

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

O Modelo de Axelrod com Tensão Superficial

Bruno Pace

Orientadora: Profa. Dra. Carmen Pimentel Cintra do Prado

São Paulo
2011

A minha mãe.

Quero agradecer a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para o bom andamento desse projeto, tanto através de trocas intelectuais ou culturais como simplesmente pelo apoio em horas mais difíceis. A começar pela FAPESP, que fomentou a concretização desse projeto.

Um agradecimento especial a meu pai e a minha irmã por estarem tão presentes, ao Jarlei por sempre me fazer organizar as ideias, ao Rodolfo por me apresentar os problemas mais difíceis e à Eugênia por sempre me indagar e me apresentar visões alternativas, ou me fazer descobrir sozinho outras formas de observar um mesmo fenômeno. Ao Marcelo por todas as incríveis conversas e interesses em problemas interdisciplinares e ao Paulo pela colaboração no desenvolvimento do *software* e pela grande amizade.

Agradeço a todos os professores que me inspiram, lecionam matérias interessantes ou, através de conversas, ajudam a abrir minha cabeça, e a todos os funcionários do Instituto que foram sempre atenciosos e sem os quais muita coisa não seria possível.

Finalmente, o maior agradecimento à Carmen, por todo o estímulo intelectual e pragmatismo nas medidas certas, por ter sido minha maior motivadora para entrar no mestrado e trilhá-lo.

“I believe that consciousness is, essentially, the way information feels when being processed. Since matter can be arranged to process information in numerous ways of vastly varying complexity, this implies a rich variety of levels and types of consciousness. The particular type of consciousness that we subjectively know is then a phenomenon that arises in certain highly complex physical systems that input, process, store and output information. Clearly, if atoms can be assembled to make humans, the laws of physics also permit the construction of vastly more advanced forms of sentient life. Yet such advanced beings can probably only come about in a two-step process: first intelligent beings evolve through natural selection, then they choose to pass on the torch of life by building more advanced consciousness that can further improve itself.”

Max Tegmark

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Redes e Grafos	3
1.2	Modelagem Baseada em Agentes	7
1.3	Sociofísica	10
2	O Modelo de Axelrod	13
2.1	Descrição do Modelo	13
2.2	Extensões do Modelo	27
3	O Modelo com Tensão Superficial	44
3.1	Descrição do Modelo com Tensão	45
3.2	Membranas ou Fronteiras Culturais	46
3.3	Metaestabilidade	50
4	Transiente	53
5	Transição de Fase	61
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	75

Resumo

Nesta dissertação foram estudados alguns modelos vetoriais que pretendem modelar e descrever alguns aspectos de sistemas sociais e de sua organização cultural. Partimos do modelo de Axelrod, um processo estocástico definido em uma rede, e introduzimos uma pequena alteração no modelo que desencadeou mudanças qualitativas interessantes, especialmente o surgimento de uma tensão superficial, que leva ao aparecimento de estados metaestáveis e de regiões culturais mais fixamente localizadas no espaço. Através da ótica da mecânica estatística e de extensas simulações computacionais, exploramos alguns dos aspectos que julgamos mais importantes na caracterização desse rico modelo.

Abstract

Axelrod's model for cultural dissemination is a discrete vector representation for modeling social and cultural systems. In this work we have studied it and other related models, and a subtle change in the model's rule was proposed. Our slight alterations to the model yielded significant qualitative changes, specifically the emergence of surface tension, driving the system to metastable states. Using concepts from statistical mechanics and extensive numerical simulations, we explored some of the aspects that better describe the rich model devised, such as its transient and stationary behaviour.

Capítulo 1

Introdução

A formulação da mecânica estatística de sistemas em equilíbrio termodinâmico, normalmente atribuída a Boltzmann e Gibbs, constitui um importante marco na história da Física. Sua importância se deve, principalmente, ao fato de fornecer uma conexão entre as características microscópicas e macroscópicas de um sistema formado por vários átomos ou moléculas (ou quaisquer agrupamentos de objetos similares em suas constituições e em suas interações uns com os outros). Isso é o mesmo que dizer que, conhecendo o hamiltoniano de um sistema (seja um gás ou um metal ferromagnético como exemplos mais célebres) é possível conhecer suas grandezas macroscópicas e seu comportamento termodinâmico. Uma das grandes conquistas daquilo que derivou dessa abordagem está na habilidade de reproduzir as não-analiticidades dos potenciais termodinâmicos características das transições de fase, os chamados fenômenos críticos, onde existe uma reorganização macroscópica da matéria e um diferente comportamento coletivo dos átomos ou moléculas é observado. Essas não-analiticidades se verificam no limite termodinâmico, ou seja, o limite no qual o tamanho do sistema tende a infinito, e provavelmente foram primeiro verificadas historicamente com a solução de Onsager do modelo de Ising em duas dimensões para o ferromagnetismo. Esse modelo, que trata dos acoplamentos dos spins dos elétrons em uma rede cristalina, des-

creve cada sítio da rede como tendo uma variável de spin que pode assumir um dos valores $\sigma = \pm 1$ e apresenta transição entre uma fase desordenada (sem magnetização total) e uma fase ordenada (com magnetização macroscópica mensurável) para redes quadradas em $d \geq 2$ dimensões.

Naturalmente essas novas possibilidades começaram a despertar, entre os físicos, o interesse por outros fenômenos nos quais seja possível relacionar as interações microscópicas – muitas vezes conhecidas – aos comportamentos que emergem da interação entre esses elementos, dada a profusão de exemplos na natureza. Dentre os sistemas não-físicos que começaram a ser estudados estão os sistemas sociais (humanos ou de outros animais), redes neurais, meios excitáveis (como reações químicas autocatalíticas ou as células do tecido do coração), osciladores acoplados, entre outros. Físicos e matemáticos, muitas vezes associados a médicos e biólogos, começam a desenvolver modelos para o ciclo circadiano, para a formação e comportamento de cardumes, para a interação entre espécies em um ecossistema, para o ritmo cardíaco ou a rede de interação proteínas-genes para o controle do ciclo celular. Por trás de todos esses problemas está aquele de entender o comportamento que emerge da interação das partes, e uma série de ferramentas de análise matemáticas e numéricas estão sendo desenvolvidas em conjunto com aquelas da física estatística para descrever diferentes classes de sistemas.

No presente texto, vamos investigar uma variante de um modelo amplamente estudado na última década. No restante desse capítulo, alguns conceitos sobre redes e grafos usados serão apresentados de forma sucinta, assim como a abordagem de agentes na modelagem, e faremos um breve relato de modelos mais importantes que guardam alguma relação com nosso trabalho. No segundo capítulo, descreveremos o modelo original de Axelrod de onde derivamos o modelo aqui estudado, assim como as principais extensões já feitas na literatura. No terceiro capítulo introduziremos nossa variação do modelo, assim como as novas características que surgem com as alterações propostas, comparando com outros modelos com algumas similaridades com

o nosso. No capítulo 4, descreveremos em mais detalhe o regime transiente na tentativa de apresentar sua riqueza. No capítulo seguinte mostraremos algumas das tentativas de caracterizar o limite termodinâmico desse modelo, trabalho ainda em andamento. Por fim, uma breve conclusão dos nossos resultados e uma indicação da direção que estamos começando a seguir partindo do que já foi obtido. Todos os resultados apresentados em gráficos – a não ser que explicitamente indicado na legenda – ou as representações em cores das configurações das redes quadradas são resultados de extensivas simulações numéricas realizadas com o *software* desenvolvido ao longo do programa de mestrado para a investigação dos modelos estudados (do original de Axelrod, do modelo com tensão aqui proposto e dos dois modelos de Kuperman que servirão como comparação em alguns pontos).

1.1 Redes e Grafos

Como nos problemas típicos da mecânica estatística clássica, a estrutura de interações entre as partes pode se dar de forma bastante regular, mas pode assumir outras formas bastante complicadas¹. Pensar num espaço discreto, porém regular (como átomos em uma estrutura cristalina), não traz tantas dificuldades como as da representação de estruturas topológicas complexas. Representar sistemas como o cérebro, as linhas de transmissão de energia elétrica, a transmissão de doenças, a estrutura trófica de uma cadeia alimentar ou ainda as redes metabólicas de um organismo (mesmo que unicelular), nos faz deparar imediatamente com topologias muito distintas de uma rede regular. A análise de sistemas assim estruturados levou a um estudo mais sistemático dessas redes, dando origem a um interesse crescente em teoria de grafos; sobre essas redes complexas podemos definir de inúmeras formas variáveis dinâmicas e acoplamentos entre elas, que determinam um fluxo de informações ou uma organização coletiva dessas variáveis que podem captu-

¹Os vidros de spin são um exemplo do estudo de topologias irregulares na mecânica estatística de sistemas ferromagnéticos/antiferromagnéticos.

rar alguma essência do fenômeno que nos dispomos a modelar.

O estudo de redes de grande escala foi também favorecido pelo surgimento de computadores muito mais eficientes, mas principalmente devido à internet, que se tornou um laboratório aberto para os interessados no assunto. Aplicativos possibilitam mesmo a um leigo a extração de grafos representando diversas estruturas na rede e cientistas podem realizar diversas medições e desenvolver novos conceitos com essa ferramenta à disposição. Vamos introduzir aqui conceitos bastante simples que serão usados ao longo desse trabalho.

Um **grafo** é formado por um conjunto de vértices (nós) e arestas (*links*). **Arestas direcionadas** (ou **arestas não-direcionadas**) são pares ordenados (ou não) de vértices. Vamos tratar aqui o caso de um **grafo não direcionado** (cujas arestas são não-direcionadas). Um **caminho** em um grafo é uma sequência de vértices tal que entre cada vértice da sequência e o próximo exista uma aresta que os conecte. O primeiro e o último nós da sequência são chamados de vértice inicial e final, respectivamente, e caso eles coincidam o caminho é chamado de **ciclo**.

Um grafo é **conexo** se a partir de qualquer vértice existir um caminho para qualquer outro vértice dele. Um grafo pode não ser conexo, e nesse caso ele é formado por subgrafos conexos, chamados **componentes** (um nó que não possui nenhum vizinho é, sozinho, um componente). Em alguns casos, o maior componente de um grafo pode ter um número de nós comparável ao número de nós total, sendo nesse caso chamado de **componente gigante**.

Dois vértices são **vizinhos** ou **adjacentes** se existe uma aresta que os conecte. Se um nó i tem k_i vizinhos, é dito que esse nó tem **conectividade** ou **grau** k_i . Dado um nó i , o conjunto de nós que são seus vizinhos é chamado de **vizinhança** do nó i , representada por ν_i . Caso dois vértices não sejam vizinhos, a **distância** entre eles é dada pelo menor número de arestas que, em sequência, levem de um vértice a outro (caso eles estejam no mesmo componente). Se dois nós são vizinhos, a distância entre eles é 1. Se eles

não pertencem a um mesmo componente, a distância normalmente é definida como infinita. A **distância média** de um grafo é simplesmente a média das distâncias tomada a cada par de vértices. O **diâmetro** de um grafo é a maior dentre todas as possíveis distâncias entre quaisquer dois vértices.

Uma importante característica de um grafo é a **distribuição de conectividades** de nós, que nada mais é que a distribuição de probabilidades de um nó, sorteado aleatoriamente, ter conectividade k em função dessa variável. Muitas redes complexas têm uma distribuição de conectividades que segue uma lei de potência $P(k) \sim k^{-\alpha}$. Outra característica importante de uma rede é seu **coeficiente de aglomeração**, que mede a presença de “comunidades” no grafo, ou seja, grupos de nós mais densamente conectados entre si. Característicos dessas comunidades são triângulos conectando três dos nós que pertencem a elas. De certa forma, esse coeficiente mede a probabilidade de que o vizinho de um vizinho de um nó também seja seu vizinho (ou que o amigo de um amigo seu também seja seu amigo em redes sociais). Podemos definir então esse coeficiente conforme a equação 1.1.

$$C = \frac{3 \times \text{número de triângulos na rede}}{\text{número de trios conectados de vértices}} \quad (1.1)$$

e o número de trios conectados de vértices é entendido como um vértice no centro ligado a outros dois de forma não ordenada (para não ser contado duas vezes). O grafo na figura 1.1 ilustra essa definição².

Diversos modelos para a construção de redes com topologias diferentes já foram concebidos. Dentre eles, convém citar os três mais importantes, que reproduzem algumas propriedades das redes reais que já foram caracterizadas (como a internet, as estruturas de relações sociais, as redes de citação de artigos, de coatuação em filmes, cadeias alimentares): a distribuição de conectividades seguir uma lei de potência, a distância média ser pequena e o coeficiente de aglomeração elevado.

²Existem outras definições de coeficiente de aglomeração na literatura; muitos desses conceitos ainda não estão unificados.

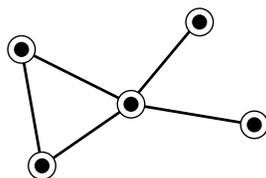


Figura 1.1: Ilustração da definição do coeficiente de aglomeração C , conforme a equação 1.1. Essa rede tem um triângulo e oito trios conectados, tendo portanto um coeficiente $C = \frac{3}{8}$. Extraído de [1].

O primeiro modelo a ser citado é o de redes aleatórias, no qual grafos podem ser construídas com N nós pela conexão de cada par possível de nós com probabilidade p gerando uma rede com distribuição de conectividades poissoniana e conectividade média $\langle k \rangle = Np$. Essa rede apresenta uma transição de fase com o parâmetro p , de uma situação com vários componentes pequenos para um componente gigante. Generalizações já foram feitas para se obter redes aleatórias com outras distribuições de conectividade. Essas redes reproduzem a propriedade de uma distância média pequena entre nós de um mesmo componente da rede.

O segundo é o das chamadas redes de mundo pequeno ou redes de Watts-Strogatz. Elas são construídas a partir de uma rede regular e, com probabilidade p , cada vértice é reconectado a um nó sorteado aleatoriamente. Esse método permite interpolar entre uma rede regular ($p = 0$) e uma rede aleatória ($p = 1$). Para valores pequenos de p , são reproduzidas duas importantes propriedades: distâncias curtas entre nós e um coeficiente de aglomeração alto.

O último é o das redes de Barabási-Albert. Esses modelos envolvem o crescimento das redes para que elas atinjam uma estrutura final com uma topologia com conectividades distribuídas segundo uma lei de potência (re-

des independentes de escala). Nesse caso, inicia-se com um núcleo de m nós conectados entre si e progressivamente acrescentam-se nós à rede ligando-os a m nós já existentes com uma ligação preferencial aos nós mais conectados, ou seja, a probabilidade de conectar um novo nó a um já existente é proporcional à conectividade dos nós da rede. Quando o tamanho N for atingido, o crescimento da rede para e o grau médio vale $\langle k \rangle = 2m$, mas o coeficiente de aglomeração é pequeno. Redes independentes de escala têm, caracteristicamente, alguns poucos nós muito conectados, chamados *hubs*. Esses nós têm propriedades especiais, especialmente no que se refere ao fluxo de informações.

Muitos dos modelos de processos em redes são considerados sobre uma dessas três classes de topologia. A estrutura das interações pode, também, ser variável no tempo (ter inclusão e remoção de nós ou *links*), depender da localização de agentes no espaço, ou ser fixa e coincidir com o espaço; pode ser regular, desordenada, complexa, com estruturas de comunidades, entre outras muitas possibilidades que fogem do escopo desse trabalho. Uma vez definida essa rede, é necessário entender como representar as variáveis de estado dos nós dessa rede, que podem ser unidimensionais ou multidimensionais e podem ser de variáveis contínuas ou discretas ou ambas. E por fim, a interação entre as variáveis de estado de dois nós da rede – que também depende de como o tempo transcorre (discreto ou contínuo) e de a atualização ser síncrona ou assíncrona – deve ser definida. Com o modelo todo montado pode-se investigar o comportamento macroscópico desse sistema e detectar estruturas e propriedades emergentes. É interessante notar que muitas vezes o comportamento emergente não depende de detalhes microscópicos da interação entre as partes, mas de simetrias do problema.

1.2 Modelagem Baseada em Agentes

Em paralelo com o desenvolvimento de ferramentas matemáticas, na primeira metade do século XX algumas figuras importantes como John von

Neumann e Alan Turing trabalharam em problemas relacionados a computação, informação, instrução e organização. Interessados em questões como a computação do cérebro ou as instruções que uma semente carrega para que uma árvore de determinada espécie cresça com suas funções todas organizadas, além de se tornarem precursores do computador moderno e do estudo de algoritmos, contribuíram de forma decisiva para a computação (sequencial e paralela) e, conseqüentemente, para a física computacional que começou a se desenvolver fortemente a partir de então.

De von Neumann e Ulam surgiu a ideia de autômatos celulares, que originalmente eram uma idealização de sistemas físicos cujo tempo e espaço, assim como as quantidades físicas que nessa rede estão representadas, são discretos. Em uma rede regular (onde cada sítio era chamado de célula), cada uma das células foi caracterizada por um estado interno que é representado por um número finito de bits de informação. Von Neumann sugeriu que esse sistema evoluísse em unidades discretas de tempo como um autômato, com uma receita interna para computar seu novo estado dependendo do estado interno das células vizinhas. A atualização de todas as células foi concebida como sendo síncrona, ou seja, todas as células são atualizadas para o seu estado seguinte ao mesmo tempo e a configuração da rede no instante $t + 1$ depende somente da configuração da rede no instante t .³

Das inúmeras regras que podem ser concebidas com variadas escolhas para o número (finito) de estados internos e como elas se relacionam gera uma diversidade de comportamentos impressionante⁴, e hoje compreende

³Apesar de originalmente concebidos como síncronos, alguns autores definem ainda pertencentes à mesma classe de modelos aqueles assíncronos, ampliando o conceito original de autômatos celulares. Isso, entretanto, é um detalhe terminológico e é questão de gosto definir de uma ou de outra forma.

⁴Pode-se citar o autômato de Conway, conhecido como *Game of Life*, ou alguns autômatos que reproduzem as espirais da famosa reação de Belousov-Zhabotinsky, um processo de reação-difusão relacionado a formação de padrões espaço-temporais e morfogênese, um dos assuntos que Turing explorou no fim de sua vida. Uma extensa análise de algumas classes de autômatos unidimensionais foi feita por Wolfram.

um amplo campo de pesquisa, com várias classes de autômatos, determinísticos ou estocásticos, sendo usados na modelagem de fluidos, de processos de difusão ou reação-difusão, de sistemas biológicos e no estudo de transições de fase fora do equilíbrio, e em aplicações tecnológicas como a criptografia. Uma excelente introdução à modelagem de sistemas físicos através do uso de autômatos foi feita por Chopard e Droz em [2].

Vale ressaltar dois pontos: o primeiro é o surgimento de comportamentos bastante ricos e complexos a partir de regras aparentemente simples e a formação de padrões espaço-temporais que conseguiram com sucesso reproduzir algumas estruturas da natureza, como o padrão de manchas de conchas e mamíferos ou as ramificadas estruturas da agregação por difusão limitada (*diffusion-limited aggregation*); o segundo é que esse já é um modelo baseado em agentes, onde cada célula muda seu estado de acordo com regras e os estados das células vizinhas.

Não é tão clara a origem do termo *agentes* e da ideia de modelagem baseada em agentes (alguns autores usam o termo modelagem baseada em indivíduos). Modelos de organização social ou econômica começaram a usar um mesmo princípio básico: a de que agentes com determinadas regras de interação entre si se reconhecem e trocam informações sobre seus estados, podendo mudar de estado de acordo com aquelas regras. Regras muito simples conseguem capturar alguns comportamentos como a movimentação dos cardumes ou a segregação social (modelo de Schelling), assim como complexos padrões temporais em modelos de agentes econômicos, do sistema imunológico, de sistemas ecológicos, de migração ou dinâmica populacional entre outros. Outros modelos baseados em agentes estão sendo desenvolvidos para aplicações em otimização, computação distribuída, análise de tráfego ou propagação de doenças, sendo um paradigma de modelagem bastante poderoso para uma série de possíveis aplicações em ciência e tecnologia. Esses tipo de modelagem permite uma grande versatilidade, dado que podemos incluir não-homogeneidades nos comportamentos dos agentes ou no espaço,

sendo esse um campo de pesquisa vasto e ainda pouco explorado. O modelo de Axelrod surgiu no contexto dessa classe de modelagem e será abordado em mais detalhe à frente.

1.3 Sociofísica

Dos muitos modelos em redes que vêm sendo propostos, uma classe foi concebida para a investigação de fenômenos sociais. Um dos pioneiros no estudo de problemas em Sociofísica foi Galam, e uma revisão de seus modelos foi feita por ele mesmo em [3]. Como pontuado nesse mesmo artigo, os tópicos cobertos pela Sociofísica já estão ficando numerosos, e os diversos modelos já propostos na literatura foram separados por Castellano et al. – na revisão feita em [4] – nas seguintes categorias: dinâmica de opiniões, dinâmica cultural, dinâmica da linguagem, comportamento de multidões, formação de hierarquias, dinâmica humana e fenômenos de propagação social. De caracteres muito diferentes, esses modelos se propõem a ajudar na compreensão de algumas das facetas das complexas relações sociais (em sua maioria humanas) e dos muitos aspectos atrelados a elas, desde a sincronização dos aplausos em uma sala de concertos até a formação de hierarquias políticas ou a evolução de estruturas de linguagem e a diversidade cultural. Dessas classes, vamos nos concentrar naquelas relativas à formação de opiniões e culturas.

O modelo de Ising pode ser interpretado como um modelo de opiniões de forma que o estado magnetizado seja entendido como um consenso, onde a maioria compartilha uma mesma “orientação” para determinado assunto. Historicamente foi um dos primeiros a surgir e abarca os dois aspectos contrários da dinâmica de opiniões de grupos sociais: consenso e discórdia; esse modelo acabou por se tornar um ícone da modelagem de opinião.

Outro modelo amplamente explorado é o modelo do votante, inicialmente considerado num contexto ecológico para a competição de espécies. Grande atenção foi dada a esse modelo pela sua simplicidade e possibilidade de so-

lução exata. Nesse modelo, cada agente tem uma variável $s = \pm 1$ que representa duas opiniões contrárias. A cada instante, um agente é selecionado junto com um de seus vizinhos e simplesmente adota a opinião do vizinho. Para $d \leq 2$ um processo de “*coarsening*” leva a um consenso, governado por ruído de interface, enquanto que para $d > 2$ esse estado não é atingido no limite termodinâmico; para redes finitas o consenso é sempre atingido. Uma alteração proposta por Dall’Asta e Castellano em [5] introduz uma memória em cada sítio de forma a comparar as contagens de spins para cima ou para baixo da vizinhança. Um sítio só muda de estado depois que o contador de interações contar r influências de vizinhos com um valor de opinião; isso introduz, efetivamente, uma memória de quais as últimas opiniões que cada sítio recebeu de seus vizinhos e, na realidade, realiza uma espécie de média do “campo” de opiniões em cada sítio. Essa percepção média das opiniões gera uma tensão superficial ausente no modelo do votante original.

