Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Explorando o setor escuro: Usando o Método de
Monte Carlo para encontrar novos parâmetros para a
equação de estado da energia escura

Wilson Maruyama Santos de Paula

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Élcio Abdalla - Orientador (IFUSP)

Prof. Dr. Jorge E. Horvath (IAG/USP)

Prof. Dr. Horatiu S. Nastase (IFT/UNESP)

São Paulo

2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Paula, Wilson Maruyama Santos de

Explorando o setor escuro: usando o método de Monte Carlo para encontrar novos parâmetros para a equação de estado da energia escura. São Paulo, 2019.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla
Área de Concentração: Cosmologia

Unitermos: 1. Física; 2. Relatividade (Física); 3. Cosmologia.

USP/IF/SBI-046/2019

University of São Paulo
Physics Institute

Exploring the Dark Sector: Using the Monte Carlo
Method to find new parameters for the dark energy
state equation

Wilson Maruyama Santos de Paula

Supervisor: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Élcio Abdalla - Orientador (IFUSP)

Prof. Dr. Jorge E. Horvath (IAG/USP)

Prof. Dr. Horatiu S. Nastase (IFT/UNESP)

São Paulo

2019

Dedico as próximas páginas ao meu namorado, a minha família e aos meus amigos.

Vocês estiveram ao meu lado e o apoio de vocês foi importante, muito obrigado.

“Things are only impossible
until they’re not”

Jean-Luc Picard,
When the Bough Breaks

Resumo

Um dos maiores desafios atuais da cosmologia é entender a natureza da energia escura. Esse trabalho busca usar os dados das distâncias de supernovas do tipo 1a, da idade de galáxias com população estelar muito antiga, das oscilações acústicas de bárions e das anisotropias da radiação cósmica de fundo para encontrar através do método de Monte Carlo em cadeias de Markov os parâmetros livres de uma possível equação de estado para a energia escura ($\omega(z)$) em *redshift* $0 \leq z \leq 2000$. Entretanto esse trabalho não encontrou nenhum tipo de diferença significativa entre a equação de estado proposta e $\omega = -1$ dentro do intervalo de *redshift* estudado.

Palavras-chave: Cosmologia, Energia Escura, Método Monte Carlo, Parâmetros Cosmológicos.

Abstract

One of the current major challenges of cosmology is understand the nature of the dark energy. This work uses the data from supernovas type 1a, galaxies with old stellar populations, baryonic accustic oscilations and anisotropy of the cosmic microwave background to find through the Markov chains Monte Carlo method the free parameters of a possible equations of state for dark energy ($\omega(z)$) on redshift $0 \leq z \leq 2000$. However, this work did not find any type of significant difference between the equation of state suggested and $\omega = -1$ inside the interval of redshift studied.

Key-words: *Cosmological Parameters, Cosmology, Dark Energy, Monte Carlo Method.*

Conteúdo

Introdução	1
1 O universo FLRW	3
1.1 Construção da solução FLRW	3
1.2 O universo em expansão constante	6
1.3 As equações de Friedmann	9
1.3.1 Equação de Friedmann adimensional	10
1.4 A expansão do universo	12
1.5 Alguns modelos (simples) de universo	12
1.5.1 O universo da matéria	12
1.5.2 O universo da radiação	13
1.5.3 O universo Λ	13
1.6 Distâncias na Cosmologia	14
1.6.1 Distâncias própria e comóvel	14
1.6.2 Distância Luminosa	15
1.6.3 Distância Angular	15
1.7 Processos do início do universo	15
1.7.1 A função distribuição	16
1.7.2 A equação de Boltzmann	17
2 Os limites da solução FLRW	21
2.1 O problema da constante cosmológica	21
2.2 O problema da coincidência	23

2.3	A natureza da energia escura	24
2.3.1	Evidências observacionais da expansão do universo	24
3	Além do modelo ΛCDM	26
3.1	Um modelo cosmológico com $\omega(z)$	26
3.2	O método MCMC	28
3.3	O algoritmo MCMC	28
3.3.1	Eventos aleatórios	28
3.3.2	Variáveis Aleatórias	30
3.3.3	Cadeias de Markov	31
3.3.4	A teoria do método de Monte Carlo	32
3.3.5	A teoria do método MCMC	33
3.3.6	O algoritmo emcee	33
3.4	O modelo $\omega(z)$ a ser testado	36
4	Análise dos resultados das simulações	38
4.1	Supernovas tipo 1a	38
4.2	Relógios Cósmicos	41
4.3	Oscilações acústicas de bárions (BAO)	44
4.4	Anisotropias da radiação cósmica de fundo	46
4.5	Supernova 1a + Relógios Cósmicos + BAO + Anisotropias	48
	Conclusão	52
A	Valores dos <i>priors</i> usados no MCMC	53
B	Valores dos parâmetros de nuisance	55

Introdução

A cosmologia é um dos campos de conhecimento que mais atrai a curiosidade do ser humano. Tanto que pode-se dizer que o estudo dela começou quando o primeiro humano se perguntou o motivo do céu ser coberto de estrelas e a partir desse ponto ela evoluiu até chegar nos tempos atuais. Onde a luz do início do universo é detectada aqui na Terra e com essa informação, é possível construir um modelo de como o universo evoluiu a partir de determinado ponto na sua história.

O melhor modelo cósmológico usado atualmente para se entender o universo é estudado do ponto de vista da relatividade geral de Einstein [1] e é chamado de modelo Λ CDM. A relatividade geral é uma teoria de gravitação que unifica o espaço e o tempo em uma única entidade chamada espaço-tempo e o descreve de forma geométrica usando as equações de Einstein, estas que relacionam a energia e o momento do que está presente no universo com o formato dele.

O modelo Λ CDM tem algumas limitações e uma das principais dificuldades desse modelo é interpretar a natureza da energia escura e o problema da coincidência o qual pode ser resumido na afirmação que a humanidade vive em um período privilegiado pois ela pode medir a mudança do regime de evolução do universo e essa janela é muito pequena do ponto de vista cosmológico.

Para resolver esse problema há um esforço para redefinir a função de estado da energia escura. Uma das possíveis maneiras de se fazer isso seria propor algum tipo de função com parâmetros livres que possam ser ajustados de acordo com algum tipo de observação. Esse trabalho pretende estudar um tipo de método de ajuste e testá-lo em uma função. O capítulo um se dedica a um pequeno resumo dos principais fundamentos da cosmologia

e de alguns conceitos usados posteriormente no trabalho. O capítulo dois dedica-se em explicar mais detalhadamente algumas das incompletudes do modelo Λ CDM. O capítulo três apresenta o método de Monte Carlo em cadeias de Markov o qual foi o método usado para tentar restringir os parâmetros da equação de estado proposta. Por fim, no capítulo quatro esse trabalho detalha quais os conjuntos de dados usados nesse algoritmo para realizar essa restrição de parâmetros, em seguida os resultados das simulações finais são apresentados.

Capítulo 1

O universo FLRW¹

A solução de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) para as equações de Einstein é usada na cosmologia como o modelo básico de um universo que obedece o princípio cosmológico. Esse princípio enuncia que a distribuição de matéria no universo é homogênea e isotrópica [7] quando observada em escalas suficientemente grandes, ou seja maiores do que 300 milhões de anos luz [5]. Apesar disso, para se obter um modelo ainda mais fidedigno deve-se levar em conta a expansão do universo [8] nessa solução. Nesse capítulo serão mostradas algumas das ferramentas fundamentais da cosmologia e, de forma breve, os principais resultados clássicos dessa área de estudo.

1.1 Construção da solução FLRW

Para se construir a métrica da solução FLRW pode-se partir de um espaço-tempo plano e que obedece o princípio cosmológico e a partir dele extender o conceito para um caso mais geral onde o espaço-tempo tenha alguma curvatura, que pode ser entendida como a medida de quanto esse espaço-tempo não é plano, e que ele tenha um fator de escala que seja dependente do tempo, como a geometria de um espaço é codificada em sua métrica [9]. Então, essa métrica representa um espaço-tempo homogêneo e isotrópico que é uma solução para as equações de Einstein.

¹Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

O espaço-tempo homogêneo e isotrópico mais simples possível é o espaço de Minkowski, seu elemento de linha é $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ e sua métrica é escrita como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Apesar dessa métrica representar um espaço-tempo homogêneo e isotrópico esse não é o tipo de universo que interessa para a cosmologia como objeto de estudo. Para deixar essa métrica completa é necessário encontrar uma maneira de representar a expansão do universo na métrica. É importante notar que o tensor métrico da relatividade geral é representado por diferentes tipos de assinatura, nesse trabalho se aterá a utilizar a forma $(-, +, +, +)$.

A expansão do universo pode ser entendida como o aumento da distância entre dois pontos desse universo ao longo do tempo, pode-se imaginar essa expansão como se houvesse uma gráticula que medisse a escala do universo e ela aumentasse ao longo do tempo, como representado na figura 1.1.

Figura 1.1: Diagrama esquemático da expansão do universo, onde $a(t)$ seria o fator de escala dependente do tempo. Nessa figura a expansão do universo ocorre quando $\Delta t > 0$ e é representado pelo aumento da grade.

O fator de escala $a(t)$ é uma grandeza adimensional em cada uma das coordenadas espaciais da métrica e representa o quanto a escala dessa coordenada muda conforme

o tempo t evolui. O fator de escala é uma grandeza que é multiplicada em cada uma das dimensões espaciais do universo então é possível reescrever a métrica diretamente levando-se em consideração $a(t)$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

A métrica 1.2 representa um universo plano, homogêneo e isotrópico que está em expansão. O elemento de linha nesse espaço é escrito como $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Existem outras métricas que podem representar esse tipo de espaço-tempo, para se ter uma noção de qual seria a melhor métrica para representar o universo é necessário procurar o caso mais geral possível e então escolher qual é a métrica mais adequada. Um dos critérios para essa escolha é considerar a curvatura do espaço-tempo.

Para se obter essa métrica deve-se considerar a distância entre dois pontos no espaço e a partir deles procurar o elemento de linha desse espaço e desse elemento de linha obter a métrica. Pode-se começar imaginando que o espaço tridimensional está na superfície de uma hyper esfera quadridimensional de raio $R = 1$. Portanto a distância entre dois pontos é dada por $\mathcal{L} = \int d\ell$, onde o elemento de linha é dado por $d\ell^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi)$. Usando $\sin \psi = r$ e fazendo a substituição em $d\ell^2$ é obtido:

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi). \quad (1.3)$$

É possível generalizar a métrica 1.3 para um espaço com uma curvatura arbitrária qualquer adicionando-se um termo $\mathcal{K}$ chamado de constante de curvatura, dessa forma o elemento de linha pode ser reescrito da forma:

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \mathcal{K}r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi). \quad (1.4)$$

Devido as propriedades de homogenia e isotropia do espaço-tempo existem apenas 3 tipos espaços curvos que manteriam essas características[4]. Estes seriam o espaço plano ($\mathcal{K} = 0$), espaço com curvatura positiva ($\mathcal{K} = +1$) e com curvatura negativa ($\mathcal{K} = -1$).

Inserindo o elemento de linha 1.4 na parte espacial da métrica 1.2 o elemento de linha de um espaço-tempo curvo é obtido, que está em expansão e que é homogêneo e isotrópico:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \mathcal{K}r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi \right). \quad (1.5)$$

Onde $\mathcal{K}$ pode assumir três valores:

$$\mathcal{K} = \begin{cases} 1 & \text{Curvatura positiva (espaço-tempo fechado),} \\ 0 & \text{Sem curvatura (espaço-tempo aberto),} \\ -1 & \text{Curvatura negativa (Espaço-tempo aberto).} \end{cases}$$

A métrica obtida a partir do elemento de linha 1.5 é chamada de Friedmann-Robertson-Walker e foi derivada pela primeira vez em 1922 [10] por Friedmann. Posteriormente ela foi derivada independentemente em [11] [12] [13].

A medida da curvatura do universo é um resultado que foi obtido recentemente [14] e seu resultado é um valor muito próximo de $\mathcal{K} = 0$, ou seja o universo pode ser considerado como plano. Por conta desse resultado convém utilizar a métrica 1.2 para desenvolver os próximos resultados desse trabalho.

