

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Estudo de transições de fase  
em sistemas com simetria “up-down”  
e estados absorventes simétricos**

Áttila Leães Rodrigues

*Orientadora*

Profª. Dra. Tânia Tomé Martins de Castro

Tese submetida ao Instituto de Física da  
Universidade de São Paulo para a ob-  
tenção do título de doutor em ciências.

Banca examinadora:

Profª. Drª. Tânia Tomé Martins de Castro (IFUSP)

Profª. Drª. Kaline Coutinho Rabelo (IFUSP)

Profª. Drª. Vera Bohomoletz Henriques (IFUSP)

Prof. Dr. José Roberto Drugowich de Felício (FFCLRP-USP)

Prof. Dr. Wagner Figueiredo (UFSC)

São Paulo

2014

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Rodrigues, Áttila Leães

Estudo de transições de fase em sistemas com simetria  
“up-down” e estados absorventes simétricos. São Paulo, 2014.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de  
Física – Depto. de Física Geral

Orientador: Profa. Dra. Tânia Tomé Martins de Castro

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Unitermos: 1. Mecânica estatística clássica; 2. Mudança de  
fase; 3. Física da matéria condensada; 4. Física computacional.

USP/IF/SBI-017/2014

# Agradecimentos

À minha família, muito obrigado!

À minha noiva Natália, que vai me dar o melhor presente de todos! E à família Junqueira Trarbach que me fez sentir em casa em uma cidade nova.

À minha orientadora de mestrado e doutorado, Tânia Tomé. Aos professores Mário José de Oliveira e Christophe Chatelain.

Aos companheiros Pedro Henrique, Alexander, Jozismar, Antônio Mário, Masayuki, Jonatas, Maycon, Oscar, Henrique, Carlos Fiore, Maicon Faria, Avarezinho, Thouminhaz, José, Feng e Geiger.

À Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estudamos um modelo estocástico com simetria Ising e dois estados absorventes em três dimensões com uma rede cúbica e em duas dimensões através de uma rede triangular. O estudo levou em conta cálculos de aproximação de campo médio e simulações de Monte Carlo. Os resultados mostraram que o modelo tem transição de segunda ordem de uma fase paramagnética para uma fase ferromagnética, uma transição da fase ferromagnética para uma fase absorvente, também de segunda ordem, e ainda uma transição de primeira ordem da fase paramagnética para a fase absorvente. No espaço de parâmetros as três linhas de transição se encontram no diagrama de fases em um ponto onde o modelo se comporta como o modelo do votante.

# Abstract

In this work we studied a stochastic model with ising symmetry and two symmetric absorbing configurations in a three-dimensional cubic lattice and in two dimensions using a triangular lattice. The study took into account simple mean-field approximations and Monte Carlo simulations. The results showed that the model has a second-order transition from a paramagnetic phase to a ferromagnetic phase and second-order transition from ferromagnetic phase to the absorbing one. A first-order phase transition from the paramagnetic phase to the absorbing phase is observed too. In the phase diagram the two second-order transition lines approaches to the point where the model behaves like the voter model.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Organização da tese . . . . .	11
1.2	Modelos estocásticos de gás na rede . . . . .	12
1.3	Equação mestra e o valor médio de uma grandeza de estado $g(\sigma)$ . . . . .	13
1.4	Regime estacionário e sistemas de não-equilíbrio . . . . .	16
1.5	Definições relevantes ao trabalho . . . . .	20
1.6	Fenômeno <i>Coarsening</i> . . . . .	22
1.7	Teoria de escala finita em transições de segunda ordem . . . . .	39
1.8	Simulações dependentes do tempo e expoentes dinâmicos . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Modelo do Votante</b>	<b>54</b>
2.1	Modelo do Votante, uma dinâmica na temperatura zero . . . . .	54
2.2	Transição do modelo do Votante e o modelo Glauber Linear . . . . .	59
2.3	Modelos GVM e a conjectura para uma transição do Modelo do Votante . . . . .	63

---

2.4	Quebrando a transição do modelo do Votante em duas . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Modelo UD-ABS</b>	<b>68</b>
3.1	Redes utilizadas . . . . .	72
3.2	Aproximação de campo médio . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Resultados de simulação do modelo UD-ABS na rede cúbica</b>	<b>84</b>
4.1	Diagrama de fases . . . . .	84
4.2	Resultados na linha do modelo do votante . . . . .	86
4.3	Transição de 2ª ordem tipo Ising . . . . .	89
4.4	Transição de 2ª ordem da classe DP . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Resultados de simulação do modelo UD-ABS na rede hexagonal</b>	<b>107</b>
5.1	Diagrama de fases . . . . .	107
5.2	Resultados na linha do modelo do Votante . . . . .	109
5.3	Transição de segunda ordem da classe Ising . . . . .	113
5.4	Resultados na linha $p_2 = 1$ . . . . .	113
5.5	Resultados na linha $p_2 = 0, 90$ . . . . .	116
5.6	Transição de segunda ordem da classe DP . . . . .	119
5.7	Transição de primeira ordem . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Resumo e discussão dos resultados do modelo UD-ABS</b>	<b>132</b>
6.1	Rede Hexagonal . . . . .	132

---

6.2	Rede cúbica . . . . .	135
<b>7</b>	<b>Outro “splitting”</b>	<b>138</b>
7.1	Modelo Glauber linear alterado . . . . .	139
7.2	Resultados de simulação . . . . .	142
7.3	Discussão . . . . .	151
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>154</b>
<b>9</b>	<b>Apêndice</b>	<b>158</b>
9.1	Incertezas nos resultados . . . . .	158
9.2	Análise de estabilidade das soluções de campo médio simples .	161



# Capítulo 1

## Introdução

Se tivermos em uma caixa um certo número de partículas interagentes o conjunto de posições e momentos das partículas formam uma configuração representada por um ponto do espaço de fase do sistema e um conjunto de medida não-nula destes pontos formam um “ensemble” neste mesmo espaço de fase [1].

Para cada par de microestados no espaço de fase deve existir uma corrente de probabilidade não-nula (o balanceamento detalhado) [2] para o sistema ser considerado de equilíbrio [3]. Um caso onde o sistema é de não-equilíbrio é quando duas laterais opostas da caixa onde estão encerradas as partículas citadas anteriormente têm temperaturas diferentes [4].

O objeto de estudo deste trabalho é um modelo contextualizado na dinâmica estocástica de não-equilíbrio [2][3][4][5][6][7][8][9]. A dinâmica estocástica é um método de abordagem para simulações onde o espaço definido para a

existência do modelo é uma rede. Esta rede estabelece posições discretas para os valores dos objetos de estudo como por exemplo um sistema de spins de Ising que em cada posição da rede tomam valores  $+1$  quando o spin está para cima e  $-1$  quando está para baixo. Conforme o sistema evolui no tempo registramos as grandezas que interessam, como no presente estudo, a magnetização (que será identificada como parâmetro de ordem).

Os parâmetros de controle representam a interferência do usuário da simulação na dinâmica, um exemplo é a temperatura de um gás, essa grandeza pode ser o parâmetro de controle do sistema. Através da manipulação do parâmetro de controle é observado o comportamento do sistema em diversas condições onde um dos fenômenos possíveis de ocorrer é a transição de fase.

Neste estudo as transições de fase importantes são: a transição de fase de quebra espontânea de simetria como no modelo Ising [2][3], a transição de fase para uma configuração absorvente compatível com o modelo da percolação direcionada [2][3] e a transição descontínua representada pelo modelo do Votante [2][3][10].

A motivação do nosso trabalho foi verificar e entender a natureza da transição descontínua representada pela transição do modelo do Votante através de um modelo estocástico na rede idealizado pelo nosso grupo de pesquisa. Diversos estudos descreveram e caracterizaram as propriedades da transição do modelo do Votante [10][11][12]. Uma característica a ser confirmada é que essa transição seja uma justaposição de duas outras transições:

as já mencionadas transição de quebra espontânea de simetria como no modelo de Ising e uma transição para uma configuração absorvente da classe de universalidade da percolação direcionada. O nosso trabalho tem como objetivo essa verificação e em quais condições esses fenômenos ocorrem.

## 1.1 Organização da tese

No capítulo 1 discorremos sobre generalidades da dinâmica estocástica explicando os conceitos de gás na rede, equação mestra, aspectos de transições de fase e outras definições relevantes ao entendimento da tese.

No capítulo 2 descrevemos a dinâmica do modelo do Votante e discutimos as suas características relevantes ao trabalho. Em seguida comentamos os fenômenos estudados em outros trabalhos que dizem respeito ao modelo do Votante e que são a motivação deste trabalho.

No capítulo 3 apresentamos o modelo UD-ABS desenvolvido pelos autores, o estudo deste modelo foi o objetivo desta tese.

Nos capítulos 4 e 5 são apresentados os resultados de simulação na rede em duas dimensões e em três dimensões além da caracterização das transições de fase do modelo no diagrama de fases.

No capítulo 6 apresentamos um resumo dos resultados de simulação.

No capítulo 7 utilizamos o aprendizado com os resultados do modelo UD-ABS para alterar as regras do modelo Glauber linear. Com isso observamos um comportamento inédito neste modelo.

No capítulo 8 apresentamos as conclusões do trabalho.

## 1.2 Modelos estocásticos de gás na rede

Os modelos de dinâmica estocásticos são dinâmicas definidas em uma rede com regras que não levam em conta uma hamiltoniana definida. As dinâmicas definidas por estas regras para os modelos são apropriadas para a simulação computacional.

Uma rede regular é uma matriz de dimensão  $d$ , com dimensão linear de tamanho  $L$  e com  $L^d$  elementos.

Um sistema com  $N$  sítios possui um estado microscópico (ou configuração) denotado por

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N) \quad (1.1)$$

em que  $\sigma_i$  é a variável estocástica associada ao sítio  $i$  da rede.

A dinâmica do modelo se dá alterando o estado microscópico  $\sigma$  em outro estado  $\sigma'$  de acordo com as regras do modelo. Essas regras de transição definem a taxa (ou probabilidade) de transição entre as configurações.

$W(\sigma, \sigma')$  é a taxa de transição da configuração  $\sigma'$  para o estado  $\sigma$  ou também é definida como probabilidade condicional de transição por unidade de tempo do estado  $\sigma'$  para o estado  $\sigma$ .

Chamamos de  $P(\sigma, t)$  a probabilidade do sistema estar em uma confi-

guração  $\sigma$  no tempo  $t$ . A equação mestra descreve o comportamento de  $P(\sigma, t)$  e será mostrada na seção seguinte.

### 1.3 Equação mestra e o valor médio de uma grandeza de estado $g(\sigma)$

Dada a equação mestra:

$$\frac{d}{dt}P(\sigma, t) = \sum_{\sigma'} \{W(\sigma, \sigma')P(\sigma', t) - W(\sigma', \sigma)P(\sigma, t)\}. \quad (1.2)$$

Para determinar a média de uma grandeza de estado  $g(\sigma)$ , aplicaremos uma taxa de transição  $\sigma' \rightarrow \sigma$  que permite a modificação de somente 1 sítio, a configuração  $\sigma'$  diferente somente 1 sítio na posição  $i$  (valor do estado:  $\sigma_i$ ) da configuração  $\sigma$  será chamada de  $\sigma^i$ .

Agora considerando que os estados possíveis para  $\sigma_i$  são  $+1$  ou  $-1$ , a taxa de transição entre configurações que diferem por um único sítio pode ser escrita como:

$$W(\sigma, \sigma^i) = \sum_{i=1}^N \delta(\sigma_1, \sigma'_1) \dots \delta(-\sigma_i, \sigma'_i) \dots \delta(\sigma_N, \sigma'_N) \omega_i(\sigma^i), \quad (1.3)$$

onde  $\delta(x, y)$  denota o delta de Kronecker e  $\omega_i(\sigma)$  é a taxa de transição associada ao sítio  $i$ .

Para o primeiro termo da equação (1.2), temos:

$$\sum_{\sigma^i} W(\sigma, \sigma^i) P(\sigma^i, t) = \sum_{\sigma^i} \sum_{i=1}^N \delta(\sigma_1, \sigma'_1) \dots \delta(-\sigma_i, \sigma'_i) \dots \delta(\sigma_N, \sigma'_N) \omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t). \quad (1.4)$$

Invertendo a ordem dos somatórios e somando em todas as configurações possíveis  $\sigma^i$  temos que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\sigma^i} \delta(\sigma_1, \sigma'_1) \dots \delta(-\sigma_i, \sigma'_i) \dots \delta(\sigma_N, \sigma'_N) \omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t), \quad (1.5)$$

com  $\sigma^i = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$ . O segundo termo da equação mestra fica escrito como:

$$\sum_{\sigma^i} W(\sigma^i, \sigma) P(\sigma, t) = \sum_{\sigma^i} \sum_{i=1}^N \delta(\sigma'_1, \sigma_1) \dots \delta(\sigma_i, -\sigma'_i) \dots \delta(\sigma_N, \sigma'_N) \omega_i(\sigma) P(\sigma, t). \quad (1.6)$$

Invertendo a ordem das somatórias e fazendo a soma para todas as configurações possíveis, podemos escrever (1.5) como:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(\sigma) P(\sigma, t). \quad (1.7)$$

A partir das expressões (1.5) e (1.7) reescrevemos a equação mestra,

$$\frac{d}{dt} P(\sigma, t) = \sum_{i=1}^N \{ \omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t) - \omega_i(\sigma) P(\sigma, t) \}. \quad (1.8)$$

em que  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N)$  e  $\sigma^i = (\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$ .

Multiplicando os dois lados da última equação pela expressão  $\sum_{\sigma} g(\sigma)$ ,  
 obtém-se

$$\frac{d}{dt} \sum_{\sigma} g(\sigma) P(\sigma, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma} g(\sigma) \{ \omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t) - \omega_i(\sigma) P(\sigma, t) \}. \quad (1.9)$$

Usando a definição do valor médio de  $g(\sigma)$ ,

$$\langle g(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} g(\sigma) P(\sigma, t), \quad (1.10)$$

chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle g(\sigma) \rangle &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\sigma} g(\sigma) \omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t) - \sum_{\sigma} g(\sigma) \omega_i(\sigma) P(\sigma, t) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\sigma} g(\sigma^i) \omega_i(\sigma) P(\sigma, t) - \sum_{\sigma} g(\sigma) \omega_i(\sigma) P(\sigma, t) \right\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle g(\sigma) \rangle &= \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma} \{ g(\sigma^i) - g(\sigma) \} \omega_i(\sigma) P(\sigma, t) \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \{ g(\sigma^i) - g(\sigma) \} \omega_i(\sigma) \rangle, \end{aligned} \quad (1.12)$$

com  $\sigma^i = (\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$ .

Aplicando  $g(\sigma) = \sigma_j$  na equação (1.12) temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\sigma_j\rangle &= \langle(-\sigma_j - \sigma_j)\omega_j(\sigma)\rangle \\ &= -2\langle\sigma_j\omega_j(\sigma)\rangle.\end{aligned}\tag{1.13}$$

A equação (1.13) é a equação de evolução para a grandeza  $m = \langle\sigma_j\rangle$ .

## 1.4 Regime estacionário e sistemas de não-equilíbrio

A definição de regime estacionário é relacionada à já mencionada equação mestra dada pela expressão (1.2).

Dizemos que o sistema está no estado estacionário quando a probabilidade  $P(\sigma)$  de encontrar uma determinada configuração  $\sigma$  na dinâmica é constante no tempo, ou seja,  $dP(\sigma)/dt = 0$ . Portanto, a partir da equação (1.12) temos que:

$$\sum_i \{\omega_i(\sigma^i)P(\sigma^i) - \omega(\sigma)P(\sigma)\} = 0,\tag{1.14}$$

em que  $P(\sigma)$  é a distribuição de probabilidades estacionária.

Um sistema em equilíbrio termodinâmico está em um estado estacionário, logo obedece à condição (1.14). Porém, esta condição é necessária mas não suficiente para a situação de equilíbrio termodinâmico. Para o sistema estar



em equilíbrio, o lado direito da equação mestra deve se igualar a zero de uma maneira específica:

$$\omega(\sigma^i)P(\sigma^i) - \omega(\sigma)P(\sigma) = 0, \quad (1.15)$$

para todo par de configurações  $\sigma$  e  $\sigma^i$  possíveis. Ou seja,

$$\omega(\sigma^i)P(\sigma^i) = \omega(\sigma)P(\sigma) \quad (1.16)$$

para qualquer par  $\sigma, \sigma^i$ .

Essa condição específica é chamada de condição de Balanceamento Detalhado. Um sistema em equilíbrio obedece ao balanceamento detalhado. Por consequência, um sistema de não-equilíbrio é um sistema que não obedece ao balanceamento detalhado.

É importante observar que um sistema de não-equilíbrio pode ter um estado estacionário, ou seja, pode obedecer à condição (1.14), mas não obedecer à condição (1.15). Um exemplo é mostrado na figura 1.1, que apresenta um sistema contendo três configurações possíveis e com transições entre as configurações permitidas somente em uma direção. Este sistema é de não equilíbrio, porém se as probabilidades de transição forem iguais, as probabilidades de ocorrência de cada configuração serão  $1/3$ , ou seja, um estado estacionário.

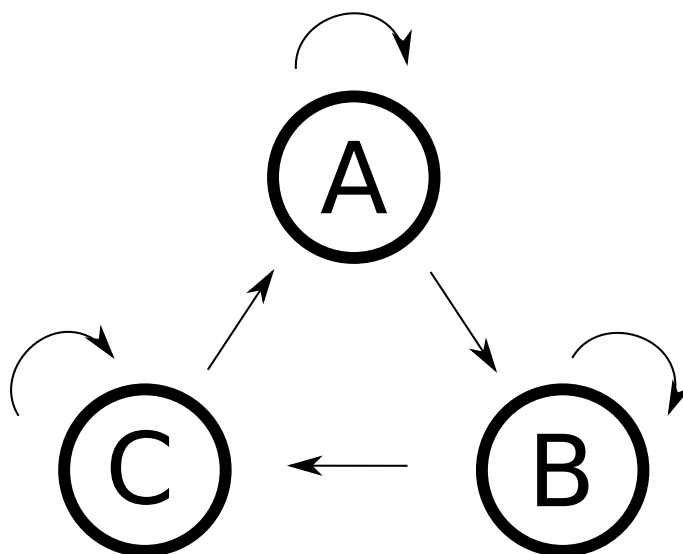


Figura 1.1: Exemplo de sistema com 3 possíveis configurações. Com as probabilidades de transição definidas em uma única direção, este sistema tem um estado estacionário, porém é de não-equilíbrio.

Entre os sistemas fora do equilíbrio destacamos aqueles que apresentam estados absorventes. Um estado absorvente é uma configuração na qual o sistema, quando a atinge, permanece nesta configuração para sempre. Na figura 1.2 é ilustrada esta situação.

Um dos modelos mais famosos que apresenta estados estacionários de não-equilíbrio é o modelo de contato [2] [5] [6], o qual pertence à classe de universalidade da percolação direcionada (DP) [2] [6] [9] [13].

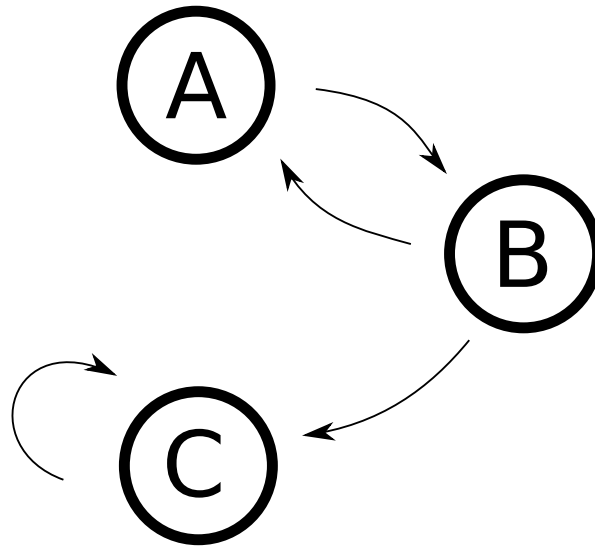


Figura 1.2: Exemplo de sistema com um estado absorvente. O sistema pode oscilar entre as configurações  $A$  e  $B$ . Uma vez no estado  $C$ , o sistema não sairá mais dessa configuração.

O modelo de Glauber-Ising [2] [10] é um exemplo importante de modelo definido por uma dinâmica que obedece ao balanceamento detalhado. Nesse caso considera-se uma dinâmica que descreve a interação de um sistema de spins de Ising com um banho térmico. O sistema nesse caso evolui no tempo até atingir um estado estacionário de equilíbrio cuja probabilidade estacionária é uma distribuição de Gibbs.

## 1.5 Definições relevantes ao trabalho

Definimos um passo de Monte Carlo como  $N$  tentativas de atualização de sítios escolhidos aleatoriamente na rede, onde  $N$  é o número de sítios da rede. Em geral consideramos redes regulares de lado  $L$  de modo que  $N = L^2$  para o caso de duas dimensões. Essa definição é equivalente ao incremento de tempo  $\Delta t = 1/N$  a cada sítio escolhido para a atualização.

A magnetização  $m$  em um determinado passo de Monte Carlo  $t$  é definida da forma:

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (1.17)$$

em que  $\sigma_i \pm 1$ .

A média da magnetização no tempo é definida da forma:

$$\langle m \rangle = \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} |m(t)| \quad (1.18)$$

A susceptibilidade é definida como

$$\chi = N \{ \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 \}. \quad (1.19)$$

O comprimento de correlação  $\xi$  espacial em relação ao parâmetro de ordem é definido a partir de função de correlação

$$G_r \sim e^{-r/\xi} \quad (1.20)$$

O cumulante de Binder de quarta ordem é definido da forma usual:

$$U_4 = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3\langle m^2 \rangle^2}. \quad (1.21)$$

O cumulante de segunda ordem é definido em relação a  $\rho = (1 - m)$ :

$$U_2 = \frac{\langle \rho^2 \rangle}{\langle \rho \rangle^2} - 1. \quad (1.22)$$

- Expoentes estáticos

Chamamos de  $\epsilon$  o módulo da diferença do parâmetro de controle até o parâmetro na criticalidade ou da transição, de forma que (no caso onde o parâmetro de controle é  $p_1$ )  $\epsilon = |p_1^* - p_1|$ .

A magnetização  $m$  se aproxima do ponto crítico ou de transição como:

$$m \sim \epsilon^\beta. \quad (1.23)$$

O expoente associado à suscetibilidade é

$$\chi \sim \epsilon^{-\gamma}. \quad (1.24)$$

e o expoente associado ao comprimento de correlação é

$$\xi \sim \epsilon^{-\nu_\perp} \quad (1.25)$$

- Expoentes dinâmicos

Uma maneira de determinar os expoentes dinâmicos é quando utilizamos como configuração inicial um único sítio ativo em uma rede infinita no ponto crítico. Um sítio ativo é definido como um sítio onde existe a probabilidade maior do que zero de ocorrer uma alteração no seu estado.

O número de sítios ativos escala com

$$N(t) \sim t^n. \quad (1.26)$$

A probabilidade de sobrevivência tem  $\delta$  como expoente dinâmico associado:

$$P(t) \sim t^{-\delta}. \quad (1.27)$$

## 1.6 Fenômeno *Coarsening*

Na dinâmica de Glauber do modelo de Ising em temperaturas altas ( $T \gg T_c$ ) os spins estão descorrelacionados, o que resulta em um estado paramagnético. Se alterarmos em seguida a temperatura do sistema para um valor menor ou igual ao da temperatura crítica, devido à quebra espontânea de simetria a dinâmica não decidirá para qual magnetização dominante irá,  $+1$  ou  $-1$ . No limite termodinâmico esta “situação de indecisão” se estenderá com  $t \rightarrow \infty$  e não chegará ao estado estacionário correspondente ao seu parâmetro de controle.

Esse fenômeno onde mais de um estado (estados igualmente prováveis) compete pela ocupação da rede chamamos de *coarsening*. Pode-se perceber visualmente esse fenômeno nas figuras 1.3, 1.4 e 1.5.

Nas figuras 1.3 e 1.4 é mostrado um *quench* da temperatura infinita para a temperatura zero e para a temperatura  $T = 2$  (com  $k_B = 1$ ). A evolução dos retratos da rede mostra como o fenômeno *coarsening* se apresenta no modelo de Ising. A figura 1.5 mostra o caso do modelo do Votante. Como o modelo do Votante não tem um parâmetro de controle definido (como a temperatura no modelo de Ising) a simulação começa com os estados dos sítios escolhidos aleatoriamente e evolui segundo as regras usuais do modelo do Votante que serão apresentadas na seção 2.1 (página 2.1).

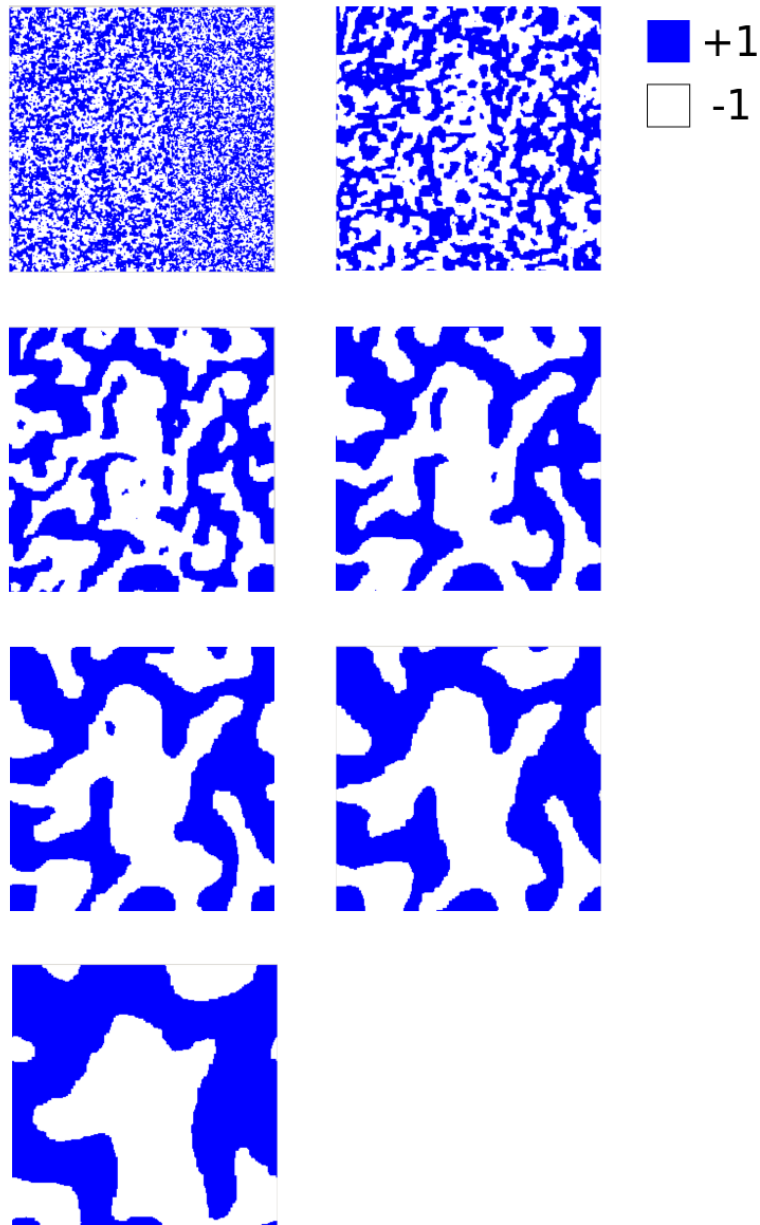


Figura 1.3: Retratos de uma simulação do modelo de Ising com condição inicial aleatória e um imediato *quench* para a temperatura zero. A partir do retrato no alto e à esquerda, retratos nos tempos: 2, 10, 50, 120, 200, 290 e 640 pmc.



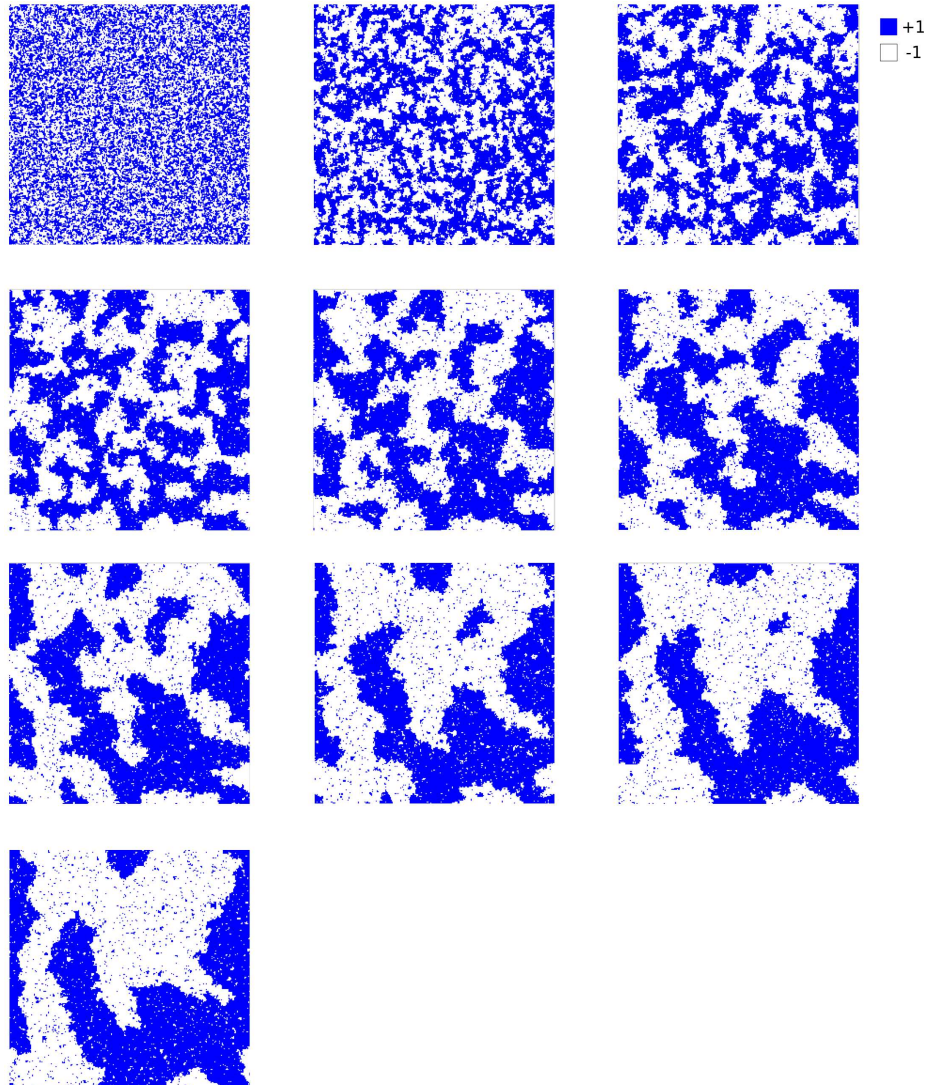


Figura 1.4: Retratos de uma simulação do modelo de Ising com condição inicial aleatória e um imediato *quench* para  $k_B T = 2$  ( $J = 1$ ). A partir do retrato no alto e à esquerda, retratos nos tempos: 2, 12, 35, 80, 160, 260, 430, 810, 1.000 e 1.260 pmc.

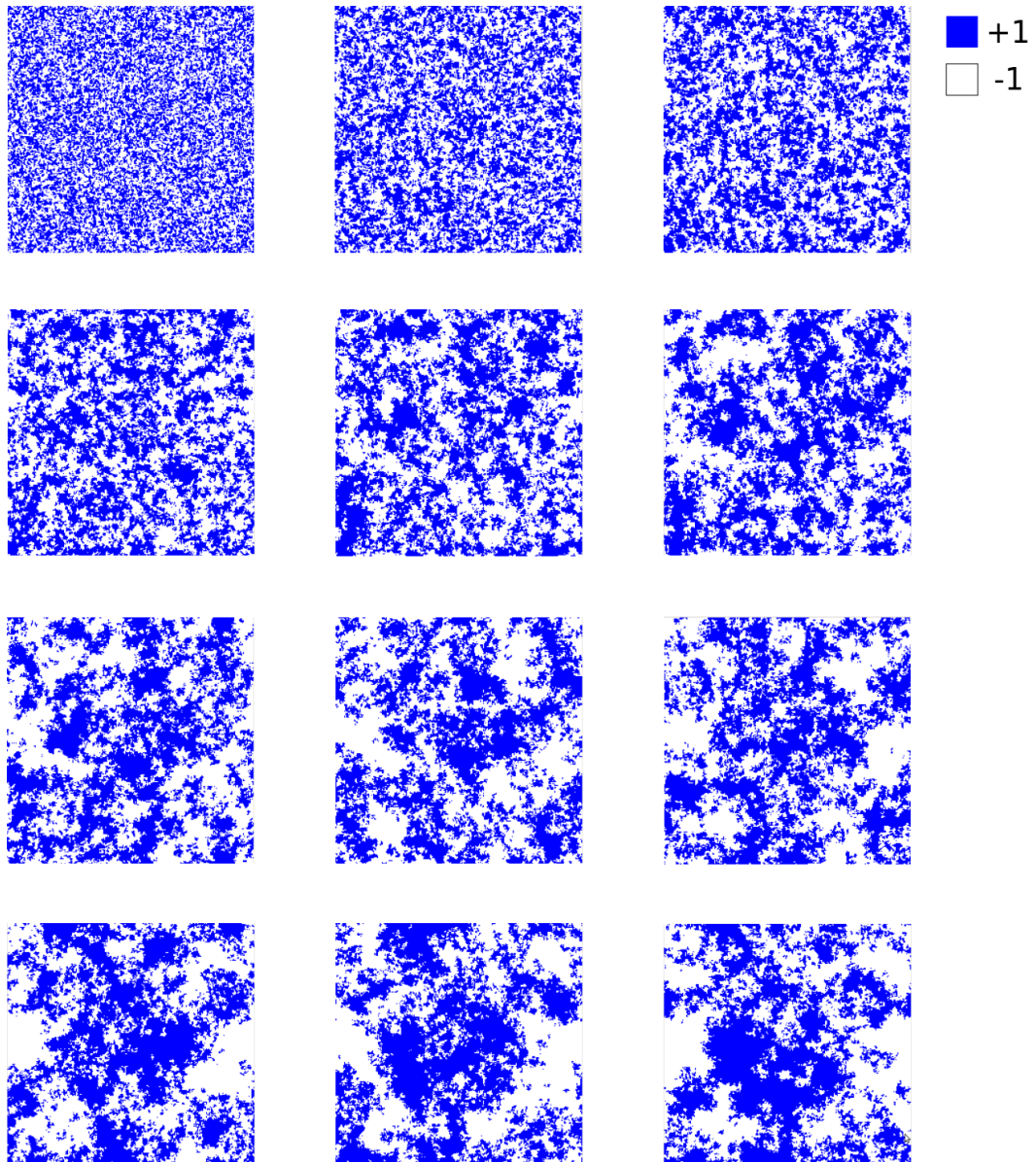


Figura 1.5: Retratos de uma simulação do modelo do Votante com condição inicial aleatória. A partir do retrato no alto e à esquerda, retratos nos tempos: 2, 8, 22, 46, 90, 160, 250, 400, 600, 800, 1.000 e 1.200 pmc.

Uma medida que define se o modelo exibe *coarsening* é a densidade de interfaces  $\rho_m$ . A densidade de interfaces é definida como a razão entre a quantidade de ligações entre estados diferentes e a quantidade de ligações totais. Em um modelo que tem a característica *coarsening* a densidade de interfaces  $\rho_m$  vai a zero conforme o tempo progride, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_m(t) \rightarrow 0. \quad (1.28)$$

A característica *coarsening* em um modelo diz que a densidade de interfaces na rede diminui conforme passa o tempo (a partir de um *quench* de uma configuração desordenada para um valor do parâmetro de controle relativo à uma fase ordenada). Porém, diferentes modelos têm distintas formas para o limite da equação (1.28). Dessa maneira podemos diferenciar o comportamento de  $\rho_m(t)$  em relação a transições de fase diferentes.

Um comportamento conhecido de  $\rho_m(t)$  é o de sistemas onde a competição dos estados pela dominância da rede se dá com os clusters apresentando uma tensão superficial (por exemplo, o modelo de Ising). Nesse caso o tamanho característico dos clusters se comporta como  $L(t) \sim t^{1/z}$ . Como  $\rho_m \sim 1/L(t)$ , então  $\rho_m(t) \sim t^{-1/z}$ . Onde  $z$  é um expoente dinâmico e  $L(t)$  é o tamanho característico dos clusters.

No caso do modelo do Votante (que será explicado em detalhes na seção 2.1) a grandeza  $\rho_m(t)$  vai a zero mais lentamente que os modelos onde a tensão de superfície desempenha um papel importante na transição de fase. No caso

do modelo do Votante  $\rho_m(t) \sim 1/\ln(t)$ [14].