O modelo de Sznajd leva em consideração o efeito de dois agentes juntos terem um poder de convencimento maior, e a dinâmica é definida da seguinte forma: se dois agentes vizinhos têm a mesma opinião (também aqui uma variável de spin, $\sigma = \pm 1$), então todos os seus vizinhos adotam essa opinião. A partir de uma configuração inicial com magnetização $m = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$, o estado absorvente atingido será o de consenso, com uma transição de fase no parâmetro m . Se a condição inicial tem magnetização positiva, então o estado final tem magnetização $m = 1$; se a configuração inicial tem mais spins para baixo $m < 0$, então no estado absorvente $m = -1$.

Uma importante extensão dos modelos de opinião foi proposta por Defuant em [6], onde a variável que representa a opinião é contínua e a ideia de confiança limitada foi introduzida: se a diferença entre as opiniões de dois agentes for maior que um valor limite d , eles não interagem. Caso contrário, as opiniões deles se aproximam proporcionalmente à diferença entre as opiniões. Nesse caso o estado absorvente é formado por vários grupos com opiniões bem definidas, e o número desses grupos depende basicamente do

valor de d . A distribuição de opiniões no estado absorvente é uma sucessão de deltas de Dirac.

O último modelo sobre o qual cabe mencionar é o modelo CODA (*continuous opinions and discrete actions*⁵), proposto por Martins em [7]. A combinação de uma variável contínua para descrever o estado interno de opinião com uma ação discreta (como a escolha de um ou outro candidato) é mediada através de uma avaliação Bayesiana simples de cada agente sobre a escolha de seus vizinhos – cada agente tem acesso somente à ação (discreta) dos seus vizinhos, e não a seu estado interno (contínuo), e a observação das ações dos vizinhos provoca uma mudança na opinião interna (e eventualmente na ação externa) de um agente. O fato de que as duas representações estão acopladas leva a distribuição de opiniões no estado estacionário a uma forma bimodal onde os picos estão localizados nos extremos da distribuição. Espacialmente se formam domínios de opiniões contrárias dentro dos quais estão os agentes com opinião mais extrema (aqueles que mais acreditam nas suas ações) e nas fronteiras entre os domínios as opiniões são menos extremas.

Há muitos outros modelos, bem como diversas variantes dos citados anteriormente, mas não era objetivo desse trabalho fazer uma revisão completa dos mesmos. No capítulo seguinte vamos apresentar em detalhe o modelo de Axelrod para a interação entre culturas, no qual nos inspiramos para o restante do trabalho apresentado nessa dissertação.

⁵opiniões contínuas e ações discretas

Capítulo 2

O Modelo de Axelrod

Como uma extensão natural dos modelos de dinâmica de opinião, Axelrod, em [8], considerou a representação do estado de cada indivíduo – unidimensional (escalar) nos modelos anteriores – como sendo multidimensional (vetorial). Um de seus objetivos principais era incluir na dinâmica do modelo a tendência social à homofilia: tendemos a ser mais facilmente influenciados por aqueles mais parecidos conosco. Citando Axelrod, “A transferência de ideias ocorre mais frequentemente entre indivíduos [...] similares em certos atributos como crenças, educação, status social, etc.”. A outra ideia por trás de sua proposta é a de que ficamos mais parecidos com aqueles com os quais interagimos depois da interação.

2.1 Descrição do Modelo

Cultura foi por ele definida, de forma simplificada, como o conjunto de características dos indivíduos sujeitas à influência de outros. Em cada instante de tempo, um indivíduo i é representado por um vetor $\vec{\sigma}_i$, passível de transformações ao longo do tempo e que determina seu estado cultural. Esse vetor é constituído por F **características culturais** (*features*), cada uma das quais podendo assumir um dentre q possíveis valores, interpretados como

traços culturais (*traits*), ou expressões possíveis daquela característica cultural. Esse é, portanto, um modelo discreto baseado em agentes.

O vetor cultural de um agente i tem a seguinte estrutura:

$$\boxed{\sigma_i^1 \mid \sigma_i^2 \mid \sigma_i^3 \mid \dots \mid \sigma_i^f \mid \dots \mid \sigma_i^{F-1} \mid \sigma_i^F}$$

onde $\sigma_i^f \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$.

Cabe mencionar aqui que o número de possíveis traços culturais poderia ser diferente para cada característica cultural, mas por simplicidade foi adotado que todas elas podem ter o mesmo número de expressões (q), o que não muda qualitativamente o comportamento dinâmico do modelo. Porém, essa escolha mudaria a distribuição das culturas nas condições iniciais, provavelmente mudando algumas características da evolução temporal e da transição de fase.

Esses dois parâmetros, q e F , ditam o comportamento do sistema. As condições iniciais são completamente dependentes deles. Ambos estão relacionados com a diversidade, mas de formas bastante distintas como veremos mais à frente. Outro ponto importante a se considerar é que os valores das variáveis no vetor são apenas rótulos, que poderiam ser representados por outros símbolos que não números, não importando o valor numérico deles: se $\sigma_i^f \neq \sigma_j^f$ isso significa apenas que a f -ésima característica de um indivíduo é diferente da f -ésima característica de um outro indivíduo; nada muda se elas diferem de 1 ou de $q-1$ ¹. E, ainda, se a f -ésima e a g -ésima características de um mesmo indivíduo (com $f \neq g$) assumirem o mesmo valor numérico, isso não significa nada, pois são características diferentes e não devem ser comparadas.

A **distância cultural** entre dois indivíduos i e j implícita nesse modelo é a distância de Hamming²: o indivíduo i e o indivíduo j são tão mais similares

¹Para uma versão do métrica do modelo, ver [9]

²A distância de Hamming entre dois *strings* de mesmo comprimento é igual ao número de posições nas quais os símbolos correspondentes são diferentes, ou seja, para dois vetores

quanto menor a distância de Hamming $d_{\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j}$ entre seus vetores culturais, $\vec{\sigma}_i$ e $\vec{\sigma}_j$. Por exemplo, no caso simples em que $F = 4$ e $q = 2$, o espaço de culturas possíveis assim como as distâncias culturais estão representados na Figura 2.1.

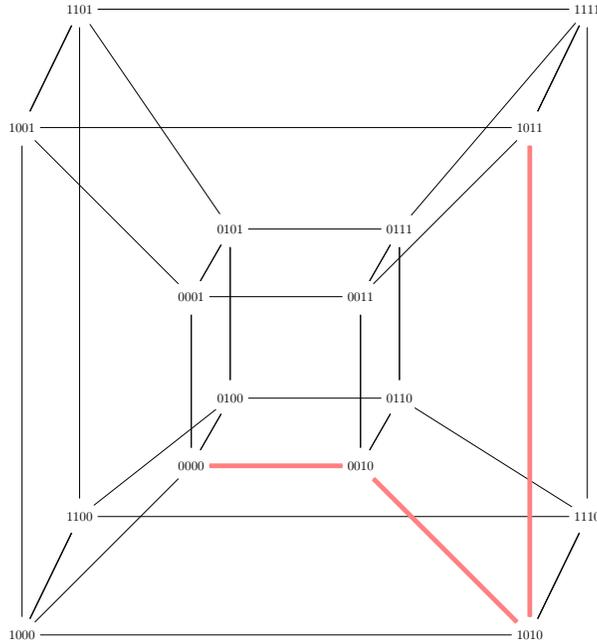


Figura 2.1: Espaço Cultural, com $F = 4$ e $q = 2$. Como exemplo, a distância de Hamming entre o estado 0000 e 1011 vale 3 e um dos 3! possíveis caminhos mínimos está ressaltado.

O que é usado, entretanto, para avaliar a semelhança cultural entre dois indivíduos é a ideia de **overlap**, que é simplesmente $F - d_{\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j}$. Esse valor, normalizado, é chamado **similaridade** entre dois indivíduos. Mais precisamente, a similaridade entre os indivíduos i e j é definida por

de dimensão F , temos: $d_{\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j} = F - \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_i^f, \sigma_j^f}$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{F} \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_i^f, \sigma_j^f} \quad (2.1)$$

onde

$$\delta_{\sigma_i^f, \sigma_j^f} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma_i^f = \sigma_j^f, \\ 0 & \text{se } \sigma_i^f \neq \sigma_j^f. \end{cases}$$

é um delta de Kronecker.

Com o conceito de similaridade definido, podemos definir a dinâmica do modelo. Cada sítio de uma rede representa um indivíduo, e a topologia da rede define quem interage com quem. Originalmente esse modelo foi proposto em uma rede quadrada bidimensional, mas outras topologias para a conexão dos indivíduos já foram estudadas em [10], [11], [12], [13] e sempre que possível vamos nos referir ao modelo abstraindo a estrutura da rede subjacente de interações. A maior parte das simulações desse trabalho foram realizadas em redes quadradas regulares de lado L e com condições periódicas de contorno. O número de sítios da rede é $N = L^2$, e o número de arestas é $A = 2N$.

Esse é um modelo assíncrono e estocástico. A cada iteração um sítio é sorteado aleatoriamente e eventualmente interage, também de forma estocástica, com outro sítio da rede de acordo com um conjunto de regras que definem a dinâmica. A atualização é feita, caso ocorra interação, em apenas um sítio por vez.

A dinâmica se dá pela iteração dos seguintes passos:

Passo 1: Sortear, aleatoriamente, um sítio ativo i e um dos seus vizinhos $j \in \nu_i$, onde ν_i é a vizinhança do sítio i .

Passo 2: Com probabilidade igual à similaridade entre eles, há interação. A interação consiste em selecionar aleatoriamente um f tal que $\sigma_i^f \neq \sigma_j^f$ (se houver), e fazer com que o sítio j passe a adotar o valor de σ_i^f .

Um sítio i é dito **ativo** se existe algum sítio j em sua vizinhança ν_i em um estado cultural tal que $0 < \omega_{ij} < 1$. Se $\omega_{ij} = 0$, a probabilidade de interação é nula e, portanto, os dois sítios não interagem. Se $\omega_{ij} = 1$, não há nenhum f tal que $\sigma_i^f \neq \sigma_j^f$, ou seja, os indivíduos são idênticos, portanto não existe mais nenhuma troca cultural possível entre eles. Dessa forma, se um sítio i tiver na sua vizinhança apenas sítios tais que $\omega_{ij} = 0$ ou $\omega_{ij} = 1$, ele é considerado **inativo**.³

Conforme pensado em [8], podemos representar um mapa com as similaridades dos *links*, e assim podemos também definir as densidades desses *links* em três categorias relevantes: a densidade de *links* entre sítios com similaridade nula, ρ_0 , a densidade de *links* ativos, ρ_A e a densidade de *links* entre sítios com o vetor cultural idêntico, ρ_F . Esses parâmetros são dados, no caso de uma rede quadrada com condições periódicas de contorno, por:

$$\rho_0 = \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \nu_i} \delta_{\omega_{ij}, 0} \quad (2.2)$$

$$\rho_F = \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \nu_i} \delta_{\omega_{ij}, 1} \quad (2.3)$$

$$\rho_A = 1 - \rho_0 - \rho_F \quad (2.4)$$

Para o acompanhamento visual do estado da rede, assim como sua evolução temporal, foram desenvolvidas duas representações distintas e complementares, que chamaremos de representação de sítios e representação de *links*. A primeira delas (sítios) associa o estado cultural de um sítio a uma cor, e cada cor está associada a um vetor cultural diferente (se houver cores suficientes no espaço RGB, senão existe uma “degenerescência” de cores). A segunda (*links*) representa com outro código de cores os diferentes tipos de

³Essa condição do modelo, na qual ora os *links* entre dois sítios estão ativos ora inativos, cria uma relação de *feedback* – de onde muito da riqueza do modelo deriva: a topologia por onde pode fluir a informação cultural (os *traits*), ou seja, os vértices e arestas ativos do grafo, é determinada (em cada instante) pela própria configuração cultural da rede.

interação possíveis entre cada dois vizinhos da rede e, portanto, classifica as interfaces entre os dois sítios a que se refere. O código de cores, nesse caso, é o seguinte: para similaridade nula, a cor usada é o preto, sendo esse um *link* inativo; para similaridade unitária, a cor usada é o branco, e esse *link* é também inativo; o terceiro caso é referente aos *links* ativos, e o código de cores usado vai do azul (para as similaridades mais baixas), passando por tons de ciano, verde e laranja, até o vermelho (similaridades mais altas)⁴.

A condição inicial é construída aleatoriamente a partir de uma distribuição uniforme no conjunto dos inteiros $\sigma_i^f \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$. Cada um dos N sítios tem seu vetor cultural preenchido com um valor sorteado aleatoriamente desse conjunto. Os valores das densidades iniciais podem ser facilmente calculados e estão apresentados nas equações (3.1), (3.2) e (3.3). A figura 2.2 exemplifica algumas condições iniciais, associadas a diferentes valores dos parâmetros F e q , na representação de *links* descritas acima. A partir dessa configuração inicial, as regras dinâmicas são implementadas, transformando progressivamente os estados culturais dos sítios da rede, que evolui necessariamente para um estado absorvente no qual todos os sítios estão inativos, ou seja, todos os sítios têm vizinhos cuja similaridade entre eles é nula ou igual à unidade. Esse é um detalhe importante a respeito desses estados absorventes e a maneira como os vetores culturais estão dispostos espacialmente nessas configurações: dentro de regiões de mesma cultura, todos têm o vetor alinhado, enquanto que nas fronteiras esses vetores são “ortogonais” (similaridade nula). A métrica em questão permite que existam $(q-1)^F$ culturas que não interagem com cada cultura existente.

Esse modelo, então, pode ser entendido como uma cadeia de Markov onde

⁴É claro que o número de cores de *links* ativos depende de F ; no caso $F = 2$ só existem *links* ativos com similaridade $\frac{1}{2}$, e portanto uma única cor (nesse caso o vermelho); para $F = 3$, se $\omega_{ij} = \frac{1}{3}$ a cor usada foi o azul e para $\omega_{ij} = \frac{2}{3}$, o vermelho; para um F genérico, o número possível de similaridades diferentes é sempre $F - 1$, e, nesse caso, as extremidades são fixas em azul e vermelho e as cores intermediárias são geradas de acordo com uma função de senos e cossenos de intensidades de azul, verde e vermelho para criar uma impressão de espectro.

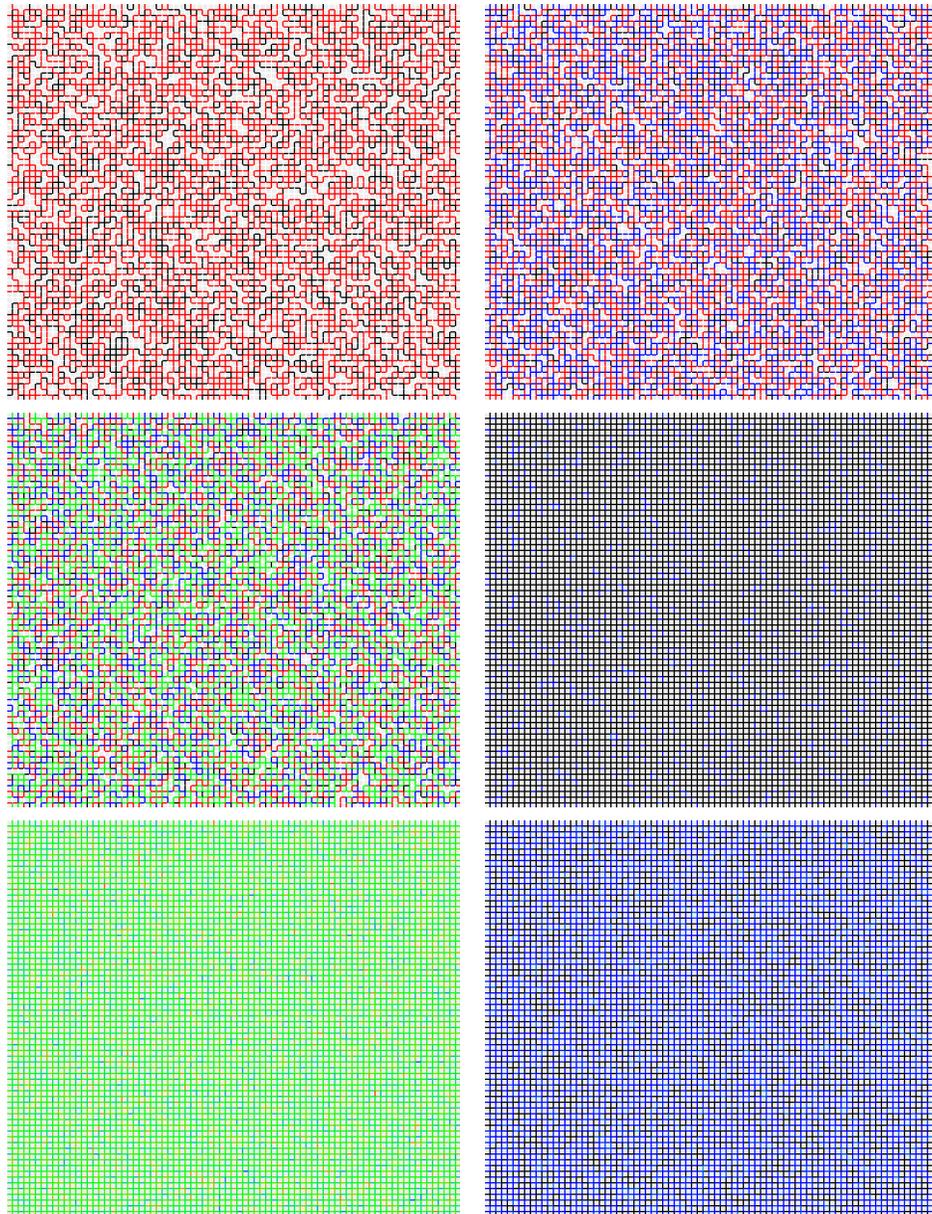


Figura 2.2: Exemplos de condições iniciais e de suas representações gráficas. Um *link* branco representa o contato entre sítios idênticos, um *link* preto representa o contato de dois sítios com estados culturais ortogonais, e as demais cores estão associadas aos sítios ativos. Em todas essas redes $L = 80$. Da esquerda para a direita: na primeira linha $F = 2$ $q = 2$ e $F = 3$ $q = 2$; na segunda linha $F = 4$ $q = 2$ e $F = 17$ $q = 150$; na terceira linha $F = 25$ $q = 2$ e $F = 25$ $q = 25$.

cada configuração tem probabilidades de transição bem definidas para outras configurações, que dependem apenas da configuração atual. Chamando de \mathfrak{C} o conjunto de todas as possíveis configurações para uma rede com N nós, uma configuração em determinado instante de tempo é um dos elementos desse conjunto. O número de configurações possíveis é $|\mathfrak{C}| = q^{NF}$. Cada configuração pode ser completamente descrita como uma sequência de NF números inteiros entre 0 e $q-1$. Muitas configurações são estados absorventes dessa cadeia de Markov, e a dinâmica *sempre* leva a um estado absorvente. Esses espaços de configurações são, portanto, grafos direcionados com pesos nas transições dados pelas probabilidades de transição entre configurações.

A característica mais importante desse modelo é que ele apresenta uma transição de fase fora do equilíbrio⁵. Para $q < q_{crit}$, o estado absorvente é monocultural (globalizado), enquanto que para $q > q_{crit}$ o estado absorvente é multicultural (polarizado⁶). As figuras 2.3 e 2.4 mostram exemplos de estados absorventes antes e depois da transição, respectivamente, nas imediações do valor de q_{crit} .

O parâmetro de ordem mais comumente empregado na literatura, para identificar essa transição, é o $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$, ou seja, o tamanho médio do maior *cluster*⁷ cultural normalizado pelo número de sítios (ou nós). Conforme aumenta-se o tamanho da rede, o parâmetro de ordem apresenta variação cada vez mais acentuada na região crítica, conforme ilustra a figura 2.5.

Foi mostrado por Castellano et al. em [14] que essa transição é de pri-

⁵Por fora do equilíbrio nesse contexto entende-se que q , o parâmetro de controle, não é uma propriedade coletiva do sistema como a temperatura, mas um ingrediente da definição do sistema. De certa forma, a transição ocorre indo do estado absorvente de um sistema ao de outro conforme q varia.

⁶O termo polarizado às vezes é usado em sentidos opostos na literatura, e vou reforçar aqui o uso nesse trabalho: assim como Axelrod, usamos o termo querendo significar multicultural, situação na qual há vários *clusters* pequenos de vetores idênticos mas com fronteiras com culturas ortogonais.

