Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Efeitos térmicos na gravitação em um calibre geral

João Bosco de Siqueira

Orientador: Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Mestre em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IF-USP)

Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IF-USP)

Prof. Dr. Maria Emília Xavier Guimarães (IF-UFF)

São Paulo

2009

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Siqueira, João Bosco de
Efeitos térmicos na gravitação em um calibre geral -
São Paulo, 2009.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Depto. de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria de Campos; 2. Teoria Quântica
de Campos; 3. Relatividade (Física)

USP/IF/SBI-039/2009

À memória do meu pai Carlos Roberto de Siqueira

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Fernando pelos conhecimentos passados, por todo o suporte e pelo problema desafiador que ele me propôs. Obrigado por acreditar no meu potencial desde o início.

Agradeço aos “juvenais” que moram comigo, Jônatas e Felipe, pela amizade e pelas cervejadas nas festinhas da USP.

Em destaque, agradeço à minha mãe Ângela e minhas irmãs Tati e Thais, pois sem o apoio destas mulheres provavelmente eu não estaria escrevendo este agradecimento.

Por último, vou agradecer à minha namorada Ana Cláudia por me amar e ser minha companheira fiel.

Obrigado a todos!

Agradeço ao CNPQ pelo fomento.

Resumo

Estudamos efeitos térmicos na gravitação utilizando o formalismo do tempo imaginário para campos quânticos. No contexto da expansão de campo gravitacional fraco, empregamos uma escolha de calibre que permite obter o propagador do gráviton possuindo as propriedades de transversalidade e traço nulo (TT). Mostramos que tal escolha é possível quando o procedimento de Faddeev-Popov é generalizado, levando ao surgimento de novos campos fantasmas e novos vértices de interação. A consistência deste procedimento é explicitamente testada, calculando-se grandezas térmicas invariantes de calibre tais como as funções de um e de dois pontos no limite de altas temperaturas. Finalmente, utilizando as propriedades TT do propagador do gráviton, calculamos a soma de todas as contribuições divergentes infravermelhas para a pressão e determinamos o resultado finito e não analítico na constante de Newton.

Abstract

Thermal effects in gravity are investigated using the imaginary time formalism for quantum fields. In the context of a weak field expansion for the gravitational field, we employ a gauge fixing procedure which allows us to obtain a free graviton propagator which is both transverse and traceless (TT). We show that this choice is possible when the Faddeev-Popov procedure is generalized in such a way that new ghost fields and interactions are generated. The consistence of this procedure is explicitly verified by computing gauge invariant thermal quantities such as the one-graviton function and the high temperature limit of the two-graviton function. Finally, using the properties of the TT propagator, we compute the sum of all the infrared divergent contributions to the pressure and we obtain a finite result which is non-analytic in the coupling constant.

Sumário

1	Introdução	p. 1
2	Introdução a teoria de campos à temperatura finita	p. 5
2.1	A matriz densidade	p. 5
2.2	O formalismo da integração funcional	p. 9
2.3	A função de partição para o campo escalar real livre	p. 12
2.4	Interações e teoria de perturbação	p. 19
2.5	Representação diagramática e regras de Feynman	p. 25
2.6	A expansão em “loops”	p. 28
2.7	Técnicas de cálculo à temperatura finita	p. 31
2.8	Cálculo de integrais à temperatura finita	p. 35
3	Efeitos térmicos na teoria $\lambda \phi^4$	p. 39
3.1	Regras de Feynman	p. 39
3.2	Função de partição	p. 40
3.3	A auto energia	p. 43
3.4	Soma dos diagramas anelares	p. 48
4	A fixação de calibre geral e o propagador transversal de traço nulo na gravitação	p. 53
4.1	A lagrangiana de Einstein-Hilbert	p. 53
4.2	A aproximação de campo fraco	p. 57
4.3	O procedimento de Faddeev-Popov	p. 59

4.4	A fixação de calibre geral	p. 62
4.5	Regras de Feynman	p. 67
5	Efeitos térmicos na gravitação	p. 77
5.1	A função de um ponto	p. 77
5.2	A função de dois pontos	p. 79
5.3	Cálculo de algumas integrais	p. 85
5.4	O tensor energia momento	p. 89
5.5	A auto energia	p. 90
5.6	A contribuição a dois “loops” para a pressão	p. 90
5.7	A base transversal de traço nulo	p. 92
5.8	A soma dos diagramas anelares	p. 93
6	Discussão dos resultados e considerações finais	p. 97
	Apêndice A – Cálculo dos jacobianos	p. 99
	Referências Bibliográficas	p. 103

1 *Introdução*

O presente trabalho é um estudo de algumas propriedades térmicas da gravitação. O melhor entendimento de efeitos térmicos na gravitação certamente levará a uma melhor compreensão da interação gravitacional. Além disso, em áreas como astrofísica e cosmologia as propriedades térmicas da gravitação podem ser relevantes para o entendimento de questões ligadas ao universo primordial e a radiação cósmica de fundo.

Independentemente destas possíveis aplicações cosmológicas, o estudo da gravitação à temperatura finita pode ajudar no entendimento da estrutura da, ainda desconhecida, teoria quântica da gravitação. De fato, existe a possibilidade de que algumas propriedades previstas no formalismo aqui desenvolvido sejam obtidas em certos limites da teoria completa.

Estaremos restritos ao formalismo do tempo imaginário que certamente é o formalismo adequado para tratar a termodinâmica de sistemas descritos pela teoria quântica dos campos interagindo termicamente em equilíbrio [Kap89].

Este trabalho se divide em duas partes. Os capítulos 2 e 3 são uma revisão dos conceitos básicos de teoria de campos à temperatura finita, no contexto da teoria $\lambda\phi^4$. Já os capítulos 4 e 5 apresentam os resultados de um estudo de um novo método de fixação de calibre que permite estudar propriedades térmicas da gravitação que não haviam sido calculadas até então.

Nos capítulos 2 e 3 vamos estudar os conceitos de teoria de campos à temperatura finita. Vamos encontrar a expressão da função de partição no formalismo funcional. Em seguida vamos introduzir regras de Feynman para o caso simples do campo escalar com interações do tipo $\lambda\phi^4$. Neste contexto, vamos calcular a auto energia a um “loop”, contribuições para pressão a dois e três “loops” e vamos calcular a soma dos diagramas anelares para a pressão, que constituem a parte dominante no infravermelho da pressão. Estes capítulos iniciais também são úteis para definição da notação bem como estabelecer as convenções relativas as regras de Feynman e fatores combinatoriais que serão usadas

por todo texto. Com esse intuito, os cálculos neste capítulo serão realizados em grande detalhe.

No capítulo 4 estudaremos a lagrangiana de Einstein-Hilbert na aproximação de campo fraco [tH02]. Veremos como a invariância por transformação geral de coordenadas da lagrangiana induz uma transformação de calibre para a métrica.

Um dos objetivos centrais deste trabalho é encontrar um propagador para o gráviton que seja transversal e de traço nulo, isto é

$$\begin{aligned} D_0^{\mu\nu, \alpha\beta} k_\beta &= 0 \\ D_0^{\mu\nu, \alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

A principal importância dessas propriedades está no cálculo da soma da parte mais divergente dos diagramas anelares para a pressão.

No contexto de um procedimento de Faddeev-Popov usual com um termo de fixação de calibre co-variante mais geral possível, foi mostrado em [BFM07] que não é possível obter o propagador TT (transverso de traço nulo). Com o intuito de encontrar o propagador TT, foi introduzido [BFM07] um procedimento de Faddeev-Popov geral, utilizando agora duas condições distintas para fixar o calibre. Desta forma, foi possível definir um calibre em que o propagador é transverso de traço nulo, como em (1.1). No presente trabalho generalizamos este formalismo levando em conta os termos não quadráticos da ação de Einstein-Hilbert, e calculamos as regras de Feynman até quarta ordem no campo gravitacional.

No capítulo 5 expomos os resultados obtidos por meio do uso de computação simbólica, utilizando o pacote HIP para MapleV3 [HY92]. Aplicamos as convenções sobre regras de Feynman introduzidas nos capítulos 2 e 3, bem como as regras de Feynman para a gravitação definidas no capítulo 4 para calcular diversas contribuições perturbativas. Calculamos contribuições para a função de um ponto a um “loop” e mostramos que ela representa uma contribuição térmica para o tensor energia momento. Calculamos contribuições para a pressão a dois “loops” e obtivemos, surpreendentemente, um resultado dependente de calibre.

Calculamos a auto energia para o caso especial de momento externo nulo e verificamos que o seu valor corresponde a parte estática da auto energia, no limite de altas temperaturas [Reb91]. Assim utilizamos a parte estática da auto energia juntamente com o propagador TT para calcular a parte mais divergente no infravermelho dos diagramas

anelares para a pressão.

Mostrar que é possível obter o propagador para o gráviton com as propriedades TT é de importância central neste trabalho. São essas propriedades que permitem obter uma expressão fechada para a soma dos diagramas anelares. Assim, no contexto do formalismo de fixação de calibre geral, faremos cálculos de quantidades físicas já conhecidas visando provar a consistência do método de fixação de calibre geral.

Em todo o trabalho, com exceção da seção 2.1, usaremos o sistema de unidades em que $\hbar = 1$, $c = 1$ e $k_B = 1$.

2 *Introdução a teoria de campos à temperatura finita*

Neste capítulo iremos introduzir as idéias centrais da teoria quântica de campos à temperatura finita no formalismo do tempo imaginário. Deduziremos a expressão para a função de partição no formalismo funcional em detalhe. Introduziremos técnicas de cálculo para contribuições à temperatura finita que serão úteis por todo o trabalho.

2.1 A matriz densidade

Um sistema quântico simples é descrito por um estado puro

$$|\psi, t\rangle, \quad (2.1)$$

na representação de Schrödinger. Este estado possui a evolução temporal dada pela equação de Schrödinger dependente do tempo

$$H|\psi, t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle, \quad (2.2)$$

ou, de forma equivalente, pelo operador de evolução temporal. Para uma hamiltoniana que não depende explicitamente do tempo, o operador de evolução temporal pode ser escrito como

$$U(t, t') = e^{\frac{1}{i\hbar} H(t-t')}, \quad (2.3)$$

com

$$|\psi, t\rangle = U(t, t') |\psi, t'\rangle \quad (2.4)$$

satisfazendo a equação de Schrödinger dependente do tempo. Isto decorre facilmente da definição (2.3), pois

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{1}{i\hbar} H(t-t')} |\psi, t'\rangle = H |\psi, t\rangle. \quad (2.5)$$

Da equação (2.4) decorre que se conhecemos o estado do sistema em um dado tempo inicial, a evolução temporal deste estado se dará de forma determinística.

Um observável físico é descrito por um operador hermitiano O , cujos autovalores e autovetores são definidos como sendo a solução da equação

$$O |n\rangle = O_n |n\rangle. \quad (2.6)$$

Assim, ao realizar uma medida do observável O no instante t , a probabilidade de obter o valor O_n é dada por

$$P_n = |\langle n | \psi, t \rangle|^2, \quad (2.7)$$

no caso não degenerado. Usando a completeza da base dos autovetores $|n\rangle$ e a normalização do estado, vemos que esta probabilidade é normalizada a unidade. Desta forma, podemos construir o valor médio de um observável O como sendo a média ponderada dos valores possíveis para o observável O_n , tendo como pesos as probabilidades P_n :

$$\langle O \rangle = \sum_n O_n P_n = \sum_n O_n |\langle n | \psi, t \rangle|^2 = \langle \psi, t | \left(\sum_n O_n |n\rangle \langle n| \right) | \psi, t \rangle. \quad (2.8)$$

Usando o teorema espectral

$$O = \sum_n O_n |n\rangle \langle n|, \quad (2.9)$$

escrevemos (2.8) como

$$\langle O \rangle = \langle \psi, t | O | \psi, t \rangle. \quad (2.10)$$

Mesmo que, na mecânica quântica, a evolução temporal do estado se dê de forma determinística, quando medimos um observável físico qualquer a natureza probabilística intrínseca da mecânica quântica se manifesta através das equações (2.7) e (2.10). Assim o tipo de flutuação estatística que ocorre na equação (2.7) se deve a natureza quântica do sistema, e mesmo quando conhecermos o estado do sistema haverá este tipo de flutuação.

O operador matriz densidade é definido para um estado puro como

$$\rho(t) = |\psi, t\rangle \langle \psi, t|, \quad (2.11)$$

ou seja, é o projetor no vetor de estado. A equação (2.10) para o valor médio de um observável O em termos do operador matriz densidade é reescrita como

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho(t)O), \quad (2.12)$$

pois, tomando o traço na base $|n\rangle$ e usando usando a relação de completeza para esta

base obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle O \rangle &= \text{Tr}(\rho(t)O) \\
 &= \text{Tr}(|\psi, t\rangle \langle \psi, t| O) \\
 &= \sum_n \langle n | \psi, t \rangle \langle \psi, t | O | n \rangle \\
 &= \langle \psi, t | O \sum_n | n \rangle \langle n | \psi, t \rangle \\
 &= \langle \psi, t | O | \psi, t \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

A equação de evolução temporal do operador matriz densidade pode ser encontrada a partir da evolução do estado como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle \right) \langle \psi, t| + |\psi, t\rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi, t| \right) \\
 &= \frac{1}{i\hbar} (H |\psi, t\rangle \langle \psi, t| - |\psi, t\rangle \langle \psi, t| H) \\
 &= \frac{1}{i\hbar} [H, \rho].
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Esta é a equação de Von Neumann para evolução temporal no formalismo da matriz densidade. Assim, alternativamente, podemos descrever o estado físico do sistema a partir do operador matriz densidade.

Quando temos uma mistura estatística, isto é, quando o sistema é composto de muitas partes simples e idênticas, nem sempre temos o conhecimento do estado de cada parte do sistema e, portanto, não podemos descrever o sistema a partir de um único estado puro. Suponha que dada uma parte idêntica deste sistema composto, a probabilidade de se encontrar esta parte no estado puro $|\psi_l, t\rangle$ é Q_l , com

$$\sum_l Q_l = 1. \tag{2.15}$$

Supondo que uma dada parte deste sistema composto esteja no estado $|\psi_l, t\rangle$, a probabilidade de obter um valor O_n na medida de um operador O será dada por

$$P_{n,l} = |\langle n | \psi_l, t \rangle|^2. \tag{2.16}$$

Assim, o valor médio do operador O será dado por

$$\begin{aligned}
 \langle O \rangle &= \sum_l Q_l \sum_n P_{n,l} O_n \\
 &= \sum_l Q_l \sum_n \langle \psi_l, t | n \rangle O_n \langle n | \psi_l, t \rangle \\
 &= \sum_l Q_l \text{Tr}(\rho_l O) \\
 &= \text{Tr} \left[\left(\sum_l Q_l \rho_l \right) O \right] \\
 &= \text{Tr}(\rho O),
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

de forma que somos levados a generalizar a matriz densidade para uma mistura como

$$\rho = \sum_l Q_l \rho_l = \sum_l Q_l |\psi_l, t\rangle \langle \psi_l, t|. \tag{2.18}$$

Portanto, a matriz densidade de um mistura é a média ponderada das matrizes densidades das partes, com os pesos sendo as probabilidades Q_l de encontrar uma dada parte no estado $|\psi_l, t\rangle$. Note que (2.17) nada mais é que uma média estatística sobre médias quânticas.

Como a equação de evolução temporal para a matriz densidade no estado puro (2.15) é linear, para o caso de uma mistura teremos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho]. \tag{2.19}$$

Para um sistema composto de muitas partes em equilíbrio térmico à temperatura $T = 1/\beta k_B$ que possua um espectro de energia não degenerado e que não tenha nenhum numero quântico conservado, vamos supor que a probabilidade de se encontrar uma dada parte deste sistema em um auto estado de energia

$$|E_n\rangle \tag{2.20}$$

é proporcional ao fator de Boltzmann

$$e^{-\beta E_n}. \tag{2.21}$$

Então, a matriz densidade para este sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \rho &= Z^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} |E_n\rangle \langle E_n| \\
 &= Z^{-1} \sum_n \sum_k \frac{(-\beta E_n)^k}{k!} |E_n\rangle \langle E_n|
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde Z é uma normalização. Usando o teorema espectral, vemos que podemos escrever o operador hamiltoniano como

$$H = \sum_n |E_n\rangle E_n \langle E_n|, \quad (2.23)$$

e multiplicando membro a membro por H^{k-1} obtemos que

$$H^k = \sum_n |E_n\rangle E_n^k \langle E_n|. \quad (2.24)$$

Substituindo este resultado em (2.22) escrevemos ρ em termos de H como

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}, \quad (2.25)$$

onde

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (2.26)$$

é a função de partição. Este importante resultado será generalizado para o caso da teoria de campos.

2.2 O formalismo da integração funcional

No estudo de teorias de calibre é essencial o entendimento do formalismo da integração funcional em teorias de campos. Com intuito de ilustrar conexão entre os formalismos de operadores e o formalismo da integração funcional, calcularemos amplitudes de transição para bósons no formalismo funcional. As amplitudes de transição são de fundamental importância no cálculo da função de partição, que é o ingrediente fundamental do nosso estudo das propriedades térmicas dos sistemas quânticos. Denotamos $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ como o campo na representação de Heisenberg no instante t e $\hat{\Pi}(\vec{x}, t)$ seu momento canonicamente conjugado. O campo na representação de Schrödinger é dado por $\hat{\phi}(\vec{x}, 0)$ e seu momento conjugado é $\hat{\Pi}(\vec{x}, 0)$.

Definimos os “kets” $|\phi\rangle$ e $|\Pi\rangle$ como sendo auto estados do campo de Schrödinger e do seu momento conjugado respectivamente:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, 0) |\phi\rangle = \phi(\vec{x}) |\phi\rangle \quad (2.27)$$

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, 0) |\Pi\rangle = \Pi(\vec{x}) |\Pi\rangle. \quad (2.28)$$

Onde $\phi(\vec{x})$ e $\Pi(\vec{x})$ são os respectivos autovalores. Note que multiplicando (2.27) lado a

lado por $U^\dagger(t, 0)$ e usando a unitariedade do operador de evolução temporal obtemos

$$U^\dagger(t, 0) \hat{\phi}(\vec{x}, 0) U(t, 0) U^\dagger(t, 0) |\phi\rangle = \hat{\phi}(\vec{x}, t) U^\dagger(t, 0) |\phi\rangle = \phi(\vec{x}) U^\dagger(t, 0) |\phi\rangle, \quad (2.29)$$

ou seja, os autovalores do campo e de seu momento conjugado não variam no tempo na descrição de Heisenberg (note que o autovetor no tempo t é dado por $U^\dagger(t, 0) |\phi\rangle$).

Os “kets” $|\phi\rangle$ e $|\Pi\rangle$ obedecem as relações de completeza:

$$\int d\phi(\vec{x}) |\phi\rangle \langle\phi| = 1 \quad (2.30)$$

$$\int d\Pi(\vec{x}) |\Pi\rangle \langle\Pi| = 2\pi. \quad (2.31)$$

As integrais acima são realizadas sobre o conjunto de todos dos autovalores possíveis.

As relações de fechamento são:

$$\langle\phi_a| \phi_b\rangle = \delta[\phi_a - \phi_b] \quad (2.32)$$

$$\langle\Pi_a| \Pi_b\rangle = \delta[\Pi_a - \Pi_b], \quad (2.33)$$

que nos diz apenas que autovetores com autovalores distintos são ortogonais. O funcional δ pode ser definido no espaço de funções a partir da derivada funcional:

$$\delta[\phi_a - \phi_b] = \frac{\delta\phi_a(x)}{\delta\phi_b(x)}, \quad (2.34)$$

ou, alternativamente, como uma integral funcional:

$$\delta[\phi_a - \phi_b] = \int d\xi e^{i \int d^3x \xi(\vec{x})(\phi_a(\vec{x}) - \phi_b(\vec{x}))}. \quad (2.35)$$

Suponha que no instante inicial $t = 0$ o sistema se encontre no estado $|\phi_a\rangle$. Então no instante de tempo $t = T$ ele se encontrará no estado $e^{-iHT} |\phi_a\rangle$, onde $U(T, 0) = e^{-iHT}$ é o operador de evolução temporal. Neste instante de tempo $t = T$ a amplitude de transição para um estado $|\phi_b\rangle$ será dada por:

$$\langle\phi_b| e^{-iHT} |\phi_a\rangle. \quad (2.36)$$

Vamos dividir o intervalo de tempo T em N intervalos de duração ϵ . Assim $T = N\epsilon$ e definimos $t_n = n\epsilon$ para $n = 0, 1, \dots, N$. Inserindo as resoluções da unidades (2.30) e (2.31)

em (2.36) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_b | e^{-iHT} | \phi_a \rangle &= \prod_{n=1}^N \int d\phi_n \frac{d\Pi_n}{2\pi} \langle \phi_b | \Pi_N \rangle \langle \Pi_N | e^{-iH\epsilon} | \phi_N \rangle \langle \phi_N | \Pi_{N-1} \rangle \\
&\times \langle \Pi_{N-1} | e^{-iH\epsilon} | \phi_{N-1} \rangle \dots | \Pi_2 \rangle \langle \Pi_2 | e^{-iH\epsilon} | \phi_2 \rangle \\
&\times \langle \phi_2 | \Pi_1 \rangle \langle \Pi_1 | e^{-iH\epsilon} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \phi_a \rangle.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Na mecânica quântica temos que

$$\langle x | p \rangle = e^{ipx}. \tag{2.38}$$

Portanto, estendendo para a teoria de campos teremos:

$$\langle \phi | \Pi \rangle = e^{i \int d^3x \Pi(\vec{x}) \phi(\vec{x})}. \tag{2.39}$$

Vamos calcular o elemento de matriz $\langle \Pi_n | e^{-iH\epsilon} | \phi_n \rangle$ no limite para ϵ infinitesimal, supondo que os operadores $\hat{\Pi}$ estão sempre a esquerda dos operadores $\hat{\phi}$ na hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
\langle \Pi_n | e^{-iH\epsilon} | \phi_n \rangle &\cong \langle \Pi_n | (1 - iH\epsilon) | \phi_n \rangle \\
&= \langle \Pi_n | \left[1 - i\epsilon \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})) \right] | \phi_n \rangle \\
&= \langle \Pi_n | \phi_n \rangle \left[1 - i\epsilon \int d^3x \mathcal{H}(\phi_n(\vec{x}), \Pi_n(\vec{x})) \right].
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Para um tratamento mais rigoroso para a questão da ordenação veja [Das93]. Portanto, substituindo (2.39) em (2.40) obtemos

$$\langle \Pi_n | e^{-iH\epsilon} | \phi_n \rangle \cong e^{-i \int d^3x [\Pi_n(\vec{x}) \phi_n(\vec{x}) + \epsilon \mathcal{H}(\phi_n(\vec{x}), \Pi_n(\vec{x}))]}, \tag{2.41}$$

em primeira ordem em ϵ . Note que $\mathcal{H}(\phi_n, \Pi_n)$ representa a densidade Hamiltoniana com os operadores $\hat{\phi}$ e $\hat{\Pi}$ substituídos pelos respectivos autovalores ϕ_n e Π_n .

Substituindo (2.39) e (2.41) em (2.37) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_b | e^{-iHt} | \phi_a \rangle &= \prod_{n=1}^N \int \frac{d\Pi_n}{2\pi} d\phi_n \delta[\phi_1 - \phi_a] \\
&\times \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^N \int d^3x \left[\Pi_n \left(\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\epsilon} \right) - \mathcal{H}(\Pi_n, \phi_n) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.42}$$

com $\phi_{N+1} = \phi_b$. Como os autovalores possíveis para o campo e seu momento conjugado

não variam no tempo, é consistente pensar na correspondência

$$\phi_n(\vec{x}) \rightarrow \phi(\vec{x}, t_n), \quad (2.43)$$

de forma que podemos pensar em (2.43) como uma soma sobre todas as possíveis configurações de campo para os tempos intermediários $0 < t_n < T$. Assim, tomando o limite $N \rightarrow \infty$ ou $\epsilon \rightarrow 0$ podemos fazer uma correspondência entre o índice discreto n com o tempo contínuo, de forma que (2.43) será dada por:

$$\langle \phi_b | e^{-iHt} | \phi_a \rangle = \int (d\Pi) \int_{\phi_a}^{\phi_b} (d\phi) \exp \left[i \int_0^t d\tau \int d^3x \left(\Pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H} \right) \right], \quad (2.44)$$

onde $\int (d\phi) = \prod_{n=1}^N \int d\phi_n$. Esta expressão acima é a amplitude de transição para bósons no formalismo da integração funcional.

2.3 A função de partição para o campo escalar real livre

Da mecânica estatística, sabemos que a função de partição é dada pela normalização do operador matriz densidade (exceto em teorias de calibre que será tratado adiante). Quando existe o um operador $N = \int d^3x \mathcal{N}$ conservado na teoria, a expressão (2.25) para o operador matriz densidade será generalizada para

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta(H - \mu N)}, \quad (2.45)$$

onde μ é o potencial químico correspondente ao operador numero N . Assim, da prescrição que $Tr \rho = 1$, temos que Z é dado por:

$$Z = Tr \left(e^{-\beta(H - \mu N)} \right) \quad (2.46)$$

que é a função de partição. Escrevendo o traço na base $|\phi\rangle$ temos que a função de partição é reescrita como

$$Z = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta(H - \mu N)} | \phi_a \rangle. \quad (2.47)$$

Assim, fazendo $it \rightarrow \beta$ e $H \rightarrow K = H - \mu N$ em (2.44) obtemos uma expressão para a função de partição no formalismo da integração funcional:

$$Z = \int (d\Pi) \int_{\text{periódico}} (d\phi) \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[i\Pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\phi, \Pi) + \mu \mathcal{N}(\phi, \Pi) \right] \right\}. \quad (2.48)$$

Como $|\phi\rangle$ e $-|\phi\rangle$ representam o mesmo estado físico, poderíamos pensar em uma soma sobre estados anti-periódicos para o cálculo do traço da matriz densidade (2.47). Para sanar esta questão, vamos estudar o comportamento das funções de correlação ou funções de Green térmicas. As funções de Green térmicas de dois pontos, definidas como

$$G_\beta(\vec{x}, \tau_x; \vec{y}, \tau_y) = \langle \phi(\vec{x}, \tau_x) \phi(\vec{y}, \tau_y) \rangle_{ensemble}. \quad (2.49)$$

Usando a definição do valor esperado em um ensemble (2.17), vemos que as funções de Green térmicas obedecem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} G_\beta(\vec{x}, \tau; \vec{y}, 0) &= \langle \phi(\vec{y}, 0) \phi(\vec{x}, \tau) \rangle \\ &= Tr(\rho T_\tau \phi(\vec{x}, \tau) \phi(\vec{y}, 0)) \\ &= Tr(\rho \rho^{-1} \phi(\vec{y}, 0) \rho \phi(\vec{x}, \tau)) \\ &= Tr(\rho \phi(\vec{y}, \beta) \phi(\vec{x}, \tau)) \\ &= \pm Tr(\rho T_\tau \phi(\vec{x}, \tau) \phi(\vec{y}, \beta)) \\ &= \pm G_\beta(\vec{x}, \tau; \vec{y}, \beta) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Onde o sinal $+$ corresponde ao caso bosônico enquanto o sinal $-$ corresponde ao caso fermiônico, pois T_τ é o operador de ordenação temporal para o tempo imaginário definido por

$$T_\tau \phi(\vec{y}, \tau_y) \phi(\vec{x}, \tau_x) = \theta(\tau_y - \tau_x) \phi(\vec{y}, \tau_y) \phi(\vec{x}, \tau_x) \pm \theta(\tau_x - \tau_y) \phi(\vec{x}, \tau_x) \phi(\vec{y}, \tau_y), \quad (2.51)$$

para bósons ou férmions respectivamente.

