UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

**Teorema Central do Limite para o Modelo $O(N)$
de Heisenberg Hierárquico na Criticalidade e o
Papel do Limite $N \rightarrow \infty$ na Dinâmica dos Zeros de
Lee-Yang**

William Remo Pedroso Conti

Orientador: Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti

Dissertação de Mestrado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de
Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski (IFUSP)

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (IMEUSP)

Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti (IFUSP)

São Paulo

2008

Agradecimentos

À minha amada família - Sra. Maria Cristina Pedroso Conti, Sr. Leonildo Remo Conti, Thiago Vinícius Pedroso Conti e Mayara Cristina Pedroso Conti - pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti, por ter-me aceito como seu aluno; pela confiança em mim depositada; pelo modo como tem conduzido meus passos; por toda sua atenção, em todos os momentos deste projeto.

Aos meus amigos de graduação - Alex, Bruno, Eduardo, Elisa, Fábio, Felipe, Pedro, Silas, Simão Pedro, Thiago, Walter e Wilson - por todas as ajudas e incentivos.

Aos meus amigos do Grupo de Mecânica Estatística, meus atuais companheiros de caminhada.

Às secretárias e funcionários do Departamento de Física Geral, pelo suporte e prestividade.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estabelecemos o Teorema Central do Limite para o modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico na criticalidade (sistema à temperatura inversa crítica β_c) via equação a derivadas parciais (obtida na aproximação de potencial local ($L \downarrow 1$) da transformação de grupo de renormalização)

$$u_t^{(N)} = \frac{2}{N} x u_{xx}^{(N)} + u_x^{(N)} - 2x (u_x^{(N)})^2 - \gamma x u_x^{(N)} + d u^{(N)} - u_x^{(N)}(t, 0)$$

com condição inicial

$$u^{(N)}(0, x) = -\frac{1}{N} \ln \left[\frac{\Gamma(N/2)}{(i\sqrt{\beta x} N/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1} \left(i\sqrt{\beta x} N \right) \right],$$

no limite $N \rightarrow \infty$ (modelo esférico ($N = \infty$) hierárquico contínuo ($L \downarrow 1$)). Por simplicidade consideramos apenas o caso $d = 4$, sendo o teorema também válido para $d > 4$. Pelo estudo de uma dada equação a derivadas parciais (EDP) determinamos a temperatura inversa crítica $\beta_c(d)$ do modelo esférico hierárquico contínuo para um $d > 2$ qualquer, havendo conexão entre criticalidade e o ponto fixo da EDP. Por meio de uma análise geométrica da trajetória crítica $\{u_x^{(\infty)}(t, x), \beta = \beta_c, t \geq 0\}$ obtemos informações sobre a dinâmica e distribuição dos *zeros de Lee-Yang*. Mostramos que $u_x^{(\infty)}(0, x)$ pertence à classe Pick P de funções; e verificamos indiretamente que o fluxo $u_{xt}^{(\infty)}(t, x)$ preserva essa classe, isto é, $u_x^{(\infty)}(t, x) \in P$ para todo $t > 0$.

Abstract

In this work we establish the Central Limit Theorem for the hierarchical $O(N)$ Heisenberg model at criticality (system at inverse critical temperature β_c) via partial differential equation (obtained in the local potential approximation ($L \downarrow 1$) of renormalization group transformation)

$$u_t^{(N)} = \frac{2}{N} x u_{xx}^{(N)} + u_x^{(N)} - 2x (u_x^{(N)})^2 - \gamma x u_x^{(N)} + d u^{(N)} - u_x^{(N)}(t, 0)$$

with initial condition

$$u^{(N)}(0, x) = -\frac{1}{N} \ln \left[\frac{\Gamma(N/2)}{(i\sqrt{\beta x} N/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1} \left(i\sqrt{\beta x} N \right) \right],$$

in the limit $N \rightarrow \infty$ (continuum ($L \downarrow 1$) hierarchical spherical ($N = \infty$) model). For simplicity we only treat the $d = 4$ case but the theorem is still valid for $d > 4$. By studying a given partial differential equation (PDE) we determine for any $d > 2$ the critical inverse temperature $\beta_c(d)$ of the continuum hierarchical spherical model, and we show a connection between criticality and the fixed point of PDE. By means of a geometric analysis of the critical trajectory $\{u_x^{(\infty)}(t, x), \beta = \beta_c, t \geq 0\}$ we obtain some informations about *Lee-Yang zeros's* dynamics and distribution. Finally, we show $u_x^{(\infty)}(0, x)$ is in Pick class P of functions; we verify indirectly that the flow $u_{xt}^{(\infty)}(t, x)$ preserves that class, i. e., $u_x^{(\infty)}(t, x) \in P$ for all $t > 0$.

Sumário

1	Introdução: Motivações e Resultados	11
2	Trajectoria Discreta: Resumo	18
2.1	O Modelo $O(N)$ de Heisenberg Hierárquico	18
2.2	Transformação do Grupo de Renormalização	26
2.3	A Aproximação de Potencial Local ($L \downarrow 1$)	40
3	Trajectoria Contínua: Caso $N = \infty$	44
3.1	O Modelo Esférico Hierárquico	44
3.2	O Teorema Central do Limite	54
3.3	A Criticalidade	71
3.4	O Fluxo do Ponto de Vista Geométrico	78
3.4.1	Demonstração da Proposição 3.2.1	78
3.4.2	A Condição Inicial $u'_0(x)$ e a Classe Pick de Funções	83
3.4.3	A Função $u_x(t, x)$ para $t > 0$ e a Classe Pick de Funções	90
3.5	Conclusões e Problemas em Aberto	99
A	Apêndices	105
A.1	Demonstração do Teorema da Função Inversa	105
A.2	Demonstração do Teorema de Worpitzky	108
A.3	A Classe Pick de Funções	116
A.4	A Reflexão de Schwarz	130

Capítulo 1

Introdução: Motivações e Resultados

Dados os inteiros L , K e d , com $L, K > 1$ e $d \geq 1$, seja

$$\Lambda_K = \{0, 1, \dots, L^K - 1\}^d \subset \mathbb{Z}^d$$

uma rede finita hipercúbica d -dimensional de cardinalidade $|\Lambda_K| = L^{Kd} = n$. Por *modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico* entende-se o modelo que associa a cada vértice de Λ_K uma *variável de spin clássica* y que assume valores sobre a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$; essas variáveis são *dependentes* segundo uma matriz de acoplamento ferromagnética chamada *matriz de interação hierárquica*. Trata-se de uma matriz que não obedece invariância por translação nem alcance finito; as variáveis de spin interagem segundo uma estrutura de blocos - a cada hierarquia são formados blocos de L^d variáveis de spin da hierarquia anterior, de tal maneira que na hierarquia k tem-se a rede Λ_{K-k} de cardinalidade $L^{(K-k)d}$.

Seja $\sigma_k^{(N)}(y)$ a distribuição “a priori” da variável soma

$$X_{k,N}^\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^{\gamma/d}}} \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_k} y_{\mathbf{i}} , \quad (1.0.1)$$

com $m = L^{kd}$, e γ um parâmetro que pode assumir o valor d ou $d + 2$. Se $\mathcal{M}$ denota o espaço das distribuições “a priori” em $\mathbb{R}^N$ invariantes por transformações ortogonais $O(N)$, o modelo hierárquico permite estabelecer um mapa discreto $\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

$$\sigma_k^{(N)}(y) = \mathcal{R}\sigma_{k-1}^{(N)}(y) . \quad (1.0.2)$$

Sendo $\{\sigma_k^{(N)}(y; \beta), k \geq 0\}$ uma família de trajetórias parametrizada pelo inverso da temperatura β , e β_c a *temperatura inversa crítica*, o propósito deste trabalho é investigar a convergência

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^{(N)}(y; \beta_c) = \sigma_{gauss}(y) \quad (1.0.3)$$

da trajetória crítica $\{\sigma_k^{(N)}(y; \beta_c), k \geq 0\}$ para a distribuição gaussiana $\sigma_{gauss}(y)$ quando N é muito grande. Mais especificamente, pretendemos estabelecer o Teorema Central do Limite para o modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico na criticalidade para N suficientemente grande. Para dar conta das flutuações anormais da criticalidade, γ neste caso tem de ser escolhido igual a $d + 2$.

Teorema de Lee-Yang. Seja $d\nu_n(\mathbf{y})$ a medida de Gibbs (medida de equilíbrio) de um sistema ferromagnético clássico de n spins, com $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ um elemento do espaço de configuração Ω_n , e consideremos a função característica (transformada de Fourier) dessa medida

$$\Phi_n(\mathbf{z}) = \int_{\Omega_n} \exp\{i(\mathbf{z}, \mathbf{y})_{\Omega_n}\} d\nu_n(\mathbf{y}) , \quad (1.0.4)$$

com $(\cdot, \cdot)_{\Omega_n}$ o produto interno sobre Ω_n e $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ a variável conjugada. Segundo Lee e Yang, as propriedades de equilíbrio termodinâmico do sistema são regidas pela distribuição dos zeros (*zeros de Lee-Yang*) de

$$\varphi_n(-|z|^2) := \Phi_n(z, \dots, z) . \quad (1.0.5)$$

No artigo [20] de 1952 Lee e Yang calculam, por uma analogia com a eletrostática, a densidade de zeros do modelo de Ising unidimensional e derivam, a partir dessa, a energia livre e a magnetização. Embora o modelo não apresente transição de fase, o

cálculo ilustra o adensamento dos zeros, pelo limite termodinâmico $n \rightarrow \infty$, sobre uma curva no plano complexo e explicita a maneira como as propriedades macroscópicas de equilíbrio do modelo são determinadas a partir da densidade (distribuição empírica) dos zeros de (1.0.5).

Em 1974 Newman [24] formulou esse problema da determinação dos zeros de Lee-Yang da seguinte maneira: se $\varphi_1(-|z|^2)$ possui zeros sobre a reta real, então $\varphi_n(-|z|^2)$ mantém os zeros sobre $\mathbb{R}$ para $\beta > 0$ e todo n , e esses zeros possivelmente se adensam no limite $n \rightarrow \infty$ (o adensamento somente foi levado em consideração por De Coninck [7]).

Teorema de Lee-Yang e o Modelo $O(N)$ de Heisenberg Hierárquico. As funções termodinâmicas do modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico dependem das variáveis macroscópicas $X_{k,N}^\gamma$ (1.0.1). Para esse modelo temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \Phi_m^{(N)} \left(\frac{z}{\sqrt{m^{\gamma/d}}}, \dots, \frac{z}{\sqrt{m^{\gamma/d}}} \right) &= \int_{\Omega_m} \exp\{iz \cdot X_{k,N}^\gamma\} d\nu_m^{(N)}(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iz \cdot y\} d\sigma_k^{(N)}(y) = \phi_k^{(N)}(z), \end{aligned} \quad (1.0.6)$$

com $d\nu_m^{(N)}(\mathbf{y})$ a medida de Gibbs para um bloco de $m = L^{kd}$ spins, $\sigma_k^{(N)}(y)$ a distribuição “a priori” da variável soma $X_{k,N}^\gamma$, e $z \cdot y$ o produto interno em $\mathbb{R}^N$. Para um estudo do modelo à luz do Teorema de Lee-Yang é portanto suficiente que se conheça os zeros das funções características $\{\phi_k^{(N)}(z)\}$ como funções de $-|z|^2$. Define-se nesse contexto a chamada *propriedade de Lee-Yang* (vide Definição 2.2.7): diz-se que uma medida $\sigma(y)$ em $\mathbb{R}^N$ invariante por transformações ortogonais $O(N)$ possui a propriedade de Lee-Yang se os zeros de sua função característica $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iz \cdot y\} d\sigma(y) := \varphi(-|z|^2)$ encontram-se na reta real e $\varphi(-|z|^2)$ pertence à classe das funções inteiras de Laguerre, as quais possuem a representação (2.2.27).

Convergência da Seqüência $\{\sigma_k^{(N)}(y; \beta_c), k \geq 0\}$. A abordagem apresentada nesta dissertação, bem como nos trabalhos de Kozitsky [15] e Watanabe [27], envolve técnicas de *grupo de renormalização*, segundo as quais a convergência mencionada é investigada seguindo-se a trajetória $\{\phi_k^{(N)}(z; \beta_c), k \geq 0\}$ de funções características das distribuições

$\sigma_k^{(N)}(y; \beta_c)$. As funções $\phi_k^{(N)}(z)$ também satisfazem uma relação de recorrência (mapa discreto)

$$\phi_k^{(N)}(z) = \mathcal{F}\phi_{k-1}^{(N)}(z) \quad (1.0.7)$$

- vide Proposição 2.2.4.

Em [15], Kozitsky estabelece o Teorema Central do Limite para o modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico para os casos $\beta = \beta_c$ e $\beta < \beta_c$ partindo de uma vizinhança do ponto fixo gaussiano, sendo que o tamanho de bloco é $L^d \geq 2$ e $d > 4$. Nesse estudo Kozitsky mostra que se L^d é um inteiro, o mapa $\mathcal{F}$ preserva a propriedade de Lee-Yang. Assim, se $\phi_0^{(N)}(z) = \varphi_0^{(N)}(-|z|^2)$ é uma função da classe de Laguerre, então $\{\varphi_k^{(N)}(-|z|^2), k > 0\}$ é uma seqüência de funções da classe de Laguerre. Para essa classe de funções há disponível [24] algumas desigualdades para os momentos da distribuição dos zeros, e é com o auxílio dessas que se mostra a convergência para o ponto fixo gaussiano.

Já em [27], Watanabe estabelece o Teorema Central do Limite para o modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico para N suficientemente grande e $\beta = \beta_c$, partindo da função característica

$$\phi_0^{(N)}(z) = \frac{\Gamma(N/2)}{(\sqrt{\beta N}|z|/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1}(\sqrt{\beta N}|z|) \quad (1.0.8)$$

da distribuição “a priori” uniforme suportada sobre a esfera N -dimensional de raio $\sqrt{\beta N}$ (por conveniência, considera-se esse raio ao unitário), com $L^d = 2$ e $d = 4$. Para controlar a trajetória $O(N)$, que parte de muito longe do ponto fixo gaussiano, Watanabe utiliza a trajetória exatamente solúvel $O(\infty)$ juntamente com dois ingredientes válidos para L^d inteiro: o fato de o mapa $\mathcal{F}$ preservar a propriedade de Lee-Yang, e *positividade por reflexão*. A propriedade de Lee-Yang é utilizada da mesma maneira que por Kozitsky (desigualdades para os momentos da distribuição dos zeros), e a propriedade de positividade por reflexão garante a convergência uniforme das trajetórias $O(N)$ para as trajetórias $O(\infty)$.

Embora a transformação (1.0.7) seja discreta, em ambos os trabalhos ([15] e [27]) parte da dinâmica é evoluída através da equação do calor. O presente trabalho diferencia-

se desses dois pela utilização da chamada *aproximação de potencial local*: definindo o potencial

$$U(t, z) = -\ln \phi_k^{(N)}(z) \quad (1.0.9)$$

com parâmetro de escala

$$t = k \ln L, \quad (1.0.10)$$

toma-se conjuntamente os limites $k \rightarrow \infty$ e $L \downarrow 1$ de tal maneira que $k \ln L$ permaneça fixo em um número real positivo t . Com tal procedimento, a órbita discreta $\{-\ln \phi_k^{(N)}(z; \beta), k \geq 0\}$ torna-se contínua, e a dinâmica completa se reduz a uma equação a derivadas parciais. A nossa condição inicial é dada por $U(0, z) = -\ln \phi_0^{(N)}(z)$, com $\phi_0^{(N)}(z)$ dada por (1.0.8) (a condição inicial de Watanabe). Como veremos, a equação diferencial satisfeita por $U(t, z)$ preserva simetria esférica, de tal maneira que é suficiente considerar apenas a variável radial $|z|$. Com a finalidade de se poder tomar o limite de N para infinito, definimos o potencial adequadamente escalado em N

$$u^{(N)}(t, x) = \frac{1}{N} U(t, \sqrt{N}z), \quad (1.0.11)$$

com $x = -|z|^2$, e determinamos a equação diferencial parcial correspondente, aqui denominada $\text{EDP}u^{(N)}$ (vide problema de valor inicial (2.3.16)-(2.3.17)). Trata-se de uma *equação não-linear* que apresenta o termo $1/N$ na frente do termo de derivada segunda. A equação com N finito é, por conseguinte, uma *perturbação singular* da equação com $N = \infty$: com o limite $N \rightarrow \infty$ a ordem da equação é reduzida de segunda para primeira (compare (2.3.16) com (3.2.1)). Devemos enfatizar que em decorrência do fato que no limite $L \downarrow 1$ os ingredientes *positividade por reflexão* e *propriedade de Lee-Yang* deixam de valer, um método inteiramente novo foi desenvolvido em nossas análises.

Uma das motivações do presente estudo é justamente o entendimento da $\text{EDP}u^{(N)}$ como uma perturbação singular da $\text{EDP}u^{(\infty)}$: conhecendo a trajetória exatamente solúvel $\{u^{(\infty)}(t, x), t \geq 0\}$, pretende-se fazer uma descrição das trajetórias $\{u^{(N)}(t, x), t \geq 0\}$ em

um espaço funcional adequado. Pretende-se, além disso, estender as soluções dos dois problemas *não lineares* ao plano complexo de maneira tal que seja possível compreender o que ocorre com suas singularidades.

Isso nos leva a uma outra motivação: descrever o problema da convergência do ponto de vista da dinâmica dos *zeros de Lee-Yang*. Já dissemos que o mapa $\mathcal{F}$ preserva a propriedade de Lee-Yang. Partindo da função inteira (1.0.8) que possui zeros sobre o eixo real, a sequência de funções características $\{\phi_k^{(N)}(z) = \varphi_k^{(N)}(-|z|^2), k \geq 0\}$ induz uma dinâmica sobre os zeros de Lee-Yang, cuja distribuição no limite termodinâmico é determinada pelos zeros da função limite dessa sequência. No caso de se mostrar convergência para uma função gaussiana (Teorema Central do Limite), função essa que *não* possui zeros, deve-se mostrar que os zeros são expelidos para o infinito. Os métodos empregados por Kozitsky e por Watanabe não permitem o estudo da dinâmica dos zeros com o aumento da hierarquia k . Na aproximação de potencial local por nós adotada, a *propriedade de Lee-Yang* definida pelos autores [15] e [23] não é preservada; todavia, a citada dinâmica pode ser estudada pela evolução da função $u_x^{(N)}(0, x)$, para a qual os zeros de $\phi_0^{(N)}(z) = \varphi_0^{(N)}(-|z|^2)$ passam a ser pólos - $u_x^{(N)}(0, x)$ é uma função meromorfa. Deste ponto de vista, a questão passa a ser: a *classe P de Pick* das funções holomorfas no semi-plano superior, que inclui funções meromorfas e funções que possuem cortes no eixo real, é preservada pela dinâmica de $u_x^{(N)}(t, x)$? Mostraremos que com o limite $N \rightarrow \infty$ os pólos de $u_x^{(N)}(0, x)$ se adensam, dando origem a um corte; mas tanto $u_x^{(N)}(0, x)$ quanto a função limite $u_x^{(\infty)}(0, x)$ pertencem à classe das funções de Pick. Além disso, para o caso $N = \infty$, vamos verificar que a classe de funções de Pick é preservada ($u_x^{(\infty)}(t, x) \in P$ para todo $t \geq 0$) pela EDP $u_x^{(\infty)}$, e uma descrição da dinâmica dos zeros de Lee-Yang será dada.

Esta dissertação está dividida em dois capítulos:

O primeiro capítulo é formado por três seções. Na Seção 2.1 apresentamos o modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico: definimos de modo cuidadoso a interação hierárquica e a medida de Gibbs (medida de equilíbrio) do modelo. Fazendo uso da estrutura da energia hierárquica, achamos na Seção 2.2 uma relação recursiva para a medida “a priori” $\sigma_k^{(N)}(y)$ e, a partir dessa, uma relação recursiva para a transformada de Fourier $\phi_k^{(N)}(z)$ da medida “a priori”. Para fechar essa seção, expomos parte do artigo [17] de Kozitsky e Wołowiski, além de fazermos um comentário sobre o trabalho [27] de Watanabe. Na Seção 2.3, que encerra o primeiro capítulo, considerando a aproximação de potencial

local derivamos uma equação a derivadas parciais para o potencial $U(t, z) = -\ln \phi_k^{(N)}(z)$.

O segundo capítulo trata do caso $N = \infty$, e é formado por quatro seções. Na Seção 3.1 apresentamos o modelo esférico ($N = \infty$) hierárquico e sua versão contínua ($L \downarrow 1$), mostrando alguns resultados a esses associados - questão de existência de ordem de longo alcance, bem como a obtenção da temperatura inversa crítica. Encontra-se na Seção 3.2 nosso principal resultado: o Teorema Central do Limite. Mostramos para $d = 4$ que a trajetória crítica ($\beta = \beta_c(d = 4) = 4$) $\{u^{(\infty)}(t, x), t \geq 0\}$ converge, quando $t \rightarrow \infty$, para a função $u^*(x) = -x$. Um ponto importante de nosso estudo é que esse teorema pode ser adaptado para $d > 4$, casos em que também se observa convergência para o ponto fixo gaussiano; mas as técnicas desenvolvidas também são aplicáveis para $2 < d < 4$, casos em que o ponto fixo é não-gaussiano - a dimensão $d = 4$ é o valor crítico superior para modelos hierárquicos, dimensão a partir da qual os expoentes críticos são os mesmos da teoria de campo médio com flutuações gaussianas. Na Seção 3.3 a questão da criticalidade é retomada, mas agora do ponto de vista exclusivamente de uma dada equação a derivadas parciais. A Seção 3.4 é dividida em três subseções, e tem por propósito fazer um estudo geométrico, no plano complexo, da trajetória crítica estudada na Seção 3.2. Mais especificamente, estendemos a função $u_x^{(\infty)}(t, x)$ para o semi-plano superior do plano complexo e utilizamos o Teorema do Mapeamento de Riemann para prover informações qualitativas sobre a trajetória crítica.

Ao final do trabalho estão os Apêndices. De *grande* importância são as três primeiras seções, em especial a que expomos alguns fatos sobre a classe Pick de funções. Quanto à seção sobre *reflexão de Schwarz*, esta foi colocada apenas por uma questão de completeza - esse conceito aparece apenas na demonstração de *uma* proposição, e não é algo de *fundamental* importância para o entendimento deste trabalho.

Capítulo 2

Trajectoria Discreta: Resumo

2.1 O Modelo $O(N)$ de Heisenberg Hierárquico

Por um postulado devido a Gibbs, a termodinâmica de um sistema de spins é derivada de uma distribuição de probabilidade definida sobre o espaço de configuração, denominada *medida de equilíbrio* ou *medida de Gibbs*.

Para o modelo $O(N)$ de Heisenberg *ferromagnético* considerado sobre uma rede finita $\Lambda_K \subset \mathbb{Z}^d$ de cardinalidade $|\Lambda_K| = n$ essa medida é dada por

$$d\nu_n^{(N)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_n^{(N)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}, A\mathbf{y})_{\Omega_n} \right\} \prod_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} d\sigma_0^{(N)}(y_{\mathbf{i}}) . \quad (2.1.1)$$

Nesta expressão,

$$Z_n^{(N)} = \int_{\Omega_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}, A\mathbf{y})_{\Omega_n} \right\} \prod_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} d\sigma_0^{(N)}(y_{\mathbf{i}}) \quad (2.1.2)$$

é a chamada *função de partição*, uma normalização necessária para que $d\nu_n^{(N)}(\mathbf{y})$ seja uma medida de probabilidade; $\mathbf{y}$ denota um elemento do espaço de configuração $\Omega_n = \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N \cdot n}$; $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\Omega_n}$ é o produto interno sobre Ω_n

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\Omega_n} = \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} x_{\mathbf{i}} \cdot y_{\mathbf{i}} ; \quad (2.1.3)$$

$$d\sigma_0^{(N)}(y) = \frac{1}{S_{\beta N}^N} \delta(|y| - \sqrt{\beta N}) d^N y \quad (2.1.4)$$

é a medida “a priori” uniforme sobre a esfera N -dimensional

$$\Sigma_{\beta N}^N = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : |y|^2 = \sum_{l=1}^N (y_l)^2 = \beta N \right\} \quad (2.1.5)$$

de raio $\sqrt{\beta N}$, com β o inverso da temperatura e

$$S_{\beta N}^N = \int_{\mathbb{R}^N} \delta(|y| - \sqrt{\beta N}) d^N y = \frac{2\pi^{N/2} (\sqrt{\beta N})^{N-1}}{\Gamma(N/2)} \quad (2.1.6)$$

a área da superfície da esfera $\Sigma_{\beta N}^N$. No modelo $O(N)$ de Heisenberg associamos a cada vértice $\mathbf{i} \in \Lambda_K$ uma *variável de spin clássica* $y_{\mathbf{i}}$ que assume valores sobre a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Entretanto, para os propósitos de nosso estudo, é conveniente que se tenha $y_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}^N$. Assim sendo introduzimos, na medida “a priori”, o vínculo (2.1.5). Também por conveniência escolhemos o raio $\sqrt{\beta N}^1$ ao raio unitário. Quanto ao acoplamento entre as variáveis de spin $y_{\mathbf{i}}$, este é expresso pela matriz $A = [A_{\mathbf{ij}}]$ presente na energia

$$\mathcal{U}_n(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, A\mathbf{y})_{\Omega_n} \quad (2.1.7)$$

associada à configuração $\mathbf{y}$, sendo $A = -J \otimes I_N$ com I_N a matriz identidade de ordem N e $J = [J_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ de interação *ferromagnética*:

$$J_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j. \quad (2.1.8)$$

O nosso interesse está na chamada *interação hierárquica*, que será definida a seguir.

Por uma questão de completeza, façamos:

¹Note que pela mudança de variável $\mathbf{y}' = \sqrt{\beta} \mathbf{y}$ o parâmetro β passa a ser escrito no termo exponencial de (2.1.1) e não mais na medida “a priori”.

Cálculo da Área da Superfície de uma Esfera N -dimensional

(a) **de Raio Unitário:** é conveniente que se passe para coordenadas esféricas generalizadas; o jacobiano é dado por

$$d^N y = r^{N-1} (\sin \theta_1)^{N-2} (\sin \theta_2)^{N-3} \cdots \sin \theta_{N-2} dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{N-1} , \quad (2.1.9)$$

com $0 \leq r = |y| < \infty$,

$$0 \leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-2} \leq \pi$$

e

$$0 \leq \theta_{N-1} \leq 2\pi .$$

Para se chegar à igualdade

$$\begin{aligned} S_1^N &= \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{N-2} d\theta_1 \int_0^\pi (\sin \theta_2)^{N-3} d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin \theta_{N-2} d\theta_{N-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{N-1} \\ &= \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} , \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

pode-se utilizar a integral gaussiana

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|y|^2} d^N y = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)^N = \pi^{N/2} , \quad (2.1.11)$$

pois essa também é igual a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|y|^2} d^N y &= S_1^N \int_0^\infty r^{N-1} e^{-r^2} dr \\ &= S_1^N \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{N/2-1} e^{-t} dt \\ &= S_1^N \frac{\Gamma(N/2)}{2} . \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

(b) **de Raio R:** de (2.1.9) temos que

$$S_{R^2}^N = R^{N-1} S_1^N, \quad (2.1.13)$$

de onde se conclui, juntamente com (2.1.10), a equação (2.1.6).

A Matriz de Interação Hierárquica. Dados os inteiros L, K e d , $L, K > 1$ e $d \geq 1$, seja para cada $m = 1, 2, \dots, K$

$$\Lambda_m = \{0, 1, \dots, L^m - 1\}^d \subset \mathbb{Z}^d \quad (2.1.14)$$

a rede finita hipercúbica d -dimensional de cardinalidade $|\Lambda_m| = L^{md}$. Seja $u \in \mathbb{R}^{|\Lambda_m|}$ um vetor que associa a cada vértice $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)$ de Λ_m uma variável real $u_{\mathbf{i}}$, e $v \in \mathbb{R}^{|\Lambda_{m-1}|}$ um vetor que associa a cada vértice $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ de Λ_{m-1} uma variável real $v_{\mathbf{r}}$. Definimos o *operador de bloco* $B : \mathbb{R}^{|\Lambda_m|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\Lambda_{m-1}|}$ por

$$Bu = v \quad (2.1.15)$$

tal que a componente $\mathbf{r}$ desse vetor é dada por

$$v_{\mathbf{r}} = (Bu)_{\mathbf{r}} = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{j} \in \Lambda_1} u_{L\mathbf{r} + \mathbf{j}}. \quad (2.1.16)$$

Seu adjunto $B^* : \mathbb{R}^{|\Lambda_{m-1}|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\Lambda_m|}$

$$(w, Bu)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_{m-1}|}} = (B^*w, u)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_m|}} \quad (2.1.17)$$

com respeito ao produto interno $(w, u)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_m|}} = \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_m} w_{\mathbf{i}} u_{\mathbf{i}}$ é

$$B^*v = u \quad (2.1.18)$$

cuja componente $\mathbf{i} = L\mathbf{r} + \mathbf{j}$, $\mathbf{r} \in \Lambda_{m-1}$ e $\mathbf{j} \in \Lambda_1$, é dada por

$$u_{L\mathbf{r}+\mathbf{j}} = (B^*v)_{L\mathbf{r}+\mathbf{j}} = \frac{1}{L^{d/2}} v_{\mathbf{r}} \quad \forall \mathbf{j} \in \Lambda_1 . \quad (2.1.19)$$

Introduzimos assim as noções de *bloco* e *hierarquia* à rede Λ_K : a cada vértice $\mathbf{r}$ de Λ_{K-k-1} associamos um bloco de L^d vértices de Λ_{K-k} , a saber, todos os elementos de

$$\{Lr_1, \dots, Lr_1 + L - 1\} \times \dots \times \{Lr_d, \dots, Lr_d + L - 1\} ; \quad (2.1.20)$$

os vértices $\mathbf{i} \in \Lambda_{K-k}$ são denominados *vértices da hierarquia k* e os $\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k-1}$ *vértices da $k+1$ -ésima hierarquia*; $\mathbf{i} \in \Lambda_K$ são *vértices da hierarquia zero*, e na K -ésima hierarquia há somente um único vértice $\Lambda_0 = \{\mathbf{0}\}$. Se u e v denotam configurações de spins, dado um vértice $\mathbf{r}$ da $k+1$ -ésima hierarquia, a operação realizada pelo operador B é a de somar todas as variáveis de spin $u_{\mathbf{i}}$ da hierarquia k associadas a $\mathbf{r}$, e normalizar pela raiz quadrada do tamanho do bloco (L^d). Quanto a B^* , transforma a variável de spin de bloco $v_{\mathbf{r}}$ da $k+1$ -ésima hierarquia em L^d variáveis de spin da hierarquia k , atribuindo a cada uma delas o mesmo valor.

Utilizando os operadores B e B^* definimos, sobre $\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$, a *matriz de interação hierárquica* J_H :

$$J_H = \sum_{k=1}^K L^{-2k} (B^*)^k B^k . \quad (2.1.21)$$

$B^k = \underbrace{B B \dots B}_{k\text{-vezes}}$ é a aplicação sucessiva de B , e portanto $B^k : \mathbb{R}^{|\Lambda_K|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\Lambda_{K-k}|}$; o índice k indica a hierarquia. Assim, o número máximo de hierarquias que se tem em Λ_K é K .

Definição 2.1.1 (Matriz Positiva e Positiva Definida) *Uma matriz $M = [M_{ij}]_{n \times n}$ real é dita ser positiva se*

$$M_{ij} > 0 \quad \forall i, j , \quad (2.1.22)$$

e é dita ser positiva definida se

$$(u, Mu)_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad (2.1.23)$$

para todo vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.1.2 J_H é uma matriz $L^{Kd} \times L^{Kd}$ real simétrica positiva e positiva definida.

Para demonstrarmos esta proposição é necessária a definição de *distância hierárquica*: consideremos uma seqüência $(\theta_1, \dots, \theta_K)$ de vetores $\theta_k \in \{0, 1, \dots, L-1\}^d$ tal que, para cada vértice $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \Lambda_K$, temos uma única expansão na base L^d -nária

$$\mathbf{i} = \sum_{k=1}^K \theta_k L^{k-1}. \quad (2.1.24)$$

O vetor θ_k indica a posição do vértice $\mathbf{i}$ dentro do bloco, ao qual pertence, da k -ésima hierarquia. A título de esclarecimento, consideremos o exemplo mostrado pela Figura 2.1, em que $L = 2$ e $d = 1$.

Figura 2.1: Esquema hierárquico da rede Λ_K no caso em que $L = 2$ e $d = 1$.

O vértice $i = 3$ possui a expansão binária $(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$: dentro do bloco da primeira hierarquia ele ocupa a posição $\theta_1 = 1$; dentro do bloco da segunda hierarquia, a posição $\theta_2 = 1$; dentro do bloco da terceira hierarquia, a posição $\theta_3 = 0$; e assim sucessivamente. Ao vértice $i = 4$ está associada a expansão $(0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$.