1.2 O universo em expansão constante

De posse da métrica 1.2 podemos derivar diversos resultados úteis que serão usados posteriormente, o primeiro a ser conhecido são os símbolos Christoffel que são dados por:

$$\Gamma^\mu_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (1.6)$$

Para calcular os símbolos para a métrica 1.2 é necessário apenas substituir as componentes dos tensores na expressão 1.6. Para tanto, é necessário conhecer a métrica na formulação contravariante, como $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \mathbb{1}$ e, levando em consideração a simetria da métrica $g^{\mu\nu}$, é dado por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2(t)} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Com isso basta substituir 1.2 e 1.7 em 1.6 para obtermos todos os símbolos de Christoffel, vale lembrar que os índices indicados por caracteres romanos (i, j, k, etc) indicam as coordenadas espaciais ($x^1, x^2, \dots, x^n$) e os índices gregos ($\alpha, \beta, \mu, \nu, etc$) indicam as coordenadas no espaço-tempo ($x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$). Os símbolos diferentes de zero são:

$$\Gamma^0_{ij} = \delta_{ij} \dot{a} a, \quad (1.8)$$

$$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \delta_{ij} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.9)$$

Conhecendo os símbolos é possível construir o tensor de Ricci e posteriormente escrever a equação de Einstein dessa métrica. O tensor de Ricci é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\zeta\lambda} \Gamma^\zeta_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\zeta\nu} \Gamma^\zeta_{\mu\lambda}. \quad (1.10)$$

Usando 1.8 e 1.9 obtem-se as componentes do tensor:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (1.11)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} (\ddot{a} a + 2\dot{a}^2). \quad (1.12)$$

O escalar de curvatura é calculado pela expressão $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e seu valor é:

$$\mathcal{R} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (1.13)$$

Com esses resultados pode-se finalmente encontrar a solução da equação de Einstein para essa métrica. As equações de Einstein descrevem a relação entre a geometria do universo, em um dos lados da equação, com o conteúdo desse universo que é expresso pelo

tensor de energia-momento do outro lado. Solucionar equações desse tipo é uma tarefa extremamente complexa que pode ser facilitada assumindo-se algum tipo de simetria no espaço-tempo. Essas suposições levam a diversos tipos de soluções exatas como, por exemplo, buracos negros estáticos ou em rotação [15], e um modelo de como o universo se expande, que é a solução que interessa a esse trabalho.

As equações de Einstein são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

Onde o termo Λ é chamado de constante cosmológica mas por hora não será considerado, ele foi introduzido por Einstein [1] originalmente para contrabalançar o efeito da gravidade nas soluções das equações de Einstein mas atualmente ele é o termo que indica a aceleração da expansão do universo. O sinal desse termo varia na literatura [3] [5] mas nesse trabalho ele será mantido positivo por coerência.

Já G é a constante gravitacional e por último o termo $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia momento de um fluido perfeito em equilíbrio e é descrito pelo tensor 1.15.

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Substituindo os símbolos e o tensor energia-momento as equações de Einstein podem ser resolvidas, com isso é possível entender como é a evolução temporal do universo. A componente temporal dessa equação, dada por $R_{00} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{00} = 8\pi T_{00}$, essa equação mostra a evolução do fator de escala e substituindo os termos novamente temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (1.16)$$

Pode-se ver da equação 1.16 que a evolução temporal do fator de escala do universo depende da densidade do mesmo.

Ainda com esses resultados é possível obter como seria a equação de continuidade nesse universo, para isso é necessário considerar a equação de continuidade só que na

forma covariante, então ao invés de se escrever $\frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\mu} = 0$ deve-se considerar a derivada covariante do tensor energia-momento:

$$\frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0. \quad (1.17)$$

O resultado obtido dessa derivada covariante é a lei de conservação para o universo FLRW.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} 3(p + \rho) = 0. \quad (1.18)$$

1.3 As equações de Friedmann

Os resultados obtidos na seção anterior foram derivados levando em consideração que o universo está em expansão constante mas há fortes indícios que a expansão do universo é na verdade acelerada [16], desse modo para se ter um modelo mais fidedigno do universo é necessário resolver as equações de Einstein com o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ utilizando a métrica 1.2. Os resultados obtidos em 1.10 e 1.13 continuam válidos, então é possível acoplar esses resultados na equação 1.14. Com isso é possível separar a parte temporal e espacial obtendo as equações de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (1.19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda. \quad (1.20)$$

Somando essas duas equações é possível encontrar uma equação de conservação do universo, para isso é conveniente considerar a constante de Hubble (H) que é definida como $H = \frac{\dot{a}}{a}$ conhecendo essa relação podemos encontrar outra relação entre o fator de escala e a constante de Hubble dada por $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$.

Essas duas relações são substituídas em 1.19 e 1.20 e usando a primeira equação na segunda e considerando $G = 1$ pode-se reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.21)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}p = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial(\rho a^3)}{\partial t} + p \frac{\partial a^3}{\partial t} = 0. \quad (1.23)$$

Com a equação da conservação na forma 1.23 é possível obter informação do comportamento da matéria e da radiação na expansão do universo, para isso basta separar a equação em dois casos. Para o caso da matéria, a pressão (p_m) é nula então basta resolver:

$$\frac{\partial(\rho_m a^3)}{\partial t} = 0. \quad (1.24)$$

A equação 1.24 só é válida para $\rho_m \propto a^{-3}$. Que é a taxa que a densidade da matéria decresce com relação ao fator de escala.

No caso da radiação, a pressão é dada por $p = \frac{\rho}{3}$ com isso a equação 1.21 fica:

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{a^4} \frac{\partial \rho_r a^4}{\partial t} = 0. \quad (1.26)$$

Por causa da equação 1.26 é possível notar que $\rho_r \propto a^{-4}$, disso é possível concluir que o universo se expande a conforme energia dele diminui.

É possível também escrever a equação 1.21 em termos da equação de estado que é uma constante adimensional dada por $\omega = \frac{p}{\rho}$. Dessa forma é possível obter ρ como uma função do fator de escala.

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + \omega) = 0. \quad (1.27)$$

1.3.1 Equação de Friedmann adimensional

É possível reescrever a equação de Friedman 1.19 de forma que facilite a integração numérica dessa equação, isso é útil para resolver algumas das propostas que serão apresentadas posteriormente nesse texto para fazer essa releitura da equação primeiro devemos reescrevê-la em função de diversas densidades que serão apresentadas nessa seção.

A primeira densidade a se definir é ρ_Λ :

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (1.28)$$

Como ρ é a densidade da matéria e energia combinados ele pode ser escrito como $\rho = \rho_m + \rho_r$ substituindo essa relação em 1.19:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda). \quad (1.29)$$

É conveniente definir a densidade crítica do universo. Que é a densidade onde o universo para de expandir quando é assumido que $\Lambda = 0$ e o universo é plano ($\mathcal{K} = 0$).

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.30)$$

A constante de Hubble está representada nesse caso por H_0 pois ela se refere ao valor dela no tempo presente. Conhecendo a densidade crítica podemos definir as densidades adimensionais:

$$\Omega_M = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad (1.31)$$

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad (1.32)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}. \quad (1.33)$$

A equação de Friedmann adimensional para o presente é obtida então multiplicando e dividindo a equação 1.29 por ρ_c :

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_M + \Omega_r + \Omega_\Lambda). \quad (1.34)$$

Como a equação 1.34 foi calculada no tempo presente ($a = 1$) para encontrar o caso geral basta lembrar que as densidades de matéria e radiação são proporcionais a a^{-3} e a^{-4} respectivamente (ver 1.24 e 1.26), com isso a equação de Friedmann adimensional mais geral possível é escrita da forma:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_\Lambda \right). \quad (1.35)$$

1.4 A expansão do universo

O fato de que o universo está em expansão foi descrito por Hubble [8] ao observar que as linhas de absorção das galáxias mais distantes eram maiores do que as linhas das galáxias no referencial de repouso. A esse fenômeno se deu o nome de Lei de Hubble-Lemaître que pode ser enunciada como: “*Todo objeto observado que está muito longe do observador está se afastando deste com uma velocidade proporcional ao seu redshift*”.

O efeito que o fator de escala exerce sobre o espaço pode ser mensurado através do *redshift* (z) que é definido por:

$$z = \frac{a_0}{a} - 1. \quad (1.36)$$

Nessa expressão o tempo presente é $z = 0$ o que implica em $a = a_0$ e conforme se vai ao passado z aumenta pois, por convenção, a_0 representa o fator de escala no presente e seu valor é unitário e $a < a_0$ nesse período.

1.5 Alguns modelos (simples) de universo

A equação 1.34 pode ter seus valores de densidades modificados arbitrariamente dessa forma pode-se modelar diversos casos de universo e como o fator de escala muda em cada um deles. Nessa seção serão abordados três exemplos didáticos para exemplificar esse comportamento da equação.

1.5.1 O universo da matéria

Neste primeiro caso, é considerado que o universo é dominado por matéria e, desta forma a densidade de matéria é a única que não se anula ($\Omega_M = 1$ e $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0$), com isso a equação 1.34 fica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{H_0^2}{a^3}. \quad (1.37)$$

Resolvendo a equação para $a(t)$ é obtida:

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (1.38)$$

No presente $a(t_0) = 1$, sabendo disso é possível saber como é a expansão do universo e a idade do universo. A idade do universo é obtida apenas invertendo a equação e ela vale $t_0 = \frac{2}{3H_0}$. A taxa de expansão é $H(t) = \frac{2}{3t}$ e como ela é inversamente proporcional a t pode-se dizer que nesse universo dominado por matéria a expansão é desacelerada.

1.5.2 O universo da radiação

Para o caso da radiação é considerado $\Omega_r = 1$ e $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$ a equação 1.34 fica:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^2}. \quad (1.39)$$

A solução dessa equação diferencial é:

$$a(t) = \sqrt{2H_0 t}. \quad (1.40)$$

Como no exemplo anterior a expansão é desacelerada nessa caso pois a constante de Hubble novamente é inversamente proporcional ao tempo ($H_0 = \frac{1}{2t}$) e a idade do universo é dada invertendo a solução para $a = 1$ e é dada por $t = \frac{1}{2H_0}$.

1.5.3 O universo Λ

Por último é considerado o caso que vale apenas a constante cósmologica, com isso vale $\Omega_\Lambda = 1$ e $\Omega_M = \Omega_r = 0$ a equação 1.34 fica:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0. \quad (1.41)$$

Cujo a solução dessa equação é uma exponencial da forma:

$$a(t) = e^{H_0 t}. \quad (1.42)$$

E ao contrário dos resultados anteriores $t = 0$ não implica em $a = 0$ e $a = 1$ implica em $t = 0$ o que indica que nessa solução a idade do universo é infinita.

1.6 Distâncias na Cosmologia

A noção da distância entre dois objetos é importante na cosmologia pois é dessa medida que várias evidências do comportamento do universo são obtidas. Por isso é necessário conhecer como algumas dessas distâncias e em qual contexto elas são obtidas.

1.6.1 Distâncias própria e comóvel

A maneira mais simples que se pode pensar em medir a distância entre dois objetos é comparando diretamente essa distância com algum tipo de padrão conhecido. Na cosmologia existem duas maneiras de se contabilizar isso: A primeira delas é medindo a distância própria que é a medida instantânea da distância entre dois objetos que é influenciada pela expansão do universo e a segunda seria medir a distância comóvel entre esses objetos. A distância comóvel não leva em conta essa expansão, desse modo uma maneira de se pensar como ela seria é com a ajuda da figura 1.1, imaginando o universo como tendo uma espécie de *grid* que aumenta conforme ocorre a expansão mas tem um número fixo de passos a distância comóvel seria como contar quantos passos existem de um objeto para o outro.

Um exemplo de distância comóvel importante que pode ser calculada facilmente seria a de um fóton viajando pelo universo sem interagir com nada desde $t = 0$, considerando que a trajetória dele é paralela ao eixo x a geodésica desse fóton é dada pela expressão $ds^2 = -dt^2 + a(t)dx^2 = 0$, isso leva para:

$$\int_0^{x_0} dx = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \equiv \eta. \quad (1.43)$$

Onde η é chamado de tempo conforme e como pode-se ver da expressão 1.43, dessa expressão também é possível ver que a função é monotonicamente crescente. O tempo conforme é também mais conveniente de se usar na cosmologia pois ele pode ser descrito em termos do fator de escala. Por último pode-se usar essa equação para definir o horizonte comóvel já que dois eventos separados por uma distância maior que η não estão casualmente conectados.

1.6.2 Distância Luminosa

A distância luminosa é uma das medidas mais importantes para a cosmologia. Com ela é possível, por exemplo, associar a luminosidade de supernovas 1a com a taxa de expansão do universo [17] [18]. Essa medida é definida pela razão entre a magnitude absoluta e a magnitude aparente de um objeto astronômico, a cosmologia expressa essa medida com a razão entre a luminosidade absoluta L e o fluxo F desse mesmo objeto.