Concluimos então que para o caso bosônico as funções de Green térmicas são periódicas enquanto no caso fermiônico as funções de Green térmicas são anti-periódicas. Na demonstração foi usado a ciclicidade do traço bem como a relação entre ρ e o operador de evolução temporal para o tempo imaginário

$$\begin{aligned} t &\rightarrow i\beta \\ H &\rightarrow K = H - \mu N \\ U = e^{-iHt} &\rightarrow \rho = e^{-\beta(H - \mu N)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Desta forma, a evolução dos estados no formalismo do tempo imaginário é ditada pelo operador matriz densidade:

$$\phi(\vec{x}, \beta) = \rho^{-1} \phi(\vec{x}, 0) \rho, \quad (2.53)$$

na descrição de Heisenberg. As funções de Green térmicas nada mais são senão elementos de matriz do operador matriz densidade. Assim (2.50) implica que os estados que possuem a evolução ditada por (2.53) são periódicos no caso bosônico e anti-periódicos no caso fermiônico.

A lagrangiana do campo escalar real livre é escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (2.54)$$

de modo que o momento canonicamente conjugado ao campo ϕ é dado por

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \partial^0 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.55)$$

Assim, a densidade hamiltoniana será escrita como

$$\mathcal{H} = \Pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (2.56)$$

Para o campo escalar real livre não existem correntes conservadas de forma que neste caso $N = 0$.

O primeiro passo para o cálculo da integração funcional (2.48) consiste no cálculo das integrais em Π . Para isto vamos reescrever (2.48) como:

$$\begin{aligned} Z = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi_1 \frac{d\Pi_1}{2\pi} \dots d\phi_N \frac{d\Pi_N}{2\pi} \\ & \exp \left\{ \sum_{n=1}^N \Delta\tau \int d^3x \left[i\Pi_n(\vec{x}) \left(\frac{\phi_{n+1}(\vec{x}) - \phi_n(\vec{x})}{\Delta\tau} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \Pi_n^2(\vec{x}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi_n^2(\vec{x}) - \frac{m^2}{2} \phi_n^2(\vec{x}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Vamos agora dividir o espaço em células de volume Δv_l de forma que as integrais serão escritas como soma de Riemann

$$\int d^3x f(\vec{x}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_l \Delta v_l f(\vec{x}_l). \quad (2.58)$$

Aplicando este resultado a (2.57) temos:

$$\begin{aligned}
 Z = & \lim_{N,M \rightarrow \infty} \prod_m \int d\phi_1(\vec{x}_m) \frac{d\Pi_1(\vec{x}_m)}{2\pi} \dots d\phi_N(\vec{x}_m) \frac{d\Pi_N(\vec{x}_m)}{2\pi} \exp \left\{ \sum_{n=1}^N \Delta\tau \sum_{l=1}^M \Delta v_l \right. \\
 & \left[i\Pi_n(\vec{x}_l) \left(\frac{\phi_{n+1}(\vec{x}_l) - \phi_n(\vec{x}_l)}{\Delta\tau} \right) - \frac{1}{2} \Pi_n^2(\vec{x}_l) \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi_n^2(\vec{x}_l) - \frac{m^2}{2} \phi_n^2(\vec{x}_l) \right] \right\} \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

As integrais em Π se fatoram, de forma que podemos resolver cada uma das integrais em Π como

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d\Pi_n(\vec{x}_l)}{2\pi} \exp \left[\Delta\tau \Delta v \left(i\Pi_n(\vec{x}_l) \frac{\phi_{n+1}(\vec{x}_l) - \phi_n(\vec{x}_l)}{\Delta\tau} - \frac{\Pi_n^2(\vec{x}_l)}{2} \right) \right] \\
 & = \exp \left[-\frac{\Delta v}{2\Delta\tau} [\phi_{n+1}(\vec{x}_l) - \phi_n(\vec{x}_l)]^2 \right] \\
 & \times \int \frac{d\Pi_n(\vec{x}_l)}{2\pi} \exp \left[-\frac{\Delta\tau \Delta v}{2} \left(\Pi_n(\vec{x}_l) - \frac{i}{\Delta\tau} (\phi_{n+1}(\vec{x}_l) - \phi_n(\vec{x}_l)) \right)^2 \right] \\
 & = \left(\frac{1}{2\pi \Delta\tau \Delta v} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{\Delta v}{2\Delta\tau} (\phi_{n+1}(\vec{x}_l) - \phi_n(\vec{x}_l))^2 \right]. \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

Com isso a função de partição (2.59) se torna:

$$\begin{aligned}
 Z = & \lim_{N,M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi \Delta\tau \Delta v} \right)^{\frac{NM}{2}} \int d\phi_1 \dots d\phi_N \\
 & \times \exp \left[\sum_{n=1}^N \Delta\tau \int d^3x \left(-\frac{(\phi_{n+1} - \phi_n)^2}{2\Delta\tau^2} - \frac{(\vec{\nabla} \phi_n)^2}{2} - \frac{m^2}{2} \phi_n^2 \right) \right]. \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

Com o vínculo $M\Delta v = V$, onde V é o volume total do espaço. Voltando para o tempo contínuo obtemos:

$$Z = \int_{\text{periódico}} D\phi \exp(S), \quad (2.62)$$

Onde S é a ação escrita em termos do tempo imaginário:

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi(\vec{x}, \tau) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \right] \phi(\vec{x}, \tau), \quad (2.63)$$

e

$$D\phi = \lim_{N,M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi \Delta\tau \Delta v} \right)^{\frac{NM}{2}} d\phi_1 \dots d\phi_n \quad (2.64)$$

é a medida da integração funcional.

Resta agora resolver a integração em ϕ . Com este intuito, vamos lembrar que esta integração funcional se dá sobre os modos periódicos do campo. Assim, vemos que é

natural supomos que ϕ admite uma expansão de Fourier do tipo:

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \tilde{\phi}_n(\vec{p}), \quad (2.65)$$

onde $(\beta/V)^{1/2}$ é um fator que fixa a dimensão de ϕ (de forma que $\tilde{\phi}_n(\vec{p})$ seja adimensional), $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} = 2n\pi T$ são as frequências de Matsubara para bósons e $T = 1/\beta$ é a temperatura. Note que é necessário requerer que $\tilde{\phi}_{-n}^*(-\vec{p}) = \tilde{\phi}_n(\vec{p})$ para que o campo ϕ seja real.

A ação livre, em termos de $\tilde{\phi}_n(\vec{p})$, é reescrita como:

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \\ &= -\frac{\beta}{2V} \int d^4x \sum_{n,p} \sum_{n',p'} e^{i(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)} (-p^\mu p_\mu + m^2) e^{i(\vec{p}'\vec{x} + \omega_{n'} \tau)} \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \tilde{\phi}_{n'}(\vec{p}') \\ &= -\frac{\beta^2}{2} \sum_{n,\vec{p}} (\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \tilde{\phi}_{n'}(\vec{p}'). \end{aligned} \quad (2.66)$$

em que $\omega^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Variar a forma funcional de uma função periódica é equivalente a variar os coeficientes de Fourier da sua expansão. Assim usaremos

$$\int (d\phi) = \prod_{n,\vec{p}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_n(\vec{p}). \quad (2.67)$$

Esta expressão será tomada como a definição da medida de integração funcional, e valerá não apenas em termos de coeficientes de Fourier, mas também em termos dos coeficientes de qualquer expansão em serie de funções ortogonais.

Usando (2.67), a função de partição pode ser escrita como:

$$Z = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \prod_{\vec{p}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}_n(\vec{p}) \exp \left[-\frac{\beta^2}{2} (\omega_n^2 + \omega^2) |\tilde{\phi}_n(\vec{p})|^2 \right] \quad (2.68)$$

que é um produtório de integrais gaussianas que pode ser integrado fornecendo:

$$Z = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \prod_{\vec{p}} \left[\frac{2\pi}{\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.69)$$

Vale a pena ressaltar que a expressão para a função de partição (2.69) não está bem definida, pois a variável $\vec{p}$ tem a interpretação física de momento e, portanto, é uma

variável contínua. Assim temos um produtório sobre uma variável contínua. Porém, na realidade, isso não é um problema pois as quantidades de real interesse físico são obtidas a partir do logaritmo da função de partição $\log Z$. Assim quando extrairmos o logaritmo na expressão (2.69) o “produtório contínuo” será escrito como uma soma

$$\log Z = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \log [\beta^2 \omega^2 + (2\pi n)^2]. \quad (2.70)$$

Note que todas as constantes aditivas independentes da temperatura podem ser desprezadas. No limite do contínuo temos a soma recair em uma integral na variável $\vec{p}$ como,

$$\sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (2.71)$$

e assim reescrevemos (2.70) como

$$\log Z = -\frac{V}{2} \sum_n \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \log [\beta^2 \omega^2 + (2\pi n)^2]. \quad (2.72)$$

Com o fim de calcular a soma em (2.72), vamos utilizar a identidade

$$\int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{dx}{x + (2n\pi)^2} = \log [\beta^2 \omega^2 + (2\pi n)^2] - \log [1 + (2\pi n)^2]. \quad (2.73)$$

No lado direito da igualdade acima, o primeiro termo é o integrando de (2.72) e o segundo é independente da temperatura. Desta forma, substituindo (2.73) em (2.72), reescrevemos esta como

$$\log Z = -\frac{V}{2} \sum_n \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{dx}{x + (2n\pi)^2}. \quad (2.74)$$

Comutando a soma com as integrais obtemos

$$\log Z = -\frac{V}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int_1^{\beta^2 \omega^2} dx \sum_n \frac{1}{x + (2n\pi)^2}. \quad (2.75)$$

Podemos calcular o limite da série transformando-a em uma integral, tal como será apresentado na seção 2.7. Desta maneira, a soma é escrita como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 + (2n\pi)^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} dz + \int_{\infty+i\epsilon}^{-\infty+i\epsilon} dz \right) \frac{\cot(z/2)}{c^2 + z^2} \quad (2.76)$$

Aqui devemos usar uma função $\cot$ pois $1/(z^2 + c^2)$ tem pólos sobre o eixo imaginário, entretanto não tem pólos no eixo real, com c real não nulo (seção 2.7). Fechando o contorno da primeira integral no semiplano inferior e o da segunda integral no semiplano inferior (com $1/(z^2 + c^2)$ garantindo a convergência no semiplano inferior e $1/(e^z - 1)$ garantindo

a convergência no semiplano superior) e usando o teorema de resíduos, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} dz \frac{\cot(z/2)}{c^2 + z^2} &= \frac{2\pi i}{2ic} \times \cot\left(\frac{ic}{2}\right) \\ \int_{\infty+i\epsilon}^{-\infty+i\epsilon} dz \frac{\cot(z/2)}{c^2 + z^2} &= \frac{2\pi i}{-2ic} \times \cot\left(-\frac{ic}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Substituindo esses resultados em (2.76), obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 + (2n\pi)^2} = \frac{1}{2c} \coth \frac{c}{2}. \quad (2.78)$$

Reescrevendo a $\coth$ e substituindo em (2.75) escrevemos $\log Z$ como

$$\log Z = -\frac{V}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_1^{\beta^2\omega^2} dx \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{2}{e^{\sqrt{x}} - 1}\right). \quad (2.79)$$

Negligenciando as constantes independentes da temperatura que não terão relevância física, obtemos

$$\log Z = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\beta\omega}{2} - \log(1 - e^{-\beta\omega})\right). \quad (2.80)$$

Esta é a função de partição para o campo escalar livre. Lembrando que a energia é uma derivada da função de partição, obtemos

$$E_{\text{v\u00e1cuo}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z_{\text{v\u00e1cuo}} = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{2}. \quad (2.81)$$

Ou seja, a energia do v\u00e1cuo est\u00e1 inclusa em (2.80) e tem um valor infinito. Assim, as energias s\u00e3o definidas em rela\u00e7\u00e3o a energia do v\u00e1cuo de modo a remover a diverg\u00eancia. A press\u00e3o do v\u00e1cuo, escrita como

$$p_{\text{v\u00e1cuo}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \log Z_{\text{v\u00e1cuo}} = -\frac{E_{\text{v\u00e1cuo}}}{V}, \quad (2.82)$$

tamb\u00e9m apresenta diverg\u00eancia. Desta forma a press\u00e3o tamb\u00e9m ser\u00e1 redefinida em rela\u00e7\u00e3o a press\u00e3o do v\u00e1cuo. Em geral, contribui\u00e7\u00f5es para a press\u00e3o s\u00e3o escritas por

$$p = \frac{1}{\beta V} \log Z, \quad (2.83)$$

pois $\log Z$ \u00e9 extensivo e, portanto, \u00e9 proporcional ao volume. Deste modo, calcular contribui\u00e7\u00f5es para $\log Z$ \u00e9 equivalente a calcular contribui\u00e7\u00f5es para a press\u00e3o.

No caso livre podemos encontrar a fun\u00e7\u00e3o de partição exatamente e extrair dela a informa\u00e7\u00e3o f\u00edsica do sistema. Entretanto, quando levamos em conta as intera\u00e7\u00f5es, a teoria n\u00e3o pode mais ser resolvida exatamente. Desta forma, usamos o conhecimento da

solução no caso livre para resolver a teoria perturbativamente.

2.4 Interações e teoria de perturbação

Até agora consideramos o caso de campos livres de interação. No entanto, agora consideraremos uma ação S do tipo

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_i[\phi], \quad (2.84)$$

onde S_0 é a parte quadrática da ação e S_i é a parte de interação que contem potências do campo ϕ maiores que dois. A função de partição, neste caso, pode ser escrita como

$$Z = N \int D\phi \exp(S_0[\phi] + S_i[\phi]) = N \int D\phi \exp(S_0[\phi]) \exp(S_i[\phi]). \quad (2.85)$$

A teoria de perturbação se baseia no fato que S_i é pequeno num sentido que definiremos adiante. Deste modo, expandindo $\exp(S_i[\phi])$ em Taylor e tomando o logaritmo membro a membro obtemos

$$\log(Z) = \log \left(N \int D\phi \exp \{S_0[\phi]\} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{S_i^l[\phi]}{l!} \right). \quad (2.86)$$

Reescrevendo de maneira mais conveniente

$$\log(Z) = \log \left(N \int D\phi \exp \{S_0\} \right) + \log \left(1 + \frac{\int D\phi \exp \{S_0\} \sum_{l=1}^{\infty} S_i^l}{l! \int D\phi \exp \{S_0\}} \right). \quad (2.87)$$

Segundo a Mecânica Estatística, o valor médio de um operador O em um ensemble descrito por S_0 é dado por:

$$\langle O \rangle_{S_0} = \frac{\text{Tr} \rho_0 O}{\text{Tr} \rho_0}, \quad (2.88)$$

onde ρ_0 é a matriz densidade no caso livre.

Na seção 2.2 obtemos uma expressão para o traço no formalismo da integração funcional. Assim, escrevemos valor médio (2.88) como

$$\langle O \rangle_{S_0} = \frac{\int D\phi \exp(S_0) O}{\int D\phi \exp(S_0)}, \quad (2.89)$$

que mostra que as médias são calculadas sobre todas as configurações de campo possíveis, com o peso estatístico dado da exponencial da ação.

Assim podemos escrever (2.87) como

$$\log(Z) = \log(Z_0) + \log(Z_i) = \log(Z_0) + \log\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\langle S_i^l \rangle_{S_0}}{l!}\right). \quad (2.90)$$

O segundo logaritmo do lado esquerdo pode ser expandido em serie de Taylor obtendo

$$\log(Z_i) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\langle S_i^l \rangle_{S_0}}{l!} - \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\langle S_i^l \rangle_{S_0}}{l!} \right)^2 + \dots, \quad (2.91)$$

que é a expressão da teoria de perturbação para a função de partição. Agora dizemos que S_i é pequeno se $\langle S_i^n \rangle_{S_0} \gg \langle S_i^{n+1} \rangle_{S_0}$ para que a expansão perturbativa faça sentido.

Vamos, a partir de agora, considerar o campo escalar neutro com uma interação do tipo

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.92)$$

A contribuição de primeira ordem em λ para $\log Z$ pode ser obtida de (2.91) como

$$\log(Z_1) = \langle S_i \rangle_{S_0} = -\frac{\lambda}{4!} \frac{\int D\phi e^{S_0} \int_0^\tau d\tau \int d^3x \phi^4(\vec{x}, \tau)}{\int D\phi e^{S_0}}. \quad (2.93)$$

Aqui novamente vamos supor que ϕ admite expansão de Fourier dada por (2.65) e vamos reescrever ação livre de maneira mais conveniente tal como em (2.66):

$$S_0 = -\frac{\beta^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \tilde{\phi}_n^*(\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) (\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2). \quad (2.94)$$

Substituindo na expressão (2.93) para $\log(Z_1)$ e usando as definições para integração funcional (2.67) obtemos:

$$\begin{aligned} \log(Z_1) = & -\lambda N \left(\frac{\beta}{V} \right)^2 \prod_{l, \vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) e^{-\frac{\beta^2}{2} (\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2) \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q})} \\ & \times \sum_{n_1, \vec{p}_1, \dots, n_4, \vec{p}_4} \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{i(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4) \cdot \vec{x} + i(\omega_{n_1} + \dots + \omega_{n_4})\tau} \frac{\tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \dots \tilde{\phi}_{n_4}(\vec{p}_4)}{4!}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde

$$N^{-1} = \prod_{l, \vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) e^{-\frac{\beta^2}{2} (\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2) \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q})}. \quad (2.96)$$

As integrais em d^3x e $d\tau$ podem então ser resolvidas em termos de função δ de conservação

de momento-frequência. Fazendo isto, $\log(Z_1)$ será dado por

$$\log(Z_1) = -\lambda N \frac{\beta^3}{V} \prod_{l, \vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) e^{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2)} \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q}) \sum_{n_1, \vec{p}_1, \dots, n_4, \vec{p}_4} \delta_0^{\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4} \delta_0^{n_1 + \dots + n_4} \frac{\tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \dots \tilde{\phi}_{n_4}(\vec{p}_4)}{4!}. \quad (2.97)$$

O produtório no par de índices $l, \vec{q}$ corre sobre todos os valores possíveis dos índices. Isto implica que no produto de quatro campos $\tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \dots \tilde{\phi}_{n_4}(\vec{p}_4)$ sempre haverá pelo menos um campo integrado. Devido ao caráter par da função exponencial que aparece no integrando, as somas em $(n_1, \vec{p}_1), \dots, (n_4, \vec{p}_4)$ só darão contribuição não nula na integral quando $n_1 = -n_2, \vec{p}_1 = -\vec{p}_2, n_3 = -n_4, \vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ e as outras duas permutações. Como existem três permutações possíveis nos índices, vemos que teremos um fator combinatorial três:

$$\log(Z_1) = -3\lambda N \frac{\beta^3}{V} \prod_{l, \vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) e^{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2)} \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q}) \sum_{n_1, \vec{p}_1, n_2, \vec{p}_2} \frac{\tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{-n_1}(-\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{n_2}(\vec{p}_2) \tilde{\phi}_{-n_2}(-\vec{p}_2)}{4!}, \quad (2.98)$$

Para cada termo particular da soma em $n_1, \vec{p}_1, n_2, \vec{p}_2$ teremos que as integrais em $d\tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1)$ e $d\tilde{\phi}_{n_2}(\vec{p}_2)$ irão se fatorar. As outras integrais em $d\tilde{\phi}_l(\vec{q})$, para $n_1, n_2 \neq l$ ou $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \neq l$ irão se cancelar com o denominador N^{-1} . Desta forma teremos:

$$\log(Z_1) = -3 \frac{\lambda \beta^3}{4! V} \left[\sum_{n, \vec{p}} \frac{\int d\tilde{\phi}_n(\vec{p}) e^{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p})}{\int d\tilde{\phi}_n(\vec{p}) e^{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p})} \right]^2. \quad (2.99)$$

Lembrando que a realidade do campo ϕ implica em $\tilde{\phi}_n(\vec{p}) = \tilde{\phi}_{-n}^*(-\vec{p})$, vemos que as integrais acima são do tipo:

$$\frac{\int dx e^{-M x^2} x^2}{\int dx e^{-M x^2}} = -\frac{d}{dM} \log \left[\int dx e^{-M x^2} \right] = \frac{1}{2M}. \quad (2.100)$$

Desta maneira, podemos resolver as integrais (2.99):

$$\log(Z_1) = -3 \frac{\lambda \beta^3}{4! V} \left[\frac{1}{\beta^2} \sum_{n, \vec{p}} D_0(\omega_n, \vec{p}) \right]^2, \quad (2.101)$$

e considerar o limite do contínuo

$$\sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (2.102)$$

de forma que $\log Z_1$ é dado por

$$\log(Z_1) = -3 \frac{\lambda}{4!} \beta V \left[\frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} D_0(\omega_n, \vec{p}) \right]^2, \quad (2.103)$$

onde

$$D_0(\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2}, \quad (2.104)$$

é o propagador livre do campo escalar.

Vamos agora calcular a contribuição de segunda ordem em λ para $\log(Z_i)$. Segundo (2.91) essa contribuição é dada por

$$\log(Z_2) = 1/2 \langle S_i^2 \rangle_{S_0} - 1/2 \langle S_i \rangle_{S_0}^2. \quad (2.105)$$

O termo $\langle S_i \rangle_{S_0}^2$ pode ser obtido diretamente de (2.103) de forma que resta calcular o termo $\langle S_i^2 \rangle_{S_0}$. Vamos usar (2.88) para escrever $\langle S_i^2 \rangle_{S_0}$ como

$$\langle S_i^2 \rangle_{S_0} = \frac{\int d\phi e^{S_0} S_i^2}{\int d\phi e^{S_0}}. \quad (2.106)$$

Aplicando expansão de Fourier para o campo (2.65) escrevemos este valor esperado como

$$\begin{aligned} \langle S_i^2 \rangle_{S_0} = & \frac{\lambda^2 \beta^6 N}{V^2} \prod_{l, \vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) e^{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2)} \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q}) \sum_{n_1, \vec{p}_1, \dots, n_4, \vec{p}_4} \sum_{m_1, \vec{k}_1, \dots, m_4, \vec{k}_4} \\ & \left[\delta_0^{\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4} \delta_0^{n_1 + \dots + n_4} \delta_0^{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \delta_0^{m_1 + \dots + m_4} \frac{\tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \dots \tilde{\phi}_{n_4}(\vec{p}_4)}{4!} \frac{\tilde{\phi}_{m_1}(\vec{k}_1) \dots \tilde{\phi}_{m_4}(\vec{k}_4)}{4!} \right]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Por argumentos de paridade, vemos que os únicos termos das somas que fornecem contribuição não nula nas integrações funcionais são os termos cujos conjuntos de índices obedecem:

$$n_1 = -n_2, p_1 = -p_2, n_3 = -n_4, p_3 = -p_4, \quad (2.108)$$

$$m_1 = -m_2, k_1 = -k_2, m_3 = -m_4, k_3 = -k_4,$$

$$n_1 = -m_1, p_1 = -k_1, n_2 = -m_2, p_2 = -k_2, \quad (2.109)$$

$$n_3 = -n_4, p_3 = -p_4, m_3 = -m_4, k_3 = -k_4$$

ou

$$\begin{aligned} n_1 &= -m_1, p_1 = -k_1, n_2 = -m_2, p_2 = -k_2, \\ n_3 &= -m_3, p_3 = -k_3, n_4 = -m_4, p_4 = -k_4, \end{aligned} \quad (2.110)$$

e as outras permutações dentro de cada um dos 3 casos que irão dar a mesma contribuição. Assim o número de permutações equivalentes dentro de um mesmo caso irá aparecer como um fator combinatorial que conta as maneiras distintas de se obter a mesma contribuição.

