . \quad (2.25)$$

Assim, as equações de campo (1.73) ficam

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] , \quad (2.26)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} [\dot{\phi}^2 - V(\phi)] . \quad (2.27)$$

E lembremos que a equação da continuidade (1.77) é derivada combinando essas duas equações.

Da equação (2.27), vemos que a expansão do universo acelera para $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Essa condição requer um potencial que varie lentamente para dar origem a uma expansão acelerada. No contexto da teoria da inflação, os parâmetros de *rolamento lento*

$$\epsilon_s = \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2 , \quad \eta_s = \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{d\phi^2} , \quad (2.28)$$

são usados para checar a existência de soluções inflacionárias para o modelo (2.21). A inflação ocorre quando as condições de rolamento lento, $\epsilon \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$ são satisfeitas. No contexto da energia escura, essas condições não são confiáveis, já que existe também a matéria escura. Mas se definimos os parâmetros de rolamento lento em termos de derivadas temporais de H tais como $\tilde{\epsilon} = -\dot{H}/H$, temos uma boa medida da expansão acelerada já que consideramos contribuições tanto da energia escura quanto da matéria escura.

A equação de estado do campo ϕ é dada por

$$\omega_\phi = \frac{P}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} . \quad (2.29)$$

Nesse caso, a equação da continuidade (1.77) pode ser escrita em uma forma integral,

$$\rho = \rho_0 \exp \left[- \int 3(1 + \omega_\phi) \frac{da}{a} \right] , \quad (2.30)$$

sendo ρ_0 uma constante de integração. Nota-se que a equação de estado para o campo ϕ está confinada na região $-1 \leq \omega_\phi \leq 1$. O limite de rolamento lento, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ corresponde a $\omega_\phi = -1$, resultando em $\rho = \text{constante}$ da equação (2.30). No caso de uma matéria rígida, caracterizada por $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$ temos $\omega_\phi = 1$, em que a densidade de energia evolui com $\rho \propto a^{-6}$ da equação (2.30). Em outros casos, a densidade de energia se comporta como

$$\rho \propto a^{-m} , \quad 0 < m < 6 . \quad (2.31)$$

Como $\omega_\phi = -1/3$ é o limite entre uma expansão acelerada e desacelerada, o universo exibe uma expansão acelerada para $0 \leq m < 2$.

Foram propostos vários potenciais para quintessência. Segundo a referência [27], eles podem ser agrupados em (1) modelos de “congelamento” e (2) modelos de “descongelamento” [83]. Na classe (1) o campo rola ao longo do potencial no passado, mas o movimento vai gradualmente parando à medida que o sistema entra em fase de expansão acelerada.

1. Modelos de congelamento

- $V(\phi) = M^{4+n} \phi^{-n}$ ($n > 0$) ,
- $V(\phi) = M^{4+n} \phi^{-n} \exp(\alpha \phi^2 / m_{pl}^2)$.

O primeiro potencial não possui mínimo, e, portanto, o campo rola abaixo no potencial até o infinito [17, 84]. Ele aparece, por exemplo, em um modelo de supercondensado de férmions, como uma quebra dinâmica de supersimetria [85]. O segundo potencial tem um mínimo quando o campo fica eventualmente preso (correspondendo a $\omega_\phi = -1$). Esse potencial pode ser construído no contexto da supergravidade [86].

2. Modelos de descongelamento

- $V(\phi) = V_0 + M^{4-n} \phi^n$,
- $V(\phi) = M^4 \cos(\phi/f)$.

O primeiro potencial é similar ao da inflação caótica ($n = 2, 4$) [87] usado no universo jovem (com $V_0 = 0$), enquanto a escala de massa é bem diferente. O segundo potencial aparece como o potencial do pseudo-bóson de Nambu-Goldstone (PNGB). Ele foi introduzido por Frieman *et al* [88]. em resposta as primeiras tentativas de se sugerir que o universo seria dominado pela constante cosmológica.

2.4.2 Campo phantom

O modelo de quintessência, assim como outros modelos escalares que foram apenas citados (K-essência, táquions,...) se restringem a $\omega \geq -1$. No entanto, temos a possibilidade de $\omega < -1$, usualmente chamada de energia escura *phantom*. A mais simples

explicação para a energia escura phantom são campos escalares com energia cinética negativa [89]. Além disso, esse tipo de energia escura tem motivações vindas de teoria de cordas e *brane world*.

Segundo Copeland *et al.*, [26] campos phantom foram introduzidos pela primeira vez por Fred Hoyle em sua versão da teoria do estado estacionário. Para fazer valer o princípio cosmológico perfeito, segundo o qual o universo não é homogêneo e isotrópico somente no espaço mas também no tempo, Hoyle introduziu o campo de criação (campo-C) para ajustar o modelo a densidade homogênea do universo através da criação de matéria no vazio deixado pela sua expansão. A ação do campo phantom minimamente acoplado com a gravidade é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] , \quad (2.32)$$

em que o sinal da energia cinética é oposto ao da ação (2.21) para um campo escalar ordinário. As densidades de energia e a pressão são dadas respectivamente por $\rho = -\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$ e $P = -\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)$, e a equação de estado fica escrita como

$$\omega_\phi = \frac{P}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)} . \quad (2.33)$$

Portanto, obtemos $\omega_\phi < -1$ para $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$.

Para entendermos melhor as consequências de uma equação de estado $\omega < -1$ para a evolução do universo, lembremos da solução (1.101) dada por

$$a(t) = (t_s - t)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} ,$$

em que t_s é uma constante. Isso corresponde a uma solução super inflacionária quando o parâmetro de Hubble e o escalar de curvatura crescem:

$$H = \frac{n}{t_s - t} , \quad n = -\frac{2}{3(1+\omega)} > 0 , \quad (2.34)$$

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) = \frac{6n(2n+1)}{(t_s - t)^2} . \quad (2.35)$$

O parâmetro de Hubble diverge quando $t \rightarrow t_s$, o que corresponde a uma densidade de energia infinitamente grande em um tempo finito no futuro. A curvatura também cresce a infinito quando $t \rightarrow t_s$. Essa situação é chamada de singularidade do *Big Rip*.

A singularidade do Big Rip pode ser evitada desde que o potencial possua um máximo. No entanto, o campo phantom sofre de severas instabilidades quânticas no Ultravioleta (UV). Como a densidade de energia do campo phantom não possui limites inferiores, o vácuo se torna instável ao se produzir fantasmas e campos normais (energia positiva) [90].

2.5 Modelos fenomenológicos de energia escura interagentes

A energia escura constitui a maior parte do conteúdo do universo, e podemos considerar a possibilidade de uma interação desta com os demais componentes do universo. Foi mostrado que um acoplamento entre a energia escura e a matéria escura pode aliviar o problema da coincidência [91, 92]. Como a natureza desses dois componentes ainda é desconhecida fica difícil escrever a forma precisa do termo de interação a partir de primeiros princípios. Portanto, esse termo de interação será construído por argumentos fenomenológicos.

A densidade total de energia do universo é

$$\rho_{tot} = \rho_b + \rho_r + \rho_{dm} + \rho_{de} \quad ,$$

sendo que o subscrito b representa a matéria bariônica. O parâmetro de Hubble adimensional $E(z) = H(z)/H_0$ fica dado como

$$E^2(z) = \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \rho_{dm}(z)/\rho_{crit,0} + \rho_{de}(z)/\rho_{crit,0} \quad . \quad (2.36)$$

A matéria escura e a energia escura interagem entre si. Sendo assim, não podemos considerá-las como fluidos que se conservam independentemente. Dessa forma, a equação da continuidade (1.77) fica dada para esse sistema como

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = Q \quad , \quad (2.37)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(1 + \omega_X)\rho_{de} = -Q \quad , \quad (2.38)$$

sendo Q o termo de interação. Das equações acima, a forma fenomenológica do termo de interação deve ser função das densidades de energia multiplicadas por uma quantidade

com unidade de inverso de tempo. A escolha óbvia com unidade de inverso de tempo é o parâmetro de Hubble H [93]. Esses modelos podem ser divididos em três classes: O acoplamento proporcional à densidade de energia escura (EE), proporcional à densidade de matéria escura (ME) e proporcional à soma das duas.

Observemos o caso em que o termo de acoplamento é proporcional a uma combinação linear das densidades de energia do setor escuro, i.e., $Q = 3H(\lambda_1\rho_{dm} + \lambda_2\rho_{de})$, que descreve a transferência de energia. Nas equações da continuidade acima, se $Q > 0$, temos energia escura transferindo energia para a matéria escura, enquanto que se $Q < 0$, temos transferência de energia na direção oposta.

O estudo das perturbações de curvatura mostra que quando a interação é proporcional a densidade de energia escura ($Q = 3H\lambda_2\rho_{de}$), temos uma perturbação de curvatura estável exceto para $\omega = -1$. Se a perturbação de curvatura é proporcional a densidade de matéria escura ($Q = 3H\lambda_1\rho_{dm}$) ou a soma das duas ($Q = 3H\lambda_1(\rho_{dm} + \rho_{de})$), a perturbação de curvatura só pode ser estável quando a equação de estado da energia escura satisfaz $\omega < -1$ [94].

