UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Gravidade Quântica com Simetria de Lifshitz

Alan Maciel da Silva

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IF-USP)

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IF-USP)

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IF-USP)

Prof. Dr. Alberto Vasquez Saa (UNICAMP)

Prof. Dr. Olexandr Zhydenko (UFABC)

São Paulo

2011

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Alan Maciel da

Gravidade quântica com simetria de Lifshitz.
– São Paulo, 2011.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Gravitação; 2. Cosmologia;
3. Física Teórica; 4. Teoria de Campos.

USP/IF/SBI-082/2011

Resumo

Nesta tese apresentamos vários aspectos das teorias de gravidade quântica anisotrópica. Introduzimos a simetria de Lifshitz, que promove a anisotropia entre espaço e tempo e mostramos como esta anisotropia melhora o comportamento das teorias em altas energias, quando comparadas com teorias relativísticas. Mostramos também o mecanismo pelo qual teorias anisotrópicas podem ser efetivamente relativísticas em baixas energias. Construimos a teoria de gravidade quântica anisotrópica (gravidade HL) e discutimos suas variações. Mostramos as principais consequências físicas da versão projetável da teoria, como soluções esfericamente simétricas e cosmológicas. Apontamos para o aparecimento de um grau de liberdade extra na teoria, quando comparada à Relatividade Geral, o gráviton escalar, e discutimos os problemas a ele associados. Apresentamos a proposta de Hořava e Melby-Thompson da gravidade anisotrópica covariante, que é livre do gráviton escalar. Em seguida, mostramos a nossa contribuição para a área, que é o formalismo de acoplamento mínimo, que generaliza o procedimento de Hořava e Melby-Thompson e aponta para possíveis termos de acoplamento entre gravitação e matéria. Questões em aberto são apontadas e discutidas.

Abstract

In this thesis we present some aspects of anisotropic gravity theories. We introduce the Lifshitz symmetry, which produces an anisotropy between space and time and show how this anisotropy improves the high energy behavior of theories when compared with their relativistic counterparts. We also show the mechanism that ensures anisotropic theories can be effectively relativistic at low energies. We build the anisotropic gravity theory (HL theory) and discuss some of its versions. We show the major physical consequences of projectable version of HL theory, as spherically symmetric solutions and cosmology. We point out to the appearance of an extra degree of freedom in HL theory when compared to General Relativity, the scalar graviton, and discuss the issues it presents. We present the proposal of Hořava and Melby-Thompson of covariant anisotropic gravity, which is scalar graviton free. Subsequently, we show our proposal of a minimal coupling formalism, which generalizes the Hořava and Melby-Thompson's procedure and leads to possible couplings between gravity and matter. Open issues are pointed out and discussed.

Agradecimentos

Este trabalho não teria sido possível sem a contribuição de várias pessoas. As primeiras delas, num sentido cronológico, foram meus pais, que atenderam aos - hoje essencialmente extintos - vendedores de enciclopédias, que batiam de porta em porta oferecendo seus itens. Foram tais livros que despertaram em mim a curiosidade e o amor pela ciência, ainda em minha infância.

Mais diretamente relacionados a este trabalho está o meu orientador, Prof. Elcio Abdalla, que além de me chamar a atenção ao assunto da Gravidade Quântica Anisotrópica, foi fundamental em tolher o meu instinto de me perder direções por demais ambiciosas e, portanto, arriscadas.

Agradeço também aos meus colegas de grupo, que além dos bons palpites em nossas discussões científicas, no mínimo emprestaram tempo de sua atenção para que, expondo-lhes verbalmente, eu fosse capaz de compreender mais profundamente meus próprios argumentos, inclusive percebendo suas fraquezas. Entre eles faço uma menção especial a Elisa Ferreira, que se interessou profundamente pelo assunto desta tese, chegando a divulgá-lo em seminários, e ainda leu e ajudou-me a corrigir uma porção substancial deste trabalho escrito.

Finalmente, agradeço à minha Julia, que já me conheceu na condição de doutorando, pela paciência com as idiossincrasias típicas de tal condição e, principalmente, pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis.

E agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro.

Ele não conhece os métodos de Hercule Poirot. Não fico correndo de um lado para o outro em viagens intermináveis, agitando-me à toa. Meu trabalho é feito aqui dentro! - e Poirot bateu na testa, com um gesto expressivo.

Hercule Poirot, em "Assassinato no Campo de Golfe", de **Agatha Christie**.

If at first you don't succeed, try, try again. Then quit. There's no point in being a damn fool about it.

W. C. Fields

Humanitas precisa comer.

Quincas Borba, em "Quincas Borba", de **Machado de Assis**

Aos meus pais e à minha Julia.

Sumário

1	Introdução	13
2	Contagem de Potências	21
2.1	Reescalonamento de Lifshitz	21
2.2	Contagem de Potências no Campo Escalar	22
2.3	Emergência da Simetria de Lorentz	25
3	Gravidade de Hořava-Lifshitz	29
3.1	O Termo Cinético	31
3.2	O Termo Potencial	34
3.2.1	Teoria HL Projetável	34
3.2.2	Teoria HL não-projetável	35
3.2.3	Balanco Detalhado	36
3.3	Limite de Baixas Energias	39

4	Propriedades da Teoria HL projetável	43
4.1	Equações Clássicas do Movimento	43
4.2	Soluções Esfericamente Simétricas	48
4.3	Acoplamento com a Matéria	49
4.4	Consequências Cosmológicas	52
4.4.1	Matéria Escura como uma Constante de Integração . .	53
4.4.2	Cosmologias com Salto e Cíclicas	57
4.4.3	Cosmologia sem Inflação	61
5	O Gráviton Escalar em HL Projetável	69
5.1	Teoria Linearizada	70
5.2	Instabilidade e Acoplamento Forte	75
6	Teoria de Hořava-Lifshitz Covariante	83
6.1	Formalismo de Hořava e Melby-Thompson	84
6.2	Formalismo de Acoplamento Mínimo	90
6.3	Teoria Linearizada e Graus de Liberdade	93
6.4	Acoplamento com a matéria	99
7	Considerações Finais	101
A	HL covariante: Duas abordagens equivalentes	105

<i>SUMÁRIO</i>	11
B Interpretação Geométrica da Simetria $U(1)$	109
Referências	111

Capítulo 1

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (RG), desde de sua publicação em 1915, por Albert Einstein, tem sido o principal alicerce no estudo dos fenômenos físicos em larga escala. Na RG, a gravidade é descrita como um efeito da deformação da geometria do espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia, segundo a equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde o lado esquerdo corresponde à geometria do espaço-tempo e o lado direito corresponde à distribuição de energia e matéria.

Entre outros resultados notáveis, a RG explica a igualdade observada entre a massa inercial e a massa gravitacional, explica os desvios observados nas órbitas dos corpos celestes em torno do Sol em comparação com o previsto pela gravidade de Newton, previu a deflexão de raios de luz que passam perto do Sol e forneceu um formalismo que tornou possível o estudo do uni-

verso como um todo, descrito como uma variedade diferenciável, dando luz à cosmologia teórica.

Apesar de todos esses sucessos, e de estar de acordo com os testes experimentais feitos até o momento [1], acredita-se que a RG pode não ser uma teoria definitiva para a gravidade. Isto acontece porque existem situações teóricas em que os resultados obtidos pela RG não fazem sentido físico. São as chamadas singularidades. O problema das singularidades não pode ser superado simplesmente excluindo-se as soluções singulares da teoria, considerando-as "não físicas", porque singularidades aparecem inexoravelmente nas soluções que descrevem pelo menos dois sistemas físicos relevantes: o colapso gravitacional de uma estrela e o universo [2, 3]. Nesses dois casos, existe uma região do espaço-tempo em que algum escalar da curvatura ¹ atinge valores arbitrariamente altos, divergindo num certo limite ². A curvatura do espaço-tempo nos dá uma medida das forças de maré sentidas por um observador em queda livre. A divergência dos escalares de curvatura resulta numa força de maré infinita, o que impossibilita qualquer análise quantitativa em tais regimes.

A curvatura do espaço-tempo também nos dá uma medida da escala de comprimento em que os fenômenos gravitacionais relevantes ocorrem. O escalar de curvatura de Ricci, por exemplo, tem dimensão L^{-2} , onde L é a

¹Isto é, escalares construídos com o tensor de Riemann, tais como $R_{\alpha\beta\gamma\sigma}R^{\alpha\beta\gamma\sigma}$, $g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, etc.

²Note que existe um problema apenas se a curvatura for a infinito num intervalo de tempo finito para algum observador, o que acontece nos casos citados. Ademais, também existem singularidades em que a curvatura não tem esse comportamento divergente, sendo caracterizadas pela existência de geodésicas incompletas [3, 2].

dimensão de comprimento. Isto significa que em regiões do espaço-tempo em que a curvatura é muito grande, a escala de comprimento típica dos fenômenos físicos é muito pequena. Como a física das pequenas escalas obedece aos princípios da Teoria Quântica, acredita-se que nesses regimes um tratamento quântico dos problemas seja necessário. A escala em que os fenômenos quânticos se tornam importantes é aquela em que a constante de Planck $\hbar$ é relevante. Usando argumentos dimensionais, podemos contruir uma escala de comprimento usando as duas constantes fundamentais da Relatividade Geral, a constante de Newton G e a velocidade da luz c , além de $\hbar$. O comprimento construído é $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$. É chamado de comprimento de Planck e é da ordem de 10^{-33} cm. Para regiões do espaço-tempo com raio de curvatura desta ordem é esperado que a RG em sua forma clássica não seja mais uma descrição apropriada da Gravidade, sendo necessário substituí-la por uma Teoria de Gravidade Quântica[3].

A busca de uma Teoria da Gravidade Quântica remonta aos anos 30 dos século XX e segue até os dias atuais e, por enquanto, ainda não temos uma teoria completamente satisfatória. Um fator complicador é a total ausência de dados experimentais para servir de guia para a construção da nova teoria e para a exclusão de algumas abordagens. Esta ausência se explica pela pequenez da escala de Planck, que corresponde a energias muito altas para serem atingidas pelos atuais aceleradores. A energia de Planck é da ordem de 10^{19} GeV, enquanto os mais recentes aceleradores atingem energias da ordem do 10^3 GeV.

Na referência [5], Carlo Rovelli divide as abordagens para a Gravidade

Quântica nas últimas oito décadas em três principais linhas de pesquisa³: a covariante, a canônica e a soma sobre as histórias.

A linha de pesquisa covariante consiste em escrever o tensor métrico $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde o *fundo* $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica plana de Minkowski ⁴ e a *perturbação* $h_{\mu\nu}$ é tratada como um campo de gauge de spin 2, aplicando-se os métodos da Teoria Quântica de Campos, bem sucedidos na construção do Modelo Padrão da Física das Partículas Elementares. Seguindo este programa, descobriu-se que a ação de Einstein-Hilbert,

$$S = -\frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.2)$$

onde g é o determinante da métrica e R é o escalar de curvatura de Ricci, produz uma Teoria Quântica de Campos não-renormalizável no ultravioleta (UV), isto é, para valores grandes do momento apresenta divergências em sua série perturbativa tais que seria preciso acrescentar um número infinito de contratermos na ação para cancelar tais divergências [4]. Para fugir deste problema, o passo seguinte foi tentar modificar a teoria original de Einstein, de maneira a tornar sua série perturbativa finita ou, pelo menos, renormalizável. Esse caminho levou à adição de termos com derivadas maiores da métrica (a ação (1.2) contém derivadas no máximo segundas) na ação (*Higher Derivatives Gravity*), à inclusão da Supersimetria no grupo de calibre, acoplando a métrica com uma partícula de spin 3/2 (Supergravidade) e culminou na teoria das Supercordas. A Teoria das Supercordas é supersimétrica, gera uma

³Embora existam muitas outras linhas de pesquisa de gravidade quântica, Rovelli afirma que estas três abordagens foram as mais ativas ao longo dos anos.

⁴Na verdade, não necessariamente a métrica de Minkowski. O fundo pode ser qualquer solução das equações de Einstein.

correção na ação de Einstein-Hilbert com termos de derivadas mais altas no limite de baixas energias, e a sua série perturbativa é finita [6]. Mas o preço a ser pago por uma teoria tão bem comportada é que ela vive em um universo em 10 dimensões que, à primeira vista, é bem diferente do nosso.

As abordagens canônica e de soma sobre as histórias têm em comum o fato de não separarem o espaço-tempo em duas partes distintas, o fundo $\eta_{\mu\nu}$ e o campo gravitacional $h_{\mu\nu}$, como o programa covariante faz, tratando-os como um único objeto, o tensor $g_{\mu\nu}$, de maneira similar à formulação usual da RG e à proposta original de Einstein, em que a gravidade se confunde com a própria noção de espaço-tempo. Essas abordagens tem a vantagem de não serem perturbações sobre uma determinada métrica de fundo, como no caso covariante, sendo portanto chamadas de *background independent* (independentes do fundo) na literatura.

A formulação canônica consiste em se aplicar as relações canônicas de comutação nas variáveis do espaço de fase da RG e escrever o equivalente da equação de Schrödinger para a função de onda do espaço-tempo $\Psi(g_{\mu\nu})$. A dificuldade deste caminho está em se formular a RG no formalismo hamiltoniano em termos dos verdadeiros graus de liberdade da teoria. Este caminho culminou nos dias atuais na teoria conhecida como *Loop Quantum Gravity* (LQG).

A formulação de soma sobre histórias remete à formulação da mecânica quântica como uma "soma sobre caminhos". A teoria é formulada em termos de uma integral funcional sobre todos os espaços-tempos possíveis. Essa abordagem se relaciona com a abordagem canônica, de maneira que sua ver-

são mais atual também se encontra como uma formulação alternativa da LQG.

O tema desta tese é uma nova proposta de Gravidade Quântica, concebida por Petr Hořava em [7, 8], que se relaciona com o programa covariante descrito acima, pois consiste em alterar a ação da RG de maneira que esta se torne renormalizável. A idéia central da teoria de Hořava é de abandonar a equivalência proposta por Einstein entre tempo e espaço, substituindo pela chamada simetria de Lifshitz, que é uma simetria de reescalonamento anitrópico:

$$x^i \rightarrow bx^i, \quad t \rightarrow b^z t. \quad (1.3)$$

onde z é o expoente dinâmico crítico. O caso $z = 1$ corresponde à equivalência entre espaço e tempo relativística. Neste trabalho, interessar-nos-emos pelo caso $z > 1$ que são chamadas na literatura de teorias de Hořava-Lifshitz, ou Gravidade HL.

Neste trabalho mostraremos nossa contribuição para a Gravidade HL, que é o formalismo de acoplamento mínimo para construção da teoria HL covariante, que é uma versão da teoria HL que tem a vantagem de não possuir o gráviton escalar, um grau de liberdade que pode tornar a teoria HL incompatível com o que sabemos sobre a gravidade no nosso universo. O formalismo que desenvolvemos também nos leva a uma maneira direta de acoplar o setor gravitacional com outros campos, o que é importante para estudarmos a interação da matéria com a gravidade neste contexto. Para situar o leitor, construiremos as diferentes versões de teorias HL em $3 + 1$ dimensões, discutiremos o problema de recuperarmos no infravermelho (IR) resultados compatíveis com a experiência, o aparecimento do gráviton de

spin 0 na teoria, o problema do acoplamento forte deste grau de liberdade extra em teoria das perturbações e, finalmente, a teoria HL com simetria estendida, a teoria HL covariante, que não tem graus de liberdade extras em relação à relatividade geral.

Os assuntos abordados estão divididos da seguinte maneira::

No capítulo 2, mostraremos, de maneira heurística e autocontida, o argumento de renormalizabilidade por contagem de potências. O objetivo é mostrar a não-renormalizabilidade da RG por esse argumento e como a adoção da simetria de Lifshitz pode tornar a teoria renormalizável por contagem de potências.

No capítulo 3, contruiremos a gravidade HL, que inclui uma família de teorias, que se distinguem pelo conjunto de hipóteses adotado. Teorias que satisfazem ou não a condição de "balanço detalhado" (*detailed balance*), teoria projetável ou não-projetável. Mostraremos que, em geral, teorias do tipo HL não são invariantes sob difeomorfismos, como a RG, mas sim sob um subgrupo que são os difeomorfismos que preservam a folheação. Discutiremos também o aparecimento de uma nova constante de acoplamento λ que surge na teoria HL e suas consequências.

No capítulo 4, discutiremos as propriedades básicas da teoria HL projetável, sem a condição de balanço detalhado. Discutiremos o fato de o vínculo hamiltoniano ser um vínculo global neste tipo de teoria e não um vínculo local, como acontece em RG. Discutiremos também algumas consequências cosmológicas interessantes decorrentes desta versão da teoria HL.

No capítulo 5, discutiremos o grau de liberdade extra que as teorias do

tipo HL costumam apresentar e o problema do acoplamento forte que este apresenta. Mostraremos como esse problema é capaz de arruinar a renormalizabilidade e o limite de baixas energias da teoria, que precisa ser compatível com os resultados experimentais que restringem desvios em relação à RG. Discutiremos também soluções propostas na literatura para lidar com este problema.

No capítulo 6 construiremos uma versão mais recente da teoria, conhecida como HL covariante, em que o grupo de simetria da teoria é estendido por uma simetria de calibre $U(1)$. Mostraremos a formulação de Hořava e Melby-Thompson e nossa formulação alternativa, que são equivalentes no caso $\lambda = 1$, mas nossa formulação permite trabalhar com $\lambda \neq 1$. Mostraremos que os graus de liberdade da HL covariante são os mesmos da RG. Também mostraremos como nosso formalismo nos leva de maneira direta ao acoplamento de outros campos com a teoria HL covariante e usaremos o campo escalar como exemplo.

Finalmente, no capítulo final apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Contagem de Potências

Neste capítulo, faremos uma introdução heurística ao argumento de renormalizabilidade por contagem de potências e mostraremos como a adoção da simetria de Lifshitz e a consequente quebra da invariância de Lorentz pode melhorar o comportamento da teoria no UV.

2.1 Reescalonamento de Lifshitz

Um reescalonamento consiste na multiplicação das distâncias por um fator constante. Como um reescalonamento é equivalente à escolha de uma unidade de comprimento diferente, as teorias físicas fundamentais devem ser invariantes sob esta transformação. Tal invariância da teoria sob reescalonamento do espaço implica, em geral, que o tempo também seja reescalonado. No caso geral, o reescalonamento do espaço e tempo se escreve:

$$x^i \rightarrow bx^i, \quad t \rightarrow b^z t. \quad (2.1)$$

onde o índice i se refere às direções espaciais. No caso de teorias relativísticas, as unidades de tempo e espaço se confundem e temos obrigatoriamente $z = 1$. No caso $z \neq 1$, o reescalonamento é chamado anisotrópico. O expoente z é chamado de expoente crítico dinâmico.

Se um operador Q se transforma sob (2.1) como $Q \rightarrow b^{-s}Q$, então $[Q] \equiv s$ é a dimensão de escalonamento de Q . Por exemplo, $[d/dx^i] = 1$.

O reescalonamento anisotrópico é também chamado na literatura de simetria de Lifshitz devido à sua proposta de um campo escalar com esta propriedade para a descrição de pontos tricríticos em transições de fase [10, 11, 12].

2.2 Contagem de Potências no Campo Escalar

Nesta Seção desenvolveremos o argumento da contagem de potências no caso mais simples de um campo escalar em $D + 1$ dimensões. Usaremos aqui uma abordagem heurística similar à feita em [13], mas uma versão mais rigorosa do mesmo argumento pode ser vista em [9].

Supomos que a ação da teoria seja da forma:

$$S = \int d^D x dt (\mathcal{T} - \mathcal{V}), \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{T}$ é o termo cinético e $\mathcal{V}$ é o potencial. O termo cinético se distingue por conter derivadas temporais dos campos, sendo o potencial constituído pelos demais termos. No caso do campo escalar φ , a parte cinética da ação, que supomos quadrática nas derivadas temporais, se escreve:

$$\frac{1}{2} \int d^D x dt \dot{\varphi}^2, \quad (2.3)$$

onde o ponto indica a derivada temporal. Como os termos da ação devem ser invariantes sob (2.1), a dimensão de escalonamento de (2.3) deve ser nula, o que vai definir a dimensão de escalonamento do campo φ . Obtemos, para D e z genéricos, $0 = -D - z + 2z + 2[\varphi]$, onde o termo $-D$, corresponde à dimensão de escalonamento da medida de integração nas D dimensões espaciais, $-z$ corresponde à medida de integração temporal, $2z$ corresponde às duas derivadas temporais e, como o campo aparece duas vezes, temos $2[\varphi]$. Em outros termos, a dimensão de escalonamento do campo é dado por:

$$[\varphi] = \frac{D - z}{2}. \quad (2.4)$$

No caso relativístico em $3 + 1$ dimensões, isto é, $D = 3$ e $z = 1$, (2.4) implica $[\varphi] = 1$.

Suponhamos, agora, um termo de interação de n -ésima ordem do tipo

$$\int d^D x dt \varphi^n, \quad (2.5)$$

e analisemos como ele se comporta em função da energia. A dimensão da energia E é $[E] = -[t] = z$, pois o produto Et tem dimensão de escalonamento de ação, que deve ser nula. Usando isto e a equação (2.4) obtemos que (2.5) se comporta como $E^{\frac{n(D-z)/2-D-z}{z}}$.