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}. \quad (1.44)$$

1.6.3 Distância Angular

A distância angular é uma das medidas mais clássicas da astronomia e é usada para se medir anisotropias na radiação cósmica de fundo, ela é obtida medindo o ângulo (θ) de um objeto do qual se conhece a largura (ℓ), vale dizer que o ângulo desse objeto deve ser pequeno.

$$d_A = \frac{\ell}{\theta}. \quad (1.45)$$

Para se obter essa distância em um universo expandindo é necessário considerar o tamanho comóvel do objeto ($\ell' = \ell/a$) e o redshift de forma que a distância se torna:

$$d_A = \frac{\ell'}{1+z}. \quad (1.46)$$

1.7 Processos do início do universo

A solução FLRW admite que o universo logo no seu início era extremamente denso e quente nesse período também ocorreram os fenômenos responsáveis pela formação e distribuição de matéria como ela é hoje no universo. Alguns dos diversos fenômenos que ocorreram nesse período de tempo foram a formação das primeiras partículas e a recombinação dos elétrons, neutrons e prótons no primeiros átomos leves. Para se entender

esses fenômenos é necessário algum conhecimento das equações de Boltzmann que são apresentadas nas próximas seções.

1.7.1 A função distribuição

A função de distribuição é uma função $f(t, \vec{x}, \vec{p})$ do tempo, posição e momento próprio cujo os valores estão no espaço de fase e que pode ser escrita como uma densidade de probabilidade da forma:

$$dP(t, \vec{x}, \vec{p}) = f(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{p}}{\mathcal{N}}. \quad (1.47)$$

Essa função dá a probabilidade de se encontrar uma partícula num determinado tempo t dentro de um volume $d^3\vec{x} d^3\vec{p}$ normalizado por $\mathcal{N}$.

Para determinar o fator de normalização pode-se imaginar uma partícula confinada em um volume L^3 tem os autofunções $(u_{\vec{p}}(\vec{x}))$ do seu operador momento ($\hat{p} = -i\hbar\nabla$) dado por:

$$-i\hbar\nabla u_{\vec{p}}(\vec{x}) = \vec{p}u_{\vec{p}}(\vec{x}). \quad (1.48)$$

Assumindo que $u_{\vec{p}}(\vec{x}) = u_x(x)u_y(y)u_z(z)$ é possível resolver a equação por separação de variáveis, dessa forma as autofunções são:

$$u_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \exp\left(\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}\right). \quad (1.49)$$

O termo $\frac{1}{L^{3/2}}$ é a normalização da autofunção. Por causa da simetria todas as coordenadas se comportam da mesma maneira, logo é possível trabalhar nesse problema apenas na coordenada x . Como a partícula esta confinada em uma caixa de lado L então $u_x(0) = u_x(L)$ isso implica que o momento dessa partícula é quantizado e vale $p_x = \frac{2\pi\hbar n}{L}$, onde n é um numero inteiro.

Um espaço de fase que contem um único estado é descrito por $\Delta(p_x L) = 2\pi\hbar = h$, com isso é possível calcular o menor volume possível de um espaço de fase.

$$\mathcal{V} = \Delta(p_x L)\Delta(p_y L)\Delta(p_z L) = h^3 = \mathcal{N}. \quad (1.50)$$

É impossível para uma partícula estar precisamente num ponto $(\vec{p}, \vec{x})$ do espaço de fase mas no menor volume possível ($\mathcal{V}$) ao redor desse ponto não, por causa disso a densidade de probabilidade pode ser escrita como:

$$dP(t, \vec{x}, \vec{p}) = f(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1.51)$$

1.7.2 A equação de Boltzmann

A função de distribuição é necessária para o entendimento da equação de Boltzmann pois ela é expressa na forma:

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (1.52)$$

Onde f é a função de distribuição de uma partícula e $C[f]$ é o termo que descreve como é a interação das partículas que constituem o sistema que se quer descrever. Como $f(t, \vec{x}, \vec{p})$ então a derivada total dessa função é dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \nabla_{\vec{p}} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} f \equiv \hat{L}(f). \quad (1.53)$$

Nessa equação $\vec{F}$ é a força agindo nessa partícula e $\vec{v}$ é a velocidade da mesma, por fim $\hat{L}$ é denominado operador de Liouville.

Considerando f como uma função covariante expressa como $f = f(x^\mu, P^\mu)$ podemos tomar a derivada total de f em relação ao parâmetro afim λ :

$$\frac{df}{d\lambda} = P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \equiv \hat{L}_{\text{rel}}(f). \quad (1.54)$$

Levando em conta que por causa do princípio cosmológico f não pode depender da posição no espaço e que P^0 se relaciona com P^i através da igualdade $g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -m^2 c^2$ a equação 1.54 pode ser reescrita como:

$$P^0 \frac{\partial f}{\partial t} - \Gamma^i_{\mu\rho} P^\mu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^i} = 0. \quad (1.55)$$

A equação 1.55 é denominada de equação de Boltzmann sem colisão.

A equação de Boltzmann com colisões

A equação de Boltzmann é útil para se entender alguns dos fenômenos que ocorreram no início do universo como a nucleosíntese do big bang, a recombinação e para o cálculo de abundância de relíquias da matéria escura. Isso se dá porque essa equação é especialmente útil para se entender processos de aniquilação e espalhamento, para isso deve-se considerar uma interação do tipo:

$$1 + 2 \Leftrightarrow 3 + 4. \quad (1.56)$$

Onde 1, 2, 3 e 4 são tipos diferentes de partículas. A equação de Boltzmann para a partícula 1 é:

$$\frac{df_1}{d\lambda} = C[f]. \quad (1.57)$$

Utilizando t como o parâmetro afim λ o termo P_1^0 aparece e utilizando a equação 1.57 na equação 1.55 se obtém:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - H p_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} = \frac{1}{P_1^0} C[f]. \quad (1.58)$$

A equação de Boltzmann relaciona a taxa de mudança da quantidade de uma partícula com a taxa de produção e aniquilação da mesma, dessa forma se o número da densidade n de uma partícula for de interesse e desconsiderando a coordenada 0 da equação 1.58 é possível reescrever a equação de Boltzmann para um universo se expandindo para as partículas 1, 2, 3 e 4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = & \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2(2\pi\hbar)^3 E_1} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2(2\pi\hbar)^3 E_2} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2(2\pi\hbar)^3 E_3} \int \frac{d^3 \vec{p}_4}{2(2\pi\hbar)^3 E_4} \\ & \times (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \\ & \times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

A parte esquerda da equação 1.59 mostra que a variação do número de partículas com a interação. Do lado direito da equação as integrais as integrais representam a soma dos momentos sobre o volume de cada um dos espaços de fase o termo de energia é necessário

para a integral ser quadri-dimensional sobre o espaço de fase dentro da esfera fixada por $E^2 = p^2 + m^2$ essa escolha faz com que o volume da esfera $\frac{d^3\vec{p}}{2E}$ seja covariante e como esses momentos são conservados se faz necessário ter os termos com o delta de Kronecker, por fim o termo $|\mathcal{M}|$ nessa mesma linha representa a física das interações entre as partículas.

A última linha da equação representa o balanço das partículas, quanto maior o número de partículas 3 e 4 maior o número de partículas 1 sendo produzidas, como a referência dessa equação é a partícula 1 esse termo é escrito como $f_3 f_4 - f_1 f_2$. Também nessa linha existem os termos $1 + f_i$ e $1 - f_j$ que se referem a fenômenos decorrentes do princípio da exclusão de Pauli [20].

Por causa das condições iniciais do universo é possível fazer algumas simplificações nessa equação. A primeira delas é considerar a energia do sistema como menor que o potencial químico $(E - \mu)$, nesse caso a função de distribuição se torna:

$$f(E) \rightarrow e^{\frac{\mu}{T}} e^{-\frac{E}{T}}. \quad (1.60)$$

Pode-se reescrever a última linha da equação 1.59 como:

$$f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) \rightarrow e^{-\frac{E_1 + E_2}{T}} \left(e^{\frac{\mu_3 + \mu_4}{T}} - e^{\frac{\mu_1 + \mu_2}{T}} \right). \quad (1.61)$$

Também é conveniente usar o número de partículas ao invés de μ_i , com isso vale a seguinte relação:

$$n_i = g_i e^{\mu_i/T} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T}. \quad (1.62)$$

Nessa equação g_i é a degenerescência da partícula i . O número de partículas i é definido por:

$$n_i^0 \equiv g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T} \begin{cases} g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} & \text{quando } m_i \gg T, \\ g_i \frac{T^3}{\pi^2} & \text{quando } m_i \ll T. \end{cases} \quad (1.63)$$

É possível reescrever $e^{\mu_i/T}$ como n_i/n_i^0 simplificando novamente 1.61:

$$f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) \rightarrow e^{-\frac{E_1 + E_2}{T}} \left(\frac{n_3 n_4}{n_3^0 n_4^0} - \frac{n_1 n_2}{n_1^0 n_2^0} \right). \quad (1.64)$$

Definindo a seção de choque térmica média como:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \nu \rangle \equiv & \frac{1}{n_1^0 n_2^0} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2(2\pi\hbar)^3 E_1} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2(2\pi\hbar)^3 E_2} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2(2\pi\hbar)^3 E_3} \int \frac{d^3 \vec{p}_4}{2(2\pi\hbar)^3 E_4} e^{-\frac{E_1+E_2}{T}} \\ & \times (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Finalmente é possível reescrever a equação de Boltzmann como:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^0 n_2^0 \langle \sigma \nu \rangle \left(\frac{n_3 n_4}{n_3^0 n_4^0} - \frac{n_1 n_2}{n_1^0 n_2^0} \right). \quad (1.66)$$

Essa equação também é um caso especial da equação de ionização de Saha. Para cada um dos processos que são possíveis de serem estudados por essa equação muda-se quais são os componentes 1, 2, 3 e 4, a tabela 1.1 mostra quais são os componentes de cada reação.

	1	2	3	4
Razão protón-neutron	n	ν_e ou e^+	p	e^- ou $\bar{\nu}_e$
Recombinação	e	p	H	γ
Produção de matéria escura	X	X	l	l

Tabela 1.1: Lista dos componentes a serem substituídos na equação 1.66, retirada de [2].

Capítulo 2

Os limites da solução FLRW

O universo FLRW é uma solução das equações de Einstein que produz resultados condizentes à vários experimentos tanto que essa solução é chamada de “modelo padrão da cosmologia”, ou modelo Λ CDM que significa que esse modelo leva em consideração a constante cosmológica (Λ) e a matéria escura (*Cold Dark Matter*) que representa aproximadamente 85% da matéria do universo [14]. Apesar disso existem alguns problemas nesse modelo, por exemplo, o valor de Λ que difere do observado experimentalmente [22]. Nesse capítulo serão apresentados dois problemas de ajuste fino desse modelo e uma alternativa para entendê-lo melhor.

2.1 O problema da constante cosmológica

Uma das possíveis interpretações do que é a constante cosmológica no modelo Λ CDM é que ela representa a densidade de energia do vácuo, por ela ser relacionada com a densidade é possível definir:

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} \equiv -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Dessa forma, as equações de Einstein 1.14 podem ser reescritas na forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}). \quad (2.2)$$

O termo da direita dessa equação é interpretado como o tensor energia-momento do espaço, levando-se em consideração a energia do vácuo ($T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}$), o termo T_{00} do tensor 1.15 é a densidade (ρ), dessa forma é possível pensar de forma análoga com relação ao tensor $T'_{\mu\nu}$ e dizer que o termo T'_{00} se refere a densidade (ρ') total, o qual pode ser separada na densidade total do universo (ρ) e na densidade do vácuo (ρ_{Λ}).

$$\rho_{\Lambda} = T_{00}^{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (2.3)$$

O valor de diversas constantes astrofísicas pode ser encontrado no catálogo PDG [23] e com esse dado é possível obter, em unidades do SI, quanto vale cada uma dessas constantes:

$$\frac{c^2}{3H_0} = 6,20 \pm 0,17 \times 10^{51} \text{ m}^2, \quad (2.4)$$

$$\Omega_{\Lambda} = 0,692 \pm 0,012. \quad (2.5)$$

A densidade de Λ no universo é dada por $\Omega_{\Lambda} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_c}$, como a densidade crítica é dada por 1.30 o valor de ρ_{Λ} é dado por:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{3H_0\Omega_{\Lambda}}{8\pi G} = 5,9 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}. \quad (2.6)$$

É conveniente expressar esse valor em unidade de eV para futuras comparações com outros métodos de cálculo desse valor, como $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ o valor da densidade do vácuo é $c^2\rho_{\Lambda} = 3,32 \text{ GeV m}^{-3}$.

Mesmo com esse resultado, ainda não se pode compará-lo diretamente com o resultado obtido pela mecânica quântica. Para isso, precisa-se de outro fator de correção dados por: $1\text{m} = \hbar c(5,08 \times 10^{-6} \text{ eV}^{-1})$, com isso finalmente tem-se que:

$$c^2\rho_{\Lambda} = \frac{(2,24 \times 10^{-3} \text{ eV})^4}{(\hbar c)^3}. \quad (2.7)$$

O valor de ρ_{Λ} previsto pela mecânica quântica [21] é:

$$c^2\rho_{\Lambda}^{\text{qm}} \approx \frac{(1,22 \times 10^{28} \text{ eV})^4}{(\hbar c)^3}. \quad (2.8)$$

Comparando o valor das duas constantes é possível estimar o quão bom é o valor obtido em 2.7.