Definição 2.1.3 (Distância Hierárquica) *Seja $(\theta_1, \dots, \theta_K)$ a expansão L^d -nária do vértice $\mathbf{i} \in \Lambda_K$, e $(\theta'_1, \dots, \theta'_K)$ a do vértice $\mathbf{j} \in \Lambda_K$. A distância hierárquica entre $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ é definida por*

$$dist_L(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \begin{cases} L^{k(\mathbf{i}, \mathbf{j})} & \text{se } \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \\ 0 & \text{se } \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{cases}, \quad (2.1.25)$$

sendo $k(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \max\{l \in \{0, 1, \dots, K\} : \theta_l \neq \theta'_l\}$ a menor hierarquia k que faz com que $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sejam cobertos por um mesmo bloco de tamanho L^{kd} .

Peguemos como exemplo os sítios 3 e 4 da Figura 2.1, cujas expansões binárias já conhecemos: $k(3, 4) = 3$; logo $dist_2(3, 4) = 2^3 = 8$, apesar de serem vizinhos próximos.

Observação 2.1.4 *Note que a distância hierárquica não é estacionária com respeito a qualquer translação $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$, isto é, em geral $dist_L(\mathbf{i} + \mathbf{a}, \mathbf{j} + \mathbf{a}) \neq dist_L(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Além disso, a desigualdade $dist_L(\mathbf{i}, \mathbf{j}) > |\mathbf{i} - \mathbf{j}|$ é sempre satisfeita, com $|\mathbf{i} - \mathbf{j}|$ a distância euclidiana entre os sítios.*

Estamos agora em posição de demonstrar a Proposição 2.1.2:

Demonstração. Seja $\delta_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$ um vetor cujas componentes $u_{\mathbf{l}}$ são nulas exceto para $\mathbf{l} = \mathbf{i}$, $\mathbf{l}, \mathbf{i} \in \Lambda_K$:

$$(\delta_{\mathbf{i}})_{\mathbf{l}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{l} \neq \mathbf{i} \\ 1 & \text{se } \mathbf{l} = \mathbf{i} \end{cases}. \quad (2.1.26)$$

O elemento de matriz $(J_H)_{\mathbf{i}\mathbf{j}}$ é dado por

$$\begin{aligned}
(J_H)_{ij} &= (\delta_i, J_H \delta_j)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} \\
&= \sum_{k=1}^K L^{-2k} (\delta_i, (B^*)^k B^k \delta_j)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} \\
&= \sum_{k=1}^K L^{-2k} (B^k \delta_i, B^k \delta_j)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_{K-k}|}} .
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Para $i \neq j$

$$(B^k \delta_i, B^k \delta_j)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_{K-k}|}} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < k(i, j) \\ L^{-dk} & \text{se } k \geq k(i, j) \end{cases} , \tag{2.1.28}$$

e para $i = j$ temos que $(B^k \delta_i, B^k \delta_j)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_{K-k}|}} = L^{-dk}$ para todo k . Desta maneira

$$(J_H)_{ij} = \begin{cases} (L^{-(d+2)k(i,j)} - L^{-(d+2)(K+1)}) (1 - L^{-(d+2)})^{-1} & \text{se } i \neq j \\ (L^{-(d+2)} - L^{-(d+2)(K+1)}) (1 - L^{-(d+2)})^{-1} & \text{se } i = j \end{cases} . \tag{2.1.29}$$

Uma vez que $k(i, j) = k(j, i)$, e $(J_H)_{ij} > 0$ e real para quaisquer i e j da rede Λ_K , temos que J_H é uma matriz real simétrica positiva.

Seja agora $s \in \mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$ um vetor qualquer não nulo e que associa a cada vértice i de Λ_K uma variável real s_i , e $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$. Então a forma quadrática associada a J_H é

$$\begin{aligned}
(s, J_H s)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} &= \sum_{k=1}^K L^{-2k} (s, (B^*)^k B^k s)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} \\
&= \sum_{k=1}^K L^{-2k} (B^k s, B^k s)_{\mathbb{R}^{|\Lambda_{K-k}|}} \\
&= \sum_{k=1}^K L^{-2k} \sum_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k}} (B^k s)_{\mathbf{r}}^2 > 0 ,
\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

com

$$(B^k s)_r = \frac{1}{L^{dk/2}} \sum_{j \in \Lambda_k} s_{L^k r + j} . \quad (2.1.31)$$

Assim, J_H é uma matriz positiva definida. ■

Pela Proposição 2.1.2 a matriz de interação hierárquica J_H , definida por (2.1.21), é uma matriz de interação ferromagnética (vide (2.1.8)). Em vista desse fato, temos:

Definição 2.1.5 *O modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico é definido pela medida de Gibbs (2.1.1) com energia de interação ferromagnética*

$$\mathcal{U}_n(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, A\mathbf{y})_{\Omega_n} = -(L-1)(\mathbf{y}, J_H \otimes I_N \mathbf{y}) , \quad (2.1.32)$$

sendo $n = |\Lambda_K| = L^{Kd}$. O fator $(L-1)$ é acrescentado para garantir, no limite em que $L \downarrow 1$, a convergência do laplaceano hierárquico para o laplaceano hierárquico contínuo, como será visto na Seção 3.1.

2.2 Transformação do Grupo de Renormalização

Começemos esta seção por notar a estrutura da energia hierárquica $\mathcal{U}_{L^{Kd}}(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{L^{Kd}}(\mathbf{y}) &= -(L-1) \sum_{m=1}^K L^{-2m} ((B^m \otimes I_N) \mathbf{y}, (B^m \otimes I_N) \mathbf{y})_{\Omega_{L^{(K-m)d}}} \\ &= L^{-2} \mathcal{U}_{L^{(K-1)d}}(\mathbf{y}^{(1)}) - (L-1)L^{-2} \sum_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-1}} |y_{\mathbf{r}}^{(1)}|^2 , \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

que é a energia hierárquica normalizada por L^{-2} de uma configuração de spins de bloco $\mathbf{y}^{(1)} = (B \otimes I_N) \mathbf{y}$ da primeira hierarquia sobre a rede Λ_{K-1} , somada à energia de interação das $L^{(K-1)d}$ variáveis de spin de bloco $y_{\mathbf{r}}^{(1)} = ((B \otimes I_N) \mathbf{y})_{\mathbf{r}}$ da primeira hierarquia. De maneira mais geral

$$\mathcal{U}_{L^{Kd}}(\mathbf{y}) = L^{-2k} \mathcal{U}_{L^{(K-k)d}}(\mathbf{y}^{(k)}) - (L-1)L^{-2k} \sum_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k}} |y_{\mathbf{r}}^{(k)}|^2, \quad (2.2.2)$$

com $\mathbf{y}^{(k)} = (B^k \otimes I_N) \mathbf{y}$ a configuração de spins de bloco da k -ésima hierarquia. É justamente esta característica da energia hierárquica que permite a implementação do grupo de renormalização mais facilmente.

Relação de Recorrência. O nosso interesse está na evolução, com o aumento da hierarquia k , da distribuição da variável soma

$$X_{k,N}^\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^{\gamma/d}}} \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_k} y_{\mathbf{i}}, \quad (2.2.3)$$

com $m = |\Lambda_k| = L^{kzd}$. Definimos com essa finalidade a medida “a priori” $\sigma_k^{(N)}$ associada à escala k pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{L^{Kd}}} \delta \left(L^{-\left(\frac{\gamma-d}{2}\right)k} (B^k \otimes I_N) \mathbf{y}' - \mathbf{y} \right) d\nu_{L^{Kd}}^{(N)}(\mathbf{y}') = \\ & = \frac{1}{Z_{L^{(K-k)d}}^{(N)}} \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}}{2} \mathcal{U}_{L^{(K-k)d}}(\mathbf{y}) \right\} \prod_{\mathbf{i} \in \Lambda_{K-k}} d\sigma_k^{(N)}(y_{\mathbf{i}}); \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

integramos a medida (2.1.1) sobre o espaço de configuração mantendo a configuração de spins de bloco da k -ésima hierarquia fixa - (2.2.4) é uma medida marginal sobre $\Omega_{L^{(K-k)d}}$. O fator γ pode assumir o valor $d+2$ ou d , introduzido a fim de se incluir ou não a normalização L^{-k} , presente em (2.2.2), à variável de bloco; assim,

$$c_{\gamma,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma = d+2 \\ L^{-2k} & \text{se } \gamma = d \end{cases}. \quad (2.2.5)$$

Quando $\gamma = d+2$ diz-se que a normalização é *anormal*, o que na verdade expressa uma normalização mais que normal devido ao fator adicional 2 em relação à normalização dita *normal*, caso em que $\gamma = d$, como é feito no Teorema Central do Limite usual.

Estabeleceremos agora uma relação recursiva para as medidas “a priori”:

Proposição 2.2.1 *As medidas “a priori” associadas a escalas consecutivas relacionam-se por*

$$\sigma_k^{(N)}(y) = \frac{1}{C_k} e^{c_{\gamma,k}(L-1)|y|^2/2} \underbrace{\sigma_{k-1}^{(N)} * \dots * \sigma_{k-1}^{(N)}}_{L^d\text{-termos}}(L^{\gamma/2} y) \quad (2.2.6)$$

com condição inicial

$$\sigma_0^{(N)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| < \sqrt{\beta N} \\ 1 & \text{se } |y| \geq \sqrt{\beta N} \end{cases}, \quad (2.2.7)$$

sendo que $*$ denota o produto de convolução

$$\rho * \eta(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y - y') d\eta(y'), \quad (2.2.8)$$

e C_k uma normalização que garante que $\sigma_k^{(N)}$ é uma medida de probabilidade.

Demonstração. Sendo (2.2.4) uma medida marginal, podemos obtê-la pela integração da medida de Gibbs

$$\frac{1}{Z_{L^{(K-(k-1))d}}^{(N)}} \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k-1}}{2} \mathcal{U}_{L^{(K-(k-1))d}}(\mathbf{y}') \right\} \prod_{\mathbf{i} \in \Lambda_{K-(k-1)}} d\sigma_{k-1}^{(N)}(y'_i) \quad (2.2.9)$$

sobre o espaço de configuração $\Omega_{L^{(K-(k-1))d}}$ mantendo-se fixa a configuração de spins de bloco normalizada $L^{-(\frac{\gamma-d}{2})}(B \otimes I_N) \mathbf{y}' \in \Omega_{L^{(K-k)d}}$. Para isso precisamos de uma relação entre as energias $\mathcal{U}_{L^{(K-(k-1))d}}(\mathbf{y}')$ e $\mathcal{U}_{L^{(K-k)d}}((B \otimes I_N) \mathbf{y}')$ análoga à (2.2.1); trocando K por $K - (k - 1)$ em (2.2.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{L^{(K-(k-1))d}}(\mathbf{y}') &= L^{-2} \mathcal{U}_{L^{(K-k)d}}((B \otimes I_N) \mathbf{y}') \\ &\quad - (L-1)L^{-2} \sum_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k}} |((B \otimes I_N) \mathbf{y}')_{\mathbf{r}}|^2. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Note que

$$\begin{aligned} L^{-\left(\frac{\gamma-d}{2}\right)}((B \otimes I_N) \mathbf{y}')_{\mathbf{r}} &= \frac{1}{L^{\left(\frac{\gamma-d}{2}\right)}} \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{j} \in \Lambda_1} y'_{L\mathbf{r}+\mathbf{j}} \\ &= \frac{1}{L^{\gamma/2}} \sum_{\mathbf{j} \in \Lambda_1} y'_{L\mathbf{r}+\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Utilizando a seguinte decomposição e notação

$$\begin{aligned} \delta \left(L^{-\left(\frac{\gamma-d}{2}\right)}(B \otimes I_N) \mathbf{y}' - \mathbf{y} \right) &= \prod_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k}} \delta \left(L^{-\left(\frac{\gamma-d}{2}\right)}((B \otimes I_N) \mathbf{y}')_{\mathbf{r}} - y_{\mathbf{r}} \right) \\ &= \prod_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k}} \delta(\cdot, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

temos então

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{L^{(K-(k-1))d}}} \delta \left(L^{-\left(\frac{\gamma-d}{2}\right)}(B \otimes I_N) \mathbf{y}' - \mathbf{y} \right) (2.2.9) = \\ &= \int_{\Omega_{L^{(K-k)d}}} \int_{\Omega_{L^d}} \prod_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k}} \left\{ e^{c_{\gamma,k-1}(L-1)L^{-2}|((B \otimes I_N) \mathbf{y}')_{\mathbf{r}}|^2/2} \delta(\cdot, \mathbf{r}) \prod_{\mathbf{j} \in \Lambda_1} d\sigma_{k-1}^{(N)}(y'_{L\mathbf{r}+\mathbf{j}}) \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{Z_{L^{(K-(k-1))d}}^{(N)}} \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k-1}L^{-2}}{2} \mathcal{U}_{L^{(K-k)d}}((B \otimes I_N) \mathbf{y}') \right\} \\ &= \frac{1}{Z_{L^{(K-k)d}}^{(N)}} \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}}{2} \mathcal{U}_{L^{(K-k)d}}(\mathbf{y}) \right\} \prod_{\mathbf{r} \in \Lambda_{K-k}} \frac{1}{C_k} e^{c_{\gamma,k}(L-1)|y_{\mathbf{r}}|^2/2} d(\underbrace{\sigma_{k-1}^{(N)} * \dots * \sigma_{k-1}^{(N)}}_{L^d\text{-termos}})(L^{\gamma/2} y_{\mathbf{r}}); \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

L^d termos porque a cardinalidade de Λ_1 é L^d . Para concluirmos (2.2.6) devemos comparar (2.2.13) com (2.2.4).

Quanto à condição inicial (2.2.7), essa é a função distribuição

$$\int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_N} d\sigma_0^{(N)}(y') \quad y' \in \mathbb{R}^N \quad (2.2.14)$$

associada à medida “a priori” inicial (2.1.4). ■

Observação 2.2.2 *Pela mudança de variável $\mathbf{y} \rightarrow \sqrt{\beta}\mathbf{y}$, (2.2.6) passa a ser escrita*

$$\sigma_k^{(N)}(y) = \frac{1}{C_k} e^{\beta c_{\gamma,k}(L-1)|y|^2/2} \underbrace{\sigma_{k-1}^{(N)} * \cdots * \sigma_{k-1}^{(N)}}_{L^d\text{-termos}}(L^{\gamma/2} y)$$

com condição inicial

$$\sigma_0^{(N)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| < \sqrt{N} \\ 1 & \text{se } |y| \geq \sqrt{N} \end{cases}.$$

No limite de altas temperaturas ($\beta \rightarrow 0^+$) temos apenas a convolução de L^d medidas “a priori”. Isto está em pleno acordo com o fato que nesse limite as variáveis de spin comportam-se como variáveis aleatórias independentes (não há acoplamento).

Observação 2.2.3 *Se $\mathcal{M}$ denota o espaço das medidas “a priori” em $\mathbb{R}^N$, (2.2.6) define um mapa $\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$*

$$\sigma_k^{(N)} = \mathcal{R}\sigma_{k-1}^{(N)}, \quad (2.2.15)$$

e a coleção $\left\{ \sigma_k^{(N)}(y) \right\}_{k=0}^K$ uma trajetória discreta sobre esse espaço.

Relação de Recorrência Dual. Consideremos agora a função característica da medida “a priori” associada à escala k

$$\phi_k^{(N)}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iz \cdot y\} d\sigma_k^{(N)}(y) . \quad (2.2.16)$$

Proposição 2.2.4 *A medida “a priori” $\phi_k^{(N)}(z)$ obedece a relação de recorrência*

$$\phi_k^{(N)}(z) = \frac{1}{N_k} \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \Delta \right\} \left(\phi_{k-1}^{(N)}(L^{-\gamma/2} z) \right)^{L^d} \quad (2.2.17)$$

com

$$\phi_0^{(N)}(z) = \frac{\Gamma(N/2)}{(\sqrt{\beta N}|z|/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1} \left(\sqrt{\beta N}|z| \right) , \quad (2.2.18)$$

sendo $\Delta = \partial^2/\partial z_1^2 + \dots + \partial^2/\partial z_N^2$ o operador laplaceano N -dimensional, $J_\nu(\xi)$ a função de Bessel de ordem ν , $\Gamma(n)$ a função gama de Euler, e N_k uma normalização tal que $\phi_k^{(N)}(0) = 1$ para todo $k = 1, 2, \dots, K$ e todo L .

Demonstração. Por (2.2.6), ignorando o fator C_k , temos que

$$\phi_k^{(N)}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iz \cdot y\} e^{c_{\gamma,k}(L-1)|y|^2/2} d(\underbrace{\sigma_{k-1}^{(N)} * \dots * \sigma_{k-1}^{(N)}}_{L^d\text{-termos}})(L^{\gamma/2} y) . \quad (2.2.19)$$

Uma vez que o laplaceano atua somente na variável z

$$\begin{aligned} e^{iz \cdot y} e^{c_{\gamma,k}(L-1)|y|^2/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \right)^n (|y|)^{2n} e^{iz \cdot y} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \right)^n \frac{(\Delta)^n}{(i^2)^n} e^{iz \cdot y} \\ &= \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \Delta \right\} e^{iz \cdot y} , \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

e (2.2.19) fica

$$\begin{aligned}
\phi_k^{(N)}(z) &= \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \Delta \right\} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iz \cdot y\} d(\underbrace{\sigma_{k-1}^{(N)} * \dots * \sigma_{k-1}^{(N)}}_{L^d\text{-termos}})(L^{\gamma/2} y) \\
&= \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \Delta \right\} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iL^{-\gamma/2} z \cdot y\} d(\underbrace{\sigma_{k-1}^{(N)} * \dots * \sigma_{k-1}^{(N)}}_{L^d\text{-termos}})(y) .
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Pelo Teorema da Convolução e pela definição (2.2.16), temos então que

$$\phi_k^{(N)}(z) = \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \Delta \right\} \left(\phi_{k-1}^{(N)}(L^{-\gamma/2} z) \right)^{L^d} . \tag{2.2.22}$$

De (2.2.16) e do fato que $\sigma_k^{(N)}(y)$ é uma medida de probabilidade, vê-se a necessidade de que $\phi_k^{(N)}(0) = 1$ para todo k e todo L . Normalizamos assim (2.2.22) por

$$N_k = \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \Delta \right\} \left(\phi_{k-1}^{(N)}(L^{-\gamma/2} z) \right)^{L^d} \Big|_{z=0} . \tag{2.2.23}$$

Para finalizarmos esta demonstração temos de fazer a transformada de Fourier da medida “a priori” inicial (2.2.7). Utilizando coordenadas esféricas generalizadas (lembrando que o jacobiano é dado por (2.1.9)), efetuando a mudança de variável $\theta = \theta_1 - \pi/2$, e fazendo uso da igualdade (2.1.10) com N trocado por $N-1$, temos:

$$\begin{aligned}
\phi_0^{(N)}(z) &= \frac{1}{S_{\beta N}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iz \cdot y\} \delta(|y| - \sqrt{\beta N}) d^N y \\
&= \frac{S_1^{N-1}}{S_{\beta N}^N} \int_0^\infty r^{N-1} \delta(r - \sqrt{\beta N}) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i|z|r \sin \theta} (\cos \theta)^{N-2} d\theta dr \\
&= \frac{(2\pi)^{N/2}}{S_{\beta N}^N} \int_0^\infty r^{N-1} \delta(r - \sqrt{\beta N}) \frac{J_{N/2-1}(|z|r)}{(|z|r)^{N/2-1}} dr \\
&= \frac{\Gamma(N/2)}{(\sqrt{\beta N}|z|/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1}(\sqrt{\beta N}|z|) ,
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

sendo

$$J_\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\xi \sin \theta) (\cos \theta)^{2\nu} d\theta, \quad (2.2.25)$$

com $\Re(\nu) > -1/2$, a representação integral da função de Bessel de ordem ν (vide equação (20) do Capítulo VII de [2]). Note que

$$\phi_0^{(N)}(0) = \frac{1}{S_{\beta N}} \int_{\mathbb{R}^N} \delta(|y| - \sqrt{\beta N}) d^N y = 1, \quad (2.2.26)$$

não havendo necessidade de uma normalização. ■

Comentário 2.2.5 *As relações recursivas (2.2.6) e (2.2.17) recebem o nome de Transformação de Grupo de Renormalização.*

Observação 2.2.6 *Uma vez que $\phi_0^{(N)}(z)$ depende apenas do módulo $|z| = \sqrt{z \cdot z}$ da variável e o operador laplaceano preserva simetria esférica, segue que $\phi_k^{(N)}(z)$ é uma função de $|z|$ para todo $k = 1, 2, \dots, K$.*

Teorema de Lee-Yang. Devemos ressaltar que o fato de termos feito a transformada de Fourier² da medida “a priori” é de extrema importância, pois é através dessa que se estabelece a relação com o *teorema de Lee-Yang*.

Definição 2.2.7 (Propriedade de Lee-Yang) *Uma medida ρ de Borel em $\mathbb{R}^N$ possui a propriedade de Lee-Yang se sua função característica $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{iz \cdot y\} d\rho(y)$ pertence à classe das funções inteiras $\mathcal{L}$ de Laguerre, as quais possuem a representação*

$$f(\zeta) = \exp(\lambda \zeta) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\alpha_n^2}\right) \quad (2.2.27)$$

com $\zeta = -|z|^2 \in \mathbb{C}$, $\lambda \geq 0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ números reais satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-2} < \infty$.

²Em [15] e [17] os autores consideram a transformada de Laplace aos invés da transformada de Fourier. Todavia, como nos dois casos a função transformada é inteira, as conclusões não são afetadas.

Para a função característica $\phi_0^{(N)}(z)$ temos que

$$\begin{aligned}\phi_0^{(N)}(z) &= \frac{\Gamma(N/2)}{(\sqrt{\beta N}|z|/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1}(\sqrt{\beta N}|z|) \\ &= \frac{\Gamma(N/2)}{(i\sqrt{\beta Nx}/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1}(i\sqrt{\beta Nx}) := \varphi_0^{(N)}(x),\end{aligned}\quad (2.2.28)$$

$x = -|z|^2 \in \mathbb{R}$. Se $\{\alpha_{n,\nu}, n \geq 1\}$ denotam os zeros de $J_\nu(\xi)$,

$$\left\{ -\frac{\alpha_{n,N/2-1}^2}{\beta N}, n \geq 1 \right\} \quad (2.2.29)$$

são os zeros da medida “a priori” $\varphi_0^{(N)}(x)$, chamados de *zeros de Lee-Yang*. Desta maneira,

$$\varphi_0^{(N)}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\frac{\alpha_{k,N/2-1}^2}{\beta N}} \right). \quad (2.2.30)$$

Note que $\varphi_0^{(N)}(0) = 1$ e que $J_{N/2-1}(i\sqrt{\beta Nx}) = I_{N/2-1}(\sqrt{\beta Nx})$ é uma função inteira de x , e portanto a condição $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,N/2-1}^{-2} < \infty$ é satisfeita. Para n grande vale o comportamento assintótico

$$\alpha_{n,N/2-1} \sim (N-1)\frac{\pi}{4} + (2n-1)\frac{\pi}{2}; \quad (2.2.31)$$

para N grande tem-se que

$$\Gamma(N/2) I_{N/2-1}(\sqrt{\beta Nx}) \sim \left(\frac{\sqrt{\beta Nx}}{2} \right)^{N/2-1}. \quad (2.2.32)$$

Espaço de Funções Inteiras e a Trajetória $\left\{ \phi_k^{(N)}(z) \right\}_{k=1}^{\infty}$. Finalizaremos esta seção reproduzindo um trecho do artigo [17] de Kozitsky e Wołowiski e fazendo um comentário sobre o artigo [27] de Watanabe. Nesses dois trabalhos os autores estudam um problema

de valor inicial relacionado à órbita discreta induzida pelo mapa (2.2.17). Tomaremos a liberdade de modificar algumas notações utilizadas nos citados artigos.

Seja $\mathcal{E}$ o conjunto de todas as funções inteiras de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, e

$$\|f\|_b := \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{b^k} \left| \frac{d^k f(0)}{d\zeta^k} \right|. \quad (2.2.33)$$

Para $a \geq 0$, seja

$$\mathcal{A}_a = \{f \in \mathcal{E} : (\forall b > a) \quad \|f\|_b < \infty\}. \quad (2.2.34)$$

Por fim, denotando por $\mathcal{L}$ a classe das funções inteiras de Laguerre, sejam

$$\mathcal{L}^+ = \{f \in \mathcal{L} : f(0) > 0\}, \quad \mathcal{L}^{(1)} = \{f \in \mathcal{L} : f(0) = 1\}, \quad (2.2.35)$$

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L} \cap \mathcal{A}_a, \quad \mathcal{L}_a^+ = \mathcal{L}^+ \cap \mathcal{A}_a, \quad \mathcal{L}_a^{(1)} = \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{A}_a. \quad (2.2.36)$$

Dado $\theta \geq 0$, o mapa $\Delta_\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é definido por

$$(\Delta_\theta f)(\zeta) = \theta \frac{df(\zeta)}{d\zeta} + \zeta \frac{d^2 f(\zeta)}{d\zeta^2}. \quad (2.2.37)$$

Consideremos agora o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, \zeta)}{\partial t} &= (\Delta_\theta f)(t, \zeta), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \\ f(0, \zeta) &= g(\zeta), \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

e que a condição inicial tenha a forma

$$g(\zeta) = \exp(-\varepsilon \zeta) h(\zeta), \quad h \in \mathcal{A}_0, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (2.2.39)$$

O seguinte resultado foi demonstrado em [16] pelo Teorema 1.6.

Proposição 2.2.8 (i) Para todo $\theta \geq 0$ e $g \in \mathcal{E}$ tendo a forma (2.2.39), o problema (2.2.38) tem uma única solução em $\mathcal{A}_\varepsilon$, a qual possui a seguinte representação integral

$$f(t, \zeta) = \exp\left(-\frac{\zeta}{t}\right) \int_0^{+\infty} s^{\theta-1} w_\theta\left(\frac{\zeta s}{t}\right) e^{-s} g(ts) ds, \quad (2.2.40)$$

sendo $t > 0$ e

$$w_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k! \Gamma(\theta + k)}. \quad (2.2.41)$$

(ii) Se em (2.2.39) $\varepsilon > 0$, a solução (2.2.40) converge em $\mathcal{A}_\varepsilon$ para zero quando $t \rightarrow \infty$.

(iii) Se em (2.2.39) $h \in \mathcal{L}_0$ e $\varepsilon = 0$, a solução (2.2.40) também pertence a $\mathcal{L}_0$. Ela diverge quando $t \rightarrow \infty$, o que significa que $M_f(t, r) \rightarrow \infty$ para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Aqui

$$M_f(t, r) = \sup_{|\zeta| \leq r} |f(t, \zeta)|. \quad (2.2.42)$$

A evolução descrita pela equação (2.2.38) é modificada como segue. Dividamos o semi-eixo do tempo $\mathbb{R}_+$ em intervalos $\mathcal{I}_k = ((k-1)\beta, k\beta]$, $k \in \mathbb{N}$, com $\beta > 0$ e

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k. \quad (2.2.43)$$

Em cada intervalo a evolução é descrita por (2.2.38), mas nos tempos $t = k\beta$, $k \neq 0$, a função do dado inicial do problema é modificada da seguinte maneira

$$f(k\beta, \zeta) \rightarrow [f(k\beta, \delta^{-1-\nu}\zeta)]^\delta, \quad (2.2.44)$$

com $\nu > 0$ fixo e um inteiro $\delta \geq 2$. É mais conveniente trabalhar com a seqüência de funções dependentes de t pertencente a um intervalo a considerar uma função com t

variando sobre uma seqüência de intervalos. No que segue, considera-se a seqüência de funções $\{f_k(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$, cada uma dessas sendo a solução do seguinte problema de Cauchy

$$\frac{\partial f_k(t, \zeta)}{\partial t} = \beta(\Delta_{\theta} f_k)(t, \zeta), \quad \beta \geq 0, \quad t \in (0, 1], \quad (2.2.45)$$

com condição inicial

$$\begin{aligned} f_k(0, \zeta) &= [f_{k-1}(1, \delta^{-1-\nu}\zeta)]^{\delta}, \quad k \in \mathbb{N} \\ f_0(1, \zeta) &= g(\zeta), \quad g \in \mathcal{L}^+. \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

Qualquer $g \in \mathcal{L}^+$ é descrita pelos parâmetros λ e $\{\alpha_n, n \geq 1\}$ - vide representação (2.2.27). Dados $g \in \mathcal{L}^+$ e $j \in \mathbb{N}$, definimos os momentos da distribuição dos zeros

$$m_j(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-2j}. \quad (2.2.47)$$

e

$$I(g) = \begin{cases} [0, (\delta^{\nu} - 1)/\lambda] & \text{se } \lambda > 0 \\ [0, \infty) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}. \quad (2.2.48)$$

A Proposição (2.2.8) implica a existência de soluções de (2.2.45)-(2.2.46) ao menos para $g \in \mathcal{L}_0$. O teorema a seguir estabelece a existência de soluções desse problema em uma situação mais geral.

Teorema 2.2.9 *Sejam $g \in \mathcal{L}^+$ e $\beta \in I(g)$ dados. Então para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\theta \geq 0$, o problema (2.2.45)-(2.2.46) tem uma única solução f_k , a qual pertence a $\mathcal{L}_{\lambda}^+$.*

Para $\beta = 0$, a seqüência $\{f_k(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$ pode ser encontrada explicitamente

$$f_k(t, \zeta) = [g(1, \delta^{-(1+\nu)k}\zeta)]^{\delta^k}.$$

Se $g \in \mathcal{L}^{(1)}$, tal seqüência converge em $\mathcal{A}_\lambda$ para a função $f(t, \zeta) \equiv 1$. Podemos assim esperar que a mesma convergência, ou similar, seja válida também para valores pequenos de β . Por outro lado, para valores grandes de β , a afirmação (iii) da Proposição 2.2.8 sugere que há divergência. O objetivo dos autores nesse trabalho foi estudar as seguintes questões: (a) existe um valor intermediário de β , digamos β^* , que separa valores “grandes” e “pequenos” desse parâmetro?; (b) qual seria a convergência da seqüência $\{f_k(\zeta)\}_{k=1}^\infty$ para $\beta = \beta^*$? A resposta foi encontrada para $\nu \in (0, 1/2)$ e g escolhida em um subconjunto de $\mathcal{L}^+$ definido por ν como segue. Seja

$$\vartheta(\nu) := \frac{1 - \delta^{-\epsilon}}{\delta^\nu - \delta^{-\epsilon}}, \quad \epsilon = \frac{1 - 2\nu}{4}. \quad (2.2.49)$$

Definição 2.2.10 *A família $\mathcal{L}(\nu)$ consiste das funções $g \in \mathcal{L}^{(1)}$ que não são constantes e são tais que*

$$\frac{m_2(g)}{(\lambda + m_1(g))^2} \leq \frac{\delta^{1/2}}{\theta + 1} \vartheta(\nu), \quad \frac{m_2(g)}{(m_1(g))^2} \geq \frac{\delta^{1/2}}{\theta + 1}. \quad (2.2.50)$$

Denotando por $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos números naturais com exclusão do 0, os autores enunciam seu principal teorema:

Teorema 2.2.11 *Para todo $\theta \geq 0$ e $g \in \mathcal{L}(\nu)$, existe $\beta^* \in I(g)$ positivo e uma função $C : [0, \beta^*] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que*

(i) *para $\beta < \beta^*$, a seqüência de soluções de (2.2.45)-(2.2.46)*

$$\{f_k(t, \zeta) : k \in \mathbb{N}_0, \quad f_0(1, \zeta) = C(\beta)g(\zeta)\}$$

converge em $\mathcal{A}_{\kappa-1}$, com $\kappa = \beta^/(\delta^\nu - 1)$, para a função $f(t, \zeta) \equiv 1$;*

(ii) *para $\beta = \beta^*$, a seqüência*

$$\{f_k(t, \zeta) : k \in \mathbb{N}_0, \quad f_0(1, \zeta) = C(\beta^*)g(\zeta)\}$$

converge em $\mathcal{A}_{\kappa-1}$ para

$$f^*(t, \zeta) = \frac{\delta^{-\theta\nu\delta/(\delta-1)}}{(1 - t(1 - \delta^{-\nu}))^\theta} \exp\left(\frac{1}{\beta^*} \frac{1 - \delta^{-\nu}}{1 - t(1 - \delta^{-\nu})} \zeta\right). \quad (2.2.51)$$

A conexão entre as trajetórias $\{f_k(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{\phi_k^{(N)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ é feita pelas identificações:

$$\delta = L^d ; \quad (2.2.52)$$

$$\theta = N/2 ; \quad (2.2.53)$$

$\Delta_{N/2}$ é o laplaceano N -dimensional

$$\frac{1}{2} (\Delta_{N/2} f)(\zeta) = \frac{N}{2} f'(\zeta) + x f''(\zeta) \quad (2.2.54)$$

escrito em coordenadas esféricas atuando sobre funções $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ $O(N)$ invariantes ($\phi(Uz) = \phi(z) \quad \forall U \in O(N)$) definidas por $f(\zeta) = \phi(z)$ com $\zeta = -|z|^2$;

$$\nu = \frac{\gamma - d}{d} ; \quad (2.2.55)$$

do fato que $\zeta = -|z|^2$, há uma mudança na escala do argumento feita em (2.2.46), que passa a ser

$$\phi_k^{(N)}(0, z) = [\phi_{k-1}^{(N)}(1, \delta^{-(1+\nu)/2} z)]^\delta . \quad (2.2.56)$$

Além disso, o parâmetro β deve ganhar a interpretação de inverso da temperatura, e deve ser efetuada uma mudança de variável de modo que β seja escrito na condição inicial e não mais na equação de evolução (2.2.45). O problema de valor inicial estudado por Kozitsky e Wołowiski, reescrito dessa maneira, foi estudado por Watanabe no caso de flutuações anormais ($\gamma = d + 2$, de tal forma que $\nu = 2/d$) partindo-se da condição inicial (2.2.18), com $L^d = 2$ e a escolha $d = 4$, escolha essa que não é contemplada pelo estudo [17] - no trabalho de Watanabe $\nu = 1/2$, enquanto que no de Kozitsky e Wołowiski $\nu \in (0, 1/2)$.

