UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

**CARACTERIZAÇÃO CLÁSSICA E QUÂNTICA DE UM
OSCILADOR PARAMÉTRICO ÓTICO BOMBEADO EM 780 nm**

Túlio Brito Brasil

Dissertação de mestrado apresentada
ao Instituto de Física para a obtenção
do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martinelli

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Martinelli (IFUSP)
Prof. Dr. Antônio Zelaquett Khoury (UFF)
Prof. Dr. Sebastião José Nascimento de Pádua (UFMG)

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Brasil, Túlio Brito

Caracterização clássica e quântica de um oscilador
paramétrico ótico bombeado em 780 nm. São Paulo, 2015.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Depto. de Física Experimental.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martinelli

Área de Concentração: Ótica Quântica.

Unitermos: 1. Oscilador paramétrico ótico; 2.
Emaranhamento; 3. Compressão de ruído quântico.

USP/IF/SBI-102/2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador Marcelo Martinelli, pelo exemplo de pesquisador e pessoa, sua empolgação é contagiante. Com você aprendi muito, obrigado! Concomitantemente, agradecimentos sinceros ao Paulo Nussenzveig pelos ensinamentos diretos e indiretos.

Agradeço aos professores Antônio Zelaquett Khoury e Sebastião José N. de Pádua pela leitura cuidadosa da dissertação e comentários que tornaram o texto mais claro.

Agradeço aos colegas de laboratório que tornaram o trabalho muito mais divertido: Rayssa Bruzaca, Igor Konieczniak, Klara Theophilo, Paula Meirelles, Renato Domeneguetti, Hans Florez, Luiz Couto, Bárbara Ribeiro, Harold Rojas. Em especial, devo muito a Rayssa, juntos dividimos o estado de origem, laboratório, orientador, experimento, aluguel, problemas diários e muitas risadas.

Agradeço muito aos pós-doutorandos, com os quais tive a oportunidade de aprender: Renné Medeiros, Ashok Kumar e Breno Teixeira. Em especial ao Renné, sua paciência e boa vontade são coisas raras de se encontrar, obrigado pelos ensinamentos e conselhos do click-clack ao forró!

Aos professores do IFUSP que tive a oportunidade de ser aluno ou monitor: A. F. R. de Toledo Piza (Quântica II), Renata Zukanovich Funchal (Quântica I), Josif Frenkel (Eletrodinâmica I), Vito R. Vanin (Tratamento de dados) e Adriano M. Alencar (Monitoria de Ótica). Obrigado por apagar parte da desilusão em relação aos professores, fruto de um passado não tão distante. Com vocês pude reviver o brilho nos olhos ao mais nobre dos trabalhos. Espero um dia ser como vocês.

Aos companheiros de turma que acabaram se tornando bons amigos: Fernando Takeshi, Juan Cervantes, Saeed Ullah. Vocês tornaram a transição para SP um pouco mais fácil.

Agradeço ao Marcos, Clineu e Alex e todo pessoal da oficina mecânica geral. Sempre dispostos a ajudar em qualquer problema técnico, seja adaptar um parafuso ou projetar cavidades de análise.

Agradeço ao pessoal do suporte em eletrônica, Edu Monteiro e Cacá. É sempre bom poder contar com a sua competência e dedicação.

Agradeço as pessoas da secretaria da FEP: Juliane, Luiz e Edi. Sempre dispostos a ajudar nos problemas burocráticos/administrativos ou o que estivesse ao alcance.

Agradeço ao CNPQ pelo suporte financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação, descreveremos as primeiras medidas de ruído quântico em um oscilador paramétrico ótico (OPO) bombeado em 780 nm, construído no nosso laboratório. Esse OPO servirá de fonte de estados não clássicos da luz para interação com átomos de rubídio.

Faremos uma revisão da teoria clássica do OPO: o bombeamento de um cristal não linear inserido dentro de uma cavidade ótica, produzindo dois feixes intensos de luz (sinal e complementar) com cores distintas. Calcularemos as expressões para o limiar de oscilação, potências de saída dos feixes convertidos e compararemos as principais diferenças entre OPOs com cristais do tipo I e tipo II. Analisaremos a descrição quântica do OPO, calcularemos os espectros de ruído para as quadraturas do bombeio refletido e para as quadraturas dos feixes gêmeos. Veremos que o OPO gera feixes com correlações quânticas, como o emaranhamento tripartido, entre os três feixes envolvidos no processo não linear.

O cristal não linear utilizado no nosso experimento é um PPKTP tipo I. Ajustando a temperatura do cristal, podemos gerar feixes próximos da degenerescência $\lambda_s \approx \lambda_c \sim 1560$ nm até uma diferença de comprimentos de onda de $\Delta\lambda \approx 350$ nm.

A compressão de ruído quântico observado na diferença das amplitudes dos feixes sinal e complementar é 44% (-2.5 dB). O próximo passo é a implementação da técnica da rotação da elipse de ruído por cavidades óticas, para medir os ruídos de fase dos três campos. Fazendo a verificação do emaranhamento tripartido e determinando a sua dependência com o ruído de fônons inserido pelo cristal, a caracterização do OPO estará completa.

A caracterização deste OPO é um passo importante nos objetivos do LMCAL, que é realizar a troca de informação entre luz e átomos em uma rede quântica.

ABSTRACT

In this dissertation, we will describe the first measurements of quantum noise in an optical parametric oscillator (OPO) pumped at 780 nm, built at our laboratory. This OPO will be the source of nonclassical states of light to interact with rubidium atoms.

We will review the classical OPO theory: the pumping of a nonlinear crystal inside a cavity producing two bright light beams (signal and idler) with different colors. We will calculate the power threshold, output power of the converted beams and compare the main differences between type-I and type-II OPO. We will analyze the quantum description of the OPO, and calculate the noise spectrum of the reflected pump quadratures and for the twin beams quadratures. We will observe that the OPO generates beams with quantum correlations, for example, the tripartite entanglement among the three fields involved in the nonlinear phenomena.

The nonlinear crystal used in our experiment is a PPKTP type-I. By adjusting the temperature of the crystal, we can generate beams from close to degenerate regime $\lambda_s \approx \lambda_c \sim 1560$ nm to a difference between them of $\Delta\lambda \approx 350$ nm.

The squeezing of quantum noise measured in the amplitude quadratures subtraction for signal and idler is 44% (-2.5 dB). The next step is to implement the method of ellipse noise rotation by an optical cavity, to be able to measure phase quadratures of the three different fields. By verifying the tripartite entanglement and determining the phonon noise due to the crystal, our source characterization will be complete.

The characterization of this OPO is an important step in LMCAL goals, which is to realize exchange of information between light and atoms in a quantum network.

Dedicado aos meus avós

Navegar é Preciso

Navegadores antigos tinham uma frase gloriosa:

“Navegar é preciso; viver não é preciso”.

Quero para mim o espírito [d]esta frase,
transformada a forma para a casar como eu sou:

Viver não é necessário; o que é necessário é criar.
Não conto gozar a minha vida; nem em gozá-la penso.
Só quero torná-la grande,
ainda que para isso tenha de ser o meu corpo e a (minha alma) a lenha desse fogo.

Só quero torná-la de toda a humanidade;
ainda que para isso tenha de a perder como minha.
Cada vez mais assim penso.

Cada vez mais ponho da essência anímica do meu sangue
o propósito impessoal de engrandecer a pátria e contribuir
para a evolução da humanidade.

É a forma que em mim tomou o misticismo da nossa Raça.

(Fernando Pessoa)

SUMÁRIO

1	Introdução	3
I	Ferramental Teórico	5
2	Conceitos Básicos	7
2.1	Quantização do Campo Livre	7
2.1.1	Teoria Clássica	7
2.1.2	Quantização Canônica	10
2.2	Estados de Fock	11
2.3	Quadraturas do Campo	12
2.4	Estados Coerentes	13
2.5	Estados Comprimidos	15
2.6	Fotodeteção e Ruído de Quadratura	16
2.7	Deteção Homodina e Calibração do Shot Noise	18
2.8	Função de Wigner	20
2.9	Emaranhamento	22
2.9.1	Caso Bipartido	23
2.9.2	Caso Tripartido	23
2.10	Estados Gaussianos	24
2.11	Sistemas Quânticos Abertos	25
2.11.1	Equação Mestra	25
2.12	Representação de Wigner da Equação Mestra	26
3	Oscilador Paramétrico Ótico Clássico	29
3.1	Processo de Mistura de Três Ondas	29
3.2	Introdução ao Casamento de Fase	31
3.3	Propagação em Cristais	33
3.4	Tipos de Casamento de Fase	35
3.5	Quase Casamento de Fase	36
3.6	Cavidades Óticas	38
3.7	Descrição Clássica do OPO	41
3.7.1	Equações Básicas	41
3.7.2	Condições de Oscilação	43
3.7.3	Potência de Saída dos Feixes Gêmeos	43
3.7.4	Modos Longitudinais: OPO Tipo II	46
3.7.5	Modos Longitudinais: OPO Tipo I	50
3.7.6	Cavidade Linear	52

4	Propriedades Quânticas do OPO	55
4.1	Descrição Quântica do OPO	55
4.1.1	Flutuações Quânticas	58
4.1.2	Espectro de Ruído da Subtração de Quadraturas	59
4.1.3	Espectros de Ruído em Dessintonias Nulas	60
4.2	Emaranhamento Bipartido entre os Feixes Gêmeos	61
4.3	Emaranhamento Tripartido	63
4.4	Ruído de Fônons	63
II	Resultados Experimentais	65
5	Aparato Experimental e Ruído Quântico	67
5.1	Laser de Ti:Safira	67
5.2	Elementos do OPO	68
5.3	Oscilação e Saída do OPO	70
5.4	Descrição do Experimento	71
5.4.1	Travamento da Cavity do OPO	72
5.4.2	Sistema de Detecção	73
5.5	Compressão de Ruído	74
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	77

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A área de informação quântica vem ganhando grande atenção nas últimas décadas [Nielsen e Chuang, 2010], parte desse fenômeno se deve a promessa da construção de um computador quântico onde a transmissão e o processamento de informação é feita por sistemas que apresentam certas propriedades intrinsecamente quânticas [Ladd et al., 2010], que em princípio permitem realizar o processamento de informação muitas vezes mais rápido do que os computadores atuais.

O emaranhamento quântico é peça fundamental na teoria de informação quântica [Einstein et al., 1935, Horodecki et al., 2009]. Duas partículas quânticas emaranhadas, mesmo espacialmente separadas por uma distância arbitrariamente grande continuam a formar uma única entidade e nenhum modelo clássico local é capaz de reproduzir as correlações entre essas partículas. De fato, essas correlações são muito mais fortes que qualquer correlação clássica, o que estabelece um grande potencial de aplicação do emaranhamento à teoria de informação. Afinal, processamento, armazenamento e transmissão de informação requerem o estabelecimento e uso de correlações.

Enquanto sistemas de processamento de informação quântica devem manipular bits quânticos de informação (qubits), a comunicação, ou seja a transferência de informação entre esses sistemas, naturalmente nos leva ao fóton como melhor candidato para portador dessa informação [Northup e Blatt, 2014, Kimble, 2008], dada a sua velocidade e baixa interação com o meio de propagação.

O LMCAL tem experiência na geração de feixes de luz emaranhados usando um oscilador paramétrico ótico (OPO). O OPO consiste em um cristal não linear inserido em uma cavidade ótica que funciona baseado no processo de conversão paramétrica descendente. Um fóton do feixe de bombeio (de frequência ω_0) é convertido em dois fótons, chamados sinal (de frequência ω_1) e complementar (frequência ω_2), figura 1.1. Pela conservação da energia, a condição $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ deve ser satisfeita, indicando uma correlação entre as fases e amplitudes dos campos envolvidos nesse processo. Uma das conquistas do grupo foi a primeira medida de emaranhamento entre mais de dois subsistemas produzidos por uma única fonte em um sistema de variáveis contínuas, o emaranhamento tripartido entre os feixes bombeio, sinal e complementar [Villar et al., 2005, Coelho et al., 2009].

Figura 1.1: Esquema básico de um oscilador paramétrico ótico.

Um dos projetos importantes do LMCAL atualmente é a criação de uma interface para troca de informação quântica entre luz e matéria. Para isso, construímos um novo oscilador paramétrico ótico, bombeado por um laser em 780 nm, que também pode interagir com meios

atômicos, no nosso caso, uma armadilha magneto ótica para átomos de rubídio. Para um OPO bombeado em 780 nm, os comprimentos de onda de saída dos feixes sinal e complementar estão próximos de $\lambda \sim 1560$ nm, frequência dentro da banda de telecomunicações, ou seja, região de menor perda em fibras óticas (ver figura 1.2). O conteúdo dessa dissertação consiste na caracterização deste OPO, medindo propriedades clássicas e quânticas desse sistema que futuramente serão importantes na criação de uma interface para troca de informação com sistemas atômicos. Servindo por exemplo, como memórias, armazenando os estados da luz, que podem ser recuperados após a interação. Nesse caso, um dos métodos que pode ser aplicado é a transparência eletromagneticamente induzida, *electromagnetic induced transparency* - EIT [Fleischhauer et al., 2005], onde a luz apresenta propagação lenta [Hau et al., 1999].

Figura 1.2: Componentes da proposta do LMCAL para uma rede quântica. O OPO como fonte de emaranhamento entre três feixes de cores distintas: um feixe interage com átomos de rubídio e os outros podem ser enviados por fibras óticas na região de comprimentos de onda de telecomunicação.

O emaranhamento que estamos interessados em medir no oscilador paramétrico ótico, está entre as quadraturas dos três campos de cores distintas. As quadraturas são observáveis que possuem espectro contínuo de forma semelhante a posição e momento de uma partícula quântica massiva. A técnica padrão para medir as quadraturas faz uso de um feixe coerente intenso, denominado oscilador local, que deve possuir a mesma frequência do feixe do qual se quer efetuar a medida. Tal necessidade de indistinguibilidade, pois se trata de uma técnica interferométrica, torna extremamente trabalhoso ser aplicada ao caso do OPO. Futuramente aplicaremos a técnica de rotação da elipse de ruído por cavidades óticas, que dispensa o uso de um oscilador local, o próprio feixe age como um oscilador local [Galatola et al., 1991, Villar, 2008, Barbosa et al., 2013b].

Nesta dissertação apresentamos a primeira medida ruído puramente quântico no OPO construído no LMCAL para interação com átomos de rubídio. Que consiste na medida direta da flutuação da quadratura subtração das amplitudes dos dois feixes. As correlações de intensidade dos dois feixes de saída, possibilitam romper o limite do ruído quântico padrão, ou shot noise. Evidenciado o processo de compressão de ruído quântico ou “squeezing”.

No capítulo 2 descrevemos os conceitos básicos utilizados da ótica quântica e teoria do emaranhamento, apresentamos brevemente a técnica de detecção homodina que servirá de base para entender as medidas de ruído de quadratura na discussão dos resultados. No capítulo 3, apresentamos as bases em ótica não linear que descrevem o oscilador paramétrico ótico, a teoria do OPO, expressões para o limiar de oscilação, potência de saída, eficiência, separação entre os modos de saída para os cristais tipo I e tipo II. Familiarizados com as ferramentas da teoria quântica da luz e a descrição clássica do OPO no capítulo 4 introduzimos a descrição quântica do OPO e calculamos as principais propriedades puramente quânticas, tais como as previsões de compressão de ruído e emaranhamento entre os feixes. No capítulo 5, fazemos a discussão do aparato experimental utilizado, as propriedades de sintonia do nosso OPO e apresentamos os resultados da compressão de ruído medida.

Parte I

Ferramental Teórico

CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS

*“What I am going to tell you about is what we teach
our physics students in the third or fourth year of graduate school...
It is my task to convince you not to turn away because
you don’t understand it. You see my physics students don’t understand it...
That is because I don’t understand it. Nobody does.”*

(Richard Feynman, QED: The Strange Theory of Light and Matter)

Neste capítulo descrevemos brevemente a quantização do campo eletromagnético, definimos os operadores de quadraturas dos campos, estados coerentes e estados comprimidos que são de fundamental importância na compreensão das propriedades quânticas do oscilador paramétrico ótico. Veremos que as propriedades que estamos interessados em medir, as flutuações de quadraturas de feixes intensos, podem ser acessadas pela técnica de detecção homodina e que em posse da ferramenta experimental de detecção podemos utilizá-la para estudar correlações quânticas (emaranhamento) entre feixes intensos de luz.

2.1 Quantização do Campo Livre

A teoria quântica do campo eletromagnético e sua interação com a matéria teve início com Dirac menos de dois anos depois do surgimento da mecânica quântica matricial de Heisenberg [Dirac, 1927]. De fato, a teoria completa do campo eletromagnético é a eletrodinâmica quântica de Feynman-Schwinger-Tomonaga, onde pela primeira vez foi alcançada a completa concordância entre a relatividade restrita e mecânica quântica, sendo a teoria física mais bem testada até hoje. No campo dos processos não relativísticos um tratamento mais básico é suficiente, é nesse domínio que a ótica quântica surge.

2.1.1 Teoria Clássica

O primeiro passo em direção a uma teoria quântica do campo eletromagnético é expressar a teoria clássica de Maxwell em termos de modos normais. A maneira mais fácil de se fazer isso é escrevendo os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em termos dos potenciais, seguiremos o tratamento baseado nas referências [Gottfried e Yan, 2003, Agarwal, 2012]. A teoria eletromagnética clássica no espaço livre de cargas e correntes é descrita pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.1.1d)$$

É importante notar que ao descrever os campos em termos dos potenciais todas as quantidades físicas devem ser invariantes de calibre, e que além disso devem obedecer também a simetrias de invariância de Lorentz [Jackson, 1999]. Não nos preocuparemos em demonstrar que o

nosso tratamento é compatível com essas duas exigências. Estabelecendo primeiro o calibre de Coulomb, ou calibre da radiação, impomos que $\mathbf{A}$ é livre de divergência

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.1.2)$$

onde $\mathbf{A}$ é o potencial vetor. Desse modo, os campos são determinados a partir de $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.1.3)$$

e apenas o potencial vetor é necessário para caracterizar completamente a radiação no espaço livre. Usando as equações de Maxwell deduzimos que $\mathbf{A}$ satisfaz a equação de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1.4)$$

Qualquer conjunto completo de soluções que satisfaça a equação (2.1.2) pode ser usado para definir um conjunto de modos normais. A escolha apropriada depende das condições de contorno utilizadas. Vamos considerar por questões de simplicidade, condições de contorno periódicas na superfície de um cubo de volume V e lado L . Como estamos lidando com o espaço livre expandiremos o campo em termos de ondas planas, essa escolha deixa o momento linear mais simples de ser tratado.

Impondo que os campos sejam periódicos na superfície do cubo de volume V , as ondas planas que satisfazem as condições de contorno e a equação de onda (2.1.4) tem a forma

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}, \quad (2.1.5)$$

onde $\omega_k = ck$ e os vetores de onda $\mathbf{k}$ são da forma

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3), \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.6)$$

As ondas planas formam um conjunto ortonormal completo:

$$\frac{1}{V} \int_V d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.1.7)$$

A expansão do potencial vetor em termos das ondas planas é então

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (2.1.8)$$

substituindo (2.1.8) em (2.1.2) temos que para os coeficientes na expressão acima deve ser satisfeita a condição

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0, \quad (2.1.9)$$

Isso mostra que os vetores $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$ são perpendiculares à direção de propagação, é por esse motivo que o calibre de Coulomb também é chamado de calibre transverso. Pela equação de onda (2.1.4), temos que

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_k t}, \quad (2.1.10)$$

e segue imediatamente que das definições dos campos em termos do potencial

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_k}{c\sqrt{V}} \left[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \frac{\omega_k}{c\sqrt{V}} \left\{ \left[\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_k(t) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left[\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_k(t) \right]^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right\}. \quad (2.1.12)$$

Por consequência de (2.1.8) ser transverso os campos gerados $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ também são transversos. O caráter vetorial dos modos $\mathbf{A}_k$ é ainda mais explícito quando decompomos esse termo em um par de polarizações ortogonais, definidos em um plano perpendicular a $\mathbf{k}$, uma das escolhas possíveis é um par de vetores de polarização linear $\epsilon_{k\alpha}$:

$$\epsilon_{k1} \times \epsilon_{k2} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \epsilon_{k\alpha} \cdot \epsilon_{k\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (2.1.13)$$

Outra escolha são os vetores de polarização circular

$$\epsilon_{k\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_{k1} \pm i\epsilon_{k2}). \quad (2.1.14)$$

A expansão adequada nas polarizações depende do tipo de problema. O passo seguinte é expressar a energia do campo

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (2.1.15)$$

em termos das amplitudes $\mathbf{A}_k$. Usando as condições de ortogonalidade, obtemos a energia total do campo como uma forma quadrática das amplitudes dos modos $\mathbf{A}_k$

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_k \left(\frac{\omega_k^2}{c^2} \right) |\mathbf{A}_k(t)|^2. \quad (2.1.16)$$

A dinâmica que governa as amplitudes está na equação de onda (2.1.4), que se torna

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_k^2 \right) \mathbf{A}_k(t) = 0, \quad (2.1.17)$$

para cada modo. Assim, a energia total H é a de um conjunto infinito de osciladores harmônicos, levando em conta as duas polarizações independentes e todas as possíveis direções de $\mathbf{k}$. Agora podemos copiar a teoria do oscilador harmônico. Definiremos para cada $\mathbf{k}$ o par de variáveis canônicas

$$\mathbf{Q}_k(t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} [\mathbf{A}_k(t) + \mathbf{A}_k^*(t)], \quad \mathbf{P}_k(t) = -\frac{ik}{2\sqrt{\pi}} [\mathbf{A}_k(t) - \mathbf{A}_k^*(t)]. \quad (2.1.18)$$

Fazendo essa substituição a energia ganha forma mais familiar

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (\mathbf{P}_k^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k^2). \quad (2.1.19)$$

Para a energia do campo nessa forma, é trivial mostrar que as equações de Hamilton¹

$$\dot{\mathbf{P}}_k = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_k}, \quad \dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_k}, \quad (2.1.20)$$

são válidas e colocam as equações de Maxwell na linguagem usual da mecânica clássica, possibilitando utilizar as regras de quantização canônica para o campo eletromagnético.

¹Derivadas calculadas em relação a um vetor de polarização específico.

2.1.2 Quantização Canônica

A quantização se faz pela substituição das variáveis canônicas Q_k e P_k por operadores Hermitianos $\hat{q}_k$ e $\hat{p}_k$ impondo relações de comutação canônica a esses operadores. Por construção

$$[\hat{q}_{ks}, \hat{p}_{k's'}] = i\hbar\delta_{k,k'}\delta_{s,s'}, \quad (2.1.21)$$

$$[\hat{q}_{ks}, \hat{q}_{k's'}] = 0, \quad [\hat{p}_{ks}, \hat{p}_{k's'}] = 0, \quad (2.1.22)$$

onde o índice s representa os vetores de base da polarização. Dessa forma, chegamos ao Hamiltoniano do campo eletromagnético livre quantizado

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{ks} (\hat{p}_{ks}^2 + \omega_k^2 \hat{q}_{ks}^2). \quad (2.1.23)$$

Na teoria do oscilador harmônico é intuitivo definir o operador não-Hermitiano

$$\hat{a}_{ks} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q}_{ks} + i\hat{p}_{ks}), \quad (2.1.24)$$

e o seu adjunto $\hat{a}_{ks}^\dagger$. Satisfazendo a relação de comutação

$$[\hat{a}_{ks}, \hat{a}_{k's'}^\dagger] = \delta_{kk'}\delta_{ss'}, \quad (2.1.25)$$

em termos de $\hat{a}_{ks}$ o Hamiltoniano é

$$\hat{H} = \sum_{ks} \frac{\hbar\omega_k}{2} (\hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks} + \hat{a}_{ks} \hat{a}_{ks}^\dagger) = \sum_{ks} \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{ks} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.1.26)$$

onde $\hat{n}_{ks}$ são os operadores número e são definidos da forma

$$\hat{n}_{ks} \equiv \hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks}, \quad (2.1.27)$$

possuindo autovalores inteiros

$$n_{ks} = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.28)$$

Na representação de Heisenberg as equações de movimento para $\hat{a}_{ks}$ são

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_{ks}}{dt} = [\hat{a}_{ks}, \hat{H}] = \hbar\omega_k \hat{a}_{ks}, \quad (2.1.29)$$

e as soluções são da forma

$$\hat{a}_{ks}(t) = \hat{a}_{ks} e^{-i\omega_k t}. \quad (2.1.30)$$

Tornando evidente que $\hat{a}_{ks}(t)$ é o análogo quântico da amplitude do modo clássico (2.1.8). Para escrever os operadores que representam os campos basta fazer a substituição

$$A_{ks}(t) \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}} \hat{a}_{ks}(t). \quad (2.1.31)$$

Os operadores que representam os campos são:

$$\hat{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{ks} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \left[\boldsymbol{\epsilon}_{ks} \hat{a}_{ks} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + \boldsymbol{\epsilon}_{ks}^* \hat{a}_{ks}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right], \quad (2.1.32)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{ks} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \left[\boldsymbol{\epsilon}_{ks} \hat{a}_{ks} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - \boldsymbol{\epsilon}_{ks}^* \hat{a}_{ks}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right], \quad (2.1.33)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{ks} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \left[(\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}_{ks}) \hat{a}_{ks} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - (\hat{\mathbf{k}}^* \times \boldsymbol{\epsilon}_{ks}^*) \hat{a}_{ks}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right]. \quad (2.1.34)$$

O conjunto de operadores Hermitianos $\mathbf{F} = (\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ pode ser escrito como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.35)$$

onde $\mathbf{F}^{(+)}$ é igual ao adjunto de $\mathbf{F}^{(-)}$, sendo que $\mathbf{F}^{(+)}$ contém apenas componentes de frequência positiva ω_k e operadores de aniquilação. Chamamos $\mathbf{F}^{(+)}$ e $\mathbf{F}^{(-)}$ de componente de frequência positiva e componente de frequência negativa, respectivamente. Essa decomposição está relacionada com a forma que os detectores de fótons respondem ao campo eletromagnético. Para estender o tratamento ao espaço inteiro, tomamos o limite do volume V tendendo ao infinito no fim de todos os cálculos dos valores esperados de observáveis.