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda^{\text{qm}}} = \left(\frac{2,24 \times 10^{-3}}{1,22 \times 10^{28}} \right)^4 \approx 1,8 \times 10^{-124}. \quad (2.9)$$

Essa diferença entre os valores caracteriza um problema para o modelo padrão da cosmologia funcionar de acordo com a mecânica quântica, que é uma teoria muito bem estabelecida. Para que houvesse mais coerência entre esses modelos valor de ρ_Λ precisa ser alterado em muitas ordens de grandeza a menos do que o seu valor esperado.

2.2 O problema da coincidência

Esse problema se dá ao fato que se você comparar as densidades de energia escura (1.33) e matéria (1.31) no nosso universo você observa a seguinte proporção entre elas:

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_m} \propto a^3. \quad (2.10)$$

Conhecendo essa proporção é possível supor que no início do universo como a era muito pequeno a energia escura tinha impacto negligível na dinâmica do universo e consequentemente no futuro essa mesma energia vai ser tão grande que a influência da matéria e da radiação poderão ser desprezadas.

A relação entre as densidades de energias tem um breve período de transição entre os regimes, onde a energia escura não tinha tanta influência na evolução do universo e quando esta se tornará o fator mais influente nessa evolução. E o período em que o ser humano é capaz de medir essa mudança de regime é justamente o período que vivemos hoje, por isso o nome de “problema da coincidência” já que é improvável que fatores aleatórios sejam responsáveis por determinar que as condições iniciais do início do universo teriam sido tais que evoluíram para o cenário atual.

2.3 A natureza da energia escura

Ambos os problemas decritos anteriormente estão de alguma forma relacionados com a natureza da energia escura e, portanto, é razoável supor que conhecendo melhor a natureza dela seria possível obter uma solução para esses problemas ou até mesmo encontrar um novo modelo que explicasse melhor a dinâmica da evolução do universo. Existem duas principais hipóteses de como é a natureza da energia escura: a primeira delas seria de que essa energia é um campo escalar permeando o universo; a segunda é que a energia escura é uma propriedade do próprio espaço tempo. Apesar dessas duas alternativas serem muito diferentes, ambas podem ser representadas pela constante cosmológica da equação 1.14.

2.3.1 Evidências observacionais da expansão do universo

Atualmente, diversos experimentos têm indicado a expansão do universo o que pode indicar a existência da energia escura, pois no modelo Λ CDM a expansão acelerada do universo seria causada por ela alguns desses experimentos são.

Observação de supernovas tipo 1a:

Supernovas, em especial as do tipo 1a, são consideradas como velas padrão do universo para se medir as distâncias. Como ao se medir essas distâncias se averigou através do *redshift* dos diversos objetos observados que a expansão do universo é, de fato, acelerada. Essa observação é consistente com o modelo Λ CDM e em 2011 os cientistas pioneiros nessa descobertas foram laureados com o prêmio Nobel [27].

Radiação cósmica de fundo:

A radiação cósmica de fundo pode ser interpretada uma foto de como o universo era antes das estruturas se formarem e as anisotropias presentes nele seriam decorrentes da energia escura. Os experimentos WMAP [14] e Planck [28] estudaram essa radiação e com base nesses dados estimaram, ambos, a composição do universo como sendo cerca de 70% energia escura.

Oscilações acústicas de bárions (BAO):

Os BAO são perturbações na densidade de matéria do universo que servem como uma régua padrão para as medidas cosmológicas. Essas oscilações se formam porque bárions eram acoplados aos fótons antes do período de recombinação e as perturbações que esse fluido sofria ficaram impressas no CMB na forma de anisotropias. No período de recombinação os bárions ficaram a uma certa distância das concentrações de matéria escura, a essa distância se dá o nome de “horizonte acústico”.

Por causa dessas características, as medidas dos BAO são úteis para restringir os parâmetros cosmológicos e, dessa forma, ajudam na compreensão da natureza da energia escura.

Lentes gravitacionais fracas:

Quando a luz passa próximo das estruturas do universo ela tem seu caminho distorcido por causa dos efeitos gravitacionais dos objetos presentes ao redor de sua trajetória, a esse efeito se dão dois nomes *weak* e *strong lensing*. Como o nome pode indicar o efeito de *strong lensing* ocorre quando a luz de um objeto passa por outro objeto muito massivo e a distorção é tão grande que pode-se ver o objeto original completamente distorcido ou até mesmo em outros ângulos.

Já o *weak lensing* é um efeito mais comum de ser observado sua ação distorce o brilho, tamanho e formato do objeto original. O estudo desses efeitos de lente ajudam a entender a distribuição de matéria escura no universo e conseqüentemente mostra a influência da energia escura na formação das grandes estruturas do universo.

Capítulo 3

Além do modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM explica de maneira adequada um universo que se expande de maneira acelerada, apesar disso existem alguns problemas de ajuste fino nesse modelo que estão relacionados com a energia escura. Portanto, é interessante buscar outros modelos para o universo. O entendimento da natureza da energia escura é um dos pontos de partida adequado já que esta é responsável por todos os fenômenos interessantes já mencionados. Esse capítulo mostra uma proposta de uma equação de estado da energia escura que varia com o tempo ($\omega(z)$) e como é possível testá-la e restringir seus parâmetros livres.

3.1 Um modelo cosmológico com $\omega(z)$

As observações atuais das supernovas de tipo Ia mostram que a expansão do universo ocorre. O modelo Λ CDM considera que essa expansão é decorrente da existência de uma constante cosmológica e que o valor da equação de estado é $\omega = -1,01 \pm 0,04$ [23]. Devido ao avanço dos experimentos atuais é possível testar as características da equação de estado e tentar reconstruí-la com uma dependência do *redshift* e isso seria fundamental para distinguir um modelo com ω constante de um em que ele varia [29].

O modelo de equação de estado proposto é obtido separando o *redshift* em diversos bins e considerando o valor da equação de estado constante em cada um deles, cada um desses bins é ligado por uma função tangente hiperbólica que foi escolhida com o intuito

de tornar $\omega(z)$ uma função suave e assim evitar um possível problema número em alguma parte posterior do trabalho. Dessa forma a equação de estado pode ser escrita como:

$$\omega(z) = \begin{cases} \omega_n & \text{quando } z_a \leq z \leq z_b - \epsilon, \\ \omega_n + \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2} \left(1 + \tanh \left(z - \frac{z_a + z_b - z_a}{2} \right) \right) & \text{quando } z_b - \epsilon < z < z_b + \epsilon, \\ \omega_{n+1} & \text{quando } z_b + \epsilon \leq z. \end{cases} \quad (3.1)$$

Na equação de estado 3.1 o termo s se refere a inclinação da tangente hiperbólica, o intervalo onde a função se comporta como tangente hiperbólica também foi escolhido de modo a ser o menor possível e aberto, dessa maneira eventuais influências que essas partes da equação teriam na restrição dos valores de ω_n seriam reduzidas.

Figura 3.1: Exemplo de plot da equação 3.1, onde $\omega_1 = -1,25$, $\omega_2 = -0,75$, $z_a = 0$, $z_b = 1$, $\epsilon = 0,2$ e $s = 0,05$. A linha pontilhada vermelha indica o valor da equação de estado não modificada e as linhas pontilhadas em cinza indicam o intervalo onde 3.1 é uma tangente hiperbólica.

Conhecendo essa possível equação de estado falta escolher um método para restringir os vários parâmetros livres que ela possui e definir como será o formato da equação de estado pode-se ver que nesse caso os valores mais interessantes são os de ω_n , desse os bins definidos por z_i serão fixados e a inclinação s também o será.

3.2 O método MCMC

Para restringir os parâmetros da equação 3.1 é necessário encontrar uma maneira de comparar algum resultado obtido por essa equação com as observações. Existem diversas maneiras diferentes de se fazer isso que já foram apresentadas na literatura [30] [31] [32] [33], esse trabalho usará um algoritmo de MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) *open source* disponibilizado em *Python* chamado **emcee** [34] para tentar restringir os parâmetros livre de uma equação de estado semelhante a 3.1 de modo semelhante as referências [29] [35].

O MCMC é um tipo de algoritmo de sorteio baseado em uma distribuição de probabilidade, ele consiste em se construir uma cadeia de Markov em que a distribuição de equilíbrio seja a distribuição ideal daquilo que se espera, dessa forma quanto mais interações o algoritmo realiza nessa cadeia mais próximo os resultados serão descritos por essa distribuição. Esse tipo de abordagem para a restrição de parâmetros é especialmente interessante no problema de se restringir os valores livre da equação de estado já que há muitos parâmetros livres na equações.

3.3 O algoritmo MCMC

O método de Monte Carlo foi desenvolvido para solucionar diversos problemas computacionais que surgiram durante o desenvolvimento das primeiras armas atômicas em Los Alamos [36] em específico um problema para se encontrar o equilíbrio de um líquido com uma fase gasosa [37] por causa disso ele é construído utilizando-se de diversas ferramentas da estatística, dessa forma cabe um pequeno apanhado apresentando-as de forma a clarificar o entendimento do MCMC que foi usado para esse trabalho.

3.3.1 Eventos aleatórios

Como foi dito anteriormente o método de Monte Carlo é um algoritmo de sorteio, ou seja ele é um cálculo numérico de uma série de eventos aleatórios cada um desses sorteios é um *evento*, um evento pode ser elementar ou composto. Um evento composto é um

evento definido por um certo número de eventos elementares, já um evento elementar é um evento que não pode ser dividido em outros eventos. Por exemplo, o resultado de uma única rolagem de um dado é um evento elementar já o resultado da rolagem de seis dados seguidos seria um evento composto.

Dado um evento elementar E cujo os resultados sejam aleatórios e dados pelos valores $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ é possível associar a cada resultado E_i um número p_k denominado *probabilidade* tal que:

$$0 \leq p_k \leq 1. \quad (3.2)$$

De modo que se o i -ésimo evento nunca acontecer $p_i = 0$ e se um evento sempre acontecer $p_i = 1$. Uma notação mais usual para a probabilidade de um evento E_i seria:

$$P(E_i) = p_i. \quad (3.3)$$

A probabilidade de um determinado evento seja regido por uma série de propriedades, listadas abaixo.

1. $P(E_i \text{ e/ou } E_j) \leq p_i + p_j$;
2. E_i e E_j são ditos mutualmente excludentes se e somente se $E_i \Rightarrow \overline{E_j}$ (E_i implica em não E_j) e vice versa.

Se E_i e E_j são mutualmente exclusivos vale:

$$P(E_i \text{ e } E_j) = 0,$$

$$P(E_i \text{ ou } E_j) = p_i + p_j.$$

3. Se todos os possíveis eventos de um conjunto de eventos são enumerados então todos esses eventos podem ser mutualmente excludentes entre si.

$$P(\text{para qualquer } E_i) = \sum_i p_i = 1.$$

Considerando um experimento composto de apenas dois eventos elementares E_i e F_j com probabilidades p_{1i} e p_{2j} que obedecem as propriedades 1, 2 e 3 e cujo o resultado de um evento composto seja dado por (E_i, F_i)

4. A probabilidade do evento composto (E_i, F_j) é chamada de probabilidade conjunta de E_i e F_j e é representada por p_{ij}
5. Se $p_{ij} = p_{1i}p_{2j}$, então E_i e F_j são eventos independentes.
6. Se os eventos E_i e F_j não são independentes então sua probabilidade de ocorrer é

$$p_{ij} = \sum_k p_{ik} \left(\frac{p_{kj}}{\sum_k p_{ik}} \right) = p(i) \left(\frac{p_{kj}}{\sum_k p_{ik}} \right).$$

onde $p(i)$ é chamada probabilidade marginal para que o evento E_i ocorra independentemente do segundo evento. Portanto:

$$\sum_i p(i) = \sum_i \sum_k p_{ik} = 1.$$

7. O fator $\frac{p_{ij}}{\sum_k p_{ik}}$ é chamado de probabilidade condicional e pode ser reescrito como $p(j|i)$ que é a probabilidade de que F_j dado que E_i já tenha ocorrido. Toda probabilidade conjunta pode ser dividida em uma probabilidade condicional e uma probabilidade marginal.

3.3.2 Variáveis Aleatórias

Considere que o resultado de um evento elementar aleatório E_i seja associado a um número real x_i esse número real é chamado de variável aleatória. O valor médio desse número é chamado de expectativa ou valor esperado da variável aleatória x e é dado por:

$$E(x) = \sum_i p_i x_i \equiv \langle x \rangle = \mu. \quad (3.4)$$

Agora considere a função $g(x_i) = g_i$ onde x_i corresponde a um conjunto contável de eventos com probabilidade p_i , como x_i é uma variável aleatória g_i também é uma variável aleatória que tem uma expectativa dada por $\langle g_i \rangle = \sum_i p_i g(x_i)$.

