UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO INSTITUTO DE FÍSICA

Mecânica Quântica em Espaços Não-comutativos

Carlos Alberto Stechhahn da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Comissão Examinadora:

- Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes
- Prof. Dr. Emerson José Veloso Passos
- Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles
- Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar
- Prof. Dr. Clóvis Wotzasek

São Paulo

"O Universo é regido pela lei da evolução; é isso o que entendemos pela palavra progresso. E nós, em nosso princípio de vida, em nossa alma, em nossa consciência, estamos para sempre submetidos a essa lei. Não se pode desconhecer, hoje, essa força, essa lei soberana; ela conduz a alma e suas obras, através do infinito do tempo e do espaço, a um fim cada vez mais elevado; mas, essa lei não é realizável senão por nossos esforços". LÉON DENIS

À

Solange, Raphael, Priscila e Anita, minha mãe Etelvina, meu pai Francisco (In Memorian), familiares e amigos, dedico.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes pela orientação e paciência em todos os momentos. Espero que o futuro nos permita a conclusão de muitos outros importantes trabalhos na Física.
- A todos os professores do Departamento de Física-Matemática do IFUSP, por suas orientações e amizade desde minha gradução. e, particularmente, aos professores Adilson, Rivelles, Emerson Passos e Yosif Frenkel. Aos professores da UFABC, Alysson Ferrari e Vladslav Kupriyanov por suas sugestões e discussões sobre este trabalho, bem como vários outros temas da Física. Fica aqui também meu abraço aos professores da UFABC, Marcelo Pires e Alex Gomes, bem como ao Marco Dias e Fábio Bemfica pelas discussões sobre os assuntos da tese entre outros.
- A todos os alunos da pós-graduação do IFUSP, pelos seminários, amizade e diálogos em todas as N-dimensões da Física. Ao Bruno Charneski, pelos vértices e propagadores não-comutativos e pela caminhada segura em Israel. Aos companheiros de sala e corredor, Yul, Pedro Rogerio, Roberto Vinhaes, Osvaldo Negrini, Denny Maurício e Liner. Venho acompanhando a jornada de vocês e percebo que muitas de minhas dificuldades são pequenas. Enrique Gallegos... agora já podemos almoçar.
- Aos professores Fernando Teixeira e Andre Lehum. Acho que a distância não nos separou.
- Às "menininhas" da secretaria do Departamento, Amélia, Simone e Cecília, pela ajuda e conversas tão salutares.
- Ao João e a Sybele pela "resolução", sempre gentil e célere, na informática.
- Ao professor Leonardo ("digníssimo") por sua amizade e pelos diálogos quânticos via "Imigrantes".

- A todos os amigos Peritos e funcionários da SPTC, na pessoa do Dr. Celso Perioli,
 Dr. Adilson, Dr. Walter, Dr. Rossi, Dr. Moreira e do Diretor do Núcleo de Física,
 Dr. Waldir Dainezi, por todo o apoio e incentivo.
- Ao Dr. Aparecido Morcelli pela longa amizade desde os "anos dourados" do IFT.
- A todos os amigos do Núcleo de Física, Dr. Ermindo, Dr. Walter, Dr. Penazzi, Dr. Elio, Dra. Cátia, Dra. Sumara, bem como ao Valdir Parreiras e Tonyan pela amizade e grande apoio.
- A todos os funcionários, alunos e professores da UNIP na pessoa da Profa. Andrea Dainezi.
- Aos funcionários, professores e alunos do Centro Profissionalizante "Santo Antônio" na pessoa da Coordenadora Regina Célia. Os esforços valorosos de Fernanda, Neide, Dora, Maria Elisa, José Inácio, Terezinha, Maria Santa, Marisa, Carminella e Flaviana serão sem dúvida recompensados pelo valor do trabalho no bem.
- Aos amigos da "Petrobrás", Mário, Luiz Pedro, Akira, Figlioli, Miltinho, Chiou, Labre, Julio, Carreira, Bruno, Garrie, Carlão, Guerreiro, Lívio;
- Aos amigos "Vigias Portuários", Jurandir Santos, Clay, Toninho, Andrezinho, Silvino, Carlos Miguel Lopes, Clóvis, Cleone, Shumack, Ademar Dias, José Carlos Petenussi e Geraldo Pestana;
- Aos amigos do Grupo Espírita "João Cabete" na pessoa de Sueli Lopes e do Centro Espírita "Seara do Amor" na pessoa de seu Pérsio e Elino Júnior;
- Aos meus irmãos Benones, Marcelo e Anderson, minha prima Zoraide, Inesany e demais primos, a Gleide, Seu João, Cleuza, ao compadre Toninho e família e aos amigos José Carlos, Angelo e Sérgio, Marta, Nelson, Evelise, Eulália e Noemi;
 Estou feliz pelo trabalho realizado e por ter tantos amigos que ainda continuam iluminando minha caminhada.

ÍNDICE

1.	Introdução
2.	Soluções da equação de Schrödinger em dimensões arbitrárias
	2.1 A equação de Schrödinger <i>N</i> -dimensional12
	2.2 Solução da parte radial - A Equação de Riccati
	2.3 Aplicações do método - O Oscilador Harmônico17
	2.4 O O Oscilador Anarmônico N-dimensional20
	2.4.1. Ordem Dominante
	2.4.2. Cálculo das energias do estado fundamental
	2.4.3. Situação Sub-Dominante
	2.5 O Potencial Coulombiano
3.	O Oscilador Anarmônico e o Potencial Coulombiano não-comutativo
	3.1 A Mecânica Quântica Não-Comutativa
	3.2 O Oscilador Anarmônico NC37
	3.3 O Potencial Coulombiano NC
	3.3.1 Estado Fundamental - Energias e Autofunções
	3.3.2 Versão modificada do potencial Coulombiano
4.	A Não-comutatividade dependente do spin
	4.1 A equação de Pauli
5.	Conclusões
6.	Apêndice
7.	Referências Bibliográficas

ABSTRACT

In this thesis we study non-commutative quantum mechanics in nonrelativistic situation. In this context, the 1/N-expansion is introduced and applied to some potentials of interest as the anharmonic oscillator and the Coulomb potential. The convergence of the serie is discussed. We proposed a modified version of the noncommutative Coulombian potential which provides a well-behaved 1/N expansion. Subsequently, we introduce a new set of noncommutative space-time commutation relations which satisfy a spin dependent nonstandard Heisenberg algebra. Modified Pauli equation is used to calculate corrections to the energy by the use of perturbation theory in the noncommutativity spin-dependent context.

RESUMO

Nesta tese estudamos a mecânica quântica não-comutativa na situação não-relativística. Nesse contexto, a expansão-1/N é introduzida e aplicada para alguns potenciais de interesse, como o do oscilador anarmônico e do potencial Coulombiano. A convergência da série é então discutida. Propomos uma versão modificada do potencial Coulombiano nãocomutativo, o qual fornece uma expansão 1/N bem comportada. A seguir, introduzimos um novo conjunto de relações de comutação no espaço-tempo não-comutativo satisfazendo uma álgebra de Heisenberg deformada. A equação de Pauli modificada é usada para o cálculo de correções para a energia, com o uso de teoria da perturbação, no contexto da não-comutatividade dependente do spin.

Capítulo 1

Introdução

Resultados recentes de teorias de cordas [1] promoveram um grande interesse no estudo de teorias quânticas de campos definidas num espaço não-comutativo, *NC*. A motivação para este tipo de abordagem está relacionada também com o efeito Hall quântico, gravitação quântica, etc. A proposta inicial da não-comutatividade das coordenadas do espaço-tempo, imaginada como um processo para a eliminação das divergências ultravioletas da série perturbativa, é, no entanto, bastante antiga. Segundo a literatura, tem sua origem datada de 1947 [2], embora sugestões anteriores nesse sentido já houvessem ocorrrido [3]. A idéia, contudo, foi abandonada após o grande sucesso do programa de renormalização. A literatura envolvendo este tema é bastante vasta (veja os artigos de revisão em [4] e as referências lá citadas).

No contexto da gravitação quântica, em escalas de distâncias da ordem do comprimento de Planck, $10^{-33}cm$, a medida das coordenadas perde todo seu sentido devido a produção de campos gravitacionais intensos. Dessa forma, o conceito de ponto deixa também de ter sentido, o que sugere que operadores de posição não comutam [5]. Tendo em conta esse quadro, vamos inicialmente considerar espaços não-comutativos caracterizados por operadores de posição, \hat{x}_{μ} , satisfazendo a relação

$$[\hat{x}_{\mu}, \hat{x}_{\nu}] = i\theta_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica, constante na situação mais simples, de dimensão $(comprimento)^2$. No presente, há vários limites para θ [6], e, conforme [7], os efeitos da não-comutatividade são desprezíveis exceto para partículas de altíssima energia.

A teoria de campo formulada sobre esses espaços, a teoria de campo não-comutativa, é descrita por operadores de campo, os quais são funções de \hat{x}_{μ} . Entretanto, como decorrência da chamada correspondência de Weyl, em teorias de campo NC o produto pontual dos campos é trocado pelo produto Moyal dos campos

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \lim_{y \to x} e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}} \frac{\partial}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \phi_1(y) \phi_2(x), \qquad (1.2)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são duas funções arbitrárias.

Como se vê, a teoria de campo construída usando esse produto é altamente nãolocal implicando em várias propriedades inusitadas. A mais notável delas é a chamada mistura ultravioleta/infravermelho, pela qual algumas divergências ultravioletas da série perturbativa são transmutadas em singularidades infravermelhas que podem ser extremamente danosas. Um outro aspecto peculiar decorrente da não-localidade é a quebra de unitariedade e causalidade quando $\theta_{0i} \neq 0$ [8].

Visando melhor entender as propriedades de teorias NC, nesta tese iremos focalizar a mecânica quântica formulada em tais espaços ampliando o escopo de estudos existentes na literatura [7, 9]. Em particular, a generalização desses estudos para N-dimensões é certamente de interesse possibilita, em princípio, a análise de fenômenos não-perturbativos. Em muitos estudos importantes da teoria quântica de campos emprega-se 1/N como parâmetro perturbativo. De fato, a motivação original para o uso dessa expansão [10] decorreu da tentativa de estudo das propriedades da QCD na região de baixas energias onde o método perturbativo tradicional não é aplicável. Na mecânica quântica, a expansão 1/N tem mostrado ser também uma ferramenta de grande utilidade [11]. Esta técnica exibe duas importantes vantagens. A primeira é que, ao contrário do método perturbativo, ela não exige que o operador Hamiltoniano seja escrito como a soma de uma parte, cujas soluções conhecemos, e uma perturbação. Para tal é necessária a existência de um parâmetro pequeno em termos do qual as quantidades físicas devem ser expandidas. Contudo, em muitos casos não é possível encontrar um parâmetro pequeno e o fenômeno a ser estudado é intrinsicamente não-perturbativo. A outra vantagem é que as expressões analíticas para os primeiros termos das séries são facilmente obtidas [12]. Os resultados são em geral bastantes acurados e o método tem muitas aplicações práticas não somente na física atômica mas também em física de partículas.