2.5.1 O acoplamento é proporcional à densidade de EE

Neste caso, o termo de acoplamento fica escrito como $Q = 3H\lambda_2\rho_{de}$, em que λ_2 é a constante de acoplamento entre os dois fluidos. As equações (2.37) e (2.38) ficam escritas como

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 3H\lambda_2\rho_{de} \quad , \quad (2.39)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(1 + \omega_X)\rho_{de} = -3H\lambda_2\rho_{de} \quad , \quad (2.40)$$

sendo que podemos definir um parâmetro ω efetivo para a matéria escura e a energia escura da forma

$$\omega_{dm,eff} = -\frac{\lambda_2}{r} \quad , \quad \omega_{de,eff} = \omega_X + \lambda_2 \quad , \quad (2.41)$$

em que $r = \rho_{dm}/\rho_{de}$.

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos a densidade de energia escura em função

do redshift z (lembrando que $a = (1 + z)^{-1}$) dada por

$$\rho_{de}(z) = \rho_{de,0}(1 + z)^{3(1+\omega_X+\lambda_2)} \quad , \quad (2.42)$$

e a densidade de matéria escura fica dada pela expressão

$$\rho_{dm}(z) = \left(\rho_{dm,0} + \frac{\lambda_2 \rho_{de,0}}{\omega_X + \lambda_2} \right) (1 + z)^3 - \frac{\lambda_2 \rho_{de,0}}{\omega_X + \lambda_2} (1 + z)^{3(1+\omega_X+\lambda_2)} \quad . \quad (2.43)$$

2.5.2 O acoplamento é proporcional à densidade de ME

Neste caso, o termo de acoplamento é dado por $Q = 3H\lambda_1\rho_m$, e as equações da continuidade ficam reescritas como

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 3H\lambda_2\rho_{dm} \quad , \quad (2.44)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(1 + \omega_X)\rho_{de} = -3H\lambda_2\rho_{dm} \quad , \quad (2.45)$$

sendo que podemos definir o parâmetro ω efetivo como

$$\omega_{dm,eff} = -\lambda_1 \quad , \quad \omega_{de,eff} = \omega_X + \lambda_1 r \quad . \quad (2.46)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos densidade de matéria escura em função do redshift

$$\rho_{dm}(z) = \rho_{dm,0}(1 + z)^{3(1-\lambda_1)} \quad , \quad (2.47)$$

e da densidade de energia escura

$$\rho_{de}(z) = \left(\rho_{de,0} + \frac{\lambda_1 \rho_{dm,0}}{\omega_X + \lambda_1} \right) (1 + z)^{3(1+\omega_X)} - \frac{\lambda_1 \rho_{dm,0}}{\omega_X + \lambda_1} (1 + z)^{3(1-\lambda_1)} \quad . \quad (2.48)$$

2.5.3 O acoplamento é proporcional à densidade de energia total de ME e EE

Também podemos considerar que o acoplamento é proporcional a densidade de energia total do setor escuro, i.e, $Q = 3H\lambda_1(\rho_{dm} + \rho_{de})$. Sendo assim, as equações da continuidade ficam dadas por

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 3H\lambda_1(\rho_{dm} + \rho_{de}) \quad , \quad (2.49)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(1 + \omega_X)\rho_{de} = -3H\lambda_1(\rho_{dm} + \rho_{de}) \quad , \quad (2.50)$$

e os parâmetros ω efetivos ficam escritos como

$$\omega_{dm,eff} = -\lambda_1(1 + 1/r) \quad , \quad \omega_{de,eff} = \omega_X + \lambda_1(r + 1) \quad . \quad (2.51)$$

Para este caso, é muito difícil obter soluções analíticas, sendo necessário usar cálculos numéricos para conhecermos as equações de evolução para ME e EE.

Os modelos acima (considerando que dividiremos o modelo de acoplamento proporcional à densidade de energia escura em $\omega > -1$ e $\omega < -1$) estão resumidos na tabela abaixo, retirada de [95].

Modelo	Q	ω	$\omega_{dm,eff}$	$\omega_{de,eff}$
I	$3\lambda_2 H \rho_{de}$	$-1 < \omega < 0$	$-\lambda_2/r$	$\omega + \lambda_2$
II	$3\lambda_2 H \rho_{de}$	$\omega < -1$	$-\lambda_2/r$	$\omega + \lambda_2$
III	$3\lambda_1 H \rho_{dm}$	$\omega < -1$	$-\lambda_1$	$\omega + \lambda_1 r$
IV	$3\lambda_1 H (\rho_{dm} + \rho_{de})$	$\omega < -1$	$-\lambda_1(1 + 1/r)$	$\omega + \lambda_1(r + 1)$

No próximo capítulo, veremos como a idade de objetos em altos redshifts e a idade do universo pode ser usada para podermos impor vínculos nos parâmetros dos modelos discutidos nesse capítulo.

Capítulo 3

Vínculos Observacionais

3.1 Introdução

Neste capítulo, abordaremos o teste baseado na idade de aglomerados de galáxias em altos redshifts e na idade do universo, conhecido em inglês como “*lookback time*” (LBT). Esse método se difere de outros como supernovas e BAO, pois ao contrário destes que se baseiam em distâncias, o LBT se baseia em idades. A vantagem desse método é que ele evita desvios que são presentes em métodos baseados em distâncias, podendo ser um ótimo complemento aos vínculos estipulados por outros métodos [19].

Apresentaremos o método do LBT e os dados utilizados na análise. Estas seções são baseadas em Capozziello *et al.* [19], mas também em TonoIU *et al.* [96], Samushia *et al.* [97] e Dantas *et al.* [98].

Por fim, apresentaremos os resultados obtidos. Analisaremos os modelos Λ CDM com e sem curvatura, o modelo X CDM e os quatro modelos de interação fenomenológicos apresentados (Lembrando que para o caso do acoplamento proporcional a ρ_{de} , temos de separar os casos $\omega > -1$ e $\omega < -1$ devido as instabilidades nas perturbações de curvatura).

Para comparar a teoria com as observações, empregamos a metodologia MCMC (do inglês *Markov Chain Monte Carlo*) e usamos uma versão modificada do programa CosmoMC [99, 100]. O LBT já havia sido usado para vincular modelos de interação entre ME e EE em [101] usando a idade do universo oriunda do WMAP 7 [51]. A nossa abordagem usa a idade advinda das medidas do satélite Planck [30].

3.2 Lookback Time como teste para modelos cosmológicos

Ao termos acesso aos valores dos parâmetros cosmológicos H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$, podemos determinar em função dos mesmos, certas características do universo descrito pelo modelo. Nesta dissertação daremos enfoque ao “lookback time” e a idade do universo, como eles podem ser obtidas em função dos parâmetros cosmológicos e como eles podem ser usados para impor vínculos aos modelos cosmológicos.

Na integral (1.112) consideramos especificamente o modelo Λ CDM em que $\omega = -1$. Mas ela continua válida para modelos mais gerais, sendo expressa da forma

$$t_L(z, \mathbf{p}) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z', \mathbf{p})} \quad , \quad (3.1)$$

em que $E(z, \mathbf{p}) = H(z)/H_0$ é o parâmetro de Hubble adimensional, e denotamos por $\{\mathbf{p}\}$ o conjunto de parâmetros que caracterizam o modelo cosmológico dado.

Para usarmos o lookback time e a idade do universo para testar modelos cosmológicos, devemos considerar um objeto i a um redshift z e denotar por $t_i(z)$ a idade definida pela diferença de idade que o universo tinha quando o objeto nasceu, i.e, no redshift de formação z_F e a mesma no redshift z , o que nos dá

$$\begin{aligned} t_i(z) &= H_0^{-1} \left[\int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')E(z', \mathbf{p})} - \int_{z_F}^\infty \frac{dz'}{(1+z')E(z', \mathbf{p})} \right] \\ &= H_0^{-1} \int_z^{z_F} \frac{dz'}{(1+z')E(z', \mathbf{p})} \\ &= t_L(z_F) - t_L(z) \quad . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dispondo de uma amostra de N objetos, com as idades estimadas t_i do objeto a um redshift z_i para $i = 1, 2, \dots, N$. O lookback time observado $t_L^{obs}(z_i)$ de um objeto é

$$\begin{aligned} t_L^{obs}(z_i) &= t_L(z_F) - t_i(z) \\ &= [t_0^{obs} - t_i(z)] - [t_0^{obs} - t_L(z_F)] \\ &= t_0^{obs} - t_i(z) - df \quad , \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que t_0^{obs} é a idade estimada para o universo hoje, e o *delay factor* ou *tempo de incubação* é definido como

$$df = t_0^{obs} - t_L(z_F) \quad . \quad (3.4)$$

Figura 3.1: A evolução temporal do lookback time e a idade do universo como função do redshift z [96]

O tempo de incubação leva em conta nossa ignorância acerca do redshift de formação z_F do objeto. O que se observa é a idade $t_i(z)$ para um objeto a redshift z , como esquematizado na figura (3.1) Para se estimar z_F , podemos usar a equação (3.2), assumindo um modelo cosmológico, mas se nosso objetivo é testar modelos cosmológicos, então não podemos inferir z_F da idade medida, e a princípio, df é indeterminado. A princípio, df deve ser diferente para cada objeto da amostra e não há razão teórica para assumirmos o mesmo redshift de formação para todos os objetos. No entanto, essa é a suposição, e é computacionalmente conveniente considerar df ao invés de z_F como um dos parâmetros a serem determinados pelos dados.

