

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

**Estudo das propriedades não-extensivas das
colisões ultrarelativísticas**

LUCAS MARQUES

ORIENTADOR: PROF. DR. AIRTON DEPPMAN

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Ciências.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Airton Deppman (IF-USP)

Prof. Dr. Marcelo Gameiro Munhoz (IF-USP)

Prof. Dr. Tobias Frederico (ITA)

São Paulo

2014

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio de comunicação ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Marques, Lucas

Estudo das propriedades não-extensivas das colisões ultrarelativística. São Paulo, 2014.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. Física Experimental.

Orientador: Prof. Dr. Airton Deppman

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1.Física; 2. Física experimental; 3. Física estatística; 4. Plasma de Quark e Glúons; 5. Colisões ultrarelativísticas.

USP/IF/SBI-068/2014

Lucas Marques

***Estudo das propriedades não-extensivas das colisões
ultrarelativísticas***

Orientador:
Dr. Airton Deppman

USP – UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

São Paulo – SP

2014

A meus pais, Daniel e Edna.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade, capacidade e por todo o cuidado durante a minha jornada acadêmica.

A meus pais, Daniel e Edna, e a meu irmão, Gabriel, por todo auxílio, incentivo e principalmente pela oportunidade de educação.

Ao meu orientador e amigo, prof. Dr. Airton Deppman, pela orientação, dedicação e disponibilidade com a qual sempre pude contar durante a realização deste trabalho. Ao prof. Dr. Jean Cleymans pelo convite para desenvolver parte do projeto de pesquisa na Universidade de Cape Town e aos professores da Universidade Estadual de Londrina pela minha formação acadêmica.

Aos amigos Evandro e Suelen pelo auxílio computacional e discussões teóricas relacionadas ao projeto de pesquisa e também à Denise, Israel, Marco, Pâmela e Ziani por todo o apoio e incentivo.

À FAPESP pelo suporte financeiro durante a realização deste projeto, como também à rede pública de ensino e ao contribuinte brasileiro.

“Não fui eu que lhe ordenei? Seja forte e corajoso! Não se apavore, nem se desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar.”

Resumo

Neste trabalho estudamos a aplicabilidade dos conceitos de autoconsistência de R. Hagedorn [1] e de não-extensividade de acordo com a estatística de Tsallis [2]. Estes dois conceitos podem ser associados de acordo com a teoria autoconsistente não-extensiva [3]. A análise dos dados de distribuição de momento transversal e do espectro de massa de hádrons permite testar a aplicabilidade desses conceitos, e neste trabalho desenvolvemos esta análise para dados obtidos em colisões $p - p$ em energias ultrarelativísticas. Os resultados obtidos nessas análises confirmam a idéia de Hagedorn da existência de uma temperatura limite para sistemas hadrônicos e também é observado uma ótima descrição do espectro de massa hadrônico pela TACNE [4]. Parte dos resultados deste trabalho está publicada na *Physical Review D* 87, 114022 (2013).

Palavras-Chave: Estatística Não-Extensiva; Espectro de Massa; Distribuição de Momento Transversal; C. Tsallis; R. Hagedorn.

Abstract

In this work, we study the applicability of the concepts of self-consistency by R. Hagedorn [1] and non-extensivity according to the Tsallis statistic [2]. These two concepts can be associated in accordance with the self-consistency non-extensive theory [3]. The analysis of distribution data of transverse momentum and mass spectrum allow hadron test applicability of these concepts, and in this work we developed this analysis for data obtained from $p - p$ collisions at ultrarelativistic energies. The results of these analysis support the idea of the existence of a Hagedorn's temperature threshold for hadronic systems and a very good description of the hadronic mass spectrum by the self-consistency non-extensive theory is also verified [4]. Part of this work is published in Physical Review D 87, 114022 (2013).

Keyword: Statistic Non-Extensive; Mass Spectrum; Transverse Momentum Distribution; C. Tsallis; R. Hagedorn.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 21
2	Metodologia	p. 26
2.1	Mecânica Estatística	p. 26
2.1.1	Estatística de Boltzmann-Gibbs	p. 27
2.1.2	Gás Ideal Quântico	p. 28
2.2	Teoria de Hagedorn	p. 31
2.3	Estatística de Tsallis	p. 33
2.4	Teoria Autoconsistente Não-Extensiva	p. 40
2.5	Plataforma ROOT	p. 42
3	Resultados e Discussão	p. 43
3.1	Estudo da distribuição de p_T	p. 43
3.2	Hagedorn vs. Tsallis	p. 48
3.3	Matriz de Variâncias e Covariâncias	p. 51
3.4	Estudo do Espectro de Massa Hadrônico	p. 53

3.5	Comparação com a Literatura	p.55
4	Conclusões	p. 58
	Apêndice A -	p. 60
	Apêndice B -	p. 63
	Referências Bibliográficas	p. 78

Lista de Figuras

1.1	Figura representativa dos respectivos sabores, gerações e cargas elétricas dos quarks.	p. 21
3.1	Dados experimentais de distribuição de p_T para π^\pm e K^\pm obtidas a partir dos experimentos ALICE [19] e CMS [45] em $\sqrt{s} = 0.9$ TeV. (a) Partículas identificadas positivas. (b) Partículas identificadas negativas.	p. 45
3.2	Ajustes aos dados experimentais de distribuição de p_T utilizando a Eq. 3.1. (a) π^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.074 \pm 0.008)$ GeV, $q = 1.128 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.07$ [17] (b) Λ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.024)$ GeV, $q = 1.108 \pm 0.014$, $\chi_{red}^2 = 0.06$ [18] (c) K^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.105 \pm 0.023)$ GeV, $q = 1.131 \pm 0.040$, $\chi_{red}^2 = 0.28$ [45] e (d) ϕ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.094 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.152 \pm 0.016$, $\chi_{red}^2 = 0.07$ [20].	p. 46
3.3	Temperatura efetiva do sistema hadrônico para cada partícula estudada (Tabela 3.1 ou 3.2) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando a Eq. 3.1.	p. 47
3.4	Índice entrópico do sistema hadrônico para cada partícula estudada (Tabela 3.1 ou 3.2) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando a Eq. 3.1.	p. 48
3.5	Comparação entre o valor da temperatura efetiva do sistema hadrônico para cada partícula estudada (Tabela 3.1) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando as Eqs. 3.1 (pontos azuis) e 3.3 (pontos vermelhos).	p. 50

3.6	Comparação entre o valor do índice entrópico do sistema hadrônico para cada partícula estuda (Tabela 3.1) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando as Eqs. 3.1 (pontos azuis) e 3.3 (pontos vermelhos).	p. 50
3.7	Curvas obtidas através da matriz de variâncias e covariâncias fornecida pelo ajuste da Eq. 3.1 aos dados experimentais. (a) π^+ ($\sqrt{s} = 0.2$ TeV) [17] (b) Λ ($\sqrt{s} = 0.9$ TeV) [18] (c) K^- ($\sqrt{s} = 2.76$ TeV) [45] e (d) ϕ ($\sqrt{s} = 7.0$ TeV) [20]. Os valores mostrados na parte superior direita de cada figura é a matriz de variâncias e covariâncias.	p. 52
3.8	Espectro de massa hadrônica acumulado [23]. As curvas azul e vermelha foram ajustadas utilizando as Eq. 3.6 e 3.9, respectivamente. Os valores dos parâmetros correspondentes ao melhor ajuste se encontram na Tabela 3.3. . .	p. 54
3.9	Comparação entre os valores do parâmetro T determinado em diferentes trabalhos [4, 33, 40].	p. 56
3.10	Comparação entre os valores do parâmetro q determinado em diferentes trabalhos [4, 33, 40].	p. 57
B.1	π^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.074 \pm 0.008)$ GeV, $q = 1.128 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.07$.	p. 63
B.2	π^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.008)$ GeV, $q = 1.119 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.06$.	p. 64
B.3	K^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.046 \pm 0.028)$ GeV, $q = 1.162 \pm 0.029$, $\chi_{red}^2 = 0.04$.	p. 64
B.4	K^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.060 \pm 0.027)$ GeV, $q = 1.146 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.07$.	p. 64
B.5	P^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.051 \pm 0.016)$ GeV, $q = 1.112 \pm 0.009$, $\chi_{red}^2 = 0.18$.	p. 65
B.6	P^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.065 \pm 0.016)$ GeV, $q = 1.102 \pm 0.008$, $\chi_{red}^2 = 0.11$.	p. 65
B.7	P^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.040 \pm 0.011)$ GeV, $q = 1.114 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.20$.	p. 65
B.8	P^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.054 \pm 0.011)$ GeV, $q = 1.103 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.13$.	p. 66
B.9	π^0 , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.083 \pm 0.033)$ GeV, $q = 1.137 \pm 0.024$, $\chi_{red}^2 = 0.08$.	p. 66

- B.10 π^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.070 \pm 0.002)$ GeV, $q = 1.148 \pm 0.005$, $\chi_{red}^2 = 0.12$. p. 66
- B.11 π^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.072 \pm 0.002)$ GeV, $q = 1.145 \pm 0.005$, $\chi_{red}^2 = 0.07$. p. 67
- B.12 π^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.068 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.161 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.15$. p. 67
- B.13 π^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.067 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.166 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.35$. p. 67
- B.14 K_s^0 , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.096 \pm 0.013)$ GeV, $q = 1.132 \pm 0.010$, $\chi_{red}^2 = 0.05$. p. 68
- B.15 K^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.058 \pm 0.014)$ GeV, $q = 1.174 \pm 0.017$, $\chi_{red}^2 = 0.19$. p. 68
- B.16 K^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.065 \pm 0.013)$ GeV, $q = 1.161 \pm 0.017$, $\chi_{red}^2 = 0.12$. p. 68
- B.17 K^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.078 \pm 0.022)$ GeV, $q = 1.157 \pm 0.037$, $\chi_{red}^2 = 0.09$. p. 69
- B.18 K^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.066 \pm 0.023)$ GeV, $q = 1.178 \pm 0.038$, $\chi_{red}^2 = 0.06$. p. 69
- B.19 P^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.020 \pm 0.033)$ GeV, $q = 1.158 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.27$. p. 69
- B.20 P^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.058 \pm 0.021)$ GeV, $q = 1.139 \pm 0.019$, $\chi_{red}^2 = 0.24$. p. 70
- B.21 P^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.053 \pm 0.034)$ GeV, $q = 1.132 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.28$. p. 70
- B.22 P^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.048 \pm 0.021)$ GeV, $q = 1.146 \pm 0.018$, $\chi_{red}^2 = 0.52$. p. 70
- B.23 Λ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.024)$ GeV, $q = 1.108 \pm 0.014$, $\chi_{red}^2 = 0.06$. p. 71
- B.24 Ξ^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.118 \pm 0.047)$ GeV, $q = 1.091 \pm 0.024$, $\chi_{red}^2 = 0.16$. p. 71
- B.25 π^+ , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.062 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.187 \pm 0.008$, $\chi_{red}^2 = 0.21$. p. 71
- B.26 π^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.065 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.181 \pm 0.008$, $\chi_{red}^2 = 0.24$. p. 72
- B.27 K^+ , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.093 \pm 0.024)$ GeV, $q = 1.151 \pm 0.041$, $\chi_{red}^2 = 0.11$. p. 72
- B.28 K^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.105 \pm 0.023)$ GeV, $q = 1.131 \pm 0.040$, $\chi_{red}^2 = 0.28$. p. 72
- B.29 P^+ , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.053 \pm 0.025)$ GeV, $q = 1.162 \pm 0.022$, $\chi_{red}^2 = 0.64$. p. 73
- B.30 P^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.096 \pm 0.023)$ GeV, $q = 1.123 \pm 0.020$, $\chi_{red}^2 = 0.68$. p. 73
- B.31 π^0 , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.092 \pm 0.007)$ GeV, $q = 1.148 \pm 0.004$, $\chi_{red}^2 = 0.04$. p. 73

- B.32 π^+ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.061 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.197 \pm 0.009$, $\chi_{red}^2 = 0.54$. p. 74
- B.33 π^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.062 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.196 \pm 0.009$, $\chi_{red}^2 = 0.37$. p. 74
- B.34 K_s^0 , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.110 \pm 0.014)$ GeV, $q = 1.150 \pm 0.010$, $\chi_{red}^2 = 0.01$. p. 74
- B.35 K^+ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.108 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.141 \pm 0.044$, $\chi_{red}^2 = 0.08$. p. 75
- B.36 K^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.090 \pm 0.027)$ GeV, $q = 1.172 \pm 0.048$, $\chi_{red}^2 = 0.16$. p. 75
- B.37 η , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.117 \pm 0.043)$ GeV, $q = 1.147 \pm 0.023$, $\chi_{red}^2 = 0.02$. p. 75
- B.38 K^* , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.030)$ GeV, $q = 1.166 \pm 0.021$, $\chi_{red}^2 = 0.05$. p. 76
- B.39 P^+ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.057 \pm 0.029)$ GeV, $q = 1.179 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.28$. p. 76
- B.40 P^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.054 \pm 0.029)$ GeV, $q = 1.182 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.34$. p. 76
- B.41 ϕ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.094 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.152 \pm 0.016$, $\chi_{red}^2 = 0.07$. p. 77
- B.42 Λ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.129 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.114 \pm 0.013$, $\chi_{red}^2 = 0.04$. p. 77
- B.43 Ξ^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.190 \pm 0.050)$ GeV, $q = 1.095 \pm 0.024$, $\chi_{red}^2 = 0.07$. p. 77

Lista de Tabelas

- 3.1 Relação do conjunto de dados experimentais que foram estudados. p. 44
- 3.2 Resultados dos parâmetros T e q e do χ_{red}^2 que foram obtidos através do ajuste da Eq. 3.1 aos dados experimentais. p. 47
- 3.3 Valores dos parâmetros ajustados a curva do espectro de massa acumulativa dos hádrôns utilizando as Eq. 3.6 e 3.9. p. 55
- 3.4 Valores dos parâmetros T e q obtidos em diferentes trabalhos. p. 56

1 Introdução

O homem sempre se perguntou sobre o que constitui a matéria e como observar as partículas que compõe tudo ao nosso redor. Com o passar dos séculos, o conhecimento humano foi se acumulando de tal maneira que nos dias atuais é possível observar indiretamente partículas fundamentais da natureza, como por exemplo as partículas que constituem os hádrons, ou seja, os quarks, q , e os glúons, g (os glúons são responsáveis pela interação forte entre os quarks) [5]. Segundo o modelo padrão de partículas existem apenas seis tipos de quarks no universo e combinações dessas partículas resultam nos bárions e nos mésons, os bárions são constituídos por três quarks, qqq , ou três antiquarks, $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$, e os mésons são constituídos por um par quark-antiquark, $q\bar{q}$ [5]. Todas as partículas que são compostas por quarks ou antiquarks são denominadas hádrons. Os quarks são organizados por sabores e são divididos em três gerações (ver Fig. 1.1).

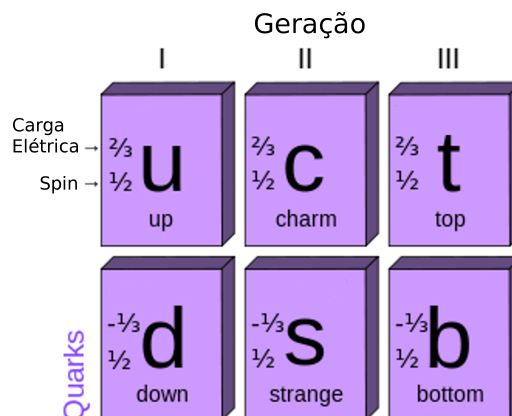


Figura 1.1: Figura representativa dos respectivos sabores, gerações e cargas elétricas dos quarks.

Além da carga elétrica, os quarks possuem um outro tipo de carga, a carga de cor. A existência dessa carga foi proposta nos anos 70 e tem como base teórica a Cromodinâmica

Quântica (QCD - *Quantum Chromodynamics*) [6]. A QCD é a teoria que descreve a interação forte, ou seja, interação entre os quarks que é intermediada pelos glúons. Essa teoria interpreta também o comportamento de confinamento dos quarks e explica o porquê essas partículas não são encontradas sozinhas na natureza (desconfinadas).

A idéia fundamental da QCD é que os quarks possuem cargas de cores e que formam estados ligados de maneira que a carga de cor total seja branca. No caso dos bárions, cada um dos três quarks (ou antiquarks) possui uma carga de cor, podendo ser vermelho, verde ou azul. Confinados dentro do bárion, cada quark contribui com sua carga de cor de tal maneira que a carga de cor desse hádron seja branca. No caso dos mésons, que são compostos por um par quark-antiquark, a carga de cor do \bar{q} é inversa à carga de cor do q , resultando assim na carga de cor branca para o méson.

Embora seja possível observar experimentalmente algumas partículas fundamentais, como por exemplo, os elétrons, a observação dos quarks não é uma tarefa simples, pois essas partículas geralmente estão confinadas dentro de algum hádron. Para que seja possível estudar esses quarks é necessário acelerar íons pesados (hádrons) a altas energias a fim de colidi-los e “quebrá-los”. No momento dessas colisões de hádrons a altas energias, acredita-se ser observado, de maneira indireta, a formação de um estado da matéria, denominado plasma. Este plasma é constituído por quarks e glúons e é conhecido como QGP (*Quark-Gluon Plasma*) [7, 8]. No QGP, os quarks estão desconfinados, mas após um pequeno intervalo de tempo ocorre a hadronização, ou seja, esses quarks começam a se juntar formando novos hádrons e consequentemente tornam-se confinados novamente [7, 8]. O estudo do QGP é realizado de maneira indireta pois são observadas apenas as partículas que foram criadas após o novo confinamento, essas partículas são conhecidas como partículas secundárias. A observação dessas partículas é realizada através de detetores dispostos ao redor do ponto de colisão dos hádrons primários [9].

Em colisões de partículas, uma importante característica da colisão é a energia no centro de massa, \sqrt{s} . Essa energia é calculada utilizando a energia da partícula A, E_A , e a energia da

partícula B, E_B , ambas medidas no referencial do centro de massa. O cálculo da energia da colisão por nucleon no centro de massa é dado por [10]

$$\sqrt{s} = \frac{E_A + E_B}{c^2}. \quad (1.1)$$

A densidade de energia de colisão está intimamente relacionada com a criação do QGP, pois esse deve ser formado apenas em colisões de altas energias. Com o avanço da tecnologia, os aceleradores de partículas atuais alcançam energias de colisão de até 8 TeV (1 TeV = 10^{12} eV), podendo chegar a 14 TeV [11], porém a 70 anos a energia máxima alcançada era da ordem de MeV (10^6 eV) [12]. Por consequência do aumento da energia de colisão e da evolução da tecnologia empregada nos detetores, a precisão destes novos experimentos nos permite estudar interações fundamentais (exceto a gravitacional) e, conseqüentemente, testar teorias que até então encontravam-se limitadas pela física experimental [13].

Um grande desafio da física experimental era acelerar e colidir hádrons a energias de colisão que superassem a energia de ligação entre os quarks, formando assim um sistema constituído por quarks e glúons desconfinados. O estudo do QGP é muito importante pois, segundo modelos cosmológicos [14], logo após o *Big Bang*, existiu um plasma constituído por quarks e glúons. Portanto, para uma melhor compreensão das teorias que descrevem a origem e evolução do universo é necessário reproduzir, de maneira controlada e semelhante, esse estado da matéria.

Segundo esses modelos cosmológicos, após a criação do QGP ocorreu a hadronização e o *freeze-out*, onde esse consiste no esfriamento/espansão do sistema que deu início à formação das partículas que conhecemos hoje, ou seja, esse sistema deu início à formação da matéria que constitui tudo ao nosso redor.

Com o objetivo de uma melhor compreensão do sistema criado após a colisão hadrônica, são observadas/detetadas as partículas que são criadas na hadronização e *freeze-out* e por meio de observação das características dessas partículas secundárias é possível desenvolver e testar teorias que descrevam ou deveriam descrever esse sistema.

Considerando que esse sistema é constituído por um número muito grande de partículas,

foi proposto por Enrico Fermi e por Lev Landau que colisões de partículas poderiam formar um sistema em equilíbrio termodinâmico [15]. Uma teoria física capaz de lidar com sistemas nessas configurações é a mecânica estatística, pois essa estuda o conjunto como um todo e não cada partícula individualmente e está intimamente relacionada com as funções termodinâmicas do sistema.

Os resultados experimentais obtidos a partir da detecção das partículas secundárias “criadas” após a colisão hadrônica são geralmente apresentados na forma de seção de choque diferencial ou *yield* em função da distribuição do momento transversal, p_T , e/ou da rapidez, y . Tendo em mãos esses conjuntos de dados experimentais, é possível testar teorias que foram desenvolvidas para explicar o comportamento desses resultados experimentais e, conseqüentemente, obter informações do sistema, como por exemplo a temperatura, T .

Atualmente, há duas teorias que descrevem a seção de choque e/ou *yield* obtidos a partir de experimentos de colisões a altas energias. A primeira foi desenvolvida a partir da ideia de *fireballs* (ver seção 2.2), e é uma variação de uma equação proposta por R. Hagedorn [16] que segue a estatística de L. Boltzmann, ou seja, um sistema cuja entropia é extensiva [17, 18, 19, 20, 21]. A segunda é obtida seguindo a proposta de C. Tsallis [2] de uma entropia não-extensiva [3, 4, 22, 23].

A utilização dessas duas fórmulas para a distribuição de p_T , que surgem a partir dessas duas teorias, conduzem à determinação de uma temperatura para o sistema. Além de obterem fórmulas para a descrição da distribuição de p_T , as teorias desenvolvidas por Hagedorn [1] e por Deppman [3] (Deppman utilizou a proposta de Tsallis) também fornecem equações para o espectro de massa hadrônico. Estas equações também podem ser comparadas aos estados hadrônicos medidos. O principal objetivo desse trabalho é discutir os resultados obtidos devido à aplicação dessas duas teorias e conseqüentemente determinar a real temperatura do sistema, caso exista.

A fim de uma melhor comparação entre as propostas de o sistema formado após a colisão hadrônica ser um sistema extensivo ou não-extensivo, nesse trabalho é discutido também a

previsão teórica da curva do espectro de massa acumulado obtido através das fórmulas proposta por Hagedorn [1] e pela Teoria Autoconsistente Não-Extensiva [3].

2 *Metodologia*

Neste capítulo são apresentadas e discutidas as teorias, idéias e equações estudadas e utilizadas durante a realização deste trabalho.

2.1 *Mecânica Estatística*

As leis que se aplicam ao equilíbrio térmico são chamadas de mecânica estatística [24] e essa é considerada como sendo a união da mecânica com a teoria de probabilidade [25]. Seu grande objetivo consiste em explicar os resultados e as leis da termodinâmica a partir da análise do comportamento de um imenso número de partículas. Essa grande quantidade de partículas, da ordem do número de Avogadro ($A \approx 6 \times 10^{23}$), conduz a algumas regularidades do sistema, que são denominadas como leis estatísticas, porém a compreensão desses sistemas torna-se possível apenas se for realizado uma análise probabilística [26]. Essa análise da mecânica estatística teve um papel fundamental no desenvolvimento probabilístico utilizado na mecânica quântica [27].