⁷Um *cluster* é, nesse contexto, um subgrafo conexo cujos nós têm mesmo estado cultural. Em redes quadradas, são sítios contíguos de mesma cultura

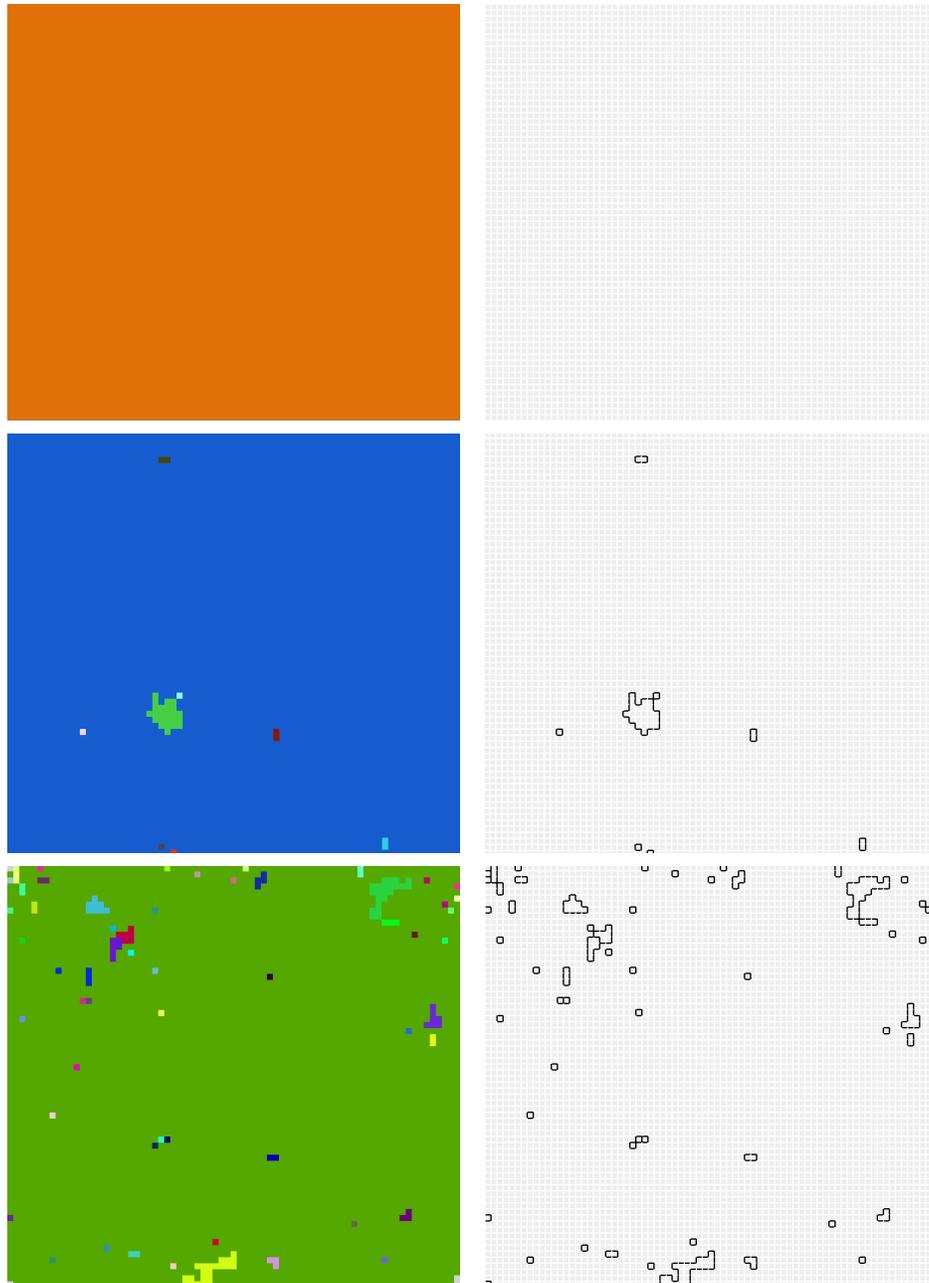


Figura 2.3: Exemplos de estados absorventes antes de q_{crit} , para $F = 3$ e $L = 75$. Em cada linha, a primeira coluna corresponde à representação de sítios e a segunda à de *links* para uma mesma configuração. De cima para baixo: $q = 2$, $q = 12$, $q = 13$. Para $F = 3$, $q_{crit} \approx 13$, portanto essas configurações pertencem à fase globalizada.

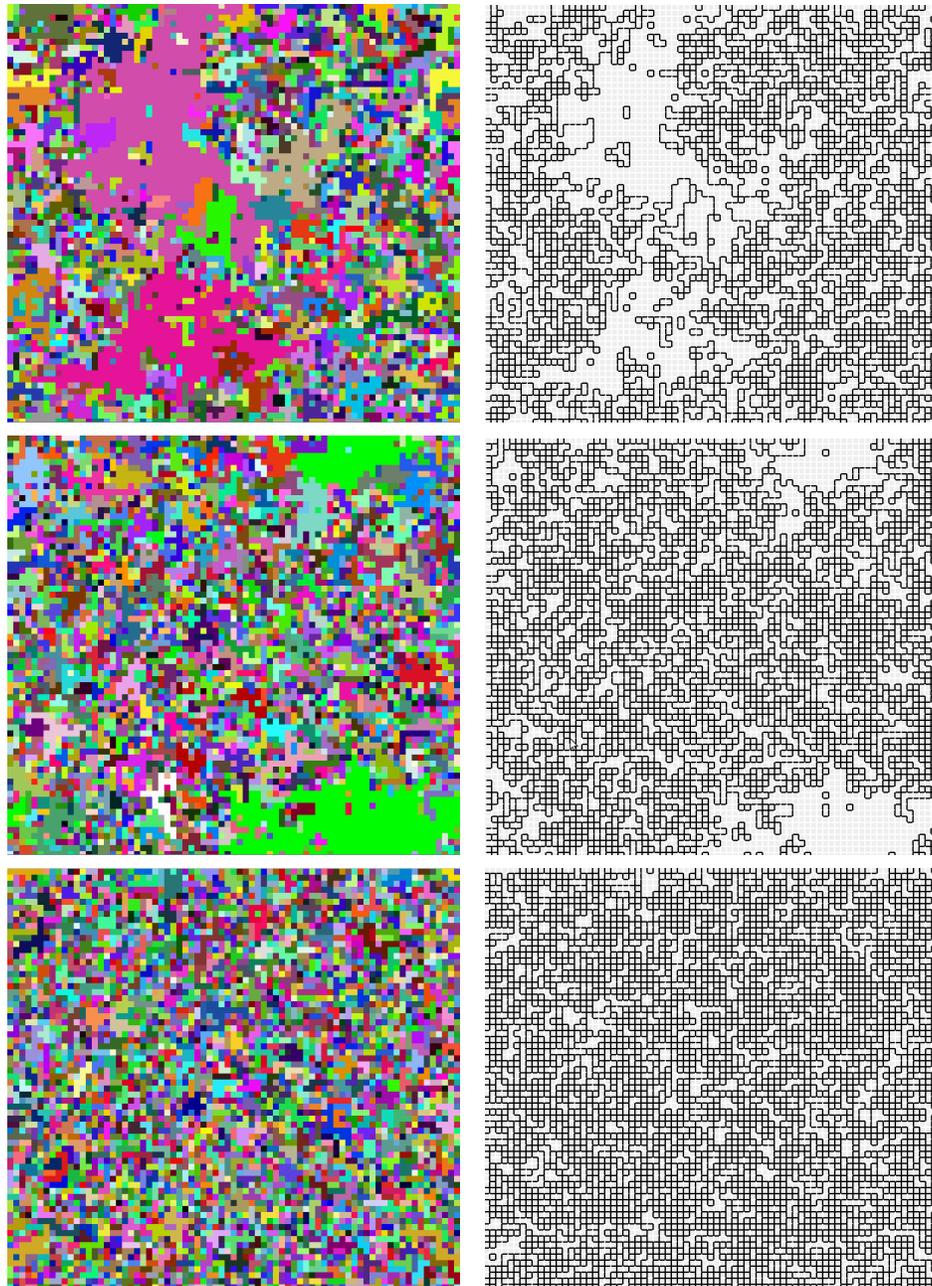


Figura 2.4: Exemplos de estados absorventes depois de q_{crit} , para $F = 3$ e $L = 75$. Em cada linha, a primeira coluna corresponde à representação de sítios e a segunda à de *links* para uma mesma configuração. De cima para baixo: $q = 14$, $q = 15$, $q = 20$. Para $F = 3$, $q_{crit} \approx 13$, portanto essas configurações pertencem à fase polarizada.

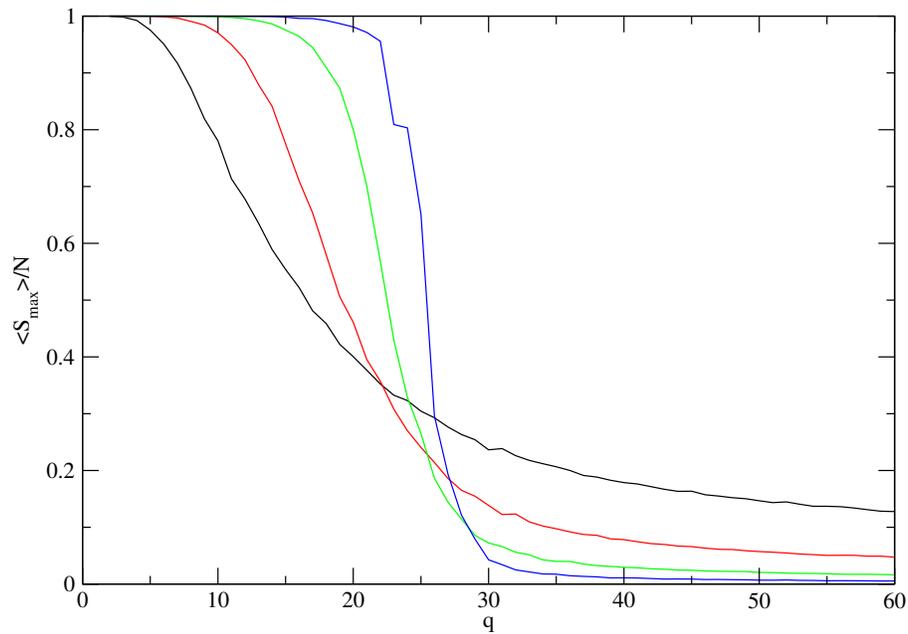


Figura 2.5: $\frac{\langle S_{\max} \rangle}{N}$ vs. q nos estados absorventes para diversos tamanhos de rede, para o modelo de Axelrod. Os gráficos foram plotados com $L = 5$ (preto), $L = 10$ (vermelho), $L = 20$ (verde) e $L = 40$ (azul), com as médias realizadas sobre 2000, 1000, 500 e 50 realizações independentes, respectivamente. F foi fixado em 5, e podemos notar a tendência, conforme L aumenta, da transição ficar mais acentuada. Nesse caso, $q_{crit} \approx 27$

meira ordem, com exceção do caso $F = 2$, onde a transição é de segunda ordem⁸. Na transição, a distribuição acumulada de tamanhos de domínios culturais segue uma lei de potência com expoente $\tau = 2,6$ para $F > 2$ e, somente para $F = 2$, um expoente $\tau = 1,6$ conforme a figura 2.6. Também característica da transição de primeira ordem, a distribuição do parâmetro de ordem na região crítica é bimodal, denotando a biestabilidade típica desse tipo de transição.

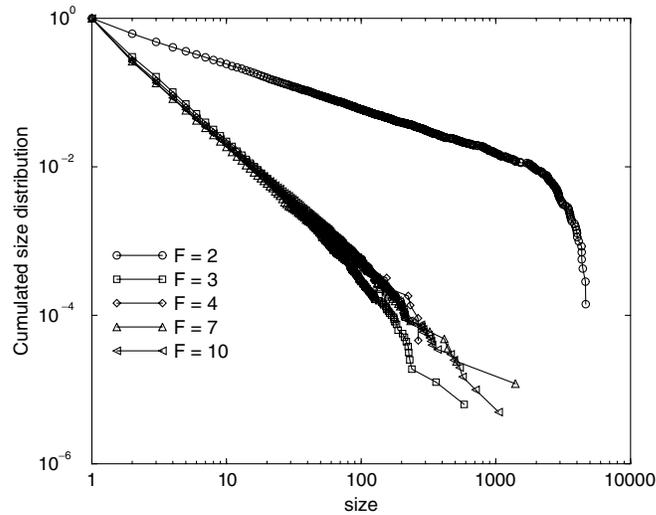


Figura 2.6: Distribuição acumulada de tamanhos de domínios culturais para $q \approx q_{crit}$, $L = 100$ e vários valores de F . Figura extraída de [14].

As densidades ρ_0 , ρ_A e ρ_F são bons parâmetros de ordem, tanto para o modelo de Axelrod quanto para o modelo com tensão superficial que será descrito mais à frente, sendo melhores para caracterizar as fases metaestáveis

⁸O caso $F = 2$ é um caso especial, e deve ser entendido de forma diferente. Nesse caso, dois sítios só estão ativos se eles tiverem um *feature* em comum. Disso resulta que, caso haja interação, eles se tornarão idênticos, sendo então esse um processo de contato. Para $F > 2$ nem toda interação gera sítios com o mesmo estado cultural.

que surgem com a introdução da tensão superficial. A simples observação da evolução temporal dessas quantidades pode ser bastante reveladora assim como olhar para as distribuições espaciais desses *links* numa rede quadrada.

A cada interação o indivíduo que muda de estado abandona a expressão de uma de suas F características para adotar a do vizinho que o influenciou. Dessa forma, os indivíduos tendem a ficar cada vez mais parecidos depois de uma interação e algumas expressões de certas características culturais vão desaparecendo da rede com o tempo. Mesmo assim o modelo não leva a um estado globalizado para $q > q_{crit}$, mas sim a um estado polarizado.

O mecanismo que leva a esse comportamento pode ser melhor compreendido com a observação da função ST – o número de *traits* sobreviventes –, introduzida por Parravano et al. em [15]. A ideia é subtrair o número de traços culturais que já foram extintos de todos os qF possíveis. Isso é feito verificando, com um delta de Kronecker, se o t -ésimo traço cultural já foi extinto da f -ésima característica:

$$ST = qF - \sum_{f=1}^F \sum_{t=0}^{q-1} [\delta_{0, \sum_{i=1}^N \delta_{t, \sigma_i^f}}]$$

A função ST , para o modelo de Axelrod, vale no máximo qF e no mínimo F e é monotonicamente decrescente com o tempo, sendo uma função de Lyapunov para esse modelo. A ideia de definir uma função de Lyapunov para o modelo foi introduzida por Klemm et al. em [16], e desenvolvida ainda por Kuperman em [17].

O comportamento dessa função ao longo do tempo nas simulações revela detalhes do transiente e o processo de formação de consenso local – que eventualmente pode crescer até atingir a rede toda. Quando um *link* entre dois sítios está ativo, existe – através dele – fluxo de informação; caso contrário, isso não ocorre. De um ponto de vista local, cada interação entre indivíduos (sítios), faz com que um *trait* de uma de suas características culturais desapareça. Quando olhamos para a rede toda, porém, percebemos que esse *trait* não desaparece necessariamente de imediato, mas se propaga através da rede

de forma similar a um processo difusivo (mais provável através de *links* com similaridades altas, proporcionalmente a ω_{ij}), combinado com uma competição por sobrevivência no espaço. Conforme os *traits* vão desaparecendo, há a eventual prevalência de algum deles (dentro de cada *feature*). Na fase polarizada, a baixa densidade de *links* ativos nas condições iniciais faz com que a vizinhança desses sítios ativos virem pontos de troca local, levando à formação de pequenos *clusters* onde há consenso⁹. Mas a disparidade com o entorno impossibilita a homogeneização de toda a rede em uma única cultura. Por outro lado, quando o valor de q está abaixo do crítico, as condições iniciais são tais que a densidade de sítios ativos é alta o bastante para que, passado tempo suficiente, todos os *traits* de cada *feature* percorram a rede e sejam extintos um a um até que uma única cultura domine.

Podemos destacar três regimes de transiente distintos – apesar de não ser tão clara essa separação –, de acordo com as condições iniciais de ρ_0 e ρ_A . No primeiro, $\rho_A > \rho_0$ e ST diminui progressivamente até que um estado globalizado é atingido, como pode ser visto na figura 2.7. No segundo, próximo da região crítica, $\rho_0 > \rho_A$ e os núcleos de corrosão se formam, podendo ou não crescer e tomar conta praticamente da rede toda, como mostram as figuras 2.8 e 2.9, e a linha de cima da figura 2.10. No terceiro, muito acima da região crítica, $\rho_0 \gg \rho_A$ e os núcleos de sítios ativos não conseguem cres-

⁹Uma outra forma de pensar sobre esse transiente é a seguinte: *links* ativos têm, às vezes, a capacidade de ativar *links* inativos (de similaridade nula) ao entrar em contato com eles. Próximo à transição ($q \approx q_{crit}$), os *links* ativos – pouco densos – começam a ativar *links* inativos à sua volta, formando “núcleos de corrosão” de *links* inativos – estes inicialmente muito densos. Esses “núcleos de corrosão” acabam eventualmente se unindo a outros núcleos, o que ocorre com maior ou menor dificuldade conforme a densidade e a capacidade de corrosão destes. Esse processo, quando $q \lesssim q_{crit}$ faz com que quase todos os *links* sejam ativados e, dessa forma, o estado globalizado pode ser atingido. Veja a figura 2.8. Se $q \gtrsim q_{crit}$, os núcleos não estão próximos o suficiente para se unir e sua capacidade de corrosão é menor, e formam-se *clusters* dispersos em meio à multiculturalidade. Temos aqui a competição entre duas escalas de tempo: uma associada ao crescimento dos núcleos de corrosão e outra associada ao tempo necessário para que as culturas internas ao núcleo cheguem a um consenso.

cer; formam-se *clusters* muito pequenos em meio à multiculturalidade, o que é ilustrado na figura 2.10 (linha de baixo).

2.2 Extensões do Modelo

Diversas variantes do modelo original já foram propostas e vêm sendo estudadas na última década. Como mencionado anteriormente, uma importante investigação a se fazer é com relação à topologia da rede subjacente. O caso mais simples é o de uma rede regular unidimensional. A comparação, feita por Klemm et al. em [10], mostra que a transição ordem-desordem no caso unidimensional, ao contrário do caso de uma rede bidimensional (com $F \neq 2$), é de segunda ordem. A figura 2.11 mostra essa distinção.

Em [13], Klemm e colaboradores exploraram três classes de topologias complexas: redes de pequeno mundo (Watts-Strogatz) que, para uma região do parâmetro de reconexão p , apresentam um coeficiente de aglomeração mais alto e uma distância média pequena, mas que ainda apresentam uma distribuição de conectividades dos nós exponencial; redes independentes de escala (Barabási-Albert), que já apresentam a cauda longa (lei de potência) na distribuição das conectividades, porém com um coeficiente de aglomeração baixo e, por último, redes independentes de escala estruturadas, como proposto por Klemm e colaboradores em [18].

No caso das redes de Watts-Strogatz, conforme o parâmetro de reconexão foi variado, o valor de q_{crit} aumentou progressivamente, atingindo um máximo quando $p = 1$, ou seja, quando a rede se tornou competamente aleatória, conforme a figura 2.12. Para cada valor de p , entretanto, o aumento do tamanho da rede faz com que a transição seja mais acentuada, como era de se esperar.

No caso das redes de Barabási-Albert, a transição ordem-desordem acontece, conforme N aumenta, para valores cada vez maiores de q_{crit} , de acordo com a figura 2.13, com a relação de escala $q_{crit}(N) \sim N^{0,39}$ indicando que, no limite termodinâmico, a fase desordenada não está presente. Esse com-

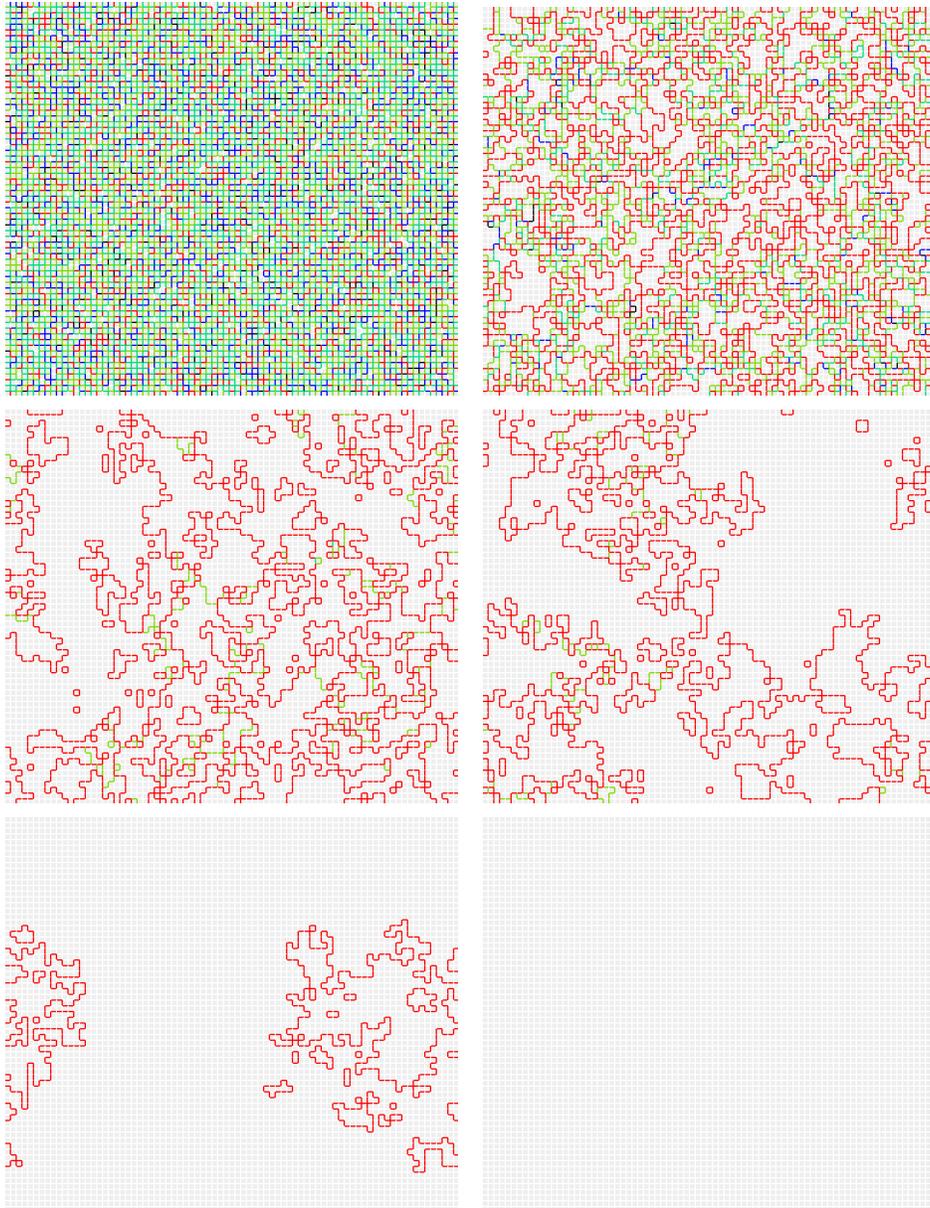


Figura 2.7: Evolução temporal para $F = 5$, $q = 2 \gg q_{crit} \approx 28$ e $L = 80$, até o estado absorvente. A sequência está disposta como na leitura de um texto: da esquerda para a direita, de cima para baixo.

