UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Eletrodinâmica Variacional e o Problema Eletromagnético de Dois Corpos

Daniel Câmara de Souza

Orientador: Prof. Dr. Jayme Vicente De Luca Filho

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Coraci Pereira Malta

Tese apresentada ao Instituto de Física para
a obtenção do título de Doutor em Física.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jayme Vicente De Luca Filho (DF/UFSCar - Presidente)
Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti (IF/USP)
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME/USP)
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (DF/UFPR)
Prof. Dr. Sávio Brochini Rodrigues (DM/UFSCar)

São Paulo
2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Souza, Daniel Câmara de

Eletrodinâmica variacional e o problema eletromagnético de dois corpos. São Paulo, 2015.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jayme Vicente De Luca Filho

Coorientadora: Profa. Dra. Coraci Pereira Malta

Área de concentração: Física

Unitermos: 1. Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman; 2. Equação diferencial com retardo misto dependente do estado e do tipo neutro; 3. Problema eletromagnético de dois corpos; 4. Método variacional; 5. Método dos elementos finitos.

USP/IF/SBI-110/2014

Dedico esta obra à minha noiva,
aos meus pais, meus irmãos,
amigos, familiares e professores

Agradecimentos

Agradeço à minha noiva, Nanci Espinosa, pelo companheirismo, pela inspiração, amizade e por todos os momentos especiais que passamos juntos e os que haveremos de desfrutar. Exprimo minha gratidão aos meus pais Antônio e Maria José, irmãos Danilo e Douglas, cunhadas Vanessa e Francine, sobrinho João Vitor, Bernardo e Matheus, sobrinha Beatriz, cunhados Daniel e Ivan, concunhadas Eliane e Daniela, sogro Anacleto, sogra Cinira, demais familiares e amigos da cidade de Cravinhos pelo apoio incondicional, pelo incentivo, pela motivação e por todos os momentos de alegria. Expresso minha gratidão aos amigos do curso de física, do alojamento estudantil e da república estudantil da UNESP/Ilha Solteira, onde iniciei a graduação, e aos amigos do CRUSP e do Instituto de Física da USP/Capital, pelo apoio e incentivo, pelas valiosas discussões em sala e pelos corredores, pelos rachões de futebol e festas. Expresso minha gratidão à minha orientadora de iniciação científica e mestrado, Coraci, pelas discussões e conversas, pela liberdade concedida e confiança depositada, novamente, durante essa coorientação. Aos professores Josif Frenkel, Luis Gregório Godoy de Vasconcellos Dias da Silva e Edson Denis Leonel por todas as sugestões e críticas feitas durante o exame de qualificação, contribuindo para o melhoramento desse trabalho. Ao professor Sávio Brochini Rodrigues pelas discussões e conversas, principalmente, sobre tópicos de análise numérica, de onde surgiram sugestões de métodos numéricos para serem empregados no presente trabalho e até mesmo dicas astutas para apurar os códigos de MATLAB. Expresso meu enorme agradecimento ao Jayme pela orientação, pelo apoio durante a realização desse trabalho, pela imensa disposição em discutir diversos problemas de física e matemática, passeando por diversas áreas, e que certamente contribuíram para o bom desenvolvimento do presente trabalho e enriqueceram minha formação. Ainda exprimo minha gratidão ao professor Jayme, à sua esposa Daniele e ao professor Sávio por tornarem minhas visitas à UFSCar tão agradáveis. Aos professores e funcionários da UNESP e da USP pela dedicação e disposição para ajudar a resolver os problemas burocráticos. Ao computador pelas indispensáveis e incessantes horas seguidas de cálculos elegantes, grandiosos e precisos. E ao Sid, meu cachorrinho de estimação, pelas horas descontraídas, divertidas e isentas de preocupação. Por fim, agradeço também à agência de fomento FAPESP pelo vital e indispensável apoio financeiro.

“O avanço da ciência não se deve ao fato de se acumularem ao longo do tempo mais e mais experiências perceptuais. Nem se deve ao fato de estarmos fazendo uso cada vez melhor de nossos sentidos. A ciência não pode ser destilada de experiências sensoriais não interpretadas, independentemente de todo o engenho usado para recolhê-las e ordená-las. Idéias arriscadas, antecipações injustificadas, pensamento especulativo, são os únicos meios de que podemos lançar mão para interpretar a natureza: nosso único “organon”, nosso único instrumento para apreendê-la. E devemos arriscar-nos, com esses meios, para alcançar o prêmio. Os que não se dispõem a expor suas idéias à eventualidade da refutação não participarão do jogo científico.”

KARL RAIMUND POPPER
A Lógica da Descoberta Científica - Editora Cultrix (1974)

Resumo

Estudamos a Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman usando um princípio variacional para um funcional de ação finito acoplado a um problema de valor na fronteira. Para trajetórias C^2 por trechos, a condição de ponto crítico desse funcional fornece as equações de movimento de Wheeler-Feynman mais uma condição de continuidade dos momentos parciais e energias parciais, conhecida como condição de quina de Weierstrass-Erdmann. Estudamos em detalhe um sub-caso mais simples, onde os dados de fronteira têm um comprimento mínimo. Nesse caso, mostramos que a condição de extremo se reduz a um problema de valor na chegada para uma equação diferencial com retardo misto dependente do estado e do tipo neutro. Resolvemos numericamente esse problema usando um método de *shooting* e um método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para os casos em que as fronteiras mínimas têm velocidades descontínuas, elaboramos uma técnica para resolver as condições de quina de Weierstrass-Erdmann junto com o problema de valor na chegada. As trajetórias com velocidades descontínuas previstas pelo método variacional foram verificadas por experimentos numéricos.

Em um segundo desenvolvimento, para o caso mais difícil de fronteiras de comprimento arbitrário, implementamos um método de minimização com gradiente fraco para o princípio variacional e problema de fronteira acima citado. Elaboramos dois métodos numéricos, ambos implementados em MATLAB, para encontrar soluções do problema eletromagnético de dois corpos. O primeiro combina o método de elementos finitos com o método de Newton para encontrar as soluções que anulam o gradiente fraco do funcional para fronteiras genéricas. O segundo usa o método do declive máximo para encontrar as soluções que minimizam a ação. Nesses dois métodos as trajetórias são aproximadas dentro de um espaço de dimensão finita gerado por uma Galeriana que suporta velocidades descontínuas. Foram realizados diversos testes e experimentos numéricos para verificar a convergência das trajetórias calculada numericamente; também comparamos os valores do funcional calculados numericamente com alguns resultados analíticos sobre órbitas circulares.

Palavras-chave: 1. Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman; 2. Equação Diferencial com Retardo Misto Dependente do Estado e do Tipo Neutro; 3. Problema Eletromagnético de Dois Corpos; 4. Método Variacional; 5. Método dos Elementos Finitos; 6. Condições de Quina de Weierstrass-Erdmann.

Abstract

We study the Wheeler-Feynman electrodynamics using a variational principle for an action functional coupled to a finite boundary value problem. For piecewise C^2 trajectories, the critical point condition for this functional gives the Wheeler-Feynman equations of motion in addition to a continuity condition of partial moments and partial energies, known as the Weierstrass-Erdmann corner conditions. In the simplest case, for the boundary value problem of shortest length, we show that the critical point condition reduces to a two-point boundary value problem for a state-dependent mixed-type neutral differential-delay equation. We solve this special problem numerically using a shooting method and a fourth order Runge-Kutta. For the cases where the boundary segment has discontinuous velocities we developed a technique to solve the Weierstrass-Erdmann corner conditions and the two-point boundary value problem together. The trajectories with discontinuous velocities presupposed by the variational method were verified by numerical experiments.

In a second development, for the harder case with boundaries of arbitrary length, we implemented a method of minimization with weak gradient for the variational principle quoted above. Two numerical methods were implemented in MATLAB to find solutions of the two-body electromagnetic problem. The first combines the finite element method with Newton's method to find the solutions that vanish the weak gradient. The second uses the method of steepest descent to find the solutions that minimize the action. In both methods the trajectories are approximated within a finite-dimensional space generated by a Galerkin that supports discontinuous velocities. Many tests and numerical experiments were performed to verify the convergence of the numerically calculated trajectories; also were compared the values of the functional computed numerically with some known analytical results on circular orbits.

Keywords: 1. *Wheeler-Feynman Electrodynamics*; 2. *State-Dependent Mixed-Type Neutral Differential-Delay Equations*; 3. *Electromagnetic Two-Body Problem*; 4. *Variational Method*; 5. *Finite Element Methods*; 6. *Weierstrass-Erdmann Corner Conditions*.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Símbolos	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiv
1. Introdução	1
2. Eletrodinâmica Variacional	9
2.1. Problema Variacional com Valor na Fronteira	9
2.2. Órbitas de Schild	19
3. Problema com Fronteira Mínima	24
3.1. Problema de Valor na Chegada	25
3.2. Método dos Disparos	30
3.3. Condições de Quina de Weierstrass-Erdmann	32
3.4. Solução Numérica do Problema com Fronteira Mínima	39
3.5. Experimentos Numéricos: Fronteira Mínima	45
4. Método Variacional com Gradiente Fraco	57
4.1. Método Variacional e Elementos Finitos	58
4.2. Minimizador Numérico do Funcional	66
4.3. Experimentos Numéricos: Elementos Finitos	72
5. Discussão	84
6. Conclusão	88

A. Aspectos das Equações Diferenciais Funcionais	91
B. Conceitos de Análise Funcional	93
Referências Bibliográficas	97

Lista de Símbolos e Notações

Símbolo	Descrição
c	Velocidade da Luz
$\hbar$	Constante de Planck Reduzida
α	Constante de Estrutura Fina
m_e	Massa do Elétron
e	Carga do Elétron
r_e	Raio Clássico do Elétron
r_0	Raio de Bohr
k_e	Constante de Coulomb
ϵ_0	Permissividade do Vácuo
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{M}^4$	Espaço de Minkowski
δ_{ij}	Delta de Kröner: $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$

Notação	Descrição
$\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \dots$	Vetores do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$
$\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i, \dots$	Quadrivetores do espaço de Minkowski $\mathbb{M}^4$
$\mathbf{x}^\dagger$	Dual do Quadrivetor $\mathbf{x}$
$\langle \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_i \rangle$	Produto de Minkowski
$\langle \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \rangle$	Produto Escalar usual de $\mathbb{R}^4$
$ \mathbf{x} $	Norma Euclidiana de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$
$ \mathbf{x} _4$	Norma Euclidiana de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$
$\sup \mathcal{A}$	Supremo do conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$
$\text{ess sup } \mathcal{A}$	Supremo Essencial do conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$
$a := b$	a é definido pela expressão b
$a =: b$	b é definido pela expressão a
$a \equiv b$	as notações a e b são equivalentes
$a \approx b$	a é aproximadamente igual a b
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Vetores das coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^3$
$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$	Vetores das coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$	Subconjuntos de $\mathbb{R}$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	Vetores
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots$	Matrizes
$\mathbb{A}^\top$	Matriz Transposta de $\mathbb{A}$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$	Vetores
$\mathbf{0}$	Matriz Nula
$\mathbf{1}$	Matriz Identidade

Lista de Figuras

- 2.1. Diagrama espaço tempo com um exemplo pictórico de trajetórias $x_1(t_1)$, para $t_1 \in [t_{O_A}, t_{L^-}]$, e $x_2(t_2)$, para $t_2 \in [t_{O^+}, t_{L_B}]$; as condições de fronteira dadas pelo segmento de fronteira $x_2(t_2)$ para $t_2 \in [t_{O^-}, t_{O^+}]$ em cone de luz com o ponto inicial da trajetória da partícula 1, O_A , e pelo segmento de fronteira $x_1(t_1)$ para $t_1 \in [t_{L^-}, t_{L^+}]$ em cone de luz com o ponto final da trajetória da partícula 2, L_B 11
- 2.2. Em vermelho exibimos as condições de fronteira, o ponto O_A da trajetória 1 e os pontos O^- e O^+ , que estão em cone de luz com O_A , mais o ponto L_B e os pontos L^- e L^+ , que estão em cone de luz com L_B . A trajetória da partícula 1 do método variacional está em azul, entre O_A e L^- , enquanto a trajetória da partícula 2 está em verde, entre O^+ e L_B . O primeiro ponto com velocidade descontínua O^+ gera uma sequência de pontos de descontinuidade à frente b_1, b_2, b_3 , enquanto o ponto de descontinuidade L^- pode gerar uma sequência de pontos de descontinuidade a_1, a_2, a_3 16
- 2.3. À esquerda exibimos a órbita circular de Schild com raio r_1 da carga 1 de massa m_1 , a órbita com raio r_2 da carga 2 de massa m_2 , a distância em cone de luz r_{21+} e a velocidade retardada (avançada), de um ângulo θ , para a partícula 1, v_{1-} (v_{1+}). À direita expomos segmentos de órbitas circulares de Schild que satisfazem as condições de fronteira dadas pelo ponto inicial da trajetória da carga 1, O_A , pelo ponto final da trajetória da carga 2, L_B , pelo segmento de fronteira no passado da carga 2, linha vermelha entre os pontos O^- e O^+ , e pelo segmento de fronteira no futuro da carga 1, linha vermelha entre os pontos L^- e L^+ . As trajetórias da carga 1 e da carga 2 correspondem ao segmento em azul e verde, respectivamente. 20
- 3.1. Esboço de um diagrama espaço tempo para o caso de fronteira mínima, com as trajetórias $x_1(t_1)$, para $t_1 \in [t_{O_A}, t_{L^-}]$, e $x_2(t_2)$, para $t_2 \in [t_{O^+}, t_{L_B}]$; as condições de fronteira dadas pelo segmento de fronteira $x_2(t_2)$ para $t_2 \in [t_{O^-}, t_{O^+}]$ em cone de luz com o ponto inicial da trajetória da partícula 1, O_A , e pelo segmento de fronteira $x_1(t_1)$ para $t_1 \in [t_{L^-}, t_{L^+}]$ em cone de luz com o ponto final da trajetória da partícula 2, L_B . O ponto O^+ está em cone de luz com o ponto L^- 25
- 3.2. Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B 46

3.3.	Posição da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .	46
3.4.	Posição da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .	47
3.5.	Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .	47
3.6.	Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .	48
3.7.	Aceleração da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .	48
3.8.	Aceleração da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .	49
3.9.	Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B .	50
3.10.	Posição da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .	50
3.11.	Posição da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .	51
3.12.	Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .	51

3.13. Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	52
3.14. Aceleração da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+	52
3.15. Aceleração da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	53
3.16. Trajetória da cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A trajetória da carga 2, aparece apenas como um ponto vermelho no centro da trajetória da carga 1. Na Figura 3.16 apresentamos a trajetória da carga 2 com os limites dos eixos x, y, z adequados para ela. . .	54
3.17. Trajetória da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B	54
3.18. Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	55
3.19. Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+	55
3.20. Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. Os limites nos eixos espaço e tempo foram escolhidos para destacar apenas componente z da velocidade da carga 1. Na Figura 3.19 exibimos as 3 componentes da velocidade da carga 1.	56
4.1. Funções de forma descritas nas equações (4.42) a (4.50) para $i = 0$, $t_0 = 0$ e $t \in [-1, 1]$. . .	68
4.2. Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B	76

4.3.	Posição da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+	76
4.4.	Posição da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	77
4.5.	Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+	77
4.6.	Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	78
4.7.	Aceleração da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+	78
4.8.	Aceleração da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	79
4.9.	Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B	80
4.10.	Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+	80
4.11.	Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+	81
4.12.	Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	81

4.13. Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B	82
--	----

Lista de Tabelas

4.1.	Valor inicial do gradiente fraco (4.28), usando a norma do supremo $\ \delta S\ $, dada por (4.69), sobre órbitas de Schild com $\theta = 0,077$ e $\theta = 0,77$ em função do número de elementos finitos da Galeriana. Para ambas as órbitas $m_1 = m_2 = 1$	74
4.2.	Erros absolutos e relativos na posição e velocidade em função do número de elementos finitos N da série Galeriana para um experimento numérico com $m_1 = 1, m_2 = 2$ e $\theta = 0,1$	75

1

Introdução

“Physical laws should have mathematical beauty”

Paul Adrien Maurice Dirac, 1955

Na década de 1940, John Archibald Wheeler e Richard Phillips Feynman apresentaram dois trabalhos^[1,2] propondo uma teoria hoje conhecida como Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman. O objetivo dessa teoria era fornecer uma alternativa para evitar as renormalizações e infinitos que ocorrem na Eletrodinâmica Clássica devido à auto interação da carga puntual com seu campo. Entre esses, por exemplo, a divergência da massa eletromagnética e da energia eletromagnética do auto campo, e a divergência da força de Lorentz em todos os pontos da trajetória da carga puntual. Na Eletrodinâmica Clássica, quando consideramos o modelo em que o elétron consiste numa esfera de raio a , seja com a carga distribuída uniformemente pelo volume da esfera ou sobre sua superfície, a energia e a massa eletromagnética devidas ao auto campo são inversamente proporcionais ao raio a , divergindo no limite puntual^[3]. Quando consideramos uma carga puntual em movimento arbitrário, sendo que em um dado instante sua posição é dada por $\mathbf{r}$, e tomamos um ponto de observação em $\mathbf{x}$, que dista $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|$ da carga, podemos tomar o auto campo como a soma de um campo de velocidade, inversamente proporcional a R^2 , com um campo de aceleração, inversamente proporcional a R , resultando que ambos os termos divergem no limite em que o ponto de observação tende à posição da carga^[4]. Dessa forma, quando examinamos o problema eletromagnético de dois corpos, sabemos que para cada carga os campos elétrico e magnético que compõem a força de Lorentz correspondem à soma do auto campo elétrico e magnético com o campo elétrico e magnético da outra carga, e portanto essa força diverge sobre as posições de ambas as cargas puntuais, impedindo o tratamento do problema de dois corpos na Eletrodinâmica Clássica.

Feynman mencionou no seu discurso de Prêmio Nobel^[5] que o objetivo principal dele e de Wheeler, na época dos dois trabalhos^[1,2], era obter uma eletrodinâmica livre de infinitos e

depois realizar a sua quantização. Wheeler e Feynman tentaram levar adiante essa quantização durante alguns anos e não obtiveram sucesso^[6]. Alguns anos depois do discurso de Feynman foi observada a impossibilidade de sua eletrodinâmica ser colocada na forma Hamiltoniana, por razões posteriormente clarificadas pelo teorema da não-interação^[7-9], sobre a descrição de interações invariante de Lorentz por Hamiltonianas ou Lagrangeanas instantâneas. Antes de buscar essa alternativa para a Eletrodinâmica Clássica, Feynman desenvolveu em sua tese de doutorado^[10] um novo enfoque para a teoria quântica, baseado apenas num princípio de mínima ação, que contribuiu para a formulação da Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman e posteriormente para a sua formulação da Eletrodinâmica Quântica e das Integrais de Trajetória^[11, 12].

Frente aos infinitos que ocorrem na eletrodinâmica devidos ao auto campo, como exposto acima, surge a seguinte questão: na teoria clássica de campos seria essencial exigir que a carga interaja consigo mesma? No artigo de 1949^[2], Wheeler e Feynman propõem uma eletrodinâmica que está toda contida em um princípio de ação estacionária, que considera apenas a interação direta entre cargas, não levando em conta a auto interação. Essa descrição da natureza é feita sem o uso do conceito clássico de campo e resume-se num princípio variacional onde o movimento das cargas é descrito pela condição de ponto crítico, na maioria da vezes um ponto de mínimo, do funcional de ação (1.1).

“... the energy tensor can be regarded only as a provisional means of representing matter. In reality, matter consists of electrically charged particles ...”^[13]

A ação S , dada pela equação (1.1), foi originalmente proposta e estudada de forma independente por A. D. Fokker^[14], K. Schwarzschild^[15] e H. Tetrode^[16] e ficou conhecida como ação de Fokker-Schwarzschild-Tetrode, a qual designaremos apenas como ação de Fokker. Essa ação corresponde ao problema de interação eletromagnética de um sistema com N partículas de massas m_i , cargas e_i , trajetórias dadas por $\mathbf{x}_i(t_i) = (t_i, \mathbf{x}_i(t_i))$, $\dot{\mathbf{x}}_i = d\mathbf{x}_i/dt_i$ e $t_i \in \mathcal{I}_i \subset \mathbb{R}$, onde denotamos o produto de Minkowski entre $\mathbf{x}_i \in \mathbb{M}^4$ e $\mathbf{x}_j \in \mathbb{M}^4$ por $\langle \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j \rangle = t_j t_j - \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j$, para $i, j = 1, \dots, N$ e usamos o sistema de unidades naturais de medida, onde $c = 1$. A ação (1.1) é um funcional das curvas parametrizadas $\mathbf{x}_i = \{\mathbf{x}_i(t_i), t_i \in \mathcal{I}_i\}$, para $i = 1, \dots, N$, isto é, para cada conjunto de curvas parametrizadas $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, que também denominaremos como trajetórias, está associado um único número real $S[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$. O primeiro termo do lado direito da equação (1.1) corresponde à somatória da energia cinética das partículas e o segundo termo consiste numa somatória das energias potenciais de interação

$$S[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N] = - \sum_{i=1}^N \int m_i \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \rangle} dt_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N e_i e_j \iint \delta(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2) \langle \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_j \rangle dt_i dt_j. \quad (1.1)$$

A condição de ponto crítico de um funcional é obtida impondo que a primeira variação desse funcional seja nula. Para trajetórias de classe $C^2(\mathcal{I}_i, \mathbb{R}^3)^{(1)}$ com $i = 1, \dots, N$, a condição de

⁽¹⁾Uma aplicação $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$, com domínio $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, é denominada curva de classe $C^0(\mathcal{I}, \mathbb{R}^3)$ se cada uma de suas componentes for uma função contínua, e de classe $C^n(\mathcal{I}, \mathbb{R}^3)$ se a n -ésima derivada de cada uma de suas componentes for uma função contínua, onde $n \in \mathbb{N}$.

ponto crítico do funcional (1.1) fornece as equações de movimento

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = e_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} [(\mathbf{F}_j^-(\mathbf{x}_i) + \mathbf{F}_j^+(\mathbf{x}_i)) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i], \quad (1.2)$$

onde o parâmetro de evolução temporal é o tempo próprio e os elementos dos tensores⁽²⁾ do campo eletromagnético $\mathbf{F}_j^-(\mathbf{x}_i)$ e $\mathbf{F}_j^+(\mathbf{x}_i)$ correspondem, respectivamente, aos campos de Liénard-Wiechert retardados e avançados avaliados em $\mathbf{x}_i$ e gerados pela carga e_j nas respectivas posições retardadas e avançadas, que estão em cone de luz com a carga e_i ⁽³⁾. Note que, em decorrência da definição do funcional (1.1), os termos de auto interação foram excluídos nas equações de movimento (1.2) restringindo a soma sobre $i, j = 1, \dots, N$ para $i \neq j$, eliminando assim as divergências indesejadas. De um modo geral, tomando um referencial inercial onde a posição, velocidade e aceleração da partícula i são, respectivamente, denotadas por $\mathbf{x}_i(t_i)$, $\mathbf{v}_i(t_i)$ e $\mathbf{a}_i(t_i)$, as componentes espaciais da equação de movimento (1.2), conhecida como equação de Wheeler-Feynman, podem ser escritas na forma mais comum

$$m_i \frac{d}{dt_i} \left(\frac{\mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_i^2}} \right) = e_i [\mathbf{E}_j + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j], \quad (1.3)$$

onde os campos $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{B}_j$ são dados pelas semi-somas dos campos avançados e retardados

$$\mathbf{E}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_j^- + \mathbf{E}_j^+), \quad \mathbf{B}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_j^- + \mathbf{B}_j^+), \quad (1.4)$$

que por sua vez correspondem aos campos de Liénard-Wiechert^[4]

$$\begin{cases} \mathbf{E}_j^\pm(t_i, \mathbf{x}_i) = e_j \left[\frac{\mathbf{n}_{ij\pm} \pm \mathbf{v}_{j\pm}}{\gamma_{j\pm}^2 (1 \pm \mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm})^3 r_{ij\pm}^2} + \frac{\mathbf{n}_{ij\pm} \times \{(\mathbf{n}_{ij\pm} \pm \mathbf{v}_{j\pm}) \times \mathbf{a}_{j\pm}\}}{(1 \pm \mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm})^3 r_{ij\pm}} \right], \\ \mathbf{B}_j^\pm(t_i, \mathbf{x}_i) = \mp \mathbf{n}_{ij\pm} \times \mathbf{E}_j^\pm. \end{cases} \quad (1.5)$$

sendo que no fator relativístico $\gamma_{j\pm} = (1 - \mathbf{v}_{j\pm}^2)^{-1/2}$, na distância em cone de luz $r_{ij\pm} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm}\|$ e no vetor unitário $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm})/r_{ij\pm}$, as quantidades da partícula j são avaliadas nos tempos retardados (−) e avançados (+), dados implicitamente pela condição de cone de luz

$$t_{j\pm} = t_i \pm \|\mathbf{x}_i(t_i) - \mathbf{x}_j(t_{j\pm})\|. \quad (1.6)$$

Na interação direta entre partículas, dizemos que as cargas interagem em cone de luz, ou seja, a separação entre as partículas é do tipo luz, uma está no cone de luz da outra. Na

⁽²⁾Aqui, na equação (1.2), optamos por usar a notação da Referência^[23], na qual $(\mathbf{F}_j^\pm(\mathbf{x}_i)) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i$ indica um produto tensorial de um tensor de ordem 2 com um tensor de ordem 1. A mesma opção foi feita nas equações (1.8) e (1.10) a seguir.

⁽³⁾Sejam $\mathbf{x}_1 = (t_1, \mathbf{x}_1)$ e $\mathbf{x}_2 = (t_2, \mathbf{x}_2)$ dois eventos no espaço de Minkowski, dizemos que eles estão em cone de luz se a separação entre eles for do tipo luz $\langle \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \rangle = t_1 t_2 - \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$.

Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman as partículas interagem em cone de luz, e pode-se mostrar que o uso da semi soma dos campos retardados e avançados (1.4) não está em conflito com o princípio de causalidade de Einstein^[2, 17]. Nessa teoria de ação à distância não-instantânea⁽⁴⁾, a natureza é descrita sem o uso do conceito clássico de campo e considera-se que todos os graus de liberdade da dinâmica estão contidos nas trajetórias das partículas. Na verdade, Wheeler e Feynman definem o conceito de campo adjunto que, para cada carga, corresponde à semi soma dos campos retardados e avançados de Liénard-Wiechert das demais cargas em movimento arbitrário, e portanto, satisfazem as equações de Maxwell. No artigo de 1949^[2] Wheeler e Feynman defendem que cada carga gera os resultados usuais e bem verificados dos campos retardados, obtidos na Eletrodinâmica Clássica, e que os princípios de conservação da energia e do momento linear são satisfeitos quando são devidamente generalizados para esse tipo de interação relativística, não-localizada e não-instantânea. A Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman é uma teoria simétrica no tempo, logo, uma solução invertida no tempo também é solução da equação de movimento. Entretanto, as situações de não-equilíbrio estão associadas a um aumento de entropia, que define uma flecha termodinâmica do tempo e, consequentemente, fornece um caráter irreversível para a radiação^[18]. Wheeler e Feynman usaram a condição de absorvedor perfeito para explicar que a natureza irreversível da radiação não é um fenômeno eletrodinâmico, mas puramente mecânico-estatístico, devido à natureza estatística da absorção^[1]. A condição de absorvedor perfeito está ancorada na ideia de que a toda emissão está associada uma absorção. É importante notarmos que a condição de absorvedor perfeito pode ser satisfeita tomando o meio absorvedor como uma distribuição macroscópica de cargas com movimentos aleatórios. Para uma discussão mais aprofundada sobre a condição de absorvedor perfeito, o uso da soma dos campos retardados e avançados (1.4), os fundamentos da Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman e suas consequências veja, além dos trabalhos originais^[1, 2], por exemplo, o artigo de Berenda^[19], que teve acesso aos artigos de 1945 e 1949 antes de serem publicados, os comentários de Brown^[20] e o prefácio da Referência^[12].

Reproduzimos aqui, brevemente, um dos exemplos dados na Referência^[1] para ilustrar como a Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman pode ser relacionada com alguns resultados da Eletrodinâmica Clássica. Vamos ver que, em determinadas condições, a equação de movimento (1.2) se reduz à conhecida equação de Lorentz-Dirac, que contém apenas a força de Lorentz, com campo retardado, e a força de reação da radiação da Eletrodinâmica Clássica^[1]. Para verificarmos essa afirmação, primeiro recompomos a semi-soma dos campos retardados e avançados, com os auto campos subtraídos, na forma

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} (\mathbf{F}_j^- + \mathbf{F}_j^+) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_j^- + \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^- - \mathbf{F}_i^+) - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (\mathbf{F}_j^- - \mathbf{F}_j^+) . \quad (1.7)$$

Consideramos o fato de Dirac^[21] ter calculado, usando uma expansão em série de Taylor e uma

⁽⁴⁾Note que aqui o conceito de ação à distância, que denota uma interação não localizada, é usado no contexto das interações não instantâneas, que levam em conta o tempo finito de propagação da informação. Já no contexto da Lei da gravitação de Newton e da Lei de Coulomb, esse conceito é usado para descrever interações instantâneas.

técnica de renormalização para a massa do elétron, que a força de reação da radiação pode ser escrita, de forma aproximada, como a semi-diferença entre o campo retardado e avançado

$$\frac{e_i}{2} (\mathbf{F}_i^-(\mathbf{x}_i) - \mathbf{F}_i^+(\mathbf{x}_i)) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{2e_i^2}{3} (\dot{\mathbf{x}}_i \langle \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \rangle - \ddot{\mathbf{x}}_i \langle \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \rangle). \quad (1.8)$$

Usando as igualdades (1.7) e (1.8) junto com a propriedade especial de um meio completamente absorvedor, que é expressa pela equação^[1]

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j^- - \mathbf{F}_j^+) = 0, \quad (1.9)$$

vemos que a equação de movimento (1.2) se reduz à equação de Lorentz-Dirac

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = e_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{F}_j^-(\mathbf{x}_i)) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{2e_i^2}{3} (\dot{\mathbf{x}}_i \langle \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \rangle - \ddot{\mathbf{x}}_i \langle \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \rangle). \quad (1.10)$$

Para uma carga puntual, sabe-se que a equação de Lorentz-Dirac fornece soluções divergentes no tempo para distâncias da ordem do raio clássico do elétron. No entanto, nem todas as soluções da equação (1.2) divergem, e existem diversos problemas e aplicações de interesse físico^[21–26]. Para evitar a divergência da auto força na equação de Lorentz-Dirac pode-se considerar um tamanho finito para a carga, definido por um limite para curtas distâncias, e obter uma equação de movimento bem definida na trajetória da carga e consistente com a teoria de relatividade^[27].

Mário Schenberg (assinava como Mario Schönberg) propôs uma teoria clássica para o elétron puntiforme^[28, 29] baseada em um princípio de ação, onde considerou a semi-soma dos campos retardados e avançados como um campo ligado ao elétron, e a semi-diferença como um campo de radiação, sendo que apenas este último interage com a carga que o gerou. Segundo Wheeler e Feynman, a tentativa de Schenberg falhou porque ele considerou o campo e a ação direta como partes diferentes da força total, lado direito de uma equação do tipo (1.3), e não como duas representações equivalentes da mesma força^[2]. Schenberg discorre no apêndice do artigo^[28] que uma equação de movimento com campos retardados e avançados, tal como a equação (1.3), possui uma solução circular, visto que a componente tangencial do campo retardado cancela a componente tangencial do campo avançado, anulando a força tangencial.

Depois da proposição da Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman, formulada em termos da interação direta entre partículas, foram feitos diversos estudos decorrentes dessa teoria, inclusive buscando sua generalização para outros tipos de interação. A. Schild^[30, 31] obteve uma família dessas soluções circulares para a equação (1.3) e depois acrescentou spin na ação^[32]. D. J. Louis-Martinez generalizou esse tipo de solução para um sistema com N partículas de carga $-e$ e massa m igualmente espaçadas sobre um círculo e com uma partícula com carga oposta Ne e massa m_0 no centro; e para um sistema com um número par N de cargas $e_i = (-1)^i e$, $i = 1, 2, \dots, N$ e massas m igualmente espaçadas sobre um círculo e sem uma carga no centro^[33]. De Luca observou, recentemente, que modelos atômicos fazem sentido na teoria reformada, e obteve boas aproximações para o espectro de energia e de momento angular

orbital para o átomo de hidrogênio, positrônio e muônio^[34] usando órbitas de dois corpos com velocidades descontínuas em cone de luz. Também foram obtidos resultados sólidos sobre existência e unicidade para o movimento unidimensional de duas cargas^[35–39]. Recentemente, foram apresentados diversos resultados gerais sobre existência e unicidade para a equação de movimento (1.3) para intervalos de tempo finitos^[40, 41]. Sob a luz da Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman, há pouco tempo foram dadas interpretações para o fóton^[42, 43], a natureza irreversível da radiação^[18] e o mecanismo de produção de pares elétron-pósitron^[41]. Além disso, foram feitas extensões da interação direta entre partículas para cosmologia^[44] e generalizações para espaços curvos^[45], para a interação gravitacional^[46] e de Yang-Mills^[47, 48].

Ainda no final da década de 1940, Feynman supôs um raio para o elétron, da ordem do raio clássico, e usou o princípio da ação de Fokker estacionária para obter uma representação clássica para o fenômeno de polarização do vácuo⁽⁵⁾, com produção de pares elétron-pósitron para campos suficientemente fortes^[49]. Nesse estudo também é exposto, no apêndice, que a ação de Fokker fica mal definida quando é integrada sobre a reta real, $(-\infty, +\infty)$, pois diverge. A. Staruszkiewicz^[50] também observou esse problema e propôs separar a ação em duas, com Lagrangeanas parciais do problema, e subtraí-las da ação com a Lagrangeana total para resultar em uma ação finita. Outra solução para deixar a ação de Fokker bem definida matematicamente, e que será usada no presente estudo, é o Princípio Variacional proposto por De Luca^[51]. Nesse princípio variacional, os intervalos de tempo em que ocorrem as interações em cone de luz são finitos, e o funcional tem condições de fronteira no futuro e no passado. De Luca e colaboradores usaram o método de elementos finitos para resolver a condição de ponto crítico desse funcional de ação^[52] e demonstraram, para o caso de fronteira mínima, a existência e unicidade de soluções que dependem continuamente das fronteiras^[34].

Na teoria de equações diferenciais funcionais, a equação de Wheeler-Feynman (1.3) é classificada como uma equação diferencial com retardo misto dependente do estado e do tipo neutro. Na década de 1930, quando o Funcional de Fokker foi proposto, a teoria de equações diferenciais funcionais era pouco desenvolvida. Mesmo ainda na década de 1940, quando a eletrodinâmica de Wheeler-Feynman foi proposta, haviam poucos estudos sobre esse tipo de equação diferencial funcional^[53, 54]. Hoje, sabemos que equações diferenciais com retardo do tipo neutro podem gerar soluções com velocidades descontínuas^[55], e que essas discontinuidades podem se propagar ao longo da solução^[56]. Na literatura, esses pontos com velocidade descontínua são conhecidos como *breaking points* na área de análise numérica^[55], e como *corner points* na área do cálculo variacional^[57]. No Apêndice A definimos os critérios para classificar alguns tipos de equações diferenciais funcionais, como, por exemplo, as equações diferenciais com retardo neutro; apresentamos alguns conceitos e mostramos, através de um exemplo simples desse tipo de equação, como os *breaking points* são gerados e como eles se propagam ao longo da solução. Para o problema de dois corpos com trajetórias globalmente limitadas, pode-se mostrar que a condição de campo de radiação nula implica que as trajetórias precisam necessariamente ter velocidades descontínuas^[58]. Ainda em relação ao problema de dois corpos, pode-se mostrar que nos limites à esquerda e à direita de cada ponto da trajetória onde a velocidade é descontínua, existem quantidades relacionadas a energia e ao momento

⁽⁵⁾Essa representação foi a precursora dos conhecidos diagramas de Feynman usados atualmente no Modelo Padrão.

canônico que são contínuas, ou seja, os limites à esquerda e à direita nesse ponto são iguais^[34].

Nessa pesquisa vamos estudar o problema de dois corpos na Eletrodinâmica de Wheeler-Feynman usando a ação bem definida matematicamente pelo princípio variacional proposto por De Luca^[51]. De um modo geral, vamos aplicar métodos variacionais para estudar propriedades das soluções do funcional de ação com condições de fronteira no passado e no futuro, que como vimos, ocorrem em diversas teorias de ação à distância. Também vamos empregar métodos numéricos para resolver a condição de ponto crítico resultante desses métodos variacionais. Os métodos variacionais e métodos numéricos desenvolvidos podem ser aplicados no problema de dois corpos para o caso atrativo e repulsivo, no entanto, nesse estudo analisamos apenas o caso atrativo. Encontrar soluções numéricas de equações diferenciais com retardo misto dependente do estado e do tipo neutro, decorrentes desse princípio variacional, é de grande interesse atual, pelo problema numérico desafiador em si, e pelas diversas aplicações que esse tipo de equações têm. Além disso, outra motivação nesta pesquisa é contribuir para o entendimento de um dos grandes problemas da Física Clássica, como colocado por Wheeler-Feynman na década de 1940^[2], o movimento de um sistema de partículas carregadas sobre a influência de forças eletromagnéticas.