2.2 Estados de Fock

Vimos que a energia é descrita por uma soma de Hamiltonias independentes, correspondentes a cada modo do campos, dessa forma podemos construir o espaço correspondente a um modo e a partir disso, obter uma representação de estados multimodo. Trataremos apenas de um modo descritos pelo operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Esse sistema possui Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}), \quad (2.2.1)$$

sendo os autoestados desse Hamiltoniano, os vetores $|n\rangle$ que satisfazem a equação de autovalores

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{n} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.2.2)$$

possuindo as propriedades de ortonormalidade

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}, \quad (2.2.3)$$

e completeza

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{1}. \quad (2.2.4)$$

Os autoestados do operador número $\hat{n}$ constituem a base mais simples para o espaço de Hilbert de um modo do campo eletromagnético, sendo mais fácil de tratar teoricamente e formam assim o ponto de partida para o estudo das propriedades do campo eletromagnético quântico. Esses estados são conhecidos como estados de Fock. É fácil deduzir, utilizando a relação de comutação bosônica, que os estados de Fock obedecem as relações fundamentais:

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.2.5)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.2.6)$$

O estados de vácuo $|0\rangle$ ou estado de mínima energia do campo, é definido da forma

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (2.2.7)$$

possuindo um número médio de fótons nulo. Usando uma relação de recorrência podemos escrever um estado de Fock geral $|n\rangle$ em termos de $|0\rangle$

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.2.8)$$

Para uma descrição multimodo do campo podemos escrever o estado como $|n_{ks}\rangle$, significando que o modo $(\mathbf{k}, s)$ possui n_{ks} fótons. Esse estado é o produto dos estados para cada modo

$$|\{n_{ks}\}\rangle = \bigotimes_{ks} |n_{ks}\rangle, \quad (2.2.9)$$

e possui as propriedades:

$$\hat{a}_{ks} |\{n_{ks}\}\rangle = \sqrt{n_{ks}} |n_{ks} - 1\rangle \bigotimes_{k's' \neq ks} |\{n_{k's'}\}\rangle, \quad (2.2.10)$$

$$\hat{a}_{ks}^\dagger |\{n_{ks}\}\rangle = \sqrt{n_{ks} + 1} |n_{ks} + 1\rangle \bigotimes_{k's' \neq ks} |\{n_{k's'}\}\rangle. \quad (2.2.11)$$

A geração de estados com número de fótons bem definido é um desafio experimental, apesar de ser teoricamente mais prática. Por isso, muitas vezes é melhor trabalhar com bases experimentalmente mais interessantes, como a base de estados coerentes.

2.3 Quadraturas do Campo

Definiremos um novo par de operadores conjugados correspondentes a um modo $(\mathbf{k}, s)$ da forma

$$\hat{X} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} \hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.1)$$

$$\hat{Y} \equiv \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}} \hat{y} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}, \quad (2.3.2)$$

esses são os chamados operadores de *quadratura do campo*. A relação de comutação entre eles é dada por

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = i. \quad (2.3.3)$$

Obedecer a relação de comutação canônica implica que os autoestados dos operadores de quadratura, definidos como

$$\hat{X} |x\rangle = x |x\rangle, \quad \hat{Y} |y\rangle = y |y\rangle, \quad (2.3.4)$$

tem um espectro contínuo e podendo assumir valores entre $-\infty$ e $+\infty$ [Cohen-Tannoudji et al., 1977]. Essa relação de comutação é similar a relação para posição e momento para partículas massivas, porém, não deve-se nunca confundir os operadores de quadratura com a posição e momento de um fóton. Os autoestados são ortogonais

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad \langle y|y'\rangle = \delta(y - y'). \quad (2.3.5)$$

e completos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x| = \int_{-\infty}^{+\infty} dy |y\rangle \langle y| = \hat{1}, \quad (2.3.6)$$

sendo relacionados pela transformada de Fourier da forma

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iyx} |y\rangle, \quad (2.3.7)$$

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ixy} |x\rangle. \quad (2.3.8)$$

Por não serem normalizados não correspondem a estados físicos que podem ser produzidos no laboratório, mas são de fundamental importância na descrição do espaço de fase. Podemos pensar em escrever uma função de onda na representação $\hat{X}$, implicando que $\hat{Y} = -i\partial/\partial X$. Por exemplo, isso nos possibilita escrever uma função de onda para um estado de Fock no espaço das quadraturas como

$$\Psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n\sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad (2.3.9)$$

onde H_n representa um polinômio de Hermite de grau n . Essa função de onda descreve a densidade de amplitude de probabilidade da quadratura $\hat{X}$ de um estado de $|n\rangle$. Da mesma forma podemos encontrar $\tilde{\Psi}_n(y) = \langle y|n\rangle$ como

$$\tilde{\Psi}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi_n(x) e^{-ixy}. \quad (2.3.10)$$

Tanto a distribuição de $|\Psi_n(x)|^2$, quanto $|\tilde{\Psi}_n(y)|^2$, podem ser medidas pela técnica de detecção homodina que será descrita nesse capítulo. Substituindo $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ na relação de incerteza de Heisenberg, temos

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} \geq \frac{1}{2}, \quad (2.3.11)$$

onde $(\Delta\hat{X})^2 = \langle\hat{X}^2\rangle - \langle\hat{X}\rangle^2$. Para um estado de Fock a relação se reduz a

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} = n + \frac{1}{2}, \quad (2.3.12)$$

onde

$$(\Delta\hat{X})^2 = (\Delta\hat{Y})^2 = n + \frac{1}{2}, \quad (2.3.13)$$

ou seja, o ruído nas quadraturas de um estado de Fock cresce linearmente com o número de fótons.

2.4 Estados Coerentes

Uma onda clássica pode possuir amplitude e fase bem definidas. Vimos que na teoria quântica do campo eletromagnético a amplitude complexa do campo é substituída pelo operador de aniquilação $\hat{a}$. Uma pergunta natural surge, existem estados quânticos com amplitude e fase bem definidos? Tais estados seriam autoestados do operador $\hat{a}$ da forma

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.4.1)$$

e os valores esperados das quadraturas e da amplitude do campo correspondem aos valores clássicos:

$$\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha, \quad \langle\alpha|\hat{X}|\alpha\rangle = \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}}, \quad \langle\alpha|\hat{Y}|\alpha\rangle = \frac{\alpha - \alpha^*}{i\sqrt{2}}. \quad (2.4.2)$$

A intensidade do campo é então

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad (2.4.3)$$

correspondendo ao módulo quadrado da amplitude média do campo. Expandindo o estado $|\alpha\rangle$ em termos de estados de Fock chegamos ao estado normalizado

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.4.4)$$

denominado *estado coerente*, sendo uma superposição infinita de estados de Fock. A probabilidade de encontrar o sistema em um estado $|n\rangle$ é dada por

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (2.4.5)$$

essa distribuição é conhecida como *distribuição de Poisson*, tal distribuição é característica de processos aleatórios e não correlacionados. Dentre outras propriedades importantes dessa distribuição, a variância é igual a sua média, ver figura 2.1. Assim, para um estado coerente

$$\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.4.6)$$

Os estados coerentes formam um conjunto supercompleto², é fácil ver que

Figura 2.1: Exemplos da distribuição de Poisson P_n de um estado coerente, para diferentes valores de $|\alpha|^2$. Note que a distribuição de probabilidade toma um perfil mais “gaussiano” à medida que o número médio de fótons aumenta.

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{1}, \quad (2.4.7)$$

porém, não formam uma base ortonormal. O produto escalar entre dois estados coerentes é

$$\langle \alpha|\beta\rangle = \exp\left(\alpha^*\beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right), \quad (2.4.8)$$

portanto, podemos escrever um estado coerente em função de outros estados coerentes. Para formalizar algumas propriedades é interessante introduzir o *operador deslocamento*, definido como

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \quad (2.4.9)$$

e um estado $|\alpha\rangle$ é visto como um estado de vácuo “deslocado”, como pode ser visto na figura 2.2. Temos que vale a relação

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (2.4.10)$$

porém, isso não significa que um estado coerente é fisicamente equivalente a um estado de vácuo. Os estados coerentes, são conhecidos por serem estados que saturam a relação de incerteza de Heisenberg em relação aos operadores de quadratura, temos que

$$\Delta \hat{X} = \Delta \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \Delta \hat{X} \Delta \hat{Y} = \frac{1}{2}, \quad \forall \alpha. \quad (2.4.11)$$

²Em inglês, overcomplete.

Figura 2.2: Representação de um estado coerente no espaço de fase.

Para examinar a evolução temporal de um estado coerente, aplicamos o operador evolução para o Hamiltoniano (2.2.1) para um único modo do campo

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\alpha\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-i\omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} |\alpha\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle, \quad (2.4.12)$$

vemos então que a evolução de um estado coerente leva a outro estado coerente com uma fase diferente. Sendo as incertezas nas quadraturas independente da amplitude do estado. O estado continua preservando suas propriedades de saturação da relação de incerteza (2.4.11).

2.5 Estados Comprimidos

O estado de vácuo comprimido $|\xi\rangle$, de um único modo do campo, é definido pela aplicação de um operador unitário de compressão

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi \hat{a}^{2\dagger} - \frac{1}{2}\xi^* \hat{a}^2\right), \quad \xi = r e^{i\varphi}, \quad (2.5.1)$$

sobre o estado de vácuo

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi) |0\rangle. \quad (2.5.2)$$

É interessante expandir o operador de compressão e expressar o estado $|\xi\rangle$ em termo dos estados de Fock, temos

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} (\tanh r)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n! 2^n} |2n\rangle. \quad (2.5.3)$$

Vemos que apenas números pares de estados de Fock estão presentes e a distribuição de probabilidade no número de fótons fica

$$p_{2n} = \frac{(\tanh r)^{2n}}{\cosh r} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}, \quad p_{2n+1} = 0. \quad (2.5.4)$$

Um importante resultado é o número médio de fótons para esse estado

$$\langle \xi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \xi \rangle = \sinh^2 r, \quad (2.5.5)$$

que é diferente de zero. Os chamados estados coerentes comprimidos são definidos por

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\xi) |0\rangle, \quad (2.5.6)$$

ou seja, um estado coerente comprimido é obtido pela aplicação do operador deslocamento sobre o vácuo comprimido. Utilizando as propriedades já estudadas do operador deslocamento podemos calcular alguns valores esperados de fundamental importância, tais como

$$\langle \hat{a} \rangle = \alpha, \quad (2.5.7)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r, \quad (2.5.8)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sinh(2r) e^{i\varphi}. \quad (2.5.9)$$

Agora vamos considerar uma quadratura mais geral $\hat{X}_\theta$, onde

$$\hat{X}_\theta = \frac{\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}}{\sqrt{2}}. \quad (2.5.10)$$

É fácil encontrar que,

$$\langle \hat{X}_\theta \rangle = \frac{\alpha e^{-i\theta} + \alpha^* e^{i\theta}}{\sqrt{2}}, \quad (2.5.11)$$

e as variâncias para quadraturas determinadas pelo parâmetro ξ (2.5.1), defasadas de $\pi/2$

$$(\Delta \hat{X}_{\frac{\varphi}{2}})^2 = \frac{1}{2} e^{2r}, \quad (\Delta \hat{X}_{\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}})^2 = \frac{1}{2} e^{-2r}, \quad (2.5.12)$$

mostrando que o produto das quadraturas ainda satisfaz as condições de mínimo da desigualdade de Heisenberg. Porém, agora é possível ter ruído quântico menor do que o ruído de vácuo em umas das quadraturas, ver figura 2.3. Essa supressão de ruído em uma quadratura é compensada por excesso de ruído na quadratura conjugada:

$$\Delta \hat{X}_{\frac{\varphi}{2}} \Delta \hat{X}_{\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}. \quad (2.5.13)$$

Veremos que compressão de ruído e emaranhamento estão profundamente ligados.

Figura 2.3: Representação no espaço de fase de um estado coerente comprimido. A elipse representa o ruído quântico comprimido, a circunferência tracejada representa a distribuição de ruído para um estado coerente.

2.6 Fotodetecção e Ruído de Quadratura

Não existe detector rápido o suficiente para medir campos no regime de comprimentos de onda óticos, cuja frequência de oscilação é da ordem de 10^{14} Hz. Os detectores são sensíveis às médias temporais da intensidade da luz. Tipicamente são usados fotodetecores que geram uma fotocorrente proporcional ao fluxo de fótons incidente baseados no efeito fotoelétrico. Em [Glauber, 1963], vemos que podemos associar a corrente gerada por um detetor com o observável $\hat{I}(t)$, dado por

$$\hat{I}(t) = \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.6.1)$$

considerando eficiência de conversão unitária.

A corrente média medida durante um intervalo Δt para um dado estado quântico $|\psi(t)\rangle$ será

$$\langle \hat{I}(t) \rangle = S_d \int_t^{t+\Delta t} \langle \psi(t) | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi(t) \rangle dt, \quad (2.6.2)$$

a constante S_d está relacionada com a conversão feita pelo fotodetector e depende exclusivamente do tipo usado. Assume-se que o detector é muito pequeno, para detectores extensos integramos sobre toda a superfície para obter a corrente total. Podemos escrever o operador de fotocorrente como um valor médio bem definido somado às flutuações $\delta \hat{I}(t)$ em torno desse valor médio, sendo

$$\hat{I}(t) = \langle \hat{I} \rangle + \delta \hat{I}(t). \quad (2.6.3)$$

E do mesmo modo, podemos reescrever os operadores de criação e aniquilação separando o valor médio das flutuações

$$\hat{a}(t) = \alpha + \delta \hat{a}(t), \quad \hat{a}^\dagger(t) = \alpha^* + [\delta \hat{a}(t)]^\dagger \quad (2.6.4)$$

em que

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta} = \langle \hat{a}(t) \rangle. \quad (2.6.5)$$

Para a análise de um único modo do campo, podemos escrever a relação direta entre a fotocorrente e o operador número como $\hat{I}(t) = \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t)$ que leva à equação

$$\delta \hat{I}(t) = \alpha^* \delta \hat{a}(t) + \alpha \delta \hat{a}^\dagger(t) + \delta \hat{a}^\dagger(t) \delta \hat{a}(t). \quad (2.6.6)$$

Desconsiderando os termos de segunda ordem nas flutuações, no limite em que $|\delta \alpha| \ll |\alpha|$, teremos

$$\delta \hat{I}(t) = \alpha^* \delta \hat{a}(t) + \alpha \delta \hat{a}^\dagger(t), \quad (2.6.7)$$

reescrevendo a equação acima em função da quadratura generalizada,

$$\begin{aligned} \delta \hat{I}(t) &= |\alpha| [e^{-i\theta} \delta \hat{a}(t) + e^{i\theta} \delta \hat{a}^\dagger(t)] \\ &= \sqrt{2} |\alpha| \delta \hat{X}_\theta(t). \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Pela equação acima, vemos que as flutuações na fotocorrente nos dá diretamente uma medida das flutuações quadratura no espaço de fase do campo na direção do campo clássico α . Por esse motivo denominamos essa quadratura como *quadratura amplitude* e representaremos por $\hat{p}$, incluindo o fator $\sqrt{2}$ na sua definição. Medida experimentalmente através das flutuações de intensidade do feixe como

$$\delta \hat{p}(t) = \frac{\delta \hat{I}(t)}{\sqrt{\langle \hat{I} \rangle}}. \quad (2.6.9)$$

A quadratura conjugada estará relacionada a flutuações de fase e vamos chama-lá de *quadratura fase*, denotada por $\hat{q}$, a interpretação geométrica pode ser vista na figura 2.4. As expressões formais para as quadraturas amplitude e fase são dadas em termos dos operadores de criação e aniquilação:

$$\delta \hat{p}(t) = e^{-i\theta} \delta \hat{a}(t) + e^{i\theta} \delta \hat{a}^\dagger(t), \quad (2.6.10)$$

$$\delta \hat{q}(t) = -i[e^{-i\theta} \delta \hat{a}(t) - e^{i\theta} \delta \hat{a}^\dagger(t)]. \quad (2.6.11)$$

A análise das flutuações torna-se mais simples quando mudamos do espaço temporal para o espaço das frequências. Definiremos pela transformada de Fourier de $\hat{a}(t)$ os operadores

$$\delta \hat{a}(\Omega) \equiv \int \delta \hat{a}(t) e^{i\Omega t} dt, \quad \delta \hat{a}^\dagger(\Omega) \equiv [\delta \hat{a}(\Omega)]^\dagger, \quad (2.6.12)$$

Figura 2.4: Representação do campo no espaço de fase e definição das quadraturas $\hat{p}$ e $\hat{q}$. Uma flutuação $\delta\alpha$ pode ser decomposta em termos correspondentes a flutuações δp e δq .

onde $\hat{a}(\Omega)$ e $\hat{a}^\dagger(\Omega)$ podem ser interpretados como operadores de aniquilação e criação de um fóton em uma frequência $\omega_0 + \Omega$, sendo ω_0 a frequência ótica. É fácil mostrar que o equivalente às quadraturas no espaço das frequências é dado por

$$\hat{p}(\Omega) = e^{i\theta}\hat{a}(\Omega) + e^{i\theta}\hat{a}^\dagger(-\Omega), \quad (2.6.13)$$

$$\hat{q}(\Omega) = -i[e^{-i\theta}\hat{a}(\Omega) - e^{i\theta}\hat{a}^\dagger(-\Omega)], \quad (2.6.14)$$

e vale a relação

$$[\delta\hat{p}(\Omega)]^\dagger = \delta\hat{p}(-\Omega), \quad [\delta\hat{q}(\Omega)]^\dagger = \delta\hat{q}(-\Omega), \quad (2.6.15)$$

e o comutador entre as variáveis conjugadas é dado por

$$[\delta\hat{p}(\Omega), \delta\hat{q}(\Omega')] = 4i\pi\delta(\Omega - \Omega'). \quad (2.6.16)$$

O espectro de ruído $S_{X_\theta}(\Omega)$ de uma quadratura generalizada é obtido pelo teorema de Winer-Khintchine [Mandel e Wolf, 1995]

$$\langle \delta X_\theta(\Omega) \delta X_\theta(-\Omega') \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_{X_\theta}(\Omega), \quad (2.6.17)$$

e está relacionado com a distribuição espectral de energia do campo. A potência de ruído $S_{X_\theta}(\Omega)$ é proporcional à variância da quadratura generalizada. Na prática, o espectro de ruído é medido dentro de uma certa banda de frequência implicando que $S_{X_\theta}(\Omega)$ não será a variância exata da frequência Ω , porém, após todas as aproximações envolvidas nas medidas, obtemos algo proporcional à variância desejada [Bachor e Ralph, 2004]. Precisamos de uma referência que seja calibrada nas mesmas condições de forma a servir de unidade de comparação de ruído. Essa referência é o *shot noise*, ou ruído quântico padrão, que corresponde ao ruído do estado de vácuo.

2.7 Detecção Homodina e Calibração do Shot Noise

Vimos que os fotodetectores nos dão diretamente as flutuações da quadratura amplitude. Porém, para fazer medidas que sejam sensíveis a fase é preciso usar alguma técnica interferométrica. Descreveremos brevemente a técnica de detecção homodina que servirá de base para o entendimento e interpretação das medidas realizadas nessa dissertação.

A técnica faz uso de um feixe coerente intenso chamado de *oscilador local*, no estado $|\alpha\rangle$, com valor médio muito maior do que a do estado $|\psi\rangle$ que se quer estudar, sendo que os dois

feixes possuem a mesma frequência e uma relação entre as fases bem definida. Tal feixe é misturado com o campo no qual se quer medir as quadraturas por meio de um divisor de feixe conforme ilustrado na figura 2.5. Os campos de entrada no divisor de feixes serão descritos pelos operadores de aniquilação $\hat{a}_e$ e $\hat{b}_e$ (oscilador local), enquanto os campos de saída por $\hat{a}_s$ e $\hat{b}_s$. Um divisor de feixes simétrico, no qual 50% da luz é transmitida e 50% é refletida, implementa uma transformação unitária nos operadores de entrada [Agarwal, 2012] tal que

$$\hat{a}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_e + i\hat{b}_e), \quad \hat{b}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{a}_e + \hat{b}_e). \quad (2.7.1)$$

A diferença entre as fotocorrentes medidas nos dois detectores será³

$$\hat{I}_- = \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s - \hat{b}_s^\dagger \hat{b}_s \quad (2.7.2)$$

$$= i[\hat{a}_e^\dagger \hat{b}_e - \hat{a}_e \hat{b}_e^\dagger], \quad (2.7.3)$$

fazendo a substituição $\hat{b}_e = |\alpha|e^{i\phi} + \delta\alpha$, temos

$$\hat{I}_- \approx |\alpha|\sqrt{2}\hat{X}_\phi, \quad (2.7.4)$$

ou seja, a subtração das fotocorrentes pode ser usada para medir as flutuações quadratura $\hat{X}_\phi$ (do campo sinal) sempre que podemos desprezar as contribuições da flutuação $\delta\alpha$ comparadas com α . Onde $\hat{X}_\phi$ depende somente do campo sinal, no estado ψ e da fase do oscilador local. As variâncias são dadas por

$$\langle \delta \hat{I}_-^2 \rangle = 2|\alpha|^2 \langle (\delta \hat{X}_\phi)^2 \rangle. \quad (2.7.5)$$

Controlando a fase ϕ do oscilador local, é possível medir a flutuação em todas as quadraturas, podendo assim converter ruído de fase em ruído de amplitude.

Figura 2.5: Esquema de detecção homodina. Um oscilador local é misturado por um divisor de feixes ao campo que queremos estudar. Variando a fase do oscilador local podemos medir as quadraturas em qualquer direção da elipse de ruído do sinal de entrada.

A calibração da referência de ruído é feita utilizando o vácuo como sinal de entrada, no esquema de detecção homodina (ver figura 2.5). Nesse caso, a flutuação da subtração das fotocorrentes dos dois detectores será proporcional ao ruído do vácuo, e a flutuação da soma das fotocorrentes corresponderá a uma medida de ruído de amplitude do oscilador local. Uma vez calibrado o valor do shot noise para várias potências de entrada nos detectores em uma determinada frequência de análise Ω , esse valor se torna uma “unidade” de ruído para a respectiva

³Aqui consideramos o caso de detectores ideais.

potência de entrada, e todas as variâncias são normalizadas por esse valor. Assim, teremos a correspondência

$$S_{\hat{x}_\theta}(\Omega) \begin{cases} > 1 & \Rightarrow \text{Excesso de ruído;} \\ = 1 & \Rightarrow \text{Shot noise;} \\ < 1 & \Rightarrow \text{Compressão de ruído.} \end{cases} \quad (2.7.6)$$

Uma medida de quadratura, tal que o ruído é menor que o shot noise, caracteriza um estado não clássico da luz que não pode ser descrito por uma mistura estatística de estados coerentes. Há várias aplicações práticas da compressão de ruído em fase ou amplitude. Pode ser usada para melhorar a precisão de alguns experimentos a limites abaixo do ruído quântico padrão. Por exemplo, todo interferômetro que utiliza divisores de feixes contém entradas que não são usadas, tais entradas “não usadas” são na verdade, na teoria quântica, portas de entrada para o vácuo $|0\rangle$ e inserem ruído no sistema. C. Caves propôs o uso de vácuo comprimido nessas entradas [Caves, 1981] que levam a uma redução do ruído quântico no sistema e consequentemente a maior precisão do interferômetro, tal efeito foi demonstrado experimentalmente em [Xiao et al., 1987].

2.8 Função de Wigner

Em 1932 Wigner mostrou a possibilidade de construir uma distribuição para o espaço de fase de um sistema quântico [Wigner, 1932], com propriedades de uma “distribuição de probabilidade”. Possuindo a interessante característica de ser bastante útil para calcular valores esperados de grandezas físicas. Porém, a função de Wigner pode possuir valores negativos, não podendo assim ser uma função de probabilidade, sendo chamada de uma *função de quase probabilidade*. Essa função faz-se bastante útil no campo da ótica quântica, principalmente na caracterização de estados não clássicos e “visualização” dos mesmos. Para uma discussão aprofundada do espaço de fase na ótica quântica ver [Schleich, 2001]. Na teoria de probabilidades, podemos descrever uma distribuição pela transformada de Fourier da sua função característica. Definimos a função de Wigner da forma

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\beta)]e^{-(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)}, \quad (2.8.1)$$

como a transformada de Fourier bidimensional da função característica

$$\chi(\beta) = \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})]. \quad (2.8.2)$$

É fácil ver que

$$\int W(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (2.8.3)$$

Vamos agora calcular a função de Wigner para alguns estados. Para um estado coerente $|\gamma\rangle$ teremos

$$W_c(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha - \gamma|^2). \quad (2.8.4)$$

O cálculo para um estado de Fock $|n\rangle$ nos dá

$$W_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2), \quad (2.8.5)$$

sendo L_n os polinômios de Laguerre, onde vemos que a W_n pode ser negativa, basta fazer $\alpha = 0$, implicando $W(0) = \frac{2}{\pi} (-1)^n < 0$ se n é ímpar. Por exemplo, para $n = 1$ teremos

$$W_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2} (4|\alpha|^2 - 1), \quad (2.8.6)$$

Figura 2.6: Função de Wigner para o estado de Fock $|1\rangle$, figura retirada da referência [Leonhardt, 2010].

que é negativa para toda a região em que $|\alpha| < 1/4$. Na figura 2.6, vemos o gráfico da função para um estado com apenas um fóton $W_1(\alpha)$. A função de Wigner pode ser usada para evidenciar estados não clássicos quando ela apresenta valores negativos, como no caso dos estados números $|n\rangle$.

Podemos calcular valores esperados como médias no espaço de fase. Dado um operador $\hat{G}$, correspondendo a um observável físico, podemos reescrevê-lo como

$$\hat{G} = \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma \text{Tr}[\hat{G}\hat{D}^\dagger(\gamma)]\hat{D}(\gamma). \quad (2.8.7)$$

E o seu valor esperado $\langle\hat{G}\rangle$ será dado por

$$\langle\hat{G}\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{G}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma \text{Tr}[\hat{G}\hat{D}^\dagger(\gamma)]\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\gamma)], \quad (2.8.8)$$

podemos inverter a equação (2.8.1), obtendo $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\gamma)] = \int d^2\alpha W(\alpha)e^{\gamma\alpha^* - \gamma^*\alpha}$, desse modo temos

$$\langle\hat{G}\rangle = \pi \int d^2\alpha W(\alpha)W_{\hat{G}}(\alpha), \quad (2.8.9)$$

onde $W_{\hat{G}}$ é a função de Wigner associada ao operador $\hat{G}$, definida pela troca de $\hat{\rho}$ por $\hat{G}$, na equação (2.8.1). Por exemplo, a função de Wigner servirá como densidade de probabilidade no cálculo de momentos do campo em ordem simétrica,

$$\langle\hat{a}^r(\hat{a}^\dagger)^s\rangle = \int d^2\alpha W(\alpha)\alpha^r(\alpha^*)^s. \quad (2.8.10)$$

Com um pouco de álgebra é possível mostrar que a função de Wigner de um estado de vácuo comprimido, definido por (2.5.1) e (2.5.2), é dada por

$$W_\xi(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\varphi} \sinh r|^2). \quad (2.8.11)$$

A figura 2.7 mostra as funções de Wigner para um estado de vácuo, um estado coerente γ e para o estado de vácuo comprimido calculado 2.8.11. De fato, percebe-se que as elipses de contorno da função de Wigner (cortes em uma determinada altura no espaço de fase), são proporcionais aos ruídos de quadratura. É esse apelo visual e as propriedades de cálculo que tornam a função de Wigner tão útil em ótica quântica.