Da definição de função do valor esperado pode-se concluir que:

1. $\langle k \rangle = k'$, onde k e k' são constantes;
2. Dado as constantes k_1 e k_2 e as funções g_1 e g_2 vale $\langle k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) \rangle = k_1 \langle g_1 \rangle + k_2 \langle g_2 \rangle$;

3. Se g_1 for uma função linear então $\langle g_1(x) \rangle = g_1(\langle x \rangle)$.

Um uso para o valor esperado de uma variável aleatória é aplicá-lo a potências de x , isso é chamado de n -ésimo momento de x e é dado por $\langle x^n \rangle = \sum_i p_i x_i^n$.

Com isso é conveniente definir a variância de x :

$$\langle (x - \mu)^2 \rangle = \sum_i p_i (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \equiv \text{Var}(x). \quad (3.5)$$

E o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}. \quad (3.6)$$

A covariância entre duas variáveis aleatórias x e y é:

$$\text{cov}(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle. \quad (3.7)$$

O coeficiente de correlação entre x e y é dado por:

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(y)}}. \quad (3.8)$$

Onde $-1 \leq \rho \leq 1$.

3.3.3 Cadeias de Markov

Uma sequência de eventos aleatórios do tipo $E_1, E_2, \dots$ é uma cadeia de Markov quando a probabilidade de um evento E_i assumir determinado valor depende apenas do valor do evento anterior (E_{i-1}). O conjunto de valores que um evento E_i é chamado de espaço de estados da cadeia de Markov.

Se o espaço de estados dos resultados de um evento da cadeia de Markov é finito ($\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) podemos associar o resultado inicial a um vetor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de forma que $P(E_1 = x_i) = \lambda_i$ onde $i = 1, 2, \dots, n$ dessa forma pode-se associar a probabilidade de transição entre dois eventos com uma matriz M com elementos m_{ij} de forma que $P(E_n = x_i \text{ e } E_{n+1} = x_j) = m_{ij}$.

Caso o espaço de resultados de um evento seja contável mas infinito os vetores e matrizes dos resultados dos eventos serão infinitos. Caso o espaço de resultados de uma

cadeia de Markov não seja contável ao invés de um vetor e uma matriz de resultados, é possível associar o resultado de um evento e o resultado de dois eventos à distribuições de probabilidades.

3.3.4 A teoria do método de Monte Carlo

Considere uma série de eventos $E_1, E_2, \dots$ onde os resultados desses eventos são $x_1, x_2, \dots$ que são números independentes e obedecem a mesma distribuição de probabilidade. Dessa forma a expectativa de um determinado evento dessa série seria $\mu = E(g(x_i))$.

Suponha que é possível simular esses eventos de maneira independente e idêntica aos eventos originais de forma que são obtidos os eventos simulados $E'_1, E'_2, \dots$ todos com a mesma distribuição de probabilidades dos eventos E_i . Com isso é definido:

$$\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n g(E'_i). \quad (3.9)$$

, onde $N = \sum_{i=1}^n 1$.

A função $g(x_i)$ também é uma variável aleatória com média μ e variância dada por $\sigma^2 = \text{Var}(g(x_i))$ e pelo teorema do limite central se N for muito grande o valor de μ' pode ser aproximado por uma distribuição normal:

$$\mu' \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma/N)^2}} e^{-\frac{(g(x_i) - \mu)^2}{2(\sigma/N)^2}}. \quad (3.10)$$

Como μ' é o valor esperado das funções $g(x_i)$ então sua variância é dada por

$$\sigma'^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (g(E'_i) - \mu')^2. \quad (3.11)$$

As equações 3.9, 3.10 e 3.11 mostram que o método de Monte Carlo funciona com estatística básica. Esse método também obedece a lei do inverso da raiz quadrado, ou seja a precisão do método é inversamente proporcional a raiz quadrada do tamanho da amostra portanto a precisão é limitada. Para aumentar a precisão de uma simulação é necessário um aumento significativo do tamanho da amostra.

3.3.5 A teoria do método MCMC

A teoria do método de Monte Carlo e a teoria do MCMC são extremamente semelhantes, a única diferença é que o comportamento aleatório da cadeia de Markov muda como o desvio padrão é calculado. Supondo que os eventos $E_1, E_2, \dots$ fazem parte dessa cadeia e obedecem a mesma distribuição de probabilidade dos eventos E é possível supor que o teorema do limite central vale de forma que σ fica:

$$\sigma_{MCMC}^2 = \text{Var}(E_i) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{cov}(g(E_i), g(E_{i+k})). \quad (3.12)$$

Infelizmente na prática só é possível calcular o valor exato de σ_{MCMC}^2 em problemas simulando algum tipo de *toy model*. Apesar desse processo ser extremamente não trivial é possível entender o MCMC pois este tem por objetivo sortear um determinado número M e eventos do tipo E_i distribuídos de forma conhecida. Uma vez que o algoritmo tenha sorteado esses eventos simulados é possível fazer um histograma com os resultados dos eventos simulados e usá-los para obter o valor de E , em particular o valor esperado de $g(E)$ é:

$$\langle g(E) \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n g(E_i). \quad (3.13)$$

O MCMC é um algoritmo que tem como objetivo retirar uma amostra representativa de uma distribuição de aleatória dentro da distribuição de probabilidade de um determinado evento E .

3.3.6 O algoritmo emcee

O **emcee** é uma implementação em Python, estável, que utiliza um algoritmo de sorteio do conjunto invariante afim para o MCMC [34]. E ele tem como vantagem ser mais rápido que outros métodos existentes.

Esse algoritmo funciona utilizando um número n de cadeias de Markov que sorteiam eventos $S = E_i$ que tem distribuição de probabilidade baseada no sorteio anterior (E_{i-1}) dentro do conjunto de possíveis eventos $S = E_j$, onde $j \neq i$. A posição $i + 1$ de uma

determinada cadeia é denotado por E_k e seu valor é sorteado aleatoriamente do conjunto de possíveis valores ainda não sorteados.

Esse processo então é repetido para diversas cadeias de Markov que são executadas simultaneamente, cada uma delas obedecendo as condições mostradas anteriormente. Isso faz com que a convergência da cadeia para o valor mais provável seja mais rápida que um algoritmo usando apenas uma cadeia de Markov.

Um exemplo básico de como ajustar um modelo baseado nos dados

O funcionamento desse algoritmo é melhor explicado com um rápido exemplo como funciona o ajuste de uma função simples através de um conjunto de dados com uma incerteza subestimada. Seja $y(x)$ uma função como:

$$y = a \times x + b. \quad (3.14)$$

Onde $a = 0,5$ e $b = 2,5$.

Figura 3.2: Gráfico da função 3.14 juntamente com o conjunto de dados aleatórios gerados com o intuito de reconstruir essa função.

Conhecendo a função 3.14 um conjunto de dados foi gerado aleatoriamente sorteando pontos do eixo x e calculando um valor aleatório com sua distribuição centrada em $y(x)$ e com desvio $f = 0,25$ para representar o conjunto de dados. As incertezas foram subestimadas propositalmente (esse conjunto de dados pode ser visto na figura 3.2). Esse conjunto de dados foi então usado pelo código do MCMC para estabelecer os melhores valores possíveis para os parâmetros gerados pelo algoritmo **emcee**.

Figura 3.3: Distribuição de probabilidades dos parâmetros ajustados pelo MCMC para o exemplo da equação 3.14.

O MCMC funciona sorteando, para cada um dos pontos do conjunto de dados, valores para cada um dos parâmetros a serem ajustados pelo método. Esses valores devem estar

dentro de intervalos pré definidos denominados como *priors*. Após esse sorteio é realizado o cálculo da função nesse ponto e em seguida comparada com o valor do conjunto de dados nesse ponto. Esse processo é repetido por um número de vezes igual ao tamanho da cadeia de Markov que é definido no início do cálculo do algoritmo. Por fim o MCMC escolhe o melhor resultado para esse ponto e passa para o seguinte repetindo o processo.

O gráfico 3.3 mostra as distribuições de probabilidades dos valores ajustados na diagonal do gráfico. Também é possível também ver a correlação entre as variáveis ajustadas pelo MCMC, que são mostradas pelas distribuições bidimensionais que estão abaixo da diagonal. Caso dois parâmetros estejam correlacionados essa distribuição de resultados estará “espalhada” por toda a área do gráfico, na figura como não há correlação entre as variáveis cada uma das distribuições está bem definida.

Os valores que o código obteve para os parâmetros foram $a = 0,53021^{+0,04856}_{-0,04977}$ e $b = 2,28557^{+0,21562}_{-0,19676}$ que são muito próximos dos valores reais desse exemplo. O desvio dos dados gerados que está representado nesse gráfico por $\ln f = -1,34292^{+0,09811}_{-0,09396}$ que é $f \approx 0,26$, muito próximo do valor do desvio usado para gerar os dados ($f = 0,25$).

3.4 O modelo $\omega(z)$ a ser testado

O interesse desse trabalho, como dito anteriormente, é tentar restringir os parâmetros de uma equação de estado semelhante a 3.1, no caso algumas modificações foram feitas na equação com o intuito de verificar o comportamento dessa em certos intervalos do *redshift*. Desse modo a equação de estado testada no restante desse trabalho é da forma:

$$\omega(z) = \begin{cases} \omega_1 & \text{quando } z \leq z_1, \\ \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \left(1 + \tanh \left(z - \frac{z_1 + \frac{z_2 - z_1}{2}}{s} \right) \right) & \text{quando } z_1 < z < z_2, \\ \omega_2 & \text{quando } z_2 \leq z \leq z_3, \\ \omega_2 + \frac{\omega_3 - \omega_2}{2} \left(1 + \tanh \left(z - \frac{z_3 + \frac{z_4 - z_3}{2}}{s} \right) \right) & \text{quando } z_3 < z < z_4, \\ \omega_3 & \text{quando } z_4 \leq z. \end{cases} \quad (3.15)$$

O intervalo de *redshift* em que as simulações foram feitas vai de $z = 0$ até $z = 2000$

Figura 3.4: Exemplo do plot da equação 3.15, com os parâmetros mencionados no texto fixados. As linhas pontilhadas cinzas indicam os intervalos em que a função toma a forma da tangente hiperbólica.

e os valores dos ponto do *redshift* onde os bins são dados por $z_1 = 0,45$, $z_2 = 0,55$, $z_3 = 0,95$ e $z_4 = 1,05$. A inclinação da função tangente hiperbólica também será fixada em $s = 0,01$. Desse modo é possível construir um exemplo de como essa equação de estado se comportaria com $\omega_1 = -1,1$, $\omega_2 = -0,95$ e $\omega_3 = -1,05$. A figura 3.4 mostra como a equação de estado se comportaria usando os valores de exemplo anteriores.

Com os parâmetros livres da equação de estado definidos e o método para restringir seus valores estabelecido falta apenas definir o conjunto de dados que será usado para se aferir a qualidade dos resultados obtidos durante a simulação da evolução temporal dessa equação de estado.

Capítulo 4

Análise dos resultados das simulações

Para verificar se os parâmetros que foram restringidos da equação 3.15 são os melhores possíveis é conveniente programar um código que use o **emcee** para restringir parâmetros já conhecidos através de outros experimentos, e comparar esses resultados. Nesse capítulo serão apresentados os experimentos usados para essa comparação bem como o valor obtido utilizando-se o **emcee**. Por fim serão apresentados os resultados que consideraram a equação estado proposta nesse trabalho.

As simulações foram programadas para que o máximo de condições possíveis fosse igual entre elas. Dessa forma, a maioria dos *priors* foram fixados entre as diversas partes do código e a tabela A.1 mostra os *priors* usados na parte final do código. O número de pontos em cada uma das simulações não foi fixado porque o número de parâmetros a serem restringidos influenciava positivamente no tempo da simulação, portanto simulações com menos parâmetros calcularam mais pontos que as outras, mesmo assim o valor mínimo de pontos calculados em cada simulação foi próximo de 11000.

4.1 Supernovas tipo 1a

Na seção 2.3.1 as supernovas do tipo 1a foram apresentadas como uma vela padrão para se medir as distâncias do universo. Com essa medida é possível determinar de modo muito preciso a relação entre a distância e o *redshift* até tempos que vão até $z \approx 1$ [18].

O conjunto de dados das medidas de distância das supernovas usado nesse traba-

lho foi o mesmo usado pelo *Joint Light-curve Analysis* (JLA) os quais estão disponível publicamente [38]. O trabalho original [18] usou esses dados para obter Ω_M e outros parâmetros de ajuste (α , β e M_B). Os valores obtidos por esse trabalho estão disponíveis na tabela 4.1. Outro valor fornecido pelo experimento que não está tabelado é o da equação de estado, como os cálculos foram feitos assumindo Λ CDM o valor encontrado foi $\omega = -1,018 \pm 0,057$.