No caso relativístico em $3 + 1$ dimensões, $z = 1$ e $D = 3$, $[E] = 1$, $[\varphi] = 1$ e o termo (2.5) se comporta como E^{n-4} . Lembrando que as amplitudes são calculadas em teoria das perturbações através de uma expansão em potências dos termos de interação, vemos que se o termo de interação se comportar como uma potência positiva da energia, teremos infinitos termos divergentes no UV, que corresponde a $E \rightarrow \infty$, o que corresponde a uma teoria não-renormalizável. Portanto, renormalizabilidade no UV impõe $n \leq 4$ para

que o termo se comporte como uma potência não-positiva da energia. É um fato bem conhecido que interações de ordem superior à quarta são não renormalizáveis no caso do escalar em $3 + 1$ dimensões.

No entanto, a equação (2.4) deixa claro que a situação $z = D$ é especial, pois o campo é invariante sob o reescalonamento. A dimensão em que isto acontece é chamada de *dimensão crítica* da teoria. Neste caso, o termo de interação se comporta como E^{-2} para todo n , uma potência negativa da energia. Isto significa que os termos de interação de qualquer ordem são renormalizáveis por contagem de potências.

Usando o mesmo raciocínio, verificamos que no caso $z = D$, podemos incluir termos com no máximo $2z$ derivadas espaciais. De fato, um termo do tipo:

$$\int d^D x dt P(\nabla^m, \varphi^n) \sim E^{\frac{-D-z+m+n(D-z)/2}{z}}, \quad (2.6)$$

onde os argumentos de P indicam o número total de derivadas espaciais m e a potência n do campo no termo. No caso $z = D$, o comportamento como potência não-positiva de E impõe $-2z + m \leq 0$. Este resultado será fundamental na construção da gravidade HL, pois nos permitirá incluir apenas um número finito de termos na lagrangiana.

Pelo mesmo argumento apresentado acima, podemos ver que a RG não é renormalizável, pois é uma teoria altamente não-linear. A expansão do escalar de Ricci em termos de $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ tem a forma

$$R \approx \sum_{n=0}^{\infty} h^n (\nabla^2 h + (\nabla h)^2), \quad (2.7)$$

onde omitimos os índices tensoriais.

Esta é a motivação básica da proposta original de Hořava de usar o escalonamento anisotrópico na construção de uma Gravidade Quântica renormalizável¹. O preço a pagar pelo melhor comportamento no UV é a perda da simetria local de Lorentz, cuja quebra tem limites experimentais bem restritos (ver por exemplo [14, 15]). Na próxima seção veremos o mecanismo pelo qual podemos contornar esta dificuldade.

2.3 Emergência da Simetria de Lorentz

Nesta seção, construiremos um campo escalar em $D + 1$ dimensões com simetria de Lifshitz $z = D$ no UV, mas com comportamento aproximadamente relativístico em longas distâncias. A simetria relativística surge como uma simetria emergente em larga escala.

A ação do escalar com $z = D$, no limite UV, se escreve:

$$S_{UV} = \frac{1}{2} \int d^D x dt (\dot{\varphi}^2 + \varphi \Delta^z \varphi + \dots), \quad (2.8)$$

onde Δ é o operador laplaciano em D dimensões e omitimos um possível potencial e termos desprezíveis no UV. É importante também notar que o sistema de unidades que utilizamos aqui é diferente do sistema teórico de unidades usualmente utilizado em teorias relativísticas, pois a dimensão do tempo aqui não é igual à do espaço. Chamaremos neste trabalho este sistema de unidades de *fundamental*, por ser o sistema de unidades mais natural em

¹Lembramos que o argumento de contagem de potências não garante a renormalizabilidade de uma teoria. Por outro lado, o argumento de contagem de potências é suficiente para determinar que uma teoria é não-renormalizável.

teorias com escalonamento anisotrópico. Na passagem ao limite IR, faremos a transição para o sistema de unidades tradicional, que aqui chamaremos de sistema de unidades *fenomenológico*. Note que escolhemos a constante de acoplamento do segundo termo igual à unidade sem perda de generalidade, bastando para isso redimensionar o tempo de maneira conveniente.

A relação de dispersão obtida da teoria (2.8) é $\omega^2 = k^{2z}$, consequência do escalonamento anisotrópico. Para se obter no IR uma relação de dispersão do tipo $\omega^2 \sim k^2$, somamos a (2.8), o termo relevante:

$$S_{IR} = \frac{1}{2} \int d^D x dt a \kappa^{2z-2} \varphi \Delta \varphi, \quad (2.9)$$

onde a é uma constante de acoplamento adimensional e κ é uma escala de momento, $[\kappa] = 1$, que incluímos para tornar o termo invariante sob simetria de Lifshitz. Este termo gera um termo proporcional k^2 na relação de dispersão, que domina o termo k^6 para pequenos valores de k .

Para tornar estas afirmações mais precisas, é útil passarmos ao sistema de unidades fenomenológico, que torna mais transparentes os aspectos relativísticos. A principal diferença do sistema de unidades fundamental é que nele o tempo tem dimensão de escalonamento diferente do espaço. No sistema de unidades usual, tempo e espaço tem a mesma dimensão, portanto, precisamos construir uma unidade de tempo com essa característica a partir do tempo anisotrópico fundamental. Para isso, definimos $t' \equiv \kappa^{z-1} t$, como o tempo fenomenológico. Fazendo esta substituição, a ação do escalar toma a forma:

$$S = \frac{\kappa^{z-1}}{2} \int d^D x dt' \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right)^2 + a \varphi \Delta \varphi + \frac{\varphi \Delta^z \varphi}{\kappa^{2z-2}} \right]. \quad (2.10)$$

Por simplicidade, tomemos o caso particular $D = z = 3$ na sequência. O

campo φ não corresponde ao escalar relativístico, pois não tem a dimensão de escalonamento correta. Redefinindo $\varphi \rightarrow \kappa\varphi$, obtemos o resultado $[\varphi] = 1$ válido em $3+1$ dimensões e ao mesmo tempo a ação toma a forma canônica:

$$\frac{1}{2} \int d^3x dt' \left[\dot{\varphi}^2 - a(\nabla\varphi)^2 + \frac{\varphi \Delta^z \varphi}{\kappa^4} \right], \quad (2.11)$$

onde usamos o ponto para denotar a derivada temporal (fenomenológica) para abreviar a notação. Esta ação torna claro que o termo não-relativístico é suprimido por um fator $(k/\kappa)^4$, sendo desprezível para $k \ll \kappa$. Em tal regime, a ação é efetivamente relativística com velocidade da luz efetiva $c^2 = a$. Para passarmos ao sistema de unidades naturais habitual em que $c = 1$, basta fazermos $x^0 = \sqrt{a}t'$. A relação de dispersão obtida tem a forma $\omega^2 = k^2 [c^2 - (k/\kappa)^4]$, sendo portanto efetivamente relativística para momentos tais que $(k/\kappa)^2 \ll c$.

Construímos assim um campo escalar que tem dois comportamentos distintos no UV e no IR. Em altas energias exibe escalonamento anisotrópico, quebrando invariância de Lorentz, com $z = D$. Em baixas energias ou longas distâncias, apresenta comportamento relativístico, com $z = 1$. A aplicação destas idéias para a construção de uma Gravidade Quântica que satisfaça os critérios de renormalizabilidade no UV por contagem de potências e seja fenomenologicamente viável no IR, apresentando comportamento efetivo relativístico será o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 3

Gravidade de Hořava-Lifshitz

O nosso objetivo neste capítulo é aplicar o escalonamento anisotrópico à construção de uma teoria de gravidade que seja renormalizável por contagem de potências no UV. Neste trabalho, enfatizamos a busca por uma teoria que descreva gravidade no nosso universo em $3 + 1$ dimensões, isto é, que seja fenomenologicamente viável, embora em muitas equações, mantenhamos D geral para simplificar possíveis generalizações para dimensões quaisquer. Teorias do tipo HL, mesmo inviáveis fenomenologicamente ou em número diferente de dimensões também tem seu interesse em outras aplicações, como na dualidade Gravidade/Teorias de Calibre (ver ref. [16]), desde que sejam internamente consistentes. Tais aplicações fogem ao escopo deste trabalho.

O ponto de partida para a construção da teoria é a simetria de Lifshitz:

$$x^i \rightarrow bx^i, \quad t \rightarrow b^z t. \quad (3.1)$$

onde o índice i percorre as direções espaciais. Pretendemos construir uma teoria geométrica sobre uma variedade $\mathcal{M}$ em que o campo gravitacional é

representado pela métrica, nos moldes da RG, mas sobre a simetria (3.1). O expoente crítico dinâmico $z > 1$ torna as direções espaciais e temporal inequivalentes, tornando o tratamento covariante em $3 + 1$ dimensões comumente utilizado em RG inconveniente. Uma abordagem mais conveniente para nosso caso deveria tratar de maneira distinta o espaço e o tempo. Isto nos sugere que o formalismo natural para a construção da Gravidade HL é a decomposição proposta por Arnowitt, Deser e Misner (ADM) [17]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i - N^i dt)(dx^j - N^j dt), \quad (3.2)$$

que separa o elemento de linha quadridimensional em um escalar N , um 3-vetor N^i e um 3-tensor g_{ij} , que é a métrica da seção espacial, que será usada para levantar e baixar índices espaciais. É importante notar que o grupo de difeomorfismos espaço-temporais, que são o grupo de simetria da RG:

$$\delta x^\mu = \xi^\mu(x^\nu), \quad (3.3)$$

onde os índices gregos percorrem todas as coordenadas do espaço-tempo, não são fundamentais numa teoria em que tempo e espaço são tratados como entes distintos. Podemos, portanto, postular que o grupo de simetria do espaço-tempo em gravidade anisotrópica se limita apenas à restrição ao subgrupo dos difeomorfismos que preservam a folheação, que chamaremos daqui por diante de $\text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$, onde $\mathcal{F}$ denota a folheação e $\mathcal{M}$ denota a variedade. A decomposição ADM impõe uma certa folheação sobre a variedade, relacionando cada seção espacial Σ_t (a folha) com um valor constante de t , definindo uma direção privilegiada para o tempo. O grupo $\text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ consiste em transformações do tipo:

$$\delta t = f(t), \quad \delta x^i = \xi^i(t, x^j). \quad (3.4)$$

Embora outras simetrias possam aparecer em alguns casos (seja acidentalmente ou por construção), como na HL covariante, que será mencionada adiante, postulamos apenas (3.4) como o grupo de simetria fundamental em gravidade HL.

Os campos ADM se transformam sob (3.4) como:

$$\begin{aligned}\delta g_{ij} &= \partial_i \xi^k g_{jk} + \partial_j \xi^k g_{ik} + \xi^k \partial_k g_{ij} + f \dot{g}_{ij}, \\ \delta N_i &= \partial_i \xi^j N_j + \xi^j \partial_j N_i + \dot{\xi}^j g_{ij} + \dot{f} N_i + f \dot{N}_i \\ \delta N &= \xi^j \partial_j N + \dot{f} N + f \dot{N}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Passemos à construção da ação. Seguiremos aqui um caminho um pouco diferente do seguido originalmente em [7, 8], sendo mais semelhante à abordagem feita por Sotiriou, Visser e Weinfurtner (SVW) [18].

Assim como fizemos no campo escalar, suporemos que a ação consiste de dois termos, o termo cinético S_K e o termo potencial S_V , de forma que a ação total se escreve

$$S = S_K - S_V.\tag{3.6}$$

Trataremos separadamente nas próximas seções os termos cinéticos e potencial, que serão construídos à partir destas hipóteses.

3.1 O Termo Cinético

Para construir o termo cinético, impomos adicionalmente que ele seja quadrático nas derivadas temporais, para satisfazer a simetria de inversão temporal

e ser renormalizável ¹. Portanto, o termo mais geral, invariante de calibre, construído usando-se os campos N , N^i e g^{ij} satisfazendo todas as hipóteses admitidas é:

$$S_K = \frac{1}{\zeta^2} \int dt d^D x N \sqrt{g} (K_{ij} G^{ijkl} K_{kl}), \quad (3.7)$$

onde ζ é a constante de acoplamento da teoria, g é o determinante da métrica espacial g_{ij} , K_{ij} é a curvatura extrínseca:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i), \quad (3.8)$$

com ∇_i sendo a derivada covariante associada à métrica espacial g_{ij} e G^{ijkl} é uma generalização da métrica de DeWitt, que é uma métrica no espaço de tensores simétricos,

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) - \lambda g^{ij} g^{kl}, \quad (3.9)$$

onde λ é uma constante de acoplamento *running*, isto é, seu valor está sujeito a correções quânticas. Em RG, descrita no formalismo ADM, temos $\lambda = 1$, fixado pela maior simetria de calibre, mas em Gravidade HL, não há nenhuma razão teórica pela qual λ possa ser fixado em algum valor em particular, portanto é mantido geral. Passemos agora à contagem de potências. Postulamos, para os campos da teoria as seguintes dimensões de escalonamento:

$$[g_{ij}] = 0, \quad [N_i] = z - 1, \quad [N] = 0. \quad (3.10)$$

Explicamos estes valores postulados para a dimensão dos campos pelo seguinte argumento: se impusermos que a distância espacial dl , definida tal

¹Além de prevenir a presença de *ghosts*, que são campos que podem violar a unitariedade na versão quântica da teoria

que $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, tenha dimensão de espaço, então a métrica espacial é automaticamente adimensional. Da definição de curvatura extrínseca (3.8) obtemos a dimensão de N_i . A dimensão de N pode ser postulada independentemente na teoria HL, porém, para simplificar a comparação com a relatividade geral, onde $[N] = 0$, para que Ndt tenha dimensão de espaço (ou tempo), escolhemos o mesmo valor para a teoria HL.

Consequentemente, obtemos para o elemento de volume, $dV \equiv dt d^D x N \sqrt{g}$, $[dV] = -z - D$, e para curvatura extrínseca $[K_{ij}] = z$. Se impusermos que a ação seja invariante sob a transformação (3.1), então a constante de acoplamento ζ deve satisfazer $[\zeta] = (z - D)/2$. Assim como no caso do campo escalar, em que $D = z$ define a dimensão crítica da teoria, no caso gravitacional a dimensão crítica é definida pela dimensão em que a constante de acoplamento é adimensional². É importante notar que no caso da RG a constante de acoplamento é a constante de Newton G , que tem dimensão $[G] = 2$ o que impede a teoria de ser renormalizável (o argumento de não-renormalizabilidade da RG em termos da constante de acoplamento da gravidade pode ser visto por exemplo em [19]).

Escolhemos, portanto, $z = D$ e, por uma escolha conveniente de unidades, podemos fazer $\zeta = 1$ no sistema de unidades fundamental, similar ao que usamos no campo escalar. O sistema de unidades fenomenológico, em que a constante de Newton emerge, será obtido quando passarmos ao limite IR.

²Note que no caso do campo escalar, podemos redefinir o campo de forma que $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}/\zeta$ onde $\hat{\varphi}$ é adimensional e a constante de acoplamento aparece explicitamente no fator que multiplica a ação. Como φ é invariante na dimensão crítica $D = z$, ζ é necessariamente adimensional na dimensão crítica.

3.2 O Termo Potencial

O termo potencial é construído como o termo mais geral possível invariante sob $\text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ sendo renormalizável por contagem de potências. Embora o termo cinético possua a mesma forma em todas as teorias do tipo HL, as diferentes versões diferem no termo potencial, devido a adoção ou não de hipóteses adicionais. Vamos discutir caso a caso tais hipóteses e as variantes de teorias HL correspondentes construídas sobre tais hipóteses.

3.2.1 Teoria HL Projetável

A primeira dessas hipóteses que vamos discutir é chamada na literatura de hipótese de *projetabilidade*. A teoria é chamada projetável se nos restringirmos ao caso $N = N(t)$, isto é, como uma função apenas do tempo. A justificativa para uma tal restrição é que N pode ser visto como o campo de calibre associado à reparametrização no tempo, $t' = f(t)$, sendo natural portanto que tenha a mesma dependência espaço-temporal que o gerador infinitesimal desta transformação. É importante observar que a projetabilidade é preservada pelo grupo de simetria (3.4) da teoria HL. A teoria projetável tem a vantagem de permitir menos termos independentes no potencial, portanto tendo menos constantes de acoplamento.

No caso $D = 3$, o termo potencial mais geral para a teoria projetável,

respeitando a simetria de paridade, que proíbe termos de dimensão ímpar, é:

$$S_V = S_1 + S_2 + S_3, \quad (3.11)$$

$$S_1 = - \int dt d^3x N \sqrt{g} (\alpha_0 \kappa^6 + \alpha_1 \kappa^4 R), \quad (3.12)$$

$$S_2 = \int dt d^3x N \sqrt{g} \kappa^2 (\alpha_2 R^2 + \alpha_3 R_{ij} R^{ij}), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} S_3 = & \int dt d^3x N \sqrt{g} (\alpha_4 R^3 + \alpha_5 R R_{ij} R^{ij} + \alpha_6 R_j^i R_k^j R_i^k \\ & + \alpha_7 \nabla_i R \nabla^i R + \alpha_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde κ é uma unidade de momento, $[\kappa] = 1$. Usualmente reparametrizamos o tempo de maneira que $\alpha_1 = 1$, o que nos dá para a ação total $S = S_K - S_V$ um total de nove constantes de acoplamento, no caso da teoria projetável em $3 + 1$ dimensões.

3.2.2 Teoria HL não-projetável

Se admitirmos que $N = N(t, x^i)$ então um novo ingrediente pode ser usado na construção do potencial,

$$a^i = \frac{\partial_i N}{N}, \quad (3.15)$$

que se transforma como um vetor espacial e um escalar temporal sob as transformações (3.4). Portanto podemos construir escalares com relação a (3.4) contraindo a_i com os tensores de curvatura e suas derivadas gerando muito mais termos no potencial. O termo potencial no caso da teoria não-

projetável inclui os termos (3.12) e aparecem termos tais como:

$$S_4 = \int dt d^3x N \sqrt{g} (\eta \kappa^4 a^i a_i), \quad (3.16)$$

$$S_5 = \int dt d^3x N \sqrt{g} \kappa^2 (\eta_2 a^i \Delta a_i + \eta_3 R \nabla_i a^i + \dots), \quad (3.17)$$

$$S_6 = \int dt d^3x N \sqrt{g} (\eta_4 a_i \nabla^2 a^i + \eta_5 \nabla R \Delta_i a^i + \eta_6 R^2 \nabla_i a^i + \dots) \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

onde apresentamos apenas alguns exemplos de termos. O número total de termos independentes é superior a 60 [20]. Isto significa que a teoria não-projetável tem mais de 60 constantes de acoplamento independentes, o que prejudica a capacidade de predição da teoria. Por este motivo, nosso trabalho é voltado para teorias que satisfazem a hipótese de projetabilidade³.

A teoria de HL não-projetável descrita aqui é conhecida na literatura como "extensão saudável" (*healthy extention*) da Gravidade HL. Mais sobre esta teoria pode ser visto em [21, 22] e referências ali encontradas.

3.2.3 Balanço Detalhado

Com o intuito de reduzir ainda mais o número de constantes de acoplamento independentes da teoria, além da projetabilidade, Hořava propôs uma hipótese adicional na construção do potencial [7, 8]. Esta hipótese consiste na imposição de uma forma especial para o termo potencial:

$$S_V = \frac{1}{4} \int dt d^Dx \sqrt{g} N E^{ij} \mathcal{G}_{ijkl} E^{kl}, \quad (3.20)$$

³Por outro lado, a teoria HL não-projetável tem vantagens em relação à teoria projetável no que diz respeito aos problemas de acoplamento forte do gráviton escalar, que será discutido no Capítulo 5.

onde $\mathcal{G}_{ijkl}$ é o inverso da métrica de De-Witt generalizada (3.9) e E^{ij} é deduzido de um princípio de mínima ação nas D dimensões espaciais:

$$\sqrt{g}E^{ij} = \frac{\delta W[g_{kl}]}{\delta g_{ij}} \quad (3.21)$$

para uma ação W para a métrica em D dimensões. Esta condição, por analogia à forma como alguns potenciais são construídos em dinâmica de fenômenos críticos fora do equilíbrio, é chamada de *balanço detalhado*. Como consideramos teorias que são isotrópicas nas dimensões espaciais, a ação W deve ser invariante sob difeomorfismos em D dimensões. Uma possibilidade óbvia de ação com essas características é a ação de Einstein-Hilbert em D dimensões euclidianas:

$$W_1 = \frac{1}{\zeta_W^2} \int d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda_W), \quad (3.22)$$

que gera o termo de potencial,

$$S_V = \frac{1}{4\zeta_W^4} \int dt d^D x \sqrt{g} N (G^{ij} - \Lambda_W g^{ij}) \mathcal{G}_{ijkl} (G^{kl} - \Lambda_W g^{kl}), \quad (3.23)$$

onde $G^{ij} = R^{ij} - (1/2)Rg^{ij}$ é o tensor de Einstein em D dimensões. Em curtas distâncias, o potencial (3.23) é dominado por termos $\sim R^2$, que tem dimensão de escalonamento 4, o que significa que um potencial deste tipo leva a um coeficiente dinâmico crítico $z = 2$ no UV, cuja dimensão crítica é $2 + 1$. Uma teoria deste tipo foi proposta como uma teoria de volume mundo de membranas [7].