Definimos a função de verossimilhança

$$\mathcal{L}_{lt}(\mathbf{p}, df) \propto \exp[-\chi_{lt}^2(\mathbf{p}, df)/2] \quad , \quad (3.5)$$

com

$$\chi_{lt}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(t_L^{teor}(z_i, \mathbf{p}) - t_L^{obs}(z_i))^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{t_0^{obs}}^2} + \frac{(t_0^{teor}(\mathbf{p}) - t_0^{obs})^2}{\sigma_{t_0^{obs}}^2} \quad , \quad (3.6)$$

em que σ_t é a incerteza em t_0^{obs} , σ_i é a incerteza em $t_L^{obs}(z_i)$ e o sobrescrito *teor* representa os valores preditos pelo modelo para uma dada quantidade. O tempo de incubação entra na definição de χ_{lt}^2 ao determinarmos $t_L^{obs}(z_i)$ de $t_i(z)$ na equação (3.3), mas o valor teórico do lookback time não depende de df .

Para aliviar o problema relacionado à escassez de dados, levando assim a uma grande incerteza nos parâmetros estimados, é conveniente introduzir vínculos no modelo. Sendo

assim, adotamos a abordagem de Capozziello *et al*[19], que considera a constante de Hubble como um parâmetro incômodo e a marginaliza com um *prior* gaussiano, redefinindo a função de verossimilhança como

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) \propto \mathcal{L}_{lt}(\mathbf{p}) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H_0 - H_0^{obs}}{\sigma_{H_0}} \right)^2 \right] \propto \exp[-\chi^2(\mathbf{p})/2] \quad , \quad (3.7)$$

em que se absorve df no conjunto de parâmetros $\mathbf{p}$ e foi definido

$$\chi^2 = \chi_{lt}^2 + \left(\frac{H_0 - H_0^{obs}}{\sigma_{H_0}} \right)^2 \quad , \quad (3.8)$$

em que H_0^{obs} é o valor estimado de H_0 e σ_{H_0} é a incerteza. Adotamos para a constante de Hubble o valor $H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [102].

O conjunto de parâmetros $\mathbf{p}$ do modelo que melhor fitam os dados podem ser obtidos maximizando a função de verossimilhança $\mathcal{L}(\mathbf{p})$ o que equivale a minimizar o χ^2 definido na equação (3.8). Para uma melhor explicação do método de máxima verossimilhança, ver Apêndice (A).

3.3 Dados

Como amostra usaremos a idade de seis aglomerados de galáxias dados em Capozziello *et al*[19] situados em redshifts na faixa de $0.10 \leq z \leq 1.27$ e com incertezas de 1 Gyr nas idades medidas. Também usaremos a amostra de Simon *et al*[103] com 32 galáxias vermelhas situadas no intervalo $0.117 \leq z \leq 1.845$. Essa amostra tem incerteza de 12 % das idades apresentadas.

Os dados de Capozziello *et al.*, são dados pela tabela abaixo:

z	N	Idade (Gyr)
0.60	1	4.53
0.70	3	3.93
0.80	2	3.41
0.10	55	10.64
0.25	103	8.89
1.27	1	1.60

Já a amostra de Simon *et al.*, é dada por

z_i	$t_i(z_i)$ (Gyr)	z_i	$t_i(z_i)$ (Gyr)
0.1171	10.2	1.226	3.5
0.1174	10.0	1.340	3.4
0.2220	9.0	1.380	3.5
0.2311	9.0	1.383	3.5
0.3559	7.6	1.396	3.6
0.4520	6.8	1.430	3.2
0.5750	7.0	1.450	3.2
0.6440	6.0	1.488	3.0
0.6760	6.0	1.490	3.6
0.8330	6.0	1.493	3.2
0.8360	5.8	1.510	2.8
0.9220	5.5	1.550	3.0
1.179	4.6	1.576	2.5
1.222	3.5	1.642	3.0
1.224	3.5	1.725	2.6
1.225	3.5	1.845	2.5

A idade absoluta desses 32 objetos são determinadas por modelos de população estelar apropriados [104] e a amostra inclui observações do *Gemini Deep Deep Survey* [105, 106] e do arquivo de dados [107]. Esses pontos de dados estão esquematizados na figura (3.2) para as idades absolutas e para o LBT.

A idade do universo é estimada a partir das medições das anisotropias de RCF. Ela está correlacionada com o ângulo subtendido pelo horizonte sônico da última superfície de espalhamento e desse modo, pode ser bem determinada pela localização dos picos acústicos [108]. No entanto, essa medida assume implicitamente o modelo Λ CDM. A colaboração Planck obteve a idade de $t_0^{obs} = 13.817 \pm 0.048$ Gyr [30].

Capozziello *et al.* [19] consideram que, como esse valor está em concordância com o limite imposto pelas estrelas mais antigas [25, 109] e pelo estudo de radioisótopos [110], então não há erros sistemáticos em generalizar t_0^{obs} assumindo Λ CDM para os demais

modelos.

Adotamos para os modelos Λ CDM com $\Omega_k \neq 0$ e para o modelo XCDM a metodologia de Samushia *et al.* [97] que é a de considerar o valor central de t_0^{obs} obtido para o modelo Λ CDM plano, apenas aumentando a margem de erro. Para os modelos de interação, a idade do universo já havia sido calculada anteriormente pelo nosso grupo usando o programa CosmoMC.

Considerando essas amostras, mas o valor da idade do universo, se pode usar o observável do LBT para impor vínculos a modelos cosmológicos.

Figura 3.2: Os pontos de dados de idade-redshift. (a) Dados originais da referência [103]. Essa amostra corresponde a 32 galáxias antigas distribuidas sobre um intervalo $0.11 \leq z \leq 1.84$ e inclui observações do *Gemini Deep Deep Survey* [105, 106] e do arquivo de dados [107]. (b) A amostra LBT. Obtida combinando a idade dos 32 objetos com a idade total do universo, $t_0^{obs} = 13.7 \pm 0.2$ Gyr [51]. Imagem retirada de [98]

Figura 3.3: Distribuição de probabilidades da densidade de matéria para o modelo Λ CDM plano.

3.4 Modelo Λ CDM

Para o modelo Λ CDM, consideremos primeiramente o caso em que a curvatura é nula. Para este caso, o parâmetro de Hubble $H(z)$ fica escrito como

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)} \quad , \quad (3.9)$$

sendo os parâmetros do modelo Ω_m e H_0 . Lembrando também que desprezaremos a densidade de radiação Ω_r pois ela não é significativa hoje. Adotamos para a idade do universo, o valor de $t_0^{obs} = 13.817 \pm 0.048$ Gyr [30].

Obtemos uma distribuição de probabilidade (função de verossimilhança) para a densidade de matéria dada pela fig. (3.3).

Na tabela 1, temos os resultados obtidos para Ω_m e H_0 (em $km s^{-1} Mpc^{-1}$).

Tabela 1: Λ CDM plano			
Parâmetro	Melhor Ajuste	Limite 68%	Prior
Ω_m	0.22007	$0.22756^{+0.02509}_{-0.31222}$	[0.001, 0.99]
H_0	74.23	73.73 ± 2.39	[20, 100]

Para o tempo de incubação df que foi marginalizado, obtemos $df = 1.57$ Gyr com um prior de [05, 0.1].

Temos também o gráfico 2D (fig. 3.4) das regiões de confiança dos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e H_0 .

Figura 3.4: As regiões de confiança 1σ e 2σ no plano (Ω_m, H_0) para o modelo Λ CDM plano.

Também fizemos para o caso de Ω_k não nulo. Para este caso, o parâmetro de Hubble fica escrito por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad , \quad (3.10)$$

Na tabela 2, temos os resultados obtidos para os parâmetros Ω_m , Ω_k e H_0 . O valor utilizado para a idade do universo foi $t_0^{obs} = 13.817 \pm 0.1$ Gyr.

Tabela 2: Λ CDM curvo			
Parâmetro	Melhor Ajuste	Limite 68%	Prior
Ω_m	0.12982	$0.18185^{+0.10123}_{-0.09697}$	[0.001, 0.99]
H_0	74.05	$73.82^{+2.49}_{-2.50}$	[20, 100]
Ω_k	0.29791	$0.14654^{+0.15346}_{-0.03215}$	[-0.3, 0.3]

O tempo de incubação marginalizado teve como melhor ajuste $df = 1.89$ Gyr. O prior foi o mesmo do modelo anterior.