Começamos nossos estudos no capítulo 2 descrevendo o método da expansão 1/N [13] para o caso do movimento de uma partícula não-relativística, em alguns potenciais de interesse (a apresentação do laplaciano em N dimensões, bem como, outros detalhes envolvendo a parte angular da equação de Schrödinger é mostrado no Apêndice A. A aplicação desta técnica é empregada ao caso do oscilador harmônico, anarmônico e ao potencial Coulombiano. Calculamos as energias para o oscilador anarmônico na situação dominante (primeiro termo da expansão) e sub-dominante, i.e., levando em consideração outros termos da ordem da expansão 1/N. Nessa oportunidade fazemos uma extensão desses resultados para situações em que o momento angular orbital não é nulo. Terminamos o capítulo com o estudo do potencial Coulombiano, apresentando as expressões da energia e da solução da equação de movimento na forma de uma série. No capítulo 3 fazemos uma breve motivação para o estudo de espaços não-comutativos e a noção de produto Groenewold-Moyal aplicado especificamente à mecânica quântica. Fazemos, no contexto da mecânica quântica não-comutativa, MQNC, o uso da expansão 1/N, bem como a transformação que relaciona os operadores de posição NC com os correspondentes comutativos. Uma análise da convergência da série será feita, por meio de gráficos, para o oscilador anarmônico e o potencial Coulombiano, ilustrando os diferentes comportamentos nas situações comutativa e não-comutativa, respectivamente. Maiores detalhes sobre a construção de teorias não-comutativas na mecânica quântica podem ser encontrados em [14]. Veremos que, na situação NC, a expansão 1/N aplicada ao oscilador anarmônico apresenta boa convergência, enquanto, para o potencial Coulombiano encontramos uma divergência quando da generalização não-comutativa do potencial. Uma versão modificada do potencial, livre de tal dificuldade, é proposta [15].

Em todas as situações acima descritas $\theta_{\mu\nu}$ é constante, i.e, temos a não-comutatividade canônica. Contudo, não é sempre adequado assumir que a NC seja constante em todo o espaço. Podemos ter situações mais gerais em que $\theta_{\mu\nu}$ seja dependente da posição, ou seja, um novo operador. Como exemplo de uma situação em que a não-comutatividade depende da posição em [16] foi considerado um modelo bidimensional tal que

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \frac{i\hbar\theta}{1+\theta\alpha(\hat{x}^2+\hat{y}^2)}$$
(1.3)

em que α é o parâmetro que mede o grau da não-localidade. A *NC* será global ou local conforme α seja igual ou diferente de zero. Seguindo essa linha de desenvolvimento, em [17] foi estudada a não-comutatividade dinâmica, em que θ tem uma dinâmica própria. Em outros exemplos as regras de comutação entre os operadores de posição têm a estrutura de uma álgebra de Lie, i.e, $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar f_k^{ij} x^k$, ou mesmo de álgebras mais gerais (veja por exemplo [18]). Por outro lado, seguindo idéias contidas no trabalho de Snyder, foi proposto em [19] um esquema não-relativístico onde a não-comutatividade depende do spin. Esse esquema foi então aplicado ao estudo da condensação de Bose-Einstein e ao efeito Aharonov-Bohm [20].

Como podemos observar as diferentes formas de NC estão abrindo novas possibilidades de pesquisa na MQNC, bem como em outras áreas de estudo. Dando prosseguimento a essas idéias, na parte final desta tese aplicamos a teoria de perturbação ao estudo da nãocomutatividade na situação não-relativística, por meio da equação de Pauli ao sistema em que uma partícula é submetida a um campo magnético constante paralelo ao eixo Oz. Ao longo desta tese usaremos o sistema de unidade naturais em que $\hbar = c = 1$.

Capítulo 2

Soluções da equação de Schrödinger em dimensões arbitrárias

Antes de analisarmos as modificações induzidas pela não-comutatividade do espaço-tempo, vamos rever o uso da expansão 1/N na Mecânica Quântica. Após algumas considerações de cunho geral, exemplificaremos a aplicação desta expansão em modelos específicos.

2.1 A equação de Schrödinger *N*-dimensional

Consideremos o movimento de uma partícula num potencial esfericamente simétrico V(r), descrito pela equação de Schrödinger N-dimensional¹

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla_N^2 + V(r)\right]\psi(r,\Omega) = E\psi(r,\Omega)$$
(2.1)

em que $r^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$. O operador de Laplace é dado por

$$\nabla_N^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \hat{\Lambda}^2(N) = \Delta_r - \frac{1}{r^2} \hat{\Lambda}^2(N)$$
(2.2)

¹Em (2.1) fizemos a massa unitária, em conseqüência, a energia terá aparentemente a dimensão não usual de $[L]^{-2}$.

onde N é a dimensão do espaço e $\hat{\Lambda}^2(N)$ é o operador momento angular generalizado. Vamos definir $\hat{\Lambda}^2(1) = 0$. Analogamente ao caso de três dimensões espaciais, a autofunção deste sistema $\psi(r, \Omega_N)$ pode ser separada numa parte radial e numa angular

$$\psi(r,\Omega_N) = R_{n\ell}(r)Y(\Omega_N) \tag{2.3}$$

onde $R_{n\ell}(r)$ é rotulado por dois números quânticos $n \in \ell$, e os harmônicos esféricos generalizados $Y_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{N-2},\ell_{N-1}}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{N-1})$ rotulados pelos números quânticos $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{N-1}$, sendo $\ell = \ell_{N-1}$. Substituindo a Eq. (2.2) e (2.3) na Eq. (2.1) obteremos

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\Delta_r - \frac{1}{r^2}\hat{\Lambda}^2(N)\right) + V(r)\right]R_{n\ell}(r)Y(\Omega_N) = ER_{n\ell}(r)Y(\Omega_N).$$
(2.4)

Atuando com os operadores nas autofunções teremos que a equação de Schrödinger desmembrar-se-á numa parte radial,

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} + V(r)\right]R_{n\ell}(r) = ER_{n\ell}(r)$$
(2.5)

e numa angular

$$\hat{\Lambda}^2(N)Y(\Omega_N) = \ell(\ell + N - 2)Y(\Omega_N), N > 1$$
(2.6)

na qual $\ell = \ell_{N-1} = 0, 1, 2, \ldots; \ \ell_j = 0, 1, 2, \ldots, \ell_{j+1}$ para $j = 2, 3, \ldots, N-2$, e $\ell_1 = -\ell_2, -\ell_2 + 1, \ldots, \ell_2 - 1, \ell_2$.

2.2 Solução da parte radial - A Equação de Riccati

Vamos calcular inicialmente a solução da Eq. (2.5) na situação mais simples, ou seja, no limite de N grande do estado fundamental. A derivada de primeira ordem na equação radial pode ser eliminada, de modo usual, por meio da mudança de variável

$$\eta(r) = r^{\frac{N-1}{2}} R_{n\ell}.$$
(2.7)

Desse modo a (2.5) torna-se:

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(N-1)(N-3)}{8r^2} + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} + V(r)\right]\eta = E\eta.$$
 (2.8)

Juntando o segundo e o terceiro termo, e fazendo $k = N + 2\ell$, temos:

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \left[\frac{(1-1/k)(1-3/k)}{8r^2} + \hat{V}(r)\right]\right\}\eta = E\eta.$$
(2.9)

V(r)é o potencial central e pode ser escrito com
o $\hat{V}=V/k^2.$ A equação acima mostra que k^2 comporta-se como uma massa e

$$-\frac{1}{2k^2}\frac{d^2}{dr^2}\eta\tag{2.10}$$

será tanto menor a medida que k^2 crescer, e portanto, este termo se anula conforme k^2 vai a infinito. A energia do estado fundamental deste sistema é dada em primeira aproximação por

$$E_0 = k^2 V_{eff}(r_0) (2.11)$$

em que $V_{eff}(r_0)$ representa o valor mínimo do potencial definido por²

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{8r^2} + \hat{V}(r)$$
(2.12)

Neste limite as funções de onda diferem de zero somente na vizinhança de r_0 . Para obtermos correções em ordem mais alta para a energia é conveniente redefinirmos a função de onda como

$$\eta = \exp\{A(r)\}\tag{2.13}$$

A motivação para esta transformação reside no fato que a função de onda no estado fundamental não possui nodos.

²Podemos notar que \hat{V} difere do verdadeiro potencial por um fator que depende do número de dimensões espaciais (e momento angular) de interesse. Tal diferença, contudo, pode ser absorvida na definição das constantes de acoplamento que serão reestabelecidas no fim dos cálculos.

Substituindo-se a Eq. (2.13) em (2.9) temos:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left[e^{A(r)}\frac{dA}{dr}\right] + k^2\left[\left(1 - \frac{4}{k} + \frac{3}{k^2}\right)\frac{1}{8r^2} + \hat{V}(r)\right]e^{A(r)} = Ee^{A(r)}$$
(2.14)

Fazendo a mudança

$$u = \frac{r}{r_0},\tag{2.15}$$

e introduzindo o potencial efetivo $V_{eff}(u)$, cuja definição é dada por (2.12), teremos, após a atuação das derivadas, a equação de Riccati

$$-\frac{1}{2r_0^2} \left[U^2 + U' \right] + k^2 V_{eff}(u) + \left(-\frac{k}{2} + \frac{3}{8} \right) \frac{1}{r_0^2 u^2} = E$$

$$\frac{1}{2} \frac{dA}{dt} = U' - \frac{1}{2} \frac{dU}{dt}$$
(2.16)

onde $U = \frac{du}{dr}\frac{dA}{du} = \frac{1}{r_0}\frac{dA}{du}$ e $U' = \frac{1}{r_0}\frac{dU}{du}$.