“We therefore propose here to go back to the great basic problem of classical physics - the motion of a system of charged particles under the influence of electromagnetic forces - and to inquire what description of the interactions and motions is possible which is at the same time (1) well defined (2) economical in postulates and (3) in agreement with experience.”^[2]

Por fim, expomos como a presente tese está dividida. No Capítulo 2 introduzimos a Eletrodinâmica Variacional^[34] e aplicamos o princípio variacional proposto por De Luca^[51] ao problema eletromagnético de dois corpos. Na Seção 2.1 mostramos que ao colocarmos as trajetórias no espaço das funções de classe C^2 por trechos, com um número finito de pontos com velocidade descontínua, o ponto crítico do funcional de Fokker com valor na fronteira deve satisfazer as equações de Wheeler-Feynman e adicionalmente, as condições de quina de Weierstrass-Erdmann (*Weierstrass-Erdmann corner conditions*^[57]). Depois, na Seção 2.2, apresentamos as órbitas circulares de Schild e calculamos o funcional de ação sobre essas órbitas. No Capítulo 3 analisamos um caso especial do problema de dois corpos onde os segmentos de fronteira do funcional de ação tem uma distância temporal mínima. Denominamos esse caso especial como problema com fronteira mínima. Na Seção 3.1 mostramos que para o problema com fronteira mínima as equações de movimento se reduzem a um problema com valor na chegada (*two-point boundary problem* ou *shooting problem*^[59,60]), e que para segmentos de fronteira na vizinhança de uma família de órbitas circulares a solução desse problema pode

ser obtida pelo método dos disparos (*shooting method*^[59, 60]), proposto na Seção 3.2⁽⁶⁾. Para os casos em que os segmentos de fronteira têm pontos com velocidade descontínua propomos, na Seção 3.3, um método para resolver as condições de quina de Weierstrass-Erdmann. Na Seção 3.4 mostramos como implementamos os métodos numéricos propostos na Seção 3.2 e na Seção 3.3. Por fim, na Seção 3.5 exibimos e analisamos alguns experimentos numéricos para problemas com fronteira mínima. No Capítulo 4 desenvolvemos um método variacional para buscar soluções numéricas que minimizam o funcional de ação de Fokker com valores na fronteira. Na Seção 4.1 propomos um método de elementos finitos para resolver a condição de ponto crítico onde a solução é composta por funções linearmente independentes, capazes de gerar trajetórias com velocidades descontínuas. Na Seção 4.2 propomos um método numérico que combina o método dos elementos finitos com o método de Newton para buscar soluções que satisfazem a condição de ponto crítico do funcional, e um método numérico que usa o método do declive máximo para encontrar as soluções minimizadoras. Por fim, na Seção 4.3 discutimos alguns resultados e experimentos numéricos realizados. No Capítulo 5 comparamos os métodos utilizados, discutimos suas limitações e generalizações e pontuamos alguns problemas em aberto. Além disso, discorremos sobre o que tem sido feito recentemente em relação ao problema estudado e colocamos possíveis caminhos para dar continuidade a essa pesquisa. No Capítulo 6 retomamos os principais resultados analíticos e numéricos e colocamos algumas conclusões fundamentadas nesses resultados. No Apêndice A apresentamos alguns critérios de classificação para alguns tipos de equações diferenciais funcionais, e expomos algumas características e conceitos usando um exemplo de equação diferencial com retardo neutro. Finalmente, no Apêndice B colocamos, de forma resumida, as definições dos conceitos de análise funcional usados ao longo do texto e dos conceitos necessários para defini-los.

⁽⁶⁾Um exemplo de problema com valor na chegada consiste na equação diferencial ordinária de segunda ordem, $x'' = f(t, x(t), x'(t))$, sujeita às condições de contorno de Dirichlet, $x(t_i) = x_i$ e $x(t_f) = x_f$. Considere que a solução desse exemplo, para as condições iniciais $x(t_i) = x_i$, $x'(t_i) = v_0$, como $x(t) = x(t, v_0)$. O método de disparos resume-se a encontrar v tal que $x(t_f, v) = x_f$ usando, por exemplo, a linearização da solução $x(t, v)$ em relação a v , na vizinhança de v_0 . Esse é o problema típico de tiro ao alvo com um canhão, em que deve-se encontrar a velocidade inicial do projétil no canhão, posição inicial, de forma que ele atinja o alvo, posição final.

2

Eletrodinâmica Variacional

Neste capítulo vamos apresentar a teoria, aqui denominada Eletrodinâmica Variacional^[34], que usa métodos variacionais para estudar a dinâmica das partículas carregadas. Relatamos no Capítulo 1 que o funcional de Fokker fica mal definido quando é integrado sobre a reta real, $(-\infty, +\infty)$, pois diverge. Para resolver esse problema, De Luca^[51] desenvolveu um princípio variacional no qual o funcional de Fokker é integrado sobre trajetórias definidas num intervalo de tempo finito. Na Seção 2.1 aplicamos esse princípio variacional para o problema atrativo de dois corpos no caso onde as trajetórias são de classe C^2 por trechos. Revisamos a demonstração de que o ponto crítico do funcional deve satisfazer as equações de Wheeler-Feynman e as condições de quina de Weierstrass-Erdmann. Nessa demonstração, basicamente seguimos as Referências^[52, 58], com a diferença de que somamos algumas constantes no funcional, consideramos seu parâmetro de evolução de forma mais abrangente e tomamos a derivada do funcional usando uma norma distinta. Em seguida, na Seção 2.2, expomos as órbitas circulares de Schild, que são soluções da equação de Wheeler-Feynman (1.3), e calculamos o funcional de Fokker sobre essas órbitas de Schild para que, posteriormente, possamos comparar com os resultados numéricos do Capítulo 4.

2.1. Problema Variacional com Valor na Fronteira

Na Eletrodinâmica Variacional a dinâmica das partículas carregadas é completamente definida pelo princípio de estacionariedade da ação. Essa descrição da natureza é feita sem o uso do conceito clássico de campo, considerando que todos os graus de liberdade do problema estão contidos nas trajetórias das cargas. Nessa seção, primeiro vamos definir um funcional de ação similar ao envolvido no princípio variacional proposto por De Luca^[51] e logo em seguida vamos abordar o problema variacional com valor na fronteira implicado nele.

A ação de Fokker para o problema atrativo de dois corpos com condições de fronteira no passado e no futuro é dada pelo funcional^[51] $S : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 S[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] := & -m_1 \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_1^\dagger \rangle} dt_1 - m_2 \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{\mathbf{x}}_2^\dagger \rangle} dt_2 \\
 & + \int_{t_{O_A}}^{t_{L^+}} \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_{2-}^\dagger \rangle}{2\langle (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{2-}) | \dot{\mathbf{x}}_{2-}^\dagger \rangle} dt_1 + \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_{2+}^\dagger \rangle}{2\langle (\mathbf{x}_{2+} - \mathbf{x}_1) | \dot{\mathbf{x}}_{2+}^\dagger \rangle} dt_1. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Os intervalos de integração no funcional (2.1) são determinados pelas condições de fronteira mista, no passado e no futuro, definidas a seguir. Na Figura 2.1 exibimos um diagrama espaço tempo com um exemplo pictórico para a trajetória da partícula 1, na cor azul, para a trajetória da partícula 2, na cor verde, o segmento de fronteira no futuro da carga 1 e o segmento de fronteira no passado da carga 2, ambos na cor vermelha. As condições de fronteira são formadas pelo ponto inicial da trajetória da partícula 1, O_A , pelo segmento de fronteira $\mathbf{x}_2(t_2)$ para $t_2 \in [t_{O^-}, t_{O^+}]$, que se encontra dentro do cone de luz do ponto O_A , pelo ponto final da trajetória da partícula 2, L_B e pelo segmento de fronteira $\mathbf{x}_1(t_1)$ para $t_1 \in [t_{L^-}, t_{L^+}]$, que se encontra dentro do cone de luz do ponto L_B . Adicionalmente, para definir por completo as condições de fronteira, os segmentos de fronteira envolvidos devem satisfazer as seguintes imposições: (i) o segmento de fronteira na história da partícula 1 e o segmento de fronteira no futuro da partícula 2 devem ser subluminais, isto é, $|\mathbf{v}_1(t_1)| < 1$ para $t_1 \in [t_{L^-}, t_{L^+}]$ e $|\mathbf{v}_2(t_2)| < 1$ para $t_2 \in [t_{O^-}, t_{O^+}]$; (ii) o segmento de fronteira na história da partícula 1 e o segmento de fronteira no futuro da partícula 2 não podem interagir, ou seja, $t_{O^+} \leq t_{L^-} + |\mathbf{x}_1(t_{L^-}) - \mathbf{x}_2(t_{O^+})|$, sendo que na igualdade o ponto O^+ está no cone de luz futuro do ponto L^- . A posição e velocidade nos pontos da trajetória da carga 1 são dadas pelos quadrivetores $\mathbf{x}_1 = (t_1, \mathbf{x}_1)$, $\dot{\mathbf{x}}_1 = (1, \mathbf{v}_1)$ para $t_1 \in [t_{O_A}, t_{L^-}]$. A posição e velocidade nos pontos da trajetória da carga 2 são dadas por $\mathbf{x}_2 = (t_2, \mathbf{x}_2)$, $\dot{\mathbf{x}}_2 = (1, \mathbf{v}_2)$ para $t_2 \in [t_{O^+}, t_{L_B}]$. Ao olharmos para o diagrama espaço tempo da Figura 2.1 devemos ter em mente que a interação direta entre partículas tem uma simetria temporal, logo, uma solução invertida no tempo também é solução do problema.

As condições de fronteira acima definidas determinam os dados iniciais para resolver o problema com valor na fronteira, da mesma forma como são definidas as condições iniciais para resolver equações diferenciais ordinárias, com a diferença que as condições de fronteira representam um conjunto de condições iniciais com dimensão infinita. Uma vez que as condições de fronteira estão definidas, o desafio dado à Eletrodinâmica Variacional é encontrar as trajetórias das partículas carregadas, representadas nas cores azul e verde na Figura 2.1, que minimizam o funcional (2.1).

Um problema variacional constitui-se em obter os pontos críticos de um funcional, que normalmente está associado a um problema diferencial. Por exemplo, na Mecânica Clássica, a condição de ponto crítico do funcional de ação fornece as equações diferenciais de movimento, as equações de Euler Lagrange. Da mesma forma, no Cálculo das Variações Clássico, o problema de minimização do funcional é reduzido ao estudo de um problema das equações diferenciais^[61]. Essa técnica tem sucesso nos casos em que o problema diferencial pode ser abordado por algum método. Pensando nos casos em que não existem métodos para resolver o

Figura 2.1.: Diagrama espaço tempo com um exemplo pictórico de trajetórias $x_1(t_1)$, para $t_1 \in [t_{O_A}, t_{L^-}]$, e $x_2(t_2)$, para $t_2 \in [t_{O^+}, t_{L_B}]$; as condições de fronteira dadas pelo segmento de fronteira $x_2(t_2)$ para $t_2 \in [t_{O^-}, t_{O^+}]$ em cone de luz com o ponto inicial da trajetória da partícula 1, O_A , e pelo segmento de fronteira $x_1(t_1)$ para $t_1 \in [t_{L^-}, t_{L^+}]$ em cone de luz com o ponto final da trajetória da partícula 2, L_B .

problema diferencial, em meados do século XIX começaram a surgir técnicas que invertem esse processo, o problema diferencial é tratado a partir do estudo do funcional associado a ele^[61]. Assim surgiu o Método Direto do Cálculo das Variações, que resume-se em estudar diretamente o funcional e resolver a condição de ponto crítico sem fazer uso direto das equações de Euler Lagrange^[61]. Com esse método a análise do funcional passou a ser usada para provar de existência de soluções para o problema diferencial em questão.

Para o problema eletromagnético de dois corpos, vimos que o problema diferencial envolvido consiste numa equação diferencial com retardo misto dependente do estado e do tipo neutro. Em geral, não existe um método numérico que seja capaz de resolver esse tipo de equação para condições de fronteira que satisfazem a condição (i) e apenas a desigualdade da condição (ii) acima descritas. Para o caso especial em que as condições de fronteiras satisfazem a condição (i) e satisfazem a igualdade da condição (ii), dada por $t_{O^+} \leq t_{L^-} + \|x_1(t_{L^-}) - x_2(t_{O^+})\|$, veremos no Capítulo 3, que existe uma técnica para resolver diretamente as equações de movimento e uma condição de continuidade fornecidas pela condição de ponto crítico do funcional. Logo, excluindo esse caso especial, temos que usar o Método Direto do Cálculo das Variações. No que segue, aplicamos o princípio variacional construído por De Luca^[51] para procurar por soluções que satisfazem a condição de ponto crítico de um funcional do tipo (2.1), para logo depois definirmos o panorama que busca resolver diretamente o problema diferencial associado ao funcional e outras situações em que é necessário aplicar o Método Direto do Cálculo das Variações. Antes disso, vamos apenas definir algumas nomenclaturas e quantidades que serão usadas ao longo do texto e vamos redefinir o funcional de ação que será empregado nesse princípio variacional.

Na equação (2.1) e no que segue, vamos considerar o sistema de unidades eletrônico, também conhecido como sistema de unidades de Dirac^[62], onde a velocidade da luz, a unidade de

carga e a massa do elétron são unitárias, $c = e = m_e = 1$, e com isso, a constante reduzida de Planck fica $\hbar = 1/\alpha = 137,035999074(44)$, onde α é a constante de estrutura fina, e a constante de Coulomb fica $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 1$. Nesse sistema de unidades o raio clássico do elétron $r_e = 2,8179403267(27) \times 10^{-15}\text{m}$, o raio de Bohr $r_0 = 5,2917721092(17) \times 10^{-11}\text{m}$ e o raio experimental do elétron $r_e^* < 10^{-18}\text{m}$ ficam

$$r_e = \frac{\alpha\hbar}{m_e c} = 1, \quad r_0 = \frac{\hbar^2}{k_e e^2 m_e} = \frac{1}{\alpha^2} = 18,778865022(12) \times 10^3 \quad \text{e} \quad r_e^* < 3 \times 10^{-4}. \quad (2.2)$$

Também vamos adotar a seguinte notação para os pontos da condição de fronteira adiante: $\mathbf{O}_A = (t_{O_A}, \mathbf{x}_{O_A})$, $\mathbf{O}^- = (t_{O^-}, \mathbf{x}_{O^-})$, $\mathbf{O}^+ = (t_{O^+}, \mathbf{x}_{O^+})$, $\mathbf{L}^- = (t_{L^-}, \mathbf{x}_{L^-})$, $\mathbf{L}^+ = (t_{L^+}, \mathbf{x}_{L^+})$ e $\mathbf{L}_B = (t_{L_B}, \mathbf{x}_{L_B})$. Além disso, dado $\mathbf{x}_i := (t_i, \mathbf{x}_i)$ e seu dual $\mathbf{x}_i^\dagger := (t_i, -\mathbf{x}_i)$, para $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, adotamos as notações

$$\mathbf{x}_{j\pm} := \mathbf{x}_j(t_{j\pm}(t_i)), \quad \dot{\mathbf{x}}_{j\pm} := \dot{\mathbf{x}}_j(t_{j\pm}(t_i)), \quad \mathbf{x}_{ij\pm} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm}, \quad (2.3)$$

para as posições retardadas (-) e avançadas (+), velocidades retardadas e avançadas, e as distâncias em cone de luz, respectivamente. Os tempos avançados/retardados são dados implicitamente pela condição de cone de luz avançado/retardado

$$t_{j\pm} = t_i \pm \|\mathbf{x}_i(t_i) - \mathbf{x}_j(t_{j\pm})\|. \quad (2.4)$$

Vamos denotar o produto escalar usual em $\mathbb{R}^4$ por $\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = t_i t_j + \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$, e o produto de Minkowski por $\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j^\dagger \rangle = t_i t_j - \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$, onde $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^3$. Note que $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b}^\dagger \rangle = \langle \mathbf{a}^\dagger | \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}^\dagger | \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b} | \mathbf{a}^\dagger \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4$ e que o produto de Minkowski não define uma norma, pois para quadri-vetores do tipo espaço temos $\mathbf{x}_i^2 = \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_i^\dagger \rangle < 0$.

Por conveniência, vamos adicionar os termos constantes $m_1(t_{L^-} - t_{O_A})$ e $m_2(t_{L_B} - t_{O^+})$ na ação de Fokker (2.1), que a mantém invariante de Lorentz e a torna estritamente positiva, resultando em

$$\begin{aligned} S[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] &:= m_1 \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \left(1 - \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_1^\dagger \rangle} \right) dt_1 + m_2 \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} \left(1 - \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{\mathbf{x}}_2^\dagger \rangle} \right) dt_2 \\ &+ \int_{t_{O_A}}^{t_{L^+}} \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_{2-}^\dagger \rangle}{2\langle (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{2-}) | \dot{\mathbf{x}}_{2-}^\dagger \rangle} dt_1 + \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_{2+}^\dagger \rangle}{2\langle (\mathbf{x}_{2+} - \mathbf{x}_1) | \dot{\mathbf{x}}_{2+}^\dagger \rangle} dt_1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou usando, respectivamente, as quantidades relacionadas às energias cinéticas e de interação

$$K_i := m_i \left(1 - \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_i | \dot{\mathbf{x}}_i^\dagger \rangle} \right), \quad U_{ij}^\pm(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j\pm}, \dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_{j\pm}) := -\frac{e_i e_j \langle \dot{\mathbf{x}}_i | \dot{\mathbf{x}}_{j\pm}^\dagger \rangle}{2|\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm} | \dot{\mathbf{x}}_{j\pm}^\dagger \rangle|}, \quad (2.6)$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, e tomando $e_i e_j = -1$, pode-se mostrar que as seguintes definições

para a ação são equivalentes^[52]

$$S = \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} K_1 dt_1 + \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} K_2 dt_2 + \underbrace{\int_{t_{O_A}}^{t_{L^+}} U_{12}^- dt_1}_{\parallel} + \underbrace{\int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} U_{12}^+ dt_1}_{\parallel}; \quad (2.7)$$

$$\equiv \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} K_1 dt_1 + \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} K_2 dt_2 + \underbrace{\int_{t_{O^-}}^{t_{L_B}} U_{21}^+ dt_2}_{\parallel} + \underbrace{\int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} U_{21}^- dt_2}_{\parallel}. \quad (2.8)$$

Por fim, vamos elencar algumas definições de espaços de funções e de intervalos temporais das trajetórias e segmentos de fronteira, tomando como exemplo os intervalos indicados na Figura 2.1, e que serão úteis para qualquer parametrização do funcional (2.5)

Definição 2.1 (Intervalos $\mathcal{I}^{i\pm}$, $\mathcal{I}_N^{i\pm}$, com $i = 1, 2$). *Sejam, respectivamente, $\mathcal{I}^{1-} \equiv [t_{O_A}, t_{L^-}]$ e $\mathcal{I}^{2+} \equiv [t_{O^+}, t_{L_B}]$ os intervalos da trajetória da partícula 1 e 2; $\mathcal{I}^{1+} \equiv [t_{L^-}, t_{L^+}]$, $\mathcal{I}^{2-} \equiv [t_{O^-}, t_{O^+}]$ o intervalo do segmento de fronteira da partícula 1, 2; e $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}^{2-} \cup \mathcal{I}^{2+}$, $\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}^{1-} \cup \mathcal{I}^{1+}$ o intervalo da órbita inteira da partícula 1 e 2. Definimos cada $\mathcal{I}_N^{i\pm}$ com sendo o intervalo correspondente $\mathcal{I}_{i\pm}$ a menos de um conjunto finito de pontos.*

Também vamos considerar a seguinte definição para espaços de funções que serão úteis no futuro.

Definição 2.2 (Espaço $\mathcal{N}^{(m,n)}(\mathcal{I}_N)$). *Dado os inteiros n e m com $n > m$, o inteiro N , os intervalos $\mathcal{A}_\sigma = (t_{\sigma-1}, t_\sigma)$ e $\mathcal{F}_\sigma = [t_{\sigma-1}, t_\sigma]$, com $\sigma = 1, 2, \dots, N$, de modo que $\mathcal{I}_N = \cup_{\sigma=1}^N \mathcal{A}_\sigma$ e $\mathcal{I} = \cup_{\sigma=1}^N \mathcal{F}_\sigma$, definimos o espaço $\mathcal{N}^{(m,n)}(\mathcal{I}_N)$ como sendo o espaço das funções de classe $C^m(\mathcal{I}, \mathbb{R}^3)$ e de classe $C^n(\mathcal{I}_N, \mathbb{R}^3)$. Note que $\mathcal{N}^{(m,n)}(\mathcal{I}_N)$ forma um espaço vetorial sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$.*

Usando a Definição 2.2, segue que o espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$ está associado ao espaço das funções que são de classe C^0 globalmente e de classe C^2 por trechos, com um número finito N de pontos em que a velocidade é descontínua, enquanto o espaço $\mathcal{N}^{(0,1)}(\mathcal{I}_N)$ está associado ao espaço das funções de classe C^0 globalmente e de classe C^1 por trechos com um número finito N de pontos em que a velocidade é descontínua.

Agora, vamos aplicar o Princípio Variacional construído por De Luca^[51] usando uma parametrização genérica para o funcional (2.5) e restringindo a trajetória da carga 1 ao espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}^{1-})$, a trajetória da carga 2 ao espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}^{2+})$, o segmento de fronteira da carga 1 ao espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}^{1+})$ e o segmento de fronteira da carga 2 ao espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}^{2-})$. Para isso, vamos reparametrizar o funcional usando funções genéricas $t_i = t_i(s_i)$ monotônicas crescentes, de modo que os segmentos de fronteira e as trajetórias serão dadas por $\mathbf{x}_i(s_i) = (t_i(s_i), \mathbf{x}_i(s_i))$, com $i = 1, 2$. Pode-se mostrar que essa ação é invariante por reparametrização do parâmetro de integração, exigindo apenas que as funções de reparametrização $t_i(s_i)$ sejam monotônicas crescentes^[51]. Sendo assim, as formas (2.7) e (2.8) do funcional ficam

$$S = \int_{T_{O_A}}^{T_{L^-}} K_1 ds_1 + \int_{T_{O^+}}^{T_{L_B}} K_2 ds_2 + \int_{T_{O_A}}^{T_{L^+}} U_{12}^- ds_1 + \int_{T_{O_A}}^{T_{L^-}} U_{12}^+ ds_1, \quad (2.9)$$

$$\equiv \int_{T_{O_A}}^{T_{L^-}} K_1 ds_1 + \int_{T_{O^+}}^{T_{L_B}} K_2 ds_2 - \int_{T_{O^-}}^{T_{L_B}} U_{21}^+ ds_2 - \int_{T_{O^+}}^{T_{L_B}} U_{21}^- dt_2. \quad (2.10)$$

onde usamos as inversas das funções de reparametrização, $T_{O_A} = s_1(t_{O_A})$, $T_{L^-} = s_1(t_{L^-})$, $T_{L^+} = s_1(t_{L^+})$, $T_{L_B} = s_2(t_{L_B})$, $T_{O^-} = s_2(t_{O^-})$, $T_{O^+} = s_2(t_{O^+})$. Para calcular a primeira variação, δS , do funcional (2.5) nesse método variacional, ao tomarmos a variação sobre a trajetória de uma carga, mantemos a trajetória da outra carga e os segmentos de fronteira constantes. Observando que, no intervalo $[T_{L^-}, T_{L^+}]$ o integrando U_{12}^- depende apenas da trajetória da partícula 2 e do segmento de fronteira da partícula 1, podemos reescrever o funcional na forma

$$\begin{aligned} S &= C_2 + \int_{T_{O_A}}^{T_{L^-}} \mathcal{L}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2) ds_1, \\ &= C_2 - \int_{T_{O_A}}^{T_{L^-}} m_1 \sqrt{\dot{t}_1^2 - \mathbf{v}_1^2} ds_1 + \int_{T_{O_A}}^{T_{L^-}} \frac{(\dot{t}_1 \dot{t}_{2+} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_{2+})}{2r_{12+}(\dot{t}_{2+} + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_{2+})} ds_1 \\ &\quad + \int_{T_{O_A}}^{T_{L^-}} \frac{(\dot{t}_1 \dot{t}_{2-} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_{2-})}{2r_{12-}(\dot{t}_{2-} - \mathbf{n}_{12-} \cdot \mathbf{v}_{2-})} ds_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde, para $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, sabemos que $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(s_i)$, $\mathbf{v}_i = d\mathbf{x}_i/ds_i$, $\dot{t}_i = dt_i/ds_i$ e as derivadas dos tempos avançados/retardados $t_{j\pm}$ dependem de s_i implicitamente, conforme a condição de cone de luz avançado/retardado $t_{j\pm}(s_j) = t_i(s_i) \pm \|\mathbf{x}_i(s_i) - \mathbf{x}_j(s_j)\|$, isto é

$$\dot{t}_{j\pm} = \dot{t}_i \frac{ds_i}{ds_j} \pm \left(\mathbf{v}_i \frac{ds_i}{ds_j} - \mathbf{v}_{j\pm} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}. \quad (2.12)$$

Ainda na equação (2.11), $r_{ij+} = \|\mathbf{x}_i(s_i) - \mathbf{x}_j(s_j)\|$ é a distância em cone de luz, $\mathbf{n}_{ij\pm} = (\mathbf{x}_i(s_i) - \mathbf{x}_j(s_{j\pm}))/r_{ij\pm}$ é o vetor normal e $\mathbf{v}_{j\pm} = d\mathbf{x}_j/ds_j|_{t_{j\pm}}$. Além disso, a constante C_2 depende apenas de quantidades da trajetória 2. A forma que escrevemos o funcional na equação (2.11) é conveniente para tomarmos variações com respeito à trajetória 1. Do mesmo modo, observando que no intervalo $[T_{O^-}, T_{O^+}]$ o integrando U_{21}^+ depende apenas da trajetória da partícula 1 e do segmento de fronteira da partícula 2, podemos reescrever o funcional na forma

$$S = C_1 + \int_{T_{O^+}}^{T_{L_B}} \mathcal{L}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2) ds_2, \quad (2.13)$$

que é adequada para tomarmos variações com respeito à trajetória 2. É importante observarmos que ao colocarmos os segmentos de fronteira e as trajetórias no espaço do tipo $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$, os integrandos da ação (2.11) e (2.13) não estão definidos no conjunto finito de pontos onde a

velocidade é descontínua, e portanto é necessário considerar uma somatória de integrais para uma sequência de intervalos abertos disjuntos. Por abuso de notação, representamos as integrais com apenas um intervalo de integração, mas tendo em mente que a integral de Riemann é feita por trechos.

Agora, vamos calcular a primeira variação do funcional, colocado nas formas (2.11) e (2.13). Com esse intuito, considere que a variação para cada trajetória, $\mathbf{b}_i(s_i)$, está contida num espaço do tipo $\mathcal{N}^{(0,1)}(\mathcal{I}_N)$, de modo que as trajetórias perturbadas serão dadas por

$$\mathbf{u}_i(s_i) := \mathbf{x}_i(s_i) + \mathbf{b}_i(s_i), \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{u}}_i(s_i) := \dot{\mathbf{x}}_i(s_i) + \dot{\mathbf{b}}_i(s_i), \quad (2.14)$$

Para que as trajetórias perturbadas satisfaçam as condições de fronteira vamos impor que as extremidades das perturbações sejam nulas

$$\mathbf{b}_1(T_{O_A}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_1(T_{L^-}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_2(T_{O^+}) = \mathbf{0}, \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_2(T_{L_B}) = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Além disso, as perturbações têm componentes temporais nulas $\mathbf{b}_i = (0, \mathbf{b}_i)$ e devem ser tais que as trajetórias perturbadas sejam subluminais, $\dot{\mathbf{u}}_i(s_i) < 1$, para $i = 1, 2$.

No presente problema variacional, colocamos as trajetórias e histórias⁽¹⁾ no espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$ e as perturbações no espaço $\mathcal{N}^{(0,1)}(\mathcal{I}_N)$, de modo que, nas duas órbitas inteiras haverá um número finito de pontos com velocidade descontínua. Nesses pontos a velocidade não é definida, apenas seus limites à esquerda e à direita. Na Figura 2.2 ilustramos como um ponto com velocidade descontínua pode gerar uma sequência de pontos de descontinuidade, que denominamos como cadeia de descontinuidades. Assim, para realizar a integração de $\mathcal{L}_1$ no intervalo $\mathcal{I}^{1-}$, equação (2.11), devemos considerar que o integrando $\mathcal{L}_1$ não está definido no conjunto de pontos com velocidade descontínua do próprio intervalo de integração $\mathcal{I}^{1-}$, no conjunto de pontos que estão em cone de luz com os pontos com velocidade descontínua dos intervalos $\mathcal{I}^{2-}$ e $\mathcal{I}^{2+}$ e também no conjunto de pontos em $\mathcal{I}^{1+}$ que são alcançados pelas cadeias de descontinuidades vindas dos pontos com velocidade descontínua do próprio intervalo $\mathcal{I}^{1-}$, e do intervalos $\mathcal{I}^{2-}$, $\mathcal{I}^{2+}$ e $\mathcal{I}^{1+}$. Desse modo, podemos supor que o integrando $\mathcal{L}_1$ não está definido em número finito de pontos N_1 , dado pelo número de elementos do conjunto resultante da união dos conjuntos de pontos com velocidade descontínua citados. Estendendo o mesmo raciocínio para a integração de $\mathcal{L}_2$ no intervalo $\mathcal{I}^{2+}$, equação (2.11), podemos supor que o integrando $\mathcal{L}_2$ não está definido em número finito de pontos N_2 . Com isso, podemos definir um conjunto finito de intervalos abertos $s_i \in (l_{\sigma-1}^{i+}, l_{\sigma}^{i-})$, com $\sigma = 1, \dots, N_i$, nos quais os integrandos $\mathcal{L}_i$ estão definidos. As notações com os sinais $+$ e $-$ em $l_{\sigma}^{\pm}$ representam, respectivamente, o limite à direita e à esquerda do σ -ésimo ponto de descontinuidade, logo $l_{\sigma}^{i-} = l_{\sigma}^{i+}$. No limite à esquerda dos intervalos com $\sigma = 1$ devemos ter $l_0^{1+} = T_{O_A}$, $l_0^{2+} = T_{O^+}$ e no limite à direita dos intervalos com $\sigma = N_i$ devemos ter $l_{N_1}^{1-} = T_{L^-}$, $l_{N_2}^{2-} = T_{L_B}$, de modo que as condições (2.15) ficam

⁽¹⁾Aqui e no que segue, sempre que necessário, usaremos o termo história para designar tanto a segmento de fronteira na história da partícula 1, $\mathbf{x}_1(t_1)$ para $t_1 \in [t_{O_A}, t_{L^-}]$, quanto segmento de fronteira no futuro da partícula 2, $\mathbf{x}_2(t_2)$ para $t_2 \in [t_{O^+}, t_{L_B}]$. Além de simplificar a nomenclatura, essa escolha reflete a simetria temporal dessa eletrodinâmica e o fato desses dois trechos de trajetória serem partes das condições de fronteira, dados iniciais do problema.

Figura 2.2.: Em vermelho exibimos as condições de fronteira, o ponto O_A da trajetória 1 e os pontos O^- e O^+ , que estão em cone de luz com O_A , mais o ponto L_B e os pontos L^- e L^+ , que estão em cone de luz com L_B . A trajetória da partícula 1 do método variacional está em azul, entre O_A e L^- , enquanto a trajetória da partícula 2 está em verde, entre O^+ e L_B . O primeiro ponto com velocidade descontínua O^+ gera uma sequência de pontos de descontinuidade à frente b_1, b_2, b_3 , enquanto o ponto de descontinuidade L^- pode gerar uma sequência de pontos de descontinuidade a_1, a_2, a_3 .

$$b_i(l_0^{i+}) = b_i(l_{N_i}^{i-}) = 0. \quad (2.16)$$

Substituindo as trajetórias perturbadas (2.14) nos funcionais (2.11) e (2.13) e tomando sua primeira variação (ou derivada funcional) temos

$$\delta S_i = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=N_i} \int_{l_{\sigma-1}^+}^{l_{\sigma}^-} \left[\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \middle| \mathbf{b}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \middle| \dot{\mathbf{b}}_i \right\rangle \right] ds_i + \mathcal{O}(\|\mathbf{b}_i\|_{\mathcal{N}^{(1)}(\mathcal{I}_N)}^2), \quad (2.17)$$

sendo que

$$\|\mathbf{b}_i\|_{\mathcal{N}^{(0,1)}(\mathcal{I}_N)} := \sup \|\mathbf{b}_i\|_4 + \text{ess sup } \|\dot{\mathbf{b}}_i\|_4, \quad (2.18)$$

onde $\|\cdot\|_4$ indica a norma Euclidiana usual de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{N}^{(0,1)}(\mathcal{I}_N)$ é dado pela Definição 2.2 e $\text{ess sup } \|\dot{\mathbf{b}}_i\|_4$ representa o sup da norma $\|\dot{\mathbf{b}}_i\|_4$ para todo o conjunto de pontos em que $\dot{\mathbf{b}}_i$ é definido, exceto num conjunto de medida nula, ou seja, o sup em quase toda parte (q.t.p.). Definimos as variações do funcional no espaço de funções $\mathcal{N}^{(0,1)}(\mathcal{I}_N)$ com a norma (2.18), que forma um espaço vetorial normado e completo, ou seja, forma um espaço de Banach com respeito à norma (2.18). Logo, caso exista, essa variação corresponde à derivada de Frechét do funcional. Usando os resultados de existência da derivada de Frechét obtidos na Referência^[52]

para trajetórias no espaço das funções $\mathcal{N}^{(1,2)}(\mathcal{I}_N)$, mas empregando a norma (2.18), pode-se mostrar que o funcional (2.5) é Frechét diferenciável.