Para uma teoria que possa descrever a gravidade no nosso universo em $3 + 1$ dimensões, precisamos acrescentar à ação W um termo que gere um termo de dimensão 6 no potencial. A proposta de Hořava foi a introdução

do termo de Chern-Simons gravitacional em W :

$$W_2 = \frac{1}{w^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \left(\Gamma_{il}^m \partial_j \Gamma_{km}^l + \frac{2}{3} \Gamma_{il}^n \Gamma_{jm}^l \Gamma_{kn}^m \right), \quad (3.24)$$

com os símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i tratados como funcionais conhecidos da métrica e não como variáveis independentes. As equações do movimento correspondentes à variação de (3.24) são:

$$C^{ij} = 0, \quad (3.25)$$

onde C^{ij} é o tensor de Cotton, definido por:

$$C^{ij} \equiv \epsilon^{ikl} \nabla_k \left(R_l^j - \frac{1}{4} R \delta_l^j \right). \quad (3.26)$$

O tensor de Cotton é simétrico, transverso, sem traço e invariante conforme, e tem um importante papel geométrico. Em 3 dimensões o tensor de Weyl se anula identicamente e, portanto, não pode ser usado como critério de planaridade conforme neste caso. O objeto que cumpre esta função em 3 dimensões é o tensor de Cotton. Em outros termos, uma variedade tridimensional é conformalmente plana se, e somente se, o tensor de Cotton é nulo nessa variedade [23].

Como o tensor de Cotton é de terceira ordem nas derivadas espaciais, gera um termo potencial com a forma:

$$S_V = \frac{1}{4w^4} \int dt d^3x \sqrt{g} N (C^{ij} C_{ij}), \quad (3.27)$$

que é um termo de dimensão 6, que corresponde a uma teoria com $z = 3$ no UV, como desejado.

Se considerarmos também os operadores relevantes e marginais que aparecem na (3.23) obtemos:

$$S_V = \frac{1}{4\zeta_W^4} \int dt d^D x \sqrt{g} N \left(G^{ij} - \Lambda_W g^{ij} + \frac{1}{w^2} C^{ij} \right) \mathcal{G}_{ijkl} \left(G^{kl} - \Lambda_W g^{kl} + \frac{1}{w^2} C^{kl} \right), \quad (3.28)$$

que é a ação mais geral da teoria HL projetável com $z = 3$ que satisfaz o balanço detalhado.

Apesar das sugestivas propriedades matemáticas do tensor de Cotton, esta versão da teoria de HL sofre de algumas patologias, como quebra da simetria de paridade da ação (3.28), que contêm termos com número ímpar de derivadas espaciais, instabilidades perturbativas [24, 26] e, devido a hipótese de balanço detalhado, aparecem dificuldades para se acoplar esta teoria à matéria [27]. Portanto, apesar da grande simplificação que a hipótese do balanço detalhado traz ao potencial, ela não parece ser compatível com uma teoria de gravidade fenomenologicamente viável. Por outro lado há evidências de que esta hipótese seja útil em outras aplicações, como sugerido em [16], onde o balanço detalhado é deduzido a partir da hipótese holográfica. Como a hipótese de balanço detalhado parece não ser necessária para a construção da teoria, não a consideraremos na maior parte do nosso trabalho.

3.3 Limite de Baixas Energias

Para que a teoria de Hořava-Lifshitz seja fenomenologicamente viável, ela deve apresentar comportamento isotrópico em baixas energias, de maneira a ser compatível com os resultados experimentais atuais. Para proceder esse

limite, escrevemos a ação da teoria HL da maneira esquemática:

$$S = \int dt d^3x \sqrt{g} N [K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - \kappa^4 \mathcal{V}_1 - \kappa^2 \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_3], \quad (3.29)$$

onde $\mathcal{V}_a$ representa o conjunto de termos com dimensão de escalonamento $[\mathcal{V}_a] = 2a$. Tal escolha se explica pelo fato de que nos regimes em que o termo $\mathcal{V}_a$ for dominante, o expoente dinâmico crítico efetivo da teoria será $z = a$. Para obtermos um limite de baixas energias compatível com a física que conhecemos, que é relativística, com $z = 1$, o termo $\mathcal{V}_1$ deve dominar. Assim como fizemos na análise do campo escalar anisotrópico, devemos mudar o nosso sistema de unidades para o sistema de unidades fenomenológico, redefinindo o tempo para que ele tenha a mesma dimensão que o espaço:

$$t_{IR} = \kappa^2 t. \quad (3.30)$$

Fazendo-se esta substituição e trocando-se as derivadas em tempo fundamental t por derivadas em tempo fenomenológico t_{IR} na definição da curvatura extrínseca, obtemos:

$$S = \kappa^2 \int dt_{IR} d^3x \sqrt{g} N \left[K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - \mathcal{V}_1 - \frac{1}{\kappa^2} \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\kappa^4} \mathcal{V}_3 \right]. \quad (3.31)$$

No espaço de momentos, os termos $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_3$ comportam-se como k^2 , k^4 e k^6 , respectivamente. Isto significa que para $k \ll \kappa$, os termos $\mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_3$ são respectivamente suprimidos por fatores de $\frac{k^2}{\kappa^2}$ e $\frac{k^4}{\kappa^4}$ em relação a $\mathcal{V}_1$. Portanto, para valores suficientemente baixos do momento, ou seja, para distâncias longas, a ação (3.31) se reduz a

$$S_{IR} = \kappa^2 \int dt_{IR} d^3x \sqrt{g} N [K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - \mathcal{V}_1], \quad (3.32)$$

onde

$$\mathcal{V}_1 = -(\alpha_0 \kappa^2 + \alpha_1 R), \quad (3.33)$$

no caso da teoria projetável. No caso da teoria não-projetável, temos:

$$\mathcal{V}_1 = -(\alpha_0 \kappa^2 + \alpha_1 R + \eta a^i a_i). \quad (3.34)$$

A constante de acoplamento α_1 pode ser absorvida com um rescalonamento do tempo, portanto tomaremos $\alpha_1 = -1$ doravante, sem perda de generalidade. A ação da relatividade geral no formalismo ADM se escreve:

$$S_{RG} = \frac{1}{16\pi G} \int dt d^3x \sqrt{g} N [K_{ij} K^{ij} - K^2 + R - 2\Lambda]. \quad (3.35)$$

A comparação direta da ação (3.32) com (3.35) sugere a identificação $\kappa^2 = \frac{1}{16\pi G} \sim l_P^{-2}$, o que implica que a escala em que as anisotropias aparecem é regulada pela escala de Planck, além das constantes de acoplamento α_i , $2 \leq i \leq 8$. Analogamente, identificamos $\alpha_0 \kappa^2 = 2\Lambda$. É importante notar que a teoria de HL não se reduz exatamente à RG no limite de baixas energias, embora tome uma forma similar. A diferença mais evidente entre HL e RG é a presença da constante de acoplamento λ na primeira, cujo valor pode vir a ser determinado pelo fluxo do grupo de renormalização da teoria, embora isto ainda seja uma questão em aberto. A invariância sob difeomorfismos espaço-temporais fixa $\lambda = 1$ em RG e desvios em relação a este valor são restringidos por observações cosmológicas [28]. No presente momento, para estudo do limite de baixas energias, onde efeitos quânticos gravitacionais devem ser desprezíveis, devemos ajustar $\lambda = 1$ manualmente. Ainda que imponhamos $\lambda = 1$, ou encontremos um mecanismo consistente no futuro para que este valor seja obtido, a teoria HL ainda não se reduz à RG. No caso da teoria projetável, a hipótese de projetabilidade torna a teoria intrinsecamente diferente da RG, pois nesta última, a função N (o lapso) depende de todas as coordenadas e não apenas do tempo como em HL projetável. Isto significa que apenas soluções da RG que satisfaçam $N = N(t)$

serão também soluções em HL projetável no limite IR. Mais precisamente, as soluções da RG que admitam um sistema de coordenadas em que o lapso tome essa forma projetável serão compartilhadas com a teoria HL. Por outro lado, as soluções mais importantes fenomenologicamente tem essa propriedade, que são as soluções de Schwarzschild, usada nos testes do sistema solar, e a de Friedman-Robertson-Walker, usada em cosmologia. As soluções de Reissner-Nordström e Kerr também são projetáveis [25].

No caso da teoria HL não-projetável, além da presença da constante λ , para a qual a discussão feita acima se aplica igualmente, temos a presença de um termo extra na ação, $\eta a^i a_i$. Este termo torna a teoria equivalente a uma versão da teoria Einstein-Aether (ver demonstração em [29]), que é uma teoria de gravitação acoplada com um quadrivetor no espaço-tempo.

Em suma, no limite de baixas energias a teoria HL, em ambas as versões, se reduzem à teorias isotrópicas, mas desvios em relação à relatividade geral são previstos em ambos os casos. O principal deles, que é a presença de um grau de liberdade extra no campo gravitacional em relação à RG, relacionado à simetria reduzida da teoria HL, será discutido no capítulo 5. O entendimento deste gráviton escalar, como tem sido chamado, é fundamental para sabermos se a teoria de Hořava-Lifshitz é, de fato, viável fenomenologicamente.

Capítulo 4

Propriedades da Teoria HL projetável

Neste capítulo apresentaremos as principais propriedades da versão projetável da teoria HL, assim como algumas de suas consequências físicas, que são particularmente importantes em modelos cosmológicos. Das observações cosmológicas vêm também as principais restrições ao valor da constante λ no IR.

4.1 Equações Clássicas do Movimento

Escrevamos a ação da teoria HL projetável em 3 dimensões na seguinte forma:

$$S = \kappa^2 \int dt d^3x \sqrt{g} N (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 + R - 2\Lambda - \mathcal{V}_{UV}), \quad (4.1)$$

onde $\kappa^2 = \frac{1}{16\pi G}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{UV} = & \frac{1}{\kappa^2} (\alpha_2 R^2 + \alpha_3 R_{ij} R^{ij}) + \frac{1}{\kappa^4} (\alpha_4 R^3 + \alpha_5 R R_{ij} R^{ij} + \alpha_6 R_j^i R_k^j R_i^k) \\ & + \frac{1}{\kappa^4} (\alpha_7 \nabla_i R \nabla^i R + \alpha_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

corresponde aos termos do potencial que apenas são importantes para energias suficientemente altas, ou seja, os termos com mais de duas derivadas espaciais. Usamos aqui o sistema de unidades fenomenológico, ideal para a comparação das propriedades da gravidade HL com aquelas da RG.

As equações do movimento da teoria são obtidas efetuando-se a derivação funcional da ação em relação aos campos da teoria, N , N_i e g_{ij} , e igualando-as a zero, o que corresponde ao cálculo dos extremos da ação. A variação da ação em relação a N se escreve:

$$\delta_N S = \int dt d^3x \delta N (-K_{ij} K^{ij} + \lambda K^2 + R - 2\Lambda - \mathcal{V}_{UV}) = 0. \quad (4.3)$$

Como em HL projetável N é uma função apenas do tempo, δN também é uma função apenas do tempo. Portanto, a equação (4.3) implica

$$0 = \int d^3x (-K_{ij} K^{ij} + \lambda K^2 + R - 2\Lambda - \mathcal{V}_{UV}) \quad (4.4)$$

que é chamado de *vínculo hamiltoniano*. A principal diferença entre o vínculo hamiltoniano em HL projetável e o seu análogo em RG é que em HL é uma integral sobre todo o espaço, não sendo um vínculo local. Em RG e em HL não-projetável o vínculo é local, sendo que o integrando se anula em todos os pontos, como consequência de N ser uma função tanto do espaço como do tempo nesses casos. Para constar, em RG o vínculo hamiltoniano se escreve:

$$-K_{ij} K^{ij} + K^2 + R - 2\Lambda = 0. \quad (4.5)$$

As equações obtidas a partir da variação da ação com relação ao vetor N_i são chamadas de *vínculos do momento*. Obtemos

$$0 = \nabla_i (K^{ij} - \lambda g^{ij} K) \equiv \nabla_i \pi^{ij}. \quad (4.6)$$

onde π^{ij} é o momento conjugado a g_{ij} .

Os vínculos do momento são praticamente iguais aos obtidos em RG, apenas diferindo na presença da constante arbitrária λ . Ajustando-se $\lambda = 1$ obtemos os vínculos do momento da RG. Os vínculos (4.6) tem a mesma forma em também em HL não-projetável e independem da forma do potencial escolhido, pois apenas o termo cinético tem dependência em N_i .

As equações dinâmicas são obtidas pela variação da ação (4.1) com relação à métrica espacial g_{ij} . Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_t (\sqrt{g} \pi^{ij}) &= -2N [K_l^i K^{lj} - \lambda K K^{ij}] + \frac{N}{2} \mathcal{T}(K) g^{ij} \\ &+ (\nabla_m N^m) \pi^{ij} + (N^i \nabla_m \pi^{mj} + N^j \nabla_m \pi^{im}) + \frac{N}{\sqrt{g}} F^{ij}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $F^{ij} \equiv \frac{\delta S_V}{\delta g_{ij}}$ é a variação da parte da ação correspondente ao potencial e $\mathcal{T}(K)$ é o termo cinético da lagrangiana. A forma desta equação é idêntica à sua análoga em RG, a diferença residindo na dependência em λ e no termo F^{ij} que é bem mais complicado em gravidade HL. A fim de evitar o cálculo explícito de F^{ij} que é suficientemente longo e tedioso, podemos tomar um atalho usando o seguinte raciocínio: S_V é a ação mais geral construída com a métrica espacial g_{ij} e 2, 4 ou 6 derivadas espaciais, portanto, a sua variação deve ser o tensor simétrico conservado mais geral contruído com a métrica e 0, 2, 4 ou 6 derivadas espaciais:

$$F^{ij} = \sum_{s=0}^8 \alpha_s \kappa^{n_s} (F_s)^{ij}, \quad (4.8)$$

onde n_s é um inteiro apropriado para ajustar a dimensionalidade dos termos.

Calculando-se termo a termo, obtemos:

$\alpha_0: 1 \rightarrow$

$$(F_0)_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij}. \quad (4.9)$$

$\alpha_1: R \rightarrow$

$$(F_1)_{ij} = G_{ij}. \quad (4.10)$$

$\alpha_2: R^2 \rightarrow$

$$(F_2)_{ij} = 2RR_{ij} - \frac{1}{2}R^2g_{ij} - 2[\nabla_i\nabla_j - g_{ij}\nabla^2]R. \quad (4.11)$$

$\alpha_3: R_{mn}R^{mn} \rightarrow$

$$(F_3)_{ij} = \frac{3}{2}(R_{mn}R^{mn})g_{ij} + \nabla^2 R_{ij} + \frac{1}{2}g_{ij}\nabla^2 R - \nabla_i\nabla_j R + 3RR_{ij} - 4(R^2)_{ij} - R^2g_{ij}. \quad (4.12)$$

$\alpha_4: R^3 \rightarrow$

$$(F_4)_{ij} = 3R^2R_{ij} - \frac{1}{2}R^3g_{ij} - 3[\nabla_i\nabla_j - g_{ij}\nabla^2]R^2. \quad (4.13)$$

$\alpha_5: R(R_{mn}R^{mn}) \rightarrow$

$$\begin{aligned} (F_5)_{ij} &= R_{ij}(R_{mn}R^{mn}) + 2R(R^2)_{ij} - \frac{1}{2}R(R_{mn}R^{mn})g_{ij} \\ &+ \nabla^2(RR_{ij}) + \nabla_m\nabla_n(RR^{mn})g_{ij} - \nabla^k\nabla_i(RR_{jk}) \\ &- \nabla^k\nabla_j(RR_{ki}) + [g_{ij}\nabla^2 + \nabla_i\nabla_j](R_{mn}R^{mn}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

$\alpha_6: R^m{}_n R^n{}_p R^p{}_m \rightarrow$

$$\begin{aligned} (F_6)_{ij} &= 3(R^3)_{ij} - \frac{1}{2}(R^k{}_m R^m{}_n R^n{}_k)g_{ij} \\ &+ \frac{3}{2}[\nabla^2(R^2)_{ij} + \nabla_n\nabla_m(R^2)^{nm}g_{ij} - \nabla^n\nabla_i(R^2)_{jn} - \nabla_n\nabla_j(R^2)_{in}]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\alpha_7: (\nabla R)^2 = (\nabla_m R) g^{mn} (\nabla_n R) \rightarrow$$

$$(F_7)_{ij} = -2[g_{ij} \nabla^2 - \nabla_i \nabla_j] \nabla^2 R - 2(\nabla^2 R) R_{ij} + (\nabla_i R) (\nabla_j R) - \frac{1}{2} (\nabla R)^2 g_{ij}. \quad (4.16)$$

$$\alpha_8: (\nabla_p R_{mn}) (\nabla^p R^{mn}) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} (F_8)_{ij} = & \nabla^4 R_{ij} + (\nabla_p \nabla_q \nabla^2 R^{pq}) g_{ij} - \nabla_p \nabla_i \nabla^2 R^p_j \\ & - \nabla_p \nabla_j \nabla^2 R^p_i - (\nabla_i R^m_n) (\nabla_j R^n_m) \\ & - \frac{1}{2} (\nabla_p R_{mn}) (\nabla^p R^{mn}) g_{ij} - 2(\nabla^q R_i^p) (\nabla_q R_{jp}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Acima usamos a notação $(R^2)^{ij} = R_k^i R^{kj}$, $(R^3)^{ij} = R_k^i R_l^k R^{lj}$ e $\nabla^2 = \nabla^i \nabla_i$. Os dois primeiros termos calculados acima, $(F_1)_{ij}$ e $(F_0)_{ij}$ são exatamente os mesmos que ocorrem na decomposição ADM em relatividade geral com uma constante cosmológica. Os demais termos são resultado do abandono da simetria de Lorentz e são os responsáveis por regular o comportamento da teoria no UV.

Em suma, encontramos na teoria HL projetável um vínculo hamiltoniano que é bem diferente do seu análogo em RG, por ser um vínculo global, integrado sobre uma fatia inteira de espaço, e não local como em RG, em que o vínculo é satisfeito em cada ponto da variedade espaço-temporal. Em seguida encontramos vínculos do momento que são muitos semelhantes em HL e em RG, a diferença sendo apenas a presença da constante λ e sendo independente dos termos potenciais na ação. Finalmente, mostramos que a equação dinâmica corresponde àquela da RG acrescida de termos de com maior número de derivadas espaciais, advindos do menor grau de simetria da Gravidade HL.

4.2 Soluções Esfericamente Simétricas

Uma das primeiras perguntas a serem respondidas sempre que uma nova teoria da gravitação é proposta é o campo gravitacional de uma massa pontual, ou seja, suas soluções esfericamente simétricas. Isto porque o nosso sistema solar é o nosso principal laboratório de gravitação e, com boa aproximação, o campo gravitacional tem simetria central com relação ao Sol, a menos das perturbações causadas pelos planetas. Em [30], soluções estáticas e esfericamente simétricas da teoria HL projetável foram encontradas e discutidas. A principal sutileza no cálculo de tais soluções vem da condição de projetabilidade da teoria, que torna um *ansatz* do tipo "Schwarzschild", como

$$ds^2 = -g(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.18)$$

inadequado, pois essa métrica não satisfaz $N = N(t)$ quando efetuamos a decomposição nas coordenadas de ADM. O *ansatz* esfericamente simétrico mais geral que respeita a condição de projetabilidade tem a forma:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{f(r)} (dr + N^r(r)dt)^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.19)$$

onde $d\Omega^2$ é o elemento de ângulo sólido da esfera. Inserindo-se (4.19) na ação (4.1) ou nas equações do movimento, obtêm-se as seguintes soluções, para $\lambda = 1$:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 + yr^2} + r^2 d\Omega^2, \quad y \in \{-1, 0, 1\}, \quad (4.20)$$

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dr \pm \sqrt{\frac{\alpha_0 \kappa^2}{6} r^2 + \frac{M}{r}} dt \right)^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.21)$$

As soluções do tipo (4.20) correspondem ao espaço-tempo de topologia $R \times M^3$, onde M^3 é uma variedade maximamente simétrica em 3 dimensões, com curvatura negativa, nula, ou positiva, dependendo do valor da constante cosmológica.

As soluções do tipo (4.21) correspondem por sua vez, a buracos negro dS-Schwarzschild, escrito em coordenadas de Painlevé-Gullstrand, que se relacionam com as coordenadas usuais de Schwarzschild pela transformação:

$$dt_s = dt_{PG} - \frac{\sqrt{\frac{\alpha_0 \kappa^2}{6} r^2 + \frac{M}{r}}}{1 - \left(\frac{\alpha_0 \kappa^2}{6} r^2 + \frac{M}{r}\right)} dr. \quad (4.22)$$

No caso em que a constante cosmológica é nula, $\alpha_0 = 0$ as soluções do tipo (4.21) se reduzem, portanto, ao espaço-tempo de Schwarzschild. Isto significa que se pudermos supor $\lambda = 1$ no IR, a teoria HL projetável pode ser indiferenciável da RG através de testes no Sistema Solar.