Figura 2.7: Gráfico da função de Wigner para: (esquerda) estado de vácuo; (centro) um estado coerente $|\gamma\rangle$; (direita) um estado de vácuo comprimido. Figura adaptada da referência [Leonhardt, 2010]

2.9 Emaranhamento

Até agora descrevemos luz não clássica em um contexto envolvendo apenas um único modo do campo. A não classicalidade está ligada a impossibilidade de descrever os valores esperados por uma distribuição de probabilidades clássica. Nosso objetivo é estudar o fenômeno que mais representa um sistema não clássico, o *emaranhamento*⁴ entre diferentes subsistemas de um sistema composto. O tratamento mais adequado requer a introdução do *operador densidade* para descrever o sistema.

Para um sistema quântico, sempre há um operador densidade $\hat{\rho}$ que representa o estado do sistema. Se o sistema está em uma mistura de estados $|\psi_i\rangle$, então [Cohen-Tannoudji et al., 1977]

$$\hat{\rho} = \sum_i \mu_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.9.1)$$

onde $\sum_i \mu_i = 1$ (soma convexa), $\mu_i \geq 0$ e $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Se há apenas um valor de $\mu_i \neq 0$, dizemos que o sistema encontra-se em um estado puro, de outra forma o sistema está em um estado misto. Um sistema formado por N -subsistemas é separável quando seu operador densidade pode ser escrito como uma soma de estados produtos

$$\hat{\rho}_{\text{separável}} = \sum_i \mu'_i \hat{\rho}_i^{(1)} \otimes \hat{\rho}_i^{(2)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_i^{(N)}. \quad (2.9.2)$$

Quando não for possível escrever o estado do sistema na forma (2.9.2), dizemos que o operador descreve um sistema em estado não separável ou *emaranhado*. O emaranhamento pode existir apenas entre alguns subgrupos do sistema quântico. Em geral, existem muitas possibilidades de combinações entre os constituintes do sistema total. Por exemplo, o operador de densidade

$$\hat{\rho}_{\text{semisep}} = \sum_i \mu'_i \hat{\rho}_i^{(1,2,\dots,s)} \otimes \hat{\rho}_i^{(s+1)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_i^{(N)}, \quad (2.9.3)$$

possui s componentes de subsistemas não separáveis $\hat{\rho}_i^{(1,2,\dots,s)}$ que não pode ser decomposta em um estado produto e $N - s$ subsistemas separáveis. Um sistema no qual nenhum dos seus subsistemas possa ser separado dos outros é chamado completamente não separável, ou totalmente emaranhado. Para um sistema com k partições não separáveis, dizemos que o sistema possui emaranhamento k -partido.

Um método de testar a inseparabilidade completa de um sistema é dividi-lo em subpartições menores e verificar a inseparabilidade entre todas as combinações possíveis. Um teste simples

⁴Do inglês, *entanglement*.

é dividir o sistema em duas partes, de todas as formas possíveis, verificando a inseparabilidade para cada caso. Se verificada, o sistema apresenta emaranhamento entre bipartições, ou emaranhamento bipartido. Pode-se fazer o mesmo para divisões do sistema em três partes, para verificação de emaranhamento tripartido e assim por diante [van Loock e Furusawa, 2003]. Porém, a definição de emaranhamento não é operacional, no sentido de não fornecer uma regra para determinar se o estado é separável ou não. Há a necessidade da utilização de critérios de emaranhamento, tais que podem ser aplicados diretamente aos dados obtidos no laboratório. Existem vários critérios amplamente usados cuja aplicações são mais favoráveis dependendo do sistema utilizado [Gühne e Tóth, 2009, Horodecki et al., 2009].

2.9.1 Caso Bipartido

Nessa dissertação, focaremos em critérios que utilizam desigualdades envolvendo soma de variâncias de operadores, no contexto de variáveis contínuas, para sistemas bipartidos e tripartidos.

Um importante critério desenvolvido por Duan *et al.* [Duan et al., 2000, Simon, 2000] permite analisar a inseparabilidade de sistemas bipartidos⁵. Partindo de uma expressão para um operador de densidade separável da forma

$$\hat{\rho}_{\text{sep}} = \sum_i p_i \hat{\rho}_{i1} \otimes \hat{\rho}_{i2}, \quad (2.9.4)$$

e considerando um par geral de operadores como

$$\hat{u} = |a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2, \quad (2.9.5)$$

$$\hat{v} = |a|\hat{y}_1 - \frac{1}{a}\hat{y}_2, \quad (2.9.6)$$

tal que $[\hat{x}_j, \hat{p}_{j'}] = i\delta_{jj'}$, onde a é número real arbitrário, os operadores $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são ditos formarem um par EPR [Einstein et al., 1935]. Estes são uma combinação linear de operadores canonicamente conjugados com autovalores contínuos que possuem comutador nulo. É possível mostrar que qualquer estado da forma (2.9.4) deve satisfazer a desigualdade

$$\langle (\Delta\hat{u})^2 \rangle_{\hat{\rho}_{\text{sep}}} + \langle (\Delta\hat{v})^2 \rangle_{\hat{\rho}_{\text{sep}}} \geq a^2 + \frac{1}{a^2}. \quad (2.9.7)$$

Se a soma das variâncias da desigualdade acima for menor do que o limite inferior imposto para estados separáveis o sistema está emaranhado. Porém, nem todos os estados emaranhados violam a desigualdade de Duan. O critério é suficiente para a demonstração de emaranhamento, mas não é condição necessária. Note que o critério pode ser facilmente aplicado a uma situação experimental, dependendo somente das variâncias de $\hat{u}$ e $\hat{v}$, não sendo necessário uma reconstrução completa do estado $\hat{\rho}$. A escolha $a = 1$ é a mais conveniente pois torna maior a região de violação da desigualdade 2.9.7.

2.9.2 Caso Tripartido

O critério de Duan pode ser generalizado para testar a inseparabilidade de sistemas tripartidos [van Loock e Furusawa, 2003]. Introduzindo os observáveis

$$\hat{u} = h_1\hat{x}_1 + h_2\hat{x}_2 + h_3\hat{x}_3, \quad \text{e} \quad \hat{v} = g_1\hat{y}_1 + g_2\hat{y}_2 + g_3\hat{y}_3, \quad (2.9.8)$$

⁵O mesmo critério foi obtido por Simon em um artigo submetido um mês após a submissão do artigo de Duan *et al.* [Simon, 2000].

onde as constantes h_j e g_j são números reais escolhidos livremente. Dividindo o sistema em bipartições, temos as possibilidades

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p1} = \sum \mu_i \hat{\rho}_i^{(1)} \otimes \hat{\rho}_i^{(2,3)}, \quad (2.9.9)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p2} = \sum \mu_i \hat{\rho}_i^{(2)} \otimes \hat{\rho}_i^{(1,3)}, \quad (2.9.10)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p3} = \sum \mu_i \hat{\rho}_i^{(3)} \otimes \hat{\rho}_i^{(1,2)}, \quad (2.9.11)$$

levando a três desigualdades que devem ser respeitadas pelos respectivos sistemas parcialmente separáveis, podendo ser escritas como

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p1} \implies \Delta_{\hat{\rho}_{b1}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{b1}}^2 \hat{v} \geq 2(|h_1 g_1| + |h_2 g_2 + h_3 g_3|), \quad (2.9.12)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p2} \implies \Delta_{\hat{\rho}_{b2}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{b2}}^2 \hat{v} \geq 2(|h_2 g_2| + |h_1 g_1 + h_3 g_3|), \quad (2.9.13)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p3} \implies \Delta_{\hat{\rho}_{b3}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{b3}}^2 \hat{v} \geq 2(|h_3 g_3| + |h_1 g_1 + h_2 g_2|). \quad (2.9.14)$$

Cada uma dessas desigualdades, se violada, exclui a possibilidade do operador densidade ser escrito na forma usada para deduzi-la. Por exemplo, se a desigualdade (2.9.12) é violada, logo o estado do sistema não pode ser descrito na forma (2.9.9). Para um estado completamente separável a seguinte condição deve ser satisfeita [van Loock e Furusawa, 2003]

$$\hat{\rho}_{\text{sep}} = \sum_i \mu_i \hat{\rho}_i^{(1)} \otimes \hat{\rho}_i^{(2)} \otimes \hat{\rho}_i^{(3)} \implies \Delta_{\hat{\rho}_{\text{sep}}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{sep}}}^2 \hat{v} \geq 2(|h_1 g_1| + |h_2 g_2| + |h_3 g_3|). \quad (2.9.15)$$

Enquanto um operador de densidade qualquer, deve satisfazer uma desigualdade menos restrita

$$\forall \hat{\rho} \implies \Delta_{\hat{\rho}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}}^2 \hat{v} \geq 2|h_1 g_1 + h_2 g_2 + h_3 g_3|. \quad (2.9.16)$$

As escolhas das constantes livres h_j e g_j devem ser feitas de acordo com o sistema estudado. De forma geral, faz-se uma escolha na qual o membro direito da equação (2.9.16) se anule, sendo a soma de variâncias sempre positiva, essa “regra” torna maior a região de violação da desigualdade (2.9.15). Após uma análise e escolha cuidadosa dos parâmetros chegamos a três desigualdades que permitem a caracterização do emaranhamento tripartido

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p12}}^2 (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p12}}^2 (\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3) \geq 4, \quad (2.9.17)$$

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p13}}^2 (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p13}}^2 (\hat{y}_1 - \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3) \geq 4, \quad (2.9.18)$$

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p23}}^2 (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p23}}^2 (\hat{y}_1 - \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3) \geq 4, \quad (2.9.19)$$

sendo o índice $\text{bise}p_{ij}$ indicando que a desigualdade é um teste de separabilidade entre as partições i e j . Uma violação de duas das desigualdades (2.9.17)–(2.9.19), é condição suficiente para demonstração de emaranhamento tripartido, eliminando todas as formas de biseparáveis possíveis.

Utilizaremos as desigualdades descritas para evidenciar emaranhamento bipartido e tripartido no oscilador paramétrico ótico, usando uma combinação dos operadores de quadratura como variáveis EPR.

2.10 Estados Gaussianos

Estados cuja função de Wigner é descrita por uma função Gaussiana são chamados de *estados Gaussianos* [Olivares, 2012]. Tais estados são de particular importância no estudo da mecânica quântica no espaço de fase na ótica quântica no regime de variáveis contínuas, onde os operadores de quadratura formam um espaço de fase, teoricamente e experimentalmente conveniente de se trabalhar.

Um modo longitudinal do campo, de frequência ω , pode ser representado pelos operadores de quadratura amplitude $\hat{X}_\omega$ e fase $\hat{Y}_\omega$. Satisfazendo a relação de comutação⁶ $[\hat{X}_\omega, \hat{Y}_{\omega'}] = 2i\delta(\omega - \omega')$, que podem ser escritos em função dos operadores bosônicos de criação $\hat{a}_\omega^\dagger$ e aniquilação $\hat{a}_\omega$, na forma $\hat{a}_\omega = (\hat{X}_\omega + i\hat{Y}_\omega)/2$. Para um estado multimodo ordenamos as quadraturas em um vetor coluna $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{X}_\omega, \hat{Y}_\omega, \hat{X}_{\omega'}, \hat{Y}_{\omega'}, \dots)^T$, definimos a matriz de covariância

$$\mathbb{V} = \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}^T + \hat{\mathbf{R}}^T \cdot \hat{\mathbf{R}} \rangle, \quad (2.10.1)$$

que é por definição uma matriz simétrica, sendo a média é tomada sobre os estados quânticos. É fácil ver que os elementos diagonais são as variâncias das quadraturas de um único modo do campo, por exemplo, $\Delta^2 \hat{X}_\omega \equiv \langle \hat{X}_\omega \hat{X}_\omega \rangle$, enquanto os elementos fora da diagonal representam as covariâncias, por exemplo, $C(\hat{X}_\omega, \hat{X}_{\omega'}) \equiv \langle \hat{X}_\omega \hat{X}_{\omega'} \rangle$. Para um dado número de modos a matriz tem a forma geral

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \Delta^2 \hat{X}_\omega & C(\hat{X}_\omega, \hat{Y}_\omega) & C(\hat{X}_\omega, \hat{X}_{\omega'}) & C(\hat{X}_\omega, \hat{Y}_{\omega'}) & \dots \\ & \Delta^2 \hat{Y}_\omega & C(\hat{Y}_\omega, \hat{X}_{\omega'}) & C(\hat{Y}_\omega, \hat{Y}_{\omega'}) & \dots \\ & & \Delta^2 \hat{X}_{\omega'} & C(\hat{X}_{\omega'}, \hat{Y}_{\omega'}) & \dots \\ & & & \Delta^2 \hat{Y}_{\omega'} & \dots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.10.2)$$

A matriz de covariância contém toda a informação necessária para caracterizar o estado quântico de um estado Gaussiano. Para um estado de n -modos, $n(n+1)$ momentos de segunda ordem determinam completamente o estado. Além disso, os critérios de emaranhamento estudados, tornam-se *suficientes e necessários* para estados gaussianos, ou seja, estados Gaussianos emaranhados necessariamente violam os critérios discutidos [Duan et al., 2000] e [van Loock e Furusawa, 2003]. Os estados produzidos no oscilador paramétrico ótico acima do limiar de oscilação, são de fato Gaussianos, isso foi demonstrado em [Coelho et al., 2015].

2.11 Sistemas Quânticos Abertos

A mecânica quântica na sua descrição fundamental é governada por evoluções unitárias. Tal evolução é determinística e reversível. O mesmo é verdade na física clássica. A evolução segundo as equações de Hamilton é reversível e determinística. Nós sabemos, contudo, que muitos fenômenos na física não são reversíveis e geralmente não determinísticos. Como a irreversibilidade e a aleatoriedade emergem como descrições “efetivas” é um problema fundamental na física, seja na teoria clássica ou quântica. Se torna entretanto, particularmente desagradável na teoria quântica, pois está ligado a questões fundamentais de dissipação (relaxação de energia), decoerência (decaimento de coerência quântica), medida (o surgimento de um valor clássico) e ainda mais abrangente, o surgimento da descrição clássica de um fenômeno a partir de um mundo fundamentalmente quântico.

2.11.1 Equação Mestra

Para tratar de sistemas ditos “abertos” devemos usar um formalismo que leve em consideração a perda de informação do sistema quando ele interage com o ambiente, também chamado de reservatório. A dinâmica do sistema + reservatório é unitária e pode ser tratada com a equação de Schrödinger, porém, quando não temos controle ou simplesmente não podemos observar o que acontece com o reservatório a única informação que temos vem do sistema, essa perda de energia

⁶Os fatores são alterados para que o ruído quântico padrão seja igual a 1, isso torna a análise experimental mais simples.

para o reservatório é característica de uma evolução não unitária e irreversível. Considere a Hamiltoniana total, considerando o sistema completo como fechado

$$\hat{H}_{SA} = \hat{H}_S + \hat{H}_A + \hat{H}_I, \quad (2.11.1)$$

onde, $\hat{H}_{SA}$ é a Hamiltoniana do sistema completo, $\hat{H}_A$ é a Hamiltoniana do ambiente e deve possuir um número de graus de liberdade muito maior do que o sistema. $\hat{H}_S$ é a Hamiltoniana do sistema a ser estudado e $\hat{H}_I$ descreve a interação do ambiente com o sistema, ver figura 2.8. A evolução do estado é descrita pela equação

$$\frac{d\hat{\rho}_{SA}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{SA}(t), \hat{\rho}_{SA}(t)], \quad (2.11.2)$$

desejamos encontrar a dinâmica do sistema de interesse sem nos preocuparmos com o que acontece com o ambiente, ou seja, descrever a evolução de um estado marginal do sistema dado uma evolução no sistema completo, sistema + ambiente. Sendo $\hat{\rho}_S$ representando o estado do sistema, teremos

$$\hat{\rho}_s(t) = \text{Tr}_A \left\{ \hat{U}_{SA}(t) \hat{\rho}_{SA}(0) \hat{U}_{SA}^\dagger(t) \right\}. \quad (2.11.3)$$

É importante notar que se o estado inicial do sistema é puro essa evolução geralmente leva a um estado misto, isso é devido ao emaranhamento do sistema com o ambiente que ocorre pela interação. A equação mais geral que descreve um sistema irreversível, na aproximação

Figura 2.8: Representação da separação ambiente e sistema, o ambiente deve por definição possuir um número de graus de liberdade muito maior do que o sistema estudado.

Markoviana, foi derivada por G. Lindblad [Lindblad, 1976]. Não trataremos de demonstrar a equação obtida, pois está fora das intenções do texto. Para um operador de densidade reduzido $\hat{\rho}_S = \hat{\rho}$ que representa o sistema, a equação tem a forma

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] - \sum_{\mu} \gamma_{\mu} (\hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu} \hat{\rho} - 2\hat{L}_{\mu} \hat{\rho} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} + \hat{\rho} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu}). \quad (2.11.4)$$

Esta é a *equação mestra na forma de Lindblad*, é a equação diferencial mais geral para o operador de densidade $\hat{\rho}$ que descreve um sistema interagindo com um reservatório térmico na aproximação Markoviana preservando as propriedades desejadas de uma matriz de densidade física. Os operadores $\hat{L}_{\mu}$ são conhecidos como operadores de Lindblad e os coeficientes γ_{μ} estão ligados as taxas de decaimento nos processos descritos pelos operadores de Lindblad.

2.12 Representação de Wigner da Equação Mestra

A representação de Wigner da equação mestra pode ser encontrada de maneira simples. Primeiro, encontramos uma equação diferencial para a função $\hat{\chi}(\beta)$ definida em (2.8.2). Usamos a equação mestra e a transformamos em uma equação diferencial para $\hat{\chi}(\beta)$, multiplicando os dois lados da equação por $\hat{D}$ e tomando o traço temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} \longrightarrow \text{Tr} \left\{ \hat{D}(\beta) \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} \right\}, \quad (2.12.1)$$

expressando o operador deslocamento na forma normal, temos que

$$\hat{D}(\beta) = e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}} = e^{-|\beta|^2/2} e^{\beta \hat{a}^\dagger} e^{-\beta^* \hat{a}}, \quad (2.12.2)$$

e assim podemos encontrar as relações

$$\hat{a}^\dagger \hat{D}(\beta) = \left(\frac{\beta^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \hat{D}(\beta), \quad (2.12.3a)$$

$$\hat{D}(\beta) \hat{a} = \left(-\frac{\beta}{2} - \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) \hat{D}(\beta). \quad (2.12.3b)$$

$$(2.12.3c)$$

Expressando o operador $\hat{D}(\beta)$ agora na forma antinormal,

$$\hat{D}(\beta) = e^{|\beta|^2/2} e^{-\beta^* \hat{a}} e^{\beta \hat{a}^\dagger}, \quad (2.12.4)$$

chegamos nas relações

$$\hat{D}(\beta) \hat{a}^\dagger = \left(-\frac{\beta^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \hat{D}(\beta), \quad (2.12.5a)$$

$$\hat{a} \hat{D}(\beta) = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) \hat{D}(\beta). \quad (2.12.5b)$$

Estas relações nos permitem expressar qualquer combinação de produtos dos operadores $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{D}$ como operadores diferenciais agindo sobre $\hat{D}$, que será útil na transformação de representação. Feita a substituição dos produtos na equação diferencial para $\chi(\beta)$, basta fazer a correspondência

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\alpha) = \int e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\beta) d^2 \beta, \quad (2.12.6)$$

para encontrar a equação mestra na representação de Wigner. Integrais importantes que apareceram dependendo dos produtos de operadores podem ser encontradas da forma:

$$\int e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \beta \chi(\beta) d^2 \beta = -\frac{\partial}{\partial \alpha^*} W(\alpha), \quad (2.12.7)$$

$$\int e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \beta^* \chi(\beta) d^2 \beta = \frac{\partial}{\partial \alpha} W(\alpha), \quad (2.12.8)$$

$$\int e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \frac{\partial}{\partial \beta} \chi(\beta) d^2 \beta = \alpha^* W(\alpha), \quad (2.12.9)$$

$$\int e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \chi(\beta) d^2 \beta = -\alpha W(\alpha). \quad (2.12.10)$$

Termos mais complexos envolvendo produto de ordem superior podem ser encontrados facilmente, como

$$\int e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \beta^* \frac{\partial}{\partial \beta^*} \beta \chi(\beta) d^2 \beta = -\frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha W(\alpha)]. \quad (2.12.11)$$

Fazendo essas correspondências, encontramos a evolução temporal da função de Wigner.

CAPÍTULO 3

OSCILADOR PARAMÉTRICO ÓTICO CLÁSSICO

*“Physics would be dull and life most unfulfilling
if all physical phenomena around us were linear.
Fortunately, we are living in a nonlinear world.
While linearization beautifies physics,
nonlinearity provides excitement in physics.”*

(Y. R. Shen, The Principles of Nonlinear Optics)

Neste capítulo introduziremos os principais conceitos para entender o funcionamento do oscilador paramétrico ótico (OPO), como um dispositivo baseado em um processo não linear envolvendo três campos. Foi com o surgimento do laser¹ que potências suficientemente altas de luz coerente se tornaram disponíveis, com isso foi possível estudar a interação entre luz e matéria em condições em que os modelos lineares deixam de valer [Boyd, 2008]. O marco inicial da ótica não linear foi o primeiro experimento conduzido por Franken *et al.* [Franken *et al.*, 1961], onde um laser de rubi no comprimento de onda 694 nm é utilizado para bombear um cristal de quartzo levando a geração de luz em 347 nm, segundo harmônico do comprimento de onda de bombeio. O processo de conversão paramétrica descendente pode ser entendido como o inverso da geração de segundo harmônico. Onde um fóton do bombeio é convertido em dois fótons, chamados sinal e complementar. É esse efeito, juntamente com uma cavidade ressoante para os fótons gerados que é responsável pela geração de feixes intensos no OPO, levando a correlações puramente quânticas.

3.1 Processo de Mistura de Três Ondas

Sabemos que em primeira aproximação a polarização induzida em um meio dielétrico é proporcional ao campo elétrico atuando sobre o material. Porém, se o campo é suficientemente forte o regime de resposta linear pode ser ultrapassado e efeitos devido a contribuições não lineares são observados². Quando termos envolvendo produtos dos campos elétricos em um meio são incluídos na expressão da polarização, energia pode ser trocada entre diferentes campos de entrada mesmo que de frequências diferentes. No regime não linear a relação entre o campo elétrico e a polarização induzida é dada por

$$P_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_j \sum_k \sum_l \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots, \quad (3.1.1)$$

onde P_i , E_i , E_j e E_k são as componentes cartesianas dos vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{E}$ e os índices tomam os valores (x, y, z) . Os coeficientes de proporcionalidade de cada termo da soma (3.1.1), definem as susceptibilidades lineares e não lineares, onde desconsideramos a sua dependência com a frequência. A susceptibilidade linear $\chi_{ij}^{(1)}$ é um tensor de ordem 2 com 9 componentes, $\chi_{ijk}^{(2)}$ é a susceptibilidade não linear de segunda ordem, sendo um tensor de ordem 3 com 27 componentes, enquanto $\chi_{ijkl}^{(3)}$ é um tensor de ordem 4, e assim por diante. Para intensidades dos lasers típicos,

¹Sigla em inglês que significa: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

²Efeitos não lineares não são observados quando a luz viaja no espaço livre, a “não linearidade” está no meio pelo qual a luz viaja, não na luz em si.

os termos não lineares da (3.1.1) vão à zero muito rápido, é suficiente tomar apenas o primeiro termo não linear. Em materiais centrossimétricos, onde a polarização não é alterada quando seus constituintes sofrem a transformação de inversão da posição em relação à origem ($\mathbf{r} \Rightarrow -\mathbf{r}$) a susceptibilidade não linear de segunda ordem é nula e $\chi^{(3)}$ deve ser levado em consideração como primeiro fator de correção. Nos concentraremos em efeitos não lineares envolvendo apenas $\chi^{(2)}$, sendo a base para o estudo do oscilador paramétrico ótico. A equação de onda em um meio dielétrico pode ser escrita partindo das equações de Maxwell

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (3.1.2)$$

dividindo explicitamente a polarização linear da não linear $\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}$, temos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (3.1.3)$$

onde $n^2 = 1 + \chi^{(1)}$ é o índice de refração, o papel da polarização não linear é agir como uma fonte de radiação que pode conter termos oscilando em frequências diferentes daquelas do campo elétrico. Escrevendo o campo em termo de uma soma de ondas monocromáticas na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \hat{\mathbf{e}}_l \mathcal{E}_l e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + c.c., \quad (3.1.4)$$

para simplificar o tratamento da equação (3.1.3) consideraremos apenas ondas que se propagam na mesma direção z e procuraremos soluções tais que a amplitude $\mathcal{E}_l(z)$ dependa somente de z e variem muito pouco na escala do comprimento de onda $\lambda_i = 2\pi/k_i$, esta é a chamada *aproximação de envelope lentamente variável*, para tal condição temos que

$$\left| \frac{d\mathcal{E}_l(z)}{dz} \right| \ll k_l |\mathcal{E}_l(z)|, \quad \left| \frac{d^2 \mathcal{E}_l(z)}{dz^2} \right| \ll k_l \left| \frac{d\mathcal{E}_l(z)}{dz} \right|. \quad (3.1.5)$$

Assim, o Laplaciano na equação (3.1.3) toma a forma

$$\nabla^2 \mathbf{E}(z, t) = \sum_l \left[-k_l^2 \mathcal{E}_l(z) + i2k_l \frac{d\mathcal{E}_l(z)}{dz} + \frac{d^2 \mathcal{E}_l(z)}{dz^2} \right] \hat{\mathbf{e}}_l e^{i(k_l z - \omega_l t)}. \quad (3.1.6)$$

Impondo as condições (3.1.5), podemos desprezar os termos de $d^2 \mathcal{E}/dz^2$, levando a equação de propagação tornar-se

$$\sum_l 2ik_l \frac{d\mathcal{E}_l(z)}{dz} \hat{\mathbf{e}}_l \exp\{i(k_l z - \omega_l t)\} + c.c. = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (3.1.7)$$

decompondo $\mathbf{P}$ em componentes monocromáticas,

$$\mathbf{P}_{NL}(z, t) = \sum_l \hat{\mathbf{e}}_l \mathcal{P}_{NL}^{\omega_l}(z) \exp(-i\omega_l t) + c.c., \quad (3.1.8)$$

obtemos um conjunto de equações que relacionam as amplitudes com as componentes $\mathcal{P}_{NL}^{\omega_l}$ do vetor de polarização

$$\frac{\mathcal{E}_l(z, t)}{dz} e^{ik_l z} = i \frac{\omega_l}{2\epsilon_0 n_l c} \mathcal{P}_{NL}^{\omega_l}(z). \quad (3.1.9)$$

Tudo que precisamos fazer é expressar $\mathcal{P}_{NL}^{\omega_l}$ em termos das amplitudes $\mathcal{E}_m(z, t)$ no ponto z , para obter um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas, que podem ser resolvidas obtendo as amplitudes $\mathcal{E}_l(z)$ para as diferentes ondas envolvidas no processo.