Analogamente ao método desenvolvido em [21], para resolver esta equação vamos escrever, $E \in U$ em série de potências de 1/k; assim, teremos:

$$E = \sum_{n=-2}^{\infty} E^{(n)} k^{-n}$$
 (2.17)

$$U = \sum_{n=-1}^{\infty} U^{(n)} k^{-n}$$
(2.18)

Substituindo as duas expressões acima na equação de Riccati e igualando a zero o coeficiente de cada potência de 1/k teremos

$$-\frac{1}{2r_0^2}U^{(-1)}U^{(-1)} + V_{eff} = E^{(-2)}$$
(2.19)

$$-U^{(-1)}U^{(0)} = E^{(-1)} + \frac{1}{2}r^{-2} + \frac{1}{2}U^{(-1)'}$$
(2.20)

$$-U^{(-1)}U^{(1)} = E^{(0)} - \frac{3}{8}r^{-2} + \frac{1}{2}\left[U^{(0)'} + U^{(0)}U^{(0)}\right]$$
(2.21)

$$-U^{(-1)}U^{(n+1)} = E^{(n)} + \frac{1}{2} \Big[U^{(n)'} + \sum_{m=0}^{n} U^{(m)}U^{(n-m)} \Big]; n > 0.$$
 (2.22)

O sistema de equações acima fornece uma maneira sistemática de se calcular a energia e a auto-função para um potencial central genérico em qualquer ordem em 1/N. De fato, (2.17) vemos que a primeira aproximação para a energia é

$$E = k^2 E^{(-2)} = k^2 V_{eff}(r_0).$$
(2.23)

Substituindo a equação acima na Eq. (2.19) e resolvendo para $U^{(-1)}$ temos³:

$$U^{(-1)}(r) = -\sqrt{2r_0^2(V_{eff}(r) - E^{(-2)})}.$$
(2.24)

Nesta equação o sinal (-) foi escolhido tal que a função de onda seja normalizável⁴. Para obtermos correções em ordens mais altas para a energia e função de onda alguns resultados são diretos.

Escrevendo a Eq. (2.19) para $r = r_0$, temos:

$$U^{(-1)}(r_0) = 0 (2.25)$$

Usando o resultado acima a Eq. (2.20) resultará em:

³Esta é a equação a ser integrada para obtenção da função A(r) que compõe a função de onda η , solução da equação diferencial (2.9).

⁴A função $e^{A(r)}$ tem um máximo no ponto $r = r_0$, de modo que a função U = dA/dr será positiva para $r < r_0$ e negativa para $r > r_0$.

$$E^{(-1)}(r_0) = -\frac{1}{2}r_0^{-2} - \frac{1}{2}U^{(-1)'}(r_0)$$
(2.26)

De posse da expressão para $E^{(-1)}$ podemos calcular $U^{(0)}$. Substituindo a expressão para $U^{(0)}$ novamente em (2.20) teremos:

$$E^{(0)}(r_0) = \frac{3}{8}r_0^{-2} - \frac{1}{2} \Big[U^{(0)'}(r_0) + U^{(0)}(r_0)U^{(0)}(r_0) \Big]$$
(2.27)

E assim, sucessivamente para qualquer ordem, teremos:

$$E^{(n)}(r_0) = -\frac{1}{2} \Big[U^{(n)'}(r_0) + \sum_{m=0}^n U^{(m)}(r_0) U^{(n-m)}(r_0) \Big], n > 0.$$
 (2.28)

Sendo a função A(r) dada pela integral indefinida de U(r) temos para a função η a seguinte expressão:

$$\eta = \exp\left\{\int \sum_{n=-1}^{\infty} U^{(n)}(r) k^{-n} dr\right\}$$
(2.29)

Finalmente de posse de tais resultados podemos escrever a parte radial, $R_{n\ell}$, solução da equação de movimento (2.1) que descreve o sistema sob estudo, na forma da série:

$$R_{n\ell} = r^{(1-N)/2} \exp \int \sum_{m=-1}^{\infty} U^{(m)}(r) k^{-m} dr$$
(2.30)

2.3 Aplicações do método - O Oscilador Harmônico

Antes de nos concentrarmos no estudo de potenciais que irão exigir recursos mais elaborados para o cálculo das energias e autofunções, vamos nos ater aos casos mais simples. O oscilador harmônico, conforme descrito em [21], num espaço N-dimensional tem o potencial

$$V = \frac{\omega^2}{2}r^2 \tag{2.31}$$

assim, em termos da unidade de k^2 o potencial efetivo pode ser escrito como

$$V_{eff} = \frac{1}{8r^2} + \frac{\hat{\omega}^2}{2}r^2 \tag{2.32}$$

onde $\hat{\omega}^2 = \omega^2/k^2$. Calculando o mínimo do potencial efetivo no ponto $r = r_0$, podemos estimar a primeira aproximação para a energia do estado fundamental

$$E = k^2 V_{eff}(r_0) = k^2 \frac{\hat{\omega}}{2} = k \frac{\omega}{2}$$
(2.33)

a qual concorda com o resultado exato, e ainda,

$$r_0^2 = 1/(2\hat{\omega}) \tag{2.34}$$

dá o mínimo do $V_{eff}(r)$. Conforme (2.24) o primeiro termo na expansão da energia é:

$$E^{(-2)} = V_{eff}(r_0) = \frac{\hat{\omega}}{2}$$
(2.35)

Em ordem de k^2 ,

$$-\left(U^{(-1)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2} + u^2 - 2\right) = 0, \qquad (2.36)$$

tal que

$$U^{(-1)} = \pm \sqrt{\frac{1 + (u^2)^2 - 2u^2}{4u^2}} = \pm \left| \frac{1 - u^2}{2u} \right|$$
(2.37)

O sinal em (2.37) deve ser escolhido de modo que, para u < 1 temos que a função $U^{(-1)} > 0$ e, para u > 1, teremos $U^{(-1)} < 0$. Dessa forma,

$$U^{(-1)} = \frac{1}{2} \frac{(1+u)(1-u)}{u}$$
(2.38)

Estamos agora em condições de calcular o segundo termo da série, $E^{(-1)}$, para a energia. De (2.26) temos:

$$E^{(-1)} = -U^{(-1)'}(u) - 2U^{(-1)}U^{(0)} - \frac{1}{u^2},$$
(2.39)

Sendo $U^{(-1)}(1) = 0$ e

$$U^{(-1)'}\Big|_{u=1} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\Big|_{u=1} = -1,$$
(2.40)

teremos que

$$E^{(-1)} = -U^{(-1)'}(1) - 1 = 0.$$
(2.41)

Dessa forma, $E^{(-1)}$, a primeira correção subdominante para a energia do estado fundamental, resultará nula.

Analogamente, é possível mostrar que todos os termos da série, Eq. (2.17), serão nulos para n > -2, ou seja, o método reproduz o resultado exato.

Seguindo esta técnica, uma pergunta que poderia surgir neste momento é se, semelhante ao caso da energia acima desenvolvido, o termo em primeira ordem para as autofunções reproduz a autofunção exata.

Primeiro, notemos que de (2.39) temos:

$$0 = -U^{(-1)'}(u) - 2U^{(-1)}U^{(0)} - \frac{1}{u^2},$$
(2.42)

a qual resulta em

$$0 = -\frac{1-u^2}{2u} - \frac{1-u^2}{u}U^{(0)}, \qquad (2.43)$$

ou seja,

$$U^{(0)} = -\frac{1}{2u} \tag{2.44}$$

Este fato, $U^{(0)} \neq 0$, já nos sugere que $U^{(-1)}$ não fornece uma expressão exata. Realmente, usando (2.39), teremos

$$\eta = \exp\left\{\int du \, U(u)\right\} = \exp\left\{k \int du \, U^{(-1)} + \int du \, U^{(0)} + \cdots\right\}$$
(2.45)

em que

$$\int du \, U^{(-1)}(u) = \frac{1}{2} \int du \, \left(\frac{1}{u} - u\right) = \frac{1}{2} \left(\ln u - \frac{u^2}{u}\right). \tag{2.46}$$

Dessa forma,

$$\eta^{(-1)} \sim \exp\left\{\frac{k}{2}\ln u - \frac{k}{4}u^2\right\} = r^{k/2}e^{-\frac{\omega}{2}r^2}.$$
(2.47)

Logo, a função de onda radial $\psi(r)$ é:

$$\psi^{(-1)} = r^{\frac{1-N+k}{2}} e^{-(\omega r^2)/2}.$$
(2.48)

2.4 O Oscilador Anarmônico N-dimensional

O oscilador anarmônico no espaço de N-dimensões tem sua Hamiltoniana dada por [13]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{m_0^2}{2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{g}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^2$$
(2.49)

em que a massa é unitária (m = 1) e a freqüência dada em unidades de massa $\omega^2 = m_0^2.$

A equação de Schrödinger a ser resolvida, após a mudança $p \to -i \nabla_N$ e $r^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$, é dada por

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\nabla_N^2 - \frac{1}{r^2}\hat{\Lambda}^2(N)\right) + V(r)\right]R_{n\ell}(r)Y(\Omega_N) = \mathcal{E}R_{n\ell}(r)Y(\Omega_N)$$
(2.50)

com o potencial

$$V(r) = \frac{m_0^2}{2}r^2 + \frac{g}{N}r^4.$$
(2.51)

Após a atuação dos operadores nas funções correspondentes teremos a seguinte equação radial:

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} + \frac{m_0^2r^2}{2} + \frac{g}{N}r^4\right]R(r) = \mathcal{E}R(r)$$
(2.52)

Esta equação tem dois parâmetros $(m_0 e g^{1/3})$ com dimensão de energia. Seguindo [13], vamos introduzir um novo parâmetro ω que fixará a escala de energia. Nesta situação \mathcal{E}/ω será uma função de uma constante de acoplamento adimensional $\lambda = g/\omega^3$. A relação de ω com λ e m_0 é

$$\frac{m_0^2}{\omega^2} = 1 - 2\lambda \tag{2.53}$$

е

$$\lambda = \frac{g}{\omega^3} \tag{2.54}$$

Em resumo, trocamos os parâmetros $m_0 e g^{1/3}$ por $\lambda e \omega$, sendo que esta última fornece simplesmente a escala de energia de problema. Após o reescalonamento de coordenadas $x_i \to x_i/\sqrt{\omega}$, a equação (2.52), em termos da energia adimensional $E = \mathcal{E}/\omega$, escreve-se como

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} + V(r)\right]R(r) = ER(r)$$
(2.55)

onde V(r) agora é escrito em termos dos novos parâmetros:

$$V(r) = \frac{1 - 2\lambda}{2}r^2 + \frac{\lambda}{N}r^4.$$
 (2.56)

A eliminação da primeira derivada em (2.55) pode ser feita por meio da mudança de variável

$$\eta(r) = r^{\frac{N-1}{2}} R(r) \tag{2.57}$$

a qual resultará na seguinte equação:

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(N+2\ell)^2 - 4N + 2\ell + 3}{8r^2} + V(r)\right]\eta = E\eta$$
(2.58)

Fazendo $k = N + 2\ell$ temos:

$$H\eta = \left\{ -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \left[\frac{1}{8r^2} (1 - \frac{1}{k})(1 - \frac{3}{k}) + \hat{V}(r) \right] \right\} \eta = E\eta$$
(2.59)

onde $\hat{V} = V/k^2$.

Podemos observar que a equação (2.59) está escrita em termos de k, enquanto o potencial em estudo, V(r), tem sua dependência em $N = k - 2\ell$. Vamos dividir o estudo deste tópico em duas etapas: primeiramente, vamos analisar a ordem dominante para N grande, em que $N \sim k$; em seguida, contribuições sub-dominantes serão consideradas.