É importante também notar que as soluções do tipo (4.21), com constante cosmológica negativa tornam N^r imaginário para r suficientemente grande, sugerindo que buracos negros em fundo AdS talvez não sejam soluções da teoria HL projetável.

4.3 Acoplamento com a Matéria

Em relatividade geral, a covariância geral da teoria e a simetria de Lorentz no espaço tangente nos impõe naturalmente a forma do acoplamento com os campos de matéria. Basta escrevermos uma lagrangiana que seja escalar de Lorentz no espaço plano, substituímos as derivadas por derivadas covari-

antes e automaticamente temos um acoplamento mínimo da gravitação com a matéria, além da equação de conservação do tensor de energia-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Na teoria anisotrópica de HL, a situação é diferente, pois temos um grau menor de simetria, não temos simetria de Lorentz no espaço tangente, o que faz com que a receita descrita para RG não possa ser copiada. A construção de lagrangianas para matéria em teoria HL devem seguir princípios diferentes.

Em [31] são propostas as lagrangianas mais gerais para campos escalares e vetoriais, construídas sobre a simetria de Lifshitz e acopladas com os campos ADM num espaço-tempo curvo.

Como exemplo, trataremos aqui do caso do campo escalar, em $3 + 1$ dimensões ¹. A ação é

$$S[\Phi] = \int dt d^3x \sqrt{g} N \left[\frac{1}{N^2} \left(\dot{\Phi} - N^i \partial_i \Phi \right)^2 - F[\xi_1, \xi_2, \dots, \Phi] \right]. \quad (4.23)$$

onde o potencial F é constituído de combinações de Φ e suas derivadas espaciais $\xi_n = \Phi \Delta^n \Phi$, onde Δ é o laplaciano tridimensional, que sejam escalares e renormalizáveis. O que significa, de acordo com a análise do primeiro capítulo, que os termos devem conter no máximo seis derivadas espaciais. Portanto F tem a forma

$$F[\xi, \Phi] = F_0 + F_1 \xi_1 + F_{11} \xi_1^2 + F_{21} \xi_2 \xi_1 + F_3 \xi_3, \quad (4.24)$$

onde os coeficientes F_n devem ser entendidos como funções arbitrárias de Φ . Os termos dominantes no limite IR são F_0 e F_1 . Este último pode ser reduzido a uma constante (a velocidade de propagação do campo) com uma

¹Caso também discutido em [32]

conveniente redefinição dos campos. Neste caso, no limite IR a ação se reduz ao campo escalar relativístico usual com um potencial dado por $F_0(\Phi)$.

Uma observação importante a ser feita é que tanto a gravidade quanto a matéria tem um limite IR em que a simetria de Lorentz emerge, se tomarmos as teorias separadamente. Quando levamos em conta as duas, não temos como garantir que a velocidade da luz efetiva será a mesma para a gravidade e para cada um dos diferentes campos de matéria que acoplarmos à teoria. No exemplo do campo escalar, o valor de F_1 não tem nenhuma relação com a velocidade de propagação da gravitação, que está relacionado ao valor de α_1 na ação da teoria HL. Em outras palavras, a redefinição do tempo utilizada para fazer $\alpha_1 = -1$ na ação (4.1) não tem como levar ao mesmo tempo $F_1 = 1$, o que seria necessário para recuperarmos a teoria da relatividade geral padrão acomplada com o escalar relativístico.

O problema descrito no parágrafo acima é uma das principais questões em aberto sobre a teoria de Hořava-Lifshitz. A simetria de Lorentz emerge apenas quando consideramos a gravidade isolada da matéria. A partir do momento em que acoplamos campos de matéria à teoria, o mecanismo deixa de funcionar, pois a velocidade da luz efetiva que emerge para cada setor é, em geral, diferente. Para se obter uma teoria de gravidade e matéria compatível com as observações em baixas energias a única alternativa atual se fazer um ajuste fino dos parâmetros, de maneira a se obter desvios da simetria de Lorentz dentro dos limites experimentais atuais, o que é insatisfatório.

Em suma, a teoria HL carece de um mecanismo que faça a simetria de Lorentz emergir no IR para a gravidade acoplada com diversas espécies de

matéria que têm simetria de Lifshitz no UV.

4.4 Consequências Cosmológicas

Com o surgimento da Relatividade Geral, a construção de modelos que representassem o universo como um todo tornou-se possível, assim como a comparação de predições de tais modelos com as observações.

Como o comportamento do universo em larga escala é ditado principalmente pela gravidade, novas teorias gravitacionais tendem a ter impacto cosmológico importante. Portanto, as consequências cosmológicas de uma nova teoria da gravidade são bons testes de viabilidade, pois é necessário que as restrições observacionais atuais sejam satisfeitas pela nova teoria. Além disso, uma nova teoria da gravidade pode dar uma nova luz a questões em aberto na cosmologia padrão, por exemplo, a natureza da matéria e energia escuras, que compõem a maior parte do conteúdo do universo segundo o modelo padrão (Λ CDM).

Finalmente, talvez o grande interesse do estudo de aspectos cosmológicos de uma nova teoria da gravidade é a possibilidade menos remota de verificação experimental num futuro próximo, pois efeitos cosmológicos em altas energias (universo jovem) podem ter consequências na evolução posterior do universo, podendo se tornar mensuráveis numa escala de energia acessível pelas atuais observações cosmológicas.

No caso da teoria HL projetável, que aqui trataremos, a cosmologia tem diferenças interessantes em relação ao modelo cosmológico padrão, como a

aparição de termos extras das equações do movimento, que se comportam como poeira escura, radiação escura e matéria dura, e que levam a soluções diferentes, como cosmologia com salto (*bounce*). Veremos também como a anisotropia de Lifshitz, por si só, resolve problemas da cosmologia padrão sem a necessidade de inflação.

4.4.1 Matéria Escura como uma Constante de Integração

Em [33, 13], Shinji Mukohyama demonstra que na teoria HL projetável, as equações do movimento levam naturalmente ao aparecimento de um termo que tem comportamento similar em alguns aspectos àquele associado à matéria escura. Chamaremos este termo de *poeira escura*. Para mostrar como isso ocorre, escreveremos as equações que governam a cosmologia HL, que são o equivalente das equações de Friedman na relatividade geral.

De início supomos uma solução do tipo Friedman-Robertson-Walker para os campos ADM, isto é, um espaço-tempo cujas seções espaciais sejam homogêneas e isotrópicas:

$$N = 1, \quad N^i = 0, \quad g_{ij} = \frac{a^2}{\left(1 + \frac{\bar{k}r^2}{4}\right)^2} \delta_{ij}, \quad (4.25)$$

onde $r = \delta_{ij}x^i x^j$ e $\bar{k} = 0, 1$ ou -1 dependendo da seção espacial ser plana, ter curvatura positiva ou negativa, respectivamente, e o fator de escala $a(t)$ é uma função do tempo.

Para obtermos as equações basta introduzirmos o *ansatz* (4.25) nas equações do movimento obtidas na Seção 4.1, ou na ação da teoria e encontrar as

equações de Euler-Lagrange para o fator de escala $a(t)$ e para os campos de matéria.

Obtemos para o vínculo hamiltoniano:

$$0 = \int d^3x a^3 \left[\frac{3\lambda - 1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\bar{k}}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} - \frac{\beta_1}{a^4} - \frac{\beta_2}{a^6} - \frac{8\pi G}{3} \rho \right], \quad (4.26)$$

onde o ponto indica a derivada temporal, $\beta_1 = 16\pi G \bar{k}^2 (6\alpha_2 + 2\alpha_3)$, $\beta_2 = (16\pi G)^2 \bar{k} (36\alpha_4 + 12\alpha_5 + 4\alpha_6)$ e ρ é a densidade de energia da matéria, definida por $\frac{1}{\sqrt{g}N} \frac{\delta S_m}{\delta N}$. No caso do campo escalar, por exemplo, obtemos a expressão usual $\rho = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$.

A equação (4.26) é homóloga à equação de Friedman obtida em cosmologia padrão:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\bar{k}}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (4.27)$$

mas apresenta uma diferença fundamental, pois (4.27) é uma equação local, válida para todos os pontos, enquanto (4.26) é uma equação global, que não implica que o integrando seja nulo. Voltaremos a esta questão mais adiante.

Os vínculos do momento são triviais devido à simetria do *ansatz*. Passaremos, portanto, à equação dinâmica,

$$\frac{3\lambda - 1}{2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{\bar{k}}{a^2} + \Lambda + \frac{\beta_1}{a^4} + \frac{3\beta_2}{a^6} - 8\pi G P, \quad (4.28)$$

cujas homóloga em RG é

$$\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{\bar{k}}{a^2} + \Lambda - 8\pi G P, \quad (4.29)$$

onde P é a pressão da matéria, também definida da maneira usual.

A equação da matéria, no caso relativístico, corresponde à equação de

conservação

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (4.30)$$

que é satisfeita mesmo em HL no caso do campo escalar (4.23). Mas para tipos arbitrários de matéria, se supusermos que em altas energias desvios em relação a relatividade podem existir, não teremos mais a conservação do tensor energia-momento, o que se traduz pela possibilidade de um termo diferente de zero do lado direito da equação:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = -Q(t), \quad (4.31)$$

onde, para restaurar a invariância relativística em baixas energias, devemos ter $Q(t) \rightarrow 0$ no IR.

Em Relatividade Geral, temos que apenas duas das três equações obtidas são independentes e o sistema obtido é completamente solúvel. Do ponto de vista de estrutura das equações, no entanto, temos que a equação de Friedman (4.27) é o vínculo hamiltoniano, que vale para cada ponto do espaço-tempo. O vínculo é conservado pela equação dinâmica (4.29), o que significa que só precisam ser impostos nas condições iniciais, e serão satisfeitos em todo instante posterior.

No caso da teoria HL, o vínculo hamiltoniano é um vínculo global. Se supusermos que a seção espacial do universo é totalmente homogênea e isotrópica, o vínculo será válido em todos os pontos. Mas só temos confirmações da homogeneidade e isotropia do universo numa região limitada pelo horizonte de Hubble. Portanto, se adotarmos a hipótese mais fraca de que apenas o trecho do universo que contém a região a qual temos algum acesso é homogêneo e isotrópico, deixando margem para inomogeneidades em escalas ainda mai-

ores, não temos como impor o vínculo hamiltoniano (4.26) em cada ponto. Devemos encontrar a solução apenas integrando as equações locais (4.28) e (4.31). A primeira integral obtida a partir destas duas equações tem a forma de uma equação de Friedman:

$$\frac{3\lambda - 1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{C(t)}{a^3} \right) + \dots, \quad (4.32)$$

onde $C(t) = C_0 + \int^t dt' a(t')^3 Q(t')$ e os termos dependentes da curvatura foram omitidos.

Primeiramente, notemos que embora (4.32) tenha a forma da equação de Friedman, ela tem uma dependência em λ que consiste numa constante gravitacional cosmológica efetivamente diferente da constante de Newton para $\lambda \neq 1$:

$$G_{cosmo} = \frac{2}{3\lambda - 1} G, \quad (4.33)$$

o que permite colocar limites observacionais sobre λ porque a diferença entre G_{cosmo} e G é restrita pelas medidas da abundância primordial de He^4 [34]. Isto leva a $|\lambda - 1| < 0.1$, segundo [21, 35]. Um estudo mais detalhado, envolvendo todas as constantes livres da teoria num ajuste com os dados observacionais foi realizado em [28], obtendo o limite mais refinado $|\lambda - 1| < 0.02$, para intervalo de confiança de um desvio padrão.

Analisemos o termo $C(t)$. Como, em baixas energias, $Q(t) \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 1$, temos que $C(t)$ tende a um valor constante à medida que o universo evolui e arrefece e a equação (4.32) tende à equação de Friedman usual com a adição de uma componente de poeira sem pressão, mas que não tem como origem nenhum tipo de matéria usual, sendo, portanto, escura. Tal termo pode ser visto como um candidato à matéria escura que aparece naturalmente na

teoria HL projetável.

É importante notar que o aparecimento de tal termo extra correspondente à poeira escura é inevitável, mesmo se tomarmos a constante $C_0 = 0$ desde que haja violação da conservação do tensor energia-momento em altas energias. O resultado sempre levará a um termo com comportamento de poeira em baixas energias para tempos tardios.

Ademais, o aparecimento deste termo de poeira escura em HL projetável não é exclusividade das soluções cosmológicas, sendo uma propriedade geral da HL projetável em baixas energias, como demonstrado em [33, 13].

4.4.2 Cosmologias com Salto e Cíclicas

Na Seção 4.4.1, ignoramos os termos de curvatura que aparecem no equivalente das equações de Friedman em gravidade HL projetável. Nesta seção, avaliaremos que tipo de soluções cosmológicas tais termos permitem. A equação que consideramos é (4.32) com a adição dos termos de curvatura:

$$\frac{3\lambda - 1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\bar{k}}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{\beta_1}{a^4} + \frac{\beta_2}{a^6} + \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{C(t)}{a^3} \right) \quad (4.34)$$

onde podemos perceber, também comparando com a equação (4.28), que os dois novos termos, dependentes das constantes β_1 e β_2 , comportam-se, respectivamente como uma componente de radiação ($\rho = 3P$) e uma componente de matéria dura (*stiff matter*, $\rho = P$).

A adição destes termos, que tem origem puramente gravitacional, assim como o termo de poeira escura, pode ter influência importante nos estágios iniciais do universo, pois eles tendem a dominar os termos dependen-

tes de matéria convencional para valores pequenos do fator de escala $a(t)$. Reinterpretando-se a equação (4.34) como representando a conservação da energia mecânica de uma partícula em um potencial unidimensional, escrevendo:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{1}{3\lambda - 1} V(a) = 0 \quad (4.35)$$

onde

$$V(a) = \left[-\frac{\beta_2}{a^4} - \frac{\beta_1}{a^2} - \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{C(t)}{a} + \rho a^2 \right) + \bar{k} - \frac{\Lambda a^2}{3} \right], \quad (4.36)$$

podemos analisar qualitativamente o comportamento do sistema pela forma do potencial $V(a)$.

Analisemos este potencial unidimensional. Por simplicidade, fixemos $-\beta_2 = 3$, $\beta_1 = 0$, $\rho = 0$ e $C(t)$ constante. Com isto, podemos ainda variar Λ e C . Vários comportamentos distintos podem ser obtidos a partir da variação destes dois parâmetros.

Na Figura 4.1, se supusermos que o movimento inicial é da direita para a esquerda, a cosmologia obtida tem uma fase de contração até um valor mínimo do fator de escala até que ocorre um salto (*bounce* em inglês) quando $V(a) = 0$ e o universo volta a se expandir indefinidamente, até uma fase de expansão acelerada. O interesse de uma cosmologia com salto é que ela não tem uma singularidade inicial e é um modelo alternativo à inflação para se obter perturbações cosmológicas invariantes de escala. A aparição deste tipo de solução em gravidade HL foi primeiramente apontada em [37]. Em [36] são estudadas as perturbações cosmológicas de uma solução com salto em gravidade HL.

Na Figura 4.2 temos uma solução cíclica, em que o universo se expande e

Figura 4.1: Com $8\pi GC = 10$ e $\Lambda = 0.4$, o resultado é uma cosmologia com um salto (*bounce*) depois de uma fase de contração, passando para uma fase de expansão.

Figura 4.2: Com $8\pi GC = 10$ e $\Lambda = 0$, o resultado é uma cosmologia cíclica, com infinitas expansões e contrações entre dois valores limites do fator de escala $a(t)$.

se contrai indefinidamente entre dois valores limites do fator de escala, entre os dois valores de a em que $V(a)$ se anula. Embora não seja fenomenologicamente viável, por não conter a fase de expansão acelerada presente, é uma solução que demonstra como a teoria de Hořava-Lifshitz é rica em soluções mesmo na ausência de matéria, e se abstém completamente da adição de campos com comportamento exótico.

O ponto fraco é que existe uma grande liberdade de ajuste dos parâmetros de modo a satisfazer dados observacionais. No entanto, esta fraqueza é compartilhada pela maioria dos modelos cosmológicos propostos na literatura para o mesmo fim.

Os exemplos aqui apresentados foram obtidos em [13], onde outros exemplos podem ser encontrados, como universos estáticos instável e estável. Um estudo mais profundo das soluções cosmológicas em gravidade HL foi feito em [38].

4.4.3 Cosmologia sem Inflação

A observação de perturbações invariantes de escala na radiação cósmica de fundo (CMB), foi prevista pela teoria inflacionária [40] que, desde então, se tornou a principal opção para responder algumas questões em aberto que emergem no modelo padrão cosmológico. A teoria inflacionária consiste, *grossa modo*, em um período de expansão acelerada do universo anterior à era da radiação. Entre tais questões estão o problema da planaridade e o problema do horizonte [41]. Discutiremos brevemente, de maneira muitas vezes heurística, como a teoria de Hořava-Lifshitz oferece possíveis soluções

alternativas à inflação para os problemas citados ². Para uma discussão mais detalhada, ver [13, 39].

O problema da planaridade consiste no fato de que para se explicar o universo hoje, cuja densidade medida é próxima da densidade crítica para a qual a seção espacial é plana, é necessário que em estágios primitivos do universo, essa densidade seja ajustada com precisão da ordem de 10^{-16} próxima da densidade crítica, o que é um problema de ajuste fino. A inflação resolve este problema porque é um mecanismo que suprime a curvatura inicial do universo (deixando a densidade próxima à crítica), devido a expansão acelerada da seção espacial antes da era dominada pela radiação.

Para entender melhor como a inflação opera sobre a curvatura, escrevamos a equação de Friedman em termos de densidades relativas à densidade crítica, como é usual em cosmologia [41, 42]:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_M a_0^3}{a^3} + \frac{\Omega_R a_0^4}{a^4} + \frac{\Omega_K a_0^2}{a^2}, \quad (4.37)$$

onde o subscrito 0 corresponde ao valor da variável nos tempos atuais ($a = a_0$) e Ω_M , Ω_Λ , Ω_R e Ω_K são, respectivamente, as densidades relativas atuais de constantes cosmológica, matéria, radiação e curvatura. O problema da planaridade corresponde às observações indicarem que nos dias atuais, $|\Omega_K| < 1$. Como Ω_K é o valor atual do parâmetro adimensional de curvatura $K \equiv \bar{k}/a^2 H^2 = \bar{k}/\dot{a}^2$, temos que para uma expansão desacelerada ($\dot{a}$ decrescente com o tempo, o que ocorre tanto em universos dominados por matéria como por radiação), o parâmetro de curvatura é crescente e,

²Lembramos que a cosmologia com salto, citada na Seção 4.4.2., também é um exemplo de cosmologia sem inflação, mas aqui trataremos de como a cosmologia HL pode dispensar a inflação em casos mais gerais.

portanto, deveria ser muito menor quando o universo era quente, mais precisamente, da ordem de 10^{-16} , como supracitado (ver discussão em [41], Cap. 4). Da mesma maneira, um período de expansão acelerada ($\dot{a}$ crescente com o tempo) antes da era da radiação tem o efeito de suprimir um valor inicial arbitrário do parâmetro de curvatura $\bar{k}/\dot{a}$, mais especificamente, se a expansão for exponencial o parâmetro de curvatura cai como a^{-2} durante este período. Assim, depois de um período suficiente de inflação, o universo poderia passar de uma curvatura inicial qualquer para uma curvatura quase nula ao fim do período inflacionário.

Na teoria de Hořava-Lifshitz, a presença de termos de ordem mais alta na curvatura sugere um mecanismo que também suprimiria a curvatura no universo primitivo. O equivalente da equação (4.37) em teoria HL é

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_M a_0^3}{a^3} + \frac{\Omega_R a_0^4}{a^4} + \frac{\Omega_K a_0^2}{a^2} + \dots + \frac{\Omega_{SM} a_0^6}{a^6}, \quad (4.38)$$

onde omitimos os termos de poeira e radiação escuras que aparecem em HL por não serem importantes nesta discussão e definimos $\Omega_{SM} = \beta_1/(a_0^6 H_0^2)$ como o valor atual da densidade relativa de matéria dura.

Se supusermos que em altas energias, os campos de matéria ordinária e o campo gravitacional admitem o princípio termodinâmico de equipartição da energia, então a curvatura seria suprimida, pois a densidade de matéria dura é dominante nos estágios iniciais do universo. Para que haja equipartição de energia com uma componente de radiação, por exemplo, devemos ter $\Omega_{SM} \approx a^2 \Omega_R$. Por outro lado, as densidades relativas de matéria dura e curvatura são interdependentes, pois dependem diretamente do valor da curvatura espacial, $\Omega_{SM} a_0^4 \propto \Omega_K$. Levando esta relação para o universo jovem, temos que o

parâmetro de curvatura K é da ordem de a^6 vezes a densidade relativa de radiação, o que também resolve o problema de se ter um universo quase plano nos estágios iniciais, sem a necessidade de ajustes finos, desde que atinjamos valores suficientemente pequenos de a no passado.