Uma maneira de perceber intuitivamente a característica de tensão de superfície é preparar a simulação com uma rede em  $t = 0$  na forma de um cluster como um círculo e observar a sua evolução [14].

Nas figuras 1.6, 1.7 e 1.8 mostramos como se dá a dinâmica *coarsening* no caso de uma rede preparada com um cluster circular central imerso em uma rede de spins contrários.

$\rho_m(t)$	modelo
$\sim t^{-1/z}$	Ising
$\sim 1/\ln(t)$	Votante (2D)

Tabela 1.1: Dois casos para o comportamento de  $\rho_m(t)$ , modelo de Ising e o modelo do Votante

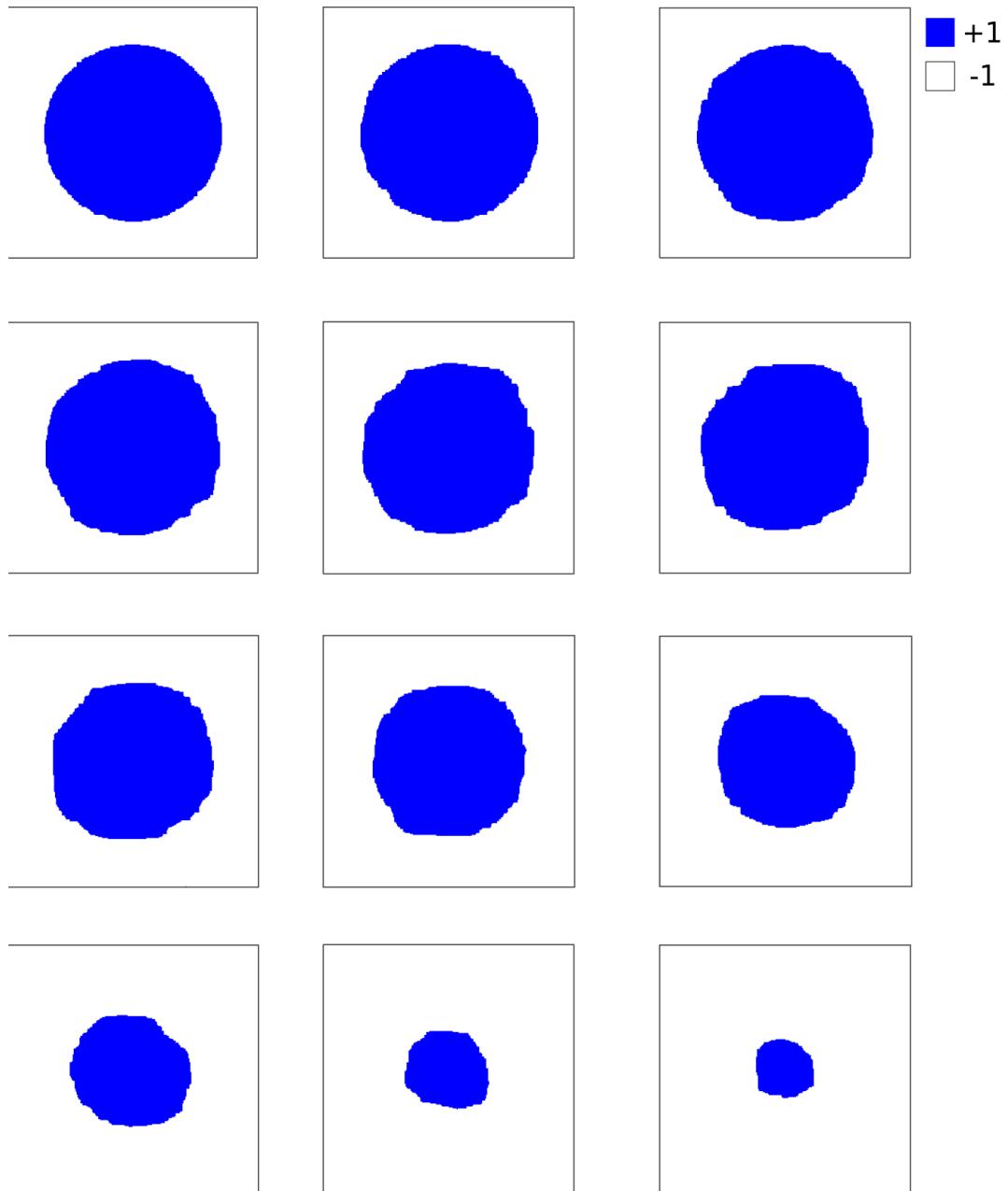


Figura 1.6: Retratos de uma simulação do modelo de Ising com uma condição inicial de um círculo de sítios no estado  $+1$  em uma rede de sítios  $-1$ , a temperatura é zero. A partir do retrato no alto e à esquerda, retratos nos tempos: 2, 20, 100, 200, 400, 700, 1.200, 1.600, 2.600, 3.600, 5.000 e 5.700 pmc.

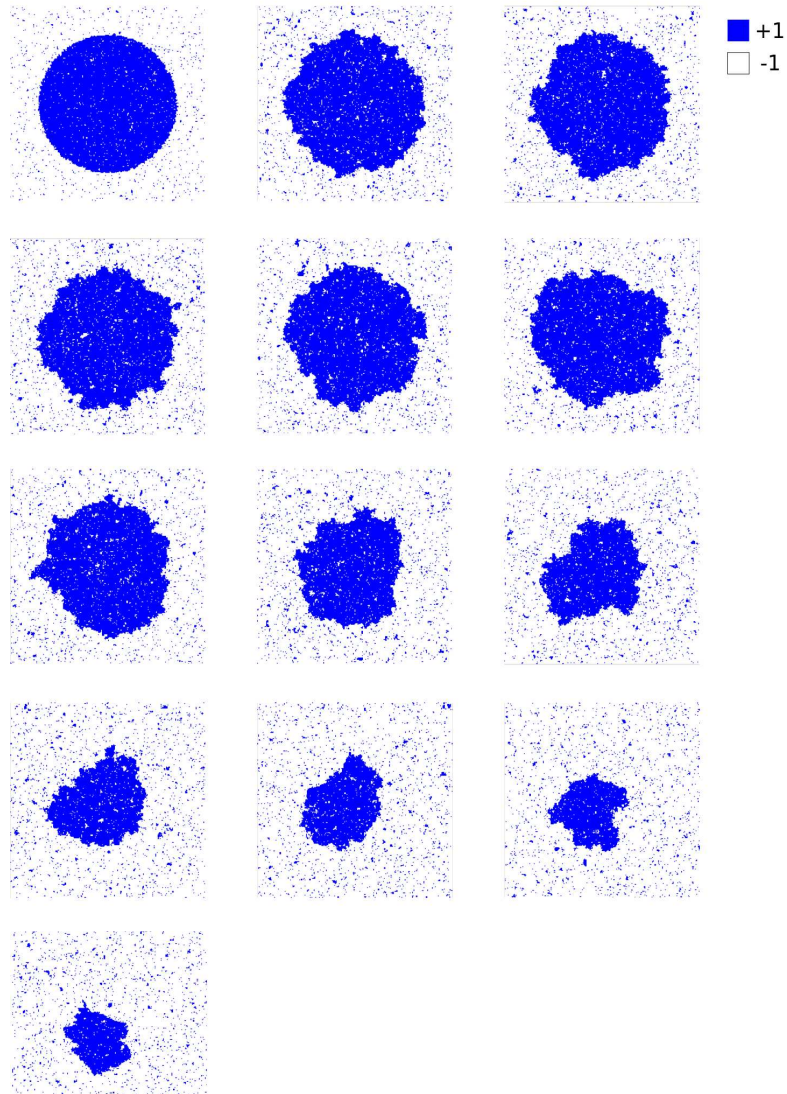


Figura 1.7: Retratos de uma simulação do modelo de Ising com uma condição inicial de um círculo de sítios no estado +1 em uma rede de sítios -1, a temperatura é  $k_B T = 2$  com  $J = 1$ . A partir do retrato no alto e à esquerda, retratos nos tempos: 2, 70, 200, 400, 1.000, 1.900, 3.200, 6.000, 8.000, 9.000, 10.000, 11.000 e 12.000 pmc.

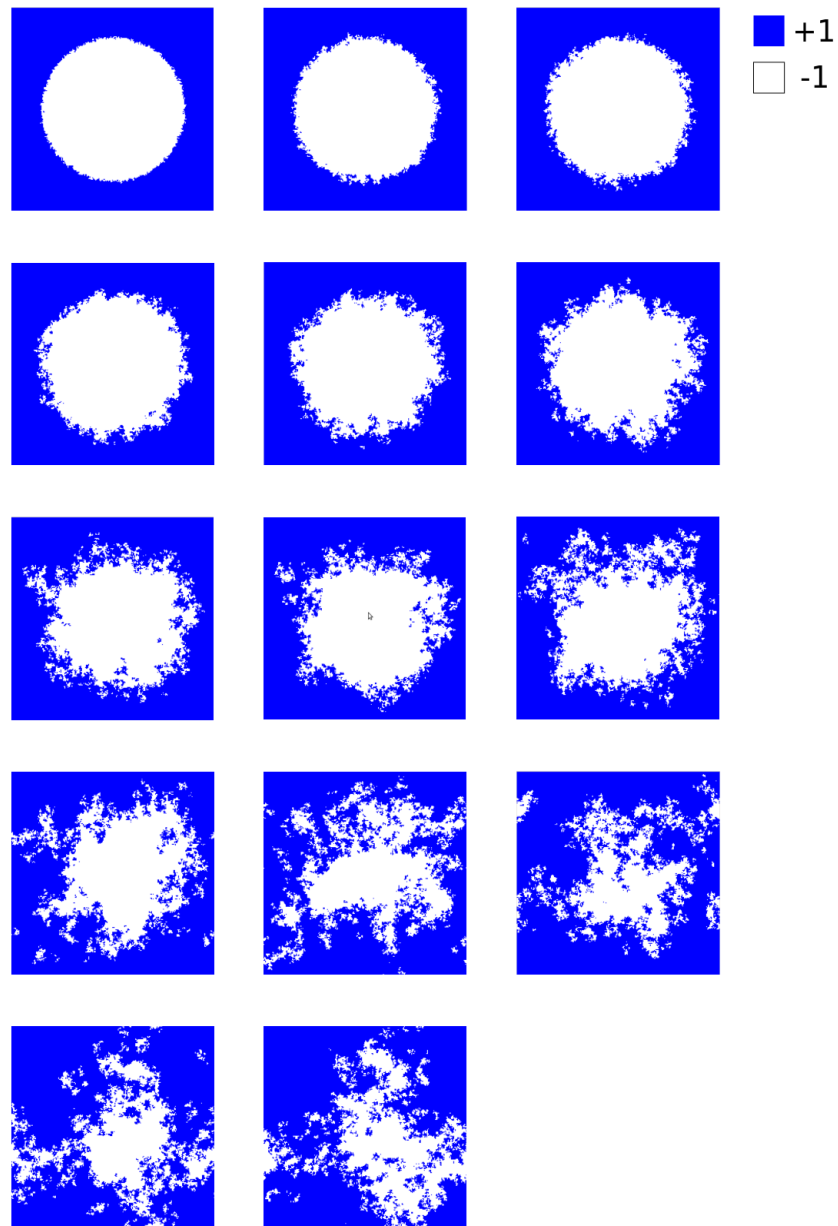


Figura 1.8: Retratos de uma simulação do modelo do Votante com uma condição inicial de um círculo de sítios no estado +1 em uma rede de sítios -1. A partir do retrato no alto e à esquerda, retratos nos tempos: 2, 20, 40, 80, 160, 300, 500, 700, 1.000, 1.500, 2.000, 3.000, 4.000 e 5.000 pmc.

No caso do modelo de Ising (figuras 1.6 e 1.7) é fácil perceber como o cluster central é aniquilado durante a dinâmica. Para o modelo do Votante (figura 1.8) a interface do cluster é “dissolvida” inicialmente mas eventualmente o cluster é aniquilado já que o modelo do votante exhibe *coarsening*, porém lento (tabela 1.6).

Mostramos nas figuras 1.6, 1.7 e 1.8 como a característica *coarsening* (e a tensão superficial presente no modelo) aniquilam um cluster circular de sítios quando estão imersos em uma rede com spins contrários. Agora argumentaremos o nosso entendimento sobre como se dá essa característica da aniquilação do cluster central.

Tomaremos como exemplo o modelo de Ising em duas dimensões com uma rede quadrada regular. Considerando o algoritmo de Metropolis como exemplo de dinâmica, na temperatura zero cada spin a ser atualizado vai para o estado com energia mais baixa de acordo com a sua vizinhança. Dessa forma quando temos uma configuração na rede com uma interface como uma linha (figura 1.9) essa linha não será rompida.



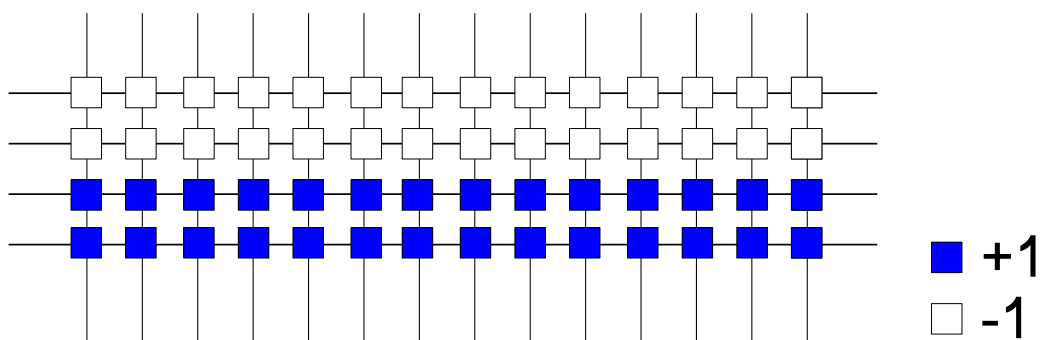


Figura 1.9: Configuração de interface que na temperatura zero fica inalterada na dinâmica de Glauber-Ising.

Agora se a configuração exibir um “dente” (ou “kink”) o algoritmo de Metropolis (e também a dinâmica do modelo do Votante) diz que esse “dente” se move aleatoriamente pela interface. Essa característica reflete o não-favorecimento de uma das magnetizações (considerando o campo externo  $H = 0$ ), o que é um ingrediente importante já que um modelo com favorecimento a um dos estados absorventes normalmente cai na classe de universalidade da percolação direcionada [3] o que difere da característica de duas configurações absorventes do modelo do Votante e da transição GVM.

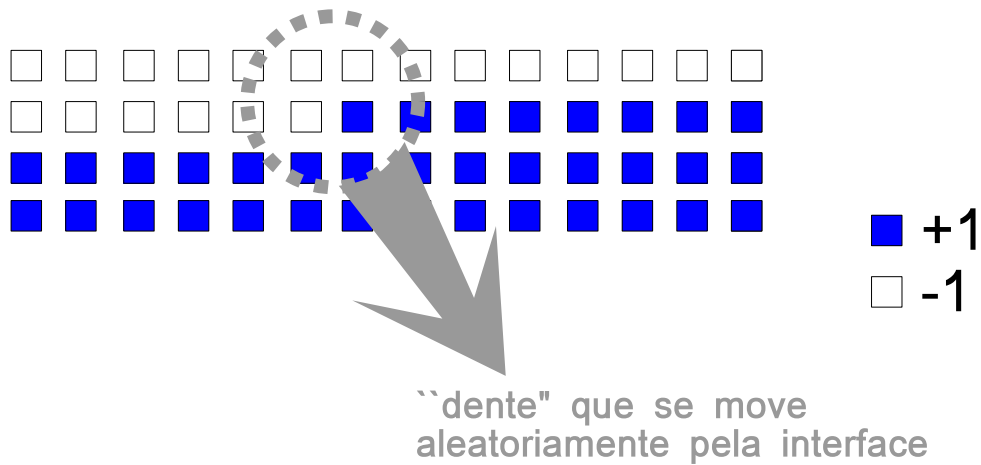


Figura 1.10: Um “dente” na interface que se move aleatoriamente de acordo com o algoritmo de Metropolis para o modelo de Ising e também de acordo com a dinâmica do modelo do Votante.

Voltando à questão de um cluster circular imerso em uma rede de spins contrários. Se observarmos os detalhes da interface deste cluster no tempo inicial, perceberemos que esta interface será uma combinação de paredes como na figura 1.9 e “dentes” como na figura 1.10. Na figura 1.11 mostramos como a dinâmica dos “dentes” aniquila uma camada da interface e faz um cluster como o da figura 1.6 desaparecer.

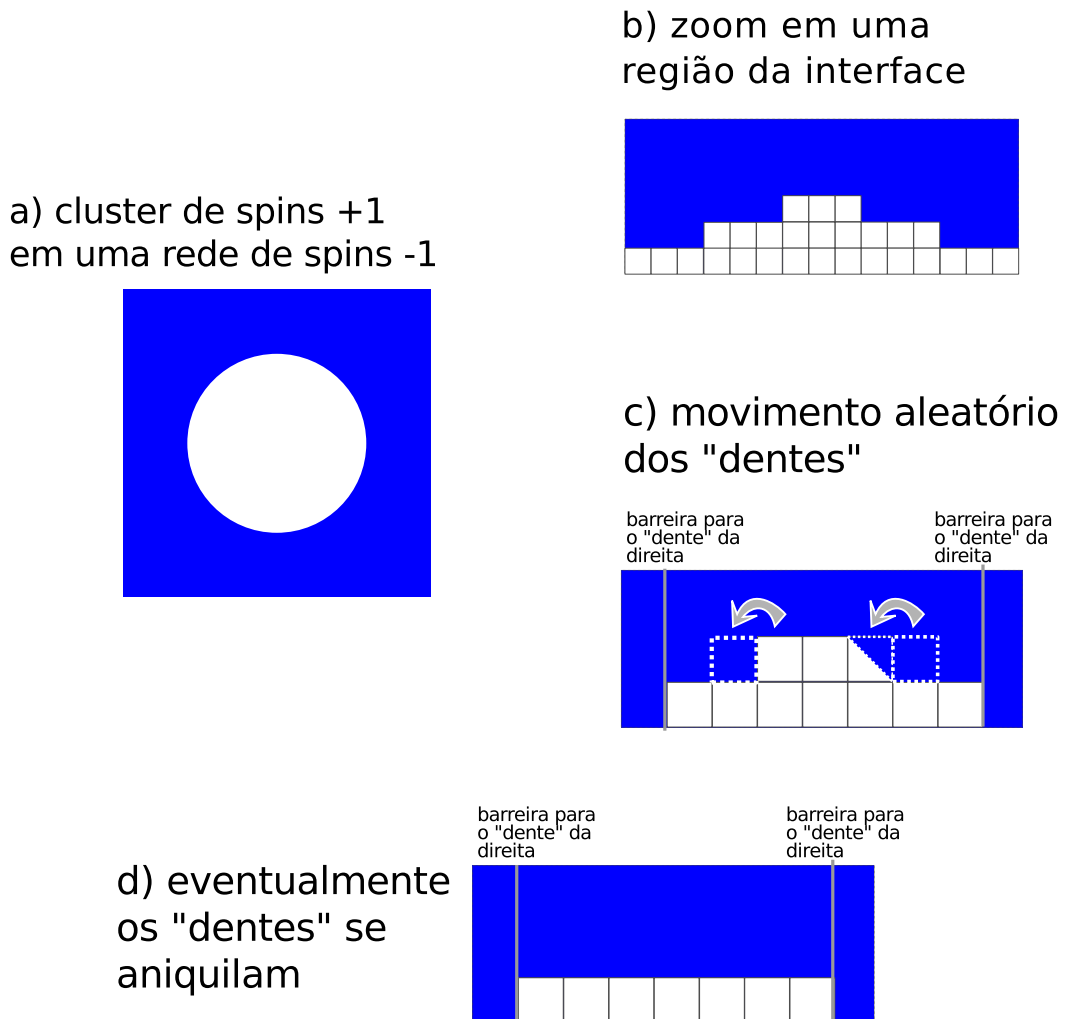


Figura 1.11: Processo de aniquilação de um cluster circular em uma rede de spins contrários. Caso com temperatura igual a zero.

Como visto na figura 1.11, o mecanismo de desaparecimento de um cluster circular em uma rede de sítios com spins contrários é relacionado ao movimento aleatório dos “dentes” presentes na interface. Eventualmente os

“dentes” em uma camada se aniquilam e o processo continua na próxima camada. Logo chegamos à conclusão de que a preferência por uma das fases nesse caso é dada através da curvatura do cluster que foi imposta na condição inicial. No caso de condições aleatórias (como na figura 1.3) localmente o sistema assume preferências por um dos estados, porém isso não ocorre globalmente no limite termodinâmico (já que em um sistema finito ocorre uma quebra espontânea de simetria para um tempo suficientemente longo). Ou seja, em cada região da rede é favorecida uma orientação da magnetização em detrimento da outra.

Para temperaturas maiores que zero entendemos que um sistema como por exemplo o modelo de Ising mantém essas características: a manutenção em média da dinâmica dos “dentes” mostrada na figura 1.11 e com isso o favorecimento local à uma fase devido à curvatura da interface entre os clusters. As transições de fase que ocorrem nessas características são qualificadas como “curvature-driven transitions”.

No caso do modelo do votante, apesar de possuir a característica *coarsening*, não é observada a característica da preferência por uma das fases devido à curvatura de interface. Como mostrado na figura 1.8, a interface no modelo do Votante se “dissolve” e por isso o modelo é citado como exemplo de sistema sem tensão superficial [14] e com a evolução de  $\rho_m(t)$  diferenciada, mais lenta que no caso do modelo de Ising como mostra a tabela (1.6).

Um ingrediente importante nesta característica de ausência de tensão de

superfície é a forma como o modelo do Votante se comporta na situação da figura 1.9. No caso da rede quadrada, quando é sorteado para a atualização um sítio da interface como na figura 1.9, a probabilidade de que ocorra uma “invasão” da outra fase nesta atualização é  $1/4$ . Esta probabilidade é alta se for comparada com o modelo de Ising por exemplo. A temperatura na qual o modelo de Ising tem essa mesma probabilidade de “invasão”  $1/4$  é  $\sim 2,88$  (com  $k_B = J = 1$ ). Nessa temperatura o sistema já passou da transição da quebra de simetria ( $T_c \sim 2,269$ ) e está na fase paramagnética.

No caso da rede hexagonal, é possível observar a mesma possibilidade de ocorrência dos “dentes” na interface que se movem aleatoriamente. Essa situação é mostrada na figura 1.12.

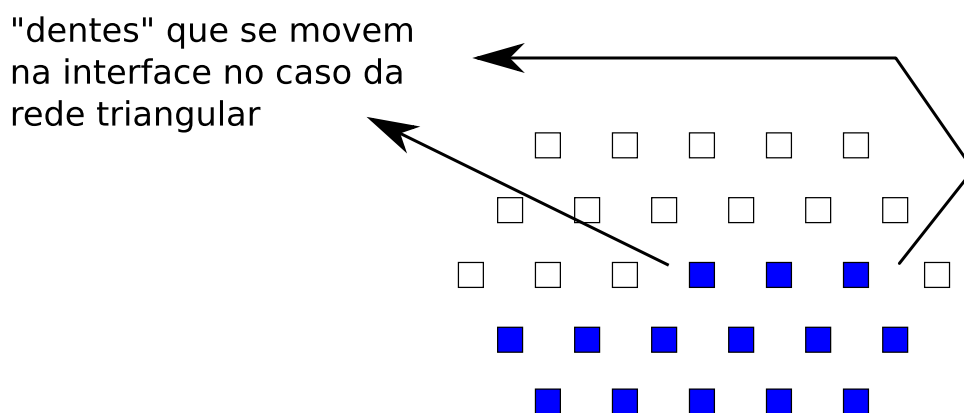


Figura 1.12: Rede hexagonal mostrando o caso dos dentes que se movem aleatoriamente em uma rede hexagonal bidimensional.

Em uma rede regular de três dimensões a interface entre os clusters é uma superfície. Na figura 1.13 é mostrado uma dessas interfaces e como ocorrem

os “dentes” da mesma forma que nas outras redes.

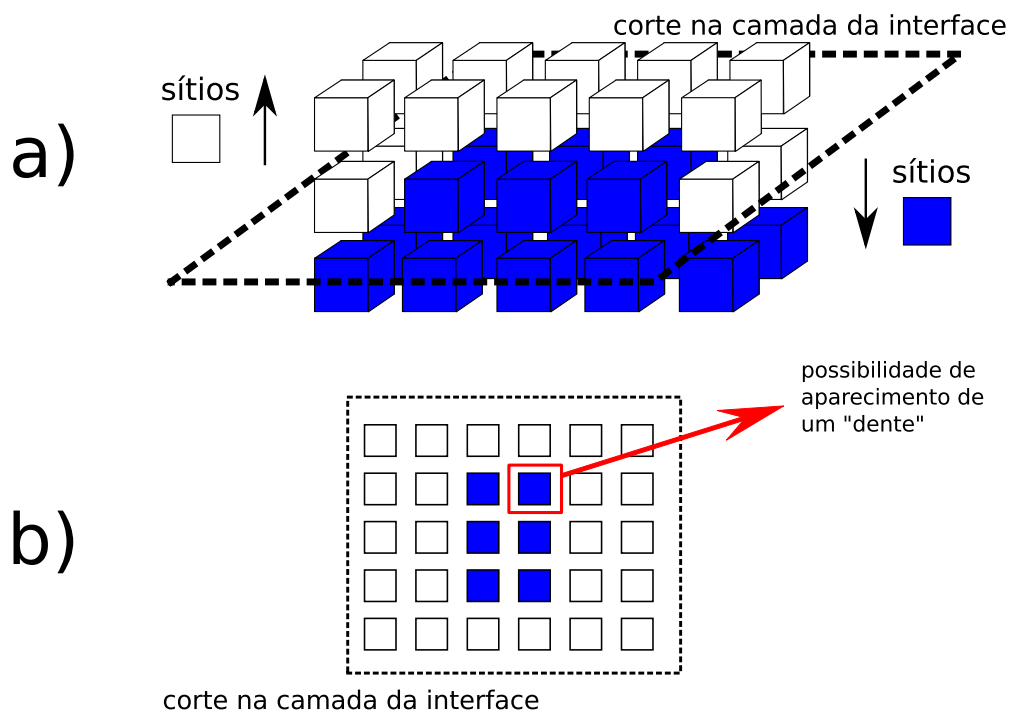


Figura 1.13: Representação de uma rede regular em três dimensões. Na parte a, a localização do corte na camada de interface. Na parte b é mostrado o corte na rede tridimensional, alguns sítios nessa interface podem gerar um “dente” como nos casos anteriores das rede com duas dimensões.

## 1.7 Teoria de escala finita em transições de segunda ordem

### Teoria de escala finita na vizinhança de um ponto crítico

Em uma transição de fase, a energia livre se comporta de maneira singular. Essa afirmação é verdadeira somente se o sistema estiver no limite termodinâmico. Se o sistema for finito, a energia livre é representada por uma função regular.

Duas importâncias da teoria de escala finita são:

- Utilização em conjunto com simulações de Monte Carlo, que são executadas sempre em tamanho finito.
- A teoria de escala finita define as características dos modelos em relação ao tamanho do sistema. Essas características são os expoentes críticos que caracterizam os modelos nas classes de universalidade.

Se considerarmos uma transição de segunda ordem no limite termodinâmico, ou seja, quando o tamanho linear  $L$  do sistema divergir,  $L \rightarrow \infty$ , o sistema sofrerá uma transição quando o parâmetro de controle  $T$  (por razões históricas usaremos  $T$  como parâmetro de controle) atingir o valor crítico  $T_c$ . Em  $T = T_c$ , certas grandezas termodinâmicas se tornam singulares. Enquanto o sistema for finito, a rigor, essas grandezas não são singulares. Entretanto é possível definir um ponto pseudo-crítico  $T_c(L)$ , que depende de  $L$  e tal que

$T_c(L) \rightarrow T_c(\infty) \equiv T_c$  quando  $L \rightarrow \infty$ . Por exemplo, podemos definir  $T_c(L)$  como o valor de  $T$  quando a susceptibilidade for máxima. A teoria de escala finita diz que a diferença entre  $T_c(\infty)$  e  $T_c(L)$  escala com  $L$  de acordo com

$$T_c(L) - T_c(\infty) \sim L^{-\lambda}. \tag{1.29}$$

A notação  $x \sim y$  significa que a razão  $x/y$  atinge um valor finito quando ambos  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow 0$  ou quando ambos  $x \rightarrow \infty$  e  $y \rightarrow \infty$ . Em outros, significa que correções à escala foram omitidas.

O expoente  $\lambda$  é conhecido como expoente de deslocamento e mostra como o parâmetro pseudo-crítico se aproxima do ponto crítico verdadeiro no limite termodinâmico. Logo mais neste texto será mostrado como o expoente  $\lambda$  se relaciona com outros expoentes críticos importantes.

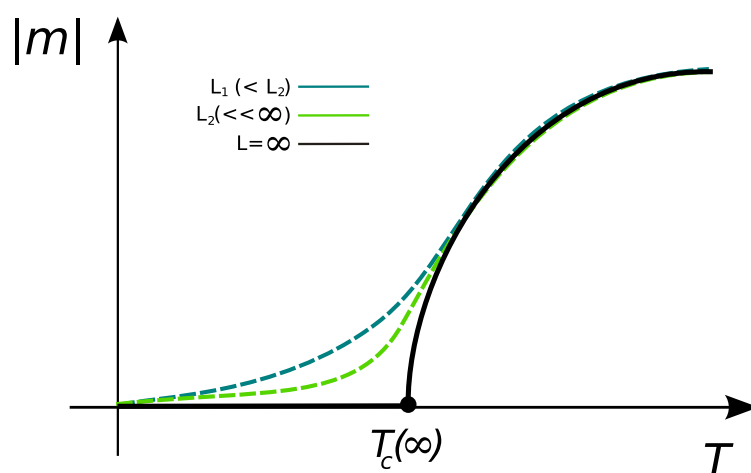


Figura 1.14: Efeito de tamanho finito. No limite termodinâmico a derivada do parâmetro de ordem é descontínua.



Uma forma de determinar a temperatura crítica é através da susceptibilidade magnética (no caso, o parâmetro de ordem é a magnetização). No limite termodinâmico a susceptibilidade diverge no ponto crítico. A causa disso é a maneira como o sistema se comporta na criticalidade.

Na criticalidade o comprimento de correlação  $\xi$  diverge. Isso significa que a influência de um determinado spin se estende até o infinito (quando  $L \rightarrow \infty$ ) causando esse efeito de “comportamento coletivo” na rede e fazendo com que a dispersão da magnetização (em relação ao tempo) se torne infinita. A susceptibilidade magnética  $\chi$  é justamente a dispersão da magnetização enquanto o sistema está no estado estacionário, conforme a definição:

$$\chi = N \{ \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 \} \tag{1.30}$$

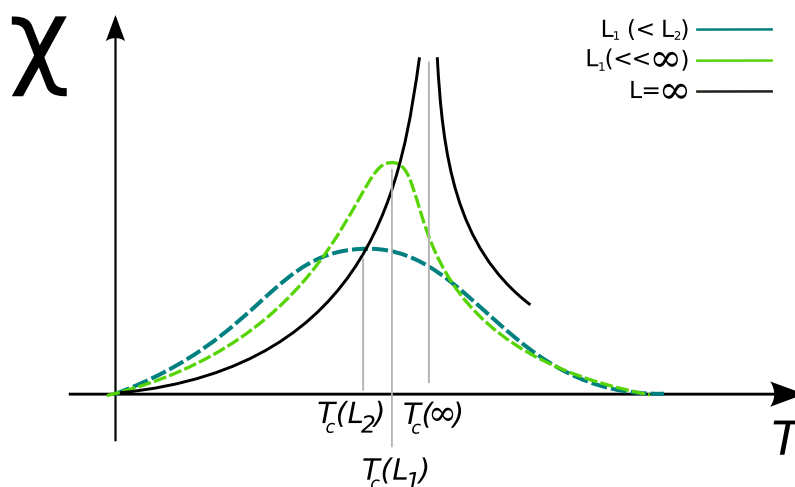


Figura 1.15: Efeito de tamanho finito na susceptibilidade magnética. Conforme é aumentado o tamanho do sistema, o ponto crítico desloca-se em direção ao ponto crítico no limite termodinâmico, onde a susceptibilidade diverge.

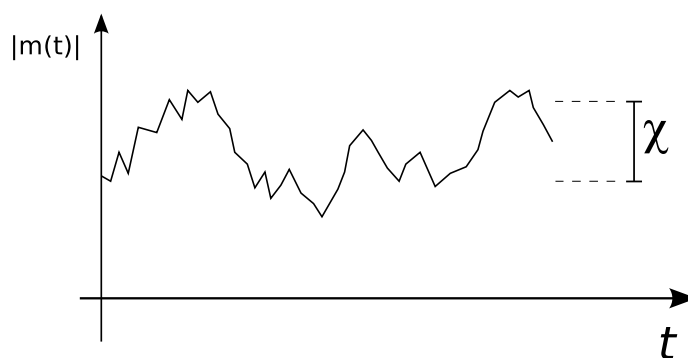


Figura 1.16: Série temporal do parâmetro de ordem. A definição da susceptibilidade magnética é a dispersão do parâmetro de ordem na série temporal.

Em um sistema finito a susceptibilidade magnética não diverge. Isso

porque agora o comprimento de correlação  $\xi$  não pode ser maior do que o comprimento linear  $L$  do sistema e portanto é finito. Na vizinhança do ponto crítico o comprimento de correlação deve ser o maior possível em um sistema finito e portanto é razoável a hipótese

$$\xi \sim L. \tag{1.31}$$

Quando o sistema é finito, perde-se o cômputo das correlações de longo alcance. Dessa forma o ponto crítico é deslocado em relação a  $T_c(\infty)$  e a curva da susceptibilidade não diverge, ela se torna arredondada com um máximo.

O valor do máximo da susceptibilidade magnética diverge no ponto crítico quando o sistema está no limite termodinâmico. Porém a forma que o máximo da susceptibilidade magnética diverge em relação ao tamanho do sistema também é uma característica do modelo, representada pelo expoente crítico  $\lambda_c$ :

$$\chi_{\text{máx}}(T_c, L) \sim L^{\lambda_c}, \tag{1.32}$$

onde  $\lambda_c$  é um expoente crítico que será relacionado a outros expoentes críticos em seguida.

No limite termodinâmico, o comprimento de correlação  $\xi$  diverge no ponto crítico de acordo com:

$$\xi \sim \epsilon^{-\nu_\perp}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \tag{1.33}$$

onde  $\nu_{\perp}$  é o expoente crítico associado à divergência do comprimento de correlação  $\xi$  e  $\epsilon = T - T_c$ .

Podemos relacionar o expoente  $\lambda_c$  ao expoente  $\nu_{\perp}$  do comprimento de correlação  $\xi$ . Nas vizinhanças do ponto crítico  $\xi \sim L$ , usando a equação (1.33) obtemos:

$$\epsilon^{-\nu_{\perp}} \sim L \tag{1.34}$$

ou

$$\epsilon \sim L^{-1/\nu_{\perp}}. \tag{1.35}$$

As temperaturas na equação (1.35) são relacionadas ao sistema no limite termodinâmico ( $\epsilon = T(\infty) - T_c(\infty)$ ). Porém, quando  $T(\infty) \rightarrow T_c(\infty)$  e  $L \rightarrow \infty$  podemos substituir  $T_c(L)$  por  $T(\infty)$  na equação (1.29) de forma que:

$$T_c(L) - T_c(\infty) \sim T - T_c = \epsilon, \tag{1.36}$$

e, portanto, a partir da equação (1.29)

$$\epsilon \sim L^{-\lambda}, \tag{1.37}$$

que comparada à equação (1.35) resulta em

$$\lambda = \frac{1}{\nu_{\perp}} \tag{1.38}$$

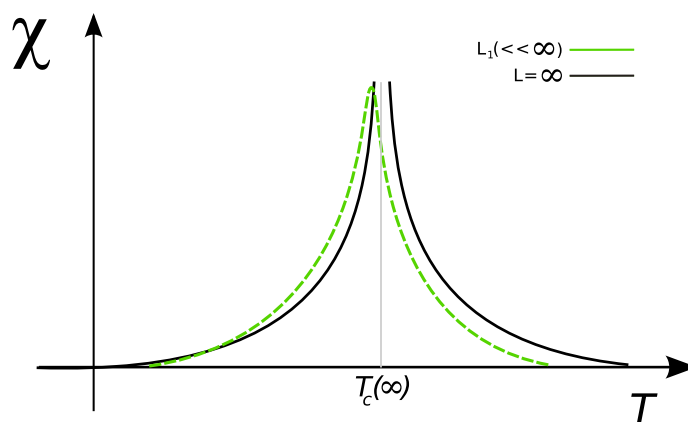


Figura 1.17: Em tamanhos grandes de sistema podemos trocar  $T_c(L)$  por  $T(\infty)$ .