2.3 A Aproximação de Potencial Local ($L \downarrow 1$)

Definindo o potencial

$$U(t, z) = -\ln \phi_k^{(N)}(z) \quad (2.3.1)$$

com parâmetro de escala

$$t = k \ln L, \quad (2.3.2)$$

tomaremos conjuntamente os limites $k \rightarrow \infty$ e $L \downarrow 1$ de tal maneira que $k \ln L$ permaneça fixo em um número real positivo t . Com esse procedimento, como veremos na próxima proposição, a órbita discreta $\left\{ -\ln \phi_k^{(N)}(z) \right\}_{k=0}^{\infty}$ torna-se contínua, e a dinâmica completa se reduz a uma equação a derivadas parciais. O limite da dimensão do bloco L para 1 é a chamada *aproximação de potencial local*.

Proposição 2.3.1 *O potencial $U(t, z)$ definido por (2.3.1) e (2.3.2) satisfaz, no limite conjunto $k \rightarrow \infty$ e $L \downarrow 1$, a equação diferencial parcial não-linear*

$$U_t = -\frac{c_\gamma(t)}{2} (\Delta U - |U_z|^2) - \frac{\gamma}{2} z \cdot U_z + dU + \frac{c_\gamma(t)}{2} \Delta U(t, 0) \quad (2.3.3)$$

com condição inicial

$$U(0, z) = -\ln \left[\frac{\Gamma(N/2)}{(\sqrt{\beta N}|z|/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1} \left(\sqrt{\beta N}|z| \right) \right]. \quad (2.3.4)$$

O termo $\Delta U(t, 0)$ é um multiplicador de Lagrange necessário para garantir que $U(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$, haja vista que $\phi_k^{(N)}(0) = 1$ para todo $k = 0, 1, \dots$ e todo L e a definição (2.3.1) do potencial $U(t, z)$; $U_z = \partial U / \partial z$ com $\partial / \partial z = (\partial / \partial z_1, \dots, \partial / \partial z_N)$; e

$$c_\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma = d + 2 \\ e^{-2t} & \text{se } \gamma = d \end{cases} \quad (2.3.5)$$

é $c_{\gamma,k}$ (2.2.5) escrito em termos de t , considerando-se (2.3.2).

Demonstração. Da definição de derivada, pela definição (2.3.1) do potencial $U(t, z)$, pela relação (2.2.17), e da observação que $t - \ln L = (k - 1) \ln L$, temos

$$\begin{aligned} U_t &= \lim_{L \downarrow 1} \frac{U(t, z) - U(t - \ln L, z)}{\ln L} \\ &= \lim_{L \downarrow 1} \frac{1}{\ln L} \left\{ -\ln \left[\frac{1}{N_k} \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma,k}(L-1)}{2} \Delta \right\} \left(\phi_{k-1}^{(N)}(L^{-\gamma/2} z) \right)^{L^d} \right] + \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z) \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{t} \left\{ -\ln \left[\frac{1}{N_k} \exp \left\{ -\frac{c_{\gamma}(t)(e^{t/k} - 1)}{2} \Delta \right\} \left(\phi_{k-1}^{(N)}(e^{-\gamma t/2k} z) \right)^{e^{dt/k}} \right] + \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z) \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

com N_k dado por (2.2.23).

Notemos agora que para k grande valem as seguintes expansões:

$$\exp \left\{ -\frac{c_{\gamma}(t)(e^{t/k} - 1)}{2} \Delta \right\} = 1 - \frac{k}{t} \frac{c_{\gamma}(t)}{2} \Delta + O((k/t)^2) \quad (2.3.7)$$

e

$$\begin{aligned} &\left(\phi_{k-1}^{(N)}(e^{-\gamma t/2k} z) \right)^{e^{dt/k}} = \\ &= \phi_{k-1}^{(N)}(z) + \phi_{k-1}^{(N)}(z) \left(-\frac{\gamma}{2} z \cdot \frac{\partial \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z)}{\partial z} + d \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z) \right) \frac{k}{t} + O((k/t)^2). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Substituindo tais expressões na última igualdade de (2.3.6), e utilizando a expansão

$$\ln(a_0 + a_1 x + O(x^2)) = \ln a_0 + \frac{a_1}{a_0} x + O(x^2) \quad (2.3.9)$$

para x pequeno e $a_0 > 0$, obtemos

$$U_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{c_{\gamma}(t)}{2} \frac{\Delta \phi_{k-1}^{(N)}(z)}{\phi_{k-1}^{(N)}(z)} + \frac{\gamma}{2} z \cdot \frac{\partial \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z)}{\partial z} - d \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z) - \frac{c_{\gamma}(t)}{2} \Delta \phi_{k-1}^{(N)}(0) + O((t/k)) \right\}. \quad (2.3.10)$$

Note que o último termo é justamente

$$-\frac{c_\gamma(t)}{2} \frac{\Delta \phi_{k-1}^{(N)}(z)}{\phi_{k-1}^{(N)}(z)} - \frac{\gamma}{2} z \cdot \frac{\partial \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z)}{\partial z} + d \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z) \Big|_{z=0}, \quad (2.3.11)$$

proveniente da expansão de $\ln N_k$.

Por fim, pelas igualdades

$$\frac{\Delta \phi_{k-1}^{(N)}(z)}{\phi_{k-1}^{(N)}(z)} = \Delta \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z) + \left| \frac{\partial \ln \phi_{k-1}^{(N)}(z)}{\partial z} \right|^2, \quad (2.3.12)$$

$$\Delta \phi_{k-1}^{(N)}(0) = \Delta \ln \phi_{k-1}^{(N)}(0) \quad (2.3.13)$$

e $\ln \phi_{k-1}^{(N)}(z) = -U(t - t/k, z)$, obtemos (2.3.3).

Quanto à condição inicial (2.3.4), esta segue imediatamente do fato que

$$U(0, z) = -\ln \phi_0^{(N)}(z) \quad (2.3.14)$$

e de (2.2.18).

■

Como já observado na seção anterior, a condição inicial para a função característica depende de $r = |z| = \sqrt{z \cdot z}$, de modo que a condição inicial (2.3.4) também. Uma vez que a equação de evolução (2.3.3) preserva a simetria esférica, é conveniente e suficiente que trabalhemos com a parte radial da variável z , do termo $z \cdot U_z$, e de Δ , dados respectivamente por r , $r \, d/dr$, e

$$\frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (N-1) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Definindo o potencial escalado

$$u^{(N)}(t, x) = \frac{1}{N} U(t, \sqrt{N} z) \quad (2.3.15)$$

com $x = -|z|^2 = -r^2$, o problema de valor inicial (2.3.3)-(2.3.4) torna-se

$$u_t^{(N)} = c_\gamma(t) \left(\frac{2}{N} x u_{xx}^{(N)} + u_x^{(N)} - 2x (u_x^{(N)})^2 \right) - \gamma x u_x^{(N)} + du^{(N)} - c_\gamma(t) u_x^{(N)}(t, 0) \quad (2.3.16)$$

com

$$u^{(N)}(0, x) = -\frac{1}{N} \ln \left[\frac{\Gamma(N/2)}{(i\sqrt{\beta x} N/2)^{N/2-1}} J_{N/2-1} \left(i\sqrt{\beta x} N \right) \right]. \quad (2.3.17)$$

O termo $u_x^{(N)}(t, 0)$ em (2.3.16) é um multiplicador de Lagrange necessário para garantir que $u^{(N)}(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$. O problema de valor inicial (2.3.16)-(2.3.17) será o ponto de partida para estabelecermos o Teorema Central do Limite.

Capítulo 3

Trajectoria Contínua: Caso $N = \infty$

3.1 O Modelo Esférico Hierárquico

Um resultado clássico devido a Kac e Thompson [18] diz que a energia livre do modelo de Heisenberg $O(N)$ é igual à correspondente energia livre do modelo esférico quando são tomados os limites termodinâmico e $N \rightarrow \infty$, independentemente da ordem em que tais limites são tomados. Para estabelecer o resultado, a hipótese de invariância por translação

$$J_{xy} = f(|x - y|) \tag{3.1.1}$$

da matriz de interação $J = [J_{xy}]$ foi assumida pelos autores. Anos mais tarde, Kunz e Zumbach [19] encontraram falhas sérias na demonstração envolvendo a troca do limite $N \rightarrow \infty$ com o limite termodinâmico, e foram capazes de confirmar o resultado de Kac-Thompson apenas para interação entre vizinhos mais próximos ($J_{xy} = 0$ se $|x - y| > 1$). A necessidade da invariância por translação foi também posta em questão por estes últimos visto que há exemplos cuja troca dos limites pode ser realizada mesmo quando esta propriedade não é satisfeita.

Como parte de um estudo preliminar a este projeto foram estendidos e complementados para o modelo $O(N)$ de Heisenberg hierárquico, cuja matriz de interação não satisfaz invariância por translação nem alcance finito, os resultados obtidos por Kunz e Zumbach. Mostramos em [4] a convergência da energia livre e da função geratriz do

modelo de Heisenberg $O(N)$ hierárquico para as do modelo esférico hierárquico quando os limites $n \rightarrow \infty$ (limite termodinâmico $K \rightarrow \infty$) e $N \rightarrow \infty$ são tomados, independentemente da ordem de tais limites. Para tanto, utilizamos uma adaptação do método empregado por Kac e Thompson [18], além do já citado artigo de Kunz e Zumbach [19], e uma generalização ($L > 1$ e $d \geq 1$) da definição de *positividade por reflexão* para o laplaceano hierárquico, encontrada em [27]. Um ponto importante a ser dito é que sendo L um inteiro estritamente maior que um na definição do último ingrediente, a demonstração da convergência falha no limite $L \downarrow 1$.

Também em [4] mostramos que o modelo esférico hierárquico exibe *ordem de longo alcance* (vide Definição 4.2.1 em [21]), desde que $d \geq 3$ e $\beta > \beta_c$. Pelo chamado *critério de ordem de longo alcance* (vide Definição 4.2.2 em [21]) isso implica existência de transição de fase. Essa, como exporemos nas próximas páginas deste trabalho, é do tipo *condensação de Bose-Einstein no modo de energia zero*. A saber, para esta parte de [4] tomamos por base o artigo [25] de Perez, que é iniciado com a seguinte afirmação: “Uma classe ampla de sistemas clássicos e quânticos exibe transição de fase de mesma natureza daquela observada no gás de Bose livre e no modelo esférico.”

No que se segue desta seção, definiremos o operador laplaceano hierárquico (seguindo o trabalho [27] de Watanabe, mas generalizando para $L > 1$ e $d \geq 1$ quaisquer), o modelo esférico hierárquico, e mostraremos o resultado mencionado no último parágrafo.

Projetores. Seja Λ_K a rede hipercúbica (2.1.14), $|\Lambda_K| = L^{Kd} = n$ sua cardinalidade, e J_H a matriz de interação hierárquica (2.1.21). Denotamos por $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$ um vetor que associa a cada vértice $\mathbf{i}$ de Λ_K uma componente $w_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}$, e por

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u})_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} = \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} w_{\mathbf{i}} u_{\mathbf{i}} \quad (3.1.2)$$

o produto interno em $\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$. Definimos o operador *laplaceano hierárquico* por

$$-\Delta_H = -J_H + \mu_0 I_n, \quad (3.1.3)$$

com I_n a matriz identidade de ordem n . Se $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)/\sqrt{n}$ denota o vetor normalizado ($(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} = 1$) em $\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$ cujas entradas são todas iguais a 1, o laplaceano

hierárquico, sendo um gerador estocástico de um semi-grupo, deve satisfazer

$$-\Delta_H \mathbf{1} = 0 . \quad (3.1.4)$$

Deste fato, e de (2.1.21) e (2.1.16), temos

$$\begin{aligned} \mu_0 = (\mathbf{1}, J_H \mathbf{1})_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} &= \frac{1}{L^{Kd}} \sum_{k=1}^K L^{-2k} (B^k \mathbf{1}, B^k \mathbf{1})_{\mathbb{R}^{|\Lambda_{K-k}|}} \\ &= \sum_{k=1}^K L^{-2k} . \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Assim,

$$-\Delta_H = \sum_{k=1}^K L^{-2k} (-(B^*)^k B^k + I_n) . \quad (3.1.6)$$

Com o operador de bloco B e seu adjunto B^* , definidos respectivamente por (2.1.16) e (2.1.19), introduzimos uma matriz de projeção $P_k = P_k^2$ ortogonal, $P_k = P_k^*$, sobre o subespaço de vetores em $\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$ que assumem valor constante sobre blocos de tamanho L^{dk} :

$$P_k = (B^*)^k B^k . \quad (3.1.7)$$

Da observação que $B^k (B^*)^k = B B^* = I_n$ para todo $k = 1, 2, \dots, K$, mostra-se que de fato

$$P_k^2 = (B^*)^k B^k (B^*)^k B^k = (B^*)^k I_n B^k = P_k , \quad (3.1.8)$$

e que para $j > k$ qualquer

$$\begin{aligned} P_j P_k &= (B^*)^j B^j (B^*)^k B^k = (B^*)^j B^{j-k} B^k = P_j \\ P_k P_j &= (B^*)^k B^k (B^*)^j B^j = (B^*)^k (B^*)^{j-k} B^k = P_j . \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Para essas matrizes de projeção a seguinte inclusão é verificada

$$P_K < P_{K-1} < \cdots < P_1 < P_0 \equiv I_n, \quad (3.1.10)$$

no sentido que $M < N$ se, e somente se, $(\mathbf{u}, M\mathbf{u})_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}} < (\mathbf{u}, N\mathbf{u})_{\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$.

Seja

$$Q_k = P_k - P_{k+1} \quad (3.1.11)$$

para $k = 0, 1, \dots, K-1$ e

$$Q_K = P_K \quad (3.1.12)$$

o operador de flutuação de bloco.

Teorema Espectral. Enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1 (Teorema Espectral) A coleção $\{Q_k\}_{k=0}^K$ de matrizes $n \times n$ de projeção ortogonais

$$Q_j Q_k = \delta_{jk} Q_k \quad (3.1.13)$$

é uma partição espectral da unidade

$$I_n = \sum_{k=0}^K Q_k,$$

e

$$f(-\Delta_H) = \sum_{k=0}^K f(\lambda_k) Q_k \quad (3.1.14)$$

vale com

$$\lambda_k = \frac{L^{-2k} - L^{-2K}}{L^2 - 1} \quad (3.1.15)$$

para qualquer função contínua $f : [0, 1/(L^2 - 1)] \rightarrow \mathbb{R}$. Segue que $-\Delta_H$ é uma matriz positiva com λ_k , para $k = 0, \dots, K-1$, um auto-valor de multiplicidade $L^{d(K-k)}(1-L^{-d})$ e $\lambda_K = 0$ um auto-valor simples.

Demonstração. Por (3.1.11) e (3.1.9)

$$\begin{aligned} Q_j Q_k &= (P_j - P_{j+1})(P_k - P_{k+1}) \\ &= P_j(P_k - P_{k+1}) - P_{j+1}(P_k - P_{k+1}) \\ &= (P_j - P_{j+1}) - (P_{j+1} - P_{j+2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

para todo $k < j < K$, e o mesmo vale para $j < k < K$. Para $j < k = K$

$$Q_j Q_K = (P_j - P_{j+1})P_K = P_K - P_K = 0, \quad (3.1.17)$$

e para $j = k$

$$Q_k Q_k = (P_k - P_{k+1})(P_k - P_{k+1}) = P_k + P_{k+1} - 2P_{k+1} = Q_k. \quad (3.1.18)$$

Fica assim demonstrada (3.1.13). Por definição,

$$\sum_{k=0}^K Q_k = \sum_{k=0}^{K-1} (P_k - P_{k+1}) + P_K = P_0 - P_K + P_K = I_n. \quad (3.1.19)$$

De (3.1.6), (3.1.7) e (3.1.11), temos

$$\begin{aligned} -\Delta_H &= \sum_{j=1}^K L^{-2j} (-P_j + I_n) \\ &= \sum_{j=1}^K L^{-2j} \sum_{k=0}^{j-1} Q_k \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{j=k+1}^K L^{-2j} \right) Q_k + 0 \cdot Q_K, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

o qual nos dá (3.1.14) com $f(x) = x$. Segue por (3.1.13) que (3.1.14) vale para qualquer polinômio e, pelo Teorema da Aproximação de Weiertrass, para qualquer função uniformemente contínua.

Por fim, uma vez que P_k projeta qualquer vetor de $\mathbb{R}^{|\Lambda_K|}$ em um vetor que é constante sobre blocos disjuntos de tamanho L^{dk} , o posto (*rank*) de P_k é

$$\text{posto } P_k = L^{d(K-k)} ; \quad (3.1.21)$$

esse é o número de blocos existentes na k -ésima hierarquia. Pela definição (3.1.11), juntamente com as inclusões (3.1.10), o posto do operador de flutuação de bloco Q_k é

$$\text{posto } Q_k = L^{d(K-k)} - L^{d(K-k-1)} , \quad (3.1.22)$$

para $k = 1, 2, \dots, K-1$ e

$$\text{posto } Q_K = 1 , \quad (3.1.23)$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Modelo Esférico Hierárquico. Sendo $\beta \geq 0$ o inverso da temperatura, o modelo esférico hierárquico (*ferromagnético*) é definido pela medida de Gibbs

$$d\nu^{(n)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{Q_n} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\mathbf{y}, -\Delta_H \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} \right\} d\sigma^{(n)}(\mathbf{y}) . \quad (3.1.24)$$

Nesta expressão,

$$Q_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\mathbf{y}, -\Delta_H \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} \right\} d\sigma^{(n)}(\mathbf{y}) \quad (3.1.25)$$

é a normalização necessária para que $d\nu^{(n)}(\mathbf{y})$ seja uma medida de probabilidade; $\mathbf{y}$ denota um elemento do espaço de configuração $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$; $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n}$ é o produto interno em $\mathbb{R}^n$ (3.1.2);

$$d\sigma^{(n)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{S_n^n} \delta(\|\mathbf{y}\| - \sqrt{n}) \prod_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} dy_{\mathbf{i}} \quad (3.1.26)$$

é a medida uniforme sobre a esfera n -dimensional

$$\Sigma_n^n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{y}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} = n\} \quad (3.1.27)$$

de raio $\sqrt{n}$, com

$$S_n^n = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\|\mathbf{y}\| - \sqrt{n}) \prod_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} dy_{\mathbf{i}} = \frac{2\pi^{n/2} (\sqrt{n})^{n-1}}{\Gamma(n/2)} \quad (3.1.28)$$

a área da superfície da esfera Σ_n^n (vide (2.1.10) e (2.1.13)). No modelo esférico, hierárquico ou não, associamos a cada vértice $\mathbf{i} \in \Lambda_K$ uma *variável de spin clássica* $y_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}$, estando essas variáveis sujeitas à condição subsidiária esférica (3.1.27) - daí o nome do modelo.

Condensação do Modo Zero. Consideremos agora a expressão

$$K_n = \frac{1}{S_n^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\mathbf{y}, (-\Delta_H - \mu I_n) \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} \right\} \prod_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} dy_{\mathbf{i}} ; \quad (3.1.29)$$

K_n pode ser entendido como o *ensemble grande canônico*, com $\mu \leq 0$ um multiplicador de Lagrange que desempenha o papel de potencial químico, introduzido a fim de se garantir que a condição (3.1.27) seja satisfeita. Tal potencial é definido implicitamente pela *regra de soma* (vide [25])

$$\frac{1}{n} \langle (\mathbf{y}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} \rangle = \frac{1}{|\Lambda_K|} \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_K} \langle (y_{\mathbf{i}})^2 \rangle = 1 , \quad (3.1.30)$$

sendo que $\langle f \rangle$ é o valor esperado da função $f = f(\mathbf{y})$ no estado de Gibbs à temperatura inversa β

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\mathbf{y}, (-\Delta_H - \mu I_n) \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} \right\} \prod_{i \in \Lambda_K} dy_i}{\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\mathbf{y}, (-\Delta_H - \mu I_n) \mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} \right\} \prod_{i \in \Lambda_K} dy_i} . \quad (3.1.31)$$

A integral em (3.1.29) pode ser facilmente efetuada, pois é gaussiana. Levando-se em conta (3.1.28), obtemos

$$K_n = \frac{\Gamma(n/2) 2^{n/2-1}}{(\sqrt{n})^{n-1} (\sqrt{\beta})^n} \frac{1}{\sqrt{\det(-\Delta_H - \mu I_n)}} . \quad (3.1.32)$$

A regra de soma (3.1.30) pode ser escrita a partir de (3.1.29) como

$$\frac{2}{\beta n} \frac{\partial \ln K_n}{\partial \mu} = 1 . \quad (3.1.33)$$

Fazendo uso de (3.1.32), juntamente com a relação $\det M = \exp\{Tr \ln M\}$, Tr o traço da matriz, somos levados a

$$\frac{1}{\beta n} Tr (-\Delta_H - \mu I_n)^{-1} = 1 . \quad (3.1.34)$$

O próximo passo é considerar o limite termodinâmico ($n \rightarrow \infty$). Faz-se assim necessária a introdução do conceito de *traço limite*: para qualquer seqüência $\{M_n\}_{n \geq 1}$ de matrizes reais simétricas, com n a ordem da matriz M_n , tais que

$$\mathbb{E}f(M) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Tr f(M_n) \quad (3.1.35)$$

existe para toda função f contínua e limitada,

$$\mathbb{E}f(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\lambda_i^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \rho_n(d\lambda) f(\lambda) = \int \rho(d\lambda) f(\lambda) \quad (3.1.36)$$

é a esperança com respeito à distribuição empírica ρ a qual, por (3.1.35), é o limite fraco da densidade integrada de auto-valores $\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ (contando as multiplicidades) de M_n

$$\rho_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{[\lambda_i^{(n)}, \infty)}(\lambda), \quad (3.1.37)$$

com $\chi_{[a,b)}(\lambda) = 1$ se $\lambda \in [a, b)$ e $\chi_{[a,b)}(\lambda) = 0$ de outra maneira.

Voltemos agora à regra de soma (3.1.34). Esta pode ser reescrita como

$$\frac{1}{n} \text{Tr} f(-\Delta_H) = \beta, \quad (3.1.38)$$

com $f(x) = (x - \mu)^{-1}$ - lembre-se que $\mu \leq 0$. Invocando o Teorema Espectral 3.1.1 e a propriedade de linearidade do traço, temos que

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{L^{Kd}} \text{Tr} f(-\Delta_H) \\ &= \frac{1}{L^{Kd}} \sum_{k=0}^K f(\lambda_k) \text{Tr} Q_k \\ &= (1 - L^{-d}) \sum_{k=0}^{K-1} L^{-dk} f(\lambda_k) + \frac{1}{L^{Kd}} f(\lambda_K) \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

em vista do fato que os auto-valores de Q_k são 0 e 1 juntamente com (3.1.22) e (3.1.23). Assim, no limite termodinâmico $K \rightarrow \infty$, a regra de soma (3.1.34) é escrita

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbb{E} (-\Delta_H - \mu I)^{-1} \\ &= (1 - L^{-d}) \sum_{k=0}^{\infty} L^{-dk} \frac{L^2 - 1}{L^{-2k} - \mu(L^2 - 1)} + \varrho_0 \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

sendo $\varrho_0 = \mathbb{E} \mathcal{P}_0 (-\Delta_H - \mu I)^{-1}$ e $\mathcal{P}_0$ a projeção sobre o auto-valor 0 de $-\Delta_H$.

Isolando ϱ_0 em (3.1.40), e tendo em mente que $\mu \leq 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\varrho_0 &= \beta - (1 - L^{-d}) \sum_{k=0}^{\infty} L^{-dk} \frac{L^2 - 1}{L^{-2k} - \mu(L^2 - 1)} \\
&\geq \beta - (1 - L^{-d})(L^2 - 1) \sum_{k=0}^{\infty} L^{-(d-2)k} \\
&= \beta - \frac{(1 - L^{-d})(L^2 - 1)}{1 - L^{-d+2}}, \tag{3.1.41}
\end{aligned}$$

contanto que $d > 2$. Desta maneira, ϱ_0 é estritamente positivo, isto é, há ocupação macroscópica do modo de energia nula, se

$$\beta > \frac{(1 - L^{-d})(L^2 - 1)}{1 - L^{-d+2}} \equiv \beta_c(d, L), \tag{3.1.42}$$

com $\beta_c(d, L)$ a chamada *temperatura inversa crítica*.

Condensação do Modo Zero no Limite $L \downarrow 1$. Consideraremos agora a versão contínua do laplaceano hierárquico por meio do limite $L \downarrow 1$. Para garantirmos a convergência, é imperativo que substituamos $-\Delta_H$ por $-(L-1)\Delta_H$, e portanto λ_k dá lugar a $(L-1)\lambda_k$. Fazendo-o, a expressão (3.1.40) fica

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{E}(-(L-1)\Delta_H - \mu I)^{-1} \\
&= (1 - L^{-d}) \sum_{k=0}^{\infty} L^{-dk} \frac{L^2 - 1}{(L-1)L^{-2k} - \mu(L^2 - 1)} + \varrho_0, \tag{3.1.43}
\end{aligned}$$

conduzindo-nos a

$$\begin{aligned}
\varrho_0 &\geq \beta - \lim_{L \downarrow 1} \frac{(1 - L^{-d})(L^2 - 1)}{(L-1)(1 - L^{-d+2})} \\
&= \beta - \frac{2d}{d-2}, \tag{3.1.44}
\end{aligned}$$

contanto que $d > 2$. Neste caso, a condensação de spins no estado de energia nula é observada se

$$\beta > \frac{2d}{d-2} \equiv \beta_c(d) . \quad (3.1.45)$$

A motivação para termos aqui reproduzido uma parte de [4] é justamente a determinação da temperatura inversa crítica (3.1.45).

Observação 3.1.2 *A relação entre ϱ_0 e a magnetização quadrada a campo magnético externo nulo*

$$m^2(0) := \lim_{K \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{1}{|\Lambda_K|} \sum_{i \in \Lambda_K} y_i \right)^2 \right\rangle \quad (3.1.46)$$

é apresentada em [25], e é dessa que segue a conexão entre condensação de spins no modo de energia nula e magnetização espontânea.

Observação 3.1.3 *É possível mostrar que o modelo de Heisenberg $O(N)$ hierárquico exibe ordem de longo alcance, sendo a transição de fase também da natureza de uma condensação de Bose-Einstein no modo de energia zero. Todavia, a temperatura inversa crítica $\beta_c(d, L, N)$ associada não é determinada, mas apenas estimada - vide [1].*

3.2 O Teorema Central do Limite

Estabeleceremos nesta seção o Teorema Central do Limite para o modelo esférico hierárquico ($N = \infty$) no caso em que $\gamma = d+2$ em (2.2.3) e $\beta = \beta_c$ (vide (3.1.45)), via equação a derivadas parciais (2.3.16) (obtida na aproximação de potencial local ($L \downarrow 1$)). Por simplicidade consideraremos apenas o caso $d = 4$, sendo o teorema válido para $d \geq 4$.

Partindo de (2.3.16) escolhemos $\gamma = d+2$ (e portanto $c_\gamma(t) = 1$) e tomamos o limite $N \rightarrow \infty$, de tal maneira que somos levados à seguinte equação diferencial parcial de primeira ordem

$$u_t = u_x - 2x(u_x)^2 - \gamma x u_x + du - u_x(t, 0) , \quad (3.2.1)$$

chamada de *equação não-viscosa*¹, sendo

$$u(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} u^{(N)}(t, x) . \quad (3.2.2)$$

Com relação à condição inicial, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u^{(N)}(0, x) = \int_0^x \frac{-\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\beta x'}} dx' \equiv u_0(x) \quad (3.2.3)$$

e a convergência é uniforme em qualquer conjunto compacto do plano “slit” $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4\beta]$.

A demonstração desta encontra-se na Subseção 3.4.1. Como feito por Watanabe, a ferramenta utilizada para obtenção da expressão (3.2.3) é a chamada *fração continuada de Gauss* (vide Lema 4.1 de [27]). Propriedades adicionais são obtidas levando-se em conta que $u'_0(x)$ é uma função analítica pertencente à *Classe Pick* $P_{I(\beta)}$, a qual pode ser continuada analiticamente através do intervalo $I(\beta) = (-1/4\beta, \infty)$.

Tratar o problema não linear (3.2.1)-(3.2.3) diretamente é uma tarefa bastante difícil. Consideremos então a *transformada de Legendre* do potencial $u(t, x)$ com respeito à variável x

$$w(t, p) = \max_x (xp - u(t, x)) = \bar{x}p - u(t, \bar{x}) , \quad (3.2.4)$$

com $\bar{x} = \bar{x}(t, p)$ o valor de x para o qual

¹O papel desempenhado pelo fator $1/N$ na frente do termo de derivada segunda em (2.3.16) é o de *viscosidade* em analogia à equação hidrodinâmica de um fluido incompressível.

$$p = u_x(t, x) \quad (3.2.5)$$

tem uma solução para todo $t \geq 0$, e p pertencente a um certo domínio que depende de t .

Assumindo que a função $w(t, p)$ é continuamente diferenciável e convexa em relação à variável p , a função original $u(t, x)$ pode ser recuperada pela *transformada inversa de Legendre*

$$u(t, x) = \max_p (xp - w(t, p)) = x\bar{p} - w(t, \bar{p}) , \quad (3.2.6)$$

sendo que $\bar{p} = \bar{p}(t, x)$ é tal que resolve

$$x = w_p(t, p) \quad (3.2.7)$$

para p .

Notemos agora que, diferenciando (3.2.4) com respeito a t e p , juntamente com a igualdade (3.2.5), somos levados a

$$\begin{aligned} w_t &= -u_t(t, \bar{x}) + (p - u_x(t, \bar{x})) \bar{x}_t = -u_t \\ w_p &= \bar{x} + (p - u_x(t, \bar{x})) \bar{x}_p = \bar{x} . \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Portanto w_p resolve a equação (3.2.5) para x .

Ao final dos cálculos para a solução da equação transformada, mostraremos que $w_p(t, p)$ é uma função monótona crescente em relação à variável p para todo $t \geq 0$, o que implica que $w(t, p)$ é convexa - vide Observação 3.2.9. Assim, a transformada de Legendre (3.2.6) está bem definida e $u(t, x)$ também é uma função convexa - as transformadas (3.2.4) e (3.2.6) têm a propriedade de preservar a concavidade da função. Semelhantemente à segunda relação em (3.2.8), temos que

$$u_x(t, x) = \bar{p}(t, x) \quad (3.2.9)$$

a qual, em vista do termo $u_x(t, 0)$ em (3.2.1) (que garante que $u(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$), nos dá

$$u(t, x) = \int_0^x \bar{p}(t, x') dx' . \quad (3.2.10)$$

Fazendo uso das relações (3.2.4) e (3.2.8) a equação diferencial (3.2.1) fica

$$w_t = -p + 2p^2 w_p + (\gamma - d) p w_p + dw + \hat{p}_0(t) , \quad (3.2.11)$$

sendo que o termo $\hat{p}_0(t)$ é dado implicitamente pela equação $w_p(t, p) = 0$. Diferenciando ambos os lados de (3.2.11) em relação a p , e escrevendo $v = w_p = \bar{x}$ temos, por fim, o seguinte problema de valor inicial

$$v_t - 2p(1 + p)v_p = -1 + (\gamma + 4p)v , \quad (3.2.12)$$

com

$$v(0, p) = \frac{1}{2p} + \frac{\beta}{4p^2} \equiv v_0(p) . \quad (3.2.13)$$

$v(0, p) = \bar{x}(0, p)$ é o valor x tal que (3.2.5) é resolvida para $t = 0$:

$$p = u_x(0, x) = u'_0(x) = \frac{-\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\beta x}} , \quad (3.2.14)$$

por (3.2.8) e (3.2.3).