Na figura (3.5) temos a função de verossimilhança da densidade de curvatura. Observamos que os dados preferem um universo com $\Omega_k > 0$ o que implica num universo “aberto”.

Figura 3.5: Distribuição de probabilidades da densidade de curvatura.

Temos também as regiões de confiança 1σ e 2σ para Ω_m e Ω_Λ (fig. 3.6).

Figura 3.6: Regiões de confiança 1σ e 2σ para o modelo Λ CDM com curvatura.

3.5 Modelo XCDM

No modelo XCDM, podemos ter uma energia escura dinâmica, sendo que $\omega_X > -1$ representa o campo de quintessência e $\omega < -1$ representa o campo *phantom*. Neste

modelo, o parâmetro de Hubble é dado por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)(1+z)^{3(1+\omega_X)}} \quad , \quad (3.11)$$

sendo os parâmetros do modelo Ω_m , H_0 e ω_X .

Adotamos para a idade do universo, o valor de $t_0^{obs} = 13.817 \pm 0.1$. Os valores dos parâmetros do modelo foram estimados e estão dados pela tabela abaixo.

Tabela 3: Modelo Λ CDM			
Parâmetro	Melhor Ajuste	Limite 68%	Prior
Ω_m	0.01742	$0.11470^{+0.02903}_{-0.10983}$	[0.001, 0.99]
H_0	72.84	$73.06^{+2.45}_{-2.41}$	[20, 100]
ω	-0.38638	$-0.64869^{+0.34869}_{-0.02944}$	[-3, -0.3]

O melhor ajuste para o tempo de incubação foi de $df = 2.47$ Gyr.

Na figura (3.7), temos a distribuição de probabilidade para o parâmetro ω da energia escura. Observemos que o campo de quintessência se ajusta bem melhor aos dados que o campo phantom.

Na figura (3.8) temos as regiões de confiança 1σ e 2σ para os parâmetros Ω_m e ω . A linha para o qual $\omega = -1$ passa pela região 2σ .

Figura 3.7: Distribuição de probabilidade do parâmetro ω .

Figura 3.8: Regiões de confiança 1σ e 2σ dos parâmetros Ω_m e w para o modelo $XCDM$.

3.6 Modelos de interação

3.6.1 Modelo I

Nesse modelo, consideramos o acoplamento proporcional a densidade de energia escura $Q = 3H\lambda_2\rho_{de}$ e $\omega > -1$. O parâmetro $H(z)$ para este modelo é obtido combinando as soluções (2.42,2.43) com a equação (2.36). Os parâmetros do modelo são a densidade de bárions ($\Omega_b h^2$), a densidade de matéria escura ($\Omega_c h^2$), a constante de Hubble H_0 , a constante de acoplamento λ_2 e o parâmetro ω .

Para esse modelo, obtemos os resultados apresentados na tabela 4:

Tabela 4: Modelo de Interação I			
Parâmetro	Melhor Ajuste	Limite 68%	Prior
$\Omega_b h^2$	0.16934	$0.09287^{+0.02772}_{-0.08787}$	[0.005, 0.99]
$\Omega_c h^2$	0.05314	$0.08678^{+0.02443}_{-0.08578}$	[0.005, 0.99]
H_0	73.21	73.15 ± 2.42	[20, 100]
ω	-0.67781	$-0.73185^{+0.14291}_{-0.16537}$	[-0.999, -0.1]
λ_2	0.27076	$0.19920^{+0.19704}_{-0.06348}$	[-0.399, 0.399]

A idade do universo calculada para este modelo é de $t_0^{obs} = 13.821 \pm 0.101$ Gyr e o tempo de incubação estimado foi de $df = 2.46$ Gyr.

(a) Distribuição de probabilidade da densidade de bárions $\Omega_b h^2$.

(b) Distribuição de probabilidade da densidade de matéria escura $\Omega_c h^2$.

Figura 3.9: Modelo I

(a) Distribuição de probabilidade do parâmetro ω

(b) Distribuição de probabilidade da constante de acoplamento λ_2

Figura 3.10: Modelo I

Na figura (3.9) temos a função de verossimilhança unidimensional para a densidade de matéria bariônica e matéria escura. Na figura (3.10(a)) temos a função de verossimilhança para o parâmetro ω .

Na figura (3.10(b)) temos um importante resultado: os dados preferem uma constante de acoplamento positiva. Isso é importante, pois como mostrado em [111], a constante de acoplamento ser positiva é uma condição para que o fluxo de energia se transfira da energia escura para a matéria escura, o que é requerido para aliviar o problema da coincidência e satisfazer a segunda lei da termodinâmica.

Na figura (3.11) temos as regiões de confiança 1σ e 2σ para as combinações de $\Omega_c h^2$, ω e λ_2 .

3.6.2 Modelo II

Nesse modelo, consideramos o acoplamento proporcional a densidade de energia escura $Q = 3H\lambda_2\rho_{de}$ e $\omega < -1$. O parâmetro $H(z)$ para este modelo é o mesmo do caso anterior. Os parâmetros do modelo são a densidade de bárions ($\Omega_b h^2$), a densidade de matéria escura ($\Omega_c h^2$), a constante de Hubble H_0 , a constante de acoplamento λ_2 e o parâmetro ω .

Para esse modelo, obtemos os resultados apresentados na tabela 5:

Tabela 5: Modelo de Interação II			
Parâmetro	Melhor Ajuste	Limite 68%	Prior
$\Omega_b h^2$	0.25484	$0.09799^{+0.02944}_{-0.09299}$	[0.005, 0.99]
$\Omega_c h^2$	0.09580	$0.09580^{+0.03048}_{-0.09480}$	[0.005, 0.99]
H_0	74.34	$74.06^{+2.50}_{-2.52}$	[20, 100]
ω	-1.0086	$-1.48189^{+0.48089}_{-0.14786}$	[-2.5, -1.001]
λ_2	0.39665	$0.144021^{+0.22549}_{-0.07153}$	[-0.399, 0.399]

Para este modelo, a idade do universo prevista é de $t_0^{obs} = 13.604 \pm 0.115$ Gyr. O tempo de incubação estimado é de $df = 1.96$ Gyr.

Figura 3.11: Regiões de confiança 1σ e 2σ para parâmetros selecionados - Modelo I.

(a) Distribuição de probabilidade da densidade de bárions $\Omega_b h^2$.

(b) Distribuição de probabilidade da densidade de matéria escura $\Omega_c h^2$.

Figura 3.12: Modelo II

Na figura (3.12) temos a distribuição da densidade de matéria bariônica e matéria escura. E na figura (3.13(a)) temos a distribuição de probabilidade do parâmetro ω . O gráfico nos mostra que apesar de termos limitado a $\omega < -1$ (campo phantom), existe uma tendência de ω assumir valores para o campo de quintessência.

(a) Distribuição de probabilidade do parâmetro ω

(b) Distribuição de probabilidade da constante de acoplamento λ_2

Figura 3.13: Modelo II

Figura 3.14: Regiões de confiança 1σ e 2σ para parâmetros selecionados - Modelo II.

Na figura (3.13(b)) temos a distribuição de probabilidades da constante de acoplamento λ_2 . O gráfico nos mostra que os dados preferem valores positivos para a constante de acoplamento, o que satisfaz o critério estabelecido por [111] para amenizar o problema da coincidência.

A figura (3.14) mostra as regiões de confiança 1σ e 2σ para os parâmetros $\Omega_c h^2$, ω e λ_2 .

3.6.3 Modelo III

Nesse modelo, consideramos o acoplamento proporcional a densidade de matéria escura $Q = 3H\lambda_1\rho_{dm}$ e $\omega < -1$. O parâmetro $H(z)$ para este modelo é obtido substituindo as soluções (2.47, 2.48) em (2.36). Os parâmetros do modelo são a densidade de bárions ($\Omega_b h^2$), a densidade de matéria escura ($\Omega_c h^2$), a constante de Hubble H_0 , a constante de acoplamento λ_1 e o parâmetro ω .

A idade do universo calculada para este modelo é de $t_0^{obs} = 13.928 \pm 0.280$ Gyr. O tempo de incubação estimado é de $df = 2.50$ Gyr. Os valores obtidos para os parâmetros deste modelo estão mostrados na tabela 6.

Tabela 6: Modelo de Interação III			
Parâmetro	Melhor Ajuste	Limite 68%	Prior
$\Omega_b h^2$	0.00680	$0.03779^{+0.00592}_{-0.03279}$	[0.005, 0.99]
$\Omega_c h^2$	0.38277	$0.25199^{+0.10644}_{-0.07933}$	[0.005, 0.99]
H_0	73.10	73.68 ± 2.66	[20, 100]
ω	-1.6399	$-1.7306^{+0.7296}_{-0.7694}$	[-2.5, -1.001]
λ_1	0.37349	$0.30328^{+0.09572}_{-0.01999}$	[-0.399, 0.399]

Na figura (3.15) temos a distribuição de probabilidades para a densidade de matéria bariônica e matéria escura. Na figura (3.16(a)) temos a distribuição de probabilidade do parâmetro ω , que não está bem vinculado pelos dados. A distribuição de probabilidade para a constante de acoplamento λ_1 está mostrada na figura (3.16(b)). Novamente, vemos que os dados preferem uma constante com valor positivo.