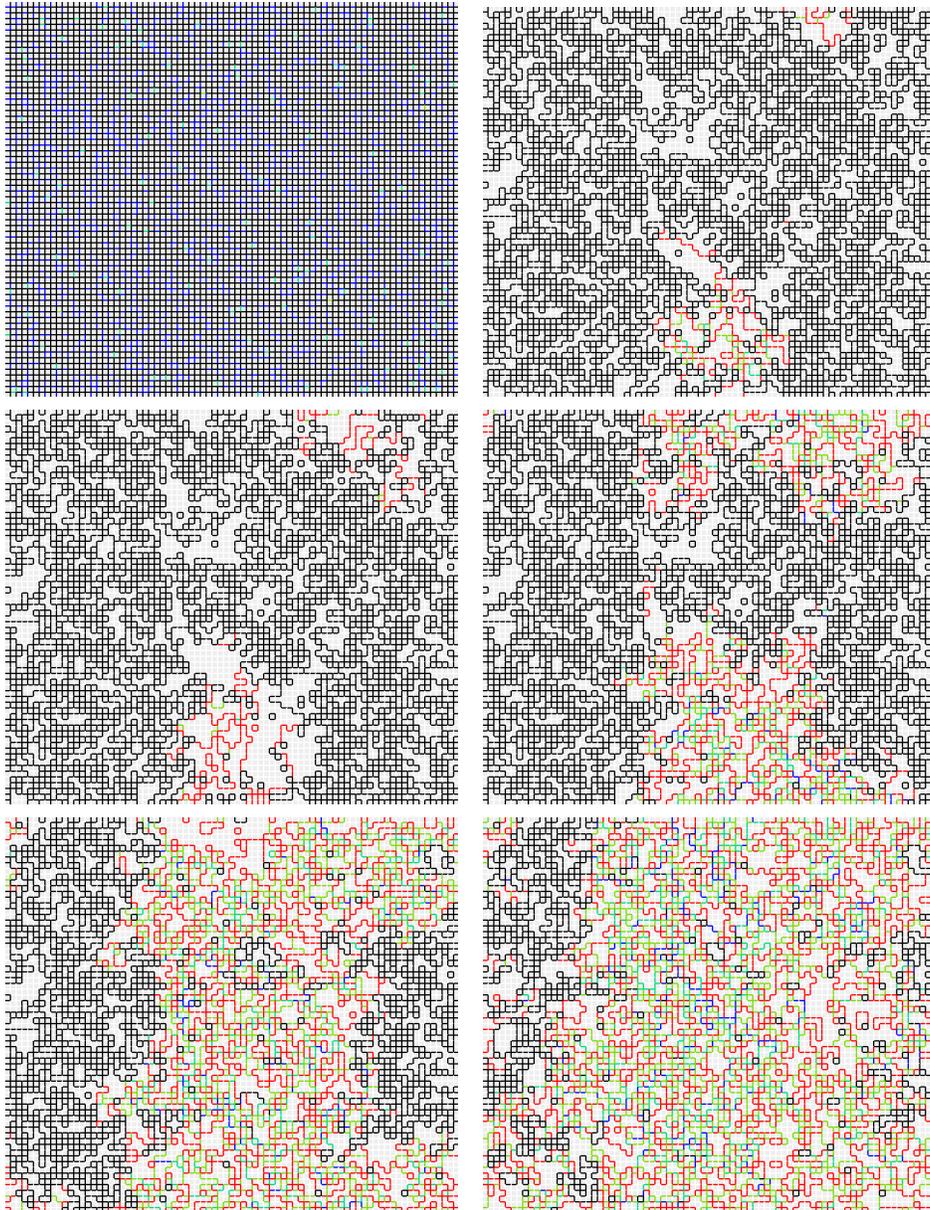


Figura 2.8: Evolução temporal da rede com parâmetros $F = 5$, $q = 28$ e $L = 80$ com $q \approx q_{crit}$. Um núcleo de corrosão cresce até atingir um tamanho comparável ao da rede. A sequência está disposta como na leitura de um texto: da esquerda para a direita, de cima para baixo. Continua na figura 2.9.

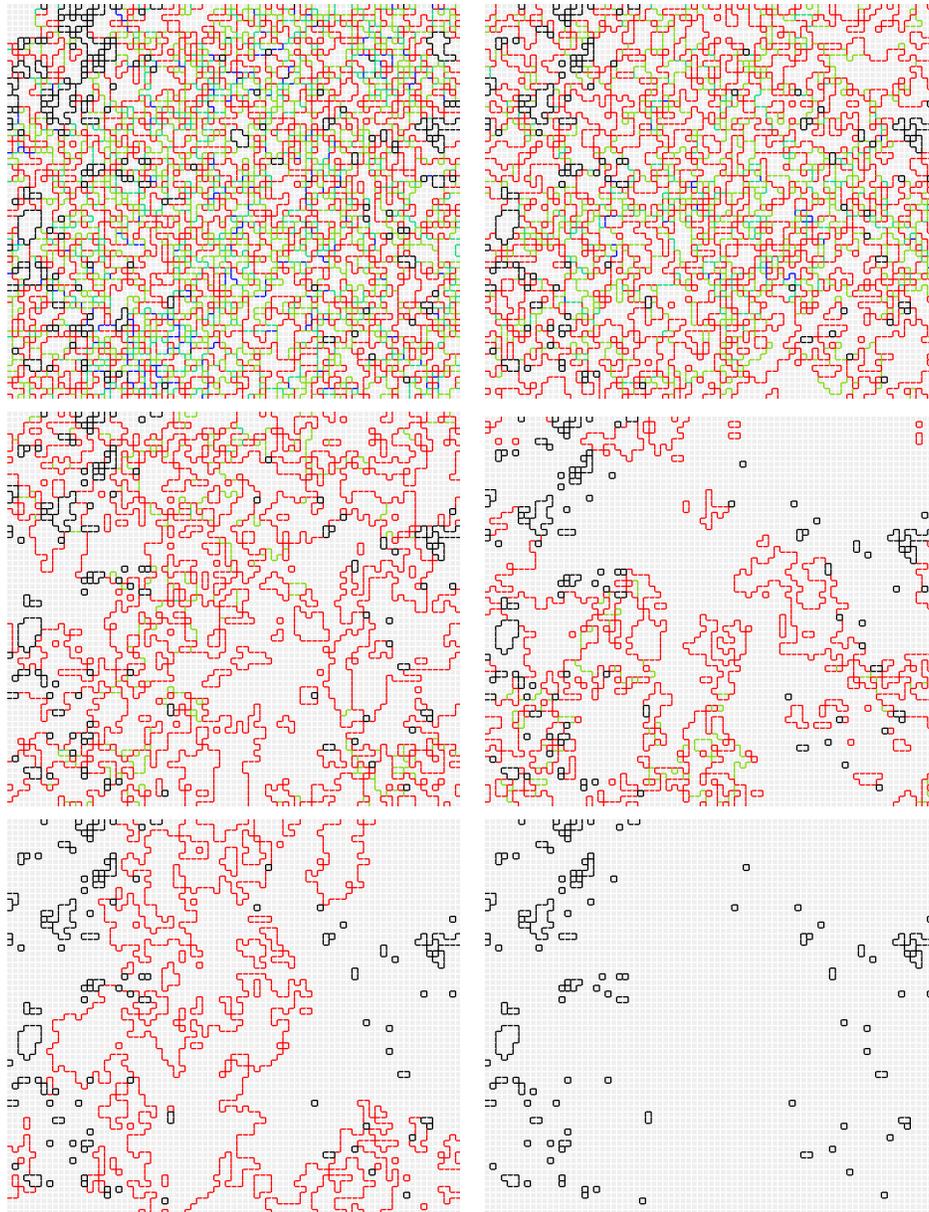


Figura 2.9: Evolução temporal da rede com parâmetros $F = 5$, $q = 28$ e $L = 80$, com $q \approx q_{crit}$. Um núcleo de corrosão cresce até atingir um tamanho comparável ao da rede. A sequência está disposta como na leitura de um texto: da esquerda para a direita, de cima para baixo. Continuação da figura 2.8.

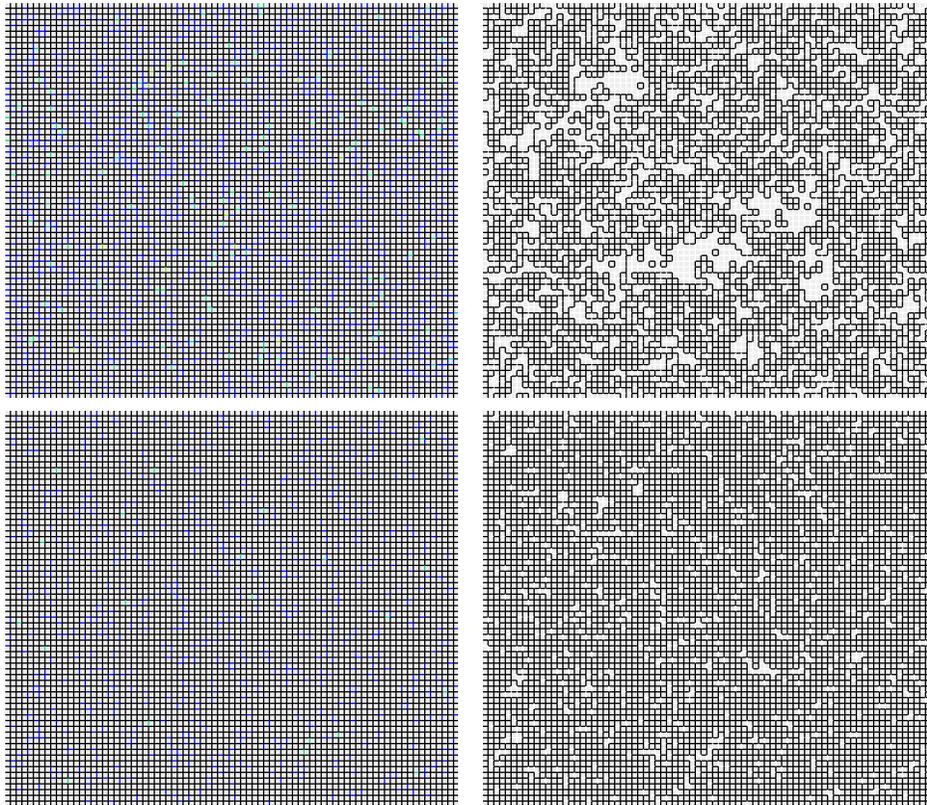


Figura 2.10: Configurações iniciais e finais para $F = 5$, $q = 29$ e $L = 80$ na primeira linha e $F = 5$ e $q = 80$ na segunda linha. Para $F = 5$, $q_{crit} \approx 28$. A evolução temporal é muito rápida e, na linha de cima, os núcleos de corrosão conseguem crescer um pouco (próximo à região crítica). Na segunda linha, muito acima da região crítica, os núcleos não conseguem crescer, levando a *clusters* muito pequenos e esparsos de consenso em meio à multiculturalidade.

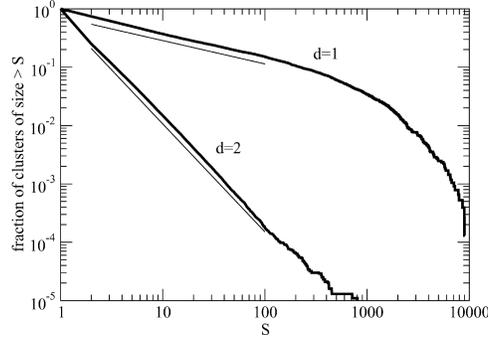


Figura 2.11: Distribuição acumulada de tamanhos de domínios culturais na transição. Para o caso unidimensional, $q = 9$ e para o caso bidimensional $q = 62$. Em ambos os casos, $N = 10^4$ e $F = 10$. As retas têm inclinações $-0,4$ e $-1,85$. Figura extraída de [10].

portamento é similar ao modelo de Ising em redes independentes de escala, onde a temperatura crítica diverge com o tamanho da rede.

E por fim, nas redes independentes de escala estruturadas, nas quais há uma distribuição de conectividades que também segue uma lei de potência mas com coeficiente de aglomeração elevado, ao contrário do observado nas redes de Barabási-Albert. Nesse caso, foi recuperada a independência do valor crítico com o do tamanho da rede. Entretanto, para $q > q_{crit}$ o parâmetro de ordem não vai a zero, mas tende a um platô finito – indicando ordem parcial. Somente para $q \gg q_{crit}$ o parâmetro de ordem vai a zero. Nessa faixa de valores de q sobre o platô, $S_{max} \approx k_{max}$, o que sugere que o maior *cluster* seja formado pelo *hub* mais conectado e seus vizinhos.

Outra alteração feita com relação à topologia foi introduzida por Vazquez e colaboradores em [12], onde a rede inicialmente regular quadrada foi evoluindo ao longo do tempo de acordo com a seguinte regra: um nó i e um de seus vizinhos j são sorteados. Se a similaridade for $\omega_{ij} > 0$, a dinâmica ainda é idêntica ao do modelo de Axelrod original. Entretanto, se $\omega_{ij} = 0$,

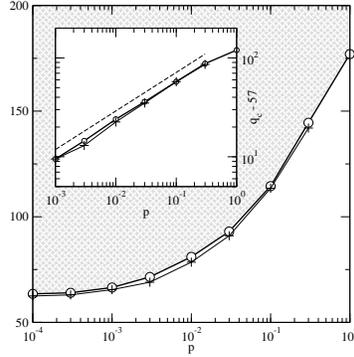


Figura 2.12: Diagrama de fases para o modelo de Axelrod em uma rede de pequeno mundo. A curva separa os valores dos parâmetros (p, q) que produzem um estado desordenado (área sombreada) daqueles com um resultado ordenado (área branca). Para um dado p o valor plotado de q_{crit} é aquele para o qual o parâmetro de ordem é mais próximo do valor (arbitrário) 0, 1 para uma rede de tamanho $N = 500^2$ e $F = 10$. O detalhe mostra que $q_{crit}(p) \propto p^{0,39}$. Extraído de [13].

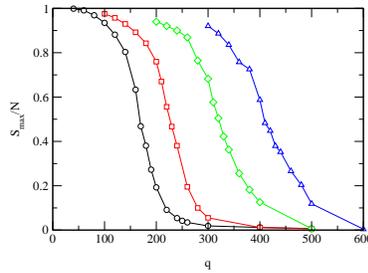


Figura 2.13: O parâmetro de ordem $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$ em uma rede aleatória independente de escala para $F = 10$. As médias foram tomadas sobre 1000 realizações independentes. As curvas diferentes são para diferentes tamanhos de rede: $N = 1000$ (círculos), $N = 2000$ (quadrados), $N = 5000$ (losangos) e $N = 10000$ (triângulos). Tirado de [13].

esse *link* é removido e aleatoriamente reconectado. A rede, portanto, tem sua topologia atrelada à dinâmica e, independentemente de q , a distribuição de conectividades dos nós tende a uma distribuição de Poisson no estado absorvente. Entretanto, é mostrado que a estrutura da rede depende dramaticamente de q .

Para caracterizar a estrutura final das redes, foi feito um gráfico do tamanho relativo médio da maior componente do grafo em função de q , que mostra duas transições: a primeira é uma transição de fragmentação, ou seja, um componente gigante se fragmenta em vários pequenos, monoculturais; a segunda é uma transição de recombinação na qual se forma novamente um componente com tamanho comparável ao número de nós total, porém multicultural (com vários domínios culturais), conforme ilustrado na figura 2.15.

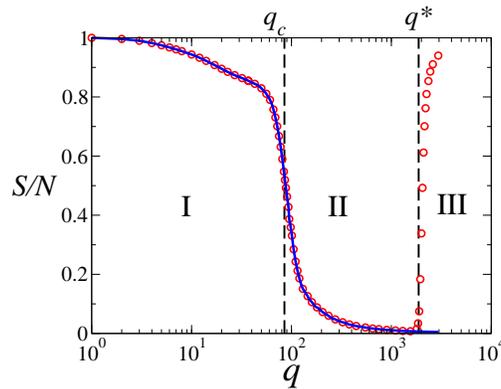


Figura 2.14: Tamanho médio relativo do maior componente do grafo (círculos) e maior domínio cultural $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$ (linha sólida) na configuração estacionária em função de q , para $F = 3$, $N = 2500$ e a média realizada sobre 400 realizações. As linhas verticais em $q_c = 85$ e $q^* = 1875$ indicam as transições entre as diferentes fases. Extraído de [12].

Também por Klemm e colaboradores, em [19], foi estudado o efeito de ruído, ou deriva cultural. Em cada ciclo de iteração, com probabilidade r ,

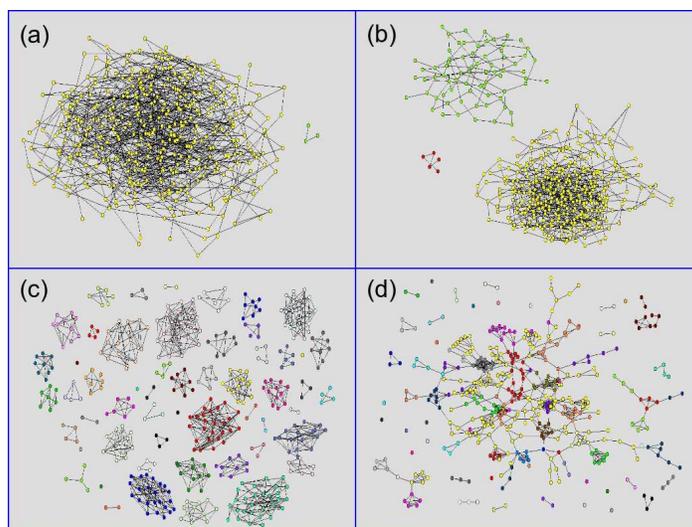


Figura 2.15: Topologias na configuração do estado final na fase I: $q = 3$ (a), $q = 20$ (b) e na fase II: $q = 100$ (c) para $N = 400$. (d) configuração da rede no estado estacionário ativo (fase III) para $q = 500$. Extraído de [12].

um sítio é sorteado e um de seus *features* é sorteado para que um novo valor, s , seja aleatoriamente atribuído a ele. Foi mostrado que, mesmo para um nível muito baixo de ruído, as configurações multiculturais são instáveis, e um estado absorvente monocultural sempre é atingido, independentemente do valor de q . Quando r cresce, o sistema passa por uma transição de fase induzida pelo ruído. Não há estado absorvente e surge, no estado estacionário, uma fase desordenada (dinâmica), pois não há tempo suficiente para as configurações relaxarem para uma situação de equilíbrio entre uma perturbação e outra. As escalas de tempo entre as relaxações foram estudadas e foi mostrado que no limite termodinâmico só a fase desordenada prevalece. Mostrou-se também que, na presença de ruído, os resultados são insensíveis a uma das premissas básicas do modelo de Axelrod – a proporcionalidade com o *overlap* na probabilidade de interação. Isso foi verificado através de uma versão desacoplada do modelo, onde a interação acontece sempre entre sítios ativos, independentemente da similaridade entre eles.

Os efeitos de mídia sobre os agentes foram também estudados em [20] e alguns efeitos contraintuitivos aparecem nesse caso. A mídia foi modelada como um campo externo interagindo com os sítios de três maneiras diferentes: uma mídia externa passando uma mensagem fixa, uma mídia global que devolve o estado cultural mais difundido e uma mídia local que funciona como um *feedback* local dos estados dos sítios. Os resultados foram similares nos três casos: os efeitos de mídia só funcionam para uma intensidade baixa do campo. Quando a intensidade foi aumentada, a mídia gerava mais multiculturalidade. Para um campo fraco, a mídia mais eficiente em homogeneizar a população foi a mídia local, enquanto que a mídia global foi a mais ineficiente. A mídia externa se apresentou intermediária. Os resultados estão sintetizados na figura 2.16.

O modelo de Axelrod também foi combinado com o modelo de Schelling de segregação urbana, por Gracia-Lázaro et al. em [21]. Uma certa densidade h de sítios vazios é introduzida e uma mobilidade espacial é definida de

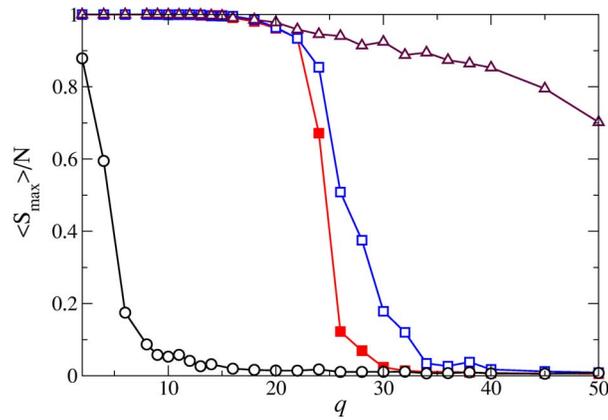


Figura 2.16: Influência da média (campo interagente) na transição ordem-desordem fora do equilíbrio, descrita pelo parâmetro $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$. Resultados são mostrados para $B = 0$ (quadrados cheios), para uma média global [$B = 10^{-5}$ (quadrados vazios) e $B = 0,3$ (círculos)] e para uma média local [$B = 10^{-5}$ (triângulos)]. Extraído de [20].

acordo com uma intolerância (um valor limiar de similaridade) aos vizinhos. Para uma densidade de agentes $1 - h$ abaixo do limite de percolação de sitios (0,593), um novo regime surge. Para valores baixos de q , uma fase multicultural bastante diferente daquela do modelo de Axelrod se organiza: *clusters* de uma mesma cultura se formam desconectados uns dos outros espacialmente. Conforme q aumenta, a mobilidade dos agentes aumenta e as trocas culturais combinadas com os deslocamentos favorecem a formação de um *cluster* gigante monocultural. Para valores ainda maiores de q , uma nova fase surge, também multicultural, mas com alguns agentes insatisfeitos que causam uma erosão dos *clusters* monoculturais formados, e no estado estacionário a mobilidade média dos agentes não vai a zero.

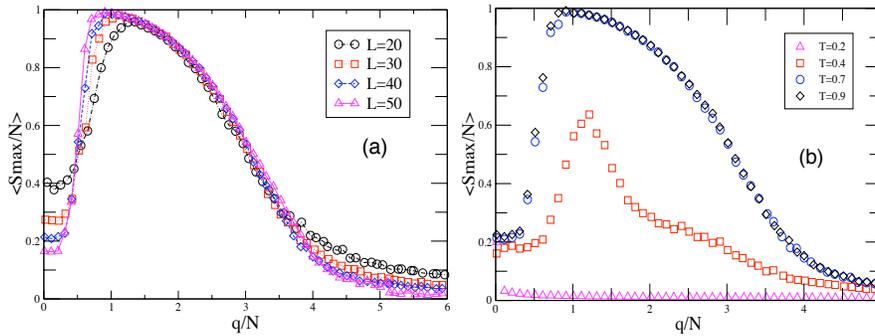


Figura 2.17: Parâmetro de ordem $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$ versus $\frac{q}{N}$ re-escalados para um valor intermediário de densidade de sitios vazios $h = 0,5$. O painel (a) corresponde a um alto valor de intolerância $T = 0,7$ e diferentes tamanhos de rede, enquanto que no painel (b) $L = 40$ e valores diferentes de intolerância foram usados. Figura extraída de [21].