A mecânica estatística realiza uma descrição microscópica do sistema [28] e está intimamente relacionada com a termodinâmica a partir das equações de estado do sistema [29, 30],

$$\begin{aligned} T &= T(S, V, N_1, \dots, N_r), \\ P &= P(S, V, N_1, \dots, N_r), \\ \mu_j &= \mu_j(S, V, N_1, \dots, N_r), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde T é a temperatura, P é a pressão, μ é o potencial químico, S é a entropia, V é o volume e

N é o número de partículas do sistema.

2.1.1 Estatística de Boltzmann-Gibbs

A forma da mecânica estatística que é conhecida atualmente foi principalmente desenvolvida por Boltzmann e Gibbs na metade do século XIX [27]. Ainda na mecânica estatística clássica, ou seja, no contexto do espaço de fase clássico no ensemble canônico, pode-se definir a *distribuição canônica de Gibbs* que é dada pela densidade de probabilidade no espaço de fase [26, 27]. Essa distribuição é dada por

$$f(q, p) = \frac{1}{Z} \text{Exp}[-\beta H(q, p)], \quad (2.2)$$

onde Z é definida como sendo a função de partição (ou soma sobre estados) do sistema e é dada por

$$\begin{aligned} Z &= \int dq dp \text{Exp}[-\beta H(q, p)] \\ &= \sum_i \text{Exp}[-\beta E_i], \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, E_i é a energia no microestado i e $H(q, p)$ é o hamiltoniano do sistema que está em equilíbrio com um reservatório térmico infinitamente grande com temperatura T .

A conexão entre a termodinâmica e o ensemble canônico é expressa pela energia livre de Helmholtz [26] que pode ser escrita na forma

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln(Z). \quad (2.4)$$

A expressão da entropia obtida a partir da energia livre de Helmholtz é dada em termos da distribuição de probabilidade e é conhecida como entropia de Shannon [26, 31]. Essa entropia é dada por

$$S = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i), \quad (2.5)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, p_i é a probabilidade do sistema estar no microestado i e

W representa o número total de microestados i acessíveis do sistema. A entropia do sistema descrito pela Eq. 2.5 é não-negativa, côncava e extensiva [32].

Para sistemas que possuem a mesma probabilidade p_i para $\forall i$, pode-se reescrever $p_i = 1/W$, ou seja, a probabilidade do sistema estar em um determinado microestado é a mesma para qualquer microestado. Substituindo $p_i = 1/W$ na Eq. 2.5, obtém-se

$$\begin{aligned} S &= -k_B \sum_{i=1}^W \frac{1}{W} \ln \left(\frac{1}{W} \right) \\ &= -k_B W \left[\frac{1}{W} (\ln(1) - \ln(W)) \right] \\ &= k_B \ln(W), \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde a Eq. 2.6 é uma equação fundamental da mecânica estatística e é conhecida como *princípio de Boltzmann*.

Uma importante característica da mecânica estatística desenvolvida a partir da entropia dada pela Eq. 2.5 é a aditividade da entropia [32], ou seja, a entropia de um sistema composto por dois subsistemas é a soma das entropias de cada subsistema. Essa aditividade está intimamente ligada, na estatística de Boltzmann, à extensividade do sistema e pode ser expressa matematicamente como

$$\begin{aligned} S^{A+B} &= -k_B \sum_k p_{AB,k} \ln(p_{AB,k}) \\ &= -k_B \sum_i \sum_j p_{A,i} p_{B,j} \ln(p_{A,i} p_{B,j}) \\ &= -k_B \sum_i \sum_j p_{A,i} p_{B,j} [\ln(p_{A,i}) + \ln(p_{B,j})] \\ &= -k_B \sum_i p_{A,i} \ln(p_{A,i}) - k_B \sum_j p_{B,j} \ln(p_{B,j}) \\ &= S^A + S^B. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.2 Gás Ideal Quântico

Considerando que um sistema hadrônico, como por exemplo o sistema formado logo após a colisão hadrônica (discutido no Capítulo 1), é formado por quarks (q) e glúons (g), esse sistema pode ser estudado como sendo um gás ideal quântico dentro de um volume V_0 , mantido a uma temperatura T .

A função de partição de um gás ideal quântico é dada por [26]

$$Z(V_0, T) = \sum_{(v)} \text{Exp} \left[-\frac{1}{T} \sum_{ij} \varepsilon_{ij} v_{ij} \right] - 1 \quad (2.8)$$

onde i representa os possíveis momentos p_i de um determinado tipo de partícula j no volume V_0 . $\varepsilon_{ij} = \sqrt{p_i^2 + m_j^2}$ é a energia associada a partícula j com momento p_i . Na somatória acima, (v) representa uma possível configuração do sistema, isto é

$$(v) = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}, \quad (2.9)$$

onde n_i é o número de partículas no i -ésimo estado de partícula independente. Naturalmente

$$\sum_i n_i = N, \quad (2.10)$$

onde N é o número de partículas do sistema. Cada elemento v_{ij} representa o número de partículas do tipo j com momento p_i . Na Eq. 2.8, foi subtraído o valor de 1 do lado direito pois a soma em (v) considera o caso de que não há partículas no sistema ($v_{ij} = 0$). Com o objetivo de simplificar as equações, define-se x_{ij} , onde

$$x_{ij} = \text{Exp} \left[-\frac{\varepsilon_{ij}}{T} \right]. \quad (2.11)$$

Reescrevendo a Eq. 2.8 adotando a definição de x_{ij} , obtém-se

$$\begin{aligned} 1 + Z(V_0, T) &= \sum_{(v)} \left[\prod_{ij} x_{ij}^{v_{ij}} \right] \\ &= \prod_{ij} \left[\sum_{(v)} x_{ij}^{v_{ij}} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por se tratar de um sistema quântico, a Eq. 2.12 engloba dois tipos de partículas, os férmions e os bósons. Os férmions são descritos pela estatística de *Fermi-Dirac* e os bósons são descritos pela estatística de *Bose-Einstein*. Para cada caso, o valor de v_{ij} é descrito como

- $v_{ij} = (0, 1)$ para férmions

$$\sum_{(v)} x_{ij}^{v_{ij}} = 1 + x_{iF}, \quad (2.13)$$

- $v_{ij} = (0, 1, 2, \dots, \infty)$ para bósons

$$\sum_{(v)} x_{ij}^{v_{ij}} = \frac{1}{1 - x_{iB}}. \quad (2.14)$$

Substituindo as Eqs. 2.13 e 2.14 na Eq. 2.12, obtem-se

$$1 + Z(V_0, T) = \prod_{iB} (1 - x_{iB})^{-1} \prod_{iF} (1 + x_{iF}). \quad (2.15)$$

Tirando o logaritmo natural da Eq. 2.15, obtem-se

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = - \sum_{iB} \ln(1 - x_{iB}) + \sum_{iF} \ln(1 + x_{iF}). \quad (2.16)$$

Para o sistema estudado, os níveis quânticos de energia são bem próximos entre si, logo, para facilitar os cálculos, pode-se realizar uma aproximação para o contínuo [15]. Passando a Eq. 2.16 para o contínuo, as somatórias dessa equação são substituídas por integrais seguindo as seguintes relações

- para a somatória em i , que é realizada sobre os momentos p_i ,

$$\sum_i [\dots] \rightarrow \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 [\dots] dp, \quad (2.17)$$

- para a somatória em B e F , que é realizada sobre as massas m ,

$$\sum_{B,F} [\dots] \rightarrow \int_0^\infty \rho_{B,F}(m) [\dots] dm. \quad (2.18)$$

Substituindo as relações 2.17 e 2.18 na Eq. 2.16, obtem-se

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \left[\int_0^\infty dm [\rho_F(m) \ln(1 + x_{pm}) - \rho_B(m) \ln(1 - x_{pm})] \right]. \quad (2.19)$$

A série de Taylor para o logaritmo natural é dada por

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \\ \ln(1 - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $|x| < 1$. Substituindo as relações da Eq. 2.20 na Eq. 2.19, obtem-se

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = \frac{V_0}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty dm \int_0^\infty dp [\rho_B(m) - (-1)^n \rho_F(m)] p^2 x_{pm}^n, \quad (2.21)$$

onde $x_{pm}^n = \text{Exp}\left[\frac{-n}{T} \sqrt{p^2 + m^2}\right] < 1$. Substituindo o valor de x_{pm}^n (Eq. 2.11) e fazendo $n = 1$, a

Eq. 2.21 pode ser reescrita como

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty dm \int_0^\infty dp p^2 \rho(m) \text{Exp}\left[\frac{-1}{T} \sqrt{p^2 + m^2}\right], \quad (2.22)$$

onde $\rho(m) = \rho_B(m) + \rho_F(m)$ é a densidade de massa.

2.2 Teoria de Hagedorn

Rolf Hagedorn propôs em 1965 um modelo estatístico para explicar o que acontece com os hádrons quando esses são submetidos a colisões em altas energias. Segundo Hagedorn, logo após a colisão hadrônica é estabelecido um equilíbrio termodinâmico em um certo volume V_0 [1]. Este sistema termodinâmico é composto por um número indeterminado de hádrons excitados que deixam a região de interação formando partículas “estáveis”.

A idéia central de Hagedorn é que o sistema termodinâmico que é formado logo após a colisão é composto por hádrons excitados a diferentes graus de excitação (diferentes energias), e são denominados como *fireballs*. Um *fireball* pode ser definido como sendo [16]:

* um equilíbrio estatístico de um ilimitado e indeterminado número de *fireballs*, onde cada

fireball é *

A definição de *fireball* é recursiva e conduz ao conceito de autoconsistência do sistema termodinâmico. Com essa interpretação, pode-se relacionar a densidade de massa, $\rho(m)$, com a densidade de energia, $\sigma(E)$, desse sistema hadrônico, definindo

- $\rho(m)dm$ como sendo o número de hádrons excitados com massa entre m e $m + dm$, e
- $\sigma(E)dE$ como sendo o número de estados com energia entre E e $E + dE$ do sistema termodinâmico.

Como foi visto na seção 2.1.2, a Eq. 2.22 foi desenvolvida para descrever o gás ideal quântico, consequentemente, segundo Hagedorn essa equação deve descrever também o sistema composto por *fireballs*. Por outro lado, pode-se escrever a função de partição para o número total de estados como sendo

$$Z(V_0, T) = \int_0^\infty \sigma(E) \text{Exp} \left[\frac{-E}{T} \right] dE. \quad (2.23)$$

Igualando as Eqs. 2.22 e 2.23, obtem-se

$$\begin{aligned} Z(V_0, T) &= \text{Exp} \left[\frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty dm \int_0^\infty dp p^2 \rho(m) \text{Exp} \left[\frac{-1}{T} \sqrt{p^2 + m^2} \right] \right] - 1 \\ &= \int_0^\infty \sigma(E) \text{Exp} \left[\frac{-E}{T} \right] dE. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Expressando a condição de autoconsistência como

$$\ln[\rho(x)] \rightarrow \ln[\sigma(x)] \text{ para } x \rightarrow \infty \quad (2.25)$$

onde $x \equiv m$ ou $x \equiv E$. Considerando as condições relacionadas pelas Eqs. 2.24 e 2.25 e segundo os cálculos realizados nas refs. [1, 33], observa-se que as densidades de massa e energia do sistema devem ser

$$\begin{aligned} \rho(m) &\rightarrow \frac{a}{m^{5/2}} e^{\beta m} \text{ para } m \rightarrow \infty \\ \sigma(E) &\rightarrow b E^{\frac{aV_0}{(2\pi\beta_0)^{3/2}} - 1} e^{\beta_0 E} \text{ para } E \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde a e b são constantes, T é a temperatura do sistema, $\beta = 1/T$ e $\beta_0 = 1/T_0$. Para que sejam válidas as condições impostas por Hagedorn, a temperatura limite do sistema deve ser T_0 , já que a função de partição da Eq. 2.24 fica dada por

$$Z(V_0, \beta)_{\beta \rightarrow \beta_0} \rightarrow \left(\frac{1}{\beta - \beta_0} \right)^{\frac{aV_0}{(2\pi\beta_0)^{3/2}}}, \quad (2.27)$$

evidenciando um limite para a temperatura do sistema dada por T_0 .

A temperatura limite $T_0 = 1/\beta_0$ encontrada por Hagedorn pode ser interpretada como sendo a temperatura que marca a transição de fase entre os regimes confinados e desconfiados da matéria hadrônica [34] e seu valor é da ordem de $T_0 \approx 200$ MeV [14, 23, 35].

2.3 Estatística de Tsallis

Em 1988, C. Tsallis propôs uma generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs através de uma nova fórmula para o cálculo da entropia de um determinado sistema termodinâmico. Esta fórmula é dada por [2]

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (2.28)$$

onde q é denominado índice entrópico, W representa o número total de microestados acessíveis, p_i é a probabilidade do sistema estar no microestado i , k é uma constante positiva.

A entropia proposta por Tsallis se reduz à entropia de Shannon quando o índice entrópico

é igual a 1 ($q = 1$). Isso pode ser verificado fazendo

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \lim_{q \rightarrow 1} S_q \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i \text{Exp}[(q - 1) \ln(p_i)]}{q - 1} \\
 &\stackrel{\text{L}}{=} \lim_{q \rightarrow 1} k - \sum_{i=1}^W (p_i) \ln(p_i) \text{Exp}[(q - 1) \ln p_i] \\
 &= -k \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i), \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

onde o símbolo $\stackrel{\text{L}}{=}$ representa a aplicação da *Regra de l'Hôpital* devido a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ presente na aplicação do limite.

Para o caso de sistemas que possuem a mesma probabilidade p_i para $\forall i$, sendo W o número total de microestados acessíveis, podemos reescrever $p_i = 1/W$, ou seja, a probabilidade do sistema estar em um determinado microestado é a mesma para qualquer microestado. Substituindo $p_i = 1/W$ na Eq. 2.28 obtem-se

$$\begin{aligned}
 S_q &= k \frac{1 - W \left(\frac{1}{W}\right)^q}{q - 1} \\
 &= k \frac{1 - W^{1-q}}{q - 1}. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Realizando os mesmos cálculos da Eq. 2.30 para $q \rightarrow 1$, obtem-se

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \lim_{q \rightarrow 1} S_q \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} k \frac{1 - W^{1-q}}{q - 1} \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} k \frac{1 - \text{Exp}[(1 - q) \ln W]}{q - 1} \\
 &\stackrel{\text{L}}{=} \lim_{q \rightarrow 1} k - (-\ln W) \text{Exp}[(1 - q) \ln W] \\
 &= k \ln W, \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

onde o símbolo $\stackrel{\text{L}}{=}$ representa a aplicação da *Regra de l'Hôpital* devido a indeterminação do tipo

$\frac{0}{0}$ presente na aplicação do limite.

É observado que para $q \rightarrow 1$, a Eq. 2.30 se reduz a 2.31, e esta é conhecida como *princípio de Boltzmann* (Eq. 2.6).

A forma da entropia proposta por Tsallis conduz ao princípio de não-extensividade do sistema termodinâmico, pois a entropia dada pela Eq. 2.28 não segue a propriedade de aditividade [22], ou seja, a entropia de um sistema composto por dois subsistemas é a soma das entropias de cada subsistema mais um termo proporcional à entropia desses subsistemas [22, 36]. Matematicamente, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 S^{A+B} &= \frac{1 - \sum_k P_{AB,k}^q}{q-1} \\
 &= \frac{1 - \sum_i \sum_j P_{A,i}^q P_{B,j}^q}{q-1} \\
 &= \frac{2 - \sum_i P_{A,i}^q - \sum_j P_{B,j}^q - \left(1 - \sum_i P_{A,i}^q\right) \left(1 - \sum_j P_{B,j}^q\right)}{q-1} \\
 &= \frac{1 - \sum_i P_{A,i}^q}{q-1} + \frac{1 - \sum_j P_{B,j}^q}{q-1} - (q-1) \frac{1 - \sum_i P_{A,i}^q}{q-1} \frac{1 - \sum_j P_{B,j}^q}{q-1} \\
 &= S_q^A + S_q^B + (1-q) S_q^A S_q^B.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Como a entropia na estatística de Tsallis é não-aditiva, sistemas que obedecem esta estatística são geralmente chamados de não-extensivos.

Na fórmula mostrada na Eq. 2.32, é fácil verificar que para $q = 1$, é obtido o resultado padrão da entropia (aditiva) de Boltzmann-Gibbs (Eq. 2.7) [2, 36, 37].

No formalismo não-extensivo, a função exponencial é generalizada para a função q -exponencial [36, 38, 39]. A q -exponencial, que é a função inversa da q -logaritma, é dada por

$$\begin{aligned}
 e_q^x &= [1 + (q-1)x]^{1/(q-1)} \text{ para } x \geq 0 \\
 e_q^x &= [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \text{ para } x < 0,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

consequentemente para $q = 1$ a função q -exponencial se reduz a função exponencial, ou seja, $e_1^x = e^x$. As funções inversas das q -exponenciais dada pela Eq. 2.33 são definidas como [36, 38,

39]

$$\begin{aligned}\ln_q(x) &= \frac{x^{q-1} - 1}{q-1} \text{ para } x \geq 1 \\ \ln_q(x) &= \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \text{ para } x < 1.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Como discutido na seção 2.2, o Plasma de Quark-Glúon pode ser considerado como um gás ideal quântico. Esse gás quântico é constituído por férmions (*spin* semi-inteiro) ou bósons (*spin* inteiro), onde para férmions utiliza-se a *estatística de Fermi-Dirac* e para bósons utiliza-se a *estatística de Bose-Einstein* [26]. A entropia desse sistema termodinâmico calculada utilizando uma abordagem extensiva é dada por [40]

$$\begin{aligned}S^{FD} &= -g \sum_i [n_i \ln(n_i) + (1 - n_i) \ln(1 - n_i)] \text{ para férmions} \\ S^{BE} &= -g \sum_i [n_i \ln(n_i) - (1 + n_i) \ln(1 + n_i)] \text{ para bósons.}\end{aligned}\quad (2.35)$$

Através da Eq. 2.35 obtém-se as distribuições de *Fermi-Dirac* e *Bose-Einstein*. Essas distribuições são dadas por [40]

$$\begin{aligned}n_i^{FD} &= \left(\text{Exp} \left[\frac{\varepsilon_i - \mu}{T} \right] + 1 \right)^{-1} \text{ para férmions} \\ n_i^{BE} &= \left(\text{Exp} \left[\frac{\varepsilon_i - \mu}{T} \right] - 1 \right)^{-1} \text{ para bósons,}\end{aligned}\quad (2.36)$$

onde n_i e ε_i representam o número de partículas e a energia do orbital i , respectivamente [26]. As Eqs. 2.35 e 2.36 são obtidas utilizando a mecânica estatística extensiva. As fórmulas da Eq. 2.35 podem ser generalizadas aplicando a estatística de Tsallis (não-extensiva) no mesmo sistema hadrônico. Utilizando a estatística de Tsallis, a entropia desse mesmo sistema é dada por [40, 41, 42]

$$\begin{aligned}S_q^{FD} &= -g \sum_i [n_i^q \ln_q(n_i) + (1 - n_i)^q \ln_q(1 - n_i)] \text{ para férmions} \\ S_q^{BE} &= -g \sum_i [n_i^q \ln_q(n_i) - (1 + n_i)^q \ln_q(1 + n_i)] \text{ para bósons.}\end{aligned}\quad (2.37)$$

No limite de $q \rightarrow 1$, a Eq. 2.37 (não-extensiva) se reduz a Eq. 2.35 (extensiva). A formula-

ção de um princípio variacional em termos da Eq. 2.37 nos conduz as relações termodinâmicas [40]. Nessa estatística resulta que o número total de partículas seja

$$N = \sum_i n_i^q, \quad (2.38)$$

onde n_i representa o número de partículas no estado i e a energia do sistema é dada por

$$E = \sum_i n_i^q \varepsilon_i, \quad (2.39)$$

onde ε_i é a energia do estado i .

Para obter a *distribuição de Fermi-Dirac* (n_i) para a estatística de Tsallis, é realizado a maximização da entropia (S_q^{FD}) da Eq. 2.37 mantendo os vínculos mostrados nas Eqs. 2.38 e 2.39. Esta “extremização” é realizada pelo método variacional e conduz a

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left[S_q^{FD} + \alpha \left(N - \sum_i n_i^q \right) + \beta \left(E - \sum_i n_i^q \varepsilon_i \right) \right] = 0, \quad (2.40)$$

onde α e β são os multiplicadores de Lagrange associados ao número total de partículas e a energial total, respectivamente [40]. Calculando os termos da Eq. 2.40 separadamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_i} (S_q^{FD}) &= \frac{q}{q-1} \left[\left(\frac{1-n_i}{n_i} \right)^{q-1} \right] n_i^{q-1}, \\ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(N - \sum_i n_i^q \right) &= -q n_i^{q-1}, \\ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(E - \sum_i n_i^q \varepsilon_i \right) &= -q \varepsilon_i n_i^{q-1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Substituindo os resultados da Eq. 2.41 na Eq. 2.40, pode-se escrever

$$q n_i^{q-1} \left[\frac{1}{q-1} \left(-1 + \left(\frac{1-n_i}{n_i} \right)^{q-1} \right) - \beta \varepsilon_i - \alpha \right] = 0. \quad (2.42)$$

Explicitando o termo n_i presente na Eq. 2.42, obtem-se

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{[1 + (q-1)(\beta\varepsilon_i + \alpha)]^{\frac{1}{q-1}} + 1} \\ &= \frac{1}{e_q^{\beta\varepsilon_i + \alpha} + 1}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde os multiplicadores de Lagrange dados por α e β são $-\mu/T$ e $1/T$, respectivamente [40]. Substituindo α e β na Eq. 2.43 obtem-se a *distribuição de Fermi-Dirac* desenvolvida a partir da estatística de Tsallis. Para determinar a *distribuição de Bose-Einstein*, pode-se realizar uma abordagem idêntica a que foi realizada para a *distribuição de Fermi-Dirac*. Partindo da “extremização” de S_q^{BE}

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left[S_q^{BE} + \alpha \left(N - \sum_i n_i^q \right) + \beta \left(E - \sum_i n_i^q \varepsilon_i \right) \right] = 0, \quad (2.44)$$

obtem-se n_i , que é dado por

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{[1 + (q-1)(\beta\varepsilon_i + \alpha)]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \\ &= \frac{1}{e_q^{\beta\varepsilon_i + \alpha} - 1}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Portanto, as distribuições de FD e BE na estatística de Tsallis são dadas por

$$\begin{aligned} n_i^{FD} &= \left(\text{Exp}_q \left[\frac{\varepsilon_i - \mu}{T} \right] + 1 \right)^{-1} \text{ para férmions} \\ n_i^{BE} &= \left(\text{Exp}_q \left[\frac{\varepsilon_i - \mu}{T} \right] - 1 \right)^{-1} \text{ para bósons.} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Note que a única diferença entre as Eqs. 2.46 e 2.36 é a substituição da função exponencial pela função q -exponencial.

