UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

**Construção de uma Teoria Quântica dos Campos Topológica
a partir do Invariante de Kuperberg**

Anderson Alves da Silva

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes (EACHUSP)

Prof. Dr. Roldão da Rocha Júnior (UFABC)

SÃO PAULO
2015

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

**Construção de uma Teoria Quântica dos Campos Topológica
a partir do Invariante de Kuperberg**

Anderson Alves da Silva

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes (EACHUSP)

Prof. Dr. Roldão da Rocha Júnior (UFABC)

SÃO PAULO
2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Anderson Alves da

Construção de uma Teoria Quântica dos Campos Topológica a partir do Invariante de Kuperberg. São Paulo, 2015.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria Quântica de Campo 2. Topologia Algébrica; 3. Teoria Quântica dos Campos Topológica; 4. Invariante de Kuperberg; 5. Álgebra de Hopf

USP/IF/SBI-104/2015

Agradecimentos

- Ao professor Dr. Paulo Teotônio Sobrinho pela didática e clareza com as quais conduziu este trabalho.
- Aos colegas Miguel J. B. Ferreira e Vitor A. Pereira, pelas primeiras exposições a respeito do formalismo empregado nos estudos da equipe de pesquisa coordenada pelo professor Paulo Teotônio.
- A toda equipe de pesquisa, por suas múltiplas sugestões a fim de tornar evidentes os pontos essenciais deste trabalho. Cito em ordem alfabética: Hudson Kazuo T. Mendonça, Javier I. Lorca Espiro, Juan Pablo I. Jimenez, Maria Fernanda A. de Resende, Miguel J. B. Ferreira, Pramod Padmanabhan e Ricardo C. de Almeida. Assim como aos demais colegas com quem já trabalhei pessoalmente: Alysson F. Moraes, Nelson Javier Buitrago Aza e Vitor A. Pereira.
- Aos colegas de sala André L. M. Brito, Miguel J. B. Ferreira e Rafael R. Francisco, também por diversas contribuições diretas e indiretas para este trabalho mas sobretudo pela ótima convivência ao longo do período de mestrado. Estendo meus agradecimentos aos demais colegas da física-matemática com os quais compartilhei discussões importantes sobre a vida acadêmica.
- Aos funcionários do Departamento de Física-Matemática do Instituto de Física da USP, em especial à Dona Lurdes. Às secretárias do Departamento de Física-Matemática Amélia, Cecília e Simone. Aos secretários da Comissão de Pós-Graduação, em particular ao Éber e à Maria Izabel pela ajuda com relação às questões do regimento universitário.

Resumo

Neste trabalho apresentamos, em detalhes, a construção de uma teoria quântica dos campos topológica (TQCT). Podemos definir uma TQCT como um funtor simétrico monoidal da categoria dos cobordismos para a categoria dos espaços vetoriais. Em duas dimensões podemos encontrar uma descrição completa da categoria dos cobordismos e classificar todas as TQCT's. Em três dimensões é possível estender alguns invariantes para 3-variedades e construir uma TQCT 3D. Nossa construção é baseada no invariante para 3-variedades de Kuperberg, o qual envolve diagramas de Heegaard e álgebras de Hopf. Começamos com a apresentação do invariante de Kuperberg definido para toda variedade 3D compacta, orientável e sem bordo. Para cada álgebra de Hopf de dimensão finita constrói-se um invariante. Por fim, apresentamos a TQCT associada com o invariante de Kuperberg. Isto é feito usando-se o fato de que o invariante de Kuperberg é definido como uma soma de pesos locais tal qual uma função de partição. A TQCT decorre dos operadores advindos de variedades com bordo.

Abstract

In this work we present in detail a construction of a topological quantum field theory (TQFT). We can define a TQFT as a symmetric monoidal functor from cobordism categories to category of vector spaces. In two dimension, we can give a complete description of cobordism categories and classify all TQFT's. In three dimension it is possible to extend some specific 3-manifold invariants and to construct a TQFT 3D. Our construction is based on the Kuperberg 3-manifold invariant which involves Heegaard diagrams and Hopf algebras. We start with the presentation of the Kuperberg invariant defined for every orientable compact 3-manifold without boundary. For each finite-dimensional Hopf algebra we can construct a invariant. Finally we present the TQFT associated with the Kuperberg invariant. This is made using the fact that the Kuperberg invariant is defined like a sum of local weights in the same way as a partition function. The TQFT is constructed from the operators given by manifolds with boundary.

Sumário

Introdução	13
1 Teoria Quântica dos Campos Topológica	19
1.1 Cobordismo e Teoria de Categorias	19
1.1.1 Variedades topológicas e orientação	19
1.1.2 Cobordismo	20
1.1.3 Teoria de categorias	24
1.2 Teoria Quântica dos Campos Topológica	32
1.2.1 Categoria nCob	32
1.2.2 Teoria Quântica dos Campos Topológica	40
1.2.3 Geradores e relações da 2Cob	42
1.3 Classificação das TQCT's 2D	63
2 Álgebra de Frobenius e Triangulação	67
2.1 Álgebra de Frobenius e TQCT 2D	67
2.1.1 Categoria AF	67
2.1.2 Teorema principal	93
2.2 Triangulação da TQCT 2D	100
2.2.1 TQCT 2D na rede	101
2.2.2 Triangulação nos bordos	108
3 Construção de uma TQCT 3D	119
3.1 Álgebra de Hopf	119
3.1.1 Diagramas clássicos	119
3.1.2 Notação de Kuperberg	123
3.2 Triangulação em 3D	130
3.2.1 Diagramas simplificados de Heegaard	130
3.2.2 Passos de Pachner	141
3.2.3 Invariante de Kuperberg	162
3.3 Construção de uma TQCT 3D a partir do invariante de Kuperberg	173
Conclusão	187
A Topologia Diferencial	189
B Álgebra Semissimples	203
Referências Bibliográficas	213
Índice Remissivo	217

Introdução

A formulação dos axiomas da Teoria Quântica dos Campos Topológica (TQCT) foi apresentada pela primeira vez pelo matemático britânico Michael Atiyah [1]. Ao menos dois autores tiveram influência direta neste trabalho de Atiyah, de um lado, o físico americano Edward Witten cujos artigos [2, 3] foram motivados essencialmente por modelos físicos dos quais a teoria de Chern-Simons é um exemplo, e, de outro lado, o matemático britânico Graeme Segal com sua formulação da teoria dos campos conforme [4]. Após a apresentação axiomática de Atiyah, aspectos matemáticos fundamentais ligados com a teoria de categorias e com a teoria de cobordismos passaram a ter destaque. A TQCT, desde então, tem sido objeto de pesquisa não apenas de físicos mas também de matemáticos (veja em [5] algumas linhas de pesquisa sobre o tema), transformando-se desta maneira em uma grande área de intersecção entre as disciplinas da física e da matemática. Do lado desta, o interesse surge, entre outras razões, pois a obtenção de novas TQCT's permite a construção de invariantes topológicos. Mas as TQCT's também podem ser estudadas independente de suas aplicações em topologia por estarem conectadas à teoria de categorias. Já do lado da física, as pesquisas se voltam para suas aplicações em sistemas físicos e modelos teóricos. Nas últimas duas décadas, pesquisas em física da matéria condensada levaram à formulação do que se convencionou chamar *topological order*. Um sistema é dito possuir *topological order* caso o seu limite de baixas energias (o estado fundamental e os primeiros estados excitados) seja descrito por uma TQCT. O efeito Hall Quântico é o exemplo mais famoso. Do lado dos modelos teóricos, hamiltonianas exatamente solúveis de modelos na rede, como o *toric code* de Kitaev [6] e suas generalizações como os *quantum double models* [7], são um tópico de pesquisa atual. Mais recentemente, ainda podemos citar outros desenvolvimentos como os que estão sendo realizados nos trabalhos [8–11].

Nesta dissertação não trataremos da física associada às TQCT's. Apenas apresentaremos as TQCT's como um objeto meramente matemático. A única conexão que faremos com a física é a observação de que os axiomas de Atiyah foram motivados pelo formalismo das integrais de trajetórias adaptadas para teorias quânticas dos campos da física. Como veremos ao longo do texto, existe uma classificação para todas as TQCT's bidimensionais (2D). O que torna possível a classificação das TQCT's em 2D é o fato de que a categoria dos cobordismos em 2D pode ser descrita por um número pequeno de geradores e relações. Por sua vez, a

origem desta descrição encontra-se no teorema de classificação de variedades em 2D. Já para dimensões maiores, como no caso tridimensional (3D), o mesmo não acontece. Apesar disso, existem alguns métodos para a construção de uma TQCT 3D, como descrevemos agora.

Sabe-se que toda TQCT fornece invariantes topológicos sendo esta uma das principais aplicações da teoria. No entanto, nem todo invariante topológico pode ser obtido de uma TQCT. Ainda assim é possível em alguns casos estender um invariante numérico $Z(M) \in \mathbb{C}$ onde M é uma variedade sem bordo, isto é, pode-se encontrar uma TQCT definida como um funtor Z da categoria dos cobordismos orientados à categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita, tal que o seu invariante topológico associado seja $Z(M)$. O invariante de Turaev-Viro [12] obtido com base nos chamados *quantum 6-j symbols* é um exemplo de invariante topológico que pode ser estendido para uma TQCT [13]. Já um outro invariante topológico para variedades em 3D também foi obtido por Kuperberg [14] a partir de uma álgebra de Hopf. Posteriormente, percebeu-se que este segundo invariante é equivalente ao de Turaev [15], contudo, estes dois invariantes são construídos de maneiras muito distintas. Enquanto a construção de Turaev utiliza triangulações e *quantum 6-j symbols*, o invariante de Kuperberg é obtido a partir de *Heegaard splitting* e álgebras de Hopf. De qualquer forma, a igualdade entre os invariantes indica que, assim como já foi realizado para a construção de Turaev, é possível estender o invariante de Kuperberg a fim de obtermos uma TQCT. Nosso objetivo será exatamente a construção em detalhes de uma TQCT 3D que estende o invariante de Kuperberg.

Para entendermos, em linhas gerais, como isto será feito, vamos considerar uma variedade N tal que o seu bordo seja a união disjunta $\partial N = \Sigma_1 \coprod \Sigma_2$, onde $\Sigma_{i=1,2}$ são variedades conexas de codimensão 1 sem bordo. Uma TQCT será um funtor Z que irá associar para cada componente conexa $\Sigma_{i=1,2}$ um espaço vetorial de Hilbert $\mathcal{H}$, enquanto para a variedade N o funtor Z irá associar um operador (análogo ao operador de evolução temporal) entre os estados inicial $Z(\Sigma_1)$ e final $Z(\Sigma_2)$. Isto pode ser descrito visualmente da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccc} Z(N) : & Z(\Sigma_1) & \rightarrow & Z(\Sigma_2) \\ & \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}(\Delta t) : & \mathcal{H}_1 & \rightarrow & \mathcal{H}_2. \end{array}$$

Um aspecto bastante particular de uma TQCT é o fato de que esta construção também estará definida para uma variedade M cujo bordo é trivial, isto é, $\partial M = \emptyset$. Neste caso o funtor Z irá associar ao bordo trivial o corpo do espaço vetorial $\mathcal{H}$. Já o operador $Z(M)$ será um número complexo, ou seja, um invariante numérico:

$$\begin{array}{ccccc} Z(M) : & Z(\emptyset) & \rightarrow & Z(\emptyset) \\ & \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}(\Delta t) : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}. \end{array}$$

Em analogia com a mecânica estatística iremos chamar o operador $Z(M)$ definido para uma variedade M sem bordo de função de partição. Desta maneira, caso possamos determinar um invariante numérico para variedades sem bordo então existe a possibilidade de encontrarmos a TQCT associada com este invariante, já que um invariante numérico pode ser descrito por uma TQCT.

A dissertação está dividida em três capítulos, descritos individualmente nos próximos parágrafos. Já o trabalho como um todo tem início com a apresentação da definição axiomática de uma TQCT e, para isso, será preciso discutirmos alguns resultados que envolvem topologia diferencial, teoria de categorias e teoria de cobordismos. Assim, começamos o primeiro capítulo com uma abordagem individual de cada um destes tópicos, mas sempre nos limitando apenas ao necessário para nosso contexto. Depois de exibir a definição axiomática passamos à discussão da TQCT bidimensional, que será importante ao menos por dois motivos. Primeiro, para tornar claro como as diferentes partes da estrutura de uma TQCT se interligam. Segundo, pois alguns resultados em 2D motivam a busca de fatos semelhantes em dimensões maiores. Desta maneira, a discussão para 2D que começa ainda no primeiro capítulo completa-se no segundo, e, uma vez apresentados os pontos centrais da teoria em 2D, dedicamos o terceiro capítulo para mostrar como alguns destes pontos podem ser reproduzidos para a TQCT em 3D.

No primeiro capítulo apresentamos a definição axiomática de uma TQCT. Para entendê-la será preciso abordar a teoria de cobordismos [16,17], cuja preocupação é o estudo de variedades diferenciáveis com bordo. Por esta razão algumas definições e resultados envolvendo variedades diferenciáveis são vistas no Apêndice A, para o qual foram utilizadas as referências [17–22]. A definição de uma TQCT considera somente variedades com orientação — não basta serem orientáveis — por isso, ainda no Apêndice A, fazemos uma discussão atenciosa sobre a orientação de variedades diferenciáveis. Já no começo do capítulo apresentamos algumas convenções a serem adotadas e, logo após, as definições mais centrais sobre a teoria de cobordismos são vistas. Em linhas gerais a TQCT é um conjunto de relações entre uma estrutura de cobordismos com uma estrutura de espaços vetoriais. Tal conjunto de relações é interpretado em linguagem de categorias como um funtor. Assim, antes de prosseguir, mostramos algumas definições da teoria de categorias, apenas as necessárias para descrever a teoria de cobordismos como uma categoria, o que é feito logo em seguida. Para os resultados sobre teoria de categorias utilizamos sobretudo [23, 24]. Depois apresentamos a definição axiomática da TQCT, considerada ainda no contexto mais geral possível. Na segunda metade do capítulo nos focamos sobre o caso 2D. Como já dissemos anteriormente, o conjunto de todas as TQCT's em 2D é classificável, resultado direto de um invariante capaz de classificar todas as superfícies, a saber, o número de Euler [25].

No segundo capítulo abordamos as implicações algébricas de uma TQCT 2D, isto é, a existência de uma relação um a um entre as TQCT's 2D e as álgebras de Frobenius. Por

isso, apresentamos uma coleção de resultados importantes para entendermos sua conexão com a TQCT 2D. Algumas definições mais gerais da álgebra encontram-se no Apêndice B, para o qual foram utilizadas as referências [26–29]. A descrição da relação um a um entre as TQCT's 2D e as álgebras de Frobenius foi apresentada¹ por Abrams [30], e consiste, em linhas gerais, em uma nova interpretação da álgebra de Frobenius. A revisão bastante detalhada deste resultado foi realizada por J. Kock [31], sendo esta referência junto com a própria [30] as mais utilizadas para discutir o assunto em nosso texto. De fato, a sequência adotada por nós para o primeiro capítulo e para o começo do segundo, assim como a escolha pela descrição gráfica da álgebra de Frobenius, tiveram apoio principalmente em [31]. Além destas, também utilizamos a leitura feita em [32]. Na segunda metade do capítulo nos voltamos para variedades com triangulação. Desta maneira, discutimos a chamada teoria na rede [33], sua relação com uma álgebra semissimples e com uma TQCT 2D sem triangulação. Para esta parte foram utilizadas diversas referências, das quais destacamos a exposição feita em [34] juntamente com as diversas explicações encontradas em [35, 36].

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo da TQCT 3D. Da mesma forma como acontece para o caso bidimensional, no centro da teoria encontraremos um invariante topológico, neste caso o invariante de Kuperberg [14]. Este objeto é definido sobre variedades em 3D e relaciona-se diretamente com uma álgebra de Hopf involutória. Começamos o capítulo, desta maneira, apresentando as definições mais importantes de uma álgebra de Hopf e mostramos uma notação capaz de tornar mais visual as demonstrações, como alternativa aos tradicionais diagramas comumente empregados em álgebra. As referências consultadas para o estudo da álgebra de Hopf foram [37, 38], e a notação alternativa encontra-se em [14]. A demonstração de que o objeto proposto por Kuperberg é um invariante é uma versão da demonstração original e foi desenvolvida em [39, 40]. A construção da TQCT relacionada com o invariante de Kuperberg, embora implícita em [8, 9], ainda não havia sido construída explicitamente. Descrevemos a seguir como a TQCT 3D será construída.

Inicialmente iremos verificar que o objeto proposto por Kuperberg, construído a partir de triangulações sobre variedades, é um invariante topológico numérico. Em nosso caso triangulação significará que dada uma variedade fechada em 3D iremos reescrevê-la através de uma colagem na qual apenas tetraedros serão utilizados. Assim, após determinarmos uma triangulação para uma variedade fechada M , o passo seguinte para obtermos a construção sugerida por Kuperberg será a associação de tensores contravariantes ($\Delta^{a_1 a_2 \dots a_n}$) às arestas e de tensores covariantes ($M_{b_1 b_2 b_3}$) às faces dos tetraedros envolvidos na triangulação. Deixando de lado por enquanto os detalhes desta associação, importa apenas dizer que para cada triangulação de uma variedade, isto é, dada a colagem de um conjunto de tetraedros realizada de modo a representar uma variedade, faremos a contração de índices dos tensores associados aos tetraedros fornecendo desta maneira, como já esperávamos, um valor numérico

¹A existência desta relação já era conhecida pouco antes, ver [30].

para esta triangulação. A demonstração de que o objeto de Kuperberg para esta construção é um invariante topológico será obtida empregando-se o teorema de Pachner [41] e com a associação de uma álgebra de Hopf involutória para os tensores da triangulação. Para o invariante de Kuperberg assim considerado não restará qualquer índice tensorial sobre a triangulação que não esteja contraído, já que a variedade em questão não possui bordo. No entanto, para obtermos a TQCT será preciso descrevermos variedades com bordo não trivial, e isto será feito considerando um “corte” sobre uma variedade fechada a fim de gerar duas variedades complementares e com bordo não trivial. A análise deste processo mostrará que as contrações entre alguns índices dos tensores deixarão de acontecer e junto com os bordos das novas variedades estarão associados, de um lado, espaços vetoriais, e, de outro lado, os respectivos espaços vetoriais duais. Esta relação entre espaços vetoriais e bordos será generalizada para a construção de uma TQCT 3D. Contudo, ainda restará uma escolha sobre os possíveis espaços vetoriais associados, pois o “corte” que realizamos depende de uma triangulação específica. A partir de algumas considerações sobre a imagem obtida pelos operadores de evolução da TQCT iremos verificar que a TQCT 3D construída neste trabalho não dependerá de tal escolha e desta maneira encerraremos a construção da teoria obtida a partir do invariante de Kuperberg.

Antes de encerrar a introdução, gostaríamos ainda de chamar a atenção para a relação entre os tópicos escolhidos e desenvolvidos neste trabalho, começando pela exposição do caso 2D. Como já comentamos, em nossa abordagem buscamos apresentar as discussões em 2D sempre com objetivo de retomá-las na construção da TQCT 3D obtida para o invariante de Kuperberg. Além de tornar diversas passagens mais claras, uma vez que em duas dimensões ainda é possível visualizarmos as figuras topológicas, também esperamos tornar evidente uma das consequências da axiomatização das TQCT's, qual seja, a possibilidade de encontrarmos classificações mais gerais para as teorias, ver [1]. Também é importante destacar a abordagem realizada para encontrarmos o invariante de Kuperberg. Além desta já ser uma variação da original, com base nos trabalhos [39,40], em nossa dissertação apresentamos o Lema 3.21, que ainda não havia sido descoberto nos trabalhos anteriores e foi obtido por Hudson Kazuo, integrante de nossa equipe de pesquisa. O Lema 3.21 nos possibilita encontrar diversas simplificações e podemos dizer que a demonstração aqui apresentada modifica-se em muitos aspectos, apesar de o formalismo continuar sendo o mesmo. Por fim, nossa maior contribuição encontra-se na seção 3.3, na qual discutimos a extensão do invariante de Kuperberg para o caso de variedades com bordo, definindo a partir disso uma convenção para a rede tensorial envolvida. Desta maneira encontramos nosso resultado principal, ou seja, a construção do funtor associado com o invariante de Kuperberg e, por consequência, da própria TQCT 3D.

Capítulo 1

Teoria Quântica dos Campos Topológica

Neste capítulo iremos apresentar a definição axiomática da Teoria Quântica dos Campos Topológica (TQCT). Para tal será necessário discutir a teoria de cobordismos, parte essencial de uma TQCT. A teoria de cobordismos então é reinterpretada via teoria de categorias, e para o caso bidimensional (2D) iremos considerar sua construção através de geradores e relações. Com isso, já na última parte do capítulo, mostraremos a classificação das TQCT's em 2D.

1.1 Cobordismo e Teoria de Categorias

Esta seção contém algumas definições preliminares bem como a notação que será empregada.

1.1.1 Variedades topológicas e orientação

Ao longo deste trabalho sempre vamos tratar de variedades topológicas n -dimensionais diferenciáveis, as quais serão chamadas apenas de n -variedades. Além disso, nós estaremos interessados em variedades com bordo. Este, por sua vez, também será uma variedade mas fechada (isto é, compacta e sem bordo). Desta maneira, para distinguirmos entre uma variedade e o bordo desta variedade, vamos indicar a primeira com letras romanas em caixa alta, M por exemplo, e quando nos referirmos ao bordo desta variedade utilizaremos letras gregas, Σ por exemplo.

Os resultados sobre variedades diferenciáveis não serão essenciais para a compreensão do desenvolvimento que será feito neste trabalho, contudo, iremos utilizar algumas definições usuais como carta, transformação de cartas e atlas. Os pontos mais relevantes para o nosso desenvolvimento encontram-se resumidos no Apêndice A e para demonstrações mais longas ou detalhadas indicaremos as referências, como as já citadas na introdução, ver [18] por exemplo. Com isso, vamos assumir deste ponto em diante que as definições tratadas no Apêndice A são conhecidas e sugerimos sua consulta caso o leitor não recorde ou não tenha

familiaridade com a linguagem da topologia diferencial. O único aspecto não usual a ser destacado é o fato de que todas as variedades não são apenas orientáveis mas estão munidas de uma orientação, inclusive o bordo. Assim, quando comparamos a orientação de uma variedade com a de seu bordo vemos que existem apenas duas possíveis relações entre as mesmas e isto define o conceito de bordo para dentro e bordo para fora. Esta última definição também é apresentada no Apêndice A e ela será importante para estabelecermos a ideia de direção para uma TQCT.

Por *suave* entendemos a classe diferenciável C^∞ e vamos utilizar diferenciabilidade como sinônimo de suave e vice-versa, e quando nos referirmos ao corpo base $\mathbb{k}$ queremos dizer $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.2 Cobordismo

A teoria de cobordismos foi apresentada pelo matemático René Thom em 1954, e sua importância foi rapidamente difundida entre os matemáticos levando René Thom a ganhar a medalha Fields no ano de 1958. A teoria de cobordismos estuda a classe de equivalência de variedades obtida com a seguinte definição.

Definição 1.1 (Cobordismo) *Sejam Σ_0 e Σ_1 duas $(n - 1)$ -variedades fechadas (ou seja, compactas e sem bordos). Uma n -variedade compacta M cujo bordo é a união disjunta $\Sigma_0 \amalg \Sigma_1$ será chamada de cobordismo entre Σ_0 e Σ_1 . Se a n -variedade M existir então chamamos os bordos Σ_0 e Σ_1 de cobordantes.*

Para estudarmos a TQCT devemos ficar restritos a um caso particular de cobordismo, a saber, os cobordismos nos quais as variedades envolvidas são todas orientáveis. Assim, quando citarmos a teoria de cobordismos ao longo deste trabalho estaremos nos referindo à próxima definição.

Definição 1.2 (Cobordismo orientado) *Sejam Σ_0 e Σ_1 duas $(n - 1)$ -variedades fechadas e orientadas. Um cobordismo orientado de Σ_0 para Σ_1 é uma n -variedade compacta orientada M cujo bordo para dentro é Σ_0 e cujo bordo para fora é Σ_1 . Vamos utilizar a notação*

$$M : \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma_1$$

para descrever um cobordismo orientado.

Os conceitos de bordo para fora e bordo para dentro encontram-se na Definição A.25. A notação anterior para um cobordismo orientado será bastante utilizada, contudo, em alguns casos será particularmente útil se pudermos encontrar uma notação capaz de expressar o bordo para dentro e o bordo para fora como variedades independentes. Para encontrarmos

esta notação vamos considerar, como já citado, o fato de que o bordo também é uma variedade. Desta maneira, considere uma variedade Σ fechada e orientada tal que exista uma aplicação f dela sobre o bordo de uma variedade M como é visto na Figura 1.1.

Figura 1.1 Mapa f de uma variedade fechada e com orientação sobre o bordo de outra variedade.

Como encontra-se na Definição A.25, um bordo será para dentro ou para fora de acordo com uma *relação* entre a orientação deste bordo e a orientação da variedade sobre a qual se encontra. Justamente por isso, não sabemos *a priori* se o mapa f anterior será tal que sua imagem em M será um bordo para dentro ou para fora. De fato, existem apenas duas possibilidades, pois isso dependerá se o mapa f irá preservar a orientação ou se ele irá inverter a orientação de Σ . Vemos assim como a aplicação f de Σ sobre o bordo de M será importante. A fim de evitarmos esta ambiguidade com respeito à orientação, ao longo de nossa dissertação sempre que nós considerarmos esse tipo de mapa utilizaremos aplicações que *preservam* a orientação de Σ . Com isso, dada uma variedade Σ com orientação, usando o mapa f de Σ sobre o bordo de M , saberemos se a imagem de f será um bordo para dentro ou para fora.

Agora considere dois mapas f e g tais que suas imagens sobre M são respectivamente um bordo para dentro e um bordo para fora, representamos esta situação na Figura 1.2 a seguir.

Figura 1.2 Mapas f e g cujas imagens são um bordo para dentro e um bordo para fora respectivamente.

Sejam ω_0 e ω_1 as orientações de Σ_0 e Σ_1 , então o mapa $f : \Sigma_0 \rightarrow M$ será um difeomorfismo tal que sua imagem $f(\Sigma_0, \omega_0) \subset M$ é um bordo para dentro em M , enquanto $g : \Sigma_1 \rightarrow M$ também será um difeomorfismo mas sua imagem $g(\Sigma_1, \omega_1) \subset M$ se constituirá em um bordo para fora com relação à M . Esta maneira de ver o cobordismo não é muito diferente daquela apresentada na própria definição mas ressalta o fato de as variedades mapeadas possuírem sua própria orientação. Escrevendo o mapa f da seguinte maneira $\Sigma_0 \rightarrow M$ e o mapa g como $M \leftarrow \Sigma_1$, isto é, adotando a convenção de que um mapa cuja imagem é um bordo para dentro será sempre representado por uma seta à esquerda de M , enquanto que para o caso de a imagem de um mapa ser um bordo para fora então iremos representá-lo com uma seta à direita de M , podemos com isso adotar a seguinte notação bastante compacta e com a qual todas estas considerações sobre a orientação estarão subentendidas

$$\Sigma_0 \rightarrow M \leftarrow \Sigma_1.$$

Para dar um exemplo da simplificação oferecida por esta notação, vamos mostrar a representação de um cobordismo M de uma variedade Σ para ela mesma. Para tal, basta existir um cobordismo M no qual podemos mapear a variedade (Σ, ω) como um bordo para dentro de M , e, sem modificar a orientação de M , também podemos mapear uma variedade idêntica (Σ, ω) como um bordo para fora de M . Por exemplo, seja o intervalo $I = [0, 1]$ orientado tal que $\{0\}$ é um bordo para dentro e $\{1\}$ é um bordo para fora. Então $M = (\Sigma, \omega) \times I$ é um cobordismo de (Σ, ω) para (Σ, ω) dado por

$$\Sigma_0 \rightarrow (\Sigma, \omega) \times \{0\} \subset M \supset (\Sigma, \omega) \times \{1\} \leftarrow \Sigma_1.$$

Para o caso particular de cobordismos orientados de 2-variedades teremos mapeamentos de 1-variedades orientáveis fechadas sobre os bordos do cobordismo ou, em outras palavras, todo bordante conexo será um homeomorfismo da variedade S^1 (círculo) ou de uniões disjuntas de S^1 . Portanto, ao tratarmos o caso 2D estaremos interessados em cobordismos de S^1 (ou uniões disjuntas de S^1) para S^1 (ou uniões disjuntas de S^1).

Ainda para destacar a relevância dos mapas que estamos construindo, vamos supor que para duas variedades M_1 e M_2 quaisquer seja possível obtermos mapas sobre os seus bordos como apresentado na Figura 1.3. As imagens dos mapas f_1 e f_2 são bordos para dentro e as imagens de g_1 e g_2 são bordos para fora. Podemos realizar a colagem destas variedades utilizando o fato de que existem dois mapas da mesma variedade (Σ_1) sobre as duas variedades M_1 e M_2 , ou seja, fazendo uso da aplicação $f_2 \circ g_1^{-1}$ pode-se identificar os dois bordos como é visto na Figura 1.4. O resultado desta nova aplicação será então uma nova variedade $M_1 \cup M_2$ como encontramos na Figura 1.5.

Observe que a colagem só está definida quando para uma mesma variedade Σ pudermos encontrar simultaneamente dois mapas tais que a imagem de um destes (neste caso g_1) seja

Figura 1.3 Variedades M_1 e M_2 com os respectivos mapas sobre os bordos.

Figura 1.4 Colagem através de $f_2 \circ g_1^{-1}$.

um bordo para fora com relação à M_1 e a imagem do outro mapa (neste caso f_2) seja um bordo para dentro com relação à M_2 . Lembrando que estamos considerando apenas mapeamentos que *preservam* as orientações, se tais mapas existirem então não haverá ambiguidade quanto às orientações. Ainda assim, a colagem dependerá da escolha dos mapas g_1 e f_2 pois a variedade final $M_1 \cup M_2$ obtida poderá ser bastante distinta dependendo desta escolha, basta lembrarmos que a colagem de dois “toros sólidos” (também chamados de *handlebody* de gênero 1) resultam em variedades bem diferentes dependendo das funções utilizadas para realizar a colagem. Por fim, podemos resumir toda esta discussão em termos da notação já apresentada

$$(M_1 \cup M_2) = (\Sigma_0 \rightarrow M_1 \leftarrow \Sigma_1 \rightarrow M_2 \leftarrow \Sigma_2).$$

Figura 1.5 Variedade $M_1 \cup M_2$ obtida após a colagem.

Ainda com relação à notação, também vamos adotar um conjunto de figuras específicas para representar os cobordismos formados por 2-variedades. Nestas figuras indicaremos um bordo para dentro com uma seta apontando para dentro do cobordismo, e, da mesma maneira, um bordo para fora será indicado com uma seta apontando na direção oposta do cobordismo, ver Figura 1.6. Além disso, sempre que for possível também vamos apresentar os bordos para dentro à esquerda do cobordismo e os bordos para fora à direita, e se não houver ambiguidade deixaremos de colocar as setas sobre os bordos. Um exemplo típico desta notação também encontra-se na Figura 1.6.

Figura 1.6 Exemplo de cobordismo cuja orientação está implícita na posição do bordo: esquerda ou direita.

Em alguns casos, variedades iguais mas com orientações opostas, quando mapeadas sobre o mesmo cobordismo, podem ser ambas para fora ou para dentro. Se isto acontecer vamos chamar uma das variedades de Σ e a outra de Σ' . Para compreender melhor quando esta situação ocorrerá, considere o cobordismo dado pelo cilindro entre dois bordos para fora (ou dois bordos para dentro), ver Figura 1.7. Também podemos, neste caso, reescrever o cobordismo com os dois bordos à direita (à esquerda), mas com isso iremos obter não mais um cilindro mas um tubo.

As semelhanças entre a TQCT 2D e a álgebra de Frobenius são melhor compreendidas quando estas duas estruturas são interpretadas com a linguagem fornecida pela teoria de categorias. Com isto em vista apresentamos a seguir algumas definições e resultados que serão utilizados na sequência.

1.1.3 Teoria de categorias

Estruturas mais gerais dentro da matemática, tais como a coleção de todos os espaços topológicos ou de todas as álgebras, podem ser pensadas através da teoria de categorias. Como nosso objetivo será justamente comparar estruturas maiores e distintas, isto é, espaços topológicos, espaços vetoriais e álgebras, a teoria de categorias é importante pois ela fornece as ferramentas adequadas para compreender de maneira precisa como podemos realizar as comparações em cada caso.

Figura 1.7 Caso o cilindro seja (a) um cobordismo entre dois bordos para dentro, ou (b) dois bordos para fora, obteremos dois tubos como acima, e desta forma será possível desconsiderar as setas.

A teoria de categorias é, sem dúvida alguma, bastante abrangente, no entanto, iremos apresentar apenas as definições e resultados indispensáveis para nosso objetivo.

Definição 1.3 *Uma categoria $\mathbf{C}$ é descrita da seguinte maneira.*

- (a) *Uma coleção $\text{Obj}(\mathbf{C})$ cujos elementos são chamados objetos da categoria;*
- (b) *Para cada dois objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, uma coleção $\text{Morf}(A, B)$ chamada de morfismos de A em B . A coleção $\text{Morf}(A, B)$ pode ser $\emptyset$;*
- (c) *Para cada três objetos $A, B, C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, uma lei de composição*

$$\text{Morf}(A, B) \times \text{Morf}(B, C) \longrightarrow \text{Morf}(A, C);$$

- (d) *Para cada objeto $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ um morfismo $1_A \in \text{Morf}(A, A)$ chamado identidade em A .*

Além disso os itens (a)-(b) devem satisfazer os dois próximos axiomas.

Axioma 1.4 (Associatividade) *Sejam $f \in \text{Morf}(A, B)$, $g \in \text{Morf}(B, C)$ e $h \in \text{Morf}(C, D)$ três morfismos então a igualdade*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

é válida.

Axioma 1.5 (Identidade) *Sejam $f \in \text{Morf}(A, B)$ e $g \in \text{Morf}(B, C)$ dois morfismos então a igualdade*

$$1_B \circ f = f, \quad g \circ 1_B = g$$

é válida.

Os morfismos também serão chamados de *setas*. Alguns exemplos de categorias são obtidos pelos seguintes objetos e seus respectivos morfismos.

R. Números reais $\mathbb{R}$ e funções contínuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Set. Conjuntos e funções.

Grp. Grupos e homomorfismos de grupos.

Top. Espaços topológicos e mapas contínuos.

Man. Variedades diferenciáveis e mapas suaves.

Vet. Espaços vetoriais e transformações lineares.

Definição 1.6 *Seja $\mathbf{C}$ uma categoria. Chamamos $\mathbf{C}$ de pequena categoria se ambas coleções de objetos e morfismos de $\mathbf{C}$ forem conjuntos. Caso contrário chamamos $\mathbf{C}$ de uma grande categoria.*

Poderemos realizar todas as discussões neste trabalho considerando somente pequenas categorias, mas voltaremos a discutir este ponto mais tarde. A definição de isomorfismo de funções possui um análogo para categorias como apresentado a seguir.

Definição 1.7 *Seja $\mathbf{C}$ uma categoria. Chamamos um morfismo $f \in \text{Morf}(A, B)$ de isomorfismo caso exista um morfismo $g \in \text{Morf}(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$. O elemento g é único e será escrito por f^{-1} . Quando existir um isomorfismo entre os objetos A e B eles serão chamados de isomorfos e indicados por $A \simeq B$. A relação $A \simeq B$ também será chamada de um isomorfismo de objetos.*

A próxima definição será fundamental para realizarmos a construção de uma TQCT.

Definição 1.8 *Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Por um funtor de $\mathbf{C}$ para $\mathbf{D}$ queremos dizer um mapa F que atribui para cada objeto $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ um objeto $F(A) \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, ou seja, $F : \text{Obj}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{D})$, e que, para cada morfismo entre dois objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, este mapa atribui um morfismo entre os objetos dados por $F(A), F(B) \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, ou seja, $F : \text{Morf}(A, B) \rightarrow \text{Morf}(F(A), F(B))$, tal que*

$$(a) \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \text{ para dois morfismos } f \text{ e } g \text{ em } \mathbf{C}.$$

(b) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Apresentamos a seguir mais algumas definições que serão importantes quando estivermos discutindo a colagem de espaços topológicos.

Definição 1.9 *Sejam X , A e B três objetos de uma categoria $\mathbf{C}$. Considere dois morfismos dados por $f : X \rightarrow A$ e $g : X \rightarrow B$. Um pushout para o trio (X, f, g) é um objeto $P \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ junto com dois morfismos $r : A \rightarrow P$ e $s : B \rightarrow P$ tais que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{s} & B \\ r \uparrow & & \uparrow g \\ A & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

é comutativo e universal no seguinte sentido. Seja o trio Q , $m : A \rightarrow Q$ e $n : B \rightarrow Q$ também um pushout para (X, f, g) , ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xleftarrow{n} & B \\ m \uparrow & & \uparrow g \\ A & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

comuta. A universalidade significa que existe um único morfismo $h : P \rightarrow Q$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & & \swarrow h & & \nwarrow n \\ & & P & \xleftarrow{s} & B \\ & \swarrow m & \uparrow r & & \uparrow g \\ & A & \xleftarrow{f} & X & \end{array}$$

também é comutativo.

Teorema 1.10 *Quando existe um pushout (P, r, s) para o trio (X, f, g) ele será único a menos de isomorfismos do objeto P do pushout.*

Demonstração. A partir do último diagrama apresentado na definição anterior podemos obter as duas próximas relações

- (1) $m = h \circ r$,
- (2) $n = h \circ s$.

Ainda pela definição, sabemos que dado um pushout (P, r, s) para (X, f, g) , então para qualquer outro pushout (Q, m, n) o morfismo $h : P \rightarrow Q$ é único. Contudo, se (Q, m, n)

também é um *pushout* para (X, f, g) poderíamos ter considerado primeiro o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xleftarrow{n} & B \\ m \uparrow & & \uparrow g \\ A & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

e (P, r, s) como sendo “um outro *pushout*” com relação ao trio (Q, m, n) . Neste caso deve existir um mapa $j : Q \rightarrow P$ único que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \nearrow s & & \\ & Q & \xleftarrow{n} & B & \\ & m \uparrow & & \uparrow g & \\ & A & \xleftarrow{f} & X & \\ & \nwarrow r & & \nearrow j & \\ & & P & & \end{array}$$

comutar e que fornece as relações

$$(3) \quad r = j \circ m,$$

$$(4) \quad s = j \circ n.$$

Com as relações obtidas anteriormente podemos verificar que a composição de $(j \circ h)$ com r fornece

$$(j \circ h) \circ r = j \circ (h \circ r) \stackrel{(1)}{=} j \circ m \stackrel{(3)}{=} r,$$

enquanto a composição de $(j \circ h)$ com s fornece

$$(j \circ h) \circ s = j \circ (h \circ s) \stackrel{(2)}{=} j \circ n \stackrel{(4)}{=} s.$$

A partir destes dois resultados podemos escrever o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \nearrow s & & \\ & Q & \xleftarrow{n} & B & \\ & m \uparrow & & \uparrow g & \\ & A & \xleftarrow{f} & X & \\ & \nwarrow r & & \nearrow j & \\ & & P & & \end{array}$$

mas como a identidade também fornece o próximo *pushout*

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 & \nwarrow 1_P & \nearrow s \\
 & P & \xleftarrow{s} B \\
 & \uparrow r & \uparrow g \\
 A & \xleftarrow{f} & X
 \end{array}$$

que deverá ser único, então $j \circ h = 1_P$, e com argumentos semelhantes obtemos $h \circ j = 1_Q$, logo $P \simeq Q$ ■

A definição de *pushout* será bastante importante para o desenvolvimento que faremos a seguir. Iremos utilizá-la para obter alguns resultados principalmente dentro das categorias **Top** e **Man**, mas seu emprego também pode ser muito útil para a demonstração de diversos resultados em outras categorias.

A seguir veremos uma aplicação do *pushout* para a colagem de espaços topológicos.

Exemplo 1.11 Considere a categoria **Top** dos espaços topológicos. Sejam os objetos dados por $A, B, X \in \text{Obj}(\mathbf{Top})$ e dois morfismos $f, g \in \text{Morf}(\mathbf{Top})$ dados por $f : X \rightarrow A$ e $g : X \rightarrow B$. Podemos construir o *pushout* de (X, f, g) da seguinte maneira.

Primeiro iremos obter uma relação de equivalência $\sim$ a partir dos morfismos f e g , que neste caso serão mapas contínuos. Para isso, vamos considerar para todo $x \in X$ as imagens obtidas através de $f(x) = a \in A$ e $g(x) = b \in B$. Diremos então que os pontos $a \in A$ e $b \in B$ são equivalentes, isto é $a \sim b$ para cada $x \in X$.

Agora, para a união disjunta dos espaços topológicos A e B , dada por $A \amalg B$, vamos considerar o mapa quociente $q : A \amalg B \rightarrow A \amalg B / \sim$ obtido com ajuda da relação de equivalência anterior. A topologia em $A \amalg B / \sim$ será dada declarando um subconjunto aberto se as duas imagens obtidas pela inversa de $q|_A$ e pela inversa de $q|_B$ sobre este subconjunto forem abertas em A e B respectivamente.

Os morfismos r e s serão dados através de $r = q|_A$ e $s = q|_B$. Assim, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \amalg B / \sim & \xleftarrow{q|_B} & B \\
 \uparrow q|_A & & \uparrow g \\
 A & \xleftarrow{f} & X
 \end{array}$$

será um *pushout*, o que podemos verificar considerando um outro *pushout* qualquer de

(X, f, g) dado por (Z, m, n) , ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{n} & B \\ \uparrow m & & \uparrow g \\ A & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

irá comutar.

Neste caso, de acordo com a Definição 1.9, deverá existir um único morfismo h tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & & B \\ \uparrow m & \nwarrow h & \nwarrow q|_B \\ A \amalg B / \sim & \xleftarrow{q|_B} & B \\ \uparrow q|_A & & \uparrow g \\ A & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

é comutativo. Primeiro observe que, para todo $y \in (A \amalg B / \sim)$, podemos obter a função h da seguinte maneira

$$h(y) = \begin{cases} h(q|_A(a)) = (h \circ q|_A)(a) = m(a), & \forall a \in A \\ h(q|_B(b)) = (h \circ q|_B)(b) = n(b), & \forall b \in B. \end{cases}$$

Veja que pelo fato de (Z, m, n) também ser um *pushout* então para $\forall x \in X$ teremos o seguinte $m(f(x)) = n(g(x))$ e assim, de acordo com a relação de equivalência dada para obtermos $A \amalg B / \sim$, a função h estará bem definida. Além disso, uma vez dados os morfismos (funções contínuas) m e n do *pushout* (Z, m, n) , então a função h obtida, com imagem em Z e domínio $A \amalg B / \sim$, será unívoca.

Resta, ainda, determinar se a função h é contínua, pois esperamos que ela também seja um morfismo de **Top**. Para isso, considere um aberto $U \subset Z$ e sua imagem inversa por h , que chamaremos de V , isto é

$$h^{-1}(U) = V \subset (A \amalg B / \sim).$$

Assim, para que a função h seja contínua é necessário que V seja um aberto. No

entanto, para que isso ocorra, de acordo com a topologia definida em $A \amalg B / \sim$, basta que as imagens inversas de V , tanto por $q|_A$ quanto por $q|_B$, sejam abertos, ou seja, W_A e W_B dados por

$$\begin{aligned} W_A &= q^{-1}|_A(V) \subset A, \\ W_B &= q^{-1}|_B(V) \subset B, \end{aligned}$$

devem ser abertos. Mas isto é verdade pois

$$\begin{aligned} W_A &= q^{-1}|_A(V) = q^{-1}|_A(h^{-1}(U)) = (q^{-1}|_A \circ h^{-1})(U) \\ &= (h \circ q|_A)^{-1}(U) = m^{-1}(U), \end{aligned}$$

que deve ser um aberto já que $m : A \rightarrow Z$ é uma função contínua. De modo análogo, W_B também será um aberto pois neste caso $n : B \rightarrow Z$ será uma função contínua, e o trio $(A \amalg B / \sim, q|_A, q|_B)$ será, portanto, um *pushout* para (X, f, g) .