Para se restringir os parâmetros possíveis com os dados desse experimento o programa utilizou o **emcee** para fazer um MCMC que restringe os valores dos parâmetros Ω_M , α , β e M_B . Os M_B e β em especial referem-se a magnitude das supernovas mas eles e α são parâmetros de *nuisance*, o valor da distância luminosa é fixando $H_0 = 70 \text{ Km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

A equação de estado 3.15 foi levada em conta nesse teste para verificar se esse modelo resultaria em valores consistentes. Os resultados da simulação por MCMC estão tabelados em 4.1. Nesta tabela, os valores são comparados com os valores originais que [18] obteve com os dados, é possível ver que todos os valores de Ω_M e dos parâmetros de *nuisance* α , β e M_B obtidos do experimento e pela a simulação são compatíveis entre si.

	JLA _(stat + sys)	Simulação
Ω_M	$0,295 \pm 0,034$	$0,390^{+0,061}_{-0,057}$
α	$0,141 \pm 0,006$	$0,134^{+0,011}_{-0,009}$
β	$3,101 \pm 0,075$	$2,990^{+0,098}_{-0,108}$
M_b	$-19,05 \pm 0,02$	$-19,083^{+0,030}_{-0,028}$
ω_1	$-1,018 \pm 0,057$	$-0,713^{+0,502}_{-0,418}$
ω_2	$-1,018 \pm 0,057$	$-1,029^{+0,575}_{-0,531}$
ω_3	$-1,018 \pm 0,057$	$-1,094^{+0,703}_{-0,472}$

Tabela 4.1: Tabela com a comparação dos resultados da simulação em comparação com o trabalho original [18]. Na coluna referente aos valores obtidos pelo JLA, *sys* se refere aos erros sistemáticos que foram levados em consideração. E *stat* é o valor referente aos erros estatísticos considerados.

Os valores de ω_1 , ω_2 e ω_3 são compatíveis com o valor de ω obtido no experimento. Entretanto, nenhum deles convergiu para o valor exato, em especial ω_1 é muito maior

que qualquer um dos dois outros valores. Apesar disso, o valor é compatível com uma incerteza com o valor obtido pelo JLA e com -1 . O gráfico 4.1 mostra os valores de ω_n obtidos na simulação por MCMC.

Figura 4.1: Gráfico da equação de estado com os parâmetros ω_1 , ω_2 e ω_3 ajustados pelo método MCMC em conjunto com os dados de supernovas do tipo 1a. O valor $\omega = -1$ está destacado para comparação. As barras cinzas no meio de cada intervalo representam as incertezas dos valores calculados pelo programa.

Os resultado obtido pelo código podem ser visto no gráfico 4.2. Esse gráfico mostra a distribuição de probabilidade de cada um dos valores que foram restringidos pelo MCMC em uma em duas dimensões, esse tipo de gráfico é especialmente útil quando para mostrar as covariâncias entre cada um dos parâmetros que estão sendo simulados. A diagonal desse gráfico mostra as distribuições de probabilidade de cada um deles individualmente.

Sabendo disso o gráfico 4.2 indica que Ω_M , α , β e M_B não apresentam uma correlação clara, entretando, os três valores de ω estão muito correlacionados, apesar disso ω_2 e ω_3 parecem obedecer algum tipo de distribuição. Já ω_1 não mostra nenhum tipo de distribuição bem definido e uma tendência para convergir fora do intervalo limitado pelo máximo dos *priors* usados.

Figura 4.2: Gráfico das distribuições de probabilidade dos parâmetros restringidos pelo MCMC usando os dados do experimento JLA e plotados usando a biblioteca de python corner [39].

4.2 Relógios Cósmicos

Os relógios cósmicos fornecem uma outra maneira de se restringir o valor de H_0 fazendo a datação de galáxias com a população estelar muito antiga e baixa taxa de formação estelar em redshifts $z \lesssim 2$ [40]. Esse método é interessante porém essa abordagem está sujeita aos erros sistemáticos dos modelos de evolução estelar.

Esse trabalho restringiu o valor de H_0 por vários métodos e usando conjuntos de dados

diferentes, que são mostrados na tabela 4.2 em comparação com o resultado obtido pelo MCMC utilizando os dados utilizados em [40].

	1	2	3	4	MCMC
H_0	$67, 42 \pm 4, 75$	67.06 ± 1.68	68.90 ± 1.96	68.45 ± 2.00	$71, 280^{+4,643}_{-4,356}$

Tabela 4.2: Tabela com os valores de H_0 em unidade de $\text{Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ obtidos pelo experimento e pela simulação MCMC. Os números na primeira linha representam cada uma das maneiras que o trabalho de onde os dados foram retirados [40] obteve os resultados. O resultado 1 foi obtido por processos gaussianos usando os dados dos relógios cósmicos, 2 foi obtido da mesma maneira usando os dados do Pantheon [41], 3 foi obtido pelo método de regressão polinomial ponderado com os dados do conjunto 2 e por fim 4 foi obtido com a regressão polinomial ponderada e os dados do Pantheon.

Para restringir os valores de H_0 o trabalho [40] utilizou principalmente o método dos processos gaussianos que pode ser entendido como uma generalização da ideia de distribuição gaussiana para contínuos, dessa forma é possível reconstruir a função contínua mais provável que descreve o conjunto de dados [42].

A função usada para restringir os parâmetros tanto no código MCMC quanto no trabalho é um modelo de parametrização de matéria escura em função do *redshift*, essa modificação do modelo é conhecida como ωCDM [40]. Essa extensão do modelo é dada pela equação 4.1. Os parâmetros Ω_M , ω_1 , ω_2 e ω_3 são de *nuisance* e foram restringidos juntamente com H_0 que é o parâmetro de maior interesse nessa parte do código.

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_M^{(0)}(1+z)^3 + (1 - \Omega_M^{(0)})(1+z)^{3(1+\omega(z))}}. \quad (4.1)$$

Novamente, o gráfico 4.3 mostra as distribuições de probabilidade dos parâmetros ajustados. Também é possível perceber que os ω_n estão altamente correlacionados mas, como essa parte do código não tem o intuito de verificar se eles convergem para algum número, isso não é um problema. O valor da constante de Hubble obtido é $H_0 = 71, 280^{+4,643}_{-4,356}$ que é compatível com todos os resultados do trabalho usando o mesmo conjunto de dados. Os

Figura 4.3: Distribuição de probabilidade dos parâmetros restringidos por MCMC. Nessa simulação Ω_M , ω_1 , ω_2 e ω_3 são parâmetros de *nuisance*.

parametros de *nuisance* obtidos pelo MCMC foram $\Omega_M = 0,336^{+0,063}_{-0,053}$, $\omega_1 = -0,999^{+0,633}_{-0,643}$, $\omega_2 = -0,955^{+0,642}_{-0,689}$ e $\omega_3 = -1,003^{+0,700}_{-0,684}$.

O gráfico 4.4 mostra a função de estado com os ω_n encontrados pelo MCMC. Como eles são considerados como parâmetros de *nuisance* e a simulação não restringe esses parâmetros a distribuição dos valores é uniforme no intervalo do *prior* usado para cada valor. Apesar de Ω_M também ser de *nuisance* o código foi capaz de restringir esse parâmetro em um valor compátivel com os obtidos na simulação anterior, isso é desejável, pois caso contrário quando esses dois conjuntos de dados fosse usado ao mesmo tempo a densidade de matéria poderia convergir para um valor diferente do esperado.

Figura 4.4: Gráfico da equação de estado 3.15 com os parâmetros ajustados por MCMC usando em conjunto com os dados de [40].

4.3 Oscilações acústicas de bárions (BAO)

As BAO são uma das ferramentas mais robustas para se medir distâncias no universo, tanto que elas são consideradas regras padrão. Resumidamente a formação das BAO ocorre por causa das perturbações do plasma no início do universo que perduraram até o período de recombinação, por volta do *redshift* $z \approx 1000$ [43], nessa época a velocidade do som desse plasma diminuiu e a propagação dessas ondas foi reduzida até se extinguir completamente. Isso causa impressões nas anisotropias da radiação cósmica de fundo que podem ser medidas [44].

Dessa forma essa parte do código também é útil para restringir o valor de Ω_M e os valores de Ω_b e H_0 são parâmetros de *nuisance*. Para se restringir o valor da densidade os dados retirados dos códigos cosmoMC [45] e do Monte Python [46] foram usado na equação de dois pontos do espectro de potência [44] [47]. O valor obtido pela simulação

Figura 4.5: Gráfico das distribuições de probabilidade da simulação do MCMC. Nessa simulação H_0 é o parâmetro de *nuisance*.

foi $\Omega_M = 0,312^{+0,075}_{-0,065}$ que é compatível com o resultado da densidade do trabalho original [43] que é $\Omega_M = 0,329 \pm 0,074$.

O gráfico 4.5 mostra as distribuições de probabilidade dos valores da simulação, apesar dos valores de H_0 da simulação não estarem distribuídos de maneira uniforme no intervalo, eles se concentram próximo ao valor esperado; por volta de $H_0 = 70 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ isso indica que o *prior* esteja pequeno.

4.4 Anisotropias da radiação cósmica de fundo

Para estudar com mais detalhes a radiação cósmica de fundo é necessário conseguir realizar previsões teóricas sobre a natureza do CMB [48]. O CAMB [49] [50], acrônimo para *Code for Anisotropies in the Microwave Background* é uma implementação em FORTRAN que realiza o cálculo das anisotropias e da polarização do CMB. Com isso, a última parte do código desse trabalho consistiu em substituir a equação de estado 3.15 com os parâmetros livres simulados pelo MCMC no código do CAMB.

Juntamente com o CAMB, a *likelihood* do experimento Planck [51] contendo os dados da temperatura de *low* e *high- ℓ* juntamente com a polarização do CMB foram usadas para reconstruir a equação de estado. Para a execução dessa parte do código é necessário uma série de parâmetros de *nuisance*, cujo os valores estão descritos na tabela B.1.

Figura 4.6: Gráfico da equação de estado com os valores restringidos usando os dados da likelihood do experimento Planck [51].

A figura 4.6 mostra a equação de estado construída com os valores médios de ω_n obtidos

durante a execução dessa parte do programa. Todos os resultados são compatíveis com $\omega = -1$ apesar de que o MCMC não ter restringido nenhum desses parâmetros para um valor específico.

Figura 4.7: Distribuição de probabilidade dos parâmetros restringidos por MCMC com o cálculo do CAMB usando a likelihood do Planck.

A figura 4.7 mostra as distribuições de probabilidade dos valores restringidos pelo MCMC. Os ω_n não convergiram para nenhum valor em específico e a distribuição desses ω ficou mais concentrada nos extremos dos intervalos dos *priors*, isso pode indicar que esses intervalos estão muito pequenos para essa parte do programa. Apesar desse comportamento da equação de estado, os outros parâmetros ajustados nessa parte são compatíveis com os valores calculados pelo CAMB quando este é executado sem nenhuma modificação,

como visto na tabela 4.3.

	CAMB	Simulação
$\Omega_b h^2$	0,02260	$0,02187^{+0,00024}_{-0,00027}$
$\Omega_c h^2$	0,11200	$0,11959^{+0,00084}_{-0,00101}$
H_0	70	$67,30944^{+0,00267}_{-0,00920}$
ω_1	-1	$-1,18697^{+0,93922}_{-0,65194}$
ω_2	-1	$-1,18349^{+0,84163}_{-0,64791}$
ω_3	-1	$-0,85165^{+0,63272}_{-0,88339}$

Tabela 4.3: Tabela com a comparação dos valores obtidos pela simulação e valores calculados pelo CAMB sem nenhuma alteração. Os valores do CAMB estão expressos sem incerteza. A constante de Hubble é um dos valores de entrada para o cálculo e é fixo em $H_0 = 70$ junto com a equação de estado $\omega = -1$.

Na tabela 4.3 os valores $\Omega_b h^2$ e $\Omega_c h^2$ do CAMB estão representados nessa tabela sem incerteza pois são os valores que retornam do programa por cálculo direto das condições iniciais impostas. Os valores de H_0 e ω são entradas do programa e portanto seus valores são fixos no cálculo.

4.5 Supernova 1a + Relógios Cósmicos + BAO + Anisotropias

A etapa final desse trabalho consiste em utilizar cada um dos programas anteriores conjuntamente com o intuito de restringir da melhor maneira possível os valores dos ω_n . Dessa forma, o programa final utilizou os dados anteriores e o CAMB em conjunto para calcular cada um dos pontos da simulação com o cuidado de usar as mesmas variáveis em cada um dos diferentes módulos, caso necessário. Por exemplo, o valor de H_0 é um dos parâmetros a ser ajustado, portanto ele é restringido pelos conjuntos de dados do JLA, do BAO e dos relógios cósmicos. Esse valor então é utilizado pelo CAMB para os cálculos

internos desse módulo. Todos esses parâmetros e seus *priors* estão listados nas tabelas A.1 e A.2.