Para $\text{Exp}_q[\beta\varepsilon_i + \alpha] \gg 1$, a contribuição de ± 1 para férmions e bósons é irrelevante, logo pode-se escrever a distribuição de férmions e bósons como sendo

$$n_i = \text{Exp}_q \left[-\frac{\varepsilon_i - \mu}{T} \right]. \quad (2.47)$$

Para obter a fórmula do número total de partículas, substitui-se o resultado da Eq. 2.47 na

Eq. 2.38, resultado em

$$N = \sum_i \text{Exp}_q \left[-\frac{\varepsilon_i - \mu}{T} \right]^q. \quad (2.48)$$

Passando do discreto para o contínuo, $\sum_i \rightarrow V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$, pode-se reescrever a Eq. 2.48 como

$$N = gV \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[1 + (q-1) \frac{E - \mu}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (2.49)$$

Através da Eq. 2.49 determina-se a distribuição de momento em relação ao número de partículas deduzida a partir da estatística não-extensiva. Essa distribuição é dada por

$$E \frac{dN}{d^3 p} = gVE \frac{1}{(2\pi)^3} \left[1 + (q-1) \frac{E - \mu}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (2.50)$$

Reescrevendo a Eq. 2.50 em termos da rapidez, $y = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{E+p_z}{E-p_z} \right]$, da massa transversal, $m_T = \sqrt{m_0^2 + p_x^2 + p_y^2}$ e do momento transversal $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ obtém-se

$$\frac{dN}{p_T dp_T dy} = gV \frac{m_T \cosh y}{(2\pi)^2} \left[1 + (q-1) \frac{m_T \cosh y - \mu}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (2.51)$$

Os cálculos intermediários entre as Eqs. 2.50 e 2.51 são realizados no Apêndice A. Seguindo as refs. [4, 40] e fazendo $y = 0$ e $\mu = 0$, obtém-se

$$\left. \frac{dN}{dp_T dy} \right|_{y=0} = gV \frac{p_T m_T}{(2\pi)^2} \left[1 + (q-1) \frac{m_T}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (2.52)$$

A Eq. 2.52 pode ser modificada seguindo o que foi proposto por Rybczyński e Włodarczyk em [43]. Integrando a Eq. 2.52 em relação a m_T

$$\begin{aligned} \left. \frac{dN}{dy} \right|_{y=0} &= \frac{gV}{(2\pi)^2} \int_0^\infty p_T dp_T m_T \left[1 + (q-1) \frac{m_T}{T} \right]^{-\frac{q}{q-1}} \\ &= \frac{gV}{(2\pi)^2} \int_{m_0}^\infty dm_T m_T^2 \left[1 + (q-1) \frac{m_T}{T} \right]^{-\frac{q}{q-1}} \\ &= \frac{gVT}{(2\pi)^2} \left[\frac{(2-q)m_0^2 + 2m_0T + 2T^2}{(2-q)(3-2q)} \right] \left[1 + (q-1) \frac{m_0}{T} \right]^{-\frac{1}{q-1}}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $p_T dp_T = m_T dm_T$.

A partir da Eq. 2.53 é possível expressar o volume V em termos da taxa de produção de partículas por unidade de rapidez, dN/dy , temperatura T e índice entrópico q . O volume V é dado por

$$V = \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \frac{(2\pi)^2}{gT} \left[\frac{(2-q)(3-2q)}{(2-q)m_0^2 + 2m_0T + 2T^2} \right] \left[1 + (q-1)\frac{m_0}{T} \right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (2.54)$$

Substituindo o volume V na Eq. 2.52, obtem-se

$$\frac{d^2N}{dp_T dy} \Big|_{y=0} = \frac{p_T m_T}{T} \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \frac{(2-q)(3-2q)}{(2-q)m_0^2 + 2m_0T + 2T^2} \left[1 + (q-1)\frac{m_0}{T} \right]^{\frac{1}{q-1}} \left[1 + (q-1)\frac{m_T}{T} \right]^{-\frac{q}{q-1}}. \quad (2.55)$$

2.4 Teoria Autoconsistente Não-Extensiva

A idéia de autoconsistência em estados hadrônicos excitados, proposta inicialmente por Hagedorn em 1965, conduziu a uma fórmula para a função de partição desse sistema (Eq. 2.27) e, conseqüentemente, a interpretação da existência de uma temperatura limite de transição para o QGP, onde esse limite da temperatura do sistema pode ser entendido como sendo a temperatura de transição de fase do estado confinado para o desconfinado [14, 23, 35]. O conceito de autoconsistência conduziu também à fórmula da densidade de massa $\rho(m)$ (Eq. 2.26) que deveria descrever o espectro de massa hadrônico, porém essa descrição não é muito boa.

Em 2012, A. Deppman propôs uma nova teoria para explicar a autoconsistência em estados hadrônicos excitados. A idéia principal foi utilizar a abordagem idealizada por Hagedorn aplicada na mecânica estatística não-extensiva desenvolvida por Tsallis [3]. A combinação de autoconsistência com a não-extensividade conduziu a alguns resultados interessantes que serão discutidos a seguir.

A teoria de Hagedorn é baseada na equivalência entre duas funções de partição que descrevem o mesmo sistema hadrônico excitado. Essas duas fórmulas são dadas pela Eq. 2.24 e

reescritas como

$$Z(V_0, T) = \int_0^\infty \sigma(E) \text{Exp} \left[\frac{-E}{T} \right] dE, \quad (2.56)$$

e

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty dm \int_0^\infty dp p^2 \rho(m) \text{Exp} \left[\frac{-1}{T} \sqrt{p^2 + m^2} \right]. \quad (2.57)$$

Substituindo as funções exponenciais das Eqs. 2.56 e 2.57 pelas funções q -exponenciais obtidas a partir da estatística de Tsallis e trabalhando algebricamente conforme a Ref. [3], obtem-se

$$\begin{aligned} Z_q(V_0, T) &= \int_0^\infty \sigma(E) \left[1 + \frac{(q-1)E}{T} \right]^{-\frac{1}{q-1}} dE \\ &= \text{Exp} \left[\frac{V_0 T^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dm m^{3/2} \rho(m) \left[1 + \frac{(q-1)E}{T} \right]^{-\frac{1}{q-1}} \right] - 1. \end{aligned} \quad (2.58)$$

A condição de autoconsistência idealizada por Hagedorn (Eq. 2.25) também é aplicada, pois é mantida a definição de *fireball*, ou seja,

$$\ln[\rho(x)] \rightarrow \ln[\sigma(x)] \text{ para } x \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

onde $x \equiv m$ ou $x \equiv E$.

Considerando as condições relacionadas pelas Eqs. 2.58 e 2.59 e seguindo os cálculos realizados em [3], conclui-se que as densidades de massa e energia do sistema devem ser

$$\begin{aligned} \rho(m) &\rightarrow \frac{a}{m^{5/2}} \left[1 + \frac{(q-1)m}{T} \right]^{\frac{1}{q-1}} \text{ para } m \rightarrow \infty \\ \sigma(E) &\rightarrow bE^{\frac{aV_0}{(2\pi\beta_0)^{3/2}} - 1} \left[1 + \frac{(q_0-1)m}{T_0} \right]^{\frac{1}{q_0-1}} \text{ para } E \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde a e b são constantes, T é a temperatura efetiva do sistema e T_0 é a temperatura limite efetiva do sistema. O resultado obtido por Deppman (Eq. 2.60) é semelhante ao obtido por Hagedorn (Eq. 2.26), obtendo-se a temperatura limite. Porém aqui resulta também um valor definido para o índice entrópico, q_0 , para os sistemas hadrônicos, e a fórmula para o espectro

de massa, $\rho(m)$, também é diferente daquela obtida por Hagedorn.

A função de partição da Eq. 2.58 é dada por

$$Z_q(V_0, \beta)_{\beta \rightarrow \beta_0} \rightarrow \left(\frac{1}{\beta - \beta_0} \right)^{\frac{aV_0}{(2\pi\beta_0)^{3/2}}}. \quad (2.61)$$

Com isso concluí-se que a idéia de autoconsistência pode ser aplicada à mecânica estatística não-extensiva e que como consequência conduz a uma nova fórmula para descrever o espectro de massa hadrônico $\rho(m)$ (Eq. 2.60). Assim como na teoria de Hagedorn, é demonstrado também que um sistema hadrônico excitado possui uma temperatura limite T_0 , porém no sistema não-extensivo essa temperatura não é a temperatura real do sistema e sim a temperatura efetiva do mesmo.

2.5 Plataforma ROOT

Para realizar a comparação das teorias discutidas com os conjuntos de dados experimentais é necessário a utilização de um *software* próprio para esse tipo de análise, o *software* ROOT é um código desenvolvido em linguagem C++ e é dedicado a cálculos e análises de dados, em particular para a física de altas energias. As ferramentas do ROOT estão implementadas em classes. A maior parte dessas classes foram desenvolvidas de modo a não restringir seu uso apenas à física. Assim, o ROOT é facilmente utilizado em qualquer outra área, seja acadêmica ou não.

O pacote Minuit [44] é disponibilizado em forma de classe para ser incluído no ROOT e é utilizado para realizar ajuste de parâmetros, mais especificamente na minimização de funções. O Minuit é utilizado no ajuste de curvas a um conjunto de dados experimentais pela verificação da minimização do χ^2 .

O ROOT v5.34/13 foi utilizado para a realização deste trabalho.

3 *Resultados e Discussão*

Neste capítulo são mostrados e discutidos os principais resultados obtidos na análise de dados tendo em vista a teoria e os métodos apresentados no Capítulo 2.

Foi verificado que a Teoria Autoconsistente Não-Extensiva (TACNE) é capaz de reproduzir com grande concordância os dados experimentais que foram estudados, permitindo assim obter importantes grandezas termodinâmicas do sistema, como a temperatura efetiva, T e o índice entrópico, q . O principal resultado desta boa descrição dos dados experimentais a partir da teoria é que pôde-se observar a existência de uma possível temperatura de transição de fase em sistemas hadrônicos que foi primeiramente proposta por R. Hagedorn em 1965 [1], e que a expressão obtida para o espectro de massa também descreve bem os estados hadrônicos conhecidos até a massa de aproximadamente 2.0 GeV.

3.1 **Estudo da distribuição de p_T**

O conjunto dos dados experimentais utilizados no ajuste e verificação da teoria apresentada foram dados de seção de choque diferencial e de *yield* em função da distribuição de p_T obtidos a partir de diversos experimentos de colisões próton-próton. Foram analisadas partículas identificadas formadas em colisões a diferentes energias. A Tabela 3.1 relaciona cada partícula identificada à energia da colisão no centro de massa e o experimento em que foi realizado a obtenção dos dados.

Utilizando os conjuntos de dados experimentais que foram apresentados na Tabela 3.1 e a fórmula para a distribuição de momento transversal (discutido na seção 2.3) dada pela Eq. 2.55

Tabela 3.1: Relação do conjunto de dados experimentais que foram estudados.

Índice	Partícula	$\sqrt{s}(TeV)$	Exp.	Ref.	Índice	Partícula	$\sqrt{s}(TeV)$	Exp.	Ref.
1	π^+	0.2	PHENIX	[17]	23	Λ	0.9	CMS	[18]
2	π^-	0.2	PHENIX	[17]	24	Ξ^-	0.9	CMS	[18]
3	K^+	0.2	PHENIX	[17]	25	π^+	2.76	CMS	[45]
4	K^-	0.2	PHENIX	[17]	26	π^-	2.76	CMS	[45]
5	P^+	0.2	PHENIX	[17]	27	K^+	2.76	CMS	[45]
6	P^-	0.2	PHENIX	[17]	28	K^-	2.76	CMS	[45]
7	P^+	0.2	PHENIX	[17]	29	P^+	2.76	CMS	[45]
8	P^-	0.2	PHENIX	[17]	30	P^-	2.76	CMS	[45]
9	π^0	0.9	ALICE	[46]	31	π^0	7.0	ALICE	[46]
10	π^+	0.9	ALICE	[19]	32	π^+	7.0	CMS	[45]
11	π^-	0.9	ALICE	[19]	33	π^-	7.0	CMS	[45]
12	π^+	0.9	CMS	[45]	34	K_s^0	7.0	CMS	[18]
13	π^-	0.9	CMS	[45]	35	K^+	7.0	CMS	[45]
14	K_s^0	0.9	CMS	[18]	36	K^-	7.0	CMS	[45]
15	K^+	0.9	ALICE	[19]	37	η	7.0	ALICE	[46]
16	K^-	0.9	ALICE	[19]	38	K^*	7.0	ALICE	[20]
17	K^+	0.9	CMS	[45]	39	P^+	7.0	CMS	[45]
18	K^-	0.9	CMS	[45]	40	P^-	7.0	CMS	[45]
19	P^+	0.9	ALICE	[19]	41	ϕ	7.0	ALICE	[20]
20	P^-	0.9	ALICE	[19]	42	Λ	7.0	CMS	[18]
21	P^+	0.9	CMS	[45]	43	Ξ^-	7.0	CMS	[18]
22	P^-	0.9	CMS	[45]					

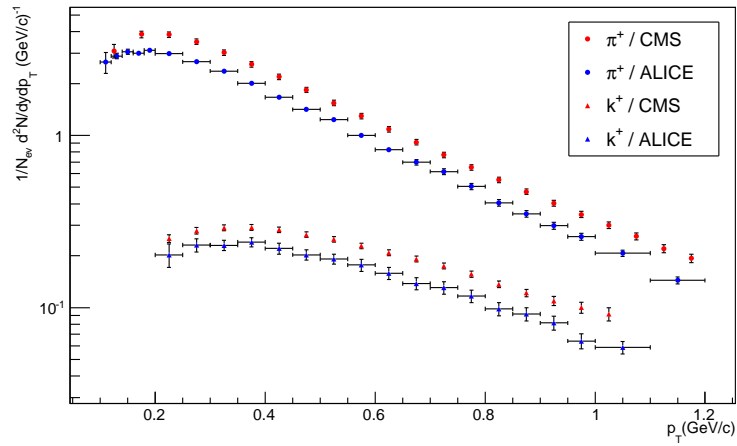
e reescrita aqui

$$\left. \frac{d^2N}{dp_T dy} \right|_{y=0} = \frac{p_T m_T}{T} \frac{dN}{dy} \frac{(2-q)(3-2q)}{(2-q)m_0^2 + 2m_0T + 2T^2} \left[1 + (q-1) \frac{m_0}{T} \right]^{\frac{1}{q-1}} \left[1 + (q-1) \frac{m_T}{T} \right]^{-\frac{q}{q-1}}, \quad (3.1)$$

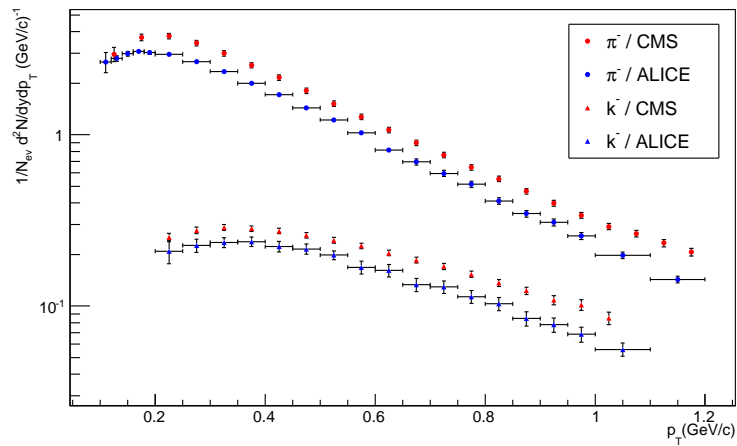
foi realizado um ajuste para cada conjunto de dados. O *software* utilizado na realização desse ajuste foi o ROOT (descrito na seção 2.5).

Os parâmetros ajustados foram T , q e dN/dy . O parâmetro dN/dy é a taxa de produção de partículas por unidade de rapidez. Em relação a esse parâmetro, não foi realizado um estudo sistemático pois quando são analisados dados experimentais de *yield* o valor da taxa de produção de partículas por unidade de rapidez varia de experimento para experimento. A Figura 3.1 compara dados experimentais de *yield* (para π^+ , π^- , K^+ e K^-) em função do momento transversal (p_T) obtidos pelos experimentos ALICE [19] e CMS [45] a $\sqrt{s} = 0.9$ TeV. Analisando essa figura verifica-se que os experimentos ALICE e CMS mostram conjuntos de dados experi-

mentais compatíveis entre si, porém apesar de o comportamento das curvas serem semelhantes, há uma clara diferença no valor absoluto destes dados experimentais, evidenciando assim a particularidade de cada experimento em relação à evidência que não se pode discutir dN/dy a partir de *yields*, pois estes ainda são influenciados por particularidades do experimento, como eficiência, ângulo sólido, etc.



(a)



(b)

Figura 3.1: Dados experimentais de distribuição de p_T para π^\pm e K^\pm obtidas a partir dos experimentos ALICE [19] e CMS [45] em $\sqrt{s} = 0.9$ TeV. (a) Partículas identificadas positivas. (b) Partículas identificadas negativas.

A Figura 3.2 mostra quatro exemplos de resultados típicos obtidos quando é realizado o ajuste aos dados experimentais. O conjunto completo dos resultados juntamente com as informações dos ajustes são mostrados no Apêndice B. A Tabela 3.2 mostra o χ_{red}^2 e os valores de

T e q do melhor ajuste obtido para os dados estudados. Em geral, os valores de χ_{red}^2 para cada um dos ajustes realizados é baixo, isso é uma característica de conjuntos experimentais que possuem incertezas superestimadas [47].

Analisando graficamente os ajustes mostrados no Apêndice B e/ou os valores listados na Tabela 3.2 é observado que a Eq. 3.1 descreve bem o comportamento dos dados experimentais para todas as partículas e energias de colisão estudadas.

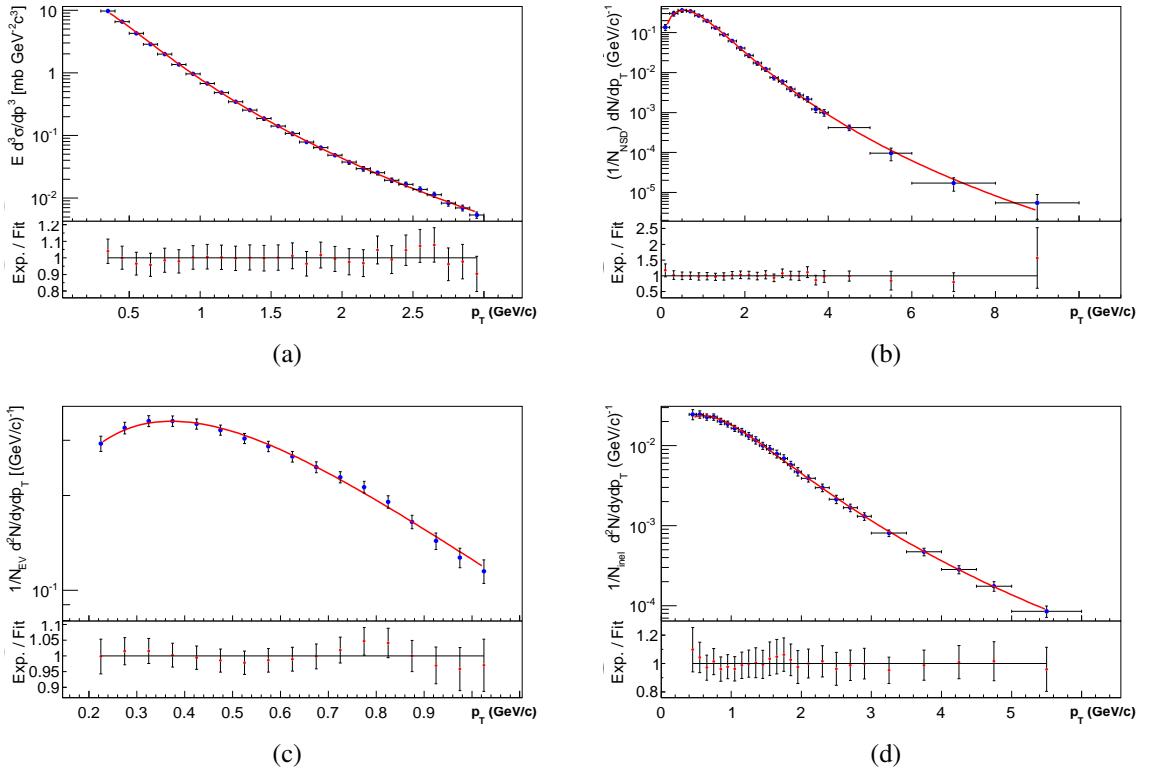


Figura 3.2: Ajustes aos dados experimentais de distribuição de p_T utilizando a Eq. 3.1. (a) π^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.074 \pm 0.008)$ GeV, $q = 1.128 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.07$ [17] (b) Λ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.024)$ GeV, $q = 1.108 \pm 0.014$, $\chi_{red}^2 = 0.06$ [18] (c) K^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.105 \pm 0.023)$ GeV, $q = 1.131 \pm 0.040$, $\chi_{red}^2 = 0.28$ [45] e (d) ϕ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.094 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.152 \pm 0.016$, $\chi_{red}^2 = 0.07$ [20].

Utilizando os resultados dos ajustes de T e q apresentados na Tabela 3.2 pode-se plotar todos os valores obtidos em um único gráfico a fim de se verificar o comportamento desses parâmetros para diferentes partículas e energias. A Figura 3.3 mostra a temperatura efetiva do sistema hadrônico para cada partícula estudada ordenada pelo índice numérico apresentado nas Tabelas 3.1 e 3.2. O gráfico mostrando na Figura 3.4 relaciona o índice entrópico em função deste mesmo índice numérico.

Tabela 3.2: Resultados dos parâmetros T e q e do χ_{red}^2 que foram obtidos através do ajuste da Eq. 3.1 aos dados experimentais.