O *pushout* obtido neste exemplo será empregado em diversos resultados que iremos encontrar ainda neste capítulo. Apesar de termos nos concentrado na categoria **Top** e, portanto, em funções contínuas, os resultados análogos para funções diferenciáveis, por exemplo, podem ser obtidos de maneira bastante semelhante à que foi agora realizada.

Ainda para percebermos a importância deste desenvolvimento, apresentamos a seguir um modo interessante para encontrarmos novos espaços topológicos. Assim, a fim de ilustrar todo desenvolvimento anterior iremos obter a esfera S^2 fazendo uso do mapa inclusão de S^1 sobre os discos D^2 , ou seja, vamos construir um *pushout* dado por $(S^2, q|_A, q|_B)$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^2 = D^2 \amalg D^2 / \sim & \xleftarrow{q|_B} & D^2 \\ \uparrow q|_A & & \uparrow i \\ D^2 & \xleftarrow{i} & S^1 \end{array}$$

irá comutar. Os espaços topológicos envolvidos na construção deste *pushout* podem ser representados como é visto na Figura 1.8 a seguir.

De modo geral, as considerações desta seção sobre a teoria de categorias serão retomadas ao longo de todo nosso desenvolvimento posterior. Ainda assim serão precisos outras definições e teoremas, mas deixaremos para apresentá-los quando eles forem necessários.

A seguir, começaremos reinterpretando a teoria de cobordismos a partir dos conceitos agora apresentados.

Figura 1.8 Construção da esfera S^2 a partir da colagem dos discos D^2 .

1.2 Teoria Quântica dos Campos Topológica

Nesta seção vamos apresentar a definição axiomática de uma TQCT n -dimensional e discutir algumas de suas propriedades. Como ficará claro adiante, a teoria de cobordismos ocupará um papel bastante importante, por isso ainda vamos abordar mais alguns aspectos desta teoria.

1.2.1 Categoria $\mathbf{nCob}$

Com base nas definições apresentadas sobre a teoria de categorias pretendemos interpretar os cobordismos entre $(n-1)$ -variedades como uma categoria $\mathbf{nCob}$. Para isso será necessário determinar quem são os objetos, quais são os respectivos morfismos (setas) e, por fim, verificar se os axiomas dados na Definição 1.3 são satisfeitos.

§1. Objetos e morfismos

Por definição, os cobordismos são n -variedades que conectam bordos de codimensão 1 (chamados neste caso de bordantes). Assim, antes de apresentar uma definição vemos que os candidatos naturais para objetos e morfismos de uma categoria $\mathbf{nCob}$ são, respectivamente, os bordantes e os cobordantes, ou melhor, dados dois objetos da categoria $\Sigma_0, \Sigma_1 \in \text{Obj}(\mathbf{nCob})$ um morfismo $\text{Morf}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ desta categoria *seria* obtido através do seguinte cobordismo

$$M : \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma_1.$$

No entanto, não existe uma única n -variedade para a qual Σ_0 e Σ_1 sejam os bordos para dentro e para fora respectivamente, logo, o morfismo ainda não está bem definido. Como veremos com o próximo resultado, na categoria $\mathbf{nCob}$, os morfismos não são cobordismos individuais M , mas sim classes de cobordismos.

Definição 1.12 *Sejam Σ_0, Σ_1 duas $(n-1)$ -variedades orientadas e M, M' dois cobordismos orientados tais que, para ambos, Σ_0 e Σ_1 são respectivamente os bordos para dentro e para fora*

Chamamos os cobordismos M, M' de equivalentes caso exista algum difeomorfismo da forma $f : M \rightarrow M'$ que faça o próximo diagrama comutar

e preserve as orientações das variedades.

§2. Composição de morfismos

Com a definição anterior os morfismos (cobordismos) ficam bem definidos a menos de difeomorfismos, ou seja, nos interessa a *classe de equivalência* dos cobordismos. Já para tratarmos a composição vamos começar discutindo a categoria **Top** e acrescentar pouco a pouco as demais estruturas em direção às variedades diferenciáveis.

Nas próximas definições, a seguinte notação representará a colagem de um mesmo bordo Σ sobre dois cobordismos M_0 e M_1 distintos

$$M_0 \leftarrow \Sigma \rightarrow M_1,$$

onde fica subentendida a orientação de Σ como bordo para fora com relação ao cobordismo M_0 e como bordo para dentro com relação ao cobordismo M_1 . Uma n -variedade M também é um espaço topológico, assim, vamos considerar o processo de colagem das n -variedades vistas apenas como espaços topológicos.

Definição 1.13 (Colagem de espaços topológicos disjuntos) *Sejam M_0, M_1 e Σ espaços topológicos, com M_0 e M_1 disjuntos. Considere dois mapas contínuos e injetivos $f_0 : \Sigma \rightarrow M_0$ e $f_1 : \Sigma \rightarrow M_1$, e a relação de equivalência entre os pontos $m_0 \in M_0$ e $m_1 \in M_1$ obtida se*

existe um ponto $x \in \Sigma$ tal que $f_0(x) = m_0$ e $f_1(x) = m_1$. Definimos a colagem dos espaços topológicos M_0 e M_1 como o quociente da união disjunta $M_0 \amalg M_1$ pela relação $m_0 \sim m_1$. Vamos indicar a colagem da seguinte maneira

$$\frac{M_0 \amalg M_1}{m_0 \sim m_1} := M_0 \amalg_{\Sigma} M_1.$$

Para determinarmos a topologia desta colagem considere o mapa

$$g : M_0 \amalg_{\Sigma} M_1 \rightarrow M_0 \amalg_{\Sigma} M_1,$$

tal que tenhamos as duas restrições

$$\begin{aligned} g|_{M_0} : M_0 &\hookrightarrow M_0 \amalg_{\Sigma} M_1, \\ g|_{M_1} : M_1 &\hookrightarrow M_0 \amalg_{\Sigma} M_1. \end{aligned}$$

A topologia de $M_0 \amalg_{\Sigma} M_1$ é definida declarando um subconjunto aberto se sua imagem é aberta tanto em M_0 pela inversa $g|_{M_0}$ como em M_1 pela inversa de $g|_{M_1}$. Assim o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & M_0 \amalg_{\Sigma} M_1 & \\ g|_{M_0} \nearrow & & \nwarrow g|_{M_1} \\ M_0 & & M_1 \\ & \Sigma & \end{array}$$

irá comutar pois todas as funções envolvidas são contínuas.

Teorema 1.14 *Sejam M_0 e M_1 dois espaços topológicos e $M_0 \amalg_{\Sigma} M_1$ a colagem dos mesmos. Para todo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ h_0 \nearrow & & \nwarrow h_1 \\ M_0 & & M_1 \\ & \Sigma & \end{array}$$

só existe um único mapa contínuo $h : M_0 \amalg_{\Sigma} M_1 \rightarrow X$ estendendo h_0 e h_1

Demonstração. Por construção, a colagem de espaços topológicos $M_0 \amalg_{\Sigma} M_1$ é um *pushout*, ver Exemplo 1.11, portanto, vale a propriedade universal do Teorema 1.10 ■

A generalização da colagem de espaços topológicos para variedades deve levar em consideração um novo atlas para a variedade obtida após a colagem. Por definição, as cartas de uma n -variedade M com bordo mapeiam os pontos de M para o semiespaço positivo definido por $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$, em particular, os pontos do bordo de M são mapeados para $\partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}_+^n | x_n = 0\}$. No entanto, a escolha do semiespaço positivo de $\mathbb{R}^n$ é claramente uma convenção, então, de maneira simétrica, é possível definirmos o mapeamento de uma n -variedade sobre o semiplano real negativo dado por $\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \leq 0\}$, enquanto os pontos do bordo serão levados para $\partial\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}_-^n | x_n = 0\}$. Esta liberdade de escolha pode ser aproveitada na colagem de variedades da seguinte maneira.

Teorema 1.15 (Colagem de variedades) *Considere duas variedades topológicas M_0 e M_1 com um bordo comum Σ , e dois atlas contínuos $\mathcal{A}$ de M_0 e $\mathcal{B}$ de M_1 . Dadas duas cartas $\mathcal{A} \ni h_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}_-^n$ e $\mathcal{B} \ni h_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, vamos escolher um aberto $U \subset M_0 \amalg_{\Sigma} M_1$ em torno de algum ponto de Σ contendo somente pontos interiores às variedades e pontos do bordo Σ , diminuindo os domínios U_0 e U_1 se necessário, tal que tenhamos $U_0 := U \cap M_0$ e $U_1 := U \cap M_1$. Existe uma função h tal que o diagrama*

comuta.

Demonstração. Por construção o aberto U será dado por $U = U_0 \coprod_{\Sigma} U_1$ (onde o índice Σ significa $\Sigma \cap U$), portanto U é um *pushout*. Escrevendo o espaço $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}^n = \coprod_{x_n=0} \mathbb{R}^n_{\pm}$, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Sigma & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 U_0 & \xrightarrow{\quad} & U & \xleftarrow{\quad} & U_1 \\
 & \searrow & \downarrow h & \swarrow & \\
 & \mathbb{R}^n_{-} \subset \mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}^n_{+} & & &
 \end{array}$$

$h_0 \quad \quad \quad h_1$

Neste caso $\mathbb{R}^n$ também é um *pushout*, e com isso vale a propriedade universal dada pelo Teorema 1.10, sendo h um isomorfismo, e o diagrama comuta ■

Contudo, a função h depende diretamente das escolhas de h_0 e h_1 , logo, precisamos saber como h se relaciona com uma outra aplicação encontrada para o mesmo aberto U . Vamos considerar então duas outras aplicações contínuas $g_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n_{-}$ e $g_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n_{+}$, fazendo os abertos U_0 e U_1 menores se necessário para mantê-los contínuos. O Teorema 1.15 pode ser utilizado com g_0 e g_1 , mas iremos obter uma carta $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferente da função h encontrada anteriormente. Assim, precisamos determinar se a transformação de cartas entre as cartas h e g está bem definida. Para tal, considere as transformações de cartas dadas por $\alpha_0 : \mathbb{R}^n_{-} \rightarrow \mathbb{R}^n_{-}$ e $\alpha_1 : \mathbb{R}^n_{+} \rightarrow \mathbb{R}^n_{+}$ com as quais podemos escrever o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Sigma & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 U_0 & \xrightarrow{\quad} & U & \xleftarrow{\quad} & U_1 \\
 \downarrow h_0 & & \downarrow h & & \downarrow h_1 \\
 \mathbb{R}^n_{-} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{R}^n_{+} \\
 \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha_1 \\
 \mathbb{R}^n_{-} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{R}^n_{+}
 \end{array}$$

$g_0 \quad \quad \quad g_1$

A continuidade das transformações α_0 e α_1 é assegurada pela continuidade de cada atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente. Portanto, a função contínua α também existe pela mesma propriedade universal que garante a existência de h , e as funções h e g são cartas admissíveis, isto é, a transição de cartas entre as cartas h e g é contínua. Constrói-se desta maneira um atlas contínuo para a variedade $M_0 \coprod_{\Sigma} M_1$ partindo dos atlas individuais de M_0 e de M_1 .

Até o momento, e não por acaso, apenas exigimos a continuidade das funções, deixando de considerar sua diferenciabilidade. De fato, a colagem pura e simples das funções de cada componente, ainda que diferenciáveis antes da colagem, pode ter como resultado uma aplicação *não* diferenciável para a nova variedade obtida depois da composição.

Com isso, a fim de determinarmos um atlas diferenciável para $M_0 M_1 := M_0 \amalg_{\Sigma} M_1$ será preciso encontrarmos uma variedade S com uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ e um homeomorfismo $h : M_0 M_1 \rightarrow S$ que seja um difeomorfismo quando restrito a qualquer uma das componentes M_0 e M_1 , pois desta maneira a estrutura diferenciável da variedade S garante a existência de um difeomorfismo $\mathcal{A} \ni g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ para todo aberto $V \subset S$, e como o homeomorfismo h leva todo aberto $U \subset M_0 M_1$ em um aberto $V \subset S$, é possível construirmos um difeomorfismo para U via *pullback*

$$\tilde{g} := (g \circ h) : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

vamos mostrar como isso pode ser feito com o próximo exemplo.

Exemplo 1.16 Sejam M_0 e M_1 duas variedades tais que existam dois difeomorfismos f_0 e f_1 destas variedades para o cilindro

$$\begin{aligned} f_0 : M_0 &\rightarrow \Sigma \times [0, 1], \\ f_1 : M_1 &\rightarrow \Sigma \times [1, 2]. \end{aligned}$$

A variedade $S = \Sigma \times [0, 2]$ possui um atlas diferenciável, e a colagem $h = f_0 \amalg_{\Sigma} f_1$ fornece um homeomorfismo entre as variedades $M_0 M_1$ e S , tal que as restrições em $h|_{M_0}$ e $h|_{M_1}$ são diferenciáveis, ver Figura 1.9.

Figura 1.9 Colagem de variedades.

Definição 1.17 Seja S uma variedade com estrutura diferenciável. Dizemos que o homeomorfismo $h : M_0 M_1 \rightarrow S$ cujas restrições $h|_{M_0}$ e $h|_{M_1}$ são diferenciáveis induz as estruturas diferenciáveis em M_0 e M_1 .

Por meio da teoria de Morse é possível mostrar que a variedade S e o homeomorfismo h assim obtidos sempre existem, ver [17], por exemplo. Já a unicidade do atlas construído via *pullback* para M_0M_1 é garantida (a menos de difeomorfismos) com o próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [17]. De acordo com ele, as estruturas diferenciáveis que induzem as estruturas em M_0 e M_1 são iguais a menos de difeomorfismos que sempre existem.

Teorema 1.18 *Seja Σ um bordo para fora de M_0 e um bordo para dentro M_1 . Considere a variedade topológica $M_0M_1 := M_0 \amalg_{\Sigma} M_1$. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas diferenciáveis em M_0M_1 tais que ambas induzem as estruturas diferenciáveis em M_0 e M_1 . Então existe um difeomorfismo*

$$\phi : (M_0M_1, \mathcal{A}) \rightarrow (M_0M_1, \mathcal{B}),$$

tal que $\phi|_{\Sigma} = id_{\Sigma}$.

Como observamos inicialmente, os morfismos para a **nCob** (isto é, os cobordismos) são dados segundo uma classe de equivalência pela qual dois morfismos entre os bordos Σ_0 e Σ_1 são iguais a menos de difeomorfismos. Portanto, a colagem de variedades, ao levar em conta a classe de equivalência de morfismos, *não* deverá depender da escolha do representante desta classe. Isto é, sejam dois cobordismos dados por

$$\Sigma_0 \rightarrow M_0 \leftarrow \Sigma_1 \quad \text{e} \quad \Sigma_1 \rightarrow M_1 \leftarrow \Sigma_2,$$

e os difeomorfismos $f_0 : M_0 \rightarrow M'_0$ e $f_1 : M_1 \rightarrow M'_1$.

Assim, para o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & M'_0 & & M'_1 \\ & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \nearrow \\ \Sigma_0 & & f_0 \cong & & \Sigma_1 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \searrow \\ & & M_0 & & M_1 \end{array}$$

podemos realizar as colagens de M_0M_1 e $M'_0M'_1$ seguindo os passos discutidos até o presente. Os difeomorfismos f_0 e f_1 também podem ser colados pois são mapas contínuos e coincidentes em Σ_1 , logo, podemos obter um homeomorfismo $h : M'_0M'_1 \rightarrow M_0M_1$ em cada uma das

variedades consideradas

Desta maneira, se considerarmos, por exemplo, uma estrutura suave $\mathcal{A}$ para $M_0 M_1$, que já sabemos existir e será única (a menos de difeomorfismos) pelo Teorema 1.18, uma nova estrutura suave $\mathcal{B}$ pode ser definida em $M'_0 M'_1$ por meio de h .

§3. Identidade

Considere a identidade $1_B \in \text{Morf}(B, B)$ em uma categoria $\mathbf{C}$. Sabemos que a composição de 1_B com dois morfismos $f \in \text{Morf}(A, B)$ e $g \in \text{Morf}(B, C)$ fornece o seguinte

$$1_B \circ f = f \quad \text{e} \quad g \circ 1_B = g.$$

No caso das variedades diferenciáveis, o morfismo com tal propriedade é o cilindro, mas antes de verificarmos esta afirmação é importante compreender o morfismo “cilindro” inclusive quando estamos tratando de objetos disjuntos. Pode-se encontrar, por exemplo, o seguinte morfismo entre o bordo para dentro $\Sigma_0 = \Sigma \amalg \Sigma'$ e o bordo para fora $\Sigma_1 = \Sigma \amalg \Sigma'$

Figura 1.10 Morfismo “cilindro” cujos bordos são objetos disjuntos.

De modo geral, podemos escrever a identidade de um morfismo da categoria $\mathbf{nCob}$ da seguinte maneira: $\text{Morf}(\Sigma, \Sigma) \ni 1_\Sigma = \Sigma \times [0, \varepsilon]$, onde $\varepsilon > 0$. Novamente, como um morfismo é de fato uma classe de equivalência dada por seus difeomorfismos, a escolha de qualquer valor para ε fornecerá uma representação do cilindro, pois sempre existirá um difeomorfismo entre dois cilindros de tamanhos distintos. Neste sentido, a composição do cilindro obtido com um dos bordos de uma variedade com a própria variedade não modifica o morfismo,

enquanto classe de equivalência. O exemplo apresentado na Figura 1.11 elucida a composição de um morfismo M com o cilindro construído com o bordo para dentro de M .

Figura 1.11 O cilindro dado pelo bordo para dentro do morfismo M composto com o próprio M .

§4. Associatividade

Por fim, ainda resta considerar a associatividade da composição.

Teorema 1.19 *Sejam M_0 , M_1 e M_2 três classes de equivalência de morfismos tais que os objetos sobre os quais atuam permitam escrever a próxima relação*

$$\Sigma_0 \xrightarrow{M_0} \Sigma_1 \xrightarrow{M_1} \Sigma_2 \xrightarrow{M_2} \Sigma_3,$$

então vale a associatividade entre classes de cobordismos

$$(M_0 M_1) M_2 = M_0 (M_1 M_2).$$

Demonstração. Basta notar que a associatividade pode ser escrita explicitamente da seguinte forma

$$\left(M_0 \coprod_{\Sigma_1} M_1 \right) \coprod_{\Sigma_2} M_2 = M_0 \coprod_{\Sigma_1} \left(M_1 \coprod_{\Sigma_2} M_2 \right),$$

pois a colagem das funções envolvidas acontece sobre bordos distintos uns dos outros ■

Todos estes resultados nos motivam então a apresentar a definição da categoria **nCob**.

Definição 1.20 *A categoria **nCob** é definida tomando como objetos as variedades $(n-1)$ -dimensionais orientadas. Um morfismo desta categoria é dado pela classe de equivalência de difeomorfismos dos cobordismos orientados entre dois objetos Σ_0 e Σ_1*

$$M : \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma_1.$$

1.2.2 Teoria Quântica dos Campos Topológica

A definição da TQCT não depende diretamente de uma apresentação categorial para a teoria dos cobordismos, mas optamos primeiro pela construção da **nCob** pois desta maneira

já damos início à discussão de algumas características essenciais da teoria de cobordismos. Em especial, podemos citar a atuação dos morfismos sobre objetos disjuntos, este ponto é fundamental no tratamento de uma TQCT, e com isso já possuímos os principais resultados para fornecer sua definição.

Definição 1.21 *Chamamos de uma Teoria Quântica dos Campos Topológica n -dimensional a regra Z que*

- (a) *Para cada $(n - 1)$ -variedade orientada Σ associa um espaço vetorial $Z(\Sigma)$;*
- (b) *Para cada cobordismo orientado $M : \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma_1$ associa um mapa linear $Z(M)$ do espaço vetorial $Z(\Sigma_0)$ para $Z(\Sigma_1)$.*

Além disso, a regra Z também deve satisfazer os próximos axiomas

Axioma 1.22 *Sejam M e M' dois cobordismos equivalentes. A imagem obtida por Z deve ser a mesma para ambos, ou seja*

$$M \cong M' \Rightarrow Z(M) = Z(M').$$

Axioma 1.23 *Seja o cilindro $\Sigma \times I$, pensado como um cobordismo de Σ para ele mesmo. A imagem obtida pela regra Z deve ser o mapa identidade do espaço vetorial $Z(\Sigma)$*

$$Z(\Sigma \times I) = 1_{Z(\Sigma)}.$$

Axioma 1.24 *Considere a decomposição de um cobordismo $M = M'M''$. A regra Z deve fornecer a composição de mapas lineares*

$$Z(M) = Z(M') \circ Z(M'').$$

Axioma 1.25 *Considere uma união disjunta de dois objetos $\Sigma = \Sigma' \amalg \Sigma''$. A regra Z deve fornecer o produto tensorial de espaços vetoriais*

$$Z(\Sigma) = Z(\Sigma') \otimes Z(\Sigma'').$$

Considere um morfismo $M : \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma_1$ dado pela união disjunta $M = M' \amalg M''$ entre dois morfismos $M' : \Sigma'_0 \Rightarrow \Sigma'_1$ e $M'' : \Sigma''_0 \Rightarrow \Sigma''_1$. A regra Z deve fornecer o produto tensorial das aplicações lineares

$$Z(M) = Z(M') \otimes Z(M'').$$

Axioma 1.26 *Seja a variedade vazia $\Sigma = \emptyset$. A regra Z deverá fornecer o corpo base $Z(\Sigma) = \mathbb{k}$.*

A TQCT apresentada através desta definição é vista como um conjunto de regras estabelecidas entre variedades e espaços vetoriais. Como veremos mais adiante, tais regras são de fato as condições necessárias para definirmos um funtor entre a categoria dos cobordismos e a categoria dos espaços vetoriais. Contudo, ainda vamos discutir alguns resultados para o caso específico da **2Cob** com os quais pretendemos classificar as TQCT's 2D.

1.2.3 Geradores e relações da 2Cob

Existe um subconjunto S de morfismos da categoria **2Cob** com o qual podemos descrever a categoria toda, isto é, qualquer morfismo da **2Cob** pode ser reescrito como uma composição de elementos pertencentes ao conjunto S . Além disso, com um número mínimo de relações (obtidas apenas com morfismos de S) podemos correlacionar dois *representantes* quaisquer de um mesmo morfismo (classe difeomorfa) em **2Cob**. Em teoria de grupos fala-se em geradores e relações para expor a propriedade de alguns grupos de serem descritos por meio de um subconjunto de elementos do próprio grupo, juntamente com um número mínimo de relações dadas apenas com tais elementos. Neste sentido, pretendemos, de modo análogo ao que ocorre em teoria de grupos, determinar os geradores e as relações para a categoria **2Cob**. Note que **nCob** para $n > 2$ não possui uma descrição em termos de geradores e relações.

§1. Invariantes topológicos

Invariantes topológicos desempenham um papel importante para a classificação de variedades. Em particular, as superfícies (2-variedades) podem ser classificadas completamente como consequência do invariante chamado *número* ou *característica de Euler*. Existem diversas maneiras para se apresentar a característica de Euler, a mais intuitiva talvez seja por meio de uma triangulação da superfície. Como a triangulação de variedades também será um desenvolvimento importante quando nos voltarmos para a teoria na rede no Capítulo 2 e para o invariante de Kuperberg no Capítulo 3, vamos adotar esta abordagem para discutirmos um pouco sobre a definição do invariante de Euler.

Observação 1.27 *Ao tratarmos de um triângulo do ponto de vista topológico vamos utilizar a seguinte notação para descrevê-lo. O bordo de um triângulo possui três extremos os quais chamaremos cada um de vértice e três lados os quais chamaremos cada um de aresta. Já o interior de um triângulo chamaremos de face.*

Definição 1.28 *Chamamos triangulação de uma superfície a decomposição deste espaço topológico em uma união finita de triângulos tais que dois quaisquer destes se não forem disjuntos então só terão um único vértice em comum ou uma única aresta em comum (dois vértices em comum). Uma superfície com uma dada triangulação será chamada de superfície (2-variedade) triangularizada ou com triangulação.*

Observe que, segundo a definição anterior, as arestas dos triângulos não poderão ter intersecções parciais, contudo, o tamanho ou formato dos triângulos não serão relevantes.

Definição 1.29 *Seja S uma superfície compacta triangularizada. Chamamos número de Euler ou característica de Euler de S o número de vértices menos o número de arestas mais o número de faces da triangulação. A característica de Euler de S é denotada por $\chi(S)$.*

Chamando o número de vértices, de arestas e de faces respectivamente por v , a e f pode-se escrever a seguinte fórmula para a característica de Euler de uma superfície S com triangulação

$$\chi(S) = v - a + f.$$

A característica de Euler pode ser calculada para superfícies fechadas ou com bordo, é interessante ver alguns exemplos. Realizando a triangulação do disco D^2 com apenas um triângulo, ver Figura 1.12, temos o seguinte

$$\chi(D^2) = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Figura 1.12 Triangulação para o disco D^2 com apenas um triângulo.

A característica de Euler para a 2-esfera com uma dada triangulação pode ser obtida considerando primeiro o número de Euler desta triangulação *sem* uma das faces e depois reconsiderando esta face. Por exemplo, o tetraedro é uma possível triangulação para S^2 , pois ele é homeomorfo à S^2 e os triângulos do tetraedro satisfazem a Definição 1.28. Então, removendo uma das faces do tetraedro, a superfície restante pode ser deformada de modo a se parecer com o disco D^2 . Pode-se verificar que a triangulação assim construída sobre o disco D^2 fornece $\chi(D^2) = 1$. Logo, reconsiderando para o cálculo do número de Euler a face retirada temos

$$\chi(S^2) = \chi(D^2) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Como mais um exemplo, podemos conseguir uma possível triangulação para o toro a partir dos triângulos mostrados na Figura 1.13, cujas arestas são identificadas de acordo com a numeração apresentada.

Figura 1.13 Triangulação para o toro.

Por inspeção direta temos

$$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0.$$

Ainda com respeito ao toro, podemos colar dois destes da seguinte maneira. Retire de cada toro apenas uma face e identifique as arestas e os vértices relacionados com as faces retiradas. Obtemos, assim, dois toros colados com uma triangulação em acordo com a Definição 1.28. Após a colagem, o número total de vértices diminui de três (identificamos três vértices), o número total de arestas diminui de três (identificamos três arestas) e o número de faces com relação aos toros individuais diminui de dois (uma face de cada toro foi retirada), portanto

$$\begin{aligned} \chi(T^2 \cup T^2) &= \chi(T^2) + \chi(T^2) + \Delta v - \Delta a + \Delta f \\ &= 0 + 0 + (-3) - (-3) + (-2) = -2, \end{aligned}$$

onde o sinal de Δa é negativo pois acrescentar arestas para uma dada triangulação diminui o número de Euler.

Seja g o gênero de uma superfície fechada S . Neste caso podemos encontrar uma triangulação para a superfície S , descrita em termos da colagem de g toros, de modo similar ao realizado para a composição de somente dois. Em nosso cálculo, para cada união de dois

toros devemos diminuir em 2 a característica de Euler, isto é

$$\begin{aligned}\chi(\underbrace{T^2 \cup T^2 \cdots \cup T^2}_{g \text{ vezes}}) &= \chi(T^2) + \chi(T^2) + \cdots + \chi(T^2) + \Delta v - \Delta a + \Delta f \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 - 3(g-1) + 3(g-1) - 2g = -2g.\end{aligned}$$

Todos estes resultados podem ser generalizados considerando o número de Euler em termos do gênero g de uma superfície S

$$\chi(S) = 2 - 2g. \quad (1.1)$$

Por exemplo, o gênero da 2-esfera é 0 então $\chi(S^2) = 2 - 2g = 2$. Ainda, se quisermos abranger todos os casos de 2-variedades devemos levar em conta as superfícies com bordo. Mas para isso basta observar o fato de que, para o caso bidimensional, um bordo é apenas um círculo S^1 sozinho ou então uma união disjunta de dois ou mais círculos S^1 . Seja qualquer dos casos, a cada S^1 corresponderá a retirada de um disco D^2 , portanto, de uma face. Assim, chamando de k o número de componentes S^1 do bordo de uma superfície S temos o resultado final

$$\chi(S) = 2 - 2g - k. \quad (1.2)$$

A discussão feita até o momento é importante em vista do próximo teorema.

Teorema 1.30 *Sejam M e M' duas superfícies fechadas (compactas e sem bordo) e orientadas. Então M e M' serão difeomorfas se e somente se possuírem a mesma característica de Euler.*

Encontramos na literatura diferentes versões para a demonstração deste teorema. A prova do homeomorfismo entre M e M' pode ser encontrada por exemplo em [25]. Já uma demonstração via teoria de Morse é realizada em [17], segundo a qual mostra-se inclusive o difeomorfismo destas variedades. Contudo, nenhuma destas demonstrações aborda os objetos de relevância para a construção de uma TQCT 2D, a saber, variedades com bordo. Mas o resultado análogo neste caso pode ser obtido com ajuda da Equação (1.2), ver [17] por exemplo. Por fim, como estamos lidando com superfícies orientadas, ainda devemos estar atentos às restrições com relação à orientação.

Teorema 1.31 *Sejam M e M' duas superfícies com bordo, compactas e orientadas. Então M e M' serão difeomorfas se e somente se possuírem a mesma característica de Euler e o mesmo número de bordos para dentro e para fora.*

A seguir, discutiremos um aspecto bastante importante para a construção de uma TQCT, a saber, a união disjunta de cobordismos.

§2. Uniões disjuntas e o cobordismo *twist*

Quando abordamos a identidade para a **nCob**, ou seja, o cilindro, vimos como construir o morfismo identidade sobre uma união disjunta de objetos (Figura 1.11). Este tipo de construção tem algumas consequências importantes, ver [31] para uma discussão detalhada sobre o assunto. Mas a fim de entendê-las importa observar o fato de que só podemos encontrar uniões disjuntas caso façamos antes a renomeação dos elementos de cada conjunto, declarando então qual era o conjunto de origem. Neste sentido, a união disjunta de dois círculos S^1 , por exemplo, *não* identifica os pontos de um círculo com os pontos do outro, mas ao invés disso os mantêm distintos. Como outro exemplo, sejam dois conjuntos dados por $C^1 = \{x, y, x, w, v\}$ e $C^2 = \{a, b, c, w, v\}$, então uma possível maneira de realizarmos sua união disjunta é com a notação de índices seguinte

$$\begin{aligned} C^1 \amalg C^2 &= \{x_1, y_1, x_1, w_1, v_1\} \amalg \{a_2, b_2, c_2, w_2, v_2\} \\ &= \{x_1, y_1, x_1, w_1, v_1, a_2, b_2, c_2, w_2, v_2\}. \end{aligned}$$

Independente da escolha feita para renomear os objetos, ao realizá-la impomos sobre eles uma *ordenação*, em outras palavras, os objetos são distinguíveis. A escolha para obtermos $C^1 \amalg C^2$ é claramente arbitrária, isto é, poderíamos escolher outros índices quaisquer ou mesmo inverter o uso dos índices $1 \leftrightarrow 2$. Contudo, *uma vez feita* esta nomeação, então a *troca* de índices será uma operação na qual cada ponto de um conjunto é levado em outro e vice-versa, logo, deixamos de ter a identidade. A necessidade de se respeitar a *ordem inicial* dos objetos fica implícita, desta maneira, quando o morfismo for a identidade. De modo geral, dois morfismos M, M' só serão equivalentes caso exista um difeomorfismo entre eles e, além disso, se a ordem dos objetos no bordo para fora e no bordo para dentro for a mesma nos dois cobordismos. A conclusão dessas observações é o fato de existirem diversos morfismos de objetos disjuntos neles mesmos, pois nem sempre tais morfismos são disjuntos ou respeitam a ordem inicial dos objetos.

A seguir, na Figura 1.14, são dados três exemplos de morfismos da categoria **2Cob** atuando sobre uniões disjuntas. Dentre os morfismos apresentados apenas (a) pode ser a identidade para a categoria **2Cob** pois respeita a ordem inicial dos objetos.

Já o morfismo apresentado em (b) pode ser visto como a composição mostrada na Figura 1.15. No primeiro morfismo o bordo $\Sigma_0 = S'^1 \amalg S''^1$ é projetado em $\Sigma_1 = S^1$, isto é, S'^1 e S''^1 são identificados. Por isso, após a composição do primeiro morfismo com o segundo, os círculos não podem mais ser determinados no bordo para fora $\Sigma_2 = S^1 \amalg S^1$ pois seus pontos não permaneceram distintos ao longo do morfismo.

Na Figura 1.14-(c) o morfismo é disjunto, mas a ordem inicial dada pelo bordo para dentro $\Sigma_0 = S'^1 \amalg S''^1$ é a inversa da encontrada no bordo para fora $\Sigma_1 = S'^1 \amalg S'^1$.

Figura 1.14 Três exemplos de morfismos do objeto $\Sigma = S^1 \amalg S^1$ nele mesmo. Apenas em (a) o morfismo é disjunto e mantém a ordem inicial dos objetos. Em (b) o morfismo não é disjunto. Já em (c) o morfismo é disjunto mas não mantém a ordem de Σ .

Figura 1.15 Morfismo decomposto.

A notação gráfica empregada pode sugerir a imersão dos cobordismos em um espaço de dimensão maior, mas deve ficar claro que isto não pode ser o caso pois sempre estamos tratando com morfismos abstratos bidimensionais mapeados em $\mathbb{R}^2$, logo não há nenhum tipo de imersão em $\mathbb{R}^n$ para $n > 2$. Na Figura 1.16 encontramos uma notação também possível para o morfismo *twist*.

Figura 1.16 Notação alternativa para o morfismo *twist*.

Por sua vez, esta outra notação pode sugerir a intersecção dos bordos no meio do morfismo, mas isso também não pode ser o caso, visto o morfismo manter a distinção dos pontos de cada bordo em todo morfismo, já que, ao final, podemos determinar a inversão na ordem do bordo. Optamos por manter a primeira notação, pois ela destaca com clareza o fato de o morfismo ser disjunto. Contudo, a equivalência de notação para o *twist* vista na Figura 1.17 deve ficar entendida, pois não se trata de uma imersão da 2-variedade em um

espaço com dimensão superior a 2.

Figura 1.17 Notações equivalentes para o morfismo *twist*.

Com esta liberdade de notação é possível reescrevermos uma composição envolvendo morfismos *twist's* de modo a destacar a propriedade de disjunção. A composição de dois morfismos *twist's*, em particular, fornece a identidade, como pode ser visto na Figura 1.18.

Figura 1.18 Composição de morfismos *twist's* fornecendo a identidade em **2Cob**.

§3. Geradores da **2Cob**

Ao longo de nossa discussão sobre a teoria de categorias apresentamos a divisão das categorias em grandes e pequenas, ver Definição 1.6. Assim, as duas coleções de objetos e de morfismos de uma pequena categoria são, por definição, conjuntos, já para uma grande categoria estas coleções são grandes o suficiente para não se constituírem como conjuntos. A precisão dada em “grande o suficiente” é uma das questões fundamentais da teoria de categorias, e podemos encontrar uma discussão rigorosa em referências como [23] ou [24]. Por sua vez, a categoria **2Cob** é uma grande categoria e isso dificultaria nosso objetivo de encontrar geradores e relações para a **2Cob**. Contudo, é possível nos concentrarmos em uma subcategoria pequena da **2Cob** sem perder as informações relevantes para descrever a teoria de cobordismos. A próxima definição será útil para isso.

Definição 1.32 *Seja $\mathbf{C}$ uma categoria. Chamamos uma subcategoria $\mathbf{S} \subset \mathbf{C}$ de esqueleto se os objetos de $\mathbf{S}$ são dados por exatamente um representante de cada classe de isomorfismo de objetos de $\mathbf{C}$.*

O esqueleto de uma categoria $\mathbf{C}$ pode não ser único, mas todos os esqueletos são isomorfos. De fato, sejam dois esqueletos $\mathbf{S}'$ e $\mathbf{S}''$ de $\mathbf{C}$. Então cada objeto $O' \in \text{Obj}(\mathbf{S}')$

é um representante de uma classe de equivalência $\mathcal{E}$. Da mesma forma, existe um objeto $O'' \in \text{Obj}(\mathbf{S}'')$ pertencente à $\mathcal{E}$, e $O' \simeq O''$, logo podemos construir um isomorfismo bijetivo dos objetos de $\mathbf{S}''$ em $\mathbf{S}'$, ou seja, estas duas categorias são isomorfas.

A fim de obtermos o esqueleto da **2Cob** precisamos determinar a classe de equivalência de isomorfismos dos objetos. Como, neste caso, os objetos são 1-variedades diferenciáveis, os isomorfismos são dados por homeomorfismos diferenciáveis de 1-variedades, isto é, difeomorfismos. Os objetos da **2Cob** são, como já vimos, círculos S^1 e uniões disjuntas de círculos. Portanto, duas questões são importantes para determinarmos os difeomorfismos destes objetos, quais sejam, a orientação e o número de objetos conexos de uma união disjunta.

Considere primeiro apenas dois círculos S^1 conexos. Quanto à orientação, ambos serão difeomorfos, mesmo se tiverem orientações reversas entre si. Para verificar essa afirmação basta considerar um mapeamento “espelhado” dado pela aplicação $\phi(x, y) = (-x, y)$ sobre os pontos de um círculo nele mesmo, ver Figura 1.19.

Figura 1.19 Difeomorfismo $\phi(x, y) = (-x, y)$ entre dois círculos S^1 com orientações opostas.

Agora vamos observar o caso de um objeto Σ_1 obtido como união de n círculos S^1 . Um outro objeto Σ_2 será difeomorfo ao Σ_1 se e somente se também for a união de n círculos S^1 . Isto é, como o número de elementos conexos é o mesmo nos dois objetos Σ_1 e Σ_2 , então podemos encontrar um difeomorfismo um a um entre as componentes dos objetos. Se o número de componentes conexas fosse diferente, por sua vez, então não poderíamos encontrar uma bijeção, condição necessária para obtermos um difeomorfismo. Com isso, um esqueleto da categoria **2Cob** pode ser obtido da seguinte maneira.

Definição 1.33 *Seja $\mathbf{0}$ a 1-variedade vazia; seja $\mathbf{1}$ um representante (difeomorfismo) do círculo S^1 , e seja $\mathbf{n}$ um representante da união disjunta de n cópias de S^1 . A subcategoria formada com os objetos $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\}$ é um esqueleto da **2Cob**. Os morfismos são dados por um representante (difeomorfismo) de cada morfismo possível entre estes objetos. Chamaremos o esqueleto assim construído de 2-esqueleto.*

Não faremos mais distinção entre o 2-esqueleto da **2Cob** e a própria categoria **2Cob**, já que o 2-esqueleto será suficiente para nossas considerações. Com todas as observações

realizadas até o momento podemos formalizar o conceito de geradores de uma categoria.

Definição 1.34 *Seja $\mathbf{C}$ uma categoria. Chamamos um conjunto de morfismos S de conjunto gerador se todo morfismo de $\mathbf{C}$ puder ser obtido a partir da combinação de composições e uniões disjuntas dos morfismos de S .*

O fato de também considerarmos uniões disjuntas de morfismos na definição anterior nos permite obter um conjunto gerador constituído apenas com morfismos conexos. Veja o exemplo apresentado na Figura 1.20 de uma união disjunta de dois morfismos conexos iguais.

Figura 1.20 União disjunta de dois cilindros. Apenas um único cilindro será elemento do conjunto gerador.

Proposição 1.35 *O conjunto de morfismos formado com os seis elementos da Figura 1.21 é um conjunto gerador da categoria $\mathbf{2Cob}$.*

Figura 1.21 Cobordismos geradores da categoria $\mathbf{2Cob}$.

Existem ao menos duas provas distintas para a Proposição 1.35. Uma destas pode ser realizada com base na classificação de superfícies obtida através do invariante de Euler, como

foi discutido no §1 desta seção. Como alternativa, pode-se empregar a teoria de Morse, como é comentado em [31]. Iremos discutir somente o primeiro destes métodos, sendo a próxima definição essencial para isso.

Definição 1.36 *Chamamos de forma normal a seguinte decomposição em cobordismos elementares de uma superfície conexa de gênero g com m bordos para dentro (m círculos S^1 com orientação para dentro) e n bordos para fora (n círculos S^1 com orientação para fora). Consideraremos três partes de uma forma normal. A primeira chamamos de parte para dentro e será um cobordismo $\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{1}$. A segunda chamamos de parte topológica e será parte intermediária constituída pela composição de g cobordismos $\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}$. A terceira chamamos de parte para fora e será um cobordismo $\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{n}$.*

Na Figura 1.22 encontramos a forma normal de uma superfície com 5 bordos para dentro, de gênero 3 e com 3 bordos para fora.

Figura 1.22 Exemplo da forma normal para o caso de $m = 5$, $g = 3$ e $n = 3$, respectivamente: número de bordos para dentro, gênero da superfície e número de bordos para fora.

De acordo com Teorema 1.31, o número de bordos para dentro, o gênero e o número de bordos para fora são suficientes para determinarmos uma classe de difeomorfismos dentro das 2-variedades. Por outro lado, todas estas informações estão presentes em qualquer forma normal.

Devemos nos convencer da generalidade da construção da forma normal, isto é, de que dados m , g e n de uma superfície qualquer, então é possível construir a forma normal para esta superfície. No exemplo da Figura 1.22 podemos acrescentar, na parte para dentro, um morfismo *pant* ao círculo S^1 mais inferior e um cilindro para cada círculo S^1 acima deste. Com isso, aumentamos o número de bordos para dentro de $\mathbf{5} \Rightarrow \mathbf{1}$ para $\mathbf{6} \Rightarrow \mathbf{1}$. De modo análogo, podemos fazer o mesmo na parte para fora, ou, ainda, aumentar o gênero acrescentando um morfismo $\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}$ na parte topológica. Para diminuir o número de bordos ou gênero basta fazer o processo inverso, isto é, retirar morfismos da forma normal. Por fim,

para o caso das superfícies sem bordos, compomos com os morfismos *cap* e/ou *co-cap* sobre o bordo para dentro e/ou para fora da parte topológica. Com estas observações acabamos de provar o seguinte.

Lema 1.37 *Qualquer classe difeomorfa de uma superfície conexa tem um representante expresso como composição das formas (a)-(e) apresentadas na Figura 1.21.*

Como cada classe de difeomorfismo da superfície é um cobordismo da categoria **2Cob**, podemos reescrever este lema da seguinte maneira.

Lema 1.38 *Todo cobordismo da **2Cob** pode ser expresso como composição das formas (a)-(e) apresentadas na Figura 1.21.*

O Lema 1.38 também se aplica a uniões disjuntas de cobordismos conexos. Para tal, basta determinarmos a forma normal de cada cobordismo conexo e tomar sua união disjunta. Contudo, como foi discutido no §2 desta seção, ao determinarmos a classe difeomorfa de um cobordismo, a ordem dos círculos S^1 sobre os bordos para dentro e para fora também deve ser considerada. Assim, em alguns casos, a união disjunta das formas normais pode não respeitar a ordem dos bordos. A fim de encontrar a generalização também para os casos de cobordismos nos quais a ordem não permanece a mesma, iremos determinar um novo cobordismo formado pela união disjunta de morfismos conexos. Considere então a seguinte analogia com o chamado grupo de permutações descrito pela teoria de grupos.

Definição 1.39 *Chamamos de cobordismo de permutação a categoria $\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n}$ (com n inteiro) dado pela união disjunta de n círculos S^1 e os morfismos (e)-(f) (cilindro e twist) apresentadas na Figura 1.21.*

O cobordismo de permutação nos permite encontrar, através da composição dos morfismos *twist* e cilindro, qualquer ordem desejada dos círculos S^1 dos bordos. A seguir, na Figura 1.23-(a) encontramos um exemplo de união de cobordismos cuja forma normal não é a união disjunta das formas normais de cada cobordismo individual. Já na Figura 1.23-(b) realizamos a composição desta união com o cobordismo de permutação, e assim alteramos a ordem sobre os bordos de modo a evitar intersecções entre os cobordismos, como mostrado pelo morfismo equivalente mostrado na Figura 1.23-(c). Compondo novamente apenas com setas do cobordismo de permutação é possível, por fim, recuperar a ordem inicial dos círculos, ver Figura 1.24. Com isso, acabamos de provar o seguinte.