Observação 3.2.2 *Observe que (3.2.13) é a expressão obtida pela inversão tanto de $-\beta/(1 + \sqrt{1 + 4\beta x})$ quanto de $-\beta/(1 - \sqrt{1 + 4\beta x})$. Observe também que essas duas funções não são reais valoradas no intervalo $(-\infty, -1/4\beta)$, são iguais a $-\beta$ em $x = -1/4\beta$ (ponto de ramificação), e somente a primeira é regular em $x = 0$.*

Observação 3.2.3 *O uso da transformada de Legendre no estudo da trajetória $O(\infty)$ aparece no trabalho [27] de Watanabe. Também é utilizada por Shang-Keng Ma [22] na expansão $1/N$ de grupo de renormalização.*

Para esse problema de Cauchy enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.4 *As equações (3.2.12) e (3.2.13), com $d = 4$ ($\gamma = 6$), tem por solução*

$$v(t, p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{p^2} - \frac{4 - \beta}{4p^2} e^{2t} - \frac{1 + p}{p^3} \ln(1 + p - pe^{2t}). \quad (3.2.15)$$

Para $\beta = \beta_c(d = 4) = 4$ só há uma solução $\bar{p} = \bar{p}(t, x)$ de

$$v(t, p) = x \quad (3.2.16)$$

holomórfica em uma vizinhança da origem que converge, quando $t \rightarrow \infty$, para -1 em todo conjunto compacto de $\mathbb{C}$. Em vista das equações (3.2.10) e (2.3.15), temos então a convergência para a solução de equilíbrio gaussiana

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} U(t, \sqrt{N}z) = |z|^2 \quad (3.2.17)$$

uniformemente em compactos.

Observação 3.2.5 *O Teorema 3.2.4, como já mencionado, trata do caso $d = 4$ (borderline case), mas também é válido para $d \geq 4$. Além disso, a demonstração do teorema pode ser adaptada para $2 < d < 4$, caso este em que se observa convergência, quando $t \rightarrow \infty$, para uma solução não trivial (ponto fixo não-gaussiano). Por exemplo, para $d = 3$*

$$v(t, p) = \frac{1}{2p} + \frac{3}{2p^2} - \frac{6 - \beta}{4p^2} e^t - \frac{3\sqrt{(1+p)/p}}{4p^2} \ln \frac{(1 - e^{-t}\sqrt{(1+p)/p})(1 + \sqrt{(1+p)/p})}{(1 + e^{-t}\sqrt{(1+p)/p})(1 - \sqrt{(1+p)/p})};$$

para $\beta = \beta_c(d = 3) = 6$ a solução $\bar{p} = \bar{p}(t, x)$ de (3.2.16) converge, quando $t \rightarrow \infty$, para uma função definida para $x \geq x_0 \simeq -0,15$ - vide Figura 3.1. Ve-se que para x pequeno a função limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t, x)$ difere significativamente da solução de equilíbrio gaussiana $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t, x) \equiv -1$.

Figura 3.1: Função limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t, x)$ gaussiana (linha pontilhada) e não-gaussiana ($d = 3$ - linha cheia).

Demonstração. O Teorema 3.2.4 será demonstrado pela resolução da equação diferencial (3.2.12) ao longo das características $p(t) = p(t, p_0)$ (vide [12]). Consideramos inicialmente a função $V(t) = v(t, p(t))$. Assim,

$$\dot{V}(t) = v_t + v_p \dot{p}(t) , \quad (3.2.18)$$

o que reduz a equação diferencial parcial (3.2.12) ao par de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -2p(t)(1 + p(t)) \\ \dot{V}(t) &= -1 + (\gamma + 4p(t))V(t) , \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

as quais satisfazem as condições iniciais

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 \\ V(0) &= V_0 = v_0(p_0) . \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Integrando a primeira equação de (3.2.19)

$$\int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'(1+p')} = \int_{p_0}^p \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{1+p'} \right) = -2 \int_0^t dt'$$

somos levados a

$$p(t, p_0) = \frac{p_0 e^{-2t}}{1 + p_0 - p_0 e^{-2t}} . \quad (3.2.21)$$

A segunda equação de (3.2.19) é uma equação linear não homogênea. A equação homogênea $\dot{V} = (\gamma + 4p)V$ pode ser integrada:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \exp \left(\gamma t + 4 \int_0^t p(s) ds \right) \\ &= V_0 e^{\gamma t} (1 + p_0 - p_0 e^{-2t})^2 . \end{aligned}$$

Usando a *fórmula da variação das constantes* (vide Teorema 3.1 de [3]), a solução da segunda equação de (3.2.19) é dada por

$$V(t) = e^{\gamma t} (1 + p_0 - p_0 e^{-2t})^2 (V_0 + J_0) \quad (3.2.22)$$

com

$$J_0 = \int_0^t \frac{(-1) ds}{e^{\gamma s} (1 + p_0 - p_0 e^{-2s})^2} . \quad (3.2.23)$$

Fazendo $\gamma = 6$ ($d = 4$) e efetuando a mudança de variável $\chi = e^{-2s}$ na integral acima, temos que

$$J_0 = -\frac{1}{2p_0^3} \left[(1 + p_0)^2 \frac{1}{1 + p_0 - p_0 \chi} + 2(1 + p_0) \ln(1 + p_0 - p_0 \chi) + p_0 \chi \right]_{e^{-2t}}^1 .$$

Após algumas manipulações, e considerando (3.2.20) e (3.2.13), obtemos que $V_0 + J_0$ é igual a

$$\frac{\beta - 6}{4p_0^2} - \frac{1}{2p_0^3} + \frac{(1 + p_0)^2}{2p_0^3(1 + p_0 - p_0 e^{-2t})} + \frac{e^{-2t}}{2p_0^2} + \frac{1 + p_0}{p_0^3} \ln(1 + p_0 - p_0 e^{-2t}) . \quad (3.2.24)$$

A equação (3.2.15) é conseguida substituindo-se a expressão acima em (3.2.22), com p_0 escrito como função de t e p

$$p_0(t, p) = \frac{pe^{2t}}{1 + p - pe^{2t}} , \quad (3.2.25)$$

obtida pela inversão de (3.2.21).

Solução de $v(t, p) = x$ para p . Resolveremos agora a equação (3.2.16) para p à temperatura inversa crítica $\beta = \beta_c(4) = 4$ (vide (3.1.45)). Note que o termo de maior crescimento em t na solução (3.2.15) é anulado com essa escolha de β . Na Seção 3.3 abordaremos essa questão.

De (3.2.15), já substituindo $\beta = \beta_c(4) = 4$, temos

$$xp^2 - \frac{p}{2} - 1 = -\frac{1+p}{p} \ln(1 + p - pe^{2t}) \equiv g(t, p) . \quad (3.2.26)$$

Lema 3.2.6 *Para $p < (e^{2t} - 1)^{-1}$ e $t > 0$ $g(t, p)$ é uma função monótona crescente de p , divergindo para $-\infty$ logaritmicamente quando $p \rightarrow -\infty$, e satisfazendo $g(t, -1) = 0$ e $g(t, 0) = (e^{2t} - 1)$.*

Demonstração. Claramente $g(t, p)$ é uma função bem definida de p somente para $1 + p - pe^{2t} = 1 - p(e^{2t} - 1) > 0$, com uma divergência logarítmica em $p = -\infty$. O fato que $g(t, -1) = 0$ é imediato, e $g(t, 0) = (e^{2t} - 1)$ segue do Teorema de L'Hospital.

Por cálculo explícito

$$g_p(t, p) = \frac{e^{2t} - 1}{1 - p(e^{2t} - 1)} + \frac{1}{p^2} f(p(e^{2t} - 1)) ,$$

sendo

$$f(w) = \ln(1 - w) + \frac{w}{1 - w} . \quad (3.2.27)$$

Se $f(w) \geq 0$ para todo $w < 1$, então $g_p(t, p) > 0$ no domínio $p < (e^{2t} - 1)^{-1}$, e a monotonicidade de g está demonstrada. De fato,

$$f'(w) = \frac{w}{(1+w)^2}$$

e $f(0) = 0$ implicam que 0 é o mínimo absoluto de $f(w)$, mostrando assim que $f(w) > 0$ para $w < 1$ diferente de 0.

■

Olhemos agora para o polinômio

$$Q(x, p) := xp^2 - \frac{p}{2} - 1 \quad (3.2.28)$$

no lado esquerdo de (3.2.26):

Figura 3.2: Gráfico da função $g(t, p)$ para $t = \frac{1}{2} \ln 2$ (linha cheia escura), e de $Q(x, p)$ para $x = 0$ (linha com traços pequenos e próximos), $x = -0,12$ (linha com traços pequenos e espaçados), $x = -0,5$ (linha com traços grandes) e $x = 1$ (linha cheia cinza).

Para $x = 0$ esse é igual à função linear

$$Q(0, p) = -\frac{p}{2} - 1. \quad (3.2.29)$$

Para todo $t \geq 0$ $Q(0, p)$ e $g(t, p)$ se interceptam em um ponto (vide Figura 3.2), $p^* = p^*(t)$. Como $g(0, p) \equiv 0$, $p^*(0) = -2$. Para sabermos a evolução de $p^*(t)$, devemos saber como $g(t, p)$ evolui em t . Uma vez que

$$g_t = \frac{2(1+p)e^{2t}}{1-p(e^{2t}-1)} \quad (3.2.30)$$

com $p < (e^{2t} - 1)^{-1}$, o sinal de g_t é determinado pelo fator $(1+p)$:

$$g_t(t, p) \begin{cases} < 0 & \text{se } p < -1 \\ = 0 & \text{se } p = -1 \\ > 0 & \text{se } p > -1 \end{cases} . \quad (3.2.31)$$

É importante que se observe que (3.2.31) vale para todo $t \geq 0$, inclusive no limite $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_t(t, p) = -\frac{2(1+p)}{p} . \quad (3.2.32)$$

Assim, $g(t, p)$ “rotaciona” em sentido anti-horário em torno de $(-1, g(t, -1)) = (-1, 0)$ conforme t cresce, o que implica que $p^*(t)$ é uma função monótona crescente de t , com $\lim_{t \rightarrow \infty} p^*(t) = -1$.

Para $x < 0$ (3.2.28) é limitado superiormente pela função linear (3.2.29): $Q(x, p) \leq Q(0, p)$. O máximo valor de (3.2.28) é $Q_{max} = -1 - \frac{1}{16x}$, atingido em $p_{max} = \frac{1}{4x}$. Uma vez que $p_{max} \uparrow 0$ e $Q_{max} \downarrow -1$ quando $x \rightarrow -\infty$, existe para todo $t \geq 0$ um valor $x_{min} = x_{min}(t)$ tal que para todo $x < x_{min}(t)$ $Q(x, p) < g(t, p)$, isto é, Q e g não se interceptam. Por outro lado, para $x_{min}(t) < x < 0$ ($x = x_{min}(t)$) e $t \geq 0$ $Q(x, p)$ e $g(t, p)$ se interceptam em dois pontos (um ponto) - vide Figura 3.2.

Para $x > 0$ (3.2.28) é limitado inferiormente por (3.2.29): $Q(x, p) \geq Q(0, p)$. O mínimo valor de (3.2.28) é $Q_{min} = -1 - \frac{1}{16x}$, atingido em $p_{min} = \frac{1}{4x}$, sendo que $p_{min} \downarrow 0$ e $Q_{min} \uparrow -1$ quando $x \rightarrow \infty$. $Q(x, p)$ possui duas raízes reais, uma negativa e outra positiva. Para $p < 0$ e $t \geq 0$ $Q(x, p)$ e $g(t, p)$ se interceptam em um ponto. Já para $p \geq 0$ o cruzamento dessas duas funções pode ou não ocorrer. Isso porque $g(t, p)$ é definida somente para $p < (e^{2t} - 1)^{-1}$. Então existe para $t \geq 0$ *finito* (já que $(e^{2t} - 1)^{-1} \rightarrow 0$

quando $t \rightarrow \infty$) um valor $\hat{x} = \hat{x}(t)$ tal que para $x \geq \hat{x}(t)$ $Q(x, p)$ e $g(t, p)$ se interceptam em um ponto.

Das três situações descritas concluímos que para $x \geq x_{\min}(t)$ e $t \geq 0$ existe ao menos uma solução real de (3.2.16). No caso de haverem duas soluções, descartaremos a associada ao ponto de intersecção que diverge quando $x = 0$.

O Ponto em que $v_p(t, p) = 0$. Para todo $t \geq 0$ existe um ponto $p^\dagger = p^\dagger(t)$ em que $v_p(t, p)$ se anula; $p^\dagger(t)$ é o ponto no qual $v(t, p)$ perde unicidade. A solução é monótona decrescente em p para $p < p^\dagger(t)$, e monótona crescente para $p^\dagger(t) < p < 0$, divergindo para $+\infty$ em $p = 0$ - vide Figura 3.4. O ponto $(p^\dagger(t), v(t, p^\dagger(t)))$ separa assim dois ramos da solução.

Observação 3.2.7 *Diretamente da condição inicial $v_0(p) = 1/(2p) + 1/p^2$ temos que $p^\dagger(0) = -4$, com $v_0(-4) = -1/16$. Voltando à Observação 3.2.2, vemos que a condição inicial $u'_0(x) = -4/(1 + \sqrt{1 + 16x})$ é definida para $x \in [-1/16, \infty)$, sendo que a imagem do ponto de ramificação $x = -1/16$ é $u'_0(-1/16) = -4$.*

Explicitamente

$$v_p(t, p) = -\frac{1}{2p^2} - \frac{2}{p^3} + \frac{3+2p}{p^4} \ln(1+p-pe^{2t}) + \frac{(1+p)(e^{2t}-1)}{p^3(1+p-pe^{2t})}. \quad (3.2.33)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por p^3 e fazendo $v_p = 0$, temos

$$\frac{p}{2} + 2 = \frac{3+2p}{p} \ln(1+p-pe^{2t}) + \frac{(1+p)(e^{2t}-1)}{1+p-pe^{2t}} \equiv f(t, p). \quad (3.2.34)$$

$f(t, p)$ é uma função bem definida de p somente para $p < (e^{2t} - 1)^{-1}$. Nas análises que se seguirão nos limitaremos ao semi-eixo $p \leq 0$.

Lema 3.2.8 *Para $p < 0$ e $t > 0$ $f(t, p)$ é uma função monótona decrescente de p , que vai a $-2(e^{2t} - 1)$ quando $p \uparrow 0$ e que diverge para $+\infty$ logaritmicamente quando $p \rightarrow -\infty$.*

Demonstração. $f(t, p)$ é igual a

$$\frac{3}{p} \ln(1 - p(e^{2t} - 1)) + 2 \ln(1 - p(e^{2t} - 1)) + \frac{\left(\frac{1}{p} + 1\right)(e^{2t} - 1)}{\frac{1}{p} - (e^{2t} - 1)}. \quad (3.2.35)$$

Quando $p \uparrow 0$ o limite do primeiro termo é $-3(e^{2t} - 1)$, pelo Teorema de L'Hospital; do segundo termo é 0; e do terceiro termo é $(e^{2t} - 1)$. Assim, $\lim_{p \uparrow 0} f(t, p) = -2(e^{2t} - 1)$. Quando $p \rightarrow -\infty$ o limite do primeiro termo é 0, pelo Teorema de L'Hospital; do terceiro termo é -1 ; e o segundo termo diverge para $+\infty$. Dessa maneira, $\lim_{p \rightarrow -\infty} f(t, p) = +\infty$.

Estudaremos agora o sinal de

$$f_p(t, p) = \frac{cp(2cp^2 + (4c - 1)p - 3) - 3(1 - cp)^2 \ln(1 - cp)}{p^2(1 - cp)^2}, \quad (3.2.36)$$

que claramente é determinado pelo numerador. Nessa expressão, $c = c(t) = (e^{2t} - 1) > 0$.

Para $c \leq 1/4$ reescrevemos o numerador de (3.2.36) como

$$[-3cp] - [-2c^2p^3 + c(1 - 4c)p^2 + 3(1 - cp)^2 \ln(1 - cp)], \quad (3.2.37)$$

sendo que as duas funções entre colchetes são estritamente positivas para $p < 0$, e nulas em $p = 0$. Comparando suas derivadas, sem muita dificuldade vê-se que para $p < 0$

$$-6c^2p^2 + 2c(1 - 4c)p - 6c(1 - cp) \ln(1 - cp) + 3c^2p - 3c < -3c, \quad (3.2.38)$$

o que nos conduz à conclusão que (3.2.37) é estritamente negativa.

Para $c > 1/4$ o numerador de (3.2.36) é reescrito como

$$[cp((4c - 1)p - 3)] - [-2c^2p^3 + 3(1 - cp)^2 \ln(1 - cp)]. \quad (3.2.39)$$

Novamente, as duas funções entre colchetes são estritamente positivas para $p < 0$, e nulas em $p = 0$. Para $p < 0$ suas derivadas relacionam-se por

$$-6c^2p^2 - 6c(1 - cp) \ln(1 - cp) - 3c(1 - cp) < 2c(4c - 1)p - 3c, \quad (3.2.40)$$

o que implica que (3.2.39) é estritamente negativa. Para mostrarmos (3.2.40) devemos observar que as duas funções em questão são estritamente negativas para $p < 0$, são iguais a $-3c$ em $p = 0$, e para suas derivadas vale

$$-12c^2p + 9c^2 + 6c^2 \ln(1 - cp) > 2c(4c - 1). \quad (3.2.41)$$

Fica portanto demonstrado que $f_p(t, p) < 0$ para todo $p < 0$ e $t > 0$.

■

$p^\dagger(t)$ é reconhecido na Figura 3.3 como o ponto em que $\frac{p}{2} + 2$ e $f(t, p)$ se interceptam. Uma vez que $f(0, p) \equiv 0$, $p^\dagger(0) = -4$.

Figura 3.3: Gráfico da função $\frac{p}{2} + 2$ (linha cheia cinza), e de $f(t, p)$ para $t = 10^{-1}$ (linha com traços pequenos e próximos), $t = 1$ (linha com traços pequenos e espaçados), $t = 5$ (linha com traços grandes) e $t = 10^3$ (linha cheia escura).

Da expressão de $f(t, p)$

$$f_t(t, p) = \frac{2c(1 + c)(2p^2 + (3 - \frac{1}{c})p - \frac{2}{c})}{(1 - cp)^2}, \quad (3.2.42)$$

com $c = c(t) = (e^{2t} - 1) \geq 0$ e $p \leq 0$.

Para $c = 0$ $f_t(t, p) = -2p - 4$. Logo é positiva para $p < -2$, nula em $p = -2$, e negativa para $p > -2$.

Para $c > 0$ o sinal de $f_t(t, p)$ é determinado pelo polinômio quadrático

$$P(c, p) := 2p^2 + \left(3 - \frac{1}{c}\right)p - \frac{2}{c}. \quad (3.2.43)$$

Este atinge seu mínimo valor $P_{min} = -\frac{1}{8} \left(3 - \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{2}{c} < 0$ em $p_{min} = -\frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{c}\right)$. As raízes de (3.2.43) são

$$p_{\pm}(c) = -\frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{c}\right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(3 - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{16}{c}}, \quad (3.2.44)$$

sendo que para todo c finito $\sqrt{\left(3 - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{16}{c}} > \left|3 - \frac{1}{c}\right|$, de tal maneira que $p_-(c) < 0$ e $p_+(c) > 0$. No limite $c \rightarrow \infty$ $p_- = -3/2$ e $p_+ = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{dp_-(c)}{dc} &= -\frac{1}{4c^2} + \left(\frac{5}{4c^2} + \frac{1}{4c^3}\right) \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{10}{c} + \frac{1}{c^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{25c^2 + 10c + 1} - \sqrt{9c^2 + 10c + 1}}{4c^2 \sqrt{9c^2 + 10c + 1}} > 0 \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

para c finito, e nula no limite $c \rightarrow \infty$. $p_-(c)$ é portanto uma função monótona crescente de c .

Dos cálculos acima apresentados segue que

$$f_t(t, p) \begin{cases} > 0 & \text{se } p < p_-(e^{2t} - 1) \\ = 0 & \text{se } p = p_-(e^{2t} - 1) \\ < 0 & \text{se } p > p_-(e^{2t} - 1) \end{cases}, \quad (3.2.46)$$

com $p_-(0) = -2$ e $p_-(\infty) = -3/2$. Note que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_t(t, p) = 4 + \frac{6}{p}. \quad (3.2.47)$$

Assim, $f(t, p)$ “rotaciona” em sentido horário em torno $(p_-(e^{2t} - 1), f(t, p_-(e^{2t} - 1)))$ ao mesmo tempo que $p_-(e^{2t} - 1)$ se desloca para a direita conforme t cresce. Desta maneira, $p^\dagger(t)$ é uma função monótona crescente de t com $\lim_{t \rightarrow \infty} p^\dagger(t) = -3/2$.

Observação 3.2.9 *Fica evidente da Figura 3.3 que*

$$w_{pp}(t, p) = v_p(t, p) = -\frac{1}{2p^2} - \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^3} f(t, p) \quad (3.2.48)$$

é estritamente positiva ($\frac{p}{2} + 2 > f(t, p)$) para $p^\dagger(t) < p < 0$ e $t \geq 0$. Portanto $w(t, p)$ é convexa nessa região.

Domínio de Analiticidade. Seja $t \geq 0$, e consideremos x e p partes reais de números em $\mathbb{C}$: $\zeta = x + iy$ e $\eta = p + iq$. Embora a solução $\eta = \eta(t, \zeta)$ de $\zeta = v(t, \eta)$ seja uma função multivalorada de ζ , somente um ramo, denotado por $\bar{\eta}(t, \zeta)$, é regular em $\zeta = 0$. Notemos que $\bar{\eta}(t, 0)$ existe para todo $t \geq 0$ e é uma função monótona crescente real valorada de t , satisfazendo $-2 \leq \bar{\eta}(t, 0) \leq -1$, já que $\bar{\eta}(t, 0) = p^*(t)$ por definição.

Observemos que a função $v(t, \eta)$ é holomorfa em $\Re(\eta) < 0$, pois possui um corte em $[(e^{2t} - 1)^{-1}, +\infty)$ e $\eta = 0$ é um pólo, e que $v(t, \bar{\eta}(t, 0)) = 0$ com

$$v_\eta(t, \bar{\eta}(t, 0)) = \frac{1}{2\bar{\eta}^2} + \frac{1}{\bar{\eta}^4} \ln(1 - (e^{2t} - 1)\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{\eta}^2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\eta}}\right) \frac{e^{2t} - 1}{1 - (e^{2t} - 1)\bar{\eta}} > 0. \quad (3.2.49)$$

Estas são as condições necessárias ao teorema que segue, cuja demonstração é feita no Apêndice A.1.:

Teorema 3.2.10 (Teorema da Função Inversa) *Sejam $R > r > 0$ e $\bar{\eta} \in \mathbb{C}$ tais que $v(t, \eta)$ é holomorfa em $D_R(\bar{\eta}) = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta - \bar{\eta}| < R\}$, $v(t, \bar{\eta}) = 0$, $v_\eta(t, \bar{\eta}) > 0$ e $v(t, \eta) \neq 0$ para $0 < |\eta - \bar{\eta}| < r$. Então a integral de contorno*

$$\bar{\eta}(t, \zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_C \eta \frac{v_\eta(t, \eta)}{v(t, \eta) - \zeta} d\eta, \quad (3.2.50)$$

sendo $\mathcal{C} = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta - \bar{\eta}| = \rho\}$ para algum $\rho < r$, define uma função holomorfa em $\{\zeta : |\zeta| < m\}$, com

$$m = \min_{\theta} |v(t, \bar{\eta} + \rho e^{i\theta})|. \quad (3.2.51)$$

Além disso, $\eta = \bar{\eta}(t, \zeta)$ é a única solução de $\zeta = v(t, \eta)$ regular em $\zeta = 0$ neste domínio.

Para t fixo, seja $R = R(t)$ tal que $D_R(\bar{\eta}(t, 0)) \subset \{\Re(\eta) < 0\}$, e notemos que sempre é possível tomar R tão grande quanto se queira de tal modo que incluamos $\eta = -1$. Seja $r < R$ tal que $v(t, \eta) \neq 0$ para $0 < |\eta - \bar{\eta}(t, 0)| < r$. Isto é sempre possível por continuidade em vista de (3.2.49). Por fim, peguemos $\rho < r$ que nos dê o maior m possível. Conforme t cresce, $\bar{\eta}(t, 0)$ se aproxima de -1 , e ρ pode ser escolhido de tal forma que $m(t) = \min_{\theta} |v(t, \bar{\eta}(t, 0) + \rho e^{i\theta})|$ cresça linearmente com t , a saber, para ρ próximo de $1/2$. No limite $t \rightarrow \infty$, $\bar{\eta}(t, \zeta)$ torna-se holomorfa em todo o plano complexo (função inteira).

Comportamento Assintótico. Para descrever o comportamento assintótico de $\bar{\eta}(t, \zeta)$ quando $t \rightarrow \infty$ escrevemos a equação (3.2.16) como

$$\begin{aligned} v(t, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2\bar{\eta}^2} - \frac{\bar{\eta} + 1}{\bar{\eta}^3} \left\{ -\frac{\bar{\eta}}{2} + \ln(-\bar{\eta}) + 2t + \ln \left(1 - \frac{\bar{\eta} + 1}{\bar{\eta}} e^{-2t} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} + 2t(\bar{\eta} + 1) + O(t(\bar{\eta} + 1)^2, (\bar{\eta} + 1)) = \zeta, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\bar{\eta}(t, \zeta) = -1 - \frac{1}{2t} \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) + S(t, \zeta). \quad (3.2.52)$$

Pelo Teorema 3.2.10, $S(t, \zeta)$ é uma função regular de ζ para $|\zeta| < m(t)$, e que vai a 0 mais rapidamente que $1/t$, concluindo assim a demonstração do Teorema 3.2.4. Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} U(t, \sqrt{N}z) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \int_0^x \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t, x') dx' = -x = |z|^2,$$

e $U^*(z) = |z|^2$ é uma solução de equilíbrio de (2.3.3) para qualquer número de componentes N .

■

Figura 3.4: Gráfico da função $v(t, p)$ (3.2.15) com $\beta = \beta_c(4) = 4$ em $t = 0$ (linha cheia), $t = 10$ (linha com traços médios e próximos), $t = 10^5$ (linha com traços pequenos e espaçados) e $t = 10^{20}$ (linha com traços pequenos e próximos).

Observação 3.2.11 A função inversa $v^{-1}(t, p) = u_x(t, x)$ possui duas determinações, mas somente uma, que é tal que $v^{-1}(0, x) = u'_0(x) = -4/(1 + \sqrt{1 + 16x})$, converge para -1 em qualquer intervalo compacto interior a $(x^\dagger(t), \infty)$, sendo que $x^\dagger(t) = v(t, p^\dagger(t)) < -1/16$ para todo $t > 0$ e $x^\dagger \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$ - $x^\dagger(t)$ é o ponto de ramificação da função $u_x(t, x)$.

3.3 A Criticalidade

Como já foi dito na Seção 3.1, o modelo esférico hierárquico contínuo ($L \downarrow 1$) exhibe transição de fase para todo $d > 2$, existindo nesses casos uma temperatura inversa crítica $\beta_c(d)$, dada por (3.1.45), que distingue duas fases do sistema: a de magnetização espontânea não nula ($\beta > \beta_c(d)$), e a de magnetização espontânea nula ($\beta < \beta_c(d)$). Se $\beta = \beta_c(d)$, diz-se que o sistema está na *criticalidade*. Exploraremos nesta seção a questão da criticalidade pelo estudo da equação diferencial (3.2.12).

Olhando para o problema de valor inicial (3.2.12)-(3.2.13)

$$v_t = -1 + (\gamma + 4p)v + 2p(1 + p)$$

com

$$v(0, p) = \frac{1}{2p} + \frac{\beta}{4p^2} \equiv v_0(p) ,$$

nota-se de imediato que $p = 0$ e $p = -1$ são pontos diferenciados para a equação de evolução, pois anulam o termo $2p(1 + p)$. Sendo $p = 0$ um ponto de divergência da condição inicial, não lhe daremos atenção.

Substituindo $p = -1$ em (3.2.12) e lembrando que $\gamma = d + 2$, temos que

$$v_t(t, -1) = -1 + (d - 2)v(t, -1) . \quad (3.3.1)$$

Logo, para $d > 2$

$$v_t(t, -1) \begin{cases} < 0 & \text{se } v(t, -1) < 1/(d-2) \\ = 0 & \text{se } v(t, -1) = 1/(d-2) \\ > 0 & \text{se } v(t, -1) > 1/(d-2) \end{cases} . \quad (3.3.2)$$

$F \equiv (x_F, p_F) = (1/(d-2), -1)$ é portanto um ponto fixo da dinâmica (3.2.12).

(3.3.2) nos diz que $v(t, -1) = 1/(d-2)$ somente se isso for verdade já para $t = 0$. Fazendo a imposição $v_0(-1) = 1/(d-2)$, chegamos a

$$\beta = \frac{2d}{d-2} . \quad (3.3.3)$$

Este é justamente o parâmetro crítico (3.1.45) encontrado para o modelo esférico hierárquico. Vemos assim que β_c é o valor de β que ajusta a condição inicial para passar pelo ponto F .

Uma vez que $v^{-1}(t, p) = u_x(t, x)$, F também deve ser um ponto fixo da equação de evolução

$$(u_x)_t = (1 - 4xu_x - \gamma x)(u_x)_x - 2u_x(1 + u_x) , \quad (3.3.4)$$

obtida pela diferenciação de (3.2.1) com respeito a x . De fato, substituindo $x_F = 1/(d-2)$ com $p_F = u_x(t, x_F) = -1$ (vide relação (3.2.5)), vê-se que

$$u_{xt}(t, x_F) = \left(1 + \frac{4}{d-2} - \frac{d+2}{d-2}\right) u_{xx}(t, x_F) = 0 . \quad (3.3.5)$$

Solução de Equilíbrio Gaussiana. Cabe neste momento a seguinte observação: em razão da definição do potencial $u_x(t, x)$, encontrar uma solução de equilíbrio gaussiana para (3.3.4) é sinônimo de se ter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_x(t, x) = u_x^*(x) \equiv -K \quad (3.3.6)$$

com $K > 0$ uma constante. Da substituição de (3.3.6) em (3.3.4), vemos que K deve ser igual a 1.

Temperatura Inversa Crítica e Comportamento de $v(t, p)$. Seja $v(t, p)$ a solução do problema de valor inicial (3.2.12)-(3.2.13) para $\beta > 0$ qualquer e um dado $d > 2$. Mostraremos agora que colocar a solução na criticalidade, isto é, escolher $\beta = \beta_c(d)$, acarreta o cancelamento do termo de maior crescimento em t .

Voltando às equações (3.2.22)

$$V(t) = e^{\gamma t} (1 + p_0 - p_0 e^{-2t})^2 (V_0 + J_0)$$

e (3.2.23)

$$J_0 = \int_0^t \frac{(-1) ds}{e^{\gamma s} (1 + p_0 - p_0 e^{-2s})^2} ,$$

com

$$V_0 = v_0(p_0) = \frac{2p_0 + \beta}{4p_0^2}$$

a segunda igualdade de (3.2.20), obteremos os termos de $v(t, p)$ de nosso interesse.

Comecemos por notar que

$$e^{-2t} = \frac{p(t, p_0)}{1 + p(t, p_0)} \frac{1 + p_0}{p_0} \quad (3.3.7)$$

e

$$e^{(d+2)t} (1 + p_0 - p_0 e^{-2t})^2 = \left(\frac{1 + p(t, p_0)}{1 + p_0} \right)^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{p_0}{p(t, p_0)} \right)^{\frac{d+2}{2}} , \quad (3.3.8)$$

por (3.2.21). Substituindo esta última relação em J_0 , fazendo a mudança de variável

$$\xi = 1 + p(s, p_0) , \quad (3.3.9)$$

que é tal que $d\xi = -2p(s, p_0)(1 + p(s, p_0)) ds = -2(\xi - 1)\xi ds$, e levando-se em conta que p_0 é uma constante na referida integral, o termo

$$e^{(d+2)t}(1 + p_0 - p_0 e^{-2t})^2 J_0$$

fica

$$\frac{1}{2} \frac{(1 + p(t, p_0))^{\frac{d-2}{2}}}{(p(t, p_0))^{\frac{d+2}{2}}} \int_{\xi(0)=1+p_0}^{\xi(t)=1+p(t, p_0)} \left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^{d/2} d\xi. \quad (3.3.10)$$

Para chegarmos a $v(t, p)$ temos de escrever p como uma variável independente de t e p_0 ($p(t, p_0) \rightarrow p$), e p_0 como função de t e p ($p_0 \rightarrow p_0(t, p)$ - vide (3.2.25)). Procedendo dessa maneira, temos que a solução $v(t, p)$ é dada por

$$\frac{(1 + p)^{\frac{d-2}{2}}}{p^{\frac{d+2}{2}}} \left\{ \underbrace{\frac{(p_0(t, p))^{\frac{d+2}{2}}}{(1 + p_0(t, p))^{\frac{d-2}{2}}} v_0(p_0(t, p))}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{1+p_0(t, p)}^{1+p} \left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^{d/2} d\xi}_{(II)} \right\}. \quad (3.3.11)$$

A seguinte nota é de grande importância para a análise que faremos:

$$\frac{1}{1 + p_0(t, p)} = 1 - \frac{pe^{2t}}{1 + p} \quad (3.3.12)$$

é um termo de ordem $O(e^{2t})$, enquanto que $p_0(t, p)$ é $O(1)$.