Considere o caso no qual duas ondas eletromagnéticas monocromáticas de frequências ω_1 e ω_2 se superpõem em um material não linear. O campo total³ é $E(t) = E_1(t) + E_2(t)$, onde

$$E_1(t) = \mathcal{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + c.c., \quad (3.1.10)$$

$$E_2(t) = \mathcal{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad (3.1.11)$$

A polarização de segunda ordem fica

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= \epsilon_0 \chi^{(2)} E(t)^2 \\ &= \epsilon_0 \chi^{(2)} [\mathcal{E}_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + \mathcal{E}_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + 2(|\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2) \\ &\quad + 2\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2 e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + \mathcal{E}_2^* e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}) + c.c.] \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

A equação acima abrange uma grande gama de fenômenos não lineares, os termos oscilando no dobro da frequência de um dos campos iniciais representam a geração de segundo harmônico ou *dobramento de frequência*, os termos constantes no tempo representam o processo de *retificação ótica*, os termos envolvendo a soma das frequências iniciais e a diferença representam a *soma de frequências* e a *diferença de frequências*, respectivamente. É fácil mostrar que, se o processo de soma de frequências $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ocorre, os processos de diferença $\omega_1 = \omega_0 - \omega_2$ e $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$ também são favoráveis e não envolvem outras frequências além de ω_0 , ω_1 e ω_2 . Terminamos com o sistema fechado de equações diferenciais acopladas:

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{dz} = i \frac{\omega_0}{n_0 c} \chi^{(2)} \mathcal{E}_1(z) \mathcal{E}_2(z) e^{-i\Delta k}, \quad (3.1.13)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} = i \frac{\omega_1}{n_1 c} \chi^{(2)} \mathcal{E}_0(z) \mathcal{E}_2^*(z) e^{i\Delta k}, \quad (3.1.14)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{dz} = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \chi^{(2)} \mathcal{E}_0(z) \mathcal{E}_1^*(z) e^{i\Delta k}, \quad (3.1.15)$$

onde

$$\Delta k = k_0 - k_1 - k_2. \quad (3.1.16)$$

Esse sistema portanto acopla os três processos eficientes, chamamos esse processo de *mistura de três ondas* sendo a base para entender o oscilador paramétrico ótico.

3.2 Introdução ao Casamento de Fase

Vamos focar na equação (3.1.15), porém a mesma discussão pode ser estendida para as equações (3.1.13) e (3.1.14). Podemos reescrever a equação (3.1.15) da forma

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{dz} e^{ik_2} = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \chi^{(2)} \mathcal{E}_0(z) \mathcal{E}_1^*(z) e^{i(k_0-k_1)}, \quad (3.2.1)$$

o termo e^{ik_2} no lado esquerdo da equação tem um comprimento de onda $2\pi/k_2$ e o termo oscilante no lado direito da equação possui um comprimento de onda de $2\pi/(k_0 - k_1)$, o termo da direita está relacionado com a polarização induzida e o termo da esquerda com o campo ótico gerado. Sabemos pelo teorema de Poynting que a direção do fluxo de energia está relacionado com o sinal de

$$\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\rangle. \quad (3.2.2)$$

Assim, se os comprimentos de onda da polarização e do campo não são iguais, a relação de fase entre o campo e a polarização muda continuamente durante a propagação pelo meio não linear,

³Desconsiderando a polarização dos campos.

o que resulta em uma troca periódica de energia entre o campo e a polarização. O período espacial no qual a energia vai para o campo e volta para a polarização é o comprimento de coerência. Se as duas fases são iguais dizemos que o processo está em *casamento de fase*, nessa situação o comprimento de coerência se torna infinito, ou seja, a energia é transferida para o campo e não retorna à polarização. Tipicamente o comprimento de coerência é muito pequeno para que haja uma intensidade apreciável do campo gerado, é preciso satisfazer a condição $\Delta k = 0$ para alcançar a máxima eficiência de conversão.

Os processos de interação entre os campos se dá respeitando as leis de conservação da energia e momento, isso impõe que a troca de energia entre os modos do campo devem obedecer a certas restrições. Pensando em termo de fótons, podemos imaginar que em um determinado processo não linear, uma quantidade inicial n de fótons é convertida em um outro número inteiro m de fótons devendo respeitar

$$\hbar \sum_i^n \omega_i = \hbar \sum_f^m \omega_f, \quad \text{e} \quad \hbar \sum_i^n \mathbf{k}_i = \hbar \sum_f^m \mathbf{k}_f, \quad (3.2.3)$$

onde os índices i e f nas somas representam os fótons iniciais e finais, respectivamente. Na

Figura 3.1: Representações gráficas do casamento de fase em um processo de mistura de três ondas. (a) Conservação da energia (b) Conservação do momento.

figura 3.1, podemos ver uma representação visual da conservação da energia e do momento em um processo de mistura de três ondas que discutiremos a seguir. Imagine a situação onde três ondas, de frequências ω_0 , ω_1 e ω_2 se propagando colinearmente em um meio possuindo não linearidade de segunda ordem e não dispersivo, tal que para essas ondas:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_0 = k_1 + k_2, \quad (3.2.4)$$

em um meio não dispersivo, a condição de casamento de fase é automaticamente satisfeita se $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, pois o índice de refração é o mesmo para os três comprimentos de onda. Contudo, como todos os materiais apresentam efeitos de dispersão, ondas com frequências diferentes terão índices de refração diferentes, levando à condição geral

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad n_0 \omega_0 = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2, \quad (3.2.5)$$

essas duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente, uma sendo independente da outra. Na maioria dos casos, tal condição é muito difícil de ser satisfeita e a birrefringência de alguns materiais anisotrópicos é usada para compensar a dispersão. Um controle preciso dos índices de refração pode ser alcançado por uma escolha apropriada da polarização da luz, orientação do cristal ou pelo controle da temperatura.

Considere um processo de geração de diferença de frequências no limite onde a eficiência de conversão é muito pequena e não há praticamente mudanças nos campos de entrada. Onde

uma onda ω_0 e outra ω_1 incidem em um cristal não linear com susceptibilidade não linear de segunda ordem, os campos $\mathcal{E}_0$ e $\mathcal{E}_1$ são considerados constantes e as equações (3.1.13) e (3.1.14) são desconsideradas. Sobra apenas a equação (3.1.9) que pode ser integrada diretamente

$$\mathcal{E}_2 = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \chi^{(2)} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* \int_0^L e^{i\Delta k z} dz = i 2 \frac{\omega_2}{n_2 c \Delta k} \chi^{(2)} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* e^{i\Delta k z/2} \text{senc} \left(\frac{\Delta k L}{2} \right), \quad (3.2.6)$$

onde L é o comprimento do cristal. A intensidade do campo gerado é ⁴

$$I_2 = \left(\frac{\omega_2 L}{n_2 c} \chi^{(2)} \right)^2 |\mathcal{E}_0|^2 |\mathcal{E}_1|^2 \text{senc}^2 \left(\frac{\Delta k L}{2} \right). \quad (3.2.7)$$

Nas expressões para a amplitude e intensidade do campo vemos que há um batimento com uma periodicidade e amplitude dependentes de Δk . Para a equação (3.2.7) a periodicidade é $2\pi\Delta k$ e define o chamado *comprimento de coerência* L_c , definido por

$$L_c = \frac{\pi}{|\Delta k|}, \quad (3.2.8)$$

o comprimento de coerência se torna infinito quando $\Delta k \rightarrow 0$. Claramente, a condição $\Delta k = 0$ é o melhor caso possível para a escolha de um conjunto de ondas de entrada. O casamento de fase dita se a eficiência máxima é alcançável e também qual é a tolerância do sistema a variáveis como temperatura e a tunabilidade dos comprimentos de onda.

3.3 Propagação em Cristais

A equação de onda é de simples dedução quando consideramos ϵ um escalar. Trataremos agora de meio anisotrópicos, tais como cristais birrefringentes. Para meios onde a absorção do material é nula ϵ é descrito por uma matriz Hermitiana ϵ , o que garante que existe um sistema de coordenadas onde ϵ é diagonal. Esse sistema de coordenadas é conhecido sistema de coordenadas do eixo principal onde existe uma relação simples entre $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$, que pode ser escrita da forma matricial

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{E}. \quad (3.3.1)$$

Quando trabalhamos na base dos eixos principais, se o campo elétrico está na direção de um dos eixos principais (ou eixos cristalográficos) então a relação entre $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ se assemelha ao caso isotrópico. Na maioria dos casos, esse é o sistema de coordenadas preferencial. Podemos expressar novamente a relação em termo dos índices de refração

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} \mathbf{E}, \quad (3.3.2)$$

onde $n_i^2 = \epsilon_{ii}/\epsilon_0$ e n_x , n_y , e n_z são chamados índices principais. Para o caso geral onde $n_x \neq n_y \neq n_z$ o cristal é chamado biaxial, por convenção $n_z > n_y > n_x$ (biaxial positivo) e $n_x > n_y > n_z$ (biaxial negativo). Quando dois dos seus índices principais são iguais, o cristal é chamado de uniaxial, por convenção $n_x = n_y = n_o$, esse será o chamado índice de refração ordinário. Se $n_z > n_o$, o cristal é chamado de uniaxial positivo, e se o inverso acontece, o cristal é dito uniaxial negativo.

⁴A função seno cardinal é definida como $\text{senc}(x) \equiv \text{sen}(x)/x$.

Para entender como se dá a propagação em um cristal anisotrópico considere uma onda plana viajando em uma direção $\mathbf{k}$. Usando as equações de Maxwell e a equação $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, obtemos

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}, \quad (3.3.3)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H}. \quad (3.3.4)$$

Substituindo (3.3.4) dentro da equação (3.3.3), temos

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2 \mu_0 \mathbf{D}. \quad (3.3.5)$$

Usando $\mathbf{E} = \epsilon^{-1} \mathbf{D}$, obtemos

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \epsilon^{-1} \mathbf{D}) = -\omega^2 \mu_0 \mathbf{D}, \quad (3.3.6)$$

essa é uma equação de autovalores que $\mathbf{D}$ deve satisfazer. Podemos simplificar a expressão acima, utilizando $\boldsymbol{\eta} = \epsilon_0 \epsilon^{-1}$, $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{u}}$, $n = k/k_0$, e $k_0 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, o que leva a

$$-\hat{\mathbf{u}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\eta} \mathbf{D}) = \frac{1}{n^2} \mathbf{D}. \quad (3.3.7)$$

A operação $-\hat{\mathbf{u}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\eta} \mathbf{D})$ pode ser interpretada como uma projeção do vetor $\boldsymbol{\eta} \mathbf{D}$ em um plano normal a $\hat{\mathbf{u}}$. Reescrevemos a equação (3.3.7) na forma

$$\mathbf{P}_u \boldsymbol{\eta} \mathbf{D} = \frac{1}{n^2} \mathbf{D}, \quad (3.3.8)$$

onde $\mathbf{P}_u$ é um operador representando projeção. A equação (3.3.8) é uma equação de autovalores para o operador $\mathbf{P}_u \boldsymbol{\eta}$ com autovalores $1/n^2$ e autovetores $\mathbf{D}$. Sendo $\mathbf{D}$ perpendicular a $\mathbf{k}$. Há apenas duas soluções possíveis para (3.3.8): os dois autovalores $1/n_a^2$ e $1/n_b^2$ dos respectivos autovetores $\mathbf{D}_a$ e $\mathbf{D}_b$, que representam dois modos normais respectivos à polarização.

A interpretação geométrica do problema de autovalores (3.3.8) é simples. O tensor $\boldsymbol{\eta}$ possui uma representação geométrica pela sua representação quadrática, a *elipsoide de índice*, enquanto o operador $\mathbf{P}_u \boldsymbol{\eta}$ descreve uma projeção sobre um plano normal a $\hat{\mathbf{u}}$. O problema de autovalores será então equivalente a encontrar os eixos principais de uma elipse, formada pela interseção de um plano normal a $\hat{\mathbf{u}}$, com a elipsoide de índice, a *elipse de índice*, na figura 3.2 detalhamos essa interpretação geométrica.

Figura 3.2: Determinação dos modos normais a partir da elipsoide de índice.

Para o caso especial de cristais uniaxiais ($n_x = n_y = n_o$) escreveremos $n_z = n_e$. Uma onda se propagando na direção $\mathbf{k}$ formando um ângulo θ com o eixo ótico, a elipse de índice terá semieixos n_o e $n^e(\theta)$ como solução da equação de autovalores, onde

$$\frac{1}{n^e(\theta)} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}}. \quad (3.3.9)$$

Ao modo com índice de refração n_o chamamos de *onda ordinária* e não depende do ângulo θ , o modo com índice de refração $n^e(\theta)$ é chamado de *onda extraordinária*, com índice variando de n_o para $\theta = 0^\circ$ até n_e para $\theta = 90^\circ$.

Cristais biaxiais possuem três índices principais diferentes. Geralmente, ao invés de considerarmos um vetor de direção de propagação $\mathbf{k}$ arbitrário, é possível fazer um cristal biaxial agir como um cristal uniaxial restringindo o vetor $\mathbf{k}$ a se propagar em um dos planos principais (xy , yz ou xz) e a mesma nomenclatura para cristais uniaxiais pode ser usada. Por exemplo, se escolhermos o plano xz o vetor $\mathbf{k}$ está sobre esse plano e automaticamente a polarização perpendicular ao plano (na direção do eixo y) terá um índice de refração que é independente da direção de $\mathbf{k}$ no plano xz , correspondendo a uma onda ordinária. A polarização ortogonal ao eixo y estará no plano xz e corresponderá a diferentes índices de refração de acordo com a direção de $\mathbf{k}$ no plano xz , sendo característico de uma onda extraordinária.

É fácil ver que para uma onda extraordinária $\mathbf{k}$ e $\mathbf{E}$ não são perpendiculares, isso leva ao importante efeito de “walk-off” ou afastamento, que pode diminuir a eficiência de alguns aparatos óticos não lineares. Pelas equações de Maxwell, podemos mostrar que o vetor de Poynting para uma onda extraordinária forma um ângulo ρ com o vetor $\mathbf{k}$, e para ondas ordinárias, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ são paralelos, do mesmo modo $\mathbf{k}$ e $\mathbf{S}$ também são paralelos. O ângulo ρ de “walk-off” no caso de cristais uniaxiais é dado por

$$\rho = \tan^{-1} \left(\frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta \right) - \theta, \quad (3.3.10)$$

ou equivalentemente,

$$\tan \rho = \frac{n_e^2(\theta) \sin(2\theta)}{2} \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right). \quad (3.3.11)$$

Sendo a direção de propagação do fluxo de energia dada pelo vetor de Poynting, o que ocorre é uma separação física das duas ondas que estão se propagando no meio birrefringente: a onda extraordinária se afasta da onda ordinária (ver figura 3.3), reduzindo a interação entre as duas ondas.

Figura 3.3: Ilustração do efeito de “walk-off” em meios birrefringentes.

3.4 Tipos de Casamento de Fase

Estamos interessados em estudar as condições para que ocorra o processo de mistura de três ondas. Para que as condições de casamento de fase sejam satisfeitas é preciso usar da birrefringência de alguns cristais não lineares para que o processo seja eficiente. Primeiro,

mostraremos a razão da necessidade de utilizar a birrefringência. Considere que a seguinte condição de casamento de fase deve ser satisfeita

$$n_0 k_0 = n_1 k_1 + n_2 k_2, \quad (3.4.1)$$

sendo n_i o índice de refração correspondendo a propagação da onda possuindo frequência ω_i e $k_i \omega_i / c$. Assumindo a propagação colinear das três ondas, chegamos à relação

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{n(\omega_0) - n(\omega_2)}{n(\omega_0) - n(\omega_1)}, \quad (3.4.2)$$

que para dispersão normal ($n(\omega_0) > \{n(\omega_1), n(\omega_2)\}$) só pode ser satisfeita se houver uma linha de absorção entre ω_0 e ω_2 . Porém, procuramos processos eficientes e a utilização de regiões de absorção do cristal torna esse método desinteressante. É por esse motivo que devemos usar a birrefringência, ou seja, a dependência do índice de refração para diferentes polarizações.

Existem dois tipos de casamento de fase por birrefringência. O chamado casamento de fase tipo I, onde os feixes sinal e complementar possuem a mesma polarização, ortogonal com a polarização de bombeio. E o casamento de fase tipo II, onde sinal e complementar possuem polarizações ortogonais.

Para um casamento de fase tipo I, em cristais negativos ($n_e < n_o$), devemos ter

$$\mathbf{k}_0^e(\theta) = \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^o, \quad (3.4.3)$$

em cristais positivos ($n_e > n_o$)

$$\mathbf{k}_0^o = \mathbf{k}_1^e(\theta) + \mathbf{k}_2^e(\theta). \quad (3.4.4)$$

Para um casamento de fase tipo II, em cristais negativos, teremos

$$\mathbf{k}_0^e(\theta) = \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e(\theta), \quad \text{ou} \quad \mathbf{k}_0^e(\theta) = \mathbf{k}_1^e(\theta) + \mathbf{k}_2^o, \quad (3.4.5)$$

e para cristais positivos,

$$\mathbf{k}_0^o = \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e(\theta), \quad \text{ou} \quad \mathbf{k}_0^o = \mathbf{k}_1^e(\theta) + \mathbf{k}_2^o. \quad (3.4.6)$$

No processo de análise das correlações entre os feixes, de fato precisamos separá-los, é mais simples utilizar um cristal tipo II para realizar a separação através de um cubo polarizador, que é bastante eficiente. Para um cristal tipo I, faz-se necessário a utilização de algum elemento dicróico. Podemos usar espelhos com diferentes coeficientes de reflexão, para os diferentes comprimentos de onda de sinal e complementar, usualmente precisando trabalhar muito distante da degenerescência ou grades de difração (cujo alinhamento dos feixes a partir da saída da grade depende dos comprimentos de onda incidentes).

3.5 Quase Casamento de Fase

É possível alcançar a condição de casamento de fase, eficientemente, sem o uso da birrefringência no cristal. Essa técnica é chamada de quase casamento de fase [Fejer et al., 1992], do inglês *quasi-phase matching* (QPM), foi na verdade a primeira proposta para se alcançar casamento de fase em cristais não lineares, porém, dificuldades técnicas na engenharia de fabricação de cristais, fizeram o método que utiliza a birrefringência inicialmente mais difundido. Hoje, cristais com quase casamento de fase são empregados largamente em diversas aplicações em ótica não linear.

Basicamente, técnicas de quase casamento de fase introduzem uma troca periódica na fase da polarização não linear mantendo a transferência de energia entre a polarização e os campos gerados pela interação não linear. Como vimos, se a condição de casamento de fase não é

satisfeita, uma troca periódica de energia entre a polarização e os campos gerados acontece. O comprimento de coerência L_c está ligado ao período espacial em que essa troca se repete. Se o cristal é reorientado, de maneira em que a fase da polarização é invertida sempre antes da intensidade do campo diminuir, é possível fazer com que a intensidade cresça continuamente, possibilitando a geração de campos intensos sem a utilização da birrefringência.

Certos tipos de reorientação do material alteram as suas propriedades lineares. Porém, operações tais como inversão, deixam as propriedades lineares dos materiais inalteradas; mas levam a uma mudança de sinal no coeficiente não linear. Imagine que temos um cristal com não linearidade de segunda ordem, tal que seu coeficiente não linear é uma função da posição e possui a propriedade de inverter de sinal periodicamente em um dado comprimento (ver figura 3.4).

Utilizando o mesmo exemplo que usamos para introduzir os efeitos do casamento de fase, consideraremos dois campos intensos que permanecem essencialmente constantes propagando-se nesse cristal, vale novamente a equação (3.2.3), porém agora $\chi^{(2)} \rightarrow \chi^{(2)}(z)$, teremos

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{dz} = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \chi^{(2)}(z) \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* e^{i\Delta k}, \quad (3.5.1)$$

que pode ser diretamente integrada

$$\mathcal{E}_2 = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* \int_0^L \chi^{(2)}(z) e^{i\Delta k} dz. \quad (3.5.2)$$

Para tal estrutura periódica a função $\chi^{(2)}(z)$ pode ser representada por uma série de Fourier da forma

$$\chi^{(2)}(z) = \chi \sum_m Q_m e^{-ik_m z}. \quad (3.5.3)$$

Substituindo a expressão acima na equação (3.5.2), obtemos

$$\mathcal{E}_2 = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* \chi \sum_m Q_m \int_0^L e^{i(\Delta k - k_m)z} dz, \quad (3.5.4)$$

e o paralelo com o que já vimos sobre casamento de fase pode ser feito definindo

$$\Delta k'_m \equiv \Delta k - k_m. \quad (3.5.5)$$

Que pode ser entendido como um novo termo de casamento de fase. Como os coeficientes Q_m não dependem de z podem ser retirados da integral e o resultado obtido é

$$\mathcal{E}_2 = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* \chi l \sum_m Q_m e^{i\Delta k'_m l/2} \text{senc}(\Delta k'_m l/2). \quad (3.5.6)$$

Notando que apenas um valor para m nos retornará $\Delta k'_m = 0$, ou seja, é solução de

$$\Delta k'_m = \Delta k - \frac{2\pi}{\Lambda} m = 0, \quad (3.5.7)$$

o somatório em m pode ser eliminado uma vez que as contribuições para outros valores de m serão pequenas. Assim, o resultado obtido é a amplitude

$$\mathcal{E}_2 = i \frac{\omega_2}{n_2 c} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* \chi l Q_m e^{i\Delta k'_m l/2} \text{senc}(\Delta k'_m l/2), \quad (3.5.8)$$

que difere por um fator de multiplicação, da forma encontrada para o casamento de fase normal (com um casamento de fase $\Delta k'_m = 0$). Para $\Delta k'_m = 0$, a geração do campo $\mathcal{E}_2$ é eficiente. De fato,

Figura 3.4: Ilustração de um cristal com quase casamento de fase em um processo de geração de segundo harmônico. A inversão periódica do vetor de polarização em um comprimento de coerência faz com que o processo seja eficiente.

uma estrutura com quase casamento de fase leva a uma amplitude reduzida por um fator Q_m e a uma intensidade com um fator Q_m^2 comparados com (3.2.6), figura 3.4. É fácil mostrar que em um material no qual o coeficiente não linear é invertido de sinal periodicamente, para $m = 1$ temos

$$\mathcal{E}_2 = \frac{2}{\pi} \mathcal{E}_2 (\text{birrefringente}), \quad (3.5.9)$$

e a periodicidade necessária para o quase casamento de fase, $\Delta k'_m = 0$, será

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\Delta k} m. \quad (3.5.10)$$

Toda dificuldade na utilização desta técnica está na correta construção de uma estrutura “quase periódica” no cristal. Em princípio, isso possibilita qualquer processo de mistura de ondas, uma vez que a estrutura periódica pode ser implementada. Como um exemplo, considere as ondas de entrada se propagando sobre o plano xy , com polarização na direção do eixo z , para um quase casamento de fase de primeira ordem ($m = 1$), a periodicidade requerida é dada por

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{1}{(n_{z0}/\lambda_0) - (n_{z1}/\lambda_1) - (n_{z2}/\lambda_2)}, \quad (3.5.11)$$

onde $n_{iz}(\lambda_i) = n_i$, os índices podem ser encontrados pela equação de Sellmeier [Saleh e Teich, 2007].

3.6 Cavidades Óticas

Cavidades óticas são basicamente formadas por um conjunto de espelhos que confinam a luz em uma determinada região do espaço. O exemplo mais simples é o arranjo de dois espelhos alinhados no mesmo eixo ótico, esse esquema é mais conhecido como *interferômetro de Fabry-Perot*. Após entrar na cavidade a luz sofre múltiplas reflexões, a interferência entre as múltiplas ondas dentro da cavidade provoca efeitos interessantes nos campos refletidos e

transmitidos dependendo fortemente de quão perto estamos da condição de ressonância, ou seja, a condição para que ocorra interferência construtiva. Para que ocorra ressonância o caminho ótico percorrido em uma volta completa da luz dentro da cavidade deve ser um múltiplo inteiro do seu comprimento de onda. Devido as propriedades seletoras de modos (espectrais e espaciais) cavidades óticas são largamente utilizadas em espectroscopia e na construção de lasers onde exercem um papel ainda mais fundamental, servindo de sistema de realimentação permitindo que a oscilação ocorra.

Considere uma cavidade com espelho de entrada M_1 e espelho de saída M_2 com coeficientes de reflexão $R_i = r_i^2$ e transmissão $T_i = t_i^2$, onde $i \in \{1, 2\}$ e os índices 1, 2 referem-se ao espelho de entrada e saída, respectivamente (ver figura 3.5). Os espelhos estão separados por uma distância $L/2$ e vale a relação $R_i + T_i = 1$. O campo de entrada, uma onda de frequência ν , será descrito pelo envelope complexo α_e . Logo após a entrada na cavidade (transmissão pelo espelho de entrada) o campo é

$$\alpha_0 = t_1 \alpha_e, \quad (3.6.1)$$

após uma volta completa, o campo dentro da cavidade é dado por

Figura 3.5: Esquema básico de uma cavidade linear.

$$\alpha_1 = r_1 r_2 t_1 \alpha_0 e^{i\delta\phi}, \quad (3.6.2)$$

onde $\delta\phi(\nu) = 2\pi\nu L/c$ é a diferença de fase ganha durante uma volta completa. O campo total intracavidade propagante será a soma das infinitas ondas parciais dentro da cavidade. Teremos então

$$\alpha_c = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j, \quad (3.6.3)$$

onde

$$\alpha_{j+1} = r_1 r_2 e^{-i\delta\phi} \alpha_j = g(\nu) \alpha_j, \quad (3.6.4)$$

e a função $g(\nu)$ descreve o efeito total da cavidade sobre o campo durante uma volta completa. Somando todos os termos, temos que

$$\alpha_c = \frac{t_1 e^{-i\delta\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\delta\phi}} \alpha_e, \quad (3.6.5)$$

e o campo contrapropagante é dado por

$$\alpha_{c'} = \frac{t_1 r_2 e^{-i\delta\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\delta\phi}} \alpha_e. \quad (3.6.6)$$

Podemos assim encontrar facilmente as expressões para os campos refletidos e transmitidos pela cavidade. Para o campo transmitido

$$\alpha_t = \frac{t_1 t_2 e^{-i\delta\phi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\delta\phi}} \alpha_e, \quad (3.6.7)$$

e para o campo refletido

$$\alpha_r = -\frac{r_1 - r_2 e^{-i\delta\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\delta\phi}} \alpha_e. \quad (3.6.8)$$

Reflexão e Transmissão

Definiremos a reflexão R como a fração da intensidade incidente que é refletida pela cavidade, da mesma forma a razão entre a intensidade incidente e a parte transmitida pela cavidade define a transmissão T , dadas pelos quadrados dos módulos de $|\alpha_r/\alpha_e|$ e $|\alpha_t/\alpha_e|$:

$$R = \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)}, \quad (3.6.9)$$

$$T = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)}. \quad (3.6.10)$$

A intensidade⁵ do campo intracavidade será dada por

$$I_c = \frac{|\alpha_0|^2}{|1 - g|^2} = \frac{|\alpha_0|^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\delta\phi/2)}, \quad (3.6.11)$$

colocando na forma

$$I_c = \frac{I_{max}}{1 + (2F/\pi) \sin^2(\delta\phi/2)}, \quad (3.6.12)$$

onde

$$I_{max} = \left| \frac{\alpha_0}{1 - r_1 r_2} \right|^2. \quad (3.6.13)$$

Definiremos agora um parâmetro F muito importante, chamado de *finesse* da cavidade

$$F = \pi \frac{(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}. \quad (3.6.14)$$

O intervalo de separação das ressonâncias $\Delta\nu_c = c/L$ em frequência é conhecido como *intervalo espectral livre*. Outro parâmetro importante é a *largura de banda* $\delta\nu_c$ da cavidade, definida como a largura à meia altura dos picos de ressonância, figura 3.6.