Lema 1.40 *Todo morfismo da categoria **2Cob** pode ser fatorado como uma composição de três conjuntos de morfismos. O primeiro formado apenas com elementos do cobordismo de permutação. O segundo pela união disjunta de morfismos conexos. E o terceiro, novamente, apenas com elementos do cobordismo de permutação.*

Demonstração. (da Proposição 1.35) Os lemas 1.38 e 1.40 juntos provam a Proposição 1.35.

Figura 1.23 Na Figura (a) encontramos um exemplo de cobordismo diferente da união disjunta de dois cobordismos conexos. Em (b) a composição do cobordismo de permutação sobre os bordos para dentro e para fora. Na Figura (c) temos o cobordismo disjunto equivalente.

Figura 1.24 Morfismo difeomorfo ao encontrado na Figura 1.23-(a). Na Figura (a) encontramos a composição que deve ser realizada, na qual utilizamos apenas elementos do cobordismo de composição. Na Figura (b) vemos a colagem dos morfismos, recuperando então a Figura 1.23-(a).

§4. Relações da **2Cob**

Descobrimos, portanto, como obter um representante difeomorfo de qualquer 2-variedade, utilizando para isso apenas os cobordismos geradores apresentados na Figura 1.35. Para tal é suficiente encontrarmos a forma normal desse representante. No entanto, não sabemos se dado um cobordismo qualquer é possível colocá-lo na forma normal. A seguir, veremos como isso pode ser feito apenas com um número pequeno de passagens. Começaremos apresentando, primeiro, quais são as passagens e depois mostraremos como elas deverão ser empregadas.

Lema 1.41 *O cilindro é o morfismo identidade para a categoria **2Cob** e valem todas as relações dadas na Figura 1.25.*

Figura 1.25 Relações com o cilindro.

Lema 1.42 *Os morfismos cap e co-cap nos permitem escrever as relações dadas na Figura 1.26.*

Figura 1.26 Relações com o morfismo *cap* e *co-cap*.

Lema 1.43 *Os morfismos pant e co-pant nos permitem escrever as relações chamadas de associativa e coassociativa dadas na Figura 1.27.*

Figura 1.27 Relações associativa e coassociativa.

Lema 1.44 *Os morfismos pant, co-pant e twist nos permitem escrever as relações chamadas de comutativa e cocomutativa dadas na Figura 1.28.*

Figura 1.28 Relações comutativa e cocomutativa

Lema 1.45 *Os morfismos pant e co-pant nos permitem escrever a chamada relação de Frobenius dada na Figura 1.29.*

Figura 1.29 Relação de Frobenius.

Lema 1.46 *O morfismo twist nos permite escrever as relações apresentadas nas Figura 1.30 à Figura 1.33.*

Figura 1.30 Relações do morfismo *twist* com os morfismos identidade, *cap* e *co-cap*.

Figura 1.31 Relações do morfismo *twist* com o morfismo *pant*.

Figura 1.32 Relações do morfismo *twist* com o morfismo *co-pant*.

Figura 1.33 Relações de simetria do morfismo *twist*.

Demonstração. (dos lemas 1.41 ao 1.46) A prova de cada uma das relações apresentadas pode ser obtida observando, primeiro, que o número de componentes conexas é o mesmo em cada lado das identidades. Depois, que a característica de Euler é a mesma para todos os morfismos envolvidos, isto é, todos os morfismos são de gênero 0. E, por fim, observando o fato de que o número de bordos para dentro e para fora de cada parcela é constante em cada uma das relações. Com isso, pelo Teorema 1.31, estas considerações juntas são suficientes para garantir o difeomorfismo entre os termos apresentados nas relações de cada lema ■

Teorema 1.47 *As relações apresentadas nos lemas 1.41 ao 1.46 geram a categoria **2Cob**.*

Demonstração. Assim como realizado na prova do Teorema 1.35, esta demonstração será feita em três partes. Primeiro vamos considerar superfícies conexas *sem* a composição com o morfismo *twist*. Depois vamos adicionar o morfismo *twist* ao resultado obtido. E, por fim, será abordado o caso de morfismos disjuntos.

1. (Superfície conexa sem qualquer composição com o morfismo *twist*). Para provar o Teorema 1.35 utilizamos o Lema 1.38, segundo o qual podemos gerar um representante de cada classe de difeomorfismos de superfícies por meio da forma normal. Nós iremos, agora, generalizar a construção destes representantes. Para tal, devemos observar que o número de Euler tem a propriedade de adição, isto é, quando realizamos uma colagem de superfícies o número de Euler da superfície obtida será igual à soma do número de Euler de cada superfície individual envolvida na soma, como discutimos no §1 anterior.

Considere, então, uma superfície S de gênero g , com m bordos para dentro e n bordos para fora. Com ajuda da Equação (1.2) podemos escrever

$$\chi(S) = 2 - 2g - m - n. \quad (1.3)$$

Por outro lado, a forma normal pode ser decomposta em suas partes elementares, isto é, nos morfismos (a)-(e) apresentados na Figura 1.21. Neste caso, a característica de Euler da forma normal será uma soma na qual cada parcela será o número de Euler de uma componente elementar, multiplicado ainda pela quantidade de vezes que esta componente foi utilizada. Visto os morfismos dados na Figura 1.21 serem todos de gênero 0, apenas o número de bordos será importante, ou seja,

$$\begin{aligned} \chi(\text{cap}) &= 2 - 0 - 1 = 1, \\ \chi(\text{co-cap}) &= 2 - 0 - 1 = 1, \\ \chi(\text{pant}) &= 2 - 0 - 3 = -1, \\ \chi(\text{co-pant}) &= 2 - 0 - 3 = -1, \\ \chi(\text{cilindro}) &= 2 - 0 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Além disso, como o número de Euler do cilindro é 0, apenas os quatro primeiros morfismos são relevantes, em verdade, esta propriedade do cilindro revela o fato de o mesmo ser o morfismo identidade na categoria.

Portanto, a decomposição de uma forma normal com p morfismos *cap*, q morfismos *co-cap*, a morfismos *pant* e b morfismos *co-pant* fornecerá o seguinte número de Euler

$$\chi(S) = p + q - a - b,$$

combinando com a Equação (1.3) temos

$$\chi(S) = 2 - 2g - m - n = p + q - a - b. \quad (1.4)$$

Quando fazemos a composição dos morfismos elementares, a *diferença* entre o número total de bordos para dentro e de bordos para fora se modifica da seguinte maneira. A presença de um morfismo *pant* diminui de 1 o número de bordos para fora com relação ao número de bordos para dentro. De modo inverso, quando colamos o morfismo *co-pant* o número de bordos para fora aumenta de 1. Já a presença de um morfismo *cap* aumenta de 1 a diferença entre o número de bordos para fora e o número de bordos para dentro, enquanto o *co-cap* diminui de 1 essa diferença. Estes resultados podem ser utilizados para obtermos a próxima equação

$$n - m = (b + p) - (a + q), \quad \rightarrow \quad n + a + q = m + b + p. \quad (1.5)$$

Desta maneira, as equações (1.4) e (1.5) juntas fornecem o seguinte resultado

$$\begin{aligned} a &= m + g - 1 + p, \\ b &= n + g - 1 + q. \end{aligned}$$

Assim, uma colagem realizada com um número de morfismos elementares segundo os parâmetros a , b , p e q fornecerá o mesmo difeomorfismo $\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{n}$ se as duas equações anteriores forem satisfeitas, independente da colagem.

Agora precisamos mostrar que as relações dadas nos lemas anteriores são suficientes para modificarmos um morfismo qualquer a fim de obter a forma normal, nossa estratégia será a seguinte. Pelo fato de a parte para dentro da forma normal ser constituída apenas por morfismos *pant's* e cilindros, buscaremos levar o máximo de morfismos *pant's* para o lado esquerdo. Se observarmos um morfismo *pant*, ele poderá ter em sua esquerda um morfismo *cap*, um morfismo *co-pant* ou outro morfismo *pant*. Se tivermos um *cap* vamos fazer uso das relações dadas na Figura 1.26 e escrever um cilindro no lugar desta composição. Se tivermos um outro *pant* não precisamos alterar nada, pois esta é a configuração que procuramos, e

se tivermos um morfismo *co-pant* isto só poderá acontecer de duas maneiras, mostradas na Figura 1.34 seguinte.

Figura 1.34 Duas possíveis maneiras de encontrarmos o morfismo *co-pant* à esquerda de um morfismo *pant*

No primeiro caso, Figura 1.34-(a), iremos manter a configuração até atingirmos g vezes esta composição. Já na segunda situação, Figura 1.34-(b), utilizamos a relação dada na Figura 1.29 e levamos o *pant* para a esquerda. Assim, com estes movimentos, sempre que o cobordismo *pant* encontrar um *cap* teremos o cilindro, ver Figura 1.42, isto ocorrerá p vezes. Além disso, sempre que um *pant* encontrar um *co-pant* não iremos mais alterar sua configuração até isto ocorrer g vezes, como dissemos no início. Sendo o número total de morfismos *pant* dado por $a = m + g - 1 + p$, restará, ao fim, exatamente $m - 1$ morfismos *pant* à esquerda. Observe que no caso de um morfismo *pant* se encontrar à direita da parte topológica da forma normal, as relações dadas nas figuras 1.27 e 1.29 permitem o seu movimento para o lado esquerdo, ver exemplo na Figura 1.35.

Figura 1.35 Relações com o cilindro.

2. (Superfície conexa e com a presença do morfismo *twist*). Considere o morfismo *twist* dado na Figura 1.21-(f). Vamos supor a existência de um único morfismo *twist* e depois generalizar o argumento por indução. Considere, de maneira geral, as possíveis composições de outros morfismos com um único *twist*, ver Figura 1.36. Podemos ter morfismos conectados à esquerda (**A** ou **B**) ou à direita (**C** ou **D**).

Figura 1.36 Possíveis conexões com o morfismo *twist*.

Caso os bordos **A** e **B** estejam conectados, este lado não terá nenhum morfismo *twist* e ele pode ser colocado na forma normal como anteriormente. Assim, basta utilizar a associatividade até posicionarmos um morfismo *co-pant* no bordo em **A** e **B**, e, depois, usar a relação dada na Figura 1.28 para remover o *twist*. O mesmo será válido caso os bordos **C** e **D** estejam conectados, mas utilizando, desta vez, um morfismo *pant*.

Agora considere uma configuração na qual os bordos **A** e **C** estão conectados. Ainda será possível construirmos a forma normal à esquerda e à direita, mas deveremos “manter” cada um dos lados obtidos separados através de um cilindro, assim com vemos na Figura 1.37.

Figura 1.37 Forma normal à esquerda e à direita conectas superiormente.

Acompanhe a sequência completa na Figura 1.38 seguinte. Nesta configuração utilizaremos, primeiro, a relação cocomutativa dada na Figura 1.28, depois a relação dada na Figura 1.31-(b) e, em seguida, a relação de Frobenius da Figura 1.29. Por fim, com a relação comutativa dada na Figura 1.28 o morfismo *twist* então é removido. Da mesma forma podemos ter os morfismos conectando os bordos inferiores (**B** e **D**), mas as considerações para remoção do *twist* serão as mesmas.

3. (Unões disjuntas de superfícies conexas e com a presença do morfismo *twist*). O caso de uniões disjuntas de morfismos pode ser abordado com ajuda do Lema 1.40, isto é, devemos reescrever um morfismo como uniões disjuntas de cobordismos de permutação composto com uniões disjuntas de morfismos conexas. Com isso podemos eliminar o morfismo *twist* quando for o caso, e obter, por fim, uma união disjunta de formas normais ■

Diversos resultados que iremos obter sobre a categoria **2Cob** poderão ser determinados levando em consideração somente o que ocorre com os geradores desta categoria. A seguir apresentamos a classificação das teorias bidimensionais.

Figura 1.38 Sequência para exclusão do morfismo *twist* dos morfismos conectados superiormente.

1.3 Classificação das TQCT's 2D

A partir da classificação das 2-variedades e da construção da categoria **2Cob** por meio de geradores e relações, podemos agora determinar quais são as TQCT's associadas com a **2Cob**. De acordo com a formulação apresentada na Definição 1.21, a TQCT 2D pode ser vista como uma regra Z que deve associar um espaço vetorial V para cada 1-variedade conexa da **2Cob**; e um operador linear para cada cobordismo. Como as superfícies podem ser todas geradas através de seus elementos básicos, ver Proposição 1.35, bem como de suas relações apresentadas nos lemas 1.41 ao 1.46, precisaremos saber apenas como o operador Z deve atuar sobre esta estrutura. Na Figura 1.39 apresentamos os operadores lineares associados com cada cobordismo básico da **2Cob**, em acordo com a Definição 1.21.

Já para o conjunto de relações encontradas na seção anterior, bastará utilizarmos, também com relação aos espaços vetoriais associados, os próprios operadores lineares encontrados na Figura 1.39. Portanto, a cada um dos lemas obtidos podemos determinar seu significado correspondente com Z , considerando, para isso, a composição dos operadores associados. Ou seja, a composição de cobordismos torna-se com Z a composição de operadores lineares, agora dentro da categoria dos espaços vetoriais. Na Figura 1.40, como exemplo, mostramos a ação de Z sobre a relação associativa obtida na **2Cob**.

$$\begin{array}{ll}
Z \left(\text{cone} \right) = \eta : \mathbb{k} \rightarrow V & Z \left(\text{pair of pants} \right) = \mu : V \otimes V \rightarrow V \\
Z \left(\text{cup} \right) = \varepsilon : V \rightarrow \mathbb{k} & Z \left(\text{split pair of pants} \right) = \delta : V \rightarrow V \otimes V \\
Z \left(\text{cylinder} \right) = 1_V : V \rightarrow V & Z \left(\text{crossing} \right) = \sigma : V \otimes W \rightarrow W \otimes V;
\end{array}$$

Figura 1.39 Os espaços V e W são isomorfos ($V \simeq W$). Operadores lineares obtidos através de uma TQCT para os geradores da **2Cob**.

$$\begin{array}{c}
Z \left(\text{pair of pants} \right) = Z \left(\text{pair of pants} \right) \\
\\
V \otimes V \otimes V \xrightarrow{1_V \otimes \mu} V \otimes V \xrightarrow{\mu} V = V \otimes V \otimes V \xrightarrow{\mu \otimes 1_V} V \otimes V \xrightarrow{\mu} V \\
\quad \quad \quad \mu \circ (1_V \otimes \mu) \quad \quad \quad \mu \circ (\mu \otimes 1_V)
\end{array}$$

Figura 1.40 Ação do operador Z sobre a relação associativa da **2Cob**.

Com isso, todas as possíveis TQCT's podem ser determinadas, uma vez que conhecemos todos os cobordismos da **2Cob**, a saber, as classes de equivalência difeomorfas das 2-variedades.

Apesar de já termos começado nossa discussão a respeito das TQCT's fazendo uso da teoria de categorias, ainda precisaremos de mais algumas definições, as quais serão apresentadas no próximo capítulo, a fim de encontrar uma interpretação funtorial das TQCT's.

Capítulo 2

Álgebra de Frobenius e Triangulação

Neste capítulo começaremos a explorar as semelhanças da TQCT com a álgebra. A partir da reinterpretação da álgebra de Frobenius, vista então como um conjunto de relações, iremos comparar sua estrutura com a categoria **2Cob** descrita no capítulo anterior. Já na segunda metade do capítulo encerraremos a discussão sobre o caso 2D definindo a chamada teoria na rede, na qual os objetos de uma TQCT 2D possuem triangulação. A teoria na rede será nosso modelo de estrutura adicional para uma TQCT, principalmente quando nos voltarmos para o caso 3D no próximo capítulo.

2.1 Álgebra de Frobenius e TQCT 2D

O estudo das TQCT's com a álgebra, para o caso 2D, é particularmente interessante visto ser possível encontrarmos uma correspondência um a um entre as TQCT's 2D com as álgebras de Frobenius. O resultado decorre sobretudo do fato de existir uma classificação completa das superfícies (2-variedades compactas), mas antes de apresentá-lo precisaremos descrever a álgebra de Frobenius.

2.1.1 Categoria AF

A seguir discutiremos alguns resultados gerais que serão utilizados para definirmos a notação e também para caracterizarmos a álgebra de Frobenius. Como já fizemos no capítulo anterior utilizaremos $\mathbb{k}$ para indicar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

§1. Considerações iniciais

Começaremos com algumas definições elementares que se tornarão importantes quando fizermos as comparações das TQCT's 2D com as álgebras de Frobenius.

Definição 2.1 *Sejam $V_1, \dots, V_r, W$ espaços vetoriais. Considere uma aplicação*

$$f : V_1 \times \cdots \times V_r \rightarrow W.$$

Chamamos f de r -linear quando f é linear em cada um de seus argumentos separadamente, isto é, dados $v_1 \in V_1, \dots, a, b \in V_i, \dots, v_r \in V_r$ e $\lambda \in \mathbb{k}$, as condições abaixo são satisfeitas

$$(a) \quad f(v_1, \dots, a + b, \dots, v_r) = f(v_1, \dots, a, \dots, v_r) + f(v_1, \dots, b, \dots, v_r);$$

$$(b) \quad f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_r) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

Para as aplicações 1-linear, 2-linear e 3-linear costuma-se utilizar as denominações de *linear*, *bilinear* e *trilinear* respectivamente. Se uma aplicação r -linear tiver $V_1 = \cdots = V_r$ então vamos empregar a notação $\mathcal{L}_r(V; W)$ para denotar o conjunto das aplicações dadas por $f : V \times \cdots \times V \rightarrow W$, e também iremos chamá-las de aplicações r -lineares de V em W . Para aplicações lineares $\mathcal{L}_1(V; W) = \mathcal{L}(V; W)$ tais que $V = W$ vamos utilizar a notação simplificada $\mathcal{L}(V)$.

Definição 2.2 *Chamamos as aplicações r -lineares*

$$f : V_1 \times \cdots \times V_r \rightarrow \mathbb{k}$$

de formas r -lineares. O conjunto $\mathcal{L}(V; \mathbb{k})$ é canonicamente um espaço vetorial que denotamos por V^ . Os elementos de V^* são chamados de formas lineares em V . O espaço V^* será chamado de espaço dual de V .*

Exemplo 2.3 *Seja M uma variedade diferenciável e $T_p M$ o espaço tangente em $p \in M$. O espaço dual do espaço tangente $T_p M$ será indicado por $T_p^* M$ e seus elementos são as formas lineares*

$$f : T_p M \rightarrow \mathbb{k}.$$

Chamaremos o espaço dual $T_p^* M$ de *espaço cotangente* e seus elementos de *covetores* em p .

Definição 2.4 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{k}$. As formas lineares dadas por $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ também são chamadas de funcionais lineares.*

A fim de fixarmos a notação a ser utilizada ao longo de nossas próximas discussões, iremos somente apresentar os enunciados de alguns teoremas e proposições da teoria de tensores, os quais serão empregados neste capítulo e também quando tratarmos o caso 3D da TQCT. A próxima formulação encontra-se em [42], mas existem outras exposições semelhantes a esta como é possível encontrarmos em [21, 27, 28], por exemplo.

Definição 2.5 *Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensões m e n respectivamente. Chamamos de produto tensorial a todo par (W, f) que satisfaça os axiomas seguintes.*

- (a) W é um espaço vetorial e $f : U \times V \rightarrow W$ é uma aplicação bilinear dos espaços U, V em W ;
- (b) $\dim W = (\dim U)(\dim V)$;
- (c) $f(U \times V)$ gera W , isto é, todo elemento de W pode ser obtido como uma combinação linear (e portanto como soma) de elementos de $f(U \times V)$.

Utilizaremos a notação $\otimes$ para indicar o produto tensorial entre os espaços U e V , ou seja, iremos escrever $U \otimes V$, enquanto para os elementos $u \in U$ e $v \in V$ escreveremos a aplicação $f(u, v)$ como $u \otimes v$ (leia: u tensor v).

A seguir apresentamos alguns teoremas sobre o produto tensorial cujas demonstrações podem ser encontradas em [42].

Teorema 2.6 *Sejam $U \otimes V$ um produto tensorial de U por V , e W um espaço vetorial qualquer. Se $f : U \times V \rightarrow W$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única aplicação linear $g : U \otimes V \rightarrow W$ tal que $g(u \otimes v) = f(u, v)$ para todo $u \in U$ e todo $v \in V$.*

Teorema 2.7 (Unicidade do produto tensorial) *Sejam $U \otimes V$ e $U \boxtimes V$ dois produtos tensoriais de U por V . Existe um (único) isomorfismo canônico de $U \otimes V$ sobre $U \boxtimes V$ que leva $u \otimes v$ em $u \boxtimes v$, para todo $u \in U$ e $v \in V$.*

Proposição 2.8 *Sejam $V_1, V_2, \dots, V_n, W$ espaços vetoriais e $V_1^*, V_2^*, \dots, V_n^*$ os respectivos espaços duais. Existe um isomorfismo canônico tal que*

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) \simeq V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_n^* \otimes W.$$

Proposição 2.9 *O produto tensorial possui os isomorfismos*

- (a) $U \otimes V \simeq V \otimes U$;
- (b) $(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$.

Após esta breve discussão sobre produtos tensoriais, nossos próximos resultados serão utilizados para que possamos reinterpretar a definição clássica da álgebra de Frobenius.

Definição 2.10 *Um emparelhamento bilinear (ou apenas emparelhamento) de dois espaços vetoriais V e W é uma forma bilinear $\beta : V \otimes W \rightarrow \mathbb{k}$.*

Definição 2.11 Chamamos um emparelhamento $\beta : V \otimes W \rightarrow \mathbb{k}$ de não-degenerado na variável V se existir uma aplicação linear $\gamma : \mathbb{k} \rightarrow W \otimes V$, chamada coemparelhamento, tal que a composição

$$V \simeq V \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{1_V \otimes \gamma} V \otimes (W \otimes V) = (V \otimes W) \otimes V \xrightarrow{\beta \otimes 1_V} \mathbb{k} \otimes V \simeq V$$

seja a aplicação identidade em V . Da mesma forma β será não-degenerado na variável W caso exista $\gamma : \mathbb{k} \rightarrow W \otimes V$ tal que

$$W \simeq \mathbb{k} \otimes W \xrightarrow{\gamma \otimes 1_W} (W \otimes V) \otimes W = W \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{1_W \otimes \beta} W \otimes \mathbb{k} \simeq W$$

é a aplicação identidade em W . Caso β seja não-degenerado simultaneamente em V e W chamamos β apenas de não-degenerado.

Lema 2.12 Sejam V e W espaços vetoriais finitos de mesma dimensão n . Dado um emparelhamento

$$\beta : V \otimes W \rightarrow \mathbb{k},$$

as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) β é um emparelhamento não-degenerado;
- (b) $\beta(v, W) = 0$ implica $v = 0$;
- (c) $\beta(V, w) = 0$ implica $w = 0$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Seja o item (a) verdade. Como β é não-degenerado então existe uma aplicação linear da forma $\gamma : \mathbb{k} \rightarrow W \otimes V$ tal que a composição

$$V \simeq V \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{1_V \otimes \gamma} V \otimes (W \otimes V) = (V \otimes W) \otimes V \xrightarrow{\beta \otimes 1_V} \mathbb{k} \otimes V \simeq V$$

é a identidade em V . Em particular, é possível escrevermos a identidade $1_{\mathbb{k}}$ com γ , isto é

$$\gamma(1_{\mathbb{k}}) = \sum_{i=1}^n (y_i \otimes x_i),$$

para algum conjunto de vetores não-nulos $y_i \in W$ e $x_i \in V$. Com isso temos

$$v = v \otimes 1_{\mathbb{k}} \xrightarrow{1_V \otimes \gamma} v \otimes \sum_{i=1}^n (y_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^n v \otimes y_i \otimes x_i \xrightarrow{\beta \otimes 1_V} \sum_{i=1}^n \beta(v, y_i) x_i,$$

que deverá ser a identidade em V , logo

$$v = \sum_{i=1}^n \beta(v, y_i) x_i. \quad (2.1)$$

Os vetores x_i geram o espaço V , isto é, qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito com esta expressão. Em particular, caso $\beta(v, W) = 0$ então todos os coeficientes $\beta(v, y_i)$ são nulos e por isso teremos $v = 0$, logo, o item (b) é verdade.

(b) $\Rightarrow$ (c). Sejam $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base para V e $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ uma base para W . Como β é bilinear temos o seguinte para $v \in V$ e $\forall y \in W$

$$\beta(v, y) = \beta(v, \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta(v, w_i), \quad (2.2)$$

onde utilizamos a base de W para escrever $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ com $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Reescrevendo v com a base de V , isto é, $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ com $\alpha_j \in \mathbb{k}$, os coeficientes $\beta(v, w_i)$ podem ser colocados na forma

$$\beta(v, w_i) = \sum_{j=1}^n \beta(\alpha_j v_j, w_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta(v_j, w_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_{ji} \quad (1 \leq i \leq n),$$

onde utilizamos a notação $b_{ij} = \beta(v_i, w_j)$. Seja $v \in V$ tal que $\beta(v, W) = 0$, em particular, é necessário que $\beta(v, w_i) = 0$ para todo w_i . Segundo a Equação (2.2) isto também é suficiente para que $\beta(v, W) = 0$ seja verdade. Logo, com ajuda da expressão anterior, os α_i 's devem satisfazer o seguinte conjunto de equações

$$\alpha_1 b_{1i} + \alpha_2 b_{2i} + \dots + \alpha_n b_{ni} = 0 \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.3)$$

De modo análogo podemos escrever para $\forall x \in V$, $w \in W$ e $\chi_i, \xi_i \in \mathbb{k}$,

$$\beta(x, w) = \beta(\sum_{i=1}^n \chi_i v_i, w) = \sum_{i=1}^n \chi_i \beta(v_i, w),$$

com $x = \sum_{i=1}^n \chi_i v_i$, e ainda

$$\beta(v_i, w) = \beta(v_i, \sum_{j=1}^n \xi_j w_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j \beta(v_i, w_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j b_{ij}.$$

Considere agora $w \in W$ tal que $\beta(V, w) = 0$. Os coeficientes $\beta(v_i, w)$ serão nulos e com isso temos o segundo conjunto de equações

$$\xi_1 b_{i1} + \xi_2 b_{i2} + \dots + \xi_n b_{in} = 0 \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.4)$$

O conjunto de equações dado em (2.3) só possui solução diferente da trivial caso $\det(b_{ij}) = 0$. No entanto, pelo item (b) temos que $\beta(v, W) = 0$ implica $v = 0$, isto é, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, logo, para que esta condição seja *necessária* devemos ter $\det(b_{ij}) \neq 0$. Neste caso, o segundo conjunto de equações 2.4 também só possui a solução trivial, pois a matriz b_{ij} a ser resolvida é a transposta da matriz anterior, e com isso $\beta(V, w)$ implica $w = 0$, ou seja $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Vamos começar, desta vez, com a suposição de que (a) seja verdade, então existe $\gamma : \mathbb{k} \rightarrow W \otimes V$ tal que a composição

$$W \simeq \mathbb{k} \otimes W \xrightarrow{\gamma \otimes 1_W} (W \otimes V) \otimes W = W \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{1_W \otimes \beta} W \otimes \mathbb{k} \simeq W$$

é a identidade em W . Em particular, é possível escrevermos a identidade $1_{\mathbb{k}}$ com γ , isto é

$$\gamma(1_{\mathbb{k}}) = \sum_{i=1}^n (y_i \otimes x_i),$$

para algum conjunto de vetores não-nulos $y_i \in W$ e $x_i \in V$. Com isso temos

$$w = 1_{\mathbb{k}} \otimes w \xrightarrow{\gamma \otimes 1_W} \sum_{i=1}^n (y_i \otimes x_i) \otimes w = \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i \otimes w \xrightarrow{1_W \otimes \beta} \sum_{i=1}^n \beta(x_i, w) y_i$$

que deve ser a identidade em W logo

$$w = \sum_{i=1}^n \beta(x_i, w) y_i. \quad (2.5)$$

Agora vamos supor por absurdo que o item (c) não é verdade, ou seja, não é verdade que $\beta(V, w) = 0$ implica $w = 0$. Então existe algum $w \neq 0$ tal que $\beta(V, w) = 0$, em particular para todo $\beta(x_i, w) = 0$. Neste caso, pela Equação (2.5) temos

$$w = \sum_{i=1}^n \beta(x_i, w) y_i = 0$$

o que é uma contradição pois assumimos $w \neq 0$ ■

A definição de emparelhamento e suas propriedades serão fundamentais para que possamos apresentar uma nova definição da álgebra de Frobenius.

Definição 2.13 *Sejam V e W dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita. Considere o emparelhamento $\beta : V \otimes W \rightarrow \mathbb{k}$ e a forma linear para cada $w \in W$ fixo*

$$\begin{aligned} \beta_w : V &\rightarrow \mathbb{k} \\ v &\mapsto \beta(v, w). \end{aligned}$$

Chamamos de aplicação linear induzida à esquerda a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned}\beta_l : W &\rightarrow V^* \\ w &\mapsto \beta_w = \beta(_, w).\end{aligned}$$

Da mesma forma temos a aplicação linear induzida à direita dado por

$$\begin{aligned}\beta_r : V &\rightarrow W^* \\ v &\mapsto \beta_v = \beta(v, _).\end{aligned}$$

Definição 2.14 Chamamos um espaço vetorial A sobre o corpo $\mathbb{k}$ de álgebra sobre $\mathbb{k}$ se existirem duas aplicações lineares

$$\mu : A \otimes A \rightarrow A, \quad \eta : \mathbb{k} \rightarrow A$$

(chamadas de multiplicação e unidade respectivamente) tais que os três diagramas

$$\begin{array}{ccc} & A \otimes A \otimes A & \\ \mu \otimes 1_A \swarrow & & \searrow 1_A \otimes \mu \\ A \otimes A & & A \otimes A \\ \mu \searrow & & \swarrow \mu \\ & A & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes 1_A} & A \otimes A \\ & \searrow & \downarrow \mu \\ & & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xleftarrow{1_A \otimes \eta} & A \otimes \mathbb{k} \\ \downarrow \mu & \swarrow & \downarrow \\ A & & A \end{array}$$

comutam.

Definição 2.15 Sejam (A, μ, η) e (B, ν, ϕ) duas álgebras sobre $\mathbb{k}$. Chamamos uma aplicação

$$h : A \rightarrow B,$$

de homomorfismo de álgebras sobre $\mathbb{k}$ se tivermos para todo $a, a' \in A$ e $r \in \mathbb{k}$ o seguinte

$$h(\mu(a, a')) = \nu(h(a), h(a')) \quad e \quad h(\eta(r)) = \phi(r).$$

De modo análogo, também podemos definir uma coálgebra.

Definição 2.16 Chamamos um espaço vetorial A sobre o corpo $\mathbb{k}$ de coálgebra sobre $\mathbb{k}$ se existirem duas aplicações lineares

$$\delta : A \rightarrow A \otimes A, \quad \varepsilon : A \rightarrow \mathbb{k}$$

(chamadas de comultiplicação e counidade respectivamente) tais que os três diagramas

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & A \otimes A \otimes A & \\ \delta \otimes 1_A \nearrow & & \nwarrow \delta \otimes 1_A \\ A \otimes A & & A \otimes A \\ \delta \nwarrow & & \nearrow \delta \\ & A & \end{array} \\[20pt] \begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes A & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1_A} & A \otimes A \\ & \nearrow & \uparrow \delta \\ & A & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{1_A \otimes \varepsilon} & A \otimes \mathbb{k} \\ \uparrow \delta & \nearrow & \\ A & & \end{array} \end{array}$$

comutam

Definição 2.17 Sejam (C, δ, ε) e (D, γ, ξ) duas coálgebras sobre $\mathbb{k}$. Chamamos uma aplicação

$$h : C \rightarrow D,$$

de homomorfismo de coálgebras sobre $\mathbb{k}$ se tivermos para $c \in C$ o seguinte

$$\gamma(h(c)) = (h \otimes h)(\delta(c)) \quad e \quad \xi(h(c)) = \varepsilon(c).$$

A seguir apresentamos dois exemplos de como é possível obter uma álgebra a partir do produto tensorial de duas outras álgebras. Convém apresentar estes exemplos agora que acabamos de ver as definições de álgebra e de coálgebra, pois tais construções serão retomadas no Capítulo 3, quando estivermos discutindo o conceito de biálgebra, o qual será empregado na definição da álgebra de Hopf.

Exemplo 2.18 Sejam (A, μ_A, η_A) e (B, μ_B, η_B) duas álgebras. Obtemos uma álgebra sobre o espaço $A \otimes B$ definindo a seguinte multiplicação e respectiva unidade

$$\mu_{A \otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (1_A \otimes \tau \otimes 1_B) \quad e \quad \eta_{A \otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B,$$

onde $\tau : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ é a aplicação *twist*. Com esta multiplicação o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) & \\
 (1_A \otimes \tau \otimes 1_B) \otimes (1_{A \otimes B}) \swarrow & & \searrow (1_{A \otimes B}) \otimes (1_A \otimes \tau \otimes 1_B) \\
 A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes A \otimes B & & A \otimes B \otimes A \otimes A \otimes B \otimes B \\
 \downarrow (\mu_A \otimes \mu_B) \otimes (1_{A \otimes B}) & & \downarrow (1_{A \otimes B}) \otimes (\mu_A \otimes \mu_B) \\
 A \otimes B \otimes A \otimes B & & A \otimes B \otimes A \otimes B \\
 \downarrow 1_A \otimes \tau \otimes 1_B & & \downarrow 1_A \otimes \tau \otimes 1_B \\
 A \otimes A \otimes B \otimes B & \xrightarrow{\mu_A \otimes \mu_B} A \otimes B \xleftarrow{\mu_A \otimes \mu_B} & A \otimes A \otimes B \otimes B
 \end{array}$$

irá comutar, enquanto a unidade fará os diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{k} \otimes A \otimes B & \xrightarrow{\simeq} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \otimes A \otimes B & \xrightarrow{(\eta_A \otimes \eta_B) \otimes (1_{A \otimes B})} A \otimes B \otimes A \otimes B \\
 & \searrow \simeq & \downarrow 1_A \otimes \tau \otimes 1_B \\
 & & A \otimes A \otimes B \otimes B \\
 & & \downarrow \mu_A \otimes \mu_B \\
 & & A \otimes B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B \otimes A \otimes B & \xleftarrow{(\eta_A \otimes \eta_B) \otimes (1_{A \otimes B})} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \otimes A \otimes B & \xleftarrow{\simeq} \mathbb{k} \otimes A \otimes B \\
 \downarrow 1_A \otimes \tau \otimes 1_B & & \searrow \simeq \\
 A \otimes A \otimes B \otimes B & & \\
 \downarrow \mu_A \otimes \mu_B & & \\
 A \otimes B & &
 \end{array}$$

comutarem e, portanto, $(A \otimes B, \mu_{A \otimes B}, \eta_{A \otimes B})$ é uma álgebra.

Exemplo 2.19 Sejam $(C, \delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras. Obtemos uma coálgebra

sobre o espaço $C \otimes D$ definindo a seguinte comultiplicação e respectiva counidade

$$\delta_{C \otimes D} = (1_C \otimes \tau \otimes 1_D) \circ (\delta_C \otimes \delta_D) \quad \text{e} \quad \eta_{C \otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$$

onde $\tau : C \otimes D \rightarrow D \otimes C$ é a aplicação *twist*. Com isso os diagramas

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (C \otimes D) \otimes (C \otimes D) \otimes (C \otimes D) & & \\
 & \nearrow^{(1_C \otimes \tau \otimes 1_D) \otimes (1_{C \otimes D})} & & \nwarrow_{(1_{C \otimes D}) \otimes (1_C \otimes \tau \otimes 1_D)} & \\
 C \otimes C \otimes D \otimes D \otimes C \otimes D & & & & C \otimes D \otimes C \otimes C \otimes D \otimes D \\
 \uparrow^{(\delta_C \otimes \delta_D) \otimes (1_{C \otimes D})} & & & & \uparrow^{(1_{C \otimes D}) \otimes (\delta_C \otimes \delta_D)} \\
 C \otimes D \otimes C \otimes D & & & & C \otimes D \otimes C \otimes D \\
 \uparrow^{1_C \otimes \tau \otimes 1_D} & & & & \uparrow^{1_C \otimes \tau \otimes 1_D} \\
 C \otimes C \otimes D \otimes D & \xleftarrow{\delta_C \otimes \delta_D} C \otimes D & \xrightarrow{\delta_C \otimes \delta_D} & C \otimes C \otimes D \otimes D &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{k} \otimes C \otimes D & \xleftarrow{\simeq} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \otimes C \otimes D & \xleftarrow{(\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B) \otimes (1_{C \otimes D})} C \otimes D \otimes C \otimes D \\
 & \nwarrow \simeq & \uparrow^{1_C \otimes \tau \otimes 1_D} \\
 & & C \otimes C \otimes D \otimes D \\
 & & \uparrow^{\delta_C \otimes \delta_D} \\
 & & C \otimes D
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes D \otimes C \otimes D & \xrightarrow{(\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D) \otimes (1_{C \otimes D})} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \otimes C \otimes D & \xrightarrow{\simeq} \mathbb{k} \otimes C \otimes D \\
 \uparrow^{1_C \otimes \tau \otimes 1_D} & & \nearrow \simeq \\
 C \otimes C \otimes D \otimes D & & \\
 \uparrow^{\delta_C \otimes \delta_D} & & \\
 C \otimes D & &
 \end{array}$$

comutam e, portanto, $(C \otimes D, \delta_{C \otimes D}, \varepsilon_{C \otimes D})$ é uma coálgebra.

Destes dois últimos exemplos também destacamos a relevância que a aplicação *twist* possui para a construção da álgebra (coálgebra) sobre os produtos tensoriais. Para definir a TQCT em 3D também será preciso considerar uma aplicação *twist* sobre a categoria dos cobordismos, assim como foi necessário fazer para o caso bidimensional, mas voltaremos a discutir este assunto no Capítulo 3.

Definição 2.20 *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{k}$ e M um espaço vetorial sobre $\mathbb{k}$. Chamamos M de um A -módulo à direita (ou módulo sobre A) se para cada $a \in A$ e $m \in M$ está definido um produto chamado ação à direita*

$$\psi : M \otimes A \rightarrow M$$

tal que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} M \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\psi \otimes 1_A} & M \otimes A \\ \downarrow 1_M \otimes \mu & & \downarrow \psi \\ M \otimes A & \xrightarrow{\psi} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \otimes A & \xleftarrow{1_M \otimes \eta} & M \otimes \mathbb{k} \\ \downarrow \psi & \swarrow & \\ M & & \end{array}$$

comutam.

Observação 2.21 *Define-se o A -módulo à esquerda de modo semelhante mas com uma ação à esquerda $A \otimes M \rightarrow M$ e satisfazendo os diagramas anteriores análogos. Para uma álgebra A comutativa o A -módulo à direita fornecerá a estrutura do A -módulo à esquerda, isto é, $\psi(m, a) = \psi(a, m)$ para $m \in M$ e $a \in A$.*

Exemplo 2.22 Podemos escolher M como sendo a própria álgebra A bastando para isso definir a multiplicação μ como a ação ψ :

$$\mu : A \otimes A \rightarrow A,$$

e a comutatividade dos diagramas anteriores seguirá das propriedades da multiplicação μ .

Definição 2.23 *Sejam M, N dois A -módulos com ações à esquerda dadas respectivamente por ψ e ξ . Chamamos a aplicação*

$$h : A \rightarrow A'$$

de homomorfismo de A -módulos à esquerda se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{1_A \otimes h} & A \otimes N \\ \psi \downarrow & & \downarrow \xi \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

comutar.

Podemos escrever o diagrama considerando para todo $m \in M$, $n \in N$ e $a \in A$ a seguinte relação

$$h(\psi(a, m)) = \xi(a, h(m)), \quad (2.6)$$

sendo esta definição análoga para o caso de A -módulos à direita.

Definição 2.24 *Seja M um A -módulo à direita*

$$\psi : M \otimes A \rightarrow M.$$

*Chamamos o A -módulo à esquerda do espaço dual M^**

$$\xi : A \otimes M^* \rightarrow M^*$$

de A -módulo dual de M , onde a ação à direita ξ é definida da seguinte maneira

$$\xi(a, f)(m) := f(\psi(m, a)), \quad (2.7)$$

para $M^ \ni f : M \rightarrow \mathbb{k}$, $m \in M$ e $a \in A$.*

Definição 2.25 *Sejam M um A -módulo à direita e N um A -módulo à esquerda com ações dadas respectivamente por ψ e ξ . Chamamos um emparelhamento dado por $\beta : M \otimes N \rightarrow \mathbb{k}$ de associativo se o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} & & M \otimes A \otimes N & & \\ \psi \otimes 1_N \swarrow & & & \searrow 1_M \otimes \xi & \\ M \otimes N & & & & M \otimes N \\ \beta \searrow & & & \swarrow \beta & \\ & & \mathbb{k} & & \end{array}$$

comutar.

Outra maneira de expressar este mesmo emparelhamento associativo é a seguinte

$$\beta(\psi(m, a), n) = \beta(m, \xi(a, n)), \quad \text{para todo } m \in M, n \in N, a \in A.$$

§2. Álgebra de Frobenius

A álgebra de Frobenius possui mais de uma caracterização, vamos começar com a definição clássica [28]. Como vimos no Exemplo 2.22, a própria $\mathbb{k}$ -álgebra A pode ser vista como sendo um A -módulo. Para isso basta considerarmos a multiplicação μ como sendo a ação à direita e o espaço vetorial M do módulo como sendo a própria álgebra A , fornecendo então $\mu : A \otimes A \rightarrow A$. Neste sentido podemos falar no módulo dual à esquerda¹ A^* de um módulo à direita A . A seguir vamos utilizar a notação M_A para indicar um A -módulo M à direita e ${}_A M$ para indicar um A -módulo M à esquerda.

Definição 2.26 *Considere uma $\mathbb{k}$ -álgebra A de dimensão finita. Chamamos A de álgebra de Frobenius caso exista um isomorfismo de módulos à esquerda entre ${}_A A$ e o dual $(A_A)^*$.*

Teorema 2.27 *Seja A uma $\mathbb{k}$ -álgebra. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) *A é uma álgebra de Frobenius;*
- (b) *Existe um emparelhamento $\beta : A \otimes A \rightarrow \mathbb{k}$ (onde a primeira álgebra A é vista como um módulo à direita e a segunda como um módulo à esquerda) não-degenerado e associativo chamado de emparelhamento de Frobenius;*
- (c) *Existe uma forma linear $f : A \rightarrow \mathbb{k}$ chamada de forma de Frobenius cujo núcleo contém apenas ideais triviais;*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Seja (a) verdadeira, logo existe um A -isomorfismo à esquerda de módulos entre os dois módulos à esquerda ${}_A A$ e $(A_A)^*$. Seja $h : A \rightarrow A^*$ tal isomorfismo e ψ a ação à esquerda do primeiro módulo e ξ a ação à esquerda do segundo módulo. Então teremos, segundo a Equação (2.6), para $a, m \in A$

$$h(\psi(a, m)) = \xi(a, h(m)),$$

veja que não haverá ambiguidade se deixarmos de apresentar as ações ψ e ξ pois os elementos de A^* só aparecerão através do homomorfismo h . Assim, a notação am indica a multiplicação ψ entre dois elementos $a, m \in A$ e $ah(m)$ indica a multiplicação ξ entre um elemento $a \in A$ e um elemento $h(m) \in A^*$. Com isso podemos simplificar a notação e escrever apenas o seguinte

$$h(am) = ah(m).$$

¹Observe que o módulo dual é sempre contrário ao módulo, isto é, se temos um módulo M à direita o seu dual M^* será um módulo à esquerda e vice-versa.