O expoente crítico associado ao comportamento do parâmetro de ordem no ponto crítico em relação ao tamanho do sistema é o expoente  $\beta_c$  (usaremos  $\beta_c$  para não definir a priori que este expoente é o  $\beta$  usual). Esse expoente mostra como o parâmetro de ordem vai a zero no ponto crítico conforme aumenta-se o tamanho do sistema. No ponto crítico:

$$m_{T_c, L} \sim L^{-\beta_c} \quad (1.39)$$

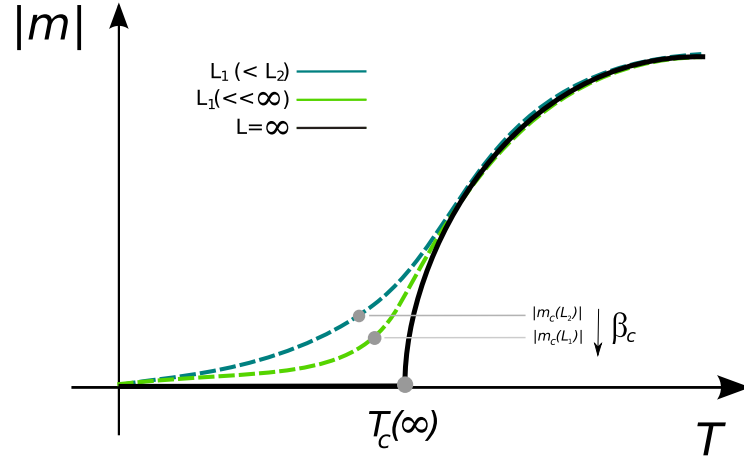


Figura 1.18: Definindo uma maneira de determinar a transição para  $L$  finito podemos verificar que o expoente  $\beta_c$  mostra como o parâmetro de ordem vai a zero conforme é aumentado o tamanho do sistema.

O comportamento do parâmetro de ordem  $|m|$  em relação ao parâmetro de controle no limite termodinâmico é

$$m \sim \epsilon^\beta, \quad \epsilon \rightarrow 0. \tag{1.40}$$

Utilizando a relação já conhecida do comprimento de correlação  $\xi \sim \epsilon^{-\nu_\perp}$ , temos que

$$m \sim \xi^{-\beta/\nu_\perp}, \tag{1.41}$$

e sabendo do argumento de que o comprimento de correlação  $\xi$  é limitado pelo tamanho do sistema  $L$  nas proximidades de  $T_c$  chegamos em

$$m_{T_c} \sim L^{-\beta/\nu_\perp}. \quad (1.42)$$

Comparando a última equação com a equação (1.39) podemos perceber que

$$\beta_c = \frac{\beta}{\nu_\perp}. \quad (1.43)$$

Com um desenvolvimento análogo podemos relacionar  $\gamma_c$  com  $\gamma$  e  $\nu_\perp$ :

$$\begin{aligned} \chi &\sim \epsilon^{-\gamma} \\ \chi &\sim \xi^{\gamma/\nu_\perp} \\ \chi &\sim L^{\gamma/\nu_\perp} \end{aligned} \quad (1.44)$$

logo

$$\gamma_c = \frac{\gamma}{\nu_\perp} \quad (1.45)$$

O resumo das definições dos expoentes é mostrado nas tabelas 1.2 e 1.3.

$$\begin{array}{c} \hline m \sim \epsilon^\beta \\ \xi \sim \epsilon^{-\nu_\perp} \\ \chi \sim \epsilon^{-\gamma} \\ \hline \hline \end{array}$$

Tabela 1.2: Tabela de expoentes críticos relacionados ao parâmetro de controle.

$$\begin{aligned}
 T_c(L) - T_c(\infty) &\sim L^{-1/\nu_\perp} \\
 m_{T_c} &\sim L^{-\beta/\nu_\perp} \\
 \chi_{T_c} &\sim L^{\gamma/\nu_\perp}
 \end{aligned}$$

Tabela 1.3: Tabela de expoentes críticos relacionados ao tamanho do sistema  $L$ .

### Funções de escala

Na seção anterior 1.7 mostramos o comportamento de certas grandezas com o tamanho  $L$  no ponto crítico  $T = T_c$  e ao redor do ponto crítico no limite termodinâmico,  $L \rightarrow \infty$ . Nesta seção será mostrada uma generalização no sentido de descrever o modelo ao redor do ponto crítico e para valores finitos de  $L$ . Para isso, será utilizado como exemplo a susceptibilidade. Em  $T = T_c$ , a susceptibilidade diverge com  $L$  de acordo com

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu}, \quad \epsilon = 0. \tag{1.46}$$

Essa expressão é análoga àquela relativa ao máximo da susceptibilidade. A validade dela foi mostrada usando a hipótese de que o comprimento de correlação escala com o tamanho do sistema, ou seja, que  $\xi \sim L$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Uma descrição de  $\chi$  ao redor do ponto crítico deve passar necessariamente pela observação do comportamento do comprimento de correlação  $\xi$  em relação a  $L$ . Logo utilizaremos  $L/\xi$  como medida de proximidade do ponto crítico e como argumento para uma função que descreve o comportamento



da susceptibilidade fora do ponto crítico:

$$\chi \sim \xi^{\gamma/\nu} \phi(L/\xi). \tag{1.47}$$

A função  $\phi(L/\xi)$  é uma função universal responsável por incluir a relação de tamanho do sistema com o comprimento de correlação. Dessa forma a expressão (1.47) fica composta por um termo que depende somente de  $\xi$  e outro termo relacionando  $\xi$  com  $L$  (a função  $\phi$ ).

No ponto crítico o tamanho do sistema é fundamental para a obtenção de  $\chi$  e a expressão (1.47) deve se reduzir a  $\chi_{\text{máx}} \sim L^{\gamma/\nu}$ . Logo, a função  $\phi$  deve ser independente de  $L$  no ponto crítico. Esses requerimentos são contemplados lembrando que  $\xi \sim L$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  e logo  $\xi^{\gamma/\nu} \rightarrow L^{\gamma/\nu}$  e  $L/\xi \rightarrow 1$ .

É interessante que o argumento da função de escala seja em relação ao parâmetro de controle  $\epsilon$ . Para isso, substituímos  $\xi \sim \epsilon^{-\nu}$  de forma que o argumento se torne  $L\epsilon^\nu$ . É mais comum que o expoente  $\nu$  esteja em  $L$ , não em  $\epsilon$ . Logo, o argumento final se torna  $L^{1/\nu}\epsilon$ .

Na parte  $\xi^{\gamma/\nu}$  da equação (1.47) será utilizado  $L^{\gamma/\nu}$ , essa parte da equação é responsável pelo scaling de tamanho finito em  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\chi = L^{\gamma/\nu} \phi(L^{1/\nu}\epsilon). \tag{1.48}$$

Para a determinação gráfica das funções universais ou colapso é conveniente definir  $x$  e  $y$  por meio de

$$x = L^{1/\nu} \epsilon \tag{1.49}$$

e

$$y = \chi L^{-\gamma/\nu} \tag{1.50}$$

de modo que

$$y = \phi(x); \tag{1.51}$$

e, portanto, um gráfico de  $y \times x$  fornece a função de escala  $\phi$ .

A tabela 1.4 resume a apresentação das funções de escala incluindo para a magnetização como expoente associado  $\beta$ :

$$\begin{array}{c} \hline \chi = L^{\gamma/\nu} \phi(L^{1/\nu} \epsilon) \\ m = L^{-\beta/\nu} \Xi(L^{1/\nu} \epsilon) \\ \hline \hline \end{array}$$

Tabela 1.4: Funções de escala para  $\chi$  e  $m$ .

A análise do colapso ou determinação da função de escala é bastante útil como por exemplo:

1. Na verificação dos dados de simulação em relação a alguma classe de universalidade. O colapso acontece somente quando os parâmetros (expoentes críticos e ponto crítico) utilizados são relativos à transição em questão;

2. Pode-se determinar um dos parâmetros variando-o até ser obtido o colapso das curvas. Existem estudos e rotinas [16] com aplicações para encontrar parâmetros nas funções de escala com objetivo de encontrar dois parâmetros. Um problema de minimização em uma superfície para o caso de otimização de dois parâmetros;
3. As funções de escala são universais, ou seja, pode-se ser feito o estudo das curvas em função das características do modelo, geometria de rede, condições de contorno por exemplo.

## **1.8 Simulações dependentes do tempo e expoentes dinâmicos**

Para o estudo do modelo na transição de fase ativa para a fase absorvente utilizamos simulações dependentes do tempo, método desenvolvido por Grassberger e De la Torre[17][18].

O método consiste em inicializar a dinâmica do modelo na iminência da configuração absorvente. No caso do modelo objeto deste estudo essa configuração inicial consiste em sítios de estado “-1” ocupando toda a rede com exceção do sítio central que é ocupado pelo estado “+1” (obviamente a simetria de inversão de simetria se aplica).

A estatística é feita através da realização de várias simulações independentes. Outra característica do procedimento é a interrupção de uma realização

assim que a atividade chegar na borda da rede, já que não desejamos estudar as propriedades do modelo no estado estacionário.

As grandezas calculadas são:

- $\langle N(t) \rangle$ : número médio de sítios no estado +1 no tempo  $t$ . Caso uma realização atinja a configuração absorvente ainda sim a população nos tempos posteriores influem na média das realizações;
- $\langle P(t) \rangle$ : probabilidade de sobrevivência. Grandeza calculada a partir da atividade. Se no tempo  $t$  de uma realização  $k$  houver atividade na rede então  $P_k(t) = 1$ , caso contrário,  $P_k(t) = 0$ ;
- $\langle R^2(t) \rangle$ : distância quadrática média. Essa grandeza calcula a distância quadrática média de cada um dos sítios “+1” em relação ao sítio central da rede. Caso a realização caia no estado absorvente, deve-se retirar essa grandeza da média dos realizações nos tempos posteriores.

Os expoentes dinâmicos associados a essas grandezas são:

$$\langle N(t) \rangle \sim t^\eta; \tag{1.52}$$

$$\langle P(t) \rangle \sim t^{-\delta}; \tag{1.53}$$

$$\langle R^2(t) \rangle \sim t^z. \tag{1.54}$$

## **1.8 Simulações dependentes do tempo e expoentes dinâmicos 53**

Essas relações são válidas quando o sistema está no parâmetro crítico da transição ferromagnética-absorvente. A média representada pelos símbolos “ $\langle$ ” e “ $\rangle$ ” são relativas às realizações executadas.

# Capítulo 2

## Modelo do Votante

### 2.1 Modelo do Votante, uma dinâmica na temperatura zero

O modelo do Votante[2] (ou “Voter Model”) é uma dinâmica definida em um reticulado. Cada sítio pode assumir um estado dentre dois estados possíveis, usaremos os estados  $-1$  e  $+1$ . Logo denotamos uma configuração do sistema como

$$\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N\} \quad (2.1)$$

onde  $N = L^d$  sendo  $d$  a dimensão da rede e  $L$  o tamanho linear da rede,  $\sigma_i = \pm 1$  é a variável estocástica associada ao sítio  $i$ . Denotamos o estado do “ $i$ -ésimo sítio da configuração  $\sigma$  por estado  $-1$  ( $+1$ ) quando  $\sigma_i = -1$  ( $+1$ ).

O modelo do Votante tem como motivação a concepção de uma comunidade constituída por indivíduos que podem assumir uma opinião à respeito de um assunto. Cada indivíduo é representado por um sítio de uma rede. A opinião de cada um é representada pelo estado do sítio correspondente.

A dinâmica do modelo é dada de acordo com as regras:

1. É escolhido aleatoriamente um sítio “ $i$ ” para a atualização;
2. Escolhe-se aleatoriamente um vizinho do sítio “ $i$ ”, toma-se como novo estado do sítio “ $i$ ” o estado do sítio vizinho escolhido.

As regras da dinâmica também podem ser interpretadas em função de uma probabilidade de transição do sítio “ $i$ ” para o estado da maioria dos vizinhos, ou seja:

1. Se o sítio “ $i$ ” escolhido para a atualização tiver como vizinhos a quantidade de sítios com estado  $+1$  igual à quantidade de sítios com estado  $-1$ , o sítio “ $i$ ” tomará como novo estado o valor  $+1$  ou  $-1$  com igual probabilidade;

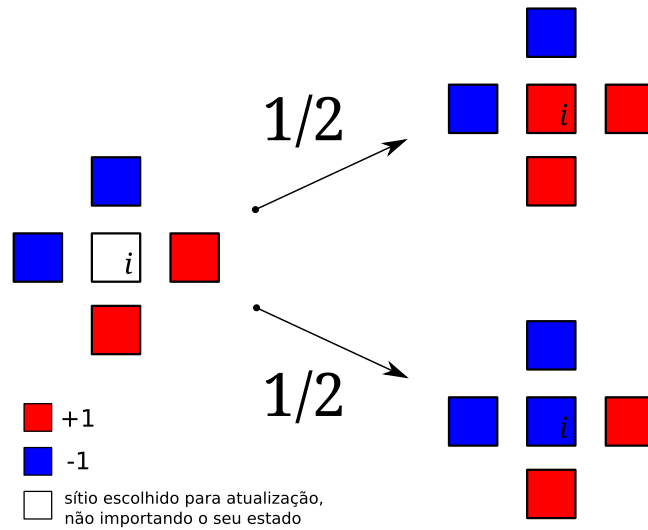


Figura 2.1: Exemplo em uma rede quadrada regular. Probabilidades de transição quando o sítio “i” escolhido para atualização tem mesmo número de vizinhos +1 e -1.

2. Considerando o número de sítios vizinhos ao sítio “i” com estado +1 como  $n_+$ , a probabilidade de  $\sigma_i \rightarrow +1$  é dada por  $n_+/z$ . Onde  $z$  é o número de vizinhos (ou número de coordenação da rede). Logo a probabilidade de  $\sigma \rightarrow -1$  é dada por  $1 - n_+/z$ .



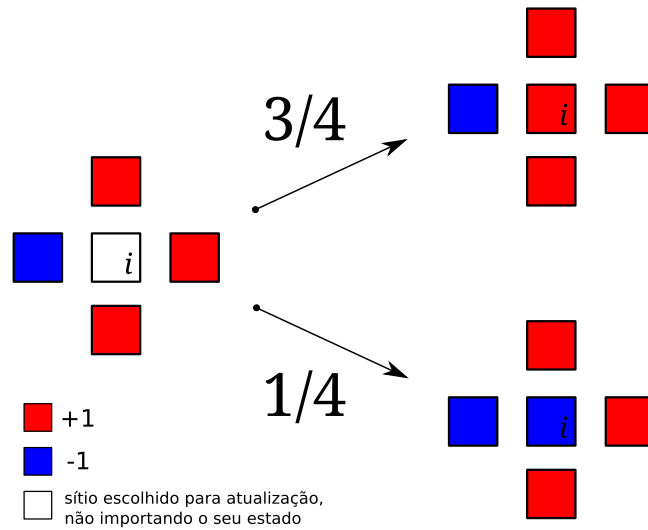


Figura 2.2: Exemplo em uma rede quadrada com duas dimensões. Probabilidades de transição quando a soma dos valores dos estados do sítio “i” escolhido para atualização é igual a +2.

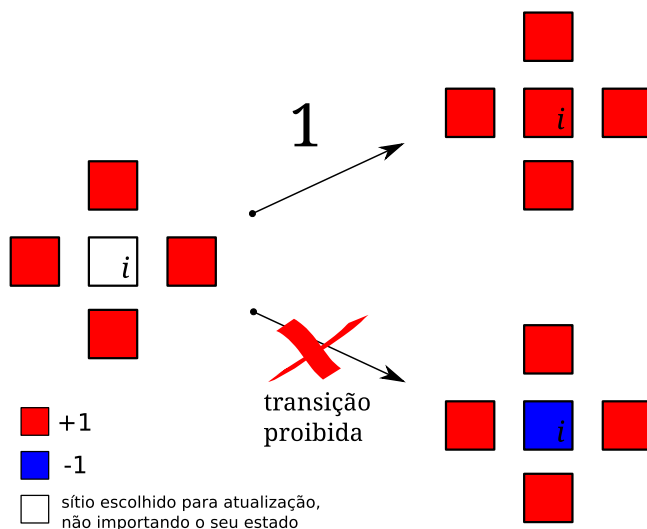


Figura 2.3: Exemplo em uma rede quadrada com duas dimensões. Probabilidades de transição quando o sítio “ $i$ ” escolhido para atualização tem todos os vizinhos com mesmo estado.

Uma característica importante do modelo do Votante é a existência de estados absorventes (ou configurações absorventes), o que caracteriza imediatamente a dinâmica do modelo como irreversível ou de não-equilíbrio. Como um sítio “ $i$ ” escolhido para atualização toma como estado o valor de um dos seus vizinhos, quando toda a vizinhança é composta por sítios com mesmo estado, o sítio “ $i$ ” tomará o valor do estado dos sítios da vizinhança com probabilidade 1. Essa situação ocasiona uma configuração absorvente, ou seja, quando toda a rede está preenchida por sítios com o mesmo estado a evolução temporal do sistema sistema “congela”. No modelo do Votante existem duas configurações absorventes: uma com toda a rede ocupada por

## **2.2 Transição do modelo do Votante e o modelo Glauber Linear**

sítios no estado  $+1$  e outra configuração absorvente quando todos os sítios da rede estiverem no estado  $-1$ . O modelo do votante é conhecido por possuir dois estados absorventes simétricos (rede preenchida por  $+1$  ou  $-1$ ).

Consideremos agora um “cluster” de sítios com estado  $+1$  rodeado de sítios com estado  $-1$ . É fácil perceber a partir das regras de evolução do modelo que dentro do “cluster” a dinâmica está congelada, ou seja, não existe uma flutuação estocástica. A dinâmica do modelo do votante ocorre somente nas interfaces. Como a dinâmica do modelo do Votante não possui um parâmetro de controle é usual o estudo da transição do modelo do votante utilizando outro modelo, que em um valor específico de um parâmetro de controle específico corresponde ao modelo do votante.

Um exemplo muito conhecido é o modelo Glauber Linear, que será apresentado a seguir.

## **2.2 Transição do modelo do Votante e o modelo Glauber Linear**

Como mostrado na seção 1.6, o modelo do Votante tem uma dinâmica peculiar em relação ao comportamento da interface dos clusters. Diferentemente do modelo de Ising onde a transição de fase ocorre devido à competição entre a tensão de superfície dos domínios e o “bulk-noise”, no modelo do Votante qualquer magnitude de “bulk-noise” destrói o ordenamento do sistema. Por

## 2.2 Transição do modelo do Votante e o modelo Glauber Linear

isso o modelo do Votante é considerado como sem tensão de superfície e com uma temperatura de transição igual a zero.

O Modelo Glauber Linear[22] é definido da mesma forma que o modelo do Votante, ou seja, em um reticulado de dimensão  $d$ , com número de coordenação  $z$ . É descrito por um vetor  $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  onde  $N = L^d$  e cada sítio pode assumir os valores  $+1$  ou  $-1$ .

Diferentemente do modelo do Votante, o Modelo Glauber Linear tem um parâmetro  $\mu$  que influencia a dinâmica como é mostrado nas regras a seguir:

1. É escolhido aleatoriamente um sítio “i” para ser atualizado;
2. É sorteado aleatoriamente um vizinho deste sítio “i”;
3. Com probabilidade  $\mu$  o sítio “i” toma como estado o valor do sítio vizinho escolhido. Com a probabilidade complementar  $(1 - \mu)$  o sítio “i” assume o estado (spin) contrário do sítio vizinho escolhido.

O parâmetro  $\mu$  influi tanto no “bulk-noise” como nas probabilidades de transição dos sítios das interfaces.

Ao invés das regras apresentadas do modelo Glauber Linear podemos entender o modelo por meio da probabilidade de inversão [2] do estado do sítio “i” escolhido para a atualização, essa taxa de inversão para o modelo Glauber Linear é

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\mu\sigma_i}{z} \sum_{\delta} \sigma_{i+\delta} \right\}, \quad (2.2)$$

## 2.2 Transição do modelo do Votante e o modelo Glauber Linear<sup>61</sup>

onde  $z$  corresponde ao número de coordenação e a soma é sobre os primeiros vizinhos do sítio “ $i$ ”.

De acordo com as regras apresentadas pode-se perceber que o parâmetro de controle  $\mu$  introduz um ruído no modelo do votante, modelo o qual é recuperado quando  $\mu = 1$ . O parâmetro  $\mu$  pode ser entendido como uma analogia à temperatura no sentido de que quando  $\mu < 1$  o sistema deixa de ter uma dinâmica exclusiva nas interfaces e passa a exibir “flutuações térmicas” dentro dos clusters.

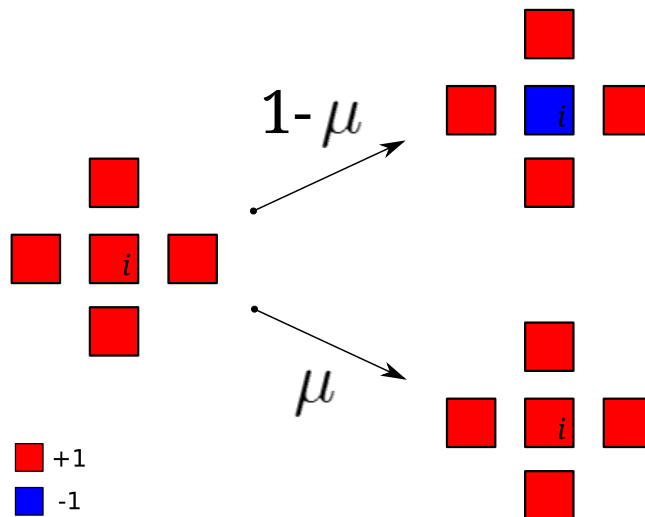


Figura 2.4: No modelo Glauber Linear quando  $\mu < 1$  não existe a configuração absorvente vista no modelo do Votante. Os valores  $1 - \mu$  e  $\mu$  são relacionados à probabilidades nesse caso, e não à taxas.

A transição do modelo Glauber Linear ocorre em  $\mu = 1$  quando o modelo do votante é recuperado.

## 2.2 Transição do modelo do Votante e o modelo Glauber Linear

Na referência [8] são introduzidos os termos “ruído interfacial” e “bulk-noise”. Onde o termo “bulk-noise” é relacionado à capacidade de um sítio tomar como estado um valor contrário de seus vizinhos quando estes têm o mesmo valor como estado. O conceito “ruído interfacial” diz respeito às regras de evolução de um sítio quando este pertence a uma interface, ou seja, quando pelo menos um de seus sítios vizinhos tem um valor de estado contrário. Na mesma referência [8] é justificada a questão da transição do modelo do Votante ocorrer na temperatura igual a zero. No modelo do Votante qualquer perturbação térmica destrói o ordenamento da rede, por esse motivo a transição do modelo Glauber linear ocorre em  $\mu = 1$  já que este parâmetro de controle está relacionado tanto ao ruído interfacial quanto ao “bulk-noise”.

Expoente	$0 < d \leq 2$	$d > 2$
$\beta$	0	0
$\nu_{\parallel}$	1	1
$\nu_{\perp}$	1/2	1/2
$\gamma$	$d/2$	1
$\eta$	$2 - d$	0

Tabela 2.1: Expoentes críticos para a transição do modelo do Votante [20]

## 2.3 Modelos GVM e a conjectura para uma transição do Modelo do Votante

Como mostrado na seção 2.2, no modelo Glauber Linear ocorre uma transição em  $\mu = 1$ , parâmetro onde o modelo se comporta como o modelo do Votante.

Essa transição do tipo do modelo do Votante também ocorre em outros modelos. Na referência [14] é usada como exemplo uma família de modelos com transição do tipo do modelo do votante que os autores chamam GVM (*Generalized Voter Model*).

De acordo com os autores, o comportamento de um modelo pertencente à família GVM é caracterizado pela característica “coarsening” com interfaces sem tensão de superfície. O artigo diz exatamente:

*... voter-like coarsening is best defined by the absence of surface tension between disordered and fully ordered phases in the absence of bulk fluctuations, when these nonequilibrium transitions are driven by interfacial noise only.*

A busca pelo entendimento dos ingredientes essenciais para um modelo exibir uma transição do modelo do Votante levou à conjectura [14]:

*Critical  $Z_2$ -symmetric rules without bulk noise form a codimension-1 voter-like manifold separating order from disorder, characterized by the logarithmic decay of both  $\rho_m$  and  $m$ .*

Ou seja, sistemas críticos com simetria “up-down” e sem “bulk-noise” apresentam uma transição do modelo do Votante. Transição essa caracterizada pelo comportamento da densidade de interfaces como a equação na tabela 1.6.

## **2.4 Quebrando a transição do modelo do Votante em duas**

A conjectura de I. Dornic et al. [14] para a transição do modelo do Votante foi investigada no trabalho de M. Droz et al. [11] através de um modelo de Ising alterado para que o modelo exibisse duas configurações absorventes simétricas.

Para introduzir duas configurações absorventes simétricas os autores utilizaram o modelo de Ising (algoritmo de Metropolis) com a seguinte alteração: caso o sítio a ser atualizado tenha a totalidade de seus vizinhos no mesmo estado, então com probabilidade igual a 1 este sítio a ser atualizado terá o mesmo estado que seus vizinhos. Esta alteração além de produzir as duas configurações absorventes e simétricas faz com que a dinâmica do sistema ocorra nas interfaces dos clusters (dinâmica com ausência de *bulk noise*).

Foi observado que o modelo em duas dimensões na rede quadrada com interação entre os primeiros vizinhos exibe uma transição compatível com a transição como a do modelo do Votante (figura 2.5).

Aumentando o número de coordenação da rede para  $z = 12$  o resultado



muda. No lugar de uma transição pertencente à classe do modelo do Votante o modelo exibe duas transições: uma transição de quebra espontânea de simetria da classe Ising e outra transição para o estado absorvente pertencente à classe da percolação direcionada (2.6).

Este resultado corrobora com o princípio de que a transição do modelo do Votante é uma aglutinação de uma transição de segunda ordem Ising com uma transição de segunda ordem da classe DP. E que através da alteração de um parâmetro (no caso o número de coordenação da rede quadrada  $z$ ) é possível mudar a posição destes dois pontos críticos de forma que eles não mais sejam sobrepostos.

Esse resultado é importante pois abre espaço para a busca de outras formas de modificar a posição dos pontos críticos causando a quebra da transição do modelo do Votante em duas transições de segunda ordem.

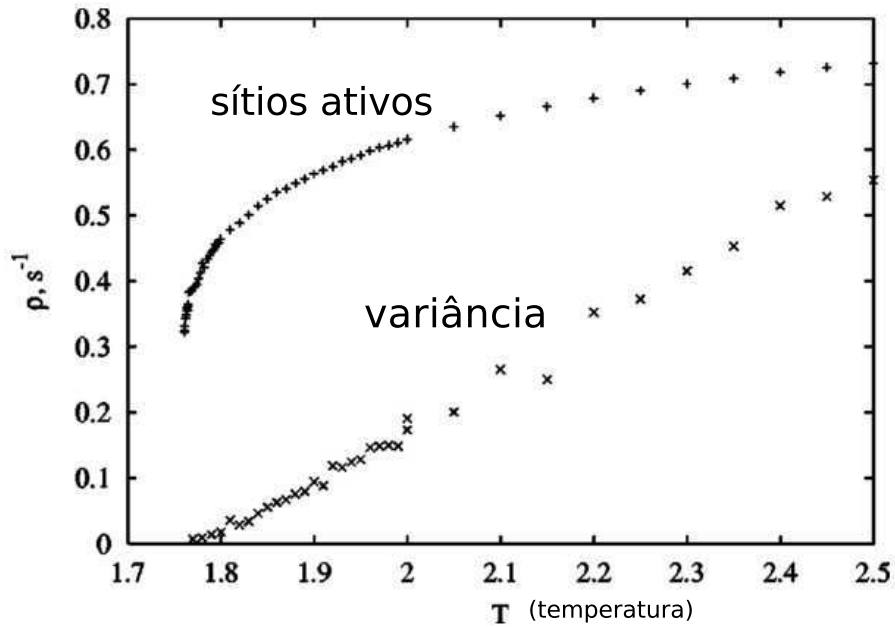


Figura 2.5: Figura retirada da referência [11].  $\rho$ ,  $s$  e  $T$  são respectivamente densidade de sítios ativos, variância e temperatura. Este resultado mostra que o modelo estudado por M. Droz et al. [11] exibe uma transição do tipo do modelo do Votante em duas dimensões na rede quadrada com interação entre os primeiros vizinhos.

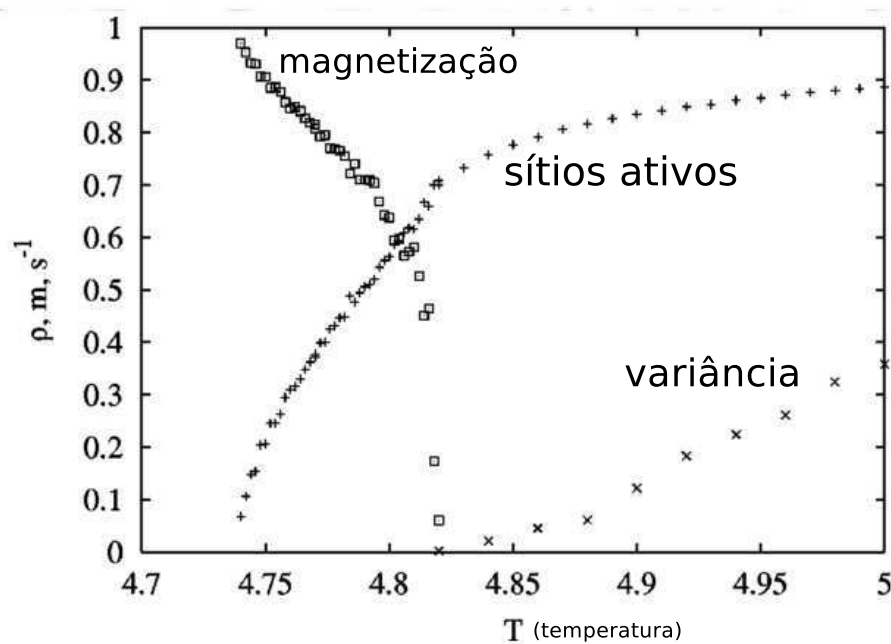


Figura 2.6: Figura retirada da referência [11].  $\rho$ ,  $s$  e  $T$  são respectivamente densidade de sítios ativos, variância e temperatura. Este resultado mostra que o modelo estudado por M. Droz et al. [11] exibe duas transições: uma de quebra espontânea de simetria (Ising) e outra transição para o estado absorvente (DP). A investigação foi feita em duas dimensões na rede quadrada com interação entre os 12 primeiros vizinhos.

# Capítulo 3

## Modelo UD-ABS

Neste estudo consideramos um modelo estocástico definido em uma rede que pode ser hexagonal ou cúbica com condições periódicas de contorno que chamaremos de Modelo UD-ABS (simetria “up-down” e estados absorventes). A cada sítio  $i$  associamos uma variável estocástica  $\sigma_i$  que assume dois valores  $\sigma_i = \pm 1$ . O sistema evolui de acordo com uma dinâmica estocástica irreversível. A cada instante de tempo um único sítio é sorteado e a probabilidade de transição, que envolve os seis primeiros vizinhos do sítio sorteado, é dada por

$$\omega_i = \frac{1}{2} \{1 - \sigma_i f_i(\sigma)\}, \quad (3.1)$$

onde  $f_i(\sigma)$  é escrito como

$$\begin{aligned}
f_i(\sigma) = & \frac{A}{6} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6) + \\
& \frac{B}{20} (\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_2\sigma_5 + \sigma_1\sigma_2\sigma_6 + \\
& \sigma_1\sigma_3\sigma_4 + \sigma_1\sigma_3\sigma_5 + \sigma_1\sigma_3\sigma_6 + \sigma_1\sigma_4\sigma_5 + \sigma_1\sigma_4\sigma_6 + \sigma_1\sigma_5\sigma_6 + \\
& \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_5 + \sigma_2\sigma_3\sigma_6 + \sigma_2\sigma_4\sigma_5 + \sigma_2\sigma_4\sigma_6 + \sigma_2\sigma_5\sigma_6 + \\
& \sigma_3\sigma_4\sigma_5 + \sigma_3\sigma_4\sigma_6 + \sigma_3\sigma_5\sigma_6 + \sigma_4\sigma_5\sigma_6) + \\
& + \frac{C}{6} (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_6 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_5\sigma_6 + \sigma_1\sigma_2\sigma_4\sigma_5\sigma_6 + \sigma_1\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6 + \\
& \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são parâmetros do sistema e a lista  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_6$  diz respeito aos sítios vizinhos ao sítio  $i$ , ou seja, a posição dos sítios vizinhos relativa ao sítio  $i$ . Essa é a forma mais genérica que propomos para a probabilidade de transição que envolve um sítio e seus seis primeiros vizinhos e que é invariante pelas operações de simetria “up-down” (do modelo de Ising de equilíbrio). Todos os termos que contribuem para a probabilidade de transição  $\omega_i$ , considerando a simetria “up-down”, devem ter número par de valores  $\sigma_i$  de sítios. Como por exemplo, se invertermos os valores sítios dos termos  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5)$  (lembrando que os estados podem ter valores  $\pm 1$ ) temos a mesma contribuição

$$\sigma_i(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5) \rightarrow (-1)\sigma_i \cdot (-1)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5) = \sigma_i(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5)$$

Os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  serão redefinidos em relação a novos parâmetros  $p_0$ ,  $p_1$  e  $p_2$  de forma que  $p_0(A, B, C)$ ,  $p_1(A, B, C)$  e  $p_2(A, B, C)$ . O parâmetro  $p_0$  é tal que,

$$p_0 = \frac{1}{2} (1 + A + B + C) = 1. \quad (3.3)$$

Esse parâmetro é definido como sendo a probabilidade de um sítio  $i$  assumir o valor da vizinhança no caso em que toda a vizinhança tem o mesmo valor.

No presente estudo, impomos  $p_0 = 1$  ou  $(A + B + C) = 1$  de forma que existirá um estado absorvente e o espaço de parâmetros terá duas dimensões ( $p_1 \times p_2$ ). Os estados absorventes em questão são aqueles em que todos os sítios da rede estão no mesmo estado,  $-1$  ou  $+1$ .

A probabilidade de um sítio  $i$  assumir o valor da vizinhança no caso em que a soma dos valores da vizinhança tem resultado  $\pm 4$  é considerada nesse modelo como

$$p_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4}{6}A - \frac{4}{6}C \right). \quad (3.4)$$

A probabilidade de um sítio  $i$  assumir o valor da vizinhança no caso em que a soma dos valores da vizinhança tem resultado  $\pm 2$  para o presente modelo é

$$p_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3}A - \frac{1}{5}B + \frac{1}{3}C \right). \quad (3.5)$$

A dinâmica da transição de um sítio  $i$  escolhido aleatoriamente é dada da seguinte forma para o modelo UD-ABS:

1. É definida a grandeza  $S_i$ , que é a soma das variáveis de estado dos seis vizinhos de  $i$ .  $S_i$  pode assumir os estados  $\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ .
2. Se  $|S_i| = 0$  então o sítio  $i$  tem probabilidade  $1/2$  de ir para o estado  $-1$ , e da mesma maneira, probabilidade  $1/2$  de ir para o estado  $1$ . Nesta situação o sítio  $i$  tem o mesmo número de sítios vizinhos no estado  $-1$  e no estado  $1$ .
3. Se  $|S_i| = 2$  o sítio  $i$  assume o estado da maioria dos seus vizinhos com probabilidade  $p_2$ . Com a probabilidade complementar o sítio  $i$  assume o estado da minoria dos seus vizinhos.
4. Se  $|S_i| = 4$  o sítio  $i$  assume o estado da maioria dos seus vizinhos com probabilidade  $p_1$ . Com a probabilidade complementar o sítio  $i$  assume o estado da minoria dos seus vizinhos.
5. Se  $|S_i| = 6$  o sítio  $i$  assume o estado da maioria dos seus vizinhos com probabilidade  $1$ , ou seja, o sítio  $i$  assume com certeza o estado dos sítios da sua vizinhança nesse caso. Essa regra introduz uma configuração absorvente na dinâmica do modelo.

### 3.1 Redes utilizadas

Para a exploração do espaços de parâmetros necessários precisamos de uma rede com número de coordenação 6. Escolhemos duas redes com coordenação 6 para o nosso estudo: uma rede regular de três dimensões e uma rede triangular em duas dimensões. A rede em três dimensões é mostrada na figura 3.1.