Índ.	Part.	T (GeV)	q	χ_{red}^2	Índ.	Part.	T (GeV)	q	χ_{red}^2
1	π^+	0.074 ± 0.008	1.128 ± 0.007	0.07	23	Λ	0.081 ± 0.024	1.108 ± 0.014	0.06
2	π^-	0.081 ± 0.008	1.119 ± 0.007	0.06	24	Ξ^-	0.118 ± 0.047	1.091 ± 0.024	0.16
3	K^+	0.046 ± 0.028	1.162 ± 0.029	0.04	25	π^+	0.062 ± 0.003	1.187 ± 0.008	0.21
4	K^-	0.060 ± 0.027	1.146 ± 0.028	0.07	26	π^-	0.065 ± 0.003	1.181 ± 0.008	0.24
5	P^+	0.051 ± 0.016	1.112 ± 0.009	0.18	27	K^+	0.093 ± 0.024	1.151 ± 0.041	0.11
6	P^-	0.065 ± 0.016	1.102 ± 0.008	0.11	28	K^-	0.105 ± 0.023	1.131 ± 0.040	0.28
7	P^+	0.040 ± 0.011	1.114 ± 0.007	0.20	29	P^+	0.053 ± 0.025	1.162 ± 0.022	0.64
8	P^-	0.054 ± 0.011	1.103 ± 0.007	0.13	30	P^-	0.096 ± 0.023	1.123 ± 0.020	0.68
9	π^0	0.083 ± 0.033	1.137 ± 0.024	0.08	31	π^0	0.092 ± 0.007	1.148 ± 0.004	0.04
10	π^+	0.070 ± 0.002	1.148 ± 0.005	0.12	32	π^+	0.061 ± 0.003	1.197 ± 0.009	0.54
11	π^-	0.072 ± 0.002	1.145 ± 0.005	0.07	33	π^-	0.062 ± 0.003	1.196 ± 0.009	0.37
12	π^+	0.068 ± 0.003	1.161 ± 0.007	0.15	34	K_s^0	0.110 ± 0.014	1.150 ± 0.010	0.01
13	π^-	0.067 ± 0.003	1.166 ± 0.007	0.35	35	K_s^+	0.108 ± 0.026	1.141 ± 0.044	0.08
14	K_s^0	0.096 ± 0.013	1.132 ± 0.010	0.05	36	K^-	0.090 ± 0.027	1.172 ± 0.048	0.16
15	K^+	0.058 ± 0.014	1.174 ± 0.017	0.19	37	η	0.117 ± 0.043	1.147 ± 0.023	0.02
16	K^-	0.065 ± 0.013	1.161 ± 0.017	0.12	38	K^*	0.081 ± 0.030	1.166 ± 0.021	0.05
17	K^+	0.078 ± 0.022	1.157 ± 0.037	0.09	39	P^+	0.057 ± 0.029	1.179 ± 0.028	0.28
18	K^-	0.066 ± 0.023	1.178 ± 0.038	0.06	40	P^-	0.054 ± 0.029	1.182 ± 0.028	0.34
19	P^+	0.020 ± 0.033	1.158 ± 0.028	0.27	41	ϕ	0.094 ± 0.026	1.152 ± 0.016	0.07
20	P^-	0.058 ± 0.021	1.139 ± 0.019	0.24	42	Λ	0.129 ± 0.026	1.114 ± 0.013	0.04
21	P^+	0.053 ± 0.034	1.132 ± 0.028	0.28	43	Ξ^-	0.190 ± 0.050	1.095 ± 0.024	0.07
22	P^-	0.048 ± 0.021	1.146 ± 0.018	0.52					

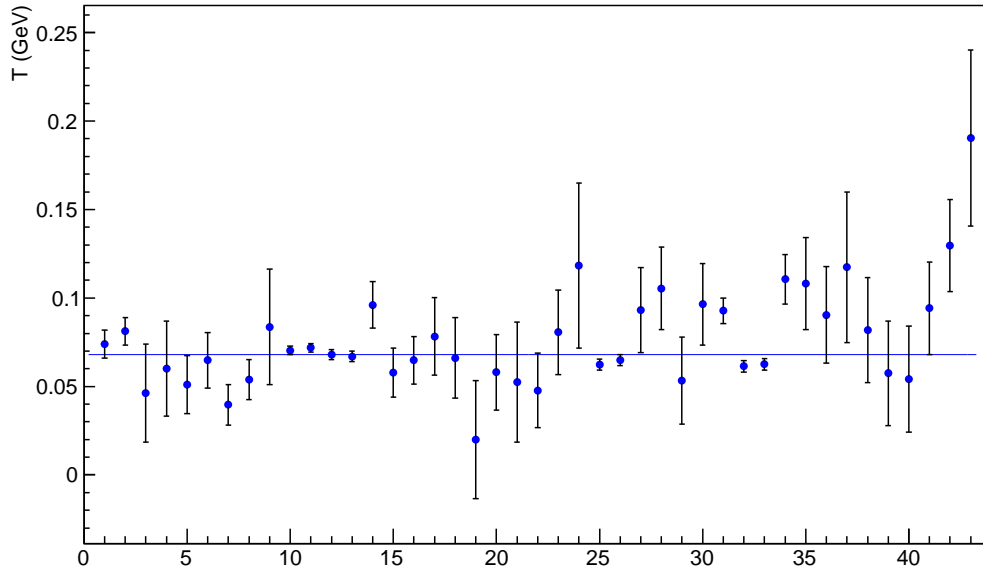


Figura 3.3: Temperatura efetiva do sistema hadrônico para cada partícula estudada (Tabela 3.1 ou 3.2) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando a Eq. 3.1.

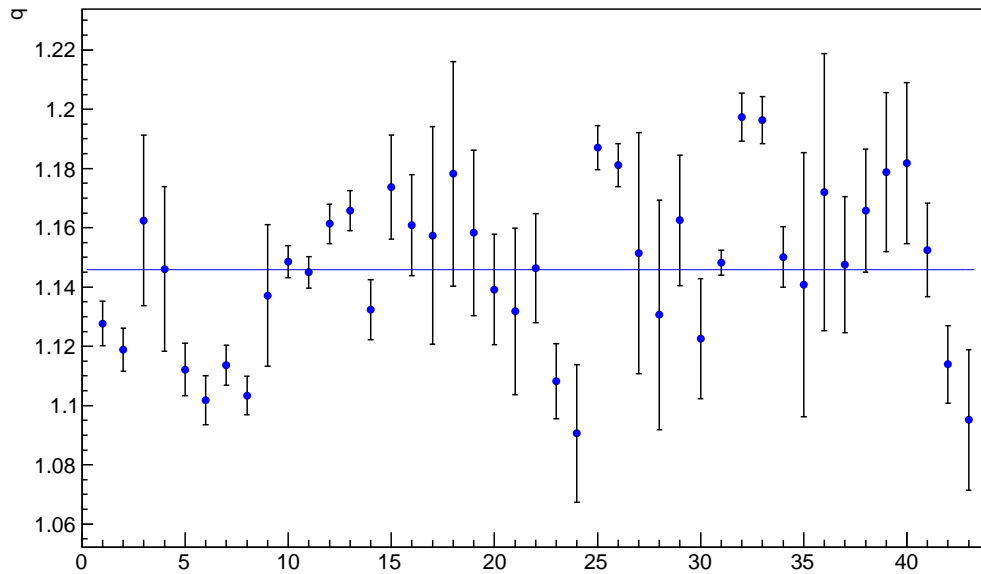


Figura 3.4: Índice entrópico do sistema hadrônico para cada partícula estudada (Tabela 3.1 ou 3.2) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando a Eq. 3.1.

Analisando a Figura 3.3 observa-se que a temperatura efetiva do sistema hadrônico está variando em torno de um intervalo entre 50 e 100 MeV. O valor médio deste parâmetro é de $T = (68 \pm 5)$ MeV. Esta temperatura não mostra dependência aparente em relação a energia de colisão e ou à energia da partícula cuja distribuição é analisada, ou seja, é observado a existência de uma temperatura constante como foi previsto pela ref. [1] e discutido recentemente nas refs. [3, 4]. A temperatura observada pode ser interpretada como sendo a temperatura efetiva de transição de fase no sistema hadrônico [3, 4].

A Figura 3.4 mostra que o valor do índice entrópico, assim como no caso da temperatura, não mostra dependência com a energia. Este parâmetro tem um comportamento aparentemente constante para a faixa de energia estudada. O valor médio do índice entrópico q é de 1.146 ± 0.004 .

3.2 Hagedorn vs. Tsallis

Atualmente, a aceitação da teoria proposta por Tsallis em 1988 [2] não está totalmente consolidada, consequentemente grande parte das análises dos dados experimentais de distribuição

de p_T não são realizados seguindo a Eq. 3.1. A função usual para este tipo de análise é dada por [17, 18, 19, 20, 21]

$$\frac{d^2N}{dp_T dy} = p_T \frac{dN}{dy} \frac{(n-1)(n-2)}{nC[nC + m_o(n-2)]} \left(1 + \frac{m_T - m_o}{nC}\right)^{-n}. \quad (3.2)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula, $m_T = \sqrt{p_T^2 + m_0^2}$ e n , nC e dN/dy são parâmetros que serão ajustados.

A Eq. 3.2 pode ser modificada seguindo a proposta discutida por Cleymans na ref. [40], onde os parâmetros n e nC são substituídos por $q/(q-1)$ e $T/(q-1)$, respectivamente. Como resultado desta adaptação é obtido a seguinte expressão:

$$\frac{d^2N}{dp_T dy} = \frac{p_T}{T} \frac{dN}{dy} \frac{q-2}{m_0(q-2) - T} \left[1 + (q-1) \frac{m_T - m_0}{T}\right]^{-\frac{q}{q-1}}. \quad (3.3)$$

É observado que a Eq. 3.3 é semelhante à Eq. 3.1, porém o fator m_T presente na Eq. 3.1 é suficiente para produzir grande diferença no valor do parâmetro T quando as duas equações são utilizadas para ajustar o mesmo conjunto de dados. Ambas as equações produzem um bom ajuste dos dados experimentais mas apenas uma indica a constância da temperatura do sistema hadrônico.

As Figuras 3.5 e 3.6 comparam os valores dos parâmetros T e q que foram ajustados utilizando as Eqs. 3.1 e 3.3. Os conjuntos dos dados experimentais utilizados na realização destes ajustes são os mesmos discutidos anteriormente (Tabela 3.1). Os parâmetros T e q são representados em função do índice numérico da Tabela 3.1. Os pontos azuis mostram os valores obtidos utilizando a Eq. 3.1 (resultado mostrado nas Figuras 3.3 e 3.4) e os pontos vermelhos mostram os valores obtidos quando a Eq. 3.3 é utilizada.

Analisando os resultados mostrados na Figura 3.5 é observado que quando os dados experimentais são ajustados seguindo a função usual (Eq. 3.3) o valor da temperatura do sistema hadrônico não apresenta um valor constante, contrariando assim a previsão da TACNE [3]. Por outro lado, quando os dados são ajustados seguindo a Eq. 3.1 é observado que há uma constância na temperatura do sistema (conforme discutido na seção 3.1).

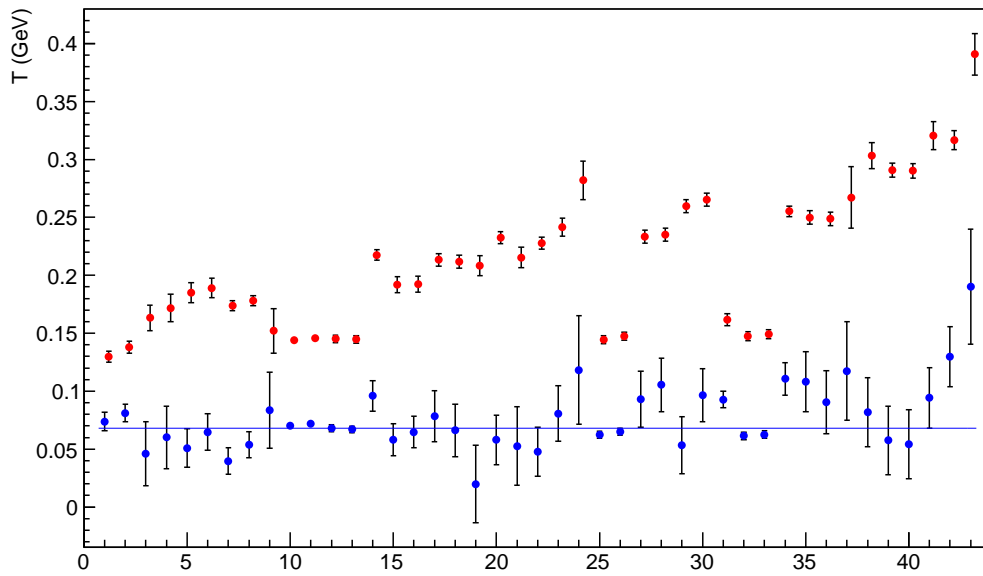


Figura 3.5: Comparação entre o valor da temperatura efetiva do sistema hadrônico para cada partícula estudada (Tabela 3.1) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando as Eqs. 3.1 (pontos azuis) e 3.3 (pontos vermelhos).

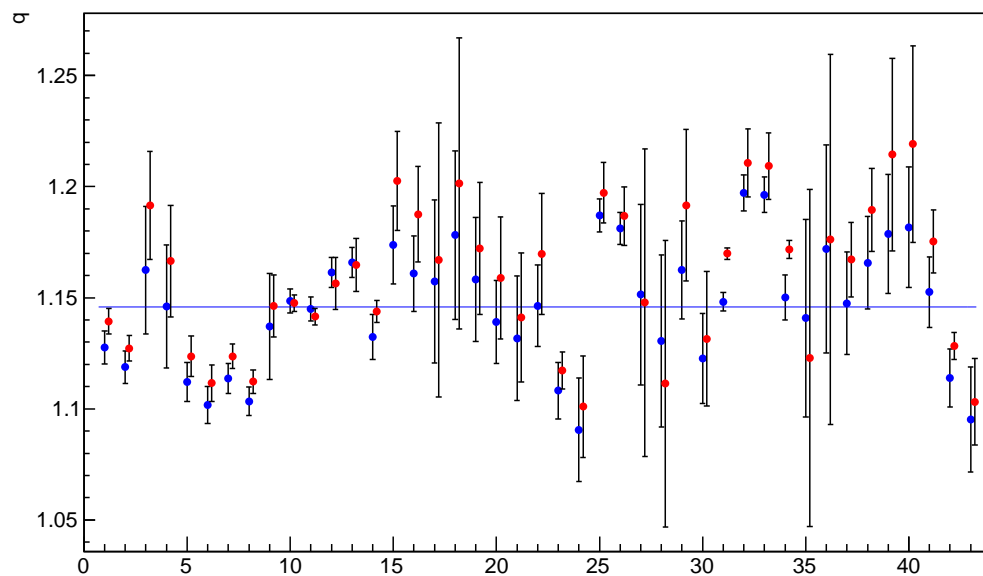


Figura 3.6: Comparação entre o valor do índice entrópico do sistema hadrônico para cada partícula estudada (Tabela 3.1) obtida através do ajuste aos dados experimentais utilizando as Eqs. 3.1 (pontos azuis) e 3.3 (pontos vermelhos).

Em relação ao parâmetro q , mostrado na Figura 3.6, ambos os ajustes possuem, em geral, os mesmos resultados. Mostrando assim que o valor médio deste parâmetro é de 1.146 ± 0.004

(conforme discutido na seção 3.1).

3.3 Matriz de Variâncias e Covariâncias

Após a realização dos ajustes descritos na seção 3.1, foi estudado se os parâmetros ajustados T e q possuíam algum tipo de correlação. A informação sobre a correlação entre dois parâmetros ajustados pode ser extraída a partir da matriz de variâncias e covariâncias que é fornecida pelo *software* ROOT no final do ajuste. Essa matriz tem a forma [47, 48],

$$\begin{pmatrix} \sigma_T^2 & \sigma_T \sigma_q \text{cor}(T, q) \\ \sigma_T \sigma_q \text{cor}(T, q) & \sigma_q^2 \end{pmatrix},$$

onde σ_T e σ_q são os erros associados aos parâmetros T e q , respectivamente e $\text{cor}(T, q)$ representa a correlação entre os parâmetros T e q . Quando o valor de $\text{cor}(T, q)$ é positivo ou negativo significa que os parâmetros T e q são correlacionados ou anti-correlacionados, respectivamente. Para $\text{cor}(T, q) = 0$, os parâmetros não possuem correlação.

Em posse da matriz de variâncias e covariâncias é possível desenhar a curva da função de densidade de probabilidade dos parâmetros ajustados T e q utilizando a função dada por [47, 48]

$$f(x, y) = \text{Exp} \left[\frac{-1}{2(1 - \text{cor}(T, q)^2)} \left(\frac{(x - T)^2}{\sigma_T^2} - \frac{2\text{cor}(T, q)(x - T)(y - q)}{\sigma_T \sigma_q} + \frac{(y - q)^2}{\sigma_q^2} \right) \right] \times \frac{1}{2\pi \sigma_T \sigma_q \sqrt{1 - \text{cor}(T, q)^2}}. \quad (3.4)$$

Substituindo os valores que são obtidos a partir da matriz de variâncias e covariâncias que é fornecida para cada ajuste na Eq. 3.4 é possível realizar gráficos onde podem ser observados os resultados da correlação entre T e q .

A Figura 3.7 mostra quatro exemplos de resultados típicos da função de densidade de probabilidade obtidos para alguns conjuntos de dados. Para todos os ajustes realizados, a curva obtida foi uma elipse com inclinação negativa, indicacando assim que os parâmetros T e q são fortemente anti-correlacionados.

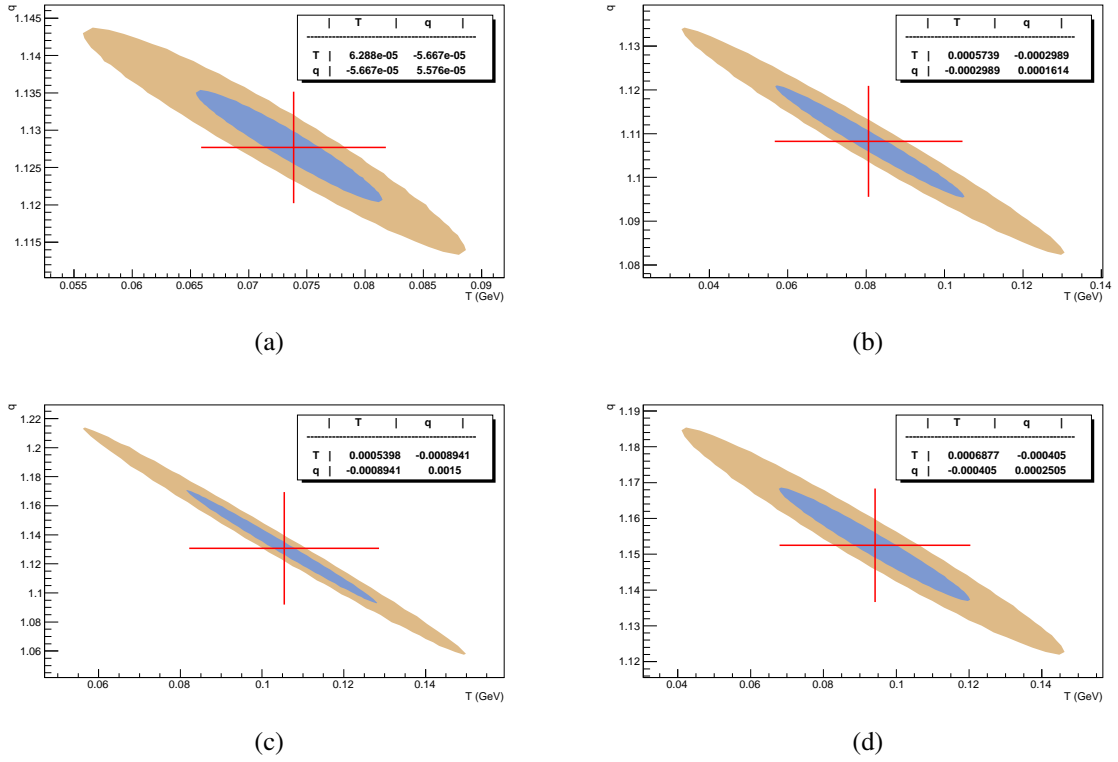


Figura 3.7: Curvas obtidas através da matriz de variâncias e covariâncias fornecida pelo ajuste da Eq. 3.1 aos dados experimentais. (a) π^+ ($\sqrt{s} = 0.2$ TeV) [17] (b) Λ ($\sqrt{s} = 0.9$ TeV) [18] (c) K^- ($\sqrt{s} = 2.76$ TeV) [45] e (d) ϕ ($\sqrt{s} = 7.0$ TeV) [20]. Os valores mostrados na parte superior direita de cada figura é a matriz de variâncias e covariâncias.

As cruces mostradas na Figura 3.7 são os valores ajustados de T e q e seus respectivos erros. As duas curvas (elipses) mostradas representam também duas curvas de níveis do χ^2 , ou seja, o χ^2 do ajuste mostrado na Tabela 3.2 permanecerá o mesmo para qualquer valor de T e q que esteja dentro da elipse azul.

Considerando que foi predito por Wilk e Wlodarczyk [49, 50] que há um comportamento linear entre T e q e analisando os gráficos mostrados na Figura 3.7, supõe-se que tal linearidade é obtida através da reta que representa o eixo principal das curvas de níveis [51] da Figura 3.7. Wilk e Wlodarczyk [52] discutem também que a temperatura efetiva na estatística de Tsallis, T , está relacionada com a temperatura de Hagedorn, T_0 , seguindo a relação

$$T = T_0 + (q - 1)c, \quad (3.5)$$

onde c é uma constante que depende das propriedades termodinâmicas do meio [53].

O valor da constante c pode ser obtido analisando os gráficos construídos a partir da matriz de variâncias e covariâncias para cada ajuste. O valor médio de c para todos os dados estudados é de (-830 ± 70) MeV. Em posse do valor médio de T , q e c , calcula-se o valor da temperatura de Hagedorn, $T_0 = (189 \pm 11)$ MeV. Este resultado está de acordo com a temperatura obtida e/ou proposta em [14, 23, 35, 51, 54].

3.4 Estudo do Espectro de Massa Hadrônico

Como é discutido na seção 2.4, a teoria estudada também conduz a uma equação que deve descrever o espectro de massa hadrônica acumulado [3, 4]. Este espectro é obtido nas Ref. [4, 23] e é ajustado pela fórmula

$$\begin{aligned} r(m) &= \int \rho(m) dm \\ &= \frac{-2\gamma}{3} m^{-3/2} {}_2F_1\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{q-1}; -\frac{1}{2}; \frac{-(q-1)m}{T}\right) + k, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde ${}_2F_1(a, b, c; z)$ é a função hipergeométrica de Gauss e $\rho(m)$ é dado pela Eq. 2.60 reproduzida aqui,

$$\rho(m) = \frac{\gamma}{m^{5/2}} \left[1 + \frac{(q-1)m}{T}\right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (3.7)$$

Os parâmetros da Eq. 3.6 que foram ajustados são T , q , k e γ , onde T e q são a temperatura efetiva do sistema hadrônico e o índice entrópico, respectivamente. A constante k é proveniente da integração em $\rho(m)$ e γ é uma constante multiplicativa. O *software* utilizado na realização desde ajuste foi o ROOT.