Agora vamos definir, fazendo uso do isomorfismo h , a seguinte função bilinear

$$\begin{aligned}\beta &: A \otimes A \rightarrow \mathbb{k} \\ \beta(x, y) &= (h(y))(x).\end{aligned}$$

Como h é um isomorfismo, então β será um mapa não-degenerado, isto é, seja $\beta(A, y) = 0$, então $(h(y))(A) = 0$ implica $y = 0$ pois apenas o núcleo de A é levado no núcleo de A^* . Segundo o Lema 2.12 sabemos que isto implica também $x = 0$ para $\beta(x, A) = 0$.

Para que a aplicação β também seja comutativa, para $z \in A$, devemos ter a seguinte relação

$$\beta(x, yz) = \beta(xy, z),$$

na qual cada uma destas parcelas pode ser escrita assim

$$\begin{aligned}\beta(xy, z) &= (h(z))(xy), \\ \beta(x, yz) &= (h(yz))(x) = (yh(z))(x),\end{aligned}$$

onde utilizamos, nesta última equação, o fato de h ser um isomorfismo. Considere a definição da ação dual de A^* , ver Equação (2.7) dada na Definição 2.24, com a qual podemos escrever o seguinte

$$\begin{aligned}A \otimes A^* &\rightarrow A^* \\ z \otimes f &\mapsto f_z \quad \text{com} \quad f_z(x) := f(xz) \text{ para todo } x \in A.\end{aligned}$$

Observe que $h(z)$ será um elemento $f \in A^*$, vamos então escrever $h(z) = f$ e com isso temos

$$\beta(x, yz) = (yh(z))(x) = (yf)(x) = f_y(x) = f(xy) = (h(z))(xy) = \beta(xy, z),$$

e β será uma função bilinear associativa.

(b) $\Rightarrow$ (c). Seja (b) verdade, então existe $\beta(x, y)$ não-degenerada e associativa. Com isso, vamos definir a seguinte forma linear

$$f(x) = \beta(x, 1_A),$$

portanto $f(xA) = 0$ implica,

$$f(xA) = \beta(xA, 1_A) = \beta(x, A1_A) = \beta(x, A) = 0,$$

mas β é não-degenerada, então $x = 0$. Da mesma forma, temos para $f(Ax) = 0$

$$f(Ay) = \beta(Ay, 1_A) = \beta(A, y1_A) = \beta(A, y) = 0,$$

e $y = 0$. Portanto os únicos ideais à esquerda ou à direita do espaço nulo de $f(x)$ são os triviais.

(c) $\Rightarrow$ (a). Seja (c) verdade, então existe $f(xy)$ para o qual podemos definir

$$\beta(x, y) = f(xy),$$

como o espaço nulo de $f(xy)$ não possui ideais diferentes dos triviais, temos que $f(xA) = 0$ implica

$$\beta(x, A) = f(xA) = 0,$$

apenas quando $x = 0$. Do mesmo modo obtemos $\beta(A, y) = 0$ apenas quando $y = 0$, logo $\beta(x, y)$ é não-degenerada. Além disso, temos que

$$\beta(x, yz) = f(x(yz)) = f((xy)z) = \beta(xy, z).$$

Então existe uma forma bilinear não-degenerada e associativa $\beta : A \otimes A \rightarrow \mathbb{k}$, que nos permite definir uma função h para $x, y \in A$ da seguinte maneira

$$(h(y))(x) := \beta(x, y) \quad \text{e} \quad (h(z))(xy) = \beta(xy, z) = \beta(x, yz) = (h(yz))(x).$$

Além disso, a função h é um A -isomorfismo à esquerda pois β é não-degenerada, logo podemos definir novamente o seguinte $h(yz) = yh(z)$, para $y, z \in A$ ■

§3. Representação gráfica

Ao tratarmos a categoria dos cobordismos utilizamos gráficos a fim de tornar mais claras as relações envolvidas na construção da **2Cob**. Pela mesma razão, pretendemos empregar uma representação gráfica para caracterizarmos a álgebra de Frobenius. De fato, a linguagem de gráficos será a mesma utilizada para a **2Cob**, mas os significados atribuídos a cada figura em particular serão de uma estrutura de álgebra. É fundamental ressaltarmos essa diferença, pois, ao final, será através da comparação destas duas representações gráficas que poderemos perceber exatamente como será possível associar uma álgebra de Frobenius para cada TQCT bidimensional.

Definição 2.28 *A estrutura de uma álgebra A sobre o corpo $\mathbb{k}$ (Definição 2.14) será representada pelos gráficos apresentados na Figura 2.1. Em particular, as comutações apresentadas na Definição 2.14 podem ser escritas nesta linguagem como vemos na Figura 2.2.*

Figura 2.1 Representação gráfica de uma álgebra A .

Figura 2.2 Axiomas de uma álgebra A .

Definição 2.29 Considere no Teorema 2.27 os itens (b) e (c) de uma álgebra de Frobenius A . Para o emparelhamento citado em (b) utilizaremos o gráfico da Figura 2.3-(a) e para a forma de Frobenius citada em (c) utilizaremos o gráfico da Figura 2.3-(b).

Para a demonstração da passagem (b) $\Rightarrow$ (c) dada no Teorema 2.27, em particular, poderemos representar as relações de equivalência para o emparelhamento β como é visto na Figura 2.4.

Definição 2.30 A associatividade de um emparelhamento de Frobenius será representada pelo gráfico dado na Figura 2.5.

Definição 2.31 A não-degenerescência de um emparelhamento de Frobenius, isto é, a existência de um coemparelhamento $\gamma : \mathbb{k} \rightarrow A \otimes A$, será representado pelo gráfico dado na Figura 2.6.

Figura 2.3 As estruturas de emparelhamento, forma e coemparelhamento de Frobenius, com as quais podemos obter duas definições equivalentes de uma álgebra de Frobenius, são representadas em (a), (b) e (c) respectivamente.

Figura 2.4 Relações utilizadas na demonstração da passagem (b) $\Rightarrow$ (c) do Teorema 2.27.

Figura 2.5 Associatividade do emparelhamento $\beta(x, y)$ de Frobenius.

Figura 2.6 Não-degenerescência do emparelhamento $\beta(x, y)$ de Frobenius.

Definição 2.32 Considere um coemparelhamento γ e uma multiplicação μ . Definimos uma comultiplicação δ como apresentado na Figura 2.7.

Figura 2.7 Comultiplicação obtida a partir de um coemparelhamento γ e uma multiplicação μ .

Para mostrarmos que a Definição 2.32 é consistente vamos escrever a multiplicação da seguinte maneira.

Lema 2.33 *A relação dada na Figura 2.8 vale.*

Figura 2.8 Multiplicação.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas a segunda igualdade, sendo esta prova análoga para a primeira igualdade. Inicialmente vamos reescrever o termo à direita com algumas identidades e depois utilizar a segunda igualdade da Figura 2.6.

Com isso podemos mostrar o próximo lema. ■

Lema 2.34 *A equação dada na Figura 2.9 seguinte vale.*

Figura 2.9 Representação alternativa da comultiplicação.

Demonstração. Primeiro vamos reescrever a multiplicação com ajuda da segunda igualdade da Figura 2.8.

Na última passagem utilizamos a associatividade do emparelhamento como dada na Figura 2.5. Utilizando a primeira igualdade da Figura 2.8 obtemos o resultado procurado.

■

Lema 2.35 *A equação dada na Figura 2.10 seguinte vale.*

Figura 2.10 Comutação da comultiplicação.

Demonstração. Primeiro vamos reescrever a comultiplicação como dado na Figura 2.7.

Inserindo algumas identidades e utilizando a associatividade da álgebra, ver Figura 2.2-(a), teremos o seguinte.

Primeiro iremos reescrever o resultado anterior com algumas identidades. Depois iremos destacar uma das partes. A comultiplicação será obtida utilizando a primeira igualdade da

Figura 2.7 sobre a parte que foi destacada, e com isso chegamos ao resultado procurado.

Lema 2.36 *A forma de Frobenius ε é a counidade para δ , neste sentido vale a representação gráfica dada na Figura 2.11.*

Figura 2.11 Forma de Frobenius ε é a counidade de uma comultiplicação δ .

Demonstração. Como anteriormente, vamos realizar a demonstração de apenas uma das equações (a equação esquerda) sendo a outra equação demonstrada de maneira análoga. Primeiro vamos utilizar a Figura 2.7 e inserir algumas identidades. Depois utilizamos a Figura 2.4 e a Figura 2.6.

Lema 2.37 *A comultiplicação δ definida na Figura 2.7 satisfaz a relação apresentada na Figura 2.12, chamada de condição de Frobenius.*

Figura 2.12 Condição de Frobenius.

Demonstração. Primeiro vamos reescrever a comultiplicação com ajuda da Figura 2.7 e inserir algumas identidades.

Agora vamos utilizar a associatividade da multiplicação dada na Figura 2.2-(a) e mais uma vez a Figura 2.7.

Com a existência de uma comultiplicação e sua counidade prova-se também o seguinte.

Lema 2.38 *Valem as relações da Figura 2.13 entre um coemparelhamento e uma unidade, de fato, elas são duais aos resultados escritos na Figura 2.4.*

Lema 2.39 *Seja A uma álgebra de Frobenius. Existe um único coemparelhamento dado por $\gamma : \mathbb{k} \rightarrow A \otimes A$.*

Figura 2.13 Relações de um coemparelhamento e unidade duais às relações para uma forma e um emparelhamento de Frobenius.

Demonstração. Suponha que exista ψ diferente de γ tal que tenhamos o seguinte.

Então podemos escrever a próxima configuração.

Modificando a figura anterior com algumas identidades vemos que os dois coemparelhamentos são iguais.

Lema 2.40 *Seja A uma álgebra de Frobenius e sua forma ε . Existe uma única comultiplicação associativa δ tal que ε é a counidade e que satisfaça a relação de Frobenius.*

Demonstração. Do lema anterior sabemos que o coemparelhamento de uma álgebra de Frobenius é único. Utilizando a relação do coemparelhamento com a unidade dada na Figura 2.13-(a) e a relação da counidade ε com o emparelhamento como vemos na Figura 2.4 podemos escrever o próximo resultado, que será único.

Onde, para encontrar a última igualdade, utilizamos a condição da unidade dada na Figura 2.2-(b) e relação da forma de Frobenius ε com a counidade δ , como vemos na Figura 2.11 ■

Observe que a comultiplicação obtida no lema anterior é a mesma que definimos na Figura 2.7. Para verificar isso basta, primeiro, escrevermos a counidade δ com uma identidade e utilizarmos a Figura 2.2-(b).

Depois utilizamos a condição de Frobenius dada na Figura 2.12 e a Figura 2.4-(a).

Da mesma maneira podemos obter uma relação equivalente para a multiplicação.

As considerações feitas até o momento nos possibilitam encontrar, através do próximo teorema, uma apresentação alternativa para a definição clássica da álgebra de Frobenius. Comparando com a Definição 2.26, veremos que o próximo resultado será importante pois ele se apoia principalmente na estrutura da álgebra de Frobenius.

Figura 2.14 Relação equivalente para a multiplicação.

Teorema 2.41 *Seja A um espaço vetorial equipado com uma multiplicação $\mu : A \otimes A \rightarrow A$, com uma unidade $\eta : \mathbb{k} \rightarrow A$, com uma comultiplicação $\delta : A \rightarrow A \otimes A$ e com uma counidade $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{k}$. Caso A satisfaça a condição de Frobenius, então A será uma álgebra de Frobenius e ε será uma forma de Frobenius.*

Demonstração. Segundo o Teorema 2.27-(b) é suficiente mostrarmos a existência de um emparelhamento não-degenerado e associativo. Considere então o emparelhamento dado por $\beta := \varepsilon \circ \mu$, em termos de diagramas temos a próxima figura.

Como A satisfaz a condição de Frobenius podemos utilizar o lema anterior e escrever a próxima figura.

Já para verificarmos a associatividade basta utilizarmos a relação dada em Figura 2.14 e a condição de Frobenius para obter a próxima figura.

Definição 2.42 O inverso do mapa twist é o próprio mapa twist e vale a relação dada na Figura 2.15.

Figura 2.15 Mapa twist.

Definição 2.43 Seja A uma álgebra com multiplicação $\mu : A \otimes A \rightarrow A$. Caso A seja uma álgebra comutativa, então poderemos utilizar o diagrama dado na Figura 2.16.

Figura 2.16 Produto comutativo.

Definição 2.44 Seja A uma coálgebra com comultiplicação $\delta : A \rightarrow A \otimes A$. Caso A seja uma coálgebra comutativa, então poderemos utilizar o diagrama dado na Figura 2.17.

Definição 2.45 Sejam $(A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ e $(A', \mu', \eta', \delta', \varepsilon')$ duas álgebras de Frobenius. Chamamos um homomorfismo de álgebra

$$\phi : (A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon) \rightarrow (A', \mu', \eta', \delta', \varepsilon')$$

Figura 2.17 Coproduto cocomutativo.

de homomorfismo de álgebra de Frobenius se ϕ for simultaneamente um homomorfismo de coálgebra.

Definição 2.46 Chamamos $\mathbf{AF}$ de categoria das álgebras de Frobenius, onde os objetos são todas as álgebras de Frobenius e os morfismos são os homomorfismos de álgebras de Frobenius entre todos os objetos. Chamamos de $\mathbf{AFc}$ a categoria formada apenas com as álgebras comutativas da categoria $\mathbf{AF}$.

2.1.2 Teorema principal

Para as próximas definições será necessário introduzirmos a ideia de produto de categorias, ou seja, dada uma categoria $\mathbf{C}$ pretendemos saber o significado de operações tais como $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Com isso, uma questão que surge é a de qual categoria irá satisfazer a identidade $\mathbf{1} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{1}$? Claramente este tipo de operação dependerá explicitamente da própria categoria $\mathbf{C}$, no entanto, a categoria $\mathbf{1}$ sempre se constituirá por apenas um elemento, sendo ela chamada neste sentido de *singleton*. Por exemplo, considere a categoria dos espaços topológicos $\mathbf{Top}$, o produto categorial $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ será o produto cartesiano entre espaços topológicos e o *singleton* $\mathbf{1}$ será o espaço vazio. Desta maneira podemos apresentar nossa próxima definição.

Definição 2.47 Seja $\mathbf{A}$ uma categoria. Chamamos $\mathbf{A}$ de categoria monoidal estrita se existirem dois funtores

$$\mu : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}, \quad \eta : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{A},$$

tais que os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} & \\
 \mu \times 1_{\mathbf{A}} \swarrow & & \searrow 1_{\mathbf{A}} \times \mu \\
 \mathbf{A} \times \mathbf{A} & & \mathbf{A} \times \mathbf{A} \\
 \mu \searrow & & \swarrow \mu \\
 & \mathbf{A} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 \times \mathbf{A} & \xrightarrow{\eta \times 1_{\mathbf{A}}} & \mathbf{A} \times \mathbf{A} \\
& \searrow & \downarrow \mu \\
& & \mathbf{A}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{A} \times \mathbf{A} & \xleftarrow{1_{\mathbf{A}} \times \eta} & \mathbf{A} \times 1 \\
\downarrow \mu & \swarrow & \\
\mathbf{A} & &
\end{array}$$

comutam.

Quando estivermos tratando de uma categoria sem especificá-la, iremos indicar a operação realizada pelo funtor μ com a notação $\square$. Com isso, expressamos para os objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ e para os morfismos $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ e $Y_1 \xrightarrow{g} Y_2$, as próximas operações

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{A} &\xrightarrow{\mu} \mathbf{A} \\
(X, Y) &\mapsto X \square Y \\
(f, g) &\mapsto f \square g
\end{aligned}$$

que se relacionam da seguinte maneira

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} X_1 \\ \downarrow f \\ X_2 \end{array} & \times & \begin{array}{c} Y_1 \\ \downarrow g \\ Y_2 \end{array} \\
& \xrightarrow{\mu} & \begin{array}{c} X_1 \square Y_1 \\ \downarrow f \square g \\ X_2 \square Y_2 \end{array}
\end{array}$$

Já para o produto de uma categoria em particular iremos substituir a representação $\square$ pelo produto desta categoria, por exemplo, no caso da categoria **Vet** iremos utilizar o produto tensorial $\otimes$ e no caso da categoria **Top** iremos utilizar a união $\coprod$.

Por fim, ainda com relação à notação, considere que I seja um objeto da imagem de $\eta : 1 \rightarrow \mathbf{A}$. Neste caso os dois últimos diagramas da Definição 2.47 podem ser escritos para todo $X \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ da seguinte maneira

$$I \square X = X = X \square I.$$

Deste ponto em diante, utilizaremos a notação $(\mathbf{A}, \square, I)$ para nos referir a uma categoria monoidal.

Definição 2.48 *Sejam $(\mathbf{A}, \square, I)$ e $(\mathbf{A}', \square, I')$ duas categorias monoidais. Chamamos um*

functor dado por $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ de functor monoidal estrito se os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \times \mathbf{A} & \xrightarrow{F \times F} & \mathbf{A}' \times \mathbf{A}' \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ \mathbf{A} & \xrightarrow{F} & \mathbf{A}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{F} & \mathbf{A}' \\ \eta \uparrow & & \uparrow \eta' \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{1}' \end{array}$$

comutarem.

Os diagramas também podem ser escritos como

$$F(X) \square' F(Y) = F(X \square Y) \quad \text{e} \quad F(I) = I'.$$

Definição 2.49 Seja $(\mathbf{A}, \square, I)$ uma categoria monoidal estrita. Chamamos $(\mathbf{A}, \square, I)$ de categoria monoidal estrita simétrica se para todo par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ existe um mapa twist

$$\tau_{X,Y} : X \square Y \rightarrow Y \square X$$

tal que os seguintes axiomas são satisfeitos.

(a) Para cada par de morfismos $f \in \text{Morf}(X, X')$ e $g \in \text{Morf}(Y, Y')$ o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \square Y & \xrightarrow{\tau_{X,Y}} & Y \square X \\ f \square g \downarrow & & \downarrow g \square f \\ X' \square Y' & \xrightarrow{\tau_{X',Y'}} & Y' \square X' \end{array}$$

comuta.

(b) Para cada trio de objetos $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ os dois diagramas

$$\begin{array}{ccc} X \square Y \square Z & \xrightarrow{\tau_{X,Y} \square Z} & Y \square Z \square X \\ \tau_{X,Y} \square 1_Z \searrow & & \nearrow 1_Y \square \tau_{X,Z} \\ & Y \square X \square Z & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \square Y \square Z & \xrightarrow{\tau_X \square \tau_{Y,Z}} & Z \square X \square Y \\ 1_X \square \tau_{Y,Z} \searrow & & \nearrow \tau_{X,Z} \square 1_Y \\ & X \square Z \square Y & \end{array}$$

comutam.

(c) Para cada par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ temos $\tau_{X,Y} \tau_{Y,X} = 1_{X \square Y}$.

Com isso, dada uma categoria monoidal estrita simétrica vamos utilizar a notação $(\mathbf{A}, \square, I, \tau)$ para indicá-la.

Definição 2.50 *Sejam $(\mathbf{A}, \square, I, \tau)$ e $(\mathbf{A}', \square, I', \tau')$ duas categorias monoidais estritas simétricas, e $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ um funtor monoidal estrito. Chamamos F de funtor monoidal estrito simétrico se a estrutura de simetria das categorias, isto é, os mapas τ e τ' são preservados, ou seja*

$$F(\tau_{X,Y}) = \tau'_{F(X),F(Y)}.$$

Exemplo 2.51 Considere a categoria $\mathbf{nCob}$ e o funtores

$$\coprod : \mathbf{nCob} \times \mathbf{nCob} \rightarrow \mathbf{nCob} \quad \text{e} \quad T_{\Sigma, \Sigma'} : \Sigma \coprod \Sigma' \Rightarrow \Sigma' \coprod \Sigma,$$

onde $\coprod$ é a união disjunta. A categoria $(\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset, T)$ é uma categoria monoidal estrita simétrica.

Exemplo 2.52 Considere a categoria $\mathbf{Vet}$ e para dois objetos $V, W \in \text{Obj}(\mathbf{Vet})$ o funtor

$$\begin{aligned} \sigma : V \otimes W &\rightarrow W \otimes V \\ v \otimes w &\mapsto w \otimes v. \end{aligned}$$

A categoria $(\mathbf{Vet}, \otimes, \mathbb{k}, \sigma)$ é uma categoria monoidal estrita simétrica.

Definição 2.53 *Considere uma categoria monoidal estrita simétrica qualquer $(\mathbf{A}, \square, I, \tau)$ e a categoria $(\mathbf{Vet}, \otimes, \mathbb{k}, \sigma)$. Chamamos de representação linear um funtor monoidal estrito simétrico*

$$F : (\mathbf{A}, \square, I, \tau) \rightarrow (\mathbf{Vet}, \otimes, \mathbb{k}, \sigma).$$

Com isso podemos apresentar a seguinte definição de uma *TQCT*.

Definição 2.54 *Segundo a Definição 1.21 uma TQCT é uma representação linear da categoria $(\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset, T)$, isto é, funtor monoidal estrito simétrico F da forma*

$$F : (\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset, T) \rightarrow (\mathbf{Vet}, \otimes, \mathbb{k}, \sigma).$$

Definição 2.55 *Considere duas categorias $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e dois funtores F e G entre estas categorias, $F, G : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Chamamos de transformação natural a coleção de morfismos obtida para todos os objetos dados por $X \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ e $F(X), G(X) \in \text{Obj}(\mathbf{B})$ da seguinte maneira*

$$u_X : F(X) \rightarrow G(X),$$

tais que para qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathbf{A}$ o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{u_Y} & G(Y) \end{array}$$

comuta.

Definição 2.56 *Sejam $(\mathbf{A}, \square, I)$ e $(\mathbf{A}', \square', I')$ duas categorias monoidais, $F, G : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ dois funtores monoidais e $u : F \rightarrow G$ uma transformação natural. Chamamos u de transformação natural monoidal se para todo objeto $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ tivermos*

$$u_X \square' u_Y = u_{X \square Y} \quad e \quad u_I = 1_{I'}.$$

Observe que podemos escrever o seguinte para os funtores

$$\begin{aligned} F(X \square Y) &= F(X) \square' F(Y), \\ G(X \square Y) &= G(X) \square' G(Y), \end{aligned}$$

assim a primeira condição implica na comutação do diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X \square Y) & \xrightarrow{u_{X \square Y}} & G(X \square Y) \\ \parallel & & \parallel \\ F(X) \square' F(Y) & \xrightarrow{u_X \square' u_Y} & G(X) \square' G(Y). \end{array}$$

Definição 2.57 *Considere o conjunto de funtores F que originam uma TQCT, ou seja, o conjunto das representações lineares da categoria $(\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset, T)$. A categoria $\mathbf{nTQCT}_{\mathbb{k}}$ é construída escolhendo como objetos os funtores F e como morfismos as transformações naturais monoidais entre estes objetos, ou seja*

$$\mathbf{nTQCT}_{\mathbb{k}} := \mathbf{Rep}_{\mathbb{k}}(\mathbf{nCob}) = \{F : (\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset, T) \rightarrow (\mathbf{Vet}, \otimes, \mathbb{k}, \sigma)\}.$$

Por simplicidade iremos considerar implícita a notação $\mathbb{k}$ em $\mathbf{nTQCT}_{\mathbb{k}}$, indicando a categoria apenas por $\mathbf{nTQCT}$.

Definição 2.58 *Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas categorias e G um funtor da forma $G : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Chamamos G de isomorfismo de categorias caso exista um funtor $H : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ tal que $H \circ G = 1_{\mathbf{A}}$ e $G \circ H = 1_{\mathbf{B}}$. Neste caso chamamos as categorias $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de categorias isomorfas.*

Teorema 2.59 *As categorias $\mathbf{2TQFT}$ e $\mathbf{AFc}$ são isomorfas.*

Demonstração. Apenas apresentaremos as ideias principais, pois a demonstração de todos os passos seria bastante longa. Mas o restante da demonstração, acreditamos, poderá ser completada com base nesta discussão.

(**2TQFT** $\Rightarrow$ **AFc**). Primeiro vamos mostrar que existe um funtor

$$G : \mathbf{2TQFT} \rightarrow \mathbf{AFc}.$$

Para tratarmos a estrutura da **2TQFT** devemos observar que toda TQCT 2D será uma representação linear de uma categoria (**2Cob**, $\coprod, \emptyset, T$), isto é, um funtor desta categoria na categoria dos espaços vetoriais (**Vet**, $\otimes, \mathbb{k}, \sigma$). Por outro lado, a categoria **2Cob** pode ser expressa em termos de geradores e relações, e, com isso, será suficiente verificarmos a ação desta representação linear sobre os geradores da **2Cob**. Ou seja, devemos encontrar na categoria **Vet** os mapas lineares obtidos através do funtor da TQCT 2D quando ele atua sobre os geradores **2Cob**, e desta maneira obter a estrutura mínima para descrever uma TQCT 2D. O funtor da TQCT 2D terá a seguinte ação sobre os objetos e os morfismos da **2Cob**.

(Objetos) Utilizando a notação **1** para o círculo S^1 e **n** para a união disjunta de n círculos, obtemos os objetos da categoria **Vet** associando a cada círculo S^1 um espaço vetorial: $\mathbf{1} \rightarrow A$ e a cada união disjunta de n círculos o produto tensorial de n espaços vetoriais

$$\mathbf{n} \rightarrow \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_n.$$

(Morfismos) Os mapas lineares associados aos geradores da **2Cob** através do funtor F da TQCT 2D, isto é, os morfismos dados na Definição 1.35, estão todos apresentados na Figura 2.18 a seguir.

O funtor G pode ser obtido comparando as relações que caracterizam uma álgebra de Frobenius com as propriedades do funtor F de uma TQCT 2D. De fato, devemos perceber que para toda imagem de um funtor F segundo uma TQCT 2D corresponde uma álgebra de Frobenius sobre a categoria **Vet**. Isto acontece pois, de acordo com o Teorema 2.41, caso o conjunto de mapas lineares descritos na Figura 2.18 obedeça a relação de Frobenius, então A será uma álgebra de Frobenius. E isto ocorre pois a *condição* de Frobenius vista na Figura 2.12 é justamente a *relação* de Frobenius dada pelos morfismos na Figura 1.29. Portanto, o funtor $G : \mathbf{2TQFT} \rightarrow \mathbf{AFc}$ pode ser construído explicitamente associando para cada imagem de um funtor F da TQCT 2D uma álgebra de Frobenius A . A comutatividade da álgebra A , em particular, segue do fato de o funtor F ser simétrico, o que está expresso na imagem de F sobre o morfismo *twist* da **2Cob**, como pode ser visto no final da lista da Figura 2.18.

2Cob	F	Vet$_{\mathbb{k}}$
$\mapsto$	$\mu : A \otimes A \rightarrow A$
$\mapsto$	$\eta : \mathbb{k} \rightarrow A$
$\mapsto$	$\delta : A \rightarrow A \otimes A$
$\mapsto$	$\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{k}$
$\mapsto$	$id_A : A \rightarrow A$
$\mapsto$	$\sigma : A \otimes A' \rightarrow A' \otimes A$

Figura 2.18 Mapas lineares obtidos por uma TQCT 2D sobre a categoria **2Cob**.

(**AFc** $\Rightarrow$ **2TQFT**). Agora, no sentido inverso, para encontrar o funtor

$$H : \mathbf{AFc} \rightarrow \mathbf{2TQFT},$$

precisaremos determinar como, dada uma álgebra de Frobenius A comutativa, é possível encontrarmos uma única TQCT 2D, isto é, um objeto na categoria **2TQFT**. Observando, primeiro, os objetos e morfismos da **2Cob** podemos estabelecer a seguinte relação com a estrutura de A .

(Objetos) Seja A uma álgebra de Frobenius, isto é, existem os mapas $(\mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ tais que A obedece as relações encontradas para definirmos uma álgebra de Frobenius. Então, empregando a mesma notação utilizada anteriormente para determinar os objetos da **2Cob**, vamos estabelecer a correspondência $\mathbf{1} \rightarrow A$ e, do mesmo modo, para o produto tensorial

$$\mathbf{n} \rightarrow \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_n.$$

(Morfismos) Já para determinarmos como o funtor da TQCT 2D atuará sobre os mor-

fismos da **2Cob** bastará utilizarmos a própria estrutura empregada para definirmos uma álgebra de Frobenius. Por exemplo, seja μ a multiplicação de A , neste caso iremos estabelecer a seguinte relação com o morfismo da **2Cob**

$$\text{pant} \mapsto \mu : A \otimes A \rightarrow A.$$

Com isso, já podemos indicar como o funtor F da **2TQCT** será obtido, pois já sabemos como encontrar a relação entre os objetos e morfismos da categoria **2Cob** com os objetos e morfismos da categoria **Vet**.

Por fim, a unicidade será obtida observando os morfismos da **AFc**, isto é, os homomorfismos de álgebra. Seja h um morfismo da **AFc**, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{h} & B \otimes B \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

comuta. Mas, como para cada álgebra A estará associada, por meio do funtor F , um círculo S^1 e para cada multiplicação μ , F irá associar o morfismo que chamamos de *pant*, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^1 \amalg S^1 & \xrightarrow{F^{-1}(h)} & S^1 \amalg S^1 \\ \text{pant-}A \downarrow & & \downarrow \text{pant-}B \\ S^1 & \xrightarrow{F^{-1}(h)} & S^1 \end{array}$$

também comutará. A partir deste último diagrama vemos que o funtor $F^{-1}(h)$ é uma transformação natural, portanto um morfismo de **2TQCT**, e, assim determinamos o funtor $H : \mathbf{AFc} \rightarrow \mathbf{2TQFT}$, pois encontramos uma relação entre os objetos e morfismos da **AFc** (álgebras e homomorfismos de álgebras) com os objetos e morfismos da **2TQFT** (funtores entre **2Cob** e **Vet**, e transformações naturais). A associatividade e demais propriedades do funtor F seguem de maneira análoga ■

2.2 Triangulação da TQCT 2D

A fim de representar modelos obtidos através de variedades com triangulação, as quais também chamaremos de variedades reticuladas, é necessário acrescentar mais estrutura para

a TQCT. A construção de uma TQCT 2D por meio de triangulações é apresentada em [33], chamada neste caso de uma TQCT *na rede*. A teoria mostra em quais condições a função de partição não dependerá de uma particular escolha de triangulação sobre a variedade, a saber, caso a triangulação obedeça movimentos locais e os operadores associados com a triangulação, por sua vez, também tenham certas propriedades que decorrem destes movimentos locais. Como estamos interessados em variedades com bordo, veremos como generalizar a teoria na rede para este caso.

2.2.1 TQCT 2D na rede

Como vimos na Definição 2.54, a TQCT pode ser definida como um funtor entre a categoria de cobordismos e a categoria de espaços vetoriais. Considerando o caso particular da **2Cob**, os objetos são uniões disjuntas de S^1 (os bordos) e os morfismos são as superfícies (os cobordismos), enquanto para a categoria **Vet** os objetos são os espaços vetoriais e os morfismos são os operadores lineares entre espaços vetoriais. Desta maneira, para cada bordo de um cobordismo o funtor associa um espaço vetorial, e para cada cobordismo uma transformação linear.

Já com a triangulação da estrutura da **2Cob**, o cobordismo é recoberto por triângulos, enquanto os bordos são particionados por algumas das arestas (lados) dos triângulos internos, o que pode ser visualizado como está representado na Figura 2.19. Coloca-se, portanto, uma restrição entre a triangulação dos morfismos e dos objetos, isto é, dada uma triangulação de um morfismo ficam então determinadas as triangulações para os bordos deste morfismo. Precisamos agora redefinir um funtor desta nova estrutura para a categoria **Vet**.

Figura 2.19 À esquerda temos um cobordismo entre Σ_0 e Σ_1 . À direita vemos a triangulação no cobordismo dada por $\tilde{M} = (M, T)$ que determina a triangulação dos bordos dadas por $\tilde{\Sigma}_0 = (\Sigma_0, t_0)$ e $\tilde{\Sigma}_1 = (\Sigma_1, t_1)$.

Considere, então, um funtor Z originando uma TQCT 2D. Deste ponto em diante utilizaremos a notação Z para um funtor da TQCT 2D dada sua interpretação como uma função de partição. A partir desta construção podemos gerar uma teoria reticulada bastando

para isso adicionar triangulações aos morfismos da **2Cob**. Especificamente, para cada triangulação distinta que adicionarmos sobre um morfismo $M \in \mathbf{2Cob}$ iremos obter um novo morfismo dentro da teoria reticulada, ou seja, para os objetos Σ_0, Σ_1 e o morfismo M da **2Cob** podemos escrever

$$M : \Sigma_0 \rightrightarrows \Sigma_1 \xrightarrow{\text{TQCT}} Z(M) : Z(\Sigma_0) \rightarrow Z(\Sigma_1),$$

e com isso pode-se obter uma teoria na rede a partir da triangulação T em M . Assim procuramos um novo funtor Z^T tal que

$$(M, T) : (\Sigma_0, t_0) \rightrightarrows (\Sigma_1, t_1) \xrightarrow{\text{TQCT}^?} Z^T(M, T) : Z^T(\Sigma_0, t_0) \rightarrow Z^T(\Sigma_1, t_1),$$

onde t_i é a triangulação de Σ_i e T é a triangulação de M .

Como já comentamos anteriormente, a TQCT 2D na rede apresentada em [33] discute a função de partição apenas sobre uma superfície fechada. No entanto, gostaríamos de saber, primeiro, como podemos generalizar a teoria para o caso com bordo não trivial, e, segundo, qual será a relação desta teoria com uma TQCT *sem* triangulação. Antes de abordarmos o problema assim apresentado, precisaremos definir a estrutura da teoria na rede. Inicialmente, vamos adotar a seguinte notação para o produto tensorial [14].

Definição 2.60 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{k}$ e V^* seu espaço dual. Chamamos de tensor um elemento pertencente a um produto tensorial da forma seguinte*

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_m \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_n = V_{a_1} \otimes V_{a_2} \otimes \cdots \otimes V_{a_m} \otimes V_{b_1} \otimes V_{b_2} \otimes \cdots \otimes V_{b_n}$$

Um tensor será representado por $T_{a_1 a_2 \dots a_m}^{b_1 b_2 \dots b_n}$ com $m + n$ índices no total, ou seja, os índices superiores serão contravariantes e os inferiores serão covariantes.

Antes de mostrar a função de partição $Z^T(M)$, iremos apresentar os elementos utilizados para calcular $Z^T(M)$. Desta maneira, sejam M uma superfície fechada, orientada e de gênero g , e T uma triangulação para M . Podemos construir uma TQCT na rede atribuindo-se um índice de “cor”, pertencente a uma família I , para cada aresta de todo triângulo orientado em T . Para cada triângulo associamos um operador C_{ijk} invariante pela ação de $\mathbb{Z}_3$. A sequência dos índices ijk em C_{ijk} deve obedecer a orientação do triângulo, ver Figura 2.20. A colagem dos triângulos é realizada contraindo os índices através de um segundo operador $g^{ij} = g^{ji}$, ver também Figura 2.20, que admite inversa g_{ij} tal que $g^{ik} g_{kj} = \delta_i^j$. Cada teoria depende apenas da classe de homeomorfismos de superfícies.

Outra maneira utilizada para manipular as relações de índices na rede, ao invés de usar os triângulos, é o *diagrama dual*. Neste caso representamos cada aresta do triângulo através de um segmento de reta e cada face representamos por um vértice, ver Figura 2.21. Com

Figura 2.20 Colagem de triângulos na TQCT na rede.

esta notação os operadores dados por g^{ij} , C_{ijk} e de g_{ij} são interpretados respectivamente como propagador, vértice de 3-pontos e vértice de 2-pontos.

Por fim, vamos considerar espaços vetoriais associados com as arestas de cada triângulo, acrescentando na representação dual a seguinte convenção. Para cada vértice vamos escrever o nome do operador, e, ao invés de segmentos de retas, vamos considerar setas saindo ou entrando na direção do operador. Para cada seta saindo de um operador vamos associar o espaço vetorial V . Já para cada seta entrando em um operador vamos associar o espaço vetorial dual V^* .

Considerando, em particular, o operador de colagem g^{ij} e seu inverso, com a notação dual também é possível representá-los de modo a determinar como estes atuam sobre os espaços vetoriais, ver Figura 2.22.

A seguir, vamos construir um novo operador que será particularmente útil na obtenção da invariância por triangulação que discutiremos a seguir. Para tal, vamos realizar a contração de índices entre um operador C_{ijk} associado com um triângulo e um operador de colagem g^{kl} , ver Figura 2.23. Este operador será interpretado, como ficará claro adiante, como a multiplicação de uma álgebra.

Com esta estrutura podemos definir a TQCT na rede. Para compreendermos melhor como isso será feito, considere, como exemplo, uma possível triangulação da esfera S^2 realizada com as faces de um tetraedro, ver Figura 2.24. Neste caso iremos associar para cada face um operador C_{ijk} (como também destacamos na Figura 2.24). Os índices deste operador estarão contraídos, através de um operador de colagem g^{kl} , com os índices dos operadores associados com as outras faces que compartilham suas arestas, como já descrevemos. O importante a ser observado neste caso é que a variedade S^2 é fechada, assim, todos os índices dos tensores estarão contraídos, e com isso iremos definir o seguinte produto como sendo a

(a) Notação dual do triângulo.

(b) Notação dual do operador g^{ij} e inverso g_{ij} .

Figura 2.21 De acordo com a notação dual de gráficos cada seta representa uma aresta do triângulo e o sentido da seta (saindo/entrando no operador) indicará o espaço vetorial associado (espaço V/V^*).

Figura 2.22 Ação dos operadores de colagem no espaço vetorial.

Figura 2.23 Operador μ_{ij}^l obtido para a TQCT na rede.

teoria $Z^T(S^2, T)$ associada com esta triangulação

$$Z^T(S^2, T) = g^{ii'} g^{jj'} g^{kk'} g^{ll'} g^{mm'} g^{nn'} C_{ijk} C_{k'lm} C_{m'n'i'} C_{j'n'l'}.$$

De modo geral, podemos escrever para uma variedade M com triangulação T

$$Z^T(M, T) = \prod_{f \in F} \prod_{l \in L} g^{ij}(l) C_{ijk}(f), \quad (2.8)$$

onde F indica o conjunto de faces e L o conjunto de arestas.

Figura 2.24 Possível triangulação para a esfera S^2 .

Por fim, como a teoria só deve levar em consideração a classe de homeomorfismos de superfícies, então a estrutura da teoria não deve depender de uma triangulação específica. Com isso, dadas duas triangulações diferentes de uma mesma superfície, teremos a mesma teoria na rede associada. Vejamos quais deverão ser as características dos operadores envolvidos na teoria para isso acontecer. O próximo teorema, obtido por Pachner [41], será fundamental para nosso propósito.

Teorema 2.61 (Pachner em 2D) *Sejam M e N duas variedades bidimensionais. Considere duas triangulações T_M e T_N para M e N respectivamente. Caso M e N sejam variedades homeomorfas então a triangulação T_M pode ser levada em T_N com uma sequência construída apenas com os dois passos de Pachner apresentados na Figura 2.25. De modo inverso, se for possível transformar T_M em T_N apenas com os passos de Pachner anteriores então as variedades M e N serão homeomorfas. Chamamos as triangulações T_M e T_N , neste caso, de equivalentes.*

Como vimos, dada uma triangulação T para uma variedade M , a teoria na rede associa espaços vetoriais e operadores lineares, respectivamente, com as arestas e com as faces dos triângulos de T . Por outro lado, de acordo com o teorema de Pachner, sabemos que duas triangulações distintas sobre a mesma variedade podem ser levadas uma na outra apenas com os dois passos citados na definição anterior. Considere então qualquer um dos passos

Figura 2.25 Passos de Pachner em 2D.

de Pachner. Para cada lado deste passo podemos encontrar os operadores associados pela teoria. Caso seja possível, para cada um dos passos de Pachner, encontrar uma maneira de correlacionar, agora dentro da categoria **Vet**, tais operadores, dizemos que a teoria na rede não dependerá de uma triangulação. Vamos formalizar esta propriedade da teoria através do seguinte Ansatz e discutir mais detalhes em seguida.

Ansatz 2.62 *A TQCT na rede é invariante pelos passos de Pachner em 2D.*

A fim de determinar as relações entre os operadores lineares, em decorrência dos passos de Pachner sobre a triangulação, iremos primeiro considerar como deverá ser a relação do operador de multiplicação, obtido com a notação dual, com relação a cada um dos passos de Pachner. O primeiro será o passo (2-2), para o qual apresentamos seu arranjo com a notação dual, ver Figura 2.26.

Já para determinarmos a ação do passo (1-3) primeiro vamos reescrever o segundo passo de Pachner como na Figura 2.27. O passo, visto desta maneira, é conhecido como *bubble*, e podemos obter facilmente seu equivalente em termos do diagrama dual, ver Figura 2.28. A partir deste passo também encontramos uma nova relação entre o inverso do operador de colagem e o operador de multiplicação. Inicialmente a definição da teoria considera apenas o operador de colagem g^{ij} , contudo, a necessidade da invariância pelos passos de Pachner mostra as relações que estes operadores devem satisfazer. Desta maneira, podemos encontrar as expressões exatas para g^{ij} e seu inverso g_{ij} .

Encontramos, desta maneira, a estrutura necessária na categoria **Vet** a fim de que a teoria na rede não dependa de uma triangulação específica, mas apenas da classe de homeomorfismos de variedades. Antes de encerrar esta seção gostaríamos de comentar um aspecto algébrico da teoria na rede.

(a) Propriedade de μ_{ij}^k pelo passo (2-2).

(b) O mesmo com outro arranjo.

Figura 2.26 Relação obtida pelo passo de Pachner (2-2). **Figura 2.27** Equivalência entre Pachner (3-1) e o passo chamado de *bubble*.

Como já discutimos no início deste capítulo, existe uma relação um a um entre as TQCT's 2D e as álgebras de Frobenius. Para as teorias na rede também encontramos uma relação com uma álgebra, que iremos chamar aqui, por simplicidade, de *álgebras da teoria na rede*, definida da seguinte maneira.

Definição 2.63 *Seja A uma álgebra finita associativa cuja base é dada pelo conjunto $\{b_i\}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. As constantes de estrutura dadas por $b_i b_j = \mu_{ij}^k b_k$ determinam completamente a álgebra. Chamamos A de álgebra da teoria na rede se as constantes de*

Figura 2.28 Relações obtidas pelo passo de Pachner (3-1).

estrutura se relacionam com a métrica g_{ij} da seguinte maneira

$$g_{ij} = \mu_{ia}^b \mu_{jb}^a,$$

e se, além disso, g_{ij} for a inversa de g^{ij} , ou seja, $g_{ij}g^{ij} = \delta_j^i$.

Como nosso foco está centrado na construção da teoria em 3D e para não nos estendermos mais sobre o caso 2D, iremos apenas enunciar, através do próximo teorema, a relação destas álgebras (associadas com as teorias na rede) com as álgebras semissimples. Discutimos alguns aspectos sobre a demonstração deste teorema no Apêndice B. Também deixamos para este apêndice a apresentação da álgebra semissimples (Definição B.19), pois será preciso apresentar uma série de proposições anteriores.

Teorema 2.64 *O conjunto das álgebras da teoria na rede possui uma relação biunívoca com o conjunto das álgebras semissimples.*

A seguir, iremos considerar a generalização da teoria na rede, isto é, vamos discutir a teoria para variedades com bordo.

2.2.2 Triangulação nos bordos

Agora vamos considerar a restrição imposta pela triangulação nos bordos, começando com alguns aspectos categoriais. Como vimos, a triangulação dos morfismos da **2Cob** impõe uma triangulação sobre os bordos, isto é, as arestas de alguns dos triângulos formarão a triangulação destes bordos. Desta maneira, fazendo algumas observações sobre a composição de morfismos, será possível obtermos uma nova categoria a partir da triangulação dos morfismos da **2Cob**, como apresentamos a seguir.