Contando os fatores combinatoriais reescrevemos (2.107) como

$$\begin{aligned} \langle S_i^2 \rangle_{S_0} &= \frac{\lambda^2 \beta^6 N}{4! V^2} \prod_{l, \vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) e^{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2)} \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q}) \\ &\quad \left\{ 9 \left[\sum_{n_1, \vec{p}_1, n_2, \vec{p}_2} \tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{-n_1}(-\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{n_2}(\vec{p}_2) \tilde{\phi}_{-n_2}(-\vec{p}_2) \right]^2 \right. \\ &\quad + 72 \left[\sum_{n_1, \vec{p}_1} \tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{-n_1}(-\vec{p}_1) \right]^2 \\ &\quad \times \left[\sum_{n_1, \vec{p}_1, n_2, \vec{p}_2} \delta_0^{\vec{p}_1 + \vec{p}_2} \delta_0^{n_1 + n_2} \tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{-n_1}(-\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{n_2}(\vec{p}_2) \tilde{\phi}_{-n_2}(-\vec{p}_2) \right] \\ &\quad \left. + 24 \left[\sum_{n_1, \vec{p}_1, \dots, n_4, \vec{p}_4} \delta_0^{n_1 + \dots + n_4} \delta_0^{\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4} \tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{-n_1}(-\vec{p}_1) \dots \tilde{\phi}_{n_4}(\vec{p}_4) \tilde{\phi}_{-n_4}(-\vec{p}_4) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.111)$$

e resolvendo as integrais do mesmo tipo das que aparecem em (2.100) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle S_i^2 \rangle_{S_0} &= \frac{\lambda^2 \beta^6}{(4!)^2 V^2} \left[9 \left(\sum_{n, \vec{p}} \frac{1}{\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \right)^4 \right. \\ &\quad + 72 \left(\sum_{n, \vec{p}} \frac{1}{\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \right)^2 \\ &\quad \times \left(\sum_{n_1, \vec{p}_1, n_2, \vec{p}_2} \frac{\delta_0^{n_1 + n_2} \delta_0^{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}}{\beta^4(\omega_{n_1}^2 + \vec{p}_1^2 + m^2)(\omega_{n_2}^2 + \vec{p}_2^2 + m^2)} \right) \\ &\quad \left. + 24 \left(\sum_{n_1, \dots, n_4, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_4} \frac{\delta_0^{n_1 + \dots + n_4} \delta_0^{\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4}}{\beta^2(\omega_{n_1}^2 + \vec{p}_1^2 + m^2) \dots \beta^2(\omega_{n_4}^2 + \vec{p}_4^2 + m^2)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.112)$$

No limite do contínuo identificamos

$$V \delta_0^{\vec{p}} \rightarrow (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}) \quad (2.113)$$

e

$$\int d^3x = V. \quad (2.114)$$

Deste modo a contribuição de segunda ordem em λ para $\log Z$ é reescrita como

$$\begin{aligned} \langle S_i^2 \rangle_{S_0} &= \frac{\lambda^2 \beta^2 V^2}{(4!)^2} \left[9 \left(\sum_n \int \frac{d^3p}{\beta(2\pi)^3} D_0(\omega_n, \vec{p}) \right)^4 \right. \\ &+ 72 \left(\sum_n \int \frac{d^3p}{\beta(2\pi)^3} D_0(\omega_n, \vec{p}) \right)^2 \\ &\times \left(\sum_{l_1, l_2} \int \frac{d^3q_1}{\beta(2\pi)^3} \frac{d^3q_2}{\beta(2\pi)^3} D_0(\omega_{l_1}, \vec{q}_1) D_0(\omega_{l_2}, \vec{q}_2) \frac{(2\pi)^3 \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)}{V} \delta_0^{l_1+l_2} \right) \\ &+ 24 \left(\sum_{l_1+\dots+l_4} \int \frac{d^3q_1}{\beta(2\pi)^3} \dots \frac{d^3q_4}{\beta(2\pi)^3} D_0(\omega_{l_1}, \vec{q}_1) \dots D_0(\omega_{l_4}, \vec{q}_4) \right. \\ &\times \left. \left. \frac{(2\pi)^3 \delta(\vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_4)}{V} \delta_0^{l_1+\dots+l_4} \right) \right]. \quad (2.115) \end{aligned}$$

A expressão para $\langle S_i \rangle_{S_0}$ já foi calculada e é dada por (2.103). Lembrando da expressão (2.105) para $\log(Z_2)$, vemos que o termo $-1/2 \langle S_i \rangle_{S_0}^2$ cancela o primeiro termo de (2.115). Assim, $\log(Z_2)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \log(Z_2) &= \left(\frac{-\lambda}{4!} \right)^2 \beta V \left[36 \left(\sum_n \int \frac{d^3p}{\beta(2\pi)^3} D_0(\omega_n, \vec{p}) \right)^2 \right. \\ &\times \left(\sum_{l_1, l_2} \int \frac{d^3q_1}{\beta(2\pi)^3} \frac{d^3q_2}{\beta(2\pi)^3} D_0(\omega_{l_1}, \vec{q}_1) D_0(\omega_{l_2}, \vec{q}_2) (2\pi)^3 \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \beta \delta_0^{l_1+l_2} \right) \\ &+ 12 \left(\sum_{l_1+\dots+l_4} \int \frac{d^3q_1}{\beta(2\pi)^3} \dots \frac{d^3q_4}{\beta(2\pi)^3} D_0(\omega_{l_1}, \vec{q}_1) \dots D_0(\omega_{l_4}, \vec{q}_4) \right. \\ &\times \left. \left. (2\pi)^3 \delta(\vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_4) \beta \delta_0^{l_1+\dots+l_4} \right) \right]. \quad (2.116) \end{aligned}$$

Uma contribuição do tipo $\langle S_i \rangle_{S_0}^2$ é chamada de desconexa, pois possui duas partes conexas independentes $\langle S_i \rangle_{S_0} \times \langle S_i \rangle_{S_0}$. Até ordem λ^2 verificamos que apenas termos conexos contribuem para $\log Z$. Na próxima seção mostraremos que a parte desconexa de $\langle S_i^l \rangle_{S_0}$ não contribui para $\log Z$ em nenhuma ordem de teoria de perturbação. Desta forma, a contribuição para a função de partição em uma dada ordem de perturbação é dada pela soma das contribuições conexas para esta dada ordem.

2.5 Representação diagramática e regras de Feynman

Na teoria de campos à temperatura nula é conveniente usar uma linguagem diagramática para os cálculos perturbativos. Vimos na seção anterior que os cálculos perturbativos à temperatura finita são análogos aos cálculos perturbativos à temperatura zero. Portanto, aqui também é conveniente utilizar uma linguagem diagramática para os cálculos perturbativos. Vamos então definir as regras de Feynman para o campo escalar real com interações do tipo $\lambda\phi^4$.

As convenções sobre regras de Feynman e fatores combinatoriais utilizadas neste trabalho estão definidas em [tHV74].

A parte livre da ação é dada por

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi, \quad (2.117)$$

de modo que o propagador pode ser então definido como o inverso do operador da parte quadrática no espaço dos momento

$$D_0(\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2}. \quad (2.118)$$

O propagador está representado na figura 2.2. A cada linha interna de um diagrama vamos associar um fator

$$T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} D_0(\omega_n, \vec{p}). \quad (2.119)$$

A parte de interação da ação pode ser escrita no espaço dos momentos como

$$S_i = \sum_{n_1, \vec{p}_1, \dots, n_4, \vec{p}_4} -\lambda \beta \delta_0^{n_1+\dots+n_4} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1+\dots+\vec{p}_4) \frac{\tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{n_2}(\vec{p}_2) \tilde{\phi}_{n_3}(\vec{p}_3) \tilde{\phi}_{n_4}(\vec{p}_4)}{4!}. \quad (2.120)$$

A partir daí, definimos o vértice por

$$V^{(4)} = -\lambda, \quad (2.121)$$

onde está implícito que cada vértice vem acompanhado de um fator

$$\frac{1}{4!} \beta \delta_0^{n_1+\dots+n_4} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4), \quad (2.122)$$

que garante a conservação de de momento-frequência no vértice. O vértice quártico esta representado na figura 2.1, onde cada linha do vértice representa um campo ϕ .

Para ilustrar o método vamos calcular a contribuição para $\log Z$ em primeira ordem

Figura 2.1: Vértice ϕ^4

Figura 2.2: Propagador

em λ . O único diagrama que contribui nesta ordem é dado pela figura 2.3. Usando as regras (2.121) e (2.118) escrevemos a expressão analítica correspondente a este diagrama é dada por

$$\begin{aligned} \log Z_1 &= -\frac{3\lambda\beta}{4!} \sum_{n_p} T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{n_k} T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D_0(\omega_p, \vec{p}) D_0(\omega_k, \vec{k}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - k + p - p) \\ &= -\frac{\lambda\beta V}{8} \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.123)$$

O fator 3 que inserimos em (2.123) é um fator combinatorial, que conta de quantas maneiras possíveis podemos construir o diagrama.

Na seção anterior vimos que apenas diagramas conexos contribuem para $\log Z_1$. Agora vamos provar que apenas diagramas conexos contribuem para o logaritmo da função de partição $\log Z$. Partiremos da expressão (2.85) reescrita como

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle S_i^n \rangle_{S_0}}{n!}. \quad (2.124)$$

Podemos expressar $\langle S_i^n \rangle_{S_0}$ como uma soma de diagramas desconexos, que por sua vez, são escritos como o produto de partes conexas, tais como

$$\langle S_i^n \rangle_{S_0} = \sum_{a_1, a_2, \dots} C_{a_1, a_2, \dots}^m \langle S_{i\text{co}}^1 \rangle_{S_0}^{a_1} \langle S_{i\text{co}}^2 \rangle_{S_0}^{a_2} \dots \times \delta_n^{a_1 + 2a_2 + \dots}, \quad (2.125)$$

onde a delta é inserida para fixar o grau do polinômio em S_i no lado direito em S_i^n . O

Figura 2.3: Contribuição ordem dois “loops” para $\log Z$

fator $C_{a_1, a_2, \dots}^n$ é o número de maneiras distintas de formar o diagrama a partir das partes conexas, que pode ser contado como

$$C_{a_1, a_2, \dots}^n = \frac{\text{número de permut. dos } S_{i\ co}^n}{\text{permut. internas}}, \quad (2.126)$$

onde as permutações internas são as permutações que não são relevantes. Estas permutações são contadas como

$$\begin{aligned} & \prod_k \{ [\text{número de permut. de } \langle S_{i\ co}^k \rangle \text{ em } (\langle S_{i\ co}^k \rangle^{a_k})] \\ & \times [\text{número de permut. dos } S_{i\ co} \text{ em } \langle S_{i\ co}^k \rangle]^{a_k} \} \\ & = \prod_k a_k! (k!)^{a_k} \end{aligned} \quad (2.127)$$

Substituindo em (2.125) obtemos

$$\langle S_i^n \rangle_{S_0} = \sum_{a_1, a_2, \dots} n! \frac{\langle S_{i\ co}^1 \rangle_{S_0}^{a_1}}{a_1!} \frac{\langle S_{i\ co}^2 \rangle_{S_0}^{a_2}}{a_2! (2!)^{a_2}} \dots \frac{\langle S_{i\ co}^k \rangle_{S_0}^{a_k}}{a_k! (k!)^{a_k}} \dots \times \delta_n^{a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k + \dots}. \quad (2.128)$$

Calculando a soma sobre n em (2.124) obtemos

$$Z = \left\{ \sum_{a_1, a_2, \dots} \frac{\langle S_{i\ co}^1 \rangle_{S_0}^{a_1}}{a_1!} \frac{\langle S_{i\ co}^2 \rangle_{S_0}^{a_2}}{a_2! (2!)^{a_2}} \dots \frac{\langle S_{i\ co}^k \rangle_{S_0}^{a_k}}{a_k! (k!)^{a_k}} \dots \right\}. \quad (2.129)$$

Fatorando as somas independentes

$$\begin{aligned} Z &= \left\{ \sum_{a_1=0}^{\infty} \frac{\langle S_{i\ co}^1 \rangle_{S_0}^{a_1}}{a_1!} \right\} \times \left\{ \sum_{a_2=0}^{\infty} \frac{\langle S_{i\ co}^2 \rangle_{S_0}^{a_2}}{a_2! (2!)^{a_2}} \right\} \times \dots \times \left\{ \sum_{a_k=0}^{\infty} \frac{\langle S_{i\ co}^k \rangle_{S_0}^{a_k}}{a_k! (k!)^{a_k}} \right\} \dots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left[\frac{\langle S_{i\ co}^k \rangle_{S_0}}{k!} \right] \end{aligned} \quad (2.130)$$

podemos escrever a função de partição como

$$Z = \exp W, \quad (2.131)$$

onde $W = \log Z$ é escrito como

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle S_{i\ co}^k \rangle_{S_0}}{k!}. \quad (2.132)$$

Desta forma mostramos que $\log Z$ é uma soma de diagramas conexos.

Figura 2.4: Diagramas básicos

2.6 A expansão em “loops”

No estudo de teorias dos campos, em geral, usamos um sistema de unidades em que $\hbar = 1$. Entretanto, é de relevância física estudar uma expansão semi-clássica, isto é, uma expansão em potências de $\hbar$. Nesta seção iremos estudar a relação entre o número de “loops” de um diagrama e sua ordem em $\hbar$, para uma teoria genérica com vértices cúbicos e quárticos.

Resgatando os fatores $\hbar$ na função de partição reescrevemos (2.85) como

$$Z = N \int D\phi \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} S_0[\phi] + \frac{1}{\hbar} S_i[\phi] \right\}. \quad (2.133)$$

O propagador é definido como o inverso do operador da parte quadrática da ação. Portanto cada propagador carrega consigo uma potência de $\hbar$, assim escrevemos

$$D_0 \rightarrow \hbar D_0. \quad (2.134)$$

Já os vértices são obtidos diretamente da lagrangiana de interação. Logo, quando passamos a considerar as potências de $\hbar$ reescrevemos os vértices por

$$V^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\hbar} V^{(n)}, \quad (2.135)$$

de modo que cada vértice virá acompanhado de uma potência de $\frac{1}{\hbar}$.

Existe uma relação, análoga a relação de Euler para poliedros conexos, que permite expressar o número de “loops” (L) de um diagrama em termos de seus respectivos números de vértices (V) e de linhas internas (n). Esta relação é dada por

$$L + V - n = 1. \quad (2.136)$$

Não vamos fazer uma dedução formal desta expressão, entretanto é nosso intuito entender a idéia por trás de uma dedução formal deste fato. Para tanto considere o exemplo mostrado na figura 2.4. Por inspeção, vemos que estes diagramas satisfazem a expressão (2.136). A idéia da prova geral de (2.136) pode ser feita por indução. Esta

Figura 2.5: Corte no propagador

Figura 2.6: Inserção de um vértice quártico

prova se estrutura no fato que podemos construir diagramas mais complexos a partir de modificação dos diagramas mostrados na figura 2.4, sem ferir (2.136). Vamos listar algumas destas mudanças:

A primeira delas é cortar um propagador fazendo com que uma linha interna se torne duas linhas externas, (figura 2.5) diminuindo em um o número de linhas internas, mantendo inalterado o número de vértices, diminuindo em um o número de “loops”. Assim

$$\Delta L - \Delta V + \Delta n = 0 \quad (2.137)$$

é satisfeita.

Podemos também inserir um vértice quártico em uma linha interna, adicionando assim um “loop” e duas linhas internas (figura 2.6) de modo que (2.137) é satisfeita.

Desta forma, podemos pensar em um grande número de transformações deste tipo e algumas delas estão mostradas na figura 2.7, todas satisfazendo (2.137). O leitor também poderá criar algumas outras transformações, até que elas se esgotem. Quando verificar que todas respeitam a igualdade (2.137), então está provado (2.136) para diagramas irreduzíveis.

Diagramas redutíveis são aqueles que podem ser separados em dois diagramas cortando-se apenas uma linha interna. Já os irreduzíveis são os que não podem ser separados cortando-se uma linha interna. Um diagrama redutível pode ser construído em termos de dois ou mais diagramas redutíveis conforme mostra a figura 2.8. Desta forma o número de vértices do gráfico final será o soma dos números de vértices dos diagramas iniciais $V = V_1 + V_2$, o mesmo acontecendo com o número de “loops” $L = L_1 + L_2$. Já o número de

Figura 2.7: Varias transformações que podemos fazer nos diagramas respeitando (2.137)

Figura 2.8: Unindo duas partes irredutíveis em uma redutível

linhas internas irá aumentar em um de forma que $n = n_1 + n_2 + 1$. Assim se os diagramas iniciais satisfizerem (2.136) o diagrama redutível final também satisfará.

As equações (2.134) e (2.135) implicam que o número de potências de $\hbar$, denotado por $n_{\hbar}$, pode ser escrito como

$$n_{\hbar} = n - V, \quad (2.138)$$

e assim reescrevemos (2.136) como

$$n_{\hbar} = L - 1. \quad (2.139)$$

Assim o número de potências de $\hbar$ é dado pelo numero de “loops” menos 1.

Portanto, dado o processo, isto é, o número de pernas externas ao diagrama, a expansão em “loops” fornece uma expansão em potências de $\hbar$. Desta forma, os “loops” aparecem como correções quânticas e cada “loop” inserido significa uma correção quântica para uma determinada quantidade.

Figura 2.9: Contornos de integração no plano complexo. Os círculos marcados com x representam os pólos da função $\coth(\beta z/2)f(z)$

2.7 Técnicas de cálculo à temperatura finita

Nesta seção vamos estudar uma importante técnica de transformar séries infinitas em integrais no plano complexo. Para tanto, considere $f(z)$ uma função analítica (sem pólos) sobre o eixo imaginário. Sabemos que a função $\coth(\beta z/2)$ possui pólos simples em $z = 2n\pi i/\beta$, de sorte que a função $\coth(\beta z/2)f(z)$ também terá pólos simples em $z = 2n\pi i/\beta$. Observando os contornos de integração na figura 2.9, vamos avaliar a seguinte integral

$$I = \oint_C dz \coth(\beta z/2)f(z). \quad (2.140)$$

Usando o teorema do resíduo podemos calcular I como

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\cup_i C_i} dz \coth(\beta z/2)f(z) = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Res}_{z_0=2n\pi i/\beta} \coth(\beta z_0/2)f(z_0) \\ &= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z_0 \rightarrow 2n\pi i/\beta} (z_0 - 2n\pi i/\beta) \coth(\beta z_0/2)f(z_0) \\ &= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z_0 \rightarrow 2n\pi i/\beta} f(z_0)(z_0 - 2n\pi i/\beta) \frac{e^{\beta z_0} + 1}{e^{\beta z_0} - 1} \\ &= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z_0 \rightarrow 2n\pi i/\beta} f(z_0)(z_0 - 2n\pi i/\beta) \\ &\quad \times \frac{2 + (\beta z_0 - 2n\pi i) + \frac{(\beta z_0 - 2n\pi i)^2}{2!} + \dots}{(\beta z_0 - 2n\pi i) + \frac{(\beta z_0 - 2n\pi i)^2}{2!} + \dots} \\ &= 4\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} f(2n\pi i/\beta). \end{aligned} \quad (2.141)$$

Assim, (2.140) juntamente com (2.141) nos permitem escrever as somas de Matsubara para bósons como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} f(2n\pi i/\beta) = \frac{1}{4\pi i} I. \quad (2.142)$$

Podemos escrever I de maneira mais conveniente

$$I = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \coth(\beta z/2) f(z) + \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dz \coth(\beta z/2) f(z). \quad (2.143)$$

A função $\coth x$ pode ser rearranjada como

$$\coth x/2 = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + \frac{2}{e^x - 1} = -1 - \frac{2}{e^{-x} - 1}, \quad (2.144)$$

e assim (2.143) se torna:

$$\begin{aligned} I = & \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz f(z) \left(1 + \frac{2}{e^{\beta z} - 1} \right) \\ & + \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dz f(z) \left(-1 - \frac{2}{e^{-\beta z} - 1} \right). \end{aligned} \quad (2.145)$$

Vamos fazer uma mudança de variáveis $z \rightarrow -z$ na segunda integral em (2.145) e reagrupar os termos de forma que podemos reescrever (2.145) como

$$I = \int_{-i\infty}^{i\infty} dz [f(z) + f(-z)] + \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \frac{2}{e^{\beta z} - 1} [f(z) + f(-z)]. \quad (2.146)$$

Note que na primeira integral não é mais necessário o uso do regulador ϵ pois o integrando é analítico sobre o eixo imaginário. Podemos substituir na soma de Matsubara bosônica reescrevendo (2.142) como

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} f(2n\pi i/\beta) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz [f(z) + f(-z)] n_B(z) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left[\frac{f(z) + f(-z)}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.147)$$

onde $n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta z} - 1}$ é a distribuição de Bose-Einstein. Note que no lado direito de (2.147) o segundo termo é independente da temperatura e que o primeiro termo tende a zero no limite $T \rightarrow 0$ ou $\beta \rightarrow \infty$.

Como foi mostrado na seção 1.2, no caso fermiônico a integração funcional é realizada sobre estados anti-periódicos, de forma que os campos fermiônicos admitem uma expansão de Fourier do tipo

$$\psi(\vec{x}, \tau_x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n, \vec{p}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_n^F \tau_x)} \tilde{\psi}_n(\vec{p}), \quad (2.148)$$

Figura 2.10: Contornos de integração para frequência ímpares.

onde

$$\omega_n^F = (2n + 1)\pi T \quad (2.149)$$

no caso fermiônico de modo a garantir a anti-periodicidade do campo ψ . Note que o fator $V^{-1/2}$ é inserido de modo a conter toda a dimensão do lado direito de (2.148).

A equação (2.149) juntamente com (2.148) nos mostra que no caso fermiônico as somas de Matsubara são realizadas sobre frequências ímpares. Deste modo é interessante que transformemos somas do tipo

$$\sum_n f((2n + 1)\pi T) \quad (2.150)$$

em integrais como em (2.147). Com este intuito vamos calcular a integral

$$I_F = \oint_C \tanh(\beta z/2) f(z) \quad (2.151)$$

onde $f(z)$, por hipótese, não tem pólos sobre o eixo imaginário. Usando o teorema do

resíduo escrevemos

$$\begin{aligned}
I_F &= \oint_{\cup_i C_i^f} dz \tanh(\beta z/2) f(z) = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Res}_{z_0=(2n+1)\pi i/\beta} \tanh(\beta z_0/2) f(z_0) \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z_0 \rightarrow (2n+1)\pi i/\beta} (z_0 - (2n+1)\pi i/\beta) \tanh(\beta z_0/2) f(z_0) \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z_0 \rightarrow 2n\pi i/\beta} f(z_0) (z_0 - (2n+1)\pi i/\beta) \frac{e^{\beta z_0} - 1}{e^{\beta z_0} + 1} \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z_0 \rightarrow 2n\pi i/\beta} f(z_0) (z_0 - (2n+1)\pi i/\beta) \frac{-e^{\beta z_0 - (2n+1)\pi i} - 1}{-e^{\beta z_0 - (2n+1)\pi i} + 1} \\
&= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{z_0 \rightarrow (2n+1)\pi i/\beta} f(z_0) (z_0 - (2n+1)\pi i/\beta) \\
&\quad \times \frac{2 + (\beta z_0 - (2n+1)\pi i) + \frac{(\beta z_0 - (2n+1)\pi i)^2}{2!} + \dots}{(\beta z_0 - (2n+1)\pi i) + \frac{(\beta z_0 - (2n+1)\pi i)^2}{2!} + \dots} \\
&= 4\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} f((2n+1)\pi i/\beta). \tag{2.152}
\end{aligned}$$

Logo, usando (2.152) juntamente com (2.151) podemos escrever uma soma de Matsubara sobre frequências ímpares como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} f((2n+1)\pi i/\beta) = \frac{1}{4\pi i} I^F. \tag{2.153}$$

A função $\tanh x$ pode ser decomposta como

$$\tanh x/2 = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1} = -1 + \frac{2}{e^{-x} + 1}, \tag{2.154}$$

de forma que decompos (2.153) como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} f((2n+1)\pi i/\beta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz [f(z) + f(-z)] n_F(z) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left[\frac{f(z) + f(-z)}{2} \right], \tag{2.155}
\end{aligned}$$

onde $n_F(z)$ é a distribuição de Fermi-Dirac, que é escrita como

$$n_F(z) = \frac{1}{e^{\beta z} + 1}. \tag{2.156}$$

De modo geral, podemos escrever (2.147) e (2.155) como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} f(\omega_n^{B/F}) &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz [f(z) + f(-z)] n_{B/F}(z) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \left[\frac{f(z) + f(-z)}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.157)$$

onde $\omega_n^B = 2n\pi i$ e $\omega_n^F = (2n+1)\pi i$ são as frequências de Matsubara bosônica e fermiônica, respectivamente, e $n_{B/F} = (e^{\beta z} \mp 1)^{-1}$, são as distribuições de Bose-Einstein e Fermi-Dirac, respectivamente.

Na seção 2.3 aplicamos este método para somar uma série do tipo

$$\sum_n f(\omega_n^{p/i}), \quad (2.158)$$

com

$$\begin{aligned} \omega_n^p &= 2n\pi \\ \omega_n^i &= (2n+1)\pi. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Lá a função $f(\omega_n^{p/i})$ tem pólos sobre o eixo imaginário mas não tem pólos sobre eixo real. Neste caso podemos fazer um cálculo totalmente análogo usando as funções $\cot^{\pm 1}(z/2)$, tendo em vista que estas funções possuem pólos nos pontos $\omega_n^{p/i}$ respectivamente. Assim, usando o teorema do resíduo, calculamos (2.158) como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n^{p/i}) = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} dz + \int_{\infty+i\epsilon}^{-\infty+i\epsilon} dz \right) f(z) \cot^{\pm 1}(z/2). \quad (2.160)$$

Assim vemos que o método apresentado aqui é um poderoso método de somar diversos tipos de séries infinitas. Podemos fazer transformações semelhantes a essas usando outros tipos de funções que possuam pólos simples periodicamente distribuídos, tais como as funções $\sec$, $\csc$ e seus correspondentes hiperbólicos. Entretanto, para separar a parte independente da temperatura é conveniente usar as funções $\coth^{\pm 1}$ para bósons e férmions respectivamente, obtendo as distribuições de Bose-Einstein e Fermi-Dirac para as partes dependentes da temperatura.

2.8 Cálculo de integrais à temperatura finita

Nesta seção vamos avaliar integrais obtidas nas seções anteriores. Entretanto, aqui estaremos restritos aos casos de massa nula $m = 0$. Além disso, em expressões tais

Figura 2.11: Contorno de integração no plano complexo.

como (2.157) estaremos preocupados apenas com a parte de temperatura finita. Para o tratamento da parte de temperatura nula de expressões como (2.157) veja [Gom02].

Primeiramente vamos avaliar a seguinte integral:

$$I_1 = \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) = I_1^T + I_1^{T=0}, \quad (2.161)$$

onde o propagador livre de massa nula é escrito como

$$D_0(\omega_k, \vec{k}) = \frac{-1}{(2\pi n_k T i)^2 - \vec{k}^2}. \quad (2.162)$$

Assim podemos usar (2.147) para calcular o limite da soma de Matsubara de (2.161). Desta forma a parte temperatura finita de (2.161) pode ser escrita como

$$I_1^T = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 2n_B(k_0) \frac{-1}{k_0^2 - \vec{k}^2}. \quad (2.163)$$

Para resolver a integral em dk_0 vamos considerar o contorno de integração C mostrado na figura 2.11. O contorno C_2 é um semicírculo de raio R , de forma que o comprimento do contorno de integração é proporcional a R . Quando fazemos $R \rightarrow \infty$ o módulo do integrando de (2.163) cai mais rápido que uma exponencial decrescente. Como o módulo de uma integral de contorno é menor ou igual ao comprimento do contorno vezes o máximo do módulo do integrando no dado contorno, vemos que a integral em C_2 tende a zero quando $R \rightarrow \infty$. Desta forma a integral (2.163) no circuito completo C é igual a integral no circuito C_1 de forma que podemos usar o teorema do resíduo para calcular a integral em dk_0 em (2.163).