(a) Distribuição de probabilidade da densidade de bárions $\Omega_b h^2$.

(b) Distribuição de probabilidade da densidade de matéria escura $\Omega_c h^2$.

Figura 3.15: Modelo III

(a) Distribuição de probabilidade do parâmetro ω

(b) Distribuição de probabilidade da constante de acoplamento λ_1

Figura 3.16: Modelo III

A figura (3.17) mostra as regiões de confiança 1σ e 2σ para os parâmetros $\Omega_c h^2$, ω e λ_1 .

Figura 3.17: Regiões de confiança 1σ e 2σ para parâmetros selecionados - Modelo III.

3.6.4 Modelo IV

Nesse modelo, consideramos o acoplamento proporcional a soma da densidade de energia do setor escuro $Q = 3H\lambda_1(\rho_{dm} + \rho_{de})$ e $\omega < -1$. As soluções para as densidades de matéria escura e energia escura, e seguidamente o parâmetro de Hubble $H(z)$ são obtidas numericamente. Os parâmetros do modelo são a densidade de bárions ($\Omega_b h^2$), a densidade de matéria escura ($\Omega_c h^2$), a constante de Hubble H_0 , a constante de acoplamento λ_1 e o parâmetro ω .

A idade do universo calculada para este modelo é de $t_0^{obs} = 13.854 \pm 0.111$ Gyr. O tempo de incubação estimado é de $df = 2.49$ Gyr. Os valores obtidos para os parâmetros deste modelo estão mostrados na tabela 7.

Tabela 7: Modelo de Interação IV			
Parâmetro	Melhor Ajuste	Limite 68%	Prior
$\Omega_b h^2$	0.00761	$0.04136^{+0.00758}_{-0.03636}$	[0.005, 0.99]
$\Omega_c h^2$	0.43246	$0.31591^{+0.10333}_{-0.08544}$	[0.001, 0.99]
H_0	73.27	73.22 ± 2.59	[20, 100]
ω	-2.3842	$-1.7018^{+0.7008}_{-0.7982}$	[-2.5, -1.001]
λ_1	0.31875	$0.30108^{+0.09792}_{-0.02473}$	[-0.399, 0.399]

Na figura (3.18) temos a distribuição de probabilidades para a densidade de matéria bariônica e matéria escura. Na figura (3.19(a)) temos a distribuição de probabilidade do parâmetro ω , que não está bem vinculado pelos dados. A distribuição de probabilidade para a constante de acoplamento λ_1 está mostrada na figura (3.19(b)). Observemos novamente a tendência dos dados de preferir uma constante com valor positivo.

A figura (3.19) mostra as regiões de confiança 1σ e 2σ para os parâmetros $\Omega_c h^2$, ω e λ_1 .

(a) Distribuição de probabilidade da densidade de bárions $\Omega_b h^2$.

(b) Distribuição de probabilidade da densidade de matéria escura $\Omega_c h^2$.

Figura 3.18: Modelo IV

(a) Distribuição de probabilidade do parâmetro ω

(b) Distribuição de probabilidade da constante de acoplamento λ_1

Figura 3.19: Regiões de confiança 1σ e 2σ para parâmetros selecionados - Modelo IV.

Considerações Finais

Nesta dissertação procuramos analisar que vínculos podem ser impostos aos parâmetros de diferentes modelos de energia escura baseados em observações da idade de galáxias em altos valores de redshift z e na idade do universo.

No capítulo 1, construímos a métrica FLRW para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, e resolvemos as Equações de Einstein para essa métrica e um tensor energia-momento de um fluido perfeito. Estudamos as propriedades cinemáticas e dinâmicas desse *background* cosmológico, terminando por mostrar como calcular intervalos de tempo em função do redshift, o *lookback time* (LBT).

No capítulo 2 mostramos as principais evidências para um universo dominado por uma energia escura e apresentamos alguns modelos para descrever essa energia escura.

No capítulo 3 mostramos como o LBT pode ser usado para vincular modelos e quais os dados utilizados e que vínculos foram obtidos usando o MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*) pelo programa CosmoMC. É importante salientar que seguimos recomendação de [19] inserindo um prior gaussiano na constante de Hubble H_0 adotando para a constante de Hubble o valor $H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [102]. Sem este prior, a análise se torna muito pouco precisa.

Para o modelo ΛCDM obtemos como melhor ajuste para a densidade de matéria e para a constante de Hubble valores respectivamente dados por $\Omega_m = 0.22$ e $H_0 = 74.23$, o que são consistentes com valores previamente conhecidos.

Quando adicionamos curvatura, obtemos que os dados preferem um modelo espacialmente aberto, o que está em concordância com o resultado obtido em [97]. Entretanto, os valores para os quais $\Omega_k = 0$ estão dentro da região de confiança de 2σ .

Para o modelo XCDM de parametrização da equação de estado da energia escura,

vimos que os dados preferem fortemente o campo de quintessência ao campo phantom, o que é bom, pois como vimos no Capítulo 2, este último sofre de problemas de instabilidade além de haver a possibilidade de uma singularidade no futuro, o *big rip*.

Por fim, analisamos quatro casos de modelos de interação fenomenológicos entre matéria escura e energia escura. Esses modelos foram: Acoplamento proporcional a densidade de energia escura com $\omega > -1$ e $\omega < -1$ (Modelos I e II), acoplamento proporcional a densidade de matéria escura (Modelo III) e $\omega < -1$ e acoplamento proporcional a densidade total do setor escuro e $\omega < -1$ (Modelo IV).

Para todos esses modelos, a tendência foi de uma energia escura de quintessência ($\omega > -1$) e uma constante de acoplamento positiva, o que é bom, pois é uma condição para resolver o problema da coincidência.

Como bem frisado em Samushia *et al.*, [97], os atuais dados de lookback time somente são incapazes de vincular precisamente os parâmetros cosmológicos. Vínculos de outros observáveis como a fração da massa de gás em aglomerados de galáxias ou a medida da distância de supernovas e os dados de oscilações acústicas bariônicas (BAO) são mais restritivos que os dados de LBT. No entanto, eles são mais restritivos do que as medidas de lentes gravitacionais fortes, medidas do parâmetro de Hubble em função do redshift, medidas do diâmetro angular de radio-galáxias em função do redshift e medidas das distâncias de explosões de raios gamma.

Para se impor vínculos mais precisos aos parâmetros cosmológicos, se deve combinar os dados de lookback time com o de outros observáveis como oscilações acústicas bariônicas e medidas da distância de supernovas, e combinar as respectivas funções de verossimilhança

$$\mathcal{L}_{Total} = \mathcal{L}_{LBT} \mathcal{L}_{BAO} \mathcal{L}_{SNe} \quad , \quad (3.12)$$

para minimizar a função de verossimilhança e obter os parâmetros de melhor ajuste.

Entre as perspectivas futuras para este trabalho, estão a de combinar os vínculos de LBT com os obtidos pelas anisotropias da radiação cósmica de fundo observados pelo satélite Planck [30]. Também deveremos repetir a análise para um modelo lagrangeano com acoplamento dado por um potencial de Yukawa.

Entre outras perspectivas futuras, tentaremos usar os modelos de energia escura interagindo com a matéria escura para obter uma idade para o quasar APM 08279+5255 em

$z = 3.91$ [112] condizente com a idade mínima medida para esse quasar que é de 1.8 Gyr. Lembrando que o modelo Λ CDM prevê uma idade de $t = 1.63$ Gyr, e dessa forma, pelo menos aliviar o problema das idades.

Apêndice A

Método da máxima verossimilhança

Neste apêndice faremos uma breve revisão do método da máxima verossimilhança utilizado para restringir parâmetros cosmológicos partir de dados observacionais (no caso dessa dissertação, as idades de aglomerados de galáxias e a idade do universo).

Seja certa quantidade física de valor verdadeiro y_0 que queremos mensurar. Devido às incertezas inerentes do processo de medida que representaremos por σ , é impossível conhecer exatamente o valor de y_0 . Sendo assim, temos que a probabilidade de num processo de medida obtermos uma estimativa y de y_0 , contida num intervalo Δy ao redor de y_0 é

$$P = \int_{y_1}^{y_2} pdf(y|y_0)dy \quad , \quad (A.1)$$

sendo $pdf(y|y_0)$ é a chamada *função densidade de probabilidade* (*probability density function*) de y e nos diz como os resultados y_i de diversas medidas realizadas mediante o mesmo processo, se distribuirão em torno do valor y_0 , dado as incertezas σ .