Figura 3.6: Exemplos de picos de ressonância de uma cavidade linear para $r_1 = r_2 = 0.8$ e representações gráficas de $\Delta\nu_c$ e $\delta\nu_c$.

⁵No nosso tratamento falaremos de intensidade do campo α_0 como simplesmente $|\alpha|^2$.

3.7 Descrição Clássica do OPO

Quase todas as propriedades do oscilador paramétrico ótico podem ser entendidas a partir de um tratamento clássico. Veremos que a dificuldade de fazer o OPO oscilar está em encontrar uma configuração que há ressonância dos três feixes, bombeio, sinal e complementar além de potência de entrada suficiente para superar o limiar de oscilação. Vamos fazer uma descrição baseada na referência [Debuisschert et al., 1993] que descreve detalhadamente o OPO tipo II, mas pode ser usado para estudar o OPO tipo I com algumas alterações simples.

3.7.1 Equações Básicas

Considere um cristal não linear de comprimento l dentro de uma cavidade ótica tipo anel, conforme descrito na figura (3.7). O espelho de entrada, por onde a luz entra na cavidade, possui coeficientes de reflexão r_j e transmissão t_j . Onde o índice $j = 0, 1, 2$, representam respectivamente bombeio, sinal e complementar⁶. Os outros dois espelhos que constituem a cavidade são perfeitamente refletores. O espelho de entrada também é conhecido como espelho de acoplamento e no nosso caso trataremos de coeficientes de transmissão pequenos, tais que a cavidade possui alta finesse para os três campos, configurando uma cavidade triplamente ressonante. A cavidade linear (tipo Fabry-Perot) que é utilizada na maioria dos casos possui tratamento semelhante, consideraremos no fim do capítulo quais mudanças ocorrem nesse tipo de sistema.

Definiremos o comprimento livre da cavidade por

Figura 3.7: Esquema de um OPO em uma cavidade tipo anel.

$$L = L_{cav} - l, \quad (3.7.1)$$

onde L_{cav} é o comprimento da cavidade sem a presença do cristal. No caso em que os coeficientes de transmissão são pequenos podemos escrevê-los como

$$r_j = 1 - \gamma_j, \quad (3.7.2)$$

$$t_j = \sqrt{2\gamma_j}, \quad (3.7.3)$$

onde $\gamma_j \ll 1$. Os campos dentro da cavidade serão descritos por amplitudes complexas $\alpha_0(z)$, $\alpha_1(z)$ e $\alpha_2(z)$, definidos em uma posição específica z . É mais conveniente definir os campos de forma que $|\alpha_0|^2$, $|\alpha_1|^2$ e $|\alpha_2|^2$ são normalizados para representar o fluxo de fótons. No regime estacionário, as perdas que os campos sofrem ao dar uma volta completa na cavidade, devem se igualar aos ganhos sofridos pela interação não linear devido ao cristal. Após essas simplificações,

⁶Seguiremos essa notação durante todo o texto.

encontramos as relações entre os campos se propagando através do cristal no regime estacionário

$$\alpha_0(l) = \alpha_0(0) - 2\chi^* \alpha_2(0) \alpha_1(0), \quad (3.7.4a)$$

$$\alpha_1(l) = \alpha_1(0) + 2\chi \alpha_0(0) \alpha_2^*(0), \quad (3.7.4b)$$

$$\alpha_2(l) = \alpha_2(0) + 2\chi \alpha_0(0) \alpha_1^*(0), \quad (3.7.4c)$$

χ é um coeficiente de acoplamento que tem a forma

$$\chi = \chi_{ef} l \frac{w_0 w_1 w_2}{w_0^2 w_1^2 + w_0^2 w_2^2 + w_1^2 w_2^2} \left(\frac{\hbar \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\pi \epsilon_0 c^3 n_0 n_1 n_2} \right)^{1/2} \text{senc} \left(\frac{\Delta k l}{2} \right) \exp \left(\frac{i \Delta k l}{2} \right), \quad (3.7.5)$$

w_0 , w_1 e w_2 são as cinturas dos feixes gaussianos dos três feixes interagentes, χ_{ef} é o coeficiente não linear efetivo, ver [Debuisschert et al., 1993]. O casamento de fase é descrito por

$$\Delta k = k_0 - k_1 - k_2, \quad (3.7.6)$$

onde k_j é o número de onda. A cada volta completa na cavidade os campos ganham uma fase adicional dada por⁷

$$\phi_i = \frac{\omega_i}{c} (n_i l + L). \quad (3.7.7)$$

Igualando perdas e ganhos em uma volta completa, temos que

$$\alpha_0 [1 - r_0 \exp(i\phi_0)] = -2\chi^* \alpha_2 \alpha_1 r_0 \exp(i\phi_0) + t_0 \alpha_0^e, \quad (3.7.8a)$$

$$\alpha_1 [1 - r_1 \exp(i\phi_1)] = 2\chi \alpha_0 \alpha_2^* r_1 \exp(i\phi_1), \quad (3.7.8b)$$

$$\alpha_2 [1 - r_2 \exp(i\phi_2)] = 2\chi \alpha_0 \alpha_1^* r_2 \exp(i\phi_2). \quad (3.7.8c)$$

Definiremos a dessintonia $\delta\phi_j$ por

$$\delta\phi_j = \phi_j - 2\pi p_j, \quad (3.7.9)$$

onde p_j é um inteiro. Assumimos que estamos sempre muito próximos da ressonância, ou seja, $|\delta\phi_j| \ll 2\pi$. Levaremos em conta as perdas espúrias que surgem de diversos fatores como absorção pelo cristal e difrações indesejadas nos espelhos, modelaremos as perdas inserindo-as nos coeficientes de transmissão definindo um novo fator da forma

$$\gamma'_j = \gamma_j + \mu_j. \quad (3.7.10)$$

Podemos assim expandir as exponenciais em (3.7.8) e manter apenas os termos em primeira ordem no limite de pequenas perdas, temos

$$\alpha_0 (\gamma'_0 - i\delta\phi_0) = -2\chi^* \alpha_2 \alpha_1 + \sqrt{2\gamma_0} \alpha_0^e, \quad (3.7.11a)$$

$$\alpha_1 (\gamma'_1 - i\delta\phi_1) = 2\chi \alpha_0 \alpha_2^*, \quad (3.7.11b)$$

$$\alpha_2 (\gamma'_2 - i\delta\phi_2) = 2\chi \alpha_0 \alpha_1^*. \quad (3.7.11c)$$

Definiremos a dessintonia relativa Δ_j por

$$\Delta_j \equiv \delta\phi_j / \gamma'_j, \quad (3.7.12)$$

em termo das dessintonias relativas as equações acima são escritas na forma

$$\alpha_0 \gamma'_0 (1 - i\Delta_0) = -2\chi^* \alpha_2 \alpha_1 + \sqrt{2\gamma_0} \alpha_0^e, \quad (3.7.13)$$

$$\alpha_1 \gamma'_1 (1 - i\Delta_1) = 2\chi \alpha_0 \alpha_2^*, \quad (3.7.14)$$

$$\alpha_2 \gamma'_2 (1 - i\Delta_2) = 2\chi \alpha_0 \alpha_1^*, \quad (3.7.15)$$

que são as equações básicas que governam as amplitudes dos campos no OPO triplamente ressonante.

⁷Não levaremos em conta a fase ganha devido a reflexão nos espelhos, essa fase só é importante no caso de uma cavidade linear.

3.7.2 Condições de Oscilação

Analisaremos em seguida as condições de oscilação do OPO triplamente ressonante. Multiplicando a (3.7.14) pelo conjugado da equação (3.7.15) temos

$$\gamma'_1 \gamma'_2 (1 - i\Delta_1)(1 - i\Delta_2) = 4|\chi|^2 |\alpha_0|^2, \quad (3.7.16)$$

tomando apenas a parte imaginária da equação acima chegamos a condição

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta, \quad (3.7.17)$$

ou seja, a razão entre as dessintonias normalizadas pelas perdas totais deve ser a mesma para os dois campos gerados. Essa é uma característica não trivial que se manifesta no oscilador paramétrico ótico duplamente ressonantes e triplamente ressoante. É fácil mostrar que

$$2\gamma'_1 |\alpha_1|^2 (1 - \Delta_1) = 2\gamma'_2 |\alpha_2|^2 (1 - \Delta_2), \quad (3.7.18)$$

sabendo que o número de fótons saindo da cavidade nos modos $j = 1, 2$ por unidade de tempo é

$$|\alpha_j^s|^2 = 2\gamma'_j |\alpha_j|^2, \quad (3.7.19)$$

a condição imposta pela equação (3.7.17) pode ser traduzida da seguinte forma: no regime estacionário, o número total de fótons saindo da cavidade, incluindo as perdas espúrias, deve ser igual para os dois campos. Calculando a razão entre os dois fluxos de fótons no caso geral

$$\frac{\gamma'_1 |\alpha_1|}{\gamma'_2 |\alpha_2|} = \frac{\gamma_1 \gamma'_1}{\gamma_2 \gamma'_2}, \quad (3.7.20)$$

que geralmente é diferente de 1. As perdas espúrias introduzem um desbalanceio entre as saídas dos campos nas frequências ω_1 e ω_2 , atrapalhando a oscilação. A parte real da equação (3.7.16), já levando em consideração a condição (3.7.17), nos leva a

$$|\alpha_0|^2 = \frac{\gamma'_1 \gamma'_2 (1 + \Delta^2)}{4|\chi|^2}, \quad (3.7.21)$$

mostrando que o campo de bombeio intracavidade é constante no regime estacionário, ou seja, acima do limiar. Substituindo a equação acima na equação (3.7.13), encontramos para o limiar de oscilação a expressão

$$|\alpha_0^e|_{\text{limiar}}^2 = \frac{\gamma_0'^2 \gamma_1' \gamma_2'}{8|\chi|^2 \gamma_0} (1 + \Delta^2)(1 + \Delta_0^2). \quad (3.7.22)$$

Claramente as dessintonias simplesmente têm o papel de aumentar o limiar de oscilação, sendo o limiar mínimo alcançado quando dessintonias são iguais a zero.

3.7.3 Potência de Saída dos Feixes Gêmeos

Para encontrar as expressões dos campos α_1 e α_2 acima do limiar, definiremos uma nova variável σ . Sendo σ a razão entre as potências de bombeio e de limiar na condição onde a dessintonia é nula, ou seja, na ressonância

$$\sigma = \frac{|\alpha_0^e|^2}{|\alpha_0^e|_{\text{res}}^2}. \quad (3.7.23)$$

A expressão para o limiar com essa normalização

$$\sigma_{\text{limiar}} = (1 + \Delta^2)(1 + \Delta_0^2) = (\Delta + \Delta_0)^2 + (1 - \Delta\Delta_0)^2. \quad (3.7.24)$$

Substituindo α_2 pela equação (3.7.15) na equação (3.7.13), obtemos

$$\left[(1 - i\Delta_0)(1 - i\Delta_1) + \frac{4|\chi|^2|\alpha_1|^2}{\gamma'_2\gamma'_0} \right] \alpha_0 = (1 - i\Delta) \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\gamma'_0} \alpha_0^e, \quad (3.7.25)$$

tomando o módulo quadrado da equação acima e substituindo $|\alpha_0|^2$ pela equação (3.7.21), encontramos

$$\left(1 - \Delta\Delta_0 + \frac{4|\chi|^2|\alpha_1|^2}{\gamma'_2\gamma'_0} \right) + (\Delta + \Delta_0)^2 = \sigma. \quad (3.7.26)$$

Essa equação deve ser analisada com cuidado, dois caso devem ser analisados de acordo com o valor de $\Delta\Delta_0$. Primeiro, vemos que dá condição de que $|\alpha_1|^2$ é real e positivo, temos $\sigma > (\Delta + \Delta_0)^2 = \sigma_A$. Se estamos acima do limiar de oscilação, devemos ter $\sigma > (1 + \Delta^2)(1 + \Delta_0^2) = \sigma_B$. Nota-se que $\sigma_B \geq \sigma_A$, o que implica em mais uma condição que deve ser satisfeita para que a oscilação aconteça.

Para $\Delta\Delta_0 \leq 1$, há uma solução não trivial para cada campo de saída

$$|\alpha_j| = \frac{\gamma'_k\gamma'_0}{4|\chi|^2} \left[\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2 + \Delta\Delta_0} - 1 \right], \quad (3.7.27)$$

onde $j, k = 1, 2$ e $j \neq k$. Essa solução que caracteriza o *regime monoestável*, apesar de ser única, pode se tornar instável, ver [Lugiato et al., 1988]. Para grandes dessintonias e intensidades de bombeio suficientemente altas o OPO entra em um regime pulsado, apresentando um regime caótico para intensidades mais altas.

Para $\Delta\Delta_0 \geq 1$, a equação (3.7.26) possui três soluções, sendo uma delas uma solução instável. Teremos duas soluções positivas na região $\sigma_A < \sigma < \sigma_B$, sendo uma delas a solução trivial, que é estável até o limite superior da região de bistabilidade. É importante notar que a região de biestabilidade depende apenas das dessintonias entre os campos e a cavidade. Na figura 3.8 encontra-se representado as diferentes soluções possíveis e os regimes de estabilidade. A

Figura 3.8: Potência de saída do OPO nos diferentes regimes de estabilidade.

potência de saída pelos espelhos dos feixes sinal e complementar, pode ser calculada como

$$I_1 = \frac{\gamma'_0\gamma'_1\gamma'_2}{4|\chi|^2} \left[\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2 + \Delta\Delta_0} - 1 \right], \quad (3.7.28)$$

$$I_2 = \frac{\gamma'_0 \gamma'_1 \gamma_2}{4|\chi|^2} \left[\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} + \Delta\Delta_0 - 1 \right], \quad (3.7.29)$$

e temos a potência de saída total $P_{\text{out}} = I_1 + I_2$. Para facilitar a análise consideraremos o caso degenerado, no qual $\omega_1 = \omega_2$ e as perdas são iguais para sinal e complementar ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\gamma'_1 = \gamma'_2 = \gamma'$). Pela equação (3.7.22) a potência de limiar será

$$P_{\text{limiar}} = \hbar\omega_0 \frac{\gamma_0'^2 \gamma'^2}{8|\chi|^2 \gamma_0}. \quad (3.7.30)$$

Nesse caso a potência de saída na ressonância é dada por

$$P_{\text{out}} = \hbar\omega_0 \left[\frac{\gamma\gamma'\gamma_0}{2|\chi|^2} (\sqrt{\sigma} - 1) \right] = 4\eta_{\text{max}} P_{\text{limiar}} \left(\sqrt{\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{limiar}}}} - 1 \right). \quad (3.7.31)$$

Definimos a eficiência máxima η_{max} como

$$\eta_{\text{max}} = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\gamma_0}{\gamma'_0} = \xi \xi_0, \quad (3.7.32)$$

onde $\xi_j = \gamma_j/\gamma'_j$ é a razão entre as perdas pelos espelhos de acoplamento e as perdas totais. A eficiência no geral dependerá da razão entre a potência de bombeio e a potência de limiar, sendo máxima quando $\sigma = 4$. Em princípio na eficiência máxima, idealmente 100% para $\xi = \xi_0 = 1$,

Figura 3.9: Potência de saída e eficiência do opo em função de σ . A potência de saída está normalizada pela potência de limiar e considerou-se $\xi = \xi_0 = 0.83$.

toda a luz do bombeio é convertida e propriedades quânticas interessantes são observadas nessa condição [Kasai et al., 1997]. O desafio em alcançar essa condição está basicamente nas técnicas de reduzir as perdas espúrias e no acordo de modo do bombeio com o modo ressonante na cavidade. Na figura 3.9 podemos observar a dependência da eficiência com σ . Alcançando seu valor máximo para $\sigma = 4$ e apresentando uma leve queda para valores maiores, porém, mantendo-se próximo do máximo para valores de até $\sigma = 10$.

Estudaremos em seguida os modos de saída do OPO, veremos que a condição de ressonância simultânea dos três modos, junto com as condições de casamento de fase e potência de entrada, selecionam quais as frequências de saída. É importante distinguir entre as operações do OPO tipo I e OPO tipo II, e faremos uma comparação entre as suas principais diferenças.

3.7.4 Modos Longitudinais: OPO Tipo II

Na configuração em que o cristal não linear é cortado para casamento de fase tipo II, as polarizações dos feixes sinal e complementar são diferentes. Nesse caso os índices de refração para cada polarização são diferentes mesmo na degenerescência. A conservação da energia impõe que a soma das frequências dos feixes sinal e complementar seja igual a do feixe de bombeio. Porém, um parâmetro ainda livre é a diferença $\Delta\omega$ entre modos sinal e complementar, definida por

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad (3.7.33)$$

que é chamada *frequência de batimento*, as duas frequências ω_1 e ω_2 podem ser escritas como

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega}{2}, \quad (3.7.34)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2} - \frac{\Delta\omega}{2}. \quad (3.7.35)$$

Podemos usar a equação (3.7.7) para sinal e complementar, para encontrar a soma e a diferença das fases ganhas por cada campo em uma volta completa

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi m + (\delta\phi_2 - \delta\phi_1), \quad (3.7.36)$$

$$\phi_2 + \phi_1 = 2\pi q + (\delta\phi_2 + \delta\phi_1), \quad (3.7.37)$$

onde $m = p_2 - p_1$ e $q = p_2 + p_1$, sendo que m e q são números de mesma paridade, ambos são pares ou ímpares. Vemos que se a cavidade é ressonante para sinal e complementar ($\delta\phi_2 = \delta\phi_1 = 0$), a frequência de batimento também é ressonante. Estamos interessados em encontrar a frequência de batimento. Podemos usar as equações

$$\phi_1 = \frac{\omega_1}{c} [L + n_1(\omega_1)l], \quad (3.7.38)$$

$$\phi_2 = \frac{\omega_2}{c} [L + n_2(\omega_2)l], \quad (3.7.39)$$

junto com a condição de oscilação $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, o que implica que

$$\Delta\omega = -\omega_0 \frac{\delta n(\omega_1, \omega_2)l}{L + \bar{n}(\omega_1, \omega_2)l} - 2\pi \frac{mc}{L + \bar{n}(\omega_1, \omega_2)l}. \quad (3.7.40)$$

Definindo novas variáveis:

$$\bar{n}(\omega_1, \omega_2) = \frac{n_1(\omega_1) + n_2(\omega_2)}{2}, \quad (3.7.41)$$

$$\delta n(\omega_1, \omega_2) = \frac{n_1(\omega_1) - n_2(\omega_2)}{2}, \quad (3.7.42)$$

sendo, $n_1(\omega_1)$ e $n_2(\omega_2)$ os índices de refração para sinal e complementar, levando em consideração a dispersão do material. O que acontece no caso do OPO tipo II é que a diferença nos índices de refração pela birrefringência é muito maior do que o efeito da dispersão. Para um tratamento mais simples é suficiente ignorar os efeitos dispersivos e adotar

$$\bar{n} = \frac{n_1(\omega_0/2) + n_2(\omega_0/2)}{2}, \quad (3.7.43)$$

$$\delta n = \frac{n_1(\omega_0/2) - n_2(\omega_0/2)}{2}. \quad (3.7.44)$$

No caso do OPO tipo I, é de fundamental importância levar em consideração os efeitos dispersivos. A dispersão do material terá efeito dominante na diferença dos índices de refração para sinal e complementar.

Fazendo essas simplificações, podemos escrever

$$\Delta\omega = -\frac{\omega_0\delta nl + 2\pi mc}{L + \bar{n}l} = -2\pi D \left(\frac{\delta nl}{\lambda_0} + m \right). \quad (3.7.45)$$

Como m é um inteiro, há um conjunto discreto de frequências de batimento permitidas para um dado comprimento da cavidade que estão separadas por

$$D = \frac{c}{L + \bar{n}l}. \quad (3.7.46)$$

Podemos facilmente encontrar o intervalo de separação entre dois modos adjacentes de um dos feixes sinal ou complementar

$$d_{\text{FRS}} = \frac{D}{2} = \frac{c}{2(L + \bar{n}l)}, \quad (3.7.47)$$

sendo apenas metade do intervalo espectral livre típico de uma cavidade em anel, ressonante para um feixe qualquer. Esse resultado contraintuitivo, pode ser explicado pelo fato de apenas a soma das frequências do sinal e complementar é fixa.

Comprimento da Cavidade para Ressonância dos Modos Sinal e Complementar

O limiar de oscilação é mínimo na condição de ressonância dupla, equação (3.7.22), o que acaba sendo uma condição adicional para os modos de oscilação. Portanto, devemos ter

$$\phi_1 = 2\pi p, \quad \phi_2 = 2\pi(p + m). \quad (3.7.48)$$

Tomando a primeira das relações acima e substituindo na equação (3.7.38) e $n_1 = \bar{n} + \delta n$ encontramos

$$\Delta\omega = \frac{4\pi cp}{L + (\bar{n} + \delta n)l} - \omega_0. \quad (3.7.49)$$

Os comprimentos L que satisfazem simultaneamente a equação acima e a (3.7.45) não são quaisquer, pode-se mostrar que deve ser satisfeita a relação

$$L + \bar{n}l = \lambda_0(2p + m) - \delta nl \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \quad (3.7.50)$$

substituindo $\Delta\omega$ da equação (3.7.45), teremos

$$L + \bar{n}l = \lambda_0(2p + m) + \frac{\delta nl}{\omega_0} \left(\frac{\omega_0\delta nl + 2\pi mc}{L + \bar{n}l} \right). \quad (3.7.51)$$

Note que na equação (3.7.51) $L \gg \bar{n}l$, logo as variações em L que são feitas para alcançar as ressonâncias sucessivas são muito menores do que L ⁸. Nesse regime, podemos desprezar as variações no denominador do segundo termo substituindo L por um comprimento médio $\bar{L}$

$$L + \bar{n}l = \lambda_0 \left[(2p + m) + \frac{\delta nl}{\bar{L} + \bar{n}l} \left(m + \frac{\delta nl}{\lambda_0} \right) \right]. \quad (3.7.52)$$

A equação acima é formada por dois termos. O primeiro mostra que as ressonâncias ocorreriam para comprimentos da cavidade múltiplos do comprimento de onda do feixe de bombeio λ_0 ,

⁸Geralmente usa-se um controlador constituído de uma cerâmica piezoelétrica que é usada para varrer o comprimento da cavidade alguns comprimentos de onda.

se não fosse o segundo termo que é uma correção devido a birrefringência. Desconsidere inicialmente o segundo termo, fixado o valor do comprimento da cavidade, vemos que a ressonância acontece para um dado conjunto de números inteiros que satisfaça a relação, $q = 2p + m$, onde q é fixo. Desde que haja várias combinações de pares p e m que levam ao mesmo q , teríamos diferentes valores de $\Delta\omega$ associados. Porém, como m e q possuem a mesma paridade, apenas modos com a mesma paridade oscilarão, de fato o intervalo espectral para sinal e complementar é $2D$. Pode-se imaginar que estamos restritos a uma série discreta de valores para as frequências de saída. No entanto, podemos variar o valor de δn continuamente, pela mudança da temperatura do cristal e obter um espectro de saída sintonizável. Podemos estudar o segundo termo do lado direito da equação (3.7.51), que mostra que a correção no comprimento L , depende de m , ou seja, da frequência de batimento e os modos que pareciam oscilar para um mesmo comprimento, definido por q , ocorrem para comprimentos diferentes. A separação entre as posições de ressonância é igual a

$$\frac{\Delta L}{\lambda_0} = \frac{2\delta n l}{\bar{L} + \bar{n}l}. \quad (3.7.53)$$

Sabendo que δn é geralmente uma ordem de grandeza menor que $\bar{n}$, um pente de ressonâncias bem próximas uma das outras é observado quando L é varrido. Já estudamos o efeito das dessintonias sobre o limiar de oscilação, vamos agora estudar quais dessintonias são permitidas. Para uma potência de entrada tal que $\sigma > 1$, a dessintonia máxima é obtida quando

$$\sigma = \sigma_{\text{limiar}} = (1 + \Delta^2)(1 + \Delta_0^2). \quad (3.7.54)$$

Se estabelecermos que o bombeio é perfeitamente ressonante, temos que a dessintonia para sinal e complementar deve obedecer

$$|\Delta| \leq \sqrt{\sigma - 1}. \quad (3.7.55)$$

Relacionando variações no comprimento da cavidade δL_j com as dessintonias Δ_j , obtemos diretamente

$$\delta\phi_j = \frac{\omega_j}{c} \delta L_j. \quad (3.7.56)$$

O que leva a variação de comprimento obedecer a desigualdade

$$\left| \frac{\delta L}{\lambda_0} \right| < \frac{\gamma'}{\pi} \sqrt{\sigma - 1}, \quad (3.7.57)$$

para frequências muito próximas da degenerescência, tal que vale $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx 2\lambda_0$, e perdas iguais $\gamma' = \gamma'_1 = \gamma'_2$. Isso leva à largura a meia altura,

$$\frac{\Delta L}{\lambda_0} = \frac{\gamma'}{\pi} \sqrt{\sigma - 1}. \quad (3.7.58)$$

Se ao invés de termos o bombeio em perfeita ressonância, assumirmos que os feixes sinal e complementar estão na ressonância e agora o bombeio tem dessintonia diferente de zero, temos a largura em que o OPO funciona é dada por

$$\frac{\Delta L_0}{\lambda_0} = \frac{\gamma_0}{2\pi} \sqrt{\sigma - 1}. \quad (3.7.59)$$

Em uma situação típica, a distância entre dois picos adjacentes é bem maior do que a largura dos picos, então os picos estão bem separados. O OPO oscila em torno da ressonância do bombeio com uma tolerância no comprimento da cavidade dado por (3.7.59), ver figura 3.10.