Definição 2.65 *Chamamos de categoria $\mathbf{2Cob}^T$ a triangulação dos morfismos da **2Cob**.*

A fim de verificar que a $\mathbf{2Cob}^T$ é de fato uma categoria basta perceber que a triangulação sobre os morfismos da $\mathbf{2Cob}$, que são 2-variedades (superfícies), impõe a triangulação dos objetos, que são 1-variedades (uniões disjuntas de S^1). Ou seja, a triangulação dos objetos será realizada pelas arestas de alguns dos triângulos internos, ver Figura 2.19. Apesar disto, é sempre possível encontrarmos uma particular triangulação do bordo desde que escolhamos uma triangulação adequada para o morfismo que contém este bordo. Por isso, os objetos da $\mathbf{2Cob}^T$ são os mesmo objetos da $\mathbf{2Cob}$ mas acrescentados de uma triangulação, observando apenas que para cada *triangulação distinta* adicionada sobre um mesmo objeto da $\mathbf{2Cob}$ iremos obter um *objeto distinto* da $\mathbf{2Cob}^T$.

Já para determinarmos a classe de equivalência dos morfismos basta fixar dois objetos da $\mathbf{2Cob}^T$ e considerar o gênero dos morfismos, ou seja, se dois morfismos tiverem o mesmo gênero e levarem (Σ_0, t_0) em (Σ_1, t_1) , onde t_i são triangulações fixas sobre uma união disjunta de S^1 , então estes morfismos serão equivalentes.

Com isso, para dois morfismos com suas triangulações tais que

$$\begin{aligned} (M, T_M) : (\Sigma_0, t_0) &\Rightarrow (\Sigma_1, t_1), \\ (N, T_N) : (\Sigma_1, t_1) &\Rightarrow (\Sigma_2, t_2), \end{aligned}$$

a operação de composição de morfismos fica determinada

$$MN : (\Sigma_0, t_0) \Rightarrow (\Sigma_1, t_1) \Rightarrow (\Sigma_2, t_2) \longrightarrow (\Sigma_0, t_0) \Rightarrow (\Sigma_2, t_2).$$

Posto isto, gostaríamos de obter um funtor Z^T para a categoria $\mathbf{2Cob}^T$ que seja a extensão do escalar Z^T (encontrado na Equação (2.8)) para triangulações sem bordo. Utilizaremos para tal a mesma estrutura apresentada anteriormente para a teoria na rede a fim de obter, em analogia com a própria definição do escalar Z^T encontrado na Equação (2.8), um funtor Z^T que estabeleça uma relação com a categoria $\mathbf{Vet}$ mas considerando o bordo não trivial. Assim como fizemos lá será bastante útil observarmos um exemplo.

Seja então uma triangulação T para o cilindro $S^1 \times I$ da $\mathbf{2Cob}$, lembrando que $I = [0, 1]$. Observando a Figura 2.29 a seguir, vemos que o cilindro representado na Figura 2.29-(a) pode ser escrito, como é usual, identificando-se o segmento a-b de um retângulo aberto, ver Figura 2.29-(b), por fim, apresentamos na Figura 2.30 uma possível triangulação T para o cilindro.

Novamente iremos considerar que para cada face desta triangulação T está associado um operador C_{ijk} , observando agora que o bordo é não trivial e por isso alguns operadores não terão todos os seus índices contraídos. Para o caso em questão podemos escrever a

Figura 2.29 Duas representações possíveis do cilindro.

Figura 2.30 Triangulação da identidade da categoria **2Cob**.

seguinte expressão para $Z^T(S^1 \times I, T)$

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}^T(S^1 \times I, T) = & g^{a_1 b_1} g^{a_2 c_3} g^{a_3 e_3} g^{b_2 c_2} g^{c_1 g_1} g^{d_2 e_2} g^{d_3 h_3} g^{d_1 j_1} g^{e_1 f_1} g^{f_2 g_3} g^{f_3 i_2} \\
 & \times g^{g_2 h_2} g^{h_1 n_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3 o_3} g^{j_3 k_3} g^{k_1 l_3} g^{k_1 l_1} g^{l_3 m_3} g^{m_2 n_2} g^{n_3 o_1} \\
 & \times C_{a_1 a_2 a_3} C_{b_1 b_2} \textcircled{b_3} C_{c_1 c_2 c_3} C_{d_1 d_2 d_3} C_{e_1 e_2 e_3} C_{f_1 f_2 f_3} C_{g_1 g_2 g_3} C_{h_1 h_2 h_3} \\
 & \times C_{\textcircled{l_1} i_2 i_3} C_{j_1 j_2 j_3} C_{k_1} \textcircled{k_2} k_3 C_{l_1 l_2 l_3} C_{\textcircled{m_1} m_2 m_3} C_{n_1 n_2 n_3} C_{o_1} \textcircled{o_2} o_3.
 \end{aligned}$$

Os índices em destaque não estão contraídos com os índices de nenhum outro operador,

e por isso não sabemos como fazer a composição deste morfismo através de Z^T . Para tal, vamos convencionar que os índices que surgem no bordo para dentro do morfismo da **2Cob** não irão sofrer qualquer alteração. Já os índices que surgem no bordo para fora serão contraídos com os operadores g^{ij} de maneira adequada a realizarmos sua contração com os operadores associados com o bordo para dentro de outro morfismo. Com esta convenção podemos agora escrever a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} Z^T(S^1 \times I, T) &= g^{a_1 b_1} g^{a_2 c_3} g^{a_3 e_3} g^{b_2 c_2} g^{c_1 g_1} g^{d_2 e_2} g^{d_3 h_3} g^{d_1 j_1} g^{e_1 f_1} g^{f_2 g_3} g^{f_3 i_2} \\ &\times g^{g_2 h_2} g^{h_1 n_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3 o_3} g^{j_3 k_3} g^{k_1 l_3} g^{k_1 l_1} g^{l_3 m_3} g^{m_2 n_2} g^{n_3 o_1} \\ &\times C_{a_1 a_2 a_3} C_{b_1 b_2 \textcircled{b_3}} C_{c_1 c_2 c_3} C_{d_1 d_2 d_3} C_{e_1 e_2 e_3} C_{f_1 f_2 f_3} C_{g_1 g_2 g_3} C_{h_1 h_2 h_3} \\ &\times C_{\textcircled{l_1} i_2 i_3} C_{j_1 j_2 j_3} C_{k_1 \textcircled{k_2} k_3} C_{l_1 l_2 l_3} C_{\textcircled{m_1} m_2 m_3} C_{n_1 n_2 n_3} C_{o_1 \textcircled{o_2} o_3} \\ &\times g^{i_1 p_1} g^{k_2 q_2} g^{m_1 r_1} g^{o_2 s_2}. \end{aligned}$$

Observe que a definição de $Z^T(S^1 \times I, T)$ fornece, de fato, um tensor no qual o número de índices covariantes será igual ao número de arestas no bordo para dentro e o número de índices contravariantes corresponde ao número de arestas no bordo para fora

$$Z^T(S^1 \times I, T) = T_{b_3}^{i_1 k_2 m_1 o_2},$$

e de maneira geral iremos escrever o seguinte

$$\begin{aligned} Z^T(M, T) &= g^{a_1 b_1} g^{a_2 c_3} g^{a_3 e_3} g^{b_2 c_2} g^{c_1 g_1} g^{d_2 e_2} g^{d_3 h_3} g^{d_1 j_1} \dots \\ &\times C_{a_1 a_2 a_3} C_{b_1 b_2 b_3} C_{c_1 c_2 c_3} C_{d_1 d_2 d_3} C_{e_1 e_2 e_3} C_{f_1 f_2 f_3} C_{g_1 g_2 g_3} \dots \\ &\times g^{i_1 p_1} g^{k_2 q_2} g^{m_1 r_1} g^{o_2 s_2} \dots \end{aligned}$$

Considerando a estrutura obtida na seção anterior para definirmos o funtor dado na Equação (2.8), sabe-se que a modificação da triangulação interna do morfismo não altera o funtor Z^T obtido, isto pois os operadores se relacionam de acordo com as expressões dadas nas figuras 2.26 e 2.28. No entanto, os bordos devem permanecer fixos. Portanto, quando adotamos esta convenção, mesmo para o caso da triangulação do cilindro $\Sigma \times I$, por exemplo, o qual é a identidade da **2Cob**, podemos ver que a classe de morfismos também depende da triangulação sobre os bordos. Com isso, os objetos da **2Cob^T** são diferentes se suas triangulações forem diferentes, ou seja

$$(\Sigma \times I, T) : (\Sigma_m, t_m) \Rightarrow (\Sigma_n, t_n),$$

onde os índices m, n indicam o número de arestas na triangulação dos respectivos bordos. Desta maneira, o cilindro não fornece mais a identidade na categoria **2Cob^T**, e isto nos

impossibilita de obter uma TQCT, ver Axioma 1.23.

A fim de encontrarmos um morfismo identidade na $\mathbf{2Cob}^T$ precisaremos considerar algumas propriedades dos operadores lineares associados com o funtor $Z^T(\Sigma \times I, T)$. Para tal, utilizaremos o fato de que para uma determinada triangulação T o morfismo $(\Sigma \times I, T)$ será um projetor, cuja definição é dada a seguir.

Definição 2.66 *Chamamos um endomorfismo π no espaço vetorial V de projetor se $\pi^2 = \pi$.*

Considere então um endomorfismo $\pi : V \rightarrow V$. Uma propriedade imediata caso π seja um projetor é o fato de que ele será a identidade sobre sua imagem, o que podemos verificar da seguinte maneira

$$\pi(\pi(V)) = \pi^2(V) = \pi(V),$$

logo se $v \in \pi(V)$ temos $\pi(v) = v$. Tal aspecto será bastante importante para o que segue, por isso faremos algumas considerações sobre esta propriedade no §3 do Apêndice B.

Considerando, então, a construção da teoria na rede, sabemos que a cada aresta de um triângulo será associado um espaço vetorial V . Desta maneira, a cada bordo com m arestas, iremos ter um produto vetorial dado por

$$U = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_m = V^{\otimes m}.$$

Portanto, ao construirmos um funtor $Z^T : \mathbf{2Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$, o morfismo $(\Sigma \times I, T_{mn})$ será levado na seguinte transformação linear

$$Z^T(\Sigma \times I, T_{mn}) : \underbrace{V^{\otimes m}}_{Z^T(\Sigma_m, t_m)} \rightarrow \underbrace{V^{\otimes n}}_{Z^T(\Sigma_n, t_n)}$$

que também podemos representar com a próxima figura

$$Z^T \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of a cylinder with two boundary components. The left boundary is a red oval labeled } m \text{ with 6 dots. The right boundary is a purple oval labeled } n \text{ with 6 dots. The interior is light blue.} \end{array} \right) : V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n},$$

e desta maneira $Z^T(\Sigma \times I, T_{mn})$ não será a identidade como já comentamos. Vamos observar então a seguinte proposição.

Proposição 2.67 *Sejam (Σ, t_n) um objeto de $\mathbf{2Cob}^T$ e $(\Sigma \times I, T_{nn})$ um morfismo da $\mathbf{2Cob}^T$ com uma triangulação sobre o cilindro. O seguinte endomorfismo, dado através do funtor*

$$Z^T : \mathbf{2Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$$

$$Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}) \in \text{End}(Z^T(\Sigma, t_n))$$

é um projetor.

Demonstração. A composição do morfismo $(\Sigma \times I, T_{nn}) : (\Sigma, t_n) \Rightarrow (\Sigma, t_n)$ com ele mesmo fornece

$$\begin{aligned} (\Sigma \times I, T_{nn})(\Sigma \times I, T_{nn}) : [(\Sigma, t_n) \Rightarrow (\Sigma, t_n)] &\Rightarrow [(\Sigma, t_n) \Rightarrow (\Sigma, t_n)] \\ &= (\Sigma, t_n) \Rightarrow (\Sigma, t_n) \\ &= (\Sigma \times I, T_{nn}), \end{aligned}$$

já que o bordo para fora do primeiro morfismo é igual ao bordo para dentro do segundo morfismo. Mas a teoria na rede também só depende do que ocorre nos bordos, logo o seguinte diagrama entre os espaços vetoriais $Z^T(\Sigma_n, t_n) = V^{\otimes n}$

$$\begin{array}{ccccc} V^{\otimes n} & \xrightarrow{Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})} & V^{\otimes n} & \xrightarrow{Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})} & V^{\otimes n} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}) & & \end{array}$$

comuta, visto que o funtor Z^T respeita a composição de morfismos, isto é

$$Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}) \circ Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}) = Z^T[(\Sigma \times I, T_{nn})(\Sigma \times I, T_{nn})] = Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}) \quad \blacksquare$$

Teorema 2.68 $Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})$ é a identidade do espaço vetorial $\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})) = Z^T(\Sigma, t_n) = V^{\otimes n}$.

Demonstração. Sabemos que o operador linear $Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})$ é um projetor, logo o teorema é imediato, com isso temos

$$Z^T \left(\left(\text{Diagram} \right) \right) = 1_{V^{\otimes n}} \quad \blacksquare$$

Teorema 2.69 A dimensão da $\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}))$ é a mesma para todo n e será dada por

$$\dim(\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}))).$$

Demonstração. Como $Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})$ é um endomorfismo então o espaço vetorial de sua imagem será $\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})) = Z^T(\Sigma, t_n)$. Assim, para determinarmos a $\dim(Z^T(\Sigma, t_n))$

basta calcularmos o traço da representação matricial do operador $Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})$ pois ele é a identidade de $Z^T(\Sigma, t_n)$. Considere, para isso, o morfismo obtido quando identificamos os bordos do cilindro, isto é, considere $(\Sigma \times S^1, T_{nn})$ e também o respectivo operador encontrado através do funtor $Z^T(\Sigma \times S^1, T_{nn})$, que será o traço da representação de $Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})$ pois os espaços vetoriais associados com o bordo para fora e com o bordo para dentro estão identificados. Com isso, podemos escrever

$$Z^T(\Sigma \times S^1, T_{nn}) = \text{tr}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})) = \text{tr}(1_{Z^T(\Sigma, t_n)}),$$

o que podemos representar da seguinte maneira

$$Z^T \left(\text{Diagram} \right) = \text{tr}(1_{Z^T(\Sigma, t_n)}),$$

mas como este cobordismo não terá bordos, logo o valor obtido será o mesmo para todo n .

Podemos então escrever uma representação diagonal de $Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})$ com autovalores dados apenas por 1 ou 0, pois ele é um projetor (ver Proposição B.34). Neste caso, o $\text{tr}(1_{Z^T(\Sigma, t_n)})$ irá somar apenas quando o elemento da diagonal for igual a 1 e esta soma fornecerá a dimensão de $Z^T(\Sigma, t_n)$

$$\text{tr}(1_{Z^T(\Sigma, t_n)}) = \dim(\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn})))$$

e, portanto

$$Z^T(\Sigma \times S^1, T_{nn}) = \dim(\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}))).$$

Além disso, por construção, o espaço vetorial $Z^T(\Sigma, t_n)$ depende do número de arestas n , pois ele associa um espaço vetorial V para cada aresta sobre o bordo, ou seja, $V^{\otimes n}$. Assim, considere que o objeto (Σ, t_r) tenha o menor número possível de arestas, isto é, r é o menor número possível. Neste caso, a dimensão do espaço vetorial associado com este objeto será

$$\dim(\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{rr}))) = \dim(Z^T(\Sigma, t_r)) = \dim(V^{\otimes r}) = r \times d,$$

onde d é a dimensão do espaço vetorial V . Como a dimensão da $\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{nn}))$ será a mesma para todo n , então ela será no máximo igual a $r \times d$, e para o caso bidimensional teremos $r = 1$ já que a triangulação de S^1 pode ser realizada com uma única aresta ■

Definição 2.70 Considere o funtor $Z^T : \mathbf{2Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$

$$Z^T(M, T_{mn}) : Z^T(\Sigma_d, t_m) \rightarrow Z^T(\Sigma_f, t_n), \quad \forall(M, T_{mn}) : (\Sigma_d, t_m) \Rightarrow (\Sigma_f, t_n),$$

Σ_d e Σ_f são respectivamente os bordos para dentro e para fora de M ; e os índices m e n são os números de arestas de Σ_d e Σ_f . Definimos um funtor P da forma $P : \mathbf{2Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$ que agirá sobre os objetos da seguinte maneira

$$P(\Sigma, t_m) = \text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})) = Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})[Z^T(\Sigma, t_m)],$$

e sobre os morfismos

$$P(M, T_{mn}) = Z^T(\Sigma_f \times I, T_{nn}) \circ Z^T(M, T_{mn}).$$

Observe que a redefinição dos morfismos não altera sua classe de equivalência, que só depende do número de arestas na triangulação dos bordos, ou seja, para a composição

$$\begin{array}{ccccc} V^{\otimes m} & \xrightarrow{Z^T(M, T_{mn})} & V^{\otimes n} & \xrightarrow{Z^T(\Sigma_f \times I, T_{nn})} & V^{\otimes n} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Z^T(\Sigma_f \times I, T_{nn}) \circ Z^T(M, T_{mn}) & & \end{array}$$

temos

$$Z^T(\Sigma_f \times I, T_{nn}) \circ Z^T(M, T_{mn}) = Z^T((M, T_{mn})(\Sigma_f \times I, T_{nn})) = Z^T(M, T_{mn}).$$

Além disso, para qualquer m , o funtor P atua somente na imagem de $Z^T(\Sigma \times I, t_m)$

$$\begin{aligned} P(M, T_{mn})[P(\Sigma_d, t_m)] &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{nn}) \circ Z^T(M, T_{mn})[Z^T(\Sigma_d \times I, T_{mm})[Z^T(\Sigma_d, t_m)]] \\ &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{nn}) \circ Z^T(M, T_{mn})[Z^T(\Sigma_d, t_m)] \\ &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{nn})[Z^T(\Sigma_f, t_n)] = P(\Sigma_f, t_n). \end{aligned}$$

Em particular, para uma triangulação arbitrária do cilindro teremos o seguinte

$$\begin{aligned} P(\Sigma \times I, T_{mm})[P(\Sigma, t_m)] &= Z^T(\Sigma \times I, T_{mm}) \circ Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})[Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})[Z^T(\Sigma, t_m)]] \\ &= Z^T(\Sigma \times I, T_{mm}) \circ Z^T(\Sigma \times I, T_{mn})[Z^T(\Sigma, t_m)] \\ &= Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})[Z^T(\Sigma, t_m)] = P(\Sigma, t_m), \end{aligned}$$

onde a penúltima passagem segue pois $Z^T(\Sigma, t_m)$ é a imagem de $Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})$, e neste caso, de acordo com o Teorema 2.68, o operador $Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})$ é a identidade de $Z^T(\Sigma, t_m)$. Contudo $Z^T(\Sigma \times I, T_{mm})$ é a identidade apenas do espaço vetorial $Z^T(\Sigma, t_m)$, assim para

obtermos uma TQCT vamos fazer uso da próxima definição.

Definição 2.71 Considere o funtor $P : \mathbf{2Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$ descrito na Definição 2.70. Definimos um funtor P_α da forma $\mathbf{2Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$ que agirá sobre os objetos da seguinte maneira

$$P_\alpha(\Sigma, t_m) = Z^T(\Sigma \times I, T_{m\alpha})[P(\Sigma, t_m)],$$

e sobre os morfismos

$$P_\alpha(M, T_{mn}) = Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha}) \circ P(M, T_{mn}) \circ Z^T(\Sigma_d \times I, T_{\alpha m}).$$

Teorema 2.72 O funtor P_α descrito na Definição 2.71 satisfaz os axiomas de uma TQCT.

Demonstração. Primeiro observe que a composição dos morfismos será dada da seguinte maneira

$$\begin{array}{ccccccc} V^{\otimes \alpha} & \xrightarrow{Z^T(\Sigma_d \times I, T_{\alpha m})} & V^{\otimes m} & \xrightarrow{P(M, T_{mn})} & V^{\otimes n} & \xrightarrow{Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha})} & V^{\otimes \alpha}. \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha}) \circ P(M, T_{mn}) \circ Z^T(\Sigma_d \times I, T_{\alpha m}) & \end{array}$$

Observe também a ação do funtor P_α

$$\begin{aligned} P_\alpha(M, T_{mn})[P_\alpha(\Sigma_d, t_m)] &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha}) \circ P(M, T_{mn}) \circ Z^T(\Sigma_d \times I, T_{\alpha m})[Z^T(\Sigma_d \times I, T_{m\alpha})[P(\Sigma_d, t_m)]] \\ &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha}) \circ P(M, T_{mn}) \circ Z^T(\Sigma_d \times I, T_{\alpha m}) \circ Z^T(\Sigma_d \times I, T_{m\alpha})[P(\Sigma_d, t_m)] \\ &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha}) \circ P(M, T_{mn}) \circ Z^T(\Sigma_d \times I, T_{mm})[Z^T(\Sigma_d, t_m)] \\ &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha}) \circ P(M, T_{mn})[P(\Sigma_d, t_m)] \\ &= Z^T(\Sigma_f \times I, T_{n\alpha})[P(\Sigma_f, t_n)] = P_\alpha(\Sigma_f, t_n) \end{aligned}$$

Os axiomas de uma TQCT são satisfeitos neste caso pois o funtor P atua somente sobre o espaço vetorial dado por $Z^T(\Sigma, t_m) = \text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{mm}))$, que terá a mesma dimensão para qualquer m , segundo o Teorema 2.69. Assim, o funtor P_α é apenas a restrição da ação de P ao espaço vetorial $Z^T(\Sigma, t_\alpha) = \text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{\alpha\alpha}))$ ■

Com estes resultados então podemos escrever o seguinte.

Teorema 2.73 Dada uma TQCT na rede P_α e um funtor $R(T)$ entre as categorias $\mathbf{2Cob}^T$ e $\mathbf{2Cob}$, o qual remove a estrutura de triangulação da categoria $\mathbf{2Cob}$, podemos encontrar

uma teoria Z tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 2\text{Cob}^T & \xrightarrow{P_1} & \text{Vet} \\
 \downarrow R(T) & \nearrow Z & \\
 2\text{Cob} & &
 \end{array}$$

comuta.

Demonstração. Como vimos, a construção do funtor P_α não exige nenhuma escolha para α , assim, podemos escolher $\alpha = 1$, em particular. Agora, observe que por meio desta definição projetamos todas as triangulações dos bordos sobre a menor triangulação possível de ser encontrada, isto é, a triangulação realizada com apenas uma aresta de um triângulo da superfície (2-variedade). Como a teoria na rede associa um único espaço vetorial para cada aresta da triangulação, então, cada bordo Σ terá um único espaço vetorial associado. Mas toda 2D TQCT é, de fato, uma associação de um único espaço vetorial com cada bordo conexo Σ . Logo, podemos escrever

$$Z(M) = P_1(M, T_{mn})$$

e assim o diagrama anterior comuta ■

Com isso, encerramos a discussão sobre o caso em bidimensional. O próximo capítulo será dedicado exclusivamente para o estudo da TQCT em três dimensões. Todavia, a discussão feita até o momento será fundamental, pois ela será utilizada como modelo para buscarmos diversos resultados semelhantes em 3D. Em particular, esta última relação entre a TQCT 2D e a teoria com estrutura de triangulação adicional será retomada quando estendermos a teoria 3D para variedades com bordo não trivial, de modo bastante análogo ao que foi realizado nesta parte final do capítulo.

Capítulo 3

Construção de uma TQCT 3D

Neste capítulo vamos discutir a TQCT 3D. Da mesma forma como em 2D a característica de Euler teve um papel fundamental para classificarmos a teoria e percebermos sua conexão com a álgebra de Frobenius, em 3D o invariante de Kuperberg será central para determinarmos a TQCT 3D. Além disso, enquanto no caso 2D a teoria possui uma relação biunívoca com as álgebras de Frobenius, como foi discutido ao longo do Capítulo 2, veremos que no caso 3D também faremos uso de uma álgebra, a saber, a álgebra de Hopf, assim, iniciaremos com sua definição. Em seguida iremos discutir a tecnologia necessária para apresentarmos o invariante de Kuperberg e a partir disso construir a TQCT 3D. Será preciso, desde o começo, considerarmos uma 3-variedade com triangulação, e a discussão realizada na última parte do Capítulo 2 sobre a teoria na rede servirá de modelo para finalizarmos a construção da TQCT 3D. As principais referências para este capítulo serão [14, 39, 40], enquanto para os resultados sobre a álgebra de Hopf utilizamos [37, 38].

3.1 Álgebra de Hopf

Na primeira parte desta seção utilizaremos a notação de diagramas para discutir a álgebra de Hopf, já que esta é uma das maneiras mais comuns para apresentá-la [37]. No entanto, logo a seguir iremos introduzir a notação empregada por Kuperberg [14], a qual iremos adotar no resto do capítulo, visto existir algumas vantagens em seu uso, como ficará mais claro adiante.

3.1.1 Diagramas clássicos

No exemplo 2.18 (2.19) vimos como o produto tensorial de uma álgebra (uma coálgebra) pode ser transformado em uma álgebra (uma coálgebra). Considere, em particular, um espaço vetorial H tal que existam ambas estruturas de álgebra (H, μ, η) e de coálgebra (H, δ, ε) . Em analogia com o Exemplo 2.18, o produto tensorial $H \otimes H$ também será uma

álgebra dada por $(H \otimes H, \mu_{H \otimes H}, \eta_{H \otimes H})$, onde utilizamos a estrutura da própria álgebra de H para obter a multiplicação e unidade

$$\mu_{H \otimes H} = (\mu \otimes \mu) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \quad \text{e} \quad \eta_{H \otimes H} = \eta \otimes \eta.$$

Da mesma maneira, podemos obter uma coálgebra a partir do produto tensorial $H \otimes H$ fornecendo $(H \otimes H, \delta_{H \otimes H}, \varepsilon_{H \otimes H})$, onde utilizamos desta vez a estrutura da coálgebra de H para obter a comultiplicação e counidade, ou seja,

$$\delta_{H \otimes H} = (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\delta \otimes \delta) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{H \otimes H} = \varepsilon \otimes \varepsilon.$$

Dizemos que estas duas estruturas serão *compatíveis* se o produto μ for um homomorfismo entre as coálgebras $(H \otimes H, \delta_{H \otimes H}, \varepsilon_{H \otimes H})$ e (H, δ, ε) ; e a unidade η for um homomorfismo entre a coálgebra $(H \otimes H, \delta_{H \otimes H}, \varepsilon_{H \otimes H})$ e o corpo $\mathbb{k}$. Caso isto aconteça, então o coproduto δ e a counidade ε serão, por sua vez, homomorfismos de álgebras, como o próximo teorema irá mostrar.

Teorema 3.1 *Sejam (H, μ, η) uma álgebra e (H, δ, ε) uma coálgebra. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) *Os mapas μ e η são homomorfismos de coálgebras.*
- (b) *Os mapas δ e ε são homomorfismos de álgebras.*

Demonstração. De acordo com a Definição 2.17 um homomorfismo $g : C \rightarrow D$, entre duas coálgebras C e D quaisquer, fará os diagramas

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \delta_C \downarrow & & \downarrow \delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{g \otimes g} & D \otimes D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \varepsilon_C \downarrow & & \downarrow \varepsilon_D \\ \mathbb{k} & \xrightarrow{1_{\mathbb{k}}} & \mathbb{k} \end{array}$$

comutarem.

Seja a parte (a) do teorema verdadeira, isto é, as aplicações μ e η são homomorfismos de coálgebras. Neste caso, com relação à multiplicação μ , os diagramas (a) e (b) apresentados na Figura 3.1 seguinte devem comutar, onde consideramos além da comultiplicação e counidade de H , dadas respectivamente por δ e ε , também a comultiplicação $\delta_{H \otimes H}$ e a counidade $\varepsilon_{H \otimes H}$ do produto tensorial $H \otimes H$ já citados anteriormente.

Já com relação à unidade η , existirá um homomorfismo de coálgebras caso os diagramas (a) e (b) apresentados na Figura 3.2 comutem, nos quais consideramos a comultiplicação e a counidade de H dadas respectivamente por δ e ε .

Figura 3.1 Caso o produto μ seja um homomorfismo de coálgebras então os diagramas (a) e (b) devem comutar.

Figura 3.2 Caso a unidade η seja um homomorfismo de coálgebras então os diagramas (a) e (b) devem comutar.

Considere agora duas álgebras A e B quaisquer. Uma aplicação dada por $h : A \rightarrow B$ será um homomorfismo de álgebras, de acordo com a Definição 2.15, caso os diagramas

comutem.

Seja a parte (b) do teorema verdadeira, isto é, as aplicações δ e ϵ são homomorfismos de álgebras. Neste caso, para a comultiplicação δ , iremos obter os dois diagramas da Figura 3.3. Basta então observar que o diagrama (a) da Figura 3.3 pode ser reescrito da seguinte maneira

Figura 3.3 Caso a comultiplicação δ seja um homomorfismo de álgebras então os diagramas (a) e (b) devem comutar.

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \xrightarrow{\delta} & H \otimes H & & \\
 \uparrow \mu & & \uparrow \mu \otimes \mu & & \\
 H \otimes H & \xrightarrow{\delta \otimes \delta} & H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} & H \otimes H \otimes H \otimes H
 \end{array}$$

e ainda pode ser girado no sentido horário

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\mu} & H \\
 \downarrow \delta \otimes \delta & & \downarrow \delta \\
 H \otimes H \otimes H \otimes H & & H \otimes H \\
 \downarrow 1 \otimes \tau \otimes 1 & & \downarrow \mu \otimes \mu \\
 H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{\mu \otimes \mu} & H \otimes H
 \end{array}$$

para ficar evidente a igualdade com o diagrama dado na Figura 3.1-(a). Os demais diagramas da Figura 3.1 e da Figura 3.2 podem ser encontrados de maneira análoga ■

Definição 3.2 Considere um espaço vetorial H que possua uma estrutura de álgebra (H, μ, η) e uma estrutura de cóalgebra (H, δ, ε) . Chamamos H de biálgebra caso μ e η sejam homomorfismos de cóalgebras. De modo equivalente, pelo Teorema 3.1, H será uma biálgebra caso δ e ε sejam homomorfismos de álgebras.

Definição 3.3 Considere um espaço vetorial H tal que (H, μ, η) e (H, δ, ε) sejam uma álgebra e coálgebra respectivamente. Chamamos H de álgebra de Hopf caso a estrutura $(H, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ satisfaça as condições seguintes.

- (a) $(H, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra;
- (b) Existe uma aplicação $S : H \rightarrow H$, chamada antípoda, tal que os dois próximos diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{1 \otimes S} & H \otimes H \\
 \delta \uparrow & & \downarrow \mu \\
 H & \xrightarrow{\eta \circ \varepsilon} & H
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes 1} & H \otimes H \\
 \delta \uparrow & & \downarrow \mu \\
 H & \xrightarrow{\eta \circ \varepsilon} & H
 \end{array}$$

comutam.

Os últimos dois diagramas também podem ser expressos da seguinte maneira

$$\mu \circ (1 \otimes S) \circ \delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes 1) \circ \delta.$$

Com isso apresentamos a definição de uma álgebra de Hopf. A seguir apresentaremos a notação utilizada por Kuperberg [14], com a qual faremos todas as demais demonstrações algébricas deste capítulo.

3.1.2 Notação de Kuperberg

A notação diagramática pode se tornar bastante extensa como acontece nos exemplos 2.18 e 2.19, desta maneira, uma representação mais compacta seria conveniente para realizarmos algumas demonstrações sobre a álgebra de Hopf. Tendo isto em vista, considere a próxima caracterização de um tensor, devida à Kuperberg [14], como alternativa para a notação de índices apresentada em sua forma usual $T_{a_1 a_2 \dots a_n}^{b_1 b_2 \dots b_m}$ pela Definição 2.60.

Primeiro iremos representar um objeto que chamaremos de T . Depois, para cada índice covariante (inferior) iremos utilizar uma seta entrando em T , e para cada índice contravariante (superior) iremos utilizar uma seta saindo de T . As setas, quando forem covariantes, serão nomeadas em sequência — com os índices correspondentes — no sentido *anti-horário*. Já quando as setas forem contravariantes elas serão nomeadas no sentido *horário*, no exemplo dado na Figura 3.4 podemos ver como esta convenção será utilizada.

A contração de tensores será feita ligando-se uma seta que esteja saindo de um operador com uma outra seta que esteja entrando em um operador, por exemplo, para a contração $T_{ab}^c v^a w^b$ utilizaremos a representação vista na Figura 3.5.

Figura 3.4 Notação de setas. Índices inferiores e superiores serão representados por setas entrando e saindo, respectivamente, e a ordem dos índices será anti-horária para os índices inferiores e horária para os superiores.

Figura 3.5 Contração do tensor T_{ab}^c com os tensores v^a e v^b .

Chamaremos esta maneira de representar o produto tensorial de *notação de setas* (*arrow notation*), como sugerido em [14], e, para fornecer ainda mais alguns exemplos, na Figura 3.6 apresentamos um mapa linear $T_a^b \equiv \mathcal{L}(V; V) : V \rightarrow V$ e o mapa identidade 1_V no espaço vetorial V .

Figura 3.6 Exemplos de tensores com a notação de setas.

Pretendemos empregar esta notação da seguinte maneira. Considere uma álgebra de Hopf que chamaremos de A . Como visto na seção anterior, toda álgebra de Hopf é uma biálgebra, portanto, ela possui uma multiplicação $\mu : A \otimes A \rightarrow A$, uma comultiplicação $\delta : A \rightarrow A \otimes A$, e, como sempre, também vamos considerar uma unidade $\eta : \mathbb{k} \rightarrow A$ e uma counidade $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{k}$. A multiplicação μ é um mapa bilinear $\mathcal{L}(A \otimes A; A)$, e, segundo a Proposição 2.8, podemos vê-la como um produto tensorial $A^* \otimes A^* \otimes A$. Por razões semelhantes também podemos ver a comultiplicação $\delta : A \rightarrow A \otimes A$ como um produto tensorial $A \otimes A^* \otimes A^*$, enquanto os mapas unidade e counidade são aplicações lineares. Todas estas observações nos permitem escrever a estrutura completa de uma álgebra de

Hopf como apresentado na Figura 3.7.

Figura 3.7 Notação de setas para descrever uma álgebra de Hopf.

Os axiomas que definem uma álgebra e uma coálgebra, a saber, a associatividade e a coassociatividade, também podem ser reescritos como visto na Figura 3.8. Já os axiomas sobre a unidade e a counidade de uma álgebra e de uma coálgebra, respectivamente, podem ser obtidos sem dificuldades em termos da notação de setas, como mostrado na Figura 3.9 a seguir.

Figura 3.8 Notação de setas representando os axiomas da álgebra e da coálgebra.

Além disso, para completarmos a representação da álgebra de Hopf é necessário que A seja uma biálgebra e possua uma antípoda S , como vimos na Definição 3.3. A condição de

(a) Condição da unidade.

(b) Condição da counidade.

Figura 3.9 Axiomas para a unidade e counidade.

(a) Condição da biálgebra.

(b) Antípoda.

Figura 3.10 Condições para existência de uma álgebra de Hopf sobre um espaço vetorial A . Em (a) o axioma de uma biálgebra, em (b) a existência de uma antípoda.

uma biálgebra foi apresentada anteriormente nas figuras 3.1 e 3.2, em termos de diagramas, mas pode ser reescrita de maneira bastante clara e compacta pela notação de setas, como pode ser visto na Figura 3.10-(a), na qual representamos o diagrama (a) da Figura 3.1. Para finalizar a descrição de uma álgebra de Hopf podemos mostrar a definição da antípoda S como visto na Figura 3.10-(b).

A partir deste ponto discutiremos os próximos resultados em termos da notação de setas, e para evitar a repetição de algumas construções, que serão utilizadas com bastante frequência nas seções posteriores, também iremos convencionar uma série de novos tensores.

Na Figura 3.11-(a) mostramos a contração de diversos tensores multiplicação μ e tam-

bém como vamos indicá-la. Com isso, precisamos definir alguns casos particulares para o novo tensor M , a saber, o primeiro será quando M tiver apenas um índice covariante e um contravariante. Neste caso M indicará a identidade do espaço vetorial, como visto na Figura 3.11-(b). O segundo caso importante será quando apenas um índice contravariante estiver presente em M , para o qual iremos representar a unidade η da álgebra, observar a Figura 3.11-(c). Outras duas situações a serem representadas pelo tensor M são a contração de índices no próprio tensor, isto é, o traço, indicada através da contração de uma mesma seta entrando e saindo sobre o mesmo tensor, como está representado na Figura 3.11-(d), e a contração do tensor M com o traço de algum índice, situação indicada pela Figura 3.11-(e).

De forma completamente análoga também vamos considerar uma notação específica para a contração de diversos tensores com multiplicação δ e as variações para esta convenção, isto é, a identidade está representada na Figura 3.12-(b), o mapa counidade na Figura 3.12-(c), o cotraço na Figura 3.12-(d) e a contração de Δ com o cotraço na Figura 3.12-(e).

Antes de encerrar esta seção, gostaríamos ainda de apresentar, por meio da notação de setas, um importante resultado a ser utilizado nas seções posteriores.

Definição 3.4 *Seja A uma álgebra de Hopf. Chamamos um vetor $v_R \in A$ de cointegral à direita caso ele satisfaça a igualdade apresentada na Figura 3.13-(a). Chamamos um covetor $w_R \in A$ de integral à direita caso ele satisfaça a igualdade apresentada na Figura 3.13-(b). Realizando as multiplicações análogas pela esquerda, definimos uma cointegral à esquerda e uma integral à esquerda.*

Definição 3.5 *Seja A uma álgebra de Hopf e S sua antípoda. Chamamos A de uma álgebra de Hopf involutória caso $S^2 = 1_A$.*

O próximo teorema será retomado quando estivermos discutindo o invariante de Kuperberg, e sua prova pode ser feita a partir dos resultados apresentados anteriormente. No entanto, como isto exige uma série de manipulações intermediárias, iremos apenas indicar as referências [14, 39], nas quais podemos encontrar esta demonstração feita com o mesmo formalismo apresentado até o momento.

Teorema 3.6 *Seja A uma álgebra de Hopf e S sua antípoda. O vetor definido na Figura 3.14 sempre é uma integral à direita em A .*

Antes de encerrar esta seção vamos apresentar mais um importante teorema — obtido com ajuda deste último — e que também será bastante utilizado quando estivermos tratando do invariante de Kuperberg.

Teorema 3.7 *Seja A uma álgebra de Hopf involutória. O tensor definido na Figura 3.15 é igual à dimensão da álgebra.*

Figura 3.11 Mostramos em (a) a representação de uma contração típica e nas figuras (b), (c), (d) e (e) encontram-se algumas generalizações naturais desta convenção.

Figura 3.12 Notação para a contração de uma série de tensores δ realizada de maneira análoga à realizada para os tensores μ .

(a) Condição para a cointegral à direita.

(b) Condição para a integral à direita.

Figura 3.13 Dois operadores importantes com respeito à álgebra de Hopf são a integral e a cointegral cujas definições são dada em (a) e (b) respectivamente.

Figura 3.14 Integral à direita de uma álgebra de Hopf. **Figura 3.15** Produto tensorial equivalente à dimensão da álgebra.

Demonstração. Pelo fato de a álgebra ser involutória, isto é, de $S^2 = 1_A$, então o tensor apresentado na Figura 3.14 será exatamente o traço de M , definido na Figura 3.11-(d). Utilizando a propriedade da integral podemos escrever

$$\rightarrow \Delta \rightarrow M = \rightarrow M \rightarrow \eta \rightarrow$$

Comparando o lado esquerdo desta última igualdade com a Figura 3.15 vemos que os dois tensores serão idênticos se fizermos a contração das setas. Portanto, podemos escrever o seguinte

$$\Delta \rightarrow M = \eta \rightarrow M = \bigcirc = \text{tr}(1_A) = \dim(A) \quad \blacksquare$$

3.2 Triangulação em 3D

Ao longo de nossa discussão a respeito do caso bidimensional, a triangulação de variedades surgiu, ao fim, como uma estrutura adicional. Já para o caso 3D, precisaremos desde o começo considerar a triangulação da 3-variedade, pois o objeto relevante para obtermos a TQCT 3D, ou seja, o invariante de Kuperberg, será construído a partir desta triangulação. Logo, para tratarmos a teoria 3D será preciso redefinir a triangulação nesta dimensão. Como veremos a seguir, a complexidade aumentará e por isso utilizaremos alguns teoremas sobre 3-variedades para simplificarmos nossa construção.

3.2.1 Diagramas simplificados de Heegaard

Definição 3.8 (Triangulação em 3D) *Chamamos triangulação de uma 3-variedade a decomposição deste espaço topológico em uma união finita de tetraedros tais que dois quaisquer destes se não forem disjuntos então só terão um único vértice em comum, ou uma única aresta em comum (dois vértices em comum) ou uma única face em comum (três vértices e três arestas em comum).*

Observe que no caso tridimensional a figura elementar será o tetraedro, e dois destes poderão compartilhar no máximo a mesma face, enquanto para a triangulação de uma 2-variedade a figura elementar é o triângulo, e dois destes poderão compartilhar no máximo a mesma aresta. Esta diferença aumenta de maneira considerável a complexidade das operações envolvidas no desenvolvimento da teoria em 3D, visto as figuras serem tridimensionais

e o número de conexões possíveis entre as mesmas ser maior. Observe na Figura 2.20 como é relativamente simples realizar a colagem para o caso 2D, e na Figura 2.25 quais são os passos de Pachner.

Como alternativa, podemos obter a construção da teoria tridimensional de maneira bastante próxima da bidimensional fazendo uso, para isso, de um teorema para 3-variedades chamado *Handle Presentation*, obtido por Milnor e Wallace [43]. Apesar deste teorema também valer para dimensões maiores do que 3, iremos nos concentrar apenas no caso 3D pois isto será suficiente para todas as demonstrações que serão realizadas nas seções posteriores. Além disso, as considerações que faremos sobre o *Handle Presentation* têm o propósito apenas de estabelecer os objetos e a notação que será utilizada a seguir. Detalhes desta teoria podem ser obtidos nas referências [43, 44].

Definição 3.9 *Sejam B^k e B^{3-k} as bolas fechadas que pertencem respectivamente aos espaços $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{3-k}$. Chamamos de handle com índice k e dimensão 3, ou simplesmente de k -handle, uma variedade com bordo difeomorfa ao produto $B^k \times B^{3-k}$ em $\mathbb{R}^3$.*

Para a dimensão 3 é possível obtermos exatamente quatro *handle's*, ver Figura 3.16.

Figura 3.16 *Handle's* para dimensão 3. Na figuras (a) (b) (c) e (d) encontramos os *handle's* com índices 0, 1, 2 e 3 respectivamente.

Já com a próxima definição iremos realizar a colagem de *handle's*.

Definição 3.10 *Seja M uma 3-variedade com bordo. Chamamos colagem de handle a relação de equivalência obtida através de uma aplicação suave*

$$h_i : \partial B^k \times B^{3-k} \rightarrow M,$$

cujas imagens estão contidas em ∂M , com a qual realizamos a seguinte colagem de variedades

$$M' = M \coprod_{h_i} (B^k \times B^{3-k}),$$

isto é, tal que $x \sim h(x)$ para todo $x \in \partial B^k \times B^{3-k}$.

Definição 3.11 *Chamamos de handlebody uma 3-variedade formada com a colagem de um número finito de 1-handle's sobre um 0-handle.*

A seguir, na Figura 3.17, mostramos a colagem de três 1-handle's sobre a superfície de um 0-handle originando então um handlebody de gênero 3.

As definições do handlebody, dos k -handle's e da colagem destes são fundamentais em razão do próximo teorema obtido por Heegaard, segundo o qual toda 3-variedade pode ser vista como uma colagem de handlebody's.

Teorema 3.12 *Para toda 3-variedade fechada e compacta M existem um handlebody H e um difeomorfismo que identifica os bordos de duas cópias de H fornecendo M .*

A prova deste teorema e a prova do próprio *Handle Presentation* têm como base a teoria de Morse, e ambas podem ser encontradas, por exemplo, em [43, 44]. Como nossa abordagem para tratar o caso 3D envolve a triangulação de 3-variedades, e o tetraedro será o objeto elementar desta triangulação, bastará fazermos uso de todas estas considerações, com relação aos handlebody's, para o caso específico do tetraedro.

Observando, desta maneira, apenas um único tetraedro da triangulação, inicialmente vamos destacar as suas arestas e os seus vértices através de uma estrutura chamada 1-esqueleto, como pode ser visto na Figura 3.18.