A incerteza σ especifica um intervalo em torno de y_0 no qual o resultado y de uma medida tem uma certa probabilidade de estar contido. Usualmente, se diz que σ é metade do intervalo dentro do qual se tem aproximadamente 68,3 % de probabilidade de obtermos o resultado y de uma medida. Por essa definição, a probabilidade de se obter como resultado de uma medida o valor real y_0 é nula. Se o intervalo Δy for pequeno, a probabilidade pode ser aproximada como $P \approx pdf(y|y_0)\Delta y$.

Para o caso da grandeza y varie em torno de uma outra grandeza x , e queremos estimar os valores de y correspondentes a x_i com $i = 1, \dots, N$. Os valores verdadeiros de y chamaremos de y_{0i} . Se os valores verdadeiros de y são y_{0i} , qual a probabilidade de obtermos dados y_i , caindo dentro de intervalos Δy_i em torno dos respectivos valores y_{0i} ? Considerando os dados y_i independentes (não correlacionados) e considerando os intervalos Δy_i suficientemente pequenos e iguais, temos que a probabilidade é dada por

$$P(y_i|y_{0i}) \approx (\Delta N)^N \prod_{i=1}^N pdf(y_i|y_{0i}) \equiv (\Delta N)^N \mathcal{L}(y_i|y_{0i}) \quad , \quad (\text{A.2})$$

sendo $\prod_{i=1}^N pdf(y_i|y_{0i}) \equiv \mathcal{L}(y_i|y_{0i})$ definida como a *função verossimilhança*. Esta função nos dá a menos de um fator contante, a probabilidade de obtermos estimativas y_i , dado que os valores verdadeiros correspondentes são y_{0i} . Para o caso de os dados serem correlacionados, a função verossimilhança não será mais dada somente pelo produto das pdf, mas sua interpretação estatística será a mesma.

Como os valores verdadeiros de uma grandeza física não podem ser conhecidos exatamente, a função verossimilhança tal como definida não pode ser conhecida. Neste caso, substituímos os valores y_{0i} por estimativas teóricas $y(\vec{p})$ determinadas a partir de um modelo teórico escolhido. O vetor de parâmetros $\vec{p} \equiv (p_1, \dots, p_n)$ denota o conjunto de parâmetros dos quais depende a grandeza y , no modelo teórico escolhido. Assim, a função verossimilhança fornece a probabilidade de se obter um conjunto de medidas y_i , correspondentes aos valores x_i da variável independente, dado que os parâmetros do modelo teórico são dados pelo vetor de parâmetros $\vec{p}$.

Entretanto, o que queremos saber é a probabilidade dos parâmetros do modelo serem $\vec{p}$ dado um conjunto de medidas y_i , correspondentes aos valores da variável independente x_i ? Para relacionar essa probabilidade com a função verossimilhança, se pode aplicar o *teorema de Bayes*: a probabilidade de ocorrência de um evento B, dado que A ocorreu, $P(B|A, I)$ é dada por

$$P(B|A, I) = \frac{P(A|B, I)P(B|I)}{P(A|I)} \quad . \quad (\text{A.3})$$

A letra "I" denota a condicionalidade das probabilidades a alguma informação que tomamos como verdadeira. Traduzindo para a linguagem que estávamos usando, identificamos

$B \equiv \vec{p}$, $A \equiv y_i$ e sendo I fornecida pelo modelo teórico M escolhido. Segue que

$$P(\vec{p}|y_i, M) = \frac{\mathcal{L}(y_i|\vec{p})P(\vec{p}|M)}{P(y_i|M)} \quad . \quad (\text{A.4})$$

A constante multiplicativa é omitida na função verossimilhança. A probabilidade $P(\vec{p}|y_i, M)$ é chamada de distribuição de probabilidade posterior; $P(y_i|M)$ é chamada de *evidência bayesiana* [113], fixada via normalização e a *prior probability* $P(\vec{p}|M)$ denota o grau de conhecimento em relação aos parâmetros $\vec{p}$ antes de se olhar os dados.

Como em geral, não sabemos nada a respeito dos parâmetros que queremos estimar, se tem como escolha do prior uma distribuição uniforme dentro de um intervalo e zero fora dele. Em casos de um parâmetro p_j já ter sido previamente estimado a partir de outro conjunto de dados ou outros modelos teóricos, se costuma adotar um prior gaussiano.

A expressão (A.4) nos dá a probabilidade de os parâmetros corretos serem $\vec{p}$, se dispondo dos dados y_i e adotando um modelo teórico M . Como temos diferentes probabilidades para diferentes valores dos parâmetros teóricos $\vec{p}$, buscamos o conjunto $\vec{p}_{mp}$ que maximiza a probabilidade dada por (A.4). Este constitui o *método da máxima verossimilhança*.

O conjunto $\vec{p}_{mp}$ que maximiza a função verossimilhança é chamado *melhor ajuste global*. O *melhor ajuste individual* corresponde a melhor estimativa para um dado parâmetro do modelo, sendo dado pelo pico da distribuição de probabilidade desse parâmetro $P(p_j)$, obtida integrando (A.4) sobre os demais parâmetros¹:

$$P(p_j) = \int \dots \int P(\vec{p}|y_i, M) dp_1 \dots dp_{j-1} dp_{j+1} \dots dp_N \quad . \quad (\text{A.5})$$

Os intervalos de incerteza correspondente a 1σ , 2σ e 3σ para o parâmetro p_j são os limites superior e inferior dos menores intervalos de integração possíveis que correspondem a 68, 26%, 95, 44% e 99, 73% de probabilidade respectivamente.

Para se determinar o intervalo de 1σ , por exemplo, se deve determinar os limites de integração p_{jinf} e p_{jsup} , tais que

$$\int_{p_{jinf}}^{p_{jsup}} P_N(p_j) dp_j = 0,6826 \quad , \quad (\text{A.6})$$

¹essa integração é chamada de marginalização

em que $P_N(p_j)$ é a distribuição de probabilidade normalizada de p_j . O intervalo $[p_{jinf}, p_{jsup}]$ deve ser o menor possível. Quando não há degenerescência entre os parâmetros, o conjunto formado pelos melhores ajustes individuais coincide com o formado pelo melhor ajuste global.

No caso em que a pdf da variável aleatória y é a distribuição Gaussiana e dado o conjunto de medidas $\{y_i\}$, sendo esses dados independentes (covariantes), temos que

$$\mathcal{L}(y_i|y_{0i}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y_{0i}}{\sigma_i} \right)^2 \right] . \quad (\text{A.7})$$

Ao invés de usar a função de verossimilhança, muitas vezes é mais conveniente usar seu logaritmo. Como o logaritmo é uma função monotonicamente crescente, os valores dos parâmetros que maximizam a função verossimilhança também maximizam seu logaritmo. Dessa forma, a equação (A.7) fica dada por

$$\ln \mathcal{L}(y_i|y_{0i}) = \sum_{i=1}^N \frac{-(y_i - y_{0i})^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_i) . \quad (\text{A.8})$$

Considerando que σ_i não depende dos parâmetros $\{p_j\}$, a equação (A.8) é maximizada encontrando os valores de $\{p_j\}$ que minimizam a função

$$-2 \ln \mathcal{L}(y_i|y_{0i}) \equiv \chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{-(y_i - y_{0i})^2}{\sigma_i^2} . \quad (\text{A.9})$$

Neste caso, o método de máxima verossimilhança coincide com o *método dos mínimos quadrados*.

Em cosmologia, normalmente se usa mais de um observável para inferir o conjunto $\vec{p}$ de parâmetros teóricos. Nesse caso, a função verossimilhança a ser maximizada é dada pelo produto das funções verossimilhança de cada observável individual, ou seja

$$\mathcal{L} = \prod_j \mathcal{L}_j , \quad (\text{A.10})$$

em que $\mathcal{L}_j$ é a função verossimilhança do j -ésimo observável.

Abordaremos agora o cálculo das regiões de confiança de um subconjunto contendo m dos n parâmetros de um modelo. Por exemplo: para calcular o intervalo para o qual é de 68,26% a probabilidade de estar contido o valor verdadeiro do parâmetro p , tendo

$m = 1$ e uma distribuição gaussiana, basta encontrarmos os valores $p_{min}^{1\sigma}$ e $p_{max}^{1\sigma}$ para os quais $\chi^2 = \chi_{min}^2 + 1$.

Os intervalos de 2σ e 3σ para os quais temos 95,44% e 99,73% de probabilidade, respectivamente, de encontrarmos o valor verdadeiro de p são determinados por $p_{min}^{2\sigma}$ e $p_{max}^{2\sigma}$ para os quais temos $\chi^2 = \chi_{min}^2 + 4$ e por $p_{min}^{3\sigma}$ e $p_{max}^{3\sigma}$ para os quais temos $\chi^2 = \chi_{min}^2 + 9$.

E para o caso de um subconjunto de parâmetros maior que um, como se calcula as regiões de confiança? Se tivermos uma distribuição total $P(\vec{p}|y_i, M)$ gaussiana, uma função teórica linear nos parâmetros, sendo estes não degenerados e não alterando a covariância entre os dados, se pode calcular as regiões de confiança de 1σ , 2σ e 3σ aumentando χ_{min}^2 por uma quantidade $\Delta\chi^2$ [114, 115]. Para $m = 2$, por exemplo, temos $\Delta\chi^2 = 2,30$ para a região de 68,26% de probabilidade, $\Delta\chi^2 = 6,17$ para 95,44% e $\Delta\chi^2 = 11,8$ para 99,73%.