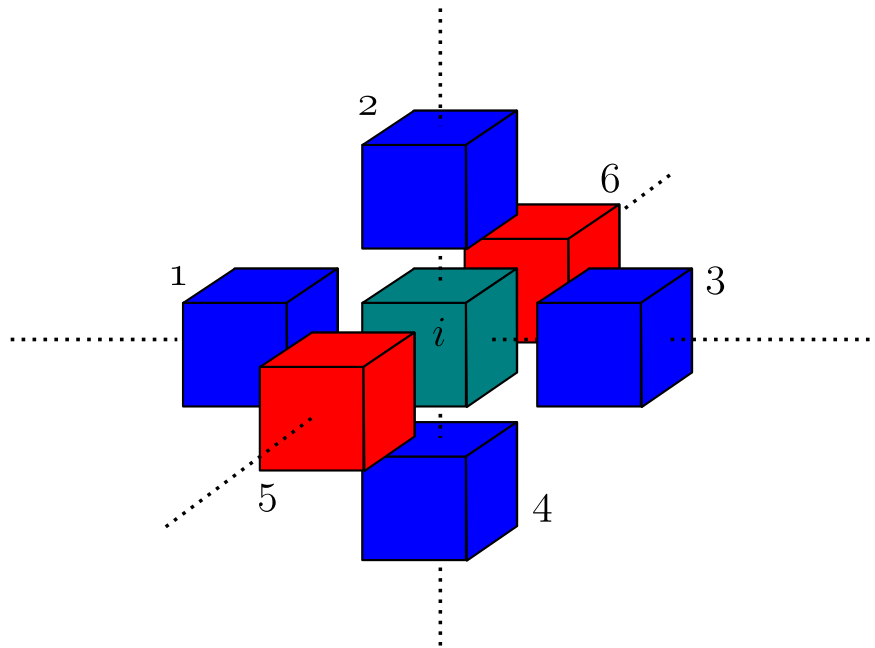


Figura 3.1: Representação de um sítio  $i$  e seus vizinhos na rede cúbica. O sítio  $i$  é um sítio escolhido ao acaso para atualização. Os seus vizinhos são os sítios 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Os sítios 5 e 6 estão em vermelho para ressaltar que estão em planos diferentes do resto dos sítios.

A seguir na figura 3.2 é mostrada a rede triangular. A partir de um sítio de referência  $i$  denotamos os sítios que compõem a sua vizinhança.



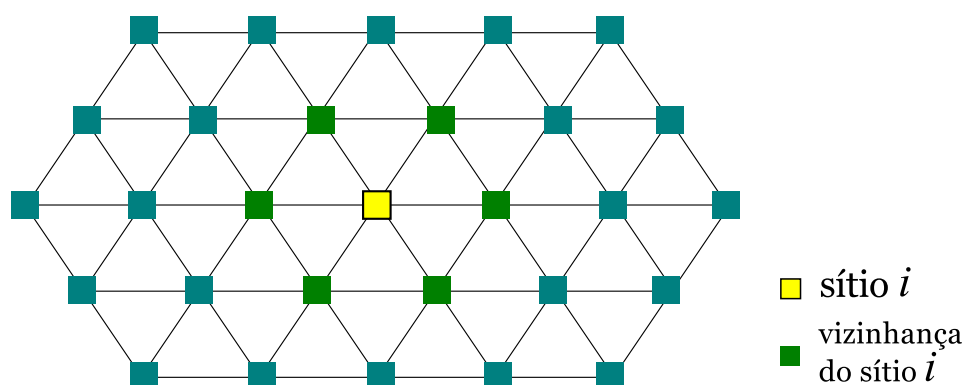


Figura 3.2: Representação de um sítio  $i$  e seus vizinhos na rede triangular.

Para as simulações, utilizamos um mapeamento da rede triangular em uma rede quadrada. Isso porque definimos a rede em uma matriz  $2 \times 2$  para o caso da rede em duas dimensões. Mostramos esse mapeamento na figura 3.3.

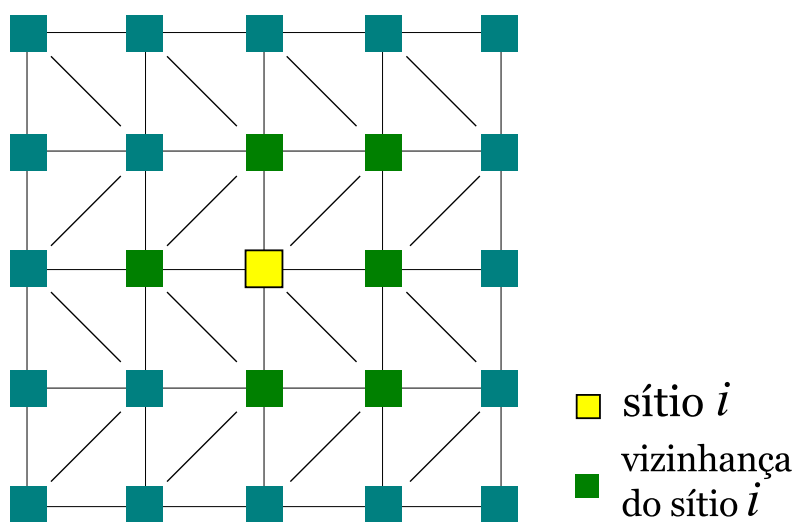


Figura 3.3: Mapeamento da rede triangular em uma rede quadrada.

## 3.2 Aproximação de campo médio

Na seção 1.3 determinamos a expressão para a evolução temporal do valor médio de uma de uma grandeza de estado  $g(\sigma)$ . Neste capítulo analisaremos a equação de evolução temporal para o valor médio de  $g(\sigma) = \sigma_i$ .

Usando a definição da probabilidade de transição  $\omega_i(\sigma)$  dada na equação (3.1), a equação (1.13) e supondo que  $m = \langle \sigma_i \rangle$  independe de  $i$  temos:

$$\frac{dm}{dt} = -m + \langle f(\sigma) \rangle. \quad (3.6)$$

A aproximação de campo médio simples diz que as correlações de dois ou mais sítios são aproximadas pelo produto das correlações de um sítio. Vamos empregar essa aproximação para analisar a equação (3.6). Nesse caso  $\langle f(\sigma) \rangle$  contém correlações de 3 e 5 sítios que serão aproximadas da seguinte maneira:

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \langle \sigma_3 \rangle = m^3 \quad (3.7)$$

e

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \rangle = m^5, \quad (3.8)$$

resultando na equação para a evolução de  $m$  no campo médio simples:

$$\frac{dm}{dt} = -m + Am + Bm^3 + Cm^5. \quad (3.9)$$

Para levar em consideração  $p_0 = 1$ , ou seja, a configuração absorvente do modelo, restringimos  $A, B$  e  $C$  na forma

$$A + B + C = 1. \quad (3.10)$$

Dessa forma podemos reescrever a equação de evolução de  $m$ :

$$\frac{dm}{dt} = -(B + C)m + Bm^3 + Cm^5. \quad (3.11)$$

As soluções estacionárias da equação (3.11) obedecem à equação:

$$-(B + C)m + Bm^3 + Cm^5 = 0. \quad (3.12)$$

- Soluções paramagnética e absorvente

A solução  $m = 0$ , correspondente à fase paramagnética<sup>1</sup>, é estável para

$$B + C \geq 0. \quad (3.13)$$

As soluções  $m = \pm 1$ , correspondentes à fase absorvente, são estáveis para

$$B + 2C \leq 0. \quad (3.14)$$

Os parâmetros  $B$  e  $C$  estão relacionados com  $p_1$  e  $p_2$  por meio das relações:

---

<sup>1</sup>A fase paramagnética significa a solução correspondente à fase desordenada mas ativa, com  $m = 0$

$$p_1 = \frac{1}{6}\{5 - 2B - 4C\} \quad (3.15)$$

e

$$p_2 = \frac{2}{15}\{5 - 2B\}. \quad (3.16)$$

Ou seja,

$$B = \frac{5}{2} - \frac{15}{4}p_2 \quad (3.17)$$

e

$$C = \frac{15}{8}p_2 - \frac{3}{2}p_1. \quad (3.18)$$

As condições de estabilidade para as fases paramagnética e absorvente são então dadas respectivamente, por

$$12p_1 + 15p_2 \leq 20, \quad (3.19)$$

e

$$p_1 \geq \frac{5}{6} \quad (3.20)$$

As linhas de estabilidade são mostradas na figura 3.4.

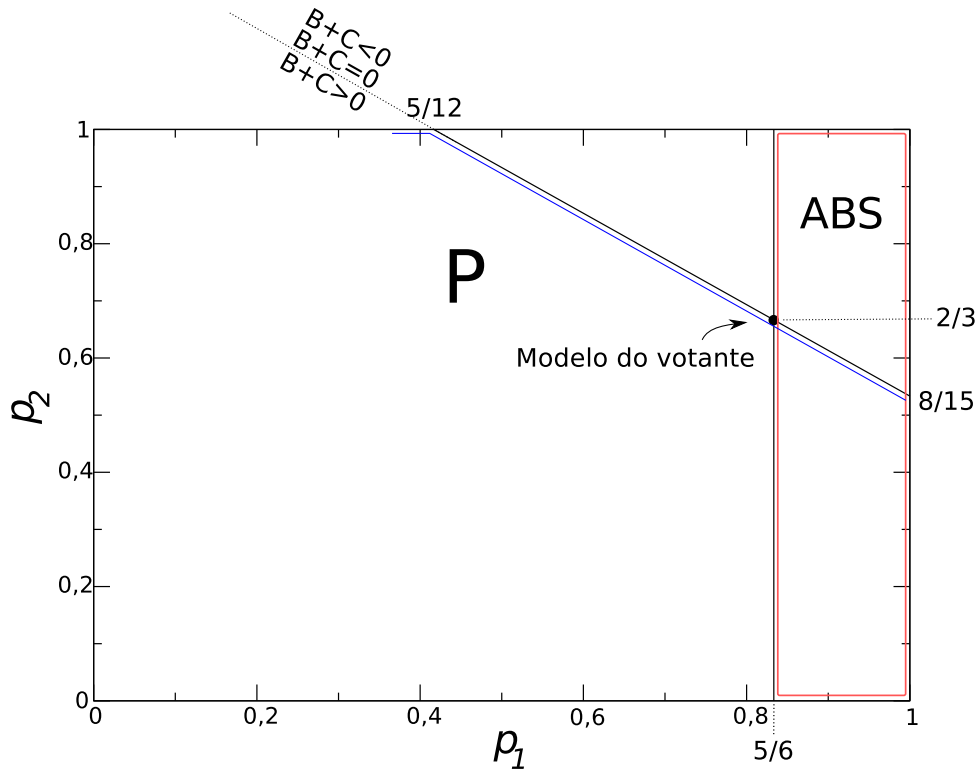


Figura 3.4: Regiões de estabilidade no diagrama de fases do modelo. Solução paramagnética estável abaixo da linha azul e a solução absorvente à direita da linha vermelha. O ponto  $(5/6, 2/3)$  corresponde ao modelo do Votante.

- Solução ferromagnética

As soluções não-nulas da equação (3.12) obedecem à equação:

$$-(B + C) + Bm^2 + Cm^4 = 0. \quad (3.21)$$

A equação (3.21) é uma equação biquadrada, ou seja, podemos substituir  $m^2$  por outra variável que chamaremos  $y$ :

$$-(B + C) + By + Cy^2 = 0. \quad (3.22)$$

A equação (3.22) tem uma única solução quando  $B + 2C = 0$ , e essa condição corresponde à expressão para a linha de estabilidade da solução absorvente.

A solução da fase ferromagnética<sup>2</sup> aparece quando temos a condição de duas raízes reais da equação (3.22). Para isso, determinamos a condição para o discriminante  $\Delta$  ser maior que zero, que é

$$B + 2C > 0. \quad (3.23)$$

A condição representada pela equação (3.23) é importante porque define a região no diagrama de fases onde a solução ferromagnética está presente. Essa condição determina que a solução ferromagnética existe na região à esquerda da linha que determina a estabilidade da solução absorvente, a linha  $p_1 = 5/6$ .

A solução que representa a fase ferromagnética é

$$y = -\frac{(B + C)}{C}. \quad (3.24)$$

A solução ferromagnética apresentada pela equação (3.24) precisa ser considerada em relação à variável original  $m$ . Lembrando que  $y = m^2$ , temos,

---

<sup>2</sup>A solução ferromagnética corresponde à ferromagnética ativa com  $m \neq 0$ .

$$m_{ferro} = \pm m^* \quad (3.25)$$

com

$$m^* = \sqrt{-\frac{(B+C)}{C}}. \quad (3.26)$$

Para que as equações acima forneçam a “magnetização do sistema” devemos ter que:

1.  $(B+C) > 0$  e  $C < 0$ ;

ou

2.  $(B+C) < 0$  e  $C > 0$ ;

A condição 2 juntamente com a condição dada na equação (3.23) determinam a região ( $F$ ) no diagrama de fases da figura 3.5.

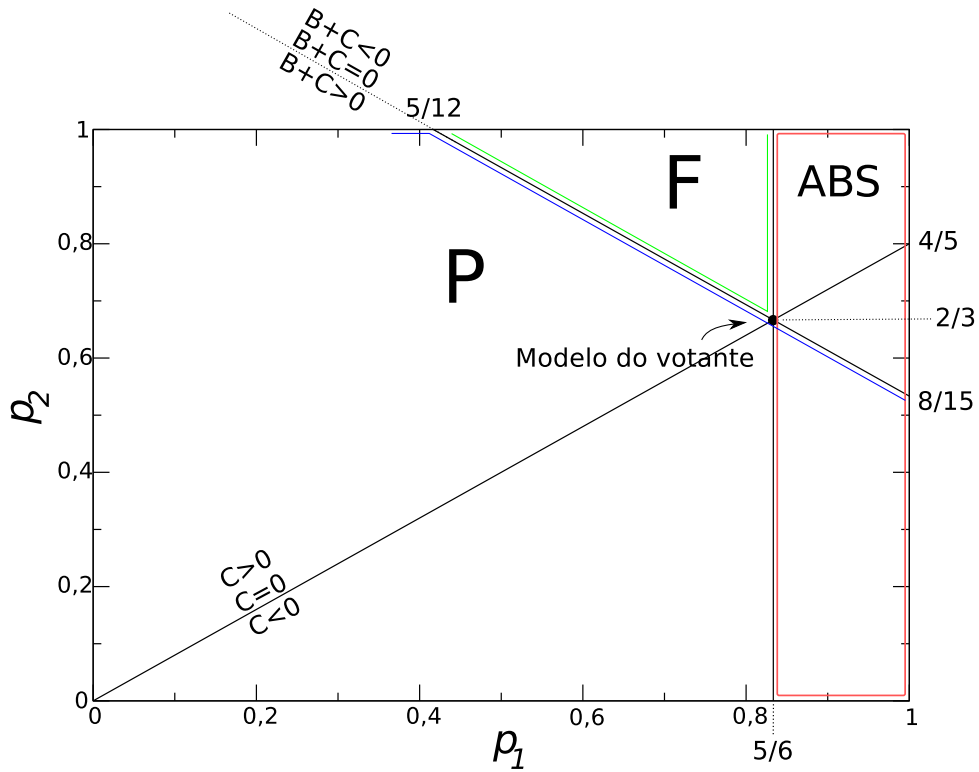


Figura 3.5: Diagrama de fases do campo médio simples com a apresentação da região onde somente a solução ferromagnética ( $F$ ) é estável.

Em função dos parâmetros  $p_1$  e  $p_2$ , a equação (3.26) é escrita como:

$$m^* = \sqrt{\frac{(-5 + \frac{15}{4}p_2 + 3p_1)}{\frac{15}{4}p_2 - 3p_1}}. \quad (3.27)$$

A solução 3.27 é definida em  $p_2 \in ]2/3 : 1]$  e em  $p_1 \in [5/3 - (5/4)p_2 : 5/6]$ . O valor de  $m^*$  na linha de transição  $(5/3 - (5/4)p_2)$  é zero e o valor de  $m^*$  na transição para o estado absorvente ( $p_1 = 5/6$ ) é igual a 1. As curvas



das soluções  $m^*(p_1, p_2)$  são mostradas na figura 3.6. É possível perceber que conforme diminui-se  $p_2$  em direção ao valor correspondente ao modelo do votante ( $p_2 = 2/3$ ) se aproximam os pontos críticos de segunda ordem e quando as linhas se encontram a transição é de primeira ordem.

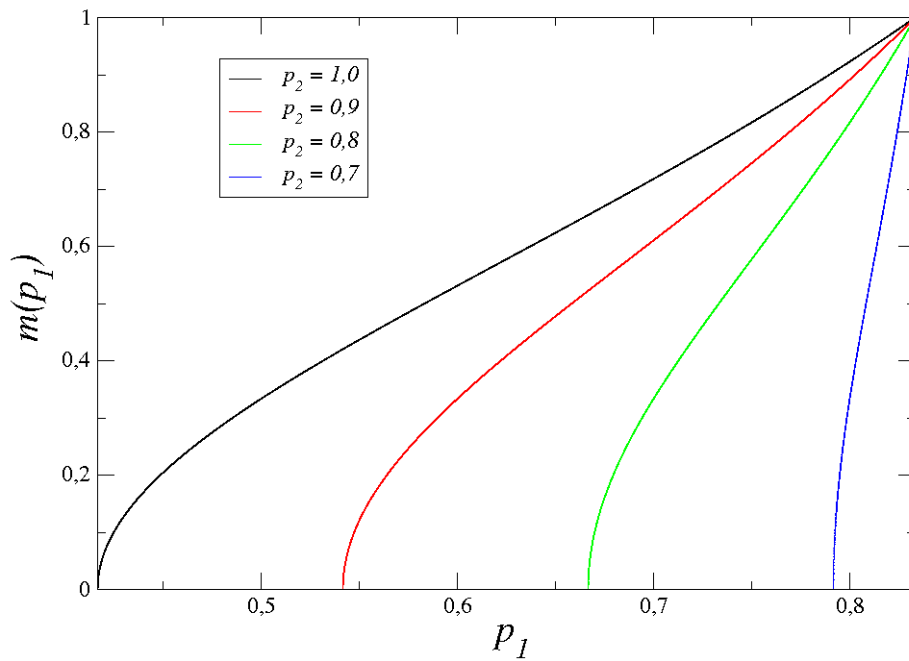


Figura 3.6: Soluções da magnetização na fase ferromagnética. As duas transições de segunda ordem se aproximam conforme  $p_2$  vai de 1 para  $2/3$  (ponto onde o modelo equivale ao modelo do votante).

- Obtenção do expoente  $\beta$  na transição paramagnética/ferromagnética.

Vamos agora analisar o comportamento de  $m^*$  nas proximidades da linha de transição paramagnética/ferromagnética.

Seja  $\epsilon = p_1 - p_1^*$  (a), onde  $p_1^* = 5/3 - 5/4p_2$  (b), denota o valor crítico do parâmetro  $p_1$ . Utilizando (a) e (b) podemos escrever a equação (3.27) da seguinte maneira:

$$m(\epsilon) = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\frac{15}{2}p_2 - 5 - 3\epsilon}}. \quad (3.28)$$

Nas vizinhanças do ponto crítico  $m$  é pequeno e no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $m(\epsilon)$  se comporta como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} m(\epsilon) \sim \epsilon^{1/2}. \quad (3.29)$$

Portanto, a partir da definição do expoente crítico  $\beta$  associado ao parâmetro de ordem,  $m \sim \epsilon^\beta$ , dada em (1.23), obtemos

$$\beta = \frac{1}{2}. \quad (3.30)$$

Esse resultado está de acordo com as referências para o expoente  $\beta$  de campo médio simples para a classe de universalidade do modelo de Ising.

- Obtenção do expoente  $\beta$  na transição ferromagnética/absorvente.

Vamos analisar a transição da fase ferromagnética para a fase absorvente que ocorre em  $p_1^* = 5/6$ .

Definindo  $p_1 = 5/6 - \epsilon$  e utilizando a equação (3.27) podemos mostrar que nas vizinhanças da transição temos

$$1 - m^* \sim \frac{3\epsilon}{2\alpha}, \quad (3.31)$$

em que  $\alpha = \left(-\frac{5}{2} + \frac{15}{4}p_2\right)$ . Isto é, o parâmetro de ordem para essa transição,  $\rho = 1 - m^*$ , se comporta como  $\rho \sim \epsilon^1$ , nas vizinhanças do ponto crítico.

Portanto, na aproximação de campo médio, o valor do expoente crítico  $\beta$  associado ao parâmetro de ordem  $\rho$  (definido por  $\rho \sim \epsilon^\beta$ ) é 1. Esse resultado está de acordo com o valor do expoente  $\beta$  obtido por meio de aproximação de campo médio para modelos com comportamento crítico descrito pela classe de universalidade da percolação direcionada.

- Expoente  $\beta$  em  $p_2 = 2/3$ ,  $p_1 = 5/6$  (modelo do votante).

Como foi mostrado anteriormente, a solução paramagnética ( $B+C=0$ ) se aproxima da solução absorvente até as duas soluções se encontrarem em  $p_2 = 5/6$  (figura 3.5, página 80). O ponto em que se encontram é correspondente ao modelo do votante e a magnetização se comporta como um salto da solução paramagnética para a solução absorvente.

# Capítulo 4

## Resultados de simulação do modelo UD-ABS na rede cúbica

### 4.1 Diagrama de fases

A figura 4.1 mostra as fases encontradas no modelo: a fase paramagnética, a fase ferromagnética e a fase absorvente. As fases paramagnética e ferromagnética são separadas por uma linha de transição de segunda ordem da classe Ising. As fases ferro e absorvente são separadas também por uma linha de transição de segunda ordem, desta vez da classe DP, da percolação direcionada. O modelo ainda apresenta outra linha de transição, entre as fases paramagnética e absorvente, de primeira ordem.

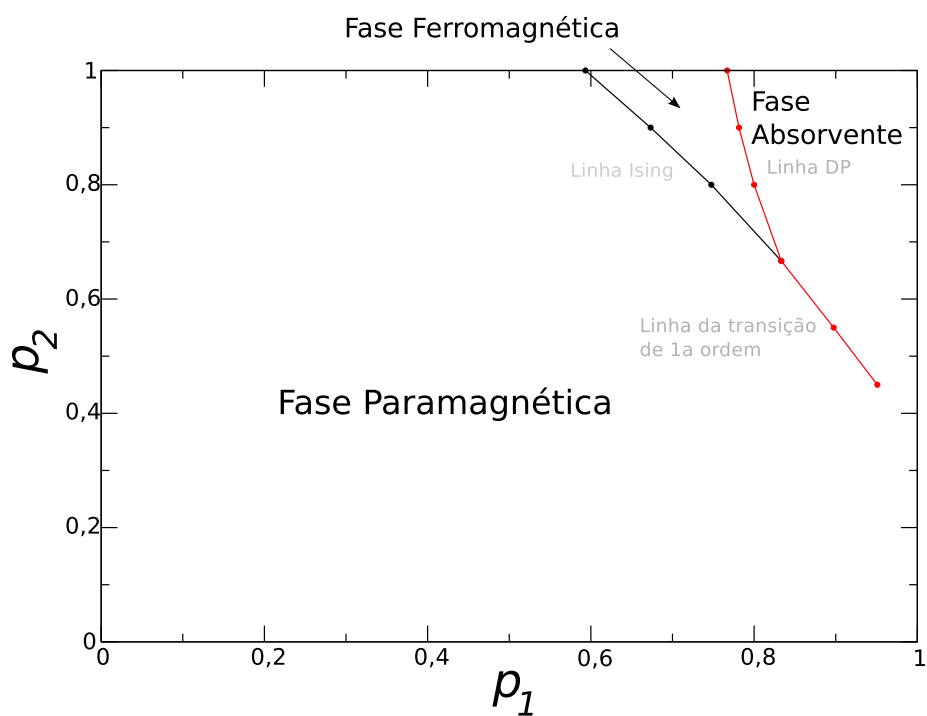


Figura 4.1: Diagrama de fases do modelo. O modelo na rede cúbica exibe as fases: paramagnética, ferromagnética e absorvente.

Na figura 4.2 são mostradas as curvas da magnetização em função de  $p_1$ . A partir das curvas de magnetização é possível perceber que as duas transições de segunda ordem se aproximam conforme  $p_2 \rightarrow 2/3$ .

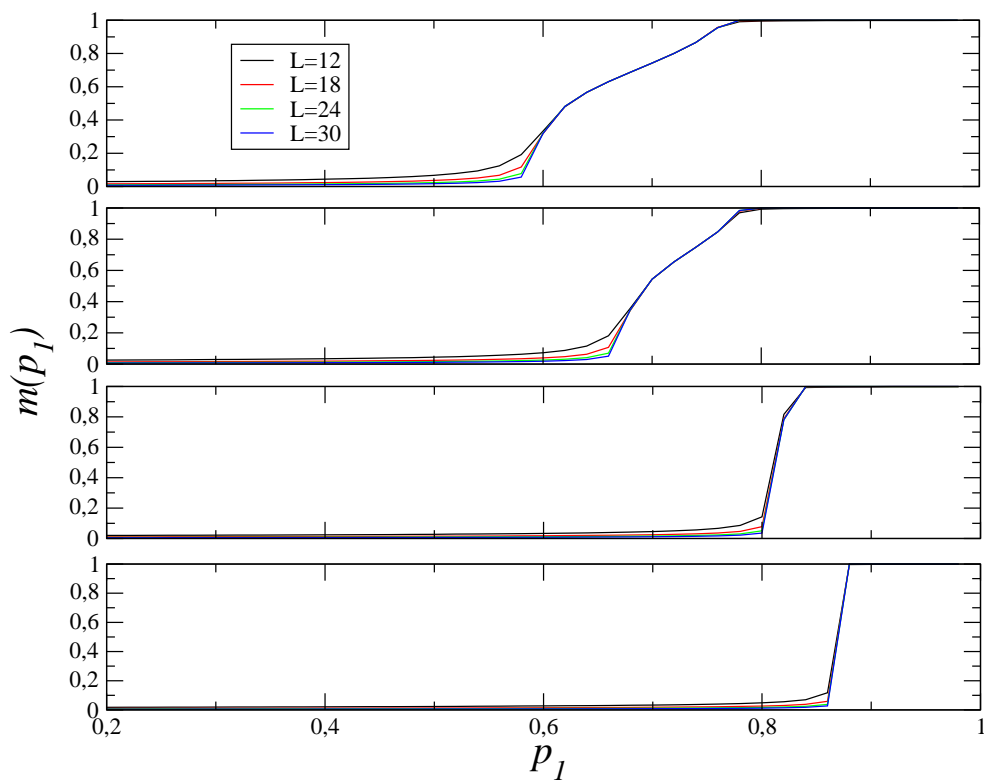


Figura 4.2: Curvas de magnetização  $m(p_1) \times p_1$  para  $p_2$  : (de cima para baixo) 1,0, 0,9, 0,7, 0,6.

## 4.2 Resultados na linha do modelo do votante

- Resultados na linha do modelo do Votante ( $p_2 = 0,66666$ )

As curvas de magnetização na linha do modelo do Votante são apresentadas na figura 4.3. Através dos gráficos de suscetibilidade magnética

(figura 4.4) foi estimado o ponto crítico  $p_1^* = 0,8333(1)$  (apesar de conhecermos os parâmetros do modelo do Votante  $p_2 = 2/3$  e  $p_1^* = 5/6$ ). Nas simulações foram utilizados 700.000 passos de Monte Carlo onde os 300.000 primeiros foram descartados como transiente, cada ponto corresponde a uma simulação com 40 realizações.

Através do ajuste  $\ln \chi \sim \ln \epsilon$  (figura 4.5) obtivemos o expoente crítico  $\gamma = 1,02(5)$  de acordo com a classe de universalidade do modelo do Votante.

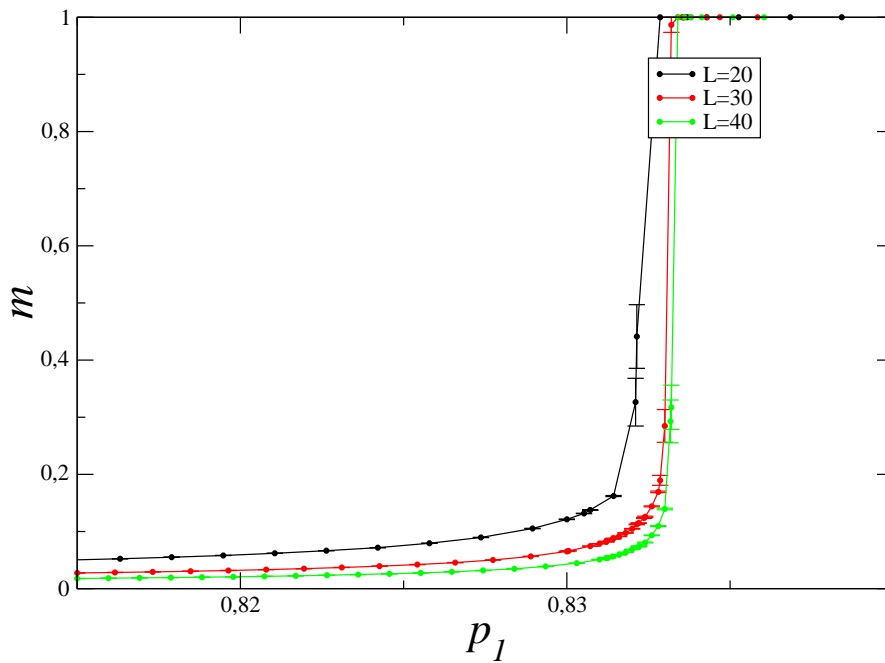


Figura 4.3: Curvas de magnetização em  $p_2 = 0,666666$ . As curvas convergem para uma transição de primeira ordem do tipo do modelo do Votante.

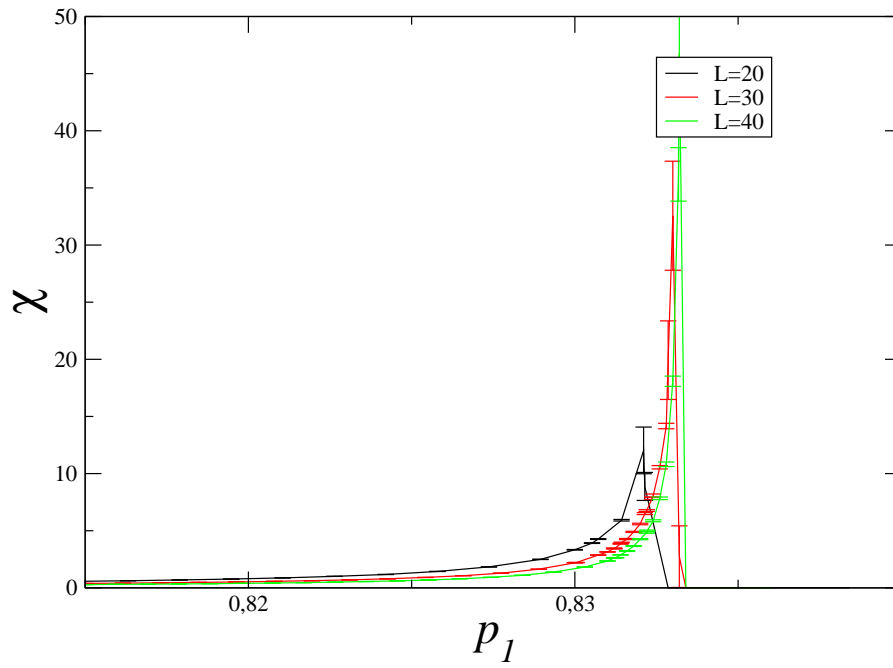


Figura 4.4: Curvas da suscetibilidade magnética para  $p_2 = 0,666666$ .



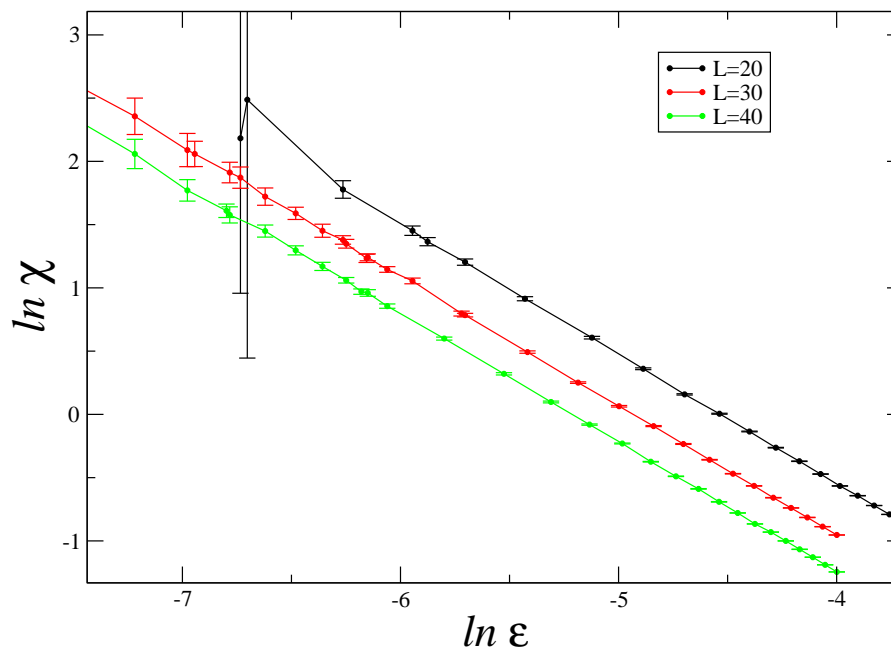


Figura 4.5: Ajuste  $\ln \chi \sim \ln \epsilon$  para  $p_2 = 0,666666$ . O ajuste forneceu um expoente crítico  $\gamma = 1,02(5)$  compatível com a classe do modelo do Votante em 3 dimensões.

### 4.3 Transição de 2ª ordem tipo Ising

- Resultado na linha  $p_2 = 1$ .

Nas simulações em  $p_2 = 1$  utilizamos 40 réplicas e 700.000 passos de Monte Carlo. Onde os 300.000 passos foram descartados.

As curvas de magnetização são mostradas na figura 4.6. O ponto crítico foi encontrado através do cruzamento dos cumulantes de quarta ordem (figura 4.7). O valor encontrado para o ponto crítico foi  $p_1^* = 0,5934(1)$  e o cumulante de quarta ordem no ponto crítico tem valor  $U_4(p_1^*) = 0,49(1)$ .

O expoente  $\beta$  foi encontrado através do ajuste mostrado na figura 4.8 ( $\beta = 0,30(1)$ ).

A suscetibilidade magnética e o ajuste de determinação do expoente  $\gamma$  são mostrados nas figuras 4.9 e 4.10. O valor encontrado para o expoente  $\gamma$  foi  $\gamma = 1,34(2)$ .

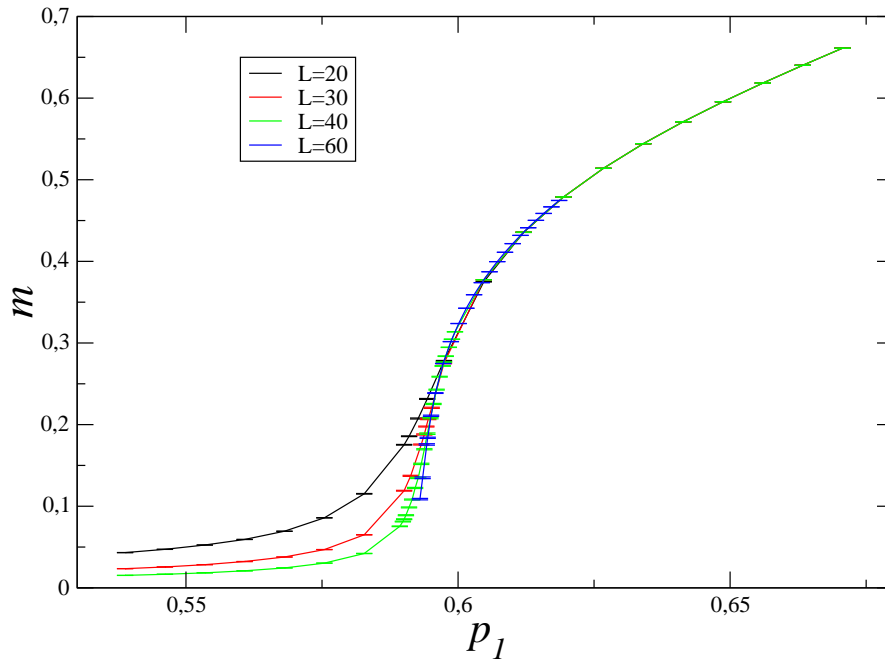


Figura 4.6: Curvas de magnetização em  $p_2 = 1$  na rede cúbica. Transição de segunda ordem como o modelo de Ising.