O integrando possui um único pólo simples no interior do contorno C no ponto $k_0 =$

$|\vec{k}|$. O resíduo pode ser calculado como

$$\text{Res}_{k_0=|\vec{k}|} \left[n_B(k_0) \frac{-1}{k_0^2 - \vec{k}^2} \right] = -\frac{n_B(|\vec{k}|)}{2|\vec{k}|}. \quad (2.164)$$

Portanto pelo teorema dos resíduos obtemos

$$I_1^T = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{n_B(|\vec{k}|)}{|\vec{k}|}. \quad (2.165)$$

Segundo [Gom02] o elemento de volume esfericamente simétrico em n dimensões é escrito como

$$\int d^d k = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dk k^{d-1}, \quad (2.166)$$

onde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t} \quad (2.167)$$

é a função gama de Euler. Note que no membro esquerdo de (2.166) denotamos $k = |\vec{k}|$.

Substituindo (2.166) na expressão (2.165) escrevemos I_1 como

$$I_1^T = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})(2\pi)^{d-1}} \int_0^\infty dk k^{d-3} \frac{1}{e^{\beta k} - 1}, \quad (2.168)$$

onde a variável k assume apenas valores positivos garantindo que a expansão

$$\frac{1}{e^{\beta k} - 1} = \frac{e^{-\beta k}}{1 - e^{-\beta k}} = \sum_{n=1}^\infty e^{-n\beta k} \quad (2.169)$$

faz sentido em todo domínio de integração. Vamos então reescrever (2.168) como

$$I_1^T = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})(2\pi)^{d-1}} \int_0^\infty dk k^{d-3} \sum_{n=1}^\infty e^{-n\beta k}. \quad (2.170)$$

Usando o fato que

$$\int_0^\infty dk k^m e^{-sk} = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \int_0^\infty dk e^{-sk} = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \frac{1}{s} = \frac{m!}{s^{m+1}} \quad (2.171)$$

escrevemos a expressão final para I_1 :

$$I_1^T = \frac{(d-3)! T^{d-2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-2}} \zeta(d-2), \quad (2.172)$$

onde

$$\zeta(l) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^l} \quad (2.173)$$

é a função zeta de Riemann.

3 *Efeitos térmicos na teoria $\lambda \phi^4$*

Neste capítulo vamos estudar o campo escalar real com interação $\lambda \phi^4$. Usaremos as regras de Feynman para calcular a auto energia, contribuições para a pressão a dois e três “loops”, além de calcular a soma dos diagramas anelares para pressão. Todas as propriedades estudadas aqui possuem análogo nas teorias de calibre, incluindo a gravitação.

Este capítulo é de vital importância para fixar a notação bem como definir convenções a respeito de regras de Feynman e fatores combinatórios.

3.1 Regras de Feynman

Nesta seção vamos considerar um campo escalar real com interação ϕ^4 de forma que a lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (3.1)$$

onde m é a massa e λ é a constante de acoplamento. A parte quadrática da lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi, \quad (3.2)$$

e o propagador é o inverso do operador que aparece na parte quadrática no espaço dos momentos

$$D_0(k)(-k^2 + m^2) = 1. \quad (3.3)$$

Esta equação pode ser trivialmente resolvida obtendo

$$D_0(\omega_k, \vec{k}) = \frac{-1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2}, \quad (3.4)$$

que é o propagador do campo escalar livre com massa (figura 3.1).

Figura 3.1: Propagador do campo escalar real

Figura 3.2: Vértice quártico

A parte de interação da ação é escrita como

$$S_i^{(4)} = -\frac{\lambda}{4!} \int d^d x \phi^4(\tau_x, \vec{x}) \quad (3.5)$$

onde consideramos, uma vez e para sempre, que $\int d^d x = \int_0^\beta d\tau \int d^{d-1} x$. Podemos passar para o espaço dos momentos obtendo

$$\begin{aligned} S_i^{(4)} = & -\lambda \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \left(\frac{1}{\beta}\right)^4 \int \frac{d^{d-1} k_1}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_2}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_3}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_4}{(2\pi)^{d-1}} \\ & \times \beta \delta_0^{n_1+n_2+n_3+n_4} \delta^{(d-1)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4) \\ & \times \frac{\tilde{\phi}(\omega_{n_1}, \vec{k}_1) \tilde{\phi}(\omega_{n_2}, \vec{k}_2) \tilde{\phi}(\omega_{n_3}, \vec{k}_3) \tilde{\phi}(\omega_{n_4}, \vec{k}_4)}{4!}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O vértice quártico (figura 3.2) é então definido como

$$V^{(4)} = -\lambda, \quad (3.7)$$

onde foram omitidos o fator de simetria do vértice e as deltas de conservação de energia e momento.

As regras de Feynman obtidas aqui são as mesmas obtidas capítulo anterior, entretanto, para fixar as idéias, vamos refazer os cálculos analíticos do capítulo anterior usando uma notação diagramática. Desta forma, quando trabalharmos com a gravitação como uma teoria de campos, teremos mais facilidade de entender os cálculos diagramáticos.

3.2 Função de partição

No capítulo anterior calculamos contribuições perturbativas para a função de partição usando diretamente o formalismo funcional e, a partir daí, abstraímos regras que relaci-

Figura 3.3: Contribuição ordem dois “loops” para $\log Z$

onam os cálculos funcionais aos diagramas de Feynman através de uma relação de equivalência. Do presente capítulo em diante, faremos cálculos perturbativos diretamente dos diagramas de Feynman.

Vamos calcular a contribuição para a função de partição vinda do vértice quártico em primeira ordem. A representação em diagramas para esta contribuição é dada na figura 3.3. Usando as regras de Feynman da seção anterior, escrevemos essa contribuição como

$$-\frac{3\lambda}{4!} \sum_{n_k, n_p} T^2 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \beta \delta_0^0(2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(0) D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_p, \vec{p}), \quad (3.8)$$

de forma que as deltas são identicamente satisfeitas. A delta de momentos possui uma divergência tipo volume pois da definição da delta de Dirac escrevemos essa divergência como

$$(2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(0) = \int d^{d-1}x = V. \quad (3.9)$$

Assim (3.8) possui um fator βV e as integrais se fatoram, de forma que podemos reescrever (3.8) como

$$-\frac{3\lambda}{4!} \beta V \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2, \quad (3.10)$$

onde 3 é o fator combinatorial e $1/4!$ é o fator de simetria do vértice.

A expressão (3.10) constitui a contribuição ordem λ para $\log Z$ de modo que escrevemos

$$\log Z_1 = -\frac{\lambda}{8} \beta V \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2, \quad (3.11)$$

que é idêntico ao obtido diretamente do formalismo funcional.

Lembrando que apenas diagramas conexos contribuem para o logaritmo da função de partição, temos que em ordem λ^2 existem duas topologias que contribuem. A primeira

Figura 3.4: Contribuição ordem três “loops” para $\log Z$.

Figura 3.5: Contribuição ordem três “loops” para $\log Z$.

delas é mostrada na figura 3.4. A expressão analítica associada é

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda^2 4! 3}{(4!)^2 2!} \sum_{n_k, n_l, n_q, n_p} T^4 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \\
 & \times \beta \delta_0^{n_q - n_l} (2\pi)^{d-1} \delta(\vec{q} - \vec{l}) \beta \delta_0^{-n_q + n_l} (2\pi)^{d-1} \delta(-\vec{q} + \vec{l}) \\
 & \times D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_l, \vec{l}) D_0(\omega_q, \vec{q}) D_0(\omega_p, \vec{p}). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Uma delta de conservação de momento-frequência pode ser usada para resolver uma integral de forma que a outra delta ficará identicamente satisfeita, fornecendo um fator βV . Assim reescrevemos (3.12) como

$$\frac{\lambda^2}{16} \beta V \times \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2 \sum_{n_l} T \int \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} D_0^2(\omega_l, \vec{l}). \tag{3.13}$$

A outra contribuição para ordem λ^2 está exposta na figura 3.5. A expressão analítica correspondente a este diagrama é escrita como

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda^2 4!}{(4!)^2 2!} \times \sum_{n_k, n_p, n_l, n_q} T^4 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \\
 & \times \beta \delta_0^{n_k + n_p + n_l + n_q} (2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(\vec{k} + \vec{p} + \vec{l} + \vec{q}) \\
 & \times \beta \delta_0^{-n_k - n_p - n_l - n_q} (2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(-\vec{k} - \vec{p} - \vec{l} - \vec{q}) \\
 & \times D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_p, \vec{p}) D_0(\omega_l, \vec{l}) D_0(\omega_q, \vec{q}), \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

usando uma delta de conservação de momento-frequência para resolver um integral a

outra delta é identicamente satisfeita obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{48}\beta V & \times \sum_{n_k, n_p, n_l} T^3 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} \\ & \times D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_p, \vec{p}) D_0(\omega_l, \vec{l}) D_0(\omega_k + \omega_p + \omega_l, \vec{k} + \vec{p} + \vec{l}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Somando as contribuições (3.15) e (3.13) para $\log Z_2$ obtemos

$$\begin{aligned} \log Z_2 &= \frac{\lambda^2}{48}\beta V \times \sum_{n_k, n_p, n_l} T^3 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} \\ & \times D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_p, \vec{p}) D_0(\omega_l, \vec{l}) D_0(\omega_k + \omega_p + \omega_l, \vec{k} + \vec{p} + \vec{l}) \\ & + \frac{\lambda^2}{16}\beta V \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2 \sum_{n_l} T \int \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} D_0^2(\omega_l, \vec{l}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

que também é igual ao resultado obtido no formalismo funcional.

3.3 A auto energia

O propagador estudado até o presente momento é o propagador livre e ele é chamado assim pois a ação livre pode ser escrita como

$$S_0 = - \sum_n \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\beta^2}{2} D_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \quad (3.17)$$

de sorte que a função de correlação $\langle \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \rangle_{S_0}$ é escrita como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \rangle_{S_0} &= -Z_0^{-1} \int \prod(d\phi_l(\vec{q})) \exp \left[\sum_m \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\beta^2}{2} D_0^{-1}(\omega_m, \vec{k}) \right. \\ & \quad \left. \times \tilde{\phi}_{-m}(-\vec{k}) \tilde{\phi}_m(\vec{k}) \right] \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Podemos escrever a correlação (3.18) como uma derivada funcional de $\log Z_0$ como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \rangle_{S_0} &= -\frac{2}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta D_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})} \log Z_0 \\ &= \frac{2}{\beta^2} D_0^2(\omega_n, \vec{p}) \frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \log Z_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Lembrando da expressão (2.70) para a função de partição livre, podemos reescreve-la como

$$\log Z_0 = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \log [\beta^2 D_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})]. \quad (3.20)$$

Calculando a derivada, obtemos para a função de correlação:

$$\left\langle \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \right\rangle_{S_0} = \frac{1}{\beta^2} D_0(\omega_n, \vec{p}). \quad (3.21)$$

Somos levados então a definir o propagador completo da teoria como

$$D(\omega_n, \vec{p}) = \beta^2 \left\langle \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \right\rangle_S. \quad (3.22)$$

Por conveniência, podemos reescrever o propagador completo como

$$\begin{aligned} D(\omega_n, \vec{p}) &= \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 - \Pi} \\ &= \frac{1}{D_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) - \Pi(\omega_n, \vec{p})} \\ &= (1 - D_0 \Pi)^{-1} D_0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

A função de correlação de dois pontos para os campos na presença de interação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \right\rangle_S &= Z^{-1} \int \prod(d\phi_l(\vec{q})) \exp \left[\sum_m \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left(-\frac{\beta^2}{2} D_0^{-1}(\omega_m, \vec{k}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \tilde{\phi}_{-m}(-\vec{k}) \tilde{\phi}_m(\vec{k}) \right) + S_i \right] \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

e pode ser reescrita como uma derivada funcional de $\log Z$ como

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\phi}_{-n}(-\vec{p}) \tilde{\phi}_n(\vec{p}) \right\rangle_S &= -\frac{2}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta D_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})} \log Z \\ &= \frac{2}{\beta^2} D_0^2(\omega_n, \vec{p}) \frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \log Z. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Torna-se conveniente expandir em série de Taylor a expressão (3.23) como

$$D(\omega_n, \vec{p}) = D_0 + D_0 \Pi D_0 + D_0 \Pi D_0 \Pi D_0 + D_0 \Pi D_0 \Pi D_0 \Pi D_0 + \dots, \quad (3.26)$$

e escrever Π como uma expansão em “loops”

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \dots, \quad (3.27)$$

de modo que em primeira ordem teremos

$$2D_0^2(\omega_n, \vec{p}) \frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \log Z_1 = D_0(\omega_n, \vec{p}) \Pi_1(\omega_n, \vec{p}) D_0(\omega_n, \vec{p}). \quad (3.28)$$

Figura 3.6: Contribuição de primeira ordem para a auto energia

Portanto escrevemos Π_1 como

$$\Pi_1 = -2 \frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \frac{\lambda}{8} \beta V \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2. \quad (3.29)$$

Para o cálculo da derivada funcional é conveniente escrever (3.29) no caso discreto como

$$\frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \rightarrow \frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \sum_{n_k, \vec{k}} \frac{T}{V} D_0(\omega_k, \vec{k}) = \frac{T}{V}, \quad (3.30)$$

O que nos permite escrever Π_1 como

$$\Pi_1 = -\frac{\lambda}{2} \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}). \quad (3.31)$$

Representamos Π_1 como no diagrama da figura 3.6. Note que não inserimos os propagadores externos nas formas analíticas de diagramas com linhas externas.

Usando (3.26) juntamente com (3.24) vemos que em segunda ordem teremos

$$\begin{aligned} 2D_0^2(\omega_n, \vec{p}) \frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \log Z_2 &= D_0(\omega_n, \vec{p}) \Pi_2(\omega_n, \vec{p}) D_0(\omega_n, \vec{p}) \\ &+ D_0(\omega_n, \vec{p}) \Pi_1(\omega_n, \vec{p}) D_0(\omega_n, \vec{p}) \Pi_1(\omega_n, \vec{p}) D_0(\omega_n, \vec{p}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Calculando a derivada funcional utilizando (3.30) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta D_0(\omega_n, \vec{p})} \log Z_2 &= 4 \frac{\lambda^2}{48} \sum_{n_k, n_q} T^2 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \\ &\times D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_q, \vec{q}) D_0(\omega_p + \omega_k + \omega_q, \vec{p} + \vec{k} + \vec{q}) \\ &+ 2 \frac{\lambda^2}{16} \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2 D_0(\omega_p, \vec{p}) \\ &+ 2 \frac{\lambda^2}{16} \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \\ &\times \sum_{n_l} \int \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} D_0^2(\omega_l, \vec{l}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Figura 3.7: Contribuição redutível para o propagador.

Figura 3.8: auto energia a dois “loops” Π_2

Lembrando a expressão para Π_1 (3.29) escrevemos para parte redutível (figura 3.7) de (3.32) como

$$\Pi_1(\omega_n, \vec{p}) D_0(\omega_n, \vec{p}) \Pi_1(\omega_n, \vec{p}) = \frac{\lambda^2}{4} \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2 D_0(\omega_p, \vec{p}). \quad (3.34)$$

Desta forma, a parte redutível de (3.32) se cancela e Π_2 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Pi_2(\omega_p, \vec{p}) &= \frac{\lambda^2}{6} \sum_{n_k, n_q} T^2 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \\ &\quad \times D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_q, \vec{q}) D_0(\omega_p + \omega_k + \omega_q, \vec{p} + \vec{k} + \vec{q}) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{4} \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \\ &\quad \times \sum_{n_l} \int \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} D_0^2(\omega_l, \vec{l}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

A representação diagramática de Π_2 é mostrada na figura 3.8.

Estabeleceremos agora que apenas diagramas irreduzíveis contribuem para a auto energia a dois “loops”. Podemos mostrar agora que em geral Π_n é uma soma de diagramas irreduzíveis. Para isto vamos escrever a soma de todas as contribuições a irreduzíveis para

Figura 3.9: Contribuição redutível com n inserções da auto energia

o propagador como

$$D_{IR}(\omega_p, \vec{p}) = D_0(\omega_p, \vec{p}) \Pi_{IR}(\omega_p, \vec{p}) D_0(\omega_p, \vec{p}), \quad (3.36)$$

A contribuição geral redutível para o propagador com n partes irreduzíveis será dada por (figura 3.9)

$$D_{nR}(\omega_p, \vec{p}) = \frac{C_n}{2^n n!} (D_0(\omega_p, \vec{p}) \Pi_{IR}(\omega_p, \vec{p}))^n D_0(\omega_p, \vec{p}). \quad (3.37)$$

Onde C_n é o fator combinatorial, $1/n!$ decorre da indistinguibilidade dos Π_{IR} e $1/2^n$ é um fator de simetria das pernas externas aos Π_{IR} . O fator combinatorial é dado por $n!$ devido a permutação dos Π vezes 2^n da troca dos propagadores externos a cada um dos Π . Deste modo a contribuição redutível com n partes irreduzíveis para o propagador será escrita como

$$D_{nR}(\omega_p, \vec{p}) = (D_0(\omega_p, \vec{p}) \Pi_{IR}(\omega_p, \vec{p}))^n D_0(\omega_p, \vec{p}). \quad (3.38)$$

Assim o propagador completo é escrito como

$$D(\omega_p, \vec{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_0(\omega_p, \vec{p}) \Pi_{IR}(\omega_p, \vec{p}))^n D_0(\omega_p, \vec{p}). \quad (3.39)$$

A equação (3.26) juntamente com (3.39) nos permitem escrever

$$\Pi_{IR} = \Pi, \quad (3.40)$$

ou seja, apenas diagramas irreduzíveis contribuem para Π .

A contribuição de primeira ordem para Π é dada por (3.31)

$$\Pi_1 = -\frac{\lambda}{2} \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (3.41)$$

Para o caso de massa nula escrevemos Π_1 como

$$\Pi_1 = -\frac{\lambda}{2} \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(2\pi n/\beta)^2 + \vec{k}^2}. \quad (3.42)$$

A integral do membro direito de (3.42) foi calculada no capítulo anterior. Assim lembrando

Figura 3.10: Contribuição ordem três “loops” para $\log Z$.

das equações (2.161) e (2.172) obtemos

$$\Pi_1 = \frac{-\lambda(d-3)! T^{d-2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})\pi^{\frac{d-1}{2}}2^{d-1}} \zeta(d-2), \quad (3.43)$$

e em quatro dimensões obtemos

$$\Pi_1 = -\frac{\lambda T^2}{24}, \quad (3.44)$$

que é a correção a um “loop” para a auto energia.

3.4 Soma dos diagramas anelares

Quando a massa é nula a contribuição a três “loops” para a função de partição (3.17) é escrita como

$$\begin{aligned} \log Z_2 &= \frac{\lambda^2}{48}\beta V \sum_{n_k, n_p, n_l} T^3 \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} \\ &\times D_0(\omega_k, \vec{k}) D_0(\omega_p, \vec{p}) D_0(\omega_l, \vec{l}) D_0(\omega_k + \omega_p + \omega_l, \vec{k} + \vec{p} + \vec{l}) \\ &+ \frac{\lambda^2}{16}\beta V \left[\sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} D_0(\omega_k, \vec{k}) \right]^2 \sum_{n_l} T \int \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} D_0^2(\omega_l, \vec{l}), \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde

$$D_0(\omega_k, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_k^2 + \vec{k}^2}. \quad (3.46)$$

Em quatro dimensões, o termo estático $n_l = 0$ da segunda integral da segunda parcela de (3.45) possui um comportamento divergente no infravermelho ($\vec{l} \rightarrow 0$). Desta forma a parte dominante no infravermelho de (3.45) é dada pelo diagrama da figura 3.10. Em geral [Kap89], em uma dada ordem em λ , os diagramas dominantes no infravermelho são os diagramas formados por inserções sucessivas da auto energia Π_1 tais como os mostrados na figura 3.11. Note que o grau de divergência é aumentado a cada inserção de Π_1 .

Vamos calcular o diagrama anelar a $N + 1$ “loops” (N inserções de Π_1) representado na figura 3.12. O fator combinatorial é calculado da seguinte forma: temos um fator $(N - 1)!/2$ de ordenar as N inserções de Π_1 em um círculo e um fator 2^N de trocar as

Figura 3.11: Diagramas anelares

Figura 3.12: Diagrama anelar de ordem $N + 1$ “loops”

duas linhas externas a cada Π_1 . Temos que dividir por um fator $N!$ da indistinguibilidade dos Π_1 e 2^N da simetria de Π_1 . Assim o fator combinatorial deste diagrama é $1/(2N)$. Desta forma podemos escrever a expressão analítica deste diagrama como

$$\frac{\beta V}{2} \sum_n T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{(D_0(\omega_n, \vec{p}) \Pi_1)^N}{N}. \quad (3.47)$$

Podemos, alternativamente, contar esses fatores combinatoriais diretamente a partir da inserção de vértices, como mostra a figura 3.13. Neste caso teremos um fator $3!$ para formas cada um dos “loops” de cada Π_1 e um fator 2 para ligar cada par de Π_1 adjacentes, pois Π_1 é simétrico pela troca de linhas externas, fornecendo um fator $(3! \times 2)^N$. Teremos ainda um fator $(N-1)!/2$ de ordenar os N vértices em um círculo. Teremos que dividir por $N!$ da expansão da exponencial da ação de interação e por $(4!)^N$ que é o fator de simetria de cada um dos N vértices. Assim, contado o fator combinatorial, escrevemos a

Figura 3.13: Construção do diagrama anelar de ordem λ^N .

expressão analítica do diagrama figura 3.12 como

$$\frac{(3! \times 2)^N (N-1)!}{2N!(4!)^N} \beta V \times \sum_n T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \left[D_0(\omega_n, \vec{p}) \left(-\lambda \sum_{n_k} T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2} \right) \right]^N. \quad (3.48)$$

Substituindo (3.41) em (3.48) resgatamos o resultado (3.47), mostrando a equivalência entre as duas formas de contar os fatores combinatoriais.

Assim podemos calcular a soma de todos os diagramas da figura 3.11. Para isto basta somar (3.47) com N variando de 2 ate ∞ e assim obtemos para a soma dos anéis

$$\frac{\beta V}{2} \sum_n T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \{ \log[1 - \Pi_1 - D_o(\omega_n, \vec{p})] + \Pi_1 D_o(\omega_n, \vec{p}) \}. \quad (3.49)$$

Substituindo o valor D_0 , obtemos

$$\log Z_{\text{anéis}} = -\frac{\beta V}{2} \sum_n T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \left[\log \left(1 - \Pi_1 \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2} \right) + \Pi_1 \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2} \right]. \quad (3.50)$$

A contribuição dominante no infravermelho é dada pelo modo $n = 0$:

$$\log Z_{\text{anéis}} = -\frac{V}{2} \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \left[\log \left(1 - \Pi_1 \frac{1}{p^2} \right) + \Pi_1 \frac{1}{p^2} \right]. \quad (3.51)$$

Para calcular a integral, vamos usar a expressão para o elemento de volume esfericamente simétrico (2.166) obtemos

$$\log Z_{\text{anéis}} = -\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} V}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) (2\pi)^{d-1}} \int_0^\infty dp p^{d-2} \left[\log \left(1 - \Pi_1 \frac{1}{p^2} \right) + \Pi_1 \frac{1}{p^2} \right]. \quad (3.52)$$

Faremos uma mudança de variáveis na integral de forma que

$$\log Z_{\text{anéis}} = -\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} V}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) (2\pi)^{d-1}} (-\Pi_1)^{\frac{d-1}{2}} \int_0^\infty dp p^{d-2} \left[\log \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) - \frac{1}{p^2} \right]. \quad (3.53)$$

Em quatro dimensões $\log Z_{\text{anéis}}$ é dado por

$$\log Z_{\text{anéis}} = \frac{VT^3}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda}{24} \right)^{\frac{3}{2}} \int dp p^2 \left[\log \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) - \frac{1}{p^2} \right]. \quad (3.54)$$

Figura 3.14: Contorno de integração no plano complexo.

Fazendo uma integral por partes obtemos

$$\begin{aligned}
 \log Z_{\text{anéis}} &= \frac{VT^3}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda}{24} \right)^{\frac{3}{2}} \int dp \frac{p^3}{3} \frac{d}{dp} \left[\log \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) - \frac{1}{p^2} \right] \\
 &= \frac{VT^3}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda}{24} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dp \frac{1}{p^2 + 1}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Nesta última integral temos que o integrando é par e assim a integral pode ser estendida para todo eixo p . O integrando tem pólos nos pontos $p = \pm i$. Vamos estender a integral para o plano complexo e fechar o contorno de integração com um semi-círculo na parte superior do plano complexo conforme mostra a figura 3.14. Podemos então usar o teorema do resíduo para calcular esta integral obtendo

$$\log Z_{\text{anéis}} = \frac{VT^3}{12\pi} \left(\frac{\lambda}{24} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.56}$$

Assim a soma das contribuições divergentes no infravermelho para $\log Z$ fornece um resultado finito porém não analítico na constante de acoplamento λ .

4 *A fixação de calibre geral e o propagador transversal de traço nulo na gravitação*

Neste capítulo trabalharemos com a lagrangiana de Einstein-Hilbert no contexto da aproximação de campo fraco e assim estudaremos a gravitação como teoria de campos com uma métrica de fundo plana [tH02]. Introduziremos um procedimento de Faddeev-Popov generalizado que utiliza duas condições distintas para fixar o calibre. Neste novo formalismo e fixação de calibre geral, é possível obter um propagador com as propriedades de ser TT (transverso e de traço nulo):

$$\begin{aligned} D_0^{\mu\nu,\alpha\beta} k_\beta &= 0 \\ D_0^{\mu\nu,\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

No contexto do formalismo de fixação de calibre geral, vamos calcular as regras de Feynman usando as convenções definidas nos capítulos anteriores.