Para o caso de a função teórica não ser linear nos parâmetros, as regiões bidimensionais definidas por $\Delta\chi^2 = 2,30$, $\Delta\chi^2 = 6,17$ e $\Delta\chi^2 = 11,8$ não mais corresponderão a 68,26%, 95,44% e 99,73% de probabilidade respectivamente. Porém quando se constrói regiões de confiança, normalmente se objetiva avaliar se existem degenerescência entre os parâmetros ou impor vínculos a estes a partir de um conjunto de dados disponíveis. Para essas finalidades, não é necessário que as regiões bidimensionais correspondam exatamente a 68,26%, 95,44% e 99,73% de probabilidade. Sendo assim, o método descrito para se construir as regiões de confiança pode ser usado como aproximação.

Apêndice B

Gás de Chaplygin

Discutimos modelos de campo escalar para a energia escura e modelos de interação desta com a matéria escura. Existe outra classe de modelos chamados energia escura unificada. O mais simples desses modelos é o Gás de Chaplygin (CG), proposto originalmente por Kamenshchick *et al* [116]. Para este modelo, consideramos um fluido com a equação de estado

$$P = -\frac{A}{\rho} \quad , \quad (\text{B.1})$$

sendo A uma constante positiva. Substituindo a equação de estado (B.1) na equação da continuidade (1.77) e integrando, obtemos

$$\rho = \rho_0 \sqrt{A_c + \frac{B_c}{a^6}} \quad , \quad (\text{B.2})$$

em que $A_c = A/\rho_0$ e $B = 1 - A_c$ são constantes. A densidade desse fluido se comporta assintoticamente da forma

$$\rho \sim \frac{\sqrt{B_c}}{a^3} \quad , \quad a \ll (B_c/A_c)^{1/6} \quad , \quad (\text{B.3})$$

$$\rho \sim -P \sim \sqrt{A_c} \quad , \quad a \gg (B_c/A_c)^{1/6} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Em tempos recentes, quando a é pequeno, o gás se comporta como poeira com pressão nula. Para tempos tardios, quando a é grande, o gás se comporta como uma constante cosmológica, levando a uma expansão acelerada. Assim, o gás de Chaplygin fornece uma possibilidade de se unificar a matéria escura e a energia escura.

No entanto, segundo [26] este modelo sofre de inconsistências com as observações de anisotropias da RCF. Elas vem do fato que as instabilidades de Jeans das perturbações do modelo do CG se comportam semelhantemente as da matéria escura fria no período dominado por poeira dado por (B.3) mas desaparecem no estágio de aceleração dado por (B.4). O efeito combinado da supressão das perturbações e um comprimento de Jeans não nulo dá origem a um forte efeito Sachs-Wolfe integrado (ISW), levando assim a uma perda de potência nas anisotropias da RCF.

Modelos mais gerais para contornar essas inconsistências foram propostos por Bento *et al.* [117], conhecido como gás de Chaplygin generalizado tem uma equação de estado na forma

$$P = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad , \quad (B.5)$$

Sendo α uma constante positiva e $\alpha = 1$ corresponde ao modelo do CG. Esse modelo é chamado gás de Chaplygin generalizado (GCG). Combinando a equação de estado (B.5) com a equação da continuidade (1.77), temos

$$\rho_{gcg} = \rho_{0gcg} \left(A_s + \frac{B_s}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)} \quad , \quad (B.6)$$

sendo ρ_{0gcg} a densidade de energia atual do GCG, $A_s \equiv A/\rho_{0gcg}^{1+\alpha}$ e $B_s \equiv 1 - A_s$. Novamente, a densidade de energia se comporta como $\rho_{gcg} \propto a^{-3}$ em tempos antigos e $\rho_{gcg} = \text{constante}$ em tempos recentes. Aparentemente, para $\alpha = 0$ o GCG se comporta como matéria escura fria mais uma constante cosmológica, enquanto para $A_s = 0$ se comporta como matéria e $A_s = 1$, se comporta como constante cosmológica.

Vínculos para esses modelos usando LBT foram obtidos em [33]. Para o modelo do gás de Chaplygin, o parâmetro de Hubble é dado por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_b(1+z)^3 + (1 - \Omega_b)(A_c + (1 - A_c)(1+z)^6)^{1/2}} \quad , \quad (B.7)$$

sendo os parâmetros a serem estimados A_c e h . A densidade de bárions é fixada por medidas do WMAP [51] em $\Omega_b h^2 = 0.0233 \pm 0.0008$. Os valores de melhor ajuste obtidos foram $A_c = 0.93$ e $h = 0.74$. Foram obtidos $0.32 \leq A_c \leq 0.98$ e $0.51 \leq h \leq 0.88$ dentro do limite de 2σ . As regiões de confiança 1σ , 2σ e 3σ estão mostradas na figura (B.1(a)). O LBT não fornece vínculos muito precisos para o modelo, sendo que é feita uma análise complementar usando BAO.

(a) As regiões de confiança 1σ , 2σ e 3σ de A_c por h para os dados de LBT.

(b) As regiões de confiança 1σ , 2σ e 3σ de A_s por α para os dados de LBT com h fixo em 0.72.

Para o modelo do gás de Chaplygin generalizado, o parâmetro de Hubble é dado pela expressão

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_b(1+z)^3 + (1 - \Omega_b)(A_s + (1 - A_s)(1+z)^{3(1+\alpha)})^{1/1+\alpha}}, \quad (\text{B.8})$$

sendo os parâmetros do modelo A_s , α . A constante de Hubble h é fixada em $h = 0.72$. Os valores de melhor ajuste obtidos foram de $A_s = 0.47$ e $\alpha = -0.85$. Na figura (B.1(b)) se pode ver que há uma degenerescência entre os parâmetros A_s e α na região 1σ . O cenário de um universo com constante cosmológica mais matéria escura ($\alpha = 0$) é descartado. Também é feita uma análise complementar usando BAO.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, Sitzungsberichte der Königlich Preubischen Akademie der Wissenschaften , 142 (1917).
- [2] W. de Sitter, Proc. Roy. Acad. Amsterdam **19**, 1217 (1917).
- [3] I. Waga, Rev. Bras. Ens. Fis. **27** (2005).
- [4] A. Friedman, Zeitschrift fur Physic **10** (1922).
- [5] A. Lemaître, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **47** (1927).
- [6] H. P. Robertson, Astrophys. J. **82** (1935).
- [7] A. G. Walker, Proc. Lond. Math. Soc. **42** (1937).
- [8] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15** (1929).
- [9] G. Gamow, Nature **162** (1948).
- [10] R. A. Alpher and R. Herman, Nature **162** (1948).
- [11] A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. **354** (1965).
- [12] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23** (1981).
- [13] A. Starobinski, Phys. Lett. **B91** (1980).
- [14] S. Perlmutter *et al.* (Supernova Cosmology Project), Astrophys.J. **517**, 565 (1999),
arXiv:astro-ph/9812133 [astro-ph] .
- [15] A. G. Riess *et al.*, Astron.J. **116**, 1009 (1998).

- [16] S. Carroll, W. Press, and E. Turner, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **30** (1992).
- [17] B. Rathra and P. Peebles, *Phys. Rev. D* **37** (1988).
- [18] B. Bassett, M. Kunz, D. Parkinson, and C. Ungarelli, *Phys. Rev. D* **68** (2003).
- [19] S. Capozziello, V. F. Cardone, M. Funaro, and S. Andreon, *Phys.Rev.* **D70**, 123501 (2004), arXiv:astro-ph/0410268 [astro-ph] .
- [20] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity* (1972).
- [21] J. N. Islam, *An introduction to mathematical cosmology* (Cambridge University Press, 2002).
- [22] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General relativity: an introduction for physicists* (Cambridge University Press, 2006).
- [23] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, Vol. 1 (2004).
- [24] S. Weinberg, *Cosmology*, Vol. 1 (2008).
- [25] B. Chaboyer, *Phys.Rept.* **307**, 23 (1998), arXiv:astro-ph/9808200 [astro-ph] .
- [26] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, *Int.J.Mod.Phys.* **D15**, 1753 (2006), arXiv:hep-th/0603057 [hep-th] .
- [27] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark energy: theory and observations* (Cambridge University Press, 2010).
- [28] M. Li, X.-D. Li, S. Wang, and Y. Wang, *Communications in Theoretical Physics* **56**, 525 (2011), arXiv:1103.5870 [astro-ph.CO] .
- [29] D. Sapone, *Int.J.Mod.Phys.* **A25**, 5253 (2010), arXiv:1006.5694 [astro-ph.CO] .
- [30] P. Ade *et al.* (Planck Collaboration), (2013), arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO] .