Outra equação muito conhecida e estudada que também é utilizada na descrição do espectro de massa hadrônica acumulado foi proposta por Hagedorn em 1965 [1, 16] e tem sido a equação usual para descrever este espectro [55, 56]. Tal fórmula é dada por

$$\rho_H(m) = \frac{\gamma_H}{m^{5/2}} \text{Exp}\left(\frac{m}{T_0}\right) \quad (3.8)$$

onde γ_H é uma constante multiplicativa, m é a massa e T_0 é a temperatura do sistema. Integrando

a Eq. 3.8 em relação a massa, obtém-se a fórmula que será utilizada para ajustar o espectro de massa acumulado. O resultado dessa integração é

$$r_H(m) = \int \rho_H(m) dm$$

$$= \gamma_H \left[e^{m/T_0} \left(\frac{-2}{3m^{3/2}} + \frac{-4}{3\sqrt{mT_0}} \right) + \frac{4\sqrt{\pi} \operatorname{Erfi}[\sqrt{m/T_0}]}{3T_0^{3/2}} \right] + k_H \quad (3.9)$$

em que $\operatorname{Erfi}[a]$ é a função erro imaginária e k_H é uma constante proveniente da integração.

A Figura 3.8 mostra os dados experimentais do espectro de massa e as curvas referentes às Eqs. 3.6 (azul) e 3.9 (vermelho) que foram ajustadas a este espectro. Os valores dos parâmetros ajustados e o χ^2 de cada ajuste são mostrados na Tabela 3.3.

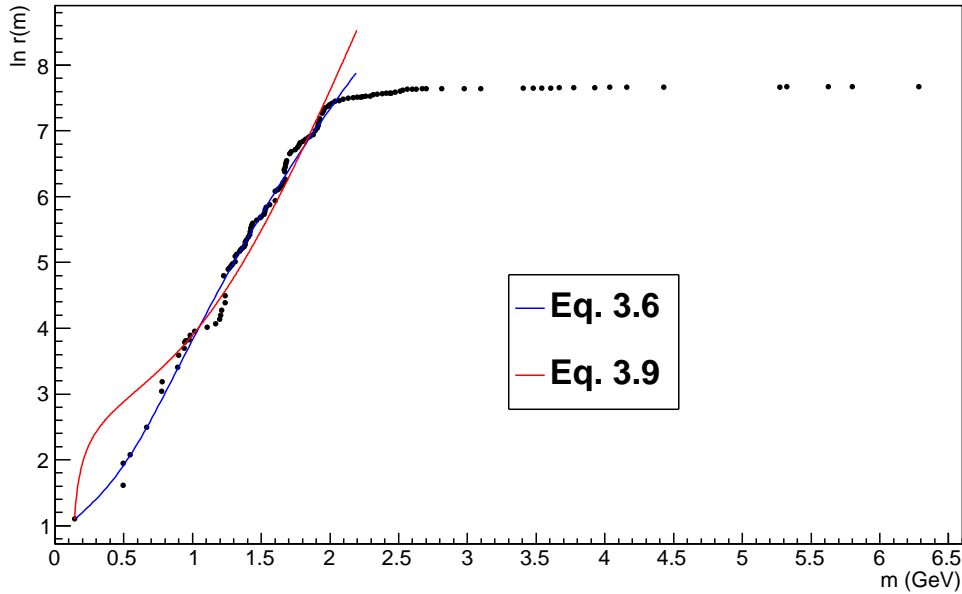


Figura 3.8: Espectro de massa hadrônica acumulado [23]. As curvas azul e vermelha foram ajustadas utilizando as Eq. 3.6 e 3.9, respectivamente. Os valores dos parâmetros correspondentes ao melhor ajuste se encontram na Tabela 3.3.

Na Figura 3.8 os melhores ajustes são mostrados e é possível observar que a curva azul (Eq. 3.6) descreve melhor os dados experimentais quando comparado com a curva vermelha (Eq. 3.9). O ajuste foi realizado até 2 GeV pois as informações acima desse valor não são consideradas confiáveis [4]. Este procedimento é usual no estudo do espectro de massa [23, 57]. Os valores de T e q que foram obtidos seguindo a Eq. 3.6 através do ajuste do espectro de massa

Tabela 3.3: Valores dos parâmetros ajustados a curva do espectro de massa acumulativa dos hádrôns utilizando as Eq. 3.6 e 3.9.

Eq.	Parâmetro	Valor Ajustado	χ^2
3.6	k	2.7 ± 0.4	2.15
	q	1.103 ± 0.007	
	T	0.052 ± 0.007 GeV	
	γ	0.005 ± 0.003 GeV ^{3/2}	
3.9	k_H	11.6 ± 0.9	10.49
	T_0	0.165 ± 0.002	
	γ_H	0.29 ± 0.03 GeV ^{3/2}	

hadrônica acumulado estão de acordo com os valores obtidos na análise da distribuição de p_T mostrados nas Figuras 3.3 e 3.4, ou seja, é observado uma boa concordância entre os resultados obtidos pela análise da distribuição de p_T e pela análise do espectro de massa.

3.5 Comparação com a Literatura

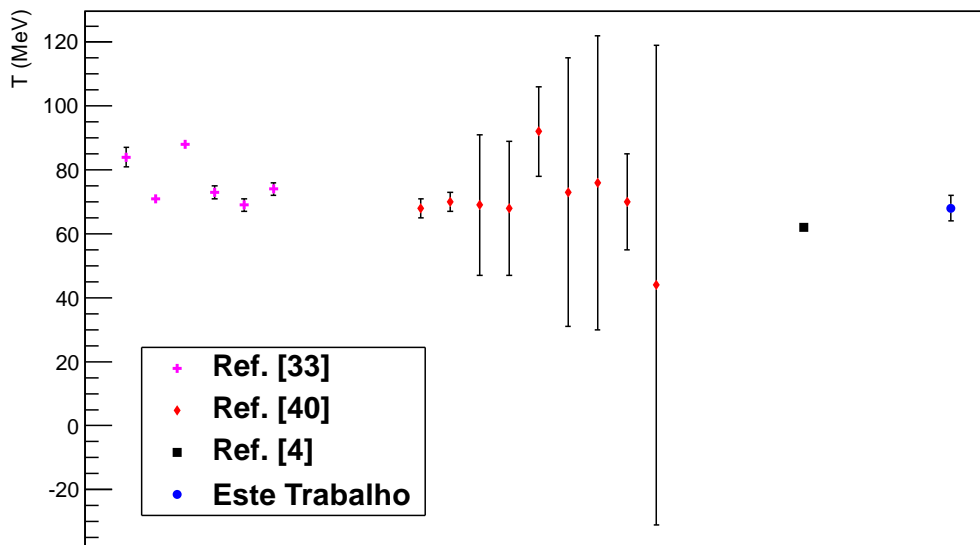
Os valores dos parâmetros T e q obtidos neste trabalho são comparados com aqueles obtidos em outros trabalhos em que também foram analisados dados experimentais de seção de choque diferencial ou *yield* em função da distribuição do momento transversal utilizando a Eq. 3.1 ou variações desta. Os resultados obtidos aqui e nos demais trabalhos são mostrados na Tabela 3.4 e nas Figuras 3.9 e 3.10, onde estão relacionados os valores de T e q listados na Tabela 3.4. Nessas figuras os pontos estão agrupados de acordo com a sua referência.

Na ref. [33], não foram analisados dados experimentais de seção de choque diferencial ou *yield* de partículas identificadas e sim de partícula carregadas, logo, a equação utilizada para realizar os ajustes foi integrada em relação à massa m . Nos resultados apresentados na ref. [40], os erros dos valores dos parâmetros ajustados estão claramente superestimados, impossibilitando assim determinar com uma maior precisão os valores dos parâmetros T e q . Já na ref. [4], é apresentado um valor médio para T e q que foi obtido por meio da análise de seção de choque diferencial ou *yield* em função da distribuição de p_T para partículas identificadas.

É observado que os valores obtidos em outros trabalhos são compatíveis com a média dos parâmetros T e q obtidos neste trabalho. Observando que a análise realizada é consistente

Tabela 3.4: Valores dos parâmetros T e q obtidos em diferentes trabalhos.

Referência	T (MeV)	q
[33]	84 ± 3	1.095 ± 0.002
	71 ± 1	1.123 ± 0.001
	88 ± 1	1.109 ± 0.002
	73 ± 2	1.119 ± 0.002
	69 ± 2	1.131 ± 0.002
	74 ± 2	1.134 ± 0.001
[40]	68 ± 3	1.154 ± 0.036
	70 ± 3	1.146 ± 0.036
	69 ± 22	1.158 ± 0.142
	68 ± 21	1.157 ± 0.139
	92 ± 14	1.134 ± 0.079
	73 ± 42	1.107 ± 0.147
	76 ± 46	1.106 ± 0.158
	70 ± 15	1.114 ± 0.047
44 ± 75	1.110 ± 0.218	
[4]	62 ± 1	1.143 ± 0.007
Este Trabalho	68 ± 5	1.146 ± 0.004

Figura 3.9: Comparação entre os valores do parâmetro T determinado em diferentes trabalhos [4, 33, 40].

com os valores presentes na literatura. Esse conjunto de resultados comprovam as previsões da teoria autoconsistente não-extensiva, onde foram previstos T e q constantes para qualquer colisão ultrarelativística, e uma nova expressão para o espectro de massa.

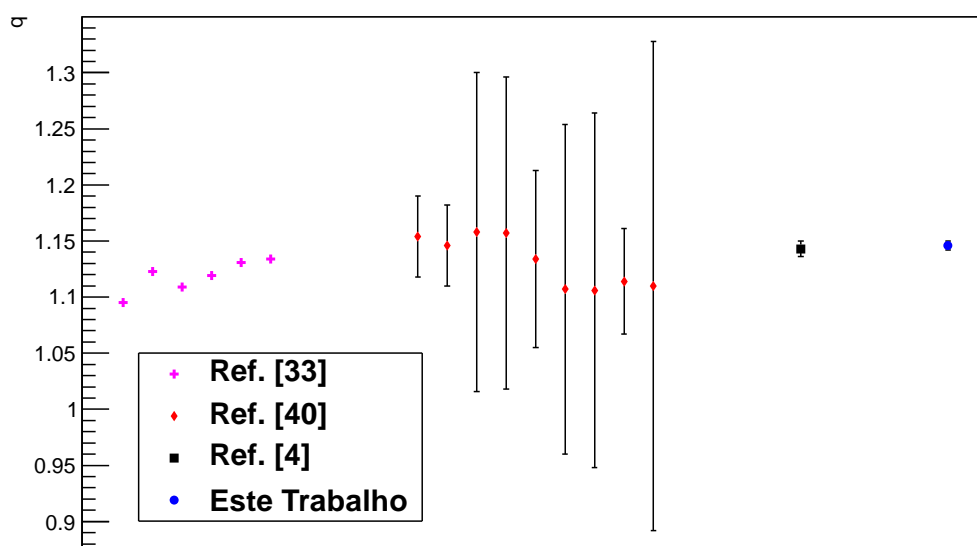


Figura 3.10: Comparação entre os valores do parâmetro q determinado em diferentes trabalhos [4, 33, 40].

4 *Conclusões*

Neste trabalho foi apresentada uma extensa análise de dados experimentais de distribuição de p_T obtida a partir de colisões $p - p$ nas energias 0.2, 0.9, 2.76 e 7.0 TeV dos experimentos PHENIX, CMS e ALICE reportados nas refs. [17, 18, 19, 20, 45, 46]. A análise é feita utilizando-se a expressão 3.1 para a distribuição de p_T . Os resultados mostram que há uma temperatura efetiva limite, $T = (68 \pm 5)$ MeV e um índice entrópico limite, $q = (1.146 \pm 0.004)$, evidenciando o resultado proposto pela teoria autoconsistente não-extensiva.

Os dados experimentais do espectro de massa também foram comparados com a equação 3.6 que foi proposta pela teoria autoconsistente não-extensiva e conclui-se que essa descreve muito bem esses dados experimentais. O resultado da temperatura efetiva limite, $T = (52 \pm 7)$ MeV e do índice entrópico, $q = 1.103 \pm 0.007$ estão de acordo com os valores obtidos através da análise da distribuição de p_T .

Foi feito um estudo detalhado do processo de ajuste da expressão 3.1 aos dados experimentais, evidenciando a forte correlação entre os parâmetros de ajuste. Isso implica em uma dificuldade maior na análise dos resultados obtidos com os ajustes aos dados experimentais.

Essa correlação também foi usada para se determinar parâmetros correspondentes a uma interpretação de não-exclusividade como resultante de flutuações na temperatura em um sistema termodinâmico Boltzmanniano fora do equilíbrio, mas em um estado estacionário.

Através da análise proposta por Wilk e Wlodarczyk, em posse da temperatura efetiva limite, T foi calculada a temperatura real para o sistema hadronização/*freeze-out*, sendo essa $T_0 = (189 \pm 11)$ MeV.

Com esses resultados é possível observar que a teoria autoconsistente não-extensiva pode descrever os principais aspectos de sistemas hadrônicos formados em colisões de altas energias. Esta verificação era o principal objetivo deste trabalho de mestrado.

Apêndice A –

A fórmula da distribuição de momento em relação ao número de partículas é apresentada na Eq. 2.50 e reescrita aqui

$$E \frac{dN}{d^3p} = gVE \frac{1}{(2\pi)^3} \left[1 + (q-1) \frac{E-\mu}{T} \right]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (\text{A.1})$$

A rapidez (y) é definida como

$$y = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{E+p_z}{E-p_z} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Reescrevendo a Eq. A.2,

$$e^{2y} = \frac{E+p_z}{E-p_z}. \quad (\text{A.3})$$

Pela Eq. A.3 determina-se que

$$p_z = E \tanh y. \quad (\text{A.4})$$

É conhecido que E^2 é dado por

$$\begin{aligned} E^2 &= m_0^2 + p^2 \\ &= m_0^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ &= m_0^2 + p_T^2 + p_z^2 \\ &= m_T^2 + p_z^2, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde $p_T^2 = p_x^2 + p_y^2$ e $m_T^2 = m_0^2 + p_T^2$.

Substituindo a Eq. A.4 na Eq. A.5, obtem-se

$$E^2 = m_T^2 + E^2 \tanh^2 y. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a relação trigonométrica, $\text{sech}^2 y = 1 - \tanh^2 y$, determina-se E como

$$E = m_T \cosh y. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a Eq. A.7 na Eq. A.4, determina-se p_z como

$$\begin{aligned} p_z &= E \tanh y \\ &= (m_T \cosh y) \tanh y \\ &= m_T \sinh y. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Fazendo a derivada de p_z em relação a y ,

$$\frac{dp_z}{dy} = m_T \cosh y = E. \quad (\text{A.9})$$

Logo,

$$\frac{dp_z}{E} = dy. \quad (\text{A.10})$$

Reescrevendo o lado esquerdo da igualdade da Eq. A.1, como

$$\begin{aligned} E \frac{d^3 N}{dp^3} &= E \frac{d^3 N}{dp_x dp_y dp_z} \\ &= E \frac{d^3 N}{p_T dp_T d\phi dp_z} \\ &= \frac{d^3 N}{p_T dp_T d\phi dy} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 N}{p_T dp_T dy} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo as Eqs. A.7 e A.11 na Eq. A.1, obtem-se

$$\frac{d^2 N}{p_T dp_T dy} = gV \frac{m_T \cosh y}{(2\pi)^2} \left[1 + (q-1) \frac{m_T \cosh y - \mu}{T} \right]^{-\frac{q}{q-1}}. \quad (\text{A.12})$$

A equação acima é idêntica à Eq. 2.51.

Apêndice B –

Nesta seção serão apresentados todos os ajustes dos dados experimentais de distribuições de p_T . Os conjuntos de dados experimentais foram ajustados pela Eq. 3.1. As legendas das figuras abaixo mostram os valores dos parâmetros ajustados, T e q , e o χ_{red}^2 do ajuste.

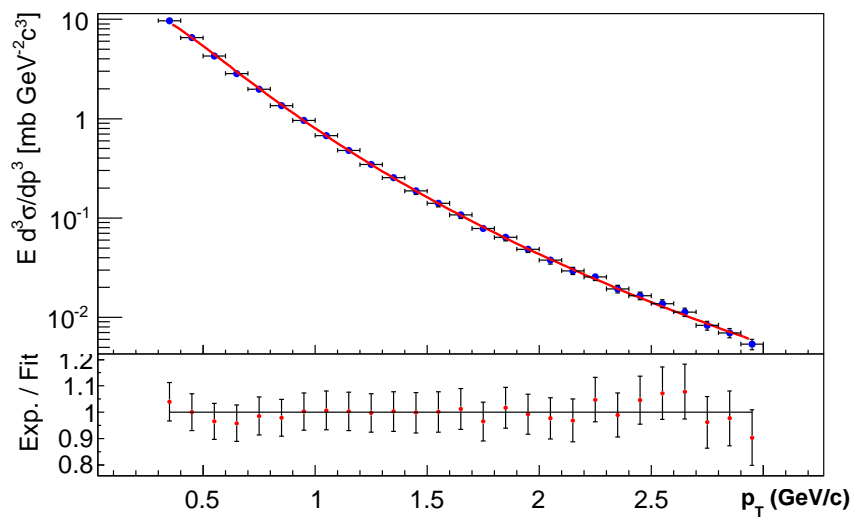


Figura B.1: π^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.074 \pm 0.008)$ GeV, $q = 1.128 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.07$.

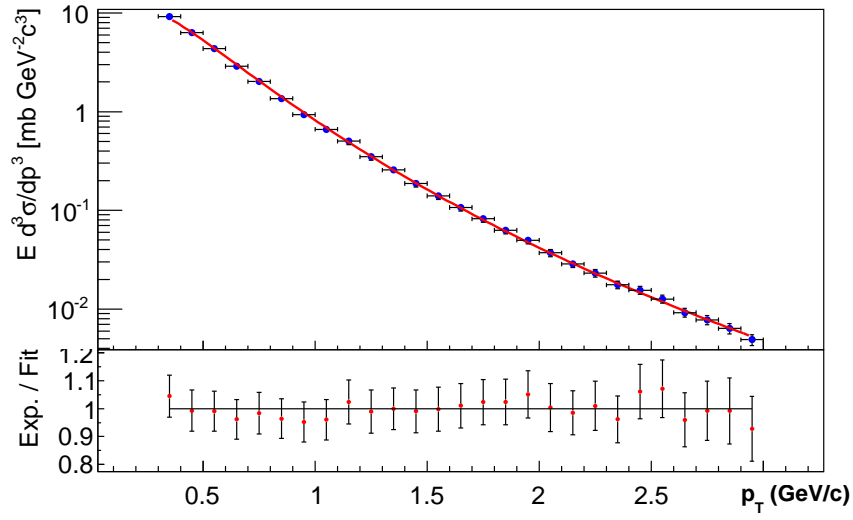


Figura B.2: π^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.008)$ GeV, $q = 1.119 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.06$.

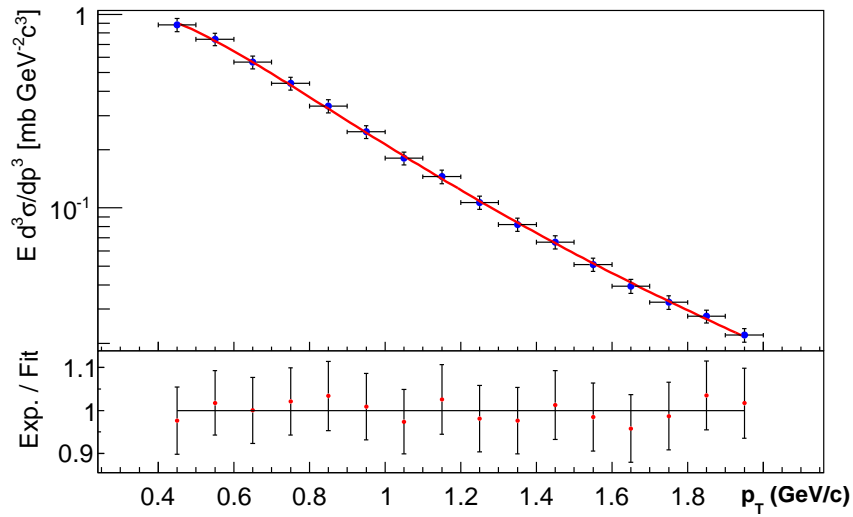


Figura B.3: K^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.046 \pm 0.028)$ GeV, $q = 1.162 \pm 0.029$, $\chi_{red}^2 = 0.04$.

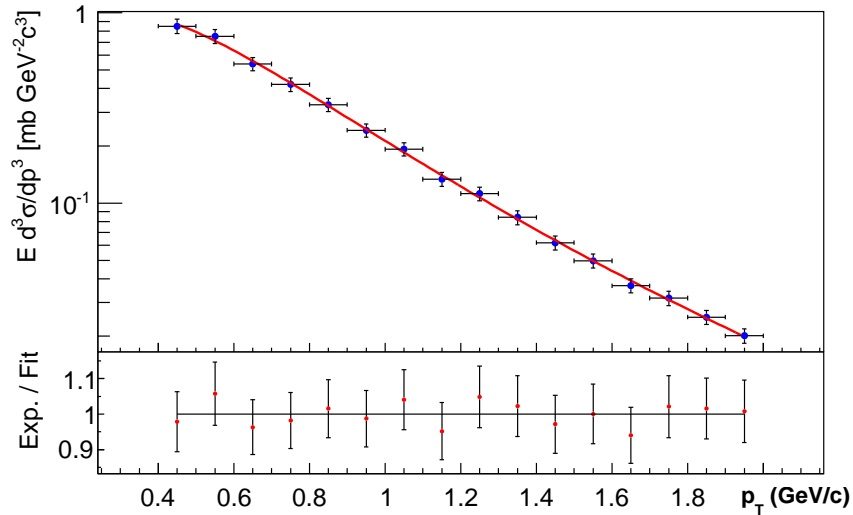


Figura B.4: K^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.060 \pm 0.027)$ GeV, $q = 1.146 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.07$.

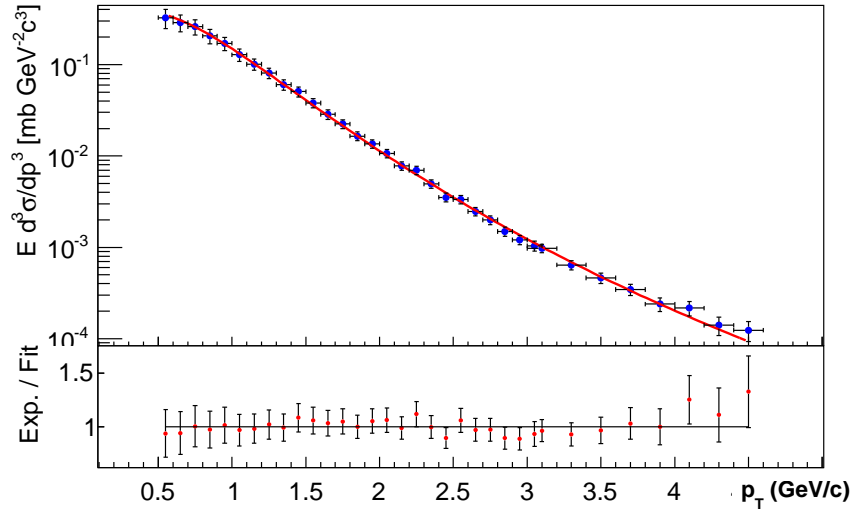


Figura B.5: P^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.051 \pm 0.016)$ GeV, $q = 1.112 \pm 0.009$, $\chi_{red}^2 = 0.18$.