A seguir, partindo do 1-esqueleto podemos obter dois handlebody's da seguinte maneira. Primeiro devemos tomar a vizinhança tubular do 1-esqueleto, isto é, iremos associar uma bola sólida para cada vértice do 1-esqueleto, e um cilindro sólido (com as extremidades coladas nas bolas sólidas) para cada aresta, exatamente como vemos na Figura 3.19-(a). Observe que o tetraedro está, é claro, colado com outros tetraedros da triangulação, por isso, tanto a construção feita para o 1-esqueleto quanto a vizinhança tubular serão específicas para cada tetraedro.

Utilizando ainda o mesmo 1-esqueleto, vamos construir um segundo objeto, associando desta vez uma bola sólida no interior do 1-esqueleto, e, para cada face, um cilindro sólido com um dos extremos colado na bola sólida e o outro atravessando esta face, assim como vemos na Figura 3.19-(b). Observe que, para encontrar os dois objetos, fizemos uso apenas de bolas sólidas, ou seja, de bolas fechadas e de cilindros sólidos. As bolas sólidas são difeomorfas ao produto $B^0 \times B^3$ e os cilindros são difeomorfos ao produto $B^1 \times B^2$, em outras palavras, fizemos uso apenas de 0-handle's e 1-handle's, ver os objetos (a) e (b) na Figura 3.16.

Apesar destas duas construções terem sido feitas considerando-se apenas um tetraedro, podemos estender cada uma delas sobre toda a triangulação da variedade. Assim, todos os cilindros sólidos estarão colados em alguma bola sólida nos dois casos, com o que vamos obter dois handlebody's complementares. Em analogia com estes dois handlebody's complementares, chamaremos o objeto construído na Figura 3.19-(a) simplesmente de handlebody, enquanto o objeto da Figura 3.19-(b) será chamado de handlebody dual.

Figura 3.17 Colagem de 1 -handle's. Na Figura (a) para cada 1 -handle corresponde um mapa suave h sobre o 0 -handle. Na Figura (b) mostramos a variedade obtida com a colagem, que neste caso é um $handlebody$.

Figura 3.18 Em (a) temos um tetraedro inserido na triangulação de uma 3-variedade. Em (b) encontra-se o 1-esqueleto correspondente.

Figura 3.19 Construção dos *handlebody's* para o tetraedro. Em (a) a vizinhança tubular origina o primeiro *handlebody*, enquanto em (b) o preenchimento do volume origina o *handlebody dual*.

Uma vez construídos estes dois objetos, pretendemos agora utilizá-los para realizar a colagem de tetraedros. Devemos, inicialmente, observar que, de acordo com a Definição 3.8, uma triangulação dependerá de três informações a respeito do tetraedro, a saber, dos vértices, das arestas e das faces. Assim, veremos como é possível determinar todas estas informações utilizando somente as superfícies do *handlebody* e do *handlebody dual*.

A primeira informação dos tetraedros a ser considerada será a aresta. Para isso, destacamos em vermelho uma das arestas do 1-esqueleto, como é mostrado na Figura 3.20-(a) seguinte. Como podemos visualizar, cada aresta do 1-esqueleto está contida entre dois vértices distintos. Assim, iremos associar para cada aresta, e, portanto, para cada par distinto de vértices, uma curva desenhada *sobre a superfície* do cilindro sólido obtido na vizinhança tubular para esta aresta, como exemplificamos na Figura 3.20-(b).

Podemos obter sobre a superfície do *handlebody*, desta maneira, uma curva vermelha distinta para cada aresta distinta do 1-esqueleto. Chamaremos o conjunto de todas estas curvas de *sistema de curvas vermelhas*. Agora vamos observar algumas características que serão muito importantes quando estivermos manipulando tais curvas.

Como cada aresta não intersecciona nenhuma outra aresta, no máximo partilham um único vértice, então curvas vermelhas distintas não se interseccionam. Também, por construção, cada curva vermelha está contida na lateral do cilindro sólido, por isso, ela não possui autointersecção. De fato, cada curva vermelha pode ser vista como o bordo de um disco D_i . Além disso, cada bola sólida da vizinhança tubular, por sua vez, pode ser “isolada” por um

(a) Aresta e respectivos vértices do 1-esqueleto.

(b) Curva vermelha correspondente.

Figura 3.20 Identificação das arestas e respectivos vértices através de uma curva de cor vermelha desenhada sobre o próprio *handlebody*.

conjunto finito destes discos. Vamos formalizar estas observações da seguinte maneira.

Propriedade 3.13 *Sejam H um handlebody, isto é, a Figura 3.19-(a), e $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ um sistema de curvas vermelhas sobre H , com n finito. Tal conjunto satisfaz as seguintes condições:*

- (a) *Para $\forall v_i, \forall v_j \in \mathcal{V}$, $i \neq j$, $v_i \cap v_j = \emptyset$;*
- (b) *Para $\forall v_i \in \mathcal{V}$, v_i não possui autointersecção;*
- (c) *Para $\forall v_i \in \mathcal{V}$, $\exists D_i \subset H$ tal que $\partial D_i = v_i$;*
- (d) *O conjunto $\mathcal{D} = \{D_i\}$, de todos os D_i tais que $\partial D_i = v_i$, particiona o handlebody H em um conjunto de objetos cada um difeomorfo à bola sólida.*

Na Figura 3.21-(a) seguinte mostramos um conjunto de curvas vermelhas em torno de uma das bola sólidas do *handlebody*, e destacamos também o disco D_i para uma das curvas v_i . Já na Figura 3.21-(b) mostramos como a bola sólida será isolada da vizinhança tubular através dos discos D_i adjacentes, fica evidente que o objeto assim obtido será difeomorfo à bola sólida B^2 .

A próxima informação que iremos discutir agora será a face do tetraedro, e para tal utilizaremos desta vez o *handlebody dual*. De modo semelhante ao que foi realizado para determinarmos as curvas vermelhas, representamos na Figura 3.22-(a) apenas uma das faces

Figura 3.21 Propriedades das curvas vermelhas. Cada curva vermelha pode ser obtida como o bordo de um disco contido no *handlebody* ($v_i = \partial D_i$) além disso, os discos assim construídos particionam o *handlebody* em um conjunto de objetos difeomorfos à B^2 .

do tetraedro, mas desenhada, como anteriormente, sobre o 1-esqueleto. Neste caso, iremos traçar sobre a *superfície* do cilindro sólido do *handlebody dual* uma curva de cor azul para cada face, assim como encontramos na Figura 3.22-(b). Pode-se obter para cada face distinta do tetraedro uma única curva azul sobre a superfície *handlebody dual*. Chamaremos o conjunto de curvas azuis obtidas para todas as faces de *sistema de curvas azuis*.

Não é difícil perceber que toda a discussão realizada para o sistema de curvas vermelhas pode ser transposta para o sistema de curvas azuis. De fato, este sistema também satisfaz a Propriedade 3.13, já que estamos lidando com uma curva azul sobre a superfície de um único cilindro sólido etc.

Apesar de termos obtido as curvas vermelhas e azuis respectivamente para o *handlebody* e para *handlebody dual*, poderíamos, de modo inverso, ter obtido para cada uma das faces do 1-esqueleto uma curva única sobre a superfície do *handlebody*, e para cada uma das arestas do 1-esqueleto uma curva única sobre o *handlebody dual*, ou seja os sistemas de curvas azuis sobre o *handlebody dual* e o de curvas vermelhas sobre o *handlebody*. Estas duas construções estão apresentadas respectivamente na Figura 3.23 e Figura 3.24.

Contudo, como também podemos perceber — apenas observando as figuras 3.23 e 3.24 — não seria imediato determinar a Propriedade 3.13. Por isso, iremos impor que tanto o conjunto formado com as curvas obtidas para as faces, como exemplifica a Figura 3.23, quanto o conjunto formado com as curvas obtidas para as arestas, como exemplifica a Figura 3.24, satisfaçam os itens (a)-(c) da Propriedade 3.13. Isto é, estas curvas não possuem autointer-

Figura 3.22 Obtenção da curva azul sobre o *handlebody dual*.

secção, não existe intersecção entre duas curvas distintas quaisquer e para cada curva existe um disco cujo bordo é a própria curva. Neste último item, em particular, o disco não estará contido no *handlebody* ou no *handlebody dual*.

Estas últimas considerações são importantes pois, fazendo uso do Teorema 3.12 de Heegaard, é possível descrevermos uma variedade M qualquer a partir dos *handlebody's* obtidos aqui através do 1-esqueleto de uma triangulação de M . Para tal, precisamos de um difeomorfismo entre as superfícies do *handlebody* e do *handlebody dual*, que chamaremos respectivamente de H_1 e H_2 . Ou seja, precisamos de um difeomorfismo $f : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ para realizarmos a colagem destes dois objetos topológicos.

Que o mapa $f : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ existe pode ser verificado, ao menos qualitativamente, com uma inspeção direta da Figura 3.25. Devemos nos convencer de que a superfície lateral de cada cilindro sólido do *handlebody dual* pode ser colado sobre o *handlebody*, e que basta “inflar” a bola sólida do *handlebody dual* até preencher toda a parte interna do *handlebody*, para assim recuperarmos novamente o tetraedro.

Com o difeomorfismo $f : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ também podemos observar que cada uma das curvas (vermelha ou azul) pode ser continuamente deformada entre o *handlebody dual* e o *handlebody*, ver Figura 3.26. Isto só é possível devido às considerações que foram feitas com respeito às propriedades dos dois sistemas de curvas. A deformação entre curvas azuis é bastante nítida quando olhamos para a Figura 3.26-(b). Já a deformação entre as curvas vermelhas deve levar em consideração todo o *handlebody dual*.

Com estas últimas observações ganha-se liberdade na representação dos sistemas de curvas. Isto pois, com ajuda do difeomorfismo $f : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ podemos, por exemplo,

Figura 3.23 Identificação das faces através de uma curva de cor azul desenhada sobre o próprio *handlebody*.

Figura 3.24 Obtenção da curva vermelha sobre o *handlebody dual*.

mapear o sistema de curvas azuis do *handlebody dual* sobre o *handlebody*, ou então, através da inversa $f^{-1} : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$, mapear o sistema de curvas vermelhas do *handlebody* sobre o seu dual. Resumindo, os dois sistemas de curvas podem ser representados em apenas um dos *handlebody*'s. Desta maneira, nos concentraremos a seguir, por sua maior simplicidade quanto à visualização, apenas no *handlebody dual*, mas frisamos o fato de que o mesmo

Figura 3.25 Representação auxiliar para determinar um difeomorfismo entre os bordos do *handlebody* e do seu dual.

desenvolvimento pode ser realizado a partir do *handlebody* originado da vizinhança tubular do 1-esqueleto.

Isto posto, considere os dois sistemas de curvas (vermelhas e azuis) sobre o *handlebody dual*, como representamos na Figura 3.27-(a). Todas as informações necessárias para a colagem de tetraedros se encontram, por construção, no conjunto de curvas, já que para

Figura 3.26 Mapeamento de curvas entre os *handlebody*'s.

cada curva azul temos uma face do tetraedro, e para cada curva vermelha temos uma aresta.

Figura 3.27 Em (a) as setas indicam como o *handlebody* dual deverá ser modificado. Em (b) encontramos o resultado da modificação espacial.

Além disso, podemos modificar “espacialmente” o *handlebody* dual, desde que os sistemas de curvas não se alterem. Veja que as curvas vermelhas da Figura 3.27-(a) satisfazem os itens (a)-(c) da Propriedade 3.13, isto é, elas não possuem autointersecção, duas curvas vermelhas distintas não se interseccionam etc. Contudo, existe uma relação entre os dois sistemas de curvas que deve ser observada, a saber, as curvas vermelhas passam *por dentro* das curvas azuis. Desde que não se modifique nenhuma destas propriedades, as informações do tetraedro ficarão preservadas. Na Figura 3.27 mostramos uma modificação espacial do *handlebody* dual que pode ser realizada. As setas da Figura 3.27-(a) indicam as direções da modificação a ser realizada e na Figura 3.27-(b) encontramos a nova configuração. Esta modificação nos ajudará bastante na simplificação dos conjuntos de curvas.

A seguir, mostraremos como as informações de um tetraedro, incluindo orientações, são transferidas para as curvas do *handlebody* dual. Primeiro, observe na Figura 3.28 um tetraedro no qual todos os vértices são nomeados por letras e todas as arestas são indicadas por números. Cada aresta também pode ser escrita a partir de seus dois vértices correspondentes, por exemplo, a aresta entre os vértices A e B será indicada por $[AB]$, onde a ordem dos índices também indica a orientação, neste caso de A para B (se fosse a ordem inversa, de B para A , então teríamos escrito $[BA]$). Cada face também será indicada pelos três vértices correspondentes, por exemplo, a face formada pelos vértices A , B e D será indicada por $[ADB]$, onde a ordem novamente também nos diz a orientação da face, ver Figura 3.28.

Agora considere o *handlebody* dual com os dois sistemas de curvas (vermelhas e azuis). Para cada aresta e para cada face do tetraedro mostrado na Figura 3.28 (junto com as respectivas orientações) corresponde uma única curva vermelha e uma única curva azul, as quais também possuem agora uma orientação, indicada através de setas, como está representado na Figura 3.29-(a). Por fim, uma vez compreendida a origem das curvas e como estas contêm as informações sobre os tetraedros, podemos, como nosso último passo, “abandonar” a indicação do *handlebody* e escrever tão somente as curvas, assim como é visto na Figura 3.29-(b).

Definição 3.14 *Chamamos o sistema de curvas apresentado na Figura 3.29-(b) de diagramas simplificados de Heegaard.*

Podemos resumir toda esta discussão afirmando então que dado um tetraedro de uma triangulação de uma variedade M , podemos transferir todas as informações relevantes deste tetraedro para um diagrama simplificado de Heegaard.

Também vamos nos referir ao diagrama simplificado de Heegaard simplesmente como *sistema de curvas*. Antes de encerrar esta seção, cabe ainda mostrar algumas outras possíveis modificações importantes para o diagrama simplificado de Heegaard, ver Figura 3.30, as quais serão utilizadas diversas vezes nas próximas demonstrações.

3.2.2 Passos de Pachner

Assim como no caso bidimensional, o teorema de Pachner [41] também será fundamental para construirmos a teoria 3D, por isso começaremos com sua apresentação.

A seguir, a notação (t,f,a) indicará por t o número de tetraedros, por f o número de faces e por a o número de arestas.

Teorema 3.15 (Pachner em 3D) *Sejam M e N duas variedades tridimensionais. Considere duas triangulações T_M e T_N para M e N respectivamente. Caso M e N sejam variedades homeomorfas então a triangulação T_M pode ser levada em T_N com uma sequência construída apenas com os dois passos de Pachner apresentados na Figura 3.31 e na Figura 3.32. De modo inverso, se for possível transformar T_M em T_N apenas com os passos de Pachner anteriores então as variedades M e N serão homeomorfas. Chamamos as triangulações T_M e T_N , neste caso, de equivalentes e indicaremos com a notação $T_M \approx T_N$.*

Observando os passos das figuras 3.31 e 3.32 fica evidente a complexidade envolvida para a realização de demonstrações, como as que foram feitas no final do Capítulo 2, caso os tetraedros sejam utilizados diretamente. Contudo, o resultado principal da seção anterior, isto é, os diagramas simplificados de Heegaard, nos ajudará a fazer de maneira mais clara os desenvolvimentos que serão empregados para construirmos a TQCT 3D. Assim, encontramos na Figura 3.30 diferentes maneiras de representar um tetraedro. Como vimos, toda

Figura 3.28 Indicação dos vértices, arestas e faces de um tetraedro. Sobre a face $[ADB]$ também mostramos a orientação que fica subentendida pela ordem dos vértices.

Figura 3.29 Mostramos em (a) como as informações do tetraedro estão contidas no sistema de curvas contruído sobre o *handlebody*. Em (b) apresentamos uma notação simplificada das curvas.

Figura 3.30 Notações alternativas do tetraedro apresentado em (a). Por simplicidade deixamos de considerar as orientações.

informação importante com respeito à triangulação pode ser transposta para o sistema de curvas, incluindo as orientações. Apesar disso, como a orientação não será essencial no que segue, deixaremos de indicá-la, por simplicidade.

Vejamos então como cada um dos passos de Pachner pode ser escrito em termos da linguagem de curvas. Começando com o primeiro passo da Figura 3.31, isto é, o passo $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$, sabemos que o número de tetraedros se altera de 1 para 4. Para representar um único tetraedro basta utilizarmos qualquer um dos diagramas da Figura 3.30. Já para representarmos quatro tetraedros colados, os quais estão destacados na parte (b) da Figura 3.31, iremos primeiro desenhar os tetraedros sozinhos, ver Figura 3.33-(a), e depois realizar a colagem, ver Figura 3.33-(b). Lembre que cada curva azul indica uma face de um tetraedro, e cada curva vermelha uma aresta.

Agora faremos o mesmo para o passo de Pachner da Figura 3.32, ou seja, temos uma modificação da forma $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$, logo, o número de tetraedros se altera neste caso de 2 para 3. Precisamos, portanto, mostrar a colagem nestas duas situações. Para entendermos a colagem de dois tetraedros na linguagem de curvas, primeiro escrevemos os tetraedros separados, ver Figura 3.34-(a), e depois mostramos a colagem destes como vemos representado na Figura 3.34-(b). Da mesma forma, para realizarmos a colagem de três tetraedros, mostramos na Figura 3.35-(a) os tetraedros sozinhos e na Figura 3.35-(b) sua colagem.

Como é possível perceber a partir das construções anteriores, dada uma colagem de tetraedros pode-se encontrar na linguagem do sistema de curvas a representação desta mesma colagem. Sendo assim, qualquer triangulação de uma 3-variedade pode ser reescrita em termos do sistema de curvas. Com as duas próximas definições apresentaremos uma notação com a qual iremos correlacionar triangulações e diagramas de curvas.

Definição 3.16 *Seja D_i um diagrama de curvas conexo. Definimos a soma de n diagramas D_i como a união disjunta dos diagramas, ou seja,*

$$D_1 + D_2 + \cdots + D_n = D_1 \amalg D_2 \amalg \cdots \amalg D_n,$$

em particular, se $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = D$ temos $D + D + \cdots + D = nD$.

Algumas uniões poderão ser escritas da seguinte maneira.

$$1 \text{ (blue circle) } + 2 \text{ (blue circles) } + 1 \text{ (blue circle with red dashed line) } = \text{ (three blue circles) } + \text{ (blue circle with red dashed line) }.$$

Nas demonstrações que faremos será útil alternar entre as notações da esquerda e da direita. Com esta definição também poderemos realizar operações de soma com os diagramas,

Figura 3.31 Primeiro passo de Pachner para uma triangulação tridimensional.

Figura 3.32 Segundo passo de Pachner para uma trinagulação tridimensional.

(a) Construção da figura $(4,10,10)$.

(b) Resultado da colagem anterior.

Figura 3.33 Colagem de 4 tetraedros. Na Figura (a) mostramos como acontecerá a colagem dos tetraedros utilizando a representação de curvas. Em (b) mostramos os tetraedros colados com a representação de curvas.

(a) Construção da figura (2,7,9).

(b) Resultado da colagem anterior.

Figura 3.34 Colagem de 2 tetraedros. Na Figura (a) mostramos como acontecerá a colagem dos tetraedros utilizando a representação de curvas. Em (b) mostramos os tetraedros colados.

(a) Construção da figura (3,9,10).

(b) Resultado da colagem anterior.

Figura 3.35 Colagem de 3 tetraedros. Na Figura (a) mostramos como acontecerá a colagem dos tetraedros utilizando a representação de curvas. Em (b) mostramos os tetraedros colados.

como as seguintes.

$$\begin{aligned}
 1 \text{ (blue circle)} + 1 \text{ (blue circle)} &= 2 \text{ (blue circle)}, \\
 1 \text{ (blue circle with red dashed line)} + 2 \text{ (blue circle with red dashed line)} + 1 \text{ (blue circle with red dashed line)} &= 4 \text{ (blue circle with red dashed line)}, \\
 1 \text{ (red circle)} + (-1) \text{ (red circle)} &= 0 \text{ (red circle)}.
 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, será possível fazer operações semelhantes com diagramas mais complexos do que os mostrados nos últimos exemplos. Com a próxima definição introduzimos o conceito de diagramas equivalentes.

Definição 3.17 *Considere dois diagramas de curvas D_1 e D_2 . Chamamos D_1 e D_2 de diagramas equivalentes caso seja possível levar D_1 em D_2 com uma sequência construída apenas com os três passos apresentados na Figura 3.36 e seus respectivos inversos. Indicaremos dois diagramas equivalentes com a seguinte notação $D_1 \approx D_2$.*

A seguir vamos considerar o caso específico dos diagramas de curvas originados a partir de uma triangulação.

Definição 3.18 *Seja T uma triangulação para uma variedade M . Chamamos de diagrama de curvas da triangulação T a representação desta triangulação no sistema de curvas. Indicaremos o diagrama de curvas de T com a notação $D(T)$.*

Observe que a única particularidade dos diagramas $D(T)$ é o fato de os mesmos estarem relacionados com uma triangulação T dada. Em particular, podemos realizar as operações de união disjunta e soma também para estes diagramas.

A utilização do sistema de curvas e de toda discussão feita até o momento justifica-se sobretudo devido ao próximo teorema. Com ele, os resultados a respeito de triangulações de 3-variedades se tornarão mais simples e claros.

Teorema 3.19 *Sejam M_1 e M_2 variedades tridimensionais. Considere duas triangulações T_1 com (t_1, f_1, a_1) e T_2 com (t_2, f_2, a_2) , para M_1 e M_2 respectivamente; e os valores $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta f = f_2 - f_1$ e $\Delta a = a_2 - a_1$. As triangulações T_1 e T_2 serão equivalentes, isto é, $T_1 \approx T_2$, se e somente se vale a seguinte relação de equivalência para os diagramas de curvas dados*

Figura 3.36 Passos sobre o sistema de curvas.

por meio de $D(T_1)$ e $D(T_2)$

$$D(T_2) \approx D(T_1) + \alpha \text{ (diagrama com círculo azul e vermelho)} + \beta \text{ (círculo azul)} + \gamma \text{ (círculo vermelho)}, \quad (3.1)$$

onde $\alpha = \Delta t$, $\beta = \Delta f - \Delta t$ e $\gamma = \Delta a - \Delta t$.

O resto desta seção será dedicado para provarmos o Teorema 3.19. Começaremos com o seguinte lema.

Lema 3.20 *Os diagramas (a) e (b) da Figura 3.37 são equivalentes. Chamamos esta relação de equivalência de propriedade da cointegral.*

Demonstração. Basta mostrarmos uma sequência que conecta os dois lados da Figura 3.37 obtida apenas com os passos de *sliding* e *two-point move*. A sequência completa da demonstração pode ser vista na Figura 3.38 seguinte.

Primeiro realizamos um passo de *sliding* sobre a curva vermelha que está sozinha, como vemos em (b). Depois disso basta fazer o passo de *two-point move* sobre a região destacada

Figura 3.37 Propriedade da cointegral obtida com os passos de *sliding* e de *two-point move*.

Figura 3.38 Sequência de passos para demonstração da propriedade da cointegral.

em (c). Com isso a curva vermelha que sofreu o *sliding* não cruzará mais a curva azul, ver (d). Os últimos passos podem ser repetidos sobre todas as curvas vermelhas (e), resultando na figura procurada em (f) ■

Lema 3.21 *Os diagramas (a) e (b) da Figura 3.39 são equivalentes.*

Figura 3.39 Igualdade obtida com os passos de *sliding* e *two-point move*.

Demonstração. Novamente é preciso mostrar que existe uma sequência que transforma os dois lados da Figura 3.39 e envolve apenas os passos de *sliding* e *two-point move*. A sequência dos passos a serem realizados encontra-se dividida nas figuras 3.40 e 3.41.

Primeiro realizamos um *sliding* de curvas azuis como vemos em (b). Depois aplicamos o passo de *two-point move* na parte central do tetraedro, ver (c). Realizamos, em seguida, um segundo passo de *sliding* sobre outra curva azul, como visto em (d), e outro passo de *two-point move* como vemos em (e). Repetindo mais uma vez esta sequência, isto é, com mais um *sliding* seguido de *two-point move*, respectivamente (f) e (g), chegamos até a configuração apresentada em (h). Agora com três passos de *two-point move* em cada lado do tetraedro podemos desligar a curva azul como é visto em (i). Por fim, podemos reescrever o resultado final em (j) ou, ainda, como vemos em (k) ■

Com auxílio destes dois últimos teoremas, nos quais utilizamos somente os passos de *sliding* e *two-point move*, podemos verificar como é possível obter uma sequência entre as triangulações $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$ e também entre as triangulações $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$. Começaremos com o primeiro caso.

Teorema 3.22 *Considere os tetraedros $T_1 = (1, 4, 6)$ e $T_2 = (4, 10, 10)$ apresentados na*

Figura 3.40 Primeira parte da sequência de passos para demonstração do Lema 3.21.

Figura 3.41 Segunda parte da sequência de passos para demonstração do Lema 3.21.

Figura 3.31-(a). Os diagramas (a) e (b) da Figura 3.42 são equivalentes, ou seja

$$D(T_2) \approx D(T_1) + 3 \text{ (diagrama com 2 círculos entrelaçados)} + 3 \text{ (círculo azul)} + 1 \text{ (círculo vermelho)}.$$

Figura 3.42 Passo de Pachner $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$ e sistema de curvas.

Demonstração. Basta mostrarmos que existe uma sequência, realizada apenas com os passos de *sliding* e *two-point move*, capaz de conectar os dois diagramas apresentados na Figura 3.42.

A sequência completa dos passos a serem realizados para esta demonstração encontra-se nas figuras 3.43 e 3.44.

Para o tetraedro destacado em (a) vamos utilizar o Lema 3.21 e retirar uma curva azul. Depois, novamente com auxílio do Lema 3.21, vamos retirar mais duas curvas de cor azul dos tetraedros em destaque em (b) e (c). Reescrevendo a figura obtida em (d) da maneira como fazemos em (e), vemos três curvas vermelhas cruzarem com apenas uma curva azul cada uma. Logo, com a propriedade da cointegral, ver Lema 3.20, obtemos a figura em (f), reescrita da maneira usual em (g) ■

A seguir, no próximo teorema, da mesma maneira como foi realizado no anterior, iremos determinar uma sequência de passos de *sliding* e *two-point move* entre as duas triangulações $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$.

Teorema 3.23 Considere os tetraedros $T_1 = (2, 7, 9)$ e $T_2 = (3, 9, 10)$ apresentados na

Figura 3.43 Primeira parte da sequência de passos para demonstração do Teorema 3.22.

Figura 3.44 Segunda parte da sequência de passos para demonstração do Teorema 3.22.

Figura 3.32-(a). Os diagramas (a) e (b) da Figura 3.45 são equivalentes, ou seja

$$D(T_2) \approx D(T_1) + 1 \begin{array}{c} \text{blue circle} \\ \text{red dashed circle} \end{array} + 1 \begin{array}{c} \text{blue circle} \end{array} + 0 \begin{array}{c} \text{red circle} \end{array}.$$

Figura 3.45 Passo de Pachner $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$ e sistema de curvas.

Demonstração. Assim como no teorema anterior, precisamos mostrar que existe uma sequência realizada apenas com os passos de *sliding* e *two-point move*; e que determina a relação de equivalência apresentada na Figura 3.45.

A demonstração deste teorema consistirá em mostrar que as duas construções podem ser identificadas com uma terceira figura. Assim, vamos dividir a demonstração em duas partes. Primeiro vamos considerar a colagem de dois tetraedros, e depois a colagem de três.

1. Com ajuda do Lema 3.21 vamos retirar uma curva azul do tetraedro destacado na Figura 3.46.

A seguir, na parte (a) da Figura 3.47 vamos nomear, para o objeto que encontramos depois de remover uma curva azul, todas as curvas vermelhas com números e todas as curvas azuis com letras. Já na parte (b) da Figura 3.47 encontramos uma segunda figura que também possui as curvas vermelhas e azuis nomeadas com letras e números. Por inspeção pode-se verificar que estes dois objetos são iguais. Já na parte (c) da Figura 3.47 apenas vamos reescrever o objeto descrito no item (b) sem as numerações.

2. Agora considere a colagem de três tetraedros. Destacamos na parte (a) e (b) da Figura 3.48 dois tetraedros dos quais duas curvas de cor azul serão removidas, fazendo uso para tal, como sempre, do Lema 3.21. Com estas duas alterações vemos ao centro da figura assim obtida que existe uma curva vermelha conectada apenas com uma curva de cor azul. Podemos, portanto, utilizar a propriedade da cointegral, ver Lema 3.20, e remover estas duas

Figura 3.46 Destaque do tetraedro do qual uma curva de cor azul será removida.

curvas. A menos do número de curvas isoladas que restam nesta última construção, vemos que a Figura 3.48-(d) e a Figura 3.47-(c) são idênticas, e isto encerra a demonstração ■

Com estes dois últimos teoremas podemos então demonstrar o Teorema 3.19, o mais importante desta seção.

Demonstração. (do Teorema 3.19) De acordo com o Teorema de Pachner 3.15 duas triangulações serão equivalentes se pudermos transformar uma na outra com uma sequência feita apenas com os dois passos de Pachner. Basta então mostrarmos que os diagramas de curvas destes dois passos satisfazem a relação dada na Equação (3.1) do Teorema 3.19.

Começaremos com o passo de Pachner $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$ dado na Figura 3.31-(a). Vimos no Teorema 3.22 que o diagrama da triangulação dada por $(1, 4, 6)$, que chamaremos de T_1 , e o diagrama de curva da triangulação dada por $(4, 10, 10)$, que chamaremos de T_2 , a menos de um número finito de curvas isoladas, podem ser levados um no outro fazendo uso apenas dos passos de *sliding* e *two-point move*. Como está mostrado no Teorema 3.22, os diagramas de curvas $D(T_1)$ e $D(T_2)$ estabelecem uma relação de equivalência de diagramas, ver Figura 3.42, que pode ser escrita da seguinte maneira

$$D(T_2) \approx D(T_1) + 3 \text{ (curva azul com uma vermelha tracejada)} + 3 \text{ (curva azul)} + 1 \text{ (curva vermelha)}.$$

Já os valores de α , β e γ , dados em (3.1), para o passo de Pachner $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$,

Figura 3.47 Nomeação das faces e linhas da figura anterior. Em (b) mostramos outra maneira de escrever a mesma figura. Na Figura (c) o mesmo sem a numeração.

Figura 3.48 Em (a) e (b) mostramos os tetraedros dos quais iremos retirar uma face azul, como está mostrado em (c). Depois, fazendo uso da propriedade da cointegral iremos obter a Figura (d).

são

$$\begin{aligned}\alpha &= \Delta t = (4 - 1) = 3, \\ \beta &= \Delta f - \Delta t = (10 - 4) - 3 = 6 - 3 = 3, \\ \gamma &= \Delta a - \Delta t = (10 - 6) - 3 = 4 - 3 = 1.\end{aligned}$$

Portanto, a Equação (3.1) satisfaz o passo $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$.

Agora vamos ao passo de Pachner $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$ mostrado na Figura 3.31-(b). Neste caso, o Teorema 3.23 mostra que o diagrama da triangulação dada por $(2, 7, 9)$, que chamaremos de T_1 , e o diagrama de curva da triangulação dada por $(3, 9, 10)$, que chamaremos de T_2 , a menos de um número finito de curvas isoladas, podem ser levados um no outro fazendo uso apenas dos passos de *sliding* e *two-point move*. Portanto, as curvas $D(T_1)$ e $D(T_2)$ estabelecem uma relação de equivalência de diagramas, ver Figura 3.45, que pode ser escrita da seguinte maneira

$$D(T_2) \approx D(T_1) + 1 \text{ (blue circle with red dashed line)} + 1 \text{ (blue circle)} + 0 \text{ (red circle)}.$$

Para este caso, os valores α , β e γ para o passo de Pachner $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$, de acordo com a Equação (3.1), são os seguintes

$$\begin{aligned}\alpha &= \Delta t = (3 - 2) = 1, \\ \beta &= \Delta f - \Delta t = (9 - 7) - 1 = 2 - 1 = 1, \\ \gamma &= \Delta a - \Delta t = (10 - 9) - 2 = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, a Equação (3.1) também satisfaz o passo $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$ ■

3.2.3 Invariante de Kuperberg

Nesta seção iremos apresentar o objeto construído por Kuperberg com o propósito de fornecer um invariante topológico em 3D. Para tal, como veremos, todas as discussões feitas até o momento no capítulo 3 serão importantes. Mas antes de continuar, gostaríamos de frisar que a demonstração apresentada no trabalho de Kuperberg [14] e a construção obtida em [39], seguida por nós nas demonstrações realizadas anteriormente, não são iguais. O invariante topológico no trabalho de Kuperberg é definido para uma partição de Heegaard e faz uso da teoria de Morse, enquanto nas seções anteriores nós utilizamos essencialmente triangulações e diagramas simplificados de Heegaard. Apesar de não termos discutido os modelos físicos, a escolha feita neste trabalho para demonstrar o invariante de Kuperberg torna mais

evidente a abordagem dessas teorias. Assim, nossos próximos resultados ainda consistirão na análise de triangulações e dos diagramas simplificados originados destas triangulações. Em particular, os passos de *sliding* e *two-point move* para os diagramas simplificados serão importantes.

Começaremos, portanto, considerando a triangulação de uma 3-variedade, ou seja, estamos interessados na colagem de tetraedros, e para entendê-la iremos observar uma das arestas da triangulação. Para o caso 3D, diferente do caso bidimensional, diversas faces podem chegar em uma mesma aresta, pois, além das faces do próprio tetraedro, as faces de outros tetraedros podem compartilhar a mesma aresta. Desta maneira, iremos utilizar o esquema apresentado na Figura 3.49-(a) para representar uma das arestas da triangulação.

Figura 3.49 Colagem de tetraedros. Em (a) indica-se como cada aresta da triangulação será compartilhada por diversas faces. Em (b) mostramos como podemos interpretar o esquema do item (a) com o sistema de curvas.

Chamaremos a figura central em vermelho de *suporte de colagem*, e sua forma dependerá exclusivamente da triangulação utilizada sobre a 3-variedade. Ou seja, dada uma triangulação para uma 3-variedade então cada aresta desta triangulação dará origem a um suporte de colagem específico.

A fim de utilizarmos o sistema de curvas, e os resultados expostos na primeira parte desta seção, podemos interpretar o esquema da Figura 3.49-(a) em termos do sistema de curvas, sem maiores dificuldades. Para isso, basta observar que para cada face teremos uma curva azul e para cada suporte de colagem, isto é, para cada aresta compartilhada, teremos uma curva vermelha, observe a Figura 3.49-(b).

A próxima etapa que devemos considerar para apresentar o invariante de Kuperberg será a de associar um conjunto de tensores com esta colagem. Ou seja, para cada face da triangulação iremos associar um tensor que indicaremos por $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$, enquanto para cada suporte de colagem iremos associar um segundo tensor que indicaremos por $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$. Por construção, o tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ também estará associado com uma curva azul, e o tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ com uma curva vermelha. Podemos, com isso, estabelecer a seguinte regra de colagem. Quando uma face da triangulação estiver conectada a uma aresta, iremos realizar

a contração de um dos índices do tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ com um dos índices do tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$. Apesar de toda triangulação possuir uma representação no sistema de curvas, nem todo diagrama de curvas está associado com uma triangulação, neste sentido, alguns diagramas de curvas podem estar associados com tensores ainda mais gerais do que os associados com a triangulação.

Após estas considerações, iremos agora empregar a notação de Kuperberg para representar os tensores em um processo de colagem, ver Figura 3.50.

Figura 3.50 Tensores associados com o processo de colagem de uma triangulação tridimensional.

Considere, agora, uma álgebra de Hopf A , cuja estrutura foi dada com a notação de setas na Figura 3.7 e que reproduzimos novamente a seguir.

Figura 3.51 Notação de setas para descrever uma álgebra de Hopf.

As relações satisfeitas com respeito a esta estrutura são dadas nas figuras 3.9 e 3.10. Em particular, com a operação de multiplicação obtivemos o tensor da Figura 3.11-(e), o

qual pode ser reescrito do seguinte modo.

Fazendo uso da associatividade da álgebra, outra maneira possível para escrevermos o último tensor será a seguinte.

Analogamente, poderemos utilizar a estrutura de coálgebra e escrever a próxima figura.

Com estas observações, vamos considerar que os tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ associados com a triangulação serão exatamente estes dois últimos tensores M e Δ obtidos para uma álgebra de Hopf A . A colagem propriamente dita ocorrerá quando cada face estiver conectada ao suporte de colagem, em sua respectiva componente. No sistema de curvas isto corresponderá ao cruzamento de uma curva vermelha com uma curva azul, e, portanto, também corresponderá à contração de um índice do tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ com um índice do tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$. Contudo, resta ainda considerar a orientação do tetraedro. Neste caso, a orientação de cada face impõe uma orientação em cada curva azul, e, de modo análogo, a orientação de uma aresta impõe uma orientação sobre cada curva vermelha, ver Figura 3.29.

Utilizaremos a próxima convenção com respeito à orientação.

Definição 3.24 *Seja H o handlebody de uma 3-variedade com triangulação sobre o qual obtemos um sistema de curvas. Considere o cruzamento de uma curva azul e uma curva vermelha, ambas orientadas, em um ponto p da superfície ∂H . Sejam v e w dois vetores tangentes em p pertencentes respectivamente à curva vermelha e à curva azul. Caso $\{v, w\}$ seja uma base positiva para o espaço tangente $T_p\partial H$ então a contração entre os tensores $M_{a_1a_2\dots a_m}$ e $\Delta^{b_1b_2\dots b_n}$ será feita diretamente, ver Figura 3.52-(c). Caso $\{v, w\}$ seja uma base negativa para $T_p\partial H$ então iremos interpor uma antípoda S para a contração dos tensores $M_{a_1a_2\dots a_n}$ e $\Delta^{b_1b_2\dots b_n}$, ver Figura 3.52-(d).*

Figura 3.52 Convenção para contração dos tensores. Se os vetores tangentes das curvas formarem uma base positiva (a) então iremos realizar a contração diretamente (c). Caso contrário (b), iremos intermediar com uma antípoda (d).

Antes de prosseguir vamos interpretar, a partir da associação de tensores que pretendemos realizar, o significado das curvas isoladas encontradas diversas vezes nas demonstrações anteriores. Como já sabemos, a cada curva do sistema de curvas vamos associar um tensor. Por outro lado, a contração dos índices tensoriais acontece quando duas curvas de cores diferentes se cruzam. Então qual o significado de uma curva isolada? Neste caso, os índices do tensor associado também deverão estar contraídos mas como não há o cruzamento com nenhuma outra curva, os mesmos devem estar, portanto, contraídos entre si. Logo, para cada curva isolada teremos um dos casos apresentados na Figura 3.53.

Figura 3.53 A cada curva isolada teremos um tensor com todos os índices contraídos.

Além de uma única curva isolada, outra situação também presente nas demonstrações foi a presença de uma curva vermelha e de uma curva azul que se cruzam mas que foram removidas da triangulação original. Neste caso, temos a contração entre um índice do tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ com um índice do $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$, mas os demais índices também deverão estar contraídos, situação semelhante à encontrada no Teorema 3.7, logo, este tipo de configuração também fornecerá a dimensão da álgebra, como mostra o próprio Teorema 3.7.

Com isso, já possuímos todos os elementos necessários para apresentar o objeto construído por Kuperberg. Começaremos apresentando a seguinte função de partição baseada no modelo de Kuperberg, ver [8, 39, 40] para algumas aplicações deste modelo.

Definição 3.25 *Sejam M uma 3-variedade fechada e com orientação, T uma triangulação para M e A uma álgebra de Hopf. Considere a contração de todos os tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ obtidos para T somada sobre todas as configurações possíveis, isto é*

$$Z(M, T) = \sum_{\text{conf}} \prod_F \prod_L \prod_S M_{a_1 a_2 \dots a_m} \Delta^{b_1 b_2 \dots b_n} S_y^x,$$

onde o índice F indica todas as faces, o índice L todas as arestas e o índice S todos os cruzamentos nos quais a antípoda será interposta.

Com o próximo teorema, para o qual utilizaremos a Definição 3.5 de uma álgebra de Hopf involutória, iremos verificar algumas características topológicas da função de partição $Z(M, T)$.

Teorema 3.26 *$Z(M, T)$ será um invariante quase topológico, isto é, um invariante que depende fracamente da triangulação, caso a álgebra de Hopf seja involutória. Mais precisamente*

$$Z(M, T_2) = Z(M, T_1) f(T_1, T_2),$$

onde $f(T_1, T_2)$ é um parâmetro que depende exclusivamente dos tamanhos das triangulações.

Observação 3.27 O cálculo de $Z(M, T)$ envolve uma triangulação T , mas se esta função de partição for um invariante topológico, então seu valor deverá ser independente da escolha da triangulação. De fato, ainda será preciso considerar alguns fatores associados com a triangulação, os quais podem ser determinados, por isso, $Z(M, T)$ será um invariante quase topológico.

Demonstração. Sejam então duas triangulações T_1 e T_2 para M . Gostaríamos de verificar como os valores $Z(M, T_1)$ e $Z(M, T_2)$ se relacionam. A cada triangulação estará associado um conjunto de tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ como descrevemos agora há pouco. Por outro lado, sabemos que para cada triangulação T_1 e T_2 é possível obter um diagrama de curvas, e neste sistema de curvas cada face e cada aresta será representada por uma curva azul e por uma curva vermelha, respectivamente. Logo, os tensores associados com as triangulações podem ser associados com os diagramas de curvas que representam estas triangulações, como já foi visto na Figura 3.49.

Além disso, como T_1 e T_2 são triangulações da mesma variedade, elas são equivalentes, portanto, de acordo com o Teorema 3.19, os dois diagramas de curvas que representam estas triangulações podem ser transformados um no outro através de uma sequência de passos de *sliding* e de *two-point move*. Assim, precisamos entender como os tensores associados com as curvas dos diagramas se comportam com relação a estes dois passos. Para o que segue, considere que A seja uma álgebra de Hopf involutória.

Seja, então, o passo de *sliding* de curvas azuis apresentado na Figura 3.54 seguinte.

Figura 3.54 Passo de *sliding* da curva azul.

A partir da Figura 3.54-(b) mostraremos como é possível chegar na Figura 3.54-(a). Observando a Figura 3.54-(b) sabemos que para cada curva azul estará associado um tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_m}$ e para curva cada vermelha um tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$, isto está mostrado na figura

seguinte, na qual nomeamos cada um dos tensores através de números ou letras.

Apenas reescrevendo alguns dos operadores M e Δ podemos obter a figura seguinte, na qual destacamos uma condição de biálgebra.

Substituindo a condição de biálgebra anterior chegamos na próxima figura da qual também é possível destacar uma nova condição de biálgebra.

Reescrevendo mais uma vez a condição de biálgebra, chegamos na figura seguinte.

Desta vez, considerando o caso particular uma álgebra de Hopf involutória, isto é, na qual $S^2 = 1_A$, podemos, com ajuda da propriedade da cointegral, ver Teorema 3.6, reescrever a parte em destaque da figura anterior e obter o seguinte.

Por fim, basta utilizar a condição da unidade da álgebra de Hopf sobre a parte em

destaque da figura anterior para chegarmos então na configuração dos tensores para Figura 3.54-(a), como pretendíamos.

O *sliding* de curvas vermelhas é garantido pela dualidade da álgebra de Hopf, isto é, podemos trocar os tensores M e Δ na demonstração anterior.

Por fim, ainda precisamos verificar que a condição do passo de *two-point move* é satisfeita. Mas isto pode ser feito sem muita dificuldade. Basta percebermos que as curvas, ao se cruzarem duas vezes seguidas, terão a contração de um dos índices *sem* a antípoda e a outra contração, por consequência, *com* a antípoda. Neste caso vale a própria condição de existência da antípoda, ver a Figura 3.10-(b).

Os diagramas de curvas para duas triangulações equivalentes se relacionam através da Equação (3.1), como foi mostrado no Teorema 3.19. Da própria relação (3.1) vemos que existem fatores adicionais e que dependem das características da triangulação, a saber, do número de tetraedros, de faces e de arestas ■

Ainda que a função de partição $Z(M, T)$ obedeça aos passos de transformação entre diagramas, isto não é suficiente para fornecer um invariante topológico. A próxima definição proposta por Kuperberg terá por objetivo construir um invariante topológico.