O problema do horizonte está relacionado ao fato de a CMB ser isotrópica, i.e., ela tem praticamente a mesma temperatura (com precisão de 10^{-5}) em todas as direções. É difícil explicar tamanha homogeneidade em regiões do universo sem conexão causal para terem um dia termalizado e atingido a mesma temperatura. A inflação é um mecanismo que torna regiões atualmente muito distantes do universo causalmente conectadas num passado distante. Para se perceber isso basta se calcular o raio da região conectada causalmente, que é dado por:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (4.39)$$

onde t_0 corresponde ao instante atual e $t = 0$ corresponde ao Big Bang. Se quisermos que regiões muito distantes tenham sido conectadas no passado, precisamos que (4.39) divirja. Isto exige $a(t) \geq a_0 t$ para $t \rightarrow 0$, o que implica expansão acelerada, o que caracteriza um período de inflação. Portanto, um período inflacionário inicial teria o efeito de tornar regiões muito distantes conectadas causalmente no passado.

Em gravidade HL, este problema é resolvido pelo fato de a velocidade de propagação dos sinais não ser mais necessariamente limitada pela velocidade da luz em altas energias, onde efetivamente o regime é não-relativístico. Segue um argumento simples de que com $z = 3$, sinais podem se propagar a velocidades indefinidas. Em $z = 3$, a equação de propagação dos cam-

pos (sem considerar termos de massa ou interação) em 1+1 dimensões tem efetivamente a forma:

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^6 \Psi}{\partial x^6} = 0. \quad (4.40)$$

Se introduzirmos em (4.40) um *ansatz* do tipo onda plana que se propaga com velocidade v , $\Psi = e^{i\alpha(x-vt)}$, obtemos:

$$v^2 - \alpha^4 = 0, \quad (4.41)$$

o que significa que v não é fixado pela equação (4.40), sendo determinado pela escolha do parâmetro α , que em princípio é livre. Em contraste, a equação de onda usual ($z = 1$) apenas admite $v = 1$.

Como a velocidade de propagação dos campos pode não ter sido sempre limitada pela velocidade da luz, em tal cenário é possível que regiões do universo que hoje parecem estar distantes demais para terem conexão causal terem trocado informação através de sinais mais velozes que a luz quando o universo estava no regime de altas energias.

Um grande mérito da teoria inflacionária é que através dela podemos explicar o fato de que o universo é aproximadamente homogêneo em escalas muito grandes - maiores que o raio de Hubble H^{-1} - e a formação de estruturas em escalas menores que o raio de Hubble, a partir de flutuações quânticas primordiais (partículas, essencialmente). Este mecanismo é chamado de geração de perturbações cosmológicas e também é responsável por homogeneizar o universo em larga escala.

No caso $z = 1$ usual, as perturbações são calculadas como uma expansão sobre uma métrica de fundo FRW [41]. Em nível linear, expansão em modos

de Fourier dessas perturbações levam a uma relação de dispersão

$$\omega^2 = c_s^2 \frac{k_c^2}{a^2}, \quad (4.42)$$

onde c_s é a velocidade do som, k_c é o número de onda comóvel e a é o fator de escala do universo. Por simplicidade, supomos que c_s varia pouco no tempo comparado com a escala de tempo cosmológica H^{-1} , onde $H = \dot{a}/a$ é o fator de Hubble.

Se um modo satisfaz $\omega^2 \gg H^2$, então a evolução de tal modo não é afetada pela expansão do universo, e o modo simplesmente oscila. Quando, ao invés, $\omega^2 \ll H^2$, a expansão do universo é tão rápida que o amortecimento de Hubble congela o modo e sua amplitude permanece constante³. As flutuações quânticas primordiais inicialmente oscilam e para que perturbações em escala cosmológica sejam geradas a partir delas, é necessário que depois dessa fase de oscilação, elas congelem e tenham seu comprimento esticado pela expansão do universo. A condição para que haja geração de perturbações cosmológicas é, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^2}{\omega^2} \right) > 0, \quad (4.43)$$

para um universo em expansão. Inserindo-se (4.42) em (4.43), temos $\ddot{a}a > 0$, o que, para um universo em expansão ($\dot{a} > 0$), implica $\ddot{a} > 0$. Portanto, a geração de perturbações cosmológicas a partir de flutuações quânticas implica em expansão acelerada nos estágios iniciais, o que caracteriza um período de inflação.

As flutuações da CMB, como já citado, são aproximadamente invariantes

³Vale a pena notar que a equação para um escalar ϕ na métrica FRW tem a forma $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = V(\phi)$, o que justifica a analogia com um oscilador harmônico amortecido

de escala, isto é, a amplitude da flutuação é praticamente independente do comprimento de onda da mesma para comprimentos de onda maiores que o raio de Hubble. Tal propriedade também exige inflação no contexto da gravidade isotrópica usual. No Seção 2.2 mostramos que no caso $z = 1$, o campo escalar tem dimensão de energia. Portanto, perturbações escalares devem ser proporcionais a energia típica do sistema, que no caso do universo é dada por H . Portanto, esperamos que

$$\delta\phi \propto H. \quad (4.44)$$

Como perturbações cosmológicas de diferentes comprimentos de onda são produzidas em tempos diferentes, a (quase) invariância de escala é equivalente à constância do lado direito de (4.44). Valor constante de H significa expansão exponencial. Portanto, uma inflação quase-exponencial é exigida para se gerar perturbações cosmológicas aproximadamente invariantes de escala para comprimentos de onda muito grandes perto do raio de Hubble.

Vamos agora ao caso da gravidade anisotrópica, com $z = 3$ no UV. A relação de dispersão das perturbações cosmológicas, nesse caso, por argumentos dimensionais, deve ter a forma:

$$\omega^2 = \kappa^2 \left(\frac{k_c^2}{\kappa^2 a^2} \right)^z, \quad (4.45)$$

onde κ a escala de momento típica em que os efeitos anisotrópicos se tornam importantes, que aparece aqui porque estamos usando um sistema de unidades fenomenológico, segundo explicado no Capítulo 2. Substituindo na condição (4.43), para a geração de perturbações cosmológicas, obtemos a condição:

$$\frac{d^2 a^z}{dt^2} > 0, \quad (4.46)$$

para um universo em expansão. A condição (4.46) não exige expansão acelerada. Para $a \propto t^p$, ela é satisfeita para $p > 1/z$.

No caso de z qualquer, pelos argumentos da Seção 2.2., a dimensão das perturbações escalares satisfaz

$$\delta\phi \sim E^{\frac{3-z}{2z}}, \quad (4.47)$$

em $3 + 1$ dimensões, onde E é a energia em unidades fundamentais. Temos então, que as perturbações devem depender da energia típica do sistema, dada pelo fator de Hubble H , como

$$\delta\phi \propto H^{\frac{3-z}{2z}}. \quad (4.48)$$

Isto significa que no caso $z = 3$, a amplitude das flutuações quânticas não dependem de H e portanto não precisam de inflação para ser invariantes de escala.

As perturbações que são geradas congelam quando $\omega^2 \approx H^2$ o que no caso $z = 1$ equivale ao comprimento de onda físico da perturbação ser da ordem do raio de Hubble H^{-1} . Para z qualquer, isto não se verifica, pois o congelamento acontece quando o comprimento de onda físico atinge o raio do chamado horizonte acústico (*sound horizon*), que pela relação de dispersão (4.45), é dado por $\sim (\kappa^{z-1}H)^{-1/z}$. No UV, $H \gg \kappa$, o raio do horizonte acústico é muito maior que o raio de Hubble. Portanto, as flutuações iniciais são esticadas até um comprimento de onda muito maior no caso da gravidade anisotrópica. Isto faz com que tenhamos aproximada homogeneidade em escalas muito maiores que o horizonte de Hubble, como observamos, sem a necessidade de inflação [39].

Capítulo 5

O Gráviton Escalar em HL Projetável

A teoria de Hořava-Lifshitz tem sido objeto de intensivas investigações nos últimos dois anos, por apresentar propriedades interessantes que podem indicar um caminho para a descoberta de uma teoria de gravidade quântica coerente, além de apresentar alternativas interessantes para problemas em aberto na cosmologia.

Por outro lado, ainda desconhecemos o comportamento quântico da teoria, que é importante para que possamos ter uma idéia do valor das constantes de acoplamento (e de como esses valores variam seguindo o fluxo do grupo de renormalização) e também para que possamos realizar predições sobre fenômenos em que os efeitos quânticos gravitacionais são relevantes. Mas esta não é dificuldade mais urgente no desenvolvimento da teoria HL como uma proposta de gravidade quântica.

Desde os primeiros artigos em que a teoria HL foi proposta por Hořava [7, 8], foi percebido que as perturbações em torno do espaço-tempo plano continham um grau de liberdade a mais se propagando, além do modo tensorial usual conhecido como gráviton. Este modo extra foi chamado de gráviton escalar, e desde então o seu comportamento tem sido estudado, sem ser completamente compreendido até o momento em que este trabalho está sendo realizado.

Neste capítulo, discutiremos a presença do gráviton escalar entre os graus de liberdade da teoria HL projetável e os problemas que ele pode acarretar para a obtenção de uma teoria de gravidade quântica viável. O primeiro passo será o estudo da aproximação linear da teoria. Verificaremos a presença do gráviton escalar no espectro de excitações físicas em torno do vácuo da teoria HL projetável, discutiremos suas propriedades e as dificuldades que pode causar.

5.1 Teoria Linearizada

Analisaremos aqui, usando o formalismo de Bardeen [43, 44] adaptado à teoria HL, as perturbações em ordem linear dos campos gravitacionais no caso mais simples de um fundo plano,

$$N = 1, \quad N^i = 0, \quad g_{ij} = \delta_{ij}, \quad (5.1)$$

que exige que escolhamos $\alpha_0 \propto \Lambda = 0$ em (3.12) para que este seja uma solução da teoria HL projetável.

As perturbações mais gerais que podemos construir, separando em esca-

lares, vetores e tensores, são:

$$\begin{aligned}\delta N &= \phi, \\ \delta N_i &= \nabla_i B + V_i, \\ \delta g_{ij} &= -2\psi g_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j E - \frac{2}{3}g_{ij}\Delta E + \nabla_i F_j + \nabla_j F_i + h_{ij},\end{aligned}\quad (5.2)$$

onde ∇_i é a derivada covariante relativa à métrica espacial g_{ij} , usada para levantar e baixar índices espaciais, $\Delta = \nabla^i \nabla_i$ é o operador laplaciano, ϕ , B e E são funções, V_i e F_i são vetores espaciais sem divergência ($\nabla_i F^i = 0$) e h_{ij} é um tensor transversal e sem traço.

As perturbações em (5.2) contêm redundâncias devido as transformações de calibre da teoria, que nos permite eliminar alguns graus de liberdade. Analisaremos tais transformações. As transformações (3.5) dos campos ADM, sob uma transformação de calibre (3.4), no caso do fundo plano (5.1) se escrevem:

$$\begin{aligned}\delta N &= \dot{f}, \\ \delta N_i &= \dot{\xi}_i, \\ \delta g_{ij} &= \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Decompondo-se a transformação infinitesimal de calibre em escalares e vetores, separando $\xi^j = \zeta^j + \partial^j \xi$, onde ζ^i é um vetor sem divergência e ξ é uma função de t e x^i . Portanto, os quatro graus de liberdade de transformação infinitesimal de calibre podem ser separados em dois graus de liberdade de um vetor tridimensional sem divergência ζ^i e dois graus de liberdade de duas funções escalares, $\xi(t, x^i)$ e $f(t)$.

Combinando (5.3) com (5.2), obtemos as transformações das perturbações

sob uma transformação infinitesimal de calibre (3.4). Para as perturbações escalares obtemos ¹:

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \dot{f}, \\ \delta B &= \dot{\xi} + f, \\ \delta\psi &= -\frac{1}{3}\Delta\xi, \\ \delta E &= \xi.\end{aligned}\tag{5.4}$$

No caso das perturbações vetoriais, temos:

$$\begin{aligned}\delta V_i &= \dot{\zeta}_i, \\ \delta F_i &= \zeta_i,\end{aligned}\tag{5.5}$$

e no caso das perturbações tensoriais, temos

$$\delta h_{ij} = 0.\tag{5.6}$$

As perturbações tensoriais são automaticamente invariantes de calibre. No caso de perturbações escalares e vetoriais, podemos construir invariantes de calibre independentes, que são conhecidos como potenciais de Bardeen. No caso das perturbações escalares, temos:

$$\Phi = \psi - \dot{B} + \ddot{E}, \quad \Psi = \psi + \frac{1}{3}\Delta E,\tag{5.7}$$

como invariantes independentes. No caso das perturbações vetoriais temos o vetor invariante

$$\Phi_i = V_i - \dot{F}_i,\tag{5.8}$$

¹No caso da variável B , como as perturbações dependem apenas de suas derivadas espaciais, e em teoria HL f é uma função apenas do tempo, na verdade a inclusão de f do lado direito é redundante, mas é útil para manter a forma das equações o mais próxima possível das encontradas em RG padrão.

que caracteriza completamente os graus de liberdade vetoriais.

A análise acima independe da variante de teoria HL em questão², mas doravante trataremos do caso especial da teoria HL projetável, onde N é uma função exclusivamente do tempo, considerando $\lambda \neq 1$.

A projetabilidade implica que a perturbação de $N(t)$, ϕ , também é uma função apenas do tempo. Isto nos mostra que a perturbação $\phi(t)$ pode ser cancelada por uma escolha conveniente da função $f(t)$ nas transformações de calibre. Com uma outra escolha conveniente de ξ , podemos suprimir a perturbação E , descrevendo as perturbações escalares apenas em termos de B e ψ . Este calibre é chamado *quase-longitudinal*.

No caso das perturbações vetoriais, a hipótese de projetabilidade não tem influência alguma e uma boa maneira de fixar o calibre é escolhendo $\zeta_i = -F_i$ de maneira a descrever as perturbações vetoriais apenas com o vetor V_i .

Escolhido o calibre em que vamos trabalhar, analisaremos a propagação dos modos de perturbação. Como o vínculo hamiltoniano é global, não impõe restrição sobre os modos localmente, portanto começamos por escrever os vínculos do momento (4.6) em primeira ordem nas perturbações. Obtemos:

$$\partial_i \left[-\dot{\psi} \delta^{ij} - \partial^i \partial^j B - \frac{1}{2} (\partial^i V^j + \partial^j V^i) - \lambda \delta^{ij} (-3\dot{\psi} + \Delta B) \right] = 0, \quad (5.9)$$

o que implica, separando os modos escalares, e vetoriais:

$$(1 - 3\lambda)\dot{\psi} + (1 - \lambda)\Delta B = 0, \quad (5.10)$$

$$\Delta V^j = 0. \quad (5.11)$$

²Ademais, até este ponto a análise vale até mesmo para RG, desde que se suponha f como função do tempo e do espaço.

O vínculo (5.10) mostra que os dois graus de liberdade escalares não são independentes, representando, no máximo, um grau de liberdade físico. A equação (5.11) mostra que as perturbações vetoriais não se propagam³

Os graus de liberdade tensoriais h_{ij} satisfazem trivialmente o vínculo do momento, por isso não aparecem na discussão acima. O próximo passo de nossa análise consiste em escrever a ação da teoria em ordem quadrática nas perturbações⁴:

$$S^{(2)} = \kappa^2 \int dt d^3x \left[\frac{2(1-3\lambda)}{1-\lambda} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{4} \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} + V^{(2)}(\psi, h_{ij}) \right], \quad (5.12)$$

onde explicitamos apenas o termo cinético e κ é a escala fundamental de momento. Além do modo tensorial, h_{ij} , que é um modo de spin 2 comum à RG, a menos dos termos de ordem superior no potencial, aparece um campo escalar que se propaga no espectro das perturbações. Este campo não é um artefato da escolha de calibre, pois na verdade, no calibre quase-longitudinal que escolhemos, o valor de ψ coincide com o do potencial invariante Ψ , o que significa que podemos trocar ψ por Ψ em todas as equações, tornando-as manifestamente invariantes de calibre. Concluimos que a teoria HL projetável possui um grau de liberdade extra, o gráviton escalar.

A equação do movimento do modo de spin 2 se escreve [45]:

$$\ddot{h}_{ij} = - \left[\alpha_1 \Delta + \frac{\alpha_3}{\kappa^2} \Delta^2 + \frac{\alpha_8}{\kappa^4} \Delta^3 \right], \quad (5.13)$$

onde Δ é o operador laplaciano. Vemos que para se obter uma relação de

³É importante notar que este resultado, embora obtido após uma escolha de calibre, é independente da escolha. Isto ocorre porque neste calibre, $V_i = \Phi_i$, portanto temos que a equação da perturbação invariante é $\Delta \Phi_i = 0$.

⁴Gerando, assim, equações do movimento em ordem linear.

dispersão para o gráviton usual estável, temos que ter $\alpha_1 < 0$. Um sistema de unidades conveniente pode ser escolhido tal que $\alpha_1 = -1$.

Usando tal sistema de unidades, a ação quadrática do gráviton escalar é dada por:

$$S_\psi^{(2)} = \kappa^2 \int dt d^3x \left[\frac{1-3\lambda}{1-\lambda} \dot{\psi}^2 - \psi \Delta \psi - \frac{8\alpha_2 + 3\alpha_3}{\kappa^2} \psi \Delta^2 \psi + \frac{8\alpha_7 - 3\alpha_8}{\kappa^4} \psi \Delta^3 \psi \right], \quad (5.14)$$

o que dá a relação de dispersão

$$\omega^2 = \frac{\lambda-1}{3\lambda-1} \left(-k^2 + \frac{8\alpha_2 + 3\alpha_3}{\kappa^2} k^4 + \frac{8\alpha_7 - 3\alpha_8}{\kappa^4} k^6 \right). \quad (5.15)$$

As equações (5.14) e (5.15) caracterizam o comportamento do grau de liberdade extra presente na teoria HL. Discutiremos, a seguir, as suas consequências físicas.

5.2 Instabilidade e Acoplamento Forte

A aparição do um escalar gravitacional no espectro de perturbações é um desvio importante em relação ao que acontece em RG e deve ser analisado com cuidado, para definirmos limites tais que a viabilidade da teoria HL projetável não é prejudicada. Discutiremos esses problemas seguindo a discussão realizada em [13, 45, 46].

Na ação (5.14) o coeficiente do termo cinético, $\frac{1-3\lambda}{1-\lambda} \equiv 1/c_\psi^2$, onde c_ψ é a velocidade de propagação do gráviton escalar no limite IR é negativo para $1/3 < \lambda < 1$ e, nesse caso, ψ é um *ghost*, o que inviabiliza a quantização da

teoria⁵. Como esperamos que no limite IR λ aproxime-se de 1 de maneira contínua (por exemplo, pelo fluxo do grupo de renormalização), então a única hipótese aceitável que nos resta é considerar a região $\lambda > 1$. Neste caso, existe a possibilidade de que a teoria tenha um ponto fixo no UV para $\lambda \rightarrow \infty$ e um ponto fixo no IR para $\lambda \rightarrow 1$. É importante notar, no entanto, que não sabemos, até o presente momento, nada sobre o comportamento de λ sob o fluxo do grupo de renormalização.

A relação de dispersão (5.15), para $\lambda > 1$ mostra uma instabilidade clássica no IR, isto é, para $0 < \frac{k^2}{\kappa^2} < \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 4\sigma_2} - \sigma_1}{2\sigma_2}$, onde definimos $\sigma_1 \equiv 8\alpha_2 + 3\alpha_3$ e $\sigma_2 \equiv 8\alpha_7 - 3\alpha_8$ e supomos $\sigma_2 > 0$ para garantir estabilidade no UV.

Definimos $M_* \equiv \kappa \sqrt{\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 4\sigma_2} - \sigma_1}{2\sigma_2}}$ como a escala em que os termos de ordens mais altas no momento passam a dominar. Segundo o raciocínio apresentado em [47], a escala de tempo da instabilidade é majorada por $(|c_\psi| M_*)^{-1}$. Se exigirmos que a instabilidade não se desenvolva mais rápido que a idade atual do universo, de modo a não ser detectada, então temos aproximadamente $|c_\psi| M_* < H$, onde H é a constante de Hubble.

Considerando que os dados experimentais excluem modificações na lei de Newton para distâncias acima de 10^{-5}m , o que equivale aproximadamente a $M_* > 0.1\text{eV}$. Isto implica $|1 - \lambda| < 10^{-61}$ [45]. Este valor é muito baixo e parece improvável que o fluxo do grupo de renormalização poderia ajustar λ tão finamente.

É importante notar que tal limite fenomenológico para λ ser tão estrito

⁵Note que a hamiltoniana correspondente à ação (5.14) é negativa definida para $1/3 < \lambda < 1$, o que impossibilita a definição estado fundamental na teoria quântica [47].

não é apenas um problema de ajuste fino. Notemos que $\lambda \rightarrow 1$ equivale a $c_\psi \rightarrow 0$. Isto significa que, para valores baixos do momento, a velocidade do gráviton escalar é muito inferior à velocidade da luz para tais valores de λ . Quando a velocidade das oscilações em um certo meio é muito inferior à velocidade da luz, partículas relativísticas decaem via radiação Cherenkov [48]. A existência de raios cósmicos de altas energias que atravessaram consideráveis distâncias até chegar à Terra é uma evidência forte de que tais modos de oscilação não existem.