Realizando a integração por partes na equação (2.17) em cada intervalo $(l_{\sigma-1}^{i+}, l_{\sigma}^{i-})$ obtemos que

$$\delta S_i = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=N_i} \int_{l_{\sigma-1}^{i+}}^{l_{\sigma}^{i-}} \left\langle \mathbf{b}_i \left| \left[\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{d}{ds_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \right] \right\rangle ds_i + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=N_i} \int_{l_{\sigma-1}^{i+}}^{l_{\sigma}^{i-}} \frac{d}{ds_i} \left\langle \mathbf{b}_i(s_i) \left| \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right\rangle ds_i. \quad (2.19)$$

Usando o fato de que a variação $\mathbf{b}_i(s_i)$ é contínua e nula nas extremidades (2.16), podemos rearranjar o segundo termo do lado esquerdo da equação (2.19), fornecendo que

$$\delta S_i = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=N_i} \int_{l_{\sigma-1}^{i+}}^{l_{\sigma}^{i-}} \left\langle \mathbf{b}_i \left| \left[\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{d}{ds_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \right] \right\rangle ds_i - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=N_i-1} \left\langle \mathbf{b}_i(l_{\sigma}^{-}) \left| \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right|_{l_{\sigma}^{i-}}^{l_{\sigma}^{i+}} \right\rangle, \quad (2.20)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \Big|_{l_{\sigma}^{i-}}^{l_{\sigma}^{i+}} = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i}(l_{\sigma}^{i+}) - \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i}(l_{\sigma}^{i-}), \quad (2.21)$$

corresponde à variação da quadricorrente no σ -ésimo ponto com velocidade descontínua na trajetória da carga i , onde $i = 1, 2$. Portanto, impondo que a primeira derivada do funcional de ação seja nula, obtemos a sua condição de ponto crítico

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 = 0. \quad (2.22)$$

Dado que as perturbações $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ são independentes, para que a condição de ponto crítico (2.22) seja satisfeita devemos impor que $\delta S_1 = \delta S_2 = 0$. Impondo a condição $\delta S_i = 0$, para $i = 1, 2$, onde δS_i é dado pela equação (2.20), e usando o fato de que cada perturbação $\mathbf{b}_i$ é arbitrária, no sentido de que deve apenas ser nula nas extremidades, ser de classe C^0 globalmente e de classe C^1 por trechos, vemos que as trajetórias tem que satisfazer as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{d}{ds_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

e conservar a quadricorrente

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \Big|_{l_{\sigma}^{i-}}^{l_{\sigma}^{i+}} = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Pode-se mostrar que as componentes espaciais das equações de Euler-Lagrange (2.23) resultam nas equações de movimento de Wheeler-Feynman para uma dada parametrização $t_i(s_i)^{(2)}$

⁽²⁾Na Referência^[51] é dada uma dedução completa das equações de movimento de Wheeler-Feynman usando as equações de Euler-Lagrange (2.23) para a parametrização $t_i(s_i) = s_i$.

$$m_i \frac{d}{ds_i} \left(\frac{\mathbf{v}_i}{\sqrt{\dot{t}_i - \mathbf{v}_i^2}} \right) = e_i [\mathbf{E}_j + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j], \quad (2.25)$$

para $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, sabemos que $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(s_i)$, $\mathbf{v}_i = d\mathbf{x}_i/ds_i$, $\dot{t}_i = dt_i/ds_i$ e que os campos $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{B}_j$ são dados pelas semi-somas dos campos avançados e retardados que correspondem aos campos de Liénard-Wiechert. Como veremos na Seção 3.1 a componente temporal das equações de Euler-Lagrange (2.23) pode ser obtida a partir das componentes espaciais fazendo o produto escalar de ambos os lados de equação (2.25) com $\mathbf{v}_i$. Quando os segmentos de fronteira contêm um número finito de pontos com velocidade descontínua, os campos $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{B}_j$ e as equações de Wheeler-Feynman (2.25) não estão definidas em um número finito de pontos do espaço, ou seja, são válidas q.t.p.. Também, pode-se mostrar que a conservação da quadricorrente (2.21), também conhecida como condições de quina de Weierstrass-Erdmann^[57], para $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$ resultam na conservação dos momentos lineares parciais, dados por

$$\mathbf{P}_i := \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{\dot{t}_i - \mathbf{v}_i^2}} - \frac{\mathbf{v}_{j-}}{2r_{ij-}(\dot{t}_{j-} - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-})} - \frac{\mathbf{v}_{j+}}{2r_{ij+}(\dot{t}_{j+} + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+})}, \quad (2.26)$$

e na conservação das energias parciais, dadas por

$$E_i := -\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{t}_i} = \frac{m_i \dot{t}_i}{\sqrt{\dot{t}_i - \mathbf{v}_i^2}} - \frac{\dot{t}_{j-}}{2r_{ij-}(\dot{t}_{j-} - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-})} - \frac{\dot{t}_{j+}}{2r_{ij+}(\dot{t}_{j+} + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+})}. \quad (2.27)$$

nos pontos com velocidade descontínua. Aqui usamos a nomenclatura energia parcial e momento linear parcial apenas para distinguir da nomenclatura usada para o valor constante da Hamiltoniana e do momento canônico numa dinâmica Hamiltoniana, apesar de, como vimos no Capítulo 1, não ser possível uma formulação Hamiltoniana para o problema de dois corpos da eletrodinâmica de Wheeler-Feynman. Dessa maneira, denotando os momentos lineares parciais e as energias parciais nos limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente, por $\mathbf{P}_i^e$, $\mathbf{P}_i^d$ e E_i^e , E_i^d as condições de quina de Weierstrass-Erdmann são dadas por

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{P}_i := \mathbf{P}_i^d - \mathbf{P}_i^e = \mathbf{0}, \\ \Delta E_i := E_i^d - E_i^e = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

O mecanismo de ocorrência de pontos com velocidade descontínua e a forma como eles se propagam pelas trajetórias são regidos pelas condições de quina de Weierstrass-Erdmann (2.28), onde a palavra ‘quinas’ se refere às discontinuidades nas velocidades. Pode-se mostrar que a condição de campo de radiação nula para o problema de dois corpos com trajetórias globalmente limitadas implica que as trajetórias precisam, necessariamente, ter velocidade descontínua^[58], mostrando que o mecanismo de ocorrência e propagação de pontos com velocidade descontínua desempenha um papel importante no problema de dois corpos da eletrodinâmica de Wheeler-Feynman.

As equações de Wheeler-Feynman (2.25) formam um sistema de equações diferenciais com retardo misto dependente do estado e do tipo neutro, enquanto as condições de quina

de Weierstrass-Erdmann (2.28) constituem um sistema de equações não lineares. Para os problemas de dois corpos em que os segmentos de fronteira satisfazem as condições (i) e (ii), expostas no início desta seção, não existe um método para encontrar as trajetórias que resolvem a equação de movimento (2.25) e satisfazem a condição (2.28). Nesses casos, é preciso aplicar o Método Direto do Cálculo das Variações, como por exemplo é feito na Referência^[52], onde é desenvolvido um método numérico para resolver a condição de ponto crítico (2.22) com δS_1 e δS_2 colocados na forma integral (2.20), sendo que o termo de continuidade é nulo, pois são consideradas trajetórias de classe C^1 globalmente e de classe C^2 por trechos. No Capítulo 4 também aplicamos esse método direto, porém buscamos resolver a condição de ponto crítico (2.22) com δS_1 e δS_2 postos na forma integral (2.17), antes de ser feita a integração por partes. Já para o problema especial no qual os segmentos de fronteiras satisfazem a condição (i) e apenas a igualdade da condição (ii), o método variacional que busca resolver diretamente o problema diferencial associado ao funcional, resume-se a procurar soluções que satisfaçam as equações de Wheeler-Feynman (2.25) e as condições de quina de Weierstrass-Erdmann (2.28) fazendo uso direto dessas equações. Esse problema especial será analisado no Capítulo 3.

Por fim, observamos que as soluções que satisfazem a condição de ponto crítico do funcional, $\delta S = 0$, podem ser um ponto de mínimo, de máximo ou de inflexão, e que para distinguir esses tipos de solução é preciso calcular a segunda derivada do funcional nesses pontos.

2.2. Órbitas de Schild

Nesta seção apresentamos as soluções da equação de Wheeler-Feynman (1.3) conhecidas como órbitas circulares de Schild, que foram previstas por Schenberg em 1946^[28] e calculadas por Schild em 1963^[31]. Também exibimos algumas propriedades dessas órbitas e realizamos o cálculo do funcional de ação (2.5) sobre elas. Alguns resultados teóricos sobre existência de solução para o problema de dois corpos que serão alcançados no Capítulo 3 e no Capítulo 4 serão obtidos para trajetórias na vizinhança dessas órbitas de Schild. Essas órbitas também serão importantes para a realização dos experimentos numéricos nesses dois capítulos, onde as condições de fronteira serão construídas tomando essas soluções como referência. Além disso, as soluções de Schild serão úteis para realizar testes de convergência das soluções fornecidas pelos métodos numéricos desenvolvidos nesses dois capítulos.

Na Figura 2.3 exibimos as órbitas circulares de Schild com raio r_1 para a carga 1 de massa m_1 e com raio r_2 para a carga 2 de massa m_2 . Para uma dada posição $\mathbf{r}_2$ da carga 2, exibimos na parte esquerda da Figura 2.3 as velocidades nas posições retardada e avançada da carga 1, para os respectivos ângulos de retardo e avanço, $\pm\theta$. Para o movimento circular as componentes tangenciais das equações de Wheeler-Feynman (1.3) são identicamente satisfeitas, enquanto as componentes radiais fornecem as soluções de Schild^[31], que depois de bastante manipulação algébrica podem ser postas na forma:

Figura 2.3.: À esquerda exibimos a órbita circular de Schild com raio r_1 da carga 1 de massa m_1 , a órbita com raio r_2 da carga 2 de massa m_2 , a distância em cone de luz r_{21+} e a velocidade retardada (avanzada), de um ângulo θ , para a partícula 1, v_{1-} (v_{1+}). À direita expomos segmentos de órbitas circulares de Schild que satisfazem as condições de fronteira dadas pelo ponto inicial da trajetória da carga 1, O_A , pelo ponto final da trajetória da carga 2, L_B , pelo segmento de fronteira no passado da carga 2, linha vermelha entre os pontos O^- e O^+ , e pelo segmento de fronteira no futuro da carga 1, linha vermelha entre os pontos L^- e L^+ . As trajetórias da carga 1 e da carga 2 correspondem ao segmento em azul e verde, respectivamente.

$$\mathbf{x}_i := r_i \hat{\mathbf{r}}_i = \frac{e^2}{m_i} \frac{(1 - v_i^2)^{1/2}}{(\theta + v_i v_j \sin(\theta))^3} [(v_i + v_j \cos(\theta))(1 - v_i^2)(1 - v_j^2) + (v_i \theta + v_j \sin(\theta))(\theta + v_i v_j \sin(\theta))] \hat{\mathbf{r}}_i, \quad (2.29)$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, $\hat{\mathbf{r}}_1 = (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$ e $\hat{\mathbf{r}}_2 = (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0)$. Além disso, o ângulo de retardo $\theta = \omega \tau$ é dado implicitamente pelas magnitudes das velocidades por meio da relação

$$v_i^2 + v_j^2 + 2v_i v_j \cos(\theta) - \theta^2 = 0. \quad (2.30)$$

Usando que $\theta = \omega \tau$ e $v_i = \omega r_i$ podemos reescrever a equação (2.30) na forma

$$r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos(\theta) - \tau^2 = 0, \quad (2.31)$$

onde τ é o tempo que a luz leva para percorrer a distância $r_{ij\pm}$, como por exemplo a distância r_{12+} exibida na parte esquerda da Figura 2.3. A relação 2.31 deriva da condição de cone de luz (2.4).

Na Figura 2.1 exibimos apenas um exemplo pictórico de trajetórias das partículas e suas condições de fronteira num diagrama espaço tempo. Agora, na parte direita da Figura 2.3,

mostramos um exemplo real em que as trajetórias das partículas e as condições de fronteira para segmentos de órbitas circulares de Schild são representadas no espaço das trajetórias. A trajetória da carga 1 é dada pela curva $\mathbf{x}_1(t_1)$ com $t_1 \in [t_{O_A}, t_{L^-}]$ e a trajetória da carga 2 é dada pela curva $\mathbf{x}_2(t_2)$ com $t_2 \in [t_{O^+}, t_{L_B}]$, sendo que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ são dados pelas soluções de Schild (2.29). O segmento de fronteira no passado da carga 2 é dado pela curva $\mathbf{x}_2(t_2)$ com $t_2 \in [t_{O^-}, t_{O^+}]$ e o segmento de fronteira no futuro da partícula 1 é dado pela curva $\mathbf{x}_1(t_1)$ com $t_1 \in [t_{L^-}, t_{L^+}]$. Lembrando que os pontos O^- e O^+ estão em cone de luz com o ponto O_A e os pontos L^- e L^+ estão em cone de luz com o ponto L_B .

No restante desta seção vamos calcular o funcional de ação (2.5) sobre as soluções de Schild, dadas pela equação (2.29). Para isso, iniciamos reescrevendo o funcional (2.5) na forma compacta

$$S = m_1 I_1 + m_2 I_2 + \frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{2} I_4, \quad (2.32)$$

onde

$$I_1 := \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \left(1 - \sqrt{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1^\dagger \rangle} \right) dt_1, \quad I_2 := \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} \left(1 - \sqrt{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_2^\dagger \rangle} \right) dt_2, \quad (2.33)$$

$$I_3 := \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \frac{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_{2+}^\dagger \rangle}{\langle (\mathbf{x}_{2+} - \mathbf{x}_1) | \mathbf{v}_{2+}^\dagger \rangle} dt_1, \quad I_4 := \int_{t_{O_A}}^{t_{L^+}} \frac{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_{2-}^\dagger \rangle}{\langle (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{2-}) | \mathbf{v}_{2-}^\dagger \rangle} dt_1. \quad (2.34)$$

Para podermos calcular os termos I_i , com $i = 1, 2, 3, 4$ vamos usar o sistema de coordenadas polares e algumas propriedades das soluções de Schild. Usando a simetria da órbita de Schild e a condição de cone de luz também segue que

$$v_{i-} = v_{i+} := v_i, \quad x_{i-} = x_{i+} := r_i, \quad \tau = |t_i - t_{j\pm}| = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm}\| := r_{ij\pm}, \quad t_{i\pm} = t_j \pm \tau, \quad (2.35)$$

onde, $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, e usamos a notação:

$$\mathbf{x}_i = (t_i, \mathbf{x}_i), \quad \mathbf{v}_i = (1, \mathbf{v}_i), \quad (2.36)$$

sendo que

$$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt_i}, \quad \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt_i}, \quad (2.37)$$

Introduzindo coordenadas polares (r, φ) no plano (x, y) , para representar $\mathbf{x}_1 = r_1 \hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{x}_2 = -r_2 \hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v}_1 = \omega r_1 \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\mathbf{v}_2 = \omega r_2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\mathbf{a}_1 = -\omega^2 r_1 \hat{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{a}_2 = \omega^2 r_2 \hat{\mathbf{r}}$ em coordenadas retangulares

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = (r_1 \cos(\omega t), r_1 \sin(\omega t), 0), \\ \mathbf{x}_2 = -(r_2 \cos(\omega t), r_2 \sin(\omega t), 0), \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{1\pm} = (r_1 \cos(\omega t \pm \omega \tau), r_1 \sin(\omega t \pm \omega \tau), 0), \\ \mathbf{x}_{2\pm} = -(r_2 \cos(\omega t \pm \omega \tau), r_2 \sin(\omega t \pm \omega \tau), 0), \end{cases} \quad (2.38)$$

onde o ângulo de retardo é $\theta = \omega \tau$. As velocidades ficam

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (-v_1 \sin(\omega t), v_1 \cos(\omega t), 0), \\ \mathbf{v}_2 = (v_2 \sin(\omega t), -v_2 \cos(\omega t), 0), \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{1\pm} = (-v_1 \sin(\omega t \pm \omega \tau), v_1 \cos(\omega t \pm \omega \tau), 0), \\ \mathbf{v}_{2\pm} = (v_2 \sin(\omega t \pm \omega \tau), -v_2 \cos(\omega t \pm \omega \tau), 0), \end{cases} \quad (2.39)$$

sendo que $v_1 = \omega r_1$ e $v_2 = \omega r_2$. As distâncias em cone de luz $\mathbf{x}_{12\pm} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{2\pm}$ e $\mathbf{x}_{1\pm 2} = \mathbf{x}_{1\pm} - \mathbf{x}_2$ serão dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{12\pm} = (r_1 \cos(\omega t) + r_2 \cos(\omega t \pm \omega \tau), r_1 \sin(\omega t) + r_2 \sin(\omega t \pm \omega \tau), 0), \\ \mathbf{x}_{2\pm 1} = (r_1 \cos(\omega t \pm \omega \tau) + r_2 \cos(\omega t), r_1 \sin(\omega t \pm \omega \tau) + r_2 \sin(\omega t), 0), \end{cases} \quad (2.40)$$

Sobre a órbita de Schild sabemos que $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{v}_{j\pm} = \pm r_i r_j \sin(\theta)$ e $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{j\pm} = -v_i v_j \cos(\theta)$, para $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$. Com isso, estamos em condições de calcular o funcional de ação (2.32). Primeiro vamos calcular os termos I_i , com $i = 1, \dots, 4$, dados pelas equações (2.33) e (2.34) sobre a solução de Schild. Usando que $\theta = \omega \tau$ e $v_i = \omega x_i$, temos

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i^\dagger \rangle = 1 - v_i^2, & \text{para } i = 1, 2, \\ \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_{2\pm}^\dagger \rangle = 1 + v_1 v_2 \cos(\theta), \end{cases} \quad (2.41)$$

e

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}_{12-} | \mathbf{v}_{2-}^\dagger \rangle = (\theta + v_1 v_2 \sin(\theta)) / \omega, \\ \langle \mathbf{x}_{2+1} | \mathbf{v}_{2+}^\dagger \rangle = (\theta + v_1 v_2 \sin(\theta)) / \omega, \end{cases} \quad (2.42)$$

de modo que as integrais acima (2.34) resultam em

$$I_1 = (t_{L-} - t_{O_A}) \left(1 - \sqrt{1 - v_1^2} \right), \quad I_2 = (t_{L_B} - t_{O+}) \left(1 - \sqrt{1 - v_2^2} \right), \quad (2.43)$$

$$I_3 = (t_{L-} - t_{O_A}) \frac{\omega(1 + v_1 v_2 \cos(\theta))}{(\theta + v_1 v_2 \sin(\theta))}, \quad I_4 = (t_{L+} - t_{O_A}) \frac{\omega(1 + v_1 v_2 \cos(\theta))}{(\theta + v_1 v_2 \sin(\theta))}. \quad (2.44)$$

Por fim, usando que $\omega = \theta / \tau = \theta / r_{12}$, o funcional de ação (2.5) fica

$$\begin{aligned}
 S = & m_1(t_{L-} - t_{O_A}) \left(1 - \sqrt{1 - v_1^2}\right) + m_2(t_{L_B} - t_{O+}) \left(1 - \sqrt{1 - v_2^2}\right) \\
 & + [(t_{L-} - t_{O_A}) + (t_{L+} - t_{O_A})] \frac{(1 + v_1 v_2 \cos(\theta))}{2r_{12} \left(1 + v_1 v_2 \frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)}. \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

A equação (2.45) fornece o valor exato para o funcional de ação (2.32) sobre órbitas de Schild. No Capítulo 4 vamos calcular o valor do funcional de ação obtido por integração numérica sobre uma órbita de Schild, e comparar com o resultado obtido pela equação (2.45). Recentemente, foi demonstrado que órbitas circulares de Schild (2.29) com raios suficientemente grandes assumem um ponto de mínimo local para o funcional (2.32)^[51].

A família de órbitas de Schild com velocidade angular ω e raio $r_i = v_i/\omega$, com $i = 1,2$, pode ser parametrizada pelo ângulo de retardo θ ; e para $\theta \ll 1$ o raio de cada órbita é aproximado por $r_i = 1/(m_i \theta^2)$, com $i = 1,2$, enquanto a velocidade angular é aproximada por $\omega = m_1 m_2 \theta^3 / (m_1 + m_2)$ ^[34]. Existem diversos estudos feitos sobre a estabilidade e quantização dessas órbitas circulares de Schild, como pode ser verificado na Referência^[34].

3

Problema com Fronteira Mínima

No Capítulo 2 vimos que ao definirmos as condições de fronteira pra o problema de dois corpos, tais como as representadas na Figura 2.1, o segmento de fronteira na história da partícula 1 e o segmento de fronteira no futuro da partícula 2 não podem interagir, ou seja, $t_{O+} - t_{L-} \leq |\mathbf{x}_1(t_{L-}) - \mathbf{x}_2(t_{O+})|$. No presente capítulo vamos tratar apenas do problema especial em que ocorre a igualdade, ou seja, os pontos O^+ e L^- estão em cone de luz. Denominamos esse caso especial como problema de fronteira mínima.

Também vimos no Capítulo 2 que as equações de Wheeler-Feynman consistem num sistema de equações diferenciais com retardo dependente do estado e do tipo neutro. Na Referência^[34] foi demonstrado que para trajetórias na vizinhança de órbitas de Schild em que as distâncias em cone de luz satisfazem a condição $r_{ij} \gg / \sqrt{m_i m_j}$, com $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, as equações de Wheeler-Feynman são reduzidas a um problema com valores na chegada. Na Seção 3.1 mostramos que, para condições mais generéricas do que as impostas na Referência^[34], essas equações se reduzem a um problema com valores na chegada, e logo em seguida, na Seção 3.2, propomos um método de disparos para resolver esse tipo de problema. Posteriormente, nos casos em que as fronteiras tem pontos com velocidade descontínua, elaboramos uma técnica para resolver as condições de quina de Weierstrass-Erdmann, na Seção 3.3, para essas trajetórias específicas com vizinhança nas órbitas de Schild.

Em seguida, na Seção 3.4, exibimos e discutimos um método numérico desenvolvido para encontrar as soluções numéricas para problemas com fronteira mínima. Nesses casos, o problema constitui-se em transformar um sistema de equações diferenciais algébricas em um sistema de equações diferenciais ordinárias não autônomo e não linear com valores na fronteira, e em seguida procurar condições iniciais para que o método de disparos, proposto na Seção 3.2, convirja. Por fim, alguns resultados e experimentos numéricos realizados são apresentados e examinados na Seção 3.5. Exibimos 3 experimentos em que ocorrem descontinuidade na velocidade nos pontos O^+ e L^- , sendo que para 2 desses experimentos a trajetória e a história de cada carga contêm um *breaking point*.

3.1. Problema de Valor na Chegada

Nesta seção analisamos o caso especial do problema de dois corpos onde os segmentos de fronteira do funcional de ação (2.5) tem uma distância temporal mínima, impondo que o ponto inicial da trajetória da partícula 2, O^+ , fique em cone de luz com o ponto final da trajetória da partícula 1, L^- . Veja a representação pictórica do diagrama espaço tempo na Figura 3.1 para essa situação. Note que, para fronteiras menores do que essa, as histórias das cargas interagem em cone de luz, o que é um absurdo, já que as condições de fronteira são dados iniciais do problema. Além disso, observe na Figura 3.1 que, exceto a cadeia de pontos em cone de luz que passa pelos seis pontos $\{O^-, O_A, O^+, L^-, L_B, L^+\}$, todas as outras cadeias de pontos em cone de luz passam apenas por quatro pontos, tal como a representada pelos pontos $\{x_{2-}, x_1, x_2, x_{1+}\}$. Assim, para essas condições de fronteira, nenhum dos pontos x_{2-} e x_{1+} são mais variáveis independentes no problema, pois não atingem as trajetórias das cargas, em azul e verde Figura 3.1, eles são definidos pelas histórias das cargas, em vermelho na Figura 3.1, que são dados iniciais do problema.

Figura 3.1.: Esboço de um diagrama espaço tempo para o caso de fronteira mínima, com as trajetórias $x_1(t_1)$, para $t_1 \in [t_{O_A}, t_{L^-}]$, e $x_2(t_2)$, para $t_2 \in [t_{O^+}, t_{L_B}]$; as condições de fronteira dadas pelo segmento de fronteira $x_2(t_2)$ para $t_2 \in [t_{O^-}, t_{O^+}]$ em cone de luz com o ponto inicial da trajetória da partícula 1, O_A , e pelo segmento de fronteira $x_1(t_1)$ para $t_1 \in [t_{L^-}, t_{L^+}]$ em cone de luz com o ponto final da trajetória da partícula 2, L_B . O ponto O^+ está em cone de luz com o ponto L^- .

A seguir, demonstramos que, para o problema com fronteira mínima, as equações de Wheeler-Feynman, que correspondem a um sistema de equações diferenciais com retardo misto do tipo neutro e dependente do estado, se reduzem a um sistema não autônomo e não linear de equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira.

Vimos que para o problema de dois corpos as componentes espaciais da equação de Wheeler-Feynman, para cada partícula, são dadas por

$$m_i \frac{d}{dt_i} \left(\frac{\mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_i^2}} \right) = e_i [\mathbf{E}_j + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j], \quad (3.1)$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$. Essa equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{m_i \mathbf{a}_i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_i^2}} + \frac{m_i \mathbf{v}_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{a}_i)}{(1 - \mathbf{v}_i^2)^{3/2}} = e_i [\mathbf{E}_j + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j]. \quad (3.2)$$

Tomando o produto escalar dos termos dessa equação com $\mathbf{v}_i$, obtemos que

$$\frac{m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{a}_i)}{(1 - \mathbf{v}_i^2)^{3/2}} = e_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j), \quad (3.3)$$

que corresponde à componente temporal da equação de Wheeler-Feynman⁽¹⁾. Substituindo o termo do lado esquerdo da equação (3.3) em (3.2) vemos que, de um modo geral, a equação de movimento (3.1) pode ser reescrita como

$$\frac{m_i \mathbf{a}_i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_i^2}} = e_i [\mathbf{E}_j - (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j) \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j], \quad (3.4)$$

onde os campos $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{B}_j$ são dados pelas semi-somas dos campos avançados e retardados

$$\mathbf{E}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_j^- + \mathbf{E}_j^+), \quad \mathbf{B}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_j^- + \mathbf{B}_j^+), \quad (3.5)$$

que correspondem aos campos de Liénard-Wiechert

$$\begin{cases} \mathbf{E}_j^\pm(t_i, \mathbf{x}_i) = e_j \left[\frac{\mathbf{n}_{ij\pm} \pm \mathbf{v}_{j\pm}}{\gamma_{j\pm}^2 (1 \pm \mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm})^3 r_{ij\pm}^2} + \frac{\mathbf{n}_{ij\pm} \times \{(\mathbf{n}_{ij\pm} \pm \mathbf{v}_{j\pm}) \times \mathbf{a}_{j\pm}\}}{(1 \pm \mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm})^3 r_{ij\pm}} \right], \\ \mathbf{B}_j^\pm(t_i, \mathbf{x}_i) = \mp \mathbf{n}_{ij\pm} \times \mathbf{E}_j^\pm, \end{cases} \quad (3.6)$$

sendo que no fator relativístico $\gamma_{j\pm} = (1 - \mathbf{v}_{j\pm}^2)^{-1/2}$, na distância em cone de luz $r_{ij\pm} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm}|$ e no vetor normal $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm})/r_{ij\pm}$, as quantidades da partícula j são avaliadas nos tempos retardados ($-$) e avançados ($+$), dados implicitamente pela condição de cone de luz

$$t_{j\pm} = t_i \pm \|\mathbf{x}_i(t_i) - \mathbf{x}_j(t_{j\pm})\|. \quad (3.7)$$

Rearranjando o termo $\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j^\pm$ da equação de movimento (3.4) na forma

$$\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j^\pm = \mp \mathbf{v}_i \times (\mathbf{n}_{ij\pm} \times \mathbf{E}_j^\pm) = \mp (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j^\pm) \mathbf{n}_{ij\pm} \pm (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}) \mathbf{E}_j^\pm, \quad (3.8)$$

⁽¹⁾Note que a equação (3.3) segue de $\frac{d\mathcal{E}_i}{dt_i} = e_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j)$, onde $\mathcal{E}_i = m_i \gamma_i$, com $\gamma_i = (1 - \mathbf{v}_i^2)^{-1/2}$.

vem que

$$m_i \gamma_i \mathbf{a}_i = \frac{e_i}{2} [(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j^-)(\mathbf{n}_{ij-} - \mathbf{v}_i) + (1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij-})\mathbf{E}_j^- - (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j^+)(\mathbf{n}_{ij+} + \mathbf{v}_i) + (1 + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij+})\mathbf{E}_j^+]. \quad (3.9)$$

E definindo as quantidades

$$\kappa_{ij\pm} := 1 \pm \mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}, \quad \mathbf{u}_{ij\pm} := \mathbf{n}_{ij\pm} \pm \mathbf{v}_{j\pm}, \quad (3.10)$$

obtemos

$$\mathbf{E}_j^\pm(t_i, \mathbf{x}_i) = e_j \left[\frac{\mathbf{u}_{ij\pm}}{\gamma_{j\pm}^2 \kappa_{ij\pm}^3 r_{ij\pm}^2} + \frac{(\mathbf{n}_{ij\pm} \cdot \mathbf{a}_{j\pm})\mathbf{u}_{ij\pm}}{\kappa_{ij\pm}^3 r_{ij\pm}} - \frac{\mathbf{a}_{j\pm}}{\kappa_{ij\pm}^2 r_{ij\pm}} \right]. \quad (3.11)$$

Note que, devido à linearidade dos campos $\mathbf{E}_j^\pm$ em relação à aceleração $\mathbf{a}_{j\pm}$, podemos escrevê-los na forma matricial

$$\mathbf{E}_j^\pm(t_i, \mathbf{x}_i) = \mathbb{D}_{ij\pm} \mathbf{u}_{ij\pm} + \mathbb{B}_{ij\pm} \mathbf{a}_{j\pm}, \quad (3.12)$$

onde

$$\mathbb{D}_{ij\pm} := \frac{e_j}{\gamma_{j\pm}^2 \kappa_{ij\pm}^3 r_{ij\pm}^2} \mathbb{1}, \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{ij\pm} := \frac{e_j}{\kappa_{ij\pm}^3 r_{ij\pm}} [\mathbb{F}_{ij\pm} - \kappa_{ij\pm} \mathbb{1}], \quad (3.13)$$

sendo que o termo da p -ésima linha e q -ésima coluna da matriz $\mathbb{F}_{ij\pm}$ é dado por $\mathbb{F}_{ij\pm}^{pq} := n_{ij\pm}^q u_{ij\pm}^p$, ou explicitamente:

$$\mathbb{F}_{ij\pm} = \begin{pmatrix} n_{ij\pm}^1 u_{ij\pm}^1 & n_{ij\pm}^2 u_{ij\pm}^1 & n_{ij\pm}^3 u_{ij\pm}^1 \\ n_{ij\pm}^1 u_{ij\pm}^2 & n_{ij\pm}^2 u_{ij\pm}^2 & n_{ij\pm}^3 u_{ij\pm}^2 \\ n_{ij\pm}^1 u_{ij\pm}^3 & n_{ij\pm}^2 u_{ij\pm}^3 & n_{ij\pm}^3 u_{ij\pm}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_{ij\pm} \mathbf{n}_{ij\pm}^\top. \quad (3.14)$$

Do mesmo modo, definindo

$$\kappa_{\pm ij} := 1 \pm \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}, \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_{\pm ij} := \mathbf{n}_{ij\pm} \pm \mathbf{v}_i, \quad (3.15)$$

vemos que a equação (3.9) fica

$$\frac{m_i \mathbf{a}_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} = \frac{e_i}{2} [(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j^-) \mathbf{u}_{-ij} + \kappa_{-ij} \mathbf{E}_j^- - (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_j^+) \mathbf{u}_{+ij} + \kappa_{+ij} \mathbf{E}_j^+], \quad (3.16)$$

e devido a linearidade no lado direito da equação de movimento em relação aos campos $\mathbf{E}_j^\pm$, podemos reescrevê-la na seguinte forma

$$\frac{m_i \mathbf{a}_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} = \mathbb{K}_{-ij} \mathbf{E}_j^- + \mathbb{K}_{+ij} \mathbf{E}_j^+, \quad (3.17)$$

onde

$$\mathbb{K}_{\pm ij} := \frac{e_i}{2} [\mathbb{L}_{\pm ij} + \kappa_{\pm ij} \mathbb{1}], \quad (3.18)$$

sendo que o termo da p -ésima linha e q -ésima coluna da matriz $\mathbb{L}_{\pm ij}$ é dado por $\mathbb{L}_{\pm ij}^{pq} := v_i^q u_{\pm ij}^p$, ou explicitamente:

$$\mathbb{L}_{\pm ij} = \begin{pmatrix} v_i^1 u_{\pm ij}^1 & v_i^2 u_{\pm ij}^1 & v_i^3 u_{\pm ij}^1 \\ v_i^1 u_{\pm ij}^2 & v_i^2 u_{\pm ij}^2 & v_i^3 u_{\pm ij}^2 \\ v_i^1 u_{\pm ij}^3 & v_i^2 u_{\pm ij}^3 & v_i^3 u_{\pm ij}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_{\pm ij} \mathbf{v}_i^\top. \quad (3.19)$$

Com isso, usando a equação (3.12) na (3.17), vem que

$$\frac{m_i \mathbf{a}_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} = \mathbb{K}_{-ij} (\mathbb{D}_{ij-} \mathbf{u}_{ij-} + \mathbb{B}_{ij-} \mathbf{a}_{j-}) + \mathbb{K}_{+ij} (\mathbb{D}_{ij+} \mathbf{u}_{ij+} + \mathbb{B}_{ij+} \mathbf{a}_{j+}). \quad (3.20)$$

Assim, vemos que a equação de Wheeler-Feynman, para o caso de fronteira mínima, pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} M_1 \mathbf{a}_1 = \mathbb{A}_{12}^+ \mathbf{a}_2 + \mathbf{F}_2^-, \\ M_2 \mathbf{a}_2 = \mathbb{A}_{21}^- \mathbf{a}_1 + \mathbf{F}_1^+, \end{cases} \quad (3.21)$$

onde

$$\mathbb{A}_{12}^+ := \mathbb{K}_{+12} \mathbb{B}_{12+}, \quad \mathbb{A}_{21}^- := \mathbb{K}_{-21} \mathbb{B}_{21-}, \quad M_i := \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{F}_2^- := \mathbb{K}_{-12} (\mathbb{D}_{12-} \mathbf{u}_{12-} + \mathbb{B}_{12-} \mathbf{a}_{2-}) + \mathbb{K}_{+12} (\mathbb{D}_{12+} \mathbf{u}_{12+}), \quad (3.23)$$

e

$$\mathbf{F}_1^+ := \mathbb{K}_{+21} (\mathbb{D}_{21+} \mathbf{u}_{21+} + \mathbb{B}_{21+} \mathbf{a}_{1+}) + \mathbb{K}_{-21} (\mathbb{D}_{21-} \mathbf{u}_{21-}). \quad (3.24)$$

Resolvendo o sistema de equações (3.21) para $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, tem-se

$$\begin{cases} (M_1 M_2 \mathbb{1} - \mathbb{A}_{12}^+ \mathbb{A}_{21}^-) \mathbf{a}_1 = \mathbb{A}_{12}^+ \mathbf{F}_1^+ + M_2 \mathbf{F}_2^-, \\ (M_1 M_2 \mathbb{1} - \mathbb{A}_{21}^- \mathbb{A}_{12}^+) \mathbf{a}_2 = \mathbb{A}_{21}^- \mathbf{F}_2^- + M_1 \mathbf{F}_1^+. \end{cases} \quad (3.25)$$

Assim, definindo ainda as matrizes

$$\begin{cases} \mathbb{G}_{12} := (M_1 M_2 \mathbb{1} - \mathbb{A}_{12}^+ \mathbb{A}_{21}^-), \\ \mathbb{G}_{21} := (M_1 M_2 \mathbb{1} - \mathbb{A}_{21}^- \mathbb{A}_{12}^+), \end{cases} \quad (3.26)$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais algébricas:

$$\begin{cases} \mathbb{G}_{12} \mathbf{a}_1 = \mathbb{A}_{12}^+ \mathbf{F}_1^+ + M_2 \mathbf{F}_2^-, \\ \mathbb{G}_{21} \mathbf{a}_2 = \mathbb{A}_{21}^- \mathbf{F}_2^- + M_1 \mathbf{F}_1^+. \end{cases} \quad (3.27)$$

Para transformar esse sistema de equações diferenciais algébricas em um sistema de equações

diferenciais ordinárias devemos garantir que as matrizes $\mathbb{G}_{12}$ e $\mathbb{G}_{21}$ tenham inversa. Para isso, temos que impor algumas condições sobre as trajetórias que buscamos como soluções. Nos interessa que essas condições sejam o menos restritivas possível, para englobar um conjunto de soluções maior. Algumas condições que podemos impor é considerarmos trajetórias com cargas distantes, $r_{ij\pm} \gg 1$, e com velocidades quase perpendiculares às normais ou com velocidades baixas, $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$, de modo que

$$M_1 M_2 \gg \frac{1}{r_{12+} r_{12-} \kappa_{12+}^3 \kappa_{12-}^3}. \quad (3.28)$$

Essas condições são satisfeitas por trajetórias que são perturbações da família de órbitas de Schild com $r_{ij\pm} \gg 1$. Sob essas condições os elementos das matrizes $\mathbb{A}_{12}^+ \mathbb{A}_{21}^-$, $\mathbb{A}_{21}^- \mathbb{A}_{12}^+$ são desprezíveis em relação aos elementos da matriz $M_1 M_2 \mathbb{1}$. Assim, nesses casos em que as matrizes $\mathbb{G}_{12}$ e $\mathbb{G}_{21}$ têm inversa, podemos definir os vetores

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{12} := \mathbb{G}_{12}^{-1} (\mathbb{A}_{12}^+ \mathbf{F}_1^+ + M_2 \mathbf{F}_2^-), \\ \mathbf{H}_{21} := \mathbb{G}_{21}^{-1} (\mathbb{A}_{21}^- \mathbf{F}_2^- + M_1 \mathbf{F}_1^+), \end{cases} \quad (3.29)$$

e desse modo vemos que o sistema de equações (3.27) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} d\mathbf{v}_1/dt_1 = \mathbf{H}_{12}(t_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \\ d\mathbf{v}_2/dt_2 = \mathbf{H}_{21}(t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \\ d\mathbf{x}_1/dt_1 = \mathbf{v}_1, \\ d\mathbf{x}_2/dt_2 = \mathbf{v}_2. \end{cases} \quad (3.30)$$

As variáveis $\mathbf{x}_1(t_1)$, $\mathbf{v}_1(t_1)$ e $\mathbf{x}_2(t_2)$, $\mathbf{v}_2(t_2)$ tem parâmetros de evolução distintos. Porém, sabemos que as partículas interagem em cone de luz, e tomando t_1 como variável principal vem que $t_2 = t_{2+}$, conforme exibimos na Figura 3.1 o exemplo dos pontos $\mathbf{x}_1(t_1)$ e $\mathbf{x}_2(t_{2+})$. Logo, t_2 é dado por t_1 de modo implícito, pela condição de cone de luz $t_{2+} = t_1 + \|\mathbf{x}_2(t_{2+}) - \mathbf{x}_1(t_1)\|$. Derivando essa condição de cone de luz temos

$$\frac{dt_{2+}}{dt_1} = \frac{(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_1)}{(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_{2+})} =: \lambda_{12+}, \quad (3.31)$$

e com isso segue que

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt_{2+}} = \frac{1}{\lambda_{12+}} \frac{d\mathbf{x}_2}{dt_1} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt_{2+}} = \frac{1}{\lambda_{12+}} \frac{d\mathbf{v}_2}{dt_1}. \quad (3.32)$$

Sendo assim, $\mathbf{x}_2(t_2(t_1)) \rightarrow \mathbf{x}_2(t_1)$, $\mathbf{v}_2(t_2(t_1)) \rightarrow \mathbf{v}_2(t_1)$, e obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias não autônomo e não linear

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{H}_{12}(t_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \lambda_{12+}(t_1) \mathbf{H}_{21}(t_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \\ \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{v}_1(t_1), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \lambda_{12+}(t_1) \mathbf{v}_2(t_1), \end{cases} \quad (3.33)$$

sujeito às condições de contorno de Dirichlet, dadas por:

$$\mathbf{x}_1(t_{O_A}) = \mathbf{x}_{O_A}, \quad \mathbf{x}_1(t_{L-}) = \mathbf{x}_{L-}, \quad \mathbf{x}_2(t_{O+}) = \mathbf{x}_{O+} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2(t_{L_B}) = \mathbf{x}_{L_B}. \quad (3.34)$$

Note que, agora, as variáveis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{v}_2$ e as funções $\mathbf{x}_{1+}$, $\mathbf{v}_{1+}$, $\mathbf{x}_{2-}$, $\mathbf{v}_{2-}$ e λ_{12+} dependem do mesmo parâmetro de evolução t_1 . Para órbitas com velocidades baixas, $v_i \ll 1$, e distância em cone de luz grande, $r_{ij} \gg 1$, pode-se mostrar que o sistema de equações (3.33) se torna

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = -M_1 M_2^2 \frac{e_2 e_1}{2r_{12-}} \mathbf{a}_{2-}, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = -M_1^2 M_2 \frac{e_1 e_2}{2r_{21+}} \mathbf{a}_{1+}, \\ \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{v}_1, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{v}_2, \end{cases} \quad (3.35)$$

que, dependendo das histórias dadas, tem órbitas circulares de Schild como solução.