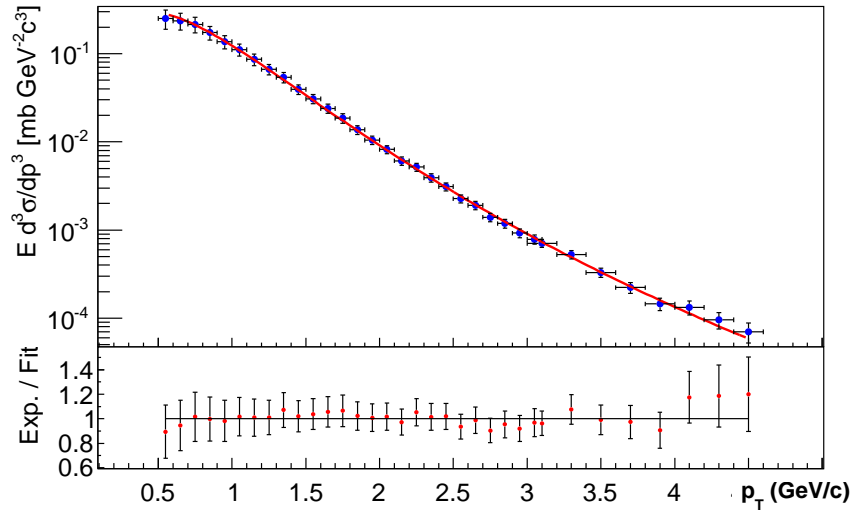


Figura B.6: P^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.065 \pm 0.016)$ GeV, $q = 1.102 \pm 0.008$, $\chi_{red}^2 = 0.11$.

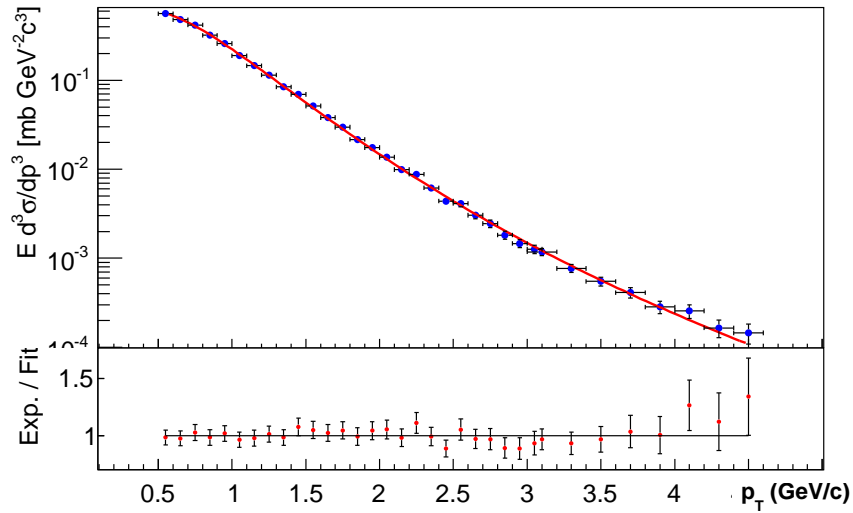


Figura B.7: P^+ , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.040 \pm 0.011)$ GeV, $q = 1.114 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.20$.

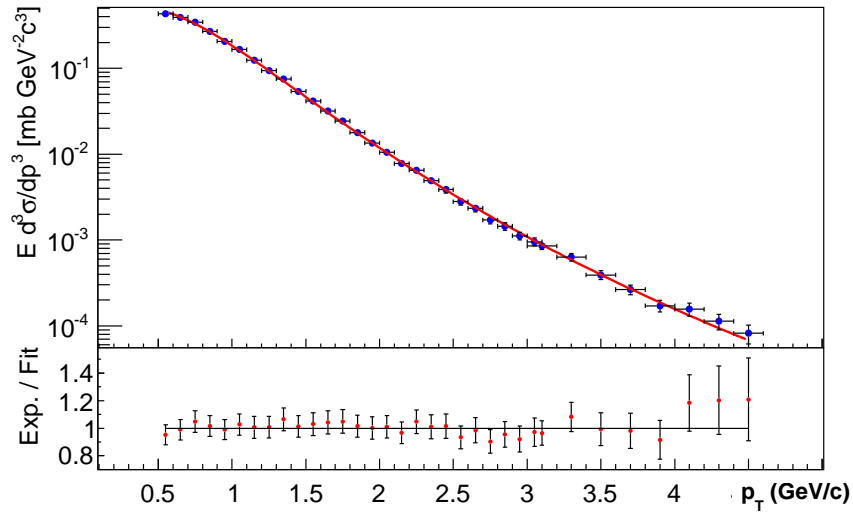


Figura B.8: P^- , $\sqrt{s} = 0.2$ TeV, $T = (0.054 \pm 0.011)$ GeV, $q = 1.103 \pm 0.007$, $\chi_{red}^2 = 0.13$.

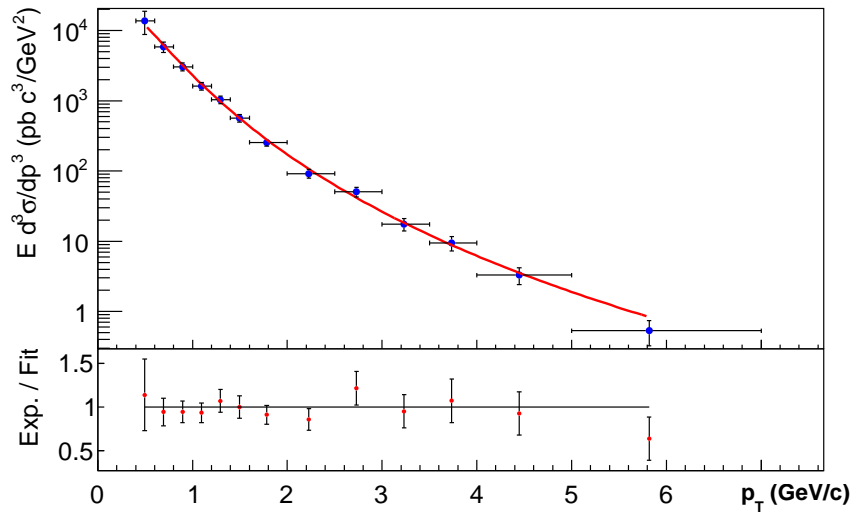


Figura B.9: π^0 , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.083 \pm 0.033)$ GeV, $q = 1.137 \pm 0.024$, $\chi_{red}^2 = 0.08$.

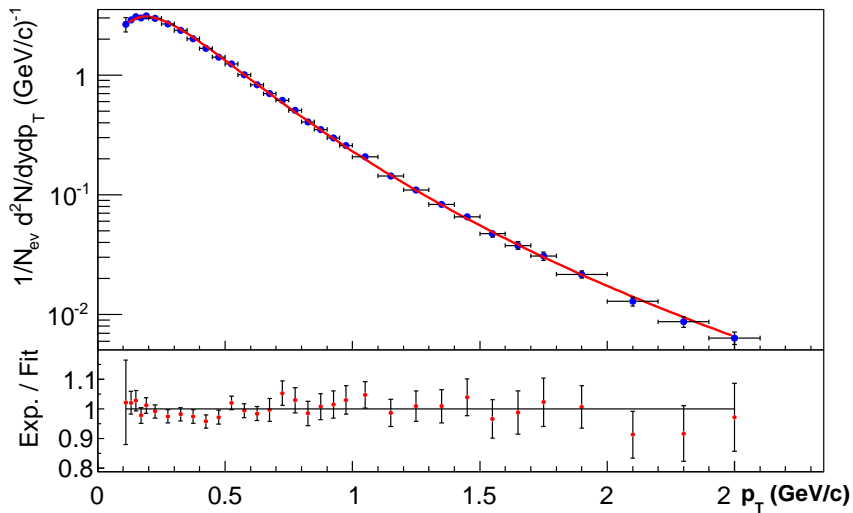


Figura B.10: π^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.070 \pm 0.002)$ GeV, $q = 1.148 \pm 0.005$, $\chi_{red}^2 = 0.12$.

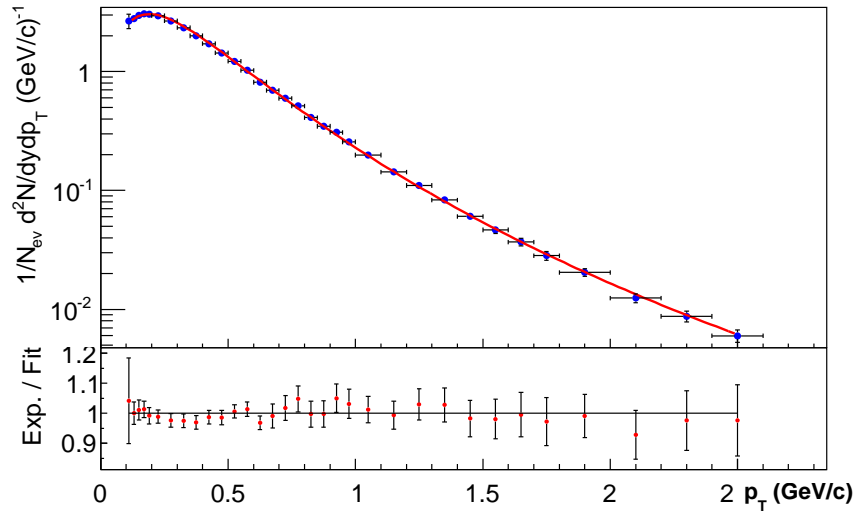


Figura B.11: π^- , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.072 \pm 0.002) \text{ GeV}$, $q = 1.145 \pm 0.005$, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.07$.

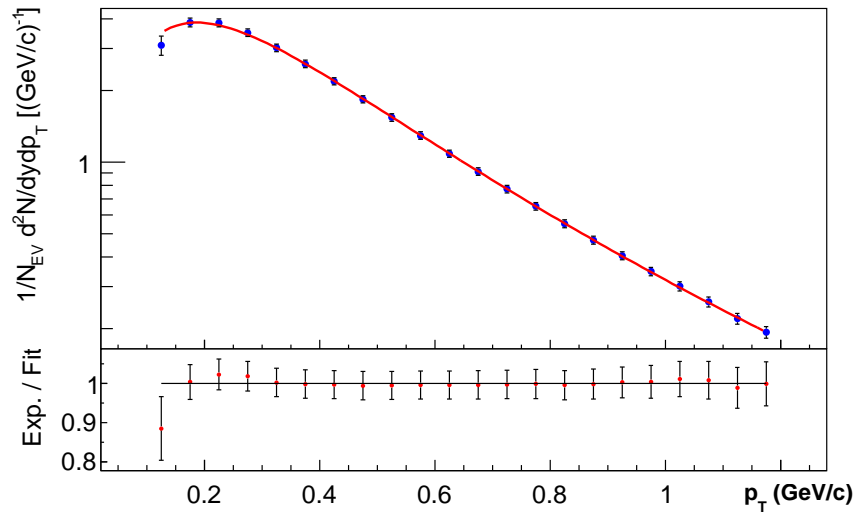


Figura B.12: π^+ , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.068 \pm 0.003) \text{ GeV}$, $q = 1.161 \pm 0.007$, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.15$.

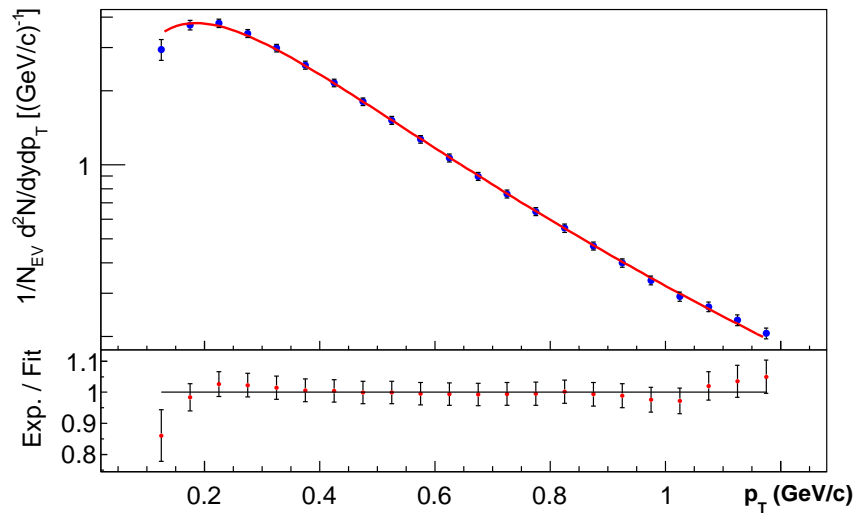


Figura B.13: π^- , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.067 \pm 0.003) \text{ GeV}$, $q = 1.166 \pm 0.007$, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.35$.

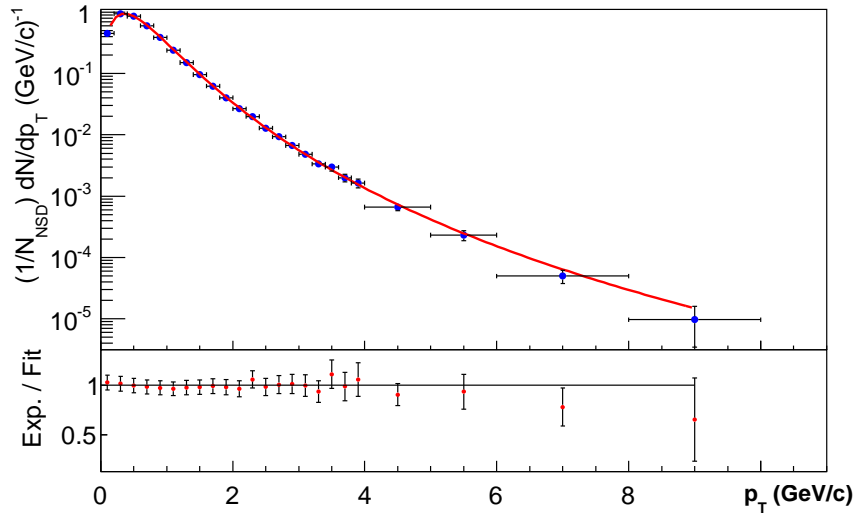


Figura B.14: K_s^0 , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.096 \pm 0.013) \text{ GeV}$, $q = 1.132 \pm 0.010$, $\chi_{red}^2 = 0.05$.

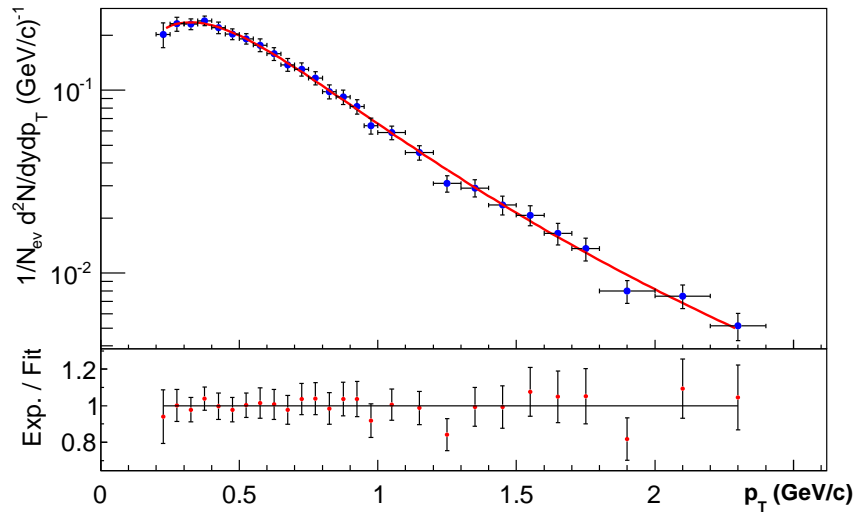


Figura B.15: K^+ , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.058 \pm 0.014) \text{ GeV}$, $q = 1.174 \pm 0.017$, $\chi_{red}^2 = 0.19$.

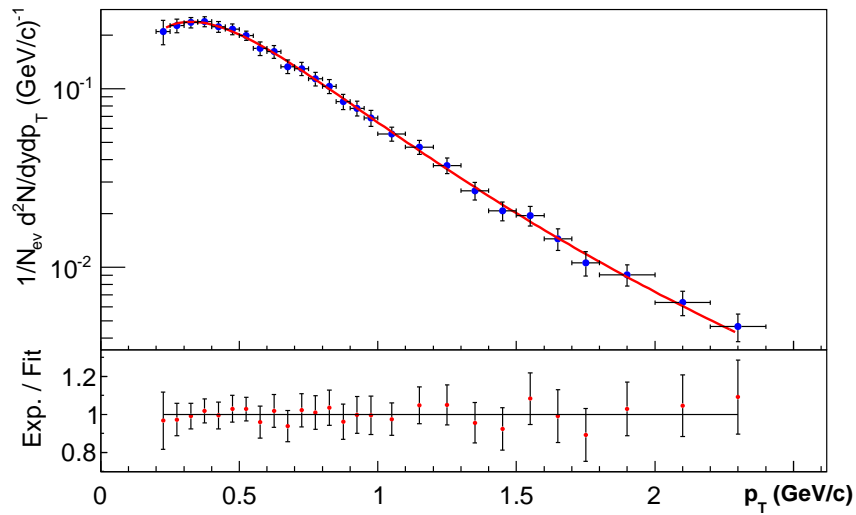


Figura B.16: K^- , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.065 \pm 0.013) \text{ GeV}$, $q = 1.161 \pm 0.017$, $\chi_{red}^2 = 0.12$.

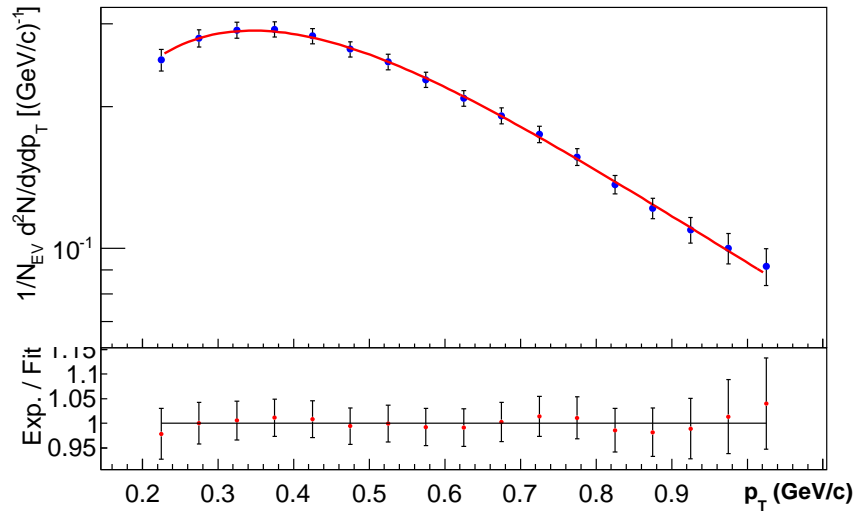


Figura B.17: K^+ , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.078 \pm 0.022) \text{ GeV}$, $q = 1.157 \pm 0.037$, $\chi_{red}^2 = 0.09$.

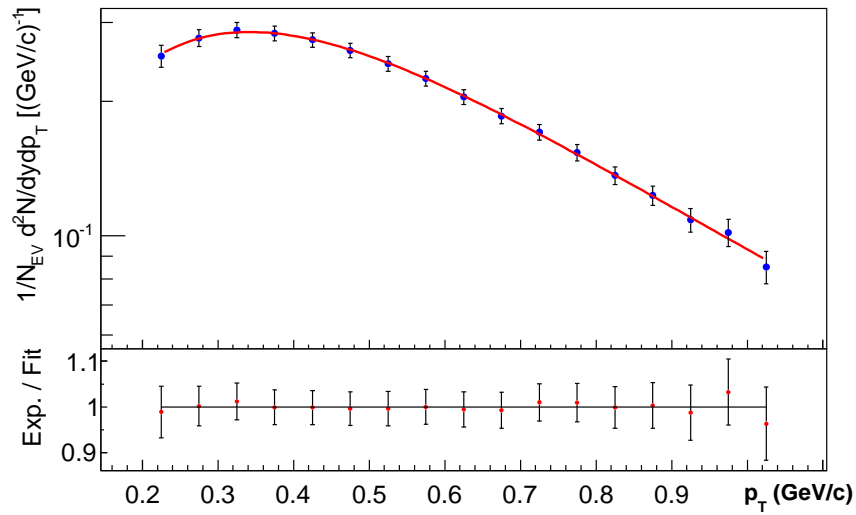


Figura B.18: K^- , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.066 \pm 0.023) \text{ GeV}$, $q = 1.178 \pm 0.038$, $\chi_{red}^2 = 0.06$.

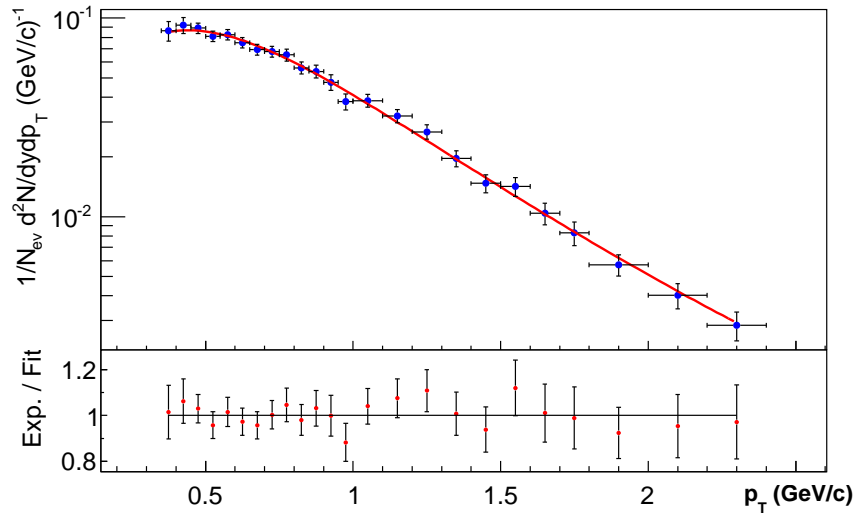


Figura B.19: P^+ , $\sqrt{s} = 0.9 \text{ TeV}$, $T = (0.020 \pm 0.033) \text{ GeV}$, $q = 1.158 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.27$.