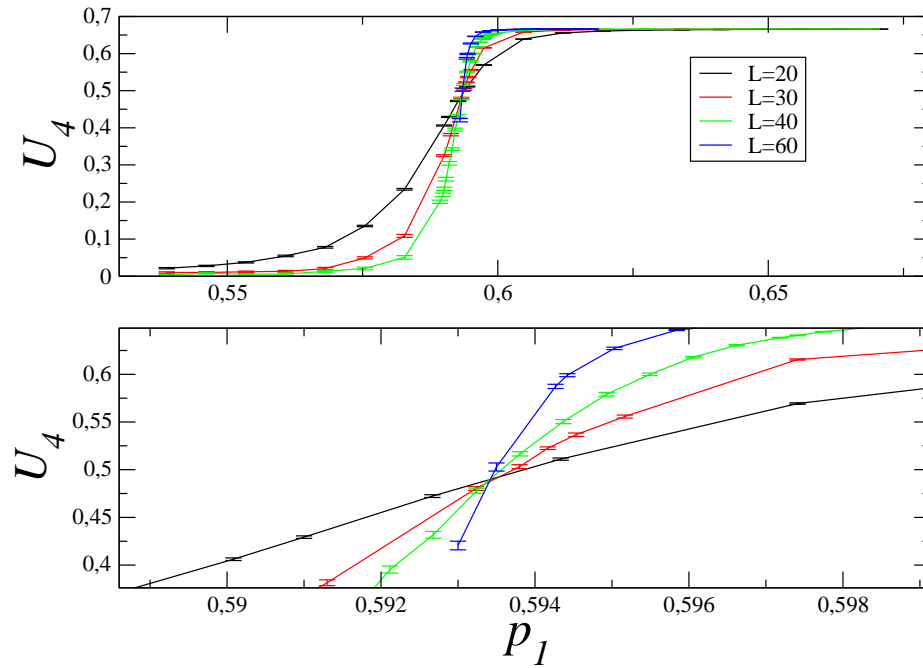


Figura 4.7: Cumulantes de quarta ordem para  $p_2 = 1$  na rede cúbica. O cruzamento denota o ponto crítico estimado em  $p_1^* = 0,5934$ .

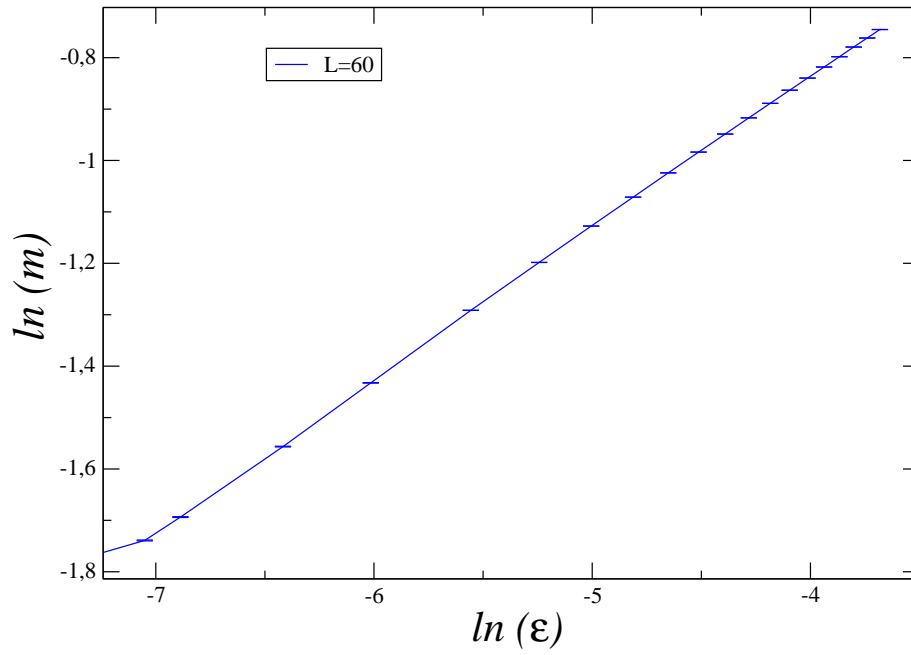


Figura 4.8: Ajuste  $\ln(m) \times \ln(\epsilon)$  para a determinação do expoente  $\beta$ , o valor encontrado foi  $\beta = 0,30(1)$ .

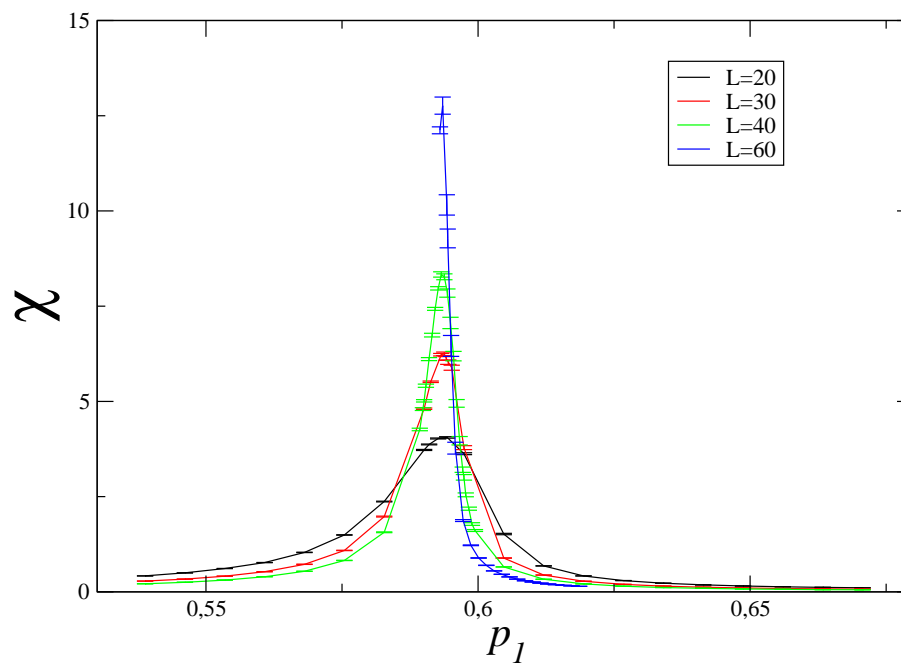


Figura 4.9: Curvas da suscetibilidade magnética em  $p_2 = 1$  na rede cúbica.

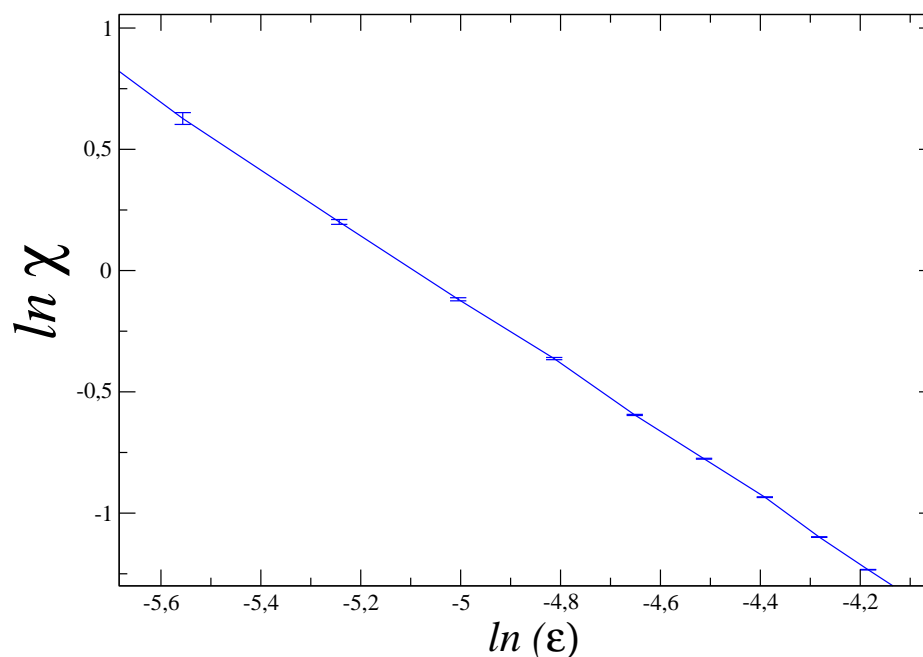


Figura 4.10: Ajuste  $\ln(\chi) \times \ln(\epsilon)$  para determinação do expoente  $\gamma$ , o valor encontrado foi  $\gamma = 1,34(2)$ .

- Resultados na linha  $p_2 = 0,8$ .

Foram utilizadas simulações com 40 réplicas em cada ponto da linha  $p_2 = 0,80$ . Em cada réplica foram simulados 700.000 passos de Monte Carlo, onde os 300.000 primeiros foram descartados como transiente.

Na figura 4.11 são mostradas as curvas de magnetização com tamanhos variando de  $L = 20$  a  $L = 60$ .

A figura 4.12 mostra os cruzamentos dos cumulantes de quarta ordem

onde foi estimado o ponto crítico  $p_1^* = 0,74760(2)$ . Através do ponto crítico determinamos o expoente  $\beta$  (figura 4.13)  $\beta = 0,328(3)$ .

A suscetibilidade magnética é mostrada na figura 4.14 com o ajuste para encontrar o expoente  $\gamma$  na figura 4.15. O valor encontrado foi  $\gamma = 1,25(1)$ .

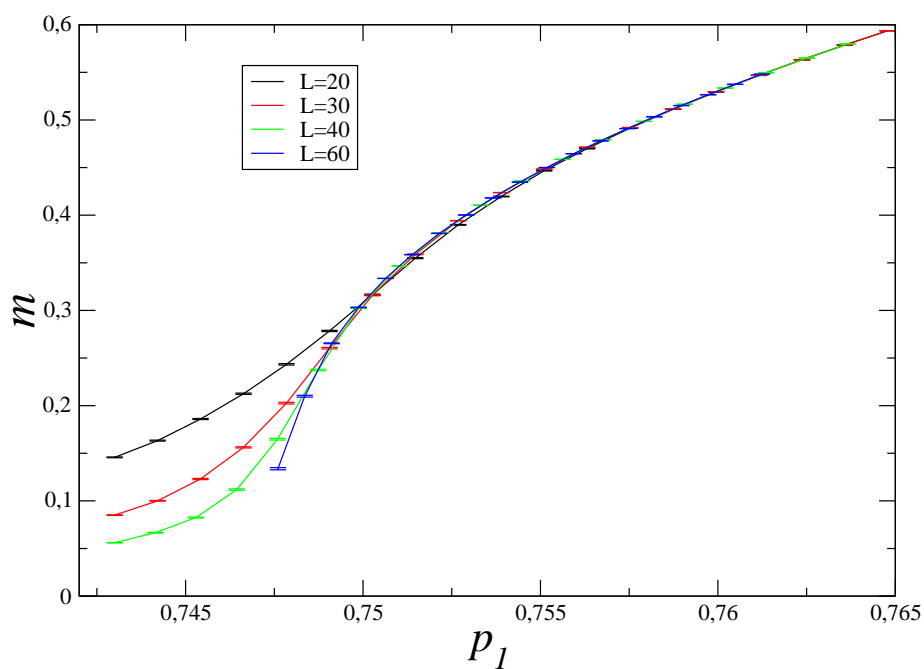


Figura 4.11: Curvas de magnetização em  $p_2 = 0,8$  para tamanho de rede:  $L = 20, 30, 40$  e  $60$ .



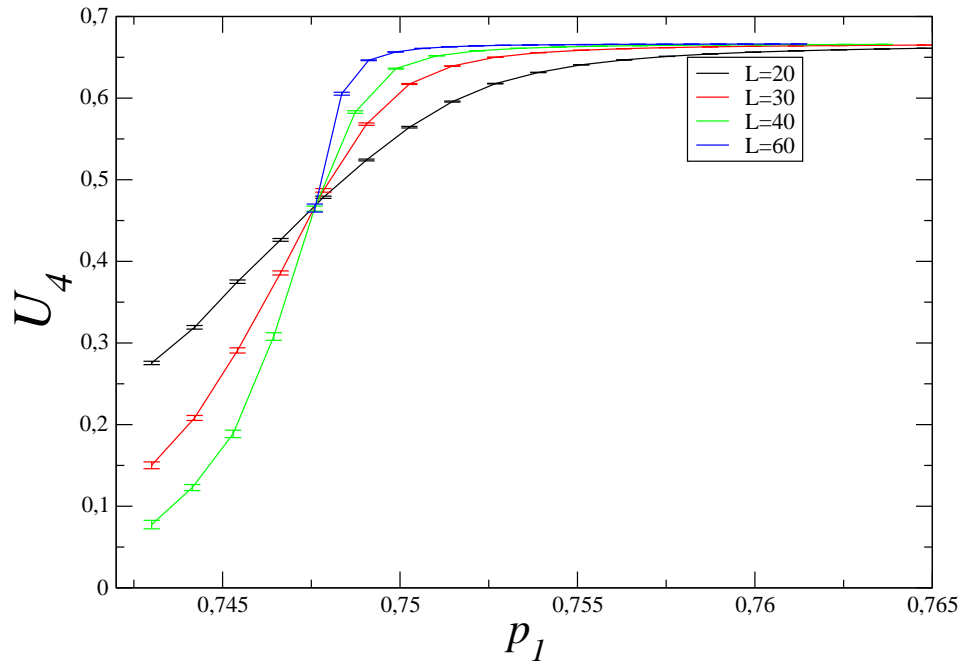


Figura 4.12: Determinação do ponto crítico da quebra espontânea de simetria através do cumulante de quarta ordem de Binder. Parâmetro  $p_2 = 0,8$ .

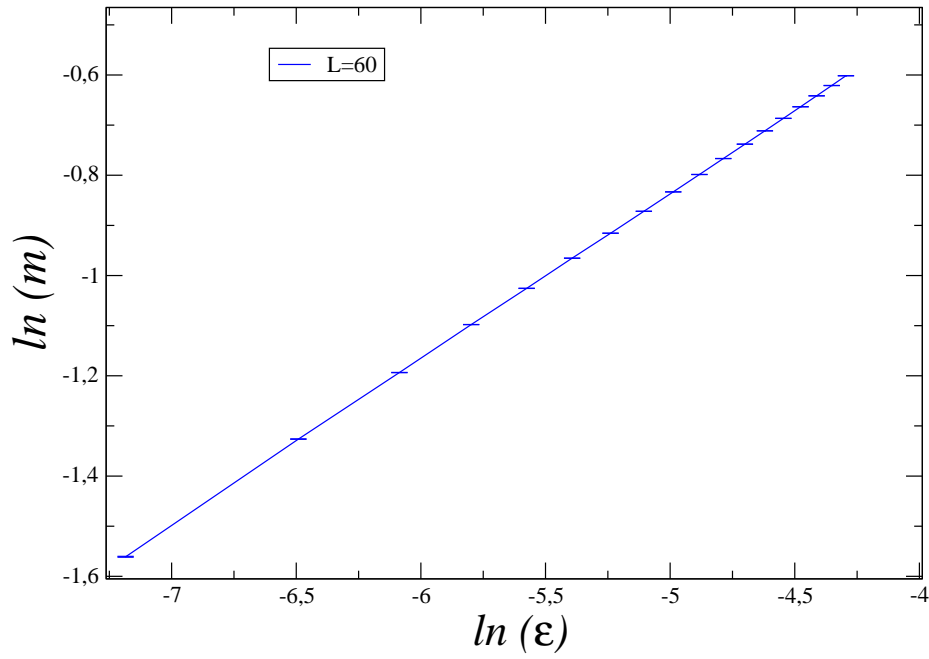
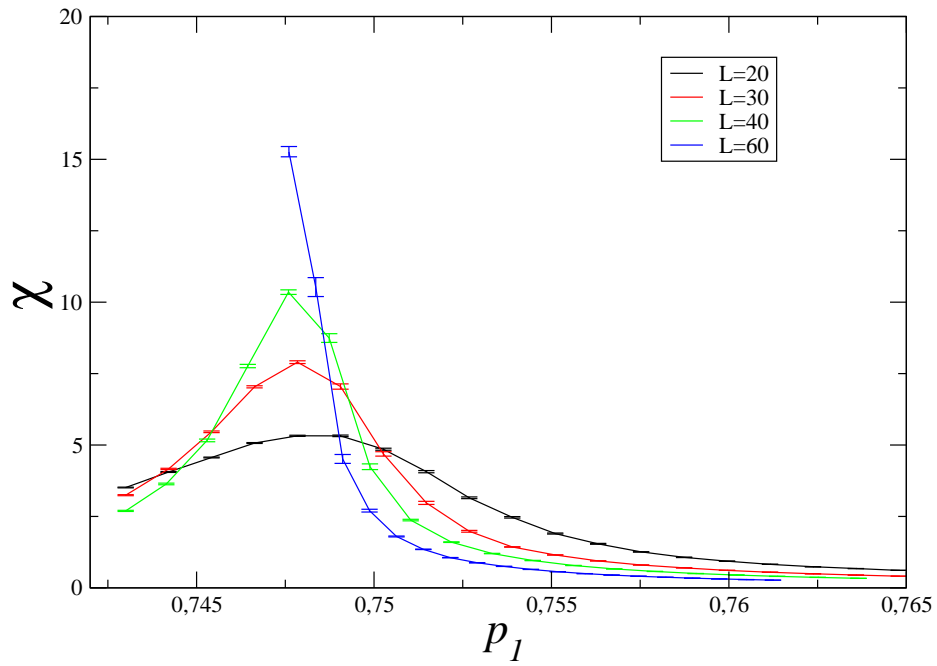


Figura 4.13: Ajuste  $\ln(m) \times \ln(\epsilon)$  para a determinação do expoente crítico  $\beta$ . O valor encontrado utilizando a curva  $L = 60$  foi  $\beta = 0.328(3)$ .

Figura 4.14: Suscetibilidade magnética em  $p_2 = 0,8$ .

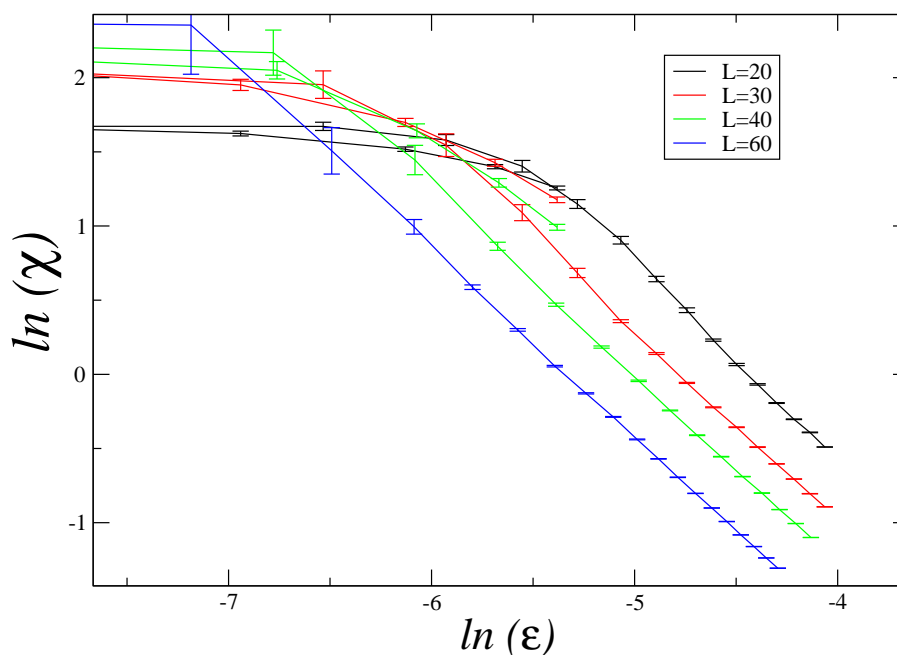


Figura 4.15: Ajuste  $\ln \chi \times \ln(\epsilon)$  para a determinação do expoente crítico  $\gamma$ . O valor encontrado foi  $\gamma = 1,25(1)$ .

## 4.4 Transição de 2ª ordem da classe DP

- Resultados na linha  $p_2 = 1$ .

Para caracterizar a transição da fase ferromagnética para a fase absorvente na linha do parâmetro  $p_2 = 1$  obtivemos as curvas de magnetização apresentadas na figura 4.16. Cada ponto das curvas representa 40 réplicas

com 700.000 passos de Monte Carlo onde os 300.000 primeiros passos foram descartados. O ponto crítico foi estimado em  $p_1^* = 0,767(1)$ .

Através do ajuste na figura 4.17 foi estimado valor do expoente:  $\beta = 0,80(2)$  de acordo com a classe de universalidade da percolação direcionada.

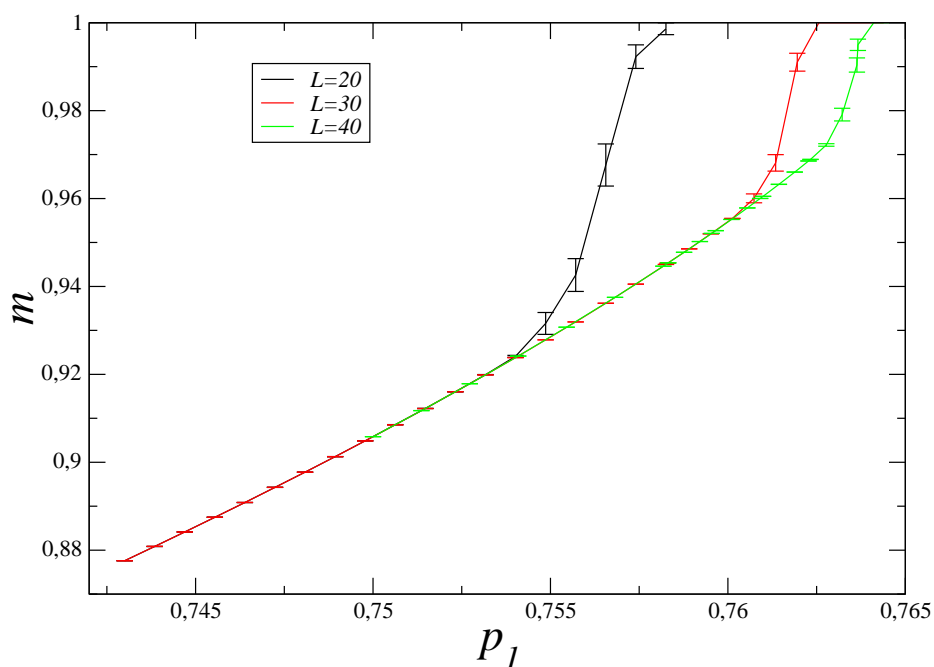


Figura 4.16: Curvas de magnetização na linha  $p_2 = 1$  correspondendo à transição compatível com a percolação direcionada. O ponto crítico estimado foi  $p_1 = 0,767(1)$ .

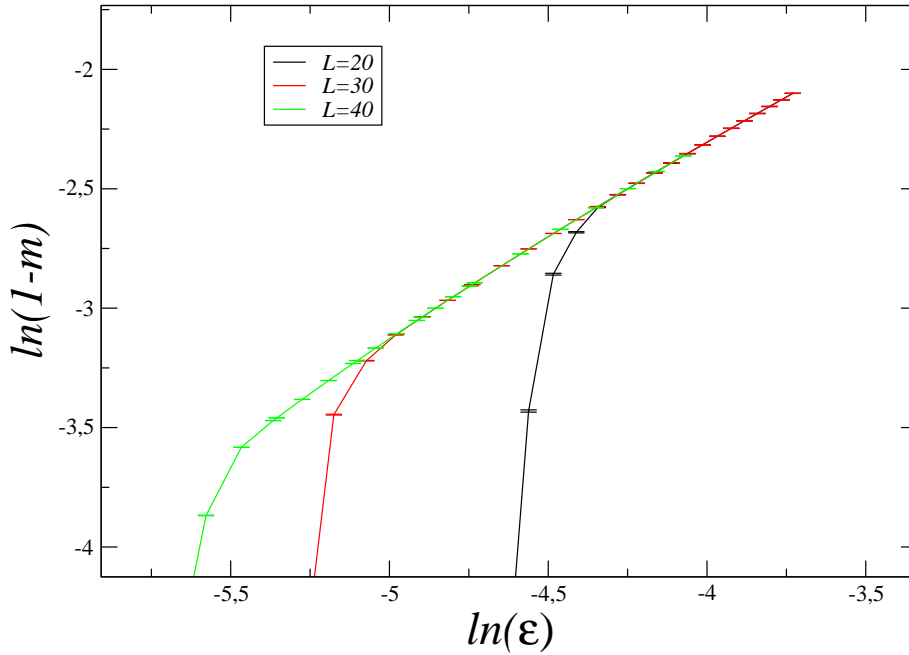


Figura 4.17: Ajuste para encontrar o expoente  $\beta$  na transição para a configuração absorvente de  $p_2 = 1$ . Foi encontrado o valor  $\beta = 0,80(2)$  compatível com a classe da percolação direcionada.

- Resultados na linha  $p_2 = 0,80$ .

Através das curvas de magnetização apresentadas na figura 4.18 foi estimado o ponto crítico  $p_1^* = 0,800(1)$ . As simulações ocorreram descartando 300.000 passos de Monte Carlo iniciais como transiente e utilizando os 400.000 passos seguintes como amostra. Cada ponto é resultado de 40 réplicas em cada simulação.

Foi determinado o expoente  $\beta$  através do ajuste  $\ln(1-m) \times \ln(\epsilon)$  mostrado na figura 4.19. O valor encontrado foi  $\beta = 0,81(1)$  compatível com a classe de universalidade da percolação direcionada.

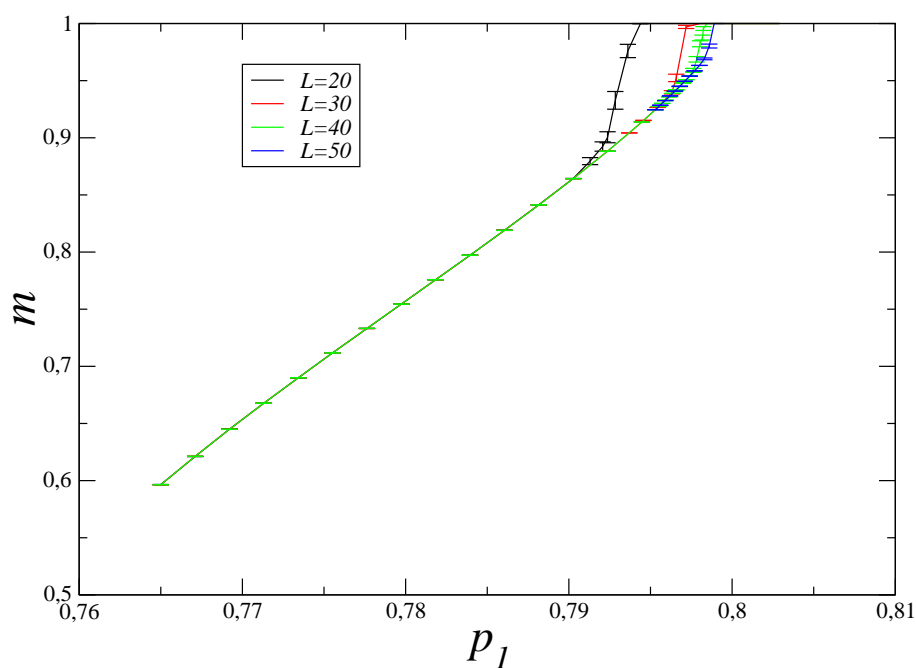


Figura 4.18: Curvas de magnetização na linha  $p_2 = 0,80$  correspondendo à transição compatível com a percolação direcionada. O ponto crítico estimado foi  $p_1 = 0,800(1)$ .

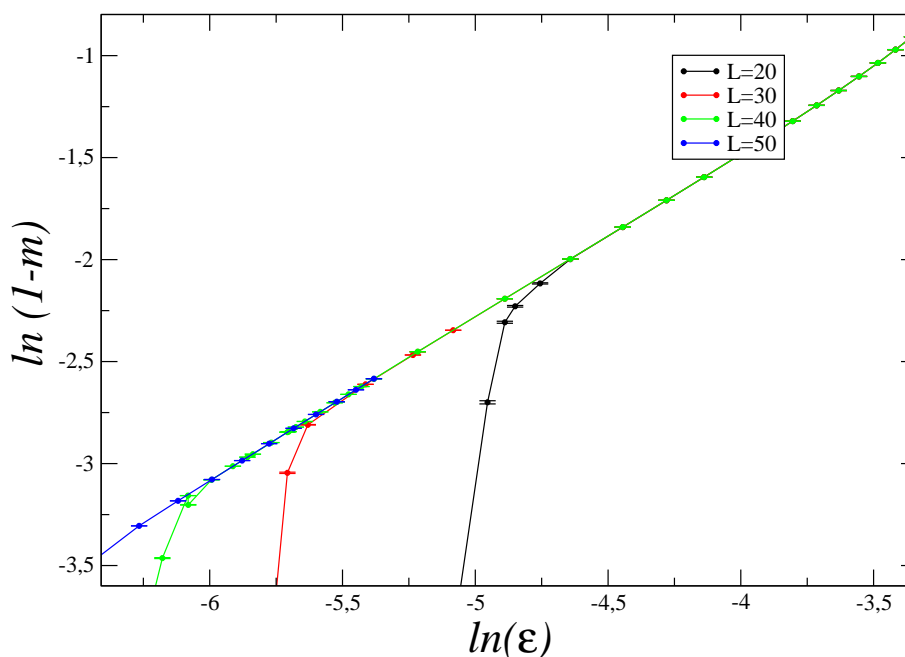


Figura 4.19: Ajuste  $\ln(1 - m) \times \ln(\epsilon)$  para a determinação do expoente  $\beta$ , o valor encontrado foi  $\beta = 0,81(1)$  compatível com a classe da percolação direcionada.

- Resultados na linha  $p_2 = 0,55$ .

As simulações em  $p_2 = 0,55$  foram realizadas utilizando 700.000 passos de Monte Carlo, onde os 300.000 primeiros passos foram descartados como transiente. Para determinação das incertezas as simulações foram compostas de 50 réplicas em cada parâmetro.

As figuras 4.20 e 4.21 mostram respectivamente as curvas de magnetização



e as curvas da suscetibilidade magnética. Através destas curvas, foi determinado o parâmetro crítico de transição como  $p_1^* = 0,8975(3)$ . Com os resultados obtidos não foi possível determinar algum expoente crítico e por consequência a natureza desta transição.

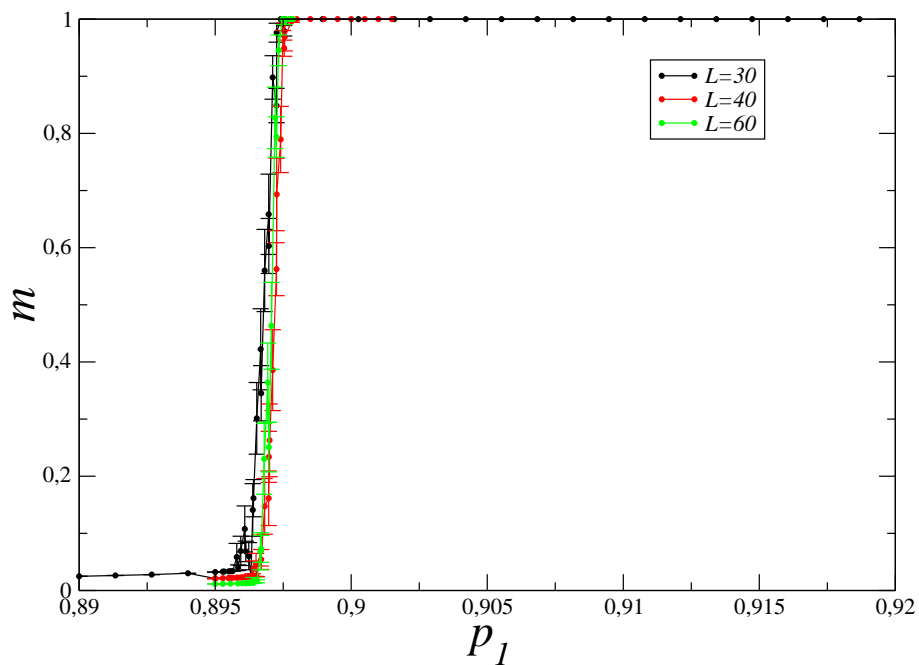


Figura 4.20: Curvas de magnetização para tamanho de rede  $L = 30, 40$  e  $60$ .

O parâmetro de transição foi definido como  $p_1^* = 0,8975(3)$ .

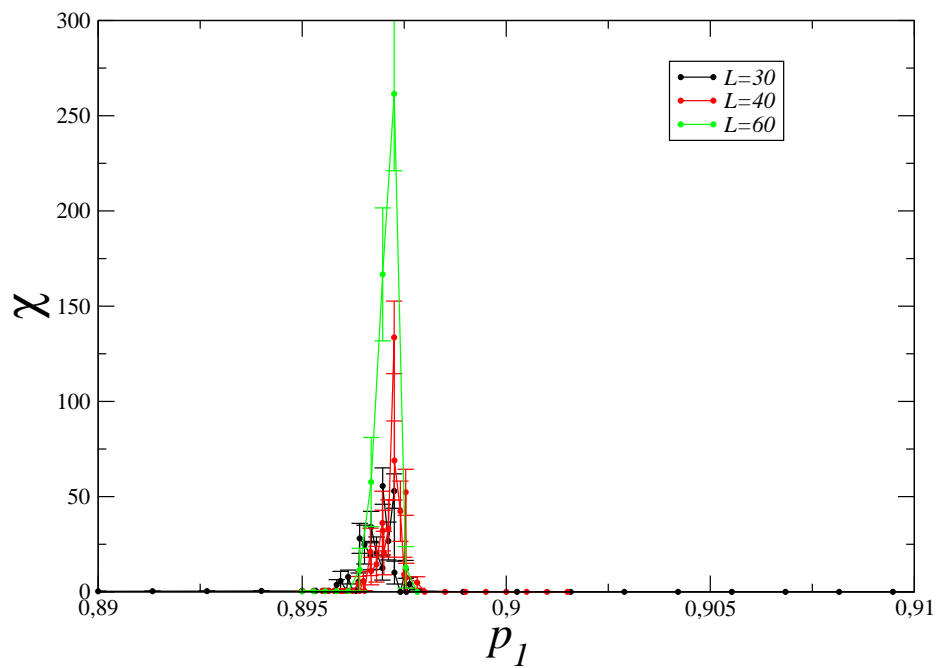


Figura 4.21: Curvas da suscetibilidade magnética para tamanhos  $L = 30, 40$  e 60.

# Capítulo 5

## Resultados de simulação do modelo UD-ABS na rede hexagonal

### 5.1 Diagrama de fases

O diagrama de fases  $p_2 \times p_1$  (figura 5.1) apresenta uma fase paramagnética, uma fase absorvente e uma estreita faixa correspondente à fase ferromagnética. A linha que estabelece a transição da fase paramagnética para a fase ferromagnética é compatível com a transição de quebra espontânea de simetria como no modelo de Ising. A linha que separa as fase ferromagnética e absorvente é compatível com a transição de segunda ordem como na percolação direcionada.

A linha  $p_2 = 2/3$  a transição é de primeira ordem como no modelo do Votante. Assim como em  $p_2 < 2/3$ .

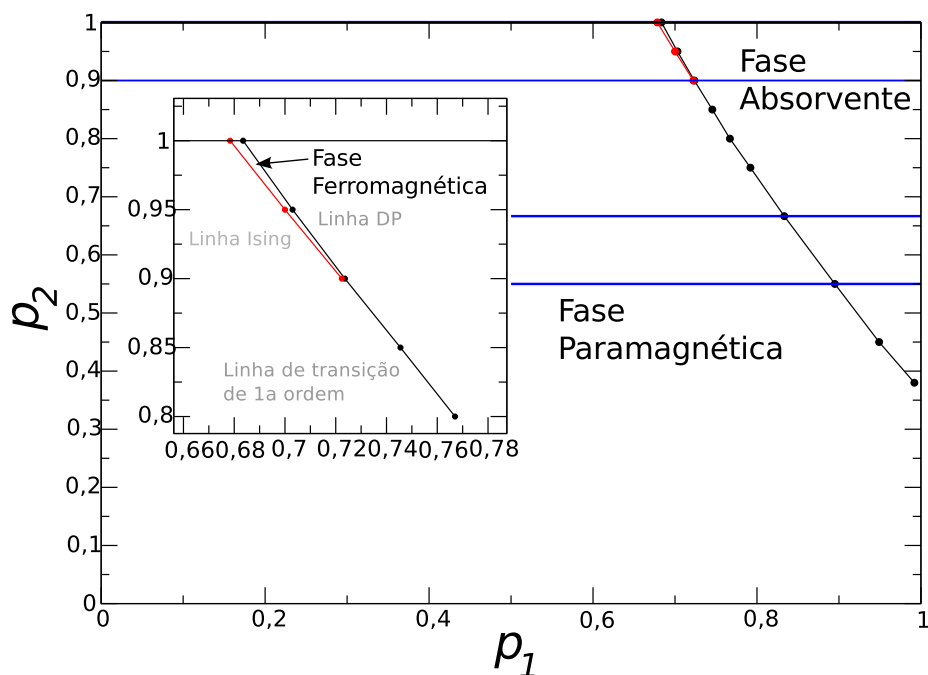


Figura 5.1: Diagrama de fases do modelo. O modelo exhibe as fases: paramagnética, ferromagnética e absorvente. Em zoom, a fase ferromagnética. As linhas horizontais em azul correspondem aos resultados que serão mostrados a seguir.