3.2. Método dos Disparos

Vimos na Seção 3.1 que, para o problema com fronteira mínima, as equações de Wheeler-Feynman resultam num sistema não autônomo e não linear de equações diferenciais ordinárias (3.33) sujeito às condições de contorno de Dirichlet (3.34). Para resolver esse problema com valores na fronteira, dado por (3.33) e (3.34), vamos aplicar um método dos disparos que busca encontrar as velocidades iniciais $\mathbf{v}_1(t_{O_A})$, $\mathbf{v}_2(t_{O+}^d)$, nas posições $\mathbf{x}_1(t_{O_A}) = \mathbf{x}_{O_A}$, $\mathbf{x}_2(t_{O+}) = \mathbf{x}_{O-}$, tais que a solução do problema de valor inicial (3.33) forneça as posições finais que satisfazem as condições de contorno $\mathbf{x}_1(t_{L-}) = \mathbf{x}_{L-}$, $\mathbf{x}_2(t_{L_B}) = \mathbf{x}_{L_B}$. Nesse método dos disparos, tomamos um dado par de velocidades $\mathbf{v}_{10}(t_{O_A})$, $\mathbf{v}_{20}(t_{O+}^d)$ como um chute inicial e calculamos a solução fornecida por (3.33). Depois, repetimos essa ação acrescentando perturbações nessas velocidades iniciais e calculando as soluções fornecidas por (3.33) até que seja possível obter uma aproximação linear para a solução do (3.33), feita em torno das velocidades tomadas com chute inicial, que atinja as posições finais $\mathbf{x}_1(t_{L-}) = \mathbf{x}_{L-}$, $\mathbf{x}_2(t_{L_B}) = \mathbf{x}_{L_B}$. Para isso, vamos usar o fato de que a solução de (3.33), dada por $\mathbf{X} := [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^\top$, depende da velocidade $\mathbf{V} := [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^\top$ dada no instante t_{O_A} , isto é, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t_{O_A}, \mathbf{V})$, e linearizá-la em torno da velocidade $\mathbf{V}_0 := [\mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}]^\top$, que é o chute inicial, ou seja,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbb{J}_0^s(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0). \quad (3.36)$$

A constante $\mathbf{X}_0 := [\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20}]^\top$ e a matriz Jacobiana⁽²⁾ $\mathbb{J}_0^s$ dependem da velocidade $\mathbf{V}_0$, isto é $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_{O_A}, \mathbf{V}_0)$ e $\mathbb{J}_0^s = \mathbb{J}^s(\mathbf{V}_0)$. Resolvendo a equação (3.36) para $\mathbf{V}$ obtemos a primeira aproximação para a velocidade inicial que resolve a equação (3.33) para as condições de fronteira (3.34). Desse modo, vemos que o método dos disparos resume-se em resolver 7 problemas de valores iniciais para determinar $\mathbf{X}_0$ e $\mathbb{J}_0^s$ da linearização (3.36), que pode ser vista com um método de Newton, resolver essa equação para $\mathbf{V}$, substituir essa solução de volta na equação (3.36), no lugar de $\mathbf{V}_0$, e iterar esse processo repetidas vezes até obter a solução com a precisão desejada. A seguir detalhamos esse processo.

Para obtermos a relação (3.36), resolvemos os seguintes 7 problemas de valor inicial. O primeiro disparo ① fornece o vetor $\mathbf{X}_0$ e os 6 disparos do tipo ② determinam as 6 colunas da matriz Jacobiana, como segue. Considere os vetores unitários $\mathbf{e}_i$, com $i = 1, 2, \dots, 6$, onde as componentes de cada $\mathbf{e}_i$ são dadas pelo delta de Kronecker δ_{ij} com $j = 1, 2, \dots, 6$, e considere que a i -ésima coluna da matriz Jacobiana $\mathbb{J}_0^s$ é denotada por $\mathbf{J}_{ci}$:

① Para $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$ temos:

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}_0, \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^1(t_{L-})$ é a solução do sistema de equações diferenciais (3.33) avaliada no instante em t_{L-} para a velocidade inicial $\mathbf{V}_0$.

② Para $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \epsilon_i \mathbf{e}_i$ temos:

$$\mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^1 + \epsilon_i \mathbb{J}_0^s \mathbf{e}_i, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_{ci} = \frac{\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^1}{\epsilon_i}, \quad (3.38)$$

onde $\mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^{i+1}(t_{L-})$ é a solução do sistema de equações diferenciais (3.33) para a velocidade inicial $\mathbf{V}_0 + \epsilon_i \mathbf{e}_i$, avaliada no instante t_{L-} .

Uma vez que obtivemos o vetor posição $\mathbf{X}$ e a matriz Jacobiana $\mathbb{J}_0^s$, podemos resolver o sistema linear (3.36) para $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbb{J}_0^{s-1}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0). \quad (3.39)$$

Substituindo a solução dada por (3.39) de volta no sistema linear (3.36), no lugar de $\mathbf{V}_0$, podemos repetir os disparos ① e ② e obter uma segunda solução com uma precisão melhor. De modo recursivo, repetimos os disparos ① e ② para determinar $\mathbf{X}_{k-1} = \mathbf{X}_{k-1}(t_{O_A}, \mathbf{V}_{k-1})$ e $\mathbb{J}_{k-1}^s = \mathbb{J}_{k-1}^s(\mathbf{V}_{k-1})$ usando o mapa⁽³⁾

⁽²⁾Dada uma função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe $C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, onde a i -ésima componente é denotada por $F_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$ é definido como $\mathbb{J}_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$, onde $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$. Supondo que $\mathbf{F}$ seja não linear, sua aproximação linear em torno de $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ é dada por $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbb{J}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$, onde a matriz de linearização $\mathbb{J}(\mathbf{x}^*)$ corresponde à matriz Jacobiana da função $\mathbf{F}$, calculada no ponto $\mathbf{x}^*$.

⁽³⁾Um mapa de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um objeto f tal que, para cada $a \in \mathcal{A}$, existe um único objeto $f(a) \in \mathcal{B}$. Os termos mapa e mapeamento são sinônimos de função, porém, na área de Sistemas Dinâmicos o termo mapa predomina para denominar aplicações recursivas do tipo (3.40).

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} + \mathbb{J}_{k-1}^s (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{k-1}), \quad (3.40)$$

e calculamos a k -ésima solução $\mathbf{V}_k$ pelo mapa

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k-1} + \mathbb{J}_{k-1}^{s-1} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}). \quad (3.41)$$

Dessa forma obtemos as velocidades iniciais $\mathbf{v}_{O_A}$, $\mathbf{v}_{O^+}$ tais que as soluções $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ satisfazem as respectivas condições de fronteira $\mathbf{x}_{L^-}$, $\mathbf{x}_{L_b}$ com a precisão desejada.

O condicionamento da matriz Jacobiana⁽⁴⁾ do método dos disparos depende da estabilidade do problema de valor inicial e não apenas da estabilidade do problema de valor na fronteira^[59, 60]. Não temos como garantir que essa matriz Jacobiana seja bem condicionada e que a solução dada pelo mapa (3.41), caso exista, seja única. De sorte que, como vamos ver na Seção 3.5, apesar do sistema de equações diferenciais ser não linear, o problema com valores de fronteira é estável e bem posto na vizinhança da família de órbitas de Schild, já que a matriz Jacobiana é bem condicionada e o método de Newton (3.41) converge. Uma vez que o método dos disparos encontra as velocidades iniciais, nos pontos O^+ e L^- , que resolvem o problema com valores nas fronteiras, naturalmente espera-se que as velocidades nos pontos O^+ e L^- sejam descontínuas, uma vez que os graus de liberdade das velocidades são suprimidos quando impomos que as condições de fronteira sejam satisfeitas, ou seja, podemos garantir que as soluções atinjam os pontos O^+ e L^- , mas não podemos impor com que velocidades elas chegarão nesses pontos.

3.3. Condições de Quina de Weierstrass-Erdmann

Na Seção 2.1 vimos que para minimizar o funcional (2.5) a solução do problema de dois corpos tem que satisfazer as equações de Wheeler-Feynman e as condições de quina de Weierstrass-Erdmann (2.28). Também vimos que o modo no qual os pontos com velocidade descontínua ocorrem nas trajetórias e a forma que eles se propagam ao longo delas são regidos pelas condições de continuidade (2.28). Nesta seção vamos analisar as condições de quina de Weierstrass-Erdmann apenas para o problema de fronteira mínima. Nesse caso, como foi descrito na Seção 3.1, as cadeias de pontos em cone de luz ao longo das trajetórias contêm apenas quatro pontos, tais como o conjunto de pontos $\{x_{2-}, x_1, x_2, x_{1+}\}$ exibido na Figura 3.1, exceto a cadeia formada pelo conjunto de pontos $\{O^-, O_A, O^+, L^-, L_B, L^+\}$, que detém seis pontos em cone de luz. Desse modo, vemos que as condições de quina de Weierstrass-Erdmann (2.28) consistem numa condição de continuidade não localizada no espaço-tempo. Além disso, dentre esses quatro pontos, dois são variáveis intrínsecas do problema, x_1 e x_2 , e dois são dados iniciais do problema, x_{2-} e x_{1+} , definidos pelas histórias das partículas. As condições de quina de Weierstrass-Erdmann (2.28) impõem que, mesmo nos conjuntos de pontos $\{x_{2-}, x_1, x_2, x_{1+}\}$ em que ocorrem pontos com velocidade descontínua, o momento linear parcial P_i , dado por (2.26) e a energia parcial E_i , dada por (2.27), com $i = 1, 2$, são

⁽⁴⁾O número de condicionamento de uma matriz $\mathbb{J}$ em relação a uma norma $\|\cdot\|$ é definido por $\kappa(\mathbb{J}) := \|\mathbb{J}\| \cdot \|\mathbb{J}^{-1}\|$. Dizemos que a matriz $\mathbb{J}$ é bem condicionada se $\kappa(\mathbb{J})$ estiver próximo de 1, e que ela é mal condicionada se $\kappa(\mathbb{J})$ for significativamente maior do que 1^[63].

contínuas. A seguir, mostramos como calcular essas velocidades descontínuas impondo essas condições de continuidade.

Tomando parametrizações para a ação de Fokker tais que $\dot{t}_i(s_i) = 1$, as equações do momento linear parcial (2.26) e da energia parcial (2.27), com $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, se tornam

$$\mathbf{P}_i = \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_i^2}} - \mathbf{A}_{ij}, \quad (3.42)$$

e

$$E_i = \frac{m_i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_i^2}} - U_{ij}. \quad (3.43)$$

onde

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{\mathbf{v}_{j-}}{2r_{ij-}(1 - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-})} + \frac{\mathbf{v}_{j+}}{2r_{ij+}(1 + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+})}, \quad (3.44)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2r_{ij-}(1 - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-})} + \frac{1}{2r_{ij+}(1 + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+})}, \quad (3.45)$$

sendo que

$$r_{ij\pm} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j(t_{j\pm})\|, \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_{ij\pm} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j(t_{j\pm}))/r_{ij\pm}. \quad (3.46)$$

No método variacional da Seção 2.1 supomos que as trajetórias e as histórias estão contidas no espaço das funções $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$ para deduzir as condições de quina de Weierstrass-Erdmann. Assim, dado um conjunto de pontos $\{\mathbf{x}_{2-}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{1+}\}$ sabemos que as trajetórias e as histórias são contínuas nesses pontos, porém, as velocidades podem ser descontínuas, de modo que devemos definir nomenclaturas distintas para seus valores no limite à esquerda, $\{\mathbf{v}_{2-}^e, \mathbf{v}_1^e, \mathbf{v}_2^e, \mathbf{v}_{1+}^e\}$, e à direita, $\{\mathbf{v}_{2-}^d, \mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, \mathbf{v}_{1+}^d\}$, sendo que vamos considerar as seguintes notações equivalentes, $\mathbf{x}_{2+} \equiv \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_{1-} \equiv \mathbf{x}_1$, $\mathbf{v}_{2+}^e \equiv \mathbf{v}_2^e$, $\mathbf{v}_{2+}^d \equiv \mathbf{v}_2^d$, $\mathbf{v}_{1-}^e \equiv \mathbf{v}_1^e$, $\mathbf{v}_{1-}^d \equiv \mathbf{v}_1^d$. Com isso, os momentos lineares parciais e as energias parciais no limite à esquerda e à direita desse conjunto de pontos ficam determinados, respectivamente, por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_i^e = \frac{m_i \mathbf{v}_i^e}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_i^e)^2}} - \frac{\mathbf{v}_{j-}^e}{2r_{ij-}(1 - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-}^e)} - \frac{\mathbf{v}_{j+}^e}{2r_{ij+}(1 + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+}^e)}, \\ \mathbf{P}_i^d = \frac{m_i \mathbf{v}_i^d}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_i^d)^2}} - \frac{\mathbf{v}_{j-}^d}{2r_{ij-}(1 - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-}^d)} - \frac{\mathbf{v}_{j+}^d}{2r_{ij+}(1 + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+}^d)}, \end{array} \right. \quad (3.47)$$

e

$$\begin{cases} E_i^e = \frac{m_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_i^e)^2}} - \frac{1}{2r_{ij-}(1 - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-}^e)} - \frac{1}{2r_{ij+}(1 + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+}^e)}, \\ E_i^d = \frac{m_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_i^d)^2}} - \frac{1}{2r_{ij-}(1 - \mathbf{n}_{ij-} \cdot \mathbf{v}_{j-}^d)} - \frac{1}{2r_{ij+}(1 + \mathbf{n}_{ij+} \cdot \mathbf{v}_{j+}^d)}, \end{cases} \quad (3.48)$$

e as condições de quina de Weierstrass-Erdmann ficam definidas pelo sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{P}_1 := \mathbf{P}_1^d - \mathbf{P}_1^e = \mathbf{0}, \\ \Delta \mathbf{P}_2 := \mathbf{P}_2^d - \mathbf{P}_2^e = \mathbf{0}, \\ \Delta E_1 := E_1^d - E_1^e = 0, \\ \Delta E_2 := E_2^d - E_2^e = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Em princípio, os valores das velocidades no limite à esquerda $\{\mathbf{v}_{2-}^e, \mathbf{v}_1^e, \mathbf{v}_2^e, \mathbf{v}_{1+}^e\}$ são conhecidos, de modo que as condições de quina de Weierstrass-Erdmann definem um sistema com 8 equações não lineares e 6 variáveis $\{\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d\}$, ou seja, um sistema de equações sobredeterminado. Para resolver esse sistema de equações vamos definir 8 variáveis, escolhendo duas variáveis adicionais. Além das 6 variáveis $\{\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d\}$, vamos escolher duas componentes das velocidades nas histórias $\mathbf{v}_{1+}^d$ e $\mathbf{v}_{2-}^d$ como variáveis adicionais, tendo como opção escolher duas componentes de $\mathbf{v}_{1+}$, ou duas de $\mathbf{v}_{2-}$, ou uma de cada, e denotá-las por $\{\mathbf{v}_{1+}^{id}, \mathbf{v}_{1+}^{jd}\}$, $\{\mathbf{v}_{2-}^{id}, \mathbf{v}_{2-}^{jd}\}$, $\{\mathbf{v}_{1+}^{id}, \mathbf{v}_{2-}^{jd}\}$, respectivamente, sendo que $i \subset \{1, 2, 3\}$ e $j = 3 - i$, com $\{1, 2, 3\}$ se referindo às componentes $\{x, y, z\}$. Desse modo, restam as constantes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{1+}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{2-}, \mathbf{v}_1^e, \mathbf{v}_{1+}^e, \mathbf{v}_{1+}^{kd}, \mathbf{v}_2^e, \mathbf{v}_{2-}^e, \mathbf{v}_{2-}^{ld}$ com $k \neq i$ e $l \neq j$. Com o objetivo de definir quais das componentes dessas velocidades são adequadas para serem escolhidas como variáveis adicionais, procedemos da seguinte forma. Primeiro consideramos $\{\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, \mathbf{v}_{1+}^d, \mathbf{v}_{2-}^d\}$ como variáveis e linearizamos o sistema de equações (3.49) em torno de $(\mathbf{v}_1^e, \mathbf{v}_2^e, \mathbf{v}_{1+}^e, \mathbf{v}_{2-}^e)$, resultando num sistema de equações subdeterminado com 8 equações e 12 variáveis. Para cada classe de trajetória que será estudada, escolhemos as duas variáveis adicionais de forma que esse sistema linear 8×12 possa ser rearranjado num sistema linear não homogêneo 8×8 tal que, a matriz Jacobiana resultante tenha inversa, seja bem condicionada e o termo não homogêneo seja não nulo. Feita a escolha conveniente das variáveis adicionais, podemos calcular as descontinuidades nas velocidades em ordem linear e depois usar o método de Newton, por exemplo, para encontrar as descontinuidades exatas, tomando essa solução aproximada como ponto inicial. A seguir detalhamos esse procedimento de escolha das variáveis adicionais.

Tomando o conjunto de variáveis $\{\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, \mathbf{v}_{1+}^d, \mathbf{v}_{2-}^d\}$ o sistema de equações (3.49) fica subdeterminado, com 8 equações e 12 incógnitas:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{P}_1(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, \mathbf{v}_{1+}^d, \mathbf{v}_{2-}^d) = \mathbf{0}, \\ \Delta \mathbf{P}_2(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, \mathbf{v}_{1+}^d, \mathbf{v}_{2-}^d) = \mathbf{0}, \\ \Delta E_1(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, \mathbf{v}_{1+}^d, \mathbf{v}_{2-}^d) = 0, \\ \Delta E_2(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, \mathbf{v}_{1+}^d, \mathbf{v}_{2-}^d) = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

Usando as definições $\Delta \mathbf{v}_1 := (\mathbf{v}_1^d - \mathbf{v}_1^e)$, $\Delta \mathbf{v}_{1+} := (\mathbf{v}_{1+}^d - \mathbf{v}_{1+}^e)$, $\Delta \mathbf{v}_{2-} := (\mathbf{v}_{2-}^d - \mathbf{v}_{2-}^e)$ e $\Delta \mathbf{v}_2 := (\mathbf{v}_2^d - \mathbf{v}_2^e)$ e as quantidades definidas por

$$\begin{cases} R_{ij\pm}^e := 2r_{ij\pm}(1 - \mathbf{n}_{ij\pm} \cdot \mathbf{v}_{j\pm}^e), \\ R_{ij\pm}^d := 2r_{ij\pm}(1 - \mathbf{n}_{ij\pm} \cdot \mathbf{v}_{j\pm}^d), \end{cases} \quad (3.51)$$

o sistema de equações acima fornece que

$$\begin{cases} \frac{m_1(\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)^2}} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_{2-} + \mathbf{v}_{2-}^e)}{R_{12-}^e - 2r_{12-}(\mathbf{n}_{12-} \cdot \Delta \mathbf{v}_{2-})} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)}{R_{12+}^e + 2r_{12+}(\mathbf{n}_{12+} \cdot \Delta \mathbf{v}_2)} = \mathbf{P}_1^e, \\ \frac{m_2(\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)^2}} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)}{R_{21-}^e - 2r_{21-}(\mathbf{n}_{21-} \cdot \Delta \mathbf{v}_1)} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_{1+} + \mathbf{v}_{1+}^e)}{R_{21+}^e + 2r_{21+}(\mathbf{n}_{21+} \cdot \Delta \mathbf{v}_{1+})} = \mathbf{P}_2^e, \\ \frac{m_1}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)^2}} - \frac{1}{R_{12-}^e - 2r_{12-}(\mathbf{n}_{12-} \cdot \Delta \mathbf{v}_{2-})} - \frac{1}{R_{12+}^e + 2r_{12+}(\mathbf{n}_{12+} \cdot \Delta \mathbf{v}_2)} = E_1^e, \\ \frac{m_2}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)^2}} - \frac{1}{R_{21-}^e - 2r_{21-}(\mathbf{n}_{21-} \cdot \Delta \mathbf{v}_1)} - \frac{1}{R_{21+}^e + 2r_{21+}(\mathbf{n}_{21+} \cdot \Delta \mathbf{v}_{1+})} = E_2^e. \end{cases} \quad (3.52)$$

Agora, definindo o vetor de variáveis $\bar{\mathbf{v}} := (\Delta \mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_2, \Delta \mathbf{v}_{1+}, \Delta \mathbf{v}_{2-})^\top$, e o vetor constante $\mathbf{d} := (\mathbf{P}_1^e, \mathbf{P}_2^e, E_1^e, E_2^e)^\top$ podemos reescrever o sistema de equações (3.52) na forma

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{d}. \quad (3.53)$$

Em seguida, supondo que a expansão em série de Taylor de $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{v}})$ exista ao menos até a primeira ordem

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{v}}_0) + \bar{\mathbb{J}}(\bar{\mathbf{v}}_0)(\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_0) + \mathcal{O}((\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_0)^2) = \mathbf{d}, \quad (3.54)$$

linearizamos $\mathbf{F}$ em torno da origem, $\bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{\mathbf{0}}$, e usando que $\mathbf{F}(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$, obtemos o sistema subdeterminado, com 8 equações e 12 variáveis:

$$\bar{\mathbb{J}}_{8 \times 12} \bar{\mathbf{v}}_{12 \times 1} = \mathbf{d}_{8 \times 1}. \quad (3.55)$$

Para cada classe de trajetória que será estudada, podemos analisar a matriz $\bar{\mathbb{J}}_{8 \times 12}$ e escolher um vetor de variáveis $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{8 \times 1} = (\Delta \mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_2, \Delta \mathbf{v}_{1+}^i, \Delta \mathbf{v}_{2-}^j)^\top$ tal que podemos rearranjar o sistema linear homogêneo (3.55) em um sistema linear não homogêneo, com 8 equações e 8

variáveis, com uma matriz Jacobiana $\mathbb{J} \equiv \mathbb{J}_{8 \times 8}$ inversível e bem condicionada. Na verdade, esse rearranjo corresponde a linearizar $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{d}$ em torno da origem, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, resultando em:

$$\mathbb{J}_{8 \times 8} \mathbf{v}_{8 \times 1} = \mathbf{f}_{8 \times 1}. \quad (3.56)$$

Dessa forma, podemos calcular a solução $\mathbf{v}$ do sistema linear (3.56) e usar essa solução como ponto inicial para encontrar a solução exata do sistema não linear (3.52) empregando, por exemplo, o método de Newton. Na Seção 4.3 exibiremos experimentos numéricos que envolvem esses cálculos.

No que segue realizamos esse procedimento de linearização de modo explícito, e analisando a matriz $\mathbb{J}_{8 \times 12}$, escolhemos as variáveis adicionais para algumas classes de trajetórias. Linearizando o sistema de equações (3.52) em torno da origem vem que

$$\begin{cases} \frac{m_1 \Delta \mathbf{v}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^e)^2}} + \frac{m_1 \mathbf{v}_1^e (\mathbf{v}_1^e \cdot \Delta \mathbf{v}_1)}{[1 - (\mathbf{v}_1^e)^2]^{3/2}} - \frac{\Delta \mathbf{v}_{2-}}{R_{12-}^e} - \frac{2r_{12-} \mathbf{v}_{2-}^e (\mathbf{n}_{12-} \cdot \Delta \mathbf{v}_{2-})}{(R_{12-}^e)^2} - \frac{\Delta \mathbf{v}_2}{R_{12+}^e} + \frac{2r_{12+} \mathbf{v}_2^e (\mathbf{n}_{12+} \cdot \Delta \mathbf{v}_2)}{(R_{12+}^e)^2} = 0, \\ \frac{m_2 \Delta \mathbf{v}_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^e)^2}} + \frac{m_2 \mathbf{v}_2^e (\mathbf{v}_2^e \cdot \Delta \mathbf{v}_2)}{[1 - (\mathbf{v}_2^e)^2]^{3/2}} - \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{R_{21-}^e} - \frac{2r_{21-} \mathbf{v}_1^e (\mathbf{n}_{21-} \cdot \Delta \mathbf{v}_1)}{(R_{21-}^e)^2} - \frac{\Delta \mathbf{v}_{1+}}{R_{21+}^e} + \frac{2r_{21+} \mathbf{v}_{1+}^e (\mathbf{n}_{21+} \cdot \Delta \mathbf{v}_{1+})}{(R_{21+}^e)^2} = 0, \\ \frac{m_1 (\mathbf{v}_1^e \cdot \Delta \mathbf{v}_1)}{[1 - (\mathbf{v}_1^e)^2]^{3/2}} - \frac{2r_{12-} (\mathbf{n}_{12-} \cdot \Delta \mathbf{v}_{2-})}{(R_{12-}^e)^2} + \frac{2r_{12+} (\mathbf{n}_{12+} \cdot \Delta \mathbf{v}_2)}{(R_{12+}^e)^2} = 0, \\ \frac{m_2 (\mathbf{v}_2^e \cdot \Delta \mathbf{v}_2)}{[1 - (\mathbf{v}_2^e)^2]^{3/2}} - \frac{2r_{21-} (\mathbf{n}_{21-} \cdot \Delta \mathbf{v}_1)}{(R_{21-}^e)^2} + \frac{2r_{21+} (\mathbf{n}_{21+} \cdot \Delta \mathbf{v}_{1+})}{(R_{21+}^e)^2} = 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

Como um primeiro exemplo, considere a classe de trajetórias na vizinhança das órbitas de Schild com grandes distâncias em cone de luz $r_{12\pm} =: r \gg 1$ e velocidades baixas $v_{1\pm}^e \approx v_{2\pm}^e =: v^e \ll 1$. Escolhendo um sistema de coordenadas tal que $\mathbf{n}_{12+} \approx \mathbf{e}_y$, $\mathbf{n}_{12-} \approx \mathbf{e}_y$, $\mathbf{v}_{2-}^e = v^e \mathbf{e}_x$, $\mathbf{n}_{21+} \approx \mathbf{n}_{21-} = -\mathbf{e}_y$, $\mathbf{v}_{1+}^e = -v^e \mathbf{e}_x$, temos $R_{21\pm} \approx 2r$, $R_{12\pm} \approx 2r$, $1 - (\mathbf{v}_1^e)^2 \approx 1$, e com isso o sistema de equações acima fica

$$\begin{cases} m_1 \Delta \mathbf{v}_1 - m_1 v^e \Delta v_1^x \mathbf{v}_1^e - \frac{\Delta \mathbf{v}_{2-}}{2r} - \frac{\mathbf{v}_{2-}^e \Delta v_{2-}^y}{2r} - \frac{\Delta \mathbf{v}_2}{2r} + \frac{\mathbf{v}_2^e \Delta v_2^y}{2r} = 0, \\ m_2 \Delta \mathbf{v}_2 + m_2 v_2^e \Delta v_2^x \mathbf{v}_2^e - \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{2r} + \frac{\mathbf{v}_1^e \Delta v_1^y}{2r} - \frac{\Delta \mathbf{v}_{1+}}{2r} - \frac{\mathbf{v}_{1+}^e \Delta v_{1+}^y}{2r} = 0, \\ -m_1 v_1^e \Delta v_1^x - \frac{\Delta v_{2-}^y}{2r} + \frac{\Delta v_2^y}{2r} = 0, \\ m_2 v_2^e \Delta v_2^x + \frac{\Delta v_1^y}{2r} - \frac{\Delta v_{1+}^y}{2r} = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Pode-se mostrar que para essas órbitas de Schild o ângulo de retardo θ é pequeno, $\theta \ll 1$, e vale as aproximações $r \approx 1/\theta^2 \gg 1$, $v^e \approx \theta \ll 1$ ^[34]. Assim, desprezando os termos de ordem superior ou igual a $\mathcal{O}(\theta^3)$, o sistema de equações acima se torna:

$$\begin{cases} m_1 \Delta \mathbf{v}_1 - \frac{\Delta \mathbf{v}_{2-}^e}{2r} - \frac{\Delta \mathbf{v}_2^e}{2r} = \mathbf{0}, \\ m_2 \Delta \mathbf{v}_2 - \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{2r} - \frac{\Delta \mathbf{v}_{1+}}{2r} = \mathbf{0}, \\ -m_1 v_1^e \Delta v_1^x - \frac{\Delta \mathbf{v}_{2-}^y}{2r} + \frac{\Delta \mathbf{v}_2^y}{2r} = 0, \\ m_2 v_2^e \Delta v_2^x + \frac{\Delta \mathbf{v}_1^y}{2r} - \frac{\Delta \mathbf{v}_{1+}^y}{2r} = 0. \end{cases} \quad (3.59)$$

E usando o vetor $\bar{\mathbf{v}}_{12 \times 1} = (\Delta \mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_2, \Delta \mathbf{v}_{1+}, \Delta \mathbf{v}_{2-})^\top$ e a matriz

$$\bar{\mathbb{J}}_{8 \times 12} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} \\ -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 \\ -m_1 v_1^e & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r} & 0 & m_2 v_2^e & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

podemos reescrever o sistema de equações acima na forma matricial

$$\bar{\mathbb{J}}_{8 \times 12} \bar{\mathbf{v}}_{12 \times 1} = \mathbf{d}_{8 \times 1}. \quad (3.61)$$

Contemplando essa matriz podemos determinar quais componentes das velocidades nas histórias das partículas devem ser tomadas como variáveis adicionais de forma que esse sistema possa ser reescrito com uma matriz menor $\mathbb{J}$, que tenha determinante não nulo, e reste um termo não homogêneo $\mathbf{f}$. Por exemplo, tomando como variáveis $\mathbf{v} = (\Delta \mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_2, \Delta v_{2-}^y, \Delta v_{1+}^y)^\top$, temos o termo não homogêneo $\mathbf{f} = -\frac{1}{2r}(\Delta v_{2-}^x, 0, \Delta v_{2-}^z, \Delta v_{1+}^x, 0, \Delta v_{1+}^z, 0, 0)^\top$, a matriz menor

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ -m_1 v_1^e & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2r} & 0 & -\frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r} & 0 & m_2 v_2^e & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2r} \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

e obtemos o seguinte sistema linear

$$\mathbb{J}\mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (3.63)$$

Como veremos na Seção 3.4, para a classe de trajetórias acima descrita a matriz Jacobiana $\mathbb{J}$ é inversível e bem condicionada, permitindo calcular a solução $\mathbf{v}$ de forma suficientemente precisa.

No restante desta seção investigamos algumas condições gerais para a existência, ou não, de descontinuidade nas velocidades. Primeiro, considere os casos em que as histórias das cargas têm velocidades contínuas. As condições de Weierstrass-Erdmann em ordem linear $\Delta \mathbf{v}_1$, $\Delta \mathbf{v}_2$, $\Delta \mathbf{v}_{1+}$ e $\Delta \mathbf{v}_{2-}$, dadas pelo sistema de equações (3.57), mostram que para histórias com velocidades contínuas, $\Delta \mathbf{v}_{1+} = \Delta \mathbf{v}_{2-} = \mathbf{0}$, as trajetórias terão velocidades contínuas $\Delta \mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Agora, cabe a pergunta: em ordem não linear histórias contínuas podem gerar trajetórias descontínuas? Sabemos que para o caso de histórias contínuas, o sistema de equações não lineares (3.52) se torna

$$\begin{cases} \frac{m_1 \mathbf{v}_1^d}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^d)^2}} - \frac{\mathbf{v}_2^d}{2r_{12+}(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_2^d)} - \frac{m_1 \mathbf{v}_1^e}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^e)^2}} + \frac{\mathbf{v}_2^e}{2r_{12+}(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_2^e)} = 0, \\ \frac{m_2 \mathbf{v}_2^d}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^d)^2}} - \frac{\mathbf{v}_1^d}{2r_{21-}(1 - \mathbf{n}_{21-} \cdot \mathbf{v}_1^d)} - \frac{m_2 \mathbf{v}_2^e}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^e)^2}} + \frac{\mathbf{v}_1^e}{2r_{21-}(1 - \mathbf{n}_{21-} \cdot \mathbf{v}_1^e)} = 0, \\ \frac{m_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^d)^2}} - \frac{1}{2r_{12+}(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_2^d)} - \frac{m_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^e)^2}} + \frac{1}{2r_{12+}(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_2^e)} = 0, \\ \frac{m_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^d)^2}} - \frac{1}{2r_{21-}(1 - \mathbf{n}_{21-} \cdot \mathbf{v}_1^d)} - \frac{m_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^e)^2}} + \frac{1}{2r_{21-}(1 - \mathbf{n}_{21-} \cdot \mathbf{v}_1^e)} = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Usando a terceira equação, do sistema (3.64), na primeira equação, e a quarta na segunda, vem que

$$\begin{cases} \frac{m_1 \Delta \mathbf{v}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^e)^2}} - \frac{\Delta \mathbf{v}_2}{2r_{12+}(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_2^e)} = 0, \\ \frac{m_2 \Delta \mathbf{v}_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^e)^2}} - \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{2r_{21-}(1 - \mathbf{n}_{21-} \cdot \mathbf{v}_1^e)} = 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

Se esse sistema linear tem determinante não nulo obtemos a solução trivial $\Delta \mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{v}_2 = 0$, sem descontinuidades. Nos casos em que o determinante é nulo temos

$$\frac{m_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^e)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^e)^2}} = \frac{1}{2r_{12+}(1 + \mathbf{n}_{12+} \cdot \mathbf{v}_2^e)} \frac{1}{2r_{21-}(1 - \mathbf{n}_{21-} \cdot \mathbf{v}_1^e)}. \quad (3.66)$$

Para órbitas circulares de Schild e com $m_1 = m_2$ sabemos que $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{n}_{21-} = -\mathbf{n}_{12+}$ e $r_{21-} = r_{12+}$. Definindo m , $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$ e r por $m := m_1$, $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1$, $\mathbf{n} := \mathbf{n}_{21-}$ e $r := r_{21-}$ a igualdade (3.66) fornece que

$$4r^2 m^2 = \frac{1 - \mathbf{v}^2}{1 - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|^2} \leq 1, \quad (3.67)$$

e portanto,

$$r \leq \frac{1}{2m}. \quad (3.68)$$

Dessa forma, pode-se esperar que para trajetórias na vizinhança dessas órbitas de Schild, e tais que aproximações $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1 \approx -\mathbf{v}_2$, $\mathbf{n} := \mathbf{n}_{21-} \approx -\mathbf{n}_{12+}$ e $r := r_{21-} \approx r_{12+}$ são válidas, ocorram pontos com velocidade descontínua. Dessas aproximações decorre que ao longo dessas trajetórias a desigualdade (3.68) é satisfeita. Logo, para histórias com velocidades contínuas, só tem a possibilidade de haver pontos com velocidade descontínua nas trajetórias das cargas se essas trajetórias estiverem restritas a uma região com dimensão nuclear $r < 1$.

Por fim, consideramos a seguir dois casos mais genéricos em que necessariamente ocorrem descontinuidades. No primeiro caso, apenas uma das histórias tem velocidade descontínua, por exemplo $\Delta \mathbf{v}_{1+} = 0$ e $\Delta \mathbf{v}_{2-} \neq 0$. Nesse caso, usando a equação (3.52) vemos que necessariamente temos $\Delta \mathbf{v}_1 \neq 0$ e $\Delta \mathbf{v}_2 \neq 0$. No segundo caso, as duas histórias têm velocidade descontínua, $\Delta \mathbf{v}_{1+} \neq 0$ e $\Delta \mathbf{v}_{2-} \neq 0$. Para esse caso, usando a equação (3.52) vemos que necessariamente temos $\Delta \mathbf{v}_1 \neq 0$ e/ou $\Delta \mathbf{v}_2 \neq 0$.