Por fim, proposto por Kuperman em [17], há a introdução de uma regra de maioria no modelo de Axelrod. Sua motivação foi a de tornar o modelo mais realista e foram analisados dois casos. No primeiro caso – ao qual vamos

nos referir como *regra 1* –, um sítio só adota o *trait* de um vizinho numa interação se esse valor for mais aceito na sua vizinhança que o anterior. No caso de não haver diferença, a alteração ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}$. O segundo caso – que designaremos por *regra 2* – é uma extensão do primeiro, com uma avaliação cultural mais profunda pelo agente do seu entorno: a adoção do novo *trait* é feita com base em uma avaliação de todas as características com os vizinhos, o que é equivalente a dizer que o indivíduo favorece uma maioria com base em uma afinidade cultural mais profunda. Algumas representações de estados estacionários do modelo de Kuperman estão ilustradas nas figuras 2.18 e 2.19.

Ainda no trabalho de Kuperman foram usadas funções de Lyapunov (diferentes nos dois casos) para avaliação do estado estacionário: para esse modelo, estados metaestáveis são atingidos onde existem ainda nós ativos, mas qualquer mudança cultural preserva o valor da função de Lyapunov – que atinge um mínimo. Para os dois casos existe uma coesão cultural muito grande, que se manifesta macroscopicamente como uma tensão superficial no caso bidimensional (no artigo proposto, foi avaliado o caso unidimensional, com um parâmetro de religação p para a geração de uma rede de pequeno mundo). Foi estudada a dinâmica transiente, tanto da função de Lyapunov (figura 2.20) quanto das densidades de *links* separados em classes de *overlaps*, idéia que foi também usada no presente trabalho conforme o gráfico da figura 2.21.

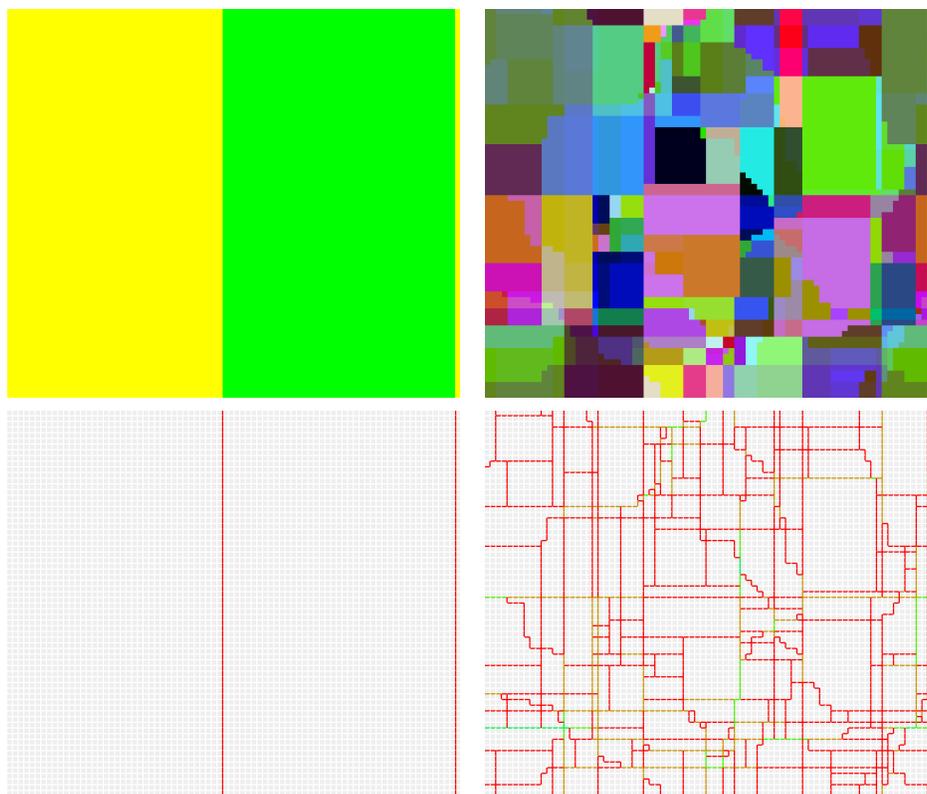


Figura 2.18: Estados estacionários para o primeiro caso do modelo de Kuperman, com a representação de sítios na primeira linha e de *links* correspondente na segunda linha, com $L = 75$. Da esquerda para a direita: $F = 2$ $q = 2$ e $F = 7$ $q = 5$. Atente à presença de *links* ativos no estado estacionário, diferentemente do modelo original de Axelrod.

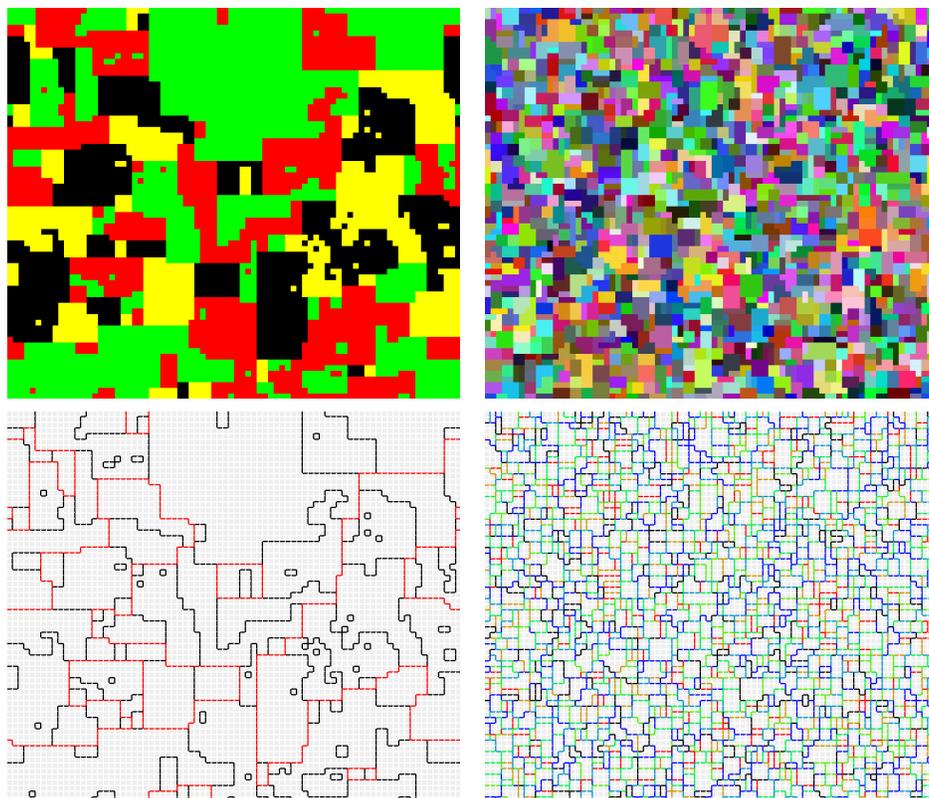


Figura 2.19: Estados estacionários para o segundo caso do modelo de Kuperman. Os parâmetros são os mesmos da figura 2.18. Note aqui também a existência de *links* ativos no estado estacionário, caracterizando estados metaestáveis.

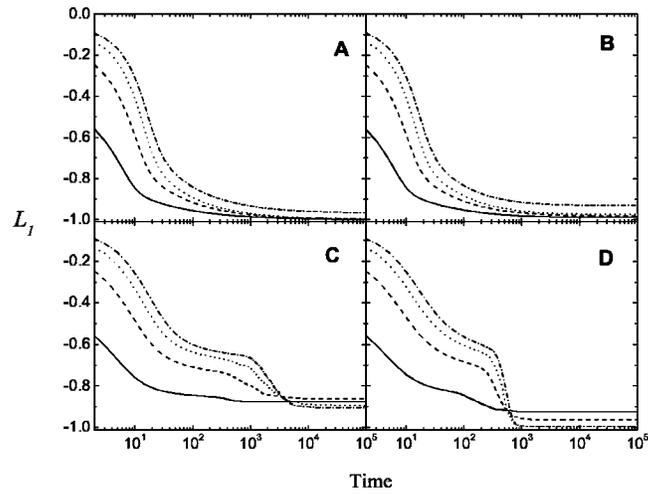


Figura 2.20: Evolução temporal da função de Lyapunov para o caso 1 normalizada, $L_1 = -\frac{L}{L_0}$, conforme equação 5.1, com $F = 10$. Cada gráfico corresponde a um valor diferente de p : (A) $p = 0$, rede regular, (B) $p = 0,01$, (C) $p = 0,5$ e (D) $p = 0,9$. As curvas diferentes têm parâmetro $q = 2$ (linha cheia), $q = 5$ (linha tracejada), $q = 10$ (linha pontilhada) e $q = 15$ (traço-ponto). Tirado de [17].

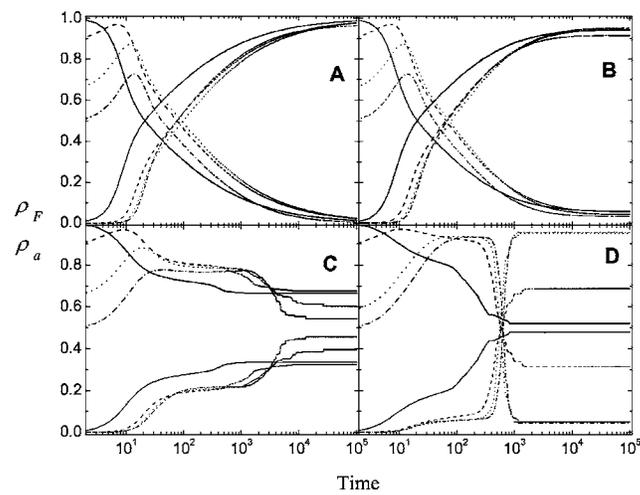


Figura 2.21: Proporção de *links* ativos ρ_A e *links* com similaridade unitária, ρ_F , vs tempo, para a regra 1, com $F = 10$. Cada gráfico corresponde a um valor diferente de p : (A) $p = 0$, rede regular, (B) $p = 0,01$, (C) $p = 0,5$ e (D) $p = 0,9$. As curvas diferentes têm parâmetro $q = 2$ (linha cheia), $q = 5$ (linha tracejada), $q = 10$ (linha pontilhada) e $q = 15$ (traço-ponto). Tirado de [17].

Capítulo 3

O Modelo com Tensão Superficial

De acordo com o que foi observado por Kuperman em [17], na introdução de uma regra de maioria – tanto na comparação de apenas um *feature* quanto numa verificação mais profunda de similaridade com os indivíduos de sua vizinhança – uma tensão superficial aparece em consequência dessa regra *adicional*. A ideia inicial era a de apenas tornar a dinâmica do modelo mais realista, mas isso acabou gerando, macroscopicamente, uma tensão superficial para redes quadradas – a introdução de regras de maioria normalmente tem esse efeito.

A ideia de tensão superficial em modelos culturais é bastante intuitiva. Partindo do argumento de homofilia na dinâmica, podemos estender isso para o espaço, e a formação de domínios culturais é uma consequência imediata. Indivíduos com um mesmo *background* cultural tendem a se manter próximos e unidos, se isolando em bolhas de uma mesma cultura (domínios culturais), que deveriam apresentar certa robustez. Entretanto, no modelo proposto por Axelrod, não existe nenhuma estrutura espacial, pelo contrário. Os *traits* ‘fluem’ pelos indivíduos (sítios) sem nenhuma coesão. Quando se introduz tensão superficial, a coesão cultural emerge e a região entre duas culturas se

torna, efetivamente, uma região de tensão e troca no espaço.

O trabalho desenvolvido nessa dissertação envolveu, basicamente, o estudo de uma variação do modelo de Axelrod sem regra da maioria, que acarretou em tensão superficial e em um modelo com uma dinâmica ainda mais rica e interessante. A tensão superficial foi introduzida de maneira bastante sutil e não alterou topologicamente a estrutura do espaço de configurações, ao contrário do modelo de Kuperman que impõe certas alterações¹, certa forma revelando a riqueza por trás das regras concebidas por Axelrod em seu modelo original.

3.1 Descrição do Modelo com Tensão

A ideia central deste novo modelo é a de economizar tempo em trocas culturais. As pessoas, a nosso ver, não perdem tempo tentando trocar culturalmente com vizinhos com os quais não haja troca possível. A única modificação introduzida nas regras, portanto, é a seguinte:

Passo 1: Sortear, aleatoriamente, um sítio ativo i e um dos seus vizinhos *ativos* $j \in \nu_i^A$, onde ν_i^A é a vizinhança ativa do sítio i com $0 < \omega_{ij} < 1$.

Passo 2: Com probabilidade igual à similaridade entre eles, há interação. A interação consiste em selecionar aleatoriamente um f tal que $\sigma_i^f \neq \sigma_j^f$, e fazer com que o sítio j passe a adotar o valor de σ_i^f .²

¹Algumas transições possíveis no modelo original de Axelrod ou no nosso modelo com tensão não são permitidas pela dinâmica do modelo de Kuperman

²Embora formalmente idêntico ao passo 2 do modelo de Axelrod, por conta das mudanças nas probabilidades introduzidas pelo passo 1 a regra não é mais simétrica. Nesse caso, se invertêssemos o fluxo da informação, ou seja, se fizéssemos com que o sítio i adotasse o *trait* de um dos *features* do sítio j (ao invés do contrário) teríamos um modelo com uma tendência a aumentar a superfície cultural, um estado de mistura metaestável que (exceto para redes muito pequenas) nunca chega a um estado absorvente. No caso do Axelrod, ao contrário, a dinâmica é simétrica com relação a essa troca.

Apenas a mudança do sorteio do conjunto de todos os vizinhos para o conjunto de vizinhos com os quais há *links* ativos (ν_i^A) muda drasticamente o comportamento transiente do modelo (e também algumas características do estado absorvente, como veremos mais à frente). É importante notar que as transições possíveis entre configurações ainda são *exatamente* as mesmas, somente suas probabilidades se modificam. Por isso, o grafo que representa a cadeia de Markov associada ainda tem a mesma topologia, mas os pesos das transições são diferentes e as regiões do espaço de configurações visitadas são bastante diferentes. Além disso, esse modelo com tensão ainda preserva diversas características do original, como a transição de fase (um pouco mais difícil de caracterizar), ou o fato de ser ainda um modelo onde a diversidade sempre diminui, que é o mesmo que dizer que ST continua sendo monotonicamente decrescente no tempo.

Suponha que um sítio ativo i tenha sido sorteado e que três de seus quatro vizinhos tenham *links* ativos com esse sítio i . Se a dinâmica em questão fosse a original do Axelrod, cada um dos 3 possíveis pares de sítios ativos poderiam ser escolhidos com probabilidade $\frac{1}{4}$. No modelo com tensão, proposto nessa dissertação, cada um deles teria $\frac{1}{3}$ de probabilidade de ser escolhido, conforme ilustrado na Figura 3.1. Essa modificação impõe uma assimetria nas regiões onde existe uma curvatura na fronteira cultural, mecanismo responsável pela tensão observada macroscopicamente: as quinas ou bicos têm tendência maior a desaparecer.

3.2 Membranas ou Fronteiras Culturais

Com o surgimento da tensão superficial, as trocas culturais tendem a ficar confinadas a regiões menores do espaço: surgem fronteiras bem definidas entre domínios culturais distintos, e a tendência delas é a de minimizar seu comprimento total (apesar de haver flutuações onde eventualmente esse com-

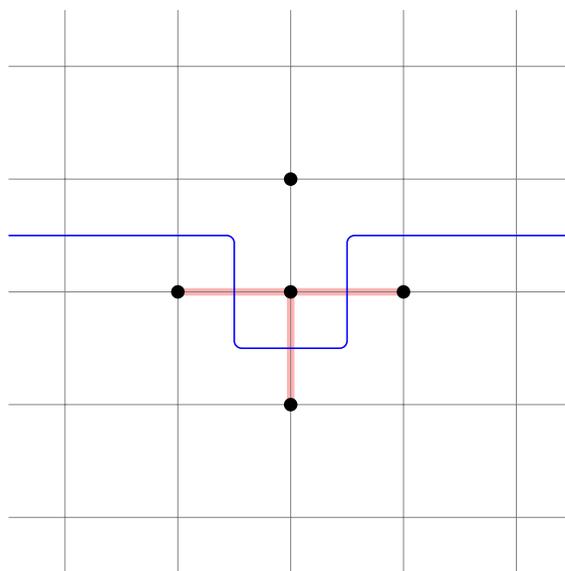


Figura 3.1: O nó i selecionado tem 3 *links* ativos (em vermelho); nesse caso a dinâmica com tensão resulta em probabilidades diferentes do modelo original caso esse nó seja sorteado. Se a linha azul representa uma fronteira cultural ativa, o bico dessa fronteira tem probabilidade maior de desaparecer (para o modelo original, a probabilidade de crescer ou desaparecer é a mesma).

primento possa aumentar³). Dependendo da similaridade entre sítios vizinhos, podemos ter três tipos de interface, que correspondem aos três tipos de *links* existentes: para similaridade nula, a fronteira é inativa e, portanto, imóvel, rígida, com atividade nula; para similaridades não-nulas e diferentes da unidade temos membranas ativas, cuja atividade⁴ aumenta linearmente com a similaridade entre as regiões; o terceiro tipo de *link* corresponde ao caso no qual dois sítios vizinhos compartilham todas as características cultu-

³Para o modelo de Kuperman com a regra 2, a membrana só diminui de tamanho, a tensão superficial é mais estrita.

⁴Uma membrana é tão mais ativa quanto maior sua capacidade de se mover no espaço e se curvar por conta das flutuações naturais do modelo. O oposto disso é chamado aqui de rigidez: quanto menos ativa, mais rígida é uma membrana.

rais (ou seja, estão idênticos), não havendo então membranas entre eles (eles fazem parte de um mesmo domínio cultural). Membranas com diferentes níveis de atividade coexistem numa mesma rede, desde membranas muito ativas e que se movem rapidamente através da rede, passando por membranas menos ativas, mais lentas, até membranas completamente rígidas, estáticas.

O estudo e caracterização de propriedades das membranas que separam regiões culturais – que não foi feito de forma sistemática nessa dissertação por falta de tempo – pode ser revelador. Uma das características mais evidentes dessas membranas é que elas concentram todas as trocas culturais e, portanto, se tornam regiões no espaço onde a diversidade e a multiculturalidade são notáveis, como mostrado na figura 3.2. Para uma simulação com parâmetros q e F , se dois domínios vizinhos têm *overlap* n , com $0 < n < F$ (membrana ativa), o número de culturas distintas que podem aparecer na membrana é dado por $2^{(F-n)} - 2$. São culturas de fronteira, e a existência de regiões com essas características é observada em ecossistemas, onde são conhecidas como *ecótonos*⁵. Podemos dizer que essas membranas multiculturais são, na verdade, compostas por $F - n$ membranas simples (aquelas cuja distância de Hamming entre as culturas que elas separam é unitária).

Outro fato interessante é que as membranas têm uma forte adesão umas às outras, e quando se tocam têm uma tendência a se manterem unidas⁶. Esse comportamento é distinto do apresentado pelo modelo de Kuperman com a regra 1, no qual as membranas não se juntam formando membranas multiculturais mais rígidas, mas ficam normalmente separadas.

Uma membrana ativa pode ativar uma fronteira rígida ao entrar em contato com ela ou ainda ser absorvida pela mesma. Duas membranas ativas podem se cancelar ao se encontrarem ou podem mudar sua atividade, inclusive podendo ficar inativas. Essa “mecânica” da interação entre as membranas é responsável pela modificação da topologia por onde podem fluir os *traits* e é

⁵Em ecologia, ecótonos são áreas de transição ambiental, onde comunidades ecológicas diferentes entram em contato e a diversidade é significativamente maior.

⁶Apesar dessa tendência, ocasionalmente acontecem descolamentos.

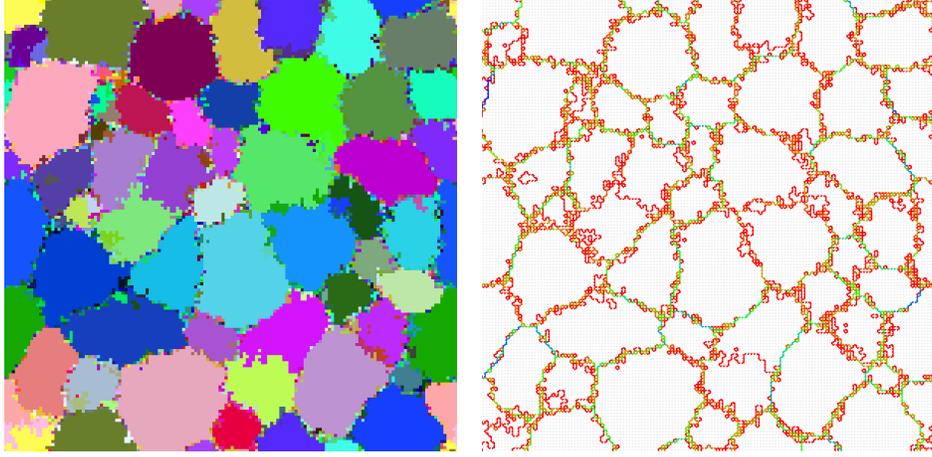


Figura 3.2: Configuração, mostrada nas duas representações, onde está clara a presença de multiculturalidade na fronteira entre duas regiões de culturas distintas e interagentes. $L = 150$, $F = 11$ e $q = 2$.

bastante rica. Uma exploração mais rigorosa para uma caracterização mais criteriosa dessa dinâmica e das possibilidades que daí derivam deve ser feita em trabalhos futuros.

Como as membranas exercem um papel crucial nesse modelo, é natural pensar nas suas densidades ρ_0 , ρ_A e ρ_F (equações (2.2), (2.4) e (2.3)). Para condições iniciais sorteadas a partir de uma distribuição uniforme, podemos facilmente calcular essas densidades (para uma rede grande):

$$\rho_0 = \left(\frac{q-1}{q}\right)^F \quad (3.1)$$

$$\rho_F = \left(\frac{1}{q}\right)^F \quad (3.2)$$

$$\rho_A = 1 - \left(\frac{q-1}{q}\right)^F - \left(\frac{1}{q}\right)^F \quad (3.3)$$

A dificuldade está em calcular analiticamente como essas quantidades evoluem com o tempo, dadas as correlações espaciais que se estabelecem.

Analisando os gráficos das evoluções temporais desses parâmetros pode-se perceber a riqueza do transiente, assim como compreendê-lo melhor. Veja a figura 4.4.