Para o integrando do termo (II) temos a série binomial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d/2 + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(d/2 - k + 1)} \left(-\frac{1}{\xi} \right)^{d/2-k}, \quad (3.3.13)$$

convergente se $d/2$ é um inteiro ou $|\xi| < 1$. Pela observação acima fica claro que em (II) o termo de maior ordem em t é proveniente da integração de $(-1/\xi)^{d/2}$:

$$\begin{aligned} (II) &= \frac{(-1)^{d/2}}{d-2} \left[\left(1 - \frac{pe^{2t}}{1+p} \right)^{\frac{d-2}{2}} - \frac{1}{(1+p)^{\frac{d-2}{2}}} \right] \\ &+ O \left(\left(1 - \frac{pe^{2t}}{1+p} \right)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{(1+p)^{\frac{d-4}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Para $\delta > 0$ qualquer

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{pe^{2t}}{1+p}\right)^\delta &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(\delta-l+1)} \left(-\frac{pe^{2t}}{1+p}\right)^{\delta-l} \\ &= \left(-\frac{pe^{2t}}{1+p}\right)^\delta + O\left(\left(-\frac{pe^{2t}}{1+p}\right)^{\delta-1}\right), \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

convergente se δ é um inteiro ou $\left|-\frac{1+p}{p}e^{-2t}\right| < 1$. Assim,

$$\begin{aligned} (II) &= \frac{(-1)^{d/2}}{d-2} \left(-\frac{p}{1+p}\right)^{\frac{d-2}{2}} e^{(d-2)t} - \frac{(-1)^{d/2}}{d-2} \frac{1}{(1+p)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ O\left(\left(-\frac{p}{1+p}\right)^{\frac{d-4}{2}} e^{(d-4)t}, \frac{1}{(1+p)^{\frac{d-4}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Para o termo (I) , considerando convenientemente a expansão

$$\begin{aligned} p_0^2(t, p) v_0(p_0(t, p)) &= v_0(-1) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (1 + p_0(t, p))^k \\ &= \frac{-2 + \beta}{4} + \frac{1 + p_0(t, p)}{2}, \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

temos que

$$(I) = \left(\frac{p}{1+p}\right)^{\frac{d-2}{2}} \left(v_0(-1) e^{(d-2)t} + \frac{1+p}{2(1+p)e^{-2t}-p} e^{(d-4)t}\right). \quad (3.3.18)$$

Dessas contas, concluímos que o termo de maior ordem em t da solução $v(t, p)$ é

$$\frac{1}{p^2} \left(v_0(-1) - \frac{1}{d-2}\right) e^{(d-2)t}. \quad (3.3.19)$$

Adicionalmente

$$v(t, -1) = \frac{1}{d-2} + \left(v_0(-1) - \frac{1}{d-2} \right) e^{(d-2)t}, \quad (3.3.20)$$

pois, com exceção do termo de maior ordem em t , todos os outros termos da solução são proporcionais a $(1+p)^b$, $b \geq 1$. Isso torna clara a questão do ponto fixo F da dinâmica (3.2.12): $v(t, -1) = 1/(d-2)$ para todo $t > 0$ se $v_0(-1) = 1/(d-2)$. Também evidencia (3.3.2): $v(t, -1) > 1/(d-2)$ e cresce exponencialmente com t se $v_0(-1) > 1/(d-2)$, e $v(t, -1) < 1/(d-2)$ e decresce exponencialmente com t se $v_0(-1) < 1/(d-2)$.

Para t grande e $v_0(-1) \neq 1/(d-2)$ vale o comportamento assintótico

$$v \sim \frac{1}{p^2} \left(v_0(-1) - \frac{1}{d-2} \right) e^{(d-2)t}. \quad (3.3.21)$$

Seja $p^*(t)$ o ponto definido implicitamente por $v(t, p) = 0$, e $p^\dagger(t)$ por $v_p(t, p) = 0$ (como definimos na Seção 3.2). Para o caso $v_0(-1) < 1/(d-2)$ temos que $p^* \uparrow 0$ e $p^\dagger \uparrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ (vide Figura 3.5), fatos esses que indicam que a determinação de $u_x(t, x)$ que é tal que $v^{-1}(0, x) = u'_0(x) = -4/(1 + \sqrt{1 + 16x})$ converge para 0. Dessa maneira, (3.3.21) diz respeito à outra determinação.

Figura 3.5: Gráfico da função $v(t, p)$ para $d = 4$ e $v_0(-1) = 1/5$ em $t = 9,6$ (linha cheia), $t = 10$ (linha com traços pequenos e próximos) e $t = 10,2$ (linhas com traços grandes).

Já para o caso $v_0(-1) > 1/(d-2)$, $p^* \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$ - toda a função é puxada para cima, resultando na hipérbole (3.3.21).

Notemos agora que a separação entre os distintos comportamentos da solução, mostrados nos últimos dois parágrafos, são delegados a um parâmetro se a condição inicial possuir um. Em nosso problema, delegado à temperatura inversa β :

$$\begin{aligned} v_0(-1) - \frac{1}{d-2} &= \frac{-2+\beta}{4} - \frac{1}{d-2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\beta - \frac{2d}{d-2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Essa expressão se anula com a escolha $\beta = 2d/(d-2) \equiv \beta_c(d)$, implicando o cancelamento do termo de maior ordem em t da solução $v(t, p)$. Se $\beta > \beta_c$, $v_0(-1) > 1/(d-2)$; se $\beta < \beta_c$, $v_0(-1) < 1/(d-2)$. Com isso, β_c separa os ditos valores “grandes” e “pequenos” do parâmetro β , e portanto é identificado com β^* (vide Teorema 2.2.11 no final da Seção 2.2).

Observação 3.3.1 *Devemos enfatizar o que foi aprendido nesta seção: dado o problema de valor inicial (3.2.12)-(3.2.13), fazemos a separação $v(t, p) = a(t) + \psi(t, p)$ ($a(t) = v(t, -1)$), de tal maneira que*

$$v(0, p) = a(0) + \psi(0, p) = \frac{-2+\beta}{4} + \frac{1+p}{2}.$$

Substituindo $v(t, p) = a(t) + \psi(t, p)$ na equação diferencial (3.2.12) somos levados a

$$\dot{a} = -1 + (d-2)a,$$

cuja solução é

$$a(t) = \frac{1}{d-2} + \left(a(0) - \frac{1}{d-2} \right) e^{(d-2)t}.$$

Se $a(0) = 1/(d-2)$, então $a(t) = 1/(d-2)$ para todo $t \geq 0$. Em outras palavras, se $(-2+\beta)/4 = 1/(d-2)$ temos que $v(t, -1) = 1/(d-2)$ para todo $t \geq 0$.

3.4 O Fluxo do Ponto de Vista Geométrico

O Teorema do Mapeamento de Riemann diz que, se um conjunto aberto Ω ($\Omega \neq \mathbb{C}$) é topologicamente equivalente ao semi-plano superior $\mathbb{H} = \{\zeta = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ (isto é, Ω e $\mathbb{H}$ são homeomorfos), então Ω também é conformemente equivalente à $\mathbb{H}$, e existe um mapa bi-holomorfo f (holomorfo, um-para-um e sobrejetivo) de $\mathbb{H}$ em Ω . Em alguns casos, f pode ser tal que é definida univocamente por $f(\mathbb{H}) = \Omega$.

A equivalência conforme entre conjuntos abertos nos dá informações qualitativas sobre a trajetória crítica

$$\mathcal{O}(u'_0 \rightarrow -1) = \{u_x(t, x), t \geq 0 : u_x(0, x) = u'_0(x), u_x(\infty, x) \equiv -1\} \quad (3.4.1)$$

de $u_x(t, x)$, o qual determina o fluxo associado ao potencial escalado

$$u(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} U(t, \sqrt{N}z), \quad (3.4.2)$$

que é identificado como sendo a *função geratriz dos cumulantes* da variável de spin de bloco, na escala t . Dedicamos as Subseções 3.4.2 e 3.4.3 para este estudo, com a observação de que nestas, desde o princípio, β está fixo e igual a $\beta_c(4) = 4$.

3.4.1 Demonstração da Proposição 3.2.1

Esta subseção é destinada à demonstração da Proposição 3.2.1, onde fazemos a extensão da demonstração feita por Watanabe para o semi-plano superior $\mathbb{H}$.

Demonstração. Seja $\phi_\nu(\xi) = \xi J_\nu(\xi) / J_{\nu-1}(\xi)$ definida para $\nu \geq 1$ e $\xi \in \mathbb{C}$. A relação recursiva para a função de Bessel

$$J_{\nu-1}(\xi) + J_{\nu+1}(\xi) = \frac{2\nu}{\xi} J_\nu(\xi) \quad (3.4.3)$$

gera a seguinte fração continuada de Gauss (vide Capítulo XVIII de [26]):

$$\phi_\nu(\xi) = \frac{2}{\nu} \frac{(\xi/2)^2}{1 - \frac{1}{2\nu} \phi_{\nu+1}(\xi)} = \frac{2}{\nu} \frac{(\xi/2)^2}{1 - \frac{1}{\nu(\nu+1)} \frac{(\xi/2)^2}{1 - \frac{1}{2\nu+2} \phi_{\nu+2}(\xi)}}. \quad (3.4.4)$$

Partindo da condição inicial $u^{(N)}(0, x)$ (vide (2.3.17)), e utilizando a relação de recorrência $\nu J_\nu(\xi) - \xi J'_\nu(\xi) = \xi J_{\nu+1}(\xi)$ para as funções de Bessel, temos que

$$\begin{aligned} x u_x^{(N)}(0, x) &= \frac{1}{2N} \left\{ \frac{(N/2 - 1) J_{N/2-1}(i\sqrt{\beta x} N) - i\sqrt{\beta x} N J'_{N/2-1}(i\sqrt{\beta x} N)}{J_{N/2-1}(i\sqrt{\beta x} N)} \right\} \\ &= \frac{i\sqrt{\beta x} N}{2N} \frac{J_{N/2}(i\sqrt{\beta x} N)}{J_{N/2-1}(i\sqrt{\beta x} N)} = \frac{1}{2N} \phi_{N/2}(i\sqrt{\beta x} N). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Tomando $\xi = i\sqrt{\beta x} N$ e $\nu = N/2$ em (3.4.4),

$$\frac{1}{2N} \phi_{N/2}(i\sqrt{\beta x} N) = \frac{a_1}{1 + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{1 + \frac{a_4}{1 + \ddots}}}} \quad (3.4.6)$$

com $a_1 = -\beta x/2$ e

$$a_{k+1} = \frac{-1}{(\nu + k - 1)(\nu + k)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 = \frac{\beta x}{\left(1 + \frac{2k-2}{N}\right) \left(1 + \frac{2k}{N}\right)} \quad (3.4.7)$$

para $k = 1, 2, 3, \dots$, sendo que a fração continuada infinita (3.4.6) é uniformemente convergente sobre o domínio

$$\frac{\beta |\zeta|}{\left(1 + \frac{2}{N}\right)} \leq \frac{1}{4}, \quad (3.4.8)$$

$\zeta = x + iy \in \mathbb{C}$, pelo Teorema de Worpitzky (vide [26], página 42):

Teorema 3.4.1 *Sejam $a_2, a_3, a_4, \dots$ funções de quaisquer variáveis sobre um domínio $\mathcal{D}$ no qual*

$$|a_{k+1}| \leq \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.9)$$

Então valem as seguintes afirmações:

- (a) A fração continuada (3.4.6) converge uniformemente sobre $\mathcal{D}$.
- (b) Os valores da fração continuada e de seus aproximantes estão no domínio circular

$$\left| \zeta - \frac{4}{3} \right| \leq \frac{2}{3}. \quad (3.4.10)$$

- (c) A constante $\frac{1}{4}$ é a “melhor” constante que pode ser usada em (3.4.9), e (3.4.10) é o “melhor” domínio de valores dos aproximantes.

Quando então tomamos o limite $N \rightarrow \infty$, (3.4.7) converge para βx uniformemente sobre o domínio (3.4.8), para todo $k \geq 1$. Conseqüentemente, $xu_x^{(N)}(0, x)$ converge sobre o mesmo domínio para uma fração continuada periódica, isto é,

$$xu_x(0, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} xu_x^{(N)}(0, x) = \frac{-1}{2} \frac{\beta x}{1 + \frac{\beta x}{1 + \frac{\beta x}{1 + \ddots}}} = \frac{-\beta x}{1 + \sqrt{1 + 4\beta x}}. \quad (3.4.11)$$

A terceira igualdade é igual a $-\beta x/2\phi$, com ϕ a solução

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta x}}{2} \quad (3.4.12)$$

da equação de ponto fixo $\phi = 1 + \frac{\beta x}{\phi}$ - escolhemos a solução que é positiva para x positivo. De (3.4.11), e da normalização $u^{(N)}(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$, segue a expressão (3.2.3). Note que o limite é válido para qualquer x no domínio

$$4\beta |\zeta| \leq 1 \quad (3.4.13)$$

do plano complexo, sendo este o maior domínio possível sem que se entre no corte $(-\infty, -1/4\beta]$ da função limite $u_x(0, x)$.

Agora, por (2.3.17), (2.2.28) e (2.2.30)

$$\begin{aligned} u^{(N)}(0, x) &= -\frac{1}{N} \ln \varphi_0^{(N)}(Nx) \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{\frac{\alpha_{n, N/2-1}^2}{\beta N^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Portanto

$$\begin{aligned} u_x^{(N)}(0, x) &= \frac{i\sqrt{\beta x}}{2x} \frac{J_{N/2}(i\sqrt{\beta x}N)}{J_{N/2-1}(i\sqrt{\beta x}N)} \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\alpha_{n, N/2-1}^2}{\beta N^2} + x}, \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

que é a representação de uma função meromorfa com pólos de massa $1/N$ localizados em $-\alpha_{n, N/2-1}^2/\beta N^2$ - vide Apêndice A.3.

No limite $N \rightarrow \infty$, e considerando o comportamento assintótico (2.2.31) dos zeros da função de Bessel para n grande, escrevemos

$$u_x(0, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_x^{(N)}(0, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\alpha_{n, N/2-1}^2}{\beta N^2} + x} = \frac{1}{\pi} \int_{1/4}^{\infty} \frac{1}{-g(s)/\beta - x} ds \quad (3.4.16)$$

para alguma função positiva g satisfazendo $g(s) \sim s^2$ para s grande. Vemos assim que com a escala em N que se tem na primeira igualdade de (3.4.14), os zeros de Lee-Yang (2.2.29) tornam-se densos sobre um intervalo do eixo real quando $N \rightarrow \infty$.

Denotemos por P a classe de funções

$$f(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta), \quad \zeta = x + iy, \quad (3.4.17)$$

analítica no semi-plano superior $\mathbb{H}$ com parte imaginária positiva para ζ nesse domínio: $v(\zeta) \geq 0$ se $y > 0$ (vide Apêndice A.3). A classe Pick P de funções forma um cone convexo e é fechada sob composições:

$$1. \quad af_1 + bf_2 \in P$$

$$2. \quad f_1 \circ f_2 \in P$$

válido para quaisquer $a, b \geq 0$ e $f_1, f_2 \in P$.

Uma função linear

$$a + b\zeta = (a + bx) + i(by)$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, e a função

$$-\frac{1}{\zeta} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2},$$

claramente pertencem à classe P - ambas são mapas um-para-um e sobrejetivos de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{H}$. Segue então das propriedades 1. e 2. que $u_x^{(N)}(0, x)$ (vide (3.4.15)) está na referida classe de funções e, na topologia de convergência uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{H}$, a seqüência $(u_x^{(N)}(0, x))_{N \geq 1}$ converge para $u_x(0, x)$ em P (vide Apêndice A.3). A observação que $u_x(0, x)$ é a composição de quatro funções Pick

$$-\frac{1}{\zeta} \quad \frac{1+\zeta}{\beta} \quad \sqrt{\zeta} \quad 1 + 4\beta\zeta,$$

e o fato de a igualdade (3.4.11) ser válida no domínio (3.4.13), implicam que $u_x(0, x) \in P$ e a igualdade entre a primeira e última expressões em (3.4.16) vale com x trocado por $\zeta \in \mathbb{H}$, concluindo assim a demonstração da Proposição 3.2.1.

■

3.4.2 A Condição Inicial $u'_0(x)$ e a Classe Pick de Funções

Dedicamos esta subseção ao estudo da condição inicial $u'_0(x)$ no plano complexo. Como já feito anteriormente, consideraremos que x é a parte real de $\zeta = x + iy$, e p a parte real de $\eta = p + iq$.

Começemos retomando a observação que a função

$$\eta = u'_0(\zeta) = \frac{-4}{1 + \sqrt{1 + 16\zeta}} \quad (3.4.18)$$

possui um ponto de ramificação (*branch point*) em $-1/16$, e o corte (*branch cut*) se estende pelo intervalo $(-\infty, -1/16)$. Este corte conecta duas folhas de Riemann, as quais chamaremos de *folha 1* e *folha 2*. Na primeira, a fase de $\sqrt{1 + 16\zeta} = \rho e^{i\varphi}$ varia de $-\pi/2$ a $\pi/2$, enquanto que na segunda varia de $-\pi/2 + \pi$ a $\pi/2 + \pi$. À *folha 2* está associada a determinação

$$\eta = \tilde{u}'_0(\zeta) = \frac{-4}{1 - \sqrt{1 + 16\zeta}}. \quad (3.4.19)$$

A função inversa de $u'_0(\zeta)$ é dada por

$$\zeta = v_0(\eta) = \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{\eta^2}. \quad (3.4.20)$$

Haja vista a primeira frase da Observação 3.2.2, há em (3.4.20) informações sobre as duas folhas do plano ζ . Separando as partes real e imaginária de (3.4.20), temos

$$\Re(v_0(p + iq)) = x = \frac{(p + 2)(p^2 - q^2) + 2pq^2}{2(p^2 + q^2)^2} \quad (3.4.21)$$

$$\Im(v_0(p + iq)) = y = \frac{-q((p + 2)^2 + q^2 - 2^2)}{2(p^2 + q^2)^2}. \quad (3.4.22)$$

Mapeamento do Plano ζ no Plano η . Explorando (3.4.21) e (3.4.22), estudaremos nos próximos parágrafos o mapeamento das *folhas 1* e *2* no plano η . As seguintes notações serão utilizadas:

$$\mathbb{H} = \{\zeta = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$$

o semi-plano superior e

$$-\mathbb{H} = \{\zeta = x + iy \in \mathbb{C} : y < 0\}$$

o semi-plano inferior.

Por (3.4.22)

$$\Im m(\zeta) = y > 0 \iff \begin{cases} q > 0 & \text{e} & (p+2)^2 + q^2 - 2^2 < 0 \\ q < 0 & \text{e} & (p+2)^2 + q^2 - 2^2 > 0 \end{cases}. \quad (3.4.23)$$

Sabemos que $u'_0(\zeta)$ pertence à classe Pick de funções, e como tal mapeia $\mathbb{H}$ em $\mathbb{H}$: $q > 0$ se $y > 0$. Conclui-se portanto que

$$u'_0(\mathbb{H}) = \mathbb{S}_2^+(-2) = \{\eta = p + iq \in \mathbb{H} : (p+2)^2 + q^2 < 2^2\}.$$

Da outra condição para que $y > 0$ segue que

$$\tilde{u}'_0(\mathbb{H}) = \mathbb{T}_2^-(-2) = \{\eta = p + iq \in -\mathbb{H} : (p+2)^2 + q^2 > 2^2\}.$$

(3.4.22) também nos diz que

$$\Im m(\zeta) = y = 0 \iff \begin{cases} q = 0 \\ (p+2)^2 + q^2 - 2^2 = 0 \end{cases}; \quad (3.4.24)$$

parte do eixo real x é levado ao eixo real p , sendo a outra parte mapeada na circunferência

$$\mathbb{K}_2(-2) = \{\eta = p + iq \in \mathbb{C} : (p+2)^2 + q^2 = 2^2\}$$

de raio 2 centrada em $(p, q) = (-2, 0)$. Das próprias funções $u'_0(\zeta)$ e $\tilde{u}'_0(\zeta)$ vemos que estas vão a 0 quando ζ vai a ∞ (em qualquer direção do plano complexo ζ), e que $u'_0(-1/16) = \tilde{u}'_0(-1/16) = -4$. Além disso, $u'_0(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{u}'_0(x) = -\infty$ e

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{u}'_0(x) = +\infty$. Estas três últimas informações também podem ser obtidas pela imposição em (3.4.21) e (3.4.22) de que $q = 0$:

$$x + i0 = v_0(p) = \frac{p+2}{2p^2} \quad (3.4.25)$$

é nula em $p = -2$, e nos limites $p \rightarrow -\infty$ e $p \rightarrow +\infty$ vai, respectivamente, a 0^- e 0^+ . Para a parte do eixo x que é mapeada na reta p , $v_0(p)$ diz que

$$\begin{cases} p < -2 & \text{se } x < 0 \\ p > -2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.4.26)$$

A parte do eixo x que é mapeada em $\mathbb{K}_2(-2)$ é o intervalo $(-\infty, -1/16)$ - esses são os pontos para os quais $u'_0(x)$ e $\tilde{u}'_0(x)$ ganham uma parte imaginária (isto é, $q \neq 0$). Quando consideramos o limite $y \downarrow 0$ em cima do corte, de (3.4.23) concluímos que entramos na semi-circunferência superior

$$\mathbb{B}_2^+(-2) = \{\eta = p + iq \in \mathbb{H} : (p+2)^2 + q^2 = 2^2\}$$

por uma região interior a esta ($\mathbb{S}_2^+(-2)$) se $q > 0$, e que entramos na semi-circunferência inferior

$$\mathbb{B}_2^-(-2) = \{\eta = p + iq \in -\mathbb{H} : (p+2)^2 + q^2 = 2^2\}$$

por uma região exterior a esta ($\mathbb{T}_2^-(-2)$) se $q < 0$. Em outras palavras, $\mathbb{B}_2^+(-2)$ está associada ao corte na *folha 1* e $\mathbb{B}_2^-(-2)$ ao corte na *folha 2*.

Para finalizar, vejamos em que regiões do plano η são mapeados o semi-plano inferior das *folhas 1* e *2*. Por (3.4.22)

$$\Im m(\zeta) = y < 0 \iff \begin{cases} q > 0 & \text{e } (p+2)^2 + q^2 - 2^2 > 0 \\ q < 0 & \text{e } (p+2)^2 + q^2 - 2^2 < 0 \end{cases} \quad (3.4.27)$$

Quando entramos no corte pela *folha 1* por valores positivos de y , saímos no semi-plano inferior da *folha 2*. Como $u'_0(\mathbb{H}) = \mathbb{S}_2^+(-2)$ e $\mathbb{B}_2^+(-2)$ está associada ao corte na *folha 1*, por (3.4.27) devemos ter

$$\tilde{u}'_0(-\mathbb{H}) = \mathbb{T}_2^+(-2) = \{\eta = p + iq \in \mathbb{H} : (p+2)^2 + q^2 > 2^2\}.$$

Semelhantemente, quando entramos no corte pela *folha 2* por valores positivos de y , saímos no semi-plano inferior da *folha 1*. Como $\tilde{u}'_0(\mathbb{H}) = \mathbb{T}_2^-(-2)$ e $\mathbb{B}_2^-(-2)$ está associada ao corte na *folha 2*, de (3.4.27)

$$u'_0(-\mathbb{H}) = \mathbb{S}_2^-(-2) = \{\eta = p + iq \in -\mathbb{H} : (p+2)^2 + q^2 < 2^2\}.$$

A fim de se enunciar uma proposição referente ao mapa $u'_0(\zeta)$, definamos:

Definição 3.4.2 (Mapa Conforme) *Um mapa conforme de um domínio $\mathbb{U}$ em um domínio² $\mathbb{V}$ é uma função analítica $\varphi(\zeta)$ de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$ que é um-para-um (univalente) e sobrejetiva.*

Seja $\mathcal{S}_t$ a classe de funções em P tais que

- (i) φ é univalente (um-para-um)
- (ii) $\varphi(\aleph_t) = \aleph_t$ para algum número complexo $\aleph_t$
- (iii) $\varphi(1/2) = -1$
- (iv) $\varphi(\bar{\zeta}) = \bar{\varphi}(\zeta)$,

e $\Omega_t = \{\eta = p + iq \in \mathbb{H} : \Im(v(t, p + iq)) > 0\}$ uma família de conjuntos, com $t \in \mathbb{R}_+$. Enunciamos:

Proposição 3.4.3 *A condição inicial $u'_0(\zeta)$ mapeia o semi-plano superior $\mathbb{H}$ conformemente no semi-disco superior de raio 2 e centro em $(p, q) = (-2, 0)$*

$$u'_0(\mathbb{H}) = \Omega_0 = \mathbb{S}_2^+(-2), \quad (3.4.28)$$

e nenhuma outra função em $\mathcal{S}_0$ mapeia $\mathbb{H}$ em Ω_0 . Há assim uma relação um-para-um e sobrejetiva entre Ω_0 e a função inicial $u'_0(\zeta)$ da trajetória crítica $\mathcal{O}(u'_0 \rightarrow -1)$ na classe $\mathcal{S}_0$ sendo o ponto fixo $\aleph_0$ dado pela raiz complexa de $2x^3 - x - 2$ que pertence à Ω_0 .

²Domínio é um conjunto aberto e conexo no plano complexo.

Demonstração. No início desta seção mostramos que $u'_0(\zeta)$ mapeia $\mathbb{H}$ em Ω_0 sobrejetivamente. Mostraremos agora que esse mapeamento é um-para-um, isto é, $u'_0(\zeta)$ é uma injeção (mapa univalente) de $\mathbb{H}$ em Ω_0 . Mas devemos atentar ao seguinte fato: uma função regular ter derivada não nula em todo ponto do domínio é uma condição necessária e suficiente para que o mapa seja *localmente* univalente. No entanto, a univalência *global* não é garantida. É então imperativo que se inspecione tanto a derivada de $u'_0(\zeta)$ como a de $v_0(\eta)$.

Da expressão

$$u''_0(\zeta) = \frac{4}{(1 + \sqrt{1 + 16\zeta})^2} \frac{8}{\sqrt{1 + 16\zeta}}, \quad (3.4.29)$$

definida em $\mathbb{H}$, vemos que esta não se anula em ponto algum do domínio. Quanto à função

$$v'_0(\eta) = -\frac{\eta + 4}{2\eta^3}, \quad (3.4.30)$$

esta não se anula em Ω_0 . Portanto $u'_0(\zeta)$, uma função regular em $\mathbb{H}$, é um mapa conforme de $\mathbb{H}$ em Ω_0 .

Agora, suponhamos que existe outra função $\varphi(\zeta)$ em $\mathcal{S}_0$ tal que $\varphi(\mathbb{H}) = \Omega_0$. Então, $\varphi^{-1} \circ u'_0(\zeta)$ é um mapa sobrejetivo de $\mathbb{H}$ nele mesmo, pertence à classe P e mantém fixos os pontos $1/2$, $\aleph_0$ e $\bar{\aleph}_0^3$. Considerando a forma como funções da classe Pick são representadas (vide (3.4.33)), as únicas funções em P que mapeiam $\mathbb{H}$ sobrejetivamente em $\mathbb{H}$ são as chamadas *transformações fracionais lineares*:

$$f(\zeta) = \frac{K_1\zeta + K_2}{K_3\zeta + K_4}, \quad (3.4.31)$$

com $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{C}$ e $K_1K_4 - K_2K_3 \neq 0$. Uma vez que a identidade é a única dentre essas transformações que mantém fixos três pontos, concluímos que $\varphi(\zeta)$ e $u_\zeta(\zeta)$ são a mesma função.

³A classe de funções em P consideradas podem ser analiticamente continuadas através do eixo real por reflexão (vide condição (iv) de $\mathcal{S}_0$). Se $\aleph_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}$ é um ponto fixo de $f \in P$, então $\bar{\aleph}_0 = x_0 - iy_0 \in -\mathbb{H}$ é o ponto fixo de sua extensão.

Por fim, utilizando o *software* Mathematica para resolver a equação de ponto fixo

$$\zeta = v_0(\zeta) = \frac{\zeta + 2}{2\zeta^2}, \quad (3.4.32)$$

temos que $\aleph_0 \simeq -0,582687 + i0,720119 \in \Omega_0$. Encerra-se assim a demonstração desta proposição. ■

Representação Integral Canônica de $u'_0(\zeta)$. Vejamos agora um teorema sobre a representação de funções da classe Pick:

Teorema 3.4.4 (Representação Integral Canônica) *Uma função $f(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$ pertence à classe Pick se, e somente se, possui a representação integral canônica*

$$f(\zeta) = a\zeta + b + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \zeta} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda), \quad (3.4.33)$$

sendo que $a = \lim_{y \rightarrow \infty} f(iy)/iy \geq 0$, $b = u(i)$ é real, e μ é uma medida positiva de Borel sobre $\mathbb{R}$ tal que $\int (\lambda^2 + 1)^{-1} d\mu(\lambda) < \infty$. Além disso,

$$\mu((x_1, x_2)) + \frac{\mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\})}{2} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} v(x + iy) dx \quad (3.4.34)$$

vale para qualquer intervalo finito (x_1, x_2) , e determina μ de maneira única a partir da função f .

A demonstração desse teorema encontra-se no Apêndice A.3.

Para a condição inicial $u'_0(\zeta)$

$$a = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-4}{1 + \sqrt{1 + i16y}} \frac{1}{iy} = 0 \quad (3.4.35)$$

e

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} d\mu(\lambda) . \quad (3.4.36)$$

A identificação de b com a integral segue de

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} u'_0(\zeta) &= 0 \\ &= b + \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \zeta} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda) , \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

já tendo por conta que $a = 0$, passando o limite para dentro da integral pelo Teorema da Convergência de Lebesgue. A parte imaginária de $u'_0(\zeta)$ é igual a

$$\frac{4\sqrt{r} \sin \theta/2}{(1 + \sqrt{r} \cos \theta/2)^2 + (\sqrt{r} \sin \theta/2)^2} , \quad (3.4.38)$$

com $r = \sqrt{(1 + 16x)^2 + (16y)^2}$ e

$$\theta = \arctan \left(\frac{16y}{1 + 16x} \right) . \quad (3.4.39)$$

Multiplicando (3.4.38) por $1/\pi$ e tomando o limite $y \downarrow 0$ sobre o corte, encontramos a medida

$$\begin{aligned} d\mu(\lambda) &= \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{16(-\lambda) - 1}}{16(-\lambda)} d\lambda \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue $d\lambda$, suportada sobre o intervalo $(-\infty, -1/16)$. Note que

$$\lim_{y \downarrow 0} \theta = \begin{cases} \pi & \text{se } x < -1/16 \\ 0 & \text{se } x > -1/16 \end{cases} . \quad (3.4.41)$$

Então a representação integral canônica de nossa condição inicial é

$$u'_0(\zeta) = \int_{-\infty}^{-1/16} \frac{1}{\lambda - \zeta} \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{16(-\lambda) - 1}}{16(-\lambda)} d\lambda. \quad (3.4.42)$$

A Densidade $\rho(\lambda)$ do Corte e a Borda $\mathbb{B}_2^+(-2)$ do Domínio Ω_0 . Como já discutido nesta seção, a semi-circunferência superior de raio 2 e centro em $(p, q) = (-2, 0)$ está associada ao corte $(-\infty, -1/16)$ na *folha 1* pelo mapeamento feito por $u'_0(\zeta)$. Como a densidade $\rho(\lambda)$ da representação integral canônica é obtida pelo limite $y \downarrow 0$ em cima do corte, esperamos que haja alguma relação entre essa densidade e a mencionada semi-circunferência. De fato, considerando a mudança de variável $\lambda = 1/4\tilde{\lambda}$ em $\rho(\lambda)$, temos que

$$\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}) = \rho\left(\frac{1}{4\tilde{\lambda}}\right) = \frac{1}{\pi} \sqrt{4 - (\tilde{\lambda} + 2)^2} \quad (3.4.43)$$

com suporte em $-4 < \tilde{\lambda} < 0$.

Para fechar esta subseção devemos ressaltar que $\rho(\lambda)$ é a densidade do corte sobre o eixo real. Como esse corte surgiu do adensamento dos zeros de Lee-Yang após feita uma escala em N e tomado o limite $N \rightarrow \infty$, dizemos que $\rho(\lambda)$ é a densidade dos zeros de Lee-Yang adensados.

3.4.3 A Função $u_x(t, x)$ para $t > 0$ e a Classe Pick de Funções

Daremos nesta subseção continuidade à precedente, estudando a função $u_x(t, x)$ no plano complexo à temperatura inversa crítica $\beta = \beta_c(4) = 4$. Por não dispormos de uma expressão para essa função para $t > 0$, todas as informações serão extraídas da solução crítica $v(t, \eta)$ e do uso das relações (3.2.5) e (3.2.16), combinando cálculos analíticos e análises numéricas. Para as análises numéricas utilizaremos o *software* Mathematica.