3.4. Solução Numérica do Problema com Fronteira Mínima

Nesta seção vamos descrever os métodos usados para encontrar as soluções numéricas para o problema com fronteira mínima. Para o problema de fronteira mínima com histórias na vizinhança da solução de Schild verificamos numericamente se as matrizes (3.26) têm inversa e são bem condicionadas, e portanto, se podemos transformar o problema no sistema de equações

diferenciais ordinárias (3.33) sujeito às condições de fronteira $\mathbf{x}_1(t_{OA}) = \mathbf{x}_{OA}$, $\mathbf{x}_1(t_{L-}) = \mathbf{x}_{L-}$, $\mathbf{x}_2(t_{O-}) = \mathbf{x}_{O-}$ e $\mathbf{x}_2(t_{LB}) = \mathbf{x}_{LB}$. Depois de verificar se essa transformação é possível buscamos resolver o problema com valor de chegada usando o método dos disparos. Para isso, conforme vimos na Seção 3.2, para cada iteração do método de disparos, precisamos resolver 7 problemas de valores iniciais, determinar $\mathbf{X}_{k-1} = \mathbf{X}_{k-1}(t_{OA}, \mathbf{V}_{k-1})$ e $\mathbb{J}_{k-1}^s = \mathbb{J}_{k-1}^s(\mathbf{V}_{k-1})$ usando o mapa

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} + \mathbb{J}_{k-1}^s(\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{k-1}). \quad (3.69)$$

Em seguida, caso a Jacobiana $\mathbb{J}_{k-1}^s$ tenha inversa e seja condicionada, realizamos o cálculo da k -ésima aproximação para a solução $\mathbf{V}_k$ pelo mapa

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k-1} + \mathbb{J}_{k-1}^{s-1}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}). \quad (3.70)$$

Os problemas de valores iniciais (3.33) foram resolvidos usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem^[63, 64]. A equação diferencial (3.33) foi escrita tendo t_1 como parâmetro de evolução, porém, a cada passo do método de Runge-Kutta precisamos avaliar os campos vetoriais, dados pelos termos do lado direito da equação (3.33), que dependem da trajetória da partícula 2 e das histórias das duas partículas, de modo que a cada passo precisamos avaliar as posições, velocidades e acelerações num conjunto de quatro pontos $\{\mathbf{x}_{2-}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{1+}\}$, que formam uma cadeia de pontos em cone de luz. A cada passo do método de Runge-Kutta, essa cadeia de pontos em cone de luz, veja a ilustração na Figura 3.1, caminha junto com o método. Tomando como referência inicial o ponto $\mathbf{x}_1(t_1)$, os outros três pontos são obtidos resolvendo a condição de cone de luz (3.7), que por sua vez foi resolvida empregando a função `fsolve` do MATLAB. Cada solução do problema de valor inicial (3.33), obtida empregando esse método de resolução, tem um erro associado, pois corresponde a uma aproximação da solução exata. Nos casos em que o mapa do método dos disparos converge para uma solução, usamos como critério de parada a condição de que erros relativos associados aos valores de chegada $\mathbf{x}_1(t_{L-})$, $\mathbf{x}_2(t_{LB})$ sejam menores que 10^{-10} . Reiteramos que, mesmo que o mapa do método dos disparos convirja para uma solução, não temos como garantir que ela seja única.

Para os casos em que as histórias têm descontinuidades nas velocidades temos que parar o método de Runge-Kutta nos conjuntos de pontos com velocidade descontínua, $\{\mathbf{x}_{2-}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{1+}\}$, encontrar as soluções para as condições de quina de Weierstrass-Erdmann, e usá-las como velocidade inicial para o problema de valor inicial seguinte, até atingir a próxima descontinuidade. No presente estudo, vamos tratar apenas dos casos em que cada história tem apenas um ponto com velocidade descontínua. Vamos considerar que para cada uma das cargas a história consiste num segmento de órbita de Schild no plano xy , perturbado no eixo z , e que a descontinuidade ocorre num dado instante em t^* , entre as extremidades t_a e t_a da história, de modo que a componente z da posição fica

$$z(t) := \begin{cases} z(t) + \epsilon_1^z \sin \left[n_1 \pi \frac{(t - t_a)}{(t_b - t_a)} \right] & \text{para } t_a \leq t \leq t^*, \\ z(t) + z^* + (z_2 - z^*) \frac{(t - t^*)}{(t_b - t^*)} + \epsilon_2^z \sin \left[n_2 \pi \frac{(t - t^*)}{(t_b - t^*)} \right] & \text{para } t^* \leq t \leq t_b, \end{cases} \quad (3.71)$$

sendo que $z^* = z(t^*)$, é dado por

$$z^* = z_1 + \epsilon_1^z \sin \left[n_1 \pi \frac{(t^* - t_a)}{(t_b - t_a)} \right]. \quad (3.72)$$

Definindo os parâmetros, conhecidos como números de onda

$$k_1 := \frac{n_1 \pi}{(t_b - t_a)} \quad \text{e} \quad k_2 := \frac{n_2 \pi}{(t_b - t^*)}, \quad (3.73)$$

a componente z da velocidade fica

$$v_z(t) = \begin{cases} v_z(t) + \epsilon_1^z k_1 \cos [k_1(t - t_a)] & \text{para } t_a \leq t \leq t^*, \\ v_z(t) + \frac{(z_2 - z^*)}{(t_b - t^*)} + \epsilon_2^z k_2 \cos [k_2(t - t^*)] & \text{para } t^* \leq t \leq t_b, \end{cases} \quad (3.74)$$

e a componente z da aceleração é dada por

$$a_z(t) = \begin{cases} a_z(t) - \epsilon_1^z k_1^2 \sin [k_1(t - t_a)] & \text{para } t_a \leq t \leq t^*, \\ a_z(t) - \epsilon_2^z k_2^2 \sin [k_2(t - t^*)] & \text{para } t^* \leq t \leq t_b. \end{cases} \quad (3.75)$$

Os parâmetros de amplitude ϵ_1^z e ϵ_2^z e de número de onda k_1 e k_2 das perturbações devem ser tais que as histórias sejam subluminais. Observe que com essas perturbações as histórias continuam satisfazendo as condições de fronteira. O parâmetro ϵ_2^z permite ajustar a velocidade à direita no ponto de descontinuidade da história da carga para um dado valor v_z^d , tomando $\epsilon_2^z = v_z^d / k_2$. Tomamos a forma senoidal (3.71) para a perturbação nas histórias, apenas como um exemplo de experimento numérico. A única exigência sobre a perturbação é que o segmento de fronteira resultante seja subluminal.

Uma vez que a forma das perturbações nas histórias estão definidas e que num dado instante t^* os valores das velocidades nas histórias no limite à direita desse ponto podem ser ajustadas, podemos parar o método de Runge-Kutta nesse ponto e verificar a existência de velocidade descontínua resolvendo as condições de quina de Weierstrass-Erdmann, dada pelo sistema de equações (3.49). No restante desta seção desenvolvemos uma alternativa para obter uma condição necessária para resolver o sistema de equações (3.49) e usar esta solução aproximada como ponto inicial no método de Newton que resolve as condições de quina de Weierstrass-Erdmann na íntegra.

Como vimos anteriormente, quando tomamos $\{\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d\}$ como variáveis o sistema de equações (3.49) fica sobredeterminado, com 8 equações e 6 incógnitas. Para resolver esse sistema de

equações vamos os considerar as terceiras componentes das velocidades $\mathbf{v}_{1+}^d$ e $\mathbf{v}_{2-}^d$ como variáveis adicionais, resultando num sistema com 8 equações e 6 incógnitas, e denotá-las, respectivamente, por v_{1+}^{ze} e v_{1+}^{zd} . Assim como foi feito na Seção 3.3, vamos considerar as seguintes notações equivalentes, $\mathbf{x}_{2+} \equiv \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_{1-} \equiv \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_{2+}^e \equiv \mathbf{v}_2^e$, $\mathbf{v}_{2+}^d \equiv \mathbf{v}_2^d$, $\mathbf{v}_{1-}^e \equiv \mathbf{v}_1^e$, $\mathbf{v}_{1-}^d \equiv \mathbf{v}_1^d$. Com isso, dadas as constantes $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_{1+}$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_{2-}$, $\mathbf{v}_1^e$, $\mathbf{v}_{1+}^e$, v_{1+}^{xd} , v_{1+}^{yd} , $\mathbf{v}_2^e$, $\mathbf{v}_{2-}^e$, v_{2-}^{xd} , v_{2-}^{yd} , o sistema de equações (3.49) fica:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{P}_1(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, v_{1+}^{zd}, v_{2-}^{zd}) = 0, \\ \Delta \mathbf{P}_2(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, v_{1+}^{zd}, v_{2-}^{zd}) = 0, \\ \Delta E_1(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, v_{1+}^{zd}, v_{2-}^{zd}) = 0, \\ \Delta E_2(\mathbf{v}_1^d, \mathbf{v}_2^d, v_{1+}^{zd}, v_{2-}^{zd}) = 0, \end{cases} \quad (3.76)$$

e usando as definições, também usadas na Seção 3.3, $\Delta \mathbf{v}_1 := (\mathbf{v}_1^d - \mathbf{v}_1^e)$, $\Delta \mathbf{v}_{1+} := (\mathbf{v}_{1+}^d - \mathbf{v}_{1+}^e)$, $\Delta \mathbf{v}_{2-} := (\mathbf{v}_{2-}^d - \mathbf{v}_{2-}^e)$ e $\Delta \mathbf{v}_2 := (\mathbf{v}_2^d - \mathbf{v}_2^e)$ e as quantidades definidas por

$$\begin{cases} R_{ij\pm}^e := 2r_{ij\pm}(1 - \mathbf{n}_{ij\pm} \cdot \mathbf{v}_{j\pm}^e), \\ R_{ij\pm}^d := 2r_{ij\pm}(1 - \mathbf{n}_{ij\pm} \cdot \mathbf{v}_{j\pm}^d), \end{cases} \quad (3.77)$$

as condições de quina de Weierstrass-Erdmann (3.76) ficam

$$\begin{cases} \frac{m_1(\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)^2}} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_{2-} + \mathbf{v}_{2-}^e)}{R_{12-}^e - 2r_{12-}(\mathbf{n}_{12-} \cdot \Delta \mathbf{v}_{2-})} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)}{R_{12+}^e + 2r_{12+}(\mathbf{n}_{12+} \cdot \Delta \mathbf{v}_2)} = \mathbf{P}_1^e, \\ \frac{m_2(\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)^2}} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)}{R_{21-}^e - 2r_{21-}(\mathbf{n}_{21-} \cdot \Delta \mathbf{v}_1)} - \frac{(\Delta \mathbf{v}_{1+} + \mathbf{v}_{1+}^e)}{R_{21+}^e + 2r_{21+}(\mathbf{n}_{21+} \cdot \Delta \mathbf{v}_{1+})} = \mathbf{P}_2^e, \\ \frac{m_1}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^e)^2}} - \frac{1}{R_{12-}^e - 2r_{12-}(\mathbf{n}_{12-} \cdot \Delta \mathbf{v}_{2-})} - \frac{1}{R_{12+}^e + 2r_{12+}(\mathbf{n}_{12+} \cdot \Delta \mathbf{v}_2)} = E_1^e, \\ \frac{m_2}{\sqrt{1 - (\Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^e)^2}} - \frac{1}{R_{21-}^e - 2r_{21-}(\mathbf{n}_{21-} \cdot \Delta \mathbf{v}_1)} - \frac{1}{R_{21+}^e + 2r_{21+}(\mathbf{n}_{21+} \cdot \Delta \mathbf{v}_{1+})} = E_2^e. \end{cases} \quad (3.78)$$

Para órbitas circulares de Schild colocadas no plano xy e com $r_{12} \gg 1$ o ângulo de retardo θ é pequeno, $\theta \ll 1$, e vale as aproximações $r \approx 1/\theta^2 \gg 1$, $v^e \approx \theta \ll 1$ ^[34]. Agora, considere que perturbações do tipo (3.71), que propiciam descontinuidade nas componentes z das velocidades das histórias, são adicionadas a essas órbitas Schild. Para trajetórias na vizinhança dessas órbitas perturbadas, valem as seguintes aproximações: $\mathbf{n}_{21+} \cdot \Delta \mathbf{v}_{1+} \approx \mathbf{n}_{12-} \cdot \Delta \mathbf{v}_{2-}^d \approx \mathbf{n}_{21-} \cdot \Delta \mathbf{v}_1^d \approx \mathbf{n}_{12+} \cdot \Delta \mathbf{v}_2^d \approx 0$, $|\mathbf{v}_1^d| \approx |\mathbf{v}_1^e|$ e $|\mathbf{v}_2^d| \approx |\mathbf{v}_2^e|$. Assim, para essas trajetórias, as equações das energias, do sistema (3.78), são automaticamente satisfeitas, de modo aproximado, e as equações para os momentos ficam

$$\begin{cases} m_1 \gamma_1^e (\mathbf{v}_1^d - \mathbf{v}_1^e) - \frac{(\mathbf{v}_{2-}^d - \mathbf{v}_{2-}^e)}{R_{12-}^e} - \frac{(\mathbf{v}_2^d - \mathbf{v}_2^e)}{R_{12+}^e} \approx \mathbf{0}, \\ m_2 \gamma_2^e (\mathbf{v}_2^d - \mathbf{v}_2^e) - \frac{(\mathbf{v}_{1+}^d - \mathbf{v}_{1+}^e)}{R_{21-}^e} - \frac{(\mathbf{v}_{1-}^d - \mathbf{v}_{1-}^e)}{R_{21+}^e} \approx \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.79)$$

onde

$$\gamma_1^e := \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1^e)^2}} \quad \text{e} \quad \gamma_2^d := \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_2^d)^2}}. \quad (3.80)$$

Para esse tipo de trajetórias também valem as aproximações $\mathbf{n}_{1+} \approx \mathbf{n}_{2-} \approx \mathbf{n}_{1-} \approx \mathbf{n}_{2+} \approx \mathbf{0}$. Tomando produtos escalares desses os vetores normais com os termos das equações do sistema (3.79), vemos que as componentes x e y dessas equações são identicamente nulas, e as componentes z fornecem que

$$\begin{cases} m_1 \gamma_1^e (v_1^{zd} - v_1^{ze}) - \frac{(v_{2-}^{zd} - v_{2-}^{ze})}{R_{12+}^e} \approx \frac{(v_2^{zd} - v_2^{ze})}{R_{12-}^e}, \\ m_2 \gamma_2^e (v_2^{zd} - v_2^{ze}) - \frac{(v_{1+}^{zd} - v_{1+}^{ze})}{R_{21-}^e} \approx \frac{(v_{1-}^{zd} - v_{1-}^{ze})}{R_{21+}^e}. \end{cases} \quad (3.81)$$

Por um lado, considerando que as descontinuidades nas componentes z das velocidades das trajetórias satisfazem as relações $v_1^{zd} \approx -v_1^{ze}$ e $v_2^{zd} \approx -v_2^{ze}$ garantimos que são válidas as aproximações $\|\mathbf{v}_1^d\| \approx \|\mathbf{v}_1^e\|$, $\|\mathbf{v}_2^d\| \approx \|\mathbf{v}_2^e\|$, feitas como suposições iniciais. Desse modo, obtemos que as descontinuidade nas componentes z das velocidades nas histórias, que vamos denotar por $\Delta v_{1+}^z := v_{1+}^{zd} - v_{1+}^{ze}$ e $\Delta v_{2-}^z := v_{2-}^{zd} - v_{2-}^{ze}$, serão dadas por

$$\begin{cases} \Delta v_{1+}^z \approx -2R_{21+}^e \left(m_2 \gamma_2^e v_{2-}^{ze} - \frac{v_{1-}^{ze}}{R_{21-}^e} \right), \\ \Delta v_{2-}^z \approx -2R_{12-}^e \left(m_1 \gamma_1^e v_{1+}^{ze} - \frac{v_{2+}^{ze}}{R_{12+}^e} \right). \end{cases} \quad (3.82)$$

Por outro lado, definindo as constantes

$$a_1 := m_1 \gamma_1^e \quad \text{e} \quad a_2 := m_2 \gamma_2^e, \quad (3.83)$$

$$b_1 := -\frac{1}{R_{12+}^e} \quad \text{e} \quad b_2 := -\frac{1}{R_{21-}^e}, \quad (3.84)$$

$$d_1 := \frac{(v_{2-}^{zd} - v_{2-}^{ze})}{R_{12-}^e} \quad \text{e} \quad d_2 := \frac{(v_{1+}^{zd} - v_{1+}^{ze})}{R_{21+}^e}, \quad (3.85)$$

temos

$$\begin{cases} a_1 \Delta v_1^3 + b_1 \Delta v_2^3 \approx d_1, \\ b_2 \Delta v_1^3 + a_2 \Delta v_2^3 \approx d_2. \end{cases} \quad (3.86)$$

Definindo ainda a matriz

$$\mathbb{B} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

e os vetores $\mathbf{v} := (\Delta v_1^z, \Delta v_2^z)^\top$ e $\mathbf{d} := (d_1, d_2)^\top$ podemos reescrever o sistema de equações acima na forma matricial

$$\mathbb{B}\mathbf{v} \approx \mathbf{d}. \quad (3.88)$$

O determinante da matriz $\mathbb{B}$ é dado por

$$\det(\mathbb{B}) = m_1 \gamma_1^e m_2 \gamma_2^e - \frac{1}{R_{12+}^e R_{21-}^e}, \quad (3.89)$$

logo, a matriz $\mathbb{B}$ é sempre inversível para o caso de trajetórias na vizinhança de órbitas de Schild com grandes distâncias em cone de luz $r_{12\pm} \gg 1$. Com isso, e usando as definições $\Delta v_{1+}^z := v_{1+}^{zd} - v_{1+}^{ze}$ e $\Delta v_{2-}^z := v_{2-}^{zd} - v_{2-}^{ze}$, podemos calcular a solução, $\mathbf{v} \approx \mathbb{B}^{-1}\mathbf{d}$, da equação (3.88), que fica

$$\begin{cases} \Delta v_1^z \approx \frac{\frac{m_2 \gamma_2^e \Delta v_{2-}^z}{R_{12-}^e} + \frac{\Delta v_{1+}^z}{R_{12+}^e R_{21+}^e}}{m_1 \gamma_1^e m_2 \gamma_2^e - \frac{1}{R_{12+}^e R_{21-}^e}}, \\ \Delta v_2^z \approx \frac{\frac{m_1 \gamma_1^e \Delta v_{1+}^z}{R_{21+}^e} + \frac{\Delta v_{2-}^z}{R_{21-}^e R_{12-}^e}}{m_1 \gamma_1^e m_2 \gamma_2^e - \frac{1}{R_{12+}^e R_{21-}^e}}. \end{cases} \quad (3.90)$$

Por fim, usando novamente que para a classe de trajetórias na vizinhança das órbitas de Schild acima descritas o ângulo de retardo θ é pequeno, $\theta \ll 1$, e que as aproximações $r_i \approx 1/(m_i \theta^2)$ e $v_i \approx m_1 m_1 \theta / (m_1 m_2)$ são válidas, podemos desprezar os termos de ordem superior ou igual a $\mathcal{O}(\theta^3)$, resultando nas seguintes relações para as descontinuidades das velocidades na componente z

$$\begin{cases} \Delta v_1^z \approx \frac{\Delta v_{2-}^z}{2m_1 r_{12-}}, \\ \Delta v_2^z \approx \frac{\Delta v_{1+}^z}{2m_2 r_{21+}}. \end{cases} \quad (3.91)$$

Na Seção 3.5 a seguir, exibimos um experimento numérico em que usamos a relação (3.91) como uma aproximação inicial para resolver as condições de quina de Weierstrass-Erdmann em sua forma não linear (3.76).

3.5. Experimentos Numéricos: Fronteira Mínima

Nesta seção exibimos e discutimos alguns resultados e experimentos numéricos obtidos empregando os métodos numéricos expostos na Seção 3.4. Para cada experimento numérico, exibimos as trajetórias das partículas, e as séries temporais das posições, velocidades e acelerações. As séries temporais das velocidades e acelerações permitem avaliar de modo qualitativo a primeira e segunda derivada dos dados numéricos. Em cada simulação numérica, usamos condições de fronteira que correspondem a perturbações na vizinhança de uma dada órbita de Schild, que será referenciada pelo seu ângulo de retardo, lembrando que em todos os casos tratamos apenas do problema atrativo de dois copos, $e_1 = -1$, $e_2 = 1$. Nessas simulações, as soluções obtidas foram interpoladas usando a série Galeriana capaz de gerar velocidades descontínuas (4.41), que será vista em detalhes na Seção 4.2. De um modo geral, nos experimentos realizados, as condições de quina de Weierstrass-Erdmann (3.76) foram resolvidas com precisão numérica de uma ordem abaixo do ϵ da máquina, nesse caso dado por $\epsilon = 2,2204 \times 10^{-16}$. Para verificar a existência de pontos com velocidade descontínua resolvendo o sistema de equações não lineares (3.76) o grande desafio é fornecer um ponto inicial tal que o método numérico não caia sempre na solução trivial, onde as descontinuidades nas velocidades são nulas.

No primeiro experimento, resumido nas Figuras 3.2 a 3.8, usamos condições de fronteira que correspondem a perturbações do tipo (3.71), com $\epsilon_i^z = 0,3$ e $n_1 = n_2 = 2$, na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. O número de pontos usados na grade do Runge-Kutta para resolver o problema de valor inicial (3.33) foi $N_{rk} = 101$. Nesse experimento, usamos a perturbação $\epsilon_i = 10^{-3}$ nos disparos do tipo ②, equação (3.38), e o método dos disparos atingiu os pontos $\mathbf{x}_{O^+}$ e $\mathbf{x}_{L^-}$ com um erro absoluto inferior a 2×10^{-15} e um erro relativo inferior a 4×10^{-15} . Para cada passo do método dos disparos, $k = 1, 2, \dots, 20$, o número de condicionamento da matriz Jacobiana (3.41) ficou em torno de $\kappa(\mathbb{J}_k^s) = 2,6(6)$, onde a notação $2,6(6)$ significa que os valores ficaram entre $2,6 \pm 0,6$, e o número de condicionamento das matrizes (3.26) ficou em $\kappa(\mathbb{G}_{12}) = 1,041(1)$ e $\kappa(\mathbb{G}_{21}) = 1,027(1)$. Nessa simulação numérica, usamos as aproximações nas descontinuidades das componentes z das velocidades dadas pela equação (3.91) como condição inicial na função `fsolve` do MATLAB para calcular a solução numérica das condições de quina de Weierstrass-Erdmann (3.76). Nas Figuras 3.2 a 3.4 podemos observar que, apesar de as perturbações máximas nas histórias, tomadas no eixo z , guardarem uma proporção razoável com os raios das órbitas de Schild não perturbadas, as variações no eixo z das trajetórias exibiram uma espécie de amortecimento, diminuindo essa proporção na relação entre o ponto máximo no eixo z das trajetórias e os raios das órbitas. Nas séries temporais das velocidades, Figuras 3.5 a 3.6, e nas séries temporais das acelerações, Figuras 3.7 a 3.8, podemos observar a cadeia de descontinuidades em cone de luz que tem um ponto com velocidade descontínua em cada trajetória e em cada história, e a cadeia de descontinuidades formada pelos pontos O^+ e L^- .

A imposição física de que as órbitas sejam subluminais agrega dificuldades no problema com valor na fronteira, dado pelo problema de valor inicial (3.33) e pelas condições de contorno (3.34). Dependendo do valor do ângulo de retardo θ da órbita de Schild que será perturbada, da perturbação ϵ_i nos disparos do tipo ②, equação (3.38), e das velocidades iniciais, nos pontos O_A e O^+ , a trajetória se torna superluminal, invalidando a solução encontrada. Em experimentos

numéricos que envolvem velocidades relativísticas usamos apenas velocidades iniciais próximas das velocidades da órbita de Schild não perturbada. Por exemplo, no experimento das Figuras 3.2 a 3.8, para perturbações da ordem $\epsilon_i = \|\mathbf{v}_i\|$, com $i = 1, 2$, onde $\mathbf{v}_i$ são as velocidades das órbitas circulares de Schild não perturbadas, ocorreram trajetórias superluminais no primeiro passo do método de disparos (3.41).

Figura 3.2.: Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^+ , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B .

Figura 3.3.: Posição da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 3.4.: Posição da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

Figura 3.5.: Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 3.6.: Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B

Figura 3.7.: Aceleração da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+

Figura 3.8.: Aceleração da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

No segundo experimento, exposto nas Figuras 3.9 a 3.15, usamos condições de fronteira que correspondem a perturbações do tipo (3.71), com $\epsilon_i^z = 0,3$ e $n_1 = n_2 = 2$, na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. O número de pontos usados na grade do Runge-Kutta para resolver o problema de valor inicial 3.33 foi $N_{rk} = 101$. Nesse experimento usamos a perturbação $\epsilon_i = 10^{-3}$ nos disparos do tipo ②, equação (3.38), e o método dos disparos atingiu os pontos $\mathbf{x}_{O^+}$ e $\mathbf{x}_{L^-}$ com um erro absoluto inferior a 2×10^{-15} e um erro relativo inferior a 4×10^{-15} . Para cada passo do método dos disparos, $k = 1, 2, \dots, 20$, o número de condicionamento da matriz Jacobiana (3.41) ficou em torno de $\kappa(J_k^s) = 2,01(2)$, e o número de condicionamento das matrizes (3.26) ficaram em $\kappa(\mathbb{G}_{12}) = 1,0412(1)$ e $\kappa(\mathbb{G}_{21}) = 1,0273(1)$. Nessa simulação numérica, usamos a solução trivial $\mathbf{P}^d = \mathbf{P}^e$ como condição inicial para as condições de quina de Weierstrass-Erdmann (3.76) e $\epsilon_i = 10 \times 10^{-3}$ para o método dos disparos (3.38). Nas Figuras 3.9 a 3.11 podemos observar novamente que, apesar das perturbações máximas nas histórias, tomadas no eixo z , guardarem uma proporção razoável com os raios das órbitas de Schild não perturbadas, as variações no eixo z das trajetórias exibiram uma espécie de amortecimento não diminuindo essa proporção na relação entre o ponto máximo no eixo z das trajetórias e os raios das órbitas. Nas séries temporais das velocidades, Figuras 3.12 a 3.13, e nas séries temporais das acelerações, Figuras 3.14 a 3.15, as trajetórias e segmentos de fronteira têm derivada contínua em todos os pontos, exceto pelos pontos O^+ e L^- que também formam uma cadeia de pontos de descontinuidades em cone de luz.

Figura 3.9.: Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B .

Figura 3.10.: Posição da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 3.11.: Posição da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

Figura 3.12.: Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 3.13.: Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B

Figura 3.14.: Aceleração da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+

Figura 3.15.: Aceleração da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

No terceiro experimento, exibido nas Figuras 3.16 a 3.18 usamos condições de fronteira que correspondem a perturbações do tipo (3.71), com $\epsilon_i^z = 0,08$, $n_1 = n_2 = 2$, na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. O número de pontos usados na grade do Runge-Kutta para resolver o problema de valor inicial (3.33) foi $N = 101$. Nessa simulação, usamos a perturbação $\epsilon_i = 10^{-3}$ nos disparos do tipo ②, equação (3.38), e o método dos disparos atingiu os pontos $\mathbf{x}_{O^+}$ e $\mathbf{x}_{L^-}$ com um erro absoluto inferior a 6×10^{-14} e um erro relativo inferior a 2×10^{-10} . Para cada passo do método dos disparos, $k = 1, 2, \dots, 20$, o número de condicionamento da matriz Jacobiana (3.41) ficou em torno de $\kappa(\mathbb{J}_k^s) = 3,6(2)$, e o número de condicionamento das matrizes (3.26) ficaram em $\kappa(\mathbb{G}_{12}) = 1$ e $\kappa(\mathbb{G}_{21}) = 1$. Nesse experimento numérico, usamos as aproximações das descontinuidades das componentes z das velocidades dadas pela equação (3.91) como condição inicial na função `fsolve` do MATLAB para calcular a solução numérica das condições de quina de Weierstrass-Erdmann (3.76). Nesse experimento, tomamos a massa da partícula 1 como a massa do elétron e a massa da outra partícula próxima da massa do próton. Como esperado, vemos na Figura 3.16 que a trajetória da partícula 2 ficou confinada numa região, em detalhe na Figura 3.17, próxima ao centro da trajetória da carga 1. A partícula 2 realizou movimentos no eixo z da mesma ordem da perturbação em sua história, enquanto os deslocamentos no eixo z da partícula 1 foram muito menores do que os deslocamentos em sua história. O mesmo ocorreu com variação na velocidade, Figuras 3.18 e 3.19, porém, as descontinuidades nas componentes z das velocidades ocorreram na mesma ordem de grandeza, como podemos comparar nas Figuras 3.19 e 3.20.

Figura 3.16.: Trajetória da cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A trajetória da carga 2, aparece apenas como um ponto vermelho no centro da trajetória da carga 1. Na Figura 3.16 apresentamos a trajetória da carga 2 com os limites dos eixos x, y, z adequados para ela.

Figura 3.17.: Trajetória da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B .

Figura 3.18.: Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

Figura 3.19.: Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 3.20.: Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,8$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1836$. Os limites nos eixos espaço e tempo foram escolhidos para destacar apenas componente z da velocidade da carga 1. Na Figura 3.19 exibimos as 3 componentes da velocidade da carga 1.

Aqui exibimos apenas esses 3 experimentos numéricos, mas foram realizadas diversas simulações que possibilitaram, entre outras coisas, verificar que quanto menor o ângulo de retardo θ , mais precisas são as soluções de Schild fornecidas por esse método numérico proposto para o problema com fronteira mínima. Foram realizadas simulações com $m_1 = 1$, $m_2 = 1836$ e $\theta = 0,0073$ em que o raio da órbita de Schild a ser perturbada para carga 2 ficou com um valor próximo ao raio de Bohr r_0 . Também foram feitos experimentos numéricos para $(m_1 = m_2 = 1)$, $(m_1 = 1, m_2 = 10)$, $(m_1 = 1, m_2 = 100)$ com os ângulos de retardo $\theta = 0,01$ e $\theta = 0,1$ e $\theta = 0,7$. Todos esses experimentos foram feitos para histórias com velocidades contínuas e para histórias com um ponto de velocidade descontínua, dadas por perturbações na vizinhança de órbitas de Schild do tipo (3.71), e apresentaram resultados semelhantes aos experimentos expostos acima, exceto pela escala de espaço e tempo.

4

Método Variacional com Gradiente Fraco

No presente capítulo desenvolvemos um método numérico de minimização para o funcional (2.5) resolvendo sua condição de ponto crítico e restringindo as soluções e os segmentos de fronteira ao espaço de funções $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$, dado pela Definição 2.2. Na Seção 4.1, definimos e desenvolvemos um método variacional, que denominamos como método variacional com gradiente fraco, e explicamos como a condição de ponto crítico para esse gradiente será resolvida numericamente aplicando o método de elementos finitos com uma série Galeriana que suporta trajetórias com velocidades descontínuas⁽¹⁾. O método variacional e o método de elementos finitos empregados correspondem a uma generalização do método desenvolvido na Referência^[52], que coloca as soluções e os segmentos de fronteira no espaço de funções $\mathcal{N}^{(1,2)}(\mathcal{I}_N)$. Depois, na Seção 4.2, descrevemos os dois métodos numéricos, implementados no MATLAB, que foram combinados para encontrar soluções que minimizam a ação de Fokker com fronteiras genéricas para duas cargas. Um deles usa o método dos elementos finitos associado com o método de Newton para buscar soluções que anulam o gradiente fraco do funcional. O outro, usa o método do declive máximo para encontrar as soluções que minimizam o funcional. Por fim, alguns resultados e experimentos numéricos realizados são apresentados e examinados na Seção 4.3.

⁽¹⁾De um modo geral, o método de elementos finitos fornece uma aproximação numérica para soluções de equações diferenciais parciais sujeitas a condições de contorno, resultantes de objetos com geometria complicada, e que são impossíveis de serem resolvidas de forma analítica. Ele é usado, por milhões de engenheiros e cientistas, para resolver diversos problemas de engenharia, que ocorrem nas áreas tais como: análise de tensões, eletromagnetismo, transferência de calor e escoamento de fluidos.^[65] Esse método também encontra soluções aproximadas para problemas de minimização de funcionais aproximando a solução por uma série finita, também conhecida como aproximação de Galerkin.^[66,67]

4.1. Método Variacional e Elementos Finitos

Iniciamos esta seção calculando a condição de ponto crítico do funcional de ação (4.1) e depois descrevemos o método elementos finitos proposto para resolver esse gradiente. Considere o funcional da ação de Fokker para o problema de dois corpos com condições de fronteira no passado e futuro definido na Seção 2.1:

$$\begin{aligned} S[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = & m_1 \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \left(1 - \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_1^\dagger \rangle} \right) dt_1 + m_2 \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} \left(1 - \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{\mathbf{x}}_2^\dagger \rangle} \right) dt_2 \\ & + \int_{t_{O_A}}^{t_{L^+}} \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_{2-}^\dagger \rangle}{2 \langle (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{2-}) | \dot{\mathbf{x}}_{2-}^\dagger \rangle} dt_1 + \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{\mathbf{x}}_{2+}^\dagger \rangle}{2 \langle (\mathbf{x}_{2+} - \mathbf{x}_1) | \dot{\mathbf{x}}_{2+}^\dagger \rangle} dt_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Definindo, respectivamente, as quantidades relacionadas às energias cinéticas e de interação

$$K_i := m_i \left(1 - \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}_i | \dot{\mathbf{x}}_i^\dagger \rangle} \right), \quad U_{ij}^\pm(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j\pm}, \dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_{j\pm}) := -\frac{e_i e_j \langle \dot{\mathbf{x}}_i | \dot{\mathbf{x}}_{j\pm}^\dagger \rangle}{2 |\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm} | \dot{\mathbf{x}}_{j\pm}^\dagger \rangle|}, \quad (4.2)$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$, tomando $e_i e_j = -1$, e usando a invariância dessa ação por reparametrização pode-se mostrar que as seguintes definições para a ação são equivalentes^[52]

$$S = \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} K_1 dt_1 + \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} K_2 dt_2 + \underbrace{\int_{t_{O_A}}^{t_{L^+}} U_{12}^- dt_1}_{\parallel} + \underbrace{\int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} U_{12}^+ dt_1}_{\parallel}; \quad (4.3)$$

$$\equiv \int_{t_{O_A}}^{t_{L^-}} K_1 dt_1 + \int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} K_2 dt_2 + \underbrace{\int_{t_{O^-}}^{t_{L_B}} U_{21}^+ dt_2}_{\parallel} + \underbrace{\int_{t_{O^+}}^{t_{L_B}} U_{21}^- dt_2}_{\parallel}. \quad (4.4)$$

Para calcular a primeira variação do funcional (4.1) vamos tomar variações em torno das trajetórias, $\mathbf{x}_{1C}(t_1)$ e $\mathbf{x}_{2C}(t_2)$, que estão no espaço de funções $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$. Essas funções podem ser consideradas como um chute inicial para as soluções do funcional e têm que satisfazer as condições de fronteira. Aqui, vamos tomar perturbações $\mathbf{b}_1(t_1)$ e $\mathbf{b}_2(t_2)$, que estão no espaço de funções $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$, e tais que as trajetórias perturbadas $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sejam subluminais e dadas por:

$$\mathbf{u}_1 := \mathbf{x}_{1C} + \mathbf{b}_1, \quad \dot{\mathbf{u}}_1 := \dot{\mathbf{x}}_{1C} + \dot{\mathbf{b}}_1, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u}_2 := \mathbf{x}_{2C} + \mathbf{b}_2, \quad \dot{\mathbf{u}}_2 := \dot{\mathbf{x}}_{2C} + \dot{\mathbf{b}}_2, \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{b}_1(t_1)$ e $\mathbf{b}_2(t_2)$ são nulos nas extremidades

$$\mathbf{b}_1(t_{O_A}) = \mathbf{b}_1(t_{L^-}^-) = 0, \quad \mathbf{b}_2(t_{O^+}^+) = \mathbf{b}_2(t_{L_B}) = 0, \quad (4.7)$$

sendo que os índices superiores $-$ e $+$ indicam, respectivamente, o limite à esquerda e à direita de cada ponto. Pode-se mostrar que o espaço vetorial gerado pelas perturbações, $\mathbf{b}_1(t_1)$ e $\mathbf{b}_2(t_2)$, tomadas em relação às trajetórias $\mathbf{x}_{1C}$ e $\mathbf{x}_{2C}$, e denotado por $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^1, \mathcal{I}_N^2)$ forma um espaço de Banach com respeito à norma⁽²⁾

$$\|\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\|_{\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^1, \mathcal{I}_N^2)} := \sum_{i=1}^2 [\sup \|\mathbf{b}_i\|_4 + \text{ess sup } \|\dot{\mathbf{b}}_i\|_4 + \text{ess sup } \|\ddot{\mathbf{b}}_i\|_4], \quad (4.8)$$

onde $\|\cdot\|_4$ indica a norma Euclidiana usual de $\mathbb{R}^4$. Esse espaço de Banach pode ser visto como a soma direta de dois subespaços $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^1) \oplus \mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^2)$, que equivale ao conjunto de todos os vetores que podem ser escritos de uma forma única $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, onde $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^1)$ e $\mathbf{b}_2 \in \mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^2)$, sendo que cada espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^1)$ e $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^2)$ forma um subespaço de Banach com respeito à norma (4.8) tomando $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$, respectivamente^[51]. Vimos na Seção 2.1 que o funcional (4.1) é Frechet diferenciável considerando a norma (2.18). Esse resultado pode ser estendido quando empregamos a norma (4.8)^[51].