## 5.2 Resultados na linha do modelo do Votante

Foram realizadas simulações na linha  $p_2 = 2/3$  a fim de confirmar o comportamento de transição de fase de primeira ordem como no modelo do Votante. O parâmetro  $p_2$  adotado para execução do programa foi 0,666666. Para ser obtida a magnetização foram utilizados 800.000 passos de Monte Carlo com 400.000 iniciais descartados como transiente. Em cada simulação foram utilizadas 40 réplicas para determinação da incerteza.

As curvas de magnetização são mostradas na figura 5.2. A caracterização da transição foi feita a partir de simulações dependentes do tempo através da análise do expoente  $\eta$  e da observação da densidade de interfaces  $\rho(t)$  que deve se comportar como  $\rho \times 1/\ln(t)$  no caso de uma transição de primeira ordem do tipo do modelo do Votante.

A figura 5.3 mostra o comportamento de  $N(t)$  (definido na seção 1.8, página 51). No parâmetro  $p_1 = 0,8333333$  o valor de  $N(t)$  é compatível com uma constante, o que caracteriza a transição como de primeira ordem ( $\eta \sim 0$ ). Na figura é mostrado 20 curvas supostas em cada parâmetro, cada uma das curvas corresponde é média de 32000 realizações.

A caracterização da transição de primeira ordem foi feita a partir da densidade das interfaces  $\rho(t)$ . A figura 5.4 mostra 12 curvas superpostas, em cada curva é utilizado um tamanho de rede  $L = 420$  e 12.000 réplicas. O ajuste

$1/\rho(t) \times \ln(t)$  teve uma reta como resultado confirmando o comportamento de uma transição de primeira ordem como no modelo do Votante.

Na figura 5.5 é mostrada outros resultados de  $\rho(t)$  para tempos maiores. Na figura é possível observar também as curvas de  $\rho(t)$  dos parâmetros vizinhos ao ponto crítico, e como eles não se comportam como uma reta neste ajuste.

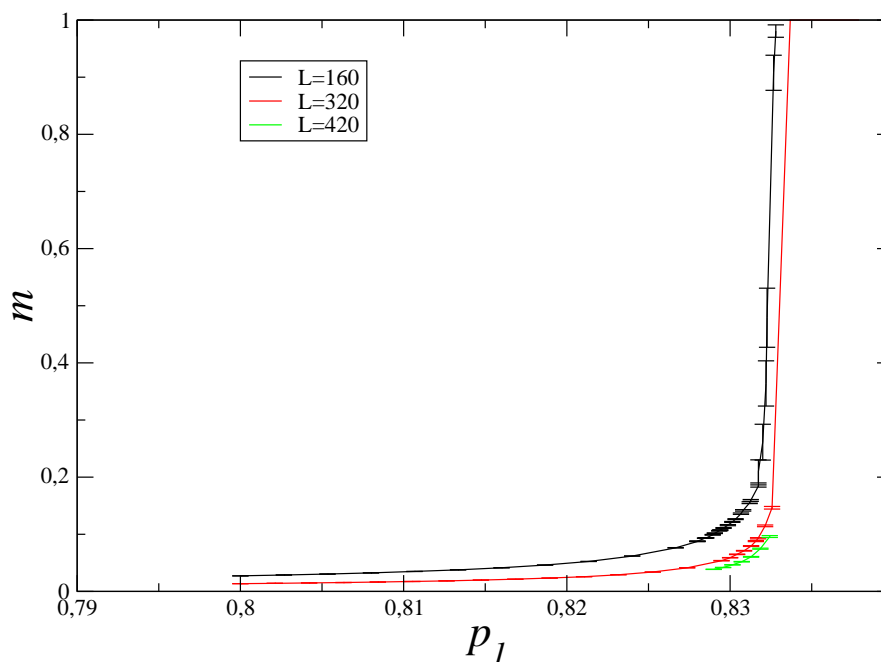


Figura 5.2: Curvas de magnetização em  $p_2 = 0,666666$ . A incerteza de cada ponto foi determinada utilizando 40 réplicas.

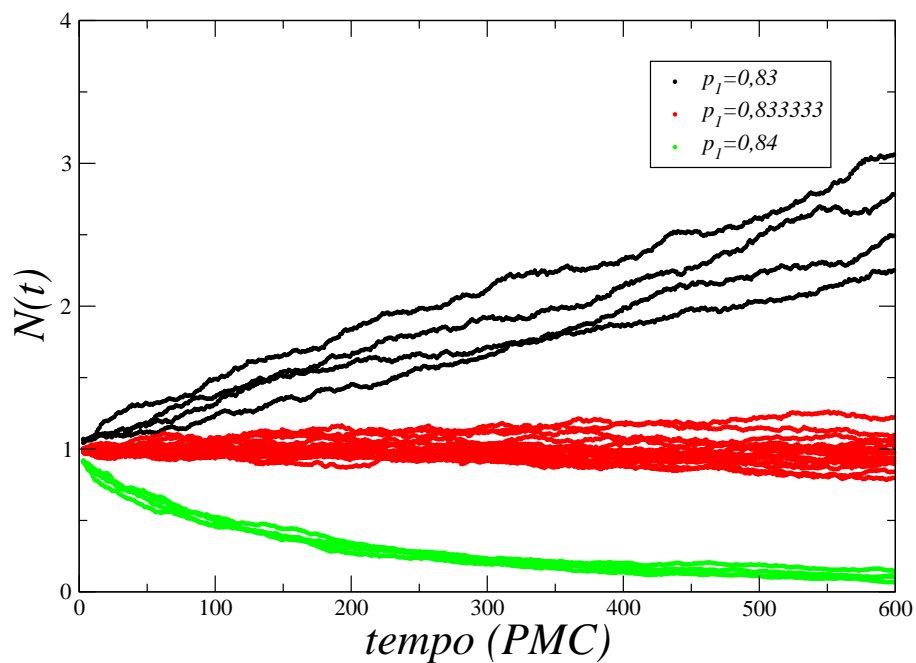


Figura 5.3: Simulações dependentes do tempo. No parâmetro correspondente ao modelo do Votante ( $p_1 = 0,833333$ ) o expoente  $\eta$  é compatível com zero, o que está de acordo com uma transição de primeira ordem.

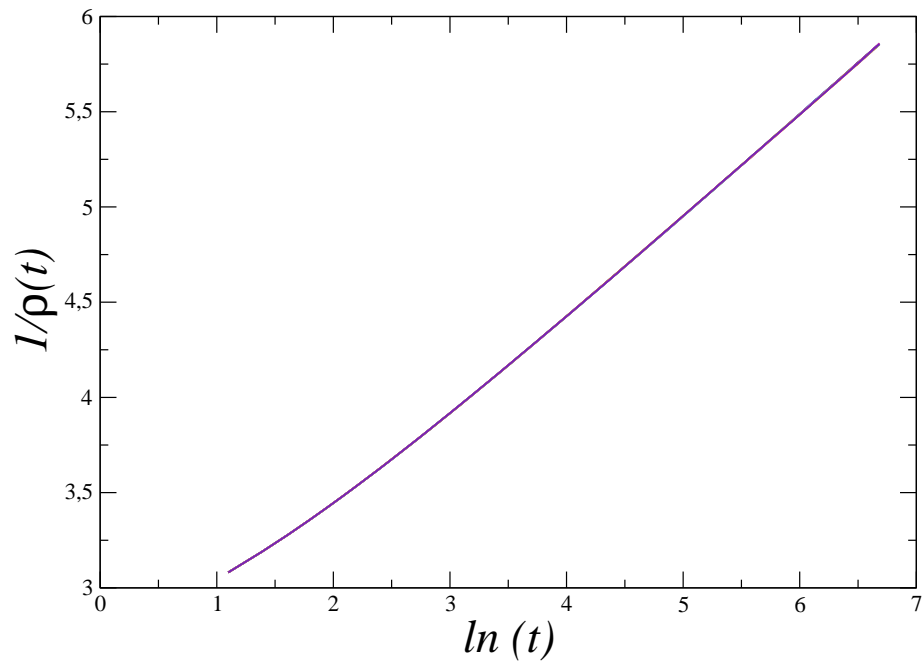


Figura 5.4: Conjunto de 12 curvas com os parâmetros  $p_2 = 0,666666$ ,  $p_1 = 0,833333$  e  $L = 420$ . A partir de  $\ln(t) = 3,5$  as curvas são compatíveis com uma reta, o que está de acordo com uma transição de primeira ordem do tipo do modelo do Votante.



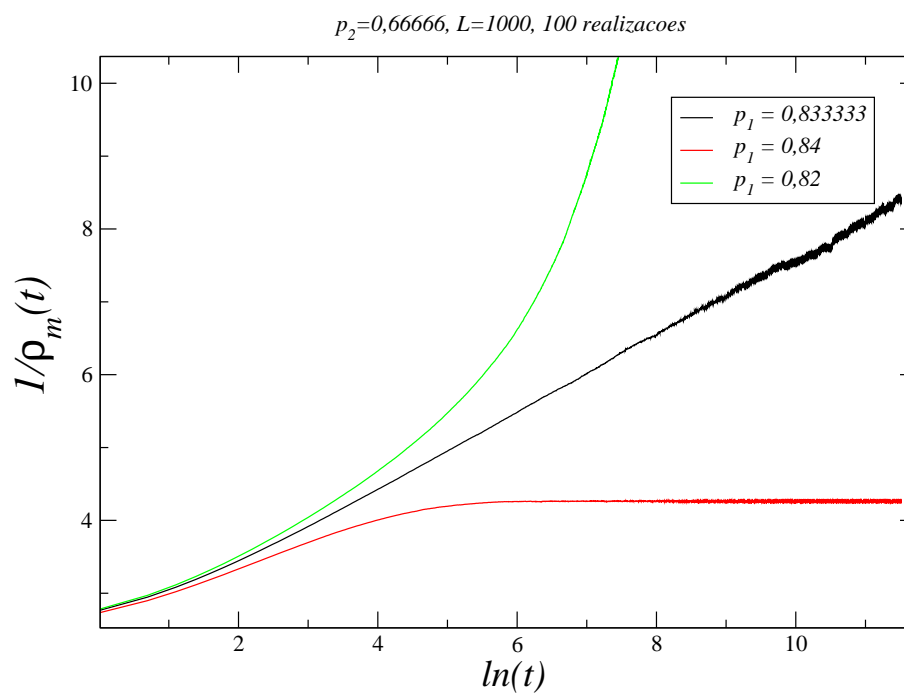


Figura 5.5: Serie temporal da densidade de interfaces. Tamanho da rede  $L = 1000$ , 100 realizações em cada parâmetro.

### 5.3 Transição de segunda ordem da classe Ising

#### 5.4 Resultados na linha $p_2 = 1$

Para a caracterização da transição de quebra espontânea de simetria foi primeiramente determinado o ponto crítico através do cruzamento dos cumu-

lantes de quarta ordem (figura 5.7). Utilizando o ponto crítico  $p_1^* = 0,67841$  foi determinado o expoente estático  $\beta$  através do ajuste  $\ln m \times \ln(\epsilon)$ , o resultado foi  $\beta = 0,13(1)$  (figura 5.8) e está de acordo com a classe de universalidade do modelo de Ising. Nas simulações foram utilizadas 40 réplicas em cada ponto, com 400.000 passos de Monte Carlo descartados como transiente e considerados os 400.000 passos de Monte Carlos seguinte como amostra.

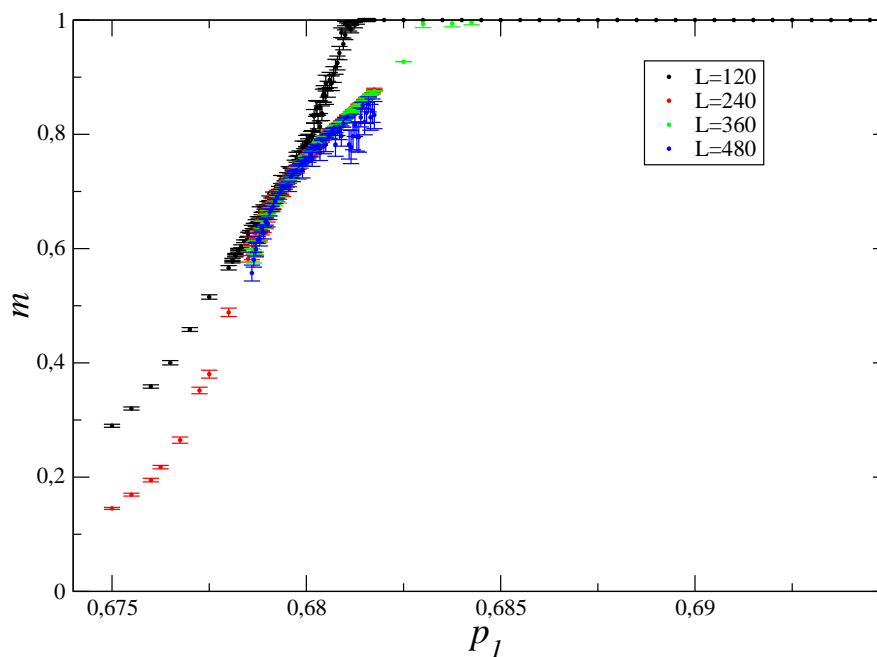


Figura 5.6: Curvas de magnetização no parâmetro  $p_2 = 1$ .

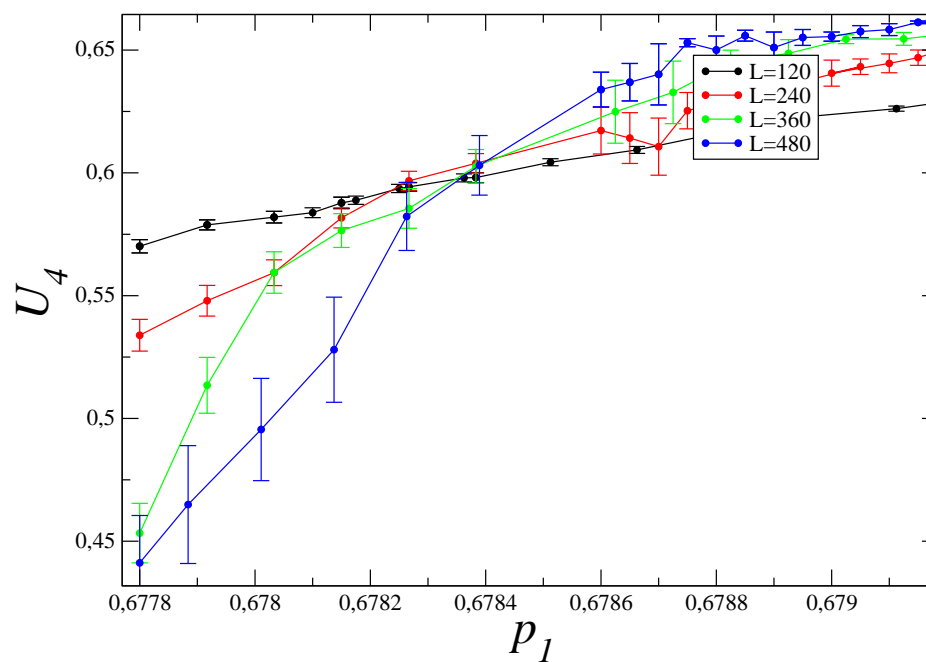


Figura 5.7: Cumulante de quarta ordem em  $p_2 = 1$ . O cruzamento determina o ponto crítico da quebra espontânea de simetria. Nesse caso,  $p_1^* = 0,67841(6)$  e  $U_4(p_1^*) = 0,61(2)$ .

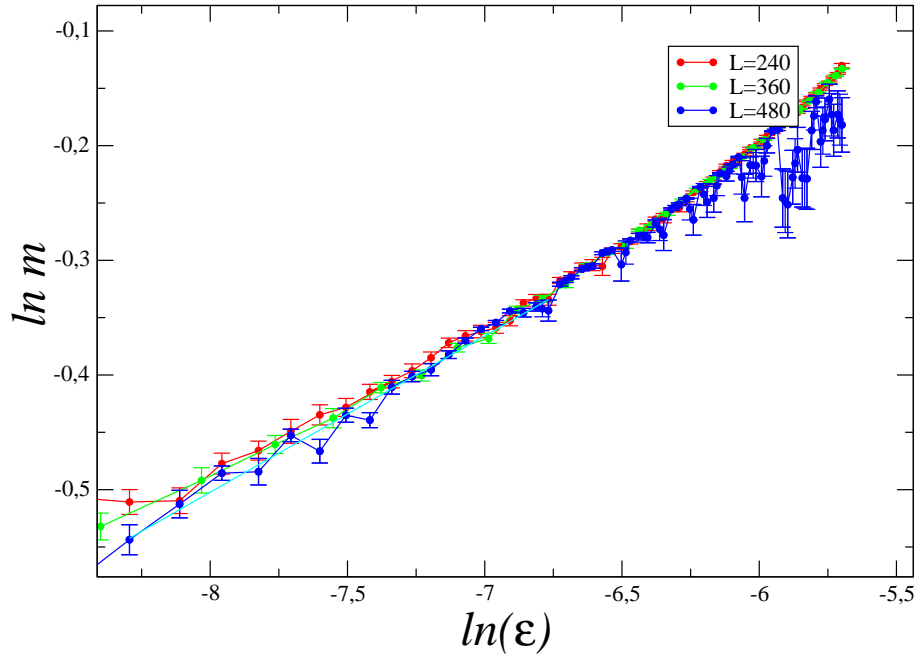


Figura 5.8: Ajuste para determinação do expoente  $\beta$ . A curva  $L = 480$  exibiu um valor  $\beta = 0,13(1)$  compatível com a classe de universalidade do modelo de Ising.

## 5.5 Resultados na linha $p_2 = 0,90$

Na figura 5.9 são apresentadas as curvas de magnetização para  $p_2 = 0,90$  em  $L = 160, 320$  e  $480$ . O ponto crítico foi estimado em  $p_1^* = 0,7224(3)$ . A curva do tamanho  $L = 160$  não participou do cruzamento (figura 5.10), é

possível que seja um efeito da configuração absorvente.

Utilizando os dados do tamanho  $L = 480$  de sistema determinamos o expoente  $\beta$  para esta parâmetro:  $\beta = 0,11(2)$  (figura 5.11). Valor este de acordo com a classe de universalidade do modelo de Ising.

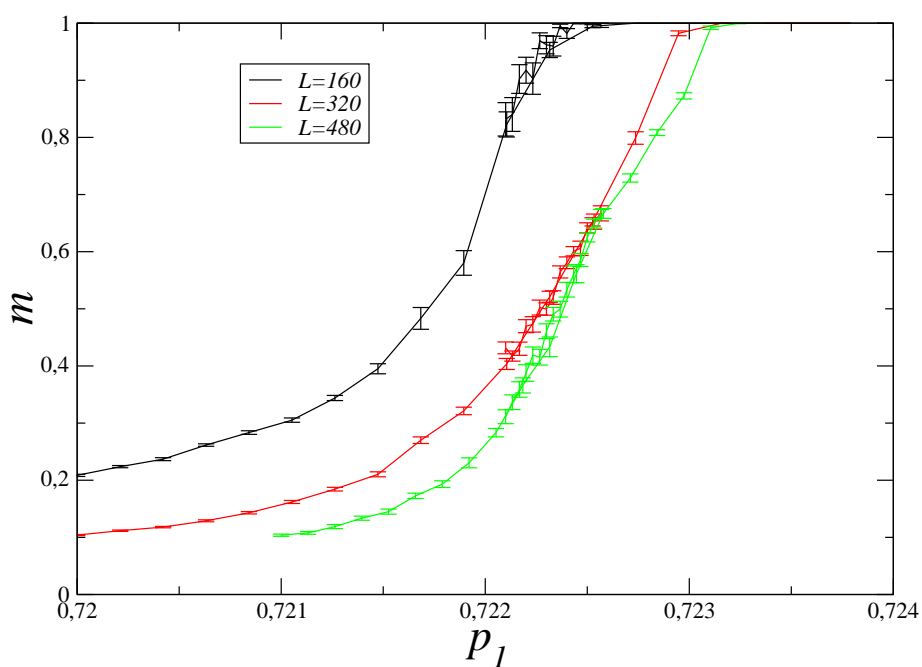


Figura 5.9: Curvas de magnetização no parâmetro  $p_2 = 0,90$ .

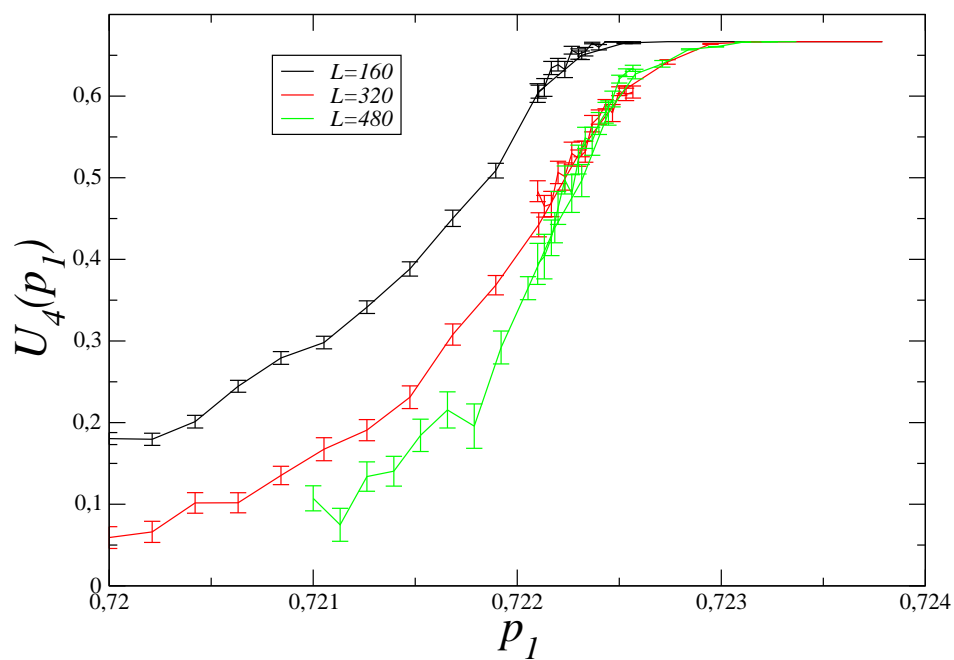


Figura 5.10: Cumulante de quarta ordem em  $p_2 = 0,90$ . O cruzamento determina o ponto crítico da quebra espontânea de simetria. O ponto crítico encontrado foi  $p_1^* = 0,7224(3)$  e  $U_4(p_1^*) = 0,58(5)$ .

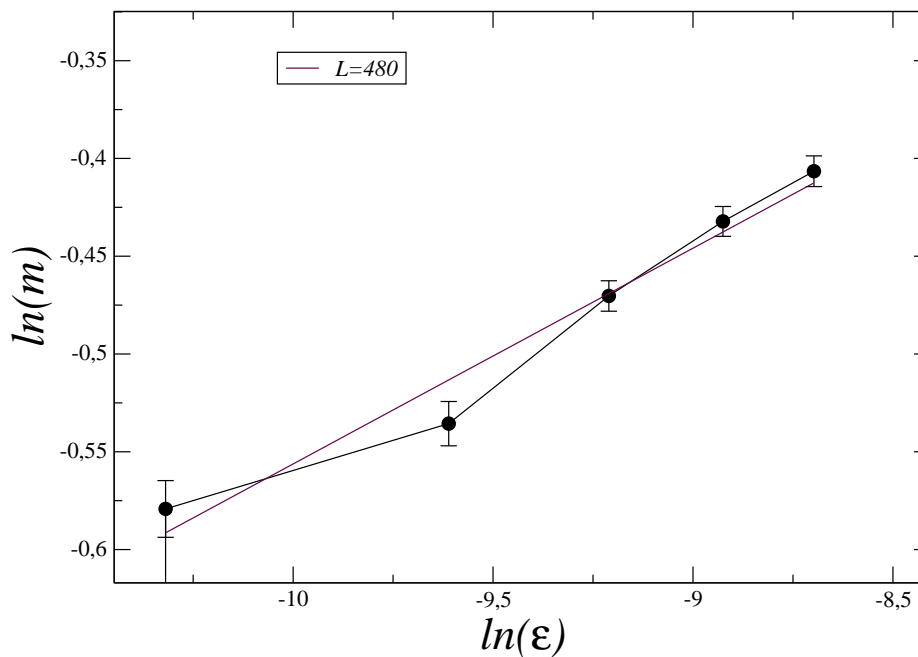


Figura 5.11: Ajuste para determinação do expoente  $\beta$ . A curva  $L = 480$  exibiu um valor  $\beta = 0,11(2)$  compatível com a classe de universalidade do modelo de Ising.

## 5.6 Transição de segunda ordem da classe DP

- Resultados na linha  $p_2 = 1$ .

A caracterização da transição do tipo da percolação direcionada em  $p_2 = 1$  foi feita a partir do expoente estático  $\beta$  e de simulações dependentes do tempo (expoente dinâmico  $\eta$ ).

Os resultados da magnetização (figura 5.12) foram obtidos utilizando 40 réplicas em cada ponto, descartando os primeiros 400.000 passos de Monte Carlo e utilizando os 400.000 pontos seguintes para compor a média.

Na figura 5.13 é mostrado o ajuste  $\ln(1 - m) \times \ln \epsilon$  que determina o expoente  $\beta$ . o resultado encontrado foi  $\beta = 0,56(3)$  que é compatível com a classe de universalidade da percolação direcionada. O ponto crítico utilizado foi  $p_1^* = 0,6828(2)$ .

Nas simulações dependentes do tempo foram utilizadas 41 realizações com 30.000 cada (figura 5.14). Assim, foi construído um histograma (figura 5.15) dos expoentes  $\eta$  de cada realização. Foi encontrado o valor  $\eta = 0,226(4)$  compatível com a classe da percolação direcionada.



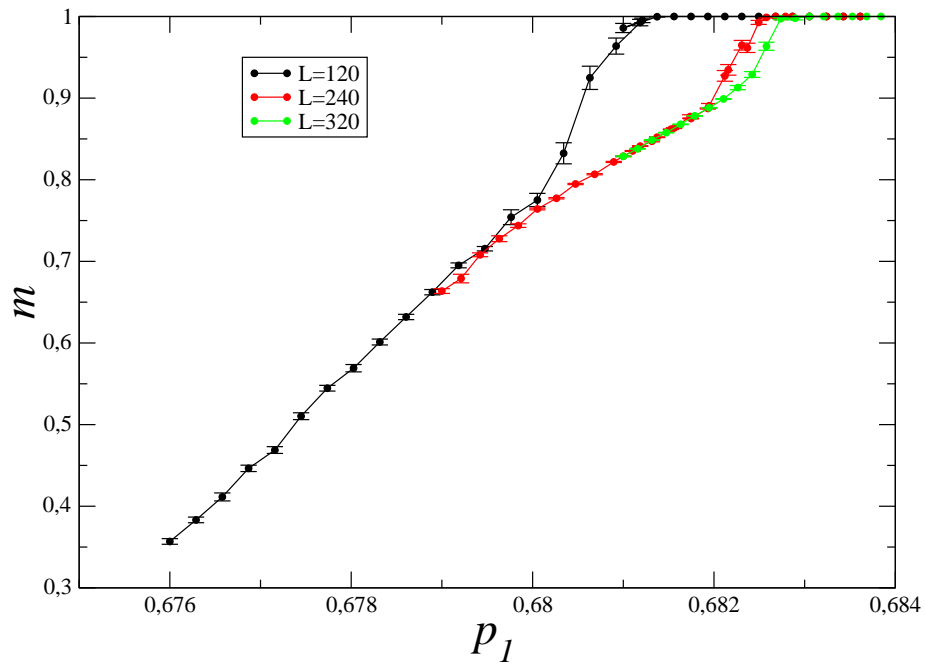


Figura 5.12: Magnetização em função do parâmetro de controle  $p_1$  para  $p_2 = 1$ . Cada ponto representa uma média utilizando 40 realizações.

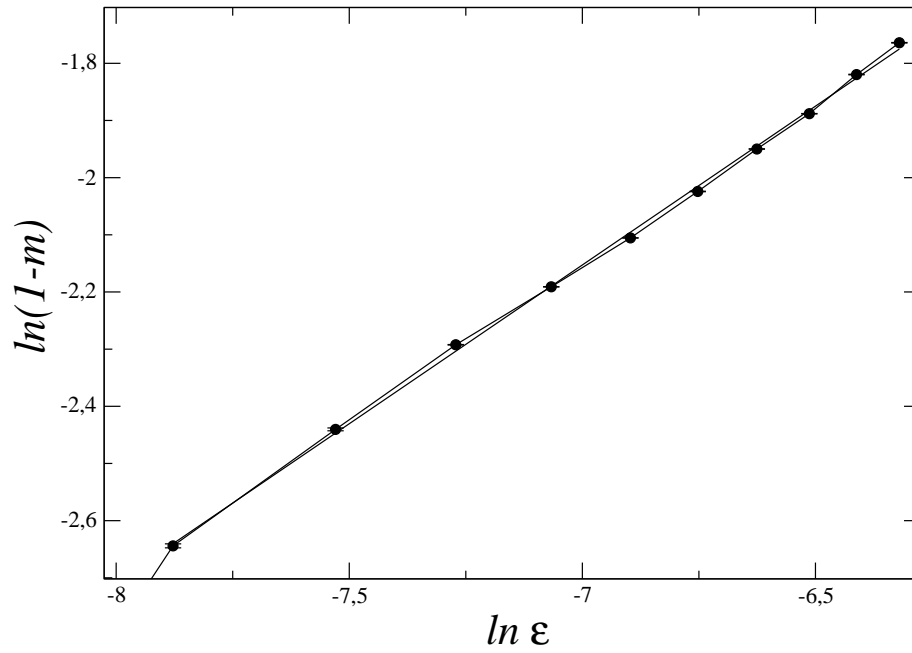


Figura 5.13: Ajuste  $\ln(1 - m) \times \ln(\epsilon)$  para a determinação do expoente  $\beta$ . O resultado encontrado foi  $\beta = 0,56(3)$ .

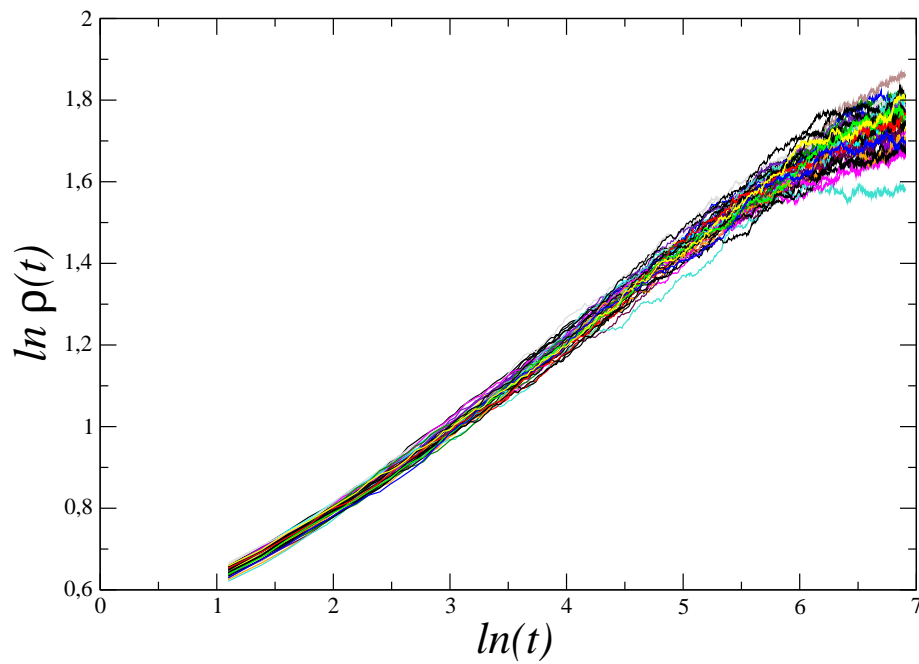


Figura 5.14: Curvas de  $\ln \rho(t) \times \ln(t)$  com parâmetros  $p_2 = 1$  e  $p_1 = 0,6835$  (parâmetro crítico da transição o estado absorvente). Cada curva representa a média de 30000 réplicas. Total de 41 curvas.

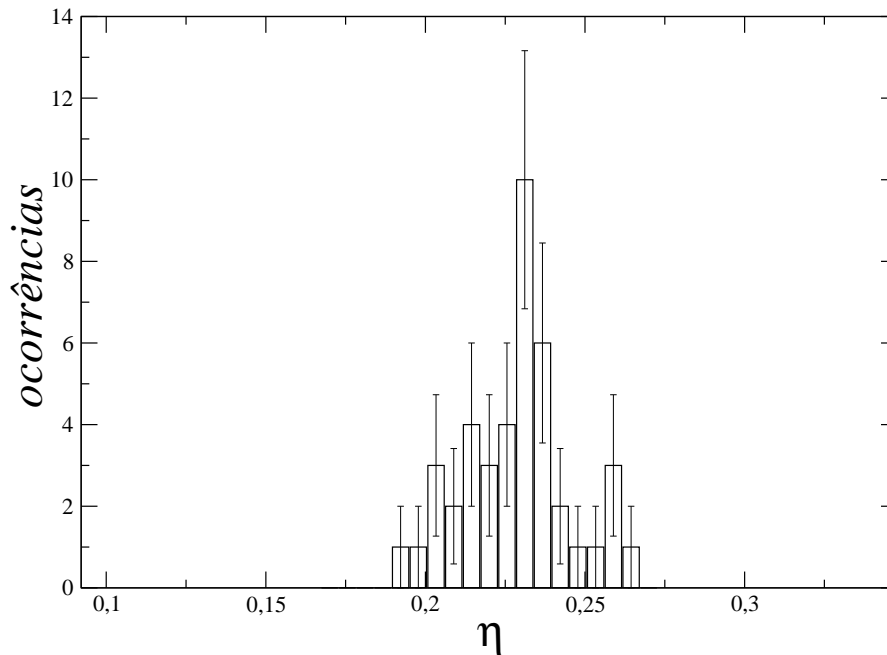


Figura 5.15: Histograma dos 41 valores para  $\eta$  encontrados a partir das curvas mostradas na figura 5.14. O resultado final é  $\eta = 0,226(4)$ .

- Resultados na linha  $p_2 = 0,90$ .

Para determinar o expoente  $\eta$  utilizamos simulações dependentes do tempo no ponto crítico estimado  $p_1^* = 0,7230(1)$ . A partir de 9 simulações (com 42.000 realizações cada) mostradas na figura 5.16 foi gerado um histograma com 9 expoentes  $\eta$  (figura 5.17). O resultado foi  $\eta = 0,220(7)$ , compatível com a classe da percolação direcionada.

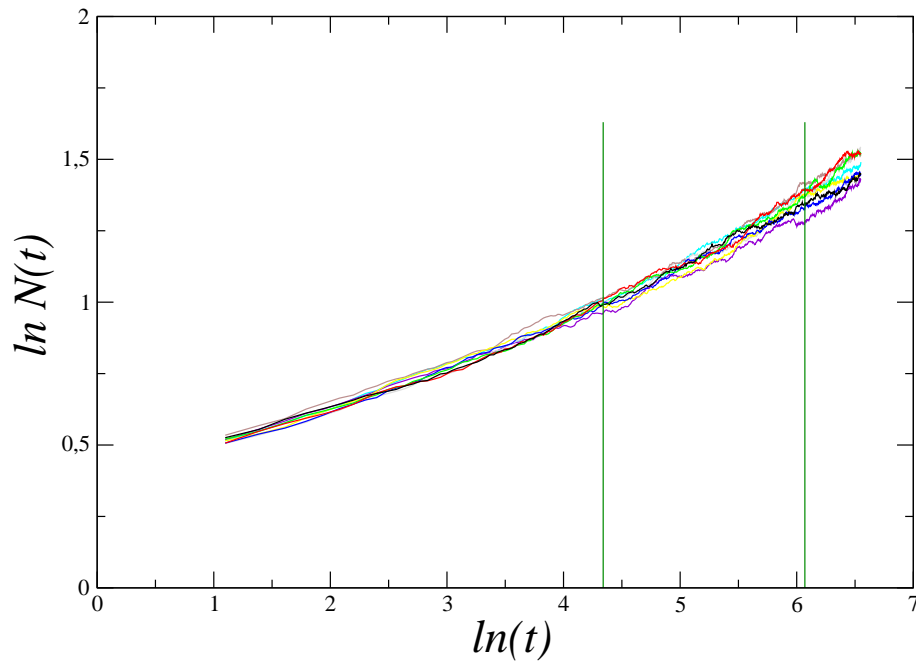


Figura 5.16: Resultado de 9 simulações dependentes do tempo em  $p_2 = 0,90$  e  $p_1 = 0,723$ . O resultado de cada simulação é obtido através de uma média de 42000 realizações. As linhas verticais em verde denotam a janela utilizado na regressão linear.