Definição 3.28 Chamamos de invariante de Kuperberg a seguinte grandeza

$$\#(M, T) = Z(M, T)(\dim A)^{t-f-a},$$

onde t é o número de tetraedros de T , f é o número de faces e a é o número de arestas.

Na Definição 3.26, $Z(M, T)$ é obtida para uma variedade M com triangulação dada. Os tensores associados com esta triangulação também podem ser associados com um sistema de curvas que represente a triangulação. Neste sentido, a expressão $Z(M, T)$ pode ser obtida tanto para uma triangulação quanto para um sistema de curvas. Contudo, como já discutimos anteriormente, nem todo sistema de curvas está relacionado com uma triangulação. Vamos, então, considerar as seguintes propriedades da função de partição $Z(M, T)$ calculada para os tensores de um sistema de curva qualquer.

Propriedade 3.29 Sejam dois diagramas de curvas D_1 e D_2 quaisquer. A função de par-

tição $Z(D)$ definida em analogia com $Z(M, T)$ para um diagrama de curvas D qualquer, satisfaz as seguintes propriedades.

- (a) $Z(D(T)) = Z(M, T)$, onde $D(T)$ é o diagrama de curvas da triangulação T ,
- (b) $Z(D_1 + D_2) = Z(D_1)Z(D_2)$.

Teorema 3.30 $\#(M, T)$ é um invariante topológico.

Demonstração. Considere uma variedade M e duas triangulações equivalentes T_1 e T_2 para M . Pelo Teorema 3.26 sabemos que os valores $Z(M, T_1)$ e $Z(M, T_2)$ estão relacionados, pois os tensores associados com os diagramas de curvas para T_1 e para T_2 obedecem aos passos de transformação, caso a álgebra associada seja involutória.

Por outro lado, de acordo com a relação de equivalência dada em (3.1), os diagramas de curvas de T_1 e T_2 se relacionam através dos passos de transformação da seguinte maneira

$$D(T_2) \approx D(T_1) + \alpha \text{ (diagrama com cruzamento azul-vermelho) } + \beta \text{ (círculo azul) } + \gamma \text{ (círculo vermelho) }.$$

Utilizando as propriedades de $Z(D)$ podemos então escrever o seguinte.

$$\begin{aligned} Z(D(T_2)) &= Z \left(D(T_1) + \alpha \text{ (diagrama com cruzamento azul-vermelho) } + \beta \text{ (círculo azul) } + \gamma \text{ (círculo vermelho) } \right) \\ &= Z \left(D(T_1) \right) Z \left(\alpha \text{ (diagrama com cruzamento azul-vermelho) } \right) Z \left(\beta \text{ (círculo azul) } \right) Z \left(\gamma \text{ (círculo vermelho) } \right) \end{aligned}$$

e ainda

$$Z(M, T_2) = Z(M, T_1) \left[Z \left(\text{diagrama com cruzamento azul-vermelho} \right) \right]^\alpha \left[Z \left(\text{círculo azul} \right) \right]^\beta \left[Z \left(\text{círculo vermelho} \right) \right]^\gamma.$$

Como vimos anteriormente, ao discutir a construção dos tensores, para cada curva isolada e para o cruzamento entre uma única curva azul e uma única vermelha, estará associado um tensor cujo valor é o número dado pela dimensão da álgebra A , ver comentários seguintes à Definição 3.24. Com isso, podemos ainda escrever o seguinte

$$Z(M, T_2) = Z(M, T_1) (\dim(A))^\alpha (\dim(A))^\beta (\dim(A))^\gamma,$$

e substituindo os valores dados na Definição 3.19, $\alpha = \Delta t$, $\beta = \Delta f - \Delta t$ e $\gamma = \Delta a - \Delta t$ temos

$$\begin{aligned} Z(M, T_2) &= Z(M, T_1) (\dim(A))^{\Delta t} (\dim(A))^{\Delta f - \Delta t} (\dim(A))^{\Delta a - \Delta t} \\ &= Z(M, T_1) (\dim(A))^{-\Delta t} (\dim(A))^{\Delta f} (\dim(A))^{\Delta a} \\ &= Z(M, T_1) (\dim(A))^{-(t_2 - t_1)} (\dim(A))^{f_2 - f_1} (\dim(A))^{a_2 - a_1} \\ &= Z(M, T_1) (\dim(A))^{f_2 + a_2 - t_2} (\dim(A))^{-(f_1 + a_1 - t_1)} \end{aligned}$$

e ainda

$$Z(M, T_2) (\dim(A))^{f_2 + a_2 - t_2} = Z(M, T_1) (\dim(A))^{f_1 + a_1 - t_1}.$$

Observando esta igualdade vemos que cada parcela depende de uma única triangulação, no lado esquerdo de T_2 e no lado direito de T_1 . Como este resultado vale para quaisquer triangulações T_1 e T_2 equivalentes, ele será, portanto, um invariante topológico. Considerando apenas a notação dada na Definição 3.28 vemos que a grandeza obtida aqui é o objeto $\#(M, T)$ definido por Kuperberg, o qual, como acabamos de mostrar, é um invariante topológico ■

Como já foi comentado, existem algumas diferenças entre a demonstração realizada aqui e a feita no trabalho de Kuperberg [14]. Podemos destacar com respeito à demonstração que acabamos de apresentar, o fato de que ela pode ser estendida para variedades com bordo em 4D e também para teorias de campo com matéria¹. Assim, nossa escolha, em detrimento da utilização dos diagramas de Heegaard, como feito em [14], se mostra mais adequada quando se tem interesse no tratamento de modelos físicos.

3.3 Construção de uma TQCT 3D a partir do invariante de Kuperberg

Como foi mostrado no final da seção anterior, o objeto proposto por Kuperberg é de fato um invariante topológico. Contudo, ao longo de nossa demonstração, apenas consideramos variedades *sem bordo*. Nos capítulos anteriores, vimos que a fim de construirmos uma TQCT é preciso compreender como um funtor que define uma TQCT pode ser construído a partir de variedades *com bordo*. Portanto, devemos agora estender o invariante de Kuperberg para este caso. Tendo isto em vista, nossa estratégia será a de considerar inicialmente uma 3-variedade sem bordo e, a partir desta, delimitar como pretendemos definir a TQCT.

Seja M uma 3-variedade compacta e sem bordo, podemos pensar, por exemplo, na 3-esfera. Na Figura 3.55-(a) mostramos uma possível representação de M . Assim como já

¹Os dois tópicos são questões centrais em alguns dos trabalhos realizados por nosso grupo de pesquisa. No entanto, os artigos que tratam sobre o assunto ainda estão em preparo.

fizemos anteriormente, é possível encontrar para M uma triangulação T , em acordo com a Definição 3.8, ou seja, procuramos uma colagem na qual somente tetraedros sejam utilizados e que forneça a variedade tridimensional M , como esquematizamos na Figura 3.55-(b). Como a variedade M é fechada, então, independente da triangulação T escolhida, não existirá nenhuma face ou aresta isolada. Agora considere uma superfície bidimensional “dentro” de M . Escolha, como exemplo, o equador da Figura 3.55-(b). Sempre será possível encontrar um arranjo dos tetraedros de tal modo que algum conjunto de faces e de arestas forneça uma triangulação para esta superfície escolhida, em acordo, desta vez, com a Definição 1.28, pois estamos observando uma *superfície*. Este arranjo sempre existe pois, segundo as observações que fizemos sobre os tetraedros envolvidos na triangulação de M , as arestas e as faces não podem ser parcialmente compartilhadas, mas o tamanho dos tetraedros não é levado em consideração, por isso podemos diminuir/aumentar os tetraedros de T e obter uma triangulação da superfície escolhida anteriormente. Após todas estas considerações encontraremos uma superfície triangularizada no interior de M , como vemos na Figura 3.56-(a).

Agora vamos supor que façamos um “corte” de M exatamente ao longo da superfície selecionada anteriormente, de tal modo que M dará origem a duas novas variedades, ambas com bordo não trivial. Os bordos destes dois novos objetos serão variedades bidimensionais, como podemos ver agora Figura 3.56-(b).

Figura 3.55 Triangulação de uma 3-variedade M . Em (a) vemos uma representação de M . Já em (b) vamos considerar uma triangulação T para M realizada apenas com tetraedros.

Podemos, portanto, formular a seguinte questão. Sabemos como associar uma rede tensorial para a triangulação T de M fornecendo então o invariante de Kuperberg. Também já discutimos como devemos associar tensores ao bordo de uma 3-variedade. Mas considerando especificamente o “corte” realizado agora, quais seriam as modificações originadas de um processo como este para o invariante de Kuperberg? Como sabemos, a construção do invariante

Figura 3.56 Dada uma triangulação T da 3-variedade M vamos considerar uma superfície no interior de M e uma possível triangulação desta *superfície*, como vemos em (a). A triangulação desta superfície origina-se a partir da triangulação T de M . Na figura (b) apresentamos a configuração final após um “corte” ao longo da superfície.

foi realizada com a associação dos tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ com as faces e dos tensores $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_m}$ com as arestas de uma 3-variedade sem bordo e triangularizada. Desta maneira, o invariante está bem definido para a situação descrita pela Figura 3.55-(b). No entanto, gostaríamos de compreender como a construção de Kuperberg pode ser definida para a situação mostrada pela Figura 3.56-(b). Como já fizemos na seção anterior, vamos iniciar com a análise — *antes* de realizarmos o “corte” — de uma das arestas da triangulação T .

Assim, vamos começar nos concentrando apenas sobre o que acontece com cada curva vermelha e com cada curva azul presentes na região do centro de M *antes* da separação. Essa região será uma variedade bidimensional, logo, a triangulação herdada de T será feita apenas por faces e arestas dos tetraedros internos à M . Por outro lado, diversas faces poderão chegar em uma mesma aresta, como discutimos na seção anterior.

Considere, então, uma aresta qualquer contida na região sobre a qual pretendemos realizar o corte, ver a Figura 3.57-(a). Diversas faces chegam nesta aresta, por isso destacamos em azul apenas as faces que pertencem à região central que será separada. Como fizemos antes para o invariante de Kuperberg, vamos proceder de maneira análoga e associar um

tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ que ficará determinado quando a triangulação de M for dada, ver discussão sobre o suporte de colagem na seção 3.2.2 anterior. Na Figura 3.57-(b) mostramos o tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ que está associado com a aresta da Figura 3.57-(a). Também destacamos com pontos em azul os índices tensoriais que estarão contraídos com as faces de cor azul².

Figura 3.57 Em (a) representamos uma das arestas da variedade M e diversas faces da triangulação chegando na mesma, das quais algumas (de cor azul) pertencem à região que sofrerá o “corte”. Em (b) apresentamos o tensor correspondente da aresta destacada em (a).

O tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ pode ser reescrito como apresentamos a seguir na Figura 3.58. Fazendo uso da notação de Kuperberg, iremos obter dois novos tensores tais que a contração destes irá retomar o tensor dado na Figura 3.58. Para isso, considere as duas regiões em destaque na própria Figura 3.58 e os dois tensores apresentados a seguir na Figura 3.59. A contração será entre a seta entrando (índice covariante) do tensor na Figura 3.59-(a) e a seta saindo (índice contravariante) do tensor na Figura 3.59-(b). Com a notação de setas fica claro que a contração destes dois tensores recupera o tensor dado na Figura 3.58. Além disso, para o tensor na Figura 3.59-(a) os demais índices estarão todos contraídos com faces da variedade superior do “corte”. Já o tensor na Figura 3.59-(b) terá os demais índices contraídos com faces da variedade da parte inferior do corte e também com faces da região que sofreu o “corte”, como está indicado através dos pontos em cor azul.

Uma vez que sabemos quais são os tensores associados com as arestas da região que dividirá a variedade M , vamos observar como a própria triangulação ficará depois do “corte”. Ou seja, com a separação, um dos bordos permanecerá com as faces e o outro não. Em nosso caso, a variedade abaixo da região a ser cortada ficará com as faces e a variedade acima não.

Apesar de termos nos concentrado em apenas uma das arestas, podemos generalizar esta construção para todas as arestas do “corte”. Assim, convencionaremos a seguinte triangulação para os bordos. O bordo para fora permanecerá com as faces e arestas herdadas de

²Para simplificarmos a discussão, quando dissermos “uma contração com uma face ou aresta” queremos dizer “uma contração com os índices tensoriais associados com uma face ou aresta”.

Figura 3.58 Separação de um tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$. Com este corte da variedade o tensor superior será chamado de *bordo para fora* e o inferior de *bordo para dentro*.

Figura 3.59 Tensores obtidos após o “corte” da 3-variedade M .

uma triangulação de M , enquanto o bordo para dentro permanecerá apenas com as arestas, ver Figura 3.60. Além disso, como vemos na Figura 3.59, com relação à triangulação do bordo para dentro, cada tensor associado com uma aresta terá uma seta entrando; enquanto cada tensor com relação ao bordo para fora terá uma seta saindo.

Observe que nosso objetivo com esta construção é, de fato, fornecer uma estrutura para realizarmos a colagem entre 3-variedades com bordo. Portanto, podemos considerar, de modo inverso, que a convenção adotada para os bordos das 3-variedades é suficiente para que estabeleçamos um processo de colagem. A seguir, com as duas próximas definições formalizaremos esta discussão.

Definição 3.31 (Triangulação do bordo em 3D) *Sejam M uma 3-variedade e Σ_f um bordo para fora de M . Chamamos de triangulação do bordo para fora Σ_f uma triangulação reali-*

Figura 3.60 Em (a) apresentamos a separação de uma aresta na região do centro de M . Em (b) mostramos como as faces (em azul) e as arestas (em vermelho) ficarão após a separação. A triangulação do bordo para fora será feita mantendo todas as faces do “corte”, já para o bordo para dentro a triangulação será feita apenas com as arestas.

zada, de maneira usual, com faces e arestas. Seja Σ_d um bordo para dentro de M . Chamamos de triangulação do bordo para dentro Σ_d uma triangulação realizada apenas com arestas.

Desta maneira, quando nos referirmos a uma triangulação do bordo de uma 3-variedade, também será preciso especificar se o bordo é para fora ou para dentro, já que os dois casos terão triangulações diferentes.

Definição 3.32 (Tensor de Kuperberg para 3-variedade com bordo) *Considere uma 3-variedade M compacta com bordo não trivial e uma triangulação T para M que também trianguliza o bordo de acordo com a Definição 3.31. Definimos o tensor de Kuperberg associando os tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_n}$ para faces e arestas internas de M , de modo usual, e contraindo todos os índices tensoriais, ver Definição 3.28. Para cada aresta da triangulação do bordo para fora associamos um tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_\alpha \dots b_n}$ e para cada aresta do bordo para dentro associamos um tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_\alpha \dots b_n}$. Onde b_α é um índice de tensor não contraído.*

A convenção anterior é suficiente para determinarmos o comportamento dos tensores associados com a triangulação após um processo de colagem de 3-variedades. Ou seja, basta

realizarmos a contração dos índices tensoriais b_α 's associados com as triangulações dos bordos complementares.

Como também vimos na discussão do final do Capítulo 2, a dependência de uma triangulação específica para o bordo não permite a construção de uma TQCT. No entanto, diferente do caso bidimensional, agora não podemos fazer uma escolha particular de triangulação, pois naquele caso o único bordo a ser considerado era S^1 , enquanto no caso 3D existem diversos cobordantes possíveis. Por isso, ainda será preciso adotar uma outra abordagem com relação à triangulação.

Definição 3.33 *Chamamos de categoria $\mathbf{3Cob}^T$ a triangulação dos morfismos da $\mathbf{3Cob}$.*

Assim como no caso bidimensional, a triangulação de um morfismo impõe a triangulação do bordo, mas que agora será feita de acordo com a Definição 3.31. Portanto, os morfismos serão iguais se as triangulações dos bordos forem iguais, ou seja, a classe de equivalência dos morfismos da $\mathbf{3Cob}^T$ será dada em função dos homeomorfismos de 3-variedades e também da triangulação dos bordos. Por outro lado, cada triangulação distinta de um objeto da $\mathbf{3Cob}$ será um objeto distinto da categoria $\mathbf{3Cob}^T$.

Além disso, de acordo com a Definição 3.32, sabemos que para cada aresta de um bordo para fora estará associado um tensor da forma $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_\alpha \dots b_n}$, enquanto para cada aresta de um bordo para dentro estará associado um tensor da forma $\Delta^{b_1 b_2 \dots}_{b_\alpha} \dots b_n$. Como nos dois casos os índices b_α 's não estarão contraídos, podemos obter um funtor $Z^T(M, T)$, da forma $Z^T : \mathbf{3Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$, em analogia com a Definição 3.25, observando somente que a triangulação dos bordos deverá permanecer fixa. Assim, o invariante de Kuperberg apresentado na Definição 3.28 continuará o mesmo, pois apenas a triangulação interna da 3-variedade deverá ser considerada com relação aos passos de Pachner.

Uma vez definido o invariante de Kuperberg para 3-variedades com bordo, podemos considerar o seguinte.

Proposição 3.34 *Considere para a categoria da $\mathbf{3Cob}^T$, um morfismo $(\Sigma \times I, T_{tt})$ e um objeto $(\Sigma, t)_{t \in \tau}$, onde τ é o conjunto de todas as triangulações possíveis de Σ . O endomorfismo $Z^T : \mathbf{3Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$ dado pelo funtor*

$$Z^T(\Sigma \times I, T_{tt}) \in \text{End}(Z^T(\Sigma, t))$$

é um projetor.

Teorema 3.35 *A dimensão da $\text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{tt}))$ é a mesma para toda triangulação $t \in \tau$.*

As provas destes dois últimos resultados serão análogas às dadas na Proposição 2.67 e no Teorema 2.69, já que elas seguem essencialmente, nos dois casos, do fato de a triangulação nos bordos permanecer fixa. E, da mesma maneira, iremos definir o seguinte funtor P .

Definição 3.36 Considere o funtor $Z^T : \mathbf{3Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$

$$Z^T(M, T_{tt'}) : Z^T(\Sigma_d, t) \rightarrow Z^T(\Sigma_f, t'), \quad \forall (M, T_{tt'}) : (\Sigma_d, t) \Rightarrow (\Sigma_f, t'),$$

onde Σ_d e Σ_f são os bordos para dentro e para fora de M ; e as triangulações t e t' pertencem, respectivamente, aos conjuntos τ e τ' de possíveis triangulações de Σ_d e Σ_f . Definimos um funtor $P : \mathbf{3Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$ que agirá sobre os objetos da seguinte maneira

$$P(\Sigma, t) = \text{Im}(Z^T(\Sigma \times I, T_{tt'})) = Z^T(\Sigma \times I, T_{tt'})[Z^T(\Sigma, t)],$$

e sobre os morfismos

$$P(M, T_{tt'}) = Z^T(\Sigma_d \times I, T_{t't'}) \circ Z^T(M, T_{tt'}).$$

Contudo, diferente do caso 2D, não podemos escolher uma das triangulações do bordo, já que não sabemos como as dimensões dos objetos $P(\Sigma, t)$ se relacionam para Σ qualquer. Logo, não podemos obter uma TQCT, já que a ação do funtor P sobre o cilindro depende do bordo Σ e, portanto, da triangulação. Considere, agora, o seguinte.

Proposição 3.37 O funtor $P(\Sigma \times I, T_{tt'})$ é um isomorfismo para quaisquer $t \in \tau$ e $t' \in \tau'$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.35 os objetos $P(\Sigma, t)$ possuem a mesma dimensão para qualquer triangulação fixa $t \in \tau$. Como o morfismo $P(\Sigma \times I, T_{tt})$ é a identidade em $P(\Sigma, t)$, então o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P(\Sigma, t) & \xrightarrow{P(\Sigma \times I, T_{tt'})} & P(\Sigma, t') & \xrightarrow{P(\Sigma \times I, T_{t't})} & P(\Sigma, t) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & P(\Sigma \times I, T_{tt}) & & \end{array}$$

comuta, e $P(\Sigma \times I, T_{tt'})$ é, portanto, um isomorfismo ■

Observe, em particular, que $P(\Sigma \times I, T_{tt})$ também é um isomorfismo. Vamos resumir toda a discussão feita até agora através do seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} (\Sigma_f, t') & & Z^T(\Sigma_f, t') & & P(\Sigma_f, t') \\ \uparrow & \xrightarrow{Z^T} & \uparrow & \xrightarrow{P} & \uparrow \\ (M, T_{tt'}) & & Z^T(M, T_{tt'}) & & P(M, T_{tt'}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (\Sigma_d, t) & & Z^T(\Sigma_d, t) & & P(\Sigma_d, t) \end{array}$$

Ou seja, primeiro descrevemos a categoria $\mathbf{3Cob}^T$ na Definição 3.33. Depois, com auxílio da Definição 3.32, encontramos um funtor $Z^T : \mathbf{3Cob}^T \rightarrow \mathbf{Vet}$. Contudo, o funtor

Z^T não satisfaz os axiomas de uma TQCT pois a identidade em $\mathbf{3Cob}^T$ não é mais o cilindro, como já havíamos discutido no Capítulo 2. Com isso, também em analogia com o que foi feito no capítulo anterior, construímos o funtor P , como está apresentado na Definição 3.36. Assim, o morfismo $P(\Sigma, T_{tt})$ é a identidade em $P(\Sigma, t)$, mas, diferente do caso 2D, não podemos fazer uma escolha para a triangulação dos objetos Σ , visto que existem diferentes objetos, mesmo para Σ conexo.

A seguir iremos apresentar uma nova definição para o espaço vetorial associado com os objetos $\mathbf{3Cob}^T$ e para os operadores associados como os morfismos da $\mathbf{3Cob}^T$ a fim de remover a dependência da triangulação.

Definição 3.38 *Seja M uma 3-variedade com bordo para dentro Σ_d e bordo para fora Σ_f com as possíveis triangulações τ_d e τ_f para Σ_d e para Σ_f , respectivamente. Definimos o funtor Q sobre os objetos da $\mathbf{3Cob}^T$ da seguinte maneira*

$$Q(\Sigma) = \left\{ v \in \prod_{t \in \tau} P(\Sigma, t) \mid P(\Sigma \times I, T_{tt'})[v_t] = v_{t'}; \right. \\ \left. v_t \in P(\Sigma, t), v_{t'} \in P(\Sigma, t'); \quad \forall t, t' \in \tau \right\}$$

e sobre os morfismos da seguinte maneira

$$Q(M)[v_{t_\alpha}] = \left\{ \mathcal{O}[v_{t_\alpha}] \in \prod_{t \in \tau} P(M, T_{t_\alpha t}) \mid P(M, T_{t_\alpha t})[v_{t_\alpha}] = P(\Sigma_f \times I, T_{t't}) \circ P(M, T_{t_\alpha t'})[v_{t_\alpha}]; \right. \\ \left. v_t \in P(\Sigma_f, t), v_{t'} \in P(\Sigma_f, t'), \quad \forall t, t' \in \tau_f; \quad v_{t_\alpha} \in P(\Sigma_d, t_\alpha) \right\}$$

Teorema 3.39 *Sejam M uma 3-variedade, Σ_d e Σ_f os bordos para dentro e para fora de M , respectivamente. O invariante de Kuperberg definido para M com os espaços vetoriais associados aos bordos Σ_d e Σ_f através de Q , como apresentado pela Definição 3.38, satisfaz os axiomas de uma TQCT.*

Demonstração. Já sabemos que o funtor P satisfaz as propriedades de uma TQCT, exceto pelo fato de ainda existir uma dependência com relação à triangulação dos bordos. Contudo, não podemos fixar uma triangulação, como já foi dito anteriormente, pois, diferente do caso 2D, cujo único bordo conexo era S^1 , em 3D existem distintos bordos conexos.

Precisamos mostrar, portanto, que com a escolha do funtor dado por Q é possível eliminar a dependência com relação à triangulação. Considere, inicialmente, a ação do morfismo $Q(M)$ sobre um vetor $v_{t_\alpha} \in P(\Sigma_d, t_\alpha)$. Observe que o morfismo $Q(M)$ é definido agora como um produto dado por $\prod_{t \in \tau} P(M, T_{t_\alpha t})$ obtido a partir de todos os morfismos

$P(M, T_{\alpha t})$ que fazem o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & V_{t_\alpha} & \\ P(M, T_{t_\alpha t'}) \swarrow & & \searrow P(M, T_{t_\alpha t}) \\ V_{t'} & \xrightarrow{P(\Sigma_f \times I, T_{t't})} & V_t \end{array}$$

comutar para $\forall t, t' \in \tau_f$.

Observando ainda que o operador $P(\Sigma_f \times I, T_{t't})$ é um isomorfismo, então, a partir de um dado vetor $v_{t_\alpha} \in P(\Sigma_d, t)$ com $t \in \tau_d$, podemos encontrar uma família de vetores $v_t \in P(\Sigma_f, t)$ tais que

$$P(\Sigma_f \times I, T_{tt'})[v_t] = v_{t'},$$

para $\forall t, t' \in \tau_f$, o que determina um elemento do seguinte espaço vetorial

$$Q(\Sigma_f) = \left\{ v \in \prod_{t \in \tau} P(\Sigma_f, t) \mid P(\Sigma_f \times I, T_{tt'})[v_t] = v_{t'}; \right. \\ \left. v_t \in P(\Sigma_f, t), v_{t'} \in P(\Sigma_f, t'); \quad \forall t, t' \in \tau_f \right\},$$

ou seja, um objeto definido pelo funtor Q .

Por outro lado, dado um outro vetor $v_{t_\beta} \in P(\Sigma_d, t_\beta)$ o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha & \xrightarrow{P(\Sigma_d \times I, t_{\alpha\beta})} & V_\beta \\ P(M, T_{t_\alpha t}) \searrow & & \swarrow P(M, T_{t_\beta t}) \\ & V_t & \end{array}$$

também comuta, pois $P(\Sigma_d \times I, t_{\alpha\beta})$ também é um isomorfismo. Logo, o espaço $Q(\Sigma_f)$ obtido não depende de nenhuma escolha particular de triangulação para o vetor cujo espaço agora é $Q(\Sigma_d)$ e, dessa maneira, todo este desenvolvimento não depende das triangulações envolvidas, e isto encerra a demonstração ■

A ação do funtor Q sobre os objetos Σ considera todas as possíveis triangulações de Σ , eliminando qualquer dependência de uma escolha particular de triangulação. De modo análogo, a ação de Q sobre os morfismos também considera todas as possíveis triangulações de um morfismo M para todas as triangulações distintas dos objetos Σ_d e Σ_f , respectivamente

bordo para dentro e bordo para fora de M . Na Figura 3.61 (ver próxima página) encontramos o espaço vetorial $Q(\Sigma)$ para a 2-esfera S^2 , enquanto na Figura 3.62 encontramos o mesmo para o toro T^2 . Já na figura 3.63 vemos como o isomorfismo do funtor P fornece a comutação de todos os diagramas que correlacionam os espaços vetoriais V_i da 2-esfera e os espaços vetoriais W_i do toro.

Apesar da Definição 2.70 ter sido construída para o caso bidimensional, acabamos de mostrar como é possível estender alguns dos seus resultados para o caso tridimensional. Por esta razão, o caso bidimensional não apenas nos serviu de modelo, mas nos forneceu diversos elementos indispensáveis para que construíssemos a TQCT 3D.

Figura 3.61 Ação do funtor Q sobre a 2-esfera S^2 . $Q(\Sigma)$ é definido como o produto que envolve todos os espaços vetoriais V_i associados com as possíveis triangulações t_i de S^2 .

Figura 3.62 Ação do funtor Q sobre o toro T^2 . De modo análogo ao que ocorre para S^2 , neste caso $Q(\Sigma)$ será o produto que envolve todos os espaços vetoriais W_i associados com as possíveis triangulações t_i de T^2 .

Figura 3.63 Com auxílio do isomorfismo do functor P , todos os diagramas desta figura comutam, logo, podemos obter um novo functor $Q(M)$ que fornece um único morfismo para cada M e que envolve todas as possíveis triangulações entre dois objetos Σ_d e Σ_f .

Conclusão

Ao longo de nosso trabalho procuramos apresentar os aspectos fundamentais ligados às TQCT's. Dessa maneira, após discutirmos o invariante de Kuperberg para variedades com bordo, apresentamos a TQCT 3D associada com este invariante. Como vimos, foi essencial obtermos uma convenção para a triangulação sobre o bordo a fim de realizarmos a colagem de variedades tridimensionais neste caso e, por fim, estender o invariante de Kuperberg para tais variedades.

Com isso, além de apresentarmos inicialmente uma coleção de resultados fundamentais sobre as TQCT's, procuramos discutir detalhadamente todas as passagens importantes para realizarmos a construção da TQCT 3D associada com o invariante de Kuperberg, comparando, sempre que possível, os resultados obtidos desta TQCT 3D com o caso bidimensional.

A TQCT construída nesta dissertação é um modelo importante em vista de todas as particularidades das TQCT's em dimensão 3D. Diferente do caso bidimensional, no qual todas as TQCT's são classificáveis — resultado ligado diretamente ao fato de que todas as superfícies também são classificáveis — já em 3D só existem casos particulares de TQCT's. Assim, a extensão de um invariante topológico é uma das maneiras utilizadas para se obter uma TQCT 3D, e este foi o método utilizado em [13] a fim de estender o invariante de Turaev-Viro [12]. Também neste trabalho fizemos a extensão do invariante de Kuperberg com o objetivo de construir uma TQCT 3D.

Além de toda construção envolvida para a obtenção da TQCT 3D a partir do invariante de Kuperberg, da qual podemos citar o uso de *handlebody's* e de uma álgebra de Hopf, também é importante destacar o formalismo desenvolvido em [39, 40] e utilizado por nós. Diferente em alguns aspectos da demonstração original realizada por Kuperberg [14], esta abordagem apresenta-se como um novo desenvolvimento para a construção de TQCT 3D, sendo bastante pertinente, em particular, para diversos desenvolvimentos ligados diretamente com resultados físicos.

Apêndice A

Topologia Diferencial

§1. Variedades topológicas

Definição A.1 *Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço topológico M com as seguintes propriedades.*

- (a) *M é um espaço de Hausdorff;*
- (b) *M possui uma base enumerável;*
- (c) *Para todo $x \in M$ existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ de um aberto $U \subset M$ contendo x para um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$.*

Podemos indicar o homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ apenas por h ou se for relevante também apresentar o respectivo domínio escrevendo (h, U) . A seguir, quando nos referirmos a um conjunto de índices I queremos dizer um subconjunto de $\mathbb{N}$ ou o próprio $\mathbb{N}$.

Definição A.2 *Sejam M uma variedade topológica n -dimensional e $h : U \rightarrow V$ um homeomorfismo de um subconjunto aberto $U \subset M$ para o subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. Cada homeomorfismo h será chamado de uma carta de M . Uma coleção de cartas $\mathcal{A} = \{(h_i, U_i) | i \in I\}$ será chamada de um atlas para M se $\cup_{i \in I} U_i = M$.*

Definição A.3 *Dadas duas cartas $h_i : U_i \rightarrow V_i$, $h_j : U_j \rightarrow V_j$, então ambos homeomorfismos estão definidos na intersecção de seus domínios $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Chamamos de transformação de cartas a aplicação $h_{ij} = h_j \circ h_i^{-1}$ obtida através do diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & U_{ij} & \\ h_i \swarrow & & \searrow h_j \\ V_i \supset h_i(U_{ij}) & \xrightarrow{h_{ij}} & h_j(U_{ij}) \subset V_j. \end{array}$$

Definição A.4 Um atlas de uma variedade será chamado diferenciável de classe C^k ($k \geq 1$) se todas as suas transformações de cartas forem de classe C^k .

Definição A.5 Seja $\mathcal{A}$ um atlas diferenciável de classe C^k e $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ uma carta qualquer. Dizemos que h_α é uma carta admissível relativamente ao atlas $\mathcal{A}$ se para toda carta $h_i : U_i \rightarrow V_i$ de $\mathcal{A}$, tal que $U_\alpha \cap U_i \neq \emptyset$, as transformações de cartas $h_{i\alpha}$ e $h_{\alpha i}$ forem de classe C^k .

Definição A.6 Seja $\mathcal{A}$ um atlas diferenciável de classe C^k . Definimos $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ como sendo o atlas que contém todas as cartas admissíveis com relação ao atlas $\mathcal{A}$. O atlas $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ é o maior atlas que contém $\mathcal{A}$, isto é, ele é o atlas diferenciável maximal.

Teorema A.7 Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois atlas diferenciáveis de classe C^k . Considere os respectivos atlas diferenciáveis maximais $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ e $\mathfrak{A}(\mathcal{B})$. Neste caso teremos $\mathfrak{A}(\mathcal{A}) = \mathfrak{A}(\mathcal{B})$ se e somente se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um atlas de classe C^k .

Demonstração. Considere duas cartas $h \in \mathcal{A}$ e $g \in \mathcal{B}$. Se o conjunto $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ for um atlas de classe C^k então as transformações $h \circ g^{-1}$ e $g \circ h^{-1}$ serão de classe C^k . Portanto g é uma carta admissível com relação ao $\mathcal{A}$ e $g \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})$. De modo análogo temos que $h \in \mathfrak{A}(\mathcal{B})$. Como $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ e $\mathfrak{A}(\mathcal{B})$ são conjuntos maximais, devemos ter $\mathfrak{A}(\mathcal{A}) = \mathfrak{A}(\mathcal{B})$. Agora suponha que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ não é um atlas de classe C^k . Então existe ao menos uma transformação de cartas $h \circ g^{-1}$ ou $g \circ h^{-1}$ que não é de classe C^k para alguma carta $h \in \mathcal{A}$ e alguma carta $g \in \mathcal{B}$. Logo existe ao menos um elemento $h \in \mathcal{A}$ tal que $h \notin \mathfrak{A}(\mathcal{B})$ e um elemento $g \in \mathcal{B}$ tal que $g \notin \mathfrak{A}(\mathcal{A})$, logo $\mathfrak{A}(\mathcal{A}) \neq \mathfrak{A}(\mathcal{B})$ ■

Deste ponto em diante todas as aplicações diferenciáveis serão consideradas de classe C^∞ , assim, utilizaremos diferenciável e classe C^∞ como sinônimos.

Definição A.8 Seja $\mathcal{A}$ um atlas diferenciável de uma variedade M . Chamamos o atlas diferenciável maximal $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ de estrutura diferenciável de M . Uma variedade topológica junto com uma estrutura diferenciável será chamada de variedade diferenciável.

Por definição, a existência de apenas um atlas diferenciável para uma variedade M já é suficiente para M ser diferenciável, contudo, a mesma variedade pode admitir mais de um atlas diferenciável.

Além disso, como toda carta $h_i : U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ de uma variedade n -dimensional pode ser decomposta da seguinte maneira para $x \in U_i$

$$h_i(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

onde $f_k : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, então se a carta h_i é diferenciável logo cada função f_k também deverá ser diferenciável. Neste sentido podemos interpretar as funções f_k como coordenadas locais de $\mathbb{R}^n$ e chamá-las de *funções coordenadas*.

Sem perda de generalidade também podemos, para algum ponto fixo $p \in U_i$, realizarmos um ajuste nas funções f_k tal que

$$h_i(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p)) = (0, \dots, 0).$$

Desta maneira, o que acabamos de fazer pode ser visto como a introdução de um sistema de coordenadas em torno de $p \in U_i$ para o qual cada ponto $x \in U_i$ mapeado por h_i será escrito da seguinte forma $h(x) = (y_1, \dots, y_n)$, em particular $h(p) = (0, \dots, 0)$. Por esta razão cada carta h_i também é chamada de um *sistema de coordenadas* e cada transformação de cartas é chamada de *mudança de coordenadas*.

Definição A.9 *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis. Considere uma aplicação $f : M \rightarrow N$. Dizemos que f é diferenciável no ponto p se para alguma carta (e logo para todas as cartas) temos $h : p \ni U \rightarrow V$ de M e alguma carta (e logo para todas as cartas) $g : f(p) \ni W \rightarrow Z$ de N a composição $g \circ f \circ h^{-1}$ for diferenciável.*

Para a próxima definição considere o semiespaço superior de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}.$$

Definição A.10 *Uma variedade n -dimensional com bordo é um espaço topológico M , Hausdorff, com uma base enumerável tal que para todo $x \in M$ existem um aberto $U \subset M$ contendo x , um aberto $V \subset \mathbb{H}^n$ e um homeomorfismo*

$$h : U \rightarrow V.$$

Os resultados encontrados para uma variedade topológica valem para uma variedade com bordo se a diferenciabilidade for interpretada no seguinte sentido. Considere uma variedade topológica M com bordo e duas cartas de M dadas por $h_i : U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{H}^m$ e $h_j : U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{H}^m$ tais que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Diremos que a variedade M será diferenciável em um ponto p de U_{ij} se para a transformação de cartas $h_i \circ h_j^{-1} = h_{ij}$ dada por

$$h_{ij} : V_i \rightarrow V_j$$

existir uma vizinhança $\tilde{V}_i \subset \mathbb{R}^m$ contendo p e uma extensão $\tilde{h}_{ij} : \tilde{V}_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável com $h_{ij} = \tilde{h}_{ij}$ para todo $x \in \tilde{V}_i \cap V_i$. A diferenciabilidade não depende da extensão $\tilde{h}_{ij}$ escolhida, mesmo para pontos de $\partial\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{H}^m | x_n = 0\}$, isto é, considere a derivada em

uma direção qualquer x_i de V_i para um ponto $p \in \partial U$

$$\frac{\partial \tilde{h}_{ij}}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{h}_{ij}(p + tx_i) - \tilde{h}_{ij}(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_{ij}(p + tx_i) - h_{ij}(p)}{t}$$

pois $p + tx_i \in V_i$, assim, a derivada em p fornecerá o mesmo resultado independente da extensão escolhida. Quando existe, chamamos a aplicação $\tilde{h}_{ij}$ de *extensão diferenciável*. Com isso, em analogia com a definição de uma variedade topológica diferenciável temos o seguinte.

Definição A.11 Dizemos que uma variedade n -dimensional M com bordo será diferenciável se M admitir um atlas $\mathcal{A}$ para o qual toda transformação de cartas possui uma extensão diferenciável.

§2. Orientação de variedades

Para discutirmos a orientação de variedades topológicas precisaremos introduzir a definição de espaço tangente para uma variedades. Para $\mathbb{R}^n$ usualmente descreve-se o espaço tangente para superfícies da seguinte maneira, ver [20].

Definição A.12 Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície diferenciável de dimensão $m \leq n$ e um ponto $p \in S$. Considere as curvas diferenciáveis $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ onde $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ e $\gamma(0) = p$. O conjunto de todos os vetores obtidos através de $v = \frac{d\gamma}{dt}(0) = \gamma'(0)$ é chamado espaço tangente de S e indicado por $T_p S$.

Figura A.1 Vetor do espaço tangente $T_p S$.

A definição equivalente de espaço tangente para uma variedade M pode ser obtida através das cartas de M , como apresentado a seguir.

Definição A.13 *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que duas curvas diferenciáveis*

$$\alpha(t), \beta(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M,$$

onde $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ e $\alpha(0) = \beta(0) = p$, possuem o mesmo vetor tangente em p se para alguma carta $h : U \rightarrow V$ em torno de p vale

$$(h \circ \alpha)'(0) = (h \circ \beta)'(0).$$

O vetor tangente de uma variedade não depende da escolha da carta, pois seja g uma outra carta de M e vamos chamar $h(p) = q$, com o que podemos escrever o seguinte para a curva α

$$(g \circ \alpha)'(0) = (g \circ h^{-1} \circ h \circ \alpha)'(0) = D(g \circ h^{-1})(q)(h \circ \alpha)'(0),$$

onde $Df(q)$ significa a derivada de f no ponto q . Do mesmo modo para a curva β temos

$$(g \circ \beta)'(0) = (g \circ h^{-1} \circ h \circ \beta)'(0) = D(g \circ h^{-1})(q)(h \circ \beta)'(0),$$

portanto se o vetor tangente estiver definido para a carta h também estará para g já que $g \circ h^{-1}$ é uma transformação de cartas diferenciável. As curvas com o mesmo vetor tangente formam, de fato, uma classe de equivalência ($\alpha \sim \beta$) cuja indicação será $[\alpha]$.

Definição A.14 *Chamamos a classe de equivalência $[\alpha]$ de vetor tangente de α em p e denotamos por $\alpha'(0)$.*

Definição A.15 *Seja $\mathcal{C}_p$ o conjunto de todas as curvas que passam por $p \in M$. O conjunto quociente $\mathcal{C}_p / \sim$ obtido segundo a classe de equivalência $[\alpha]$ é o espaço tangente de M e será indicado por $T_p M$.*

Definimos o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma variedade como sendo a própria classe de equivalência $[\alpha]$, mas existe uma bijeção imediata entre $T_p M$ e $\mathbb{R}^n$ associando a cada classe de equivalência $[\alpha]$ o vetor $(h \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^n$.

Definição A.16 *Seja M uma variedade n -dimensional diferenciável. Definimos o fibrado tangente de M como sendo o conjunto*

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\},$$

onde $\pi = TM \rightarrow M$ é a projeção $(x, v) \mapsto x$.

Antes de discutir a orientação das variedades vamos precisar de algumas definições mais gerais, a começar com a definição de orientação para espaços vetoriais.

Figura A.2 Definição do espaço tangente para uma variedade M .

Definição A.17 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Considere duas bases ordenadas de V dadas por $\mathcal{E} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{F} = \{w_1, \dots, w_n\}$, e a matriz de passagem M obtida através da seguinte transformação linear

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{1n}v_n = w_1 \\ &\vdots \\ T(v_n) &= \alpha_{n1}v_1 + \dots + \alpha_{nn}v_n = w_n \end{aligned}$$

isto é,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dizemos que as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ estão igualmente orientadas se o determinante de M for positivo. Isto impõe uma relação de equivalência no conjunto formado pelas bases de V . Cada classe de equivalência $\mathfrak{O}$ obtida segundo esta relação será chamada de uma orientação no espaço vetorial V .

Teorema A.18 *Um espaço vetorial V real de dimensão finita admite apenas duas orientações possíveis.*

Demonstração. Considere uma orientação $\mathfrak{O}$ de V e seja $\mathcal{E} = \{v_1, \dots, v_n\}$ um elemento de $\mathfrak{O}$. Sejam então duas outras bases ordenadas dadas por $\mathcal{F} = \{w_1, \dots, w_n\}$ e $\mathcal{G} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e suas transformações lineares com relação à $\mathcal{E}$ obtidas respectivamente pelas matrizes M e N . Escrevendo as bases como vetores coluna

$$[v] = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad [w] = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [u] = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

segue que

$$M[w] = N[u] = [v] \quad \rightarrow \quad [w] = (M^{-1}N)[u] = Q[u].$$

Então $Q = M^{-1}N$ é a transformação linear de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{G}$. Se $\det(M) < 0$ e $\det(N) < 0$ então teremos $\det(Q) > 0$ logo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ estão igualmente orientadas. Assim, os elementos que não pertencem ao conjunto $\mathfrak{O}$ formam uma classe de equivalência ■

Definição A.19 *O par $(V, \mathfrak{O})$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{O}$ é uma escolha arbitrária de uma única orientação em V , será chamado de espaço vetorial orientado. Dado um espaço vetorial orientado, então as bases que pertencem à orientação $\mathfrak{O}$ serão chamadas de positivas e as outras de negativas.*

Definição A.20 *Dizemos que um mapa linear entre espaços vetoriais orientados preserva a orientação quando este mapa leva toda base ordenada positiva apenas em outra base ordenada positiva, e do mesmo modo, leva toda base ordenada negativa apenas em outra base negativa.*

Definição A.21 *Seja M uma variedade. Dizemos que M é orientável se for possível encontrarmos um atlas $\mathcal{A}$ de M tal que a derivada de toda transformação de cartas seja um isomorfismo que preserva uma orientação fixa de $\mathbb{R}^n$ em cada ponto. Caso exista, chamamos $\mathcal{A}$ de atlas positivo.*

Definição A.22 *Seja M uma variedade orientável. Chamamos M de variedade orientada caso fixemos um atlas positivo.*

Com isso, se existir um tal atlas $\mathcal{A}$, então o Jacobiano de todas as transformações de cartas terão determinante positivo. Para verificarmos isso, vamos sempre considerar a orientação de $\mathbb{R}^n$, por simplicidade, como sendo a classe de equivalência gerada pela base canônica dada pelos vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ até $e_n = (0, 0, \dots, 1)$, que

iremos escrever como um vetor coluna da forma

$$\llbracket e \rrbracket = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Assim, vamos obter uma base para $T_p M$ a partir de uma carta h com relação aos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é, com $h(p) = q$, teremos $Dh^{-1}(q)e_i = b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Como vimos na Definição A.14, estes vetores b_i formam de fato uma classe de equivalência que não depende da escolha da carta. Agora vamos utilizar a notação $(V, \llbracket w \rrbracket)$ para indicar o espaço vetorial V com orientação obtida pela classe de equivalência do vetor coluna $\llbracket w \rrbracket$, então para uma outra carta $g \in \mathcal{A} : W \rightarrow Z$ com $U \cap W \neq \emptyset$ teremos o seguinte

$$\begin{array}{ccc} & (T_p M, \llbracket b \rrbracket) & \\ Dh(p) \swarrow & & \searrow Dg(p) \\ (\mathbb{R}^n, \llbracket e \rrbracket) & \xrightarrow{D(g \circ h^{-1})(q)} & (\mathbb{R}^n, \llbracket v \rrbracket) \end{array}$$

portanto, para que a base $\llbracket v \rrbracket$ obtida por $Dg(q)$ seja positiva, o determinante da transformação linear $D(g \circ h^{-1})(q)$, isto é, o determinante do Jacobiano da função $g \circ h^{-1}$ calculado em q deve ser positivo. Estas observações motivam a próxima definição.