Assim como fizemos na Seção 2.1, devemos considerar que os integrandos dos termos do funcional (4.1) não estão definidos em um conjunto finito de pontos, devido aos pontos com velocidade descontínuas nas duas trajetórias e nos dois segmentos de fronteira, de modo que as integrais devem ser realizadas sobre um conjunto finito de intervalos $t_j \in (t_{\mu-1}^+, t_\mu^-)$, para $j = 1, 2$ e $\mu = 1, 2, \dots, n_j$, onde as notações com os sinais $+$ e $-$ em $t_\mu^\pm$ representam, respectivamente, o limite à direita e à esquerda do μ -ésimo ponto de descontinuidade, logo, $t_\mu^- = t_\mu^{i+}$. No limite à esquerda dos intervalos com $\mu = 1$ devemos ter $t_0^+ = t_{O_A}$, $t_0^+ = t_{O^+}$ e no limite à direita dos intervalos com $\mu = n_j$ devemos ter $t_{n_1}^+ = t_{L^-}$, $t_{n_2}^+ = t_{L_B}$. Para definir esses intervalos, como foi explicado na Seção 2.1, para cada trajetória, além dos próprios pontos com velocidade descontínua, devemos considerar o conjunto de possíveis pontos com velocidade descontínua formado pelas cadeias de pontos em cone de luz com os pontos com velocidade descontínua da própria trajetória, da outra trajetória e dos dois segmentos de fronteira. Com isso, substituindo as trajetórias perturbadas (4.5) e (4.6) na ação (4.1) e tomando sua expansão linear de S em torno das trajetórias $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, temos a primeira variação, δS , do funcional

$$\begin{aligned} \delta S = & \sum_{\mu=1}^{\mu=n_1} \int_{t_{\mu-1}^+}^{t_\mu^-} \left[\left\langle \frac{\partial K_1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_1} \middle| \dot{\mathbf{b}}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U_{12}^-}{\partial \mathbf{x}_1} \middle| \mathbf{b}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U_{12}^-}{\partial \dot{\mathbf{x}}_1} \middle| \dot{\mathbf{b}}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U_{12}^+}{\partial \mathbf{x}_1} \middle| \mathbf{b}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U_{12}^+}{\partial \dot{\mathbf{x}}_1} \middle| \dot{\mathbf{b}}_1 \right\rangle \right] dt_1 \\ & + \sum_{\mu=1}^{\mu=n_2} \int_{t_{\mu-1}^+}^{t_\mu^-} \left[\left\langle \frac{\partial K_2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_2} \middle| \dot{\mathbf{b}}_2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U_{21}^-}{\partial \mathbf{x}_2} \middle| \mathbf{b}_2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U_{21}^-}{\partial \dot{\mathbf{x}}_2} \middle| \dot{\mathbf{b}}_2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U_{21}^+}{\partial \mathbf{x}_2} \middle| \mathbf{b}_2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U_{21}^+}{\partial \dot{\mathbf{x}}_2} \middle| \dot{\mathbf{b}}_2 \right\rangle \right] dt_2 \\ & + \mathcal{O}(\|\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\|_{\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N^1, \mathcal{I}_N^2)}^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na Seção 2.1 realizamos a integração por partes nos termos que contêm $\dot{\mathbf{b}}_1$ e $\dot{\mathbf{b}}_2$ na variação

⁽²⁾De um modo geral sabemos que o conjunto das funções $C_k(\mathcal{X})$ com a norma- C^k , definida por $\|f\|_{C_k(\mathcal{X})} = \sum_{n=1}^k \sup_{x \in \mathcal{X}} |f^n(x)|$, forma um espaço de Banach^[68].

do funcional (4.9) e, com isso, obtivemos as equações de Wheeler-Feynman e as condições de quina de Weierstrass-Erdmann. Vamos chamar esse procedimento de método variacional com gradiente forte. Esse método se mostrou eficiente para resolver os problemas de fronteira mínima, onde as equações de Wheeler-Feynman se reduzem a um problema com valores de fronteira e as condições de quina de Weierstrass-Erdmann assumem uma forma mais simples, com menos variáveis. Logo, para problemas mais gerais precisamos de um método variacional mais abrangente, como o que propomos no restante desta seção. Aqui, vamos minimizar a ação usando a variação do funcional na forma (4.9), onde não realizamos integração por partes. Vamos denominar esse procedimento como método variacional com gradiente fraco.⁽³⁾ Como veremos a seguir, esse novo procedimento de minimização da ação tem a vantagem de poder ser resolvido numericamente usando o método de elementos finitos, já que não precisamos impor as condições de quina de Weierstrass-Erdmann em cada ponto de descontinuidade. Além disso, numa eventual generalização para um número infinito de pontos com velocidade descontínua a integração por partes exige maiores restrições ao espaço de soluções. Essa generalização é uma questão em aberto e pode ter consequências para a teoria, mas tem limitações de ordem prática para ser experimentada numericamente, de modo que os métodos numéricos que seguem não sofrerão mudanças caso essa generalização seja feita. A seguir calculamos os termos da variação do funcional (4.9) e aplicamos o método dos elementos finitos no método variacional com gradiente fraco.

Pode-se mostrar que o gradiente fraco (4.9) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \delta S = & \sum_{\mu=1}^{n_1} \int_{t_{\mu-1}^{1+}}^{t_{\mu}^{1-}} [\langle M_1 + M_1^- + M_1^+ | \dot{b}_1 \rangle + \langle e_1^- + e_1^+ | b_1 \rangle] dt_1 \\ & + \sum_{\mu=1}^{n_2} \int_{t_{\mu-1}^{2+}}^{t_{\mu}^{2-}} [\langle M_2 + M_2^- + M_2^+ | \dot{b}_2 \rangle + \langle e_2^- + e_2^+ | b_2 \rangle] dt_2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo que, para $i = 1, 2$ e $j = 3 - i$ temos

$$M_i := -\frac{m_i v_i^\dagger}{\sqrt{\langle v_i^\dagger | v_i \rangle}}, \quad M_i^\pm := \frac{v_j^\dagger}{\langle x_{ji} | v_j^\dagger \rangle}, \quad (4.11)$$

e

$$e_i^\pm := \frac{\langle v_i | v_j^\dagger \rangle}{|\langle x_{ij} | v_j^\dagger \rangle|^3} [\langle v_j | v_j^\dagger \rangle - \langle x_{ij} | a_j^\dagger \rangle] x_{ij}^\dagger + \frac{\langle x_{ij} | v_j^\dagger \rangle}{|\langle x_{ij} | v_j^\dagger \rangle|^3} [\langle a_j | v_i^\dagger \rangle x_{ij}^\dagger - \langle v_i | v_j^\dagger \rangle v_j^\dagger], \quad (4.12)$$

lembrando que

⁽³⁾O termo ‘fraco’ vem do fato de extremos de funcionais do tipo, que contêm *corner points*, serem chamados de extremos fracos^[57]. Denominamos a condição de ponto crítico (2.22) com δS_i posto na forma em que é realizada a integração por partes (2.19) como gradiente forte, apenas para diferenciá-la da forma (4.9), nominada gradiente fraco.

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j(t_{j\pm}(t_i)), \quad \mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{x}}_j(t_{j\pm}(t_i)), \quad \mathbf{a}_j = \ddot{\mathbf{x}}_j(t_{j\pm}(t_i)) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j\pm}. \quad (4.13)$$

O cálculo dos termos (4.11) e (4.12) usando as equações (4.10), (4.9) as definições (4.2) é laborioso, porém, um modo menos árduo de verificar sua consistência é realizar a integração por partes na equação (4.10), calcular as derivadas envolvidas e comparar o resultado com as equações de Wheeler-Feynman e as condições de quina de Weierstrass-Erdman, dadas na Seção 2.1.

Agora, definindo ainda as funções

$$\mathbf{G}_1 := \mathbf{e}_1^- + \mathbf{e}_1^+, \quad \mathbf{G}_2 := \mathbf{e}_2^- + \mathbf{e}_2^+, \quad (4.14)$$

e

$$\mathbf{H}_1 := \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1^- + \mathbf{M}_1^+, \quad \mathbf{H}_2 := \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^- + \mathbf{M}_2^+. \quad (4.15)$$

a condição de ponto crítico $\delta S = 0$ fica

$$\sum_{\mu=1}^{n_1} \int_{t_{\mu-1}^{1+}}^{t_{\mu}^{1-}} [\langle \mathbf{G}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{H}_1 | \dot{\mathbf{b}}_1 \rangle] dt_1 + \sum_{\mu=1}^{n_2} \int_{t_{\mu-1}^{2+}}^{t_{\mu}^{2-}} [\langle \mathbf{G}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle + \langle \mathbf{H}_2 | \dot{\mathbf{b}}_2 \rangle] dt_2 = 0. \quad (4.16)$$

A condição de ponto crítico fornece soluções que podem ser um ponto de mínimo, ponto de máximo ou ponto de inflexão do funcional, sendo necessário analisar a segunda variação desse funcional para distinguir esses casos. Uma vez que as perturbações $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ são independentes, a condição de ponto crítico se torna

$$\begin{cases} \sum_{\mu=1}^{n_1} \int_{t_{\mu-1}^{1+}}^{t_{\mu}^{1-}} [\langle \mathbf{G}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{H}_1 | \dot{\mathbf{b}}_1 \rangle] dt_1 = 0, \\ \sum_{\mu=1}^{n_2} \int_{t_{\mu-1}^{2+}}^{t_{\mu}^{2-}} [\langle \mathbf{G}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle + \langle \mathbf{H}_2 | \dot{\mathbf{b}}_2 \rangle] dt_2 = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Veja que o gradiente fraco (4.17) é dado por integrais de um sistema de equações não lineares com retardo misto do tipo neutro e dependente do estado, e é o correspondente das equações de Wheeler-Feynman para o método variacional com gradiente fraco. Para aplicar o método dos elementos finitos nesse sistema de equações vamos considerar uma Galeriana capaz de gerar soluções com velocidade descontínua, dada por

$$\mathbf{x}_i^h(t_i) = \mathbf{x}_{i,p}^h(t_i) + \mathbf{x}_{i,v}^h(t_i) + \mathbf{x}_{i,s}^h(t_i), \quad (4.18)$$

onde o primeiro termo é responsável por deslocamentos na posição, o segundo termo por deslocamentos na velocidade e o terceiro pelos saltos nas velocidades. Os dois primeiros termos correspondem aos polinômios de Hermite e o terceiro termo foi adicionado para a Galeriana ser capaz de gerar trajetória com velocidades descontínuas. Considerando uma

grade com N_i possíveis pontos de descontinuidade para a trajetória da partícula i , e as funções de forma $B_{i,j}^{k,l}(t_i)$, que serão analisadas na Seção 4.2, a Galeriana fica

$$\mathbf{x}_i^h(t_i) = \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{l=1}^3 x_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{1,l}(t_i) \mathbf{e}_l + \sum_{j=0}^{N_i+1} \sum_{l=1}^3 v_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{2,l}(t_i) \mathbf{e}_l + \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{l=1}^3 s_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{3,l}(t_i) \mathbf{e}_l, \quad (4.19)$$

ou, adicionando os termos $x_{i,0}^{h,l}$ e $x_{i,N_i}^{h,l}$, que são constantes fixadas pelas condições de fronteira, e $s_{i,0}^{h,l} = s_{i,N_i}^{h,l} = 0$, apenas para escrever a Galeriana de forma mais compacta, temos

$$\mathbf{x}_i^h(t_i) = \sum_{j=0}^{N_i+1} \sum_{l=1}^3 [x_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{1,l}(t_i) + v_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{2,l}(t_i) + s_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{3,l}(t_i)] \mathbf{e}_l. \quad (4.20)$$

Nos pontos da grade obtemos que

$$\begin{cases} B_{i,j}^{k,l}(t_{i,n}) = \delta_{k1} \delta_{jn}, \\ \dot{B}_{i,j}^{k,l}(t_{i,n}) = \delta_{k2} \delta_{jn}, \\ \dot{B}_{i,j}^{k,l}(t_{i,n}) = \text{sgn}(t_i - t_{i,n}) \delta_{k3} \delta_{jn}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Assim, para $l = \{1,2,3\}$, $k = \{1,2,3\}$ e usando a notação $\mathbf{B}_{i,j}^{k,l}(t_i) = B_{i,j}^{k,l}(t_i) \mathbf{e}_l$, as variações

$$\begin{cases} \mathbf{b}_i^h(t_i) = \delta \mathbf{x}_i^h(t_i) = \delta \mathbf{x}_{i,p}^h(t_i) + \delta \mathbf{x}_{i,v}^h(t_i) + \delta \mathbf{x}_{i,s}^h(t_i), \\ \dot{\mathbf{b}}_i^h(t_i) = \delta \dot{\mathbf{x}}_i^h(t_i) = \delta \dot{\mathbf{x}}_{i,p}^h(t_i) + \delta \dot{\mathbf{x}}_{i,v}^h(t_i) + \delta \dot{\mathbf{x}}_{i,s}^h(t_i). \end{cases} \quad (4.22)$$

ficam

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{i,j}^{k,l} = (0, \mathbf{B}_{i,j}^{k,l}(t_i)), \\ \dot{\mathbf{b}}_{i,j}^{k,l} = (0, \dot{\mathbf{B}}_{i,j}^{k,l}(t_i)). \end{cases} \quad (4.23)$$

Com isso, a condição de ponto crítico (4.17) fornece que:

$$\begin{cases} I_{1,j}^{k,l} := \sum_{\mu=1}^{n_1} \int_{t_{\mu-1}^{1+}}^{t_{\mu}^{1-}} [\langle \mathbf{G}_1 | (0, \mathbf{B}_{1,j}^{k,l}(t_1)) \rangle + \langle \mathbf{H}_1 | (0, \dot{\mathbf{B}}_{1,j}^{k,l}(t_1)) \rangle] dt_1 = 0, \\ I_{2,j}^{k,l} := \sum_{\mu=1}^{n_2} \int_{t_{\mu-1}^{2+}}^{t_{\mu}^{2-}} [\langle \mathbf{G}_2 | (0, \mathbf{B}_{2,j}^{k,l}(t_2)) \rangle + \langle \mathbf{H}_2 | (0, \dot{\mathbf{B}}_{2,j}^{k,l}(t_2)) \rangle] dt_2 = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

cujas soluções fornecem os valores dos parâmetros nodais $x_{i,j}^{h,l}(t_i)$, $v_{i,j}^{h,l}(t_i)$ e $s_{i,j}^{h,l}(t_i)$ para $i = \{1,2\}$, $j = \{0,1, \dots, N_i\}$ e $l = \{1,2,3\}$. Definindo ainda

$$F_1 := \langle \mathbf{G}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{H}_1 | \dot{\mathbf{b}}_1 \rangle, \quad F_2 := \langle \mathbf{G}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle + \langle \mathbf{H}_2 | \dot{\mathbf{b}}_2 \rangle. \quad (4.25)$$

e observando as dependências de variáveis de $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{H}_i$

$$\begin{cases} G_1 = G_1(t_1; \mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_{2-}, \dot{\mathbf{x}}_{2-}, \ddot{\mathbf{x}}_{2-}, \mathbf{x}_{2+}, \dot{\mathbf{x}}_{2+}, \ddot{\mathbf{x}}_{2+}), \\ H_1 = H_1(t_1; \mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_{2-}, \dot{\mathbf{x}}_{2-}, \mathbf{x}_{2+}, \dot{\mathbf{x}}_{2+}), \\ G_2 = G_2(t_2; \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_{1-}, \dot{\mathbf{x}}_{1-}, \ddot{\mathbf{x}}_{1-}, \mathbf{x}_{1+}, \dot{\mathbf{x}}_{1+}, \ddot{\mathbf{x}}_{1+}), \\ H_2 = H_2(t_2; \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_{1-}, \dot{\mathbf{x}}_{1-}, \mathbf{x}_{1+}, \dot{\mathbf{x}}_{1+}), \end{cases} \quad (4.26)$$

reescrevemos o gradiente fraco como

$$\begin{cases} I_{1,j}^{k,l} = \sum_{\mu=1}^{n_1} \int_{t_{\mu-1}^{1+}}^{t_{\mu}^{1-}} F_{1,j}^{k,l}(t_1; \mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_{2-}, \dot{\mathbf{x}}_{2-}, \ddot{\mathbf{x}}_{2-}, \mathbf{x}_{2+}, \dot{\mathbf{x}}_{2+}, \ddot{\mathbf{x}}_{2+}) dt_1 = 0, \\ I_{2,j}^{k,l} = \sum_{\mu=1}^{n_2} \int_{t_{\mu-1}^{2+}}^{t_{\mu}^{2-}} F_{2,j}^{k,l}(t_2; \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_{1-}, \dot{\mathbf{x}}_{1-}, \ddot{\mathbf{x}}_{1-}, \mathbf{x}_{1+}, \dot{\mathbf{x}}_{1+}, \ddot{\mathbf{x}}_{1+}) dt_2 = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Essa forma de escrever o gradiente fraco (4.27) será útil a seguir, quando mostrarmos como resolvê-lo usando o método de Newton e o método do declive máximo. De forma mais compacta, podemos impor que cada componente independente do gradiente fraco seja nula na forma

$$\delta S_{i,n}^{k,l} := \sum_{\mu=1}^{n_i} \int_{t_{\mu-1}^{i+}}^{t_{\mu}^{i-}} [\langle \mathbf{G}_i | (0, \mathbf{B}_{i,n}^{k,l}(t_i)) \rangle + \langle \mathbf{H}_i | (0, \dot{\mathbf{B}}_{i,n}^{k,l}(t_i)) \rangle] dt_i = 0, \quad (4.28)$$

onde o índice $i = \{1, 2\}$ se refere à partícula, $n = \{0, 1, \dots, N_i\}$ ao elemento finito, $k = \{1, 2, 3\}$ ao tipo de coeficiente da Galeriana, e $l = \{1, 2, 3\}$ à componente espacial dos parâmetros nodais $x_{i,n}^{h,l}(t_i)$, $v_{i,n}^{h,l}(t_i)$ e $s_{i,n}^{h,l}(t_i)$. Com os extremos dos intervalos de integração dados por $t_1^I = t_{O_A}$, $t_1^F = t_{L-}$ e $t_2^I = t_{O+}$, $t_2^F = t_{L_B}$.

Esse método dos elementos finitos também é usado para obter soluções aproximadas para problemas de minimização de funcionais^[67]. Aqui, a aplicação do método dos elementos finitos resume-se em minimizarmos a ação em relação aos parâmetros nodais da série Galeriana $x_{i,n}^{h,l}(t_i)$, $v_{i,n}^{h,l}(t_i)$ e $s_{i,n}^{h,l}(t_i)$. Para isso, vamos resolver numericamente a condição de ponto crítico da ação dada pelo sistema de equações (4.28), e dada como função dessas variáveis da série Galeriana (4.20). A condição de ponto crítico, dada por (4.28), é formada por integrais de equações não lineares com retardo misto do tipo neutro e dependente do estado, e para procurar as soluções desse sistema de equações vamos usar dois métodos numéricos, o Método de Newton e o Método do Declive Máximo^[63, 64]. Na Seção 4.2 veremos como esses dois métodos podem ser usados em conjunto para procurar soluções que minimizam a ação de Fokker.

Primeiro, vamos aplicar o Método de Newton. No sistema (4.28) a ordem das equações é arbitrária, mas é conveniente adotar uma sequência tal que a matriz Jacobiana desse sistema, que é uma matriz esparsa, seja uma matriz de banda. Aqui, como exemplo, vamos variar l , k e j para cada $\{I_{1,j}^{k,l}, I_{2,j}^{k,l}\}$, respectivamente. Assim, para o sistema

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) = (I_{1,j}^{k,l}(\mathbf{X}_k), \dots, I_{2,j}^{k,l}(\mathbf{X}_k))^T = \mathbf{0}, \quad (4.29)$$

onde

$$\mathbf{X}_k = (\mathbf{X}_{1,1}^h, \dots, \mathbf{X}_{1,N_1}^h, \mathbf{X}_{2,1}^h, \dots, \mathbf{X}_{2,N_2}^h), \quad (4.30)$$

sendo que

$$\mathbf{X}_{i,j}^h = (x_{i,j}^{h,1}, x_{i,j}^{h,2}, x_{i,j}^{h,3}, v_{i,j}^{h,1}, v_{i,j}^{h,2}, v_{i,j}^{h,3}, s_{i,j}^{h,1}, s_{i,j}^{h,2}, s_{i,j}^{h,3}), \quad (4.31)$$

o método de Newton fica

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \mathbb{H}^{-1}(\mathbf{X}_k) \mathbf{F}(\mathbf{X}_k), \quad \text{para } k \geq 0. \quad (4.32)$$

Para um chute inicial $\mathbf{X}_0$ próximo da solução, espera-se que a convergência desse mapa seja quadrática. Uma vez obtida a solução $\mathbf{X}$ que contém os termos da série Galeriana, podemos calcular as trajetórias $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ das partículas que minimizam o funcional em questão.

Os $(9N_1 + 9N_2 + 12)^2$ termos da matriz Jacobiana do gradiente, que também é a matriz Hessiana⁽⁴⁾ do funcional, e por isso a denotamos como $\mathbb{H}$, serão dados por:

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1,0}^{1,0} & \mathbf{Y}_{1,1}^{1,0} & \cdots & \mathbf{Y}_{1,N_1}^{1,0} & \mathbf{Y}_{2,0}^{1,0} & \mathbf{Y}_{2,1}^{1,0} & \cdots & \mathbf{Y}_{2,N_2}^{1,0} \\ \mathbf{Y}_{1,0}^{1,1} & \mathbf{Y}_{1,1}^{1,1} & \cdots & \mathbf{Y}_{1,N_1}^{1,1} & \mathbf{Y}_{2,0}^{1,1} & \mathbf{Y}_{2,1}^{1,1} & \cdots & \mathbf{Y}_{2,N_2}^{1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{1,0}^{1,N_1} & \mathbf{Y}_{1,1}^{1,N_1} & \cdots & \mathbf{Y}_{1,N_1}^{1,N_1} & \mathbf{Y}_{2,0}^{1,N_1} & \mathbf{Y}_{2,1}^{1,N_1} & \cdots & \mathbf{Y}_{2,N_2}^{1,N_1} \\ \mathbf{Y}_{1,0}^{2,0} & \mathbf{Y}_{1,1}^{2,0} & \cdots & \mathbf{Y}_{1,N_1}^{2,0} & \mathbf{Y}_{2,0}^{2,0} & \mathbf{Y}_{2,1}^{2,0} & \cdots & \mathbf{Y}_{2,N_2}^{2,0} \\ \mathbf{Y}_{1,0}^{2,1} & \mathbf{Y}_{1,1}^{2,1} & \cdots & \mathbf{Y}_{1,N_1}^{2,1} & \mathbf{Y}_{2,0}^{2,1} & \mathbf{Y}_{2,1}^{2,1} & \cdots & \mathbf{Y}_{2,N_2}^{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{1,0}^{2,N_2} & \mathbf{Y}_{1,1}^{2,N_2} & \cdots & \mathbf{Y}_{1,N_1}^{2,N_2} & \mathbf{Y}_{2,0}^{2,N_2} & \mathbf{Y}_{2,1}^{2,N_2} & \cdots & \mathbf{Y}_{2,N_2}^{2,N_2} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

com

⁽⁴⁾Dada uma função $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz Hessiana de F é dado por $\mathbb{H}_{ij} = \partial^2 F / \partial x_i \partial x_j$, onde $i, j = 1, 2, \dots, m$.

$$\mathbf{Y}_{p,q}^{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{p,q}^{1,1,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{1,2,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{1,3,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{2,1,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{2,2,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{2,3,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{3,1,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{3,2,i,j} \\ \mathbf{W}_{p,q}^{3,3,i,j} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

e

$$\mathbf{W}_{p,q}^{k,l,i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial x_{p,q}^{h,1}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial x_{p,q}^{h,2}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial x_{p,q}^{h,3}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial v_{p,q}^{h,1}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial v_{p,q}^{h,2}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial v_{p,q}^{h,3}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial s_{p,q}^{h,1}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial s_{p,q}^{h,2}} & \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial s_{p,q}^{h,3}} \end{bmatrix}.$$

Poderíamos realizar o cálculo analítico dos termos dessa Jacobiana, no entanto, esses cálculos são muitos extensos, demorados e envolvem um grande risco de cometermos erros. Por isso, vamos calcular as derivadas parciais do tipo

$$\frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial x_{p,q}^{h,1}}, \quad \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial v_{p,q}^{h,1}}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}_{i,j}^{h,l}}{\partial s_{m,n}^{h,q}}, \quad (4.35)$$

numericamente, como veremos em detalhes na Seção 4.2.

Por fim, vamos aplicar o método do declive máximo no funcional (4.1) escrito como função dos coeficientes da série Galeriana (4.20). Considere o funcional $S(\mathbf{X}_k)$, calculado no ponto

$$\mathbf{X}_k = (\mathbf{X}_{1,1}^h, \dots, \mathbf{X}_{1,N_1}^h, \mathbf{X}_{2,1}^h, \dots, \mathbf{X}_{2,N_2}^h), \quad (4.36)$$

sendo que

$$\mathbf{X}_{i,j}^h = (x_{i,j}^{h,1}, x_{i,j}^{h,2}, x_{i,j}^{h,3}, v_{i,j}^{h,1}, v_{i,j}^{h,2}, v_{i,j}^{h,3}, s_{i,j}^{h,1}, s_{i,j}^{h,2}, s_{i,j}^{h,3}), \quad (4.37)$$

e o gradiente fraco, construído variando l , k e j para cada $\{I_{1,j}^{k,l}, I_{2,j}^{k,l}\}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) = (I_{1,j}^{k,l}(\mathbf{X}_k), \dots, I_{2,j}^{k,l}(\mathbf{X}_k))^T. \quad (4.38)$$

Essencialmente, o que o método do declive máximo faz é, dada uma aproximação inicial $S(\mathbf{X}_0)$, caminha-se uma distância adequada na direção oposta ao gradiente $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ do funcional

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 - \alpha \mathbf{F}(\mathbf{X}_0), \quad (4.39)$$

assim, no n -ésimo passo temos

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \alpha \mathbf{F}(\mathbf{X}_n), \quad \text{para } n \geq 0. \quad (4.40)$$

Para um chute inicial $\mathbf{X}_0$ próximo da solução, espera-se que a convergência desse mapa seja linear. Uma vez obtida a solução $\mathbf{X}$ que contém os parâmetros nodais da Galeriana, podemos calcular as trajetórias $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ das partículas que minimizam o funcional em questão. Um dos problemas que surgem nesse método, é como estimar um valor para α que não seja muito pequeno quando o gradiente é alto, e muito grande quando o gradiente é pequeno. Existem algumas maneiras de resolver esse problema, como proposto no algoritmo do método do declive máximo na Referência^[63], a Regra de Armijo ou o Teste de Goldstein^[69]. No entanto, ainda temos que nos precaver para que mesmo com essas regras e testes o método dê um incremento nos parâmetros da série Galeriana que não gere um trajetória superluminal. Para evitar trajetórias superluminais, foi desenvolvida uma técnica para calibrar o passo do método do declive máximo, que descrevemos em detalhes na Seção 4.2.

4.2. Minimizador Numérico do Funcional

Nesta seção descrevemos os dois métodos numéricos desenvolvidos para encontrar soluções para o problema eletromagnético de dois corpos com fronteiras genéricas. O primeiro usa o método dos elementos finitos associado com o método de Newton para buscar soluções que anulam o gradiente fraco (4.27). O segundo usa o método do declive máximo, com passos na direção contrária do gradiente fraco, para encontrar as soluções que minimizam o funcional de ação (4.1). Nesses dois métodos as trajetórias são aproximadas para um espaço de dimensão finita gerado por uma Galeriana que suporta velocidades descontínuas.

O método de Newton busca por soluções que anulam o gradiente fraco do funcional para um dado erro estabelecido e, a priori, tem uma convergência quadrática nas proximidades do ponto de mínimo. No entanto, esse método não garante que a trajetória encontrada seja um ponto de mínimo, de inflexão ou de máximo. Na verdade, esse método não garante que a trajetória encontrada seja uma solução das equações de Wheeler-Feynman na forma fraca, pois o fato do gradiente fraco ser menor que o erro estipulado, ou até mesmo menor que o erro da máquina, não garante que ele seja exatamente nulo, como ocorre sobre os pontos que satisfazem a condição de ponto crítico. Nesse caso, para garantir que o ponto encontrado seja um mínimo, a Hessiana deve ser positiva definida. Já o método do declive máximo busca soluções que minimizam a ação de Fokker, para um erro estipulado, garantindo que a solução encontrada minimize a ação. Entretanto, esse método, a priori, tem uma convergência linear na vizinhança do ponto de mínimo do funcional.

Tendo em vista os problemas e virtudes de cada um desses métodos, em princípio procuramos usar o método de Newton e o método do declive máximo em conjunto para buscar soluções que minimizam o funcional de ação, e com um tempo computacional razoavelmente menor, tal como no método de Levenberg-Marquardt^[70]. Essencialmente, o método Levenberg-Marquardt inicia a busca pela solução usando o método do declive máximo, e quando se aproxima de um mínimo local e detecta uma convergência linear para a solução, passa a usar o método de

Newton, que tem uma convergência quadrática.

Iniciamos o método numérico com o método de Newton fornecendo um chute inicial para as soluções, que também denominamos apenas como sementes das trajetórias, em conjunto com os segmentos de fronteira, todos interpolados usando a série Galeriana

$$\mathbf{x}_i^h(t_i) = \sum_{j=0}^{N_i+1} \sum_{l=1}^3 [x_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{1,l}(t_i) + v_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{2,l}(t_i) + s_{i,j}^{h,l} B_{i,j}^{3,l}(t_i)] \mathbf{e}_l, \quad (4.41)$$

onde os termos $x_{i,0}^{h,l}$ e $x_{i,N_i}^{h,l}$, que são constantes fixadas pelas condições de fronteira, e $s_{i,0}^{h,l} = s_{i,N_i}^{h,l} = 0$, são apenas para escrever a Galeriana de forma mais compacta. As funções de forma $B_{i,j}^{1,l}(t)$, $B_{i,j}^{2,l}(t)$, e $B_{i,j}^{3,l}(t)$ fornecem, respectivamente, o deslocamento da componente l da posição, da velocidade, e do salto na velocidade da partícula i para $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$. Esses deslocamentos são unitários para $t = t_j \equiv (t_{j-1} + t_{j+1})/2$, e nulos para $t = t_{j-1}$ e $t = t_{j+1}$. Calculamos essas funções de forma e, usando a série Galeriana, deduzimos as funções que interpolam a posição, a velocidade e a aceleração de cada partícula para os instantes de tempo $t \in [-t_{j-1}, t_{j+1}]$.

Nos gráficos da Figura 4.1 exibimos o comportamento da k -ésima componente das funções de forma $B_{i,k}$ para o caso $i = 0$ e suas respectivas derivadas. Nessa figura, usamos uma notação mais simples para as funções de forma, sendo que $B_i^p(t)$ é a função de forma que fornece o deslocamento da posição, $B_i^v(t)$ fornece o deslocamento da velocidade, e $B_i^s(t)$ fornece os saltos na velocidade para $t_{i-1} \leq t \leq t_{i+1}$. Esses deslocamentos são unitários para $t = t_i \equiv (t_{i-1} + t_{i+1})/2$, e nulos para $t = t_{i-1}$ e $t = t_{i+1}$. Algebricamente, cada componente dessas funções de forma e suas respectivas derivadas são dadas por:

$$B_i^p(t) = \begin{cases} B_i^{p,-}(t) = -2(t - t_i)^3 - 3(t - t_i)^2 + 1 & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ B_i^{p,+}(t) = 2(t - t_i)^3 - 3(t - t_i)^2 + 1 & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\dot{B}_i^p(t) = \begin{cases} \dot{B}_i^{p,-}(t) = -6(t - t_i + 1)(t - t_i) & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ \dot{B}_i^{p,+}(t) = 6(t - t_i - 1)(t - t_i) & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\ddot{B}_i^p(t) = \begin{cases} \ddot{B}_i^{p,-}(t) = -12(t - t_i) - 6 & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ \ddot{B}_i^{p,+}(t) = 12(t - t_i) - 6 & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.44)$$

e

$$B_i^v(t) = \begin{cases} B_i^{v,-}(t) = (t - t_i + 1)^2(t - t_i) & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ B_i^{v,+}(t) = (t - t_i - 1)^2(t - t_i) & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\dot{B}_i^v(t) = \begin{cases} \dot{B}_i^{v,-}(t) = (t - t_i + 1)(3t - 3t_i + 1) & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ \dot{B}_i^{v,+}(t) = (t - t_i - 1)(3t - 3t_i - 1) & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\ddot{B}_i^v(t) = \begin{cases} \ddot{B}_i^{v,-}(t) = 6(t - t_i) + 4 & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ \ddot{B}_i^{v,+}(t) = 6(t - t_i) - 4 & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.47)$$

e

$$B_i^s(t) = \begin{cases} B_i^{s,-}(t) = -(t - t_i + 1)^2(t - t_i) & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ B_i^{s,+}(t) = (t - t_i - 1)^2(t - t_i) & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\dot{B}_i^s(t) = \begin{cases} \dot{B}_i^{s,-}(t) = -(t - t_i + 1)(3t - 3t_i + 1) & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ \dot{B}_i^{s,+}(t) = (t - t_i - 1)(3t - 3t_i - 1) & \text{para } t_i < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\ddot{B}_i^s(t) = \begin{cases} \ddot{B}_i^{s,-}(t) = -6(t - t_i) - 4 & \text{para } t_{i-1} < t < t_i, \\ \ddot{B}_i^{s,+}(t) = 6(t - t_i) - 4 & \text{para } t_i < t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (4.50)$$

Figura 4.1.: Funções de forma descritas nas equações (4.42) a (4.50) para $i = 0$, $t_0 = 0$ e $t \in [-1, 1]$.

No método dos elementos finitos as funções de forma, $B_i^p(t)$, $B_i^v(t)$, $B_i^s(t)$, devem ser linearmente independentes. Essas funções de forma, dadas pelas equações (4.42) a (4.50), satisfazem esse requisito. A independência linear resulta do fato da igualdade

$$\alpha_1 B_i^p(t) + \alpha_2 B_i^v(t) + \alpha_3 B_i^s(t) = 0, \quad (4.51)$$

ocorrer somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. De fato, impondo a condição (4.51) para $t_{i-1} < t < t_i$ fornece que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, e impondo condição (4.51) para $t_i < t < t_{i+1}$ leva a $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = -\alpha_3 = 0$, resultando que a igualdade (4.51) é válida apenas para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

No método numérico com o método de Newton usamos a Regra de Simpson composta para

calcular as integrais do funcional e do gradiente fraco. Para calcular um valor aproximado para o passo de integração que busca minimizar o erro de integração, usamos uma comparação entre a regra de Simpson composta e a regra do trapézio composta com passos múltiplos, da mesma forma que na extrapolação de Richardson^[63]. Mais precisamente, dado um passo de integração h_i , sabemos que o erro numérico de integração para a regra de Simpson composta, S_h , é proporcional a h_i^4 e que o erro para a regra do trapézio composta, T_h , é proporcional a h_i^2 , logo, a diferença entre elas será proporcional a h_i^2

$$\epsilon_i := S_h - T_h =: kh_i^2. \quad (4.52)$$

Assim, uma vez estimado o erro de integração $\epsilon_i = kh^2$, o erro desejado $\epsilon_{st}^* = kh^{*2}$ será dado por

$$h^* = \sqrt{\frac{\epsilon_{st}^*}{\epsilon_{st}}} h. \quad (4.53)$$

Além disso, o processo de integração dos termos do gradiente fraco (4.28) envolve outros erros numéricos. Veja que os termos $\mathbf{G}_i$ e $\mathbf{H}_i$ do gradiente fraco, dados por (4.26), exigem que para cada instante t_i sejam avaliadas as variáveis $\{\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{x}_{j-}, \dot{\mathbf{x}}_{j-}, \ddot{\mathbf{x}}_{j-}, \mathbf{x}_{j+}, \dot{\mathbf{x}}_{j+}, \ddot{\mathbf{x}}_{j+}\}$, e para isso precisamos encontrar os pontos $\mathbf{x}_{j\pm}$ que estão em cone de luz com $\mathbf{x}_i$. Os pontos $\mathbf{x}_{j\pm}$ são encontrados resolvendo a condição de cone de luz usando a função `fzero` do MATLAB e o cálculo das variáveis restantes é feito por interpolação, usando a série Galeriana (4.41).