Em [49, 50] a expansão linear é feita sobre um fundo de Sitter em vez de Minkowski, e um melhor comportamento dos modos de baixa energia é obtido. No entanto, os problemas apresentados nesta seção persistem, pois a condição λ próximo de 1 ainda precisa ser satisfeita para que a instabilidade não inviabilize a teoria.

Os problemas que o gráviton escalar impõe não decorrem apenas dos limites estritos necessários para controlar sua instabilidade. A análise das perturbações além da ordem linear mostra que o gráviton escalar é fortemente acoplado, tornando o tratamento perturbativo inconsistente. Isto significa que o argumento de renormalizabilidade por contagem de potências, que é fundamentado no cálculo perturbativo de amplitudes, também não é válido. Portanto, a presença de acoplamento forte pode significar a não-renormalizabilidade da teoria HL projetável [47, 51, 26].

Para vermos como o acoplamento forte aparece, devemos escrever os

termo de interação em ordem cúbica em ψ :

$$S_\psi^{(3)} = \kappa^2 \int dt d^3x \left\{ \psi (\partial\psi)^2 - \frac{2}{c_\psi^4} \dot{\psi} \partial_i \psi \frac{\partial^i}{\partial^2} \dot{\psi} + \frac{3}{2} \left[\frac{\psi}{c_\psi^4} \left(\frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2} \dot{\psi} \right)^2 - \frac{(2c_\psi^2 + 1)}{c_\psi^4} \psi \dot{\psi}^2 \right] \right\}, \quad (5.16)$$

onde foram desprezados termos cúbicos oriundos dos operadores de ordem superior. É conveniente redefinir os campos de forma que a ação quadrática (5.14) seja normalizada canonicamente. Para isto definimos $\hat{t} = |c_\psi|t$ e $\hat{\psi} = c_\psi^{-1/2} \kappa \psi$. Após tais redefinições, a ação cúbica toma a forma:

$$S_\psi^{(3)} = \frac{1}{|c_\psi|^{3/2} \kappa} \int d\hat{t} d^3x \left\{ c_\psi^2 \hat{\psi} (\partial\hat{\psi})^2 - 2\hat{\psi} \partial_i \hat{\psi} \frac{\partial^i}{\partial^2} \dot{\hat{\psi}} + \frac{3}{2} \left[\hat{\psi} \left(\frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2} \dot{\hat{\psi}} \right)^2 - (2c_\psi^2 + 1) \hat{\psi} \dot{\hat{\psi}}^2 \right] \right\}, \quad (5.17)$$

onde o ponto se refere neste caso à derivada com relação a $\hat{t}$. Os termos de interação cúbica (5.17) são suprimidos pelo escala de momento $\Lambda_{sc} = |c_\psi|^{3/2} \kappa$, o que significa que para modos tais que $k > \Lambda_{sc}$, os termos de interação cúbica se tornam importantes, não podendo mais ser tratados como perturbações (que devem permanecer pequenas dentro da escala do problema). Isto caracteriza o acoplamento forte do gráviton escalar em teoria HL projetável.

Levando-se em conta as restrições sobre λ ligadas à estabilidade, vemos que a escala Λ_{sc} é demasiado baixa para ser aceitável fenomenologicamente. Sabemos que em baixas energias a gravidade pode ser tratada perturbativamente, o que não acontece na teoria HL projetável. E, como dito acima, o argumento de renormalizabilidade por contagem de potências pressupõe

a viabilidade do tratamento perturbativo em todas as escalas, portanto o acoplamento forte do gráviton escalar também ameaça a principal vantagem oferecida pela gravidade anisotrópica HL.

Por esta razão, a versão não-projetável da teoria HL, embora tenha um grande número de constantes de acoplamento, ganhou força. Na versão *healthy* da teoria HL, o gráviton escalar exibe melhor comportamento. Este assunto é amplamente discutido em [21, 22, 53, 45, 52, 20] entre outros e aqui daremos um breve resumo dos resultados.

Na teoria HL não-projetável a velocidade de propagação do gráviton escalar não é mais c_ψ , mas

$$c_\psi'^2 = c_\psi^2 \frac{\eta - 2}{\eta}, \quad (5.18)$$

o que significa que o fato de λ ser próximo de 1 pode ser acomodado com a velocidade de propagação do gráviton escalar em baixas energias ser da ordem da velocidade da luz, evitando o problema da radiação Cherenkov, desde que $|\lambda - 1| \sim \eta$. O problema da instabilidade e do gráviton escalar ser um *ghost* são simultaneamente evitados se considerarmos a região

$$\lambda > 1, \quad 0 < \eta < 2, \quad (5.19)$$

no espaço de parâmetros.

Dentro das restrições acima, a escala de acoplamento forte na teoria HL não-projetável é bem mais alta que no caso projetável, da ordem de $\sqrt{|\lambda - 1|}\kappa$. Notemos que, neste caso, $|\lambda - 1|$ não sofre uma restrição não tão forte quanto no caso projetável, já que o problema da instabilidade já foi evitado pelas condições (5.19). A ausência de efeitos de referencial privilegiado em observações do sistema solar exige $\eta, |\lambda - 1| < 10^{-7}$ [1], o que

nos dá para a escala do acoplamento forte $\Lambda_{sc} < 10^{15}\text{GeV}$. Portanto, é escala de acoplamento forte pode ser alta o suficiente para não ser detectada pelos experimentos gravitacionais atuais.

Por outro lado, a presença de acoplamento forte, mesmo em altas energias, ainda pode tornar a teoria inviável como um teoria de gravidade quântica renormalizável. Isto pode ser resolvido se a escala em que os efeitos dos operadores de ordem mais alta entram em jogo for menor que a escala do acoplamento forte (assim como no caso projetável, a escala do acoplamento forte foi calculada levando-se em conta apenas os operadores relevantes no IR). Isto pode ser feito ajustando-se as constantes de acoplamento de tais operadores de forma que a menor escala em que operadores de ordem mais alta tornam-se importantes, M , satisfaça $M < \Lambda_{sc}$.

No entanto, se a escala M dos termos de ordem mais alta é a mesma que dita os desvios em relação à relatividade geral, então M também é restrita por baixo, ou efeitos não-relativísticos seriam observados em partículas relativísticas e fótons. A ausência de atraso entre as diferentes frequências de raios γ oriundos de fontes astrofísicas distantes implica $M > 10^{11}\text{GeV}$ [54, 55]. Portanto, as condições sobre M combinadas resultam $10^{15}\text{GeV} > M > 10^{11}\text{GeV}$, o que é uma janela razoavelmente confortável em que a teoria HL não-projetável parece evitar ao mesmo tempo os problemas de acoplamento forte e violações da simetria de Lorentz.

Neste capítulo mostramos como o tratamento perturbativo do gráviton escalar em teoria HL projetável entra em colapso no limite $\lambda \rightarrow 1 + 0$, o que é um dos principais obstáculos que se opõem a esta versão da gravidade

quântica anisotrópica. Descrevemos como a versão não-projetável apresenta algumas vantagens, comparativamente. No entanto, isto não significa o abandono da versão projetável da teoria HL, pois existem na literatura algumas propostas visando resolver este problema. Em [13] é demonstrado que uma classe de soluções estáveis e esfericamente simétricas dependentes de λ tais que o limite $\lambda \rightarrow 1 + 0$ é contínuo, e recupera as soluções usuais da relatividade geral. Um exemplo similar, desta vez cosmológico, é dado em [56]. Isto pode indicar que o gráviton escalar de fato desacopla no limite IR, mas isto só pode ser percebido se levarmos em conta os efeitos não-lineares, o que não acontece em teoria de perturbações, de maneira similar ao mecanismo de Vainstein em gravidade com massa (*massive gravity*) [57]⁶.

No entanto, não seguiremos esta direção no presente trabalho. No próximo capítulo discutiremos uma nova versão da teoria HL projetável em que o grupo de simetria fundamental da teoria é estendido e, como resultado, o gráviton escalar não aparece entre os graus de liberdade físicos da teoria, evitando assim todos os subsequentes problemas que pode gerar.

⁶Quase simultaneamente a este trabalho, Gumrukcuoglu, Mukohyama e Wang mostram em [69], de maneira explícita, que de fato os problemas relacionados ao gráviton escalar são causados pelo colapso da aproximação linear da teoria e que não aparecem se efeitos não-lineares forem levados em conta cuidadosamente quando o limite $\lambda \rightarrow 1$ for tomado.

Capítulo 6

Teoria de Hořava-Lifshitz Covariante

A presença do gráviton escalar no espectro tanto da teoria HL projetável quanto no espectro da versão não-projetável pode ser entendido como o resultado do menor grau de simetria de calibre presente quando comparada com a RG. A Relatividade Geral é uma teoria que possui a propriedade de *covariância geral* porque, em $D + 1$ dimensões, tem $D + 1$ simetrias em cada ponto [58]. Como a teoria HL tem apenas D simetrias por ponto em $D + 1$ dimensões, parece lógica a possibilidade de se resolver o problema do grau de liberdade extra estendendo-se o grupo de simetria da teoria. O objetivo deste capítulo é discutir a realização desta idéia.

Discutiremos a seguir o formalismo original de Hořava e Melby-Thompson da versão covariante geral da teoria HL, que por comodidade chamaremos simplesmente de HL covariante, e as principais propriedades desta versão da

teoria. Em seguida, trataremos de nossa contribuição para a teoria que é o formalismo de acoplamento mínimo que contém o formalismo de Hořava-Melby-Thompson como caso particular. Mostraremos também, que a teoria HL covariante é livre do gráviton escalar. Neste capítulo trataremos na maior parte das vezes o caso mais geral de $D + 1$ dimensões.

6.1 Formalismo de Hořava e Melby-Thompson

Em [7], já fora percebida a presença do gráviton escalar no espectro da teoria HL linearizada sobre o fundo plano. Além disso, um mecanismo para a eliminação deste modo em $\lambda = 1$ foi proposto, a partir de uma simetria extra que aparece neste caso específico. Este foi o germe da teoria HL covariante.

Consideremos novamente a teoria de perturbações escalares sobre o fundo plano (5.1),

$$g_{ij} = (1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2(\partial_i\partial_j - \frac{\delta_{ij}}{D})E, \quad N = 1, \quad N_i = \partial_i B, \quad (6.1)$$

onde usamos a reparametrização do tempo para anular a perturbação em $N(t)$, o que sempre é possível em HL projetável. As transformações de calibre geradas por escalares, que são as únicas que se acoplam em nível linear às perturbações escalares que consideramos, são:

$$\delta t = f(t), \quad \delta x^i = \partial^i \xi(t, x^j). \quad (6.2)$$

A ação quadrática toma a seguinte forma, no sistema de unidades fundamen-

tal:

$$S^{(2)} = \int dt d^D x \left\{ (1 - \lambda D) D \dot{\psi}^2 + (1 - \lambda) (\Delta B)^2 + \frac{D-1}{D} (\Delta \dot{E})^2 + 2 \left(\frac{D-1}{D} \Delta B \Delta \dot{E} + (1 - \lambda D) \dot{\psi} \Delta B \right) + V(\psi, E) \right\} \quad (6.3)$$

onde explicitamos apenas os termos cinéticos. É fácil ver que para $\lambda = 1$, a ação (6.3) apresenta uma simetria adicional, além das transformações (5.3), que é dada por

$$\delta_\alpha N_i = \partial_i \alpha(x^i), \quad \delta_\alpha g_{ij} = 0, \quad (6.4)$$

para α independente do tempo. Como o gerador da simetria não depende do tempo, esta é uma simetria global, que vamos chamar de $U(1)_\Sigma$, onde Σ denota a fatia espacial. É importante notar que as simetrias de calibre são locais, portanto seus geradores dependem também da variável temporal.

A idéia é interpretar esta simetria global como uma simetria residual após uma fixação de calibre. É interessante escrever a variação da ação (6.3) sob (6.4) com λ qualquer e α dependente do tempo:

$$\delta_\alpha S^{(2)} \approx 2 \int dt d^D x \left[\alpha \left((1 - \lambda) \Delta^2 B \right) - \dot{\alpha} \left(\frac{D-1}{D} \Delta^2 E + (1 - \lambda D) \Delta \psi \right) \right], \quad (6.5)$$

onde $\Delta^2 f \equiv \Delta(\Delta f)$. Como o primeiro termo é cancelado em $\lambda = 1$, temos que a ação é invariante para $\dot{\alpha} = 0$. Devemos também notar que o termo proporcional a $\dot{\alpha}$ em (6.5) não é invariante de calibre a não ser que $\lambda = 1$, quando vale:

$$\frac{D-1}{D} (\Delta^2 E - D \Delta \psi) \approx R, \quad (6.6)$$

que é a versão linearizada do escalar de Ricci da métrica perturbada g_{ij} .

Portanto, fica claro que $\lambda = 1$ é um caso especial na teoria HL projetável linearizada. O próximo passo de Hořava e Melby-Thompson consistiu em, para $\lambda = 1$, promover essa simetria $U(1)_\Sigma$ global a simetria local. Para isto, foi introduzido o campo de calibre A , cuja transformação sob (6.4) é postulada como

$$\delta_\alpha A = \dot{\alpha}. \quad (6.7)$$

A operação é finalizada adicionando-se à ação o termo de acoplamento entre o novo campo de calibre A com as perturbações, que se dá por meio do escalar de Ricci linearizado:

$$S_A = 2 \frac{D-1}{D} \int dt d^D x A (\Delta^2 E - D \Delta \psi). \quad (6.8)$$

A ação assim obtida $S = S^{(2)} + S_A$ é invariante sob as transformações (6.4) mesmo para α dependente do tempo, por construção, e portanto estendemos o grupo da simetria de calibre da teoria linearizada de $\text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ para $U(1) \times \text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$. A teoria resultante é livre do modo escalar das perturbações devido a aparição de um novo vínculo relacionado à equação do movimento obtida pela variação de A :

$$\Delta^2 E + D \Delta \psi = 0, \quad (6.9)$$

que junto ao vínculo do momento (5.10) implica que o grau de liberdade escalar não se propaga.

Acabamos de ver que na teoria linearizada, esta operação de estender o grau de simetria da teoria, aproveitando-se de uma simetria residual existente no caso $\lambda = 1$ deixa a teoria com apenas os graus de liberdades tensoriais, o que é conveniente. Como mecanismo exige $\lambda = 1$, o problema da fixação

de λ para satisfazer limites impostos pelas observações também é resolvido ao mesmo tempo. Infelizmente, este procedimento não funciona de maneira direta na teoria HL completa, não-linear. Vamos ao procedimento de Hořava e Melby-Thompson para a teoria não-linear.

Em primeiro lugar, é necessário generalizar as transformações (6.4) para espaços-tempos curvos:

$$\delta_\alpha N_i = N \nabla_i \alpha, \quad \delta_\alpha g_{ij} = 0, \quad (6.10)$$

enquanto a forma covariante da condição de independência do tempo é

$$\dot{\alpha} - N^i \nabla_i \alpha = 0. \quad (6.11)$$

O campo de calibre A deve se transformar sob os $\text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ como:

$$\delta A = \dot{f} A + f \dot{A} + \xi^i \partial_i A, \quad (6.12)$$

e a transformação de calibre sob $U(1)$ torna-se:

$$\delta_\alpha A = \dot{\alpha} - N^i \nabla_i \alpha. \quad (6.13)$$

As dimensões de α e A são

$$[\alpha] = z - 2, \quad [A] = 2z - 2. \quad (6.14)$$

Efetuem os, portanto, as transformações (6.10) na ação da teoria HL não linear,

$$S = \int dt d^D x \sqrt{g} N [K_{ij} G^{ijkl} K_{kl} - V], \quad (6.15)$$

onde

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) - g^{ij} g^{kl}, \quad (6.16)$$

é a métrica de DeWitt. Apenas o termo cinético é relevante para nossa análise, que é independente do potencial escolhido. A variação de (6.15) é:

$$\delta_\alpha S = - \int dt d^D x \sqrt{g} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) (g^{ik} g^{jl} - g^{ij} g^{kl}) (\nabla_k \nabla_l \alpha + \nabla_l \nabla_k \alpha), \quad (6.17)$$

que após algumas manipulações e integrações por partes (maiores detalhes em [58]), é igual a:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha S &= - \int dt d^D x \sqrt{g} \alpha \left(R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} \right) (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) \\ &\quad + \int dt d^D x \sqrt{g} (\dot{\alpha} - N^i \nabla_i \alpha) R. \end{aligned} \quad (6.18)$$

O obstáculo para a implementação direta na teoria não-linear fica claro em (6.18), pois o segundo termo não se anula mesmo quando α satisfaz a condição (6.11), a não ser no caso $D = 2$, em que $R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}$, o tensor de Einstein, se anula identicamente.

A solução proposta em [58] consiste na introdução de um novo campo na teoria, um campo escalar auxiliar ν , que foi chamado de pré-potencial newtoniano, cuja transformação sob (6.10) é

$$\delta_\alpha \nu = \alpha, \quad (6.19)$$

com dimensão

$$[\nu] = z - 2. \quad (6.20)$$

A introdução do campo auxiliar se dá através da adição à ação (6.15) do termo de acoplamento

$$S_\nu = \int dt d^D x \sqrt{g} N \nu \Theta^{ij} (2K_{ij} + \nabla_i \nabla_j \nu), \quad (6.21)$$

onde

$$\Theta^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R + \Omega g^{ij}, \quad (6.22)$$

com Ω uma constante.

A nova ação $S + S_\nu$ gera as mesmas equações de movimento que a teoria HL projetável usual, mas tem a propriedade de apresentar a simetria global $U(1)$ sob as transformações (6.10) para $\lambda = 1$ e para α satisfazendo (6.11). Logo, o procedimento para tornar a simetria global em uma simetria de calibre aplicado à teoria linear pode ser repetido. Adicionamos a ação do termo de acoplamento com o campo de calibre A , cujas propriedades já descrevemos acima:

$$S_A = - \int dt d^D x \sqrt{g} A (R - 2\Omega), \quad (6.23)$$

e a ação obtida:

$$\begin{aligned} S_{ext} &= \int dt d^D x \sqrt{g} N [K_{ij} K^{ij} - K^2 - \mathcal{V}(g_{ij})] \\ &+ \int dt d^D x \sqrt{g} N \nu \Theta^{ij} (2K_{ij} + \nabla_i \nabla_j \nu) \\ &- \int dt d^D x \sqrt{g} A (R - 2\Omega), \end{aligned} \quad (6.24)$$

apresenta simetria de calibre estendida para $U(1) \times \text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$, possuindo, portanto, covariância geral.

A variação de (6.24) em relação a A gera um novo vínculo:

$$R - 2\Omega = 0 \quad (6.25)$$

que faz com que esta versão da teoria HL covariante não tenha grau de liberdade além das polarizações de um tensor transversal sem traço, assim

como acontece na RG. A demonstração desta afirmação está bem detalhada em [58] e a omitimos aqui, porque tais resultados serão demonstrados em maior generalidade na versão da teoria HL covariante obtida através do método de acoplamento mínimo que discutiremos a seguir.

6.2 Formalismo de Acoplamento Mínimo

Uma das questões em aberto desta versão da teoria HL covariante, como afirmado em [58], é que a teoria assim construída está apenas definida no vácuo, isto é, sem a presença de matéria. O acoplamento da gravidade com a matéria, em especial os novos campos A e ν , não decorre da construção da teoria.

Em busca de uma maneira de acoplar a gravidade a outros campos no contexto da teoria HL covariante, em [59] propomos um formalismo alternativo de construção da HL covariante, que se baseia num procedimento de acoplamento mínimo, visando transformar uma teoria cujo grupo de calibre inicial seja $\text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ em uma teoria com simetria estendida $U(1) \times \text{FDiff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$. Ademais, este formalismo de acoplamento mínimo nos fornece um algoritmo capaz de reproduzir a mesma teoria HL covariante em $D + 1$ dimensões apresentada na Seção 6.1, com a vantagem de tornar claro que ela é um caso particular ($\lambda = 1$) da teoria HL covariante.

Preliminarmente, notemos que podemos construir um campo de calibre composto a , a partir de ν , que se transforma sob $U(1)$ (6.10) da mesma

maneira que A [58]:

$$\delta_\alpha a = \dot{\alpha} - N^i \nabla_i \alpha, \quad (6.26)$$

onde

$$a \equiv \dot{\nu} - N^j \nabla_j \nu + \frac{N}{2} \nabla^j \nu \nabla_j \nu. \quad (6.27)$$

Definimos $\hat{N}^i \equiv N^i - N \nabla^i \nu$. Observamos que os seguintes objetos se transformam sob $U(1)$ como:

$$\delta_\alpha \hat{N}^i = 0, \quad \delta_\alpha (A - a) = 0, \quad (6.28)$$

o que mostra que são invariantes.

A partir de tais observações, postulamos o procedimento de acoplamento mínimo seguinte. Seja uma ação $S[N, N_i, g_{ij}, \psi_n]$, invariante sob $\text{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$, onde ψ_n são campos arbitrários, podemos introduzir o acoplamento com A e ν para obter a ação invariante sob $U(1) \times \text{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$, $\hat{S}[N, N_i, g_{ij}, \psi_n]$, adotando a seguinte prescrição:

$$\begin{aligned} \hat{S} &\equiv S[N, \hat{N}^i, g_{ij}, \psi_n] + \\ &+ \int dt d^D x \sqrt{g} Z(\psi_n, g_{ij})(A - a), \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde Z é o mais geral operador escalar (com relação ao $U(1) \times \text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ completo), construído com campos e métrica, com $[Z] = 2$. Isto é necessário para que os termos da lagrangiana tenham a dimensionalidade correta e sejam renormalizáveis.