4.1 A lagrangiana de Einstein-Hilbert

Nesta seção partiremos da lagrangiana de Einstein-Hilbert e mostraremos que ela conduz as equações de Einstein. Vamos partir da ação S no vácuo

$$S = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \tag{4.2}$$

onde g é o determinante da métrica co-variante $g_{\mu\nu}$ e R é o escalar de curvatura e $\kappa = \sqrt{32\pi G}$. Trabalharemos, nesta seção, no contexto do princípio variacional de Palatini que consiste em considerar a métrica e conexão como variáveis dinâmicas independentes [d'I92]. A conexão será suposta como arbitrária porém simétrica. Vamos reescrever a

ação S de forma mais conveniente

$$S = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma), \quad (4.3)$$

onde o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ será considerado uma função das conexões Γ . O tensor de Ricci é definido como sendo uma contração do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda. \quad (4.4)$$

Para fazer a variação em relação as conexões vamos nos restringir a um ponto P , particular porem arbitrário, da variedade. Tomaremos o sistema de coordenadas geodésico em que as conexões se anulam no ponto particular P [d'I92] (apenas as conexões se anulam no ponto P e não suas derivadas). Desta forma podemos escrever

$$\delta R_{\mu\nu} \doteq \partial_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda), \quad (4.5)$$

onde o símbolo $\doteq$ indica que a igualdade é valida apenas no sistema de coordenadas geodésico no ponto particular P . Como as conexões se anulam no ponto P , a igualdade (4.5) implica em

$$\delta R_{\mu\nu} \doteq \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda), \quad (4.6)$$

onde

$$\nabla_\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \partial_\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu + \Gamma_{\chi\mu}^\nu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\chi - \Gamma_{\alpha\mu}^\chi \delta \Gamma_{\chi\beta}^\nu - \Gamma_{\beta\mu}^\chi \delta \Gamma_{\alpha\chi}^\nu \quad (4.7)$$

é a derivada co-variante da variação da conexão [d'I92].

A conexão afim não possui um caráter tensorial pois as suas componentes se transformam por uma transformação geral de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (4.8)$$

Logo, quando fazemos uma variação na forma funcional de Γ como

$$\Gamma \rightarrow \Gamma + \delta \Gamma \quad (4.9)$$

$$\Gamma' \rightarrow \Gamma' + \delta \Gamma'$$

e substituimos em (4.8) obtemos

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda + \delta \Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} (\Gamma_{\alpha\beta}^\rho + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho) + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (4.10)$$

Deste modo, subtraindo (4.8) de (4.10), verificamos que as variações das conexões se

transformam como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}, \quad (4.11)$$

e assim verificamos que as variações das conexões possuem um caráter tensorial.

Portanto, a identidade (4.6) é uma identidade tensorial e por essa razão será válida em todos os sistemas de coordenadas, no ponto P . Como o ponto P é arbitrário podemos escrever:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}). \quad (4.12)$$

Substituindo esse resultado na ação obtemos para a variação em relação e conexão

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Lembrando que a derivada co-variante satisfaz a regra de Leibniz [d'I92] reescrevemos a variação da ação como

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \left\{ \nabla_{\lambda}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})] - \nabla_{\nu}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})] \right. \\ &\quad \left. - \nabla_{\lambda}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu}] (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu}] (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para os dois primeiros termos temos a seguintes identidades:

$$\nabla_{\lambda}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})] = \partial_{\lambda}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})] \quad (4.15)$$

e

$$\nabla_{\nu}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})] = \partial_{\nu}[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})] \quad (4.16)$$

pois as quantidades entre colchetes são densidades vetoriais de peso +1 e a quadri-divergência de uma densidade vetorial de peso +1 é igual a quadri-divergência co-variante da mesma [d'I92]. Desta forma estes dois termos não contribuirão por serem derivadas totais. Assim a variação da ação será:

$$\delta S = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} [\delta_{\lambda}^{\nu} \nabla_{\alpha}(\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) - \nabla_{\lambda}(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})]. \quad (4.17)$$

A condição $\delta S = 0$ implica então em

$$\frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\nu} \nabla_{\alpha}(\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) + \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\mu} \nabla_{\alpha}(\sqrt{-g} g^{\nu\alpha}) - \nabla_{\lambda}(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.18)$$

Contraindo os índices ν e λ em (4.18) obtemos $\nabla_{\alpha}(\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) = 0$. Substituindo esse resultado em (4.18) obtemos $\nabla_{\alpha}(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$ e contraindo os índices μ e ν obtemos

$\nabla_\mu \sqrt{-g} = 0$ o que por sua vez resulta em $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ e $\nabla_\lambda g^{\lambda\nu} = 0$, ou seja, a derivada co-variante da métrica se anula. Vamos então ver quais são as implicações da derivada co-variante da métrica se anular. Utilizando o conceito de derivada co-variante, teremos

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha g_{\mu\alpha} = 0. \quad (4.19)$$

De sorte que a expressão

$$\nabla_\mu g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.20)$$

implica em

$$\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} = 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha\lambda}. \quad (4.21)$$

A equação (4.21) ser resolvida para a conexão Γ como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (4.22)$$

que é a conexão métrica. Isso mostra que o fato da conexão ser simétrica e da derivada co-variante da métrica ser nula implica na conexão ser a conexão métrica. Assim quando variamos a ação S em relação as conexões obtemos que a conexão afim é a conexão métrica.

Podemos agora fazer a variação da ação em relação a métrica:

$$\delta S = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Variando primeiramente o termo $\sqrt{-g}$ temos,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g. \quad (4.24)$$

Para calcular δg vamos expressar do determinante da métrica em termos dos co-fatores

$$g = \sum_\nu g_{\mu\nu}C^{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

onde

$$C^{\mu\nu} = gg^{\nu\mu}. \quad (4.26)$$

Podemos calcular a derivada do determinante em relação a um dado elemento da matriz

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = gg^{\nu\mu}. \quad (4.27)$$

Esta expressão nos permite calcular a variação do determinante da métrica em relação a variação da própria métrica

$$\delta g = gg^{\nu\mu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (4.28)$$

pois a métrica é simétrica e $\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = 0$. Da expressão (4.28) obtemos a expressão para a variação da raiz de menos o determinante da métrica como

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

Iremos, agora, substituir esse resultado na variação da ação em relação a métrica (4.23). Fazendo isso obtemos

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

Que é uma expressão formidável pois impondo $\delta S = 0$ obtemos as equações de Einstein para o vácuo:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (4.31)$$

Se introduzirmos campos de matéria a ação da teoria se torna

$$S_T = S + S_{mat} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \mathcal{L}_{E-H} + \int d^4x \mathcal{L}_{mat}. \quad (4.32)$$

Fazendo a variação desta ação em relação à métrica obtemos

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

que é a equação de Einstein na presença de matéria. Podemos usar a equação (4.30) para escrever

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{2\sqrt{-g}}{\kappa^2} G_{\mu\nu}. \quad (4.34)$$

Deste modo, o tensor de energia momento é escrito como

$$\frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu} \quad (4.35)$$

Este é um resultado fundamental da gravitação que mostra que todos os campos de matéria são fonte para o campo gravitacional. Quando encaramos a gravitação como uma teoria de campos, este resultado afirma que o campo gravitacional se acopla a todos os campos de matéria.

4.2 A aproximação de campo fraco

Neste trabalho utilizaremos a gravitação na aproximação de campo fraco com uma métrica de fundo plana de forma que possamos tratar a gravitação como uma teoria de

campo no espaço plano. Vamos partir da ação de Einstein-Hilbert no vácuo:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (4.36)$$

Usando a definição do tensor de Ricci (4.4) e a definição da conexão (4.22) a lagrangiana de Einstein-Hilbert pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{E-H} &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} [g_{\beta\rho}g_{\alpha\lambda}g^{\mu\nu}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g^{\lambda\rho}) - g_{\alpha\beta}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})g_{\lambda\rho}g^{\mu\nu}(\partial_\mu g^{\lambda\rho}) \\ &+ 2g_{\alpha\beta}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g^{\mu\nu}) - 2g_{\alpha\mu}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\beta g^{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Neste trabalho a aproximação de campo fraco será definida a partir de métrica com os índices co-variantes:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (4.38)$$

onde $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ ($c = 1, \hbar = 1$). A inversa da métrica é obtida expandindo $(\eta + \kappa h)^{-1}$ em série Taylor

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\alpha} h^{\alpha\nu} - \kappa^3 h^{\mu\lambda} h_{\lambda\alpha} h^{\alpha\nu} + \kappa^4 h^{\mu\lambda} h_{\lambda\beta} h^\beta{}_\alpha h^{\alpha\nu} + \dots \quad (4.39)$$

O determinante de $g_{\mu\nu}$ pode ser reescrito por

$$\begin{aligned} g &= \det g_{\mu\nu} \\ &= \det (\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) \\ &= \det \eta_{\mu\lambda} \det (\delta_\nu^\lambda + h^\lambda{}_\nu) \\ &= \det \eta_{\mu\lambda} \exp \{Tr [\log (\delta_\nu^\lambda + h^\lambda{}_\nu)]\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Expandindo o logaritmo, tomado o traço e expandindo a exponencial obtemos

$$g = \det(\eta_{\mu\nu}) \left\{ 1 + \kappa h^\mu{}_\mu + \frac{\kappa^2}{2} [(h^\mu{}_\mu)^2 - h^\mu{}_\nu h^\nu{}_\mu] + O(\kappa^3) \right\}, \quad (4.41)$$

e assim temos que

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2}\kappa h^\mu{}_\mu + \frac{1}{4}\kappa^2 \left[\frac{1}{2}(h^\mu{}_\mu)^2 - h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \right] + O(\kappa^3) \quad (4.42)$$

que é a expressão para $\sqrt{-g}$ em serie de Taylor até ordem κ^2 .

Assim, a lagrangiana será dada por

$$\mathcal{L}_{E-H} = h^{\mu\nu} M_{\mu\nu, \alpha\beta} h^{\alpha\beta} + \mathcal{L}_i(h), \quad (4.43)$$

onde $\mathcal{L}_i(h)$ representa os termos de interação e

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu,\alpha\beta} = & -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} \right] \partial^2 - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta + \partial_\mu\partial_\nu\eta_{\alpha\beta}) \\ & + \frac{1}{4} (\eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta + \eta_{\mu\beta}\partial_\nu\partial_\alpha + \eta_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial_\beta + \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha), \end{aligned} \quad (4.44)$$

é o operador da parte quadrática da ação.

4.3 O procedimento de Faddeev-Popov

A ação de Einstein-Hilbert é invariante por transformações gerais de coordenadas do tipo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \epsilon\theta^\mu(x). \quad (4.45)$$

A métrica possui um caráter tensorial e se transforma como

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\alpha}(x) \\ &= g_{\mu\nu}(x') + \epsilon(g_{\lambda\nu}\partial_\mu\theta^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\theta^\lambda + \theta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu}) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (4.46)$$

em consequência, o campo h se transforma como

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} + \epsilon(\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu\theta^\lambda + \eta_{\nu\lambda}\partial_\mu\theta^\lambda) + \kappa(h_{\mu\lambda}\partial_\nu\theta^\lambda + h_{\nu\lambda}\partial_\mu\theta^\lambda + \theta^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu}) \\ &= h^{\mu\nu} + \epsilon A_{\mu\nu,\lambda}(h)\theta^\lambda \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde $A_{\mu\nu,\lambda}(h)$ é dado por

$$A_{\mu\nu,\lambda}(h) = \eta_{\mu\lambda}\partial_\nu + \eta_{\nu\lambda}\partial_\mu + \kappa[h_{\mu\lambda}\partial_\nu + h_{\nu\lambda}\partial_\mu + (\partial_\lambda h_{\mu\nu})]. \quad (4.48)$$

Interpretamos a equação (4.47) como uma transformação de calibre para o campo gravitacional. Assim, $A_{\mu\nu,\lambda}(h)$ é o operador que realiza a transformação de calibre. Aqui, θ é o parâmetro de calibre. Incorporaremos ϵ no parâmetro de calibre mas vamos manter sempre em mente que as transformações de calibre são infinitesimais, de forma que termos do tipo $A(A(h))$ não serão relevantes.

A função de partição, dada por

$$Z = \int d\vec{h} \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^{d-1}x \mathcal{L}_{E-H} \right), \quad (4.49)$$

possui um fator divergente devido a invariância por (4.47). No caso de teorias de calibre integrais sobre toda forma funcional do campo, tal como (4.49), soma sobre os graus de

liberdade espúrios. Logo, a integral (4.49) fornece uma contagem errada de graus de liberdade [Ber74], necessitando a introdução de campos fantasmas para cancelar os graus de liberdade espúrios, referentes a invariância por (4.47). Assim (4.49) necessita de um procedimento de Faddeev-Popov [FP67] para estar bem definido. Inicialmente vamos fixar o calibre usando uma expressão do tipo

$$F^{\lambda,\mu\nu}(\alpha A_{\mu\nu,\gamma}(h)\theta^\gamma + h_{\mu\nu}) = 0 \quad (4.50)$$

onde $F^{\lambda,\mu\nu}$ é dado por

$$F_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{\alpha}\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda + \frac{1}{\beta}(\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu + \eta_{\mu\lambda}\partial_\nu) + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial_\nu\partial_\mu\partial_\lambda}{\partial^2} \quad (4.51)$$

que é o operador mais geral que pode ser escrito independente de h . Escolhemos a forma mais geral para este operador com intuito de provar que uma fixação de calibre mais geral implementada a partir de (4.50) não pode levar a um propagador TT, como em (4.1).

Vamos introduzir uma notação que se mostrará muito útil no decorrer do trabalho. Nessa notação a função de partição (4.49) é reescrita como

$$Z = \int d\vec{h} \exp \left[\int d^d x \left(\vec{h}^T M \vec{h} + \mathcal{L}_i(\vec{h}) \right) \right], \quad (4.52)$$

e a equação (4.47) como

$$\vec{h}' = \vec{h} + A(\vec{h})\vec{\theta} \quad (4.53)$$

e (4.51) por

$$F[\alpha A(\vec{h})\vec{\theta} + \vec{h}] = 0. \quad (4.54)$$

Note esta notação não implica em uma discretização da integração funcional e é usada para evidenciar o que há de central no formalismo de Faddeev-Popov.

Utilizando essa notação, vamos implementar a fixação de calibre (4.54) na função de partição usando as seguintes resoluções da unidade:

$$\begin{aligned} 1 &= \int (d\vec{\theta}) \left| \frac{\delta(F A(\vec{h})\vec{\theta})}{\delta\vec{\theta}} \right| \delta \left[F \left(\vec{h} + A(\vec{h})\vec{\theta} \right) - \vec{p} \right] \\ 1 &= \pi^{-n/2} \int (d\vec{p}) \exp \left[\frac{1}{\alpha} \int d^d x \vec{p}^T N \vec{p} \right]^{1/2} \det(N), \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde N é o fator de Nielsen-Kallosh [Kal78, Nie78] que é dado por

$$N_{\alpha\beta} = \xi\eta_{\alpha\beta} + \zeta \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\partial^2}. \quad (4.56)$$

Multiplicando a função de partição pelas resoluções da unidade (4.55) obtemos

$$Z = \pi^{-n/2} \int (d\vec{\theta}) (d\vec{h}) \det(\alpha F A(\vec{h}))^{1/2} \det(N/\alpha) \exp \left\{ \int d^d x \left[\vec{h}^T M \vec{h} + \mathcal{L}_i(\vec{h}) + \left(F(\vec{h} + A(\vec{h})\vec{\theta}) \right)^T N \left(F(\vec{h} + A(\vec{h})\vec{\theta}) \right) \right] \right\}. \quad (4.57)$$

Note que agora θ é um campo auxiliar. Com o intuito de simplificar a expressão do funcional gerador (4.57) faremos uma transformação de calibre

$$\vec{h} \rightarrow \vec{h} - A(\vec{h})\vec{\theta}, \quad (4.58)$$

que pode ser reescrita explicitando os índices de Lorentz como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - A_{\mu\nu,\lambda}(h)\theta^\lambda \quad (4.59)$$

e desta forma podemos reescrever a parte de fixação de calibre da ação como

$$\begin{aligned} \int d^d x (F\vec{h})^T N F \vec{h} &= \int d^d x F^{\lambda,\mu\nu} h_{\mu\nu} N_{\lambda\gamma} F^{\gamma,\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \\ &= - \int d^d x h_{\mu\nu} F^{\lambda,\mu\nu} N_{\lambda\gamma} F^{\gamma,\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \\ &= - \int d^d x \vec{h}^T F^T N F \vec{h}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde realizamos uma integração por partes. Podemos então reescrever a função de partição (4.57) como

$$Z = \pi^{-n/2} \int (d\vec{\theta}) (d\vec{h}) \det(\alpha F A(\vec{h}))^{1/2} \det(N/\alpha) \exp \left\{ \int d^d x \left[\vec{h}^T (M - F^T N F) \vec{h} + \mathcal{L}_i(\vec{h}) \right] \right\}. \quad (4.61)$$

Note que por se tratar de transformação de calibre o setor de Einstein-Hilbert puro permanece inalterado e que se trata de uma transformação infinitesimal, não atuando sobre os determinantes de Faddeev-Popov. No apêndice A mostraremos que este tipo de transformação possui jacobiano igual a um, justamente por se tratar de uma transformação de calibre.

O propagador do gráviton será definido por

$$\tilde{D}_{0\mu\nu;\alpha\beta}(k) 2(M - F^T N F)^{\alpha\beta,\lambda\gamma}(k) = -I_{\mu\nu}^{\lambda\gamma} \quad (4.62)$$

onde

$$(M - F^T N F)^{\alpha\beta, \lambda\gamma}(k) = \tilde{M}^{\alpha\beta, \lambda\gamma}(k) - \tilde{F}^{\mu, \alpha\beta}(k) \tilde{N}_{\mu\nu}(k) \tilde{F}^{\nu, \lambda\gamma}(k), \quad (4.63)$$

e

$$I_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} + \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta}^{\mu}), \quad (4.64)$$

sendo a identidade para tensores de quarta ordem simétricos do tipo

$$\tilde{D}_{0\ \mu\nu; \alpha\beta}(k) = \tilde{D}_{0\ \alpha\beta; \mu\nu}(k) = \tilde{D}_{0\ \nu\mu; \alpha\beta}(k). \quad (4.65)$$

O fator 2 no operador $(M - F^T N F)^{\alpha\beta, \lambda\gamma}$ se deve a convenção das regras de Feynman para bósons [tHV74].

Em [BFM07] foi mostrado que mesmo com a classe mais geral de calibre fixada por (4.55) não é possível obter um propagador TT. Para obtenção do propagador TT será necessário um procedimento de Faddeev-Popov em que a lagrangiana de fixação de calibre tenha uma forma mais geral que

$$\mathcal{L}_{g-f} = \vec{h}^T F^T N F \vec{h}. \quad (4.66)$$

4.4 A fixação de calibre geral

Para obter um propagador TT é necessário que generalizemos o procedimento de Faddeev-Popov descrito na seção anterior. Com este intuito vamos fixar o calibre usando duas equações de fixação de calibre distintas como

$$\begin{aligned} F[\alpha A(\vec{h})\vec{\theta} + \vec{h}] &= 0 \\ G[\alpha A(\vec{h})\vec{\theta} + \vec{h}] &= 0, \end{aligned} \quad (4.67)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\lambda, \mu\nu} &= g_1 \eta_{\mu\nu} \partial_{\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \partial_{\nu} \\ G_{\lambda, \mu\nu} &= g_2 \eta_{\mu\nu} \partial_{\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \partial_{\nu}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

As condições (4.67) serão implementadas por meio de resoluções da unidade tais como

$$\begin{aligned}
1 &= \int (d\vec{\theta}_1) \left| \frac{\delta(\alpha F A(\vec{h})\vec{\theta}_1)}{\delta\vec{\theta}_1} \right| \delta \left[F(\vec{h} + \alpha A(\vec{h})\vec{\theta}_1) - \vec{p} \right] \\
1 &= \int (d\vec{\theta}_2) \left| \frac{\delta(\alpha G A(\vec{h})\vec{\theta}_2)}{\delta\vec{\theta}_2} \right| \delta \left[G(\vec{h} + \alpha A(\vec{h})\vec{\theta}_2) - \vec{q} \right] \\
1 &= \pi^{-d} \int (d\vec{p}) (d\vec{q}) \exp \left[\frac{1}{\alpha} \int d^d x \vec{p}^T N \vec{q} \right] \det \left(\frac{N}{\alpha} \right), \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Por simplicidade, adotaremos

$$N^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}. \tag{4.70}$$

Multiplicando a função de partição (4.49) pelas resoluções da unidade (4.69) obtemos

$$\begin{aligned}
Z &= \pi^{-d} \int (d\vec{\theta}_1) (d\vec{\theta}_2) (d\vec{h}) \det(\alpha F A(\vec{h})) \det(\alpha G A(\vec{h})) \det(N/\alpha) \\
&\exp \left\{ \int d^d x \left[\vec{h}^T M \vec{h} + \mathcal{L}_i(\vec{h}) \right. \right. \\
&\left. \left. + \left(F(\vec{h} + \alpha A(\vec{h})\vec{\theta}_1) \right)^T \frac{N}{\alpha} \left(G(\vec{h} + \alpha A(\vec{h})\vec{\theta}_2) \right) \right] \right\}, \tag{4.71}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
&\left(F(\vec{h} + \alpha A(\vec{h})\vec{\theta}_1) \right)^T \frac{N}{\alpha} \left(G(\vec{h} + \alpha A(\vec{h})\vec{\theta}_2) \right) \\
&= (F^{\mu, \alpha\beta} (h_{\alpha\beta} + \alpha A_{\alpha\beta, \gamma}(h) \theta_1^\gamma)) \frac{N_{\mu\nu}}{\alpha} \left(G^{\nu, \chi\zeta} (h_{\chi\zeta} + \alpha A_{\chi\zeta, \xi}(h) \theta_2^\xi) \right) \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Com o intuito de simplificarmos (4.71), faremos uma transformação de calibre

$$\vec{h} \rightarrow \vec{h} - A(\vec{h})\vec{\theta}_1, \tag{4.73}$$

de forma que o setor θ de (4.71) se transforma como

$$\begin{aligned}
&\int d^d x \left(F \vec{h} \right)^T \frac{N}{\alpha} G[\vec{h} + \alpha A(\vec{h})(\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1)] \\
&= - \int d^d x \vec{h}^T F^T \frac{N}{\alpha} G[\vec{h} + \alpha A(\vec{h})(\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1)] \\
&= - \int d^d x h_{\alpha\beta} F^{\mu, \alpha\beta} \frac{N_{\mu\nu}}{\alpha} G^{\nu, \chi\zeta} [h_{\chi\zeta} + \alpha A_{\chi\zeta, \xi}(h)(\theta_2^\xi - \theta_1^\xi)]. \tag{4.74}
\end{aligned}$$

Note que uma transformação do tipo (4.73) será vista como uma transformação infinitesimal, não atuando sobre os determinantes de Faddeev-Popov. Substituindo (4.74) no

setor θ de função de partição (4.71) obtemos

$$Z = \pi^{-n} \int (d\vec{\theta}_1) (d\vec{\theta}) (d\vec{h}) \det(\alpha F A(\vec{h})) \det(\alpha G A(\vec{h})) \det(N/\alpha) \\ \exp \left\{ \int d^d x \left[\vec{h}^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \vec{h} + \mathcal{L}_i(\vec{h}) - \vec{h}^T F^T N G A(\vec{h}) \vec{\theta} \right] \right\}. \quad (4.75)$$

onde $\vec{\theta} = \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1$. Novamente, por se tratar de uma transformação de calibre, (4.73) não altera o setor de Einstein-Hilbert puro. No apêndice A será mostrado que o jacobiano dessa transformação é 1 por se tratar de uma transformação de calibre.

O único termo envolvendo o campo θ de (4.75) é um termo de interação θh . Para o tratamento deste termo seria necessário o uso de propagadores mistos. Assim é conveniente completar o quadrado no setor θ de (4.52) através de uma transformação como

$$\vec{h} \rightarrow \vec{h} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G A(\vec{h}) \vec{\theta}, \quad (4.76)$$

que pela presença do campo θ também é uma transformação infinitesimal. Explicitando os índices de Lorentz reescrevemos (4.76) como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1}_{\mu\nu, \alpha\beta} F^{\lambda, \alpha\beta} N_{\lambda\gamma} G^{\gamma, \chi\xi} A_{\chi\xi, \zeta}(h) \theta^\zeta, \quad (4.77)$$

onde $(M - F^T \frac{N}{\alpha} G)^{-1}_{\mu\nu, \alpha\beta}$ é o inverso do operador da parte quadrática do setor de Einstein-Hilbert, e será identificado a diante como sendo a transformada inversa de Fourier do propagador no espaço dos momentos. Aplicando esta transformação na lagrangiana total

de (4.52) obtemos

$$\begin{aligned}
& \vec{h}^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \vec{h} - \vec{h}^T F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \rightarrow \\
& \vec{h}^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \vec{h} + \left[\frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \right]^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \vec{h} \\
& + \vec{h}^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \\
& + \left[\frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \right]^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \\
& \times \left[\frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \right] \\
& - \vec{h}^T F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} - \left[\frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \right]^T F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \\
& = \vec{h}^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \vec{h} - \frac{1}{4} A(\vec{h}) (\vec{\theta}) \left[G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G \right] (A(\vec{h}) \vec{\theta}),
\end{aligned} \tag{4.78}$$

onde realizamos integrais por partes tais como

$$\begin{aligned}
& \int d^d x \left(G N F^T A(\vec{h}) \vec{\theta} \right)^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G (A(\vec{h}) \vec{\theta}) \\
& = \int d^d x \left(A(\vec{h}) \vec{\theta} \right)^T G^T N^T F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G (A(\vec{h}) \vec{\theta}) \\
& = \int d^d x [A_{\alpha_1 \beta_1, \chi_1}(h) \theta^{\chi_1}] G^{\gamma, \alpha_1 \beta_1} N_{\gamma \delta} F^{\delta, \mu_1 \nu_1} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1}_{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2} \\
& \quad \times F^{\xi, \mu_2 \nu_2} N_{\xi \zeta} G^{\zeta, \alpha_2 \beta_2} [A_{\alpha_2 \beta_2, \chi_2}(h) \theta^{\chi_2}].
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Substituindo estes resultados em (4.52) obtemos que

$$\begin{aligned}
Z = & \pi^{-n} \int (d\vec{\theta}_1) (d\vec{\theta}) (d\vec{h}) J \det(\alpha F A(\vec{h})) \det(\alpha G A(\vec{h})) \det(N/\alpha) \\
& \exp \left\{ \int d^d x \left[\vec{h}^T \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right) \vec{h} + \mathcal{L}_i \left(\vec{h} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4} (A(\vec{h}) \vec{\theta})^T G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G (A(\vec{h}) \vec{\theta}) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Na expressão (4.80) denotamos

$$J = \left| \frac{\partial \left(\vec{h} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T NGA(\vec{h}) \vec{\theta} \right)}{\partial (\vec{h})} \right| \tag{4.81}$$

como sendo o jacobiano da transformação (4.76) que será calculado em apêndice A. Mostraremos que este jacobiano não contribui para nenhum diagrama considerado neste trabalho, podendo ser desprezado. Note que esta transformação não é uma transformação de calibre e portanto modifica o setor de Einstein-Hilbert puro introduzindo novas interações $\theta - h$. Isso fará com que a teoria possua vértices adicionais e, além disso, trará contribuições para vértices já existentes na teoria no calibre de deDonder.