Para calcular as derivadas parciais do gradiente usadas na construção da matriz Hessiana, equação (4.35), usamos a fórmula de três pontos, também conhecida como diferença centrada, com incremento de derivação h_d

$$\frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial x_{p,q}^{r,s}} = \frac{1}{2h_d^l} [I_{i,j}^{k,l}(\dots, x_{p,q}^{r,s} + h_d^l, \dots) - I_{i,j}^{k,l}(\dots, x_{p,q}^{r,s} - h_d^l, \dots)]. \quad (4.54)$$

Uma vez que é inviável calcular o valor ótimo do incremento de derivação h_d^l , que minimiza o erro de derivação usando derivadas superiores, desenvolvemos uma técnica para estimar um valor para h_d^l que busca minimizar o erro de derivação. Essa técnica resume-se em definir grades de valores para os incrementos de derivação da posição, h_d^1 , velocidade, h_d^2 , e salto na velocidade, h_d^3 , examinar a região de convergência da matriz Hessiana do método de Newton $\mathbb{H}$, dada por (4.33), em relação a ela mesma, e refinar a grade nessa região. Para cada grade $[h_{d,1}^l, h_{d,2}^l, \dots, h_{d,n}^l]$, com $l = 1, 2, 3$, medimos a convergência da Hessiana em relação a ela mesma usando a medida

$$d_{\mathbb{H}_n} = \|\mathbb{H}_{h_{d,n+1}^l} - \mathbb{H}_{h_{d,n}^l}\|, \quad (4.55)$$

para três normas matriciais distintas, $d_{\mathbb{H}_n}^1 = \|\mathbb{H}_{h_{d,n+1}^l} - \mathbb{H}_{h_{d,n}^l}\|_1$, $d_{\mathbb{H}_n}^2 = \|\mathbb{H}_{h_{d,n+1}^l} - \mathbb{H}_{h_{d,n}^l}\|_2$ e $d_{\mathbb{H}_n}^\infty = \|\mathbb{H}_{h_{d,n+1}^l} - \mathbb{H}_{h_{d,n}^l}\|_\infty$ ⁽⁵⁾. Na Seção 4.3 exibimos um experimento numérico no qual obtivemos um valor mínimo de $d_{\mathbb{H}_n}$ para essas três normas.

⁽⁵⁾Dada uma matriz $\mathbb{H}_{n \times n}$, e seus elementos H_{ij} , com $i, j = 1, 2, \dots, n$, usamos as seguintes definições para as normas matriciais $\|\mathbb{H}\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |H_{ij}|$, $\|\mathbb{H}\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (H_{ij})^2}$ e $\|\mathbb{H}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |H_{ij}|$.

Vimos na Seção 4.1 que a Hessiana é simétrica e tem dimensão $N_{Hess} = (9N_a + 9N_b + 12)$. O cálculo da matriz Hessiana consome um tempo computacional alto em relação aos demais cálculos desse método numérico. Por isso, é importante saber quais dos $(N_{Hess})^2$ termos da matriz Hessiana são necessariamente nulos. Para saber quais termos da matriz Hessiana serão nulos, primeiro note que

$$H_{p,q,r,s}^{i,j,k,l} = \frac{\partial I_{i,j}^{k,l}}{\partial x_{p,q}^{r,s}}, \quad (4.56)$$

onde os índices $i, p = \{1, 2\}$ se referem às partículas, $j, q = \{0, 1, \dots, N_i\}$ aos elementos finitos, $k, r = \{1, 2, 3\}$ aos tipos de coeficiente de posição, velocidade e salto de velocidade da Galeriana, e $l, s = \{1, 2, 3\}$ às componentes espaciais desses coeficientes: $x_{i,n}^{h,l}(t_i)$, $v_{i,n}^{h,l}(t_i)$ e $s_{i,n}^{h,l}(t_i)$. O cálculo de cada termo da matriz Hessiana pode ser visto do seguinte modo. Considere que, primeiro é realizada uma variação em relação a $x_{i,j}^{h,l}$ no funcional, em seguida é efetuada uma perturbação, dada pela derivada em relação a $x_{p,q}^{h,k}$. A primeira variação em relação ao termo $x_{i,j}^{h,l}$ da série Galeriana da trajetória da partícula i , provoca uma alteração na sua vizinhança, o intervalo entre os pontos $x_{i,j-1}^{h,l}$ e $x_{i,j+1}^{h,l}$ para $l = \{1, 2, 3\}$. Depois, a derivada pode ser vista como uma variação na vizinhança do ponto $x_{p,q}^{h,k}$, o intervalo entre os pontos $x_{p,q-1}^{h,k}$ e $x_{p,q+1}^{h,k}$ para $k = \{1, 2, 3\}$, referente à Galeriana da trajetória da partícula p . Caso $i = p$, apenas os termos com $q = \{j-1, j, j+1\}$ e $l, k = \{1, 2, 3\}$ tem a possibilidade de não serem nulos. Agora, para $i \neq p$ apenas nos casos em que as variações do ponto $x_{p,q}^{h,k}$ estão no intervalo delimitado pelos pontos que estão em cone de luz, futuro ou passado, com o intervalo $x_{i,j-1}^{h,l}$ e $x_{i,j+1}^{h,l}$, e nos casos em que as variações do ponto $x_{i,j}^{h,l}$ estão no intervalo delimitado pelos pontos que estão em cone de luz, futuro ou passado, com o intervalo $x_{p,q-1}^{h,k}$ e $x_{p,q+1}^{h,k}$. Os termos restantes da matriz Hessiana serão necessariamente nulos.

Além disso, dado que a matriz Hessiana do método de Newton $\mathbb{H}$, dada por (4.33), deve ser simétrica, com o intuito de melhorar a precisão numérica do método de Newton, empregamos nele uma matriz Hessiana simetrizada $\bar{\mathbb{H}}$, dada pela semi-soma da matriz Hessiana $\mathbb{H}$ com sua transposta $\mathbb{H}^T$

$$\bar{\mathbb{H}} = \frac{\mathbb{H} + \mathbb{H}^T}{2}. \quad (4.57)$$

Cada vez que executamos um passo no método de Newton, verificamos se os incrementos feitos nos parâmetros da posição, velocidade e salto de velocidade da Galeriana não são grandes o suficiente para que ocorram trajetórias superluminais. Para evitar as trajetórias superluminais, a cada passo do método de Newton, regularizamos as velocidades nos pontos da grade, usando uma velocidade normalizada e as velocidades intermediárias. Inicialmente, a regularização da velocidade é feita da seguinte forma - nesse momento usaremos uma notação diferente da usada acima e mais simplificada, válida para cada componente da Galeriana e para cada partícula. Dadas as posições a_j , velocidades v_j e saltos na velocidade s_j da semente do problema, para $j = 0, \dots, N+1$, calcula-se as velocidades intermediárias v_{nj+1} , as somas z_j e as diferenças z_{j+1} , para $j = 0, \dots, N$, por meio de:

$$z_j = v_j + s_j, \quad d_{j+1} = v_{j+1} - s_{j+1}, \quad v_{j+1} = \frac{3}{2h_{j+1}}(a_{j+1} - a_j) - \frac{1}{4}(z_j + d_{j+1}). \quad (4.58)$$

Com isso, podemos calcular as velocidade normalizadas

$$v_{\tau,j} \equiv \frac{v_j}{\sqrt{1 - |v_j|^2}}, \quad z_{\tau,j} \equiv \frac{z_j}{\sqrt{1 - |z_j|^2}}, \quad d_{\tau,j} \equiv \frac{d_j}{\sqrt{1 - |d_j|^2}}, \quad (4.59)$$

Em seguida, com incrementos fornecidos pelo método de Newton Δa_j , Δa_{j+1} , Δz_j e Δd_{j+1} , obtém-se as variações das velocidades intermediárias

$$\Delta v_{j+1} \equiv \frac{3}{2h_{j+1}}(\Delta a_{j+1} - \Delta a_j) - \frac{1}{4}(\Delta z_j + \Delta d_{j+1}), \quad (4.60)$$

Em posse desses dados, calcula-se as variações das velocidades normalizadas

$$\Delta v_{\tau,j} \equiv \frac{\Delta v_j}{\sqrt{1 - |v_j|^2}} + \frac{(v_j \cdot \Delta v_j)v_j}{(1 - |v_j|^2)^{3/2}}, \quad (4.61)$$

$$\Delta z_{\tau,j} \equiv \frac{\Delta z_j}{\sqrt{1 - |z_j|^2}} + \frac{(z_j \cdot \Delta z_j)z_j}{(1 - |z_j|^2)^{3/2}}, \quad (4.62)$$

$$\Delta d_{\tau,j} \equiv \frac{\Delta d_j}{\sqrt{1 - |d_j|^2}} + \frac{(d_j \cdot \Delta d_j)d_j}{(1 - |d_j|^2)^{3/2}}, \quad (4.63)$$

logo após, faz-se a atualização dessas velocidades usando as variações obtidas anteriormente:

$$v_{\tau,j}^* \equiv v_{\tau,j} - \Delta v_{\tau,j}, \quad d_{\tau,j}^* \equiv d_{\tau,j} - \Delta d_{\tau,j}, \quad d_{\tau,j}^* \equiv d_{\tau,j} - \Delta d_{\tau,j}. \quad (4.64)$$

Por fim, calcula-se as novas velocidades

$$v_j^* \equiv \frac{v_{\tau,j}^*}{\sqrt{1 + |v_{\tau,j}^*|^2}} < 1, \quad z_j^* \equiv \frac{z_{\tau,j}^*}{\sqrt{1 + |z_{\tau,j}^*|^2}} < 1, \quad d_j^* \equiv \frac{d_{\tau,j}^*}{\sqrt{1 + |d_{\tau,j}^*|^2}} < 1, \quad (4.65)$$

e os termos de posições da série Galeriana

$$a_{j+1}^* = \frac{2h_{j+1}}{3}[v_{j+1}^* + \frac{1}{4}(z_j^* + d_{j+1}^*)] + a_j^* \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.66)$$

e em seguida, retomamos os termos de velocidades e saltos da Galeriana, atualizados por meio de

$$v_j^* = \frac{z_j^* + d_j^*}{2}, \quad s_j^* = \frac{z_j^* - d_j^*}{2}, \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N + 1. \quad (4.67)$$

Note que para $j = 0$ e $j = N + 1$, atualizamos apenas v_0 e v_{N+1} , já que a_0 e a_{N+1} são fixos e $s_0 = s_{N+1} = 0$. Com isso, garantimos que o passo do método de Newton não gere trajetórias superluminais.

O método numérico com o método do declive máximo calcula o gradiente fraco e outras quantidades necessárias, exatamente como no método anteriormente descrito. Além disso, desenvolvemos uma técnica para calibrar o tamanho do passo do método do declive máximo, para evitar que ocorram trajetórias superluminais. Essa técnica resume-se em criar uma grade para o parâmetro α , que determina o tamanho do passo no mapa

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \alpha \mathbf{F}(\mathbf{X}_n), \quad \text{para } n \geq 0, \quad (4.68)$$

descrito na Seção 4.1, e usar a função que interpola as velocidades, para calcular o valor máximo do módulo das velocidades em todos os intervalos de tempo, incluindo as velocidades à esquerda e à direita nos pontos da grade das trajetórias das partículas. Uma vez que foi escolhido um valor inicial para α e verificado que o passo gerado por ele não gera trajetórias superluminais, realizamos a busca linear da solução usando a equação (4.68), onde a cada passo $\mathbf{F}(\mathbf{X}_n)$ é atualizado.

Como foi dito temos como objetivo inicial construir um minimizador numérico que combina o método do declive máximo com o método de Newton, usando uma técnica similar ao método de Levenberg-Marquardt, para buscar soluções que minimizam o funcional de ação, e com um tempo computacional razoavelmente menor. Porém, como veremos na Seção 4.3, muitas vezes o método do declive máximo ou método de Newton encontram dificuldades e fazemos o uso deles separadamente. Independente do método numérico usado, o problema de fronteira a ser resolvido é colocado na seguinte forma. Primeiro, determinamos as condições de fronteira do problema de dois corpos definindo a história da carga 2, cujas extremidades L^- e L^+ estão em cone de luz com o ponto L_B e a história da carga 1, cujas extremidades O^- e O^+ estão em cone de luz com o ponto O_A . Em seguida, determinamos as sementes das trajetórias, que consistem no chute inicial para a trajetória da carga 1 e da carga 2. Lembrando que, para a semente da partícula 1 a posições são fixas nas extremidades O_A e L^- e as velocidades são livres, e para a semente da partícula 2 a posições são fixas nas extremidades O^+ e L_B e as velocidades são livres. Uma vez que o problema de fronteira está definido, tanto o minimizador numérico, quanto o método do declive máximo ou o método de Newton, buscam a cada passo uma melhor aproximação para as solução do problema de fronteira e usa essa aproximação como uma nova semente para o passo seguinte, até atingir o critério de parada estabelecido.

4.3. Experimentos Numéricos: Elementos Finitos

Nesta seção apresentamos e discutimos alguns resultados e experimentos numéricos obtidos empregando o método de Newton e o método do declive máximo separadamente, e usando o minimizador numérico que combina esses dois métodos. Todos esses métodos numéricos foram expostos na Seção 4.2. Iniciamos esta seção exibindo um teste de convergência para

uma norma do gradiente fraco (4.28). Depois, mostramos um teste de convergência dos erros relativos e absolutos da posição e velocidade para uma órbita de Schild. Por fim, expomos algumas simulações numéricas, incluindo um caso de fronteira mínima em que a solução tem velocidade descontínua e comparamos essa solução com a obtida pelo método numérico proposto no Capítulo 3.

Sabemos que as órbitas de Schild também são soluções do gradiente fraco (4.28). Isso pode ser verificado, observando primeiro que integrando os termos do gradiente fraco, postos na forma (2.17), resulta nos termos (2.20), que por sua vez são nulos se as equações (2.23) e (2.24) forem satisfeitas. E depois, observando que as órbitas de Schild são soluções das equações de Euler-Lagrange (2.23) e satisfazem condições de quina de Weierstrass-Erdmann (2.24), pois têm velocidades contínuas em todos os pontos. Para verificar a consistência do método numérico calculamos o valor do gradiente fraco, que é empregado tanto no método do declive máximo quanto no método de Newton, usando a norma do supremo⁽⁶⁾, dada por

$$\|\delta S\|_\infty = \max\{\|\delta S_{i,n}^{k,l}\|, \dots\}, \text{ para } i = 1, 2 \text{ } l, k = 1, 2, 3, \text{ e } n = 0, 1, \dots, N_i, \quad (4.69)$$

sobre órbitas de Schild com ângulos de retardo $\theta = 0,077$ e $0,77$, para massas $m_1 = m_2 = 1$ e para séries Galerbianas com os seguintes números de elementos finitos: $N = \{10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280\}$. Conforme exibimos na Tabela 4.1, tanto para o caso com $\theta = 0,077$, quanto para o caso com $\theta = 0,77$, o método numérico tende a anular o gradiente, com respeito a norma $\|\delta S\|_\infty$. Analisando, em escala logarítmica, a segunda coluna da Tabela 4.1, em que $\theta = 0,077$, como função da primeira coluna observamos que o erro tem uma escala com N^{-r} para N entre $N = 10$ e $N = 160$, e que $r = \log(1,80 \times 10^{-8}/3,97 \times 10^{-13})/\log(16) \approx 3,87$. Do mesmo modo, para $\theta = 0,77$, observamos que o erro tem uma escala com N^{-r} para N entre $N = 10$ e $N = 320$, e usando os dados da Tabela 4.1 obtivemos que $r = \log(1,47 \times 10^{-8}/2,27 \times 10^{-12})/\log(32) \approx 3,86$. Exibimos os valores da norma do gradiente para $N = 640$ e $N = 1280$ apenas para mostrar que séries Galerbianas com a dimensão $N = 640$, ou maior, passam a aumentar o erro numérico do método de Newton devido ao erro de truncamento, lembrando que todo método de integração tem uma saturação em seu refinamento e que a norma $\|\delta S\|_\infty$ é bastante sensível.

Quando colocamos os segmentos de órbitas de Schild, com θ menor ou aproximadamente igual $0,2$, como histórias das partículas no problema de fronteiras, e tomamos perturbações dessas órbitas circulares como sementes das trajetórias, observamos que o método numérico com o método de Newton fornece soluções aproximadamente iguais a essas órbitas de Schild. Fizemos um experimento para testar se, conforme refinamos a grade de pontos da semente das trajetórias, essas soluções fornecidas pelo método de Newton convergem de fato para essa órbita de Schild. Usamos como critério de parada para o método de Newton a condição $\|\delta S\|_\infty < 10^{-10}$. Para uma dada partícula, esse teste de convergência calcula os erros absoluto e relativo da solução obtida pelo método de Newton em relação à órbita de Schild, usando a

⁽⁶⁾Para o caso de um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, com n finito, a norma do supremo, denotada por $\|\cdot\|_\infty$, é definida como $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$.

N	$\theta = 0,077$	$\theta = 0,77$
10	$1,80 \times 10^{-08}$	$1,47 \times 10^{-06}$
20	$1,35 \times 10^{-09}$	$1,11 \times 10^{-07}$
40	$9,30 \times 10^{-11}$	$7,86 \times 10^{-09}$
80	$6,11 \times 10^{-12}$	$5,40 \times 10^{-10}$
160	$3,97 \times 10^{-13}$	$3,54 \times 10^{-11}$
320	$4,53 \times 10^{-14}$	$2,27 \times 10^{-12}$
640	$8,02 \times 10^{-14}$	$2,00 \times 10^{-13}$
1280	$1,70 \times 10^{-13}$	$3,68 \times 10^{-13}$

Tabela 4.1.: Valor inicial do gradiente fraco (4.28), usando a norma do supremo $\|\delta S\|$, dada por (4.69), sobre órbitas de Schild com $\theta = 0,077$ e $\theta = 0,77$ em função do número de elementos finitos da Galeriana. Para ambas as órbitas $m_1 = m_2 = 1$.

norma do supremo⁽⁷⁾:

$$\epsilon_{ap}^n = \sup \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^S\|, \quad \epsilon_{rp}^n = \sup \left\| \frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^S}{\mathbf{x}^S} \right\|, \quad (4.70)$$

e os erros absoluto e relativo da velocidade em relação à própria trajetória na norma $\mathbb{L}_\infty$:

$$\epsilon_{av}^n = \sup \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^S\|, \quad \epsilon_{rv}^n = \sup \left\| \frac{\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^S}{\mathbf{v}^S} \right\|. \quad (4.71)$$

Para o caso com $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $\theta = 0,1$ usamos o método de Newton para calcular as soluções numéricas com as seguintes dimensões para a série Galeriana da partícula 2: $N = [10, 20, 40, 80, 160, 320]$. Em seguida, interpolamos a solução analítica de Schild para esse caso, que denotamos por $\mathbf{x}^S$, $\mathbf{v}^S$, usando a série Galeriana (4.41) com uma grade 12800 pontos, 40 vezes maior do que série Galeriana com maior dimensão 320. Depois, interpolamos cada uma dessas soluções obtidas usando a série Galeriana com uma grade 12800, que geraram as 6 trajetórias $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_6]$ e suas velocidades $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_6]$. Na Tabela 4.2 exibimos os valores obtidos para os erros absolutos e relativos das posições e velocidades, dados pelas equações (4.70) e (4.71), usando a solução de Schild e as soluções interpoladas para $n = 1, 2, \dots, 6$. Analisando, em escala logarítmica, os erros absolutos e relativos da posição e da velocidade em função da dimensão N da série Galeriana, observamos que para dimensões entre $N = 10$ e $N = 160$ os erros têm uma escala com N dada por N^{-r} . Usando os dados da Tabela 4.2, obtivemos a taxa de convergência $r = \log(2,52 \times 10^{-5}/9,52 \times 10^{-8})/\log(16) \approx 2,01$ para o erro absoluto da posição, $r = \log(5,06 \times 10^{-7}/1,91 \times 10^{-9})/\log(16) \approx 2,01$ para

⁽⁷⁾Para o caso de uma função $\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ e n finito, definimos a norma do supremo por $\|\mathbf{f}\|_\infty := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$.

o erro relativo da posição, que $r = \log(5,42 \times 10^{-7}/3,52 \times 10^{-10})/\log(16) \approx 2,65$ para o erro absoluto da velocidade e que $r = \log(1,63 \times 10^{-5}/1,06 \times 10^{-8})/\log(16) \approx 2,65$ para o erro relativo da velocidade. Em geral, quando tomamos as histórias das partículas como segmentos de órbitas de Schild para ângulos de retardo $\theta \lesssim 0,2$ e colocamos trajetórias na vizinhança dessas órbitas circulares como semente para o problema, o método de Newton converge, aproximadamente com uma taxa de convergência quadrática, para a órbita de Schild correspondente, anulando o gradiente fraco com $\|\delta S\|_\infty < 10^{-10}$.

N	ϵ_{ap}^n	ϵ_{rp}^n	ϵ_{av}^n	ϵ_{rv}^n
10	$2,52 \times 10^{-05}$	$5,06 \times 10^{-07}$	$5,42 \times 10^{-07}$	$1,63 \times 10^{-05}$
20	$6,02 \times 10^{-06}$	$1,21 \times 10^{-07}$	$9,20 \times 10^{-08}$	$2,76 \times 10^{-06}$
40	$1,49 \times 10^{-06}$	$3,00 \times 10^{-08}$	$1,43 \times 10^{-08}$	$4,29 \times 10^{-07}$
80	$3,75 \times 10^{-07}$	$7,54 \times 10^{-09}$	$2,14 \times 10^{-09}$	$6,42 \times 10^{-08}$
160	$9,52 \times 10^{-08}$	$1,91 \times 10^{-09}$	$3,52 \times 10^{-10}$	$1,06 \times 10^{-08}$
320	$1,16 \times 10^{-08}$	$2,32 \times 10^{-10}$	$3,42 \times 10^{-11}$	$1,02 \times 10^{-09}$

Tabela 4.2.: Erros absolutos e relativos na posição e velocidade em função do número de elementos finitos N da série Galeriana para um experimento numérico com $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ e $\theta = 0,1$.

No experimento numérico exibido nas Figuras 4.2 a 4.8, usamos como semente trajetórias dadas pela órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$, para um caso em que o comprimento das trajetórias é cerca de 5 vezes o comprimento das histórias. Nessas figuras abaixo, exibimos as trajetórias das partículas, suas velocidades, suas acelerações, e as séries temporais para cada uma dessas variáveis, obtidas com o método numérico que usa o método de Newton. No quarto passo do método de Newton obtivemos que $\|\delta S\|_\infty = 3,0 \times 10^{-11}$, que o número de condicionamento da matriz Hessiana é dado por $\kappa(\mathbb{H}) = 3,7 \times 10^5$, que o maior autovalor é 19,2 e o menor $5,1 \times 10^{-5}$, indicando que a matriz Hessiana é positiva definida e que a solução encontrada é um ponto de mínimo do funcional (4.1). As soluções foram interpoladas usando a série Galeriana (4.41) que pode gerar velocidades e acelerações descontínuas, como pode ser visto nas funções de forma na Figura 4.1, mas nesse experimento essas descontinuidades não foram observadas, conforme podemos ver nas Figuras 4.5 a 4.8. Conforme explicamos na Seção 4.2, a medida (4.55), para estimar um valor para o incremento de derivação h_d^l , com $l = 1, 2, 3$, que busca minimizar o erro de derivação da matriz Hessiana do método de Newton $\mathbb{H}$, dada por (4.33). Com os parâmetros desse experimento usamos essa técnica para estimar o incremento de derivação da posição em $h_d^1 = 7 \times 10^{-5}$, o da velocidade em $h_d^2 = 7 \times 10^{-6}$, e do salto na velocidade em $h_d^3 = 7 \times 10^{-6}$.

Figura 4.2.: Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B .

Figura 4.3.: Posição da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 4.4.: Posição da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da posição de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

Figura 4.5.: Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 4.6.: Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

Figura 4.7.: Aceleração da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 4.8.: Aceleração da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da aceleração de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

No segundo experimento numérico, exibido nas Figuras 4.9 a 4.13, usamos condições de fronteira que correspondem a perturbações do tipo (3.71), com $\epsilon_i^z = 8$, $n_1 = n_2 = 1$, na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$, e usamos como semente trajetórias dadas pelas órbitas de Schild correspondentes. Nessas figuras abaixo, exibimos as trajetórias das partículas, suas velocidades, suas acelerações, e as séries temporais para cada uma dessas variáveis, obtidas com o minimizador numérico que usa o método de Newton. No décimo terceiro passo do método de Newton obtivemos que $\|\delta S\|_\infty = 1,1 \times 10^{-11}$, que o número de condicionamento da matriz Hessiana é dado por $\kappa(\mathbb{H}) = 1,7 \times 10^3$, que o maior autovalor encontrado é 2,7 e o menor $1,6 \times 10^{-3}$, indicando que a matriz Hessiana é positiva definida e que a solução encontrada é um ponto de mínimo do funcional (4.1). As soluções foram interpoladas usando a série Galeriana (4.41). Nas Figuras 4.10 e 4.12 podemos observar uma pequena descontinuidade nas componentes z das trajetórias de cada partícula. As regiões em que ocorrem essas descontinuidades foram ampliadas nas Figuras 4.11 e 4.13.

Figura 4.9.: Trajetórias das cargas para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. A trajetória da carga 1, na cor azul, inicia no ponto destacado em vermelho, O_A , e termina no ponto vermelho L^- , onde inicia a história da carga 1, em vermelho, que por sua vez termina no ponto L^+ . A história da carga 2, na cor vermelha, inicia no ponto destacado em vermelho, O^- , e termina no ponto vermelho O^+ , onde inicia a trajetória da carga 2, em verde, que por sua vez termina no ponto L_B .

Figura 4.10.: Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 4.11.: Velocidade da carga 1 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de L_A , o do centro à de L^- e o da direita à de L^+ .

Figura 4.12.: Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

Figura 4.13.: Velocidade da carga 2 para condições de fronteira dadas por uma perturbação na vizinhança da órbita de Schild com $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Para cada curva, o ponto vermelho à esquerda corresponde à componente da velocidade de O^- , o do centro à de O^+ e o da direita à de L_B .

Comparando as trajetórias obtidas nesse segundo experimento, com o método de Newton, com as trajetórias obtidas pelo método numérico do Capítulo 3, para as mesmas condições de fronteira e mesmos parâmetros, obtivemos um erro absoluto na posição de $\epsilon_{ap} = 2,26 \times 10^{-2}$, um erro relativo na posição de $\epsilon_{rp} = 9,22 \times 10^{-4}$, um erro absoluto na velocidade de $\epsilon_{av} = 5,70 \times 10^{-3}$, um erro relativo na velocidade de $\epsilon_{rv} = 5,67 \times 10^{-2}$. Fazendo essa mesma comparação de soluções para ter uma referência desses valores de erro, para os mesmos parâmetros $\theta = 0,2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$, mas com as histórias sem perturbação, obtivemos um erro absoluto na posição de $\epsilon_{ap} = 1,29 \times 10^{-4}$, um erro relativo na posição de $\epsilon_{rp} = 5,25 \times 10^{-6}$, um erro absoluto na velocidade de $\epsilon_{av} = 5,30 \times 10^{-6}$, um erro relativo na velocidade de $\epsilon_{rv} = 5,27 \times 10^{-5}$. Dessa forma, vemos que as diferenças entre as soluções obtidas pelo método de Newton e o método do Capítulo 3 são cerca de duas ordens de grandeza maiores para esse segundo experimento quando comparadas com as diferenças do experimento com histórias em órbitas de Schild, indicando que o método de Newton precisa ser refinado para lidar com trajetórias com velocidade descontínua. Acreditamos que para diminuir essas diferenças entre as soluções, devemos aumentar o número de pontos da série Galeriana nas proximidades dos pontos com velocidade descontínua e controlar a distância entre esses pontos.

Usando o minimizador numérico com o método do declive máximo calculamos o funcional colocando uma órbita de Schild como semente para comparar com o resultado obtido diretamente pela equação (4.72):

$$S = m_1(t_{L-} - t_{O_A})(1 - \sqrt{1 - v_1^2}) + m_2(t_{L_B} - t_{O+})(1 - \sqrt{1 - v_2^2}) + [(t_{L-} - t_{O_A}) + (t_{L+} - t_{O_A})] \frac{\omega(1 + v_1 v_2 \cos(\theta))}{2(\theta + v_1 v_2 \sin(\theta))}, \quad (4.72)$$

com os parâmetros:

$$\begin{aligned} m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad v_1 = 0,050062569397422, \quad v_2 = 0,050062571736102, \quad \theta = 0,1 \\ t_{L-} = 9,937896168535210 \times 10^{02}, \quad t_{L+} = 1,391305463594930 \times 10^{03}, \\ t_{O-} = -1,987579233707042 \times 10^{02}, \quad t_{O+} = 1,987579233707042 \times 10^{02}, \\ t_{L_B} = 1,192547540224225 \times 10^{03}, \quad t_{O_A} = 0, \quad \omega = 5,031245965147744 \times 10^{-04}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

que forneceram o resultado com um erro absoluto e relativo da ordem de 10^{-14} no valor do funcional:

$$S = 8,492208185412636. \quad (4.74)$$

Como foi demonstrado na Referência^[51], as órbitas de Schild constituem um ponto de mínimo do funcional (4.1) apenas para órbitas com ângulos de retardo pequenos, $\theta \ll 1$ ^[51]. Em geral, esse resultado foi obtido com o método do declive máximo. No entanto, apesar desse método calcular o funcional com erro absoluto e relativo da ordem de 10^{-14} , usando a norma do supremo (4.69) verificamos que ele não consegue anular o gradiente fraco com $\|\delta S\|_\infty < 10^{-10}$, fornecendo, por exemplo, $\|\delta S\|_\infty \approx 10^{-5}$ para experimentos com trajetórias na vizinhança de órbitas de Schild com $\theta \approx 0,2$. Em geral, não foi possível detectar uma convergência linear da solução com esse método para depois passar a trajetória para o método de Newton. Com isso, exceto para trajetórias na vizinhança de órbitas de Schild com ângulos de retardo pequenos, $\theta \ll 1$, não podemos garantir que as trajetórias que o método do declive máximo passa para o método de Newton, depois de algumas iterações, estejam suficientemente próximas de um ponto de mínimo do funcional (4.1) de modo que o método de Newton convirja para esse ponto.

Além dos experimentos aqui exibidos, foram realizadas diversas simulações, inclusive com $m_1 = 1$, $m_2 = 1836$ e $\theta = 0,0073$ em que o raio da órbita de Schild a ser perturbada para carga 2 ficou com um valor próximo ao raio de Bohr r_0 . Assim como foi feito para o método numérico do problema com fronteira mínima, foram feitos experimentos numéricos com o método de Newton para $(m_1 = m_2 = 1)$, $(m_1 = 1, m_2 = 10)$, $(m_1 = 1, m_2 = 100)$ com os ângulos de retardo $\theta = 0,01$ e $\theta = 0,1$ e $\theta = 0,7$.

5

Discussão

Vimos na Seção 2.1 que para trajetórias no espaço das funções $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$, o ponto crítico do funcional de ação (2.5) com valor na fronteira deve satisfazer as equações de Wheeler-Feynman e adicionalmente, as condições de quina de Weierstrass-Erdmann. As condições de fronteira envolvidas nesse princípio variacional podem ser generalizadas definindo as histórias como curvas de classe C^2 por trechos com um conjunto infinito, porém contável, de pontos com velocidade descontínua. Nesse caso, o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante que ocorrerão pontos de acumulação, ou seja, existirá pelo menos um ponto de descontinuidade tal que qualquer vizinhança desse ponto contenha outro ponto de descontinuidade. Assim, os integrandos do funcional de ação (2.5) ainda serão Riemann integráveis, pois não serão definidos apenas em um conjunto de medida nula, mas dependendo do espaço em que as trajetórias estão definidas os integrandos não serão Riemann integráveis, mas serão Lebesgue integráveis, por exemplo. É um problema em aberto encontrar o espaço de soluções em que esse funcional da ação converge. Como vimos, nos casos que existe um número finito de pontos com velocidade descontínua nos segmentos de fronteira, a equação de movimento e os campos retardados e avançados de Liénard-Wiechert são definidos apenas q.t.p. e satisfazem as equações de Maxwell q.t.p., sendo que na forma integral essas equações têm solução, exceto para superfícies e curvas que passam por esses pontos de descontinuidade. Também é uma questão em aberto saber se os campos retardados e avançados de Liénard-Wiechert satisfazem as equações de Maxwell para o caso de um conjunto infinito, porém contável, de pontos com velocidade descontínua.

Vimos que para o problema com fronteira mínima, na vizinhança de órbitas de Schild com distância em cone de luz grande, $r_{ij} \gg 1$, e com velocidades quase perpendiculares às normais ou com velocidades baixas, $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$, as equações de Wheeler-Feynman se reduzem a um problema de valor na chegada. Propusemos um método de disparos para resolver esse problema de valor na chegada, mas não estabelecemos condições para garantir que esse método convirja para uma solução, e caso convirja, não garantimos que ela é única. No entanto, para

diversos experimentos numéricos verificamos, inclusive experimentos que não satisfazem as condições $r_{ij} \gg 1$ e $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$, que o problema com valor de fronteira é bem definido, pois as matrizes $\mathbb{G}_{12}$ e $\mathbb{G}_{21}$ são bem condicionadas. Além disso, verificamos que o método dos disparos converge e que sua matriz Jacobiana $\mathbb{J}_k^s$ é bem condicionada, mesmo para perturbações da ordem $r_{ij} \approx 0,5$ e com velocidades $v_i \approx 0,9$, desde que $\|\mathbf{n}_{ij\pm} \cdot \mathbf{v}_{j\pm}\| \approx 0,3$. Esses resultados numéricos indicam que o problema de fronteira mínima pode ser resolvido pelos métodos numéricos descritos na Seção 3.4 para uma gama ampla de condições de fronteira, e não apenas para segmentos de fronteira na vizinhança de órbitas de Schild com $r_{ij} \gg 1$ e $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$.

Da mesma forma, vimos que para o problema com fronteira mínima, na vizinhança de órbitas de Schild com distância em cone de luz grande, $r_{ij} \gg 1$, e com velocidades quase perpendiculares às normais ou com velocidades baixas, $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$, as condições de quina de Weierstrass-Erdmann podem ser resolvidas escolhendo duas variáveis adicionais, além das 6 componentes das velocidades $\mathbf{v}_1^d$ e $\mathbf{v}_2^d$, de modo que exista uma solução com velocidade descontínua. No entanto, realizamos diversos experimentos numéricos em que verificamos soluções com velocidade descontínua mesmo para condições de fronteira que não satisfazem as condições $r_{ij} \gg 1$ e $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$. Indicando que as condições de quina de Weierstrass-Erdmann para o problema de fronteira mínima podem ser resolvidas para uma gama ampla de condições de fronteira, maior do que a inicialmente proposta. Para o caso de histórias com velocidades contínuas, vimos que só existe a possibilidade de ocorrerem trajetórias com velocidade descontínua para órbitas restritas a uma região com um raio $r < 1$. Mais precisamente, no sistema de unidades de Dirac, para dimensões tais que $r < 1$, as trajetórias devem estar confinadas numa região com um raio menor que o raio clássico do elétron $r_e = 1$, mas que podem ser muito maiores de que o raio experimental do elétron, $r_e^* < 3 \times 10^{-4}$.

É uma questão em aberto estabelecer condições suficientes para que problemas mais gerais do que o problema com trajetória mínima sejam bem definidos, estabelecendo condições de existência e unicidade de soluções que minimizam o funcional de ação (2.5). Também é um problema em aberto verificar se para o princípio variacional com fronteira mista com trajetórias de classe C^2 por trechos, a lei de ação e reação e os princípios de conservação da energia e do momento linear são satisfeitos quando esses conceitos são redefinidos para esse tipo de interação não local.

Como vimos, pode-se mostrar que para o problema de dois corpos com trajetórias globalmente limitadas a condição de campo de radiação nula implica que as trajetórias devem, necessariamente, ter velocidade descontínua^[58]. Existe um interesse físico para trajetórias limitadas espacialmente e que não irradiam. Apesar de todas as trajetórias obtidas numericamente serem limitadas, não impusemos condições para que o campo de radiação fosse nulo. Nas Figuras 3.5 a 3.6 observe que as descontinuidades nas componentes z das velocidades nas trajetórias são aproximadamente iguais, apesar das descontinuidades nas componentes z das velocidades nas histórias serem aproximadamente uma o dobro da outra. Da mesma forma, nas Figuras 3.18 e 3.20 podemos observar que as descontinuidades nas componentes z das velocidades nas trajetórias são aproximadamente iguais, mesmo as descontinuidades nas histórias diferindo em aproximadamente 3 ordens de grandeza. Nesses casos, observa-se que o mecanismo de ocorrência das descontinuidades determina um valor aproximado para a descontinuidade na componente z da velocidade das duas partículas, independente do valor

das massas das partículas, dos raios aproximados de cada órbita e da diferença do valor das descontinuidades nas componentes z das velocidades nas histórias.