A ação $\hat{S}$ assim construída é manifestamente invariante sob $U(1)$, pois ambos os termos são construídos a partir de objetos invariantes. Verifiquemos, portanto, o que esse procedimento nos dá quando aplicado à teoria HL

projetável no vácuo (isto é, $\psi_n = 0$):

$$S = \int dt d^D x N \sqrt{g} [K_{ij} G^{ijkl} K_{kl} - V(g_{ij})], \quad (6.30)$$

onde consideramos, neste caso, a métrica de DeWitt generalizada, $G^{ijkl} = \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) - \lambda g^{ij} g^{kl}$, que se reduz à métrica de DeWitt usada no formalismo de Hořava e Melby-Thompson para $\lambda = 1$. Como o potencial $V(g_{ij})$ depende apenas da métrica espacial, que não é envolvida na simetria extra que pretendemos introduzir, temos que a análise independe do potencial escolhido, sendo importante apenas a análise do termo cinético.

A ação obtida aplicando-se (6.29) é:

$$S_{cov} = \int dt d^D x \sqrt{g} N \left[\hat{K}_{ij} G^{ijkl} \hat{K}_{kl} - V(g_{ij}) + c(R - 2\Omega) \frac{A - a}{N} \right], \quad (6.31)$$

onde definimos $\hat{K}_{ij} \equiv K_{ij} + \nabla_i \nu \nabla_j \nu$. A constante c em frente ao último termo é adimensional e pode ser absorvida, sem perda de generalidade, por uma redefinição conveniente de A e ν . Escolhemos, portanto, $c = -1$ para obter o termo de acoplamento igual ao que aparece em (6.24) e simplificar a comparação.

Essencialmente, o nosso procedimento, além de somar à lagrangiana o termo de acoplamento idêntico ao de Hořava e Melby-Thompson, $-A(R - 2\Omega)$, consiste em somar o termo de acoplamento com ν :

$$S_\nu = \int dt d^D x \sqrt{g} N \left[2K_{ij} G^{ijkl} \nabla_k \nabla_l \nu + (\nabla_i \nabla_j \nu) G^{ijkl} (\nabla_k \nabla_l \nu) + (R - 2\Omega) \frac{a}{N} \right], \quad (6.32)$$

que para $\lambda = 1$, podemos mostrar (ver Apêndice A) ser idêntico a

$$\int dt d^D x \sqrt{g} N [\nu \Theta^{ij} (2K_{ij} + \nabla_i \nabla_j \nu)], \quad (6.33)$$

com Θ^{ij} definido em (6.22), que é o termo de acoplamento com ν que aparece na HL covariante de Hořava e Melby-Thompson.

O uso do nosso formalismo de acoplamento mínimo tem a vantagem de tornar claro que não é necessário fixar $\lambda = 1$ para a extensão da simetria de calibre, a partir da introdução do campo auxiliar ν . Portanto, o problema da falta de um mecanismo para fixar o valor correto de λ , ao menos no IR, ainda persiste. Veremos a seguir que, por outro lado, o grau de liberdade extra, o gráviton escalar, não aparece na teoria HL covariante, assim como todos os problemas dele decorrentes.

6.3 Teoria Linearizada e Graus de Liberdade

Embora não seja um argumento definitivo para a contagem dos graus de liberdade físicos da teoria, a teoria linearizada serve para dar uma noção mais intuitiva da propagação dos campos da teoria HL covariante. Mostraremos aqui que o gráviton escalar, que encontramos nas análise perturbativa feita no Capítulo 5, não aparece na aproximação linear da teoria HL covariante.

Para fins de simplicidade, usaremos um potencial que satisfaz a condição de balanço detalhado:

$$V = \frac{1}{4} \mathcal{G}_{ijkl} \frac{\delta W}{\delta g_{ij}} \frac{\delta W}{\delta g_{kl}} \quad (6.34)$$

onde $\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{1}{2} (g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}) + \frac{\lambda}{1-\lambda D} g_{ij}g_{kl}$ é o inverso da métrica de DeWitt generalizada e

$$W = \int d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda_W). \quad (6.35)$$

A solução do estado fundamental (vácuo) é dada por:

$$g_{ij} = \hat{g}_{ij}, \quad N = 1, \quad N_i = 0, \quad \nu = 0, \quad A = 0, \quad (6.36)$$

onde $\hat{g}_{ij}$ é uma métrica espacial estática e maximamente simétrica, que satisfaz a equação do movimento da teoria W :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda_W g^{ij} = 0, \quad (6.37)$$

com

$$\Omega = \frac{D}{D-2}\Lambda_W, \quad (6.38)$$

de maneira que $\hat{R}_{ij} = \frac{2\Omega}{D}$ e $\hat{R} = 2\Omega$. É importante notar que o espaço-tempo plano é um caso particular das soluções que consideramos, correspondente a $\Lambda_W = \Omega = 0$, e é solução da teoria HL covariante para qualquer potencial que não contenha um termo de constante cosmológica.

Os efeitos da simetria de calibre estendida da HL covariante não se observam nas perturbações vetoriais e tensoriais, pois pode-se verificar que os campos A e ν acoplam-se apenas com as perturbações escalares em ordem linear. As perturbações vetoriais e tensoriais têm comportamento idêntico ao discutido no caso da teoria HL projetável usual.

Analisemos, portanto, as perturbações escalares mais gerais:

$$\delta g_{ij} = -2\psi \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j E, \quad \delta N_i = \hat{\nabla}_i B, \quad (6.39)$$

onde $\hat{\nabla}_i$ é o operador de derivação covariante com respeito à métrica $\hat{g}_{ij}$ e E satisfaz $\hat{\Delta}E = 0$. A escolha do calibre quase-longitudinal anula E e podemos escolher $A = 0$ usando a simetria $U(1)$. Neste calibre, a equação de movimento relativa a ν é:

$$\left(\frac{2\Omega}{D}\hat{\Delta} + (1-\lambda)\hat{\Delta}^2 \right) (\nu - B) + D(\lambda-1)\hat{\Delta}\dot{\psi} - 2\Omega\dot{\psi} = 0, \quad (6.40)$$

e o vínculo do momento se escreve

$$\left(\frac{2\Omega}{D}\hat{\Delta} + (1 - \lambda)\hat{\Delta}^2\right)(\nu - B) + (\lambda D - 1)\hat{\Delta}\dot{\psi} + 2\Omega\hat{\Delta}\nu = 0. \quad (6.41)$$

Subtraindo-se (6.41) de (6.40), obtemos:

$$-(D - 1)\hat{\Delta}\dot{\psi} - 2\Omega\dot{\psi} - 2\Omega\hat{\Delta}\nu = 0. \quad (6.42)$$

Aplicando-se o vínculo (6.25), que em ordem linear se escreve:

$$(D - 1)\hat{\Delta}\psi + 2\Omega\psi = 0, \quad (6.43)$$

obtemos

$$\hat{\Delta}\nu = 0. \quad (6.44)$$

As equações (6.44) e (6.43) mostram que ν e ψ não se propagam e, junto a (6.40), implicam

$$\hat{\Delta} \left[\frac{2\Omega}{D}B + (1 - \lambda)\hat{\Delta}B \right] = 0 \quad (6.45)$$

o que significa que B tampouco se propaga.

Isto mostra que não há grau de liberdade físico escalar na teoria linear, como acontece na teoria HL projetável usual, o que justifica o interesse na teoria HL covariante.

Uma contagem mais confiável dos graus de liberdade físicos da teoria exige o uso do formalismo hamiltoniano, que foi feita em [60], demonstrando que a teoria HL covariante, para λ livre, tem o mesmo número de graus de liberdade que a relatividade geral em $D + 1$ dimensões, $\frac{1}{2}(D + 1)(D - 2)$. O formalismo e a notação utilizados aqui podem ser vistos em [61].

Seja a ação:

$$S = \int dt d^D x \sqrt{g} N \left[\hat{K}_{ij} \mathcal{G}^{ijkl} \hat{K}_{kl} - V(g_{ij}) \right] + \int dt d^D x \sqrt{g} Z(R) (A - a) \quad (6.46)$$

onde foi considerada a hipótese que a função Z depende da métrica espacial através apenas do escalar de curvatura. Os momentos conjugados são:

$$\Pi^{ij} = \sqrt{g} G^{ijkl} \hat{K}_{kl}, \quad p_N \approx 0, \quad p^i \approx 0, \quad p_A \approx 0, \quad p_\nu = -\sqrt{g} Z, \quad (6.47)$$

onde o símbolo $\approx$ indica igualdade na superfície dos vínculos. Temos os $D+3$ vínculos primários:

$$p_N \approx 0, \quad p^i \approx 0, \quad \Phi_1 : p_A \approx 0, \quad \Phi_2 : p_\nu + \sqrt{g} Z \approx 0. \quad (6.48)$$

A Hamiltoniana é definida segundo o procedimento padrão [61, 62]:

$$H = \int d^D x \left(N \mathcal{H}_0 + N^i \mathcal{H}_i + v^n \Phi_n + v_N p_N + v_i p^i \right) - \int d^D x \sqrt{g} Z(R) \left(A = N^i \nabla_i \nu + \frac{N}{2} \nabla^i \nabla_i \nu \right), \quad (6.49)$$

onde v_N , v_i , v_n , $n = 1, 2$, são multiplicadores de Lagrange relacionados com os respectivos vínculos e:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \Pi^{ij} \mathcal{G}_{ijkl} \Pi^{kl} - \sqrt{g} V(g_{ij}) - 2\nu \nabla_i \nabla_j \Pi^{ij}, \\ \mathcal{H}_i &= -2g_{il} \nabla_k \Pi^{kl}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

A preservação sob evolução temporal dos vínculos primários $p_N \approx 0$, $p_i \approx 0$ e $\Phi_1 \approx 0$, implica os vínculos secundários:

$$\begin{aligned} \{\Phi_1, H\} &= -\sqrt{g} Z \equiv -\Phi_1^I \approx 0, \\ \{p_N, H\} &= - \int d^D x \left(\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \Phi_1^I \nabla^i \nabla_i \nu \right) \approx - \int d^D x \mathcal{H}_0 \approx 0, \\ \{p_i, H\} &= -\mathcal{H}_i - \Phi_1^I \approx -\mathcal{H}_i \approx 0. \end{aligned} \quad (6.51)$$

A preservação de Φ_2 exige um cálculo mais trabalhoso. O resultado obtido em [60] é

$$\{\Phi_2, H\} \approx -2N \frac{dZ}{dR} \left(R^{ij} \mathcal{G}_{ijkl} \Pi^{kl} - \frac{1-\lambda}{\lambda D-1} \nabla^k \nabla_k \Pi \right) = 2N \frac{dZ}{dR} \Phi_2^{II}, \quad (6.52)$$

onde

$$\Phi_2^{II} = -R^{ij} \Pi_{ji} + \frac{\lambda}{D\lambda-1} R \Pi + \frac{1-\lambda}{D\lambda-1} \nabla^k \nabla_k \Pi \equiv M_{ij} (g_{mn}) \Pi^{ji}, \quad (6.53)$$

onde denotamos $\Pi = g_{ij} \Pi^{ij}$ e M_{ij} é um operador diferencial que age sobre Π^{ij} e é reduzido a um operador multiplicativo no caso $\lambda = 1$. Os vínculos secundários são, portanto, $T \equiv \int d^D x \mathcal{H}_0 \approx 0$, que é um vínculo global e, $\mathcal{H}_i \approx 0$, $\Phi_1^{II} \approx 0$ e $\Phi_2^{II} \approx 0$ são vínculos locais.

A hamiltoniana total tem a forma:

$$H_T = \int d^D x \left(N \mathcal{H}_0 + N^i \mathcal{H}_i + v^n \Phi_n + v_N p_N + v_i p^i + v_{II}^1 \Phi_1^{II} + v_{II}^2 \Phi_2^{II} \right), \quad (6.54)$$

onde introduzimos os multiplicadores de Lagrange v_{II}^1 e v_{II}^2 .

O próximo passo é verificar a conservação dos vínculos secundários sob evolução temporal. O vínculo $\mathcal{H}_i$ claramente é conservado se observarmos que é o gerador dos difeomorfismos espaciais, pois a hamiltoniana é invariante sob tais difeomorfismos. De mesmo com T , que é o gerador das reparametrizações do tempo. Quanto aos outros vínculos locais, temos:

$$\{\Phi_1^{II}, H_T\} \approx \int d^D x v_{II}^2 \{\Phi_1^{II}, \Phi_2^{II}\} = 0, \quad (6.55)$$

$$\{\Phi_2^{II}, H_T\} \approx N \{\Phi_2^{II}, T\} - \int d^D x v_{II}^1 \{\Phi_1^{II}, \Phi_2^{II}\}, \quad (6.56)$$

com

$$\begin{aligned} \{\Phi_1^{II}, \Phi_2^{II}\} &\approx M_{ij} \left(\sqrt{g} \frac{dZ}{dR} \frac{dR}{dg_{ij}} \right) \neq 0, \\ \{\Phi_2^{II}, T\} &\neq 0, \end{aligned} \quad (6.57)$$

que implicam $v_{II}^2 = 0$ e que v_{II}^1 pode ser escrita em função das variáveis canônicas (mais detalhes em [60]), e o procedimento chega ao fim. As equações (6.57) implicam também que Φ_1^{II} e Φ_2^{II} são vínculos de segunda espécie. Os demais vínculos locais são de primeira espécie. Com todos os vínculos determinados, podemos aplicar a conhecida fórmula para o número de graus de liberdade[62]:

$$N = \frac{1}{2}(P - 2C_1 - C_2), \quad (6.58)$$

onde N é o número de graus de liberdade físicos da teoria em questão, P é a dimensão do espaço de fase, C_1 é o número de vínculos de primeira espécie e C_2 é número de vínculos de segunda espécie. Como estamos interessados nos graus de liberdade locais da teoria HL covariante, devemos considerar apenas vínculos locais e variáveis canônicas locais. Os vínculos locais de primeira espécie são p_i , $\mathcal{H}_i$, p_ν e p_A , logo $C_1 = 2D + 2$. Sabemos que $C_2 = 2$ e $P = D^2 + 3D + 4$. O resultado obtido é $N = \frac{1}{2}(D + 1)(D - 2)$, como já enunciado.

Portanto, demonstramos que a teoria HL covariante tem o número de graus de liberdade físicos da Relatividade Geral em $D + 1$ dimensões, o que parece ser necessário para se obter uma teoria compatível com o que conhecemos da gravidade em baixas energias. Ademais, isto demonstra que a teoria HL covariante é completamente livre dos problemas de acoplamento forte e instabilidade presentes nas outras versões da teoria HL, causados pela presença do gráviton escalar em tais teorias.

6.4 Acoplamento com a matéria

O formalismo de acoplamento mínimo para a teoria HL covariante oferece uma maneira direta de construir lagrangianas que podem se acoplar à gravidade. Como exemplo, podemos construir a ação de um escalar acoplado à teoria, aplicando-se o método do acoplamento mínimo à ação (4.23), do escalar com simetria de Lifshitz em $3+1$ dimensões com $z = 3$. O resultado, obtido em [59], é

$$\begin{aligned} S[\Phi] = & \int dt d^3x \sqrt{g} N \left[\frac{1}{2N^2} \left(\dot{\Phi} - \hat{N}^i \partial_i \Phi \right)^2 - F \right] \\ & + \int dt d^3x \sqrt{g} (c_1(\Phi) \Delta \Phi + c_2(\Phi) \nabla^i \Phi \nabla_i \Phi) (A - a), \end{aligned} \quad (6.59)$$

onde c_1 e c_2 são funções arbitrárias do campo Φ . Definindo-se o operador diferencial:

$$\hat{D}_t = \frac{1}{N} \left(\partial_t - \hat{N}^i \nabla_i \right), \quad (6.60)$$

a equação do movimento do campo escalar toma a forma:

$$-\hat{D}_t^2 \Phi - \hat{K} \hat{D}_t \Phi + c_\Phi^2 \Delta \Phi + I(\Phi, A - a) + \dots = 0, \quad (6.61)$$

onde omitimos os termos que contêm mais de duas derivadas espaciais e o termo potencial $V(\Phi)$. O termo de acoplamento $I(\Phi, A - a)$ se escreve:

$$\begin{aligned} I = & \left[\Delta \Phi (2c'_1 - 2c_2) + \nabla_i \Phi \nabla^i \Phi (c''_1 - c'_2) \right] (A - a) \\ & + \nabla_i \Phi (2c'_1 - 2c_2) \nabla^i (A - a) + c_1 \Delta (A - a), \end{aligned} \quad (6.62)$$

onde o símbolo $'$ significa derivação com respeito a Φ . Na ausência de campo gravitacional, isto é, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $N = 1$, $N^i = A = \nu = 0$, (6.61) reduz-se a uma equação de onda usual, a menos dos termos de ordem superior.

Devido a dependência de duas funções arbitrárias, $c_1(\Phi)$ e $c_2(\Phi)$, a teoria HL covariante acoplada ao campo escalar depende de uma infinidade de constantes de acoplamento arbitrárias. Isto significa que a possibilidade de se fazer previsões físicas é bastante limitada em tal teoria. Para se obter uma teoria mais satisfatória, talvez seja necessária a imposição de novas restrições ao acoplamento da matéria, de maneira a reduzir tamanha arbitrariedade no termo de acoplamento. Por exemplo, se considerarmos que o campo Φ interage com a gravidade apenas linearmente, o que é uma boa aproximação para o limite em que Φ é fraco o suficiente para ser considerado uma perturbação, o formalismo introduz apenas duas novas constantes de acoplamento, o que é bem mais satisfatório do ponto de vista preditivo, especialmente no regime IR.

A questão do acoplamento da teoria HL covariante com a matéria ainda é, no entanto, uma questão em aberto.

Capítulo 7

Considerações Finais

Esta tese teve como objetivo principal a análise e discussão da chamada teoria HL covariante, primeiramente proposta por Petr Hořava e Charles Melby-Thompson, e reformulada pelo autor deste trabalho.

Para situarmos o leitor no interesse de tal teoria, tivemos de voltar às origens das teorias do tipo HL, que são as teorias gravitacionais construídas com base na simetria de Lifshitz, que introduz uma anisotropia entre o espaço e o tempo, propostas originamente por Petr Hořava e que tem sido alvo de grande interesse entre os teóricos de gravitação e altas energias. Optamos por concentrarmo-nos principalmente na versão chamada projetável da teoria HL, por ser a versão que se relaciona mais diretamente com a teoria HL covariante¹.

Vimos que a grande vantagem imediatamente introduzida pelas teorias de

¹Recentemente, a versão não-projetável da teoria HL com simetria estendida foi construída e verificou-se que este caso também é livre do gráviton escalar [70].

gravidade anisotrópica, como também têm sido chamadas, é a possibilidade de construir teorias renormalizáveis (ao menos pelo argumento de contagem de potências) no UV que podem ter comportamento aproximadamente relativístico em baixas energias. Outras vantagens menos evidentes que discutimos envolvem a possibilidade de se construir modelos cosmológicos viáveis sem a necessidade de inflação, fornecendo soluções alternativas aos célebres problemas da cosmologia padrão.

Apesar de possuir vantagens atraentes, as teorias de gravidade anisotrópica apresentam um número semelhante de dificuldades. A mais evidente delas é a dificuldade de acoplar a teoria consistentemente com campos de matéria. O acoplamento da gravidade HL com outros campos imediatamente arruína o comportamento relativístico em baixas energias, a não ser que algumas constantes de acoplamento sejam finamente ajustadas, o que não é uma situação satisfatória.

Outro problema que vem à tona é o valor da constante de acoplamento λ , cujo valor observacional deve ser próximo a 1 no limite IR, mas é totalmente arbitrário na aproximação clássica da teoria. Especula-se que o fluxo do grupo de renormalização possa ser um mecanismo capaz de levar λ a um valor compatível com as observações em baixas energias, mas isto ainda é uma questão absolutamente em aberto. A própria renormalizabilidade da teoria HL, além do argumento de contagem de potenciais, ainda não foi demonstrada².

²Um argumento em favor da renormalizabilidade foi apresentado em [64], apenas para teorias que respeitam a condição do balanço detalhado, que faz com que propriedades quânticas da teoria em D+1 estejam diretamente relacionadas a propriedades da teoria

O principal problema, entretanto, é a existência e as propriedades do gráviton escalar, porque seria uma ameaça à motivação fundamental da proposta de gravidade anisotrópica, que é a renormalizabilidade da teoria. O acoplamento forte de tal modo escalar causava o colapso do método perturbativo aplicado à teoria. A viabilidade da teoria de perturbações é uma hipótese necessária para a validade do argumento de contagem de potências.