O propagador do gráviton pode então ser definido

$$\tilde{D}_{0\ \mu\nu;\alpha\beta}(k)2\left(M - G^T\frac{N}{\alpha}F\right)^{\alpha\beta;\lambda\gamma}(k) = -I_{\mu\nu}^{\lambda\gamma}, \quad (4.82)$$

onde $I_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ é dado por (4.64).

Para obter a forma explícita do propagador precisamos uma base tensorial para resolver a equação tensorial (4.82). Uma base que depende de um momento k e leva em conta a simetria (4.65) é dada por 5 tensores

$$\begin{aligned} T_1^{\mu\nu\alpha\beta} &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} \\ T_2^{\mu\nu\alpha\beta} &= \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \\ T_3^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{k^2}(\eta^{\mu\alpha}k^\nu k^\beta + \eta^{\mu\beta}k^\nu k^\alpha + \eta^{\nu\alpha}k^\mu k^\beta + \eta^{\nu\beta}k^\mu k^\alpha) \\ T_4^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{k^2}(\eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta + \eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu) \\ T_5^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{k^4}k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Expressando o propagador em termos desta base

$$\tilde{D}_0^{\mu\nu;\alpha\beta}(k) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{k^2} C_i T_i^{\mu\nu\alpha\beta}(k) \quad (4.84)$$

e usando (4.82), obtemos um conjunto de 5 equações para os C_i :

$$T_i^{\mu\nu\lambda\gamma}(k) \left(\tilde{D}_{0\ \mu\nu;\alpha\beta}(k)2\left(M - G^T\frac{N}{\alpha}F\right)^{\alpha\beta}_{\lambda\gamma}(k) + I_{\mu\nu\lambda\gamma} \right) = 0 \quad (4.85)$$

usando o pacote de computação simbólica HIP para o MapleV3 [HY92] resolvemos estas

equações obtendo:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -1/2 \\
C_2 &= \frac{(g_2 - g_1)^2 + 2(g_1 + 1)(g_2 + 1)\alpha}{(d-1)(g_2 - g_1)^2 + 2(d-2)(g_1 + 1)(g_2 + 1)\alpha} \\
C_3 &= \frac{1 - \alpha}{2} \\
C_4 &= -\frac{(g_2 - g_1)^2 + [4(g_1 + 1)(g_2 + 1) - g_1 - g_2 - 2]\alpha}{(d-1)(g_2 - g_1)^2 + 2(d-2)(g_1 + 1)(g_2 + 1)\alpha} \\
C_5 &= \{(d-2)[\alpha^2(4(g_1 + 1)(g_2 + 1) - 1) - (g_1 - g_2)^2] + \\
&\quad 2\alpha[(g_1^2 + g_2^2)(d-1) - (g_1 + g_2)(d-4) - (2g_1g_2 + 1)(d-3)]\} \\
&\quad \times [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2(d-2)(g_1 + 1)(g_2 + 1)\alpha]^{-1}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

No limite $\alpha \rightarrow 0$ o propagador se torna independente de g_1 e g_2 e toma a forma simples

$$\tilde{D}_0^{\mu\nu;\alpha\beta} = \frac{-\frac{1}{2}P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} - \frac{1}{2}P^{\nu\alpha}P^{\mu\beta} + \frac{1}{d-1}P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta}}{k^2} \tag{4.87}$$

com

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \tag{4.88}$$

Note que $P^{\mu\nu}$ é transversal, $k_\mu P^{\mu\nu} = 0$, e idempotente, $P_{\mu\alpha}P^\alpha_\nu = P_{\mu\nu}$. Essas propriedades, juntamente com $\eta_{\mu\nu}P^{\mu\nu} = d-1$ garantem que:

$$\begin{aligned}
k_\mu \tilde{D}_0^{\mu\nu;\alpha\beta} &= 0 \\
\eta_{\mu\nu} \tilde{D}_0^{\mu\nu;\alpha\beta} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Portanto, o propagador dado por (4.87) é TT.

O calibre de deDonder pode ser obtido fazendo $a1 = 1$ e $g_1 = g_2 = -1/2$. Note que a condição $g_1 = g_2$ faz com que a fixação de calibre recaia sobre os casos especiais de fixação de calibre quadrático, estudados na seção anterior, fixado usando apenas uma condição de calibre.

4.5 Regras de Feynman

Na seção anterior calculamos o propagador do gráviton. Ele é denotado como

$$\tilde{D}_0^{\mu\nu;\alpha\beta} \tag{4.90}$$

e diagramaticamente como na figura 4.1

Figura 4.1: propagador do gráviton

Vamos agora calcular os vértices da gravitação pura partindo da parte de interação da lagrangiana de Einstein-Hilbert:

$$S_i(\vec{h}) = \int d^d x \mathcal{L}_i = \int_0^\beta d\tau \int d^{d-1} x \left(\mathcal{L}_i^{(3)} + \mathcal{L}_i^{(4)} + \dots \right), \quad (4.91)$$

onde o índice n de $\mathcal{L}_i^{(n)}$ representa o grau do polinômio no campo h .

Passando para o espaço dos momentos, a parte cúbica é escrita como

$$\begin{aligned} S_i^{(3)}(\vec{h}) &= T^3 \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k_1}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_2}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_3}{(2\pi)^{d-1}} \\ &\times \delta_0^{n_1+n_2+n_3} (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(k_1 + k_2 + k_3) \\ &\times V_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3}^{h^3}(k_1, k_2, k_3) \frac{1}{3!} h^{\mu_1 \nu_1}(k_1, \omega_{n_1}) h^{\mu_2 \nu_2}(k_2, \omega_{n_2}) h^{\mu_3 \nu_3}(k_3, \omega_{n_3}), \end{aligned} \quad (4.92)$$

e a parte quártica como

$$\begin{aligned} S_i^{(4)}(\vec{h}) &= T^4 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \int \frac{d^{d-1} k_1}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_2}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_3}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1} k_4}{(2\pi)^{d-1}} \\ &\times \delta_0^{n_1+n_2+n_3+n_4} (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\times V_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3 \mu_4 \nu_4}^{h^4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \frac{1}{4!} h^{\mu_1 \nu_1}(k_1, \omega_{n_1}) h^{\mu_2 \nu_2}(k_2, \omega_{n_2}) h^{\mu_3 \nu_3}(k_3, \omega_{n_3}) h^{\mu_4 \nu_4}(k_4, \omega_{n_4}). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Desta forma, os vértices cúbicos e quárticos da gravitação pura são denotados, respectivamente, como $V_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3}^{(3)}(k_1, k_2, k_3)$ e $V_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3 \mu_4 \nu_4}^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ e já são definidos como simétricos. Suas respectivas representações diagramáticas estão nas figuras 4.2 e 4.3. A forma explícita para estes vértices foi obtida utilizando o pacote HIP de computação simbólica, entretanto, as expressões são muito grandes e seria pouco informativo escreve-las aqui.

Calculadas as regras de Feynman da gravitação pura, vamos calcular as regras de Feynman do setor θ . O operador A é definido como

$$A_{\mu\nu,\lambda}(h) = \eta_{\mu\lambda} \partial_\nu + \eta_{\nu\lambda} \partial_\mu + \kappa [h_{\mu\lambda} \partial_\nu + h_{\nu\lambda} \partial_\mu + (\partial_\lambda h_{\mu\nu})]. \quad (4.94)$$

Figura 4.2: Vértice cúbico de grávitons

Figura 4.3: Vértice quártico de grávitons

No espaço dos momentos escrevemos:

$$\tilde{A}_{\mu\nu,\lambda}(\vec{h}(k))\tilde{\theta}^\lambda(p) = \tilde{A}_{\mu\nu,\lambda}^0(p)\tilde{\theta}^\lambda(p) + \tilde{A}_{\mu\nu,\alpha\beta,\lambda}^1(k,p)\tilde{h}^{\alpha\beta}(k)\tilde{\theta}^\lambda(p), \quad (4.95)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\mu\nu,\lambda}^0(p) &= i(\eta_{\mu\lambda}p_\nu + \eta_{\nu\lambda}p_\mu) \\ \tilde{A}_{\mu\nu,\alpha\beta,\lambda}^1(k,p) &= \frac{i\kappa}{2} [(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\lambda}p_\nu + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\lambda}p_\mu + \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}k_\lambda) + (\alpha \leftrightarrow \beta)]. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Desta forma no espaço dos momentos podemos separar o termo $A(\vec{h})\vec{\theta}$ em um termo de ordem θ e outro de ordem $h\theta$.

Assim a ação do setor θ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_\theta &= \int d^d x \mathcal{L}_\theta \\ &= - \int d^d x \frac{1}{4} \left(A(\vec{h})\vec{\theta} \right)^T G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G \left(A(\vec{h})\vec{\theta} \right) \\ &= \int d^d x (\mathcal{L}_{2\theta} + \mathcal{L}_{2\theta,1h} + \mathcal{L}_{2\theta,2h}). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Figura 4.4: O propagador do campo θ

Primeiramente vamos calcular o propagador do campo θ a partir de

$$\begin{aligned} S_{2\theta} &= - \int d^d x \frac{1}{4} \left(A^0 \vec{\theta} \right)^T G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G \left(A^0 \vec{\theta} \right) \\ &= \int d^d x \frac{1}{4} \vec{\theta}^T A^{0T} G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G A^0 \vec{\theta}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Assim

$$\Delta_{\theta}^{o\mu\lambda}(k) \times \frac{-1}{2} \left(A^{0T} G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G A^0 \right)_{\lambda\nu}(k) = -\delta_{\nu}^{\mu} \quad (4.99)$$

define $\Delta_{\theta}^{o\mu\lambda}(k)$ (figura 4.4) como sendo o propagador do campo θ . Resolvendo (4.99) de forma análoga a que resolvemos (4.82) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta}^{o\mu\lambda}(k) &= \frac{2}{\alpha k^4} \left\{ \eta^{\mu\lambda} - \frac{k^{\mu} k^{\lambda}}{k^2} \left[1 - \frac{1}{4(g_1 + 1)(g_2 + 1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1(d-1)}{8\alpha(d-2)} \left(\frac{1}{g_1 + 1} - \frac{1}{g_2 + 1} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.100)$$

O vértice cúbico do setor θ é calculado a partir de

$$\begin{aligned} S_{2\theta,1h} &= -\frac{1}{4} \int d^d x \left[\left(A^1(\vec{h}) \vec{\theta} \right)^T G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G \left(A^0 \vec{\theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(A^0 \vec{\theta} \right)^T G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G \left(A^1(\vec{h}) \vec{\theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

A partir de (4.82) identificamos $\left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} = 2D_0(k)$ e assim o vértice cúbico do setor θ será dado por

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu;\lambda_1,\lambda_2}^{\theta^2 h}(k, p_1, p_2) &= -\frac{1}{2} \left[\tilde{A}_{\alpha\beta;\mu\nu;\lambda_1}^1(k, p_1) (G^T N F D_0 F^T N G)^{\alpha\beta\gamma\sigma}(p_2) \right. \\ &\quad \times \tilde{A}_{\gamma\sigma,\lambda_2}^0(p_2) \\ &\quad + \tilde{A}_{\alpha\beta;\lambda_1}^0(p_1) (G^T N F D_0 F^T N G)^{\alpha\beta\gamma\sigma}(p_2 + k) \\ &\quad \times \tilde{A}_{\gamma\sigma,\mu\nu;\lambda_2}^1(k, p_2) \left. \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} [(\lambda_1, p_1) \leftrightarrow (\lambda_2, p_2)], \end{aligned} \quad (4.102)$$

Figura 4.5: Vértice cúbico do setor θ Figura 4.6: Vértice quártico do setor θ

e sua representação diagramática está na figura 4.5.

A Lagrangiana da parte quártica do setor θ é

$$\mathcal{L}_{2\theta, 2h} = -\frac{1}{4} \left[\left(A^1(\vec{h})\vec{\theta} \right)^T G^T N F \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G \left(A^1(\vec{h})\vec{\theta} \right) \right]. \quad (4.103)$$

Assim o vértice quártico do setor θ (figura 4.6) pode ser calculado como

$$\begin{aligned} V_{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2; \lambda_1, \lambda_2}^{\theta^2 h^2}(k_1, k_2, p_1, p_2) &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\tilde{A}_{\alpha\beta; \mu_1 \nu_1; \lambda_1}^1(k_1, p_1) \right. \right. \\ &\quad \times \left(G^T N F D_0 F^T N G \right)^{\alpha\beta\gamma\sigma} (p_2 + k_2) \\ &\quad \times \left. \tilde{A}_{\gamma\sigma, \mu_2 \nu_2, \lambda_2}^1(k_2, p_2) \right] \\ &\quad + [(\mu_1, \nu_1, k_1) \leftrightarrow (\mu_2, \nu_2, k_2)] \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ (\lambda_1, p_1) \leftrightarrow (\lambda_2, p_2) \}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

A mudança de variáveis (4.76) faz com que a parte de interação do setor de Einstein-Hilbert seja reescrita como

$$S_i(\vec{h}) \rightarrow S_i \left[\vec{h} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G A(\vec{h})\vec{\theta} \right]. \quad (4.105)$$

Desta forma, esta mudança de variáveis (4.76) fará com que surjam contribuições para

Figura 4.7: Vértice de ordem $h^2\theta$ vindo do termo de ordem h^3 do setor de Einstein-Hilbert

os vértices de interação entre θ e h já existentes, além de fazer com que surjam infinitos outros vértices de interação entre θ e h . Considerando as topologias dos diagramas de Feynman calculados nesse trabalho, será suficiente calcular contribuições para os vértices de ordem $h\theta^2$, $h^2\theta^2$ e um novo vértice de ordem $h^2\theta$.

Relembrando da expressão do operador A no espaço dos momentos

$$\tilde{A}_{\mu\nu,\lambda}(\vec{h}(k))\tilde{\theta}^\lambda(p) = \tilde{A}_{\mu\nu,\lambda}^0(p)\tilde{\theta}^\lambda(p) + \tilde{A}_{\mu\nu,\alpha\beta,\lambda}^1(k,p)\tilde{h}^{\alpha\beta}(k)\tilde{\theta}^\lambda(p), \quad (4.106)$$

e dos vértices da gravitação pura (4.92) e (4.93) podemos calcular esses novos vértices.

A contribuição para o vértice de dois campos h e um campo θ vinda do termo de ordem h^3 é escrita como

$$\begin{aligned} V_{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2;\lambda}^{h^3 \rightarrow h^2\theta}(k_1, k_2, p) &= V_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}^{h^3}{}^{\alpha\beta}(k_1, k_2, p) \\ &\times (D_0 F^T N G(p) A^0(p))_{\alpha\beta,\lambda}, \end{aligned} \quad (4.107)$$

e é representado diagramaticamente como na figura 4.7.

A contribuição para o vértice de um campo h e dois campos θ vinda do termo de ordem h^3 é dada por

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu;\lambda_1,\lambda_2}^{h^3 \rightarrow h\theta^2}(k, p_1, p_2) &= V_{\mu\nu}^{h^3\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}(k, p_1, p_2) \\ &\times (D_0 F^T N G(p_1) A^0(p_1))_{\alpha_1\beta_1,\lambda_1} \\ &\times (D_0 F^T N G(p_2) A^0(p_2))_{\alpha_2\beta_2,\lambda_2}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Este vértice está representado na figura 4.8.

A contribuição para o vértice de dois campos h e dois campos θ vinda do termo de

Figura 4.8: Contribuição para o vértice de ordem $h\theta^2$ vindo do termo de ordem h^3 do setor de Einstein-Hilbert

Figura 4.9: Contribuição para o vértice de ordem $h^2\theta^2$ vindo do termo de ordem h^3 do setor de Einstein-Hilbert

ordem h^3 (figura 4.9) é dada por:

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2;\lambda_1,\lambda_2}^{h^3\rightarrow h^2\theta^2}(k_1, k_2, p_1, p_2) &= \frac{1}{4} \left\{ \left[V_{\mu_1\nu_1}^{h^3}{}^{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}(k_1, p_1, p_2 + k_2) \right. \right. \\
 &\quad \times (D_0 F^T N G(p_1) A^0(p_1))_{\alpha_1\beta_1,\lambda_1} \\
 &\quad \times (D_0 F^T N G(p_2 + k_2) A^1(k_2, p_2))_{\alpha_2\beta_2,\mu_2\nu_2,\lambda_2} \left. \right] \\
 &\quad + [(\mu_1, \nu_1, k_1) \leftrightarrow (\mu_2, \nu_2, k_2)] \left. \right\} \\
 &\quad + \{(\lambda_1, p_1) \leftrightarrow (\lambda_2, p_2)\}. \tag{4.109}
 \end{aligned}$$

Para o vértice de dois campos h e dois campos θ existe uma outra contribuição vinda do termo de ordem h^4 (figura 4.10). Essa contribuição é escrita como

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2;\lambda_1,\lambda_2}^{h^4\rightarrow h^2\theta^2}(k_1, k_2, p_1, p_2) &= V_{\mu_1\nu_1,\nu_2\mu_2}^{h^4}{}^{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}(k_1, k_2, p_1, p_2) \\
 &\quad \times (D_0 F^T N G(p_1) A^0(p_1))_{\alpha_1\beta_1,\lambda_1} \\
 &\quad \times (D_0 F^T N G(p_2) A^0(p_2))_{\alpha_2\beta_2,\lambda_2}. \tag{4.110}
 \end{aligned}$$

Onde,

$$(D_0 F^T N G(p) A^0(p))_{\alpha\beta,\lambda} = \tilde{D}_0{}_{\alpha\beta;\delta\chi}(p) (F^T N G)^{\delta\chi;\gamma\sigma}(p) \tilde{A}_{\gamma\sigma,\lambda}^0(p) \tag{4.111}$$

Figura 4.10: Contribuição para o vértice de ordem $h^2\theta^2$ vindo do termo de ordem h^4 do setor de Einstein-Hilbert

e

$$\begin{aligned} (D_0 F^T N G(p+k) A^1(k, p))_{\alpha\beta, \mu\nu, \lambda} &= \tilde{D}_0{}_{\alpha\beta; \delta\chi}(k+p) (F^T N G)^{\delta\chi; \gamma\sigma}(k+p) \\ &\times \tilde{A}_{\gamma\sigma, \mu\nu, \lambda}^1(k, p). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Vale a pena ressaltar também que nas expressões acima os índices $\mu_j \nu_j$ e momentos k_j se referem aos grávitons, já os índices λ_i e momentos p_i se referem aos campos θ .

Resta calcular os vértices vindos determinantes $\det(\alpha F A(\vec{h}))$ e $\det(\alpha G A(\vec{h}))$. O outro determinante $\det(N/\alpha)$ não contribui pois escolhemos $N_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Vamos expandir o determinante usando variáveis de Grassmann

$$\begin{aligned} \det(\alpha F A) &= \int (d\xi)(d\bar{\xi}) \exp \left[- \int d^d x \bar{\xi} (\alpha F A) \xi \right] \\ \det(\alpha G A) &= \int (d\zeta)(d\bar{\zeta}) \exp \left[- \int d^d x \bar{\zeta} (\alpha G A) \zeta \right]. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Assim (4.80) nos diz que

$$\mathcal{L}_{ghost} = -\bar{\xi} (\alpha F A) \xi - \bar{\zeta} (\alpha G A) \zeta. \quad (4.114)$$

Obviamente os propagadores e vértices dos fantasmas ξ e ζ serão iguais na forma, diferindo apenas pela troca $g_1 \leftrightarrow g_2$, que é o mesmo que trocar F por G . Desta forma vamos fazer os cálculos apenas para o fantasma ξ . A parte quadrática da Lagrangiana do fantasma ξ é

$$\mathcal{L}_{ghost}^2 = -\bar{\xi} (\alpha F A^0) \xi = -\alpha \bar{\xi}_\lambda F^{\lambda, \alpha\beta} A_{\alpha\beta, \gamma}^0 \xi^\gamma. \quad (4.115)$$

Desta forma definimos o propagador do fantasma ξ por $\tilde{\mathcal{F}}$ (figura 4.11):

$$\left[-\tilde{F}^{\lambda, \alpha\beta}(p) \tilde{A}_{\alpha\beta, \gamma}^0(p) \right] \tilde{\mathcal{F}}_{\gamma\mu}(p) = -\delta_\mu^\lambda. \quad (4.116)$$

Figura 4.11: Propagador do fantasma ξ Figura 4.12: Vértice de interação entre o campo fantasma ξ e h

E o vértice de interação entre os campos ξ , $\bar{\xi}$ e o campo h é (figura 4.12)

$$V_{\mu\nu;\lambda,\gamma}^F(k, q1, q2) = -\tilde{F}_{\lambda,\alpha\beta}(k + q2)\tilde{A}^{1\alpha\beta}_{\mu\nu,\gamma}(k, q2). \quad (4.117)$$

Onde μ, ν e k são os índices e momento do gráviton e γ e $q2$ é o índice e momento de $\bar{\xi}$.

De forma análoga também escrevemos para o fantasma ζ (figuras 4.13 e 4.14):

$$\left[-\tilde{G}^{\lambda,\alpha\beta}(p)\tilde{A}^0_{\alpha\beta,\gamma}(p) \right] \tilde{\mathcal{G}}_{\gamma\mu}(p) = -\delta_{\gamma}^{\lambda}. \quad (4.118)$$

$$V_{\mu\nu;\lambda,\gamma}^G(k, q1, q2) = -\tilde{G}_{\lambda,\alpha\beta}(k + q2)\tilde{A}^{1\alpha\beta}_{\mu\nu,\gamma}(k, q2). \quad (4.119)$$

As expressões explícitas para os propagadores dos campo fantasmas são escritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu}(p) &= \frac{(2g_1 + 1)(p_\mu p_\nu / p^2 - \eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{2(g_1 + 1)p^2} \\ \mathcal{G}_{\mu\nu}(p) &= \frac{(2g_2 + 1)(p_\mu p_\nu / p^2 - \eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{2(g_2 + 1)p^2}. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Figura 4.13: Propagador do fantasma ζ

Figura 4.14: Vértice de interação entre o campo fantasma ζ e h

5 *Efeitos térmicos na gravitação*

Nos capítulos 2 e 3 introduzimos as convenções sobre regras de Feynman. No capítulo anterior desenvolvemos um formalismo para fixação de calibre geral que permite obter uma escolha de calibre em que o propagador transverso e de traço nulo (1.1). Neste contexto da fixação de calibre geral, calculamos as regras de Feynman para a gravitação até quarta ordem nos campos.

Estas técnicas serão agora empregadas para realizar cálculos de quantidades físicas usando o pacote de computação simbólica HIP do MapleV3. Apresentaremos neste capítulo os resultados para a função de um ponto e mostraremos que esta contribuição representa uma contribuição térmica para o tensor energia momento da teoria. Calcularemos também as contribuições a dois “loops” para a pressão e verificaremos, surpreendentemente, que o resultado é dependente de calibre.

Calcularemos a função de dois pontos com momento externo nulo e veremos que ela corresponde a parte estática da auto energia, que nada mais é que o modo de frequência de Matsubara nula. Utilizaremos o valor da parte estática da auto energia, juntamente com o propagador TT, para calcular a parte mais divergente dos diagramas anelares para a pressão

5.1 A função de um ponto

Para entendermos o significado físico da função de um ponto na gravitação vamos escrevê-la como sendo uma derivada a ação efetiva $\Gamma(h)$ em relação ao campo conforme mostrado em [Reb91]:

$$\Gamma^{(1)\mu\nu} = \frac{\delta\Gamma}{\delta h_{\mu\nu}}. \quad (5.1)$$

Figura 5.1: Contribuições para função de 1 ponto.

Lembrando do resultado (4.35) deduzido no capítulo anterior, o qual relaciona o tensor energia-momento com a derivada da ação de matéria em relação a métrica

$$\frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

teremos

$$\left(\frac{\delta S_{mat}}{\delta h_{\mu\nu}} \right)_{g=\eta} = \frac{1}{2} T^{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

Portanto, a contribuição a um “loop” para o tensor de energia momento pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} T^{\mu\nu} = \Gamma^{(1)\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Assim, a parte térmica da função de um ponto fornece a contribuição térmica para o tensor de energia-momento.

$$\frac{1}{2} T_{term.}^{\mu\nu} = \Gamma_{term.}^{(1)\mu\nu}. \quad (5.5)$$

Os diagramas que contribuem para a função de um ponto a um “loop” estão mostrados na figura 5.1. O primeiro diagrama da esquerda para direita da figura 5.1 representa a contribuição do setor de Einstein-Hilbert puro e o integrando referente a este diagrama pode ser escrito como

$$-\frac{\kappa}{8} \frac{(d-2) [2(3-d)q^\mu q^\nu / q^2 + (d-5)\eta^{\mu\nu}] [2d\alpha(g_1+1)(g_2+1) + (d-1)(g_1-g_2)^2]}{2(d-2)\alpha(g_1+1)(g_2+1) + (d-1)(g_1-g_2)^2}, \quad (5.6)$$

onde q^μ é o momento de integração que circula no “loop”, lembrando que por conservação de momento o momento da linha externa ao diagrama é nulo.