Para o minimizador numérico que usa o método dos elementos finitos combinado com o método de Newton obtivemos uma taxa de convergência aproximadamente igual a 2,01 para os erros relativos e absolutos da posição, e igual a 2,65 para os erros relativos e absolutos da velocidade. Essas taxas de convergência foram obtidas para o caso de condições de fronteiras dadas por uma órbita de Schild com $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Embora as taxas de convergência para os erros relativos e absolutos da posição e da velocidade estejam, respectivamente próximas e acima do que se espera para um método de Newton, podemos estender esses resultados apenas para condições de fronteira com órbitas nas vizinhança de Schild e com parâmetros próximos de $\theta = 0,1$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$.

Usando a norma do supremo $\|\delta S\|$ do valor inicial do gradiente fraco (4.28), sobre órbitas de Schild com $m_1 = m_2 = 1$, para $\theta = 0,077$ e $\theta = 0,77$, obtivemos uma taxa de convergência com respeito à dimensão da série Galeriana dada por $r = 3,87$ para $\theta = 0,077$ e por $r = 3,86$ para $\theta = 0,77$. Esse resultado verifica que essas órbitas de Schild são soluções do gradiente fraco (4.28), como é esperado, e dá uma maior confiabilidade de que o cálculo numérico do gradiente fraco está correto.

Apesar do método do declive máximo, em geral, não satisfazer o critério de parada $\|\delta S\|_\infty < 10^{-10}$, em alguns casos, tais como trajetórias na vizinhança de órbitas de Schild com $\theta \approx 0,2$, ele pode ser usado para aproximar a solução de um ponto de mínimo local do funcional (2.5). Porém, essa aproximação não garante que, partindo desse ponto fornecido pelo método do declive máximo, o método de Newton irá convergir, e se convergir, essa aproximação inicial não garante que o ponto obtido será um ponto de mínimo local, sendo necessário verificar se a matriz Hessiana é positiva definida. Conforme foi demonstrado na Referência^[51], as órbitas de Schild determinam um ponto de mínimo do funcional (4.1) apenas para órbitas com ângulos de retardo pequenos, $\theta \ll 1$ ^[51]. De fato, verificamos que o método de Newton diverge, no sentido de atingir velocidades superluminais, para condições de fronteira dadas por órbitas de Schild com ângulos de retardo maiores do que aproximadamente $\theta \approx 0,2$. Embora tenhamos verificado que órbitas de Schild anulam o gradiente fraco até para ângulos de retardo próximos de $\theta = 0,8$.

Para efeito de comparação usamos o método de Newton e o método numérico do Capítulo 3 para calcular as soluções de um problema com segmentos de fronteira dados por órbitas de Schild com perturbações que envolviam velocidades descontínuas, e por órbitas de Schild sem perturbação. Verificamos que o erro associado à diferença entre as soluções para as órbitas perturbadas foi cerca de duas ordens de grandeza maior do que o erro entre as órbitas não perturbadas. Acreditamos que esse erro esteja associado ao método de Newton e que para melhorar a solução desse método, nos casos em que os segmentos de fronteira envolvem velocidades descontínuas, devemos encontrar a quantidade de pontos adequados para a série Galeriana na região em que ocorrem as descontinuidades e a distância adequada entre esses pontos, de modo que a cada passo do método de Newton esses pontos possam ser rearranjados adequadamente.

Ainda que tenhamos usado o método dos elementos finitos com uma Galeriana capaz de gerar trajetórias com velocidades descontínuas, esse minimizador numérico com o método de Newton não está completamente preparado para receber fronteiras genéricas com diversos

pontos de velocidade descontínua como semente, devido à forma como essas discontinuidades se propagam ao longo das trajetórias e mudam a cada passo do método de Newton. Uma forma de resolver esse problema seria construir a grade de pontos chamada de cadeia de costura, que contém os pontos ligados por cones de luz e onde a velocidade pode ser descontínua, a cada passo do método de Newton. Esses refinamentos do método de Newton envolvem um problema ainda maior, saber se o limite em que a dimensão da Galeriana tende a infinito é adequado para representar o espaço de soluções do funcional de ação (2.5).

Por fim, conjecturamos que para o problema de três corpos, usando os resultados da Referência^[33], podemos usar soluções obtidas aqui para o problema de dois corpos para construir uma solução para o problema de três corpos, com uma partícula de carga $2q$ e outras duas de carga $-q$, sendo que no referencial da partícula de carga $2q$ as outras duas partículas estão em posições diametralmente opostas.

6

Conclusão

Na Seção 2.1 vimos que colocando as trajetórias no espaço $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$ e perturbações no espaço $\mathcal{N}^{(1,2)}(\mathcal{I}_N)$ o ponto crítico do funcional de ação (2.5) deve satisfazer as equações de Wheeler-Feynman e adicionalmente, as condições de quina de Weierstrass-Erdmann. Realizamos o cálculo analítico do funcional de ação (2.5) sobre as órbitas de Schild que posteriormente foi verificado numericamente com um erro relativo e absoluto da ordem de 10^{-14} .

Na Seção 3.1, mostramos que para o problema com fronteira mínima, com condições de fronteira na vizinhança de órbitas de Schild com distância em cone de luz grande, $r_{ij} \gg 1$, e com velocidades quase perpendiculares às normais ou com velocidades baixas, $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$, as equações de movimento se reduzem a um problema com valor na chegada, bem definido. Resolvemos numericamente esse problema de valor na chegada e verificamos que ocorre a convergência da solução para o método dos disparos, mesmo para perturbações da ordem $r_{ij} \approx 0,5$ e com velocidades $v_i \approx 0,9$, desde que $|\mathbf{n}_{ij\pm} \cdot \mathbf{v}_{j\pm}| \approx 0,3$. Foram realizados diversos experimentos numéricos para diferentes proporções de massas, desde $m_2 = m_1 = 1$ a $m_2 = 1836m_1$ com $m_1 = 1$, e em diversas escalas de espaço e tempo, desde raios de ordem nuclear até a ordem do raio de Bohr, e condições de fronteira com velocidades contínuas e com um ponto de velocidade descontínua, sendo que para essas últimas ocorreram trajetórias com um ponto de velocidade descontínua.

Ainda para essas condições de fronteira na vizinhança de órbitas de Schild com distância em cone de luz grande, $r_{ij} \gg 1$, e com velocidades quase perpendiculares às normais ou com velocidades baixas, $\|\mathbf{v}_{j\pm} \cdot \mathbf{n}_{ij\pm}\| \ll 1$, mostramos que as condições de quina de Weierstrass-Erdmann podem ser resolvidas escolhendo duas variáveis adicionais, além das 6 componentes das velocidades $\mathbf{v}_1^d$ e $\mathbf{v}_2^d$, de modo que verificamos a ocorrência de soluções com velocidade descontínua. Para o caso de fronteiras com velocidades contínuas vimos que só existe a possibilidade de ocorrerem trajetórias com velocidade descontínua para dimensões subatômicas ou até mesmo nucleares. Também expomos dois casos mais genéricos de soluções das condições de quina de Weierstrass-Erdmann em que necessariamente ocorrem velocidade descontínua. No

primeiro caso, apenas uma das histórias tem velocidade descontínua, por exemplo $\Delta \mathbf{v}_{1+} = \mathbf{0}$ e $\Delta \mathbf{v}_{2-} \neq \mathbf{0}$. Nesse exemplo, necessariamente temos $\Delta \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e $\Delta \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. No segundo caso, as duas histórias têm velocidade descontínua, $\Delta \mathbf{v}_{1+} \neq \mathbf{0}$ e $\Delta \mathbf{v}_{2-} \neq \mathbf{0}$. Para esse caso, obtivemos que necessariamente $\Delta \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e/ou $\Delta \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$.

O mecanismo de ocorrência e propagação de pontos com velocidade descontínua é regido pelas condições de quina de Weierstrass-Erdmann, que impõe conservação das energias parciais e momentos parciais. Esse mecanismo desempenha um papel importante no problema de dois corpos da eletrodinâmica de Wheeler-Feynman, como por exemplo, para obter trajetórias limitadas e que não irradiam. Pelo menos em primeira aproximação sabe-se que existem trajetórias com velocidades constantes por trechos e com algumas descontinuidades que podem ser calculadas analiticamente^[34]. Ainda para o problema de fronteira mínima pode-se investigar outras trajetórias com velocidades constantes por trechos com algumas descontinuidades. Dependendo da simetria dessas trajetórias pode-se buscar construir órbitas periódicas, espacialmente limitadas, e investigar a possibilidade de impor um vínculo adicional para manter os campos de radiação nulos.

Na Seção 4.1, supondo que as trajetórias e as perturbações estão contidas no espaço vetorial $\mathcal{N}^{(0,2)}(\mathcal{I}_N)$, propusemos um método de elementos finitos com uma Galeriana que suporta trajetórias com velocidades descontínuas para resolver a condição de ponto crítico. Verificamos que as soluções de Schild anulam o gradiente fraco para $m_1 = m_2 = 1$, para $\theta = 0,077$ e $\theta = 0,77$ e obtivemos uma taxa de convergência aproximadamente quátrica com respeito à dimensão da série Galeriana. Quando definimos as histórias das partículas como segmentos de órbitas de Schild com ângulos de retardo θ menores ou aproximadamente iguais a 0,2, e colocamos trajetórias próximas dessas órbitas circulares como semente para o problema, o minimizador numérico com o método de Newton convergiu para a órbita de Schild correspondente, anulando o gradiente fraco. Na Seção 4.3 apresentamos um conjunto de experimentos com esse tipo de condição de fronteira e obtivemos uma taxa de convergência, com respeito à dimensão da série Galeriana, aproximadamente igual a 2,01 para os erros relativos e absolutos da posição, e aproximadamente igual a 2,65 para os erros relativos e absolutos da velocidade. Da mesma forma que foram realizados experimentos para o método numérico do problema com fronteira mínima, foram feitos experimentos numéricos com o método de Newton para as mesmas proporções de massas e escalas de espaço e tempo.

Em princípio, os métodos numéricos com o método de Newton e o método do declive máximo foram combinados, formando um minimizador numérico, com o intuito de garantir que a solução encontrada minimize a ação e convirja mais rapidamente, tal como é feito no método de Levenberg-Marquardt. No entanto, para alguns casos, foi verificado que o método de Newton diverge, no sentido de atingir velocidades superluminais, para condições de fronteira dadas por órbitas circulares de Schild com ângulos de retardo maiores do que aproximadamente $\theta \approx 0,2$. Em outros casos foi constatado que o método do declive máximo não consegue anular o gradiente fraco e ele foi usado apenas para indicar o ponto de mínimo para o método de Newton. Como uma alternativa a esse método numérico, para esses casos, pode-se construir um minimizador numérico para o funcional de ação usando o pacote `fminsearch` do software MATLAB®. O pacote `fminsearch` encontra o mínimo de uma função escalar de múltiplas variáveis para uma dada estimativa inicial da solução. Nesse minimizador, pode-se passar os parâmetros nodais da Galeriana como as variáveis para o `fminsearch` buscar o mínimo do

funcional de ação. Esse minimizador tem a vantagem, em relação aos anteriormente descritos, de não precisar realizar o cálculo das derivadas numéricas do gradiente e suportar condições de fronteira genéricas com pontos de velocidade descontínua. Por outro lado, o mesmo exige um tempo computacional muito maior e se faz necessário evitar que o método dê incrementos na trajetória que causem velocidades superluminais.

Ao invés de supormos que as soluções do problema de dois corpos são suaves e analisarmos diretamente as equações de movimento, tal como as suposições feitas para obter a equação de Lorentz-Dirac e os métodos de resolução originalmente propostos para resolvê-la, de um modo geral aqui fizemos o caminho inverso. Usamos o método direto do cálculo das variações, onde buscamos investigar as propriedades das soluções analisando o funcional ou sua condição de ponto crítico na forma integral. Essa última estratégia tem um rigor matemático mais adequado, mas torna o caminho mais árduo e a caminhada mais lenta, um preço justo.

Seguindo a linha do Método Direto do Cálculo das Variações pode-se buscar teoremas para existência de soluções em casos especiais, tais como o Teorema do passo da Montanha^[71].

Aspectos das Equações Diferenciais Funcionais

Neste apêndice definimos os critérios para classificar alguns tipos de equações diferenciais funcionais, tais como as equações diferenciais com retardo neutro, e apresentamos alguns fenômenos que ocorrem com esses tipos de equação. O objetivo desse apêndice é apenas fornecer algumas informações básicas sobre esses tipos de equação para o leitor que não está familiarizado com elas.

Um tipo de equação diferencial funcional bastante geral consiste nas equações diferenciais funcionais com retardos, cuja forma geral é

$$\mathbf{y}^{(n)}(t) = f(t, \mathbf{y}^{(n_1)}(t - \tau_1(t)), \mathbf{y}^{(n_2)}(t - \tau_2(t)), \dots, \mathbf{y}^{(n_k)}(t - \tau_k(t))), \quad (\text{A.1})$$

sendo que $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}^{(n)}(t)$ é a n -ésima derivada de $\mathbf{y}(t)$ em relação ao tempo, $n_i \geq 0$ e $\tau_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$. De acordo com a Referência^[72], a equação (A.1) é dita ser uma equação diferencial funcional do tipo neutra se $\max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} = n$, é denominada equação diferencial funcional do tipo avançada sempre que $\max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} > n$, e nominada equação diferencial funcional do tipo retardada ou equação diferencial funcional retardada caso $\max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} < n$. Quando ao menos um dos retardos τ_i é função de $\mathbf{y}(t)$ ou de alguma das derivadas $\mathbf{y}^{(n)}(t)$, diz-se que o retardo é dependente do estado. Na literatura é comum encontrar os termos equação diferencial com argumento desviante e equação diferencial de diferença para designar as equações diferenciais do tipo retardada, neutra e/ou avançada.

De um modo geral, equações diferenciais funcionais com retardos são problemas de dimensão infinita. Para resolver, por exemplo, uma diferencial funcional retardada, tal como $\dot{\mathbf{y}}(t) = f(\mathbf{y}(t - \tau))$, com retardo constante, $\tau > 0$, precisamos fornecer a história $\varphi(t)$ para $t \in [-\tau, 0]$. A história tem o mesmo papel das condições iniciais para um equação diferencial ordinária,

porém a história tem dimensão infinita. Em alguns casos, bastante simples, as equações com retardo podem ser resolvidas usando o método de passos, também conhecido como método das integrações sucessivas^[55, 72]. Um fenômeno comum para equações diferenciais funcionais com retardo é a suavização da solução ao longo do tempo, como podemos ver no exemplo simples retirado da Referência^[55]

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -y(t-1), & \text{se } t \geq 0, \\ \varphi(t) = t, & \text{se } -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde $\varphi(t)$ é a história do problema. O método de passos fornece que a solução da equação (A.2) é suave por trechos, mas é C^0 para $t = 0$, C^1 para $t = 1$, C^2 em $t = 2$, e assim por diante, de modo que no limite com $t \rightarrow \infty$ a solução é suave.

Por outro lado, equações diferenciais funcionais com retardo do tipo neutro podem gerar soluções com velocidades descontínuas^[55], e essa descontinuidade pode se propagar ao longo da solução^[56] e até mesmo fazer com que a solução termine, um caso especial em que não é possível continuar a integração da equação diferencial^[55]. No entanto, foi demonstrado que esse fenômeno, da solução terminar, não ocorre nas equações de Wheeler-Feynman devido à imposição de que as trajetórias serem subluminais^[51, 52]. Um exemplo simples de equação com retardo do tipo neutro que gera e propaga descontinuidades na velocidade, retirado da Referência^[55], é dado pela equação

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -\dot{y}(t-1), & \text{se } t \geq 0, \\ \varphi(t) = t, & \text{se } -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde $\varphi(t)$ é a história do problema. Nesse caso, o método de passos fornece que a solução é suave por trechos, porém tem a primeira derivada descontínua em $t = 0$, pois $\dot{y}(0^-) = -1$ e $\dot{y}(0^+) = -1$, tem a primeira derivada descontínua em $t = 1$, já que $\dot{y}(0^-) = -1$ e $\dot{y}(0^+) = -1$, e assim sucessivamente, resultando em uma solução com a primeira derivada descontínua em infinitos pontos, todos os instantes múltiplos de 1 incluindo o instante $t = 0$, ou seja, para $t = 0, 1, 2, \dots$

B

Conceitos de Análise Funcional

Por fim, apresentamos neste apêndice um resumo, feito usando as Referências^[66, 73–75], no qual listamos as definições de conceitos e teoremas de análise funcional, principalmente teoria da medida, teoria integração e análise na reta real, que foram usados ao longo do texto ou que foram necessários para defini-los. O objetivo deste apêndice é apenas facilitar para o leitor a busca por uma definição mais precisa dos conceitos, usados ao longo do texto, com os quais o mesmo não estiver familiarizado.

Definição B.1 (Partição de um conjunto). *Seja $\mathcal{A}$ um conjunto qualquer e $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ subconjuntos de $\mathcal{A}$. A família de conjuntos $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots\}$ é dita uma partição de $\mathcal{A}$ se satisfazem as seguintes propriedades:*

- (i) *os conjuntos $\mathcal{A}_i$ são disjuntos em pares, ou seja, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ para todo $i, j = 1, 2, \dots$ tais que $i \neq j$,*
- (ii) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cdots = \mathcal{A}$.

Definição B.2 (Supremo). *Dado um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Diz-se que o número $a \in \mathbb{R}$ é o supremo do conjunto $\mathcal{A}$ se para todo $x \in \mathcal{A}$ tem-se $x \leq a$; e se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in \mathcal{A}$, então $a \leq b$. Usamos $a = \sup \mathcal{A}$ para denotar que a é o supremo do conjunto $\mathcal{A}$.*

Definição B.3 (Ínfimo). *Dado um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Diz-se que o número $a \in \mathbb{R}$ é o supremo do conjunto $\mathcal{A}$ se para todo $x \in \mathcal{A}$ tem-se $a \leq x$; e se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x$ para todo $x \in \mathcal{A}$, então $b \leq a$. Usamos $a = \sup \mathcal{A}$ para denotar que a é o ínfimo do conjunto $\mathcal{A}$.*

Definição B.4 (Ponto de acumulação). *Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito ser um ponto de acumulação do conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (\mathcal{X} - x) \neq \emptyset$.*

Teorema B.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Seja $[a, b]$ um conjunto fechado e limitado na reta real e $\{x_n\}$ uma sequência em $[a, b]$, então, esse conjunto tem um ponto de acumulação em $[a, b]$.*

Definição B.5 (σ -álgebra). *Uma família $\mathbf{X}$ de subconjuntos de um conjunto $\mathcal{X}$ é dita ser uma σ -álgebra quando:*

- (i) $\emptyset$ e $\mathcal{X}$ pertencem a $\mathbf{X}$,
- (ii) se $\mathcal{A}$ pertence a $\mathbf{X}$, então o seu complemento $\mathcal{A}^c = \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ também pertence a $\mathbf{X}$,
- (iii) se $\{\mathcal{A}_n\}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathbf{X}$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ pertence a $\mathbf{X}$.

Definição B.6 (Função Mensurável). *Uma função $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser $\mathbf{X}$ -mensurável se para todo número real α o conjunto*

$$\{x \in \mathcal{X} : f(x) > \alpha\} \quad (\text{B.1})$$

pertence a $\mathbf{X}$.

Definição B.7 (Espaço e Conjunto Mensurável). *O par ordenado $(\mathcal{X}, \mathbf{X})$ constituído pelo conjunto $\mathcal{X}$ e pela σ -álgebra $\mathbf{X}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ é chamado de espaço mensurável. Qualquer conjunto em $\mathbf{X}$ é dito ser $\mathbf{X}$ -mensurável.*

Definição B.8 (Reta real estendida $\overline{\mathbb{R}}$). *A reta real estendida $\overline{\mathbb{R}}$ é definida acrescentando os infinitos $\{-\infty, \infty\}$ à reta real $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, ou seja, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Denotamos o conjunto dos reais não negativos $\overline{\mathbb{R}}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ acrescido do infinito $\{+\infty\}$, por $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.*

Definição B.9 (Conjunto de Funções Mensuráveis Estendidas $M(\mathcal{X}, \mathbf{X})$). *O conjunto de todas as funções $f : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que são $\mathbf{X}$ -mensuráveis é denotado por $M(\mathcal{X}, \mathbf{X})$. Denotamos o conjunto de todas as funções $f : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que são $\mathbf{X}$ -mensuráveis e não negativas por $M^+(\mathcal{X}, \mathbf{X})$.*

Definição B.10 (Espaço Vetorial Normado). *Dado um espaço vetorial real V , uma norma em V é uma função de valores reais $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, que associa a cada vetor $x \in V$ o número real não negativo $\|x\|$, dito norma de x , de modo que, para quaisquer $x, y \in V$ e α escalar, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i) Se $x \neq 0$, então $x \neq 0$;
- (ii) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição B.11 (Medida). *Uma medida μ é uma função $(\mu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+)$, definida sobre uma σ -álgebra $\mathbf{X}$ de conjuntos de $\mathcal{X}$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(E) \geq 0$, para $\forall E \in \mathbf{X}$,

(iii) contavelmente aditiva em quaisquer uniões disjuntas de $E_n \in \mathbf{X}$:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \quad (\text{B.2})$$

Definição B.12 (Medida de Borel-Lebesgue). Para $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ e $\mathbf{X} = \mathcal{B}$ a Medida de Borel-Lebesgue de um conjunto não nulo $E = (a, b)$ é dada por $\mu = b - a$.

As medidas de conjuntos nulos se mostram extremamente úteis para definir classes de equivalência de funções. Diz-se que duas funções f e g são iguais em μ -quase toda parte se $f(x) = g(x)$ quando $x \in A$ e $f(x) \neq g(x)$ para $x \in A^c$. Vamos denotar essa propriedade na forma

$$f = g \quad \mu\text{-q.t.p.} \quad (\text{B.3})$$

De uma forma geral, uma proposição também pode ser definida como válida μ -q.t.p..

Definição B.13 (Supremo Essencial). Dado um espaço de funções que são $\mathbf{X}$ -mensuráveis $M(\mathcal{X}, \mathbf{X})$ e limitadas superiormente. O número $a \in \mathbb{R}$ é dito ser o supremo essencial de $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ em $M(\mathcal{X}, \mathbf{X})$ se ele for definido como o ínfimo das constantes k que limitam $|f(x)|$ em quase toda parte

$$a = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{X}} |f(x)| = \inf \{k : |f(x)| \leq k \text{ q.t.p.}\}. \quad (\text{B.4})$$

Definição B.14 (Métrica). Uma métrica em um conjunto não vazio $\mathcal{X}$ é uma função $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{X}$

(i) $d(a, a) = 0$;

(ii) Se $a \neq b$ então $d(a, b) > 0$;

(iii) $d(a, b) = d(b, a)$;

(iv) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$;

Definição B.15 (Espaço Métrico). Seja $\mathcal{X}$ um conjunto não vazio, um espaço métrico é um par $(\mathcal{X}, d)$, onde d é uma métrica em $\mathcal{X}$.

Definição B.16 (Completeza). Um espaço métrico $(\mathcal{X}, d)$ é dito ser completo se toda sequência de Cauchy em $(\mathcal{X}, d)$ é convergente.

Dado um espaço vetorial B , dotado de uma norma $\|\cdot\|_B$, e $a, b \in B$, diz-se que a métrica em B dada por $d_B(a, b) = \|a - b\|_B$ é uma métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_B$.

Definição B.17 (Espaço de Banach). Um espaço vetorial B com uma norma $\|\cdot\|_B$ é dito ser um espaço de Banach com respeito a essa norma se for um espaço métrico completo em relação à métrica induzida por essa norma.

Definição B.18 (Derivada de Frechét). Sejam V e W espaços de Banach, e $U \subset V$ um subconjunto aberto de V . Uma função $f : U \rightarrow W$ é dita ser Frechét diferenciável se existir um operador linear limitado $A : V \rightarrow W$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_W}{\|h\|_V} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Definição B.19 (Função Característica). A função característica para um conjunto E , denotada por χ_E , é definida como

$$\chi_E = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Definição B.20 (Função Simples). Uma função f é dita ser simples em $\mathcal{A}$ se, para uma partição $\{A_1, A_2, \dots\}$ de $\mathcal{A}$, podemos escrevê-la, na representação padrão, como a combinação linear de funções características:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}. \quad (\text{B.7})$$

Definição B.21 (Função Integrável). Uma função mensurável f é dita ser integrável sobre o conjunto mensurável $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se

$$\int_{\Omega} |f| \, dx < \infty. \quad (\text{B.8})$$

Definição B.22 (Integral de uma Função Simples). Para uma função simples φ em $M^+(\mathcal{X}, \mathbf{X})$ escrita na representação padrão, definimos a integral de φ em relação a medida μ como o número real estendido

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(E_i). \quad (\text{B.9})$$

Definição B.23 (Integral em relação a uma medida μ). Se f pertence a $M^+(\mathcal{X}, \mathbf{X})$ definimos a integral em relação a uma dada medida μ como o número real estendido

$$\int f \, d\mu = \sup \int \varphi \, d\mu. \quad (\text{B.10})$$

Definição B.24 (Integral de Lebesgue). Seja f uma função simples que pertence a $M^+(\mathcal{X}, \mathbf{X})$ e considere um dado conjunto Ω tal que $\Omega \subset \mathcal{X}$ e $\Omega \in \mathcal{X}$. A integral de Lebesgue de f sobre o conjunto Ω com respeito à medida μ é definida por

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sup \int_{\Omega} \varphi \, d\mu, \quad (\text{B.11})$$

onde $\varphi \in M^+(\mathcal{X}, \mathbf{X})$.

Referências Bibliográficas

- [1] J. A. WHEELER AND R. P. FEYNMAN, Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation. *Rev. Mod. Phys.* **17**, 157-181 (1945).
- [2] J. A. WHEELER AND R. P. FEYNMAN, Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action. *Rev. Mod. Phys.* **21**, 425-433 (1949).
- [3] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON AND M. SANDS, The Feynman Lectures on Physics. Mainly Electromagnetism and Matter, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Palo Alto (1963).
- [4] J. D. JACKSON, Classical Electrodynamics. Third Edition, John Wiley and Sons Inc., Danvers (1999).
- [5] R. P. FEYNMAN, The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics (Nobel Lecture). *Science* **153**(3737), 699-708 (1966).
- [6] J. MEHRA, The Beat of a Different Drum: Life and Science of Richard Feynman. Oxford University Press Inc., New York (1994).
- [7] D. G. CURRIE, T. F. JORDAN, AND E. C. G. SUDARSHAN, Relativistic Invariance and Hamiltonian Theories of Interacting Particles. *Rev. Mod. Phys.* **35**(2), 350-375 (1963).
- [8] A. N. BEARD AND R. FONG, “No-Interaction” Theorem in Classical Relativistic Mechanics. *Phys. Rev.* **182**(5), 1397-1399 (1969).
- [9] G. MARMO, N. MUKUNDA, AND E. C. G. SUDARSHAN, Relativistic particle dynamics - Lagrangian proof of the no-interaction theorem. *Phys. Rev. D* **30**(10), 2110-2116 (1984).
- [10] R. P. FEYNMAN, The principle of least action in quantum mechanics. *PhD Thesis* Faculty of Princeton University, New Jersey (1942).
- [11] T. SAUER, Remarks on the Origin of Path Integration: Einstein and Feynman. In: Proceedings of the 9th International Conference ‘Path Integrals - New Trends and Perspectives’, (PI07) Dresden, 23-28 September 2007. W. Janke and A. Pelster (eds), World Scientific **3**, 13 (2008).
- [12] L. M. BROWN, Feynman’s Thesis: A New Approach to Quantum Theory. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2005).

- [13] A. EINSTEIN, The Meaning of Relativity. Fifth Edition, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1945).
- [14] A. D. FOKKER, Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen. *Zeits. f. Physik* **58**, 386-393 (1929).
- [15] K. SCHWARZSCHILD, Zur Elektrodynamik. II. Die elementare elektrodynamische Kraft.. *Gottinger Nachrichten* **128**, 132-141 (1903).
- [16] H. TETRODE, Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamik. *Zeits. f. Physik* **10**, 317-328 (1922).
- [17] R. A. MOORE, T. C. SCOTT AND M. B. MONAGAN, A Model for a Relativistic Many-Particle Lagrangian with Electromagnetic Interactions. *Can. J. Phys.* **66**(3), 206-211 (1988).
- [18] G. BAUER, D.-A. DECKERT, D. DÜRR AND G HINRICHS, On Irreversibility and Radiation in Classical Electrodynamics of Point Particles. *J. Stat. Phys.* DOI 10.1007/s10955-013-0837-2 (2013).
- [19] C. W. BERENDA, The Determination of past by Future Events. A Discussion of the Wheeler-Feynman Absorption-Radiation Theory. *Philos. Sci.* **14**(1), 13-19 (1947).
- [20] L. M. BROWN, Selected papers of Richard Feynman with commentary. World Scientific Series in 20th Century Physics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2000).
- [21] P. A. M. DIRAC, Classical theory of radiating electrons. *Proc. Roy. Soc. London, Series A, Mathematical and Physical Sciences* **167**(929), 148-169 (1938).
- [22] J. DE LUCA, The Lorentz-Dirac Equation for Linear and Nonlinear Potentials. *Braz. J. of Phys.* **27**, 285-289 (1997).
- [23] H. SPON, The critical manifold of the Lorentz-Dirac equation. *Europhys. Lett.* **50**(3), 287-292 (2000).
- [24] J. DE LUCA, Stiff three-frequency orbit of the hydrogen atom, *Phys. Rev. E* **73**, 026221 (17pp) (2006).
- [25] J. DE LUCA, Geometric integration of the electromagnetic two-body problem. *J. Math. Phys.* **48**, 012702 (10pp) (2007).
- [26] J. DE LUCA, Electromagnetic two-body problem: recurrent dynamics in the presence of state-dependent delay. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 205103 (20pp) (2010).
- [27] J. FRENKEL, 4/3 problem in classical electrodynamics. *Phys. Rev. E* **54**(5), 5859-5862 (1996).

- [28] M. SCHÖNBERG, Classical Theory of the Point Electron. *Phys. Rev.* **69**(5-6), 211-224 (1946).
- [29] M. SCHÖNBERG, Quantum Theory of the Point Electron. I. *Phys. Rev.* **74**, 738-747 (1948).
- [30] A. SCHILD, Electromagnetic Two-Body Problem. *Science* **138**, 994 (1962).
- [31] A. SCHILD, Electromagnetic Two-Body Problem. *Phys. Rev.* **131**(6), 2762-2766 (1963).
- [32] A. SCHILD AND J. A. SCHLOSSER, Fokker Action Principle for Particles with Charge, Spin, and Magnetic Moment. *J. Math. Phys.* **6**(8), 1299-1306 (1964).
- [33] D. J. LOUIS-MARTINEZ, Exact solutions of the relativistic many body problem. *Phys. Lett. A* **320**(2-3), 103-108 (2003).
- [34] J. DE LUCA, Variational electrodynamics of atoms. *Progress In Electromagnetics Research B*, **53**, 147-186 (2013).
- [35] R. D. DRIVER, A two-body problem of classical electrodynamics: the one-dimensional case. *Ann. of Phys.* **21**(1), 122-142 (1963).
- [36] R. D. DRIVER, Can the future influence the present? *Phys. Rev. D* **19**(4), 1098-1107 (1979).
- [37] J. T. HOAG AND R. D. DRIVER, A delayed-advanced model for the electrodynamics two-body problem. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.* **15**(2), 165-184 (1990).
- [38] E. B. HOLLANDER AND J. DE LUCA, Regularization of the collision in the electromagnetic two-body problem. *Chaos* **14**(4), 1093-1104 (2004).
- [39] G. BAUER, Ein Existenzsatz für die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik. *PhD Thesis*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1997).
- [40] G. BAUER, D.-A. DECKERT AND D. DÜRR, On the existence of dynamics in Wheeler-Feynman electromagnetism. *Z. Angew. Math. Phys.* **64**, 1087-1124 (2013).
- [41] D.-A. DECKERT, Electrodynamical Absorber Theory - A Mathematical Study. *PhD Thesis*, Ludwig-Maximilians-Universität München (2010).
- [42] V. NATARAJAN, What is a photon? *Resonance* **18**(1), 39-50 (2013).
- [43] B. G. SIDHARTH, The Feynman-Wheeler Perfect Absorber Theory in a New Light. *Found. Phys.* **40**, 1134-1140 (2010).
- [44] F. HOYLE AND J.V. NARLIKAR, Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics. *Rev. Mod. Phys.* **67**, 113-155 (1995).
- [45] F. HOYLE AND J.V. NARLIKAR, Lectures on Cosmology and Action at a Distance Electrodynamics, World Scientific Series in Astronomy and Astrophysics, Pune (1996).

- [46] D. J. LOUIS-MARTINEZ, Relativistic action-at-a-distance description of gravitational interactions. *Phys. Rev. D* **86**, 045009 (11pp) (2012).
- [47] D. J. LOUIS-MARTINEZ, Relativistic action at a distance and fields. *Found. Phys.* **42**, 215-223 (2012).
- [48] A. DUVIRYAK, Fokker-Type Confinement Models From Effective Lagrangian In Classical Yang-Mills Theory. *Int. J. Mod. Phys. A* **14**(28), 4519-4547 (1999).
- [49] R. P. FEYNMAN, A Relativistic Cut-Off for Classical Electrodynamics. *Phys. Rev.* **74**(8), 939-946 (1948).
- [50] A. STARUSZKIEWICZ, An example of a consistent relativistic mechanics of point particles. *Ann. der Phys.* **480**(4), 362-367 (1970).
- [51] J. DE LUCA, Variational Principle for the Wheeler-Feynman Electrodynamics. *J. Math. Phys.* **50**, 062701 (24pp) (2009).
- [52] J. DE LUCA, T. HUMPRIES AND S. B. RODRIGUES, Finite Element Boundary Value Integration of Wheeler-Feynman Electrodynamics. *J. Comput. Appl. Math.* **236**(13), 3319-3337 (2012).
- [53] L. E. EL'SGOL'TS AND S.B. NORKIN, Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments. Academic Press Inc., New York (1973).
- [54] J. HALE, Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York (1977).
- [55] A. BELLEN AND M. ZENNARO, Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford University Press, New York (2003).
- [56] A. BELLEN AND N. GUGLIELMI, Solving neutral delay differential equations with state-dependent delays. *J. Comput. and App. Math.* **229**, 350-362 (2009).
- [57] I. M. GELFAND AND S. V. FOMIN, Calculus of Variations. Revised English Edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey (1963).
- [58] J. DE LUCA, Minimizers with discontinuous velocities for the electromagnetic variational method. *Phys. Rev. E* **82**, 026212 (9pp) (2010).
- [59] U. M. ASCHER AND L. R. PETZOLD, Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM, Philadelphia (1998).
- [60] U. M. ASCHER, R. M. M. MATTHEIJ AND R. D. RUSSEL, Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. SIAM, Classics In Applied Mathematics 13, Philadelphia (1995).
- [61] D. G. DE FIGUEIREDO, Métodos Variacionais em Equações Diferenciais. *Matemática Universitária* **7**, 21-47 (1988).

- [62] M. J. DUFF, Comment on time-variation of fundamental constants. *arXiv:hep-th/02-08093v3* (12pp) (2004).
- [63] R. L. BURDEN AND J. D. FAIRES, Numerical Analysis. Ninth Edition, CENGAGE Learning, Boston (2011).
- [64] W. CHENEY AND D. KINCAID, Numerical Mathematics and Computing. Sixth Edition, CENGAGE Learning, Belmont (2008).
- [65] J. FISH AND T. BELYTSCHKO, A First Course in Finite Elements. John Wiley and Sons Inc., Chichester (2007).
- [66] B. D. REDDY, Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems. Springer-Verlag, New York (1998).
- [67] A. E. ASSAN, Método dos Elementos Finitos. Editora Unicamp, Campinas (2010).
- [68] T. ROWLAND, “ C^k Function”. From *MathWorld* - A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/C-kFunction.html> (2014).
- [69] D. G. LUENBERGER AND Y. YE, Linear and Nonlinear Programming. Third Edition, Springer, New York (2008).
- [70] J. C. NASH, Compact Numerical Methods for Computers: Linear Algebra and Function Minimisation. Second Edition, Adam Hilger, Bristol (1990).
- [71] Y. JABRI, The Mountain Pass Theorem: Variants, Generalizations and Some Applications. Cambridge University Press, New York (2003).
- [72] V. KOLMANOVSKII AND A. MYHKIS, Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).
- [73] R. G. BARTLE, The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley and Sons Inc., New York (1975).
- [74] E. L. LIMA, Análise Real, Volume 1. Funções de Uma Variável Real. IMPA, Rio de Janeiro (2008).
- [75] E. L. LIMA, Espaços Métricos, IMPA, Rio de Janeiro (2007).