Os valores obtidos para cada um dos parâmetros estão descritos na tabela 4.4 que compara os resultados obtidos nessa simulação com cada um dos módulos anteriores. É possível ver dessa tabela que os valores são compatíveis dentro de algumas incertezas entre cada uma dos diferentes módulos usados nesse trabalho mesmo quando um desses parâmetros é eventualmente de *nuisance* como H_0 que é de *nuisance* no módulo de BAO e é um parâmetro que os outros módulos querem restringir. Pode-se ver da tabela que os valores são de fato compatíveis.

	Tudo	JLA	BAO	R. cósmicos	Likelihood
$\Omega_b h^2$	$0,02193^{+0,00027}_{-0,00032}$	-	$0,061^{+0,013}_{-0,011}$	-	$0,02187^{+0,00024}_{-0,00027}$
$\Omega_c h^2$	$0,12057^{+0,00106}_{-0,00140}$	-	-	-	$0,11959^{+0,00084}_{-0,00101}$
Ω_M	$0,36328^{+0,03931}_{-0,03724}$	$0,390^{+0,061}_{-0,057}$	$0,312^{+0,075}_{-0,065}$	$0,336^{+0,063}_{-0,053}$	-
α	$0,13674^{+0,02694}_{-0,01600}$	$0,134^{+0,011}_{-0,009}$	-	-	-
β	$2,87608^{+0,21498}_{-0,20545}$	$2,990^{+0,098}_{-0,108}$	-	-	-
M_B	$-19,11529^{+0,05196}_{-0,07289}$	$-19,083^{+0,030}_{-0,028}$	-	-	-
H_0	$67,31012^{+0,00065}_{-0,00058}$	-	$105,753^{+40,652}_{-31,851}$	$71,280^{+4,643}_{-4,356}$	$67,30944^{+0,00267}_{-0,00920}$
ω_1	$-0,87264^{+0,52326}_{-0,48216}$	$-0,713^{+0,502}_{-0,418}$	-	$-0,999^{+0,633}_{-0,643}$	$-1,18697^{+0,93922}_{-0,65194}$
ω_2	$-0,94712^{+0,46233}_{-0,52516}$	$-1,029^{+0,575}_{-0,531}$	-	$-0,955^{+0,642}_{-0,689}$	$-1,18349^{+0,84163}_{-0,64791}$
ω_3	$-1,19563^{+0,54023}_{-0,51684}$	$-1,094^{+0,703}_{-0,472}$	-	$-1,003^{+0,700}_{-0,684}$	$-0,85165^{+0,63272}_{-0,88339}$

Tabela 4.4: Tabela com os valores dos principais parâmetros ajustados pelo MCMC usando todos os módulos anteriores em comparação com cada um dos módulos.

Com o resultado dessa última simulação o gráfico 4.8 da equação de estado foi construído. É possível ver que existe uma semelhança entre o formato desse gráfico e o gráfico 4.1, isso pode indicar que o conjunto de dados das supernovas do tipo 1a é o mais relevante para restringir esses valores do que os outros conjuntos de dados. Usando apenas esse gráfico também pode-se concluir que o uso de mais conjuntos de dados para restringir esses valores também parece não afetar o tamanho das incertezas. Por último vale notar

que todos os três valores de ω_n são compatíveis com o $\omega = -1$ que é o valor assumido pelo modelo Λ CDM.

Figura 4.8: Gráfico da equação de estado $\omega(z)$ com os parâmetros ajustados pelo MCMC usando todos os conjuntos de dados e a likelihood do Planck.

O gráfico 4.9 mostra a distribuição de probabilidade dos parâmetros ajustados por essa parte final desse trabalho. Os ω_n nesse gráfico, apesar de convergirem para valores bem definidos (mostrado na tabela 4.4), estão correlacionados entre si por causa de como as distribuições bidimensionais de probabilidade se comportam. Os outros parâmetros que foram ajustados pelo programa tem distribuição dos resultados mais bem definida, dessa forma é seguro afirmar que a correlação entre essas variáveis é muito pequena. Os valores desses parâmetros também são compatíveis entre os diversos módulos do programa e com os valores obtidos nos trabalhos de referência de onde os conjuntos de dados foram obtidos.

Figura 4.9: Gráfico das distribuições dos valores dos parâmetros ajustados pelo MCMC que não são de *nuisance*. Os valores desses parâmetros estão na tabela 4.4, os valores dos parâmetros de *nuisance* estão na tabela B.1

Conclusão

Um dos maiores desafios da cosmologia moderna é identificar e quantificar a natureza da energia escura, sendo que um dos meios de se tentar fazer isso é através da reconstrução de sua equação de estado $\omega(z)$ em um modelo Λ CDM modificado. Devido à grande quantidade de dados coletados por diversos experimentos realizados nos últimos anos, seria interessante tentar usar essas diversas medidas diferentes em conjunto para se descobrir a natureza de da energia escura.

Utilizando em conjunto as medidas das distâncias das supernovas tipo 1a [18], das idades das galáxias [40], a detecção das oscilações acústicas de bárions [43] e as medidas das anisotropias da radiação cósmica de fundo [51]. O método de Monte Carlo em cadeias de Markov foi utilizado para restringir os parâmetros de uma equação de estado do tipo 3.15. Já que este tipo de algoritmo é bom para calcular os parâmetros de ajuste de uma função que modela um certo conjunto de dados.

Os resultados da simulação (tabela 4.4 e figura 4.8) indicam que apesar dessa equação de estado ser completamente diferente da equação de estado do modelo Λ CDM ($\omega = -1$) os parâmetros livres dessa equação são compatíveis com esse valor, e mesmo todos os conjuntos de dados usados para restringir esses valores, as incertezas dos mesmos são consideravelmente altas. Também deve-se levar em conta que os ω_n estão correlacionados.

Apesar disso, observa-se que há bastante influência das medidas das distâncias das supernovas 1a nos valores desses ω_n . É possível que resultados mais afinados possam ser obtidos usando mais dados de supernovas do tipo 1a e aplicando técnicas para se descorrelacionar os resultados dos parâmetros livres desse tipo de equação de estado.

Apêndice A

Valores dos *priors* usados no MCMC

Abaixo estão os valores dos *priors* de todos os parâmetros utilizados no código do MCMC desse trabalho, eles estão divididos em duas tabelas. A tabela A.1 mostra os valores dos parâmetros que o trabalho quer restringir, já a A.2 mostra os valores dos diversos parâmetros de *nuisance* que foram necessários para os cálculos e uma breve explicação do significado deles.

Parâmetros do MCMC	Valor mínimo	Valor máximo
$\Omega_b h^2$	0,005	0,100
$\Omega_c h^2$	0,001	0,990
Ω_M	88	788
α	0,0	0,5
β	1,5	3,5
M_B	-22	-18
H_0	30	90
ω_1	-2,000	-0,001
ω_2	-2,000	-0,001
ω_3	-2,000	-0,001

Tabela A.1: Valores máximo e mínimo dos *priors* dos parâmetros principais usados pelo MCMC.

Parâmetros	Minímo	Máximo	Significado
n_s	0,9	1,1	Espectro escalar
A_s	2,7	4,0	Amplitude escalar
τ	0,01	0,80	Profundidade óptica
A_{CIB}	0	200	Contaminação do CIB em $\ell = 3000$ no mapa de 217Ghz do Planck
$SZxCIB$	0	1	Relação cruzada SZ/CIB
A_{SZ}	0	10	Contaminação do tSZ
$ps_A\ 100 \times 100$	0	400	Contribuição pontual no espectro 100×100
$ps_A\ 143 \times 143$	0	400	Contribuição pontual no espectro 143×143
$ps_A\ 143 \times 217$	0	400	Contribuição pontual no espectro 143×217
$ps_A\ 217 \times 217$	0	400	Contribuição pontual no espectro 217×217
ksz_{norm}	0	10	Contaminação ksz
$gal545_A\ 100$	0	50	Contaminação residual da poeira em $\ell = 200$ no espectro 100×100
$gal545_A\ 143$	0	50	Contaminação residual da poeira em $\ell = 200$ no espectro 143×143
$gal545_A\ 143 \times 217$	0	100	Contaminação residual da poeira em $\ell = 200$ no espectro 143×217
$gal545_A\ 217$	0	400	Contaminação residual da poeira em $\ell = 200$ no espectro 217×217
cal_{100T}	0	3	Calibração relativa entre os espectros 100 e 143
cal_{217T}	0	3	Calibração relativa entre os espectros 217 e 143
A_{planck}	0,9	1,1	Calibração relativa do Planck

Tabela A.2: Tabela com os *priors* dos parâmetros de *nuisance* usados pelo CAMB em conjunto com os dados da *likelihood* do experimento Planck. Esses foram os valores dos *priors* usados sempre que o MCMC precisasse restringir esses parâmetros. [52]

Apêndice B

Valores dos parâmetros de nuisance

Os parâmetros de *nuisance* utilizados pelo módulo do código da *likelihood* do Planck e do programa completo. Como eles fazem parte do ajuste do código mas são independentes dos outros parâmetros os valores que o código encontra para eles são praticamente os mesmo, como é visto na tabela B.1.

Tabela B.1: Tabela com os valores dos parâmetros de *nuisance* ajustados pelo MCMC para o módulo do CAMB em conjunto com os dados da *likelihood* do experimento Planck e a versão final do programa

Parâmetros de <i>nuisance</i>	CAMB	Tudo
n_s	$0,95699^{+0,00191}_{-0,00263}$	$0,95807^{+0,00055}_{-0,00115}$
A_s	$3,04314^{+0,00244}_{0,00868}$	$3,04355^{+0,00110}_{0,00106}$
τ	$0,08756^{+0,00279}_{-0,00864}$	$0,08956^{0,00090}_{-0,00124}$
A_{CIB}	$62,05287^{+0,00506}_{-0,00277}$	$62,05192^{+0,00115}_{-0,00067}$
$SZxCIB$	$0,07280^{+0,00502}_{-0,00279}$	$0,07203^{+0,07203}_{-0,00088}$
A_{SZ}	$7,31182^{+0,00326}_{0,00238}$	$7,31160^{+0,00086}_{-0,00074}$
$p^{SA}_{100 \times 100}$	$236,64656^{+0,00179}_{-0,00218}$	$236,64768^{+0,00094}_{-0,00190}$
$p^{SA}_{143 \times 143}$	$36,24182^{+0,00459}_{0,00220}$	$36,24187^{+0,00124}_{-0,00074}$

Continua na próxima página

Tabela B.1 – *Continuação da página anteriores*

Parâmetros de <i>nuisance</i>	CAMB	Tudo
$ps_{A\ 143x217}$	$38,79860^{+0,00329}_{-0,00974}$	$38,80061^{+0,00165}_{-0,00128}$
$ps_{A\ 217x217}$	$96,33819^{+0,00263}_{-0,00696}$	$96,34166^{+0,00155}_{-0,00134}$
ksz_{norm}	$7,02179^{+0,00347}_{-0,00261}$	$7,02066^{+0,00080}_{-0,00048}$
$gal545_{A\ 100}$	$7,27096^{+0,00740}_{-0,00301}$	$7,27105^{+0,00165}_{-0,00091}$
$gal545_{A\ 143}$	$8,96416^{+0,00327}_{-0,00852}$	$8,96536^{+0,00084}_{-0,00186}$
$gal545_{A\ 143x217}$	$18,30587^{+0,00230}_{-0,00541}$	$18,30654^{+0,00085}_{-0,00089}$
$gal545_{A\ 217}$	$82,86549^{+0,00258}_{-0,00322}$	$82,86553^{+0,00078}_{-0,00102}$
cal_{100T}	$0,99758^{+0,00102}_{-0,00100}$	$0,99747^{+0,00066}_{-0,00080}$
cal_{217T}	$0,99734^{+0,00103}_{-0,00134}$	$0,99708^{+0,00048}_{-0,00066}$
A_{planck}	$0,97077^{+0,00397}_{-0,00188}$	$0,97032^{+0,00195}_{-0,00102}$

Bibliografia

- [1] A. Einstein, Sitzungsberichte der Königlich Preubischen Akademie der Wissenschaften , 142 (1917).
- [2] S. Dodelson, *Modern cosmology* (Academic press, 2003).
- [3] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology* (Cambridge University Press, 2005).
- [4] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Addison-Wesley, 2002).
- [5] S. Weinberg, *Cosmology*, Vol. 1 (Oxford University Press, 2008).
- [6] J. A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, 2005).
- [7] D. Saadeh, S. M. Feeney, A. Pontzen, H. V. Peiris, and J. D. McEwen, Phys. Rev. Lett. **117** (2016).
- [8] E. Hubble, PNAS **15** (1929).
- [9] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Vol. 1 (John Wiley & Sons, Inc., 1972).
- [10] A. Friedman, Zeitschrift fur Physik A **10** (1922).
- [11] A. Lemaître, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **A47** (1927).
- [12] H. P. Robertson, Astrophys. J. **82** (1935).
- [13] A. G. Walker, Proc. Lond. Math. Soc. **42** (1937).