O segundo diagrama na figura 5.1 representa a contribuição para a função de 1 ponto vinda do vértice e dois campos θ e um campo h construído a partir da modificação do vértice cúbico do setor de Einstein-Hilbert puro. A expressão do integrando desta

contribuição pode ser escrito como

$$-\frac{\kappa}{4} \frac{(g_1 - g_2)^2 [2(3 - d)q^\mu q^\nu / q^2 + (d - 5)\eta^{\mu\nu}]}{2(d - 2)\alpha(g_1 + 1)(g_2 + 1) + (d - 1)(g_1 - g_2)^2}. \quad (5.7)$$

O terceiro diagrama da figura 5.1 representa a contribuição vinda do setor θ para a função de um ponto. O integrando deste diagrama é trivial e é escrito como

$$-\kappa\eta^{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

O quarto e o quinto diagramas da figura 5.1 são diagramas dos campos de fantasmas ξ e ζ . Portanto estes dois diagramas são idênticos na forma diferindo apenas pela troca de g_1 por g_2 . O integrando de cada uma destas contribuições é escrito como

$$\frac{1}{2}\kappa\eta^{\mu\nu}. \quad (5.9)$$

Mostraremos na seção 5.3 que este tipo de integral não contribuí, logo as integrais de (5.9) e (5.8) não irão contribuir para a função de 1 ponto.

Desta forma, vemos que os únicos diagramas que irão contribuir para a função de 1 ponto são os dois primeiros diagramas da figura 5.1. Assim a expressão do integrando da função de um ponto será dada pela soma de (5.6) com (5.7). Somando estas expressões o integrando da função de um ponto pode ser escrito como

$$-\kappa \frac{d}{8} \left[2(3 - d) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} + (d - 5)\eta^{\mu\nu} \right]. \quad (5.10)$$

Note que já do nível do integrando a independência de calibre se manifesta, pois a expressão (5.10) não apresenta dependência nos parâmetros de calibre α , g_1 e g_2 .

O calibre de deDonder pode ser obtido no limite $g_1 = g_2$. Fazendo isso a expressão (5.7) se anula pois não existira mais contribuição vinda da modificação do setor de Einstein-Hilbert, já que neste limite estaremos no domínio dos calibres usuais. Já a expressão (5.6) se torna independente do parâmetro α e toma forma da expressão (5.10), mostrando mais uma vez a independência de calibre da função de um ponto.

5.2 A função de dois pontos

Devido a limitação computacional e as dificuldades algébricas envolvidas no cálculo da função de dois pontos, consideramos a função de dois pontos para o caso especial de momento externo nulo. Mostraremos que a auto energia no limite de momento externo

nulo é independente de calibre e seu valor coincide com o valor encontrado em [Reb91] para a auto energia estática (que é independente de calibre) calculada no contexto de calibre de deDonder. Este resultado é muito importante no presente trabalho, pois ele estabelece a consistência entre o presente formalismo de fixação de calibre e os formalismos de fixação de calibre usuais.

Os diagramas que contribuem para a função de dois pontos estão representados na figura 5.2. Mesmo com o momento externo nulo, veremos que devido a complexidade algébrica das expressões envolvidas é conveniente introduzir uma base tensorial adequada para tensores de quarta ordem simétricos, que é a mesma base (4.84), usada para o cálculo do propagador do gráviton

$$\begin{aligned}
T_1^{\mu\nu\alpha\beta}(q) &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} \\
T_2^{\mu\nu\alpha\beta}(q) &= \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \\
T_3^{\mu\nu\alpha\beta}(q) &= \frac{1}{q^2}(\eta^{\mu\alpha}q^\nu q^\beta + \eta^{\mu\beta}q^\nu q^\alpha + \eta^{\nu\alpha}q^\mu q^\beta + \eta^{\nu\beta}q^\mu q^\alpha) \\
T_4^{\mu\nu\alpha\beta}(q) &= \frac{1}{q^2}(\eta^{\mu\nu}q^\alpha q^\beta + \eta^{\alpha\beta}q^\mu q^\nu) \\
T_5^{\mu\nu\alpha\beta}(q) &= \frac{1}{q^4}q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Escreveremos a auto energia com o momento externo nulo como

$$\Pi_0^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} L^{\mu\nu,\alpha\beta} \tag{5.12}$$

e decompomos o integrando na base (5.11) como

$$L^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sum_{i=1}^5 \tilde{C}^i T_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p) \tag{5.13}$$

Usando as regras de Feynman definidas no capítulo anterior, calculamos as constantes $\tilde{C}^i$ separadamente para cada um dos diagramas dados na figura 5.2. Primeiramente calculamos as contribuições dadas pelos diagramas de fantasmas fermiônicos mostrados nas partes (c) e (d) da figura 5.2. Essas contribuições são idênticas e podem ser escritas como

$$\tilde{C}_{fantasmas}^1 = -\frac{1}{2}, \tilde{C}_{fantasmas}^2 = \tilde{C}_{fantasmas}^3 = \tilde{C}_{fantasmas}^4 = \tilde{C}_{fantasmas}^5 = 0. \tag{5.14}$$

Os propagadores e os vértices dos diagramas (c) e (d) possuem dependência nos parâmetros de calibre g_1 e g_2 respectivamente. Entretanto nos passos intermediários esta dependência é totalmente cancelada produzindo um resultado independente de calibre.

Figura 5.2: Diagramas que contribuem para a função de dois pontos

As contribuições puramente vindas do setor θ são representadas na parte (e) e (f) da figura 5.2. Os vértices e os propagadores de cada uma destas contribuições possuem uma dependência nos três parâmetros de calibre α , g_1 e g_2 . Entretanto essa dependência se cancela nos passos intermediários e cada um desses diagramas fornece uma contribuição do tipo

$$\tilde{C}_\theta^1 = \frac{1}{2}, \tilde{C}_\theta^2 = \tilde{C}_\theta^3 = \tilde{C}_\theta^4 = \tilde{C}_\theta^5 = 0. \quad (5.15)$$

Desta formas as contribuições (5.15) e (5.14) se cancelam já no integrando.

No calibre de deDonder ($g_1 = g_2$) apenas os diagramas (a), (b) e (c) contribuem, e essa contribuição pode ser escrita como

$$\tilde{C}^1 = \frac{d(d-5)}{16} - \frac{1}{2}, \tilde{C}^3 = -\frac{d-3}{8}, \tilde{C}^5 = \frac{d-3}{4} \tilde{C}^2 = \tilde{C}^4 = 0. \quad (5.16)$$

A contribuição para a função de dois pontos é conhecida em quatro dimensões [Reb91] e veremos na seção 5.3 que ela corresponde ao valor dado por (5.16), depois que realizarmos as integrais (5.12).

Vamos definir G_{1i} como sendo as componentes da soma das contribuições diagramas (a) e (b) da figura 5.2 subtraídas das componentes C^i para função de dois pontos com momento externo nulo no calibre de deDonder dadas por (5.16).

As quantidades G_{2i} , G_{3i} , G_{4i} e G_{5i} são definidas como sendo as componentes dos diagramas (g), (h), (i) e (j) da figura 5.2, respectivamente. Os diagramas (k) e (l) da figura 5.2 possuem uma estrutura assimétrica e cada um deles não pode ser escrito em uma base simétrica como (5.11), pois permutar os índices externos aos diagramas significa permutar vértices distintos. Entretanto, a soma desses diagrama possui uma estrutura simétrica e assim definimos os componentes da soma dos diagramas (k) e (l) figura 5.2 como G_{6i} . Obtemos assim os seguintes resultados para os componentes G_{ji} :

$$G_{11} = \frac{(3d-7)(g_1-g_2)^2}{8[(d-1)(g_1-g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.17)$$

$$G_{21} = 0 \quad (5.18)$$

$$G_{31} = \frac{(d^2-11d+22)(g_1-g_2)^2}{8(d-2)[(d-1)(g_1-g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.19)$$

$$G_{41} = 0 \quad (5.20)$$

$$G_{51} = -\frac{(d-3)^2 (g_1 - g_2)^2}{2 (d-2) [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.21)$$

$$G_{61} = 0 \quad (5.22)$$

$$G_{12} = -\frac{(g_1 - g_2)^2 [4 (d-3) (g_1 - g_2)^2 + \alpha (d-1) (d-2) (g_1+1) (g_2+1)]}{4 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.23)$$

$$G_{22} = 0 \quad (5.24)$$

$$G_{32} = -\frac{(d^2 - 11d + 26) (g_1 - g_2)^2}{8 (d-2) [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.25)$$

$$G_{42} = \frac{(d-5)^2 (g_1 - g_2)^4}{8 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.26)$$

$$G_{52} = \frac{(g_1 - g_2)^2 [2 (d-3)^2 (g_1 - g_2)^2 + \alpha (d-2) (d^2 - 7d + 14) (g_1+1) (g_2+1)]}{2 (d-2) [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.27)$$

$$G_{62} = 0 \quad (5.28)$$

$$G_{13} = -\frac{(d-3) (g_1 - g_2)^2}{4 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.29)$$

$$G_{23} = 0 \quad (5.30)$$

$$G_{33} = -\frac{(d-3) (d-4) (g_1 - g_2)^2}{4 (d-2) [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.31)$$

$$G_{43} = 0 \quad (5.32)$$

$$G_{53} = \frac{(d-3)^2 (g_1 - g_2)^2}{2 (d-2) [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.33)$$

$$G_{63} = 0 \quad (5.34)$$

$$G_{14} = \frac{(d-3) (g_1 - g_2)^2 [2 (g_1 - g_2)^2 + \alpha (d-2) (g_1+1) (g_2+1)]}{2 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.35)$$

$$G_{24} = -\frac{(d-5) (g_1 - g_2)^2}{2 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.36)$$

$$G_{34} = \frac{(d-6) (d-3) (g_1 - g_2)^2}{4 (d-2) [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.37)$$

$$G_{44} = -\frac{(d-3) (d-5) (g_1 - g_2)^4}{4 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.38)$$

$$G_{54} = -\frac{(d-3) (g_1 - g_2)^2 [(d-3) (g_1 - g_2)^2 + \alpha (d-2) (d-4) (g_1+1) (g_2+1)]}{(d-2) [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.39)$$

$$G_{64} = \frac{(d-5) (g_1 - g_2)^2}{2 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.40)$$

$$G_{15} = \frac{(d-3)^2 (g_1 - g_2)^4}{2 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.41)$$

$$G_{25} = \frac{(2d-6) (g_1 - g_2)^2}{[(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]} \quad (5.42)$$

$$G_{35} = 0 \quad (5.43)$$

$$G_{45} = \frac{(d-3)^2 (g_1 - g_2)^4}{2 [(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1+1)(g_2+1)]^2} \quad (5.44)$$

$$G_{55} = -\frac{(d-3)^2 (g_1 - g_2)^4}{[(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1 + 1)(g_2 + 1)]^2} \quad (5.45)$$

$$G_{65} = -\frac{(2d-6)(g_1 - g_2)^2}{[(d-1)(g_1 - g_2)^2 + 2\alpha(d-2)(g_1 + 1)(g_2 + 1)]}. \quad (5.46)$$

A independência de calibre é estabelecida quando notamos que a soma

$$\sum_{j=1}^6 G_{ji} = 0 \quad (5.47)$$

se anula para todos os valores possíveis de i . Lembrando que as constantes G_{1i} são definidas como sendo as componentes da soma das contribuições diagramas (a) e (b) da figura 5.2 subtraídas das componentes C^i para função de dois pontos com momento externo nulo no calibre de deDonder (5.16), vemos que a contribuição para a função de dois pontos com momento externo nulo no calibre geral é a mesma que no calibre de deDonder (5.16).

Desta forma, escrevendo a auto energia como

$$\Pi_0^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} L^{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (5.48)$$

e o seu integrando como

$$L^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sum_{i=1}^5 \tilde{C}^i T_i^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (5.49)$$

vemos que as componentes $\tilde{C}^i$ são escritas como

$$\tilde{C}^1 = \frac{d(d-5)}{16}, \quad \tilde{C}^3 = -\frac{d-3}{8}, \quad \tilde{C}^5 = \frac{d-3}{4} \quad \tilde{C}^2 = \tilde{C}^4 = 0. \quad (5.50)$$

Ou seja, a auto energia com momento externo nulo possui o mesmo valor que a auto energia no calibre de deDonder, no limite estático.

5.3 Cálculo de algumas integrais

Na seção anterior escrevemos o integrando da função de dois pontos em termos da base tensorial (5.11). Desta forma é necessário resolver integrais do tipo

$$I_i = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p). \quad (5.51)$$

Não existem vetores especiais além da quadri-velocidade u que define o banho térmico, de sorte que, por invariância de Lorentz podemos escrever as integrais (5.51) como

$$\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \sum_{j=1}^5 D_{ij} T_j^{\mu\nu\alpha\beta}(u). \quad (5.52)$$

Contraindo (5.52) membro a membro com $T_l^{\mu\nu\alpha\beta}(u)$ obtemos um sistema de equações para os D_{ij}

$$\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p) T_{\mu\nu\alpha\beta}^l(u) = \sum_{j=1}^5 D_{ij} T_j^{\mu\nu\alpha\beta}(u) T_{\mu\nu\alpha\beta}^l(u). \quad (5.53)$$

Assim no membro esquerdo existem apenas integrais escalares para resolver tais como

$$J_k = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} T \sum_n \left(\frac{p^\mu u_\mu}{p^2} \right)^k. \quad (5.54)$$

No referencial do banho térmico, a quadri-velocidade do banho térmico pode ser escrita como

$$u_0 = 1, \quad u_i = 0, \quad (5.55)$$

onde u_i representa as componentes espaciais do quadri-vetor u . Deste modo, as integrais (5.54) podem ser reescritas como

$$J_k = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} T \sum_n \left(\frac{p_0^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \right)^k. \quad (5.56)$$

A componente temporal do quadrivetor é escrita em termos de uma frequência de Matsubara como

$$p_0 = \frac{2\pi n i}{\beta}. \quad (5.57)$$

Começando com o caso $k = 0$ escrevemos

$$\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n^\epsilon} \right). \quad (5.58)$$

Se comutarmos a soma com o limite no membro esquerdo iremos obter

$$\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \left(1 + 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \zeta(\epsilon) \right) = 0. \quad (5.59)$$

A operação de comutar o limite com a soma não possui rigor matemático, pois a soma dos limites não converge, e será vista como uma prescrição de regularização na qual divergências proporcionais ao volume do espaço-tempo serão removidas. Desta forma

Figura 5.3: Contorno de integração no plano complexo.

obtemos para J_0

$$J_0 = 0. \quad (5.60)$$

Vamos agora calcular a integral

$$J_1 = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} T \sum_n \left(\frac{p_0^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \right). \quad (5.61)$$

O primeiro passo consiste em usar (2.147) para transformar a soma em uma integral no plano complexo. Fazendo isto, escrevemos a parte de temperatura finita da integral (5.61) como

$$J_1 = \frac{2}{2\pi i} \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \left(\frac{p_0^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \right) n_B(p_0) + \dots, \quad (5.62)$$

onde $\dots$ representa os termos de temperatura nula. Considerando o contorno de integração da figura 5.3, vemos que a integral (5.62) pode feita no o circuito $C = C_1 \cup C_2$ já que a integral C_2 tende a zero quando o raio do semicírculo C_2 tende ao infinito. Desta forma podemos usar o teorema do resíduo para calcular a integral em p_0 de (5.62), obtendo

$$J_1 = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} |\vec{p}| n_B(|\vec{p}|). \quad (5.63)$$

Lembrando da expressão (2.166) para o elemento de volume esfericamente simétrico em n dimensões obtemos

$$J_1 = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) (2\pi)^{(d-1)}} \int_0^\infty dp p^{(d-1)} n_B(p). \quad (5.64)$$

Reescrevendo a distribuição de Bose-Einstein como

$$n_B(p) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta p}, \quad (5.65)$$

e usando a equação (2.171) obtemos a expressão para J_1 em termos da função ζ de Riemann

$$J_1 = \frac{(d-1)!T^d\zeta(d)}{2^{(d-2)}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\pi^{\frac{d-1}{2}}}. \quad (5.66)$$

Agora vamos calcular a parte de temperatura finita de J_2

$$J_2 = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} T \sum_n \left(\frac{p_0^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \right)^2, \quad (5.67)$$

onde omitimos os termos de temperatura zero. Primeiramente vamos usar (2.147) com o intuito de escrever a parte de temperatura finita de J_2 como uma integral no plano complexo:

$$J_2 = \frac{2}{2\pi i} \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \left(\frac{p_0^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \right)^2 n_B(p_0) + \dots \quad (5.68)$$

Aqui também podemos estender a integral em p_0 para o circuito C da figura 5.3 e usar o teorema do resíduo para calcular a integral em p_0 , lembrando que agora trata-se de um pólo duplo. Fazendo isto obtemos

$$\begin{aligned} J_2 &= 2 \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}|} \frac{d}{dp_0} \left[\left(\frac{p_0^2}{p_0^2 - |\vec{p}|^2} \right)^2 (p_0 - |\vec{p}|)^2 n_B(p_0) \right] \\ &= 2 \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \left[\left(\frac{4|\vec{p}|^3}{(2|\vec{p}|)^2} - \frac{2|\vec{p}|^4}{(2|\vec{p}|)^3} \right) n_B(|\vec{p}|) + \frac{|\vec{p}|^4}{(2|\vec{p}|)^2} \frac{d}{dp} n_B(|\vec{p}|) \right]. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Usando a expressão para o elemento de volume (2.166) e fazendo uma integração por partes no termo que possui a derivada da distribuição de Bose-Einstein, obtemos

$$J_2 = \frac{3-d}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\pi^{\frac{d-1}{2}}2^{d-1}} \int_0^\infty dp p^{d-1} n_B(p). \quad (5.70)$$

Esta integral resultante pode ser resolvida em termos da função ζ de Riemann, conforme feito anteriormente, de forma que a integral J_2 pode ser escrita como

$$J_2 = \frac{(3-d)(d-1)!T^d\zeta(d)}{2^{d-1}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\pi^{\frac{d-1}{2}}}, \quad (5.71)$$

e então podemos escrever J_2 em termos da expressão (5.66) para J_1 como

$$J_2 = \frac{3-d}{2} J_1. \quad (5.72)$$

5.4 O tensor energia momento

Usando as equações (5.5) e (5.10), escrevemos a contribuição térmica a um “loop” para o tensor energia momento como

$$T_{term.}^{\mu\nu} = -\kappa \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n_p} T \frac{d}{8} \left[2(3-d) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} + (d-5) \eta^{\mu\nu} \right]. \quad (5.73)$$

Primeiramente, vale a pena notar que a integral da segunda parcela do integrando de (5.73) é proporcional a J_0 e, portanto, não contribui. Assim escrevemos $T_{term.}^{\mu\nu}$ como

$$T_{term.}^{\mu\nu} = \kappa \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n_p} T \frac{d(d-3)}{4} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (5.74)$$

Como o momento externo ao diagrama é nulo, a expressão do (5.74) pode depender apenas da quadri-velocidade do banho térmico u . Assim a forma mais geral para $T_{term.}^{\mu\nu}$ é escrita como

$$T_{term.}^{\mu\nu} = a_1 u^\mu u^\nu + a_2 \eta^{\mu\nu}, \quad (5.75)$$

que é equivalente a

$$\kappa \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n_p} T \frac{d(d-3)}{4} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} = a_1 u^\mu u^\nu + a_2 \eta^{\mu\nu}. \quad (5.76)$$

Multiplicando (5.76) membro a membro por $\eta_{\mu\nu}$ lembrando da expressão (5.60) obtemos

$$a_1 + 4a_2 = 0, \quad (5.77)$$

e contraindo (5.76) com $u_\mu u_\nu$ e usando (5.66) teremos outra equação para a_1 e a_2 como

$$a_1 + a_2 = \kappa \frac{d(d-3)}{4} J_1, \quad (5.78)$$

e resolvendo o sistema obtemos

$$\begin{aligned} a_1 &= \kappa \frac{d(d-3)}{3} J_1 = \frac{\kappa}{3} \frac{d!(d-3)T^d \zeta(d)}{2^{(d-2)} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \pi^{\frac{d-1}{2}}} \\ a_2 &= -\kappa \frac{d(d-3)}{12} J_1 = -\frac{\kappa}{3} \frac{d!(d-3)T^d \zeta(d)}{2^d \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \pi^{\frac{d-1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

5.5 A auto energia

Como o único vetor especial é a quadrivelocidade do banho térmico, por invariância de Lorentz e pela simetria da auto energia vemos que ela será escrita como

$$\Pi_0^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sum_{i=1}^5 \tilde{A}^i T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(u). \quad (5.80)$$

Lembrando da expressão para a auto energia (5.12)

$$\Pi_0^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{i=1}^5 \tilde{C}^i T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(p), \quad (5.81)$$

podemos escrever um sistema de equações para as componentes $\tilde{A}^i$ da auto energia:

$$\sum_{i=1}^5 \tilde{A}^i T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(u) T_{\mu\nu,\alpha\beta}^l(u) = \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} T \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{i=1}^5 \tilde{C}^i T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) T_{\mu\nu,\alpha\beta}^l(u), \quad (5.82)$$

onde todas as integrais que aparecem no lado direito de (5.82) são J_0 , J_1 e J_2 . Substituindo os seus respectivos valores (5.60), (5.66) e (5.71) e resolvendo o sistema linear resultante em (5.82) encontramos as componentes A_i da auto energia $\Pi^{\mu\nu,\alpha\beta}$ na base $T_{\mu\nu,\alpha\beta}^l(u)$ em termos de J_1 como

$$\begin{aligned} A_1 &= \kappa^2 \frac{d(d-3)}{8(d-1)} J_1 = \kappa^2 \frac{d!(d-3)T^d\zeta(d)}{2^{(d+1)}(d-1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\pi^{\frac{d-1}{2}}} \\ A_2 &= -\kappa^2 \frac{d(d-3)}{8(d-1)} J_1 = -\kappa^2 \frac{d!(d-3)T^d\zeta(d)}{2^{(d+1)}(d-1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\pi^{\frac{d-1}{2}}} \\ A_3 &= 0 \\ A_4 &= \kappa^2 \frac{d^2(d-3)}{8(d-1)} J_1 = \kappa^2 \frac{d d!(d-3)T^d\zeta(d)}{2^{(d+1)}(d-1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\pi^{\frac{d-1}{2}}} \\ A_5 &= -\kappa^2 \frac{d^2(d+2)(d-3)}{8(d-1)} J_1 = -\kappa^2 \frac{d(d+2)d!(d-3)T^d\zeta(d)}{2^{(d+1)}(d-1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\pi^{\frac{d-1}{2}}} \end{aligned} \quad (5.83)$$

5.6 A contribuição a dois “loops” para a pressão

A contribuição a dois “loops” para a pressão foi calculada no contexto do calibre de deDonder, que é obtido fazendo $g_1 = g_2 = -1/2$. Neste contexto, a contribuição do setor θ se anula, juntamente com a modificação do setor de Einstein-Hilbert devido a transformação (4.76). A contribuição dos dois fantasmas fermiônicos ficam idênticas e podem ser escritas como uma só contribuição. Neste contexto, apenas três diagra-

Figura 5.4: Contribuição para a pressão a dois “loops”

Figura 5.5: Contribuições mal definidas com propagador de momento nulo.

mas irão contribuir, sendo dois deles puramente de grávitons e um envolvendo fantasma. Estas contribuições estão representadas na figura 5.4. Usando as regras de Feynman do capítulo anterior no limite $g_1 = g_2 = -1/2$ podemos fazer este cálculos no calibre de deDonder. Calculamos diretamente a expressão de cada um dos diagramas expostos na figura 5.4. Entretanto, constatamos que a soma destas contribuições não possui um caráter independente de calibre.

De fato, o cálculo explícito das contribuições mostradas na figura 5.4 resultou (após algumas transformações nas variáveis p e q) em

$$C(G T^2)(\alpha - 1) \sum_{n_k} \sum_{n_p} \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{(p \cdot q)^2}{p^4 q^2}, \quad (5.84)$$

onde C depende da dimensão do espaço-tempo e α é o parâmetro de calibre. É interessante observar que o diagrama com “loop” de fantasma não contribuiu. Além disso, os termos quadráticos e cúbicos em α também se anulam ao nível do integrando.

Embora não tenhamos calculado a integral em (5.84) explicitamente, sabemos que o resultado não pode ser nulo tendo em vista a forma do integrando. Somente no calibre de deDonder ($\alpha = 1$), o resultado se anula identicamente.

A razão para esta dependência de calibre não é compreendida por nós até agora. Talvez esta dependência de calibre desapareça se conseguirmos computar diagramas mal definidos, mostrados na figura 5.5, diagramas estes que possuem propagadores com momento nulo. Este tópico certamente será alvo de um estudo futuro.

5.7 A base transversal de traço nulo

No capítulo 3, no contexto do campo escalar, vimos que a parte dominante no infravermelho da pressão é dada pelos diagramas anelares. Verificamos que a parte divergente no infravermelho dos diagramas anelares é obtida da parte estática do “loop” central (o modo estático é o modo de frequência de Matsubara nula). Na gravitação o cenário é semelhante. Escrevendo o propagador do gráviton no calibre TT ($\alpha \rightarrow 0$) como

$$\tilde{D}_0^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{k^2} \left(-\frac{1}{2} P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} - \frac{1}{2} P^{\nu\alpha} P^{\mu\beta} + \frac{1}{d-1} P^{\mu\nu} P^{\alpha\beta} \right), \quad (5.85)$$

com

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad (5.86)$$

A cada inserção do propagador o modo estático do diagrama anelar se tornará mais divergente no infravermelho. O modo estático pode ser obtido (5.85) se usarmos as prescrições $k^0 = 0$ e $k^2 = -|\vec{k}|^2$.

Vamos introduzir uma nova base para exprimir a auto energia estática nesta base. A nova base pode ser escrita como

$$\begin{aligned} T_A^{\mu\nu\lambda\sigma}(u, k) &= \frac{1}{2} \left(\bar{\eta}^{\mu\lambda} \bar{\eta}^{\nu\sigma} + \bar{\eta}^{\nu\lambda} \bar{\eta}^{\mu\sigma} - \frac{2}{d-2} \bar{\eta}^{\mu\nu} \bar{\eta}^{\lambda\sigma} \right) \\ T_B^{\mu\nu\lambda\sigma}(u, k) &= \frac{1}{2} P^{\mu\lambda} P^{\nu\sigma} + \frac{1}{2} P^{\nu\lambda} P^{\mu\sigma} - \frac{1}{d-1} P^{\mu\nu} P^{\lambda\sigma} - T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} - T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \\ T_C^{\mu\nu\lambda\sigma}(u, k) &= \frac{1}{(d-1)(d-2)} \left((d-1) u^\mu u^\nu + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - \eta^{\mu\nu} \right) \left((d-1) u^\lambda u^\sigma + \frac{k^\lambda k^\sigma}{k^2} - \eta^{\lambda\sigma} \right) \\ T_4^{\mu\nu\lambda\sigma}(u) &= \eta^{\mu\nu} u^\lambda u^\sigma + \eta^{\lambda\sigma} u^\mu u^\nu, \end{aligned} \quad (5.87)$$

onde

$$\bar{\eta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \quad (5.88)$$

Como queremos escrever a auto energia estática em termos desta nova base, está subentendido que nas expressões (5.87) e (5.88) estamos considerando o referencial de repouso de banho térmico:

$$k^0 = 0, \quad k^2 = -\vec{k}^2 \quad e \quad k^\mu u_\mu = 0, \quad (5.89)$$

bem como no propagador do gráviton (5.85).