Figura 3.10: Representação das ressonâncias do bombeio e dos modos de oscilação possíveis. Modos que estão no interior das ressonâncias podem oscilar, porém há outros fatores que determinam os modos selecionados.

Efeitos da Ressonância do Bombeio, Casamento de Fase e Tolerância

Como vimos, o OPO oscila apenas para frequências que estão próximas da ressonância do bombeio, procuraremos agora valores de $\Delta\omega_s$ que correspondem às ressonâncias do bombeio. O comprimento da cavidade nessa condição é

$$L + \bar{n}l = \lambda_0 s = \lambda_0(2p + m) - \delta n l \frac{\Delta\omega_s}{\omega_0}, \quad (3.7.60)$$

sendo s um inteiro positivo. Obtemos

$$\Delta\omega_s = \frac{2\pi c}{\delta n l} (2p + m - s), \quad (3.7.61)$$

porém, ω_s nem sempre corresponde a uma frequência de batimento permitida pela (3.7.45), o intervalo de ressonâncias permitidas é

$$D_0 = \frac{c}{\delta n l}, \quad (3.7.62)$$

que é um número bem maior do que D . Podemos usar (3.7.59) para encontrar a largura da dissintonia da ressonância do bombeio W_{rb} permitida, temos

$$W_{rb} = \frac{c}{\delta n l} \frac{\gamma_0}{2\pi} \sqrt{\sigma - 1}, \quad (3.7.63)$$

que claramente depende da finesse da cavidade para o bombeio e de σ . Esse é um resultado importante. A cavidade do OPO deve ser projetada para que a largura de ressonância do bombeio seja algumas vezes maior do que a separação entre as frequências de batimento possíveis para sinal e complementar. Se isso não ocorre, pode-se variar a temperatura e por consequência o índice de refração do cristal para encontrar regiões de oscilação. Isso diminui a capacidade de sintonia do OPO e torna a operação mais trabalhosa.

Quando o casamento de fase não é perfeito, o efeito desse não casamento pode ser incluído no coeficiente não linear χ , logo seu único papel é aumentar o limiar de oscilação e não apresenta nenhum efeito sobre as condições de ressonância discutidas. Porém, as frequências de batimento mais próximas do casamento de fase perfeito são mais prováveis de oscilar do que as frequências que estão mais distantes. Temos um novo fator seletor dos modos de saída. Da condição de casamento de fase temos

$$\Delta k = \frac{1}{c} [(n_0 + \bar{n})\omega_0 - \delta n \Delta\omega], \quad (3.7.64)$$

que leva a uma condição de casamento de fase perfeito, quando

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{n_0 - \bar{n}}{\delta n} \quad (3.7.65)$$

onde considera-se que δn é sempre diferente de zero, caso do OPO tipo II. O novo valor do limiar para dessintonias nulas, pode ser encontrado pelas equações (3.7.5) e (3.7.22)

$$|\alpha_0^e|_{\text{res}}^2 = \frac{\gamma'_0 \gamma'_1 \gamma'_2}{8\chi_{\text{ef}} \gamma_0 l^2} \text{senc}^{-2} \left(\frac{\Delta kl}{2} \right). \quad (3.7.66)$$

Definiremos a nova razão

$$\sigma' = \frac{|\alpha_0^e|_{\text{cf}}^2}{|\alpha_0^e|_{\text{cf}}^2}, \quad (3.7.67)$$

onde $|\alpha_0^e|_{\text{cf}}^2$ é o mínimo limiar quando a condição de casamento de fase é satisfeita. Pela mesma abordagem usada para encontrar as larguras de tolerância para o comprimento da cavidade, calculamos a largura de casamento de fase que ainda permite oscilação

$$|\Delta kl| = 2\sqrt{3(\sigma' - 1)}. \quad (3.7.68)$$

Usando (3.7.64) encontramos a largura na qual as frequências de batimento são permitidas oscilar nas proximidades do casamento de fase exato

$$D_{\text{cf}} = \frac{2c}{\pi \delta n l} \sqrt{3(\sigma' - 1)}. \quad (3.7.69)$$

Possuindo o efeito de selecionar grupos de frequência de batimento que estão próximos de ω_k , ver figura 3.11.

Figura 3.11: Efeito do casamento de fase na seleção dos modos de saída. O casamento de fase favorece o acoplamento de alguns modos pela diminuição do limiar de oscilação, representado pela modulação na amplitude dos modos permitidos.

3.7.5 Modos Longitudinais: OPO Tipo I

Para estudar os modos de saída do OPO tipo I devemos levar em conta a dispersão do material. Já que as polarizações dos campos sinal e complementar são iguais, embora diferente da polarização do bombeio. Para um tratamento mais completo, ver [Eckardt et al., 1995]. Nos concentraremos nas características mais importantes, aproveitando a discussão anterior. Nesse caso, podemos utilizar uma aproximação de primeira ordem para δn

$$\delta n \approx \left. \frac{\partial n}{\partial \omega} \right|_{\omega_0/2} \frac{\Delta\omega}{2} = n' \frac{\delta\omega}{2}, \quad (3.7.70)$$

substituindo essa aproximação nos cálculos realizados para o OPO tipo II, podemos encontrar as frequências de batimento permitidas, onde agora é a derivada do índice de refração em relação a frequência que terá o papel mais importante na análise. A figura 3.12 mostra o perfil parabólico característico das curvas de casamento de fase do OPO tipo I e as regiões de oscilação simultânea, os chamados *aglomerados de frequência*. Como $\delta n = 0$ para sinal e complementar com mesma frequência, a degenerescência pode ser alcançada na teoria, mas o mesmo efeito de adensamento que causa os aglomerados de frequência impede a realização da estabilização dos modos de saída na degenerescência.

Figura 3.12: (a) Curva de sintonia característica do OPO tipo I, temos as frequências de saída (sinal e complementar) com a variação da temperatura do cristal, onde percebe-se o perfil parabólico para cada ramo de frequências. (b) Larguras de Ganho, fruto da condição de casamento de fase. (c) Aglomerados de modos dentro da largura de frequências permitidas pelo casamento de fase, representamos os aglomerados pelas barras, geralmente apenas um aglomerado domina a oscilação.

Frequência de Batimento e Ressonância para Sinal e Complementar

Substituindo a aproximação (3.7.50) na (3.7.45) temos que a frequência de batimento será dada por

$$\Delta\omega \approx -\frac{2\pi mc}{L + (\bar{n} + n'\omega_0/2)l} = -2\pi Dm, \quad (3.7.71)$$

o espaçamento entre as frequências de batimento é o mesmo do OPO tipo II, podendo a degenerescência ser alcançada quando $m = 0$. Substituindo a aproximação (3.7.71) na equação que relaciona o comprimento da cavidade na ressonância (3.7.50) obtemos

$$L + \bar{n}l = q\lambda_0 - \frac{n'l}{2\omega_0}\Delta\omega^2. \quad (3.7.72)$$

Tendo uma dependência quadrática com a frequência de batimento, diferente do OPO tipo II onde a dependência é linear. Podemos facilmente encontrar a separação espacial entre dois modos m , substituindo (3.7.71) na equação acima

$$\Delta L = \frac{l}{L + \bar{n}l}\lambda_0 n' \Delta\omega, \quad (3.7.73)$$

o que mostra que quanto mais perto da degenerescência mais próximos estão os modos⁹.

⁹O valor de n' é tipicamente da ordem de 10^{-4} .

Casamento de Fase e Ressonância do Bombeio

Para obtermos um casamento de fase perfeito no caso do OPO tipo I a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\Delta\omega^2 = 2\omega_0 \frac{(n_0 - \bar{n})}{n'}, \quad (3.7.74)$$

mostrando que a largura de banda do casamento de fase é muito maior em comparação ao OPO tipo II, o que permite uma capacidade de sintonia bem mais ampla.

Discutiremos a sintonia das frequências de saída e o efeitos dos aglomerados de frequência do OPO tipo I com mais detalhes na descrição do sistema experimental.

3.7.6 Cavidade Linear

O OPO construído no nosso experimento não utiliza uma cavidade tipo anel. A cavidade do OPO é formada por apenas dois espelhos curvos, configurando uma cavidade Fabry-Perot com um cristal não linear no seu interior. Nesse caso, a única diferença entre o OPO com a cavidade tipo anel e cavidade linear é a quantidade de vezes em que a interação com o meio não linear acontece. Apenas uma vez na cavidade anel, e duas vezes na cavidade linear, com um certo acúmulo de fase durante as duas propagações¹⁰.

Considere um oscilador paramétrico ótico semimonolítico, de acordo com a figura 3.13, tal que o espelho M_1 coincide com o fim do cristal. A distância l' separa o espelho M_2 do cristal. Consideramos δ_j e δ'_j sendo as respectivas mudanças de fase nos espelhos M_1 e M_2 onde $j = 0, 1, 2$. Agora as mudanças de fase em uma volta completa ϕ_j são da forma

$$\phi_j = 2\omega_j \frac{(n_j l + l')}{c} + \delta_j + \delta'_j. \quad (3.7.75)$$

Seguindo os mesmo processo para a cavidade tipo anel, podemos mostrar que a equação (3.7.11) para o caso da cavidade linear será

Figura 3.13: Esquema de um OPO semimonolítico.

$$\alpha_0 (\gamma'_0 - i\delta\phi_0) = -2\chi^* \alpha_2 \alpha_1 [1 + \exp(i\theta' - i\Delta kl)] + \sqrt{2\gamma_0} \alpha_0^e, \quad (3.7.76a)$$

$$\alpha_1 (\gamma'_1 - i\delta\phi_1) = 2\chi \alpha_0 \alpha_2^* [1 + \exp(-i\theta' + i\Delta kl)], \quad (3.7.76b)$$

$$\alpha_2 (\gamma'_2 - i\delta\phi_2) = 2\chi \alpha_0 \alpha_1^* [1 + \exp(-i\theta' + i\Delta kl)], \quad (3.7.76c)$$

onde θ' é uma combinação de mudanças de fase no espelho M'

$$\theta' = \delta'_1 + \delta'_2 - \delta'_0. \quad (3.7.77)$$

Logo, vemos que podemos reescrever o coeficiente de acoplamento χ pela grandeza $\chi' = \chi[1 + \exp(-i\theta' + i\Delta kl)]$ na equação (3.7.76) e usar a mesma discussão para o tratamento da

¹⁰Desconsidera-se efeitos de interação entre os campos propagante e contrapropagante, próximo da região de casamento de fase.

cavidade tipo anel apenas fazendo a mudança $\chi \rightarrow \chi'$. De fato, essa mudança altera as funções que dependem do casamento de fase¹¹. Na ressonância tripla o limiar de oscilação torna-se

$$|\alpha_0^e|_{\text{limiar}}^2 = \frac{\gamma_0'^2 \gamma_1' \gamma_2'}{32 \kappa^2 l^2 \gamma_0} \frac{(\Delta k l / 2)^2}{\sin^2(\Delta k l / 2) \cos(\Delta k l - \theta')}, \quad (3.7.78)$$

onde κ é dado por

$$\kappa = \chi_{ef} \frac{w_0 w_1 w_2}{w_0^2 w_1^2 + w_0^2 w_2^2 + w_1^2 w_2^2} \left(\frac{\hbar \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\pi \epsilon_0 c^3 n_0 n_1 n_2} \right)^{1/2}. \quad (3.7.79)$$

A configuração de cavidade linear não altera profundamente as condições de oscilação e o tratamento anterior embora utilizando de uma configuração mais simples, engloba todas as características importantes, podendo ser usado para cálculos dos valores médios e das flutuações.

¹¹Essa mudança no casamento de fase está relacionada com as ondas estacionárias que se formam na cavidade linear, diferentemente das ondas viajantes em uma cavidade tipo anel.

CAPÍTULO 4

PROPRIEDADES QUÂNTICAS DO OPO

“What is quantum optics? This is a rather personal question. A well-known scientist in this field once gave the following authoritative answer: “Whatever I do defines quantum optics!” On a more objective basis one is tempted to define this branch of physics by the pun: “Quantum optics is that branch of physics where the quantum features of light matter.”

(Wolfgang P. Schleich, Quantum Optics in Phase Space)

Estados não clássicos da luz no domínio de variáveis contínuas possuem um papel importante como ferramenta no campo de informação quântica e ótica quântica [Braunstein, 2005, Weedbrook et al., 2012]. O estado comprimido é o estado não clássico mais bem conhecido, onde a flutuação em uma das quadraturas é menor do que o ruído do shot noise. Um outro estado não clássico é o chamado estado de “feixes gêmeos” no qual a diferença entre as flutuações de intensidade entre dois feixes é menor do que a de um estado coerente. O emaranhamento é outra característica essencial nos fundamentos da informação quântica e futuras aplicações em tecnologia de comunicação. Grande parte dos esforços da comunidade pesquisadora em ótica quântica e informação quântica foca em encontrar fontes de tais estados para manipulá-los de forma a servir futuramente em aplicações na computação quântica. O oscilador paramétrico ótico é capaz de gerar eficientemente compressão de ruído, “feixes gêmeos” e mesmo emaranhamento entre os três campos envolvidos no processo de conversão paramétrica. É por esse motivo que o OPO é um dispositivo tão interessante do ponto de vista de aplicações. Neste capítulo apresentaremos a teoria quântica do OPO, calcularemos os espectros de ruído e verificaremos a violação prevista de alguns critérios de emaranhamento.

4.1 Descrição Quântica do OPO

Os modos quantizados dos campos de bombeio, sinal e complementar interagem na cavidade do OPO via o acoplamento possibilitado pela presença do meio não linear. De maneira mais fundamental, podemos dizer que um fóton do bombeio é aniquilado e simultaneamente dois fótons (sinal e complementar) são criados, podendo o inverso ocorrer. A descrição desse processo é feita a partir da Hamiltoniana de interação [Walls e Milburn, 2008]

$$\hat{V} = 2i\hbar\frac{\chi}{\tau}(\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger), \quad (4.1.1)$$

em que $\hat{a}_j$, $j \in \{0, 1, 2\}$, representam os operadores de aniquilação dos campos bombeio, sinal e complementar. A constante de proporcionalidade χ descreve a suscetibilidade não linear de segunda ordem e o casamento de fase, enquanto τ é o tempo em que um fóton realiza uma volta completa na cavidade, correspondendo ao inverso do intervalo espectral livre da cavidade.

Além da interação, precisamos incluir a Hamiltoniana para cada campo quantizado independentemente, isso é feito pelos operadores

$$\hat{H}_j = \hbar\frac{2\gamma_j'}{\tau}\Delta_j\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j, \quad (4.1.2)$$

onde $\Delta_j = (\omega_j - \omega_{cj})/\delta\omega_{cj}$ representa a dessintonia entre a frequência mais próxima da cavidade e a frequência do modo j , normalizada pela largura de banda $\delta\omega_{cj} = 2\gamma'/\tau$, e $\gamma'_j = \gamma_j + \mu_j$ correspondem às perdas totais já descritas no formalismo clássico.

O campo de bombeio intracavidade está relacionado com a amplitude clássica do campo de entrada α_0^e através do acoplamento

$$\hat{H}_e = i\hbar \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\tau} \alpha_0^e (\hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger), \quad (4.1.3)$$

onde tomamos o cuidado de tomar a fase do campo de entrada igual a zero, para ser usada como referência e consideramos um campo de entrada em descrito por um estado coerente.

A dinâmica do OPO é governada pela Hamiltoniana total

$$\hat{H} = \sum_j \hat{H}_j + \hat{H}_e + \hat{V}. \quad (4.1.4)$$

O OPO deve ser tratado como um sistema aberto, podendo interagir com um reservatório de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico, introduzindo perdas e ruído adicional ao sistema. Dessa forma, a evolução temporal pode ser descrita pela equação mestra [Walls e Milburn, 2008, Gardiner e Zoller, 2010]

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_j \Lambda_j \hat{\rho}, \quad (4.1.5)$$

onde $\hat{\Lambda}_j$ são os operadores de Lindblad que descrevem o acoplamento com o ambiente e são dados por

$$\hat{\Lambda}_j \hat{\rho} = \frac{\gamma'_j}{\tau} (2\hat{a}_j \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j). \quad (4.1.6)$$

O procedimento padrão para resolver a equação (4.1.6) é feito substituindo os operadores dos campos por variáveis complexas. Reescrevendo-a em termos de uma função de quase probabilidade que representa o operador de densidade, obtemos um resultado que pode ser reconhecido como uma equação de Fokker-Planck. Para esta, associamos uma equação diferencial estocástica de Lagevin [Gardiner e Zoller, 2010]. Diferentes representações do operador densidade podem ser usadas, tais como a representação P de Glauber-Sudarshan, a representação de Wigner e a Q de Husimi. Estas diferindo por interpretação e existência de singularidades para diferentes regimes de operação do OPO [Martinelli, 2011].

Descreveremos os passos para obtermos uma equação de Fokker-Planck usando a representação de Wigner. Começamos por substituir os operadores $(\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger)$ por variáveis complexas (α_j, α_j^*) representando as amplitudes dos campos. Fazendo a substituição com as regras discutidas na seção 2.12 e nas teses [Martinelli, 2002, Villar, 2004], a função de Wigner $W(\alpha)$ obedece a equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(\alpha) = & \left[\sum_j \gamma_j (1 + i\Delta_j) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_j^*} \alpha_j^* - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha_j \right) - \sqrt{2\gamma_0} \alpha_e \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \right) \right. \\ & + 2\chi \left(\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} + \alpha_1^* \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial \alpha_0} - \alpha_0 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \alpha_0^* \alpha_1^* \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} - \alpha_0 \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right. \\ & \left. \left. - \alpha_0^* \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \right) + \sum_j \gamma'_j \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_j^*} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha_0^* \alpha_1^* \alpha_2^*} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \right) \right] W(\alpha), \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

onde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_0^*, \alpha_1, \alpha_1^*, \alpha_2, \alpha_2^*)$. Essa equação pode ser reconhecida como uma equação de Fokker-Planck se desconsiderarmos os termos envolvendo as derivadas de terceira ordem, que

podem ser assumidos como muito pequenos [Villar et al., 2007], no caso de não linearidade χ muito grande essa aproximação não é mais válida. Chegamos a forma

$$\frac{d}{dt}W(\boldsymbol{\alpha}) = \left[-\sum_j \frac{\partial}{\partial \alpha_j} A_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} D_{jk} \right] W(\boldsymbol{\alpha}), \quad (4.1.8)$$

onde $\mathbf{A}$ é o vetor de arrasto do campo que carrega informação do valor médio das amplitudes e o termo de difusão $\mathbb{D} = \mathbb{B}\mathbb{B}^T$, responsável pela difusão do valor médio, ou seja, pelas flutuações. Dada a equação de Fokker-Planck obtida, a equação de Langevin equivalente é da forma

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \mathbf{A} + \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(t), \quad (4.1.9)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}(t)$ é um vetor de flutuação estocástica com valor médio nulo e correlação $\langle \sigma_i(t) \sigma_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$. Um tratamento mais completo está descrito em várias referências [Reynaud e Heidmann, 1989, Fabre et al., 1990, Villar et al., 2004] e em teses do grupo [Martinelli, 2002, Villar, 2004]. Obtemos então o seguinte conjunto de equações para as amplitudes complexas intracavidade

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_0 = -\gamma'_0 (1 - i\Delta_0) \alpha_0 - 2\chi \alpha_1 \alpha_2 + \sqrt{2\gamma_0} \alpha_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_0, \quad (4.1.10)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_1 = -\gamma' (1 - i\Delta) \alpha_1 + 2\chi \alpha_0 \alpha_2^* + \sqrt{2\gamma} \delta u_1 + \sqrt{2\mu_1} \delta v_1, \quad (4.1.11)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_2 = -\gamma' (1 - i\Delta) \alpha_2 + 2\chi \alpha_0 \alpha_1^* + \sqrt{2\gamma} \delta u_2 + \sqrt{2\mu_2} \delta v_2, \quad (4.1.12)$$

os termos δu_j e δv_j correspondem às flutuações do vácuo que são acopladas ao sistema pelas perdas espúrias e transmissões dos espelhos. Reescrevemos as amplitudes em termo de um valor médio e uma flutuação

$$\alpha_j(t) = \alpha_j + \delta \alpha_j(t), \quad \alpha_j = \langle \alpha_j(t) \rangle = p_j e^{i\varphi_j}. \quad (4.1.13)$$

Nosso objetivo é estudar as flutuações $\delta \alpha_j$ onde é assumido que $|\alpha_j| \ll |\delta \alpha_j|$. Em termo das quadraturas dos campos são dados por

$$\alpha_j(t) = \frac{e^{i\phi_j}}{2} [p_j(t) + iq_j(t)], \quad (4.1.14)$$

o que define as flutuações nas quadraturas $\delta p_j(t)$ e $\delta q_j(t)$

$$\delta \alpha_j(t) = \frac{e^{i\phi_j}}{2} [\delta p_j(t) + i\delta q_j(t)], \quad (4.1.15)$$

lembrando que estas flutuações estão no referencial girante para de cada campo.

A solução estacionária é encontrada tomando a média temporal das equações (4.1.11)–(4.1.12). Obtemos assim as mesmas equações (3.7.13)–(3.7.15) para as amplitudes dos campos no regime estacionário tratado classicamente. Para amplitudes dos campos suficientemente altas, é de se esperar que os resultados obtidos para o valor médio dos campos, no tratamento quântico, concordem com todos os resultados já obtidos na discussão do tratamento clássico. O interessante que o tratamento quântico traz são as previsões dos ruídos nas amplitudes e fases dos feixes, levando a fenômenos puramente quânticos como compressão de ruído [Wu et al., 1987] e emaranhamento [Zhang, 2008, Coelho et al., 2009].

4.1.1 Flutuações Quânticas

A dinâmica das flutuações é obtida substituindo a forma dos campos (4.1.13) nas equações (4.1.11)–(4.1.12), desprezando os termos de segunda ordem nas flutuações [Fabre et al., 1990, Villar et al., 2004] obtemos

$$\tau \frac{d}{dt} \delta \alpha_0 = -\gamma'_0 (1 - i\Delta_0) \delta \alpha_0 - 2\chi p (e^{i\phi_2} \delta \alpha_1 + e^{i\phi_1} \delta \alpha_2) + \sqrt{2\gamma_0} \delta \alpha_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_0, \quad (4.1.16)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \delta \alpha_1 = -\gamma' (1 - i\Delta) \delta \alpha_1 + 2\chi (p e^{-i\phi_2} \delta \alpha_0 + p_0 e^{-i\phi_0} \delta \alpha_2^*) + \sqrt{2\gamma} \delta u_1 + \sqrt{2\mu_1} \delta v_1, \quad (4.1.17)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \delta \alpha_2 = -\gamma' (1 - i\Delta) \delta \alpha_2 + 2\chi (p e^{-i\phi_1} \delta \alpha_0 + p_0 e^{-i\phi_0} \delta \alpha_1^*) + \sqrt{2\gamma} \delta u_2 + \sqrt{2\mu_2} \delta v_2. \quad (4.1.18)$$

Para encontrar as flutuações nas quadraturas dos campos, escrevemos as flutuações $\delta \alpha_j$ em termos de suas quadraturas (4.1.15) nas equações (4.1.16–4.1.18). Separando a parte real da parte imaginária em cada equação obtemos a dinâmica para as *flutuações de quadraturas*

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_0 &= -\gamma'_0 \delta p_0 - \Delta_0 \gamma'_0 \delta q_0 - \gamma' \beta \delta p_1 + \Delta \gamma' \beta \delta q_1 - \gamma' \beta \delta p_2 + \Delta \gamma' \beta \delta q_2 + \\ &\quad + \sqrt{2\gamma_0} \cos \phi_0 \delta p_0^e + \sqrt{2\gamma_0} \sin \phi_0 \delta q_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{p_0}, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta q_0 &= \Delta_0 \gamma'_0 \delta p_0 - \gamma'_0 \delta q_0 - \Delta \gamma' \beta \delta p_1 - \gamma' \beta \delta q_1 - \Delta \gamma' \beta \delta p_2 - \gamma' \beta \delta q_2 + \\ &\quad - \sqrt{2\gamma_0} \sin \phi_0 \delta p_0^e + \sqrt{2\gamma_0} \cos \phi_0 \delta q_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{q_0}, \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_1 &= -\gamma' \beta \delta p_0 + \Delta \gamma' \beta \delta q_0 - \gamma' \delta p_1 - \Delta \gamma' \delta q_1 + \gamma' \delta p_2 - \Delta \gamma' \delta q_2 + \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p_1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p_1}, \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta q_1 &= -\Delta \gamma' \beta \delta p_0 + \gamma' \beta \delta q_0 + \Delta \gamma' \delta p_1 - \gamma' \delta q_1 - \Delta \gamma' \delta p_2 - \gamma' \delta q_2 + \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q_1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q_1}, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_2 &= -\gamma' \beta \delta p_0 + \Delta \gamma' \beta \delta q_0 - \gamma' \delta p_1 - \Delta \gamma' \delta q_1 + \gamma' \delta p_2 - \Delta \gamma' \delta q_2 + \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p_2} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p_2}, \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta q_2 &= -\Delta \gamma' \beta \delta p_0 + \gamma' \beta \delta q_0 + \Delta \gamma' \delta p_1 - \gamma' \delta q_1 - \Delta \gamma' \delta p_2 - \gamma' \delta q_2 + \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q_2} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q_2}. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Para as quadraturas do vácuo, introduzido pelos espelhos, utilizamos $\delta u_j = \exp(i\phi_j)(\delta u_{p_j} + i\delta u_{q_j})/2$. As perdas espúrias são modeladas da forma $\delta v_j = \exp(i\phi_j)(\delta v_{p_j} + i\delta v_{q_j})/2$.