- [14] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R.olta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, J. L. Weiland, B. Gold, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **208** (2013).
- [15] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Princeton University Press, 2017).
- [16] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, *The Astronomical Journal* **116** (1998).
- [17] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and T. S. C. Project, *The Astrophysical Journal* **517** (1999).
- [18] M. Betoule, R. Kessler, J. Guy, J. Mosher, D. Hardin, R. Biswas, P. Astier, P. El-Hage, M. Konig, S. Kuhlmann, J. Marriner, R. Pain, N. Regnault, C. Balland, B. A. Bassett, P. J. Brown, H. Campbell, R. G. Carlberg, F. Cellier-Holzem, D. Cinabro, A. Conley, C. B. D'Andrea, D. L. DePoy, M. Doi, R. S. Ellis, S. Fabbro, A. V. Filippenko, R. J. Foley, J. A. Frieman, D. Fouchez, L. Galbany, A. Goobar, R. R. Gupta, G. J. Hill, R. Hlozek, C. J. Hogan, I. M. Hook, D. A. Howell, S. W. Jha, L. L. Guillou, G. Leloudas, C. Lidman, J. L. Marshall, A. Möller, A. M. Mourão, J. Neveu, R. Nichol, M. D. Olmstead, N. Palanque-Delabrouille, S. Perlmutter, J. L. Prieto, C. J. Pritchett, M. Richmond, A. G. Riess, V. Ruhlmann-Kleider, M. Sako, K. Schahmanech, D. P. Schneider, M. Smith, J. Sollerman, M. Sullivan, N. A. Walton, and C. J. Wheeler, *Astronomy & Astrophysics* **568** (2014).

- [19] W. Hu, *Wandering in the Background: A CMB Explorer*, Ph.D. thesis, UC Berkeley (1995).
- [20] O. Piattella, *Lecture Notes in Cosmology* (Springer International Publishing, 2018).
- [21] H. Haber, “Lecture notes: The cosmological constant problem,” (2015), url: <http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph171/CosmoConstant15.pdf>. Visitado em 01/02/2019.
- [22] S. Weinberg, *Reviews of Modern Physics* **61** (1989).
- [23] M. T. et al. (Particle Data Group), *Physical Review D* **98** (2018).
- [24] S. M. Carroll, “Dark energy and the preposterous universe,” (2001), arXiv:astro-ph/0107571 .
- [25] H. E. S. Velten, R. F. vom Marttens, and W. Zimdahl, *The European Physical Journal C* (2014).
- [26] J. Yoo and Y. Watanabe, (2012), 10.1142/S0218271812300029, arXiv:1212.4726 .
- [27] P. release. NobelPrize.org, (2019), url: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2011/press-release/>. Visitado em 05/02/2019.
- [28] and P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, E. Battaner, K. Benabed, A. Benoît, A. Benoit-Lévy, J.-P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. Bobin, J. J. Bock, A. Bonaldi, L. Bonavera, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet, F. Boulanger, M. Bridges, M. Bucher, C. Burigana, R. C. Butler, E. Calabrese, J.-F. Cardoso, A. Catalano, A. Challinor, A. Chamballu, H. C. Chiang, L.-Y. Chiang, P. R. Christensen, S. Church, D. L. Clements, S. Colombi, L. P. L. Colombo, C. Combet, F. Couchot, A. Coulais, B. P. Crill, A. Curto, F. Cuttaia, L. Danese, R. D. Davies, R. J. Davis, P. de Bernardis, A. de Rosa, G. de Zotti, J. Delabrouille, J.-M. Delouis, F.-X. Désert, C. Dickinson, J. M. Diego, H. Dole, S. Donzelli, O. Doré, M. Douspis, J. Dunkley, X. Dupac, G. Efstathiou, F. Elsner, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, F. Finelli, O. Forni, M. Frailis, A. A. Fraisse,

E. Franceschi, T. C. Gaier, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, M. Giard, G. Giardino, Y. Giraud-Héraud, E. Gjerløw, J. González-Nuevo, K. M. Górski, S. Gratton, A. Gregorio, A. Gruppuso, J. E. Gudmundsson, F. K. Hansen, D. Hanson, D. Harrison, G. Helou, S. Henrot-Versillé, C. Hernández-Monteagudo, D. Herranz, S. R. Hildebrandt, E. Hivon, M. Hobson, W. A. Holmes, A. Hornstrup, W. Hovest, K. M. Huppenberger, G. Hurier, A. H. Jaffe, T. R. Jaffe, J. Jewell, W. C. Jones, M. Juvela, E. Keihänen, R. Kesitalo, K. Kiiveri, T. S. Kisner, R. Kneissl, J. Knoche, L. Knox, M. Kunz, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, A. Lähteenmäki, J.-M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, R. J. Laureijs, C. R. Lawrence, M. L. Jeune, S. Leach, J. P. Leahy, R. Leonardi, J. León-Tavares, J. Lesgourgues, M. Liguori, P. B. Lilje, M. Linden-Vørnle, V. Lindholm, M. López-Caniego, P. M. Lubin, J. F. Macías-Pérez, B. Maffei, D. Maino, N. Mandolesi, D. Marinucci, M. Maris, D. J. Marshall, P. G. Martin, E. Martínez-González, S. Masi, M. Massardi, S. Matarrese, F. Matthai, P. Mazzotta, P. R. Meinhold, A. Melchiorri, L. Mendes, E. Menegoni, A. Mennella, M. Migliaccio, M. Millea, S. Mitra, M.-A. Miville-Deschênes, D. Molinari, A. Moneti, L. Montier, G. Morgante, D. Mortlock, A. Moss, D. Munshi, J. A. Murphy, P. Naselsky, F. Nati, P. Natoli, C. B. Netterfield, H. U. Nørgaard-Nielsen, F. Noviello, D. Novikov, I. Novikov, I. J. O'Dwyer, F. Orieux, S. Osborne, C. A. Oxborrow, F. Paci, L. Pagano, F. Pajot, R. Paladini, D. Paoletti, B. Partridge, F. Pasian, G. Patanchon, P. Paykari, O. Perdureau, L. Perotto, F. Perrotta, F. Piacentini, M. Piat, E. Pierpaoli, D. Pietrobon, S. Plaszczynski, E. Pointecouteau, G. Polenta, N. Ponthieu, L. Popa, T. Poutanen, G. W. Pratt, G. Prézeau, S. Prunet, J.-L. Puget, J. P. Rachen, A. Rahlin, R. Rebolo, M. Reinecke, M. Remazeilles, C. Renault, S. Ricciardi, T. Riller, C. Ringeval, I. Ristorcelli, G. Rocha, C. Rosset, G. Roudier, M. Rowan-Robinson, J. A. Rubiño-Martín, B. Rusholme, M. Sandri, L. Sanselme, D. Santos, G. Savini, D. Scott, M. D. Seiffert, E. P. S. Shellard, L. D. Spencer, J.-L. Starck, V. Stolyarov, R. Stompor, R. Sudiwala, F. Sureau, D. Sutton, A.-S. Suur-Uski, J.-F. Sygnet, J. A. Tauber, D. Tavagnacco, L. Terenzi, L. Toffolatti, M. Tomasi, M. Tristram, M. Tucci, J. Tuovinen, M. Türlér, L. Valenziano, J. Valiviita, B. V. Tent, J. Varis, P. Vielva, F. Villa, N. Vittorio, L. A. Wade, B. D. Wandelt, I. K. Wehus, M. White, S. D. M.

- White, D. Yvon, A. Zacchei, and A. Zonca, *Astronomy & Astrophysics* **571** (2014).
- [29] N. Said, C. Baccigalupi, M. Martinelli, A. Melchiorri, and A. Silvestri, *Physical Review D* **88** (2013).
- [30] S. Sullivan, A. Cooray, and D. E. Holz, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2007** (2007).
- [31] G.-B. Zhao, D. Huterer, and X. Zhang, *Physical Review D* **77** (2008).
- [32] D. Sarkar, S. Sullivan, S. Joudaki, A. Amblard, D. E. Holz, and A. Cooray, *Physical Review Letters* **100** (2008).
- [33] D. Huterer and A. Cooray, *Physical Review D* **71** (2005).
- [34] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **125** (2013).
- [35] P. Serra, A. Cooray, D. E. Holz, A. Melchiorri, S. Pandolfi, and D. Sarkar, *Physical Review D* **80** (2009).
- [36] M. H. Kalos and P. A. Whitlock, *Monte Carlo Methods*, Vol. 1 (John Wiley & Sons, Inc., 1986).
- [37] S. Brooks, A. Gelman, G. Jones, and X. L. Meng, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* (Chapman & Hall/CRC, 2011).
- [38] M. Betoule, “Sdss-ii/snls3 joint light-curve analysis,” (2015).
- [39] D. Foreman-Mackey, *The Journal of Open Source Software* **24** (2016), 10.21105/joss.00024.
- [40] A. Gómez-Valent and L. Amendola, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2018** (2018).
- [41] D. M. Scolnic, D. O. Jones, A. Rest, Y. C. Pan, R. Chornock, R. J. Foley, M. E. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. G. Riess, S. Rodney, E. Berger, D. J. Brout, P. J.

- Challis, M. Drout, D. Finkbeiner, R. Lunnan, R. P. Kirshner, N. E. Sanders, E. Schlafly, S. Smartt, C. W. Stubbs, J. Tonry, W. M. Wood-Vasey, M. Foley, J. Hand, E. Johnson, W. S. Burgett, K. C. Chambers, P. W. Draper, K. W. Hodapp, N. Kaiser, R. P. Kudritzki, E. A. Magnier, N. Metcalfe, F. Bresolin, E. Gall, R. Kotak, M. McCrum, and K. W. Smith, *The Astrophysical Journal* **859**, 101 (2018).
- [42] C. Rasmussen, *Gaussian processes for machine learning* (MIT Press, Cambridge, Mass, 2006).
- [43] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, D. W. Hogg, R. Scoccimarro, M. R. Blanton, R. C. Nichol, R. Scranton, H.-J. Seo, M. Tegmark, Z. Zheng, S. F. Anderson, J. Annis, N. Bahcall, J. Brinkmann, S. Burles, F. J. Castander, A. Connolly, I. Csabai, M. Doi, M. Fukugita, J. A. Frieman, K. Glazebrook, J. E. Gunn, J. S. Hendry, G. Hennessy, Z. Ivezić, S. Kent, G. R. Knapp, H. Lin, Y.-S. Loh, R. H. Lupton, B. Margon, T. A. McKay, A. Meiksin, J. A. Munn, A. Pope, M. W. Richmond, D. Schlegel, D. P. Schneider, K. Shimasaku, C. Stoughton, M. A. Strauss, M. SubbaRao, A. S. Szalay, I. Szapudi, D. L. Tucker, B. Yanny, and D. G. York, *The Astrophysical Journal* **633**, 560 (2005).
- [44] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Vol. 1 (Princeton University Press, 1993).
- [45] A. Lewis and S. Bridle, *Physical Review D* **66** (2002), 10.1103/physrevd.66.103511.
- [46] B. Audren, J. Lesgourgues, K. Benabed, and S. Prunet, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2013**, 001 (2013).
- [47] C. Blake, E. A. Kazin, F. Beutler, T. M. Davis, D. Parkinson, S. Brough, M. Colless, C. Contreras, W. Couch, S. Croom, D. Croton, M. J. Drinkwater, K. Forster, D. Gilbank, M. Gladders, K. Glazebrook, B. Jelliffe, R. J. Jurek, I. hui Li, B. Madore, D. C. Martin, K. Pimbblet, G. B. Poole, M. Pracy, R. Sharp, E. Wisnioski, D. Woods, T. K. Wyder, and H. K. C. Yee, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **418**, 1707 (2011).

-
- [48] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby, *The Astrophysical Journal* **538** (2000).
- [49] A. Lewis and A. Challinor, (2019), url: <https://camb.info/>. Visitado em 29/03/2019.
- [50] A. Challinor and A. Lewis, *Phys. Rev. D* **84**, 043516 (2011).
- [51] ESA, (2019), url: <http://pla.esac.esa.int>. Visitado em 29/03/2019.
- [52] ESA, “2015 cmb spectra and likelihood code,” (2017), url: https://wiki.cosmos.esa.int/planckpla2015/index.php/CMB_spectrum_%26_Likelihood_Code. Visitado em 29/03/2019.