3.3 Metaestabilidade

Da modificação proposta – e do conseqüente surgimento das membranas – algumas regiões do espaço de configurações tornam-se atratores nos quais o sistema pode ficar preso por tempo indeterminado. Essas configurações (que não são congeladas mas que para todos efeitos são estacionárias) serão chamadas de metaestáveis. Para uma grande faixa de valores de q , para um determinado F fixo, o sistema eventualmente acaba aprisionado num desses “mínimos locais de energia”, estando um deles mostrado na figura 3.3. Esses estados também são atingidos em outros modelos com tensão superficial como o modelo de Kuperman.

A ordem de grandeza dos tempos de computação tornou inviável a investigação de eventuais estados absorventes – se é que eles são atingidos –, como no modelo original. Por exemplo, em simulações com $L = 64$, o estado metaestável era atingido em unidades de tempo de Monte Carlo⁷ da ordem de 10^3 , persistindo nesse estado até $t \approx 10^6$. Toda a análise subsequente será feita em termos desses estados estacionários metaestáveis.

O surgimento desses estados é simples de ser entendido. A tensão superficial leva as membranas a um comprimento próximo de seu valor mínimo (com alguma flutuação), de onde percebemos que, dependendo da geometria do entorno (normalmente determinada pelas fronteiras rígidas ou por outras membranas pouco ativas), as membranas móveis se deslocarão até encontrar os dois pontos cuja distância é mínima, como uma película de sabão em um arame forma a superfície mínima que passa pelos pontos determinados pelas bordas onde ela se prende à estrutura. Desse modo, determinadas configu-

⁷Número de iterações totais dividido pelo tamanho da rede. Todas as unidades de tempo nesse trabalho estão unificadas dessa forma, inclusive dos gráficos.

rações prendem as membranas de forma que seria necessário tempo infinito para que o sistema escape desse atrator.

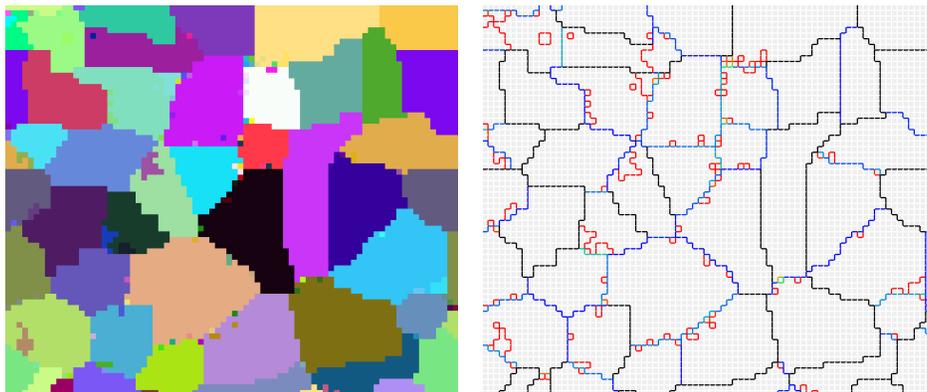


Figura 3.3: Configuração metaestável, com $F = 25$ e $q = 25$

Como exemplo ilustrativo, com as condições iniciais mostradas na figura 3.4, a membrana fica presa às extremidades da fronteira imóvel por tempo indeterminado. Se essa rede for grande o suficiente, porém finita, e o orifício pequeno o suficiente, o tempo de fato diverge. Situações similares a essa são atingidas para uma ampla faixa do espaço de parâmetros.

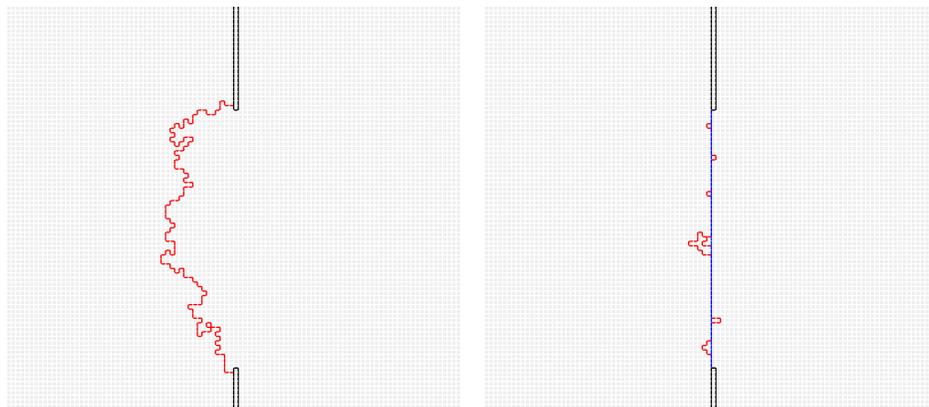


Figura 3.4: Arranjo experimental para mostrar as membranas presas às extremidades imóveis. No primeiro caso, a similaridade entre as duas culturas é de $\frac{29}{30}$, e no segundo caso de $\frac{1}{30}$, sendo a primeira mais ativa e a segunda mais rígida.

Capítulo 4

Transiente

Devido à presença da tensão superficial, observa-se a formação de estruturas interessantes, ausentes no modelo original. Por isso e pelo fato de que sistemas culturais reais de fato nunca chegam a um estado congelado, é importante uma análise do transiente e compreender os mecanismos envolvidos.

Pode-se detectar claramente três regimes distintos no transiente, que levam a estados estacionários diferentes (que ainda não foram completamente caracterizados nesse trabalho, mas entendemos como três fases distintas). No primeiro deles, para valores baixos de q , temos nas condições iniciais $\rho_A \approx 1 -$, ou seja todos os sítios praticamente estão ativos. Depois que um tempo suficientemente longo tenha transcorrido, muitas trocas já ocorreram e a similaridade média entre os agentes é maior; alguns pequenos *clusters* de uma mesma cultura começam a aparecer e desaparecer, mas se um deles atingir um certo tamanho mínimo, eles se tornam centros de nucleação de bolhas daquela cultura. Esses núcleos estão distribuídos espacialmente com uma certa densidade típica, que depende de alguma forma ainda não investigada dos parâmetros q e F . Quando as bolhas se tocam, a probabilidade de bolhas vizinhas terem muitas características em comum é alta e as membranas que as separam são mais ativas; nesse caso, as bolhas maiores crescem e acabam coalescendo com as menores, de forma que uma delas acaba por

dominar a rede toda. Essa fase coincide com a fase globalizada do modelo original e seu transiente pode ser visto nas figuras 4.1 e 4.2.

Conforme q aumenta, o valor de ρ_0 nas condições iniciais deixa de ser desprezível e começa a se tornar considerável, o que leva ao segundo regime. Nesse caso, a presença desses *links* inativos faz desses sítios regiões de nucleação na rede, nucleação essa muito mais rápida que a nucleação do regime anterior.¹ Com essa nucleação rápida, os sítios não têm tempo suficiente para realizarem trocas culturais e quando as bolhas crescem e se tocam essas fronteiras são mais rígidas, dando origem aos estados metaestáveis². Esse regime está ilustrado na figura 4.3.

Os estados metaestáveis têm domínios com um tamanho típico, separados por membranas com diversos valores de rigidez. Esporadicamente, por flutuações características desse modelo, membranas mais rígidas (compostas por várias membranas simples unidas) podem ter uma das membranas que a compõem descolada das demais, atravessando um dos domínios. Isso é equivalente a um dos *traits* de um domínio invadir determinado domínio vizinho³. Cada membrana simples que se descola da membrana rígida, torna-a ligeiramente menos rígida. Passado tempo suficiente, depois de várias dessas invasões, a membrana que separa os dois domínios fica menos rígida e mais ativa, podendo acontecer de duas bolhas coalescerem. Esse processo é bastante lento e tudo indica que, para redes grandes, estados estacionários onde não hajam mais mudanças estruturais sejam eventualmente atingidos.

¹Na transição entre os dois regimes observamos a competição entre os dois tipos de processo: a nucleação rápida decorrente da presença dos *links* inativos, que rapidamente são “corroídos” pelos *links* ativos. Com isso, as bolhas desaparecem e só mais tarde voltam a crescer.

²Se não forem usadas condições periódicas de contorno, as bordas (especialmente os quatro cantos) tornam-se pontos de nucleação. É o mesmo efeito de ter uma fronteira inativa.

³Há mais uma analogia com processos observados na coexistência de sistemas ecológicos: determinadas espécies podem ter expressões genéticas ligeiramente distintas em regiões geográficas diferentes. Eventualmente, um gene de um determinado grupo pode invadir outro grupo através de transferência genética na fronteira entre essas regiões.

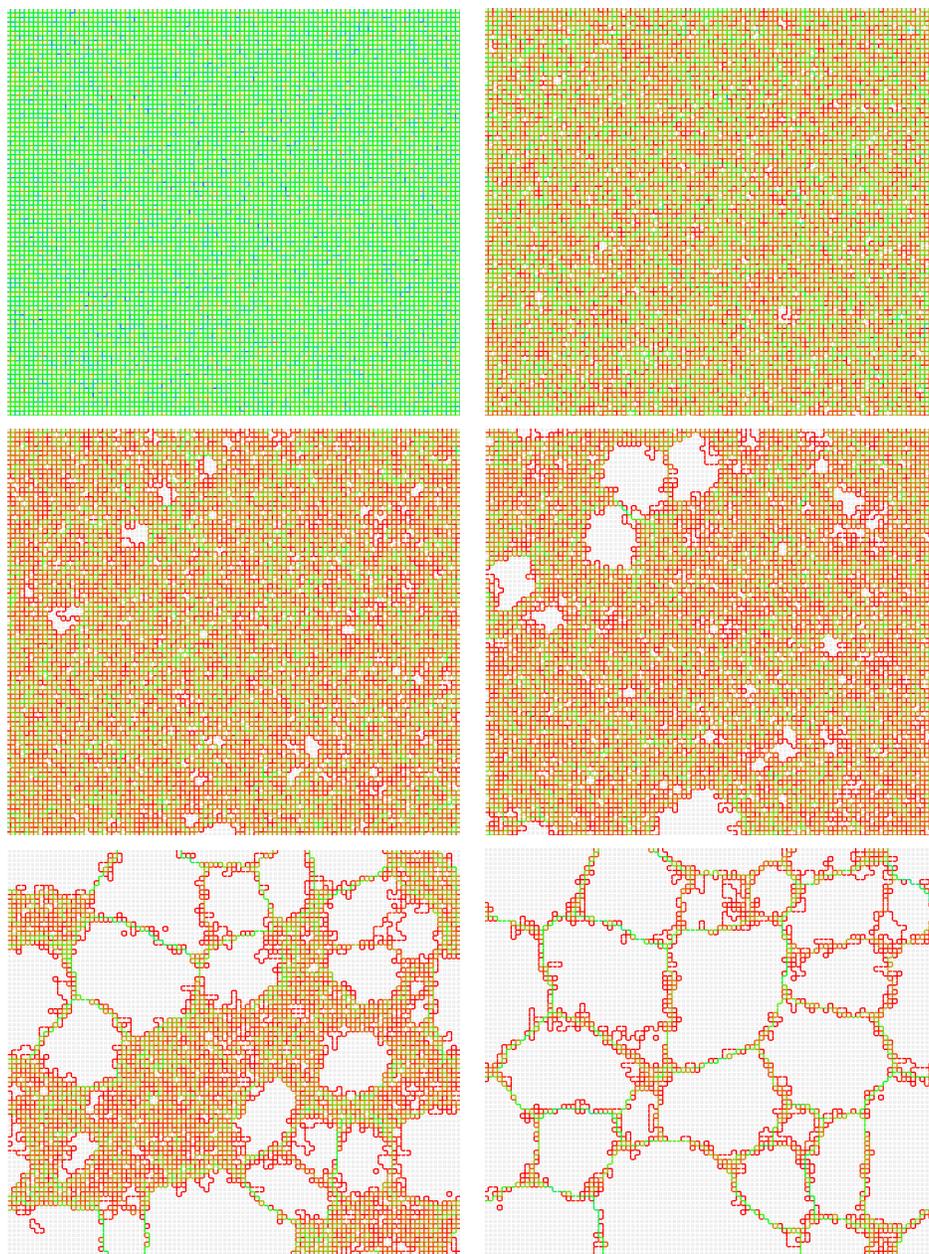


Figura 4.1: Evolução temporal da rede com parâmetros $L = 100$, $F = 25$ e $q = 2$, onde a nucleação de bolhas culturais é evidente. As sequência temporal das capturas de tela deve ser olhada da esquerda para a direita e de cima para baixo, como em um texto. Continua na figura 4.2.

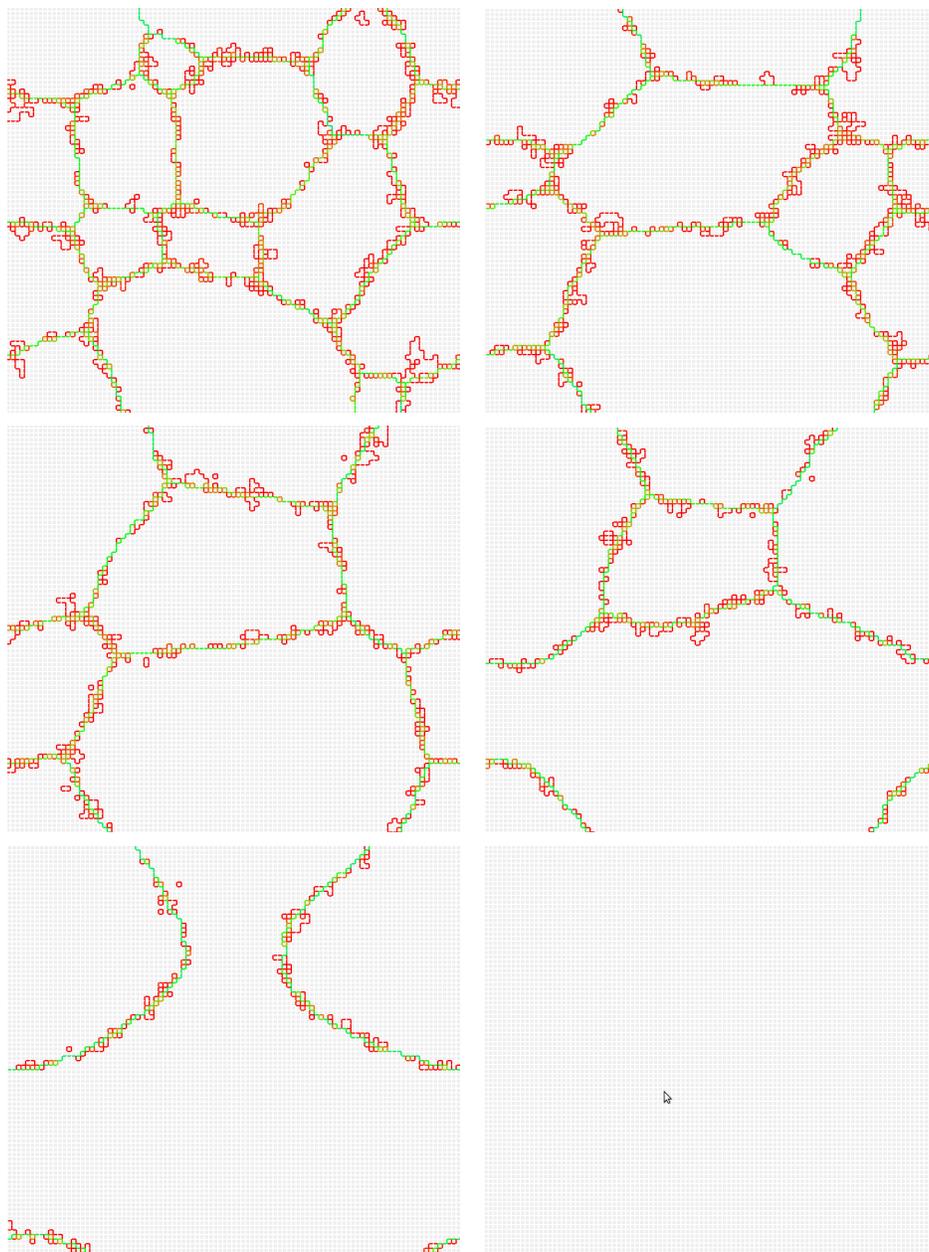


Figura 4.2: Evolução temporal da rede com parâmetros $L = 100$, $F = 25$ e $q = 2$, onde as bolhas coalescem depois da nucleação e crescimento. A seqüência temporal das capturas de tela deve ser olhada da esquerda para a direita e de cima para baixo, como em um texto. Continuação da figura 4.1.

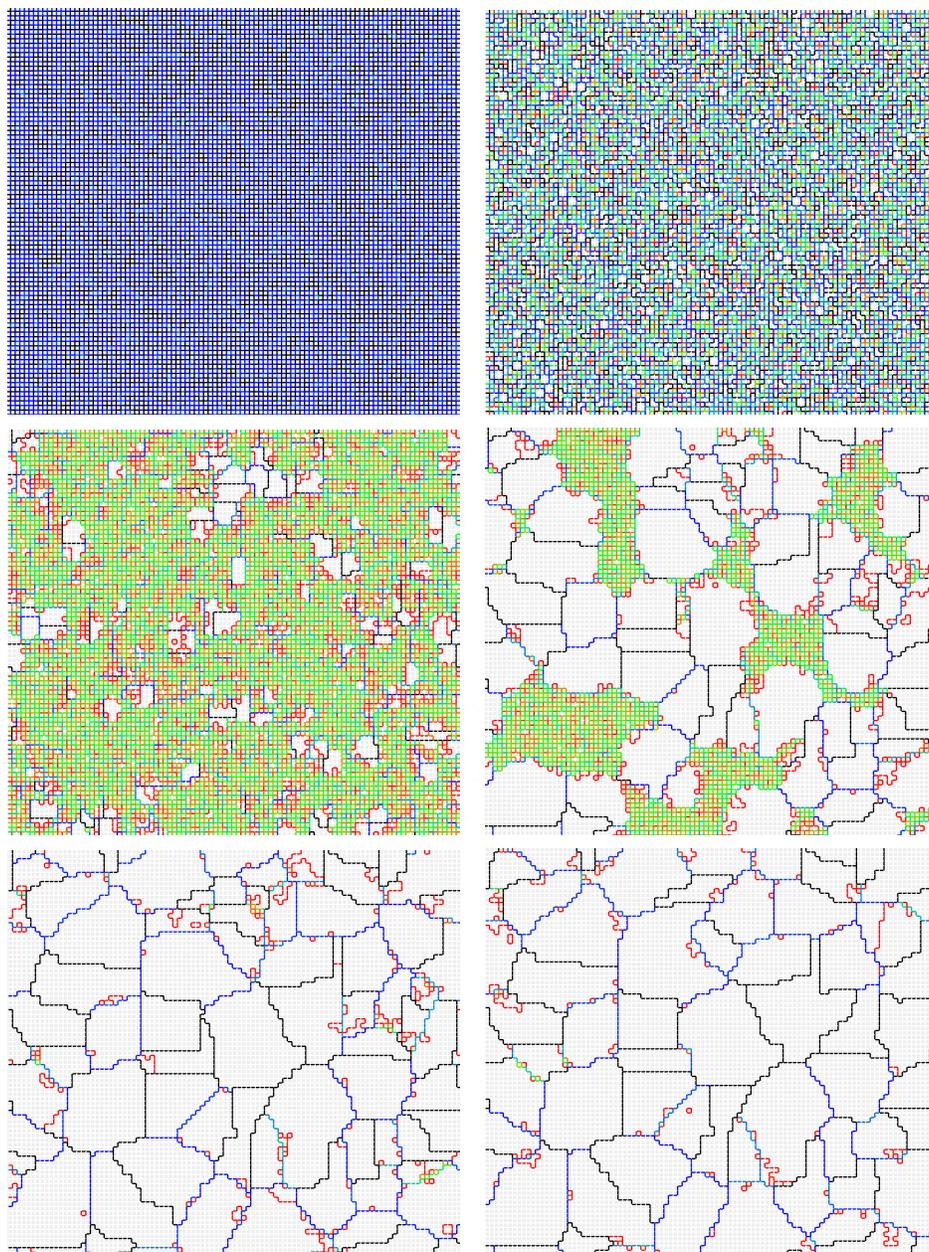


Figura 4.3: Evolução temporal da rede com parâmetros $F = 25$ e $q = 25$. A nucleação rápida de bolhas culturais leva a um estado metaestável. A sequência temporal das capturas de tela deve ser olhada da esquerda para a direita e de cima para baixo, como em um texto.

Essa fase intermediária é bastante interessante pela presença de atratores no espaço de configurações onde as culturas são coesas⁴ e as trocas se dão nas fronteiras. Esse é um comportamento qualitativamente mais realista que o do modelo original de Axelrod, e a nosso ver esta é a fase mais interessante do modelo.

O terceiro regime é muito similar à fase polarizada do modelo de Axelrod. A diferença é que dentro dos núcleos de corrosão que crescem, não há difusão de todas as culturas que lá estão. Elas também estão separadas por membranas – e dessa forma o estado absorvente é atingido mais rapidamente e para valores um pouco menores de q (como exemplo, para $F = 25$ a transição ocorre para $q_{crit} \approx 145$ para o modelo de Axelrod e a segunda transição ocorre em $q_{crit} \approx 110$ para o modelo com tensão). O estado absorvente, por sua vez, é indistinguível do observado no modelo original: alguns *clusters* não muito grandes estão presentes em meio a muita diversidade cultural, mas não há mais interações possíveis entre eles. As características do transiente dos três regimes distintos pode ser observado nas evoluções temporais dos parâmetros ρ_0 , ρ_A e ρ_F , conforme ilustrados na figura 4.4.

O modelo de Kuperman, em ambos os casos, tem tensão superficial e transiente muito diferentes do modelo que acabamos de propor e discutir, e certamente é indispensável a comparação feita, sendo esse o único estudo, até onde temos conhecimento, de uma versão do modelo de Axelrod com tensão superficial. Para comparar os transientes dos quatro modelos aqui considerados, traçamos as trajetórias dos modelos num espaço de fases bi-dimensional, com a entropia em um eixo e a energia em outro. Os quatro modelos apresentam assinaturas características. Partindo de uma mesma configuração inicial, para um mesmo conjunto de parâmetros, observamos trajetórias qualitativamente distintas nesse espaço. Veja a figura 4.5.

⁴Os sítios de uma mesma cultura estão unidos entre si e razoavelmente parados na rede, diferente do modelo original no qual agentes de uma mesma cultura não tinham tendência a permanecer unidos e as culturas não estavam atreladas a determinados agentes, mas fluíam livremente por eles.