Começamos nosso estudo por conhecer as curvas definidas implicitamente por

$$\Im m(v(t, \eta)) = 0,$$

e para tanto utilizamos o pacote “ImplicitPlot”. A Figura 3.6 nos mostra essas curvas para $t = 0$, e alguns valores de t maiores que zero. Para $t = 0$ já sabemos tratar-se da circunferência de raio 2 e centro em $(p, q) = (-2, 0)$, e do eixo real p . Para $t > 0$ essa circunferência é deformada, o eixo real p é mantido, e vem do infinito uma curva no primeiro e outra no quarto quadrante, que se encontram no eixo real positivo p , tocando-o de maneira perpendicular - quanto maior o valor de t , mais próximas do ponto $(p, q) = (0, 0)$ essas curvas interceptam o eixo. Esse quadro nos diz que para $t > 0$ há 3 folhas de Riemann no plano ζ . Mais adiante retornaremos a este ponto.

Figura 3.6: Curvas obtidas implicitamente pela condição $\Im m(v(t, \eta)) = 0$. São mostradas acima as curvas para $t = 0$, e alguns valores de t maiores que zero.

Daqui em diante nos limitaremos ao estudo do plano η à região

$$\mathbb{C} \setminus \left([(e^{2t} - 1)^{-1}, \infty) \cup \{(0, 0)\} \right), \quad (3.4.44)$$

onde a função $v(t, \eta)$ é holomorfa.

Paridade de $\Im m(v(t, \eta)) = \varpi(t; p, q)$ com Respeito à Variável q . Escrevendo explicitamente $\eta = p + iq$, $v(t, \eta) = \omega(t; p, q) + i\varpi(t; p, q)$, $\partial/\partial\eta = 1/2(\partial/\partial p - i\partial/\partial q)$, e fazendo uso das equações de Cauchy-Riemann, separamos a equação de evolução (3.2.12) em sua parte real e imaginária. A parte imaginária do fluxo é dada por

$$\varpi_t = (6 + 4p)\varpi + 4q\omega - 2p\omega_q - 2p^2\omega_q + 4pq\varpi_q + 2q\varpi_q + 2q^2\omega_q. \quad (3.4.45)$$

É possível concluirmos que se $\varpi(\tilde{t}; p, q) = -\varpi(\tilde{t}; p, -q)$ para algum $\tilde{t} \geq 0$, então a equação de fluxo (3.4.45) preserva essa propriedade, isto é, $\varpi(t; p, q) = -\varpi(t; p, -q)$ para todo $t > \tilde{t}$. Verificando a relação (3.4.22), vemos de imediato que $\varpi(0; p, q) = -\varpi(0; p, -q)$. Logo, $\tilde{t} = 0$ e $\varpi(t; p, q)$ é uma função ímpar de q para todo $t \geq 0$. Uma das conseqüências dessa propriedade é a simetria em relação ao eixo real p observada na Figura 3.6.

Preservação da Classe Pick de Funções pelo Fluxo $(u_\zeta)_t$. Lembremos que as curvas definidas implicitamente por $\Im m(v(t, \eta)) = 0$ são a imagem do eixo real x pelo mapa $u_\zeta(t, \zeta)$. Assim, quando cruzamos essas curvas, as quais dividem a região (3.4.44) em seis⁴ domínios, há uma troca no sinal da função $y = \varpi(t; p, q)$ (lembre-se de (3.2.16): $\zeta = v(t, \eta)$). Da

- (a) troca do sinal de $y = \varpi(t; p, q)$ ao passar de um domínio a outro
- (b) propriedade que $y = \varpi(t; p, q)$ é uma função ímpar de q para todo t e p
- (c) continuidade de $y = \varpi(t; p, q)$

podemos afirmar que o sinal de $\varpi(t; p, q)$ em cada um dos seis domínios é preservado pelo fluxo. Para enxergarmos isso, suponhamos que *haja* mudança no sinal da função nesses domínios. Então, por (a), (b) e (c), existe um instante $t^* > 0$ tal que $y = \varpi(t^*; p, q) \equiv 0$; mas isso é um absurdo, pois o que está dito é que em $t = t^*$ *todo* o plano η é imagem *exclusivamente* do eixo real x sob o mapa $u_\zeta(t^*, \zeta)$.

Voltemos nossas atenções para a família de domínios convexos decrescentes $\mathbb{A}_t$ pertencentes ao semi-plano superior que são limitados pelo intervalo $I_\varepsilon := [-\varepsilon, 0]$ do eixo real p , com $-\varepsilon = -\varepsilon(t) < 0$ uma função monótona crescente de t , unido a uma curva $q = h(t, p)$ definida para $p \in I_\varepsilon$, tal que $h(t, -\varepsilon) = h(t, 0) = 0$. Para $t = 0$ sabemos que $\mathbb{A}_0 = \mathbb{S}_2^+(-2)$, com $-\varepsilon(0) = -4$, e $h(0, p) = \sqrt{4 - (p + 2)^2}$ a semi-circunferência de raio 2 e centro em $(p, q) = (-2, 0)$. Também sabemos que $y = \varpi(0; p, q) > 0$ para

⁴Em $t = 0$ as curvas presentes no primeiro e quarto quadrantes do plano η estão no infinito.

$p, q \in \mathbb{S}_2^+(-2)$. Deste, e do fato que o sinal em cada domínio é preservado, concluímos que $y = \varpi(t; p, q) > 0$ para todo $t > 0$ e $p, q \in \mathbb{A}_t$. Fazemos assim a identificação

$$\mathbb{A}_t = \Omega_t = \{\eta = p + iq \in \mathbb{H} : \Im m(v(t, p + iq)) > 0\}, \quad (3.4.46)$$

lembrando que a família Ω_t , com $t \in \mathbb{R}_+$, já foi definida na Subseção 3.4.2.

Comentário 3.4.5 *É muito difícil mostrarmos diretamente da equação de fluxo que $u_\zeta(t, \zeta)$ permanece na classe Pick de funções para todo $t > 0$. A discussão feita no último parágrafo é uma forma indireta de vermos que $u_\zeta(t, \zeta) \in P$ para todo $t > 0$.*

Os Domínios Ω_t e as Curvas $q = h(t, p)$. Por cálculos analíticos podemos fazer poucas afirmações sobre os domínios Ω_t : para $t < 1$

$$\Omega_{t < 1} = \left\{ \eta = p + iq \in \mathbb{H} : \left(p + \frac{2(1+2t)}{1+4t} \right)^2 + q^2 < \left(\frac{2(1+2t)}{1+4t} \right)^2 \right\}, \quad (3.4.47)$$

uma leve deformação do semi-disco superior $\mathbb{S}_2^+(-2)$. Observe que

$$\frac{2(1+2t)}{1+4t} < \frac{2(1+2t)}{1+2t} = 2, \quad t \neq 0, \quad (3.4.48)$$

o que indica que $\Omega_{t < 1}$ sofre um deslocamento para a direita em relação a Ω_0 , justamente como mostrado pela Figura 3.6. Para t muito grande

$$\Omega_t = \{\eta = p + iq \in \mathbb{H} : -2p(p^2 + q^2) - 3p^2 + q^2 < 0\}, \quad (3.4.49)$$

que segue diretamente da condição

$$\Im m \left(-2 \frac{1+\eta}{\eta^3} t \right) > 0, \quad q > 0. \quad (3.4.50)$$

Com relação à família (a um parâmetro $t \in \mathbb{R}_+$) de curvas $q = h(t, p)$ que fazem parte da borda de Ω_t , essas são obtidas pela condição

$$\Im m(v(t, p + iq)) = 0 ,$$

como é deixado claro pelas discussões há alguns parágrafos realizadas. Para $t = 0$ já dissemos que $h(0, p) = \sqrt{4 - (p + 2)^2}$. No limite $t \rightarrow \infty$ essa curva é dada por

$$h^*(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t, p) = \sqrt{\frac{2p^3 + 3p^2}{1 - 2p}} , \quad (3.4.51)$$

a parte superior de um *folium de Descartes*.

Os Pontos $\{-\varepsilon(t), t \geq 0\}$. Pela Figura 3.6 vê-se que o eixo p é tocado de maneira perpendicular por $h(t, p)$ no ponto $-\varepsilon(t)$, para todo $t \geq 0$. Lembrando que $v(t, \eta) = \omega(t; p, q) + i\varpi(t; p, q)$, temos então que

$$\varpi_q(t; -\varepsilon(t), 0) = 0 , \quad (3.4.52)$$

e pelas equações que Cauchy-Riemann

$$\omega_p(t; -\varepsilon(t), 0) = v_p(t, -\varepsilon(t)) = 0 . \quad (3.4.53)$$

Também pela Figura 3.6 temos que

$$\varpi_p(t; -\varepsilon(t), 0) = 0 , \quad (3.4.54)$$

seguindo das equações que Cauchy-Riemann que

$$\omega_q(t; -\varepsilon(t), 0) = 0 . \quad (3.4.55)$$

(3.4.52), (3.4.53), (3.4.54) e (3.4.55) juntas trazem a informação que $v_\eta(t, -\varepsilon(t)) = 0$. Desse fato, ou de (3.4.53) alternativamente, concluímos que $-\varepsilon(t) = p^\dagger(t)$, por unicidade

- na Seção 3.2 $p^\dagger(t)$ foi definido como o ponto onde $v_p(t, p) = 0$, ou seja, o ponto onde a função $v(t, p)$ perde a unicidade; lembremos que $x^\dagger(t) = v(t, p^\dagger(t))$. Pelo estudo que realizamos na citada seção, $p^\dagger(0) = -4$ e $p^\dagger(\infty) = -3/2$.

As Três Folhas de Riemann do Plano ζ . A esta altura estamos em condições de voltar à nota que para $t > 0$ há 3 folhas de Riemann no plano ζ : na Seção 3.2 aprendemos que a *folha 1* se conecta com a *folha 2* pelo corte $(-\infty, x^\dagger(t))$, com $x^\dagger(0) = -1/16$ e $x^\dagger \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$ - vide Observação 3.2.11. Da Subseção 3.4.2, sabemos que em $t = 0$ o semi-eixo positivo $p > 0$ é a imagem, pelo mapa $u'_0(\zeta)$, do semi-eixo positivo $x > 0$ da *folha 2*. Além disso, o primeiro quadrante do plano η é a imagem de parte do semi-plano inferior da *folha 2*, enquanto que o quarto quadrante é a imagem de parte do semi-plano superior dessa folha. Da própria função $\zeta = v(t, \eta)$, sabemos que os infinitos do plano ζ são levados ao ponto $(p, q) = (0, 0)$. Destas, e da informação que o sinal de $y = \varpi(t; p, q)$ é preservado pelo fluxo, temos que as curvas presentes no primeiro e quarto quadrantes (que são tais que $q \neq 0$) estão associadas a um corte no plano ζ que conecta a *folha 2* à *folha 3*. Esse corte é o intervalo $(0, d(t))$, com $d(0) = 0$ e $d \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Note que $l(t) = u_\zeta(t, d(t))$ é o ponto onde as referidas curvas se encontram e tocam o semi-eixo positivo p .

Mapeamento Conforme. Seja $\Lambda_t = \{\eta = p + iq \in \mathbb{H} : \Im(v(t, p + iq)) > 0 \text{ e } p > 0\}$ a família de domínios crescentes que se vê no primeiro quadrante do plano η . Seja também Ω_t^* a reflexão de Ω_t em relação ao eixo real p , e $\mathcal{S}_t$ a classe de funções em P definida na Subseção 3.4.2. Enunciamos:

Proposição 3.4.6 *A função $u_\zeta(t, \zeta)$ mapeia o semi-plano superior $\mathbb{H}$ conformemente na família decrescente de domínios convexos Ω_t que satisfazem*

$$\Omega_t = u_\zeta(t, \mathbb{H}) \subset u'_0(\mathbb{H}) = \Omega_0, \quad (3.4.56)$$

e nenhuma outra função em $\mathcal{S}_t$ mapeia $\mathbb{H}$ em Ω_t . Há assim uma relação um-para-um e sobrejetiva entre a família Ω_t e a trajetória crítica $\mathcal{O}(u'_0 \rightarrow -1)$ na classe $\mathcal{S}_t$. O ponto fixo $\aleph_t$ do mapa $u_\zeta(t, \zeta)$ é complexo para todo $t < t_R$, e real para todo $t \geq t_R$, com $t_R \simeq 5,155075$.

Demonstração. Já mostramos nesta seção que $u_\zeta(t, \zeta)$ mapeia $\mathbb{H}$ sobrejetivamente em Ω_t quando afirmamos que o sinal de $y = \varpi(t; p, q)$ é estritamente positivo para todo $t \geq 0$ e $p, q \in \Omega_t \subset \mathbb{H}$. Resta-nos mostrar que esse mapeamento é um-para-um. Como não dispomos de uma expressão para $u_\zeta(t, \zeta)$ para $t > 0$, temos de fazer as verificações sobre o cancelamento das derivadas exclusivamente de $v_\zeta(t, \eta)$ por meio da relação $u_{\zeta\zeta} \circ v(t, \eta) = 1/v_\eta(t, \eta)$. De

$$v_\eta(t, \eta) = -\frac{1}{2\eta^2} - \frac{2}{\eta^3} + \frac{3+2\eta}{\eta^4} \ln(1 + \eta - \eta e^{2t}) + \frac{(1+\eta)(e^{2t} - 1)}{\eta^3(1 + \eta - \eta e^{2t})} \quad (3.4.57)$$

vemos que esta não diverge nem se anula em ponto algum de Ω_t . Portanto $u_\zeta(\zeta)$, uma função regular em $\mathbb{H}$, é um mapa conforme de $\mathbb{H}$ em Ω_t .

Para estabelecermos a unicidade da relação entre a família de conjuntos $\{\Omega_t, t \geq 0\}$ e a trajetória crítica $\mathcal{O}(u'_0 \rightarrow -1)$, procederemos como na demonstração da Proposição 3.4.3, encontrada na Subseção 3.4.2: suponhamos que $\varphi(t, \zeta) \in \mathcal{S}_t$ é uma função tal que $\varphi(t, \mathbb{H}) = \Omega_t$, que para cada t fixo $\varphi^{-1} \circ u_\zeta(t, \zeta)$ é um mapa de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{H}$, e que mantém fixos os pontos $1/2$, $\aleph_t$ e $\hat{\aleph}_t$. Pela Figura 2.5, vemos que existe um valor t_R tal que $\aleph_t$ e $\hat{\aleph}_t$ são números complexos para todo $t < t_R$ com $\hat{\aleph}_t = \bar{\aleph}_t$, e esses tornam-se reais para $t \geq t_R$. Segundo o *software* Mathematica $t_R \simeq 5,155075$. Estendendo por reflexão as funções da classe $\mathcal{S}_t$ através do eixo real, $\varphi^{-1} \circ u_\zeta(t, \zeta)$ é uma transformação fracional linear com três pontos fixos que contradiz a hipótese que $u_\zeta(t, \zeta)$ e $\varphi(t, \zeta)$ são diferentes. Isto é válido para todo t tal que $\hat{\aleph}_t \in \Omega_t \cup \Omega_t^* \cup I_{p^\dagger(t)}$. Caso a contradição não seja satisfeita, aplicamos uma reflexão de Schwarz (vide Apêndice A.4) em relação à curva $h(t, p)$ para que $u_\zeta(t, \zeta)$ seja estendida para o plano complexo de tal forma que $u_\zeta(t, \mathbb{H}) = \Omega_t$ e $u_\zeta(t, -\mathbb{H}) = \mathbb{H} \setminus (\Omega_t \cup \Lambda_t)$, e isso garante que $\aleph_t$ e $\hat{\aleph}_t$, nesse caso números reais, continuam sendo pontos fixos de $u_\zeta(t, \zeta)$ quando $\hat{\aleph}_t < p^\dagger(t)$. O valor t_{co} que é tal que $\hat{\aleph}_{t_{co}} = p^\dagger(t_{co})$ é a chamada *escala de crossover* do regime de forte acoplamento para o regime de fraco acoplamento, termo este introduzido por Hara, Hattori e Watanabe em [13].

■

Figura 3.7: Evolução dos pontos fixos do mapa $u_\zeta(t, \zeta)$.

Representação Integral de $u_\zeta(t, \zeta)$. Uma vez que a classe Pick de funções é preservada, a função $u_\zeta(t, \zeta)$ possui uma representação integral canônica (3.4.33) para todo $t > 0$. Mas aprendemos na Seção 3.3 que para todo $d > 2$ há um ponto fixo $F \equiv (x_F, p_F) = (1/(d-2), -1)$ da dinâmica. Para que isso fique evidenciado é mais adequado que utilizemos a representação integral

$$u_\zeta(t, \zeta) = -1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \zeta} - \frac{1}{\lambda - 1/2} \right) d\mu(t, \lambda), \quad (3.4.58)$$

sendo que $\int_{-\infty}^{\infty} [(\lambda - \zeta)(\lambda - 1/2)]^{-1} d\mu(t, \lambda) < \infty$ por hipótese, e o modo de se determinar a medida

$$\mu(t, d\lambda) = \rho(t, \lambda) d\lambda \quad (3.4.59)$$

é o mesmo da representação integral canônica (vide Teorema 3.4.4). Essa medida é suportada sobre o intervalo $\Sigma(t) = (-\infty, x^\dagger(t))$, o corte presente no plano ζ . Como escrito há alguns parágrafos, $x^\dagger(t) = v(t, p^\dagger(t))$ é uma função decrescente de t , com $x^\dagger(0) = -1/16$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x^\dagger(t) = -\infty$; desse limite temos a informação que o corte é expelido para o infinito negativo no limite $t \rightarrow \infty$ - para t grande observamos o comportamento assintótico

$$\begin{aligned}
x^\dagger(t) &\sim v(t, -3/2) \\
&= \frac{1}{9} - \frac{4}{27} \ln \left(1 + \frac{3}{2}(e^{2t} - 1) \right) = -\frac{8}{27}t + O(1). \quad (3.4.60)
\end{aligned}$$

Assim, o suporte $\Sigma(t)$ vai para o conjunto vazio quando $t \rightarrow \infty$, de modo que a integral (3.4.58) converge para 0 uniformemente em todo compacto $K \in \mathbb{H}$. Em outras palavras, $u_\zeta(t, \zeta)$ converge para a função inteira $u^*(\zeta) \equiv -1$ no limite $t \rightarrow \infty$.

A Densidade $\rho(t, \lambda)$ do Corte e a Borda $q = h(t, p)$ do Domínio Ω_t . Para finalizar, retomemos um argumento utilizado na Subseção 3.4.2: a densidade $\rho(t, \lambda)$ da representação integral é obtida pelo limite $y \downarrow 0$ em cima do corte, e a curva $q = h(t, p)$, definida para $p \in [p^\dagger(t), 0]$, é obtida implicitamente por $\Im m(v(t, \eta)) = y = 0$. Deve assim haver uma relação entre a densidade e a curva. Como já observado na Subseção 3.4.2, a densidade reescalada ($\lambda = 1/4\tilde{\lambda}$ - vide (3.4.43))

$$\tilde{\rho}(0, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{\pi} \sqrt{4 - (\tilde{\lambda} + 2)^2} \quad (-4 < \tilde{\lambda} < 0)$$

é igual à curva

$$h(0, p) = \sqrt{4 - (p + 2)^2} \quad (p \in [-4, 0])$$

multiplicada por $1/\pi$ - note que o ponto $p^\dagger(0) = -4$ está relacionado ao suporte da medida reescalada. Desta constatação, afirmamos existir uma densidade reescalada $\tilde{\rho}(t, \tilde{\lambda})$ para todo $t > 0$, com $p^\dagger(t) < \tilde{\lambda} < 0$ e $\tilde{\lambda}$ uma função de λ e provavelmente uma função de t , que é igual à curva $q = h(t, p)$ multiplicada por $1/\pi$. Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t, p) = \sqrt{\frac{2p^3 + 3p^2}{1 - 2p}} \quad (p \in [-3/2, 0]) ,$$

deduzimos que existe uma densidade reescalada limite dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(t, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\tilde{\lambda}^3 + 3\tilde{\lambda}^2}{1 - 2\tilde{\lambda}}} \quad (-3/2 < \tilde{\lambda} < 0),$$

e portanto uma densidade $\rho(\infty, \lambda)$ limite para os zeros de Lee-Yang adensados.

3.5 Conclusões e Problemas em Aberto

Nosso principal resultado encontra-se enunciado na Seção 3.2, o Teorema 3.2.4: estabelecemos o Teorema Central do Limite para o modelo esférico hierárquico ($N = \infty$) no caso de flutuações anormais ($\gamma = d + 2$) mostrando que a trajetória crítica da equação (3.2.1) (obtida na aproximação de potencial local e posterior tomada do limite $N \rightarrow \infty$) converge para um ponto fixo gaussiano quando $t \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} u^{(N)}(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} U(t, \sqrt{N}z) = |z|^2.$$

Em outras palavras, mostramos que a função

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{1}{N} U(t, \sqrt{N}z) \right)$$

tende à função inteira $\exp(-|z|^2)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Estudamos a equação de evolução (3.2.12) para um $d > 2$ qualquer, constatando que essa dinâmica apresenta um ponto fixo. Desse ponto fixo surge a conexão com a temperatura inversa crítica do modelo esférico hierárquico contínuo (limite $L \downarrow 1$): a criticalidade é determinada pela escolha do parâmetro β que faz com que $v(0, -1) = 1/(d-2)$; $1/(d-2)$ é justamente o valor da função que faz com que $v_t(t, -1)$ em

$$v_t(t, -1) = -1 + (d-2)v(t, -1)$$

seja nula. Além disso, observamos que o parâmetro crítico β_c separa comportamentos assintóticos (t grande) muito distintos da solução (solução para $\beta < \beta_c$ e $\beta > \beta_c$), de tal

modo que o limite para o ponto fixo gaussiano mostrado no Teorema 3.2.4 só ocorre se $\beta = \beta_c$. Cabe aqui um comentário: detectar a superfície crítica em uma transformação de grupo de renormalização é uma tarefa muito difícil, mesmo na vizinhança do ponto fixo. O método utilizado para modelos hierárquicos é devido a Bleher-Sinai. Essa facilidade com que determinamos a superfície crítica, mesmo muito afastados do ponto fixo, reside no fato de o potencial $v(t, p) = w_p(t, p)$ ser a função inversa de $u_x(t, x)$, sendo isso uma consequência de $w(t, p)$ ser a transformada de Legendre de $u(t, x)$ com respeito à variável x :

$$w(t, p) = \max_x (xp - u(t, x)) = \bar{x}p - u(t, \bar{x}) .$$

Pelo uso da chamada fração continuada de Gauss e pelo Teorema de Worpitzky mostramos que a seqüência $\{u^{(N)}(0, x), N \geq 0\}$ converge para uma função $u(0, x)$ no domínio complexo $|x + iy| \leq 1/4\beta$ (Proposição 3.2.1). Nessa demonstração constatamos que $u_x^{(N)}(0, x)$ e seu limite (limite em N) $u_x(0, x)$ pertencem à classe Pick de funções. Essa classe de funções é suficientemente abrangente, pois inclui funções que possuem pólos e funções que possuem cortes. $u_x^{(N)}(0, x)$ é uma função meromorfa que possui pólos de massa $1/N$ localizados em $-\alpha_{n, N/2-1}^2/\beta N^2$:

$$u_x^{(N)}(0, x) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\alpha_{n, N/2-1}^2}{\beta N^2} + x} .$$

O que verificamos é que no limite $N \rightarrow \infty$ esses pólos se adensam, formando um corte, de tal forma que $u_x(0, x)$ não admite a representação acima mostrada; faz-se necessária uma generalização dessa representação. Daí vê-se o quão adequada a classe Pick é para nosso problema.

Também realizamos um estudo geométrico da função $u_x(t, x)$ para todo t . Mostramos que condição inicial $u'_0(x)$ mapeia o semi-plano superior $\mathbb{H}$ do plano $\zeta = x + iy$ conformemente no semi-disco superior de raio 2 e centro em $(-2, 0)$ do plano $\eta = p + iq$. Verificamos que o fluxo u_{xt} preserva a classe Pick de funções, isto é, para todo $t > 0$ temos que $u_x(t, x)$ pertence a essa classe. Similarmente ao que foi feito para a condição inicial, mostramos que para cada t $u_x(t, x)$ mapeia o semi-plano superior $\mathbb{H}$ do plano ζ

conformemente em um domínio $\Omega_t \subset \mathbb{H}$ do plano η . Também fizemos a representação integral (mas não a canônica) de $u_x(t, x)$ para todo $t \geq 0$:

$$u_\zeta(t, \zeta) = -1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \zeta} - \frac{1}{\lambda - 1/2} \right) d\mu(t, \lambda) ;$$

nessa representação é colocado em evidência o ponto fixo $(x_F, p_F) = (1/2, -1)$ da dinâmica. Uma informação importante é dada pelo suporte da medida: a localização do corte (zeros de Lee-Yang adensados) no plano ζ . Verificamos ainda que para $t = 0$ a densidade $\rho(0, \lambda)$ do corte está relacionada, por uma escala em λ , à curva que define a borda do domínio Ω_0 . Acreditamos fortemente que isso também é verdade para todo $t > 0$, isto é, para todo $t > 0$ as densidades $\rho(t, \lambda)$ do corte estão relacionadas, por uma escala em λ , às curvas que definem a borda dos domínios Ω_t , embora não conheçamos a escala para cada t . Trata-se de um problema que permanece em aberto.

Uma questão que aparece neste estudo, mas que nesta dissertação não exploramos, é a seguinte: a função

$$\exp(-u^{(N)}(t, x)) = \left(\varphi_k^{(N)}(Nx) \right)^{1/N} \quad (3.5.1)$$

é a transformada de Fourier de uma medida positiva em $\mathbb{R}$? Nesse contexto, os conceitos importantes são o de *funções completamente monotônicas* e *distribuições de probabilidade infinitamente divisíveis*. Denotando por $f^{(m)}(x)$ a m -ésima derivada da função $f(x)$, definimos:

Definição 3.5.1 (Função Completamente Monotônica) *Uma função $f(x)$ é dita ser completamente monotônica no intervalo $a < x < b$ se*

$$(-1)^m f^{(m)}(x) \geq 0 \quad (a < x < b; m = 0, 1, 2, \dots) . \quad (3.5.2)$$

Definição 3.5.2 (Distribuição de Probabilidade Infinitamente Divisível) *Uma distribuição de probabilidade sobre $[0, \infty)$ é dita ser infinitamente divisível se, e somente se, para todo número natural n sua transformada de Laplace elevada a $1/n$ é a transformada de Laplace de uma distribuição de probabilidade.*

Para o caso $N = \infty$ dispomos da representação integral

$$-u_x(t, x) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \lambda} + \frac{1}{\lambda - 1/2} \right) d\mu(t, \lambda) \geq 0$$

com $\lambda \in (-\infty, x^\dagger(t))$ - uma vez que a solução $v(t, p) = u_x^{-1}(t, p)$ está definida para $p^\dagger(t) < p < 0$ e diverge para $+\infty$ em $p = 0$, segue $u_x(t, x) \leq 0$ com $\lim_{x \rightarrow \infty} u_x(t, x) = 0$. Para $x > x^\dagger(t)$ verifica-se que

$$(-1)^m \frac{\partial^m u_x(t, x)}{\partial x^m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m!}{(x - \lambda)^{m+1}} d\mu(t, \lambda) \geq 0 \quad (3.5.3)$$

para todo $m = 0, 1, 2, \dots$, o que implica que $-u_x(t, x)$ é uma função completamente monotônica em $(x^\dagger(t), \infty)$ e, em particular, em $[0, \infty)$ pois $x^\dagger(t) < 0$. Na Seção 7 do Capítulo *XIII* do livro “An Introduction to Probability Theory and Its Applications”, Vol. 2, 2ª edição, Wiley, New York (1971), de William Feller, o seguinte teorema é enunciado (página 450, Teorema 1):

Teorema 3.5.3 *Uma função w é a transformada de Laplace de uma distribuição de probabilidade infinitamente divisível sobre $[0, \infty)$ se, e somente se, $w = e^{-h}$ com $h(0+) = 0$ e h' uma função completamente monotônica.*

Como $u(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$, por este teorema podemos concluir que $F_k(x) = \exp(u^{(\infty)}(t, x))$ é a transformada de Laplace de uma distribuição de probabilidade infinitamente divisível sobre $[0, \infty)$, sendo que por (3.5.1)

$$F_k(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\varphi_k^{(N)}(Nx) \right)^{-1/N}. \quad (3.5.4)$$

Outra questão que gostaríamos de responder, que inclusive faz parte das motivações deste trabalho, diz respeito ao caso N grande finito. Pelo que aprendemos do caso $N = \infty$, efetuar a transformada de Legendre do potencial $u^{(N)}(t, x)$ deve ser de grande ajuda. Procedendo da mesma maneira que na Seção (3.2), consideremos

$$w^{(N)}(t, p) = \max_x (xp - u^{(N)}(t, x)) = \bar{x}p - u^{(N)}(t, \bar{x}). \quad (3.5.5)$$

Ao potencial $v^{(N)} = w_p^{(N)} = \bar{x}$ está associado o seguinte problema de valor inicial:

$$v_t^{(N)} = -\frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{v^{(N)}}{v_p^{(N)}} \right) - 1 + 2p(1+p)v_p^{(N)} + (\gamma + 4p)v^{(N)} \quad (3.5.6)$$

com $v^{(N)}(0, p) = \bar{x}(0, p)$ o valor x tal que

$$p = u_x^{(N)}(0, x) = \frac{i\sqrt{\beta x}N}{2Nx} \frac{J_{N/2}(i\sqrt{\beta x}N)}{J_{N/2-1}(i\sqrt{\beta x}N)} \quad (3.5.7)$$

é resolvida. Um ponto importante a ser observado é que assim como no caso $N = \infty$, a função identicamente igual a -1 é uma solução de equilíbrio para a dinâmica de $u_x^{(N)}(t, x)$. Até o presente momento nossa proposta é a de utilizar a versão abaixo enunciada do teorema da função implícita (vide página 99 de [21] ou páginas 17 e 18 de [5]) no espaço de funções analíticas que possuem expansão

$$v^{(N)}(t, p) = a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)(1+p)^k \quad (3.5.8)$$

convergente para $|1+p| < \delta$.

Teorema 3.5.4 (Teorema da Função Implícita) *Seja $\mathcal{G}$ um espaço de Banach e G um mapa contínuo $G : \mathbb{R} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que*

$$G(0, f_0) = 0 \quad (3.5.9)$$

para alguma $f_0 \in \mathcal{G}$. Assumamos que G é diferenciável em f e, além disso, sua derivada de Fréchet

$$dG[\varepsilon, f]g := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon, f + \Delta g) - G(\varepsilon, f)}{\Delta} \quad (3.5.10)$$

é contínua em ε e f com $dG[0, f_0]$ inversível (não-singular). Então, existe uma vizinhança I de 0 e uma única função contínua $\varepsilon \in I \mapsto f(\varepsilon) \in \mathcal{G}$ tal que $f(0) = f_0$ e $G(\varepsilon, f(\varepsilon)) = 0$.

Quanto à criticalidade desse problema, acreditamos que essa pode ser determinada como no caso $N = \infty$ (vide Observação 3.3.1), isto é, pela determinação do ponto fixo da equação diferencial ordinária satisfeita por $a_0(t)$, que neste caso é

$$\dot{a}_0 = - \left(1 + \frac{2}{N} \right) + \left(2 + \frac{4}{N} \frac{a_2}{a_1^2} \right) a_0 . \quad (3.5.11)$$

Como $a_1(t)$ e $a_2(t)$ por sua vez dependem de coeficientes $a_l(t)$ de ordem superior e do próprio $a_0(t)$, a criticalidade depende de *toda* a trajetória. Entretanto, podemos assumir um comportamento geral para $c(t) = a_2(t)/a_1^2(t)$ e tirar algumas conclusões sobre o comportamento de $a_0(t)$.

Comentário 3.5.5 *Na versão mais usual do Teorema da Função Implícita também é assumida diferenciabilidade de G com respeito ao parâmetro ε .*

Apêndice A

Apêndices

A.1 Demonstração do Teorema da Função Inversa

Esta seção do Apêndice é destinada à demonstração do Teorema da Função Inversa. As definições aqui apresentadas encontram-se na Seção 4 do Capítulo *II* de [14], e a demonstração na Seção 9.4 do Capítulo *IX* da mesma referência. Os outros dois teoremas que serão utilizados, que aqui enunciaremos mas não demonstraremos, estão na Seção 9.2 do Capítulo *IX* de [14].

Duas Definições.