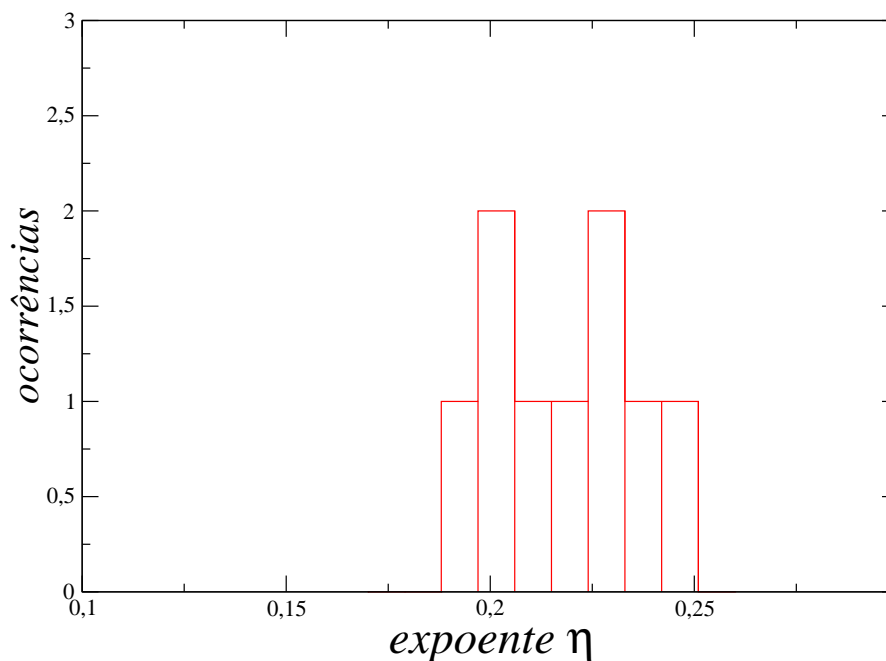


Figura 5.17: Histograma dos expoentes  $\eta$  encontrados nas 9 simulações dependentes do tempo. O resultado final foi  $\eta = 0,220(7)$  compatível com a transição DP.

## 5.7 Transição de primeira ordem

A caracterização desta transição foi realizada a partir das curvas de magnetização, resultados de finite-size scaling no ponto crítico e a série temporal da densidade de interfaces.

As curvas de magnetização são mostradas na figura 5.18 onde foi estimado

o ponto crítico  $p_1^* = 0,8941(3)$ . Em cada ponto foram utilizadas 40 réplicas com 800.000 passos de Monte Carlo de execução onde os 400.000 primeiros são descartados como transiente.

A figura 5.19 mostra a suscetibilidade magnética. A partir dos picos na curva de cada tamanho de sistema foi feito o ajuste  $\ln \chi_{\text{máx}} \times \ln(L)$ . Esse ajuste permite observar o valor de um expoente “a”:  $\chi_{\text{máx}} \sim L^a$ . Se a transição de primeira ordem for crítica como a transição do modelo do Votante esse expoente “a” será igual a  $\gamma/\nu_{\perp}$ . Se a transição for de primeira ordem e não-crítica esse expoente “a” terá valor igual à dimensão da rede. No caso da rede hexagonal e dos expoentes  $\gamma$  e  $\nu_{\perp}$  da transição do modelo do Votante, esses valores são iguais:  $d = 2$  e  $\gamma/\nu_{\perp}$ . Logo o resultado do expoente  $a = 2$  (figura 5.20) caracteriza a transição como de primeira ordem somente.

A determinação do tipo de transição de fase foi feita a partir da série temporal da densidade das interfaces  $\rho(t)$ . O ajuste mostrado na figura 5.21 exhibe a assinatura de uma transição como a do modelo do Votante no parâmetro crítico:  $\rho(t) \times 1/\ln(t)$ . As simulações ocorreram com tamanho de sistema  $L = 420$  e 12.000 réplicas cada curva.

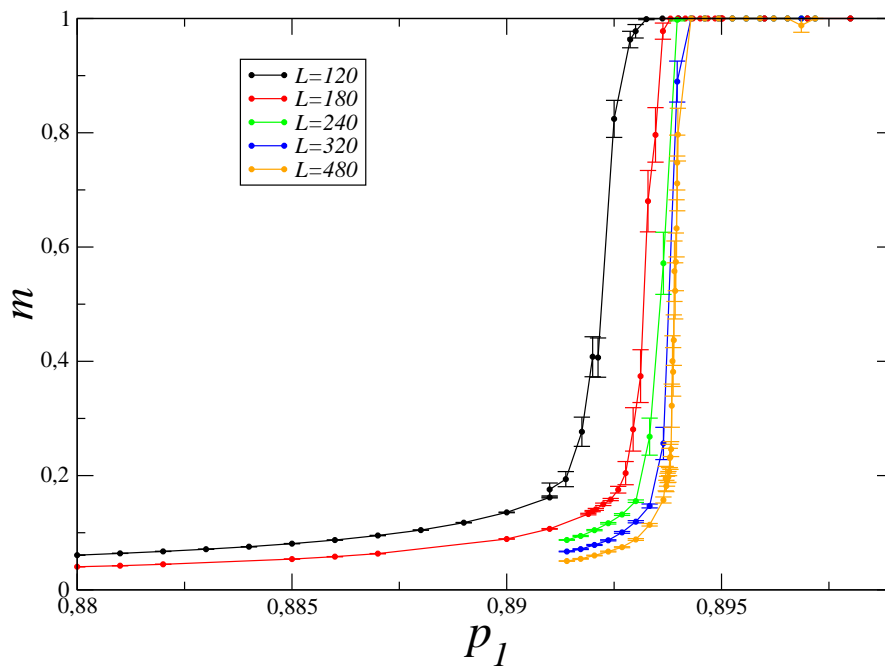


Figura 5.18: Curvas de magnetização na linha  $p_2 = 0,55$ .



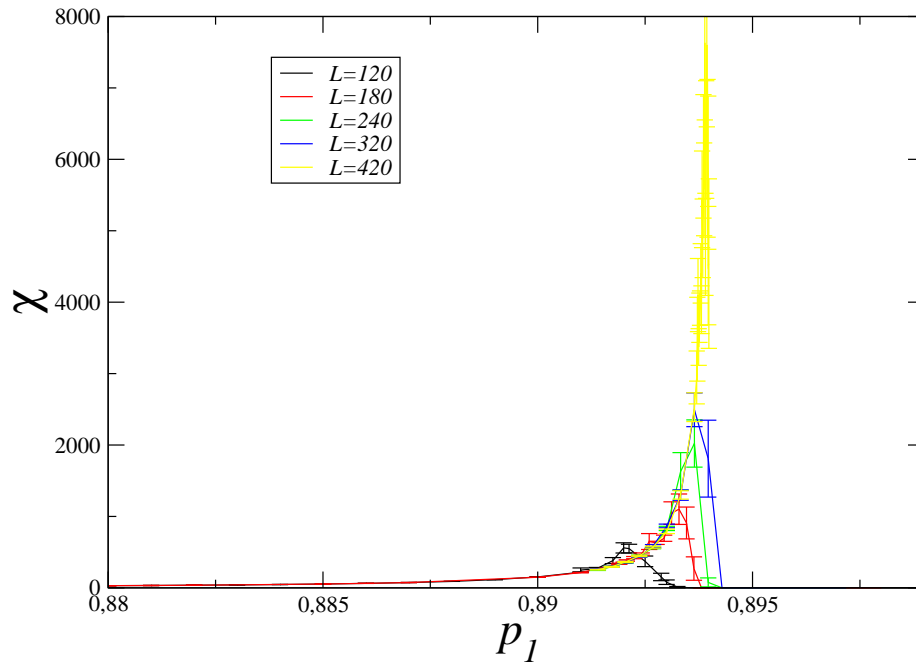


Figura 5.19: Suscetibilidade magnética na linha  $p_2 = 0,55$ .

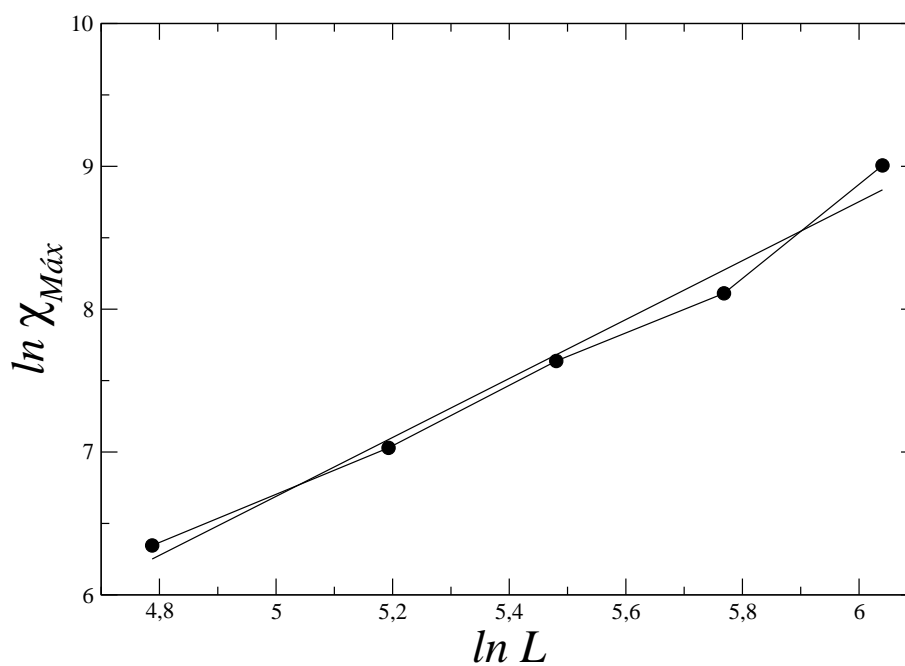


Figura 5.20: Ajuste  $\ln \chi \sim \ln(L)$  para obtenção do expoente associado ao finite sizing scaling. O resultado compatível com 2 denota o caráter de primeira ordem (não necessariamente crítica) da transição.

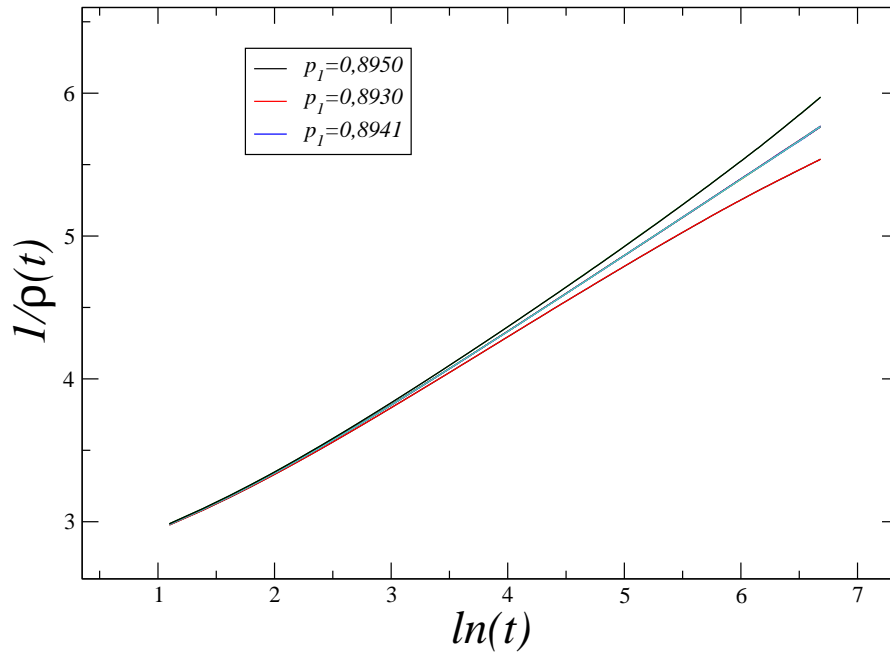


Figura 5.21: Série temporal da densidade das interfaces no parâmetro crítico e na vizinhança. No parâmetro crítico o ajuste  $1/\rho(t) \times \ln(t)$  se comporta como uma reta, caracterizando a transição de primeira ordem do tipo do modelo do Votante.

# Capítulo 6

## Resumo e discussão dos resultados do modelo UD-ABS

### 6.1 Rede Hexagonal

Neste capítulo será mostrada uma síntese dos resultados de simulação do modelo UD-ABS na rede hexagonal e na rede cúbica.

- Diagrama de fases:

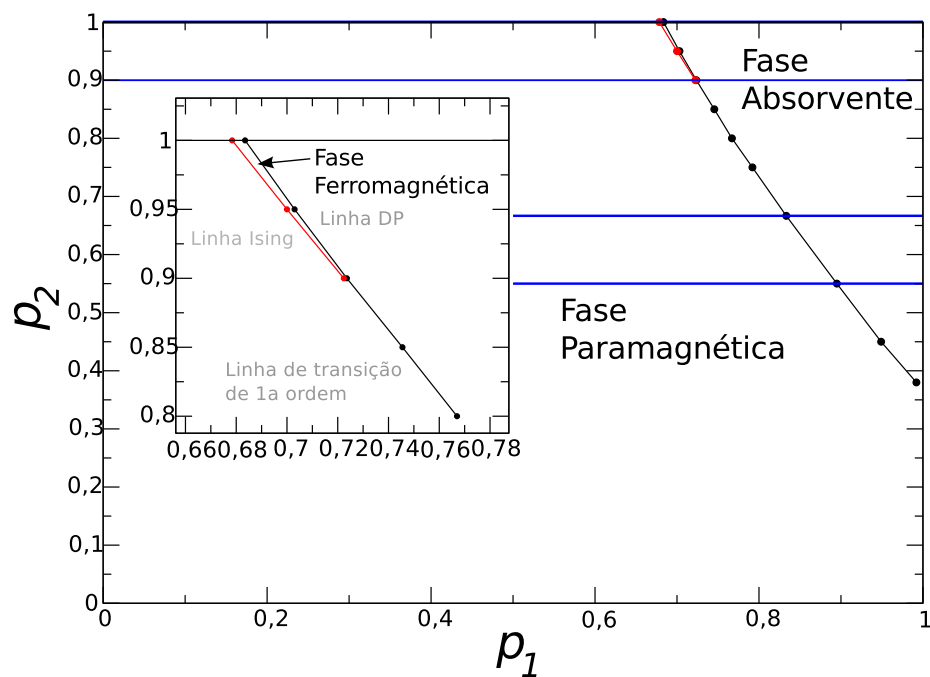


Figura 6.1: Diagrama de fases do modelo. O modelo exibe as fases: paramagnética, ferromagnética e absorvente. Em zoom, a fase ferromagnética. As linhas horizontais em azul correspondem aos resultados mostrados na seção 5.

Linhas de transição:

1. linha de transição de segunda ordem da fase paramagnética para a fase ferromagnética pertencente à classe de universalidade da transição do modelo de Ising;

$p_2$	$p_1^*$	$U_4^*$	$\beta$
1	0,6784(1)	0,61(1)	0,13(1)
0,9	0,7224(3)	0,58(5)	0,11(2)

Tabela 6.1: Resultados da transição da fase paramagnética para a fase ferromagnética do Modelo UD-ABS na rede hexagonal. O valor  $p_1^*$  representa o valor encontrado do ponto crítico em relação ao parâmetro  $p_2$  em questão.

- linha de transição de segunda ordem da fase ferromagnética para a fase absorvente compatível com a classe de universalidade da percolação direcionada;

$p_2$	$p_1^*$	$\beta$	$\eta$
1	0,6828(2)	0,56(3)	0,226(4)
0,9	0,7230(1)	—	0,220(7)

Tabela 6.2: Resultados da transição da fase ferromagnética para a fase absorvente do Modelo UD-ABS na rede hexagonal. O valor  $p_1^*$  representa o valor encontrado do ponto crítico em relação ao parâmetro  $p_2$  em questão.

- Linha de transição de primeira ordem.

A linha de transição de primeira ordem foi considerada compatível com a transição crítica do modelo do Votante. Para isso foi considerada a “assinatura”  $\rho(t) \times 1/\ln(t)$  do modelo do Votante com resultado mostrado na figura 5.21 (página 131).

## 6.2 Rede cúbica

Diagrama de fases:

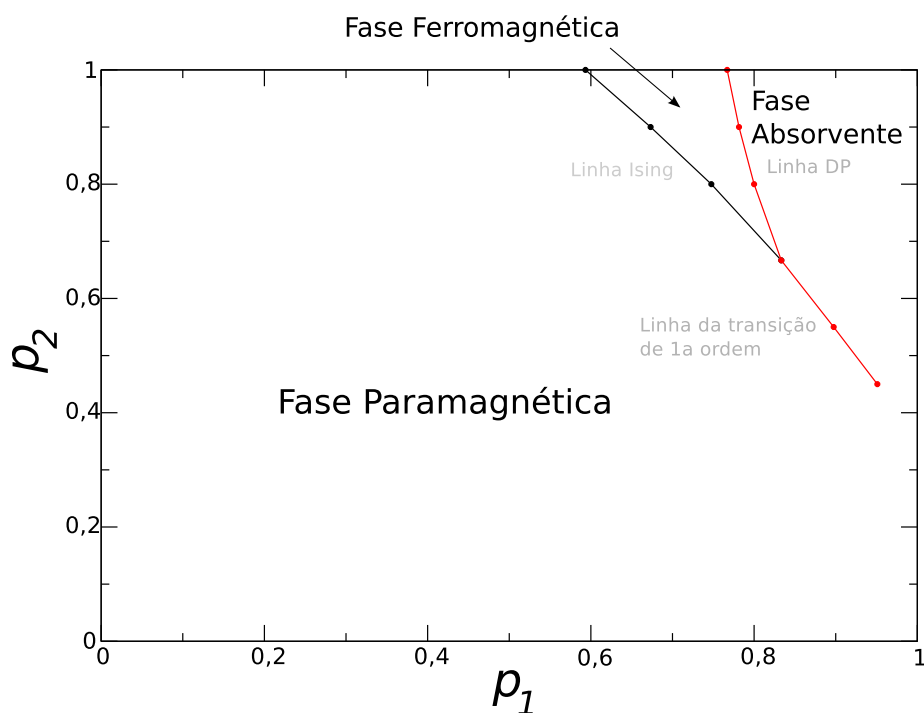


Figura 6.2: Diagrama de fases do modelo na rede cúbica. O modelo exibe as fases: paramagnética, ferromagnética e absorvente.

Linhas de transição:

1. Linha de transição de segunda ordem da fase paramagnética para a fase ferromagnética pertencente à classe de universalidade da transição do modelo de Ising;

$p_2$	$p_1^*$	$U_4^*$	$\beta$	$\gamma$
1	0,5934(1)	0,49(1)	0,30(1)	1,34(2)
0,8	0,74760(2)	0,47(2)	0,328(3)	1,25(1)

Tabela 6.3: Resultados da transição da fase paramagnética para a fase ferromagnética do Modelo UD-ABS na rede cúbica. O valor  $p_1^*$  representa o valor encontrado do ponto crítico em relação ao parâmetro  $p_2$  em questão.

2. Linha de transição de segunda ordem da fase paramagnética para a fase absorvente compatível com a aclasse de universalidade da percolação direcionada;

$p_2$	$p_1^*$	$\beta$
1	0,767(1)	0,80(2)
0,8	0,800(1)	0,81(1)

Tabela 6.4: Resultados da transição da fase paramagnética para a fase ferromagnética do Modelo UD-ABS na rede hexagonal. O valor  $p_1^*$

3. Linha de transição de primeira ordem.

Com os resultados obtidos não foi possível determinar se esta transição de primeira ordem tem comportamento crítico.

Os resultados de simulação do modelo UD-ABS em duas e três dimensões mostraram um diagrama de fases com três fases: paramagnética, ferromagnética e absorvente. No caso da rede hexagonal, para ser observada



a fase ferromagnética é preciso realizar as simulações com bastante resolução no parâmetro de controle e com tamanho de sistema maior que  $480 \times 480$  devido à proximidade das linhas de transição de segunda ordem.

Os resultados também mostraram como é possível separar uma transição de primeira ordem da classe do modelo do Votante em duas transições de segunda ordem (Ising e DP) através da manipulação de dois parâmetros de controle relacionados ao ruído interfacial. Este resultado ainda reforça a concepção da transição do modelo do Votante como a aglutinação de uma transição de quebra espontânea de simetria (Ising) com uma transição para uma fase absorvente (DP).

# Capítulo 7

## Outro “splitting”

Os resultados do modelo UD-ABS mostrados nos capítulos 4 e 5 explicitam que alterando as regras nas interfaces dos clusters pode-se separar o ponto crítico do modelo do votante em dois pontos críticos: um ponto crítico de quebra espontânea de simetria e outro ponto crítico da queda em um dos estados absorventes, uma transição da classe DP. Estes resultados reforçam que no ponto crítico do modelo do votante ocorrem esses dois fenômenos simultaneamente: a quebra espontânea de simetria e a queda no estado absorvente.

Esses resultados motivam a busca por outras separações em modelos com algumas características diferentes do modelo UD-ABS. Existem outros pontos críticos onde ocorre dois fenômenos no mesmo parâmetro, porém mostraremos agora o estudo da separação de um ponto crítico do modelo do votante no caso do modelo Glauber linear. Levando em conta a existência

do ponto crítico compatível com o modelo do votante nos modelos Glauber linear e UD-ABS as diferenças entre esses dois modelos pode levar à melhor compreensão da natureza do ponto crítico do modelo do votante.

## 7.1 Modelo Glauber linear alterado

Como mostrado na seção 2.2, existe um modelo chamado Glauber linear que exibe uma transição do tipo do modelo do Votante.

A questão de ser possível ocorrer o *splitting* desse ponto crítico do modelo do votante se torna relevante devido à diferenças fundamentais do modelo Glauber linear em relação a modelos onde já foram mostrados essas separações da transição do modelo do votante. Essas características fundamentais que diferenciam o modelo Glauber linear do modelo UD-ABS são:

1. Ausência de estados absorventes;
2. “Flutuação” dentro dos clusters (*bulk noise*).

Aprendemos com o modelo UD-ABS que para melhor observar a separação dos pontos críticos Ising e DP precisamos aumentar o parâmetro  $p_2$  até o limite  $p_2 = 1$ . O parâmetro  $p_2$  é utilizado quando o módulo do somatório  $S$  dos estados dos vizinhos do sítio a ser atualizado é igual a 2, isso na rede hexagonal. Dessa forma podemos utilizar o modelo Glauber linear na rede hexagonal para o número de coordenação ser 6 da mesma maneira que o modelo UD-ABS e aplicar a situação do parâmetro  $p_2 = 1$ , resumindo:

1. Modelo Glauber linear na rede hexagonal;
2. Regras usuais do modelo Glauber linear. Um sítio escolhe um vizinho aleatório para adotar como estado, com probabilidade  $\mu$  este estado é confirmado, com o complemento  $1 - \mu$  o sítio  $i$  adota o estado contrário do vizinho escolhido;
3. A exceção à regra é adotada quando a somatória dos sítios vizinhos ao sítio a ser atualizado  $i$  é igual a 2. Nesse caso o sítio  $i$  assume o valor da maioria dos vizinhos com probabilidade 1 (análogo ao  $p_2 = 1$  do modelo UD-ABS).

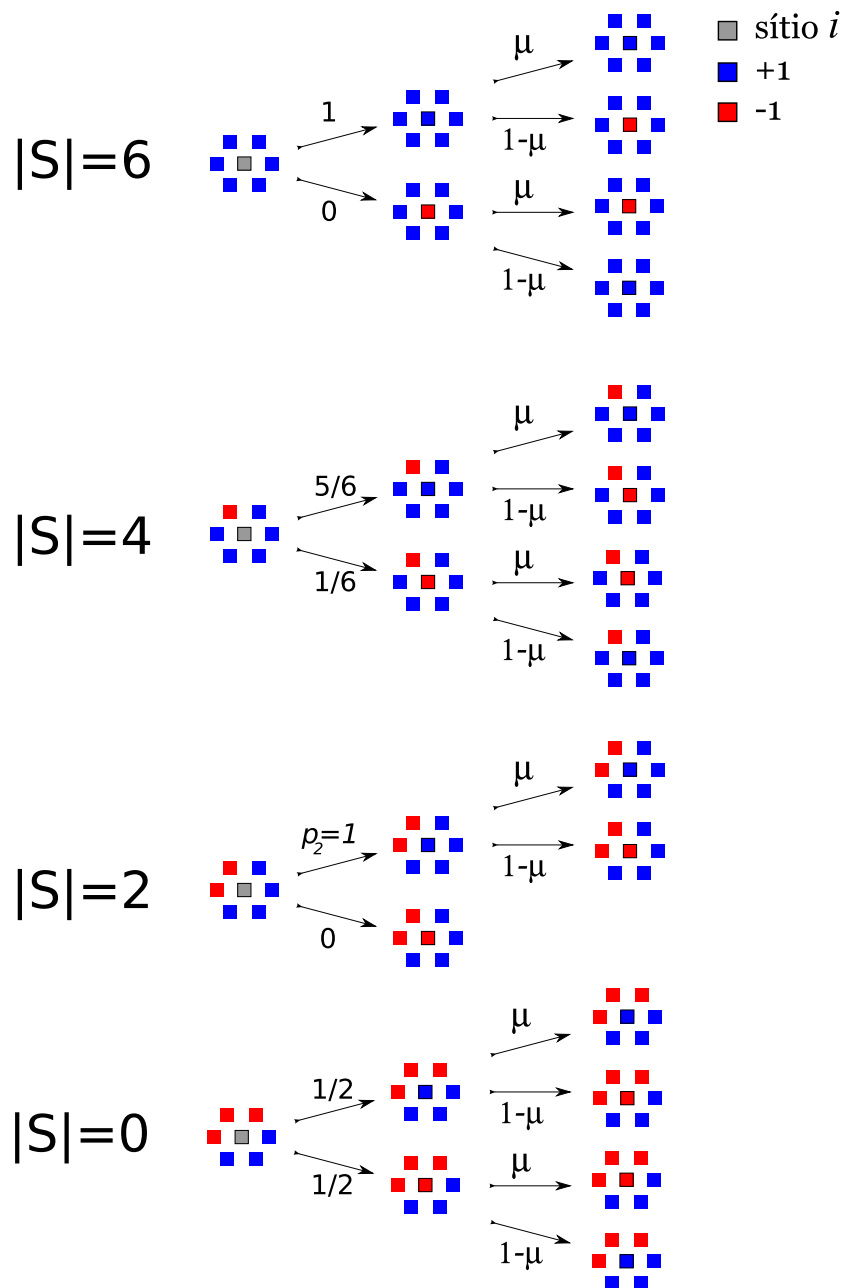


Figura 7.1: Regras do modelo Glauber linear modificado. São as mesmas regras do Glauber linear exceto na situação  $|S| = 2$  em que o sítio a ser atualizado toma obrigatoriamente o estado da maioria dos vizinhos.

## 7.2 Resultados de simulação

Para o melhor entendimento da comparação entre os resultados do modelo Glauber linear alterado e o Glauber linear usual apresentaremos primeiramente resultados de simulação do modelo Glauber linear como é conhecido usualmente.

- Glauber Linear usual

Para a caracterização da transição de fase, utilizamos o scaling da suscetibilidade com a correção logarítmica:

$$\chi \sim \frac{1}{\epsilon \ln \epsilon}, \quad (7.1)$$

onde se utilizarmos a forma:

$$\underbrace{\frac{1}{\chi}}_y \sim \underbrace{\epsilon \ln \epsilon}_x \quad (7.2)$$

será obtido uma reta.

Os resultados são apresentados nas figuras 7.2, 7.3 e 7.4.

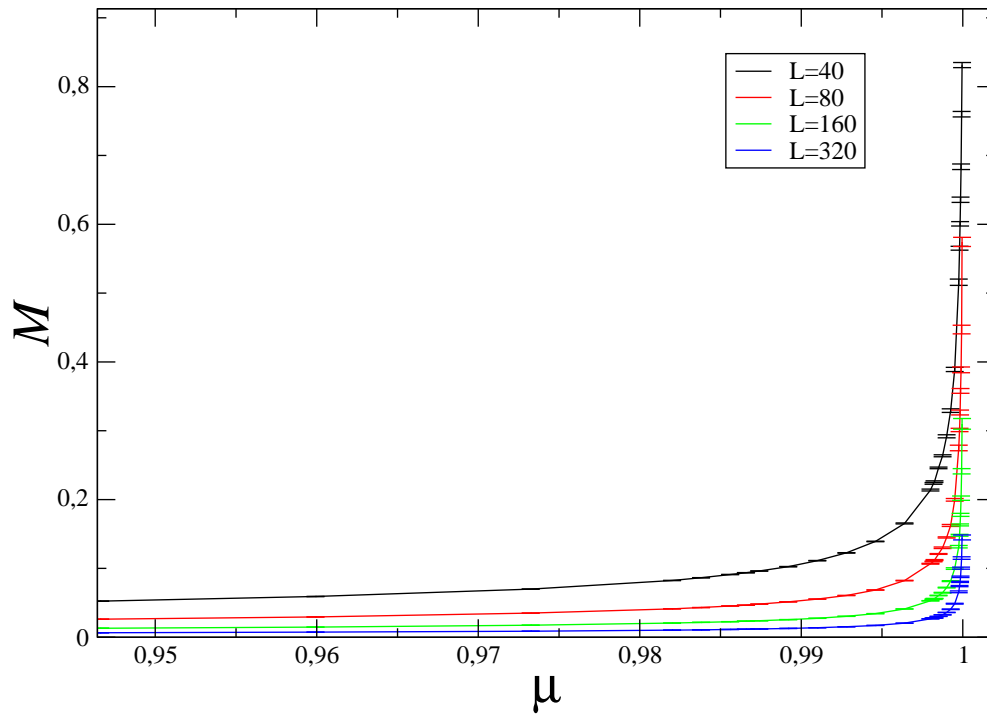


Figura 7.2: Magnetização do Glauber linear na rede hexagonal. Em  $\mu = 1$  o modelo do Votante é recuperado.

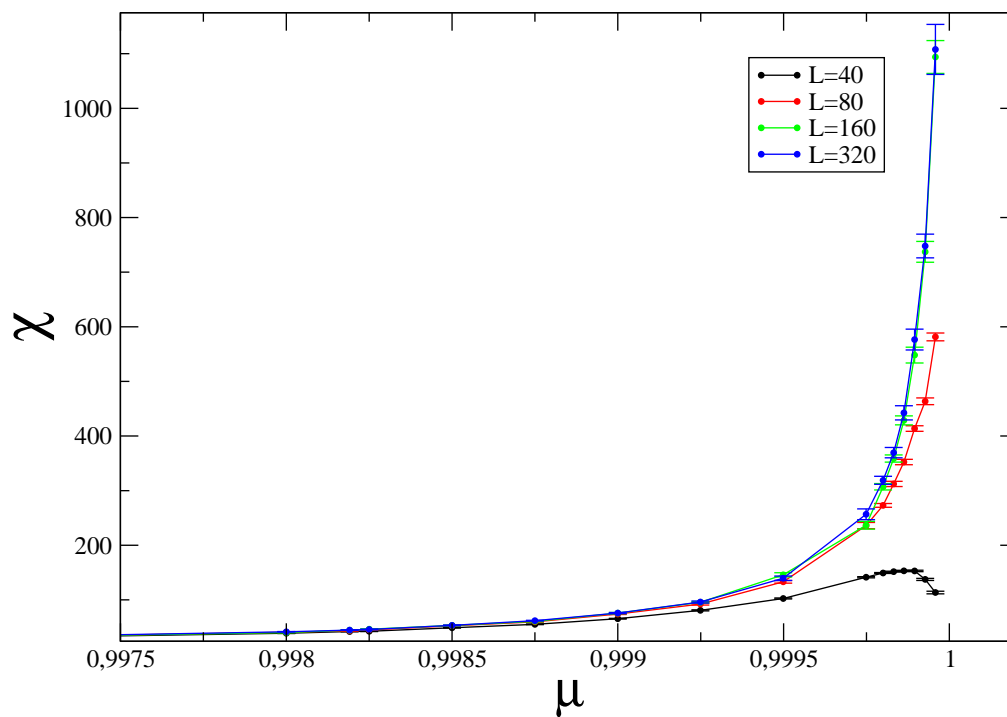


Figura 7.3: Suscetibilidade do modelo Glauber linear na rede hexagonal.



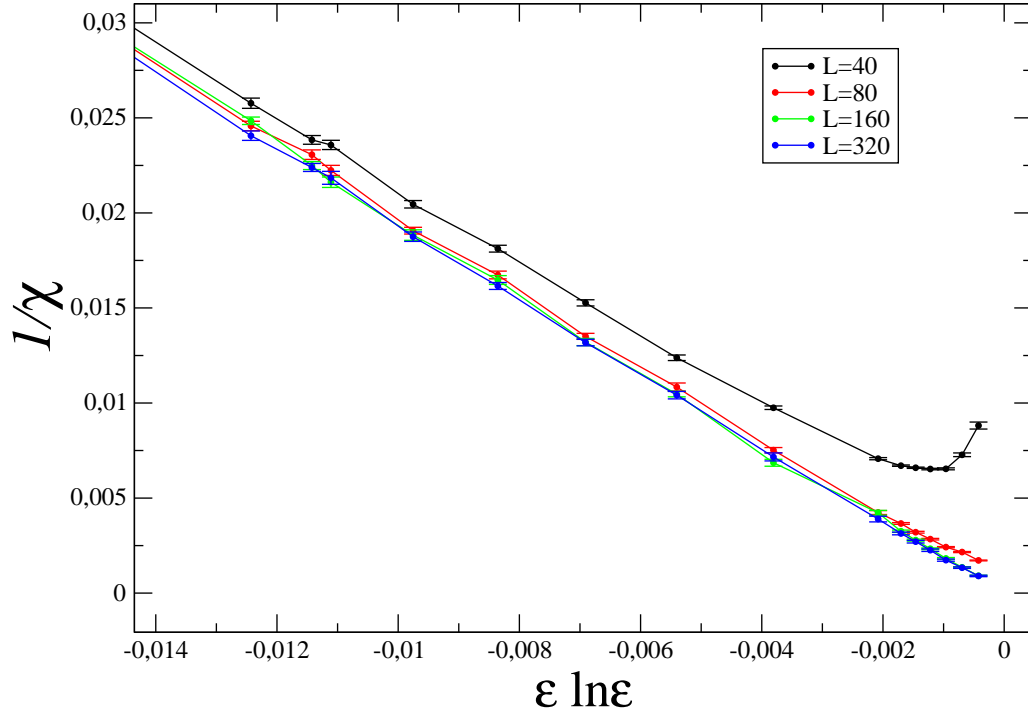


Figura 7.4: Suscetibilidade em função de  $\epsilon$  com correção logarítmica.

Uma característica da transição do Glauber linear (transição do modelo do Votante) é a necessidade de muita proximidade com o ponto crítico ( $\mu = 1$ ). Isso é devido à forma como o comprimento de correlação  $\xi$  diverge com  $\mu \rightarrow 1$ . No caso da transição do modelo do Votante,  $\xi \sim \epsilon^{-1/2}$  ( $\nu_{\perp} = 1/2$ ).

- Resultados do Glauber Linear Alterado

As curvas da magnetização na figura 7.5 mostram uma transição em  $\mu_c = 0,9524(3)$ . A afirmação da ocorrência de uma transição é reforçada pela superposição das curvas com diferentes tamanhos de rede quando  $\mu > \mu_c$ .

A caracterização da transição de fase em  $\mu = 0,9524(3)$  foi feita através do expoente  $\gamma$  da suscetibilidade magnética ( $\chi \sim \epsilon^{-\gamma}$ ) e o cruzamento das curvas do cumulante de quarta ordem em vários tamanhos de rede.