2.4.1 Ordem Dominante

Vamos considerar inicialmente o comportamento da Eq. (2.59) assumindo $N \sim k$. A energia do estado fundamental é dada pelo mínimo do potencial efetivo, ou seja,

$$E_0 = V_{eff}(r_0), (2.60)$$

onde

$$\frac{d}{dr}V_{eff}(r_0) = 0. (2.61)$$

O potencial efetivo é

$$V_{eff}(r) = \frac{N^2}{8r^2} + \frac{1-2\lambda}{2}r^2 + \frac{\lambda}{N}r^4$$
(2.62)

e a condição (2.61) implica em

$$\frac{d}{dr}V_{eff}|_{r=r_0} = \frac{-N^2}{4r_0^3} + \frac{1-2\lambda}{2}r_0 + \frac{4\lambda r_0^3}{N} = 0$$
(2.63)

Multiplicando a equação acima por r_0 obteremos a condição de mínimo para r_0 , ou seja:

$$\frac{-N^2}{4r_0^2} + r_0^2 - 2\lambda r_0^2 + \frac{4\lambda r_0^4}{N} = 0$$
(2.64)

O ponto de mínimo r_0 pode ser facilmente obtido e, ao contrário dos valores encontrados para os potenciais anteriormente estudados, ele possuirá uma dependência em N. Separando a equação acima numa soma de partes dependentes e independentes de λ e igualando ambas a zero, encontramos

$$r_0 = \sqrt{(N/2)} \tag{2.65}$$

e, portanto,

$$E_0 = V_{eff}(r_0) = N \frac{(2-\lambda)}{4}.$$
 (2.66)

Para obtermos uma expressão para a solução da equação radial de Schrödinger devemos escrever a correspondente função $U^{(-1)}$ dada pela Eq. (2.19) a qual, para este caso é

$$U^{(-1)} = \exp\left[-\sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{r^2} + \frac{\lambda(r^2 - r_0^2)}{r_0^2}}\right]$$
(2.67)

Agora, fazendo a mudança $x=\frac{r-r_0}{r_0}$ e isolando uma potência de r_0 no numerador e no denominador temos

$$U^{(-1)} = -\sqrt{\frac{x^2(2+\frac{x}{r_0})^2(1+\lambda+\frac{2x\lambda}{r_0}+\frac{x^2\lambda}{r_0^2})}{(1+\frac{x}{r_0})^2}}$$
(2.68)

Como este é um termo de ordem zero em 1/N, e lembrando que $r_0 \sim \sqrt{N}$, segue que $x/r_0 \to 0$ quando $N \to \infty$. Portanto

$$U^{(-1)} = -\sqrt{4(1+\lambda)x^2} = -2(1+\lambda)^{(1/2)}\sqrt{x^2} = -2(1+\lambda)^{(1/2)}|x|$$
(2.69)

e a solução radial η será 5

$$\eta(r) = \exp\{A^{(-1)}(r)\}$$
(2.70)

onde

⁵A menos de uma constante de integração.

$$A^{(-1)}(x) = -\int U^{(-1)}dx = -2(1+\lambda)^{(1/2)}\int x \ dx = -(1+\lambda)^{(1/2)}x^2$$
(2.71)

e a Eq. (2.70) torna-se

$$\eta(r) = \exp\{A(x)\} = \exp\{\int U^{(-1)}dx\} = \exp\{-(1+\lambda)^{(1/2)}x^2\}$$
(2.72)

A relação entre $\eta \in R_{n\ell}$, solução da parte radial da equação de Schrödinger é dada por (2.7), portanto:

$$R_{n\ell}(r) = r^{(1-N)/2} \eta = r^{(1-N)/2} \exp\{-(1+\lambda)^{(1/2)} x^2\}$$
(2.73)

2.4.2 Cálculo das energias do estado fundamental

Em ordem dominante na expansão 1/N, o nível de energia mais baixo é degenerado em ℓ , como vemos explicitamente em (2.66). Na ordem subdominante, o momento angular ℓ já contribui para levantar esta degenerescência. Contudo, conforme vemos de (2.55), o mínimo de energia sempre corresponderá a $\ell = 0$. Podemos, assim, assumir $\ell = 0$ e procurar por correções subdominantes em 1/N para a energia e autofunção do estado fundamental do oscilador anarmônico. Definimos anteriormente r_0 por meio de

$$\frac{d}{dr} V_{eff}(r) \Big|_{r_0} = 0 \quad ; \quad V''_{eff}(r) \Big|_{r_0} > 0 \,, \tag{2.74}$$

e a energia do estado fundamental como

$$E_0 = k^2 V_{eff}(r_0) (2.75)$$

Vimos ainda que r_0 depende de N, logo, será útil a mudança de coordenada que fizemos anteriormente,

$$x = \frac{r - r_0}{r_0}$$
(2.76)

com $x \in [0, \infty]$. Desta forma o mínimo do potencial se encontra em x = 0.

A equação de Riccati a ser resolvida é:

$$-\frac{1}{2}\left[U^{2}(r) + U'(r)\right] + N^{2}V_{eff}(r) + \left(-\frac{N}{2} + \frac{3}{8}\right)r^{-2} = E$$
(2.77)

onde $U(r) = A'(r) \in \eta(r) = \exp A(r)$. O potencial efetivo para o oscilador anarmônico, em termos dessa nova variável x, será:

$$V_{eff} = \frac{1}{8r_0^2} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1-2\lambda}{2} \frac{1}{N^2} r_0^2 (1+x)^2 + \frac{\lambda}{N^3} r_0^4 (1+x)^4$$
(2.78)

Escrevendo o ponto de mínimo do potencial em termos de N, conforme Eq. (2.65), teremos para o potencial efetivo:

$$V_{eff} = \frac{1}{4N} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1-2\lambda}{4} \frac{1}{N} (1+x)^2 + \frac{\lambda}{4N} (1+x)^4$$
(2.79)

Multiplicando-se cada termo da equação (2.77) por $N^2,$ e fazendo

$$N^2 V_{eff}(x) = N.W(x)$$
 (2.80)

em que

$$W(x) = \frac{1}{4(1+x)^2} + \frac{1-2\lambda}{4}(1+x)^2 + \frac{\lambda}{4}(1+x)^4$$
(2.81)

e, ainda, mudando a dependência dos U's de $r \to x$, a equação de Riccati (2.77) torna-se

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{r_0}\left[U^2(x) + U'(x)\right] + N.W(x) + \left[-\frac{N}{2} + \frac{3}{8}\right]\frac{1}{r_0^2(1+x)} = E$$
(2.82)

Lembrando que na ordem dominante

$$E_0 = N.W(0) = N\left(\frac{1}{4} + \frac{1-2\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4}\right) = N\left(\frac{2-\lambda}{4}\right)$$
(2.83)

resultado que concorda com (2.66). Subtraindo o resultado (2.83) de ambos os lados da Eq. (2.82), e escrevendo r_0 em termos de N, teremos:

$$-\frac{1}{N} \left[U^2(x) + U'(x) \right] + N \left[W(x) - \left(\frac{2-\lambda}{4}\right) \right] + \left[-1 + \frac{3}{4N} \right] \frac{1}{(1+x)^2} = \xi \qquad (2.84)$$

em que $\xi = E - N \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)$

Vamos agora expressar $\xi \in U(x)$ como uma série infinita

$$\xi = \epsilon_0 + \sum_{k \ge 1} \epsilon_k \frac{1}{N^k} \tag{2.85}$$

е

$$U(x) = NU^{(-1)} + U^{(0)} + \sum_{k \ge 1} U^{(k)} \frac{1}{N^k}$$
(2.86)

Tomando termos ordem a ordem em N, temos:

• $\mathcal{O}(N)$:

$$-U^{(-1)^2} + W(x) - \frac{2-\lambda}{4} = 0$$
(2.87)

ou seja

$$-U^{(-1)} = \pm \sqrt{W(x) - \frac{2-\lambda}{4}} = \pm \sqrt{W(x) - W(0)}$$
(2.88)

Vemos claramente na equação acima que $U^{(-1)}(0) = 0$ como deveria ser, pois, U = A'e A tem um máximo em x = 0. Uma forma explícita para $U^{(-1)}(x)$ pode ser obtida a partir da Eq. (2.81) tal que

$$W(u) - W(0) = \frac{(u^2 - 1)^2}{4} \left[\frac{1}{u^2} + \lambda \right]$$
(2.89)

onde $u^2 - 1 = x^2 + 2x$. Desse modo a equação (2.88) torna-se:

$$U^{(-1)}(x) = \pm \frac{|x^2 + 2x|}{2} \sqrt{\frac{1}{(1+x)^2} + \lambda}$$
(2.90)

Conforme vimos na Eq. (2.76) a condição $x \ge -1$ é satisfeita em (2.90) e podemos, desse modo, escrevê-la como:

$$U^{(-1)}(x) = \frac{x^2 + 2x}{2} \sqrt{\frac{1}{(1+x)^2} + \lambda}$$
(2.91)

Podemos ainda calcular a derivada da função $U^{(-1)}$ acima em termos da coordenada u = 1 + xo que resulta:

$$U^{(-1)'}(u) = \frac{-2(1/u + \lambda u) - (u^2 - 1)}{2u\sqrt{(1/u^2) + \lambda}}$$
(2.92)

Vemos nesse ponto que a solução da equação radial, obtida com a integração da equação acima, deve ser efetuada por algum método algébrico computacional. Desse modo, é possível calcular alguns termos da série que representam a energia expressa por meio da equação (2.85), conforme veremos a seguir.

• Ordem zero em 1/N, temos:

$$-U^{(-1)'} - 2U^{(-1)}U^{(0)} - \frac{1}{(1+x)^2} = \epsilon_0$$
(2.93)

Sendo $U^{(-1)}(x=0) = 0$ e u = x + 1 a equação acima torna-se:

$$\epsilon_0 = -1 - U^{(-1)'}(u=1) \tag{2.94}$$

O que fornece o seguinte valor para a energia:

$$\epsilon_0 = -\left(1 - \sqrt{1 + \lambda}\right) \tag{2.95}$$

O termo seguinte da energia pode ser numericamente calculado de posse das equações

$$U^{(0)'}(x) = \frac{-1}{2U^{(-1)}(x)} \left[\epsilon_0 + \frac{1}{(1+x)^2} + U^{(-1)'}(x) \right]$$
(2.96)

• $\mathcal{O}(1/N)$:

$$-U^{(0)'} - U^{(0)^2} - 2U^{(-1)}U^{(1)} + \frac{3}{4}\frac{1}{u^2} = \epsilon_1$$
(2.97)

Analogamente $u = 1 \Rightarrow U^{(-1)} = 0$ tal que teremos a seguinte equação para o cálculo de ϵ_1 :

$$\epsilon_1 = -U^{(0)'}(u=1) - U^{(0)^2}(u=1) + \frac{3}{4}$$
(2.98)

Resolvendo a equação acima teremos o seguinte resultado:

$$\epsilon_1 = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \Big[\frac{\lambda}{4} + 3 - 3(1+\lambda)^{(1/2)} \Big]$$
(2.99)

Outros termos da série podem ser encontrados em [13].