Fazendo a transformação linear

$$\delta p_{\pm} = (\delta p_1 \pm \delta p_2)/\sqrt{2}, \quad \delta q_{\pm} = (\delta q_1 \pm \delta q_2)/\sqrt{2}, \quad (4.1.25)$$

chegamos ao conjunto de equações simplificado

$$\tau \frac{d}{dt} \delta p_- = -2\gamma' \delta p_- + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p_-} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p_-}, \quad (4.1.26)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \delta q_- = 2\Delta\gamma' \delta p_- + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q_-} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q_-}, \quad (4.1.27)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \delta p_+ = -2\Delta\gamma' \delta q_+ + \sqrt{2\gamma'} \beta \delta p_0 + \sqrt{2\Delta\gamma'} \beta \delta q_0 + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p_+} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p_+}, \quad (4.1.28)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \delta q_+ = -2\gamma' \delta q_+ - \sqrt{2\Delta\gamma'} \beta \delta p_0 + \sqrt{2\gamma'} \beta \delta q_0 + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q_+} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q_+}, \quad (4.1.29)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_0 = & -\sqrt{2\gamma'} \beta \delta p_+ \sqrt{2\Delta\gamma'} \beta \delta q_+ - \gamma'_0 \delta p_0 - \Delta_0 \gamma'_0 \delta q_0 + \\ & + \sqrt{2\gamma_0} \cos \phi_0 \delta p_0^e + \sqrt{2\gamma_0} \sin \phi_0 \delta q_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{p_0}, \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta q_0 = & -\sqrt{2\Delta\gamma'} \beta \delta p_+ - \sqrt{2\gamma'} \beta \delta q_+ + \Delta_0 \gamma'_0 \delta p_0 - \gamma'_0 \delta q_0 + \\ & - \sqrt{2\gamma_0} \sin \phi_0 \delta p_0^e + \sqrt{2\gamma_0} \cos \phi_0 \delta q_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{q_0}. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Note que o subespaço da subtração de quadraturas para os campos sinal e complementar é desacoplado do subespaço soma e do bombeio reduzindo a dimensão do problema. De um problema de dimensão 6, para dois problemas com dimensões 2 e 4.

4.1.2 Espectro de Ruído da Subtração de Quadraturas

Podemos calcular as soluções para as flutuações de maneira direta no espaço das frequências, fazendo a substituição $d/dt \rightarrow i\Omega$. Para o subespaço da subtração das quadraturas, obtemos no espaço das frequências

$$i\Omega\tau\delta p_-(\Omega) = -2\gamma'\delta p_-(\Omega) + \sqrt{2\gamma}\delta u_{p_-}(\Omega) + \sqrt{2\mu}\delta v_{p_-}(\Omega), \quad (4.1.32)$$

$$i\Omega\tau\delta q_-(\Omega) = 2\Delta\gamma'\delta p_-(\Omega) + \sqrt{2\gamma}\delta u_{q_-}(\Omega) + \sqrt{2\mu}\delta v_{q_-}(\Omega),$$

que leva a

$$\delta p_-(\Omega) = \frac{1}{2\gamma'(1+i\Omega')}\left[\sqrt{2\gamma}\delta u_{p_-}(\Omega) + \sqrt{2\mu}\delta v_{p_-}(\Omega)\right], \quad (4.1.33)$$

$$\begin{aligned} \delta q_-(\Omega) = & i\frac{1}{2\gamma'\omega'}\left\{\frac{\Delta}{1+i\Omega'}\left[\sqrt{2\gamma}\delta u_{p_-}(\Omega) + \sqrt{2\mu}\delta v_{p_-}(\Omega)\right] + \right. \\ & \left. + \sqrt{2\gamma}\delta u_{q_-}(\Omega) + \sqrt{2\mu}\delta v_{q_-}(\Omega)\right\}, \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

onde foi feito $\Omega' = \Omega/\delta\omega$, ou seja, a frequência de análise normalizada pela largura de banda da cavidade do OPO para os feixes sinal e complementar, lembrando que $\delta\omega = 2\gamma'/\tau$.

Para obter as flutuação das quadraturas que realmente serão medidas, é preciso levar em conta o acoplamento dos campos intracavidade com o vácuo incidente refletido pelo espelho de saída. Logo, a flutuação das quadraturas dos campo intracavidade transmitido pelo espelho de saída é misturado com o vácuo da forma

$$\delta p_-^s(\Omega) = -\delta u_{p_-}(\Omega) + \sqrt{2\gamma}\delta p_-(\Omega), \quad (4.1.35)$$

$$\delta q_-^s(\Omega) = -\delta u_{q_-}(\Omega) + \sqrt{2\gamma}\delta q_-(\Omega), \quad (4.1.36)$$

considerando $\gamma \ll 1$. Pela substituição das equações (4.1.33) e (4.1.33) nas equações acima, as

quadraturas dos campos de saída ficam

$$\delta p_-^s(\Omega) = \left(\frac{\gamma/\gamma'}{1 + i\Omega'} - 1 \right) \delta u_{p-}(\Omega) + \frac{\sqrt{\gamma\mu}}{\gamma'(1 + i\Omega')} \delta v_{p-}(\Omega), \quad (4.1.37)$$

$$\begin{aligned} \delta q_-^s(\Omega) = & i \frac{\Delta}{\gamma'\Omega'(1 - i\Omega')} [\gamma \delta u_{p-}(\Omega) + \sqrt{\gamma\mu} \delta v_{p-}(\Omega)] + \\ & - \left(1 + i \frac{\gamma/\gamma'}{\Omega'} \right) \delta u_{q-}(\Omega) + i \frac{\sqrt{\gamma\mu}}{\gamma'\Omega'} \delta v_{q-}(\Omega). \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

Que usamos para determinar o espectro de ruído $S_{\hat{p}_-}$ e $S_{\hat{q}_-}$:

$$S_{\hat{p}_-} = 1 - \frac{\gamma/\gamma'}{1 + \Omega'^2}, \quad (4.1.39)$$

$$S_{\hat{q}_-} = 1 + \frac{\gamma/\gamma'}{\Omega'^2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{1 + \Omega'^2} \right). \quad (4.1.40)$$

Vemos que o ruído $S_{\hat{p}_-}$ apresenta compressão, sendo sempre $S_{\hat{p}_-} < 1$, aproximando-se de 1 para $\Omega' \gg 1$. A compressão perfeita ocorre para $\Omega' = 0$. Esta é uma característica bem conhecida do OPO e um dos primeiros fenômenos puramente quânticos estudados nesse sistema acima do limiar [Heidmann et al., 1987]. Dependendo apenas das perdas relativas γ/γ' e de Ω' , figura 4.1. Ao contrário da quadratura amplitude, para o espectro de ruído da quadratura fase $S_{\hat{q}_-}$, obtemos excesso de ruído, sendo sempre $S_{\hat{q}_-} > 1$, e se aproximando do shot noise para $\Omega' \gg 1$. Onde além da dependência dos mesmos parâmetros de $S_{\hat{p}_-}$ há dependência com a dessintonia Δ .

Figura 4.1: Ruído $S_{\hat{p}_-}$ e $S_{\hat{q}_-}$ em função de Ω' . A linha horizontal tracejada marca o nível do shot noise.

4.1.3 Espectros de Ruído em Dessintonias Nulas

Para obter o espectro de ruído das quadraturas do feixe de bombeio e das somas das quadraturas dos feixes gêmeos podemos utilizar a mesma técnica anterior. Porém, resolver esse sistema de quatro equações que nos resta é complicado de ser feito analiticamente. Analisando o caso especial de dessintonias nulas, vemos que o problema se torna mais simples, pois o papel das dessintonias é acoplar as quadraturas amplitude e fase. Se considerarmos $\Delta = \Delta_0 = 0$ a dinâmica das quadraturas no domínio temporal se torna

$$p_+ \rightleftharpoons p_0 \quad \begin{cases} \tau \frac{d}{dt} \delta p_+ = \sqrt{2}\gamma' \beta \delta p_0 + \sqrt{2}\gamma \delta u_{p_+} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p_+}, \\ \tau \frac{d}{dt} \delta p_0 = -\sqrt{2}\gamma' \beta \delta p_+ - \gamma'_0 \delta p_0 + \sqrt{2\gamma_0} \delta p_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{p_0}, \end{cases} \quad (4.1.41)$$

$$q_+ \rightleftharpoons q_0 \quad \begin{cases} \tau \frac{d}{dt} \delta q_0 = -\sqrt{2}\gamma' \beta \delta q_+ - \gamma'_0 \delta q_0 + \sqrt{2\gamma_0} \delta q_0^e + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{q_0}, \\ \tau \frac{d}{dt} \delta q_+ = -2\gamma' \delta q_+ + \sqrt{2}\gamma' \beta \delta q_0 + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q_+} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q_+}, \end{cases} \quad (4.1.42)$$

em que $\phi_0 = \phi_1 + \phi_2 = 0$.

Após uma álgebra simples as soluções no espaço das frequências para os campos de saída são

$$\delta p_+^s(\Omega) = \kappa_p \delta p_0^e + (2\gamma\xi - 1)\delta u_{p_+} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} \kappa_p \delta v_{p_0} + 2\sqrt{\gamma\mu} \xi \delta v_{p_+}, \quad (4.1.43)$$

$$\delta q_+^s(\Omega) = \kappa_q \delta q_0^e + (2\gamma\zeta - 1)\delta u_{q_+} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} \kappa_q \delta v_{q_0} + 2\sqrt{\gamma\mu} \zeta \delta v_{q_+}, \quad (4.1.44)$$

$$\delta p_0^s(\Omega) = \vartheta_p \delta p_0^e - \kappa_p \delta u_{p_+} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} (\vartheta_p + 1) \delta v_{p_0} - \sqrt{\mu/\gamma} \kappa_p \delta v_{p_+}, \quad (4.1.45)$$

$$\delta q_0^s(\Omega) = \vartheta_q \delta q_0^e - \kappa_q \delta u_{q_+} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} (\vartheta_q + 1) \delta v_{q_0} - \sqrt{\mu/\gamma} \kappa_q \delta v_{q_+}, \quad (4.1.46)$$

onde

$$\xi = \left(2i\gamma'\Omega' + \frac{2\gamma'^2\beta^2}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \right)^{-1}, \quad (4.1.47)$$

$$\zeta = \left(2\gamma' + 2i\gamma'\Omega' + \frac{2\gamma'^2\beta^2}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \right)^{-1}, \quad (4.1.48)$$

$$\kappa_p = \frac{2\sqrt{2}\gamma'\beta\sqrt{\gamma_0\gamma}}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \xi, \quad (4.1.49)$$

$$\kappa_q = \frac{2\sqrt{2}\gamma'\beta\sqrt{\gamma_0\gamma}}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \zeta, \quad (4.1.50)$$

$$\vartheta_p = -1 + \frac{2\gamma_0}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \left(1 - \frac{2\gamma'^2\beta^2}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \xi \right), \quad (4.1.51)$$

$$\vartheta_q = -1 + \frac{2\gamma_0}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \left(1 - \frac{2\gamma'^2\beta^2}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \zeta \right). \quad (4.1.52)$$

Os espectros de ruído resultantes são

$$S_{\hat{p}_+} = |\kappa_p|^2 S_{p_0}^e + |2\gamma\xi - 1|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\kappa_p|^2 + 4\gamma\mu |\xi|^2, \quad (4.1.53)$$

$$S_{\hat{q}_+} = |\kappa_q|^2 S_{q_0}^e + |2\gamma\zeta - 1|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\kappa_q|^2 + 4\gamma\mu |\zeta|^2, \quad (4.1.54)$$

$$S_{\hat{p}_0} = |\vartheta_p|^2 S_{p_0}^e + |\kappa_p|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\vartheta_p + 1|^2 + \mu/\gamma |\kappa_p|^2, \quad (4.1.55)$$

$$S_{\hat{q}_0} = |\vartheta_q|^2 S_{q_0}^e + |\kappa_q|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\vartheta_q + 1|^2 + \mu/\gamma |\kappa_q|^2. \quad (4.1.56)$$

Para a soma das quadraturas de sinal e complementar os resultados mostram que ocorre compressão de ruído em $\hat{q}_+$ e excesso de ruído em $\hat{p}_+$, figura 4.2. $S_{\hat{q}_+}$ apresenta compressão para qualquer valor da frequência de análise Ω' e potência σ , sendo a compressão perfeita acontecendo quando $\Omega' \rightarrow 0$ e $\sigma \rightarrow 1$; no limite em que σ e Ω' são grandes, o ruído tende a 1 (shot noise).

Como consequência da relação de incerteza de Heisenberg a compressão em $S_{\hat{q}_+}$ é acompanhada de excesso de ruído em $S_{\hat{p}_+}$. Sobre o feixe de bombeio refletido as expressões para seu espectro de ruído são dadas por (4.1.55) e (4.1.56), apresentados na figura 4.3. Há compressão de ruído em $S_{\hat{p}_0}$ que parte do shot noise para $\sigma = 1$ e tende a 0.5 para $\sigma \approx 4$, tal efeito foi observado experimentalmente por [Kasai et al., 1997, Zhang et al., 2001]. Em consequência da compressão em $S_{\hat{p}_0}$, é gerado excesso de ruído em $S_{\hat{q}_0}$ para toda a região de parâmetros.

4.2 Emaranhamento Bipartido entre os Feixes Gêmeos

Sendo os operadores de quadratura fase e amplitude matematicamente equivalentes à posição e momento de um oscilador harmônico quântico, é natural esperar que as correlações esperadas

Figura 4.2: Espectros de ruído $S_{\hat{q}_+}$ (esquerda) e $S_{\hat{p}_+}$ (direita) em função de σ e Ω' . Consideramos como entrada um feixe de bombeio coerente, sem excesso de ruído e perdas espúrias nulas ($\mu = \mu_0 = 0$). Gráfico retirado de [Villar et al., 2006].

Figura 4.3: Espectro de ruído de quadratura do feixe de bombeio de saída (bombeio refletido) do OPO, $S_{\hat{p}_0}$ (esquerda) e $S_{\hat{q}_0}$ (direita) em função de σ e Ω' . Gráfico retirado de [Villar et al., 2006].

tenham natureza quântica. Para investigar o surgimento de emaranhamento entre os feixes sinal e complementar utilizamos o critério de Duan [Duan et al., 2000], neste caso o par EPR escolhido será, $\hat{u} = \hat{p}_-$ e $\hat{v} = \hat{q}_+$, como discutido na seção (2.9), podendo ser expresso pela soma das variâncias

$$\Delta^2 \hat{p}_- + \Delta^2 \hat{q}_+ \geq 2. \quad (4.2.1)$$

Utilizando os valores calculados anteriormente podemos estudar o comportamento das somas dos espectros de ruído e encontrar as regiões de violação da desigualdade 4.2.1, figura 4.4.

Vemos que o critério demonstra emaranhamento em toda a região de parâmetros apresentados em 4.4, sendo a violação máxima para $\sigma = 1$ e $\Omega' = 0$ sendo a soma das variâncias nula.

Figura 4.4: Soma $S_{\hat{p}_-} + S_{\hat{q}_+}$, verifica-se a violação do critério de Duan para toda região de parâmetros. Gráfico retirado de [Villar et al., 2006].

4.3 Emaranhamento Tripartido

Lembrando que estamos interessados nas correlações multicolores envolvendo os três feixes bombeio, sinal e complementar, aplicamos o critério de Duan generalizado para N subsistemas de variáveis contínuas por Peter van Loock e Akira Furusawa [van Loock e Furusawa, 2003]. Nesse caso, o conjunto de desigualdades mais adequado como estudado em [Villar et al., 2006] é

$$V_0 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{\sqrt{2}} - \alpha_0 \hat{q}_0 \right) \geq 2, \quad (4.3.1)$$

$$V_1 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_0 - \hat{q}_1}{\sqrt{2}} - \alpha_2 \hat{q}_2 \right) \geq 2, \quad (4.3.2)$$

$$V_2 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_0 - \hat{q}_2}{\sqrt{2}} - \alpha_1 \hat{q}_1 \right) \geq 2. \quad (4.3.3)$$

A violação das desigualdades acima elimina a possibilidade de escrever o operador densidade do sistema total como o produto do operador densidade de cada subsistema com as demais partes. A violação de duas dessas desigualdades é condição suficiente para demonstrar emaranhamento tripartido. De fato, por questões de simetria teremos $V_1 = V_2$. Na figura 4.5 vemos que para condições ideais de operação, o emaranhamento é teoricamente previsto para uma grande região de parâmetros σ e Ω' . É essa correlação quântica que futuramente será usada como ferramenta de transferência de informação com átomos.

4.4 Ruído de Fônons

As primeiras tentativas de medida do emaranhamento bipartido no oscilador paramétrico ótico foram frustradas por um excesso de ruído de fase. As primeiras sugestões de explicação de tal fenômeno foram relacionadas a limitações da teoria aplicadas ao OPO. Porém, uma investigação teórica detalhada das aproximações utilizadas validaram os cálculos dentro da linearização das equações [Villar, 2007].

Investigações experimentais mostraram que o ruído extra dependia intrinsecamente do cristal não linear e da potência de bombeio, não tendo relação com o processo de conversão paramétrica. Um feixe coerente, sem excesso de ruído, que entrava na cavidade do OPO mesmo abaixo do limiar de oscilação ou em uma polarização que não permitia a oscilação de ocorrer apresentava excesso de ruído de fase, quando analisado o feixe refletido pela cavidade.

Figura 4.5: Somas V_0 e $V_1 = V_2$ das variâncias em função de σ e Ω' . Emaranhamento tripartido é constatado quando $V_0 < 2$ e $V_1 < 2$. Considerou-se um feixe de bombeio coerente e perdas espúrias nulas. Gráfico retirado de [Villar et al., 2006].

Investigações feitas no nosso grupo [César et al., 2009] demonstraram que esse excesso de ruído na verdade é fruto de uma modulação aleatória devido a flutuações aleatórias no índice de refração, ligadas a flutuações na densidade do cristal, devido aos fônons. Esses fônons espalhariam a luz via espalhamento Brillouin com uma frequência alterada aumentando o ruído nas bandas laterais.

Uma maneira de contornar essa situação é pelo controle de temperatura do cristal, o ruído de fônons é proporcional a temperatura do cristal [César et al., 2009]. E foi a redução da temperatura do cristal que possibilitou a primeira medida de emaranhamento tripartido no oscilador paramétrico ótico. É de fundamental importância para esse trabalho a caracterização desse ruído para o nosso cristal PPKTP tipo I nos comprimentos de onda em que estamos trabalhando 1560 nm e 780 nm.

Parte II

Resultados Experimentais

CAPÍTULO 5

APARATO EXPERIMENTAL E RUÍDO QUÂNTICO

*“Quantum phenomena do not occur in a Hilbert space.
They occur in a laboratory”*

(Asher Peres, Quantum theory: concepts and methods)

Neste capítulo descreveremos os principais componentes do aparato experimental, assim como a primeira medida de ruído quântico no nosso sistema.

5.1 Laser de Ti:Safira

Utilizamos para bombear o nosso OPO um laser de Ti:Safira ($\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$). Esse tipo de laser possui uma região de sintonia do comprimento de onda de saída que vai de 660 nm a 1180 nm. Enquanto a sua banda de absorção (banda de bombeio), vai de 400 nm até 650 nm, tendo absorção máxima por volta de 500 nm. O ganho máximo do laser ocorre próximo a 790 nm (ver figura 5.1). A larga banda de absorção possibilita a utilização de vários tipos de laser de bombeio. Os métodos mais comuns são a utilização de laser de Argônio, que possui saída intensa em 488 nm e 515 nm e lasers provenientes de dobramento de frequência com Nd:YAG, que emitem luz verde em 532 nm. Este é o caso do laser utilizado no nosso aparato experimental, o modelo Verdi-V18 de fabricação da empresa Coherent.

Figura 5.1: Bandas de emissão e absorção do cristal de $\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$. A banda de absorção tem pico próximo de 490 nm, enquanto o pico da banda emissão está próximo de 790 nm. Existe uma pequena banda de absorção, que se superpõe com a banda de emissão, chamada de região de absorção residual.

O laser foi construído no nosso laboratório¹ e a sua construção e caracterização está descrita em algumas teses do grupo [Moraes, 2013, Cassemi, 2008]. Entre as principais características o laser pode operar entre 730 nm e 800 nm. Para saída em 780 nm, sua eficiência quântica é $\eta_Q = 51\%$ podendo alcançar uma potência de saída de 830 mW para uma potência de bombeio

¹Em colaboração com o grupo de Flávio C. Cruz (Universidade de Campinas, UNICAMP)

Figura 5.2: Esquema do laser de Ti:Safira. A cavidade é formada por quatro espelhos em um arranjo “borboleta”, na qual são inseridos elementos óticos que permitem a operação monomodo do laser: o filtro birrefringente, diodo ótico e o etalon. Uma cavidade de referência é utilizada para estabilização da frequência de saída do laser.

de 5 W. Possui uma largura de linha de 0.6 MHz. O perfil transversal é gaussiano e livre de astigmatismo.

Entre as propriedades mais importantes do laser de Ti:Safira está o seu baixo ruído. No nosso caso, o ruído é de um feixe no estado coerente livre de excesso de ruído para frequências acima de 9 MHz, ver figura 5.3, Os dados foram retirados de [Moraes, 2013]. Para uma frequência de

Figura 5.3: Medidas de ruído de amplitude e fase do laser utilizado.

análise $\gtrsim 9$ MHz o laser possui apenas o ruído de um estado coerente. Porém, para as frequência de análise que faremos medidas no OPO ≈ 6 MHz há um pequeno excesso de ruído. Esse pequeno excesso de ruído de fase pode ser um problema na medida de emaranhamento. Já que a compressão na soma das quadraturas de fase dos feixes gêmeos é sensível a excesso de ruído de fase do feixe de bombeio [Villar et al., 2004].

5.2 Elementos do OPO

O cristal não linear utilizado no nosso OPO, é um cristal **PPKTP**, *Periodically poled potassium titanyl phosphate*, que consiste de um cristal de **KTP**, *Potassium titanyl phosphate* (KTiOPO_4), sendo um cristal biaxial positivo, ou seja, $n_z > \{n_x, n_y\}$ com uma estrutura periódica para trabalhar em *quase casamento de fase*. O cristal foi fabricado pela empresa israelense Raicol Crystals e inicialmente deveria ser do tipo II, porém, por um erro da Raicol nosso cristal se revelou do tipo I. O período de inversão do nosso cristal é $\Lambda \sim 25 \mu\text{m}$ [de Andrade, 2013], por

λ (nm)	Espelho de entrada T(%)	Espelho de saída T(%)
780	30	0,02
1520	0,06	3,4
1560	0,0425	3,75
1600	0,05	4,1

Tabela 5.1: Tabela de valores de transmissão, em %, para os espelhos de entrada e saída, medidos nos comprimentos de onda mais relevantes.

ser do tipo I não temos o efeito de “walk-off” nos feixes gêmeos .

Os elementos que compõem a cavidade ótica devem ser escolhidos levando em consideração vários fatores. As propriedades de estabilização do sistema, limiar de oscilação, separação entre os picos de oscilação, dependem diretamente da geometria e da refletividade dos espelhos da cavidade. Utilizamos dois espelhos esféricos côncavos de mesmo raio, de fabricação da empresa ATFilms, que formam uma cavidade de Fabry-Perot simétrica. Os raios de curvatura são iguais a $R = 25$ mm e o diâmetro transverso dos espelhos é de um terço de polegada. Na tabela 5.1, encontra-se as transmissões T(%) em porcentagem, para os espelhos de entrada (ou de acoplamento) e saída. Assim, o espelho de entrada é parcialmente refletor para 780 nm, e altamente refletor para os comprimentos de onda dos feixes gêmeos. Enquanto o espelho de saída é altamente refletor para 780 nm e parcialmente refletor para sinal e complementar. A finesse da cavidade do OPO medida para 780 nm é $F_{780} \approx 16$, enquanto para 1560 nm $F_{1560} \approx 160$.

O comprimento da cavidade é escolhido de forma a maximizar a interação não linear com o cristal. A cintura que se localizará no centro da cavidade, dependerá do comprimento da cavidade e dos raios dos espelhos. A cintura do feixe de bombeio w_c dentro da cavidade não deve ser muito pequena para não difratar muito antes de sair do cristal. Por outro lado, uma cintura grande fará com que a interação não linear seja menor. Para um tamanho l do cristal o comprimento de Rayleigh otimizado será dado por [Boyd, 1968]

$$\frac{l}{n_0} = 5,6z_R, \quad (5.2.1)$$

onde z_R é o comprimento de Rayleigh e n_0 é o índice de refração para o comprimento de onda de bombeio. Para o comprimento do nosso cristal $l = 15$ mm, isso dá uma cintura de valor $w_c \approx 19 \mu\text{m}$. Seguindo essa regra z_R também impõe um comprimento de cavidade que pode ser encontrado utilizando a relação

$$z_R^2 = \frac{(2R - L_{\text{cav}})L_{\text{cav}}}{4}. \quad (5.2.2)$$

O que nos indica um comprimento ideal de cavidade de aproximadamente $L_{\text{cav}} = 56$ mm, ou seja, perto da região de concentricidade [Siegman, 1986]. A largura de banda da cavidade do OPO é um parâmetro fundamental do sistema. Para a finesse medida, no comprimento de onda dos feixes gêmeos e dado o comprimento da cavidade a largura de banda é aproximadamente 14 MHz.

Para fazer com que o modo oscilante na cavidade seja igual ao modo de entrada é preciso “moldar” o feixe Gaussiano fundamental TEM_{00} usando lentes ou espelhos curvos. Esse processo é chamado de *acordo de modo* ou casamento de modo. No nosso experimento é preciso fazer o acordo de modo do feixe que sai da cavidade do laser de Ti:Safira com uma certa cintura w_0 , com o modo ressoante na cavidade do OPO, figura 5.4. Os cálculos são feitos utilizando o formalismo de matrizes ABCD [Siegman, 1986, Saleh e Teich, 2007, Kogelnik e Li, 1966] e o domínio dessa técnica é de fundamental importância quando trabalhamos com cavidades óticas. No contexto de osciladores paramétricos óticos, essa técnica está bem descrita em outras teses do grupo [Martinelli, 2002, Villar, 2004].

Figura 5.4: O acordo de modo do laser de Ti:Safira com a cavidade do OPO é feito utilizando um conjunto de duas lentes, f_1 e f_2 .

5.3 Oscilação e Saída do OPO

Como descrito no tratamento do OPO triplamente ressonante, quando a potência de entrada do feixe de bombeio é maior do que a potência de limiar, ocorre a oscilação dos campos sinal e complementar. Escolhido um comprimento de onda para o feixe de bombeio os comprimentos de onda dos feixes sinal e complementar estão definidos pelos índices de refração que satisfazem as condições de acordo de fase. Porém, um controle da temperatura permite sintonizar os comprimentos de onda de saída, uma vez que o índice de refração do cristal depende da temperatura do material. Para isso, implementamos um circuito de controle de temperatura ativo² que permite estabilizar a temperatura do cristal entre $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $50\text{ }^{\circ}\text{C}$, com flutuações da ordem de algumas dezenas de mK, figura 5.5 e 5.6.

Figura 5.5: Visão de alguns dos componentes do oscilador paramétrico óptico. (1) Cristal PPKTP envolto em uma massa de alumínio que funciona como reservatório térmico. (2) Sistema de refrigeração do Peltier³, dentro desta base de cobre há um fluxo constante de água em uma temperatura de aproximadamente 18°C . (3) Elemento piezoelétrico (PZT) usado para fazer a varredura do comprimento da cavidade. (4) Peltier, elemento ativo do controle de temperatura.