-
- [31] S. Micheletti, *Vínculos Observacionais em Modelos de Energia Escura Interagente*, Ph.D. thesis (2009).
- [32] M. P. Lima, *Abundância de Aglomerados de Galáxias como Observável Cosmológico*, Ph.D. thesis.
- [33] Z. Li, P. Wu, and H. Yu, JCAP **0909**, 017 (2009), arXiv:0908.3415 [astro-ph.CO] .
- [34] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, and T. Sashadri, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **364** (2005).
- [35] H. Weyl, Raum-Zeit-Materie (1923).
- [36] S. Dodelson, *Modern cosmology* (Academic press, 2003).
- [37] F. Zwicky, Helv. Phys. Acta **6**, 15 (1933).
- [38] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, Physics Reports **405**, 279 (2005).
- [39] R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago press, 2010).
- [40] C. Sneden *et al.*, Astrophys. J. **467** (1996).
- [41] C. Sneden *et al.*, Astrophys. J. **591**, 936 (2003).
- [42] W. L. Freedman, Physics Reports **333**, 13 (2000).
- [43] E. Carretta *et al.*, Astrophys. J. **533**, 215 (2000).
- [44] H. Richer *et al.*, Astrophys. J. **574** (2002).
- [45] B. Hansen *et al.*, Astrophys. J. **574** (2002).
- [46] P. de Bernardis *et al.*, Nature **404** (2000).
- [47] C. B. Netterfield *et al.*, Astrophys. J. **571** (2002).
- [48] R. Stompor *et al.*, Astrophys. J. **561** (2001).

-
- [49] R. Jimenez, P. Thejll, U. Jorgensen, J. MacDonald, and B. Pagel, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **282** (1996).
- [50] W. Freedman *et al.*, Astrophys. J. **553** (2001).
- [51] D. Spergel *et al.* (WMAP Collaboration), Astrophys.J.Suppl. **170**, 377 (2007), arXiv:astro-ph/0603449 [astro-ph] .
- [52] S. Wang, X.-D. Li, and M. Li, Phys.Rev. **D82**, 103006 (2010).
- [53] J. Ma *et al.*, Astron.J. **137** (2009).
- [54] S. Wang, Astron.J. **139** (2010).
- [55] G. Hasinger, N. Schartel, and S. Komossa, Astrophys. J. Lett. **573** (2002).
- [56] G. Hasinger *et al.*, eds., *Proceedings of the Workshop XEUS-Studying the Evolution of the Universe*.
- [57] A. Friacas, J. Alcaniz, and J. Lima, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **362** (2005).
- [58] R.-J. Yang and S. N. Zhang, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **407**, 1835 (2010), arXiv:0905.2683 [astro-ph.CO] .
- [59] A. Riess *et al.*, Astron.J. **117** (1999).
- [60] A. Riess *et al.*, The Astrophysical Journal **607**, 665 (2004).
- [61] T. Choudhury and T. Padmanabhan, Astron. Astrophys. **429** (2005).
- [62] J. Tonry *et al.*, Astrophys. J. **594** (2003).
- [63] J. Frieman, M. Turner, and D. Huterer, Ann. Rev. Astron. Astrophys **15** (2006).
- [64] B. Barris *et al.*, Astrophys. J. **602** (2004).
- [65] A. Riess *et al.*, Astrophys. J. **659** (2007).
- [66] P. Astier *et al.*, Astron. Astrophys **447** (2006).

- [67] N. Regnault *et al.*, 10.1051/0004-6361/200912446, arXiv:0908.3808 [astro-ph.IM] .
- [68] G. Miknaitis *et al.*, *Astrophys. J.* **666** (2007).
- [69] Y. Copin *et al.*, *New. Astronomy. Rev.* **50** (2006).
- [70] G. Folatelli *et al.*, *Astron.J.* **139** (2010).
- [71] J. Leaman, arXiv:1006.4611 [astro-ph.SR] .
- [72] J. A. Holtzman *et al.*, *Astron.J.* **136** (2008).
- [73] M. Kowalski *et al.*, *Astrophys. J.* **686** (2008).
- [74] M. Hicken *et al.*, *Astrophys. J.* **700** (2009).
- [75] R. Amanullah *et al.*, *Astrophys. J.* **716** (2010).
- [76] N. Suzuki *et al.*, , 85arXiv:1105.3470 [astro-ph.CO] .
- [77] S. Podariu, R. Daly, M. Mory, and B. Ratra, *Astrophys. J.* **584** (2003).
- [78] R. Daly and E. Guerra, *Astron.J.* **124** (2002).
- [79] D. Hooper and S. Dodelson, *Astropart.Phys.* **27**, 113 (2007), arXiv:astro-ph/0512232 [astro-ph] .
- [80] G. F. Smoot *et al.*, *Astrophys. J.* **396** (1992).
- [81] L. Page *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003).
- [82] G. Aldering *et al.* (SNAP Collaboration), (2002), arXiv:astro-ph/0209550 [astro-ph] .
- [83] R. R. Caldwell and E. V. Linder, *Phys. Rev. Lett* **95** (2005).
- [84] I. Zlatev, L. M. Wang, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett* **82** (1999).
- [85] P. Binetruy, *Phys. Rev. D* **60** (1999).
- [86] P. Brax, *Phys. Lett. B* **468** (1999).

-
- [87] A. D. Linde, Phys. Lett. B **129** (1983).
- [88] J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, and I. Waga, Phys. Rev. Lett **75** (1995).
- [89] R. Caldwell, Phys. Lett. B **545** (2002).
- [90] S. Carroll, M. Hoffman, and M. Trodden, Phys. Rev. D **68** (2003).
- [91] L. Amendola, Phys.Rev. **D62**, 043511 (2000), arXiv:astro-ph/9908023 [astro-ph] .
- [92] G. Olivares, F. Atrio-Barandela, and D. Pavon, Phys.Rev. **D74**, 043521 (2006), arXiv:astro-ph/0607604 [astro-ph] .
- [93] J.-H. He and B. Wang, JCAP **0806**, 010 (2008), arXiv:0801.4233 [astro-ph] .
- [94] J.-H. He, B. Wang, and E. Abdalla, Phys.Rev. **D83**, 063515 (2011), arXiv:1012.3904 [astro-ph.CO] .
- [95] A. A. Costa, X.-D. Xu, B. Wang, E. G. M. Ferreira, and E. Abdalla, Phys.Rev. **D89**, 103531 (2014), arXiv:1311.7380 [astro-ph.CO] .
- [96] D. Tonoiu, A. Caramete, and L. Popa, Rom.Rep.Phys. **63**, 879 (2011).
- [97] L. Samushia, A. Dev, D. Jain, and B. Ratra, Phys.Lett. **B693**, 509 (2010), arXiv:0906.2734 [astro-ph.CO] .
- [98] M. Dantas, J. Alcaniz, and N. Pires, Phys.Lett. **B679**, 423 (2009), arXiv:0901.2327 [astro-ph.CO] .
- [99] A. Lewis and S. Bridle, Phys.Rev. **D66**, 103511 (2002), arXiv:astro-ph/0205436 [astro-ph] .
- [100] A. Lewis, Phys. Rev. **D66** (2013).
- [101] C. Feng, B. Wang, E. Abdalla, and R.-K. Su, Phys.Lett. **B665**, 111 (2008), arXiv:0804.0110 [astro-ph] .
- [102] A. Riess, L. Macri, S. Casertano, H. Lampeitl, H. Ferguson, *et al.*, Astrophys. J. **730** (2011).

-
- [103] J. Simon, L. Verde, and R. Jimenez, Phys. Rev. D **71** (2005).
- [104] R. Jimenez, J. MacDonald, J. Dunlop, P. Padoan, and J. Peacock, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **349** (2004).
- [105] R. Abraham *et al.*, Astron.J. **127** (2004).
- [106] P. McCarthy *et al.*, Astrophys. J. **614** (2008).
- [107] J. S. Dunlop *et al.*, Nature **381** (1996).
- [108] L. Knox, N. Christensen, and C. Skordis, Astrophys. J. **563** (2001).
- [109] L. M. Krauss, (2003), arXiv:astro-ph/0301012 [astro-ph] .
- [110] R. Cayrel *et al.*, Nature **409** (2001).
- [111] D. Pavon and B. Wang, Gen.Rel.Grav. **41**, 1 (2009), arXiv:0712.0565 [gr-qc] .
- [112] B. Wang, J. Zang, C.-Y. Lin, E. Abdalla, and S. Micheletti, Nucl.Phys. **B778**, 69 (2007), arXiv:astro-ph/0607126 [astro-ph] .
- [113] R. Trotta, Contemp. Phys. **49** (2008).
- [114] L. Verde, (2007), arXiv:0712.3028 [astro-ph] .
- [115] B. Flannery, W. Press, S. Teukolsky, and W. Vetterling, Press Syndicate of the University of Cambridge, New York (1992).
- [116] A. Kameschik, U. Moschella, and V. Pasquier, Phys. Lett. B **511** (2001).
- [117] M. Bento, O. Bertolami, and A. Sen, Phys. Rev. D **66** (2002).