Conhecendo o valor de ϵ_1 voltamos com o mesmo na equação (2.97) e encontramos a seguinte equação:

$$U^{(1)} = -\frac{1}{2U^{(-1)}} \left[\epsilon_1 - \frac{3}{4} \frac{1}{u^2} + U^{(0)^2} + U^{(0)'} \right]$$
(2.100)

Obtivemos, portanto, a energia para o estado fundamental do oscilador anarmônico na expansão 1/N, e expressamos as respectivas autofunções por meio das funções U(x). A obtenção de tais autofunções depende, conforme vimos em (2.71), da integração destes U's e de sua posterior exponenciação.

2.4.3 Situação Sub-Dominante

O momento angular ℓ não contribui em ordem dominante à expansão 1/N do oscilador anarmônico (ou, em outras palavras, o espectro é degenerado em ℓ nesta aproximação). Em ordens subdominantes, contudo, temos que levar em conta que $\ell \neq 0$, o que levanta a degenerescência da aproximação dominante. Vamos, nesta seção, considerar que

$$k = N + 2\ell = N\left(1 + \frac{2\ell}{N}\right) = N(1+\epsilon), \qquad (2.101)$$

sendo $\epsilon=\frac{2\ell}{N}\ll 1,$ no espírito da expansão 1/N. Dessa forma, o potencial efetivo, análogo à Eq. (2.78), é

$$V_{eff} = \frac{1}{8r^2} + \frac{1}{k^2}V(r) = \frac{1}{8r^2} + \frac{1-2\lambda}{2}\frac{1}{k^2}r^2 + \frac{\lambda}{k^2N}r^4$$
(2.102)

Analogamente aos exemplos anteriores, iremos calcular a derivada do potencial efetivo no ponto de mínimo

$$\frac{d}{dr}V_{eff}|_{r=r_0} = -\frac{1}{4r_0^3} + (1-2\lambda)\frac{r_0}{k^2} + \frac{4\lambda}{k^2N}r_0^3 = 0$$
(2.103)

A qual dá a seguinte equação para r_0 :

$$-\frac{1}{4} + (1 - 2\lambda)\frac{r_0^4}{k^2} + \frac{4\lambda}{k^2N}r_0^6 = 0$$
(2.104)

Inserindo a relação (2.101) na equação acima teremos:

$$-\frac{1}{4} + (1 - 2\lambda)\frac{r_0^4}{N^2}(1 + \epsilon)^{-2} + \frac{4\lambda}{N^3}r_0^6(1 + \epsilon)^{-2} = 0$$
(2.105)

Embora seja a princípio possível determinar exatamente r_0 a partir de (2.105), a expressão resultante seria por demais complexa para ser útil. Muito mais adequado, para a expansão 1/N, é adotar o "ansatz"

$$r_0 = \sqrt{\frac{N}{2}}a\tag{2.106}$$

onde $a = 1 + a_1 \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Deste modo, a Eq. (2.105), correta até a ordem 1/N, torna-se

$$-\frac{1}{4} + (1 - 2\lambda)\frac{a^4}{4}(1 - 2\epsilon) + \frac{\lambda}{2}a^6(1 - 2\epsilon) = 0.$$
 (2.107)

A expansão de a, até primeira ordem em ϵ , leva a seguinte expressão para o ponto de mímino:

$$r_0 = \sqrt{\frac{N}{2}} \left(1 + \frac{1}{1+\lambda} \frac{\ell}{N} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right)$$
(2.108)

Vamos escrever a equação de Ricatti (2.77) na seguinte forma:

$$-\frac{1}{2} \left[U^2(r) + U'(r) \right] + k^2 V_{eff}(r) + \left(-\frac{k}{2} + \frac{3}{8} \right) r^{-2} = E$$
 (2.109)

e o potencial efetivo conforme (2.102).

O próximo passo, como r_0 depende de N vamos fazer uma mudança onde a coordenada independente r será:

$$u = \frac{r}{r_0}$$
; $u \in [0, \infty],$ (2.110)

em que, u = 1 é o mínimo do potencial efetivo e a solução do estado fundamental tem um máximo em u = 1 $(r = r_0)$.

Na equação (2.109), N entra somente em $k = N + 2\ell$, mas, no potencial efetivo temos ambos explicitamente. Desse modo, faremos uso de (2.101) para trabalharmos com o segundo termo de (2.109). Assim,

$$k^{2}V_{eff}(r) = \frac{N(1+\epsilon)^{2}}{4a^{2}}\frac{1}{u^{2}} + (1-2\lambda)\frac{N}{4}a^{2}u^{2} + \frac{\lambda N}{4}a^{4}u^{4}.$$
 (2.111)

Podemos escrever a expressão acima como

$$k^2 V_{eff}(r) = N W_{\epsilon}(u) \tag{2.112}$$

em que

$$W_{\epsilon}(u) = \frac{1}{4} \left(\frac{1+\epsilon}{a}\right)^2 \frac{1}{u^2} + \frac{(1-2\lambda)}{4} a^2 u^2 + \frac{\lambda}{4} a^4 u^4.$$
(2.113)

е

$$a = 1 + \frac{1}{1+\lambda} \frac{\ell}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell^2}{N^2}\right).$$
(2.114)

A equação de Riccati (2.109), devido a mudança (2.110), pode ser escrita como:

$$-\frac{1}{Na^2} \left[U' + U^2 \right] + NW_{\epsilon}(u) + \left(\frac{3}{4} \frac{1}{Na^2} - \frac{1+\epsilon}{a^2} \right) \frac{1}{u^2} = E$$
(2.115)

Vimos que em ordem dominante em 1/N,

$$E_0 = N.W(1) = N\left(\frac{1}{4} + \frac{1-2\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4}\right) = N\left(\frac{2-\lambda}{4}\right)$$
(2.116)

Vamos subtraí-lo em ambos os membros de (2.115) de forma que

$$-\frac{1}{Na^2} \left[U' + U^2 \right] + N \left[W_{\epsilon}(u) - \left(\frac{2-\lambda}{4}\right) \right] + \left(\frac{3}{4} \frac{1}{Na^2} - \frac{1+\epsilon}{a^2}\right) \frac{1}{u^2} = \xi$$
(2.117)

em que

$$\xi = E - N\left(\frac{2-\lambda}{4}\right) \tag{2.118}$$

de modo que a equação de Riccati com a função $W_{\epsilon}(u)$ deslocada de $W_0(1)$ é:

$$-\frac{1}{Na^2} \left[U' + U^2 \right] + N \left[W_{\epsilon}(u) - \left(\frac{2-\lambda}{4}\right) \right] + \left(\frac{3}{4}\frac{1}{N} - (1+\epsilon)\right) \frac{1}{a^2 u^2} = \xi$$
(2.119)

e $W_{\epsilon}(u)$ dada por (2.115). Expandindo o parâmetro *a* que aparece em (2.113) e (2.115), respectivamente, de modo conveniente teremos:

$$W_{\epsilon}(u) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b_1}{N} + \frac{b_2}{N^2} + \dots \right) \frac{1}{u^2} + \frac{(1 - 2\lambda)}{4} \left(1 + \frac{c_1}{N} + \frac{c_2}{N^2} + \dots \right) u^2 + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{d_1}{N} + \frac{d_2}{N^2} + \dots \right) u^4.$$
(2.120)

para $W_{\epsilon}(u)$ com *a* expandido até a primeira ordem em (1/N), conforme (2.114). A Eq. (2.115), após a expansão de *a*, pode ser escrita do seguinte modo:

$$- \frac{1}{N} \left(1 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \dots \right) \left[U' + U^2 \right] + N \left[W_{\epsilon}(u) - \frac{2 - \lambda}{4} \right] \\ + \left[\left(\frac{3}{4} - 2\ell \right) \frac{1}{N} - 1 \right] \left(1 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \dots \right) \frac{1}{u^2} = \xi$$
(2.121)

Os cálculos de tais coeficientes podem, até a primeira ordem em 1/N ser facilmente calculados. Devido a (2.114), por exemplo, temos:

$$\frac{1}{a^2} = 1 - 2\ell \frac{1}{1+\lambda} \frac{1}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell^2}{N^2}\right).$$
(2.122)

o que permite o cálculo do primeiro coeficiente na equação de Riccati (2.121), ou seja:

$$a_1 = -2\ell \frac{1}{1+\lambda}.$$
 (2.123)

Analogamente, os coeficientes $b_1, c_1 \in d_1 \in (2.120)$ podem ser calculados⁶.

As expressões de tais coeficientes serão úteis para a correção subdominante que efetuaremos a seguir. Vamos colecionar agora termos de ordem $\mathcal{O}(N^0)$ na equação (2.115), ou seja:

$$- U^{(-1)\prime} - U^{(-1)}U^{(0)} + a_1(U^{(-1)})^2 + \frac{b_1}{4}\frac{1}{u^2} + \frac{1-2\lambda}{4}c_1u^2 + \frac{\lambda}{4}d_1u^4 - 1 = \xi_0$$
(2.124)

Sendo $U^{(-1)}(1) = 0$ façamos u = 1 na equação acima e teremos:

$$\xi_0 = -1 + \sqrt{1+\lambda} + \ell \tag{2.125}$$

Este resultado se constitui na correção subdominante para a energia obtida para a condição $\ell \neq 0$.

2.5 O Potencial Coulombiano

Vamos agora utilizar o mesmo procedimento ao caso do potencial Coulombiano atrativo, i.e.,

⁶Os cálculos dos coeficientes $b_1, c_1 \in d_1$ se encontram no Apêndice. Outros coeficientes, em ordem mais alta em 1/N, podem ser calculados com o uso de computação algébrica.

$$V = -\frac{Ze^2}{r}.$$
(2.126)

Neste caso o potencial efetivo torna-se:

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{8r^2} - \frac{Ze^2}{k^2r}.$$
(2.127)

Fazendo a mudança, conforme [21],

$$\rho = 4Z\hat{e}^2 r \qquad ; \qquad \hat{e}^2 = \frac{e^2}{k^2},$$
(2.128)

em que ρ é adimensional, o potencial efetivo (2.127) será, em unidades de $(4Z\hat{e}^2)^2$, escrito como:

$$V_{eff}(\rho) = \frac{1}{8\rho^2} - \frac{1}{4\rho}.$$
(2.129)

Dessa forma a energia também será medida em unidades de $(4Z\hat{e}^2)^2$.