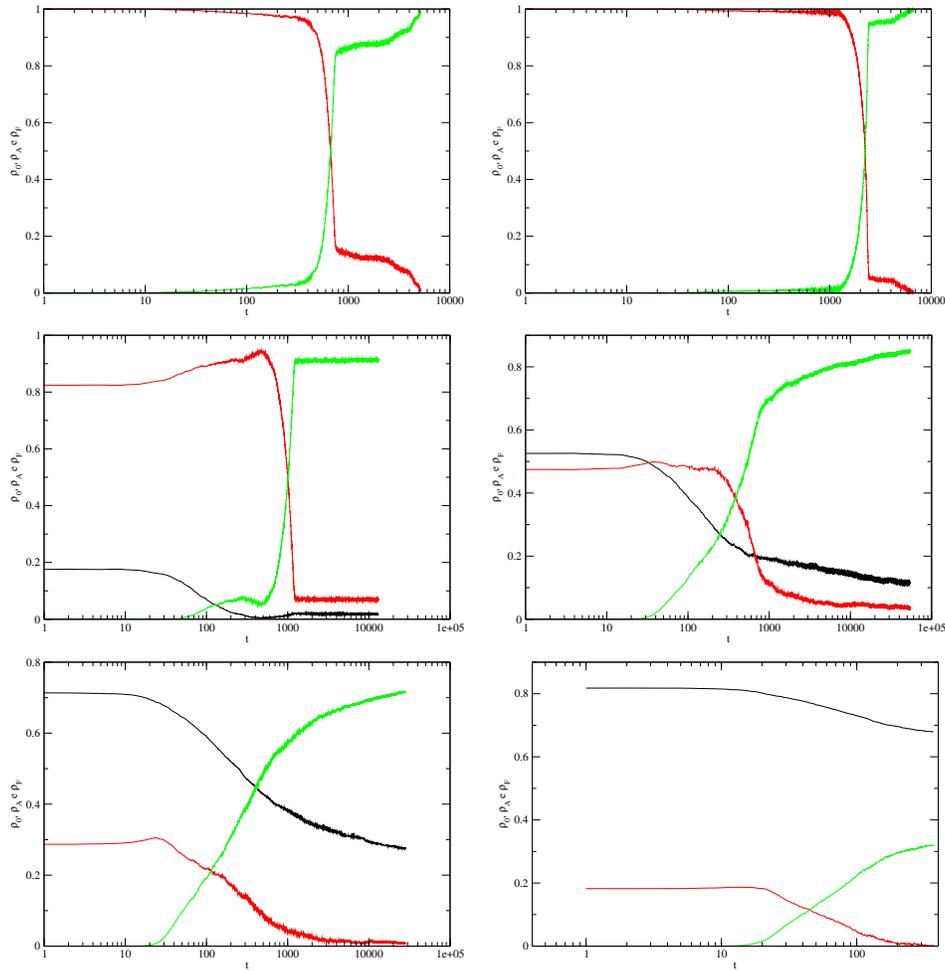


Figura 4.4: Evolução temporal das densidades ρ_0 (preto), ρ_A (vermelho) e ρ_F (verde), para uma rede com $L = 80$ e $F = 25$. Da esquerda para a direita, na primeira linha $q = 2$ e $q = 4$; na segunda linha $q = 15$ e $q = 40$; na terceira linha $q = 75$ e $q = 125$. Para valores pequenos de q a nucleação ocorre em torno de $t \approx 10^3$ passos de Monte Carlo, e correspondem a bolhas de uma única cultura sendo nucleadas, normalmente bem arredondadas. No segundo regime, temos a nucleação rápida, que ocorre com a presença de fronteiras rígidas, que viram pontos de nucleação, formadas por duas ou mais bolhas de culturas diferentes coladas juntas no início da nucleação. Note que esse crescimento é desacelerado pela “corrosão” das membranas fixas (diminuição de ρ_0), conforme observamos em $q = 15$ um desaparecimento de bolhas de nucleação rápida para, mais tarde, reaparecerem bolhas de nucleação lenta. No terceiro regime, a corrosão não é suficiente para que ρ_F cresça muito, e temos *clusters* pequenos e esparsos na rede.

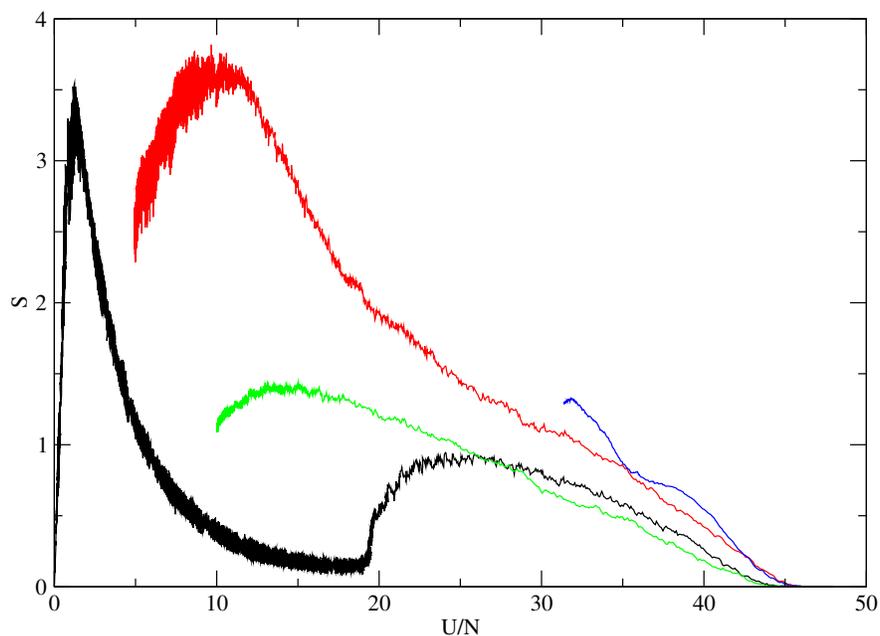


Figura 4.5: Trajetórias no espaço de fases para uma mesma condição inicial, para os quatro modelos: Axelrod (preto), Kuperman com a regra 1 (verde), Kuperman com a regra 2 (azul) e o modelo com tensão (vermelho). Todas elas têm os mesmos parâmetros: $L = 50$, $F = 25$ e $q = 25$, e mesmas condições iniciais, nas quais $S = 0$ e $\frac{U}{N} = 47,9$. Partindo do mesmo ponto, as trajetórias (que vão no sentido de diminuir a energia, da direita para a esquerda) têm formatos característicos para cada uma das dinâmicas em questão.

Capítulo 5

Transição de Fase

Sistemas descritos em redes, sejam elas regulares ou não, vêm sendo estudados no conhecido limite termodinâmico. Esse limite surgiu, historicamente, juntamente com a mecânica estatística – ele está na base dessa área da física – numa tentativa de contornar o problema de como estudar sistemas com componentes demais para serem descritos por suas equações de movimento. É importante também por revelar características essenciais dos sistemas em questão. No caso de gases ou materiais ferromagnéticos, a ordem de grandeza do número de átomos ($\approx 10^{23}$) que normalmente compõem esses sistemas inviabiliza de fato outro tipo de análise.

Na maioria dos casos, esse limite não é calculável analiticamente, mas numerosas técnicas podem ser utilizadas para compreendê-lo. No modelo de Axelrod, médias tomadas sobre ensembles – que consistem em diversas simulações com mesmas condições iniciais e mesmo conjunto de parâmetros – podem ser plotadas para obter gráficos do comportamento de um parâmetro de ordem em função de um parâmetro de controle. Observando o comportamento desses gráficos com o aumento do tamanho das rede pode-se fazer uma extrapolação para obter o comportamento do sistema no limite termodinâmico e caracterizar a transição de fase.

Uma proposta alternativa para encontrar um valor mais preciso de q_{crit}

para o modelo de Axelrod foi feita por Villegas-Febres e Olivares-Rivas em [22]; o uso dos conceitos fundamentais da termodinâmica (energia e entropia), em uma formulação adaptada para o modelo cultural, permitiu a introdução do conceito de temperatura nesse novo contexto.

A energia de uma determinada configuração foi definida da maneira mais intuitiva: uma soma dos *overlaps* efetuada sobre todas as arestas da rede. Mas, dessa forma, a energia mínima (associada a um estado globalizado) tem um valor negativo e a máxima (associada a um estado polarizado com todos os sítios inativos e nenhum *cluster* de mesma cultura, ou seja, com $\rho_0 = 1$) tem valor nulo. Então, define-se o estado fundamental como o globalizado, de energia $U_0 = -2\epsilon NF = \epsilon L_0$ e a energia é sempre calculada com relação a esse referencial. A constante ϵ é introduzida para fazer uma correção de escala, mas aqui vai ser desprezada.

O *overlap* total é dado por:

$$L = -\frac{F}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \nu_i} \omega_{ij} \quad (5.1)$$

e a energia de determinada configuração vale:

$$U = \epsilon L - \epsilon L_0 \quad (5.2)$$

A energia interna E é simplesmente a média sobre várias realizações da energia U .

A entropia, na verdade, é o conceito mais importante nessa abordagem. Para determinada configuração, é feita uma contagem de tamanho dos domínios culturais (por sítios contíguos). Chamando de N_M o número de agentes que pertencem a *clusters* de tamanho M , e de $P_M = \frac{N_M}{N}$ a probabilidade de um sítio escolhido aleatoriamente pertencer a um *cluster* de tamanho M , a forma da entropia de Shannon é usada com essa probabilidade P_M :

$$S = -k \sum_{M=1}^N P_M \ln P_M \quad (5.3)$$

A vantagem do uso dessa forma para a entropia é simples: no caso de uma distribuição de culturas totalmente polarizada ($\rho_0 = 1$) a entropia vale 0, assim como no caso completamente globalizado. Mas entre esses dois extremos, a entropia apresenta um pico, que coincide com o valor da transição (figura 5.1). Usando a relação termodinâmica $T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1}$, Villegas-Febres e Olivares-Rivas mostraram que, na fase globalizada, a temperatura é positiva e na fase polarizada, negativa; exatamente na transição, a temperatura diverge (de um lado para $-\infty$ e do outro para $+\infty$). Veja a figura 5.3.

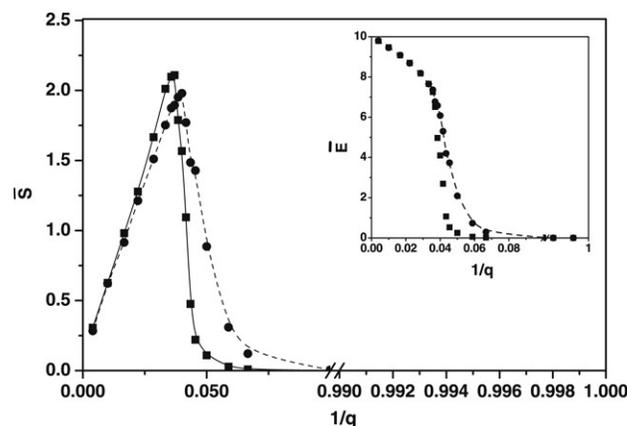


Figura 5.1: Entropia reduzida por agente $\bar{S} = \frac{S}{Nk_B}$ como função de $\frac{1}{q}$. A parte interna mostra a energia interna reduzida correspondente, $\bar{E} = \frac{E}{N\epsilon}$ como função de $\frac{1}{q}$. Tirado de [22].

Dessa forma, temos um método simples e direto para a determinação do valor crítico para o modelo de Axelrod. Conforme a rede aumenta de tamanho, o pico fica mais estreito em torno do ponto crítico. Veja figura 5.2.

No modelo com tensão superficial, a existência de configurações meta-estáveis para valores intermediários de q torna a caracterização muito mais difícil. Optamos por truncar as simulações nessas configurações e fazer as medidas sobre esses estados. Para ilustrar as três fases, a figura 5.4 apresenta

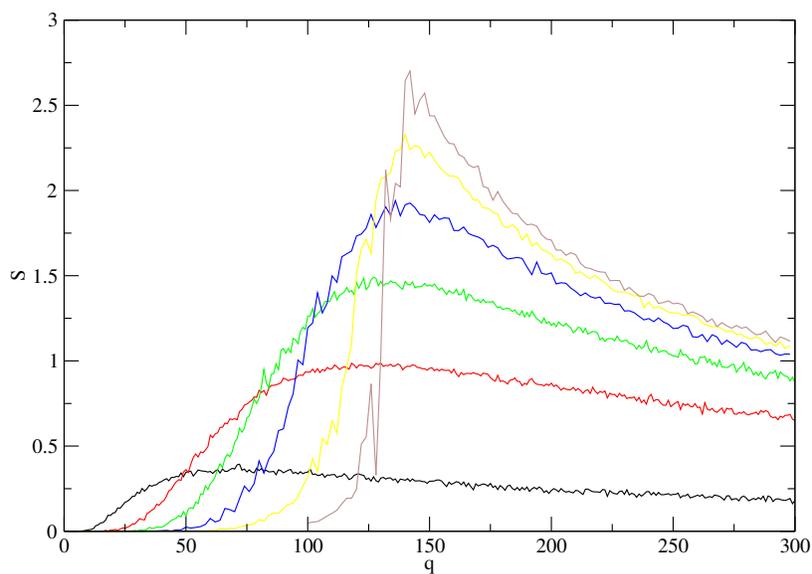


Figura 5.2: Entropia vs. q nos estados absorventes para diversos tamanhos de rede, indicando que o pico fica mais estreito em torno do valor crítico $q_{crit} \approx 145$, que se desloca para a direita conforme L aumenta, no modelo original. Os gráficos foram plotados com $L = 2$, $L = 4$, $L = 8$, $L = 16$, $L = 32$ e $L = 64$, com as médias realizadas sobre 1000, 500, 200, 80, 40 e 10 realizações independentes, respectivamente. F foi fixado em 25.

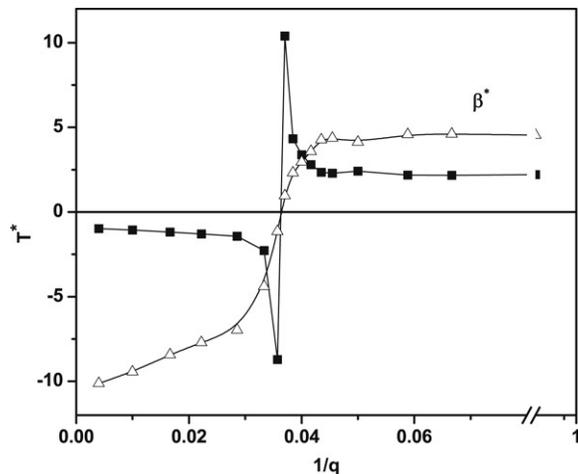


Figura 5.3: Temperatura reduzida $T^* = \frac{k_B T}{\epsilon}$ como função de $\frac{1}{q}$, para $N = 1600$ agentes (quadrados). O inverso da temperatura reduzida β^* também é mostrado, escalado por um fator de 10 (triângulos). Tirado de [22].

configurações realizadas em uma rede bastante grande, com as características de cada uma das três fases. Na primeira, o estado globalizado; na segunda, a presença de bolhas culturais metaestáveis; na terceira, alguns *clusters* de mesma cultura imersos em meio a grande multiculturalidade.

Se utilizarmos o parâmetro de ordem mais comum, $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$, observamos com o crescimento da rede o surgimento de um patamar na região intermediária, que sugere duas transições de fase. Mas como o crescimento do tamanho da rede vem acompanhado de uma diminuição do nível do patamar intermediário, este não se mostrou um bom método para caracterizar as transições no limite termodinâmico. Veja a figura 5.5.

A primeira transição tem distribuição bimodal do parâmetro de ordem $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$ na região crítica e representa a transição de uma fase globalizada para uma fase metaestável com bolhas rígidas, conforme ilustrado pelos histogramas da figura 5.6. Na segunda transição observamos um estreitamento da

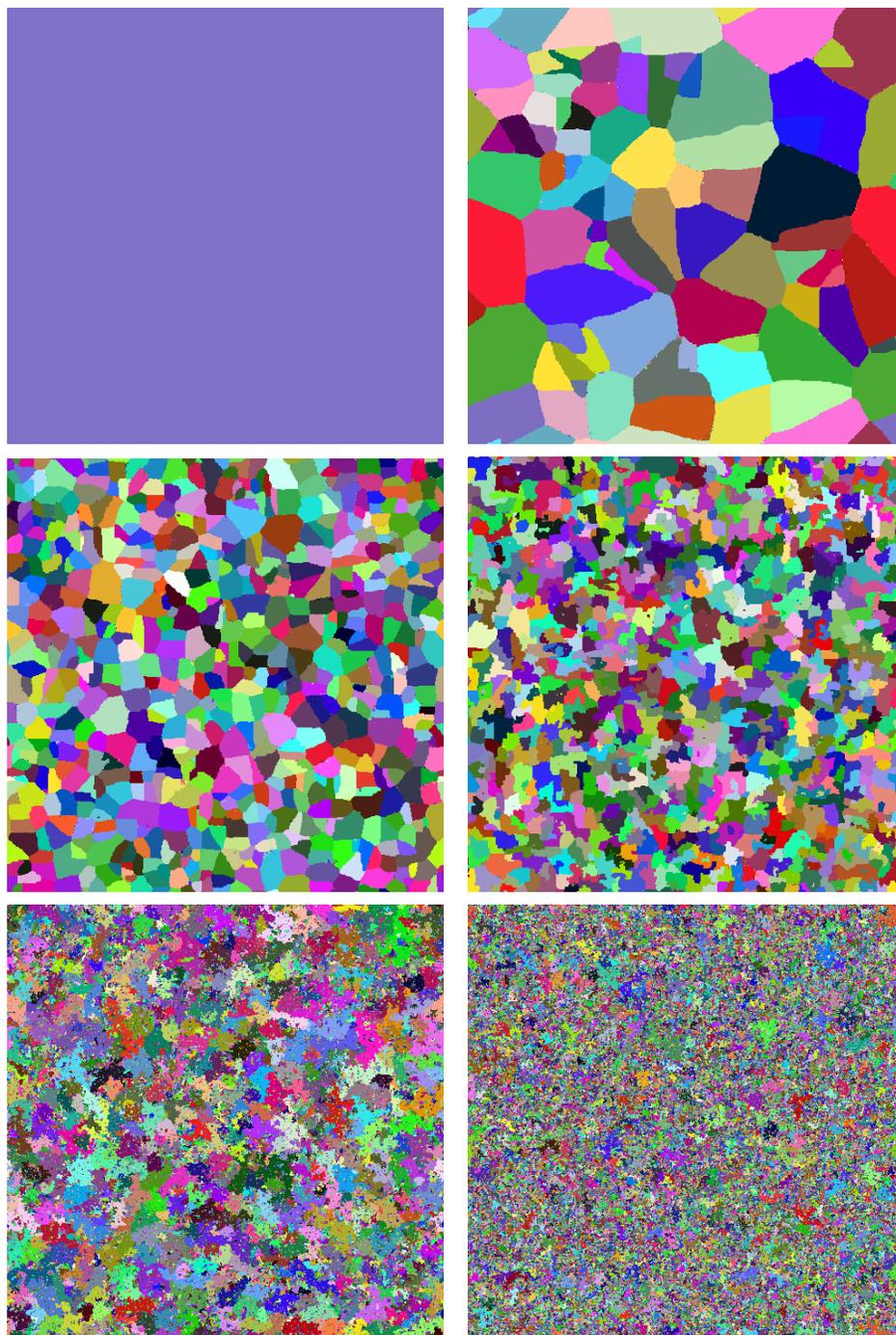


Figura 5.4: Estados absorventes ou metaestáveis de uma rede quadrada grande ($L = 500$), com $F = 25$, ilustrando as três fases distintas. Da esquerda para a direita: na primeira linha, $q = 2$ e $q = 15$; na segunda linha, $q = 20$ e $q = 50$; na terceira linha, $q = 100$ e $q = 125$. Essas simulações demoraram duas semanas para serem completadas.

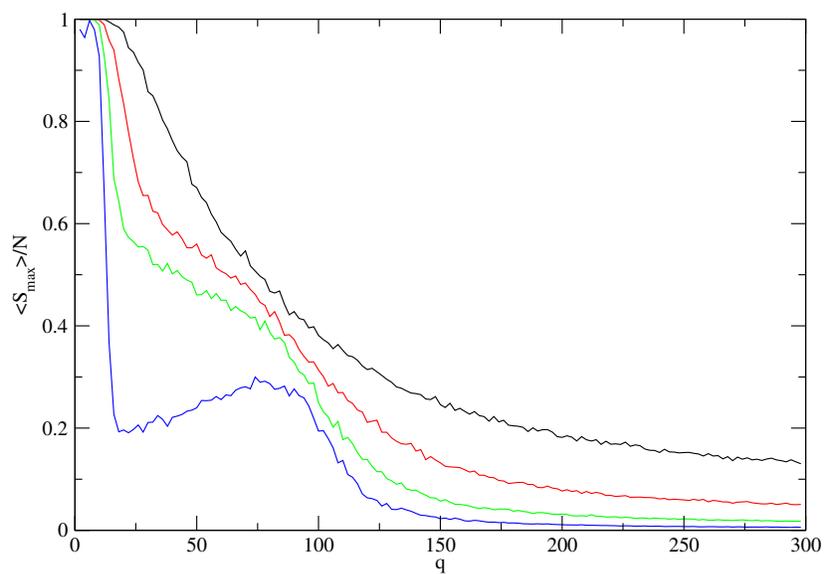


Figura 5.5: $\frac{\langle S_{max} \rangle}{N}$ vs. q nos estados estacionários para diversos tamanhos de rede, para o modelo com tensão, mostra um platô na região intermediária do parâmetro q , que diminui conforme L aumenta. Os gráficos foram plotados com $L = 5$ (preto), $L = 10$ (vermelho), $L = 20$ (verde) e $L = 40$ (azul), com as médias realizadas sobre 600, 400, 200 e 100 realizações independentes, respectivamente. F foi fixado em 25 e para as duas redes maiores foi necessário truncar as simulações em $t = 10^5$ por conta dos estados metaestáveis.

distribuição assim como um deslocamento do valor médio; compreende transição para uma fase polarizada, mais fragmentada (correspondente à fase observada no modelo original), conforme os histogramas da figura 5.7. O desvio padrão dessas distribuições está ilustrado na figura 5.8. A novidade desse modelo é justamente essa fase intermediária de bolhas rígidas, cujos estados não são absorventes, mas metaestáveis.

Se tentarmos usar a entropia nesse caso, notamos que na região intermediária surge um largo patamar ao invés de um pico bem definido, não sendo essa portanto, como já assinalado, uma boa forma de caracterizar nenhuma das duas transições. Veja figura 5.9.