Vamos escrever a auto energia estática nessa nova base como

$$\Pi_e^{\mu\nu\alpha\beta} = C_A T_A^{\mu\nu\alpha\beta} + C_B T_B^{\mu\nu\alpha\beta} + C_C T_C^{\mu\nu\alpha\beta} + C_4 T_4^{\mu\nu\alpha\beta} + \dots \quad (5.90)$$

onde “...” representa componentes ortogonais aos tensores $T_A^{\mu\nu\alpha\beta}$, $T_B^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $T_C^{\mu\nu\alpha\beta}$. As constantes na nova base são dadas por:

$$\begin{aligned} C_A &= 2A_1 \\ C_B &= 2A_1 \\ C_C &= \left(2 - \frac{d(d+2)(d-2)}{d-1}\right) A_1 \\ C_4 &= \left(d - \frac{d(d+2)}{d-1}\right) A_1, \end{aligned} \quad (5.91)$$

Onde A_1 é dado em (5.83).

A base (5.87) possui algumas propriedades interessantes. Primeiramente, os tensores T_A , T_B e T_C são transversos e de traço nulo, ou seja

$$T_I^{\mu\nu\lambda\sigma} k_\sigma = 0 \text{ e } T_I^I{}_{\mu\nu\lambda\sigma} \eta_{\lambda\sigma} = 0 \quad (I = A, B, C). \quad (5.92)$$

Além disso, T_A , T_B e T_C possuem as propriedades de idempotência e ortogonalidade entre si

$$T_I^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta\lambda\sigma}^{I'} = \delta_{I,I'} T_I^{\mu\nu}{}_{\lambda\sigma} \quad (I', I = A, B, C), \quad (5.93)$$

e possuem a norma dada por

$$\begin{aligned} T_A^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu\alpha\beta}^A &= \frac{d(d-3)}{2} \\ T_B^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu\alpha\beta}^B &= d-2 \\ T_C^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu\alpha\beta}^C &= 1. \end{aligned} \quad (5.94)$$

O tensores T_A e T_B possuem ainda relações de ortogonalidade extras como

$$T_A^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha = 0 \text{ e } T_B^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 0. \quad (5.95)$$

Vale a pena notar que (5.92) implica em

$$T_4^{\mu\nu\alpha\beta}(u) T_{\mu\nu\alpha\beta}^I = 0 \quad (I = A, B, C). \quad (5.96)$$

5.8 A soma dos diagramas anelares

Iremos agora calcular a parte mais divergente dos diagramas anelares que consiste do modo zero da soma de Matsubara do “loop” central. Para tomar o modo zero no “loop”

Figura 5.6: Soma dos diagramas anelares

central, precisamos considerar a parte estática de cada auto energia inserida no “loop” da figura 5.6.

Antes de calcular as contribuições para os diagramas anelares, é interessante notar que usando as expressões da auto energia estática (5.90) e do propagador (5.85) e as propriedades de idempotência (5.93), a norma (5.94) e o traço nulo (5.92) de T_A , T_B e T_C podemos escrever

$$D_0^{\mu\nu\alpha_1\beta_1}(k)\Pi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}^e D_0^{\alpha_2\beta_2\lambda\sigma}(k) = \frac{1}{k^4} \left(C^A T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} + C^B T_B^{\mu\nu\lambda\sigma} + C^C T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \right) \quad (5.97)$$

Assim, tendo em vista as propriedades (5.92), (5.93) e (5.94), dos tensores T_A , T_B e T_C e a expressão para T_4 (5.87), podemos escrever o integrando da contribuição a três “loops” (duas inserções da auto energia) para os diagramas anelares como

$$\begin{aligned} D_0^{\mu\nu\alpha_1\beta_1}(k)\Pi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}^e D_0^{\alpha_2\beta_2\lambda\sigma}(k)\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^e &= \frac{1}{k^4} \left(C^A T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} + C^B T_B^{\mu\nu\lambda\sigma} + C^C T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \right) \\ &\times \left(C^A T_{\mu\nu\lambda\sigma}^A + C^B T_{\mu\nu\lambda\sigma}^B + C^C T_{\mu\nu\lambda\sigma}^C + C^4 T_{\mu\nu\lambda\sigma}^4 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{k^4} \left(\frac{d(d-3)}{2} C_A^2 + (d-2)C_B^2 + C_C^2 \right), \end{aligned} \quad (5.98)$$

Onde “...” representam termos ortogonais a T_A , T_B e T_C .

Agora vamos calcular a contribuição a quatro “loops” para os diagramas anelares, primeiramente notando que

$$\begin{aligned} &D_0^{\mu\nu\alpha_1\beta_1}(k)\Pi_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\psi_1}^e D_0^{\gamma_1\psi_1\alpha_2\beta_2}(k)\Pi_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\psi_2}^e D_0^{\gamma_2\psi_2\lambda\sigma}(k) \\ &= \frac{1}{k^6} \left(C^A T_A^{\mu\nu\alpha_2\beta_2} + C^B T_B^{\mu\nu\alpha_2\beta_2} + C^C T_C^{\mu\nu\alpha_2\beta_2} \right) \Pi_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\psi_2}^e \left(T_A^{\gamma_2\psi_2\lambda\sigma} + T_B^{\gamma_2\psi_2\lambda\sigma} + T_C^{\gamma_2\psi_2\lambda\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{k^6} \left(C_A^2 T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_B^2 T_B^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_C^2 T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \right), \end{aligned} \quad (5.99)$$

onde usamos a equação (5.97) e a propriedade (5.92). De forma análogo a (5.98) podemos

calcular a contribuição a quatro “loops” para os diagramas anelares como

$$\begin{aligned} & D_0^{\mu\nu\alpha_1\beta_1}(k)\Pi_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\psi_1}^e D_0^{\gamma_1\psi_1\alpha_2\beta_2}(k)\Pi_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\psi_2}^e D_0^{\gamma_2\psi_2\lambda\sigma}(k)\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^e \\ &= -\frac{1}{K^6} \left(\frac{d(d-3)}{2} C_A^3 + (d-2)C_B^3 + C_C^3 \right). \end{aligned} \quad (5.100)$$

Agora estamos prontos para calcular a expressão para um diagrama anelar geral de ordem $n+1$ “loops”, isto é, que contem n inserções da auto energia. Com este intuito, vamos generalizar as expressões (5.97) e (5.99) para ordem Π_e^n . Podemos fazer isso de forma indutiva, pois supondo que para ordem Π^n valha a seguinte generalização de (5.97):

$$\begin{aligned} & D_0^{\mu\nu\alpha_1\beta_1}(k)\Pi_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\psi_1}^e D_0^{\gamma_1\psi_1\alpha_2\beta_2}(k)\Pi_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\psi_2}^e \times \dots \times \Pi_{\alpha_n\beta_n\gamma_n\psi_n}^e D_0^{\gamma_n\psi_n\lambda\sigma}(k) \\ &= \frac{(-1)^n}{k^{2n}} \left(C_A^n T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_B^n T_B^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_C^n T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \right) \end{aligned} \quad (5.101)$$

então, multiplicando por um fator $D_o\Pi_e$ membro a membro, implica que para ordem ordem $n+1$ em Π_e valha

$$\begin{aligned} & D_0^{\mu\nu\alpha_1\beta_1}(k)\Pi_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\psi_1}^e D_0^{\gamma_1\psi_1\alpha_2\beta_2}(k)\Pi_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\psi_2}^e \times \dots \times \Pi_{\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\gamma_{n+1}\psi_{n+1}}^e D_0^{\gamma_{n+1}\psi_{n+1}\lambda\sigma}(k) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{k^{2(n+1)}} \left(C_A^{n+1} T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_B^{n+1} T_B^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_C^{n+1} T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \right) \\ & \quad \times \Pi_{\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\gamma_{n+1}\psi_{n+1}}^e \left(T_A^{\gamma_{n+1}\psi_{n+1}\lambda\sigma} + T_B^{\gamma_{n+1}\psi_{n+1}\lambda\sigma} + T_C^{\gamma_{n+1}\psi_{n+1}\lambda\sigma} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{k^{2(n+1)}} \left(C_A^{n+1} T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_B^{n+1} T_B^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_C^{n+1} T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Logo a expressão (5.101) está provada indutivamente. Assim podemos calcular a expressão a $n+1$ “loops” para os diagramas anelares como

$$\begin{aligned} & D_0^{\mu\nu\alpha_1\beta_1}(k)\Pi_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\psi_1}^e D_0^{\gamma_1\psi_1\alpha_2\beta_2}(k)\Pi_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\psi_2}^e \times \dots \times \Pi_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}\gamma_{n-1}\psi_{n-1}}^e D_0^{\gamma_{n-1}\psi_{n-1}\lambda\sigma}(k)\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^e \\ &= \frac{(-1)^n}{k^{2n}} \left(C_A^{n-1} T_A^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_B^{n-1} T_B^{\mu\nu\lambda\sigma} + C_C^{n-1} T_C^{\mu\nu\lambda\sigma} \right) \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^e \end{aligned} \quad (5.103)$$

$$= \frac{(-1)^n}{K^{2n}} \left(\frac{d(d-3)}{2} C_A^n + (d-2)C_B^n + C_C^n \right). \quad (5.104)$$

O fator combinatorial da contribuição com n inserções da auto energia pode ser contado da seguinte forma: temos um fator $(n-1)!/2$ da ordenação dos n fatores de Π_e em um circulo e um fator 2^n de permutar as linhas externas a cada Π . Além disso, temos um fator $1/n!$ da indistinguibilidade dos fatores Π_e e $1/2^n$ da simetria dos mesmos, fornecendo um combinatorial

$$\frac{1}{2n}. \quad (5.105)$$

Agora podemos calcular a soma dos integrandos dos diagramas anelares da figura

como

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{K^{2n}} \left(\frac{d(d-3)}{2} \frac{C_A^n}{2n} + (d-2) \frac{C_B^n}{2n} + \frac{C_C^n}{2n} \right) \\
&= -\frac{d(d-3)}{4} \left[\log \left(1 + \frac{C_A}{k^2} \right) - \frac{C_A}{k^2} \right] - \frac{d-2}{2} \left[\log \left(1 + \frac{C_B}{k^2} \right) - \frac{C_B}{k^2} \right] \\
&- \frac{1}{2} \left[\log \left(1 + \frac{C_C}{k^2} \right) - \frac{C_C}{k^2} \right].
\end{aligned} \tag{5.106}$$

Assim a soma das partes mais divergentes no infravermelho dos diagramas anelares é dada por

$$\begin{aligned}
\log Z_{\text{anéis}} &= -\frac{V}{2} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left\{ \frac{d(d-3)}{2} \left[\log \left(1 + \frac{C_A}{k^2} \right) - \frac{C_A}{k^2} \right] \right. \\
&+ (d-2) \left[\log \left(1 + \frac{C_B}{k^2} \right) - \frac{C_B}{k^2} \right] + \left. \left[\log \left(1 + \frac{C_C}{k^2} \right) - \frac{C_C}{k^2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Em quatro dimensões as integrais podem ser calculadas da mesma forma que (3.55), obtendo

$$\log Z_{\text{anéis}} = \frac{V}{12\pi^2} \left[2(C_A)^{\frac{3}{2}} + 2(C_B)^{\frac{3}{2}} + (C_C)^{\frac{3}{2}} \right], \tag{5.108}$$

e as constantes (5.91) em quatro dimensões são dadas por

$$\begin{aligned}
C_A &= G \frac{16\pi^3 T^4}{45} \\
C_B &= G \frac{16\pi^3 T^4}{45} \\
C_C &= -G \frac{112\pi^3 T^4}{45}.
\end{aligned}$$

Desta forma obtemos uma contribuição não analítica na constante de Newton G , pois esta é uma resoma dos diagramas anelares para pressão, constituindo um contribuição não perturbática. Note também que $\log Z_{\text{anéis}}$ apresenta uma parte imaginária, implicando numa parte imaginária para energia livre. Isto demonstra uma instabilidade da iteração gravitacional, conforme estudado em [GPY82].

6 *Discussão dos resultados e considerações finais*

Neste trabalho, estudamos o formalismo do tempo imaginário para campos quânticos. No contexto do campo escalar neutro, trabalhamos com os conceitos básicos de teoria quântica de campos à temperatura finita e calculamos contribuições à temperatura finita para a pressão e para a função de dois pontos. Somamos todas divergências infravermelhas da pressão e obtivemos uma contribuição finita e não analítica na constante de acoplamento λ , bem conhecida na literatura.

Em seguida, estudamos a gravitação no contexto da aproximação de campo fraco. Empregamos um formalismo de fixação de calibre co-variante que generaliza o formalismo de Faddeev-Popov. Mostramos que neste calibre geral é possível obter uma escolha de calibre em que o propagador do gráviton seja TT (transverso e de traço nulo).

Estabelecemos explicitamente a consistência deste formalismo de fixação de calibre, por meio do cálculo de contribuições térmicas para quantidades físicas tais como o tensor energia momento e a auto energia estática.

Utilizamos as propriedades do propagador TT para calcular a parte divergente infravermelha da pressão, que é dada pela soma dos diagramas anelares. Obtivemos um valor finito para a soma dos diagramas anelares, mas que é não analítico na constante de Newton.

É importante ressaltar que a forma do propagador TT foi crucial para se obter uma expressão fechada para os diagramas anelares, análoga ao resultado da teoria escalar. Esses, por sua vez, representam uma contribuição térmica dominante no limite de altas temperaturas.

No entanto, diagramas anelares não incluem a contribuição de dois “loops” (vimos que a soma se inicia com o termo, dominante no infravermelho, a três “loops”). O cálculo desta contribuição de dois “loops” revelou um problema inesperado. De fato, vimos que esta

contribuição é dependente de calibre. Isso é paradoxal, uma vez que contribuições para um observável físico deveriam ter o mesmo valor em qualquer calibre. Esse interessante problema mostra que há algo a ser melhor entendido com relação ao significado físico desta contribuição de dois “loops”. No final da seção 5.6 indicamos uma possibilidade de como tratar o problema. Mas é possível que seja necessário levar em conta outros fatores, tais como a introdução de uma métrica de fundo não plana.

APÊNDICE A – Cálculo dos jacobianos

Na seção (4.4) realizamos duas transformações no campo $h^{\mu\nu}$ tais como (4.73) e (4.76). A primeira destas transformações é uma transformação de calibre e pode ser escrita como

$$\vec{h} \rightarrow \vec{h} - A(\vec{h})\vec{\theta}, \quad (\text{A.1})$$

ou, explicitando os índices de Lorentz, como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - A_{\mu\nu,\lambda}(h)\theta^\lambda. \quad (\text{A.2})$$

Na seção 4.3, vimos que uma transformação de calibre como (A.2) pode ser induzida por uma transformação geral de coordenadas infinitesimal como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \theta^\mu(x). \quad (\text{A.3})$$

Calculando a derivada escrevemos:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\nu \theta^\mu. \quad (\text{A.4})$$

A métrica possui um caráter tensorial, e assim, se transforma por (A.3) como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}(x'). \quad (\text{A.5})$$

Em termos do campo h esta expressão pode ser escrita como

$$\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} [\eta_{\mu\nu} + \kappa h'_{\alpha\beta}(x')]. \quad (\text{A.6})$$

Lembrando que

$$\frac{\delta h_{\mu\nu}(x_1)}{\delta h_{\alpha\beta}(x_2)} = I_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta^{(d)}(x_1 - x_2), \quad (\text{A.7})$$

podemos calcular a derivada funcional de (A.6), obtendo

$$\frac{\delta h_{\mu\nu}(x)}{\delta h'_{\alpha\beta}(x')} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} I_{\alpha\beta}^{\gamma\lambda} \delta^{(d)}(0), \quad (\text{A.8})$$

onde $I_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = 1/2 \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + 1/2 \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu$, é a identidade para tensores de quarta ordem simétricos. Usando a expressão (A.4) reescrevemos a derivada funcional (A.8) como

$$\frac{\delta h_{\mu\nu}(x)}{\delta h'_{\alpha\beta}(x')} = \left[I_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \partial_\nu \theta^\beta + \delta_\mu^\beta \partial_\nu \theta^\alpha + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \theta^\beta + \delta_\nu^\beta \partial_\mu \theta^\alpha) \right] \delta^{(d)}(0) + \dots, \quad (\text{A.9})$$

onde estamos desprezando os termos de ordem superior a 1 em θ .

Vamos agora expandir o determinante do um operador genérico $1 + M$ em torno da identidade partindo da igualdade:

$$\det(1 + M) = \exp\{\log[\det(1 + M)]\}. \quad (\text{A.10})$$

Podemos argumentar que o logaritmo do determinante de uma matriz é igual ao traço do logaritmo da mesma, e assim temos que

$$\det(1 + M) = \exp\{Tr[\log(1 + M)]\}. \quad (\text{A.11})$$

Em primeira ordem, a função $\log(1 + z)$ pode ser aproximada por z . Logo, em primeira ordem em M , obtemos

$$\det(1 + M) = \exp[Tr(M)]. \quad (\text{A.12})$$

Podemos então tomar o determinante em (A.9) obtendo:

$$\det \left[\frac{\delta h_{\mu\nu}(x)}{\delta h'_{\alpha\beta}(x')} \right] = \det \left\{ \left[I_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \partial_\nu \theta^\beta + \delta_\mu^\beta \partial_\nu \theta^\alpha + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \theta^\beta + \delta_\nu^\beta \partial_\mu \theta^\alpha) \right] \delta^{(d)}(0) \right\}, \quad (\text{A.13})$$

em primeira ordem em θ . Assim, aplicando a expressão (A.12) obtemos:

$$\det \left[\frac{\delta h_{\mu\nu}(x)}{\delta h'_{\alpha\beta}(x')} \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} Tr \left[\delta^{(d)}(0) (\delta_\mu^\alpha \partial_\nu \theta^\beta + \delta_\mu^\beta \partial_\nu \theta^\alpha + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \theta^\beta + \delta_\nu^\beta \partial_\mu \theta^\alpha) \right] \right\}, \quad (\text{A.14})$$

tomando o traço nos índices de Lorentz e nas coordenadas vemos que

$$\det \left[\frac{\delta h_{\mu\nu}(x)}{\delta h'_{\alpha\beta}(x')} \right] = \exp \left[-8 \delta^{(d)}(0) \int d^d x \partial_\gamma \theta^\gamma \right]. \quad (\text{A.15})$$

Se impusermos condições assintóticas adequadas para θ vemos a integral

$$\int d^d x \partial_\gamma \theta^\gamma \quad (\text{A.16})$$

se anula. Entretanto, esta integral está multiplicada por uma divergência tipo $\delta^{(d)}(0)$ de forma que a expressão (A.15) possui uma indeterminação. Para tratar esta indeter-

minação, podemos introduzir um corte nos momentos Λ_{corte} , de forma que a integral

$$\int d^d k = \delta^{(d)}(0) = \Lambda_{corte}^d, \quad (\text{A.17})$$

se torne finita. Fazendo isso, a indeterminação na expressão (A.15) é removida e o argumento da exponencial em (A.15) se anula.

Assim, a expressão para o jacobiano (A.15) se torna:

$$J = \det \left[\frac{\delta h_{\mu\nu}(x)}{\delta h'_{\alpha\beta}(x')} \right] = 1. \quad (\text{A.18})$$

Desta forma, vemos que o determinante associado a uma transformação de calibre é 1.

Agora vamos calcular o jacobiano da transformação (4.76). A mudança de variáveis (4.76) não é uma transformação de calibre, de forma que não vale a argumentação acima. Assim, somos forçados a fazer cálculo explícito do jacobiano. Primeiramente vamos escrever a transformação (4.76) como:

$$\vec{h} \rightarrow \vec{h} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1} F^T N G A(\vec{h}) \vec{\theta}. \quad (\text{A.19})$$

Explicitando os índices de Lorentz, obtemos

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1}_{\mu\nu}{}^{\lambda\gamma} F_{\chi,\lambda\gamma} N^{\chi\xi} G_{\xi,\rho\tau} A^{\rho\tau,\sigma}(h) \theta_\sigma. \quad (\text{A.20})$$

Lembrando da equação (4.94) temos que a forma explícita para A é dada por

$$A_{\mu\nu,\lambda}(h) = \eta_{\mu\lambda} \partial_\nu + \eta_{\nu\lambda} \partial_\mu + h_{\mu\lambda} \partial_\nu + h_{\nu\lambda} \partial_\mu + (\partial_\lambda h_{\mu\nu}). \quad (\text{A.21})$$

Assim podemos escrever:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1}_{\mu\nu}{}^{\lambda\gamma} F_{\chi,\lambda\gamma} N^{\chi\xi} G_{\xi,\rho\tau} [h_{\rho\sigma} \partial_\tau + h_{\tau\sigma} \partial_\rho + (\partial_\sigma h_{\rho\tau})] \theta_\sigma, \quad (\text{A.22})$$

onde foram omitidos os termo independentes do campo h . Calculando a derivada funcional de (A.22) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta h_{\mu_1\nu_1}(x_1)}{\delta h'_{\mu_2\nu_2}(x_2)} &= I_{\mu_1\nu_1}^{\mu_2\nu_2} \delta^d(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)^{-1}_{\mu_1\nu_1}{}^{\lambda\gamma} F_{\chi,\lambda\gamma} N^{\chi\xi} G_{\xi,\rho\tau} [I_{\rho\sigma}^{\mu_2\nu_2} \delta^{(d)}(x_1 - x_2) \partial_\tau \\ &\quad + I_{\tau\sigma}^{\mu_2\nu_2} \delta^d(x_1 - x_2) \partial_\rho + I_{\rho\tau}^{\mu_2\nu_2} (\partial_\sigma \delta^d(x_1 - x_2))] \theta_\sigma(x_1), \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

onde toda as derivadas são em relação a x_1 . Tomando o determinante membro a membro

obtemos a expressão para o jacobiano de (A.19) como

$$\det \left\{ \frac{\delta h_{\mu_1 \nu_1}(x_1)}{\delta h'_{\mu_2 \nu_2}(x_2)} \right\} = \det \left\{ I_{\mu_1 \nu_1}^{\mu_2 \nu_2} \delta^d(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} \left(M - F^T \frac{N}{\alpha} G \right)_{\mu_1 \nu_1}^{-1}{}^{\lambda \gamma} F_{\chi, \lambda \gamma} N^{\chi \xi} G_{\xi, \rho \tau} \right. \\ \left. [I_{\rho \sigma}^{\mu_2 \nu_2} \delta^{(d)}(x_1 - x_2) \partial_\tau + I_{\tau \sigma}^{\mu_2 \nu_2} \delta^{(d)}(x_1 - x_2) \partial_\rho + I_{\rho \tau}^{\mu_2 \nu_2} (\partial_\sigma \delta^{(d)}(x_1 - x_2))] \theta_\sigma \right\}.$$

Podemos exponenciar este determinante usando variáveis fermiônicas tal como em [Zee03] obtendo

$$\det \left\{ \frac{\delta h_{\mu_1 \nu_1}(x_1)}{\delta h'_{\mu_2 \nu_2}(x_2)} \right\} = \int d\Upsilon d\bar{\Upsilon} \exp \left[i \int d^d x_1 d^d x_2 \bar{\Upsilon}_{\mu_2 \nu_2}(x_2) \frac{\delta h_{\mu_1 \nu_1}(x_1)}{\delta h'_{\mu_2 \nu_2}(x_2)} \Upsilon^{\mu_1 \nu_1}(x_1) \right]. \quad (\text{A.24})$$

Assim, este jacobiano irá aparecer como um novo termo no lagrangiano total. Termo este que envolve a parte quadrática de um novo campo fantasma que possui estatística fermiônica Υ , além de termos de interação de ordem $\bar{\Upsilon} \Upsilon \theta$. Entretanto, a um “loop”, este termo de interação leva apenas a correções para o propagador do campo θ , de sorte que não contribui para correções da auto energia e da função de um ponto de grávitons a um “loop”, podendo ser desprezado em todo o presente trabalho.

Referências Bibliográficas

- [Ber74] Claude W. Bernard. Feynman rules for gauge theories at finite temperature. *Phys. Rev.*, D9:3312, 1974.
- [BFM07] F. T. Brandt, J. Frenkel, and D. G. C. McKeon. General Covariant Gauge Fixing for Massless Spin-Two Fields. *Phys. Rev.*, D76:105029, 2007.
- [Das93] Ashok Das. *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific, NY, 1993.
- [d'I92] R. d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [FP67] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Phys. Lett.*, B25:29–30, 1967.
- [Gom02] Marcelo Otávio C. Gomes. *Teoria Quântica dos Campos*. Edusp, SP, Brasil, 2002.
- [GPY82] D. J. Gross, M. J. Perry, and L. G. Yaffe. Instability of flat space at finite temperature. *Phys. Rev.*, D25:330–355, 1982.
- [HY92] Alexander Hsieh and Eran Yehudai. Hip: Symbolic high-energy physics calculations. *Comput. Phys.*, 6:253–261, 1992.
- [Kal78] R. E. Kallosh. Modified Feynman Rules in Supergravity. *Nucl. Phys.*, B141:141–152, 1978.
- [Kap89] J. I. Kapusta. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989.
- [Nie78] N. K. Nielsen. Ghost Counting in Supergravity. *Nucl. Phys.*, B140:499, 1978.
- [Reb91] Anton Rebhan. Collective phenomena and instabilities of perturbative quantum gravity at nonzero temperature. *Nucl. Phys.*, B351:706–734, 1991.
- [tH02] G. 't Hooft. Perturbative quantum gravity. 2002. Prepared for International School of Subnuclear Physics: 40th Course: From Quarks and Gluons to Quantum Gravity, Erice, Sicily, Italy, 29 Aug - 7 Sep 2002 (this paper can be downloaded from <http://www.phys.uu.nl/~thooft/lectures/erice02.pdf>).
- [tHV74] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. DIAGRAMMAR. *NATO Adv. Study Inst. Ser. B Phys.*, 4:177–322, 1974.
- [Zee03] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, Princeton, 2003.