Analogamente ao caso anterior para o cálculo do ponto de mínimo do potencial teremos

$$\frac{d\rho}{dr}\frac{d}{d\rho}V_{eff}(\rho)|_{\rho_0} = (4Z\hat{e}^2)\left[\frac{-1}{4\rho_0^3} + \frac{1}{4\rho_0^2}\right] = 0$$
(2.130)

levando, nestas unidades, a $\rho_0 = 1$, e ainda, usando (2.129), temos:

$$E^{(-2)} = V_{eff}(r_0) = -\frac{1}{8}.$$
(2.131)

Com tais mudanças podemos calcular a função $U^{(-1)}$, dada por (2.19), ou seja⁷:

$$U^{(-1)} = -\left(\frac{\rho - 1}{2\rho}\right).$$
 (2.132)

Com um procedimento análogo ao da seção anterior a equação

⁷Estamos adotando o intervalo para ρ dado por $[0, +\infty]$, ou seja, tal que $U^{(-1)}$ tenha um ponto de máximo em $\rho = 1$ (adimensional).

$$-U^{(-1)}U^{(0)} = E^{(-1)} + \frac{1}{2}\rho^{-2} + \frac{1}{2}U^{(-1)'}$$
(2.133)

calculada no ponto de mínimo $\rho = 1$ nos fornece

$$E^{(-1)} = -\frac{1}{4} \tag{2.134}$$

е

$$U^{(0)} = -\frac{\rho + 1}{2\rho},\tag{2.135}$$

tal que a energia pode ser escrita como

$$E = -\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{4}k^1 + \cdots$$
 (2.136)

a qual, em termos da constante de acomplamento inicial, escreve-se

$$E = -\frac{1}{8}k^2(4Z\hat{e}^2)^2\left(1+2k^{-1}+\cdots\right) = -2Z^2e^4\frac{1}{k^2}\left(1+2\frac{1}{k}+\cdots\right).$$
 (2.137)

Tais resultados concordam com [21]. A expansão 1/N não é a mais indicada na física atômica em N = 3. Podemos perceber, conforme equação acima, que para o átomo de hidrogênio a energia de ligação do estado fundamental⁸, em ordem mais baixa em 1/N e para N = 3, é $(2/9)e^4$, enquanto o valor exato teórico em três dimensões é $(1/2)e^4$. Ou seja, cerca de 44% menor [22]. Diversos trabalhos foram realizados modificando o método de expansão 1/N e melhorando a taxa de convergência dos autovalores da energia na série perturbativa [23].

Finalmente podemos escrever a função η , conforme a Eq. (2.29), e usando os resultados desta seção. Dessa forma:

 ${}^{8}m = 1 e Z = 1$

$$\eta = \exp\{\int \sum_{n=-1}^{\infty} U^{(n)}(x)k^{-n}dx\} =$$

$$= \exp\{\int U^{(-1)}(x)kdx + \int U^{(0)}(x)dx + \cdots\} =$$

$$= \exp\{-(k+1)\int dx\frac{x}{2(x+1)} - \int dx\frac{1}{x+1} + \cdots\} =$$

$$= C\exp\{\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - (x+1)\right)k - \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) + (x+1)\right) + \cdots\right]\}(2.138)$$

Voltando a escrever a função de onda com a dependência em r teremos:

$$\eta = C' r^{\frac{k-1}{2}} \exp\left[-2Z\hat{e}^2 kr\left(1 + \frac{1}{k} + \cdots\right)\right].$$
(2.139)

Dessa forma, teremos a solução da equação de movimento, que, conforme (2.30), será dada por

$$R_{n\ell} = C' \exp\left[-2Z\hat{e}^2 kr\left(1 + \frac{1}{k} + \cdots\right)\right].$$
(2.140)

em que $C \in C'$ são constantes.

.
Capítulo 3

O Oscilador Anarmônico e o Potencial Coulombiano não-comutativo

O estudo do oscilador anarmônico e o potencial Coulombiano no espaço de N-dimensões foi feito em [24] na situação usual comutativa. Vamos investigar as características e transformações que tais potenciais exercem na Mecânica Quântica não-relativística na situação não-comutativa. Esperamos, assim, encontrar correções, por exemplo, para as energias em termos do parâmetro θ não-comutativo, NC.

3.1 A Mecânica Quântica Não-Comutativa

Um espaço NC fornece uma possibilidade que tem importantes conseqüências em nosso conceito da estrutura quântica da natureza. Tal espaço está relacionado a uma nova relação de comutação fundamental. Devemos promover as coordenadas a operadores hermitianos \hat{x}^{μ} que não comutam entre si, i.e.,

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu} \tag{3.1}$$

com $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$ e $\theta^{\mu\nu}$ uma matriz real constante, antisimétrica e com dimensões de área, que parametriza a não-comutatividade. Na Mecânica Quântica NC o produto ordinário das coordenadas deve ser substituído pelo produto Moyal.

Para descrevermos a dinâmica, descrita pela Hamiltoniana do problema em estudo, na mecânica quântica NC é usual expressar as coordenadas e os momentos nesse espaço em termos das coordenadas comutantes e seus momentos na forma

$$\hat{x}_{j} = x_{j} - \frac{1}{2}\theta_{jk}p_{k}$$

$$\hat{p}_{j} = p_{j}$$
(3.2)

em que essas novas variáveis x_j e p_j satisfazem a álgebra de Heisenberg:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$$
(3.3)

Para o termo de potencial, o qual depende somente das coordenadas, a equação de Schrödinger NC terá a forma padrão envolvendo o potencial modificado

$$V(x) * \psi(x) \to V\left(x_j - \frac{1}{2}\theta^{ij}p_j\right)\psi(x), \qquad (3.4)$$

onde * denota o produto Moyal, definido em (1.2). No que segue, vamos admitir que a não-comutatividade afeta somente duas coordenadas x_1 e x_2 , ou seja, $\theta^{ij} = \theta \epsilon^{ij}$, com o símbolo de Levi-Cività $\epsilon^{12} = 1$.

3.2 O Oscilador Anarmônico NC.

Vimos na seção (2.5) a implementação da técnica da expansão 1/N para o cálculo das energias para o oscilador anarmônico na situação usual. Continuando nessa linha de idéias, um estudo que nos parece ser muito interessante, e um passo lógico a ser dado, é entender como a não-comutatividade modifica essas energias. A Hamiltoniana correspondente no espaço NC é

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \hat{p}_j^2 + \frac{m_0^2}{2} \hat{x}_j^2 + \frac{g}{N} (\hat{x}_j^2)^2 \right),$$
(3.5)

em que a massa é unitária (m = 1) e, conforme vimos, a freqüência dada em unidades de massa.

A Hamiltoniana descreve a dinâmica de um oscilador anarmônico com N graus de liberdade. Vamos escrever as coordenadas não-comutativas em termos das coordenadas e seus momenta comutantes na forma (3.2).

Teremos, até a primeira ordem em θ , a seguinte expressão para a Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2}\nabla_N^2 + \frac{m_0^2}{2}(x^2 - \theta_{j\ell}x_jp_\ell) + \frac{g}{N}\left(x^4 - 2\theta_{im}x^2x_ip_m\right)$$
(3.6)

Vamos considerar o caso em que a não-comutatividade ocorre nas componentes 1 e 2, ou seja, $\theta_{im} \neq 0$ para i, m = 1, 2, e igual a zero nos outros casos.

Implementando na Hamiltoniana acima as mudanças efetuadas na situação comutativa, conforme Eqs. (2.53), (2.54), com $(x^2 \to r^2)$, e ainda, $\theta \to \theta/\omega$, teremos¹:

$$H = -\frac{1}{2}\nabla_N^2 + \left(\frac{(1-2\lambda)}{2} - \frac{2\theta\lambda}{N}L_{12}\right)r^2 + \frac{\lambda}{N}r^4 - \theta\frac{(1-2\lambda)}{2}L_{12}$$
(3.7)

em que $\theta_{j\ell} x_j p_\ell = \theta \epsilon_{j\ell} x_j p_\ell = \theta L_{12}$ para os índices $j, \ell = 1, 2$.

A equação diferencial a ser resolvida é:

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla_{N}^{2} + \left(\frac{(1-2\lambda)}{2} - \frac{2\theta\lambda}{N}L_{12}\right)r^{2} + \frac{\lambda}{N}r^{4} - \theta\frac{(1-2\lambda)}{2}L_{12}\right]\psi = E\psi \qquad (3.8)$$

Escrevendo $\psi = R(r)Y(\Omega)$, temos:

¹Uma discussão sobre tais mudanças pode ser encontrada no Apêndice B.

$$-\frac{Y(\Omega)}{2}\Delta_r R(r) + \frac{1}{2r^2}\ell(\ell+N-2)R(r)Y(\Omega) + \left(\frac{(1-2\lambda)}{2} - \frac{2\theta\lambda}{N}m\right)r^2R(r)Y(\Omega) + \frac{\lambda}{N}r^4R(r)Y(\Omega) = \left(E + \frac{\theta(1-2\lambda)}{2}m\right)R(r)Y(\Omega)$$
(3.9)

em que m é o autovalor² de L_{12} e $\frac{\theta(1-2\lambda)}{2}m$ é um termo constante que será incorporado à energia.

Temos, portanto, uma nova equação para o oscilador anarmônico, agora na situação NC,

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} \right] + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} + \left(\frac{(1-2\lambda)}{2} - \frac{2\theta\lambda}{N} m \right) r^2 + \frac{\lambda}{N} r^4 \right\} R(r) = \xi R(r)$$
(3.10)

em que $\xi = E + \frac{\theta(1-2\lambda)}{2}m$.

Como o termo contendo o θ é de ordem 1/N, para estudarmos o efeito da nãocomutatividade precisamos extender nosso cálculos até à aproximação subdominante.

Assim, vamos calcular o ponto de mínimo do potencial, na situação NC, até a segunda ordem em $\epsilon \equiv \frac{2\ell}{N}$. Iniciamos reescrevendo o potencial efetivo como:

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{8r^2} + \frac{1}{k^2} \left[\left(\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{2\theta\lambda}{N} m \right) r^2 + \frac{\lambda}{N} r^4 \right]$$
(3.11)

em que, em vez de tomarmos $k \sim N,$ faremos

$$k = N + 2\ell = N\left(1 + \frac{2\ell}{N}\right) = N(1 + \epsilon)$$
(3.12)

Tomando a derivada primeira em (3.11) calculada em $r = \bar{r}_0$, temos:

$$\frac{d}{dr}V_{eff}(r)|_{r=\bar{r}_0} = \frac{-1}{4\bar{r}_0^3} + \frac{1}{k^2} \Big[1 - 2\lambda - \frac{4\theta\lambda}{N}m \Big]\bar{r}_0 + \frac{4\lambda}{k^2N}\bar{r}^3 = 0$$
(3.13)

²Vimos no início do capítulo anterior que a função $Y_{\ell_1,\ell_2,...,\ell_{N-2},\ell_{N-1}}(\phi)$ é rotulada por N-1 índices discretos ℓ .

ou seja,

$$-\frac{1}{4} + (1 - 2\lambda)\frac{\bar{r}_0^4}{N^2}(1 + \epsilon)^{-2} + \frac{4\lambda}{N^3}\bar{r}_0^6(1 + \epsilon)^{-2} - \frac{4\theta\lambda}{N}m\frac{\bar{r}_0^4}{N^2}(1 + \epsilon)^{-2} = 0$$
(3.14)

com k escrito em termos de ϵ .