Talvez a forma mais adequada para caracterizar completamente as três regiões distintas seja com os parâmetros ρ_0 , ρ_A e ρ_F . Com esses parâmetros as características gerais dos três tipos de ordem estão melhor sintetizadas, e ilustrados na figura 5.10. Mesmo assim, esses parâmetros ainda não oferecem uma boa indicação das transições ou dos valores críticos, sendo necessário estender esse trabalho para uma melhor compreensão do fenômeno em redes maiores. Analisar e caracterizar as transições observadas, construindo um diagrama de fases com o cuidado necessário exigiria um tempo incompatível com um mestrado, e fica para um próximo trabalho.

Quando traçamos o gráfico de ρ_0 , ρ_A e ρ_F para a dinâmica do modelo de Kuperman, é ainda mais clara a presença de estados metaestáveis não absorventes nessa região intermediária, ilustrada no gráfico da figura 5.11.

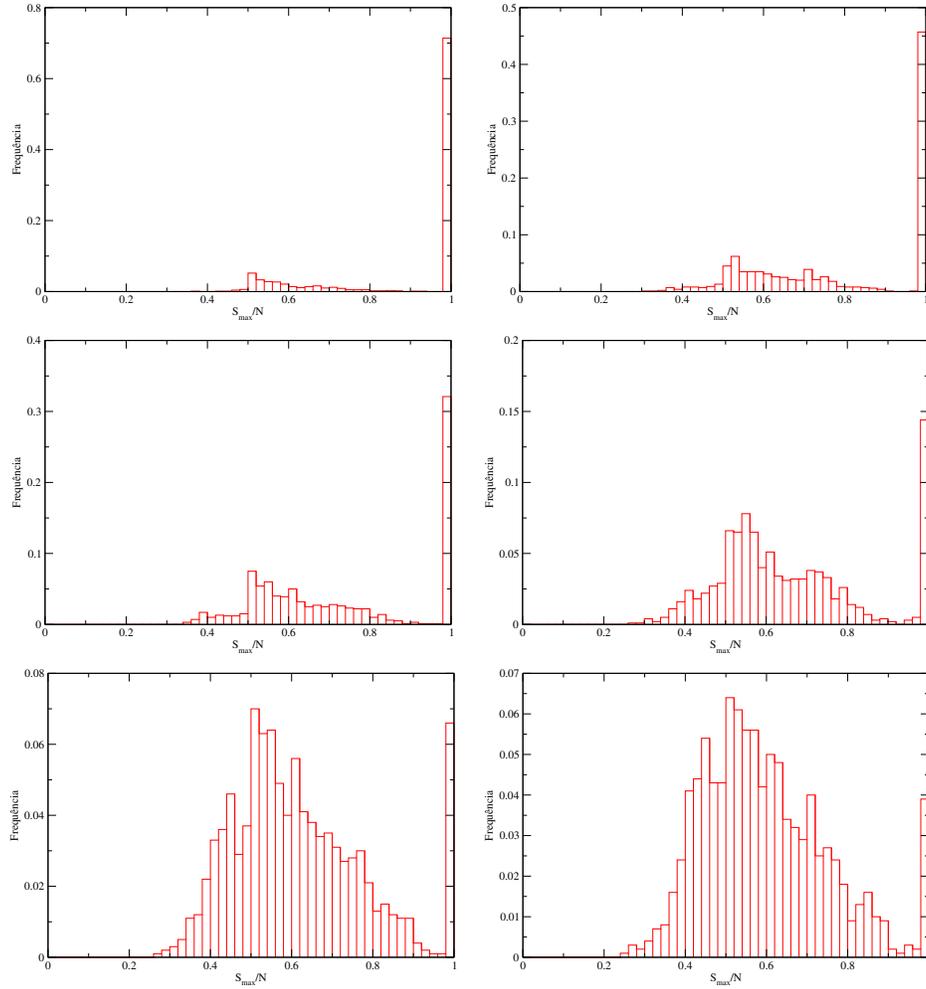


Figura 5.6: Histogramas indicando a distribuição bimodal do parâmetro de ordem $\frac{S_{max}}{N}$. Foram realizadas, para cada histograma, 1000 simulações em uma rede com $L = 20$ e $F = 25$, truncadas em $t = 10^5$ passos de Monte Carlo. Os histogramas foram realizados para valores de q em torno da primeira transição, e têm valores, da esquerda para a direita, na primeira linha: $q = 20$ e $q = 24$; na segunda linha: $q = 25$ e $q = 30$; na terceira linha: $q = 35$ e $q = 40$.

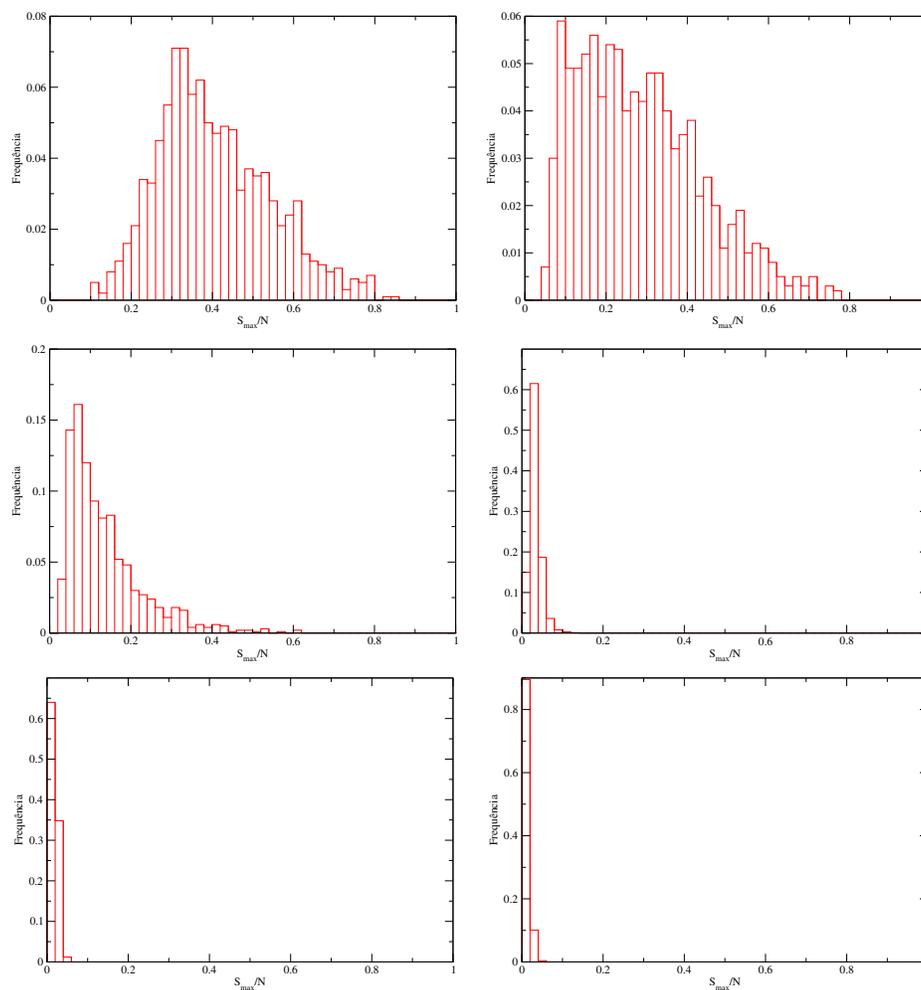


Figura 5.7: Histogramas indicando a distribuição unimodal do parâmetro de ordem $\frac{S_{max}}{N}$ na segunda transição. Foram realizadas, para cada histograma, 1000 simulações em uma rede com $L = 20$ e $F = 25$, truncadas em $t = 10^5$ passos de Monte Carlo para $q = 90$ e $q = 110$, com estados metaestáveis ainda presentes. Os histogramas foram realizados para valores de q em torno da segunda transição, e têm valores, da esquerda para a direita, na primeira linha: $q = 90$ e $q = 110$; na segunda linha: $q = 130$ e $q = 200$; na terceira linha: $q = 275$ e $q = 350$.

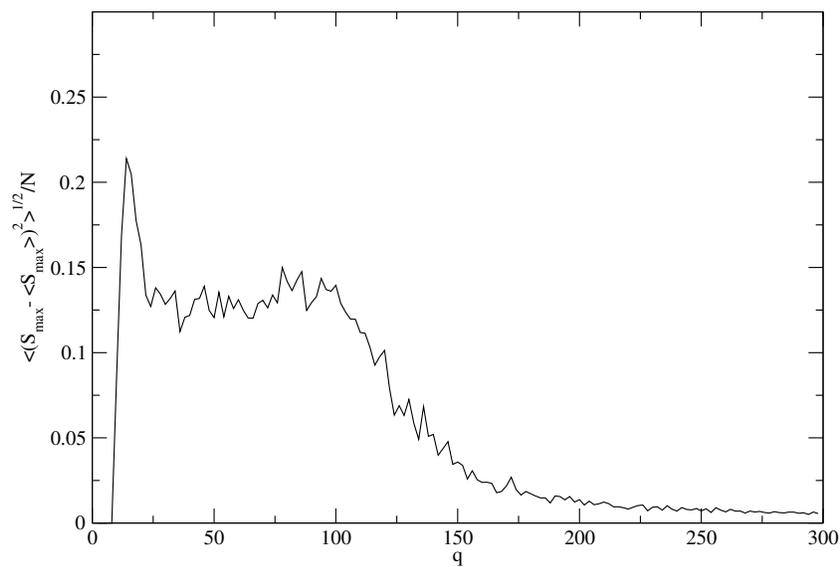


Figura 5.8: Desvio padrão das distribuições do parâmetro $\frac{S_{max}}{N}$ em função de q , para um valor de F fixado em 25 e uma rede de tamanho $L = 20$, com uma média realizada sobre 200 simulações independentes. O pico corresponde à primeira transição, depois da qual se estabelece um platô até o valor da segunda transição, e então o desvio padrão decai e tende a zero.

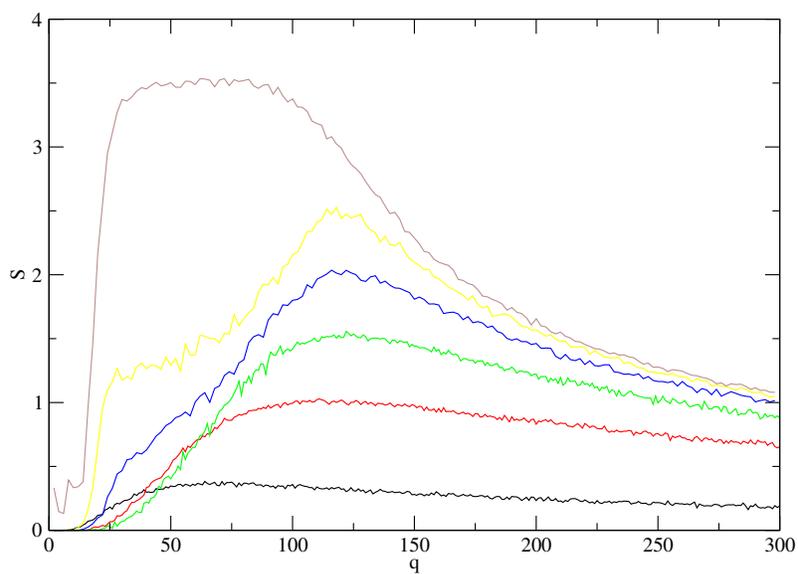


Figura 5.9: Entropia vs. q nos estados absorventes para diversos tamanhos de rede, para o modelo com tensão, não apresenta comportamento trivial conforme L aumenta. Os gráficos foram plotados com $L = 2$, $L = 4$, $L = 8$, $L = 16$, $L = 32$ e $L = 64$, com as médias realizadas sobre 1000, 500, 200, 80, 40 e 20 realizações independentes, respectivamente. F foi fixado em 25 e para as duas redes maiores foi necessário truncar as simulações em $t = 10^5$ por conta dos estados metaestáveis.

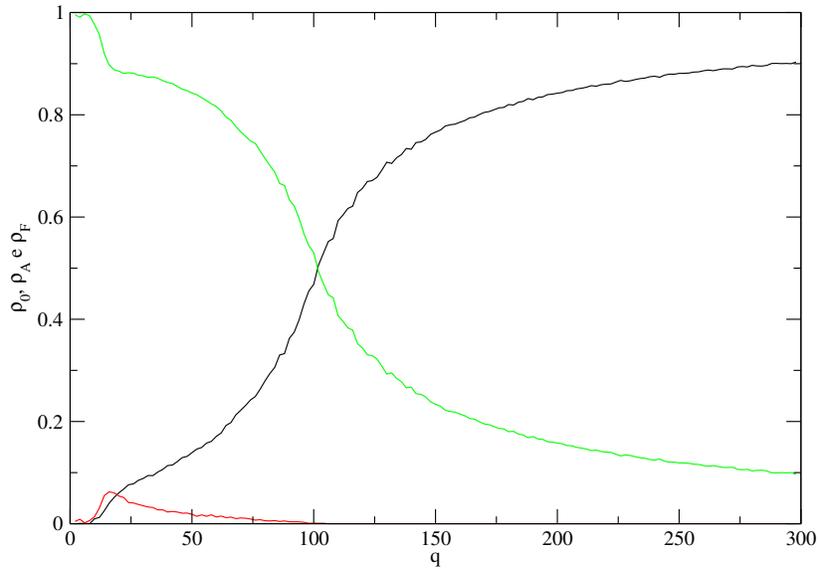


Figura 5.10: ρ_0 (preto), ρ_A (vermelho) e ρ_F (verde) versus q no estado estacionário. Esse gráfico é aquele que melhor caracteriza as três fases distintas: Na primeira, para q pequeno, temos a fase globalizada, com $\rho_F \approx 1$. Na segunda fase, para valores intermediários de q , a metaestabilidade é indicada pela presença de uma densidade considerável de membranas ativas, e temos $\rho_0 \neq 0$ e $\rho_A \neq 0$. ao longo dessa fase, ρ_0 cresce até atingir um limite no qual as membranas ativas não conseguem mais corroer as fronteiras inativas e surge a terceira fase, para valores de $q \gtrsim 110$, na qual $\rho_0 > \rho_F$ e $\rho_A = 0$. Os parâmetros usados para traçar o gráfico foram: $L = 64$, $F = 25$, média tomada sobre 20 realizações independentes e, o truncamento dos estados metaestáveis em $t = 10^5$.

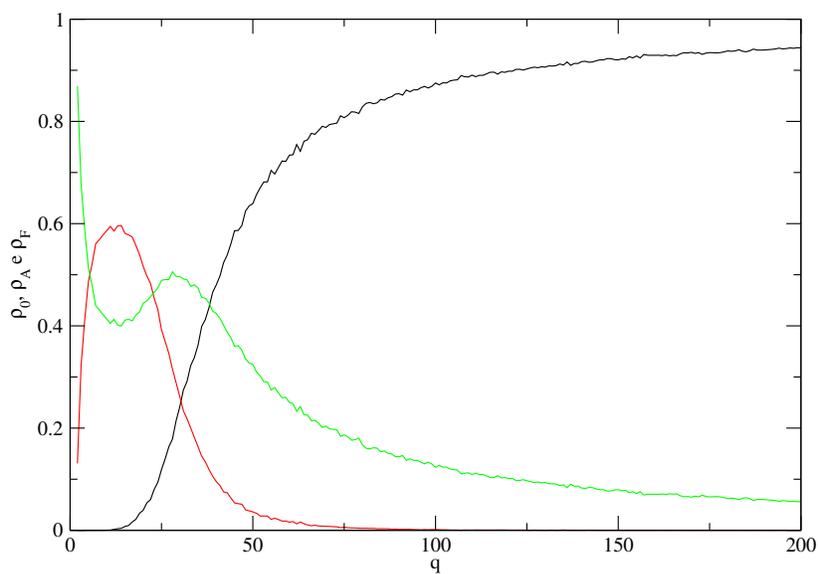


Figura 5.11: ρ_0 (preto), ρ_A (vermelho) e ρ_F (verde) versus q no estado estacionário do modelo de Kuperman com a regra 1. Pode-se observar a presença de estados estacionários que não são absorventes, caracterizados por $\rho_A \neq 0$. Os parâmetros usados para traçar o gráfico foram: $L = 20$, $F = 10$, média tomada sobre 50 realizações independentes e, o truncamento dos estados metaestáveis em $t = 10^3$. O estado absorvente é normalmente atingido em menos tempo por esse modelo.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesta dissertação estudamos um modelo vetorial para a propagação de opiniões conhecido como modelo de Axelrod, propondo uma modificação no modelo original que se mostrou capaz de gerar o aparecimento de “bolhas metaestáveis”, consequência do aparecimento de uma tensão superficial nas fronteiras entre culturas distintas. Essas fronteiras passam a se comportar como membranas e o comportamento observado no modelo com tensão superficial é muito mais próximo, qualitativamente, do observado empiricamente.

Foi desenvolvido um *software* bastante geral, capaz de reproduzir o modelo original de Axelrod, uma variante deste proposta por Kuperman em [17] – e que também levava ao aparecimento de tensão superficial na fronteira entre duas culturas distintas –, além, é claro, do modelo proposto por nós. Os resultados anteriores da literatura foram reproduzidos e o novo modelo foi parcialmente explorado. Conforme exploramos esse modelo, pudemos perceber que a sua riqueza era enorme, que o modelo apresenta características muito peculiares e interessantes e que ainda temos muito o que fazer na sua caracterização, em particular as transições de fase precisam ser melhor

investigadas e caracterizadas.

Um dos possíveis rumos a se explorar é o da investigação do papel das inúmeras condições iniciais possíveis. Aquelas usadas nesse trabalho são praticamente as únicas usadas na literatura e estão em absoluto desacordo com a realidade cultural. A riqueza de comportamentos possíveis não é ainda totalmente compreendida por nós, mas já houve um esforço nessa direção.

Outro ponto importante a ser discutido é o da pertinência - ou não - do estudo do modelo no limite termodinâmico, e os possíveis efeitos introduzidos pelo seu tamanho finito. Modelos como o de Axelrod se propõem a descrever sistemas significativamente menores que os normalmente estudados pela mecânica estatística, e o limite termodinâmico perde um pouco o sentido nesse contexto. Efeitos de tamanho finito devem estar presentes quando grupos culturais interagem e eles devem ser melhor compreendidos.

O modelo com as modificações propostas adquiriu certas características que parecem mais adequadas ao fenômeno que se propõe a modelar, como o surgimento de estruturas coesas, tensão superficial e metaestabilidade. Há a possibilidade de buscar aplicações concretas na ecologia, onde a interação entre ecossistemas pode se assemelhar à interação entre culturas.

Percebemos também ser necessária e interessante uma análise do comportamento transiente, ao invés de se focar as atenções somente nos estados absorventes, congelados, como geralmente ocorre na literatura prévia da área.

Como Axelrod mesmo ressaltou, a topologia regular quadrada representaria povoados distribuídos uniformemente no espaço (agentes-povoados). Se pensarmos em agentes como indivíduos, devemos necessariamente incluir uma topologia complexa. As extensões naturais agora incluem a investigação do modelo em outras topologias, especialmente aquelas que melhor aproximam as estruturas sociais (distribuição de conectividades segundo lei de potência e alto coeficiente de aglomeração). Um outro fator que deve ser considerado, mas mais complexo ainda, é da coevolução da rede com a

dinâmica (inclusão e exclusão de nós na rede durante o processo).

Entre os trabalhos futuros também planejamos investigar com mais cuidado a estrutura topológica do espaço de configurações do modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM REVIEW*, 45:167–256, 2003.
- [2] B. Chopard and M. Droz. *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press, May 1998.
- [3] S. Galam. Sociophysics: A review of Galam models. *International Journal of Modern Physics C*, 19:409–440, March 2008.
- [4] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81:591–646, May 2009.
- [5] L. Dall’Asta and C. Castellano. Effective surface-tension in the noise-reduced voter model. *Europhysics Letters*, 77:60005, 2006.
- [6] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, and G. Weisbuch. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, 3:87–98, 2000.
- [7] A. C. R. Martins. Continuous opinions and discrete actions in opinion dynamics problems. Technical Report arXiv:0711.1199, Nov 2007. Comments: 10 pages, 4 figures.
- [8] R. Axelrod. The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization. *The Journal of Conflict Resolution*, 41(2):203–226, April 1997.

-
- [9] L. de Sanctis and T. Galla. Effects of noise and confidence thresholds in nominal and metric Axelrod dynamics of social influence. *Physical Review E*, 79(4):046108–+, April 2009.
- [10] K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral, and M. San Miguel. Role of dimensionality in Axelrod’s model for the dissemination of culture. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 327(1-2):1–5, September 2003.
- [11] B. Guerra, J. Poncela, J. Gómez-Gardeñes, V. Latora, and Y. Moreno. Dynamical organization towards consensus in the Axelrod model on complex networks. *Physical Review E*, 81, 2010.
- [12] F. Vazquez, J. C. González-Avella, V. M. Eguíluz, and M. San Miguel. Collective phenomena in complex social networks. *Applications of Non-linear Dynamics*, page 189–199, 2009.
- [13] K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral, and M. San Miguel. Nonequilibrium transitions in complex networks: a model of social interaction. *Physical Review E*, 67:026120, 2003.
- [14] C. Castellano, M. Marsili, and A. Vespignani. Nonequilibrium phase transition in a model for social influence. *Physical Review Letters*, 85(85):3536–3539, 2000.
- [15] A. Parravano, H. Rivera-Ramirez, and M. G. Cosenza. Intracultural diversity in a model of social dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 379:241–249, 2007.
- [16] K. Klemm, V. M. Eguiluz, R. Toral, and M. San Miguel. Globalization, polarization and cultural drift. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(1-2):321–334, January 2005.
- [17] M. N. Kuperman. Cultural propagation on social networks. *Physical Review E*, 73:046139, April 2006.

-
- [18] K. Klemm and V. M. Eguíluz. Highly clustered scale-free networks. *Physical Review E*, 65(3):036123, Feb 2002.
- [19] K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral, and M. San Miguel. Global culture: A noise-induced transition in finite systems. *Physical Review E*, 67, 2003.
- [20] J. C. Gonzalez-Avella, V. M. Eguiluz, M. G. Cosenza, K. Klemm, J. L. Herrera, and M. San Miguel. Local versus global interactions in nonequilibrium transitions: A model of social dynamics. *Physical Review E*, 73, 2006.
- [21] C. Gracia-Lázaro, L. F. Lafuerza, L. M. Floría, and Y. Moreno. Residential segregation and cultural dissemination: An Axelrod-Schelling model. *Physical Review E*, 80(4):046123, October 2009.
- [22] J. C. Villegas-Febres and W. Olivares-Rivas. The existence of negative absolute temperatures in Axelrod's social influence model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(14):3701–3707, Jun 2008.