Neste contexto, a introdução da teoria HL covariante fica justificada, pois inclusão de uma simetria $U(1)$ extra à teoria HL projetável - de modo a torná-la *covariante geral* - faz com que o modo escalar da teoria torne-se um artefato de calibre, restando como graus de liberdade físicos apenas aqueles de um tensor sem traço e transverso, assim como acontece na Relatividade Geral. Além de fazer o número de graus de liberdade coincidir, as patologias associadas ao grau de liberdade extra automaticamente desaparecem junto com ele. O preço a ser pago é uma teoria mais complicada, com a introdução de novos campos de calibre, A e ν , que devem também ser entendidos como campos gravitacionais.

A introdução da simetria $U(1)$ e dos novos campos gravitacionais levantou a questão adicional de como esses novos campos acoplam-se com a matéria, assim como a construção de modelos de matéria respeitando as novas simetrias. O formalismo de acoplamento mínimo, que é o assunto central desta tese, ajuda a esclarecer parcialmente tais questões, pois fornece um algoritmo para a construção de lagrangianas que possuem a simetria de calibre $U(1) \times \text{FDiff}(F, M)$.

Embora a teoria HL covariante seja livre das dificuldades relacionadas ao gráviton escalar, as outras questões em abertos supracitadas persistem, como o valor de λ e a dificuldade de se acoplar a teoria com outros campos sem arruinar o limite relativístico ou introduzir ajustes finos. Ademais, a teoria HL covariante suscita novas questões, como as propriedades de suas soluções esfericamente simétricas, que se dividem em três classes como foi mostrado em [63], e as propriedades das soluções e perturbações cosmológicas (algum progresso foi feito em [65]).

Uma possível extensão direta deste trabalho consiste no estudo de perturbações de soluções esfericamente simétricas encontradas em [63], com a introdução das lagrangianas de matéria construídas pelo nosso formalismo. Um estudo deste tipo está em andamento, mas no presente momento ainda não chegamos a resultados conclusivos sobre a estabilidade ou não de tais soluções.

Além das questões supracitadas, que em geral visam investigar a teoria HL como uma candidata a ser uma teoria quântica da gravidade viável para descrever o Universo em que vivemos, também merecem investigação outras possíveis aplicações dos modelos de gravidade anisotrópica, não relacionados à fenomenologia. É o caso da correspondência holográfica com teorias de calibre, que tem sido estudadas para uma grande variedade de modelos gravitacionais, em diferentes números de dimensões, mas que ainda é incipiente no contexto da gravidade anisotrópica (ver, por exemplo, [66, 67, 68] para alguns resultados de holografia em teoria HL).

Apêndice A

HL covariante: Duas abordagens equivalentes

A equivalência entre a abordagem de Hořava e Melby-Thompson e o formalismo de acoplamento mínimo da teoria HL covariante para $\lambda = 1$ depende da demonstração da identidade entre as expressões (6.32) e (6.33), que faremos neste apêndice.

Para a demonstração, precisaremos usar duas identidades tensoriais [58]:

$$\partial_t(-\sqrt{g}R) = -\sqrt{g}E^{ij}\dot{g}_{ij} + \sqrt{g}G^{ijkl}\nabla_i\nabla_j\dot{g}_{kl}, \quad (\text{A.1})$$

$$G^{ijkl}\nabla_k\nabla_l\nabla_iN_j = \nabla_j(R^{jk}N_k), \quad (\text{A.2})$$

onde $G^{ijkl} = \frac{1}{2}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) - g^{ij}g^{kl}$ é a métrica de DeWitt e $E^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R$ é o tensor de Einstein.

Separemos a expressão (6.32) de S_ν em três partes, para não trabalharmos

com expressões demasiado longas:

$$S_\nu = S_1 + S_2 + S_3, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$S_1 = \int dt d^D x \sqrt{g} N (2K_{ij} G^{ijkl} \nabla_k \nabla_l \nu), \quad (\text{A.4})$$

$$S_2 = \int dt d^D x \sqrt{g} N (\nabla_i \nabla_j G^{ijkl} \nabla_k \nabla_l \nu), \quad (\text{A.5})$$

$$S_3 = \int dt d^D x \sqrt{g} \left[(R - 2\Omega)(\dot{\nu} - N^i \nabla_i \nu + \frac{N}{2} \nabla_k \nu \nabla^k \nu) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Após duas integrações por partes, S_1 se escreve:

$$S_1 = \int dt d^D x \sqrt{g} \nu (\nabla_k \nabla_l \dot{g}_{ij} G^{ijkl} - 2G^{ijkl} \nabla_k \nabla_l \nabla_i N_j). \quad (\text{A.7})$$

Utilizando-se as identidades (A.1) e (A.2) obtemos:

$$S_1 = \int dt d^D x \sqrt{g} \nu \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_t (\sqrt{g} R) + E^{ij} \dot{g}_{ij} - 2\nabla_j (R^{jk} N_k) \right]. \quad (\text{A.8})$$

Utilizando-se a conservação do tensor de Einstein (identidade de Bianchi), $\nabla_i E^{ij} = \nabla_i (R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R) = 0$, tem-se

$$S_1 = \int dt d^D x \sqrt{g} \nu \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_t (\sqrt{g} R) + E^{ij} \dot{g}_{ij} - g^{jk} (\nabla_j R) N_k - 2R^{jk} \nabla_j N_k \right]. \quad (\text{A.9})$$

Integrando por partes do primeiro e terceiro termos e rearranjando os termos, chegamos finalmente a:

$$S_1 = \int dt d^D x \sqrt{g} \left[-(\dot{\nu} - N^k \nabla_k \nu) R + \nu E^{ij} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Vamos ao segundo termo, S_2 . Após duas integrações por partes ficamos com

$$S_2 = \int dt d^D x \sqrt{g} N \nu G^{ijkl} \nabla_k \nabla_l \nabla_i \nabla_j \nu, \quad (\text{A.11})$$

onde a identidade (A.2) pode ser usada, com $N_i = \nabla_i \nu$, o que resulta:

$$S_2 = \int dt d^D x N \nu [(\nabla_j R^{jk}) \nabla_k \nu + R^{jk} \nabla_j \nabla_k \nu] \quad (\text{A.12})$$

que, usando-se $\nabla_i E^{ij} = 0$, e integrando por partes o primeiro termo e reorganizando nos dá:

$$S_2 = \int dt d^D x \sqrt{g} N \left[-\frac{R}{2} \nabla^k \nu \nabla_k \nu + \nu E^{jk} \nabla_j \nabla_k \nu \right]. \quad (\text{A.13})$$

O último termo, S_3 , se escreve:

$$S_3 = \int dt d^D x \sqrt{g} a R - 2\Omega \int dt d^D x \sqrt{g} \left(\dot{\nu} - N^i \nabla_i \nu + \frac{N}{2} \nabla_k \nu \nabla^k \nu \right), \quad (\text{A.14})$$

que após uma integração por partes no segundo termo se escreve:

$$\begin{aligned} S_3 = & \int dt d^D x \sqrt{g} R \left(\dot{\nu} - N^i \nabla_i \nu + \frac{N}{2} \nabla_k \nu \nabla^k \nu \right) \\ & + \Omega \int dt d^D x \sqrt{g} \nu [g^{ij} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) + N \nu \nabla_k \nabla^k \nu]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A partir de (A.10), (A.13) e (A.15) obtemos finalmente:

$$S_\nu = \int dt d^D x \sqrt{g} N [\nu (E^{ij} + \Omega g^{ij}) (2K_{ij} + \nabla_i \nabla_j \nu)], \quad (\text{A.16})$$

que, lembrando que $E^{ij} + \Omega g^{ij} = \Theta^{ij}$, é a expressão (6.33), o que demonstra a equivalência entre ambas as abordagens da teoria HL covariante no caso $\lambda = 1$.

Apêndice B

Interpretação Geométrica da Simetria $U(1)$

Mostraremos neste apêndice como o campo de calibre A e a transformação $U(1)$ introduzida para a construção da teoria HL covariante têm um significado geométrico, ao menos se considerarmos a teoria no vácuo [58, 63].

Consideremos a decomposição ADM da métrica do espaço-tempo:

$$ds^2 = -c^2 \left(\mathcal{N}(t, x)^2 - \frac{N^i N_i}{c^2} \right) dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathcal{N}$ é a função lapso da RG, que depende de todas as coordenadas espaço-temporais. Suponhamos que esta função lapso possa ser separada numa componente dependente apenas do tempo, $N(t)$, e uma parte dependente de todas as coordenadas, $A(x, t)$, através da substituição:

$$\mathcal{N}(x, t) \rightarrow N(t) - \frac{A(x, t)}{c^2}. \quad (\text{B.2})$$

O elemento de linha (B.1) pode então ser escrito como

$$ds^2 = -c^2 \left(N^2 - \frac{N^i N_i + 2AN}{c^2} \right) dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.3})$$

onde o termo de ordem superior A^2/c^4 foi desprezado, pois interessar-nos-emos pelo limite não-relativístico $c \rightarrow \infty$.

Se tomarmos apenas os termos dominantes e sub-dominantes numa expansão em $1/c^2$, o elemento de linha (B.3) é invariante sob uma transformação infinitesimal do tempo, dependente das coordenadas temporal e espaciais, com a seguinte forma:

$$t' = t + \frac{\epsilon(x, t)}{c^2}, \quad x' = x, \quad (\text{B.4})$$

se esta transformação for acompanhada pela transformação $U(1)$ infinitesimal:

$$\begin{aligned} N'_i(x, t) &= N_i(x, t) + N^2 \nabla_i \epsilon, \\ A'(x, t) &= A(x, t) + \dot{\epsilon} N + \epsilon \dot{N} - N N^i \nabla_i \epsilon, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

com N e g_{ij} inalterados. A substituição

$$\epsilon(x, t) = \frac{\alpha(x, t)}{N}, \quad (\text{B.6})$$

torna claro que trata-se da mesma simetria $U(1)$ que aparece na HL covariante.

De fato, se considerarmos a métrica covariante na coordenada t'

$$ds^2 = -c^2 \left(N^2 - \frac{N'^i N'_i + 2A'N}{c^2} \right) dt'^2 + 2N'_i dx^i dt' + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.7})$$

onde todos os campos dependem de t' , as transformações $U(1)$ (B.5) junto a

$$\begin{aligned} N(t') &= N \left(t + \frac{\epsilon(x, t)}{c^2} \right) \approx N(t) + \frac{\dot{N} \epsilon(x, t)}{c^2} \\ dt' &= \left(1 + \frac{\dot{\epsilon}}{c^2} \right) dt + \frac{\nabla_i \epsilon dx^i}{c^2} + O \left(\frac{1}{c^4} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

mostram que as expressões (B.7) e (B.3) são idênticas a menos de correções de ordem $O(1/c^4)$.

A simetria $U(1)$ introduzida na teoria HL covariante pode então ser interpretada como o termo de ordem $1/c^2$ na expansão dos difeomorfismo espaço-temporais em $1/c$. Sua origem, é portanto similar ao dos FDiffs, que são os termos dominantes da mesma expansão (ver [7, 58]).

No caso da teoria acoplada à matéria mostrada na Seção 6.4, não é óbvio se esta interpretação geométrica permanece válida ou não, e é uma questão que merece ser sujeita à investigação.

Referências Bibliográficas

- [1] C. M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment, *Living Rev. Relativity*, **9**, (2006), 3. [Artigo online]: citado em 10/12/2010, <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>.
- [2] S.W. Hawking e G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press (1973).
- [3] R. M. Wald. *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [4] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Vol. 1*, Cambridge University Press (1995).
- [5] C. Rovelli. Notes for a brief history of quantum gravity, arXiv:gr-qc/0006061.
- [6] J. Polchinski. *String Theory* vols. 1 and 2, Cambridge University Press (1998).
- [7] P. Hořava. Membranes at quantum criticality, JHEP **03**:020 (2009).
- [8] P. Hořava. Quantum gravity at a Lifshitz point, *Phys. Rev.* **D79**:084008 (2009).

- [9] M. Visser. Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator, *Phys. Rev.* **D80**:025011 (2009).
- [10] E. Ardonne, P. Fendley e E. Fradkin. Topological order and conformal quantum critical points, *Annals Phys.* **310** 493-551 (2004).
- [11] B. Chen, Q. G. Huang. Field Theory at a Lifshitz Point, *Phys. Lett.* **B683**:108-113 (2010).
- [12] E. M. Lifshitz. On the theory of second-order phase transitions, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **11** 255-269 (1941).
- [13] S. Mukohyama. Hořava-Lifshitz cosmology: a review, *Class. Quant. Grav.* **27**:223101 (2010).
- [14] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, A. S. Sakharov, E. K. G. Sarkisyan. Robust limits on Lorentz violation from gamma-ray bursts, *Astropart. Phys.* **25** 402-411 (2006).
- [15] V. A. Kostelecky e N. Russel. Data Tables for Lorentz and CPT Violation, arXiv:0801.0287.
- [16] T. Nishioka. Horava-Lifshitz Holography, *Class. Quant. Grav.* **26**:242001 (2009).
- [17] C.W. Misner, K.S. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- [18] T. Sotiriou, M. Visser and S. Weinfurtner. Phenomenologically Viable Lorentz-Violating Quantum Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **102**:251601 (2009); Quantum gravity without Lorentz invariance, *JHEP* **10**:033

- (2009); Projectable Hořava-Lifshitz gravity in a nutshell, *J. Phys.: Conf. Ser.* **222**:012054 (2010).
- [19] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.
- [20] I. Kimpton, A. Padilla. Lessons from the decoupling limit of Hořava gravity, *JHEP* **07**:014 (2010).
- [21] D. Blas, O. Pujolas, S. Sibiryakov. Consistent Extension of Hořava Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **104**:181302 (2010).
- [22] D. Blas, O. Pujolas, S. Sibiryakov. Models of non-relativistic quantum gravity: the good, the bad and the healthy, *JHEP* **04**:018 (2011).
- [23] A. Garcia, F.W. Hehl, C. Heinicke, A. Macias. The Cotton tensor in Riemannian spacetimes , *Class. Quant. Grav.* **21**:1099-1118 (2004).
- [24] C. Bogdanos, E. N. Saridakis. Perturbative instabilities in Hořava gravity, *Class. Quant. Grav.* **27**:075005 (2010).
- [25] M. Visser. Status of Hořava gravity: a personal perspective, *J. Phys. Conf. Ser.* **314**:012002 (2011).
- [26] C. Charmousis, G. Niz, A. Padilla, P. M. Saffin. Strong coupling in Hořava gravity, *JHEP* **08**:070 (2009).
- [27] G. Calcagni. Detailed balance in Hořava-Lifshitz gravity, *Phys. Rev.* **D81**:044006 (2010).
- [28] S. Dutta, E. Saridakis. Observational constraints on Hořava-Lifshitz cosmology, *JCAP* **01**:013 (2010).

- [29] T. Jacobson. Extended Hořava gravity and Einstein-aether theory *Phys. Rev. D* **81**:101502 (2010); Erratum-ibid. **82**:129901 (2010).
- [30] J. Tang, B. Chen. Static spherically symmetric solutions to modified Hořava-Lifshitz gravity with a projectability condition, *Phys. Rev. D* **81**:043515 (2010).
- [31] E. Kiritsis, G. Kofinas. Hořava-Lifshitz cosmology, *Nucl. Phys. B* **821**:467-480 (2009).
- [32] X. Gao, Y. Wang, R. Brandenberger, A. Riotto. Cosmological perturbations in Hořava-Lifshitz gravity, *Phys. Rev. D* **81**:0803508 (2010).
- [33] S. Mukohyama. Dark matter as integration constant in Hořava-Lifshitz gravity, *Phys. Rev. D* **80**:064005 (2009).
- [34] S. M. Carroll, E. A. Lim. Lorentz-violating vector fields slow the universe down, *Phys. Rev. D* **70**:123525 (2004).
- [35] A. Papazoglou, T. Sotiriou. Strong coupling in extended Hořava-Lifshitz gravity *Phys. Lett. B* **685**:197-200 (2010).
- [36] X. Gao, Y. Wang, W. Xue, R. Brandenberger. Fluctuations in a Hořava-Lifshitz bouncing cosmology, *JCAP* **02**:020 (2010).
- [37] R. Brandenberger. Matter bounce in Hořava-Lifshitz cosmology, *Phys. Rev. D* **80**:043516 (2009).
- [38] K. Maeda, Y. Misonoh, T. Kobayashi. Oscillating universe in Hořava-Lifshitz gravity, *Phys. Rev. D* **82**:064024 (2010).

- [39] S. Mukohyama. Scale-invariant cosmological perturbations from Hořava-Lifshitz gravity without inflation, *JCAP* **06**:001 (2009).
- [40] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, USA (2005).
- [41] S. Weinberg. *Cosmology*, Oxford University Press, USA (2008).
- [42] S. Dodelson. *Modern Cosmology*, Academic Press (2003).
- [43] J. M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations, *Phys. Rev.* **D22**:1882-1905 (1980).
- [44] A. Wang, R. Maartens. Cosmological perturbations in Horava-Lifshitz theory without detailed balance, *Phys. Rev.* **D81**:024009 (2010).
- [45] T. P. Sotiriou. Hořava-Lifshitz gravity: a status report, *J. Phys. Conf. Ser.* **283**:012034 (2011).
- [46] K. Izumi, S. Mukohyama. Stellar center is dynamical in Hořava-Lifshitz gravity, *Phys. Rev.* **D81**:044008 (2010).
- [47] K. Koyama, F. Arroja. Pathological behaviour of the scalar graviton in Hořava-Lifshitz gravity, *JHEP* **03**:061 (2010).
- [48] J.W. Elliott, G. D. Moore, H. Stoica. Constraining the New Aether: gravitational Cherenkov radiation, *JHEP*, **08**:066 (2005).
- [49] U. Huang, A. Wang, Q. Wu. Stability of the de Sitter Spacetime in Hořava-Lifshitz Theory, *Mod. Phys. Lett. A* **25**:2267 (2010).
- [50] A. Wang, Q.Wu. Cosmology in nonrelativistic general covariant theory of gravity, *Phys. Rev.* **D83**:044025 (2010).

- [51] D. Blas, O. Pujolas, S. Sibiryakov. On the extra mode and inconsistency of Hořava gravity, *JHEP* **10**:029 (2009).
- [52] A. Padilla. The good, the bad and the ugly of Hořava gravity *J. Phys. Conf. Ser.* **259**:012033 (2010).
- [53] D. Blas, O. Pujolas, S. Sibiryakov. Comment on "Strong coupling in extended Hořava-Lifshitz gravity", *Phys. Lett.* **B688**:350-355 (2010).
- [54] J. Albert *et al.* . Probing Quantum Gravity using Photons from a flare of the active galactic nucleus Markarian 501 Observed by the MAGIC telescope. *Phys. Lett.* **B668**:253-257 (2008).
- [55] M. Ackermann *et al.* A limit on the variation of the speed of light arising from quantum gravity effects, *Nature* **462**:331-334 (2009).
- [56] A. Wang e Q.Wu. Stability of spin-0 graviton and strong coupling in Hořava-Lifshitz theory of gravity, *Phys. Rev.* **D83**:044025 (2011).
- [57] A. I. Vainstein. The problem of nonvanishing gravitation mass, *Phys. Lett.* **B39**:393-394 (1972).
- [58] P. Hořava, C. M. Melby-Thompson. General covariance in quantum gravity at a Lifshitz point, *Phys. Rev.* **D82**:064027 (2010).
- [59] A. M. da Silva. An alternative approach for general covariant Hořava-Lifshitz gravity and matter coupling, *Class. Quant. Grav.* **28**:055011 (2011).

- [60] J. Kluson. Hamiltonian analysis of nonrelativistic covariant restricted-foliation-preserving diffeomorphism invariant Hořava-Lifshitz gravity *Phys. Rev.* **D83**:044049 (2011).
- [61] P. A. M. Dirac. Generalized Hamiltonian dynamics. *Proc. R. Soc. Lond.* **A 19** vol. 246 no. 1246 326-332 (1958); *Lectures on Quantum Mechanics*, Courier Dover Publications (2001).
- [62] M. Henneaux e C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*, Princeton U.P. (1992).
- [63] J. Alexandre, P. Pasipoularides. Spherically symmetric solutions in covariant Horava-Lifshitz gravity, *Phys. Rev.* **D83**:084030 (2011).
- [64] D. Orlando, S. Reffert. The renormalizability of Hořava-Lifshitz-type gravities *Class. Quant. Grav.* **26**:155021 (2009).
- [65] A. Wang, Y. Wu. Cosmology in nonrelativistic general covariant theory of gravity, *Phys. Rev.* **D83**:044031 (2011).
- [66] R. Cai, H. Zhang. Holographic superconductors with Hořava-Lifshitz black holes, *Phys. Rev.* **D81**:066003 (2010).
- [67] J. Jing, L. Wang, S. Chen. Holographic Superconductors in $z = 3$ Horava-Lifshitz Gravity without condition of detailed balance, arXiv:1001.1472.
- [68] M. R. Setare, D. Momeni, N. Majd. Holographic superconductors in a model of non-relativistic gravity, *JHEP* **05**:118 (2011).

- [69] A. E. Gumrukcuoglu, S. Mukohyama, A. Wang. General relativity limit of Horava-Lifshitz gravity with a scalar field in gradient expansion, arXiv:1109.2609.
- [70] T. Zhu, Q. Wu, A. Wang, F. Shu. U(1) symmetry and elimination of spin-0 gravitons in Horava-Lifshitz gravity without the projectability condition, arXiv:1108.1237.