Fazendo o "ansatz"³

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{N}{2}}\bar{a} = \sqrt{\frac{N}{2}} \left(1 + \bar{a}_1\epsilon + \bar{a}_2\epsilon^2 + \ldots\right)$$
 (3.15)

podemos obter $\bar{r}_0,$ o ponto de mínimo do potencial, até uma ordem desejada em $\epsilon.$

Fazendo a expansão do termo $(1 + \epsilon)^2$ em (3.14) obtemos a seguinte forma geral para o ponto de mínimo⁴:

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{N}{2}} \left[1 + \left(\frac{\ell}{1+\lambda} + \frac{\theta \lambda m}{1+\lambda} \right) \frac{1}{N} + \cdots \right] \,. \tag{3.16}$$

Usando os resultados do capítulo anterior vamos escrever a equação de Riccati (2.115) nesta nova situação,

$$-\frac{1}{N\overline{r}_0^2} \left(U' + U^2 \right) + NW(u) + \left(\frac{3}{4} \frac{1}{N\overline{r}_0^2} - \frac{1+\epsilon}{\overline{r}_0^2} \right) \frac{1}{u^2} = \xi , \qquad (3.17)$$

em que

$$W(u) = \frac{1}{4} \left(\frac{1+\epsilon}{\bar{r}_0}\right)^2 \frac{1}{u^2} + \left[\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\theta\lambda m\epsilon}{\ell}\right] \frac{\bar{r}_0^2 u^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \bar{r}_0^4 u^4.$$
(3.18)

 $\operatorname{com} u = r/\bar{r}_0.$

A contribuição em ordem dominante para a energia do estado fundamental, no caso NC, coincide com a do comutativo,

$$E^{(-2)} = NW(1) = N\left(\frac{2-\lambda}{4}\right),$$
 (3.19)

 $[\]bar{\bar{a}}$, $\bar{r_0}$, representam os valores de a, r_0 , etc, agora na situação não-comutativa.

 $^{^4 \, {\}rm Outros}$ termos dessa expansão podem ser encontrados no Apêndice ${\bf B}$

pois o termo dependente de θ na Eq. (3.11) é sub-dominante na expansão 1/N.

Analogamente ao efetuado no capítulo anterior, subtraindo $E^{(-2)}$ de ambos os lados da Eq. (3.17), obtemos

$$-\frac{1}{N\bar{r}_{0}^{2}}\left(U'+U^{2}\right)+N\left[W\left(u\right)-\left(\frac{2-\lambda}{4}\right)\right] +\left[\left(\frac{3}{4}-2\ell\right)\frac{1}{N}-1\right]\frac{1}{\bar{r}_{0}^{2}u^{2}}=\xi-N\left(\frac{2-\lambda}{4}\right)=\xi'.$$
(3.20)

Cada termo envolvendo \overline{r}_0 é expandido como uma série de potências em 1/N, bem como a energia

$$\xi' = E^{(0)} + \sum_{j \ge 1} E^{(j)} \frac{1}{N^j}$$
(3.21)

e as funções

$$U(u) = NU^{(-1)}(u) + U^{(0)}(u) + \sum_{j \ge 1} U^{(j)}(u) \frac{1}{N^j}.$$
(3.22)

Com tais equações temos condições de calcular $E^{(j)}$ e $U^{(j)}$ até uma ordem arbitrária em 1/N. Calculando as duas primeiras correções para a energia do estado fundamental, teremos⁵:

$$\xi' = -1 + \sqrt{1 + \lambda} + \ell - \theta \lambda m$$

$$+ \left[\frac{\lambda \left(4\ell^2 \lambda + 4\ell^2 - 8\ell \lambda + 12\ell \sqrt{\lambda + 1} - 8\ell + \lambda - 12\sqrt{\lambda + 1} + 12 \right)}{4(\lambda + 1)^2} + \frac{\lambda \left(-2m\ell \lambda - 2m\ell + 2m\lambda + m\lambda \sqrt{\lambda + 1} - 2m\sqrt{\lambda + 1} + 2m \right)}{(\lambda + 1)^2} \theta \right] \frac{1}{N}. \quad (3.23)$$

Dessa forma, a expressão para a energia do oscilador anarmônico NC será dada por:

⁵Para outras correções sugere-se os recursos da computação algébrica.

$$E = N\left(\frac{2-\lambda}{4}\right) - 1 + \sqrt{1+\lambda} + \ell - \frac{\theta m}{2} + \left[\frac{\lambda\left(4\ell^2\lambda + 4\ell^2 - 8\ell\lambda + 12\ell\sqrt{\lambda+1} - 8\ell + \lambda - 12\sqrt{\lambda+1} + 12\right)}{4(\lambda+1)^2} + \frac{\lambda\left(-2m\ell\lambda - 2m\ell + 2m\lambda + m\lambda\sqrt{\lambda+1} - 2m\sqrt{\lambda+1} + 2m\right)}{(\lambda+1)^2}\theta\right]\frac{1}{N}.$$
 (3.24)

A equação (3.24) reproduz corretamente os resultados do oscilador anarmônico NCquando $\ell = 0$ e $\theta = 0$ [13].

Escolhendo alguns valores numéricos para $\ell \in \lambda$ podemos calcular as correções até $1/N^{12}$ ou mais. Alguns resultados são mostrados nos gráficos na figura (3.1). Estes gráficos sugerem que a convergência é bastante boa para pequenos valores de $\lambda \in \ell = 0$. Para maiores valores de ℓ os resultados não são estáveis⁶. Tal fato é evidente observando a Eq. (3.16).

3.3 O Potencial Coulombiano NC.

É interessante verificarmos a validade do método quando empregado em novas teorias e situações. Desse modo, podemos comparar seus resultados com os já conhecidos da literatura. Para o caso do potencial Coulombiano estamos interessados em estudar as modificações na teoria do átomo de hidrogênio, ou seja, em suas energias e auto-funções, na situação não-comutativa.

No espaço N-dimensional, o potencial Coulombiano NC fica:

$$V = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}\hat{x}}} \tag{3.25}$$

onde os operadores \hat{x} do espaço NC satisfazem as relações de comutação (3.1).

Assim, efetuando a mudança de variáveis \hat{x}_i e \hat{p}_i para x_i e p_i , respectivamente, na Hamiltoniana temos que o potencial Coulombiano torna-se:

⁶A primeira correção para \bar{r}_0 é da ordem de ℓ/N , logo a Eq. (3.16) não fornece uma boa aproximação para \bar{r}_0 se ℓ não for muito menor que N.



Figura 3.1: Energia do estado fundamental (em unidades da frequência) para o potencial anarmônico, calculado até a ordem n_{max} , na forma $\xi' = E_0 + E_{\theta}\theta$, para alguns valores de $\ell \in \lambda$.

$$V = -\frac{Ze^2}{\sqrt{(x_i - \theta_{ij}p_j/2)(x_i - \theta_{ik}p_k/2)}} = -\frac{Ze^2}{\sqrt{x^2 - \theta_{j\ell}x_jp_\ell} + O(\theta^2)}$$
(3.26)

Fazendo $x^2 \equiv r^2$ e expandindo em série de Taylor a expressão acima, temos que o potencial torna-se:

$$V = -\frac{Ze^2}{r} \Big[1 + \theta_{j\ell} \frac{x_j p_\ell}{2r^2} + O(\theta^2) \Big]$$
(3.27)

Vamos considerar, para este caso, a NC nas componentes 1 e 2 até a primeira ordem em θ , i.e., ($\theta \ll 1$), neste caso,

$$V = -\frac{Ze^2}{r} \left[1 + \theta \frac{(x_1p_2 - x_2p_1)}{2r^2} \right] = -\frac{Ze^2}{r} \left[1 + \theta \frac{L_{12}}{2r^2} \right]$$
(3.28)

 L_{12} é uma componente do momento angular. Observe que a correção em θ é bastante singular na origem, o que pode levar a quebra da expansão 1/N como veremos mais adiante.

3.3.1 Estado Fundamental - Energias e Autofunções.

A equação de movimento radial para o potencial considerado é, conforme (2.5):

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{2r^3}\theta m\right]R_{n\ell}(r) = ER_{n\ell}(r) \quad (3.29)$$

em que assumimos conhecida, da teoria em três dimensões, a ação de L_{12} no harmônico esférico generalizado, ou seja:

$$L_{12}Y(\Omega_N) = mY(\Omega_N) \tag{3.30}$$

em que m é o autovalor do momento angular.

Efetuando uma nova mudança

$$r \to \frac{\rho}{4Z\hat{e}^2} \qquad e \qquad \theta \to \frac{\hat{\theta}}{(4Z\hat{e}^2)^2},$$
(3.31)

e os procedimentos mostrados na seção 2.2, a equação de Schrödinger torna-se

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\rho^2} + k^2 V_{eff}(\rho) + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}k\right)\frac{1}{\rho^2}\right\}\eta = E\eta.$$
(3.32)

com o potencial efetivo,

$$V_{eff}(\rho) = \frac{1}{8\rho^2} - \frac{1}{4\rho} - \frac{\theta m}{8\rho^3}$$
(3.33)

em que, novamente a energia será dada em unidades de $16Z^2\hat{e}^4$.

Analogamente à situação usual e comutativa, calculando o ponto de mínimo teremos:

$$\bar{\rho}_0 = \frac{1 \pm (1 - 3\theta m)}{2} \tag{3.34}$$

Iremos adotar neste caso a solução (+), pois, quando $\theta \to 0 \Rightarrow \bar{\rho}_0 \to \rho_0$. Assim, para o ponto de mínimo, temos:

$$\bar{\rho}_0 = 1 - \frac{3\theta m}{2} \tag{3.35}$$

A aproximação dominante para a energia do estado fundamental é

$$E^{(-2)} = V_{\text{eff}}(\rho_0) = -\frac{(1+\theta \, m)}{8} \,. \tag{3.36}$$

Vamos considerar a seguinte expansão para a função

$$U_{NC}^{(-1)} = U_0^{(-1)} + \theta U_1^{(-1)} + \theta^2 U_2^{(-1)} + \cdots$$
(3.37)

em que $U_0^{(-1)}$ é uma função já conhecida, conforme Eq. (2.132).