Definição A.1.1 (Curva retificável) *Seja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ qualquer partição do intervalo $[0, 1]$. A essa partição está associada a soma*

$$S_\pi = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| . \quad (\text{A.1.1})$$

A curva $\Gamma : \gamma = \gamma(t)$ é dita ser de comprimento finito, ou ser retificável, se o conjunto $\{S_\pi\}$ de tais somas é limitado; o comprimento de Γ é por definição

$$l(\Gamma) = \sup S_\pi . \quad (\text{A.1.2})$$

Definição A.1.2 (Scroc) *Uma curva $\mathcal{C}$ é dita ser um “scroc” se é uma curva simples fechada retificável e orientada.*

Dois Teoremas. Seja $\mathcal{C}_i$ a região interior a uma curva fechada $\mathcal{C}$; a seguir denotaremos por $\mathcal{C}^*$ o conjunto $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_i$, e por Z_f (P_f) o número de zeros (pólos) de uma função f meromorfa em $\mathcal{C}_i$.

Teorema A.1.3 (Teorema de Rouché) *Seja $\mathcal{C}$ um “scroc” e $f(z)$ uma função meromorfa em $\mathcal{C}^*$, mas que não possui zeros nem pólos sobre $\mathcal{C}$. Suponha que $f(z)$ pode ser escrita como a soma de duas funções meromorfas em $\mathcal{C}^*$*

$$f(z) = g(z) + h(z) \quad (\text{A.1.3})$$

tal que $g(z) \neq 0, \infty$ sobre $\mathcal{C}$. Além disso, suponha que

$$|g(z)| > |h(z)| \quad (\text{A.1.4})$$

sobre $\mathcal{C}$. Então a mudança no argumento de $f(z)$ quando z percorre $\mathcal{C}$ é a mesma mudança que ocorre no argumento de $g(z)$, e a diferença entre o número de zeros e pólos é a mesma para essas duas funções:

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g . \quad (\text{A.1.5})$$

Outro teorema a ser utilizado é:

Teorema A.1.4 *Seja $f(z)$ uma função meromorfa em $\mathcal{C}^*$ com zeros em $a_1, a_2, \dots, a_n$ e pólos em $b_1, b_2, \dots, b_m$, sendo que nenhum deles se encontra sobre $\mathcal{C}$. Seja $g(z)$ uma função meromorfa em $\mathcal{C}^*$. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n g(a_j) - \sum_{k=1}^m g(b_k) , \quad (\text{A.1.6})$$

sendo que cada zero e cada pólo aparece na soma o número de vezes correspondente à sua multiplicidade.

Agora enunciamos o Teorema da Função Inversa (vide Teorema 9.4.1 de [14]):

Teorema A.1.5 (Teorema da Função Inversa) *Suponha que $f(z)$ é holomorfa em $|z| < R$, que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, e que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z| < r \leq R$. Seja $\mathcal{C}$ a circunferência $|z| = \rho$, $\rho < r$. Então*

$$g(w) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{tf'(t)}{f(t) - w} dt \quad (\text{A.1.7})$$

define uma função holomorfa de w , ao menos para

$$|w| < m = \min_{\theta} |f(\rho e^{i\theta})|. \quad (\text{A.1.8})$$

Para tais valores de w , $z = g(w)$ é a única solução de

$$f(z) = w \quad (\text{A.1.9})$$

que tende a zero com w .

Demonstração. Para um w fixo com $|w| < m$ e para z sobre a circunferência $\mathcal{C}$, temos

$$|f(z)| \geq m > |w|. \quad (\text{A.1.10})$$

Pelo Teorema de Rouché A.1.3, isto implica que as duas funções holomorfas

$$f(z) \text{ e } f(z) - w$$

têm o mesmo número de zeros no interior de $\mathcal{C}$. Uma vez que $f(z)$ tem um único zero na região interior a essa circunferência, a saber em $z = 0$, concluímos que a equação (A.1.9) tem um único zero, digamos $g(w)$, interior a $\mathcal{C}$. Pelo Teorema A.1.4 tal raiz é dada pela fórmula (A.1.7). Para mostrarmos que essa raiz, $g(w)$, é uma função holomorfa de w , ao menos para $|w| < m$, é suficiente notar que

$$\frac{1}{f(t) - w} = \frac{1}{f(t)} + \frac{w}{[f(t)]^2} + \cdots + \frac{w^n}{[f(t)]^{n+1}} + \cdots. \quad (\text{A.1.11})$$

Esta série converge uniformemente com respeito a t e w para $t \in \mathcal{C}$ e $|w| \leq m(1 - \delta)$, $\delta > 0$, e pode ser multiplicada pela função limitada $tf'(t)$ e integrada termo a termo. O resultado é

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{tf'(t)}{[f(t)]^{n+1}} dt. \quad (\text{A.1.12})$$

Assim se encerra esta demonstração. ■

A.2 Demonstração do Teorema de Worpitzky

Esta seção do Apêndice é destinada à demonstração do Teorema de Worpitzky. Todas as definições, fórmulas e teoremas aqui apresentados encontram-se nos capítulos *I*, *II* e *III* de [26].

Definições e Fórmulas. Seja a fração continuada

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \ddots}}}}. \quad (\text{A.2.1})$$

Os números a_k e b_k são chamados *elementos*, e podem ser quaisquer números complexos; a razão a_k/b_k é o chamado k -ésimo *quociente parcial*, com a_k o k -ésimo *numerador parcial* e b_k o k -ésimo *denominador parcial*.

A fração continuada truncada no k -ésimo quociente parcial

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots + \frac{a_k}{b_k}}}} = \frac{A_k}{B_k} \quad (\text{A.2.2})$$

é chamada de k -ésimo *aproximante*, e muitas vezes de k -ésimo *convergente*; A_k é o k -ésimo *numerador*, e B_k o k -ésimo *denominador*.

Seja a transformação

$$T_k(z) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \cdots + \frac{a_k}{b_k + z}}}} = \frac{A_{k-1}z + A_k}{B_{k-1}z + B_k} \quad (\text{A.2.3})$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$, com A_{k-1} , A_k , B_{k-1} e B_k independentes de z e tais que podem ser computados por meio das *fórmulas de recorrência fundamentais*:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1, & B_{-1} &= 0, & A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_{k+1} &= b_{k+1} A_k + a_{k+1} A_{k-1}, \\ B_{k+1} &= b_{k+1} B_k + a_{k+1} B_{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

com as últimas duas relações válidas para $k = 0, 1, 2, \dots$. O determinante da transformação $T_k(z)$ é dado por

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{k-1} & A_k \\ B_{k-1} & B_k \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{k-1} & b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2} \\ B_{k-1} & b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2} \end{vmatrix} \\ &= -a_k \begin{vmatrix} A_{k-2} & A_{k-1} \\ B_{k-2} & B_{k-1} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

de tal maneira que

$$A_{k-1} B_k - A_k B_{k-1} = (-1)^k a_0 a_1 \dots a_k, \quad (\text{A.2.6})$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$, sendo que a_0 pode ser tomado igual à unidade. A fórmula (A.2.6) é chamada *fórmula determinante*.

Estamos agora em posição de enunciar a seguinte definição:

Definição A.2.1 *A fração continuada (A.2.1) é dita convergir ou ser convergente se ao menos um número finito de seus denominadores B_n se anulam, e se o limite de sua seqüência de aproximantes*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{B_k} \quad (\text{A.2.7})$$

existe e é finito. De outro modo, a fração continuada é dita divergir ou ser divergente. O valor de uma fração continuada é definido como sendo o limite (A.2.7) de sua seqüência de aproximantes. Nenhum valor é atribuído para uma fração continuada divergente.

Note as igualdades

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{B_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\infty) . \quad (\text{A.2.8})$$

Devemos observar que se os numeradores parciais a_k são todos diferentes de zero então, por (A.2.6), A_k e B_k não podem ambas se anular; então a existência do limite finito (A.2.7) está garantido, mas um número finito de denominadores B_k pode se anular. Assim, neste importante caso, a fração continuada converge se, e somente se, o limite (A.2.7) existe e é finito.

Os elementos a_k e b_k podem depender de um ou mais parâmetros, ou podem eles próprios serem considerados como variáveis independentes. Em tais casos, interessa-nos naturalmente a questão de convergência uniforme. Fazemos então a seguinte definição:

Definição A.2.2 *Se os elementos a_k e b_k de uma fração continuada são funções de uma ou mais variáveis sobre um certo domínio $\mathcal{D}$, então a fração continuada é dita convergir uniformemente sobre $\mathcal{D}$ se converge para todos os valores da variável ou variáveis em $\mathcal{D}$, e se sua seqüência de aproximantes converge uniformemente sobre $\mathcal{D}$.*

Desigualdades Fundamentais. A fração continuada

$$\frac{1}{1 + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{1 + \frac{a_4}{1 + \ddots}}}} \quad (\text{A.2.9})$$

é dita satisfazer as *desigualdades fundamentais* se existem números $r_k \geq 0$ tais que

$$r_k |1 + a_k + a_{k+1}| \geq r_k r_{k-2} |a_k| + |a_{k+1}| \quad (\text{A.2.10})$$

para $k = 1, 2, 3, \dots$, sendo que poremos $a_1 = 0$, $r_0 = 0$ e $r_{-1} = 0$.

Teorema A.2.3 *Se a fração continuada (A.2.9) é tal que satisfaz as desigualdades fundamentais (A.2.10), então seus denominadores B_k são diferentes de zero, e os números*

$$\rho_k = \frac{-a_{k+1}B_{k-1}}{B_{k+1}} \quad (\text{A.2.11})$$

satisfazem a desigualdade

$$|\rho_k| \leq r_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.2.12})$$

Demonstração. Por (A.2.10) para $k = 1, 2$, temos que

$$r_1 |1 + a_2| \geq |a_2| \quad \text{e} \quad r_2 |1 + a_2 + a_3| \geq |a_3|. \quad (\text{A.2.13})$$

Portanto, $B_2 = 1 + a_2 \neq 0$, $B_3 = 1 + a_2 + a_3 \neq 0$, e

$$|\rho_1| = \left| \frac{a_2}{1 + a_2} \right| \leq r_1 \quad \text{e} \quad |\rho_2| = \left| \frac{a_3}{1 + a_2 + a_3} \right| \leq r_2. \quad (\text{A.2.14})$$

Usando indução, supomos agora que $B_{k+1} \neq 0$ e $|\rho_k| \leq r_k$ para $k = 1, 2, 3, \dots, m$, com $m \geq 2$, e os estabeleceremos para $k = m + 1$. Mas teremos de distinguir dois casos, em acordo com o fato de $a_{m+2} = 0$ ou $a_{m+2} \neq 0$. Se $a_{m+2} = 0$, então, por uma das fórmulas de recorrência fundamentais (A.2.4) e do fato que em (A.2.9) $b_k = 1$ para todo k ,

$$B_{m+2} = B_{m+1} + a_{m+2} B_m = B_{m+1},$$

que é diferente de zero por hipótese; e

$$|\rho_{m+1}| = \left| \frac{a_{m+2} B_m}{B_{m+2}} \right| = 0 \leq r_{m+1}. \quad (\text{A.2.15})$$

Se, por outro lado, $a_{m+2} \neq 0$, então segue de (A.2.10), com $k = m + 1$, que $r_{m+1} > 0$. Além disso, por uma das fórmulas de recorrência fundamentais (A.2.4) obtemos

$$B_{m+2} = (1 + a_{m+1} + a_{m+2})B_m - a_m a_{m+1} B_{m-2} ,$$

de tal modo que, pela hipótese de indução e (A.2.10),

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_{m+2}}{a_{m+2} B_m} \right| &= \left| \frac{1 + a_{m+1} + a_{m+2}}{a_{m+2}} - \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} \frac{a_m B_{m-2}}{B_m} \right| \\ &\geq \left| \frac{1 + a_{m+1} + a_{m+2}}{a_{m+2}} \right| - \left| \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} \right| r_{m-1} \geq \frac{1}{r_{m+1}} > 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

Portanto, $B_{m+2} \neq 0$ e $|\rho_{m+1}| \leq r_{m+1}$. Isto completa a indução e a demonstração deste teorema.

■

Pela fórmula determinante (A.2.6), a série infinita

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} \right) , \quad (\text{A.2.17})$$

que é equivalente à fração continuada, pode ser escrita como

$$1 - \frac{a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_2 a_3}{B_2 B_3} - \frac{a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4} + \cdots , \quad (\text{A.2.18})$$

que por sua vez é igual à série

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k \quad (\text{A.2.19})$$

por (A.2.11). Quando então a fração continuada (A.2.9) satisfaz as desigualdades fundamentais (A.2.10), a série

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_1 r_2 \cdots r_k \quad (\text{A.2.20})$$

é um majorante para a série (A.2.19); isto é,

$$\left| \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} \right| = |\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k| \leq r_1 r_2 \cdots r_k \quad (\text{A.2.21})$$

para $k = 1, 2, 3, \dots$. Isto é chamado por Wall de *primeira interpretação* das desigualdades fundamentais.

O Teorema de Worpitzky. Estamos agora em posição de enunciar e demonstrar o referido teorema:

Teorema A.2.4 (Teorema de Worpitzky) *Sejam $a_2, a_3, a_4, \dots$ funções de quaisquer variáveis sobre um domínio $\mathcal{D}$ no qual*

$$|a_{k+1}| \leq \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.2.22})$$

Então valem as seguintes afirmações:

- (a) *A fração continuada (A.2.9) converge uniformemente sobre $\mathcal{D}$.*
- (b) *Os valores da fração continuada e de seus aproximantes estão no domínio circular*

$$\left| z - \frac{4}{3} \right| \leq \frac{2}{3}. \quad (\text{A.2.23})$$

- (c) *A constante $\frac{1}{4}$ é a “melhor” constante que pode ser usada em (A.2.22), e (A.2.23) é o “melhor” domínio de valores dos aproximantes.*

Demonstração. (a) De (A.2.22) e da desigualdade $|1 + \lambda_1 + \lambda_2| \geq |1| - |\lambda_1| - |\lambda_2|$,

$$\frac{1}{3} |1 + a_2| \geq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \geq |a_2|, \quad (\text{A.2.24})$$

$$\frac{2}{4} |1 + a_2 + a_3| \geq \frac{2}{4} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \geq |a_3|, \quad (\text{A.2.25})$$

$$\begin{aligned}
\frac{k}{k+2} |1 + a_k + a_{k+1}| &\geq \frac{k}{2(k+2)} \\
&= \frac{k(k-2)}{(k+2)k} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&\geq \frac{k}{k+2} \frac{k-2}{k} |a_k| + |a_{k+1}|, \quad k = 3, 4, \dots \quad (\text{A.2.26})
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a fração continuada satisfaz as desigualdades fundamentais (A.2.10) com

$$r_k = \frac{k}{k+2}, \quad k = 3, 4, 5, \dots \quad (\text{A.2.27})$$

Assim sendo, a série majorante

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_2 r_3 \cdots r_k &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{k}{k+2} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \\
&= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 2 \quad (\text{A.2.28})
\end{aligned}$$

é convergente, e portanto concluímos que a fração continuada converge uniformemente para

$$|a_{k+1}| \leq \frac{1}{4}, \quad (\text{A.2.29})$$

$k = 1, 2, 3, \dots$, e que o módulo de seu valor não excede 2. Considerando que a_k pode ser igual a 0, segue que os módulos dos valores dos aproximantes não excede 2.

(b) Agora, escrevemos a fração continuada na forma

$$z = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}w} \quad \text{com} \quad w = \frac{x_1}{1 + \frac{a_3}{1 + \frac{a_4}{1 + \ddots}}} \quad (\text{A.2.30})$$

com $|x_1| \leq 1$. É claro que $|w| \leq 2$. Qualquer aproximante da fração continuada pode, naturalmente, ser escrita na forma (A.2.30). Então

$$|w| = 4 \left| \frac{z-1}{z} \right| \leq 2 \quad \text{ou} \quad \left| z - \frac{4}{3} \right| \leq \frac{2}{3}, \quad (\text{A.2.31})$$

que é (A.2.23).

(c) Para vermos que $\frac{1}{4}$ é a “melhor” constante que pode ser usada em (A.2.22), consideremos que $a_{k+1} = a$ para $k = 1, 2, 3, \dots$, com a um número real; temos assim a fração continuada periódica

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{1 + \frac{a}{1 + \frac{a}{1 + \ddots}}}}. \quad (\text{A.2.32})$$

Considerando convenientemente as mudanças de variáveis $a = -uv$ e $1 = u+v$, (A.2.32) passa a ser escrita

$$\frac{1}{w} \quad \text{com} \quad w = 1 - \frac{uv}{u+v - \frac{uv}{u+v - \frac{uv}{u+v - \frac{uv}{u+v - \ddots}}}}. \quad (\text{A.2.33})$$

Para a fração continuada periódica w não é muito difícil verificarmos que seu k -ésimo aproximante é dado por (vide [26], exercício 1.4 do Capítulo I)

$$\frac{A_k}{B_k} = 1 - \frac{uv \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{v}{u}\right)^j}{u+v \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{v}{u}\right)^j}. \quad (\text{A.2.34})$$

Para então sabermos o k -ésimo aproximante de (A.2.32), devemos escrever (A.2.34) na variável a . Como $v = 1 - u$, podemos obter u como função de a pela resolução da equação de segundo grau $u^2 - u - a = 0$. Denotando por u_1 e u_2 as soluções

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad (\text{A.2.35})$$

vemos que o k -ésimo aproximante de (A.2.32) é igual a

$$\frac{C_k}{D_k} = \frac{u_1 + (1 - u_1) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1 - u_1}{u_1} \right)^j}{u_1 + (1 - u_1)^2 \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1 - u_1}{u_1} \right)^j}. \quad (\text{A.2.36})$$

Pela Definição A.2.1, uma fração continuada é convergente se o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_k}{D_k} \quad (\text{A.2.37})$$

existe e é finito. Dessa condição conclui-se que a fração continuada periódica (A.2.32) é convergente se $a \geq -1/4$.

Para mostrar que (A.2.23) é o “melhor” domínio, basta que se note que os valores da fração continuada

$$z = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{1 - \frac{1/4}{1 - \frac{1/4}{1 - \ddots}}}} = \frac{1}{1 + 2a_2} \quad (\text{A.2.38})$$

preenchem o domínio (A.2.23) conforme a_2 varia sobre o domínio $|a_2| \leq \frac{1}{4}$.

■

A.3 A Classe Pick de Funções

Esta seção do Apêndice é destinada à demonstração do Teorema da Representação Integral Canônica das funções Pick. As definições, fórmulas e teoremas apresentados no

tópico Funções Analíticas encontram-se no Capítulo I de [9]; os apresentados nos outros tópicos encontram-se nos capítulos I e II de [8].

Funções Analíticas. Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é *diferenciável* em um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ se possui derivada

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (\text{A.3.1})$$

em z_0 . Tal função $f(z)$ é *analítica* em z_0 se é diferenciável em todo ponto de uma vizinhança de z_0 .

Uma função complexa $w = f(z)$ pode ser vista geometricamente como um mapa de uma região do plano z em uma região do plano w , definido por

$$\begin{aligned} w &= f(z) \\ &= u(z) + iv(z), \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

$z = x + iy$, $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$ funções real valoradas. Quando $f(\zeta)$ é uma função analítica, suas partes real e imaginária, respectivamente u e v , satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{A.3.3})$$

Uma função $g(x, y)$ com segundas derivadas parciais contínuas é dita ser *harmônica* em um domínio (conjunto aberto conexo no plano complexo $\mathbb{C}$) $\mathbb{U}$ se satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{A.3.4})$$

para todo $x, y \in \mathbb{U}$. Se $f(\zeta)$ é analítica em $\mathbb{U}$, $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem (A.3.4), e portanto são funções harmônicas em $\mathbb{U}$. Uma função v é chamada de *harmônica*

conjugada de u se u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, isto é, se $u + iv$ é analítica. Quando uma harmônica conjugada existe, ela é única a menos de uma constante aditiva arbitrária. Se v é harmônica conjugada de u , então $-u$ é harmônica conjugada de v .

Se $g(z) = g(x, y)$ é uma função harmônica sobre um domínio do plano complexo que contém o disco $|z - z_0| \leq r$, então a *Propriedade do Valor Médio* diz que

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (\text{A.3.5})$$

Sejam f e g funções analíticas respectivamente nos domínios disjuntos $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, e um arco Γ que é a borda comum a esses dois domínios. Se f e g são ambas definidas e analíticas sobre Γ , e $f(z) = g(z)$ sobre esse arco, então a função

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{para } z \in \mathbb{U} \cup \Gamma \\ g(z) & \text{para } z \in \mathbb{V} \cup \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.3.6})$$

é analítica em $\mathbb{U} \cup \Gamma \cup \mathbb{V}$. A função F é chamada de *continuação analítica* de f (ou g) através de Γ para um domínio maior.

Funções Racionais. Uma função é dita ser *racional* se pode ser escrita como a razão de dois polinômios.

Seja $f(z)$ uma função racional, e seja

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (\text{A.3.7})$$

sua representação como a razão entre dois polinômios relativamente primos, isto é, 1 é o *maior divisor comum* de $p(z)$ e $q(z)$. Seja m o grau de $p(z)$ e n o grau de $q(z)$. Define-se o grau d da função $f(z)$ como

$$d = \max(m, n). \quad (\text{A.3.8})$$

Para qualquer valor da constante λ , o número de raízes da equação $f(z) = \lambda$ é exatamente d , o grau de $f(z)$. Aqui, naturalmente, devem ser contadas as multiplicidades das raízes, além de uma raiz no infinito, caso exista - para todos os valores finitos de λ tais raízes serão todas finitas e simples (multiplicidade 1).

É fácil mostrar que se a função racional $f(z)$ tem grau m e a $g(z)$ tem grau n , então tanto a soma quanto o produto dessas funções tem grau no máximo igual $m + n$. Além disso, o grau da derivada $f'(z)$ é no máximo duas vezes o grau de $f(z)$.

Se d é o grau da função racional $f(z)$, e tal função se anula em $d + 1$ pontos, então $f(z) = 0$ identicamente. Deste fato segue que uma função racional de grau d é completamente determinada pelo seu comportamento em $2d + 1$ pontos. Se $f(z)$ e $g(z)$ são funções de grau d que coincidem em $2d + 1$ pontos, então $f(z) - g(z)$ tem ao menos $2d + 1$ zeros e é de grau no máximo $2d$.

Definição da Classe Pick de Funções. Por *classe Pick* P de funções denotamos a classe de funções analíticas no semi-plano superior

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\} \quad (\text{A.3.9})$$

com parte imaginária positiva para $z \in \mathbb{H}$, isto é, $v(z) \geq 0$ se $y > 0$. Essa classe de funções forma um cone convexo e é fechada sob composições:

1. $af_1 + bf_2 \in P$
2. $f_1 \circ f_2 \in P$

válido para quaisquer $a, b \geq 0$ e $f_1, f_2 \in P$.

Seja $f(z) = u(z) + iv(z)$ uma função Pick que é real em algum ponto z_0 do semi-plano superior. Isso significa que a função positiva e harmônica $v(z)$ se anula nesse ponto. Agora, pela Propriedade do Valor Médio das funções harmônicas, segue que $v(z) = 0$ identicamente; então $f(z)$ é uma constante real. Vemos assim que uma função Pick não trivial *nunca* é real em $z \in \mathbb{H}$.

Seja (c_1, c_2) um intervalo aberto do eixo real; por $P_{(c_1, c_2)}$ denotamos a subclasse de P formada por funções Pick que admitem uma continuação analítica para o semi-plano inferior através do referido intervalo, sendo que essa continuação é por reflexão. Assim,

funções nessa classe são reais sobre o intervalo (c_1, c_2) e são continuáveis por todo o semi-plano inferior. Uma função não constante em P assume valores reais somente sobre o eixo real. Se $f(z) = u(z) + iv(z)$ está em $P_{(c_1, c_2)}$, $v(x) = 0$ para $c_1 < x < c_2$; então $v(x + iy) - v(x) > 0$ para $y > 0$, e portanto $v_y(x) \geq 0$. Por uma das equações de Cauchy-Riemann temos que $u_x(x) = v_y(x) \geq 0$, e portanto $f(x) = u(x)$ é uma função crescente no intervalo (c_1, c_2) .

Suponhamos que $f(z)$ é uma função racional pertencente à classe $P_{(c_1, c_2)}$. Como dito no parágrafo anterior, f assume valores reais sobre o eixo real, e somente sobre ele. Não é difícil vermos que existe uma constante real λ tal que $f(z) - \lambda$ possui N zeros simples e distintos; basta escolhermos λ fora do conjunto finito de valores assumidos por f em que a derivada racional se anula. N , naturalmente, é o grau da razão $f(z)$. Entre quaisquer dois zeros da função Pick $f - \lambda$ deve existir um pólo, já que a função é sempre crescente. Este também é o caso de uma vizinhança do infinito. Portanto, há N pólos distintos, necessariamente simples, e o resíduo em cada pólo é negativo. É claro que um dos pólos pode estar no infinito, e neste caso o termo correspondente na função racional é do tipo az , com $a > 0$.

Representação de Funções Pick. Os argumentos apresentados no último parágrafo sobre funções racionais nas classes $P_{(c_1, c_2)}$ torna claro que qualquer função racional Pick, real em um intervalo do eixo real, é necessariamente da seguinte forma:

$$f(z) = az + b + \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\alpha_n - z} \quad (\text{A.3.10})$$

com $a > 0$, b um número real e $m_n > 0$; $f(z)$ é uma função meromorfa com pólos de massa m_n localizados em α_n - por função meromorfa entende-se uma função simplesmente valorada (para cada ponto do domínio há um único ponto na imagem) que é analítica em todo domínio com exceção de um conjunto discreto de seu domínio, e tais singularidades devem ir para o infinito polinomialmente, isto é, esses pontos excepcionais devem ser pólos e não singularidades essenciais. Uma simples definição diz que uma função meromorfa é uma função da forma (A.3.7) com $p(z)$ e $q(z)$ funções inteiras (analíticas em todo plano complexo). Portanto, uma função meromorfa pode somente ter ordem finita, pólos isolados e zeros, e nenhuma singularidade essencial em seu domínio.

Enunciaremos agora um teorema que apresenta uma caracterização de funções da classe Pick:

Teorema A.3.1 *Uma função $f(z) = u(z) + iv(z)$ pertence à classe Pick se, e somente se, possui a representação integral canônica*

$$f(z) = az + b + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda), \quad (\text{A.3.11})$$

sendo que $a = \lim_{y \rightarrow \infty} f(iy)/iy \geq 0$, $b = u(i)$ é real, e μ é uma medida positiva de Borel sobre $\mathbb{R}$ tal que $\int (\lambda^2 + 1)^{-1} d\mu(\lambda) < \infty$. Além disso,

$$\mu((x_1, x_2)) + \frac{\mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\})}{2} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} v(x + iy) dx \quad (\text{A.3.12})$$

vale para qualquer intervalo finito (x_1, x_2) , e determina μ de maneira única a partir da função f .

Há um resultado correspondente para funções harmônicas e positivas no semi-plano superior:

Teorema A.3.2 *Qualquer função $v(z) = v(x, y)$ harmônica e positiva no semi-plano superior $\mathbb{H}$ admite uma única representação canônica da forma*

$$v(x, y) = ay + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\mu(\lambda), \quad (\text{A.3.13})$$

sendo que $a = \lim_{y \rightarrow \infty} v(0, y)/y \geq 0$ e μ é uma medida positiva de Borel sobre $\mathbb{R}$ tal que $\int (\lambda^2 + 1)^{-1} d\mu(\lambda) < \infty$. Reciprocamente, qualquer função dessa forma é harmônica e positiva no semi-plano superior $\mathbb{H}$.

Devemos ressaltar que dado o Teorema A.3.1, podemos deduzir o Teorema A.3.2; e a recíproca também é verdadeira. Para demonstrarmos o Teorema A.3.2, podemos

supor $v(x, y)$ dada, harmônica e positiva no semi-plano. Tal função tem uma harmônica conjugada $u(x, y) = u(z)$, determinada a menos de uma constante real aditiva, que é harmônica no semi-plano. Temos então que a função analítica $f(z) = u(z) + iv(z)$ está em P e admite a representação (A.3.11). A função $f(z)$ foi assim determinada a menos da constante real aditiva, e somente o valor b não é determinado por $v(z)$. Se tomarmos a parte imaginária de $f(z)$ na representação (A.3.11), obtemos $v(z)$ na representação (A.3.13), sendo que essa representação é única já que não depende da constante b . Por outro lado, o Teorema A.3.1 é obtido do Teorema A.3.2 escrevendo-se $v(z)$, a parte imaginária de $f(z)$, na forma (A.3.13) e notando que a função definida por (A.3.11) e os dados a e μ com $b = \Re f(i)$ é uma função analítica no semi-plano superior $\mathbb{H}$ com a dada parte imaginária ($v(z)$) e o valor correto em $z = i$. Então (A.3.11) é uma representação de $f \in P$. Essa representação é única pois $v(z)$, pelo Teorema A.3.2, determina completamente os valores a e μ .

Enunciaremos agora dois teoremas referente a funções definidas no disco unitário:

Teorema A.3.3 *Uma função $\phi(w) = \alpha(w) + i\beta(w)$ analítica no disco $|w| < 1$ com parte positiva nesse domínio admite uma única representação canônica da forma*

$$\phi(w) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\omega(\theta) + i\beta(0) , \quad (\text{A.3.14})$$

com $\beta(0)$ um número real e ω uma medida positiva de Borel sobre o intervalo $[0, 2\pi]$ com massa total finita. Reciprocamente, qualquer função da forma (A.3.14) é analítica no disco $|w| < 1$, e sua parte real é positiva nesse domínio.

Temos também o seguinte teorema:

Teorema A.3.4 *Uma função $\alpha(w)$ harmônica e positiva no disco $|w| < 1$ possui uma única representação canônica da forma*

$$\alpha(w) = \alpha(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\omega(\varphi) , \quad (\text{A.3.15})$$

sendo ω uma medida positiva de Borel sobre o intervalo $[0, 2\pi]$ com massa total finita. Reciprocamente, qualquer função da forma (A.3.15) é harmônica e positiva no disco.

A equivalência entre o Teorema A.3.3 e o Teorema A.3.4 é estabelecida utilizando-se novamente o fato que a função harmônica conjugada é determinada a menos de uma constante real aditiva. Temos também de notar que para $w = re^{i\varphi}$

$$\frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} = \frac{1 - r^2 - i2r \sin(\theta - \varphi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)}. \quad (\text{A.3.16})$$

Mostraremos neste parágrafo a equivalência entre os Teoremas A.3.1 e A.3.3: a idéia é usar as funções

$$z(w) = \frac{1}{i} \frac{w+1}{w-1} \quad \text{e} \quad w(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad (\text{A.3.17})$$

um par de transformações fracionais lineares que são uma inversa da outra. A função $z(w)$ mapeia o disco unitário no semi-plano superior, enquanto que $w(z)$ mapeia o semi-plano superior no disco unitário. Se $\phi(w) = \alpha(w) + i\beta(w)$ é analítica no disco $|w| < 1$ com parte real positiva nesse domínio, a função $f(z) = i\phi(w(z))$ está na classe P ; reciprocamente, se $f(z)$ está na classe P , a função $\phi(w) = -if(z(w))$ é analítica no disco $|w| < 1$ com parte real positiva nesse domínio. Assim, as duas classes de funções estão em correspondência um-para-um. Podemos portanto computar a representação canônica de $f(z)$ em P partindo da correspondente representação de $\phi(w)$: suponhamos $\phi(w)$ dada por (A.3.14); se a medida $d\omega$ tem um ponto de massa $a > 0$ em $\theta = 0$, separamos essa massa escrevendo (A.3.14) como

$$\phi(w) = \frac{1+w}{1-w} a - ib + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\omega'(\theta) \quad (\text{A.3.18})$$

com $d\omega'$ a medida obtida de $d\omega$ pela omissão do ponto de massa a em $\theta = 0$. Considerando agora $i\phi(w(z))$, os primeiros dois termos ficam $az + b$. Substituindo a transformação $w(z)$ na integral acima e multiplicando por i , essa fica

$$\int_0^{2\pi} \frac{z \cos \theta/2 - \sin \theta/2}{z \sin \theta/2 + \cos \theta/2} d\omega'(\theta); \quad (\text{A.3.19})$$

efetuando a mudança de variável $\lambda = -\cot \theta/2$, a qual leva a circunferência unitária no eixo real com $w = 1$ mapeado no infinito, a medida $d\omega'$ torna-se uma medida de massa total finita definida sobre o eixo real. Temos assim

$$f(z) = az + b + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda z + 1}{\lambda - z} d\nu(\lambda) \quad (\text{A.3.20})$$

com $\int d\nu(\lambda) < \infty$. Por fim, escrevendo

$$d\nu(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu(\lambda), \quad (\text{A.3.21})$$

obtemos a representação canônica (A.3.11). Devemos enfatizar que toda a argumentação é reversível, isto é, se $f(z)$ em P possui a representação (A.3.11), $\phi(w) = -if(z(w))$ tem a forma (A.3.14).

O que vimos é que os quatro teoremas que enunciamos são equivalentes. Dessa maneira, por conveniência, demonstraremos a validade da representação canônica para o Teorema A.3.4, e a unicidade da representação para o Teorema A.3.1.