Definição A.23 *Sejam M uma variedade diferenciável e um atlas $\mathcal{A}$ para M . Chamamos duas cartas $h_i, h_j \in \mathcal{A}$ de cartas positivas quando o Jacobiano da transformação de cartas h_{ij} tiver determinante positivo. Se todas as cartas de $\mathcal{A}$ forem positivas então chamamos $\mathcal{A}$ de atlas positivo.*

A existência de um atlas positivo para uma variedade M , por sua vez, garante que M seja orientável. Dada uma variedade M , existe uma orientação induzida no bordo $\partial M \subset M$. Contudo, a fim de definirmos uma TQCT será importante considerar a orientação do bordo ∂M como sendo independente da orientação de variedade M . Assim, uma escolha de orientação para M não irá determinar uma orientação para o seu bordo ∂M e, por conseguinte, existe uma relação entre as orientações destas duas variedades M e ∂M como veremos nas próximas definições.

Definição A.24 *Sejam M uma n -variedade com bordo ∂M e um ponto $p \in \partial M$. Dizemos que um vetor tangente $v \in T_p M$ aponta para dentro se $v \notin T_p \partial M$ e existe uma curva $\gamma(t) : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(t)$ é um ponto interior de M para todo $t \in (0, \varepsilon)$, $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Um vetor $v \in T_p M$ aponta para fora se $-v$ aponta para dentro.*

Definição A.25 *Sejam uma variedade M com bordo ∂M e $p \in \partial M$. Considere uma base positiva de $T_p M$ dada por $\mathcal{E} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, uma base positiva qualquer de $T_p \partial M$ (cuja orientação é arbitrária) dada por $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ e o mapa inclusão*

$$i : \Sigma \hookrightarrow M.$$

Podemos construir uma nova base para $T_p M$ com a aplicação do mapa inclusão sobre a base $\mathcal{B}$ junto com um vetor $v_p \in T_p M$ que aponta para dentro, isto é,

$$\mathcal{F} = \{i(w_1), i(w_2), \dots, i(w_{n-1}), v_p\}.$$

Caso a base $\mathcal{F}$ seja positiva para M quando comparada com $\mathcal{E}$, então chamaremos a variedade ∂M de bordo para dentro de M . Caso $\mathcal{F}$ seja uma base negativa quando comparada com $\mathcal{E}$, então chamaremos ∂M de bordo para fora de M .

Na Figura A.3 apresentamos os possíveis mapas da variedade S^1 sobre o bordo do cilindro. Neste caso, os dois lados do cilindro podem receber o mapa inclusão de S^1 , assim, obtemos diferentes maneiras de se realizar esta operação.

Figura A.3 Possíveis mapeamentos de S^1 sobre o cilindro. Em (a) temos a orientação positiva para o cilindro, em (b) (c) (d) (e) temos os diferentes mapas que podem ser realizados sobre o bordo do cilindro. O vetor v_p indicado na parte inferior de cada cilindro é o vetor para dentro obtido no ponto p , enquanto na parte superior o vetor v_q é o vetor para dentro obtido no ponto q . O sinal $\oplus$ indica que o respectivo mapa torna S^1 um bordo para dentro, enquanto o sinal $\ominus$ indica que S^1 se torna um bordo para fora.

Para verificarmos que o conceito apresentado anteriormente está bem definido vamos considerar inicialmente o seguinte teorema.

Teorema A.26 *Sejam A, B abertos do semiespaço $\mathbb{H}$. Se $f : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo de classe C^1 então $f(\partial A) = \partial B$. Em particular, a restrição $f|_{\partial A}$ é um difeomorfismo entre as superfícies ∂A e ∂B .*

Demonstração. Considere um ponto x que pertença ao interior de A , ou seja, existe em torno do ponto x um aberto de U contido em A . Como f é um difeomorfismo, então a aplicação f restrita ao aberto U é um difeomorfismo local cuja imagem $f(U)$ é um aberto contido em B , isto é $f(U) \subset B$. Com isso, todo ponto x que está no interior de A é mapeado por $f(x)$ em um ponto que está no interior de B . Portanto os pontos do bordo de A (que não estão no interior de A) só podem ser mapeados no bordo de B , e com isso $f(\partial A) \subset \partial B$. De modo análogo, como f é difeomorfismo, então f^{-1} também é um difeomorfismo local para um aberto de $V \subset B$ e teremos $f^{-1}(\partial B) \subset \partial A$, de onde $f(\partial A) = \partial B$ ■

Teorema A.27 *Seja $f : A \rightarrow B$ um difeomorfismo entre abertos A e B do semiespaço $\mathbb{H}$. Considere $v_p = \gamma'(0)$ que aponta para dentro em um ponto $p \in \partial A$ de acordo com a Definição A.24 e tal que $v_p \subset A$. Então o vetor obtido através de $Df(p)v_p$ é um vetor que aponta para dentro.*

Demonstração. Observe inicialmente que para um aberto qualquer de $\mathbb{H}$, um ponto só estará no bordo $\partial\mathbb{H}$ se, quando expresso em coordenadas locais, isto é, $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, seu coeficiente $\alpha_n = 0$, e, por isso mesmo, estará no interior apenas quando $\alpha_n > 0$. Assim, basta observarmos o seguinte

$$Df(p)v_p = \frac{\partial f}{\partial v_p} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + v_p t) - f(p)}{t}$$

escrevendo os vetores $p + v_p t$, $f(p + v_p t)$, p e $f(p)$ na base canônica de $\mathbb{R}^n$ teremos

$$\begin{aligned} p + vt &= \sum_1^n \alpha_i e_i, & f(p + vt) &= \sum_1^n \beta_i e_i, \\ p &= \sum_1^n \gamma_i e_i, & f(p) &= \sum_1^n \xi_i e_i. \end{aligned}$$

Para $t \neq 0$ o coeficiente $\alpha_n > 0$ pois $p + v_p t$ é formado por pontos que pertencem ao interior de A e, da mesma maneira, também teremos $\beta_n > 0$ pois, segundo o Teorema A.26, pontos do interior de A são mapeados em pontos do interior de B . Como p está no bordo de A então $\gamma_n = 0$ e, da mesma forma, $\xi_n = 0$ pois $f(p)$ é um ponto do bordo de B . Assim o termo $f(p + v_p t) - f(p)$ no limite $t \rightarrow 0$ é formado por pontos que estão no interior de B e o vetor $Df(p)v_p$ apontará para dentro ■

Pela mesma razão, se w_p for um vetor que está contido no bordo ∂A de um aberto A de $\mathbb{H}^n$ então o difeomorfismo $f : A \rightarrow B$ para um aberto de $B \subset \mathbb{H}^n$ fornecerá um $Df(p)w_p$ que está contido no bordo de B .

Com estes resultados podemos agora verificar que a Definição A.25 não depende da escolha do vetor para dentro. De fato, considere uma carta positiva $h : U \rightarrow V$ de M . Com isso, dada uma base $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ de vetores para $T_p\partial M$ então os vetores $Dh(p)w_i$ estarão todos contidos no bordo de $\mathbb{H}$, devido ao Teorema A.27. Por isso, a n -ésima componente de cada vetor $Dh(p)w_i$ na base de $\mathbb{R}^n$ será nula. Já o vetor $Dh(p)v_p$ deverá ter $\alpha_n > 0$, já que v_p é um vetor para dentro. Sendo

$$[\tilde{w}, \tilde{v}_p] = \begin{pmatrix} Dh(p)w_1 \\ \vdots \\ Dh(p)w_{n-1} \\ Dh(p)v_p \end{pmatrix}$$

e com isso vemos que os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ se relacionam com a base $[\tilde{w}, \tilde{v}_p]$ da seguinte maneira para $1 < i < n - 1$

$$\tilde{w}_i = \beta_{i1}e_1 + \dots + \beta_{in-1}e_{n-1} + 0e_n$$

enquanto o vetor $\tilde{v}_p$ positivo deve ser mapeado em um vetor cuja coordenada $\beta_{nn} > 0$ logo

$$\tilde{v}_p = \beta_{i1}e_1 + \dots + \beta_{in-1}e_{n-1} + \beta_{nn}e_n$$

com $\beta_{nn} > 0$, assim, a matriz de mudança de base entre a base canônica $[e]$ e a base $[\tilde{w}, \tilde{v}_p]$ será da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{n-11} & \cdots & \beta_{n-1n-1} & 0 \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn-1} & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Agora, pela regras usuais do determinante, vemos que $\det D(g \circ h^{-1})(q) = \beta_{nn} \det A$ e será positivo apenas quando $\det A > 0$ e não depende, portanto, do vetor para dentro v_p escolhido.

Por fim, vamos verificar que a Definição A.25 pode ser estendida sobre todo o bordo de ∂M de maneira contínua. Para tal vamos considerar a definição de partição da unidade começando com o seguinte.

Definição A.28 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois atlas para M . Chamamos $\mathcal{B}$ de refinamento de $\mathcal{A}$ se para toda carta $(h, U_h) \in \mathcal{B}$ existe alguma carta $(g, U_g) \in \mathcal{A}$ tal que $U_g \subset U_h$.*

Definição A.29 Considere uma aplicação contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e o conjunto $\mathcal{C} = \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$. O suporte de f é o fecho de $\mathcal{C}$, que indicaremos por $\text{suporte } f$.

Definição A.30 Chamamos uma família $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de subconjuntos de M de localmente finita quando todo $x \in M$ admite uma vizinhança aberta $V \ni x$ em M tal que $U_i \cap V \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices $i \in I$.

Definição A.31 Uma partição da unidade é dita diferenciável se existe uma família $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ de aplicações $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis, onde I é um subconjunto de $\mathbb{N}$ ou o próprio $\mathbb{N}$, tais que

- (a) $f_i : M \rightarrow [0, 1]$ para todo $x \in M$ e $i \in I$;
- (b) O conjunto $\mathcal{S} = \{\text{suporte } f_i \mid i \in I\}$ é localmente finito em M ;
- (c) Para todo $x \in M$ tem-se $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

Definição A.32 Dizemos que uma partição da unidade $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ está subordinada a uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ de uma variedade M se para cada índice $i \in I$ existe algum $j \in J$ tal que $\text{suporte } f_i \subset U_j$.

O próximo teorema pode ser encontrado em diversas referências, das quais podemos citar [17, 18], como exemplo.

Teorema A.33 Toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de uma variedade diferenciável possui uma partição da unidade diferenciável subordinada.

Com este último teorema agora podemos mostrar o seguinte.

Proposição A.34 Seja M uma variedade de dimensão n e com bordo ∂M . Existe um campo vetorial suave composto por vetores apontando para dentro ao longo de ∂M .

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{(U_i, h_i) \mid i \in I\}$ um atlas de M . Podemos escolher uma subfamília $J \subset I$ tal que o conjunto de cartas indexados por ela, isto é $\mathcal{B} = \{(U_j, h_j) \mid j \in J \subset I\}$, cobre ∂M . Em cada carta h_j centrada em $p \in M$, considere a inversa dada por $f_j = h_j^{-1}$. O seguinte campo vetorial calculado em $r = h_j(p)$

$$v_j(p) = Df_j(r)e_n = \frac{\partial f_j}{\partial y_n}(r)$$

ao longo de $U_j \cap \partial M$ é suave e aponta para dentro.

Seja $\{\rho_j\}_{j \in J}$ uma partição da unidade em ∂M subordinada à cobertura aberta $\{U_j \cap \partial M\}_{j \in J}$. Então o campo vetorial dado por $v(p) := \sum_j \rho_j v_j(p)$ é suave e aponta para fora ao longo de ∂M . De fato, considere todas as cartas com intersecção não nula para um

ponto $p \in M$. Com as transformações de cartas entre tais cartas podemos escrever todos os vetores $v_j(p)$ na base do espaço tangente de uma destas cartas, isto é, considere as cartas $h_j = (U_j, h_j)$ e $h_k = (U_k, h_k)$ com inversas $f_j = h_j^{-1}$ e $g = h_k^{-1}$ e as base de $T_p M$ para estas cartas nos pontos $r = h_j(p)$ e $s = h_k(p)$ dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} (Df_j(r)e_1, \dots, Df_j(r)e_n) &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_1}(r), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial y_n}(r) \right) \\ (Dg(s)e_1, \dots, Dg(s)e_n) &= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(s), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_n}(s) \right), \end{aligned}$$

com isso cada campo $v_j(p)$ definido para a carta h_j se relaciona com a base da carta fixa h_k da seguinte maneira

$$v_j(p) = \frac{\partial f_j}{\partial y_n}(r) = \sum_{l=1}^n \alpha_{jl} \frac{\partial g}{\partial y_l}(s)$$

O campo vetorial $v(p)$ pode ser escrito como

$$v(p) = \sum_{j \in J} \rho_j v_j = \sum_{j \in J} \rho_j \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} \frac{\partial g}{\partial y_l}(s) \right) = \sum_{j \in J} \sum_{l=1}^n \rho_j \alpha_{jl} \frac{\partial g}{\partial y_l}(s),$$

invertendo a ordem dos somatórios pois a soma em ρ_j é localmente finita temos

$$v(p) = \sum_{l=1}^n \sum_{j \in J} \rho_j \alpha_{jl} \frac{\partial g}{\partial y_l}(s) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j \in J} \rho_j \alpha_{jl} \right) \frac{\partial g}{\partial y_l}(s) = \sum_{l=1}^n \gamma_l \frac{\partial g}{\partial y_l}(s).$$

Como $\rho_j \geq 0$ e não nulo ao menos para um dos índices $j \in J$, e pelo Teorema A.27 os coeficientes α_{jn} de $\frac{\partial g}{\partial y_n}(s)$ para um vetor que aponta para dentro são todos positivos, logo teremos

$$\gamma_n = \sum_{j \in J} \rho_j \alpha_{jn} > 0,$$

e o campo vetorial dado por $v(p)$ é constituído por vetores que apontam para dentro. Estes vetores formam um campo suave pois os coeficientes α_{jl} são derivadas parciais das funções suaves h_j , enquanto $\sum_j \rho_j$ é suave por construção ■

Apêndice B

Álgebra Semissimples

§1. Considerações gerais

A seguir, quando apresentarmos os resultados apenas com o adjetivo “à esquerda” ficará subentendido, se nada for dito, o análogo “à direita”.

Definição B.1 *Sejam S um conjunto e T um subconjunto de S . Chamamos T de subconjunto próprio se $T \neq \emptyset$ e $T \neq S$.*

Definição B.2 *Seja S um conjunto. Chamamos o mapa*

$$S \times S \rightarrow S$$

de lei de composição ou apenas de composição.

Quando não houver risco de ambiguidade indicaremos a lei de composição de um conjunto S para dois elementos $a, b \in S$ simplesmente por ab .

Definição B.3 *Seja S um conjunto com lei de composição e T um subconjunto de S . Dizemos que o subconjunto T é fechado pela lei de composição de S se para todo $x, y \in T$ tivermos $xy \in T$.*

Definição B.4 *Chamamos um conjunto S de monóide se ele possuir uma lei de composição associativa, isto é*

$$(ab)c = a(bc), \quad \text{para todo } a, b, c \in S,$$

e possuir um elemento unidade e .

Definição B.5 *Seja S um monóide e T um subconjunto de S fechado pela lei de composição de S . Chamamos o subconjunto T de submonóide se ele próprio for um monóide.*

Definição B.6 Chamamos um conjunto G de grupo se ele for um monóide e se para todo elemento $x \in G$ existir um elemento $y \in G$ tal que $xy = yx = e$. Chamamos y de inverso de x .

Definição B.7 Seja G um grupo e H um subconjunto de G fechado pela lei de composição de G . Chamamos o subconjunto H de subgrupo se ele próprio for um grupo.

§2. FG-Módulos

Definição B.8 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F e G um grupo. Chamamos V de FG-módulo se existe uma lei de composição $gv : G \times V \rightarrow V$ para $g \in G$ e $v \in V$ tal que as seguintes condições sejam satisfeitas para $g, h \in G$, $v, u \in V$ e $\lambda \in F$.

- (a) $gv \in V$;
- (b) $(gh)v = g(hv)$;
- (c) $1_G v = v$;
- (d) $\lambda(gv) = (\lambda v)g$;
- (e) $g(v + u) = gv + gu$.

Sempre que nos referirmos a um FG-módulo ficará subentendido um corpo F e um grupo G .

Definição B.9 Sejam V um FG-módulo e $U \subset V$. Chamamos U de FG-submódulo se U for fechado pela lei de composição de V e se ele próprio for um FG-módulo.

Definição B.10 Sejam V e W dois FG-módulos. Chamamos uma aplicação $h : V \rightarrow W$ de homomorfismo de FG-módulos se h for uma transformação linear e

$$h(gv) = gh(v), \quad \text{para } g \in G \text{ e } v \in V.$$

Teorema B.11 Sejam V e W dois FG-módulos e $h : V \rightarrow W$ um homomorfismo de FG-módulos. Então o $\text{Ker}(h)$ é um FG-submódulo de V , e $\text{Im}(h)$ é um FG-submódulo de W .

Demonstração. Sabemos que $\text{Ker}(h)$ é subespaço de V e $\text{Im}(h)$ é um subespaço de W , pois h é uma transformação linear. Considere então um elemento $v \in \text{Ker}(h)$ e $g \in G$, de onde temos

$$h(gv) = gh(v) = g0 = 0,$$

pois $v \in \text{Ker}(h)$ por hipótese. Portanto $gv \in \text{Ker}(h)$ e $\text{Ker}(h)$ é um FG-submódulo. Agora, por outro lado, considere um elemento $w \in \text{Im}(h)$ de onde $w = h(v) \in \text{Im}(h)$ para algum $v \in V$. Para todo $g \in G$ teremos

$$gw = gh(v) = h(gv)$$

e portanto $gv \in \text{Im}(h)$, logo $\text{Im}(h)$ é um FG-submódulo ■

Definição B.12 *Sejam $V_1, V_2, \dots, V_n$ todos FG-módulos. Chamamos de soma o seguinte conjunto*

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in V_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Definição B.13 *Seja V a soma dos FG-módulos por $V_1, V_2, \dots, V_n$. Chamamos V de soma direta se cada elemento de V só puder ser escrito de uma única maneira como $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ com $v_i \in V_i$ e $1 \leq i \leq n$. Indicaremos uma soma direta com a seguinte notação*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n.$$

Definição B.14 *Seja V um FG-módulo não-nulo. Chamamos V de irreduzível se os únicos FG-submódulos de V forem 0 e V . Se V possuir um FG-submódulo próprio, isto é, diferente de 0 e V , então chamamos V de redutível.*

Definição B.15 *Chamamos um FG-módulo não-nulo V de completamente redutível se pudermos escrevê-lo como uma soma direta de FG-submódulos simples de V , isto é*

$$V = V_1 \oplus V_2 \cdots \oplus V_n.$$

Por definição um FG-módulo redutível é completamente redutível pois ele é a soma de um único termo redutível.

Teorema B.16 *Seja V um FG-módulo. Se $U \subset V$ é um submódulo, então existe um submódulo W de V tal que*

$$V = U \oplus W.$$

Demonstração. Primeiro vamos escrever o FG-módulo V como uma soma direta entre o FG-submódulo U já conhecido e um subespaço W_0 qualquer de V

$$V = U \oplus W_0.$$

Sempre podemos encontrar esta soma, basta escolher uma base para o espaço U , por exemplo $\{v_1, \dots, v_m\}$ e escrever uma base para W_0 com a base complementar do espaço V , isto é,

$\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$. Agora vamos definir o seguinte endomorfismo

$$\phi(v) = u, \quad \text{para } v \in V \text{ e } u \in U.$$

Segundo a Proposição B.31 apresentada no Capítulo 2 ϕ é uma projeção, $\text{Im}(\phi) = U$ e $\text{Ker}(\phi) = W$. Agora considere a seguinte modificação sobre $\phi(v)$

$$\Phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \phi(gv),$$

onde a soma percorre todos os elementos do grupo G . A aplicação $\Phi(v)$ ainda é um endomorfismo em V pois apenas multiplicamos um elemento do espaço vetorial V por um elemento do grupo G . Primeiro vamos verificar se $\Phi(v)$ é um homomorfismo de FG-módulos. Considere então para $x \in G$ e $v \in V$

$$\Phi(xv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \phi(gxv),$$

com a soma em G os valores de $h = gx$ irão percorrer todos os elementos de G , pois G é finito, assim

$$h = gx \begin{cases} hx^{-1} = gxx^{-1} = g, \\ g^{-1}h = g^{-1}gx = x \rightarrow g^{-1}hh^{-1} = g^{-1} = xh^{-1}, \end{cases}$$

e podemos trocar o índice sobre a soma da seguinte maneira

$$\Phi(xv) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (xh^{-1}) \phi(hx^{-1}xv) = x \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} \phi(hv) \right) = x\Phi(v).$$

Agora vamos verificar que Φ é um projetor, isto é, $\Phi^2 = \Phi$. Como U é um FG-submódulo então para $g \in G$ e $u \in U$ teremos $gu \in U$, e portanto $\phi(gu) = gu$. Com isso para algum $u \in U$ teremos

$$\Phi(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g^{-1} \phi(gu) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g^{-1} gu = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} u = u.$$

Por outro lado para um elemento $v \in V$ teremos $\phi(v) = \phi(u + w) = u$, então

$$\Phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g^{-1} \phi(gv) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g^{-1} \phi(g(u + w)) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g^{-1} \phi(gu) = u,$$

e com isso $\Phi(\Phi(v)) = \Phi(u) = u$, e $\Phi^2 = \Phi$. Vimos que Φ é uma projeção e um homomorfismo

de FG-módulos. Além disso também sabemos que $\text{Im}(\Phi) = U$, e como $\phi(0 + w) = 0$ então $W = \text{Ker}(\Phi)$. Pela Proposição B.11 o $\text{Ker}(\Phi)$ é um FG-submódulo e pela Proposição B.33 temos que $V = U \oplus W$ ■.

Teorema B.17 *Sejam G um grupo finito e $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Todo FG-módulo é completamente redutível.*

Demonstração. Considere um FG-módulo V com dimensão igual a 1. Neste caso V é irreduzível pois não existem FG-submódulos próprios, e, portanto, V é completamente redutível. Considere agora V com dimensão $n > 1$. Caso V seja irreduzível não há o que provar. Então considere V redutível, ou seja, existe algum FG-submódulo diferente de $\{0\}$ e V . Seja U este submódulo, então pelo Teorema B.16 podemos escrever $V = U \oplus W$, onde $\dim(U), \dim(W) < \dim(V)$. Se U for redutível, então, novamente pelo Teorema B.16, podemos escrever como $U = U_1 \oplus U_2$, onde U_1 e U_2 são FG-submódulos. Se U_1 também for redutível podemos continuar e escrever $U = U_{11} \oplus U_{12} \oplus U_2$, o mesmo para U_2 , e assim até que U seja escrito apenas com U_k irreduzíveis. As mesmas considerações valem para W , logo

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r \quad \text{e} \quad W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$$

onde todos os FG-submódulos U_k e W_k são irreduzíveis. Desta maneira, os elementos de U e de W só podem ser escritos de modo único em função de seus respectivos FG-submódulos, e a soma dada por

$$V = U + W = (U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r) + (W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s)$$

é, de fato, uma soma direta, isto é

$$V = U \oplus W = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s \quad \blacksquare$$

§3. Álgebra da teoria na rede e semissimplicidade

Definição B.18 *Seja A uma álgebra finita associativa cuja base é dada por $\{b_i\}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. As constantes de estrutura dadas por $b_i b_j = \mu_{ij}^k b_k$ determinam completamente a álgebra. Chamamos A de álgebra da teoria na rede se as constantes de estrutura se relacionam com a métrica g_{ij} da seguinte maneira*

$$g_{ij} = \mu_{ia}^b \mu_{jb}^a,$$

e se, além disso, g_{ij} for a inversa de g^{ij} , ou seja, $g_{ij} g^{ij} = \delta_j^i$.

A multiplicação $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ de uma álgebra nos permite interpretá-la da seguinte maneira. O conjunto A de uma álgebra é, por definição, um espaço vetorial, logo a multi-

plicação μ é um FG -módulo, onde F é o corpo $\mathbb{k}$ e G é o conjunto A visto como um grupo cuja operação é a própria multiplicação μ .

Definição B.19 Chamamos uma álgebra A de semissimples se quando vista como um $\mathbb{k}A$ -módulo, A for completamente redutível.

Teorema B.20 Uma álgebra de dimensão finita é topológica se e somente se é uma álgebra semissimples.

Demonstração. Precisamos mostrar a necessidade de toda álgebra topológica ser também uma álgebra semissimples. Para isso, primeiro vamos nos restringir às álgebras finitas definidas sobre o corpo $\mathbb{k}$, isto é, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Desta maneira, o resultado obtido no Teorema B.17 mostra que toda álgebra A finita vista como um $\mathbb{k}A$ -módulo é completamente redutível, sendo A , portanto, semissimples. Deve-se observar a necessidade da métrica g_{ij} ser a inversa do operador de colagem g^{ij} , pois a demonstração do Teorema B.17 depende do Teorema B.16, e este, por sua vez, se apoia na construção do seguinte endomorfismo

$$\Phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \phi(gv),$$

assim para o caso de uma álgebra topológica a relação com a métrica g^{ij} aparece da seguinte maneira

$$\Phi(v) = \sum_{b_i \in A} (b_j g^{ij}) \phi(b_i v),$$

pois $b_i b_j g^{ij} = 1_A$ de onde $(b_i)^{-1} = b_j g^{ij}$ ■

§3. Prova do Colorário B.35

Definição B.21 Sejam V e W dois espaços vetoriais. Chamamos núcleo e imagem de uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ entre V e W os conjuntos dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{v \in V \mid f(v) = 0\}, \\ \text{Im}(f) &= \{f(v) \mid v \in V\}. \end{aligned}$$

Teorema B.22 Sejam V e W espaços vetoriais. Considere uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$. A dimensão de V pode ser escrita da seguinte maneira

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Definição B.23 Chamamos dois espaços vetoriais V e W de isomorfos caso exista uma aplicação linear invertível de V em W .

Teorema B.24 *Espaços vetoriais isomorfos possuem a mesma dimensão.*

Demonstração. Se os espaços são isomorfos, então existe uma aplicação linear f tal que $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Neste caso a dimensão da imagem e a do contradomínio são iguais ■

Definição B.25 *Chamamos de endomorfismo de V uma transformação linear de um espaço vetorial V para ele mesmo.*

Exemplo B.26 A função identidade 1_V definida por

$$1_V : v \rightarrow v, \quad \forall v \in V$$

é um endomorfismo de V .

Teorema B.27 *Se f for um endomorfismo de V . A aplicação dada por $f - \lambda 1_V$, para todo $\lambda \in F$, também será um endomorfismo.*

Demonstração. Basta observarmos que

$$\text{Ker}(f - \lambda 1_V) = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}$$

e por isso

$$\text{Ker}(f - 1_V) = \{v \in V | f(v) = v\} = \text{Im}(f) \quad \blacksquare$$

Definição B.28 *Sejam $V_1, \dots, V_r$ subespaços de um espaço vetorial V . Chamamos a seguinte operação*

$$V_1 + \dots + V_r = \{v_1 + \dots + v_r | v_i \in V_i \text{ (para todo } 1 \leq i \leq r)\}$$

de soma dos subespaços $V_1, \dots, V_r$.

Definição B.29 *Chamamos uma soma $V_1 + \dots + V_r$ de subespaços de V de soma direta se cada elemento da soma só puder ser expresso de uma única maneira como $v_1 + \dots + v_n$ para $v_i \in V_i$ para $1 \leq i \leq r$. Utilizaremos a seguinte notação para uma soma direta*

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_r.$$

Proposição B.30 *Sejam U e W espaços vetoriais e $V = U + W$ sua soma. Considere duas bases $u_1, \dots, u_r$ e $w_1, \dots, w_s$ para U e W respectivamente. As condições seguintes são equivalentes*

$$(a) \quad V = U \oplus W;$$

(b) $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ é uma base de V ;

(c) $U \cap W = \{0\}$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Que todo elemento de V pode ser expresso como uma soma de um elemento $u \in U$ e de um elemento $w \in W$ é imediato já que $V = U \oplus W \Rightarrow V = U + W$. Assim podemos procurar o elemento neutro de V da seguinte maneira, onde indicamos explicitamente o espaço vetorial ao qual pertence cada elemento neutro, assim

$$0_V = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r}_{0_U} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s}_{0_W}$$

A equação é satisfeita se $\alpha_i = 0$ ($1 \leq i \leq r$) e $\beta_j = 0$ ($1 \leq j \leq s$). Se a soma for direta, então esta maneira de determinarmos o elemento 0_V deverá ser única. Logo, todos os escalares α_i e β_j devem ser nulos, e portanto os vetores $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ são linearmente independentes. Por outro lado, como eles são suficientes para gerar os elementos de U e de W , também geram os elementos de V , de onde segue que eles formam uma base para V .

(b) $\Rightarrow$ (c). Vamos supor que $\exists x \in U \cap W$, então podemos escrever o seguinte

$$x = 0_U + x = x + 0_v$$

para que esta soma seja única e igual à x devemos ter que $x = 0$, e portanto $U \cap W = \{0\}$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Podemos escrever o seguinte

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad \longrightarrow \quad u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W$$

com isso $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$ e a soma $u_1 + w_1$ é única ■

Proposição B.31 *Sejam U e W espaços vetoriais. Considere a soma direta $V = U \oplus W$ e a seguinte aplicação*

$$\pi(u + w) = u \quad \text{para todo } u \in U, w \in W.$$

A aplicação π é um endomorfismo de V e também teremos

$$\text{Im}(\pi) = U, \quad \text{Ker}(\pi) = W \quad \text{e} \quad \pi^2 = \pi.$$

Demonstração. Por definição todo elemento de V pode ser escrito de forma única como $u + w$ com $u \in U, w \in W$. Agora considere dois elementos $v, v' \in V$ e as somas $v = u + w$ e

$v' = u' + w'$ para $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$. Com isso podemos escrever o seguinte

$$\begin{aligned}\pi(v + v') &= \pi(u + u' + w + w') = u + u' \\ &= \pi(u + w) + \pi(u' + w') = \pi(v) + \pi(v'),\end{aligned}$$

portanto a aplicação π respeita a soma em V . Agora considere um elemento $\lambda \in \mathbb{k}$, neste caso temos

$$\pi(\lambda v) = \pi(\lambda u + \lambda w) = \lambda u = \lambda \pi(u + w) = \lambda \pi(v),$$

e com isso a função π também respeita a multiplicação por escalar, sendo de fato um endomorfismo de V .

Agora, é imediato que a $\text{Im}(\pi) \subseteq U$, além disso para todo $u \in U$ temos $\pi(u) = u$, logo a $\text{Im}(\pi) = U$. Para determinarmos o $\text{Ker}(\pi)$ observe o seguinte

$$\pi(u + w) = 0 \Rightarrow u = 0$$

portanto, todo elemento $w \in W$ é levado para o núcleo de π , ou seja, $\text{Ker}(\pi) = W$. E, por fim, temos

$$\pi^2(v) = \pi^2(u + w) = \pi(\pi(u + w)) = \pi(u) = u = \pi(u + w) = \pi(v),$$

e portanto $\pi^2 = \pi$ ■

Definição B.32 Chamamos um endomorfismo π no espaço vetorial V de projetor se $\pi^2 = \pi$.

Proposição B.33 Seja π uma projetor em um espaço vetorial V . Então

$$V = \text{Im}(\pi) \oplus \text{Ker}(\pi).$$

Demonstração. Se $v \in V$ então $v = v\pi + (v - v\pi)$. Observe que o primeiro termo pertence à $\text{Im}(\pi)$. Já o segundo termo $v - v\pi$ pertence ao $\text{Ker}(\pi)$, pois

$$(v - v\pi)\pi = v\pi - v\pi^2 = v\pi - v\pi = 0.$$

Isto estabelece que $V = \text{Im}(\pi) + \text{Ker}(\pi)$. Agora suponha que v pertença à $\text{Im}\pi \cap \text{Ker}(\pi)$. Como $v \in \text{Im}(\pi)$, temos $v = u\pi$ para algum $u \in V$. Portanto

$$u\pi = u\pi^2 = u\pi = v.$$

Já que $v \in \text{Ker}(\pi)$, segue então que $v = v\pi = 0$. Portanto

$$\text{Im}(\pi) \cap \text{Ker}(\pi) = \{0\},$$

e com a Proposição B.30 agora temos que $V = \text{Im}(\pi) \oplus \text{Ker}(\pi)$ ■.

Proposição B.34 *Os autovalores de um projetor π são 1 e 0.*

Demonstração. Pela Proposição B.33 podemos escrever o espaço $V = \text{Im}(\pi) \oplus \text{Ker}(\pi)$. Seja $w \in \text{Im}(\pi)$, então

$$\pi(w) = \pi(\pi(v)) = \pi(v) = w,$$

logo todo elemento da $\text{Im}(\pi)$ é um vetor com autovalor 1. Agora considere $u \in \text{Ker}(\pi)$, neste caso

$$\pi(v) = 0 = 0v,$$

então todo elemento do $\text{Ker}(\pi)$ é um autovetor com autovalor 0 ■

Corolário B.35 *O projetor π é a identidade do espaço vetorial $V = \text{Im}(\pi)$.*

Demonstração. Todo elemento de V é autovetor com autovalor 1 ■.

Referências Bibliográficas

- [1] ATIYAH, M. *Topological quantum field theories*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, **68**(1), p. 175–186, 1988.
- [2] WITTEN, E. *Topological quantum field theory*. Communications in Mathematical Physics, **117**(3), p. 353–386, 1988.
- [3] WITTEN, E. *Quantum field theory and the jones polynomial*. Communications in Mathematical Physics, **121**(3), p. 351–399, 1989.
- [4] SEGAL, G. B. *The definition of conformal field theory*. In *Differential geometrical methods in theoretical physics*, p. 165–171. Springer, 1988.
- [5] BAEZ, J. C.; DOLAN, J. *Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory*. Journal of Mathematical Physics, **36**(11), p. 6073–6105, 1995.
- [6] KITAEV, A. Y. *Fault-tolerant quantum computation by anyons*. Annals of Physics, **303**, p. 2–30, 2003.
- [7] BEIGI, S.; SHOR, P. W.; WHALEN, D. *The quantum double model with boundary: condensations and symmetries*. Communications in Mathematical Physics, **306**(3), p. 663–694, 2011.
- [8] FERREIRA, M. J. B.; PADMANABHAN, P.; TEOTONIO-SOBRINHO, P. *2d quantum double models from a 3d perspective topological quantum field theories*. J. Phys. A: Math. Theor., **47**(375204), 2013.
- [9] FERREIRA, M. J. B.; PADMANABHAN, P.; JIMENEZ, J.-P. I.; TEOTONIO-SOBRINHO, P. *Further explorations of the parameter space of 3d lattice gauge theories*. (arXiv:1504.05922), 2015.
- [10] PADMANABHAN, P.; JIMENEZ, J.-P. I.; FERREIRA, M. J. B.; TEOTONIO-SOBRINHO, P. *More solvable 2d quantum models from lattice gauge theories and beyond*. (arXiv:1408.2501), 2014.

- [11] FERREIRA, M. J. B.; JIMENEZ, J.-P. I.; PADMANABHAN, P.; TEOTONIO-SOBRINHO, P. *A recipe for constructing exactly soluble lattice models with gauge and matter fields in one and two dimensions*. (arXiv:1503.07601v1), 2015.
- [12] TURAEV, V. G.; VIRO, O. Y. *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*. *Topology*, **31**(4), p. 865–902, 1992.
- [13] YETTER, D. *Triangulations and tqft's*. In *Quantum topology*, p. 354–369. Singapore: World Scientific, 1993.
- [14] KUPERBERG, G. *Involutory hopf algebras and 3-manifold invariants*. *International Journal of Mathematics*, **2**(1), p. 41–66, 1991.
- [15] BARRETT, J. W.; WESTBURY, B. W. *The equality of 3-manifold invariants*. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **118**(3), p. 503–510, 1995.
- [16] THOM, R. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **28**(1), p. 17–86, 1954.
- [17] HIRSCH, M. W. *Differential topology*, volume 33 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1976.
- [18] BRÖCKER, T.; JÄNICH, K. *Introduction to differential topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. Traduzido do Alemão por THOMAS, C.; THOMAS, M. J.
- [19] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential topology*, volume 370 in *American Mathematical Soc. Prentice-Hall Inc.*, 2010.
- [20] LIMA, E. L. *Curso de análise*, volume 1 e 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 11^o ed., 1995.
- [21] LIMA, E. L. *Algebra exterior*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [22] LIMA, E. L. *Variedades diferenciáveis*, volume 15 in *Publicações Matemáticas*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.
- [23] MAC LANE, S. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer, 1998.
- [24] AWODEY, S. *Category theory*, volume 49 in *Oxford Logic Guides*. New York: Oxford University Press, 2006.

-
- [25] MESSER, R.; STRAFFIN, P. *Topology now!*, volume 10 in AMC. The Mathematical Association of America, 2006.
- [26] HUNGERFORD, T. W. *Algebra*, volume 73 in Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [27] LANG, S. *Algebra*, volume 211 in Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [28] CURTIS, C. W.; REINER, I. *Representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 356 in American Mathematical Soc. New York: Interscience Publishers, 1966.
- [29] JAMES, G.; LIEBECK, M. W. *Representations and characters of groups*. London: Cambridge University Press, 2001.
- [30] ABRAMS, L. *Two-dimensional topological quantum field theories and frobenius algebras*. Journal of Knot Theory and its Ramifications, **5**(5), p. 569–587, 1996.
- [31] KOCK, J. *Frobenius algebras and 2-d topological quantum field theories*, volume 59 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [32] CHRISTENSEN, H. *Frobenius algebras and two dimensional tqft's*. 2010. Disponível em: <http://www.math.ku.dk/english/research/tfa/top/paststudents/fagprojekt-steffen.pdf>, acesso em abril de 2015.
- [33] FUKUMA, M.; HOSONO, S.; KAWAI, H. *Lattice topological field theory in two dimensions*. Communications in Mathematical Physics, **161**(1), p. 157–175, 1994.
- [34] LAWRENCE, R. J. *An introduction to topological field theory*. Proc. Symp. Pure Math, **51**, p. 89–128, 1996.
- [35] BARTLETT, B. H. *Categorical aspects of topological quantum field theories*. Master's thesis, 2005.
- [36] MÜGER, M. *On tqft's*. 2007. Disponível em: <http://www.math.ru.nl/~mueger/TQFT/TQFT.pdf>, acesso em abril de 2015.
- [37] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. *Hopf algebra: An introduction*, volume 235 in A Series of Monographs and Textbooks. Marcel Dekker, 2000.
- [38] ABE, E. *Hopf algebras*, volume 74. Cambridge University Press, 2004.

-
- [39] FERREIRA, M. J. B. *Teorias de campos discretas e modelos topológicos*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2012.
 - [40] FERREIRA, M. J. B.; PEREIRA, V. A.; TEOTONIO-SOBRINHO, P. *Quasi-topological quantum field theories and z_2 lattice gauge theories*. Int. J. of Phys. A, **27**(23), p. 1475–1485, 2012.
 - [41] PACHNER, U. *Pl homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*. European journal of Combinatorics, **12**(2), p. 129–145, 1991.
 - [42] LIMA, E. L. *Cálculo Tensorial*, volume 33 in Publicações Matemáticas. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 2012.
 - [43] KOSINSKI, A. A. *Differential manifolds*. Courier Dover Publications, 2007.
 - [44] PRASOLOV, V.; SOSSINSKY, A. *Knots, links, braids and 3-manifolds*, volume 154 in Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

Índice Remissivo

Álgebra, 73

de Frobenius, 79

de Hopf, 123

antípoda, 123

cointegral, 127

integral, 127

multiplicação, 73

semisimples, 208

unidade, 73

Aplicação linear, 67

induzida, 73

Atlas, 189

diferenciável, 190

maximal, 190

positivo, 196

Biálgebra, 122

Carta, 189

admissível, 190

positiva, 196

transformação de, 189

Categoria, 25

nCob, 40

conjunto gerador, 50

esqueleto, 48

forma normal, 51

funtor

monoidal estrito simétrico, 96

grande, 26

isomorfismo de objetos, 26

monoidal estrita, 93

simétrica, 95

pequena, 26

transformação natural, 96

monoidal, 97

Coálgebra, 74

comultiplicação, 74

comunidade, 74

Cobordismo, 20

cobordantes, 20

de permutação, 52

equivalente, 33

Conjunto

localmente finito, 200

Emparelhamento bilinear, 69

associativo, 78

de Frobenius, 79

não-degenerado, 70

Espaço

cotangente, 68

covetores, 68

dual, 68

tangente, 192

vetorial

isomorfo, 208

orientado, 195

Euler

característica de, 43

FG-módulo, 204

completamente redutível, 205

irredutível, 205

FG-submódulo, 204

Fibrado tangente, 193

- Forma linear, 68
- Frobenius
- forma de, 79
 - relação de, 56
- Função
- coordenadas, 190
 - mudança de coordenadas, 191
 - sistema de coordenadas, 191
 - suporte, 200
- Funcional linear, 68
- Functor, 26
- Grupo, 204
- Handlebody*, 132
- Heegaard
- diagramas simplificados de, 141
- Homomorfismo
- de álgebra de Frobenius, 93
 - de álgebras, 73
 - de coálgebra, 74
 - de módulo, 77
 - FG-módulo, 204
- Invariante de Kuperberg, 171
- Módulo, 77
- dual, 78
- Monóide, 203
- Orientação
- cobordismo, 20
 - espaço vetorial, 194
 - variedade, 195
- Partição da unidade
- diferenciável, 200
 - subordinada, 200
- Produto tensorial, 69
- comultiplicação, 76
 - counidade, 76
 - multiplicação, 74
 - unidade, 74
- Propriedade da cointegral, 150
- Pushout*, 27
- Representação linear, 96
- Subconjunto
- próprio, 203
- Subgrupo, 204
- Submonóide, 203
- Tensor, 102
- notação de setas, 124
- Teorema
- de Heegaard, 132
 - de Pachner
 - bidimensional, 105
 - tridimensional, 141
- TQFT
- axiomas, 41
 - functor, 96
- Triangulação
- bidimensional, 42
 - tridimensional, 130
- Variedade
- com bordo, 191
 - diferenciável, 192
 - extensão diferenciável, 192
 - diferenciável, 190
 - estrutura diferenciável, 190
 - refinamento, 199
 - topológica, 189
 - vetor tangente, 196