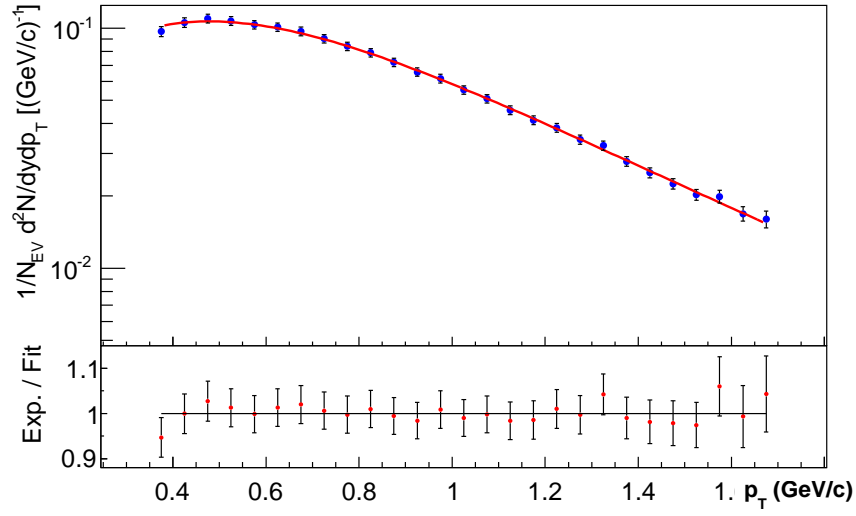


Figura B.20: P^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.058 \pm 0.021)$ GeV, $q = 1.139 \pm 0.019$, $\chi_{red}^2 = 0.24$.

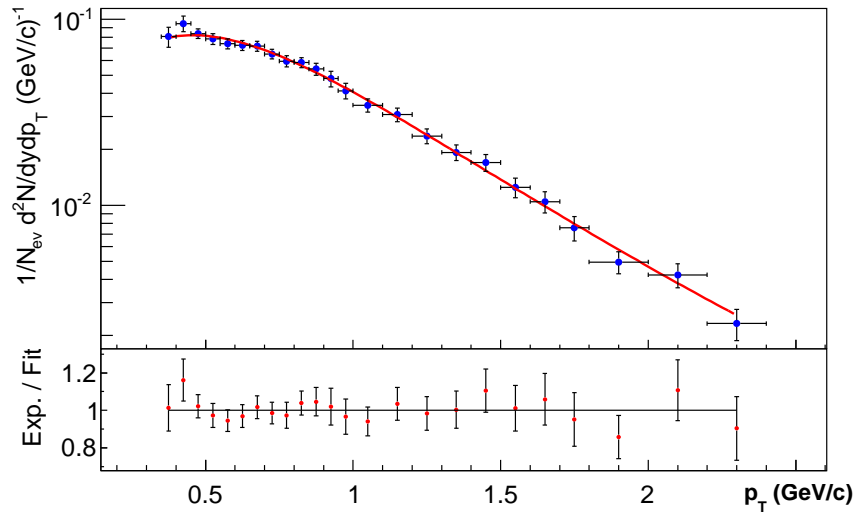


Figura B.21: P^+ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.053 \pm 0.034)$ GeV, $q = 1.132 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.28$.

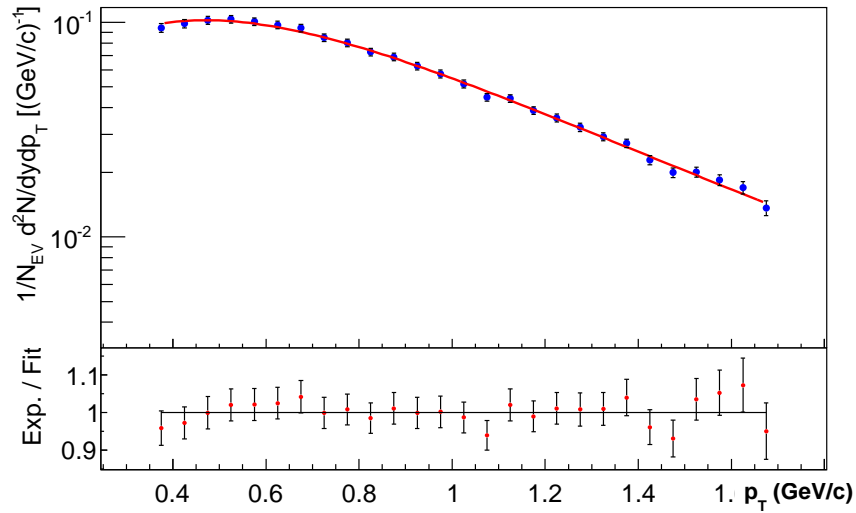


Figura B.22: P^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.048 \pm 0.021)$ GeV, $q = 1.146 \pm 0.018$, $\chi_{red}^2 = 0.52$.

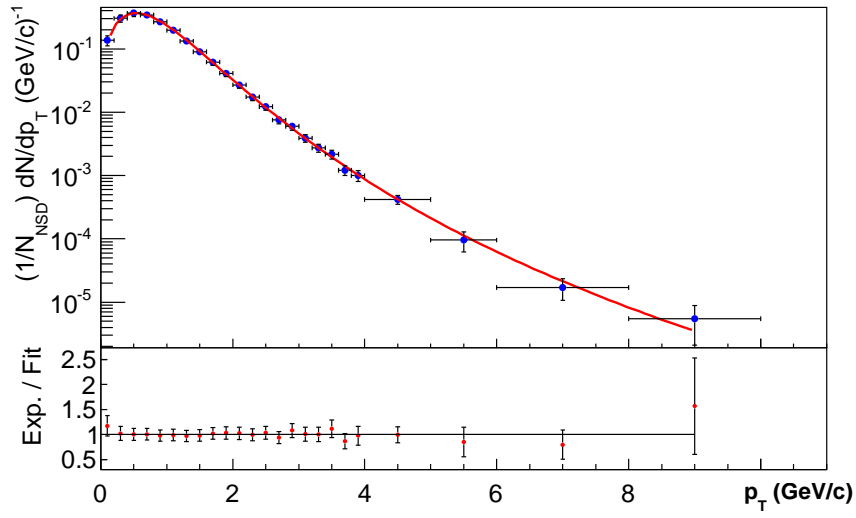


Figura B.23: Λ , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.024)$ GeV, $q = 1.108 \pm 0.014$, $\chi_{red}^2 = 0.06$.

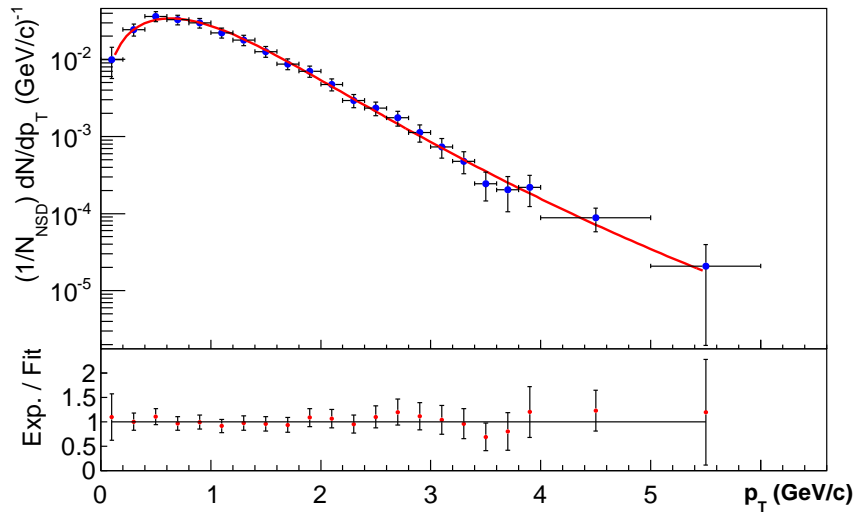


Figura B.24: E^- , $\sqrt{s} = 0.9$ TeV, $T = (0.118 \pm 0.047)$ GeV, $q = 1.091 \pm 0.024$, $\chi_{red}^2 = 0.16$.

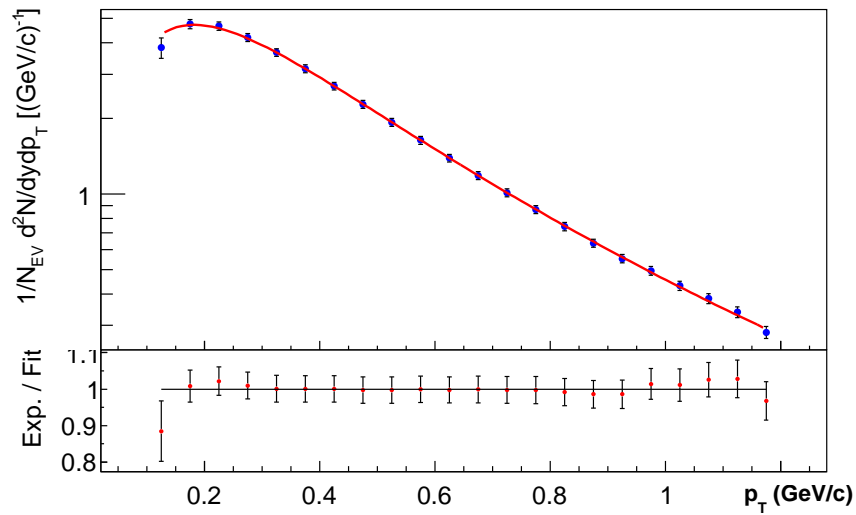


Figura B.25: π^+ , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.062 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.187 \pm 0.008$, $\chi_{red}^2 = 0.21$.

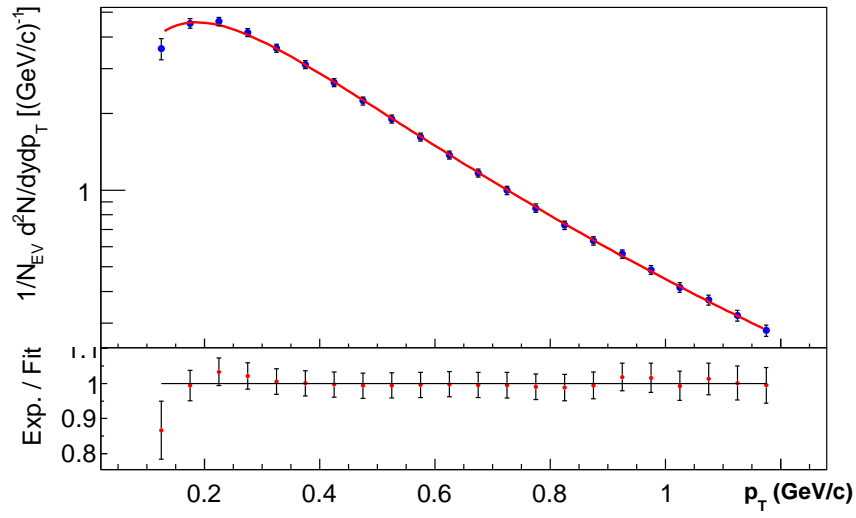


Figura B.26: π^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.065 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.181 \pm 0.008$, $\chi_{red}^2 = 0.24$.

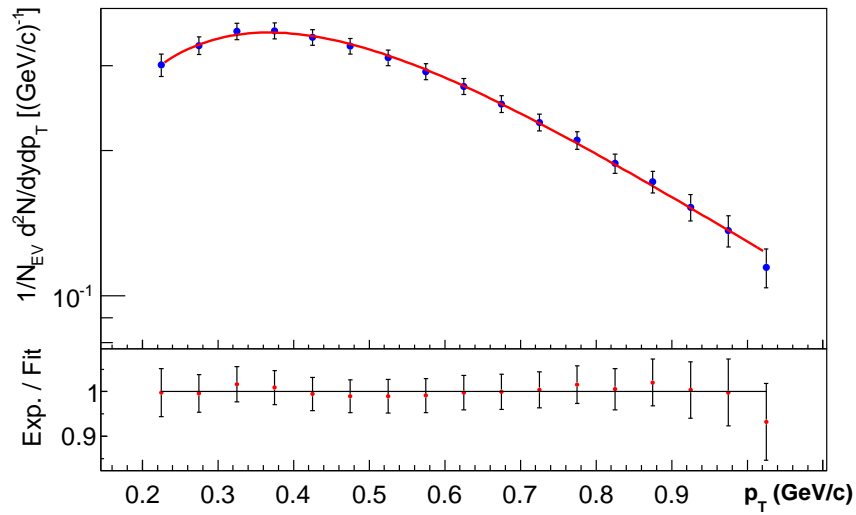


Figura B.27: K^+ , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.093 \pm 0.024)$ GeV, $q = 1.151 \pm 0.041$, $\chi_{red}^2 = 0.11$.

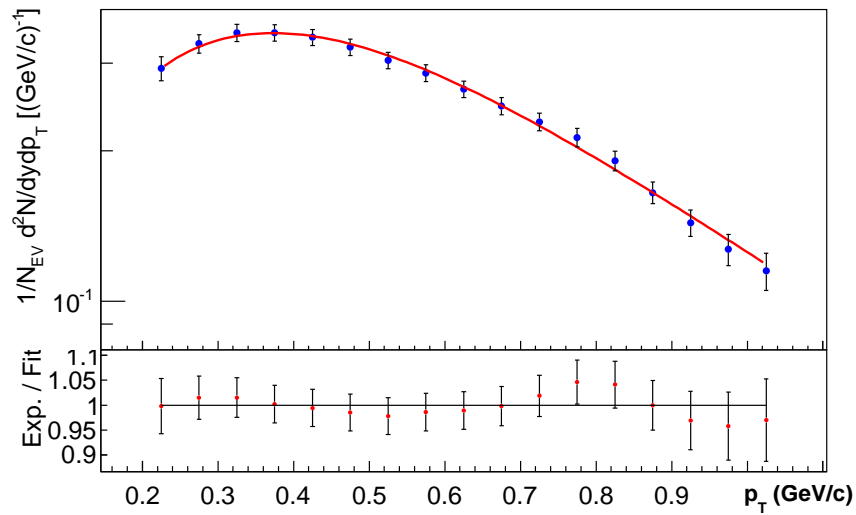


Figura B.28: K^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.105 \pm 0.023)$ GeV, $q = 1.131 \pm 0.040$, $\chi_{red}^2 = 0.28$.

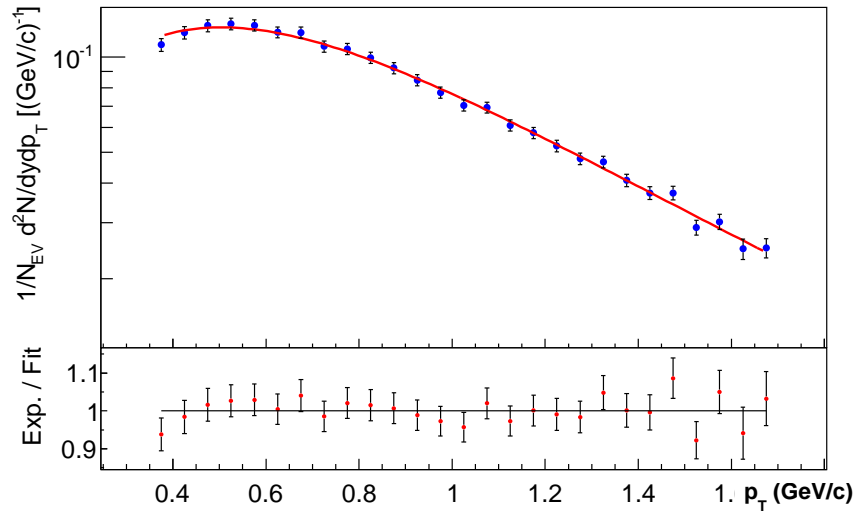


Figura B.29: P^+ , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.053 \pm 0.025)$ GeV, $q = 1.162 \pm 0.022$, $\chi_{red}^2 = 0.64$.

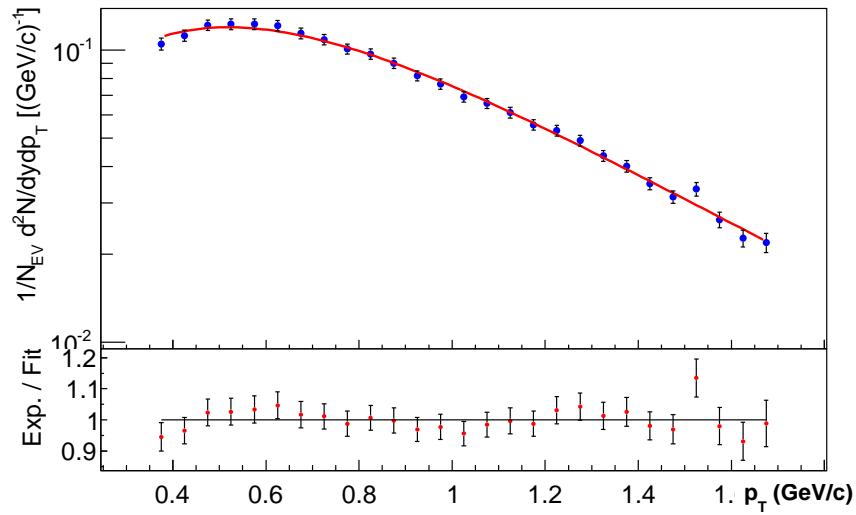


Figura B.30: P^- , $\sqrt{s} = 2.76$ TeV, $T = (0.096 \pm 0.023)$ GeV, $q = 1.123 \pm 0.020$, $\chi_{red}^2 = 0.68$.

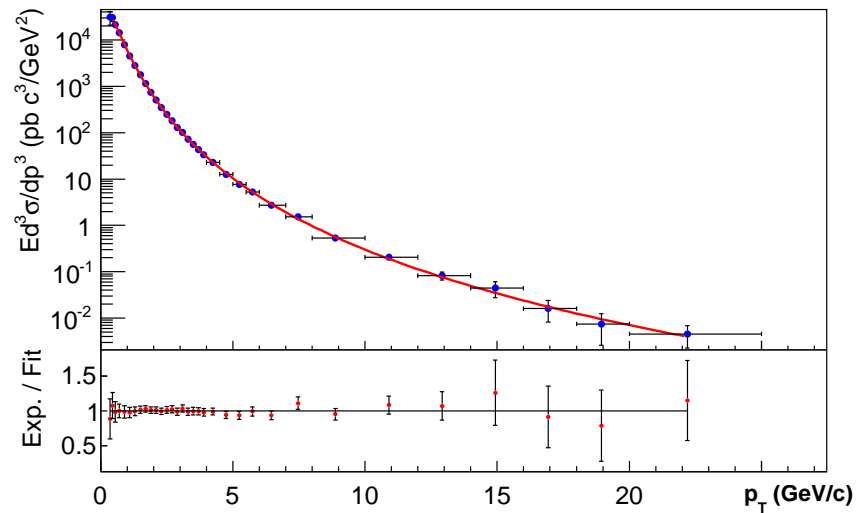


Figura B.31: π^0 , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.092 \pm 0.007)$ GeV, $q = 1.148 \pm 0.004$, $\chi_{red}^2 = 0.04$.

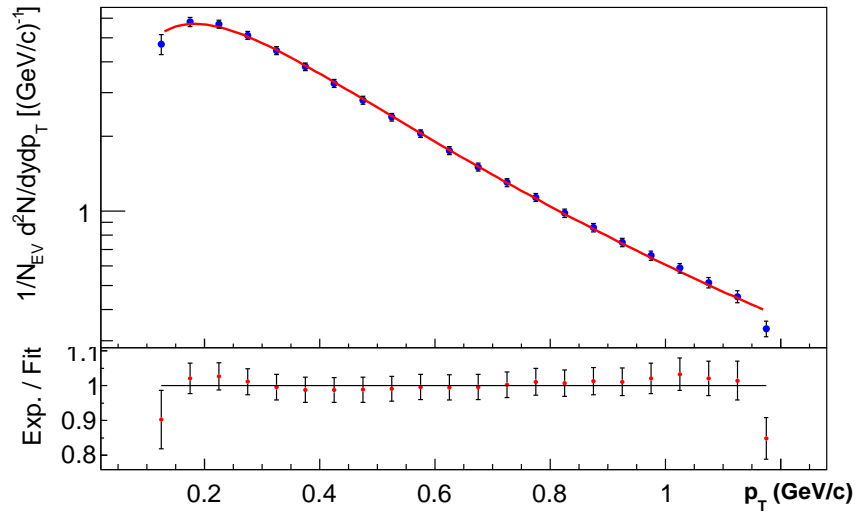


Figura B.32: π^+ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.061 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.197 \pm 0.009$, $\chi_{red}^2 = 0.54$.

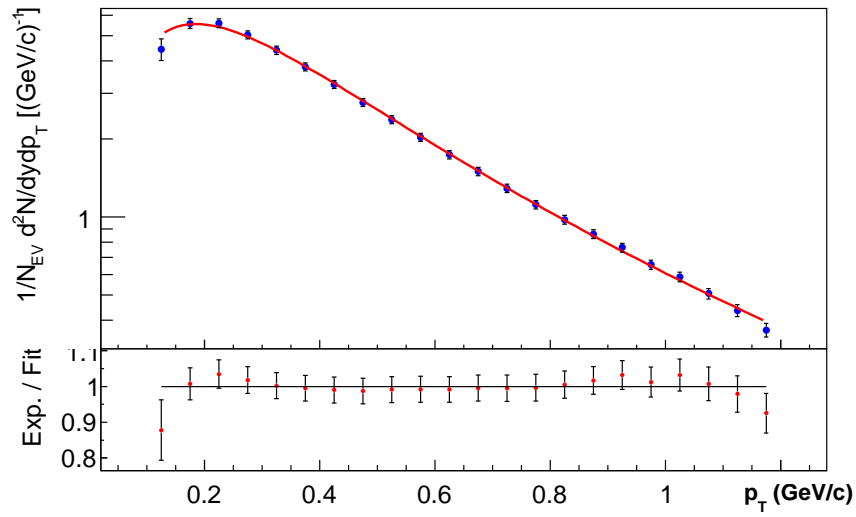


Figura B.33: π^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.062 \pm 0.003)$ GeV, $q = 1.196 \pm 0.009$, $\chi_{red}^2 = 0.37$.

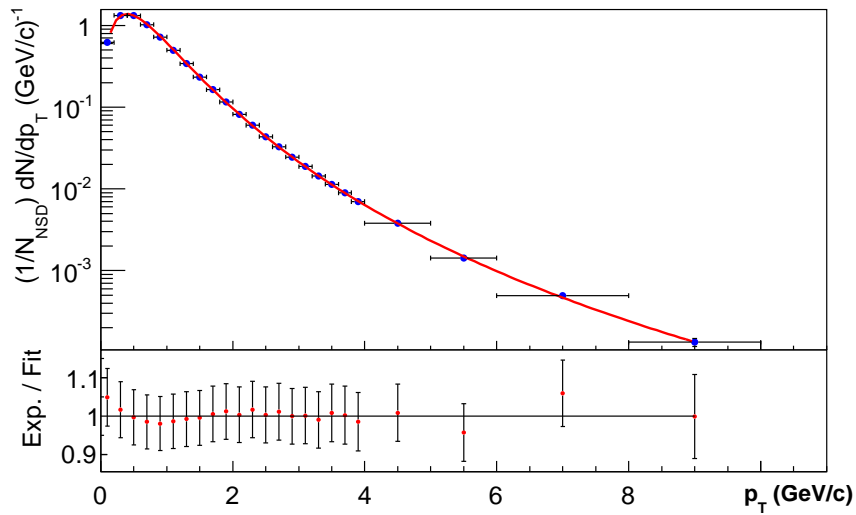


Figura B.34: K_s^0 , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.110 \pm 0.014)$ GeV, $q = 1.150 \pm 0.010$, $\chi_{red}^2 = 0.01$.