Demonstração. Suponhamos que a função $\alpha(w) = \alpha(re^{i\theta})$ é harmônica e positiva em um disco de raio maior ou igual a 1; é portanto limitada e contínua sobre $|w| = 1$. Podemos determinar a harmônica conjugada $\beta(w)$ de tal maneira que essa seja nula em $w = 0$; assim $\phi(w) = \alpha(w) + i\beta(w)$ é analítica em um disco de raio maior ou igual a 1 e por conseguinte representada pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \quad (\text{A.3.22})$$

uniforme e absolutamente convergente sobre a circunferência $|w| = 1$. A parte real $\alpha(w)$ é portanto dada pela série

$$\alpha(w) = \frac{\phi(w) + \overline{\phi(w)}}{2} = c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n + \bar{c}_n \bar{w}^n, \quad (\text{A.3.23})$$

que é uniforme e absolutamente convergente sobre $|w| \leq 1$. Dessa maneira, nossa função admite uma representação da forma

$$\alpha(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n r^{|n|} e^{in\theta} ; \quad (\text{A.3.24})$$

não é difícil de se ver que C_n são os coeficientes de Fourier da função $\alpha(1, \theta)$; então

$$\alpha(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \int_0^{2\pi} \alpha(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi . \quad (\text{A.3.25})$$

Para $r < 1$ podemos permutar a ordem de integração e soma para obter

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)} \alpha(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi , \quad (\text{A.3.26})$$

que nos conduz a

$$\alpha(w) = \alpha(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} \alpha(e^{i\varphi}) d\varphi . \quad (\text{A.3.27})$$

Esta é a representação (A.3.15) para $\alpha(w)$ com a medida $d\omega(\varphi)$ dada pela densidade positiva e limitada $(1/2\pi)\alpha(e^{i\varphi})$ relativa à medida de Lebesgue sobre o intervalo $[0, 2\pi]$. É importante notarmos que a massa total dessa medida é justamente o valor de $\alpha(w)$ na origem:

$$\alpha(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(e^{i\varphi}) d\varphi . \quad (\text{A.3.28})$$

O caso geral é uma consequência imediata do caso que mostramos: se $\alpha(w)$ é harmônica e positiva em $|w| < 1$, a função $\alpha_\varepsilon(w) = \alpha(w/(1 + \varepsilon))$ é harmônica e positiva em $|w| < 1 + \varepsilon$, e portanto admite a representação (A.3.15) com uma medida positiva $d\omega_\varepsilon(\varphi)$ de massa total $\alpha_\varepsilon(0) = \alpha(0)$. Conforme ε se aproxima de 0, as funções $\alpha_\varepsilon(w)$ convergem para $\alpha(w)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $|w| < 1$, enquanto o sistema de medidas positivas $d\omega_\varepsilon$ satisfazem a hipótese do Teorema de Helly (enunciado ao final desta demonstração), já que há um limite uniforme para suas massas. Portanto existe uma seqüência ε_n convergindo para 0 correspondente à seqüência de medidas $d\omega_n$ convergindo fracamente para uma medida positiva $d\omega$ tal que

$$\alpha(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon(w) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi)} d\omega(\varphi) . \quad (\text{A.3.29})$$

Mostraremos agora que os elementos a , b e $d\mu$ da representação integral canônica (A.3.11) são unicamente determinados pela função $f(z)$ em P :

Para mostrarmos que a é determinado de modo único, começamos por reescrever (A.3.11) na forma (A.3.20) que tem por vantagem o fato de a medida $d\nu$ ser de massa total finita. Nessa representação $f(iy)/iy$ é igual a

$$a + \frac{b}{iy} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + 1 + i\lambda(y - 1/y)}{\lambda^2 + y^2} d\nu(\lambda) ; \quad (\text{A.3.30})$$

claramente o integrando converge pontualmente para 0 quando $y \rightarrow \infty$, e sua parte real e imaginária são uniformemente limitadas por 1 para $y > 1$. Portanto, o Teorema da Convergência de Lebesgue garante que o limite da integral é 0, de tal modo que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(iy)}{iy} = a . \quad (\text{A.3.31})$$

Para vermos que $b = u(i)$, basta considerarmos $x = 0$ e $y = 1$ em

$$\Re f(z) = u(x + iy) = ax + b + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda - x}{(\lambda - x)^2 + y^2} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda) . \quad (\text{A.3.32})$$

Com relação à medida $d\mu$, enunciamos:

Lema A.3.5 *Para qualquer intervalo finito $x_1 < x < x_2$*

$$\mu((x_1, x_2)) + \frac{\mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\})}{2} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} v(x + iy) dx . \quad (\text{A.3.33})$$

Demonstração. A parte imaginária de (A.3.11) é dada por

$$v(x + iy) = ay + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\mu(\lambda) , \quad (\text{A.3.34})$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$ (pelo fato de que $f \in P$ e portanto é uma função analítica no semi-plano superior). Integrando os dois lados de (A.3.34) sobre o intervalo (x_1, x_2) temos que

$$\int_{x_1}^{x_2} v(x + iy) dx = ay(x_2 - x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{x_1, x_2}(y, \lambda) d\mu(\lambda) , \quad (\text{A.3.35})$$

com

$$\begin{aligned} \chi_{x_1, x_2}(y, \lambda) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} dx \\ &= \arctan\left(\frac{x_2 - \lambda}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x_1 - \lambda}{y}\right) \\ &\leq \pi . \end{aligned} \quad (\text{A.3.36})$$

Note que

$$\lim_{y \downarrow 0} \chi_{x_1, x_2}(y, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < x_1 < x_2 \text{ ou } x_1 < x_2 < \lambda \\ \pi & \text{se } x_1 < \lambda < x_2 \\ \pi/2 & \text{se } \lambda = x_1 \text{ ou } \lambda = x_2 \end{cases} . \quad (\text{A.3.37})$$

Podemos reescrever (A.3.35) como

$$\int_{x_1}^{x_2} v(x + iy) dx = ay(x_2 - x_1) + \int_{x_1-1}^{x_2+1} \chi_{x_1, x_2}(y, \lambda) d\mu(\lambda) + I(y) , \quad (\text{A.3.38})$$

sendo que

$$\begin{aligned}
I(y) &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\lambda \leq x_1-1} \frac{y}{(\lambda-x)^2 + y^2} d\mu(\lambda) + \int_{\lambda \geq x_2+1} \frac{y}{(\lambda-x)^2 + y^2} d\mu(\lambda) \right) dx \\
&\leq (x_2 - x_1) \int_{\lambda \leq x_1-1} \frac{y}{(\lambda-x_1)^2 + y^2} d\mu(\lambda) \\
&\quad + (x_2 - x_1) \int_{\lambda \geq x_2+1} \frac{y}{(\lambda-x_2)^2 + y^2} d\mu(\lambda) .
\end{aligned} \tag{A.3.39}$$

Agora, notemos que a função

$$g(y) \equiv \frac{y}{(\lambda - x_2)^2 + y^2} \tag{A.3.40}$$

atinge seu máximo valor em $y = \lambda - x_2$, e portanto

$$\frac{y}{(\lambda - x_2)^2 + y^2} \geq \frac{1}{(\lambda - x_2)^2 + 1} \tag{A.3.41}$$

para $y < 1 < \lambda - x_2$; e para $\lambda \neq x_2$

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{y}{(\lambda - x_2)^2 + y^2} = 0 . \tag{A.3.42}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{\lambda \geq x_2+1} \frac{y}{(\lambda - x_2)^2 + y^2} d\mu(\lambda) = 0 . \tag{A.3.43}$$

Utilizando um argumento similar temos que

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{\lambda \leq x_1-1} \frac{y}{(\lambda - x_1)^2 + y^2} d\mu(\lambda) = 0 , \tag{A.3.44}$$

o que nos leva à conclusão que

$$\lim_{y \downarrow 0} I(y) = 0 . \tag{A.3.45}$$

Por outro lado, $0 \leq \chi_{x_1, x_2}(y, \lambda) \leq \pi$ (vide (A.3.36)) e $\int_{x_1-1}^{x_2+1} \pi d\mu(\lambda) < \infty$; portanto, aplicando o Teorema da Convergência Dominada à (A.3.38) e utilizando (A.3.35), (A.3.37) e (A.3.45), concluímos que

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} v(x + iy) dx = \pi \mu((x_1, x_2)) + \frac{\pi}{2} [\mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\})] . \quad (\text{A.3.46})$$

Encerra-se assim a demonstração do lema. ■

Com o lema demonstrado, completamos a demonstração do teorema. ■

Teorema A.3.6 (Teorema da Seleção de Helly) *Seja $\{\omega_n\}$ uma seqüência de funções não decrescentes sobre um intervalo limitado $[a, b]$, com $\omega_n(a) = 0$ e $\omega_n(b) = 1$. Então alguma subsequência $\{\omega_{n_j}\}$ converge em todo $[a, b]$ para uma função não decrescente ω , e para cada função contínua g sobre $[a, b]$*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) d\omega_{n_j}(t) = \int_a^b g(t) d\omega(t) . \quad (\text{A.3.47})$$

Demonstração. Vide páginas 22 e 23 de [9]. ■

Passemos agora à questão das funções $f(z) = u(z) + iv(z)$ que podem ser continuadas analiticamente para o semi-plano inferior através de um intervalo (c_1, c_2) do eixo real: em subintervalos fechados desse intervalo a função $v(x + iy)$ converge uniformemente com y decrescente para uma função limitada e contínua $v(x)$; a medida $d\mu(\lambda)$ aparece portanto como $(1/\pi) v(\lambda) d\lambda$ nesse subintervalo. Quando a continuação analítica é possível por reflexão, a função $v(x)$ é nula sobre o subintervalo, e portanto μ não tem massa alguma sobre o intervalo. Por outro lado, se μ não tem massa alguma sobre o intervalo (c_1, c_2) , a integral em (A.3.11) faz sentido para todo $z = x + i0$ no intervalo e claramente é real sobre esse; a função pode ser continuada para o semi-plano inferior por reflexão, e a função continuada também é dada pela fórmula (A.3.11). Estabelecemos assim o seguinte resultado:

Lema A.3.7 *Uma função Pick $f(z)$ pertence à classe $P_{(c_1, c_2)}$ se, e somente se, a correspondente medida μ põe massa alguma no intervalo (c_1, c_2) .*

Convergência de Funções Pick. Há uma topologia natural para a classe Pick de funções, a saber, a topologia de convergência uniforme em subconjuntos compactos do semi-plano superior. É óbvio que sob essa topologia P é um espaço métrico completo. É importante estabelecer uma propriedade de compacticidade para subconjuntos de P .

Lema A.3.8 *Seja $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto do semi-plano superior, e $\mathcal{I}$ uma família infinita de funções em P uniformemente limitadas em z_0 , isto é, $|f(z_0)| \leq M$ para toda f em $\mathcal{I}$. Então existe uma seqüência em $\mathcal{I}$ que é convergente.*

Lema A.3.9 *Seja $\mathcal{I}$ uma família infinita de funções em $P_{(c_1, c_2)}$ uniformemente limitadas em algum subintervalo de (c_1, c_2) . Então existe uma seqüência em $\mathcal{I}$ que converge em P para um limite em $P_{(c_1, c_2)}$ e que também converge para esse limite uniformemente em subconjuntos compactos de (c_1, c_2) .*

Lema A.3.10 *Uma família infinita de funções positivas e harmônicas no semi-plano superior contém uma seqüência que converge uniformemente em subconjuntos compactos do semi-plano se é uniformemente limitada em algum ponto. Uma seqüência de tais funções, não limitadas em algum ponto fixo, contém uma subseqüência que converge para infinito, isto é, as recíprocas convergem para 0 uniformemente em conjuntos compactos.*

A.4 A Reflexão de Schwarz

Esta seção do Apêndice é destinada à uma apresentação do que vem a ser a chamada reflexão de Schwarz. As definições, fórmulas e teoremas aqui apresentados encontram-se nos capítulos *V*, *VI* e *VIII* de [6].

A Função de Schwarz para um Arco Analítico. Seja $z = x + iy$. Suponhamos que o arco Γ é escrito na forma retangular

$$f(x, y) = 0. \quad (\text{A.4.1})$$

Em coordenadas conjugadas esse é escrito

$$f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \equiv g(z, \bar{z}) = 0. \quad (\text{A.4.2})$$

Suponhamos em um primeiro momento que a função $g(z, \bar{z})$ é um polinômio irreduzível de um certo grau, isto é, g não pode ser expressa na forma $g \equiv g_1 g_2$ com g_1 e g_2 polinômios reais, e o grau de g é maior ou igual a 1. Escrevamos

$$g(p, q) = \sum_{j,k=0}^{m,n} a_{jk} p^j q^k \quad \text{e} \quad \bar{g}(p, q) = \sum_{j,k=0}^{m,n} \overline{a_{jk}} p^j q^k. \quad (\text{A.4.3})$$

Ao longo do arco Γ temos que $g(z, \bar{z}) = 0$, e conjugando essa equação temos que $\overline{g(z, \bar{z})} \equiv \bar{g}(z, \bar{z}) = 0$. Segue por um bem conhecido Teorema da Álgebra que os dois polinômios $g(z, \bar{z})$ e $\bar{g}(z, \bar{z})$ devem ser proporcionais (vide Bôcher, página 211). Assim,

$$\bar{g}(z, \bar{z}) = \lambda g(z, \bar{z}) \quad \lambda = \text{constante} \neq 0. \quad (\text{A.4.4})$$

Polinômios com a propriedade (A.4.4) são chamados *auto-conjugados*. Auto-conjugação é portanto uma condição necessária para que um polinômio escrito em coordenadas conjugadas z e $\bar{z}$ represente uma curva real; não é suficiente, como podemos ver do exemplo $g(z, \bar{z}) = z\bar{z} + 1$.

Agora, deixemos de lado a hipótese de que a função $g(z, \bar{z})$ é um polinômio irreduzível de um certo grau e assumamos somente que g é uma função analítica de z e $\bar{z}$. Se em um ponto z_0 da curva Γ tivermos $\partial g / \partial \bar{z}|_{z_0} \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita resolvemos $g(z, \bar{z}) = 0$ para $\bar{z}$ em termos de z de modo *único*

$$\bar{z} = S(z), \quad (\text{A.4.5})$$

com $S(z)$ uma função analítica regular de z em alguma vizinhança de z_0 : $|z - z_0| \leq m$ - vide Figura A.1. Em z_0 temos que $\bar{z}_0 = S(z_0)$, e a identidade (A.4.5) é válida ao longo de Γ para pontos em uma vizinhança de z_0 .

Figura A.1: Curva Γ , o ponto z_0 e sua vizinhança.

A condição $\partial g / \partial \bar{z} \neq 0$ é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \neq 0 \quad (\text{A.4.6})$$

ou à asserção que $\partial f / \partial x = 0$ e $\partial f / \partial y = 0$ não ocorrem simultaneamente. Um ponto de Γ no qual $\partial g / \partial \bar{z} \neq 0$ é chamado um *ponto regular* de Γ .

Se ao longo de uma porção de um arco simples, incluindo os pontos finais, $\partial g / \partial \bar{z} \neq 0$, resolvemos $g(z, \bar{z}) = 0$ para $\bar{z}$ em cada ponto para obter uma função analítica regular $S(z)$. Então, por um argumento padrão de continuação analítica, $S(z)$ pode ser definida como o ramo de uma função analítica simplesmente valorada em uma faixa (*strip-like region*) que contém o arco em seu interior. Se Γ intercepta a si mesma, então essa faixa intercepta a si mesma; isto é, $S(z)$ pode ser definida em uma faixa que pertence a uma superfície de Riemann - vide Figura A.2.

Figura A.2: Curva Γ e uma faixa em sua vizinhança (*strip-like regions*).

Se Γ é uma curva analítica fechada simples, então $S(z)$ é um ramo de uma função analítica simplesmente valorada em um anel que contém Γ em seu interior - vide Figura A.2. É possível que $S(z)$ possa ser continuada analiticamente para outras porções do plano como uma função simplesmente valorada ou multivalorada. Por exemplo, se g é um polinômio, então $S(z)$ é geralmente uma função algébrica multivalorada de z .

Se $z_0 = 0$ é um ponto sobre Γ , então $g(0, 0) = 0$ e $S(z)$ tem a seguinte representação como uma integral de linha

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{wg_w(z, w)}{g(z, w)} dw, \quad (\text{A.4.7})$$

com $\mathcal{C}$ um contorno adequado que circunda o ponto $w = 0$.

Chamaremos $S(z)$ de *função de Schwarz de Γ* . Pelo Teorema da Unicidade para funções analíticas, uma função analítica é determinada unicamente pelos valores que toma ao longo de um arco. A função de Schwarz de Γ pode portanto ser definida alternativamente como *a única função analítica $S(z)$ que em cada ponto z ao longo de Γ toma o valor $\bar{z}$* .

Daremos agora um lista de funções de Schwarz de algumas curvas familiares:

(i) para uma linha reta que passa por z_1 e z_2

$$\bar{z} = S(z) = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2} z + \frac{z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1}{z_1 - z_2}. \quad (\text{A.4.8})$$

(ii) para um círculo de raio r e centrado em z_0

$$\bar{z} = S(z) = \frac{r^2}{z - z_0} + \bar{z}_0. \quad (\text{A.4.9})$$

(iii) para a elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ com $a > b$

$$\bar{z} = S(z) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} z + \frac{2ab}{b^2 - a^2} \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}. \quad (\text{A.4.10})$$

(iv) para a hipérbole retangular $x^2 - y^2 = a^2$ com assíntotas comuns $y = \pm x$ e excentricidade $e = \sqrt{2}$

$$\bar{z} = S(z) = \sqrt{2a^2 - z^2} = \sqrt{\alpha^2 - z^2}, \quad \alpha = ea. \quad (\text{A.4.11})$$

Reflexão de Schwarz em uma Linha Reta. Sejam z_1 e z_2 dois pontos distintos do plano complexo. A transformação

$$T(z) = \frac{|z_1 - z_2|}{z_1 - z_2} (z - z_2) \quad (\text{A.4.12})$$

é um deslocamento rígido (uma translação) que trás z_2 para a origem e z_1 para o eixo real x . A transformação inversa é $T^{-1}(z) = ((z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|)(z + z_2)$. Seja $R(z) = \bar{z}$ a transformação que é uma reflexão em relação ao eixo x . Dessa maneira, se l é a reta determinada por z_1 e z_2 , a composição $T^{-1}RT$ mapeia o ponto z em um ponto z^* que é a reflexão de z com respeito à reta l - vide Figura A.3. Explicitamente temos que

$$z^* = T^{-1}RT(z) = \frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} (\bar{z} - \bar{z}_2) + z_2. \quad (\text{A.4.13})$$

Comparando essa expressão com (A.4.8) vemos que

$$z^* = \overline{S(z)}, \quad (\text{A.4.14})$$

com $S(z)$ a função de Schwarz de l .

Figura A.3: Reflexão do ponto z com respeito à reta l .

Reflexão de Schwarz (ou Inversão) em uma Circunferência $C : |z - z_0| = r$. A definição é como segue: seja $z \neq z_0$; desenhe a semi-reta l^+ que parte de z_0 e passa pelo ponto z . Coloque o ponto z^* sobre l^+ de tal maneira que $|z^* - z_0| |z - z_0| = r^2$ - vide Figura A.4. Devemos assim ter $(z^* - z_0) = \sigma(z - z_0)$, σ positivo. Logo $\sigma|z - z_0|^2 = r^2$, de onde segue que

$$z^* = \frac{r^2(z - z_0)}{|z - z_0|^2} + z_0 = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0 . \quad (\text{A.4.15})$$

Comparando essa expressão com (A.4.9) vemos novamente que

$$z^* = \overline{S(z)} , \quad (\text{A.4.16})$$

com $S(z)$ a função de Schwarz da circunferência.

Figura A.4: Reflexão do ponto z com respeito à circunferência de raio r centrada em z_0 .

Reflexão de Schwarz em um Arco Geral Analítico. Procuraremos agora uma interpretação geométrica similar da função de Schwarz para um arco geral analítico. Para fazê-lo, teremos de ser mais precisos sobre o que vem a ser um *arco analítico*.

Dado um arco Γ expresso em termos de um parâmetro real t na forma

$$x = f_1(t) \quad \text{e} \quad y = f_2(t) \quad \text{com} \quad 0 \leq t \leq 1 , \quad (\text{A.4.17})$$

escrevamos

$$z(t) = x + iy = f_1(t) + if_2(t) = f(t) . \quad (\text{A.4.18})$$

O arco Γ é dito ser um *arco simples analítico* se:

- (a) $z(t_1) = z(t_2)$ somente quando $t_1 = t_2$,
- (b) $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções reais analíticas de t para $0 \leq t \leq 1$ e
- (c) $z'(t) = f_1'(t) + if_2'(t) \neq 0$ para $0 \leq t \leq 1$.

Agora, para qualquer t_0 , $0 \leq t_0 \leq 1$, $f(t)$, considerada como uma função da variável complexa t , é analítica em algum círculo $|t - t_0| \leq \lambda(t_0)$. Uma vez que $f'(t_0) \neq 0$, $f(t)$ mapeia algum sub-círculo $|t - t_0| \leq \lambda_1 \leq \lambda$ conformemente (mapa um-para-um e sobrejetivo) em uma região R_{z_0} que contém o ponto $z_0 = f(t_0)$. Qualquer ponto $z \in R_{z_0}$ portanto é a imagem de um único ponto t do plano t : $z = f(t) = f_1(t) + if_2(t)$. Suponhamos agora que z^* é a imagem de $\bar{t}$ sob o mapa f :

$$z^* = f(\bar{t}) = f_1(\bar{t}) + if_2(\bar{t}) ; \quad (\text{A.4.19})$$

então z^* é chamado *reflexão de Schwarz de z* com respeito arco analítico Γ . Note que a reflexão de Schwarz é definida somente para pontos suficientemente próximos de Γ .

A reflexão é assim definida pela seqüência

$$z \rightarrow t \rightarrow \bar{t} \rightarrow z^* .$$

Se partirmos de z^* , obtemos

$$z^* \rightarrow \bar{t} \rightarrow \bar{\bar{t}} = t \rightarrow z .$$

Portanto a reflexão de Schwarz de z^* deve ser z .

Além disso,

$$\bar{z}^* = \overline{f_1(\bar{t}) + if_2(\bar{t})} = \overline{f_1(\bar{t})} - i\overline{f_2(\bar{t})} . \quad (\text{A.4.20})$$

Uma vez que f_1 e f_2 são funções analíticas real valoradas sobre o eixo real, $f_j(\bar{t}) = \overline{f_j(t)}$ implicando que

$$\bar{z}^* = f_1(t) - if_2(t) . \quad (\text{A.4.21})$$

De (A.4.18) e (A.4.21) segue que

$$x = f_1(t) = \frac{z + \bar{z}^*}{2} \quad \text{e} \quad y = f_2(t) = \frac{z - \bar{z}^*}{2i} . \quad (\text{A.4.22})$$

Substituindo essas duas expressões na equação retangular de Γ ($F(x, y) = 0$), temos

$$F\left(\frac{z + \bar{z}^*}{2}, \frac{z - \bar{z}^*}{2i}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad g(z, \bar{z}^*) = 0 . \quad (\text{A.4.23})$$

Mas resolvendo $g(z, \bar{z}^*) = 0$ para $\bar{z}^*$ (uma vez que $\partial g / \partial \bar{z} \neq 0$) obtém-se

$$\bar{z}^* = S(z) , \quad (\text{A.4.24})$$

de modo que

$$z^* = \overline{S(z)} . \quad (\text{A.4.25})$$

Isso nos diz que *a conjugada da função de Schwarz de um arco analítico nos dá a reflexão de Schwarz, com respeito ao arco, de um ponto z .*

Como a função de Schwarz é definida unicamente pelo arco, aprendemos que a operação de reflexão é independente da parametrização do arco. A reflexão de Schwarz é uma transformação *anti-conforme*, isto é, que inverte o sentido dos ângulos.

Mapas Conformes e Reflexões. No tópico anterior definimos um arco Γ como a imagem do intervalo real $a \leq t \leq b$ sob um mapa conforme $f(t)$. Vimos que se um ponto $z = f(t)$ está em uma vizinhança de Γ , a reflexão de z com respeito a Γ é definida por

$z^* = f(\bar{t})$. Uma vez que $S(z) = \bar{z}^*$, temos que $S(z) = \overline{f(\bar{t})} = \bar{f}(t)$, e como $t = f^{-1}(z)$, segue que $S(z) = \bar{f}(f^{-1}(z))$. Isto pode ser escrito como

$$S = \bar{f}f^{-1}, \quad (\text{A.4.26})$$

da qual obtemos

$$S' = \frac{\bar{f}'f^{-1}}{f'f^{-1}}. \quad (\text{A.4.27})$$

Se o parâmetro t em $[a, b]$ é modificado por meio de

$$t = g(t') \quad 0 \leq t' \leq 1, \quad (\text{A.4.28})$$

com g uma função real analítica sobre o eixo real t' ($g = \bar{g}$), podemos computar $S(z)$ utilizando a composição fg dos mapas. De (A.4.26) segue que

$$S = \overline{fg}(fg)^{-1} = \bar{f}\bar{g}g^{-1}f^{-1} = \bar{f}gg^{-1}f^{-1} = \bar{f}f^{-1}. \quad (\text{A.4.29})$$

Portanto, como exigido, S é independente da parametrização do arco Γ .

Suponhamos que o arco analítico Γ no plano w é mapeado no arco Λ no plano z por meio da função analítica $w = f(z)$, conforme em uma vizinhança de Γ . Sejam $S_\Lambda(z)$ e $S_\Gamma(z)$ as funções de Schwarz de Λ e Γ respectivamente. Consideremos a função

$$T(w) = \bar{f}(S_\Lambda(f^{-1}(w))). \quad (\text{A.4.30})$$

Para $w \in \Gamma$ temos que $f^{-1}(w) = z \in \Lambda$; assim,

$$\overline{T(w)} = \overline{\bar{f}(S_\Lambda(f^{-1}(w)))} = f(\overline{S_\Lambda f^{-1}(w)}) = f(f^{-1}(w)) = w. \quad (\text{A.4.31})$$

Vemos assim que $\bar{w} = T(w)$ para $w \in \Gamma$, e portanto $T(w)$ é a função de Schwarz de Γ . Podemos então escrever

$$S_\Gamma = \bar{f} S_\Lambda f^{-1} \quad \text{e} \quad S_\Lambda = \overline{f^{-1}} S_\Gamma f, \quad (\text{A.4.32})$$

ou

$$S_\Gamma f = \bar{f} S_\Lambda. \quad (\text{A.4.33})$$

Apresentaremos agora uma das interpretações de (A.4.33). Suponhamos que $f(z)$ é regular em uma região R que contém um arco analítico Λ como parte de sua borda. Suponhamos, além disso, que $f(z)$ é contínua ao longo de Λ e, conforme z se aproxima de pontos de Λ , $f(z)$ se aproxima uniformemente de pontos que estão ao longo de um arco analítico Γ .

Consideremos os pontos z que pertencem ao exterior de R e são próximos de Λ . Para tais pontos, $S_\Lambda(z)$ é definida e $\overline{S_\Lambda(z)}$ nos dá pontos interiores a R e próximos de Λ . $f(\overline{S_\Lambda(z)})$ é definida e fornece pontos que estão próximos de Γ . Finalmente, $\overline{S_\Gamma(f(\overline{S_\Lambda(z)}))}$ é definida, também dando pontos próximos de Γ . Consideremos agora a função $\Phi(z) = S_\Gamma(f(\overline{S_\Lambda(z)}))$. Tal função é regular analítica exterior a R e próxima de Λ . Para $z \in \Lambda$, $\overline{S_\Lambda(z)} = z$ e $f(z) \in \Gamma$. Então

$$\Phi(z) = \overline{S_\Gamma(f(\overline{S_\Lambda(z)}))} = \overline{S_\Gamma(f(z))} = f(z). \quad (\text{A.4.34})$$

Portanto $\Phi(z)$ coincide com f ao longo de Λ . Por um argumento familiar, $\Phi(z)$ deve ser a continuação analítica de f . Dessa maneira, a equação

$$f(z) = \overline{S_\Gamma} \bar{f} S_\Lambda(z) \quad (\text{A.4.35})$$

pode ser considerada como fornecendo a *continuação analítica de f através de um arco analítico sobre o qual tal função toma valores analíticos*. Esta é uma generalização do princípio clássico de reflexão.

Referências Bibliográficas

- [1] Silas L. de Carvalho. “Persistência de Ordem em Modelos Ferromagnéticos na Presença de Campos Auto-Similares Quase-Aleatórios”, Dissertação de Mestrado - IFUSP (2007).
- [2] R. Courant e D. Hilbert. “Methods of Mathematical Physics”, Vol. 1, John Wiley & Sons (1989).
- [3] E. A. Coddington e N. Levinson. “Theory of Ordinary Differential Equations”, Krieger (1984).
- [4] William R. P. Conti e Domingos H. U. Marchetti. “Hierarchical Spherical Model as a Viscosity Limit of Corresponding $O(N)$ Model”, *arXiv:0804.2704*, v.1 (2008).
- [5] M. G. Crandall. “An Introduction to Constructive Aspects of Bifurcation and the Implicit Function Theorem”, in *Application of Bifurcation Theory*, ed. P. H. Rabinowitz, Academic Press (1977).
- [6] Philip J. Daves. “The Schwarz Function and its Applications”, The Carus Mathematical Monographs **17**, The Mathematical Association of America (1974).
- [7] Joël De Coninck. “Infinitely Divisible Distribution Functions of Class L and the Lee-Yang Theorem”, *Comm. Math. Phys.* **96**, 373-385 (1984).
- [8] W. F. Donoghue Jr. . “Monotone Matrix Function and Analytic Continuation”, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **207** (1974).
- [9] Peter L. Duren. “Univalent Functions”, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **259** (1983).

-
- [10] Freeman J. Dyson. “Existence of a Phase-Transition in a One-Dimensional Ising Ferromagnet”, *Comm. Math. Phys.* **12**, 91-107 (1969).
- [11] Freeman J. Dyson. “An Ising Ferromagnet with Discontinuous Long-Range Order” *Comm. Math. Phys.* **21**, 269-283 (1971).
- [12] Lawrence C. Evans. “Partial Differential Equations”, Graduated Studies in Mathematics, Vol. **19**, AMS (1998).
- [13] Takashi Hara, Tetsuya Hattori e Hiroshi Watanabe. “Triviality of Hierarchical Ising Model in Four Dimensions”, *Comm. Math. Phys.* **220**, 13-40 (2001).
- [14] Einar Hille. “Analytic Function Theory”, Vol. **1**, Chelsea, second edition (1982).
- [15] Yuri V. Kozitsky. “Hierarchical Ferromagnetic Vector Spin Model Possessing the Lee-Yang Property. Thermodynamic Limit at the Critical Point and Above”, *Journ. Stat. Phys.* **87**, 799-820 (1997).
- [16] Yuri V. Kozitsky e Lech Wołowiski. “Laguerre Entire functions and Related Locally Convex Spaces”, *Los Alamos Eletronic Preprint arXiv:math.CV/9812111*, v.1 (1998).
- [17] Yuri V. Kozitsky e Lech Wołowiski. “A Nonlinear Dynamical System on the Set of Laguerre Entire Functions”, *Elsevier Preprint* (2001).
- [18] Mark Kac e Colin J. Thompson. “Spherical Model and Infinite Spin Dimensionality Limit”, *Phys. Norvegica*, Vol. **5**, 163-168 (1971).
- [19] H. Kunz e G. Zumbach. “Phase Transition in a Nematic N -Vector Model: The Large N Limit”, *J. Phys.* **A25**, 6155-6162 (1992).
- [20] T. D. Lee e C. N. Yang. “Statistical Theory of Equation of States and Phase Transitions. II Lattice Gas and Ising Model”, *Phys. Rev.* **87**, 404-409 (1952).
- [21] Domingos H. U. Marchetti. “Renormalization Group in Statistical Mechanics: Ideas, Techniques and Analyses”, *Lecture Notes* (1996).
<http://gibbs.if.usp.br/~marchett/rg>
- [22] Shang-Keng Ma. “Modern Theory of Critical Phenomena”, *Frontiers in Physics* LNS**46**, Addison-Wesley (1976).

- [23] Charles M. Newman. “Zeros of the Partition Function for Generalized Ising Systems”, *Commun. Pure Appl. Math.* **XXVII**, 143-159 (1974).
- [24] Charles M. Newman. “Inequalities for Ising Models and Field Theories wich Obey the Lee-Yang Theorem”, *Commun. Math. Phys.* **41**, 1-9 (1975).
- [25] J. Fernando Perez. “The Role of Gaussian Domination and Sum Rules in Phase Transitions - An Unpedagogical Introduction”, *Rev. Bras. Fís.* **10**, 293-311 (1980).
- [26] H. S. Wall. “Analytic Theory of Continued Fractions”, D. Van Nostrand Co. (1948).
- [27] Hiroshi Watanabe. “Triviality of Hierarchical $O(N)$ Spin Model in Four Dimensions with Large N ”, *Journ. Stat. Phys.* **115**, 1669-1713 (2004).