Queremos trabalhar com comprimentos de onda próximos da degenerescência, de modo que a resposta dos detectores seja semelhante para os dois feixes de saída, e em baixas temperaturas, para que o ruído de fônons seja diminuído. O cristal apresenta degenerescência para uma temperatura um pouco acima de 0°C , dependendo finamente do ângulo do cristal e do

²Esse sistema foi desenvolvido no laboratório Kastler-Brossel em Paris.

Figura 5.6: Mais elementos que compõem o aparato experimental. (5) Espelho de entrada. (6) Espelho de saída. (7) Sensores de temperatura: termopar e termistor. (8) Botões de ajuste do ângulo do cristal, há também ajuste nos eixos x , y e z , por botões de alta precisão que não estão mostrados na figura.

comprimento de onda de bombeio. É necessário colocar o OPO em um ambiente sem qualquer humidade de modo a evitar condensações de vapor d'água no cristal ou nos espelhos, na medida que a temperatura é diminuída. Para o ambiente da sala da mesa ótica o mínimo em que era possível estabilizar a temperatura do cristal chegava a $15\text{ }^{\circ}\text{C}$, abaixo disso a condensação no cristal ocorria e as perdas não permitiam que a oscilação acontecesse. Para trabalharmos em temperaturas menores construiu-se uma câmara de vácuo na qual o OPO fica inserido. A injeção (do bombeio) e saída (dos feixes gêmeos) é feita por meio de janelas óticas com tratamentos anti-refletores para 780 nm e 1560 nm . Uma foto da câmara instalada pode ser vista na figura 5.7.

Após feito o correto acordo de modo, alinhamento dos espelhos, posicionamento do cristal e estabilização da temperatura um limiar mínimo de 6 mW foi atingido. Para uma descrição mais completa dos parâmetros aos quais esse OPO é sensível, ver [de Andrade, 2013].

A verificação dos comprimentos de onda de saída foi feita com um monocromador de precisão de $\pm 0.5\text{ nm}$, por falta de um medidor de comprimentos de onda mais preciso para essa faixa do infravermelho. Para se ter uma ideia da capacidade de sintonia do OPO, com cristal PPKTP tipo I, veja figura 5.8. As medidas foram realizadas para um comprimento de onda de bombeio fixo próximo de 780 nm , variamos a temperatura do cristal e verificamos os comprimentos de onda dos feixes sinal e complementar, na saída do monocromador. Note o perfil parabólico das curvas típico do cristal com acordo de fase tipo I. Na figura 5.8, está representada toda a faixa de temperatura para a qual a oscilação ocorre, para temperaturas menores do que a temperatura em que os dois campos de saída estão degenerados em frequência não há oscilação. Assim como há um limite superior onde o acordo de fase não é mais satisfeito. Nesse caso, a diferença entre os comprimentos de onda de sinal e complementar pode ser variada quase continuamente de uma situação próxima da degenerescência até uma diferença de 350 nm .

5.4 Descrição do Experimento

Descreveremos o experimento completo montado para a medida de compressão de ruído.

Figura 5.7: Câmara de vácuo utilizada para criar um ambiente sem humidade, possibilitando diminuir a temperatura do OPO para valores abaixo de 0°C .

Figura 5.8: Comprimento de onda de saída para feixes sinal e complementar. O perfil parabólico é típico de cristais com acordo de fase tipo I. Para esse conjunto de dados o comprimento de onda do bombeio foi fixado em 780.48 nm .

A luz do laser de Ti:Safira é usada para bombear o OPO com cristal PPKTP dentro da cavidade ótica inserida na câmara de vácuo. A temperatura foi estabilizada próximo de 4°C e os comprimentos de onda de saída medidos para os feixes gêmeos são $\lambda_{\text{sinal}} = 1593.5 \pm 0.5\text{ nm}$ e $\lambda_{\text{complementar}} = 1547.5 \pm 0.5\text{ nm}$. Os feixes saem colineares, precisando ser separados para a detecção individual. Isso é feito incidindo-os em uma grade de difração (Thorlabs modelo GR25-613). Para essa separação de comprimentos de onda o ângulo de saída dos dois feixes após a grade é suficientemente grande, de modo que em uma propagação livre de aproximadamente 1 m os feixes podem ser direcionados separadamente por espelhos para os sistemas de detecção. Um esquema da montagem pode ser visto na figura 5.9.

5.4.1 Travamento da Cavidade do OPO

Para manter o OPO em ressonância faz-se necessário um sistema de controle ativo do comprimento da cavidade, e por consequência, a geração de um sinal de erro. O bombeio

Figura 5.9: Esquema do aparato experimental utilizado para medida de compressão de ruído na quadratura $\hat{p}_-$.

refletido pela cavidade do OPO é recuperado pela utilização de um isolador óptico. Parte do bombeio refletido é utilizado para gerar o sinal de erro que o sistema eletrônico de travamento precisa para retroalimentar o PZT que varre a cavidade ótica do OPO. Utilizamos a técnica de Dither Locking [CALTECH, 2013] e implementamos um circuito de travamento onde o sinal de erro é gerado por uma modulação periódica na varredura da cavidade. Com isso, conseguimos obter uma saída de luz contínua. Porém saltos de modo ocorrem com uma alta frequência para potências de entrada $\sigma \gtrsim 3$, ver figura 5.10. É preciso obter modos de saída mais estáveis para potências mais baixas, pois é nesse regime que realizaremos as medidas de emaranhamento.

Figura 5.10: (a) O sinal superior é o bombeio refletido que é usado para travar a cavidade, logo a baixo vemos o perfil típico de um sinal de erro da técnica de Dither Locking. (b) OPO travado na ressonância (sinal superior) e (sinal inferior) sinal de erro.

5.4.2 Sistema de Detecção

A detecção dos feixes gêmeos é feita com fotodetectores de fabricação da empresa JSDU, modelo ETX 500T com eficiência quântica medida⁴ de $92 \pm 1\%$. A fotocorrente gerada pelos detectores passa por uma eletrônica que separa as componentes de baixa frequência (sinal DC) e

⁴Maior eficiência pode ser alcançada retirando a janela protetora do fotodetector.

alta frequência (sinal HF). Para realizar medidas em uma certa frequência de análise Ω é feito uma mistura em um circuito de demodulação do sinal HF da fotocorrente com um sinal senoidal de referência gerado na frequência Ω . A eletrônica de demodulação realiza o batimento da onda de referência (oscilador local eletrônico) e separa a parte resultante em baixa frequência (menor que 300 kHz) que é enviada a um bloco de conectores da National Instruments (modelo BNC-2110) que está conectada a uma placa de conversão analógico/digital da mesma empresa (modelo PCI-6132). A aquisição dos dados é feita pelo programa LabView a uma taxa de 600 kHz.

Para cada detector dois canais de aquisição são necessários (DC e HF). Para fazer a detecção balanceada dos dois feixes de saída, conforme ilustrado na figura 4.1, faz-se necessário 8 canais de aquisição. Em cada medida de ruído, 1000 pontos são adquiridos (figura 5.11) e a variância desse conjunto de dados é calculada e normalizada ao shot noise.

Figura 5.11: Exemplo de conjunto de medidas do sinal HF proveniente da detecção balanceada em função do tempo. Os pontos em preto indicam o ruído eletrônico (sem luz), enquanto os pontos em vermelho são medidas do sinal HF demodulado da subtração das fotocorrentes no esquema de detecção balanceada, isso mostra que o ruído da luz (shot noise) está muito maior do que o ruído eletrônico, como esperado de um bom sistema de detecção.

Como descrito na seção 2.7, a subtração das fotocorrentes de uma detecção balanceada mede o shot noise, a soma nos dará a a flutuação de intensidade do feixe. Essas operações são feitas uma vez que os dados são digitalizados pelo programa em LabView. É importante que os detectores sejam construídos o mais idênticos possível para que os ruídos eletrônicos⁵ e ganhos internos sejam mais próximos possíveis.

5.5 Compressão de Ruído

As medidas de ruído foram feitas para uma frequência de análise de 6 MHz o que corresponde a aproximadamente um terço da largura de banda do OPO, $\Omega' \approx 1/3$. As perdas no sistema afetam diretamente a compressão de ruído que cai linearmente com a eficiência de detecção η_d [Bachor e Ralph, 2004]

$$S_{\hat{p}_-} = 1 - \eta_d \frac{\eta_{\text{OPO}}}{1 + (\Omega/\delta\omega)^2}, \quad (5.5.1)$$

sendo $\eta_{\text{OPO}} = \gamma/\gamma'$ a eficiência do OPO. No nosso caso

$$\eta_d = \eta_{\text{propagação}} \eta_{\text{grade}} \eta_{\text{fotodetectores}} \approx 0.68, \quad (5.5.2)$$

⁵Também chamado de “dark noise”.

Figura 5.12: Exemplo de curva de calibração do shot noise. Cada ponto representa a variância de um conjunto de dados (1000 valores) da subtração das fotocorrentes em um sistema de detecção balanceada em função do sinal DC (valor médio da fotocorrente).

onde $\eta_{\text{propagação}}$ leva em consideração as perdas pela propagação da luz nos espelhos e lentes, η_{grade} é a eficiência da grade de difração, que depende dos comprimentos de onda e polarizações incidentes. Enquanto $\eta_{\text{fotodetectores}}$ é a eficiência quântica (basicamente a razão de fótons convertidos em elétrons) dos detectores.

Durante as medidas é preciso manter o OPO na ressonância, com frequência estável. Porém, o sistema de travamento da cavidade implementado mostrou-se ineficiente, para o caso do OPO tipo I. Os modos são muito próximos uns dos outros⁶ e saltos de modo ocorrem em uma taxa bastante alta. Mesmo nessa situação é possível demonstrar a compressão de ruído na quadratura $\hat{p}_-$.

O experimento foi montado como ilustrado na figura 5.9. Colocamos, além da ótica já discutida, filtros atenuadores, que transmitem apenas uma certa quantidade de luz. A introdução do filtro é importante para a comprovação da compressão de ruído. Se o filtro deixa passar uma certa fração da luz η_T o efeito na compressão de ruído será da forma [Bachor e Ralph, 2004]

$$S_{\hat{p}_-} = 1 - \eta_T \eta_d \frac{\eta_{\text{OPO}}}{1 + (\Omega/\delta\omega)^2}. \quad (5.5.3)$$

O que mostra que o ruído deve tender ao shot noise quando totalmente bloqueado, ou seja, $\Delta^2 \hat{p}_- \rightarrow 1$ quando $\eta_T \rightarrow 0$. Isso serve de teste para saber se estamos realmente observando compressão de ruído.

Frequentemente na literatura a quantidade de compressão de ruído é expressa na escala dB, a conversão é feita da forma

$$S_{\text{dB}} = 10 \log_{10} (S_{\hat{p}_-}). \quad (5.5.4)$$

Quando $S_{\text{dB}} < 0$, significa que há compressão de ruído na quadratura e o shot noise corresponderá a $S_{\text{dB}} = 0$. Em nossas medidas, obtivemos um valor máximo de compressão de 44% (-2.5 dB), ver figura 5.13. O que indica uma compressão gerada, ou seja, que poderíamos medir se $\eta_d = 1$, de 64% (-4.5 dB).

O gráfico representado na figura 5.13 mostra claramente que o ruído na quadratura $\hat{p}_-$ apresenta compressão de -2.5 dB, medido sem filtro. Utilizamos esse valor para traçar uma curva teórica do ruído de quadratura em função da atenuação (linha tracejada). Percebe-se uma

⁶Tal que o sistema de travamento, não possui controle do comprimento da cavidade suficiente para estabilizar a frequência.

Figura 5.13: Medidas de compressão de ruído para diferentes fatores de atenuação dos feixes sinal e complementar, diferindo em comprimento de onda por $\Delta\lambda \approx 50$ nm. Pela teoria, a variância medida na quadratura comprimida $\hat{p}$ deve tender linearmente ao ruído quântico padrão, $\Delta^2 \hat{p}_- \rightarrow 1$ quando $T\% \rightarrow 0$.

discrepância entre os ruídos medidos com a aplicação dos filtros em relação a curva teórica, isso pode ser explicado pelos saltos de modo no OPO durante as medidas.

Esse tipo de experimento foi realizado primeiramente pelo grupo de Paris [Heidmann et al., 1987], onde obtiveram uma redução de 27% (-1.36 dB). Atualmente o recorde de compressão medido é -12.7 dB [Eberle et al., 2010].

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação, descrevemos o funcionamento de um oscilador paramétrico ótico bombeado em 780 nm com cristal PPKTP tipo I, construído para uma futura interação com átomos de rubídio. Propriedades clássicas e quânticas foram estudadas teoricamente e medidas, em especial, foi demonstrada uma compressão de ruído de amplitude de 44% (-2.5 dB) em uma frequência de análise de 6 MHz, nos feixes de saída acima do limiar de oscilação cujos comprimentos de onda dos feixes sinal e complementar diferiam de $\Delta\lambda \approx 50$ nm. Tal compressão indica que emaranhamento pode estar sendo gerado entre os modos de saída do OPO, e possivelmente emaranhamento tripartido.

Devido à dificuldade de travar o OPO com cristal tipo I, grande perda proporcionada pelas grades de difração e a dependência do alinhamento após a grade com o comprimento de onda de incidência, a ideia original de usar um cristal com acordo de fase tipo II será retomada e implementada¹. Porém, o baixo limiar de oscilação e grande faixa de comprimento de onda de saída, faz com que o cristal tipo I não seja descartado das possíveis aplicações no laboratório. Uma aplicação futura, por exemplo, seria na investigação das propriedades de ruído para uma potência de bombeio de $\sigma = 4$, onde ocorre a máxima eficiência do OPO e inclusive, os modos individuais de saída estão comprimidos [Fabre et al., 1989]. Desse modo, continuaremos a trabalhar utilizando o cristal tipo I até a chegada do cristal tipo II quando teremos resultados mais conclusivos.

As medidas de ruído de fase em uma operação não degenerada do OPO pode ser implementada utilizando a técnica de rotação da elipse de ruído por cavidades óticas [Villar, 2008, Barbosa et al., 2013a]. O próximo passo na direção da interface com átomos é a caracterização completa do emaranhamento entre bombeio, sinal e complementar no nosso sistema, figura 6.1, além da influência do ruído de fônons no cristal PPKTP nas correlações quânticas. Tendo total conhecimento e controle do nosso sistema, podemos iniciar o estudo da transferência de informação com a nuvem de átomos frios em uma armadilha magnética ótica presente no LMCAL.

¹Se a Raicol acertar dessa vez.

Figura 6.1: Esquema do aparato experimental que será usado para caracterização de emaranhamento tripartido no nosso sistema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Agarwal, 2012] Agarwal, G. (2012). *Quantum Optics*. Quantum Optics. Cambridge University Press.
- [Bachor e Ralph, 2004] Bachor, H. e Ralph, T. (2004). *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. Physics textbook. Wiley.
- [Barbosa et al., 2013a] Barbosa, F. a. S., Coelho, a. S., Cassemiro, K. N., Nussenzveig, P., Fabre, C., Martinelli, M., e Villar, a. S. (2013a). Beyond Spectral Homodyne Detection: Complete Quantum Measurement of Spectral Modes of Light. *Physical Review Letters*, 111(20):200402.
- [Barbosa et al., 2013b] Barbosa, F. a. S., Coelho, a. S., Cassemiro, K. N., Nussenzveig, P., Fabre, C., Villar, a. S., e Martinelli, M. (2013b). Quantum state reconstruction of spectral field modes: Homodyne and resonator detection schemes. *Physical Review A*, 88(5):052113.
- [Boyd, 1968] Boyd, G. D. (1968). Parametric Interaction of Focused Gaussian Light Beams. *Journal of Applied Physics*, 39(8):3597.
- [Boyd, 2008] Boyd, R. (2008). *Nonlinear Optics*. Nonlinear Optics Series. Elsevier Science.
- [Braunstein, 2005] Braunstein, S. L. (2005). Quantum information with continuous variables. *Reviews of Modern Physics*, 77(2):513–577.
- [CALTECH, 2013] CALTECH (2013). Ph 77 ADVANCED PHYSICS LABORATORY — ATOMIC AND OPTICAL PHYSICS: Expt. 72 — Laser Frequency Stabilization. <http://pmaweb.caltech.edu/~ph77/>. Acessado em: 03/10/2014.
- [Cassemiro, 2008] Cassemiro, K. N. (2008). *Correlações Quânticas Multicolores no Oscilador Paramétrico Ótico*. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo.
- [Caves, 1981] Caves, C. (1981). Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, 23(8):1693–1708.
- [César et al., 2009] César, J., Coelho, a., Cassemiro, K., Villar, a., Lassen, M., Nussenzveig, P., e Martinelli, M. (2009). Extra phase noise from thermal fluctuations in nonlinear optical crystals. *Physical Review A*, 79(6):063816.
- [Coelho et al., 2015] Coelho, A. S., Barbosa, F. A. S., Cassemiro, K. N., Martinelli, M., Villar, A. S., e Nussenzveig, P. (2015). Analyzing the Gaussian character of the spectral quantum state of light via quantum noise measurements. *Physical Review A*, 92(1):012110.
- [Coelho et al., 2009] Coelho, a. S., Barbosa, F. a. S., Cassemiro, K. N., Villar, a. S., Martinelli, M., e Nussenzveig, P. (2009). Three-color entanglement. *Science (New York, N.Y.)*, 326(5954):823–6.
- [Cohen-Tannoudji et al., 1977] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., e Laloë, F. (1977). *Quantum mechanics*. Quantum Mechanics. Wiley.

- [de Andrade, 2013] de Andrade, R. B. (2013). *Construção de um Oscilador Paramétrico Ótico para uma interface átomo-luz*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo.
- [Debuisschert et al., 1993] Debuisschert, T., Sizmann, A., Giacobino, E., e Fabre, C. (1993). Type-II continuous-wave optical parametric oscillators oscillation and frequency-tuning characteristics. *Journal of the Optical Society of America B*, 10(9):1668.
- [Dirac, 1927] Dirac, P. A. M. (1927). The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. *Proceedings of the Royal Society of London*, 114(767).
- [Duan et al., 2000] Duan, L.-M., Giedke, G., Cirac, J. I., e Zoller, P. (2000). Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems. *Physical Review Letters*, 84(12):2722–2725.
- [Eberle et al., 2010] Eberle, T., Steinlechner, S., Bauchrowitz, J., Händchen, V., Vahlbruch, H., Mehmet, M., Müller-Ebhardt, H., e Schnabel, R. (2010). Quantum Enhancement of the Zero-Area Sagnac Interferometer Topology for Gravitational Wave Detection. *Physical Review Letters*, 104(25):251102.
- [Eckardt et al., 1995] Eckardt, R. C., Nabors, C. D., Kozlovsky, W. J., e Byer, R. L. (1995). Optical parametric oscillator frequency tuning and control: errata. *Journal of the Optical Society of America B*, 12(11):2322.
- [Einstein et al., 1935] Einstein, A., Podolsky, B., e Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47(10):777–780.
- [Fabre et al., 1990] Fabre, C., Giacobino, E., Heidmann, A., Lugiato, L., Reynaud, S., Vadamchino, M., e Kaige, W. (1990). Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators. *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, 2(2):159–187.
- [Fabre et al., 1989] Fabre, C., Giacobino, E., Heidmann, A., e Reynaud, S. (1989). Noise characteristics of a non-degenerate Optical Parametric Oscillator – Application to quantum noise reduction. *Journal de Physique*, 50(10):1209–1225.
- [Fejer et al., 1992] Fejer, M., Magel, G., Jundt, D., e Byer, R. (1992). Quasi-phase-matched second harmonic generation: tuning and tolerances. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28(11):2631–2654.
- [Fleischhauer et al., 2005] Fleischhauer, M., Imamoglu, A., e Marangos, J. (2005). Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Reviews of Modern Physics*, 77(2):633–673.
- [Franken et al., 1961] Franken, P., Hill, A., Peters, C., e Weinreich, G. (1961). Generation of Optical Harmonics. *Physical Review Letters*, 7(4):118–119.
- [Galatola et al., 1991] Galatola, P., Lugiato, L., Porreca, M., Tombesi, P., e Leuchs, G. (1991). System control by variation of the squeezing phase. *Optics Communications*, 85(1):95–103.
- [Gardiner e Zoller, 2010] Gardiner, C. e Zoller, P. (2010). *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer Series in Synergetics. Springer.
- [Glauber, 1963] Glauber, R. (1963). The Quantum Theory of Optical Coherence. *Physical Review*, 130(6):2529–2539.
- [Gottfried e Yan, 2003] Gottfried, K. e Yan, T. (2003). *Quantum Mechanics: Fundamentals*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer.

- [Gühne e Tóth, 2009] Gühne, O. e Tóth, G. (2009). Entanglement detection. *Physics Reports*, 474(1-6):1-75.
- [Hau et al., 1999] Hau, L. V., Harris, S. E., Dutton, Z., e Behroozi, C. H. (1999). Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. 397(6720):594-598.
- [Heidmann et al., 1987] Heidmann, A., Horowicz, R., Reynaud, S., Giacobino, E., Fabre, C., e Camy, G. (1987). Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams. *Physical Review Letters*, 59(22):2555-2557.
- [Horodecki et al., 2009] Horodecki, R., Horodecki, M., e Horodecki, K. (2009). Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):865-942.
- [Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition.
- [Kasai et al., 1997] Kasai, K., Jiangrui, G., e Fabre, C. (1997). Observation of squeezing using cascaded nonlinearity. *Europhysics Letters (EPL)*, 40(1):25-30.
- [Kimble, 2008] Kimble, H. J. (2008). The quantum internet. *Nature*, 453(7198):1023-30.
- [Kogelnik e Li, 1966] Kogelnik, H. e Li, T. (1966). Laser beams and resonators. *Applied optics*, 5(10):1550-67.
- [Ladd et al., 2010] Ladd, T. D., Jelezko, F., Laflamme, R., Nakamura, Y., Monroe, C., e O'Brien, J. L. (2010). Quantum computers. *Nature*, 464(7285):45-53.
- [Leonhardt, 2010] Leonhardt, U. (2010). *Essential Quantum Optics: From Quantum Measurements to Black Holes*. Cambridge University Press.
- [Lindblad, 1976] Lindblad, G. (1976). On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2):119-130.
- [Lugiato et al., 1988] Lugiato, L., Oldano, C., Fabre, C., Giacobino, E., e Horowicz, R. (1988). Bistability, self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators. *Il Nuovo Cimento D*, 10(8):959-977.
- [Mandel e Wolf, 1995] Mandel, L. e Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- [Martinelli, 2002] Martinelli, M. (2002). *Compressão de ruído quântico e efeitos transversos em osciladores paramétricos óticos*. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo.
- [Martinelli, 2011] Martinelli, M. (2011). *Emaranhamento em Variáveis Contínuas, Morte Súbita, e Além*. Tese de livre-docência, Universidade de São Paulo.
- [Moraes, 2013] Moraes, F. C. D. (2013). *Construção e Caracterização de um Laser Contínuo de Titânio-Safira*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo.
- [Nielsen e Chuang, 2010] Nielsen, M. e Chuang, I. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press.
- [Northup e Blatt, 2014] Northup, T. E. e Blatt, R. (2014). Quantum information transfer using photons. *Nature Photonics*, 8(5):356-363.
- [Olivares, 2012] Olivares, S. (2012). Quantum optics in the phase space. *The European Physical Journal Special Topics*, 203(1):3-24.

- [Reynaud e Heidmann, 1989] Reynaud, S. e Heidmann, A. (1989). A semiclassical linear input output transformation for quantum fluctuations. *Optics Communications*, 71(3-4):209-214.
- [Saleh e Teich, 2007] Saleh, B. e Teich, M. (2007). *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley.
- [Schleich, 2001] Schleich, W. (2001). *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH.
- [Siegman, 1986] Siegman, A. (1986). *Lasers*. University Science Books.
- [Simon, 2000] Simon, R. (2000). Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Physical review letters*, 84(12):2726-9.
- [van Loock e Furusawa, 2003] van Loock, P. e Furusawa, A. (2003). Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement. *Physical Review A*, 67(5):052315.
- [Villar et al., 2005] Villar, A., Cruz, L., Cassemiro, K., Martinelli, M., e Nussenzveig, P. (2005). Generation of Bright Two-Color Continuous Variable Entanglement. *Physical Review Letters*, 95(24):243603.
- [Villar, 2004] Villar, A. D. S. (2004). *Estudo de Emaranhamento no etrico Otico Não-Degenerado Acima do Limiar*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo.
- [Villar, 2007] Villar, A. D. S. (2007). *Emaranhamento Multicolor entre Feixes Intensos de Luz*. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo.
- [Villar, 2008] Villar, A. S. (2008). The conversion of phase to amplitude fluctuations of a light beam by an optical cavity. *American Journal of Physics*, 76(10):922.
- [Villar et al., 2007] Villar, A. S., Cassemiro, K. N., Dechoum, K., Khoury, A. Z., Martinelli, M., e Nussenzveig, P. (2007). Entanglement in the above-threshold optical parametric oscillator. *Journal of the Optical Society of America B*, 24(2):249.
- [Villar et al., 2006] Villar, A. S., Martinelli, M., Fabre, C., e Nussenzveig, P. (2006). Direct Production of Tripartite Pump-Signal-Idler Entanglement in the Above-Threshold Optical Parametric Oscillator. *Physical Review Letters*, 97(14):140504.
- [Villar et al., 2004] Villar, A. S., Martinelli, M., e Nussenzveig, P. (2004). Testing the entanglement of intense beams produced by a non-degenerate optical parametric oscillator. 242:551-563.
- [Walls e Milburn, 2008] Walls, D. e Milburn, G. (2008). *Quantum Optics*. Springer.
- [Weedbrook et al., 2012] Weedbrook, C., Pirandola, S., García-Patrón, R., Cerf, N. J., Ralph, T. C., Shapiro, J. H., e Lloyd, S. (2012). Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):621-669.
- [Wigner, 1932] Wigner, E. (1932). On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Physical Review*, 40(5):749-759.
- [Wu et al., 1987] Wu, L.-A., Xiao, M., e Kimble, H. J. (1987). Squeezed states of light from an optical parametric oscillator. *Journal of the Optical Society of America B*, 4(10):1465.
- [Xiao et al., 1987] Xiao, M., Wu, L.-A., e Kimble, H. J. (1987). Precision measurement beyond the shot-noise limit. *Physical Review Letters*, 59(3):278-281.

- [Zhang et al., 2001] Zhang, K., Coudreau, T., Martinelli, M., Maître, A., e Fabre, C. (2001). Generation of bright squeezed light at $1.06\ \mu\text{m}$ using cascaded nonlinearities in a triply resonant cw periodically-poled lithium niobate optical parametric oscillator. *Physical Review A*, 64(3):033815.
- [Zhang, 2008] Zhang, Y. (2008). Generation of non-classical states from an optical parametric oscillator/amplifier and their applications. *Frontiers of Physics in China*, 3(2):126–152.