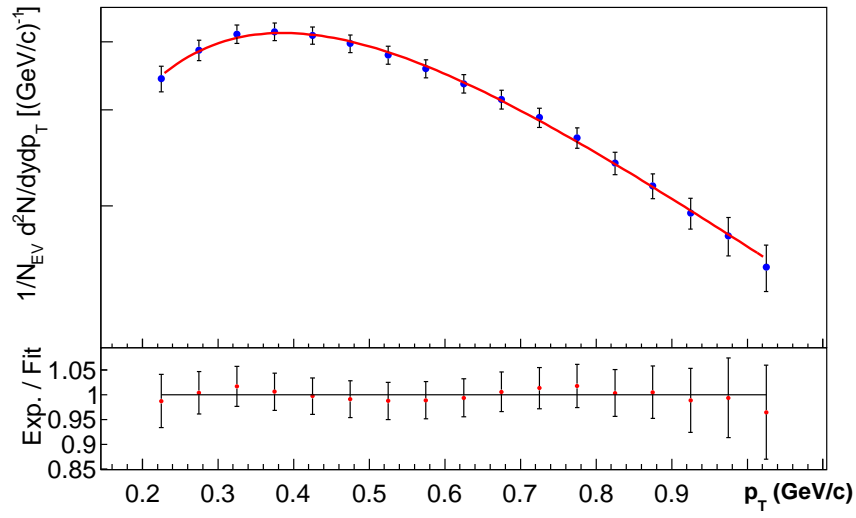


Figura B.35: K^+ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.108 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.141 \pm 0.044$, $\chi_{red}^2 = 0.08$.

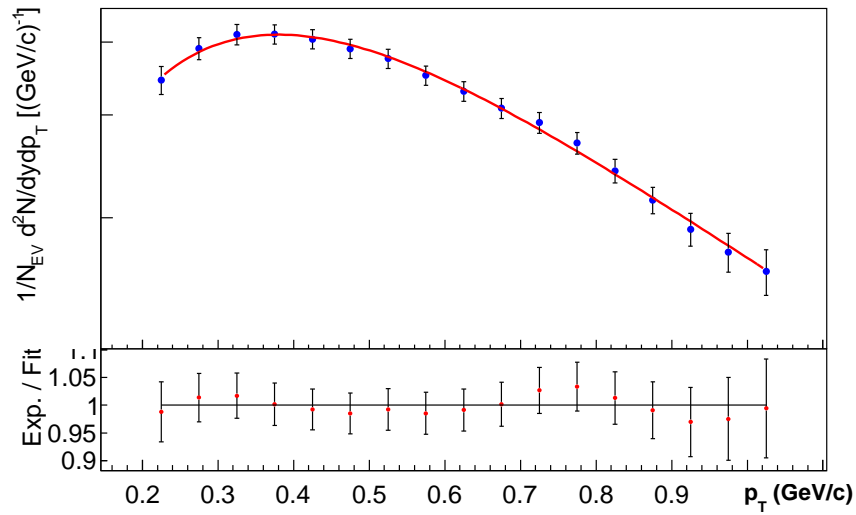


Figura B.36: K^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.090 \pm 0.027)$ GeV, $q = 1.172 \pm 0.048$, $\chi_{red}^2 = 0.16$.

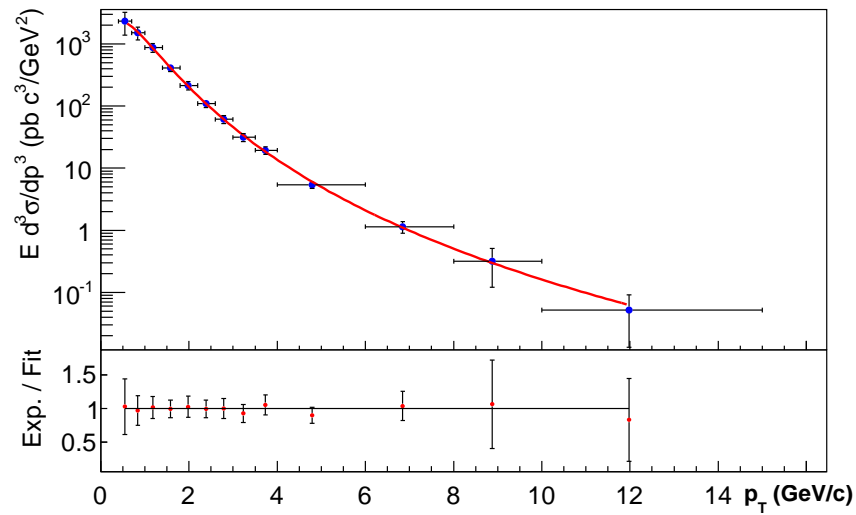


Figura B.37: η , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.117 \pm 0.043)$ GeV, $q = 1.147 \pm 0.023$, $\chi_{red}^2 = 0.02$.

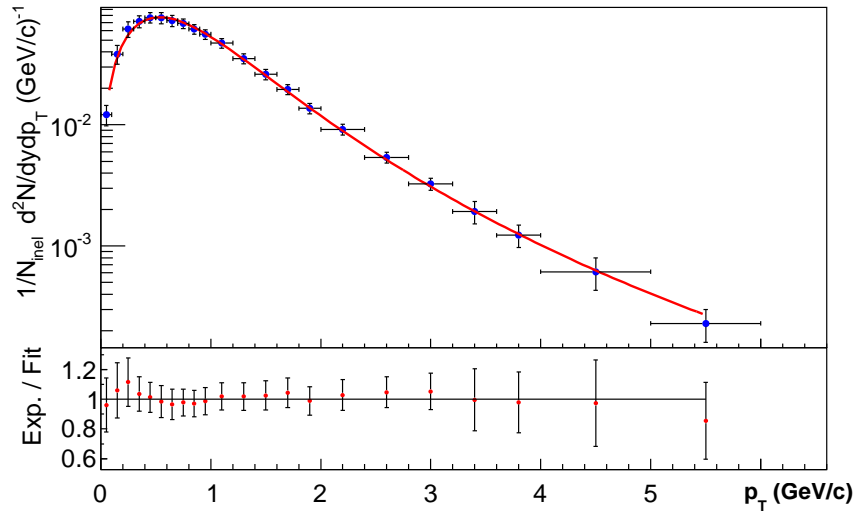


Figura B.38: K^* , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.081 \pm 0.030)$ GeV, $q = 1.166 \pm 0.021$, $\chi_{red}^2 = 0.05$.

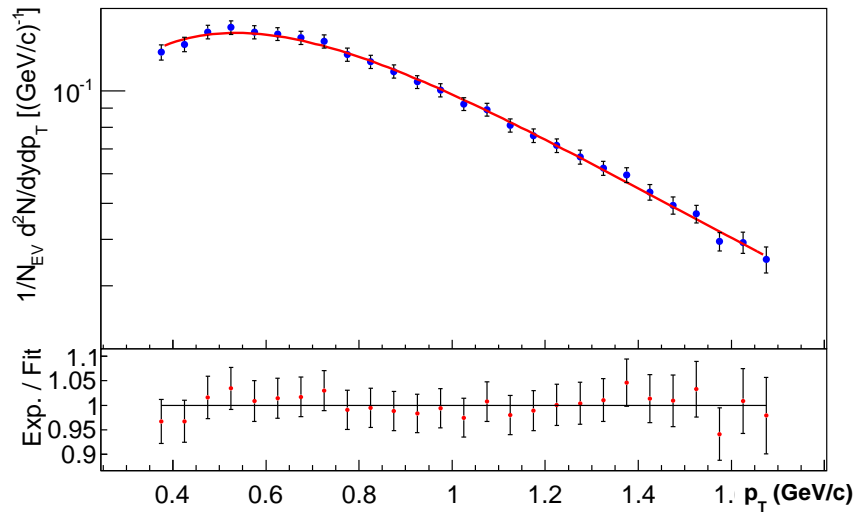


Figura B.39: P^+ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.057 \pm 0.029)$ GeV, $q = 1.179 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.28$.

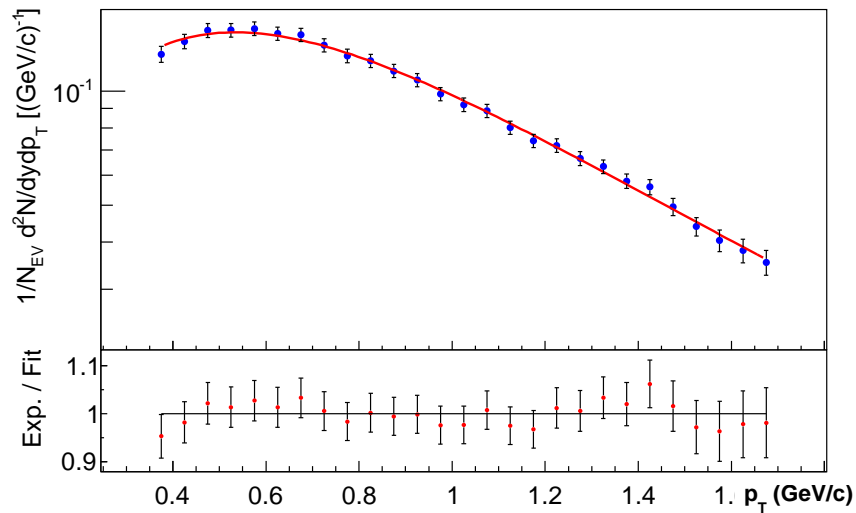


Figura B.40: P^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.054 \pm 0.029)$ GeV, $q = 1.182 \pm 0.028$, $\chi_{red}^2 = 0.34$.

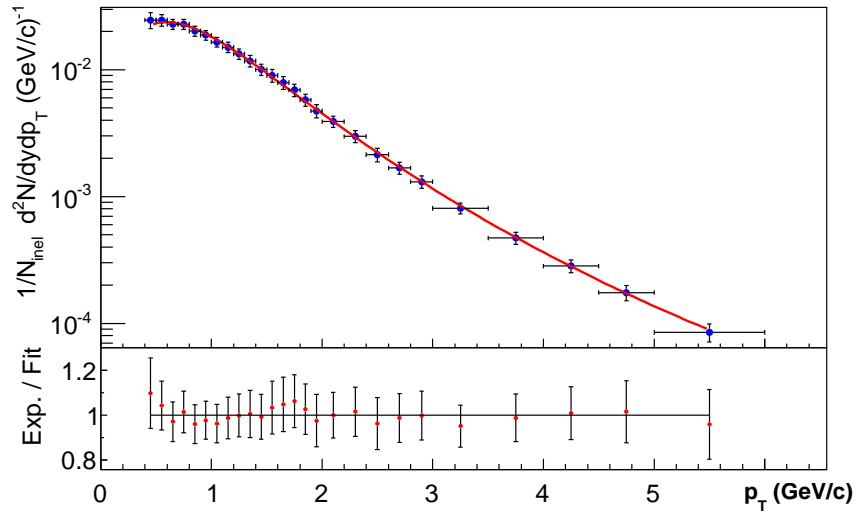


Figura B.41: ϕ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.094 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.152 \pm 0.016$, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.07$.

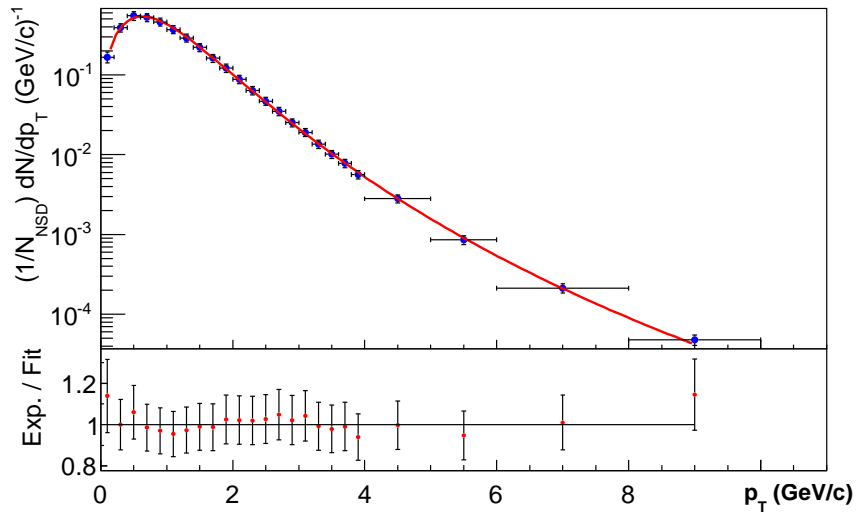


Figura B.42: Λ , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.129 \pm 0.026)$ GeV, $q = 1.114 \pm 0.013$, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.04$.

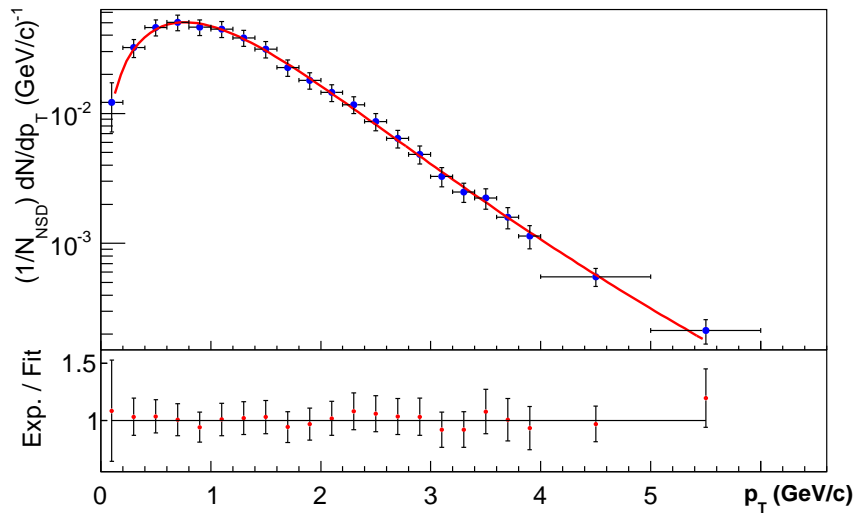


Figura B.43: E^- , $\sqrt{s} = 7.0$ TeV, $T = (0.190 \pm 0.050)$ GeV, $q = 1.095 \pm 0.024$, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.07$.

Referências Bibliográficas

- [1] HAGEDORN, R. Statistical Thermodynamics of Strong Interactions at High Energies. *Nuovo Cimento Suppl.*, v. 3, p. 147, 1965.
- [2] TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, v. 52, p. 479, 1988.
- [3] DEPPMAN, A. Self-consistency in non-extensive thermodynamics of highly excited hadronic states. *Physica A*, v. 391, p. 6380, 2012.
- [4] MARQUES, L.; ANDRADE-II, E.; DEPPMAN, A. Nonextensivity of hadronic systems. *Phys. Rev. D*, v. 87, p. 114022, 2013.
- [5] Eidelman, S. et al. Review of Particle Physics. *Phys. Lett. B*, v. 592, p. 1, 2004.
- [6] POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, p. 1346, 1973.
- [7] HANDS, S. The phase diagram of qcd. *Contemporary Physics*, v. 42, n. 4, p. 209, 2001.
- [8] RISCHKE, D. H. The quark–gluon plasma in equilibrium. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 52, p. 197, 2004.
- [9] MCLERRAN, L. D.; TOIMELA, T. Photon and Dilepton Emission from the Quark - Gluon Plasma: Some General Considerations. *Phys. Rev. D*, v. 31, p. 545, 1985.
- [10] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: WILEY, 1987.
- [11] LIU, N.; REN, J.; YANG, B. Next-to-leading order QCD corrections to HZW^\pm production at 14 TeV LHC. *Phys. Lett. B*, v. 731, p. 70, 2014.
- [12] EDWARDS, D. A.; SYPHERS, M. J. *An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators*. [S.l.]: WILEY, 1993.
- [13] ELLIS, W. J. S. R. K.; WEBBER, B. R. *QCD and Collider Physics*. [S.l.]: CAMBRIDGE University Press, 1996.
- [14] KHEYRI, F.; KHODADI, M.; SEPANGI, H. R. Horava–lifshitz cosmology, entropic interpretation and quark–hadron phase transition. *Annals of Physics*, v. 332, p. 75, 2013.
- [15] DEPPMAN, A.; SOLETTA, A. O ovo de Colombo da termodinâmica quântica. *Scientific American Brasil*, v. 145, p. 68, Junho 2014.
- [16] HAGEDORN, R. Hadronic Matter Near the Boiling Point. *IL Nuovo Cimento*, v. 56, p. 1027, 1968.

- [17] ADARE, A. et al. Identified charged hadron production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ and 62.4 GeV. *Phys. Rev. C*, v. 83, p. 064903, 2011.
- [18] KHACHATRYAN, V. et al. Strange particle production in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ and 7 TeV. *J. High Energy Phys.*, v. 5, p. 064, 2011.
- [19] AAMODT, K. et al. Production of pions, kaons and protons in pp collisions at $\sqrt{s} = 900$ GeV with ALICE at the LHC. *Eur. Phys. J. C*, v. 71, p. 1655, 2011.
- [20] ABELEV, B. et al. Production of $K^*(892)$ and $\phi(1020)$ in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Eur. Phys. J. C*, v. 72, p. 2183, 2012.
- [21] ABELEV, B. I. et al. Strange particle production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV. *Phys. Rev. C*, v. 75, p. 064901, 2007.
- [22] BEDIAGA, I.; CURADO, E.; MIRANDA, J. de. A Nonextensive thermodynamical equilibrium approach in $e^+e^- \rightarrow$ hadrons. *Physica A*, v. 286, p. 156, 2000.
- [23] CLEYMANS, J.; WORKU, D. The Hagedorn temperature Revisited. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 26, p. 1197, 2011.
- [24] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de Física: The Feynman Lectures on Physics*. [S.l.]: Bookman, 2008.
- [25] GELL-MANN, M.; TSALLIS, C. *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications*. [S.l.]: OXFORD University Press, 2004.
- [26] SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. 2. ed. [S.l.]: edusp, 2005.
- [27] KARDAR, M. *Statistical Physics of Particles*. [S.l.]: CAMBRIDGE University Press, 2007.
- [28] NAUDTS, J. *Generalised Thermostatistics*. [S.l.]: Springer, 2011.
- [29] GREINER, L. N. W.; STOCKER, H. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1997.
- [30] CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. [S.l.]: WILEY, 1985.
- [31] JAYNES, E. T. Information Theory and Statistical Mechanics. *Phys. Rev.*, v. 106, p. 620, 1957.
- [32] MOYANO, L. G. *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*. Tese (Doutorado) — CBPF, 2006.
- [33] SENA, I. S. A. O. *Aspectos Estatísticos em Colisões de Partículas Relativísticas*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física - USP, 2011.
- [34] CABIBBO, N.; PARISI, G. Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation. *Phys. Lett. B*, v. 59, p. 67, 1975.
- [35] BECK, C. Nonextensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions. *Physica A*, v. 286, p. 164, 2000.

- [36] TSALLIS, C. Nonextensive statistics: theoretical, experimental and computational evidences and connections. *Braz. J. Phys.*, v. 29, p. 1, 1999.
- [37] CURADO, E.; TSALLIS, C. Generalized statistical mechanics: Connection with thermodynamics. *J. Phys. A*, v. 24, p. L69, 1991.
- [38] TSALLIS, C. What are the numbers that experiments provide? *Química Nova*, v. 17(6), p. 468, 1994.
- [39] MEGIAS, E.; MENEZES, D. P.; DEPPMAN, A. Nonextensive thermodynamics for hadrons with finite chemical potentials. *arXiv:1312.7134*, 2013.
- [40] CLEYMANS, J.; WORKU, D. The Tsallis distribution in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ TeV at the LHC. *J. Phys. G*, v. 39, p. 025006, 2012.
- [41] PENNINI, F.; PLASTINO, A.; PLASTINO, A. *Phys. Lett. A*, v. 208, p. 309, 1995.
- [42] TEWELDEBERHAN, A. M.; PLASTINO, A. R.; MILLER, H. G. On the cut-off prescriptions with power-law generalized thermostatics. *Phys. Lett. A*, v. 343, p. 71, 2005.
- [43] RYBCZYNSKI, M.; WLODARCZYK, Z. Tsallis statistics approach to the transverse momentum distributions in p-p collisions. *Eur. Phys. J. C*, v. 74, p. 2785, 2014.
- [44] JAMES, F. *Minuit: Function Minimization and Error Analysis - Reference Manual Version 94.1*. [S.l.].
- [45] CHATRCHYAN, S. et al. Study of the inclusive production of charged pions, kaons, and protons in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9, 2.76$, and 7 TeV. *Eur. Phys. J. C*, v. 72, p. 2164, 2012.
- [46] ABELEV, B. et al. Neutral pion and η meson production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ TeV and $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Phys. Lett. B*, v. 717, p. 162, 2012.
- [47] HELENE, O.; VANIN, V. *Tratamento Estatístico de dados em Física Experimental*. 2. ed. [S.l.]: Edgard Blücher, 1991.
- [48] STUART, A.; ORD, J. K. *The Advanced Theory of Statistics*. London: Charles Griffin & Company Limited.
- [49] WILK, G. Fluctuations, Correlations and Non-Extensivity. *Braz. J. Phys.*, v. 37, p. 714, 2007.
- [50] WILK, G.; WLODARCZYK, Z. Multiplicity fluctuations due to the temperature fluctuations in high-energy nuclear collisions. *Phys. Rev. C*, v. 79, p. 054903, 2009.
- [51] SENA, I.; DEPPMAN, A. Systematic analysis of pT -distributions in p + p collisions. *Eur. Phys. J. A*, v. 49, p. 17, 2013.
- [52] WILK, G.; WLODARCZYK, Z. Consequences of temperature fluctuations in observables measured in high energy collisions. *Eur. Phys. J. A*, v. 48, p. 161, 2012.
- [53] WILK, G.; WLODARCZYK, Z. The Imprints of superstatistics in multiparticle processes. *Central Eur. J. Phys.*, v. 10, p. 568, 2012.

-
- [54] SENA, I.; DEPPMAN, A. Systematic analysis of transverse momentum distribution and non-extensive thermodynamics theory. *AIP Conf. Proc.*, v. 1520, p. 172, 2013.
- [55] BRONIOWSKI, W.; FLORKOWSKI, W. Different Hagedorn temperatures for mesons and baryons from experimental mass spectra. *Phys. Lett. B*, v. 490, p. 223, 2000.
- [56] BRONIOWSKI, W.; FLORKOWSKI, W.; GLOZMAN, L. Y. Update of the Hagedorn mass spectrum. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 117503, 2004.
- [57] CHATTERJEE, S.; GODBOLE, R. M.; GUPTA, S. Stabilizing hadron resonance gas models. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 81, p. 044907, 2010.