A figura 7.6 mostra a suscetibilidade através de curvas com tamanhos diferentes de rede. O pico da suscetibilidade em  $\mu_c = 0,9524(3)$  sugere a ocorrência de uma transição de fase (?). A figura 7.8 mostra a determinação do expoente  $\gamma$ . O resultado  $\gamma = 1,74(1)$  mostra que a transição pertence à classe de universalidade da transição de quebra espontânea de simetria do modelo de Ising (valor de referência  $\gamma = 7/4$ ). Na figura 7.7 é mostrado o cruzamento dos cumulantes de quarta ordem que tem valor de  $0,624(5)$  também de acordo com o valor da classe Ising.

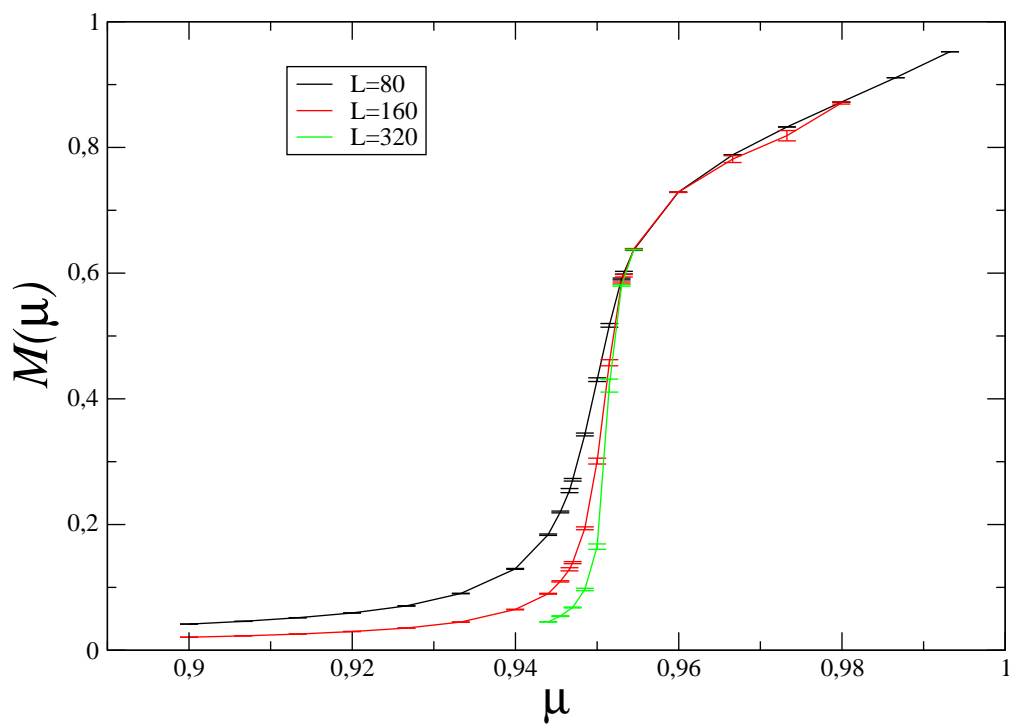


Figura 7.5: Magnetização do Glauber linear alterado na rede hexagonal. Em  $\mu = 1$  o modelo do Votante é recuperado.

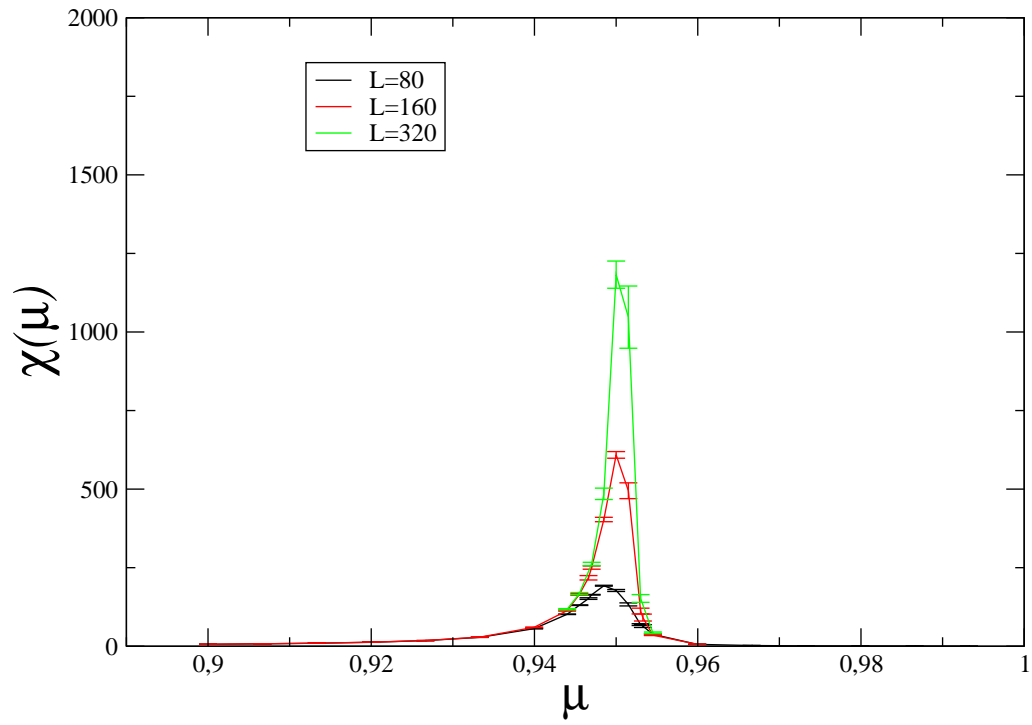


Figura 7.6: Suscetibilidade do modelo Glauber linear alterado na rede hexagonal.

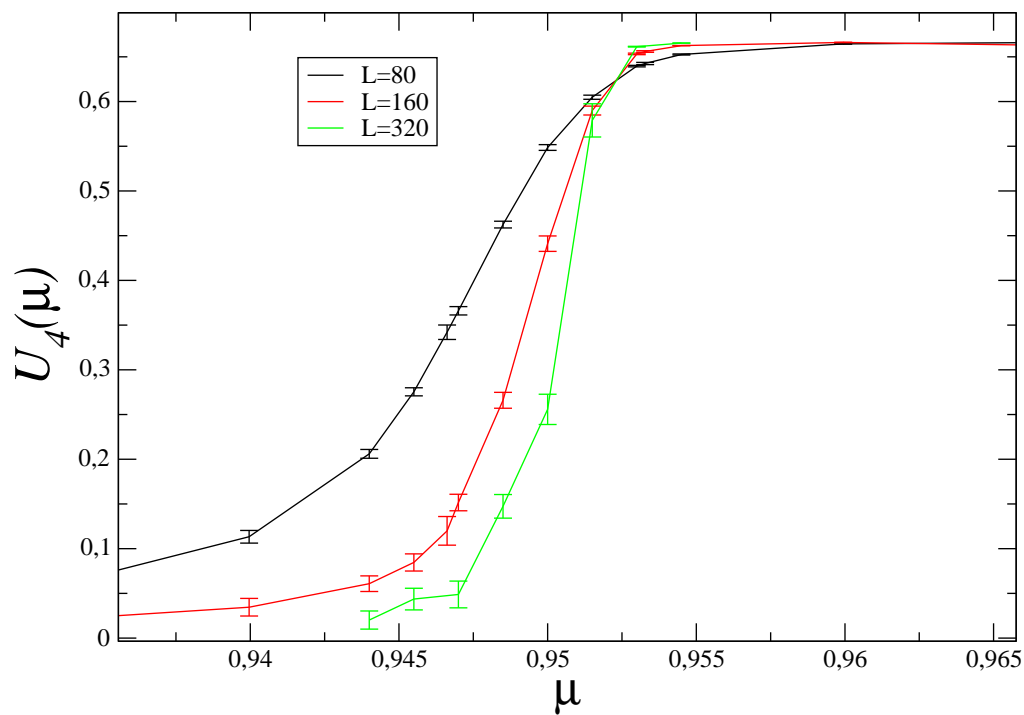


Figura 7.7: Cumulante de quarta ordem em função do parâmetro de controle  $\mu$ . Os resultados mostram um cruzamento em  $U_4(\mu_c) = 0,624(5)$  compatível com o modelo de Ising. O ponto crítico foi identificado como  $\mu_c = 0,9523(3)$ .

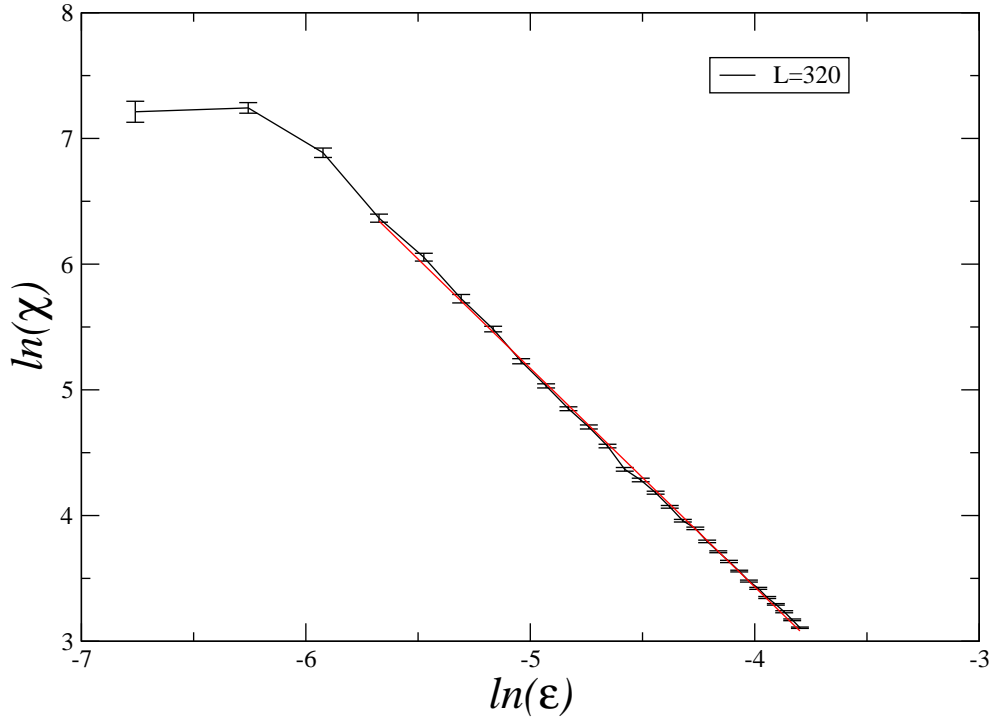


Figura 7.8: Determinação do expoente crítico  $\gamma$  através da relação  $\chi \sim \epsilon^{-\gamma}$ . O resultado  $\gamma = 1,74(1)$  é compatível com o expoente da classe de universalidade do modelo de Ising ( $\gamma = 7/4$ ).

Percebemos através dos resultados de simulação que tanto o modelo UD-ABS como o modelo Glauber Linear alterado compartilham uma transição de quebra espontânea de simetria compatível com a classe de universalidade do modelo de Ising quando o ponto crítico compatível com o modelo do Votante é separado. Porém, no lugar de uma transição para uma configuração

absorvente pertencente à classe da percolação direcionada, o modelo Glauber linear alterado exibe um ordenamento da rede conforme  $\mu \rightarrow 1$  que não é caracterizado como uma transição de fase.

### 7.3 Discussão

Na discussão dos ingredientes importantes para uma transição de fase do tipo do modelo do Votante temos que levar em consideração a transição do modelo Glauber linear que é sabido que pertence à classe de universalidade do modelo do Votante.

Algumas características da dinâmica do modelo Glauber linear acrescentam novas informações às possibilidades da ocorrência da transição do modelo do Votante, como por exemplo a ausência de configurações absorventes e a presença de “bulk-noise” ao contrário de uma dinâmica somente ruído interfacial.

A separação da transição do modelo do Votante através da manipulação das regras de interação do modelo Glauber linear (o modelo Glauber linear alterado) mostra que neste caso a transição do modelo do Votante é uma aglutinação de uma transição de quebra espontânea de simetria com uma tendência de um ordenamento global da rede na vizinhança de  $\mu = 1$  ao contrário do modelo UD-ABS onde em vez desse ordenamento, temos uma queda em um dos estados absorventes (uma transição DP). É importante mencionar que em  $\mu = 1$  não ocorre uma transição de fase no Glauber li-

near alterado. Supomos que o modelo forme um diagrama de fases como o mostrado na figura 7.9.

Os resultados do Glauber linear levam à reflexão sobre as principais características de uma transição crítica do modelo do Votante. Essas características devem ser compartilhadas entre o modelo UD-ABS e o Glauber linear já que os dois modelos exibem a transição crítica do Modelo do Votante.

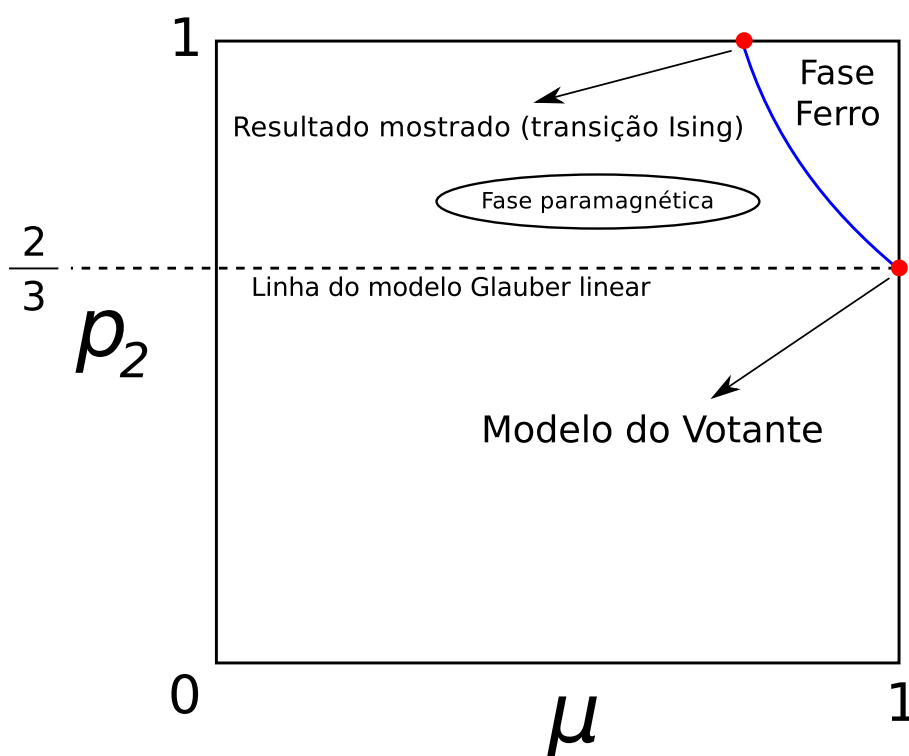


Figura 7.9: Diagrama de fases conceitual do modelo Glauber linear alterado em função dos parâmetros de controle  $p_2$  e  $\mu$ .

Percebemos através dos resultados de simulação que tanto o modelo UD-



---

ABS como o Glauber linear alterado compartilham uma transição de quebra espontânea de simetria do tipo Ising quando o ponto crítico do modelo do Votante é separado. Porém em vez de uma transição para uma configuração absorvente da classe DP, o modelo Glauber linear exibe um ordenamento da rede conforme  $\mu \rightarrow 1$  que não caracteriza uma transição de fase.

# Capítulo 8

## Conclusões

- Os resultados de simulação do modelo UD-ABS mostraram três regiões no diagrama de fases: uma fase paramagnética, uma fase ferromagnética e uma fase absorvente. A linha de transição que separa as fases paramagnética e ferromagnética é compatível com uma transição de quebra espontânea de simetria de acordo com o modelo de Ising. A linha de transição que separa as fases ferromagnética e absorvente têm comportamento e expoentes críticos como a transição para a fase absorvente da percolação direcionada. Na rede hexagonal, a linha de transição que separa as fases paramagnética e absorvente é de primeira ordem e é compatível com a transição do modelo do Votante. Na rede cúbica não foi possível determinar se a linha de transição de primeira ordem tem comportamento crítico.

- Resultados do modelo Glauber linear alterado.

É de conhecimento geral que o modelo Glauber linear exibe uma transição de primeira ordem do tipo do modelo do Votante em  $\mu = 1$ . Considerando a possibilidade da separação deste ponto crítico utilizamos os resultados produzidos pelo modelo UD-ABS como aprendizado para um possível procedimento de como observar a separação do ponto crítico. Utilizamos então o resultado do modelo UD-ABS que mostra no parâmetro  $p_2 = 1$  a maior separação entre os dois pontos críticos de segunda ordem e introduzimos este parâmetro no modelo Glauber linear, criando um novo modelo.

- Natureza do ponto crítico do modelo do Votante.

Os resultados do modelo UD-ABS em duas e três dimensões mostraram que a transição crítica de primeira ordem do modelo do Votante é resultado de dois fenômenos que ocorrem simultaneamente: a quebra espontânea de simetria e a queda do sistema no estado absorvente. Isso confirma a afirmação (cita referência) de que a transição do modelo do Votante é uma aglutinação destes dois fenômenos.

Porém, no caso do modelo Glauber linear alterado, o ponto crítico do modelo do Votante foi identificado como a aglutinação de uma transição de segunda ordem do tipo Ising e um ordenamento total da rede que ocorre em  $\mu = 1$  onde não ocorre uma transição de fase.

Se considerarmos que a transição da percolação direcionada é um caso específico de um ordenamento total da rede então podemos supor a conjectura de que na verdade a transição crítica do modelo do votante é a superposição de uma transição Ising de segunda ordem e um ordenamento total do sistema. No caso do modelo Glauber linear e o modelo Glauber linear alterado isso ocorre em  $\mu = 1$  onde os modelos se comportam como o modelo do Votante e o “bulk-noise” tem magnitude zero.

- Entendimento da transição de quebra espontânea do tipo Ising.

O fenômeno da transição de segunda ordem Ising é usualmente entendido como a competição entre a tensão superficial dos clusters e o “bulk-noise” [7]. No caso do modelo UD-ABS o “bulk-noise” não está presente e a transição Ising ocorre fazendo o ajuste dos parâmetros de controle  $p_1$  e  $p_2$ . Dessa forma a estabilidade da tensão superficial ocorre com a manipulação dos componentes do ruído interfacial exclusivamente.

Podemos dizer que nesse caso a transição de segunda ordem Ising ocorre pela estabilização da tensão superficial dos clusters através da competição de dois aspectos diferentes do ruído superficial representados pelos parâmetros  $p_1$  e  $p_2$ .

Sugestões para estudos futuros:

- Outras separações de pontos críticos;
- Estudo detalhado da função do ruído interfacial e do ruído relacionado ao “bulk-noise”. Por exemplo um modelo Glauber linear com um parâmetro que controla a intensidade do “bulk-noise” e outro parâmetro ligado à magnitude da tensão superficial.

# Capítulo 9

## Apêndice

### 9.1 Incertezas nos resultados

As incertezas apresentadas nos gráficos foram obtidas utilizando réplicas idênticas (a menos da semente dos números aleatórios) de cada simulação. Com isso é possível calcular a média, o desvio-padrão e o desvio-padrão da média do conjunto de dados gerados pelas réplicas. O resultado final é denotado pela média dessa distribuição e a incerteza corresponde ao desvio-padrão da média.

Sendo  $\hat{x}$  um vetor discreto com uma coleção de  $N$  valores correspondentes ao resultados de cada uma das réplicas, a média é calculada como

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i. \quad (9.1)$$

O desvio-padrão  $\sigma$  é calculado através de

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (9.2)$$

A incerteza de  $\bar{x}$  é denotada pelo desvio-padrão da média:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (9.3)$$

O desvio-padrão  $\sigma$  também tem uma expressão para a estimativa da sua incerteza, é dada por

$$S_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2(N-1)}}. \quad (9.4)$$

A expressão 9.4 para a incerteza do desvio-padrão de  $\hat{x}$  estabelece que para se obter uma incerteza de  $\sigma$  dez vezes menor que o valor de  $\sigma$  deve-se

utilizar aproximadamente  $N = 50$ , ou seja, 50 réplicas. Dessa forma, para uma boa precisão de  $\sigma$  utilizamos pelo menos 50 réplicas nas simulações caso o número de réplicas não seja especificado.



## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simples

A análise da estabilidade dos pontos-fixos no espaço de parâmetros do modelo envolve determinar os pontos-fixos (pontos-imagem nas quais a dinâmica não permite mais a evolução temporal para outro ponto-imagem) e posteriormente estudar como o sistema se comporta na vizinhança destes pontos-fixos.

Se existir uma equação diferencial que descreve a dinâmica de um sistema, como por exemplo

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (9.5)$$

podemos determinar os pontos-fixos descobrindo as raízes da equação  $f(x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ f(x) &= 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Determinados os pontos-fixos  $x_i^*$  ( $x_1^*, x_2^*, \dots$ ) o próximo passo é a linearização de  $f(x)$  na vizinhança dos pontos-fixos. Para isso é necessário desenvolver  $f(x)$  até o primeiro termo da sua série de Taylor em cada um dos pontos-fixos, ou seja,

## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simples

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_i^*} = f(x_i^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i^*} (x - x_i^*). \quad (9.7)$$

Com essa equação linearizada de  $dx/dt$  podemos compreender o comportamento da dinâmica em torno do ponto-fixo  $x_i^*$  e perceber se este ponto-fixo é um atrator ou um repulsor por exemplo.

No caso do nosso estudo o correspondente de  $x$  é a magnetização  $m$  e a função  $f(x)$  é a equação para o campo médio simples, ou seja,

$$f(x) \equiv -(B + C)m + Bm^3 + Cm^5. \quad (9.8)$$

- Ponto-fixo  $m = 0$ .

O ponto-fixo  $m = 0$  representa uma fase paramagnética do modelo no espaço de parâmetros  $p_2 \times p_1$ , a equação de evolução de  $m$  nas vizinhança de  $m^* = 0$  é

$$\begin{aligned} \left. \frac{dm}{dt} \right|_{m^*=0} &= f(m^* = 0) + (m - m^*) \left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_{m^*=0} \\ &= -(B + C)m. \end{aligned} \quad (9.9)$$

A solução da equação diferencial (9.9) é

$$m(t) = m_0 e^{-(B+C)t} \quad (9.10)$$

onde  $m_0$  é uma constante igual a magnetização no tempo inicial.

## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simples

Com a equação de  $m(t)$  para a vizinhança do ponto-fixo  $m^* = 0$  podemos três comportamentos distintos:

- Caso  $(B + C) < 0$ : Nesse primeiro caso, a expressão  $m(t)$  mostra que o sistema se afasta de  $m_0$  no sentido crescente de  $m$ , ou seja, se afasta de  $m = 0$  da mesma maneira;
- Caso  $(B + C) = 0$ : O sistema permanece com  $m(t) = m_0$ ;
- Caso  $(B + C) > 0$ : Nesse último caso o sistema evolui para  $m = 0$ .

Condição	Estabilidade
$(B + C) < 0$	atrator
$(B + C) = 0$	indiferente
$(B + C) > 0$	repulsor

Tabela 9.1: Estabilidade do ponto-fixo  $m^* = 0$ .

## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simples 164

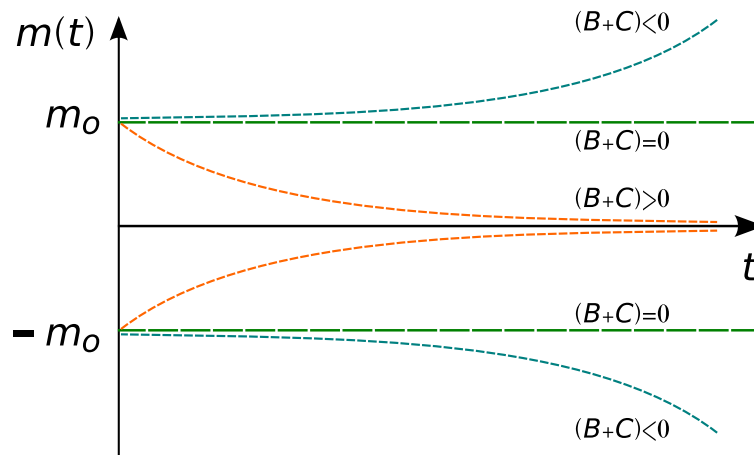


Figura 9.1: Curvas da equação (9.10) com diferentes situações dos parâmetros  $B$  e  $C$ .

A região onde a solução paramagnética é estável é mostrada na figura 9.2.

## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simples

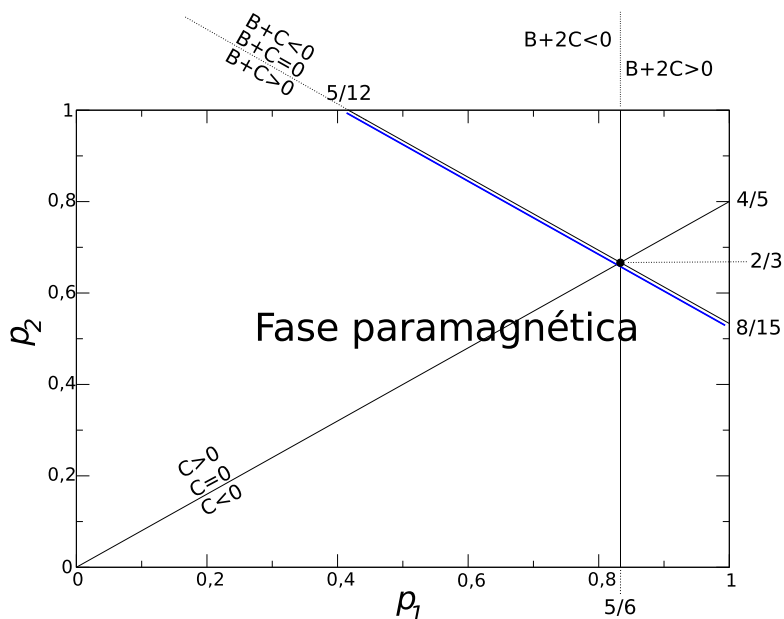


Figura 9.2: Regiões no espaço de parâmetros onde a solução paramagnética é estável.

- Ponto-fixo  $m = \pm 1$ .

As magnetizações  $m = \pm 1$  representam as configurações absorventes onde todos os sítios da rede estão no estado  $+1$  ou todos estão no estado  $-1$ . Para determinar a equação de evolução  $m(t)$  nas vizinhanças de  $m^* = \pm 1$  vamos representar os dois pontos fixos  $\pm 1$  na variável  $m^*$ . Quando houver  $m^{*n}$  (com  $n$  par), será substituído por 1. Desse modo determinaremos a equação de evolução  $m(t)$  para os dois casos.

## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simplificado

$$\begin{aligned}
 \frac{dm}{dt} &= f(m^*) + (m - m^*) \left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_{m=m^*} \\
 &= -(B + C)m^* + Bm^{*3} + Cm^{*5} + (m - m^*) \{-(B + C) + 3B + 5C\} \\
 &= Bm^*(m^{*2} - 3) + Cm^*(m^{*4} - 5) + 2Bm + 4Cm \\
 \frac{dm}{dt} &= 2(B + 2C)(m - m^*) \tag{9.11}
 \end{aligned}$$

Para resolver a equação (9.11) introduzimos uma variável  $u = m - m^*$  e depois voltamos com  $m$  na solução, que é

$$m(t) = (m_0 - m^*)e^{-2(B+2C)t} + m^*, \quad \text{para } m^* = \pm 1 \tag{9.12}$$

A equação (9.12) mostra a evolução de  $m(t)$  para os dois casos de estado absorvente do modelo, ou seja, quando  $m = +1$  ou quando  $m = -1$ . Para as duas soluções a condição de estabilidade é a mesma: se  $(B + 2C) > 0$  as soluções absorventes são estáveis.

A condição  $(B + 2C) = 0$  em relação aos parâmetros  $p_1$  e  $p_2$  é igual a  $p_1 > 5/6$ , como será mostrado na figura 9.3.

Condição	Estabilidade
$(B + 2C) < 0$	repulsor
$(B + 2C) = 0$	indiferente
$(B + 2C) > 0$	atrator

Tabela 9.2: Estabilidade dos pontos-fixos  $m^* = \pm 1$ .

## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simplif

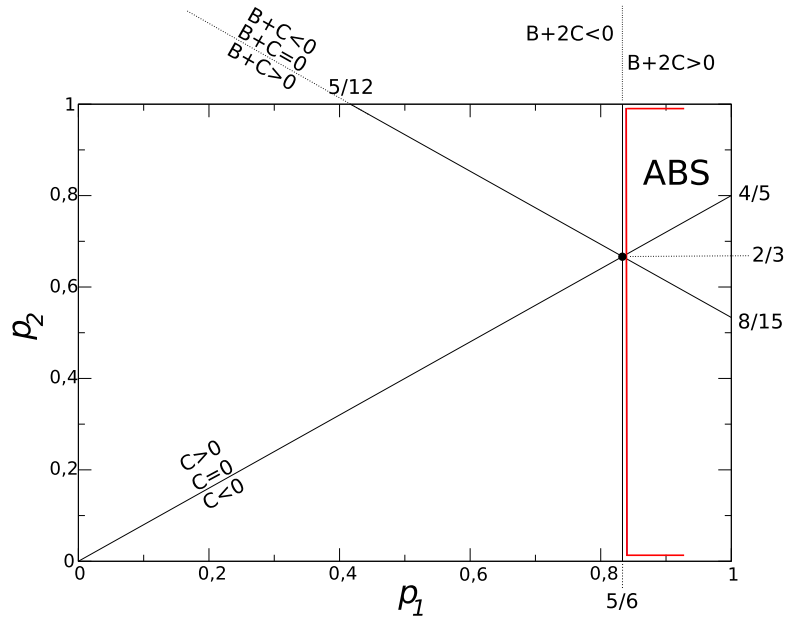


Figura 9.3: Regiões no espaço de parâmetros onde as soluções absorventes são estáveis.

- Ponto-fixo da solução ferromagnética  $m_f = \sqrt{-(B+C)/C}$ .

Representaremos a solução da fase ferromagnética por  $m_f$  e aplicaremos as potências de  $m_f$  quando necessário.

A linearização de  $m(t)$  em torno do ponto-fixo  $m_f$  fica então:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= f(m_f) + (m - m_f) \left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|^{m=m_f} \\ &= -(B+C)m_f + Bm_f^3 + Cm_f^5 + (m - m_f) \{ -(B+C) + 3Bm_f^2 + 5Cm_f^4 \} \\ &= m_f \left\{ -(B+C) - B \frac{(B+C)}{C} + \frac{(B+C)^2}{C} \right\} \end{aligned}$$

## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simplificado

$$\begin{aligned}
 & +m_f \left\{ (B+C) + 3B \frac{(B+C)}{C} - 5 \frac{(B+C)^2}{C} \right\} \\
 & +m \left\{ -(B+C) - 3B \frac{(B+C)}{C} + 5 \frac{(B+C)^2}{C} \right\} \\
 = & 2m(B+C) \left( 2 + \frac{B}{C} \right) - 2m_f \left( \frac{B}{C} + 1 \right) (2C+B)
 \end{aligned} \tag{9.13}$$

A solução de  $m(t)$  é

$$\frac{dm}{dt} = (m_0 - m_f) e^{2(B+C)(2+B/C)t} + m_f \tag{9.14}$$

Para determinarmos a estabilidade da solução ferromagnética  $m_f$  necessitamos também definir onde esta solução existe no espaço dos reais. As condições de existência da solução são as seguintes:

1.  $(B+C) < 0$  e  $C > 0$ ;
2.  $(B+C) > 0$  e  $C < 0$ .

As condições para a estabilidade do ponto-fixo são

1.  $(B+C) < 0$  e  $(2+B/C) > 0$ ;
2.  $(B+C) > 0$  e  $(2+B/C) < 0$ .

As duas situações em que essas condições produzem uma solução real e estável no espaço de parâmetros são:

1.  $(B+C) < 0$  e  $C > 0$  e  $2+B/C > 0$ ;



## 9.2 Análise de estabilidade das soluções de campo médio simples

2.  $(B + C) > 0$  e  $C < 0$  e  $2 + B/C < 0$ ;

As duas condições de existência e estabilidade das soluções ferromagnéticas são representadas na figura 9.4.

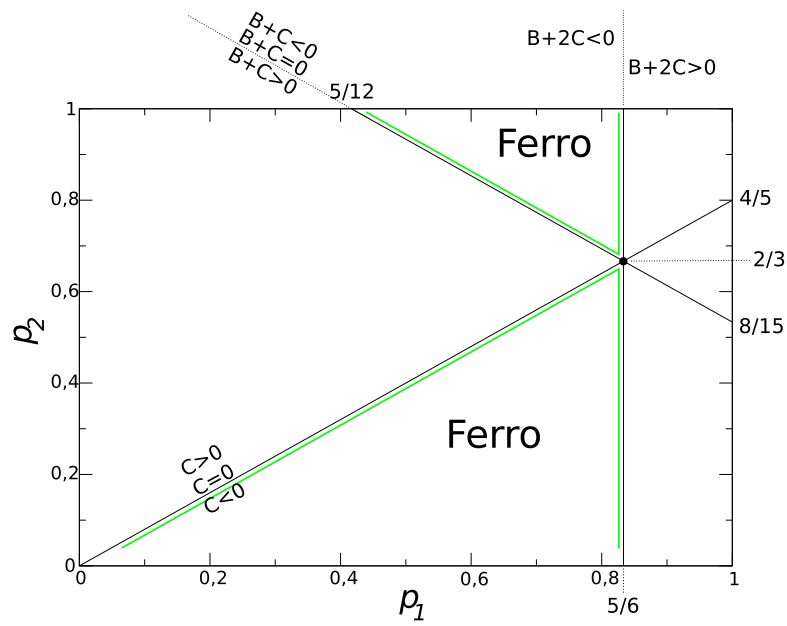


Figura 9.4: Regiões no espaço de parâmetros onde as soluções ferromagnéticas são reais e estáveis.

# Referências Bibliográficas

- [1] J.L. Lebowitz e O. Penrose, *Physics Today* **26**, 155-175 (1973).
- [2] T. Tomé e M.J. Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade* (Edusp, São Paulo, 2001).
- [3] G. Ódor, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 663 (2004).
- [4] Hinrichsen H., *Nonequilibrium Phase Transitions*, *Physica A* **369**, 1-28, (2006).
- [5] T.E. Harris, *Ann. Probab.* **2**, 969 (1974).
- [6] J.Marro e Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [7] M. Henkel, H. Hinrichsen and S.Lübeck, “Non-equilibrium Phase Transitions”, vol 1 (Springer, 2008).
- [8] M. Henkel and M. Pleimling, “Non-equilibrium Phase Transitions”, vol 2 (Springer, 2008).

- 
- [9] H. Hinrichsen, *Adv. Phys.* **49**, 815 (2000).
- [10] R.J. Glauber, *J. Math. Phys.* **4**, 294 (1963).
- [11] M. Droz, Antonio L. Ferreira and A. Lipowski, *Phys. Rev. Letters* **67**, 056108 (2003).
- [12] M. Droz and A. Lipowski, *Brz. Journal of Physics* **33**, no. 3 (2003).
- [13] E. Domany and W. Kinzel, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 447 (1984).
- [14] I. Dornic, H. Chaté, J. Chave e H. Hinrichsen, *Phys. Rev. Letters* **87**, 045701 (2001).
- [15] F. Sastre, I. Dornic, H. Chaté, *Physical Review Letters*, **91**, 267205 (2003).
- [16] O. Melchert, <http://arxiv.org/abs/0910.5403v1> (2009).
- [17] P. Grassberger e A. de La Torre, *Ann. Phys.* **122** 373-396 (1979).
- [18] Z.B. Li, U. Rischel and B. Zheng, *J. Phys. B* **837** (1994).
- [19] L.F. Cugliandolo, J. Kurchan, L. Peliti, *Phys. Rev. E* **55**, 3898 (1997).
- [20] M.O. Hase, T. Tomé and M.J. de Oliveira, *Phys. Rev. E* **82** 011133 (2010).
- [21] B.L. Granovsky e N. Madras, *Stoc. Proc. and their applications* **53** 23 (1995).

- 
- [22] M.J. de Oliveira, Phys. Rev. E **67**, 066101 (2003).
- [23] M.O. Hase, S.R. Salinas, T. Tomé and M.J. de Oliveira, Phys. Rev. E **67**, 066101 (2003).
- [24] K. Binder, Rep. Prog. Phys **60**, 487 (1997).
- [25] E. Lippiello and A. Sarracino, <http://arxiv.org/abs/1003.4887v1> (2010).
- [26] H.K. Janssen, B. Schaub and B. Schittmann, Z. Phys. B **73**, 539 (1989).
- [27] T.Tomé and J.R. Drugowich de Felício, Mod. Phys. Lett. B **12**, 873 (1998).
- [28] T.Tomé and M.J. de Oliveira, Phys. Rev. E **58**, 4242 (1998).
- [29] T.Tomé, J.Phys. A **33**, 6683 (2003).