A Eq. (2.19), com a mudança $\rho=\bar{r}_0\,u$

$$U_{NC}^{(-1)}(u) = -\sqrt{\frac{(u-1)^2}{4u^2} + \frac{\theta m}{4u^3}(u-1)^3}$$
(3.38)

A expressão acima nos mostra que $(U^{(-1)})_{NC} \to 0$ quando $u \to 1$, como no caso comutativo e, ainda, $(U^{(-1)})_{NC} \to U^{(-1)}$ para $\theta \to 0$.

Na aproximação de $\theta \ll 1$ a equação (3.38) torna-se

$$U_{NC}^{(-1)}(u) = -\frac{(u-1)}{2u} - \frac{\theta m(u-1)^2}{4u^2}$$
(3.39)

A equação (2.133) escrita em termos de u torna-se

$$-U^{(-1)}U^{(0)} = E^{(-1)} + \frac{1}{2(u\bar{r}_0)^2} + \frac{1}{2}\frac{du}{d\rho}\frac{d}{du}U^{(-1)'}(u)$$
(3.40)

ou seja, no ponto u = 1, temos:

$$0 = E^{(-1)} + \frac{1}{2(u\bar{r}_0)^2}\Big|_{u=1} + \frac{1}{2\bar{r}_0}\left[-\frac{1}{2u^2} + \frac{\theta m}{2}\frac{(u-1)}{u^3}\right]\Big|_{u=1}.$$
 (3.41)

Apesar da dependência em θ desaparecer no último termo em (3.41), o resultado acima difere do usual por conta de \bar{r}_0 . Portanto, teremos o seguinte resultado para a primeira correção da energia

$$E^{(-1)} = -\frac{1}{4} - \frac{9}{8}\theta \,m. \tag{3.42}$$

Usando o resultado acima em (2.133), juntamente com a Eq. (3.35), teremos:

$$U_{NC}^{(0)} = \frac{-2u(u-1) - (9u^2 + 9u - 2)\theta m}{4u^2 + 2u(u-1)\theta m}$$
(3.43)

Escrevendo a correspondente expansão da energia, para o potencial Coulombiano NC, teremos a equação equivalente à Eq. (2.137)

$$E = -\frac{(1+\theta m)}{8}k^2(4Z\hat{e}^2)^2 - \frac{(2+9\theta m)}{8}k(4Z\hat{e}^2)^2 + \cdots .$$
(3.44)

Este procedimento pode ser repetido para diversas ordens em 1/k. Usando um programa de computador relativamente simples foi calculada a correção para a energia do estado fundamental, em unidades de $(4Z\hat{e}^2)^2$, como

$$E = -\frac{k^2}{8} - \frac{k}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2k} - \frac{5}{8k^2} - \frac{3}{4k^3} - \frac{7}{8k^4} - \frac{1}{k^5} - \frac{9}{8k^6} - \frac{5}{4k^7} - \frac{11}{8k^8} - \frac{3}{2k^9} - \frac{13}{8k^{10}} + \theta m \left(-\frac{k^2}{8} - \frac{9k}{8} - \frac{49}{8} - \frac{211}{8k} - \frac{199}{2k^2} - \frac{1385}{4k^3} - \frac{4579}{4k^4} - \frac{14645}{4k^5} - \frac{91667}{8k^6} - \frac{282815}{8k^7} - \frac{864359}{8k^8} - \frac{2625269}{8k^9} - \frac{3970323}{4k^{10}} \right).$$
(3.45)

Novamente tais resultados concordam com a situação usual quando $\theta \to 0$. Podemos notar, neste resultado, um comportamento bastante diferente para os termos dependentes e independentes de θ , que representamos por meio de gráficos esses diferentes comportamentos.



Figura 3.2: Energia do estado fundamental do potencial Coulombiano não-comutativo calculado até a ordem $1/k^{n}$ max.

A contribuição para a energia para os termos independentes de θ convergem rapidamente; convergência esta bem estável para ordens maiores de 1/k. Mas, na parte dependente de θ diverge completamente.

A função η , correspondente à Eq. (2.138), e usando os resultados desta seção, pode ser escrita como:

$$\eta = \exp\{\int \sum_{n=-1}^{\infty} U^{(n)}(u)k^{-n}du\} =$$

$$= \exp\{\int U^{(-1)}(u)kdu + \int U^{(0)}(u)du + \cdots\} =$$

$$= \exp\{-\frac{k}{2}(u - \ln u) - \frac{k\theta m}{4}\left(\frac{-1}{u} + u - 2\ln u\right) + \cdots\}$$
(3.46)

A solução radial da equação de Schrödinger é, conforme (2.30):

$$R_{n\ell} = r^{(1-N)/2} \exp\left\{-\frac{(N+2\ell)}{2} \left[(u-\ln u) - \frac{\theta m}{2} \left(\frac{-1}{u} + u - 2\ln u\right) + \cdots\right]\right\}$$
(3.47)

3.3.2 Versão modificada do potencial Coulombiano NC.

Vimos na seção anterior que a expansão 1/N apresentou divergência no cálculo da energia, conforme (3.45). Mas, o surgimento de divergências, devido ao uso deste método, não é surpresa, pois, a série pode convergir até uma certa ordem e apresentar divergências em ordens maiores [25]. No entanto, em nosso caso, não há convergência. Foi constatado que, as diferentes mudanças na relação

$$\theta \to \frac{\theta}{k^{\tau}}; \tau = 1, 2, 3, \cdots,$$
(3.48)

não resultaram em convergência para a série na Eq. (3.45). O que nos leva a concluir que a expansão 1/N não nos fornece um bom método de cálculo para este tipo de potencial. Contudo, podemos notar que a divergência surge devido à parte da energia dependente de θ , ou seja, na parte não-comutativa do potencial. Conforme vimos na Eq. (3.28), temos uma forte singularidade na origem no setor não-comutativo do potencial. Propomos, então, apresentar uma versão modificada do potencial (3.28) da seguinte forma⁷:

⁷Devido à função exponencial, na Eq. (3.49), a equação definindo r_0 é transcendental e nenhuma solução analítica pode ser encontrada [26].

$$V(r) = -\frac{Z\hat{e}^2}{r} \left[1 + \frac{m}{2r^2} \left(1 - e^{-\alpha r^\beta} \right) \frac{\theta}{k} \right].$$
(3.49)

Fazendo uma análise dos limites, temos que, para $r \to 0$, a parte não-comutativa do potencial se comporta como $1/r^{3-\beta}$, ou seja, ela é menos divergente que o potencial Coulombiano (3.28) se $\beta > 2$. O fator α tem dimensão [comprimento]^{- β}, logo, ele define uma escala de comprimento característico da modificação que estamos introduzindo. Para $r \to \infty$ a Eq. (3.28) é recuperada.

Com esta mudança o potencial efetivo não terá dependência em θ . Tais mudanças de escalas são comuns na expansão 1/N [27]. Dessa forma, o potencial efetivo torna-se:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{8r^2} - \frac{Z\hat{e}^2}{r}, \qquad (3.50)$$

Dessa forma, todas as modificações devido à não-comutatividade se dão por meio de correções subdominantes obtidas a partir da equação de Riccati,

$$-\frac{1}{2r_0^2} \left[U^2(u) + U'(u) \right] + k^2 V_{\text{eff}}(u) - \frac{k}{2} \left[\frac{1}{r_0^2 u^2} + \frac{Z\hat{e}^2}{r_0^3 u^3} \theta m \left(1 - e^{-\alpha r^\beta} \right) \right] + \frac{3}{8} \frac{1}{r_0^2 u^2} = E.$$
(3.51)

Vamos redefinir as coordenates do seguinte modo:

$$\rho = 4Z\hat{e}^2 r \quad ; \quad \tilde{\theta} = \theta \left(4Z\hat{e}^2\right)^2 \quad ; \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{(4Z\hat{e}^2)^\beta} \quad ; \quad \tilde{E} = E/\left(4Z\hat{e}^2\right)^2 \tag{3.52}$$

Logo, podemos reescrever a Eq. (3.51) como⁸

$$-\frac{1}{2}\left[U^{2}\left(\rho\right)+U'\left(\rho\right)\right]+k^{2}V_{\text{eff}}\left(\rho\right)-k\left[\frac{1}{2\rho^{2}}+\frac{\theta m}{8\rho^{3}}\left(1-e^{-\alpha\rho^{\beta}}\right)\right]+\frac{3}{8\rho^{2}}=E\,,\qquad(3.53)$$

O potencial efetivo é dado por (3.50). O mínimo do $V_{\text{eff}}(\rho)$ está localizado em $\rho_0 = 1$, a energia de ordem dominante é $E^{(-2)} = -1/4$ e,

⁸Suprimindo os acentos, i.e., $\tilde{\theta} \to \theta$, etc.

$$U^{(-1)} = \frac{1-\rho}{2\rho}, \qquad (3.54)$$

a mesma do caso comutativo. Seguindo o procedimento descrito na seção 2.2 podemos calcular correções em ordens mais altas para to $E \in U$. Temos que a única modificação será Eq. (2.20), em ordem subdomimante; esta equação torna-se:

$$-\frac{1}{2} \left[2U^{(-1)}U^{(0)} + U^{(-1)'} \right] - \frac{1}{2\rho^2} - \frac{\theta m}{8\rho^3} \left(1 - e^{-\alpha\rho^\beta} \right) = E^{(-1)}, \qquad (3.55)$$

a qual inclui a correção nãocomutativaion, esta em ordem subdominante.

Plotamos gráficos na forma $E = E_0 + \theta E_\theta$ para várias ordens da expansão 1/k, buscando valores para $\alpha \in \beta$ que fornecessem os melhores resultados para a convergência e estabilidade da expansão. Alguns desses resultados podem ser visualizados na Fig. 3.3 e Fig. 3.4.

A energia do estado fundamental, para o potencial modificado (3.49), pode ser escrita como:

$$E = -0.123 k^{2} - 0.25 k - 0.375 - \frac{0.5}{k} - \frac{0.625}{k^{2}} - \frac{0.75}{k^{3}} - \frac{0.875}{k^{4}} - \frac{1.0}{k^{5}} - \frac{1.125}{k^{6}} - \frac{1.25}{k^{7}} - \frac{1.375}{k^{8}} - \frac{0.125 k^{2} - 0.0790151 k - 0.297271 - \frac{0.338563}{k} - \frac{0.592782}{k^{2}} - \frac{0.393406}{k^{3}} - \frac{1.40262}{k^{4}} + \frac{0.674301}{k^{5}} - \frac{2.54331}{k^{6}} - \frac{15.0062}{k^{7}} + \frac{124.537}{k^{8}} \right).$$

$$(3.56)$$

Na Fig. 3.3 apresentamos resultados para α fixo e $\beta = 1, 2, 3$. E, finalmente, na Fig. 3.4 concluímos apresentando os resultados para $\beta = 2$ (fixo) e diferentes valores de α . Encontramos, para α da ordem da unidade e $\beta = 2$, o melhor resultado de convergência.



Figura 3.3: Energia do estado fundamental do potencial Coulombiano modificado, calculado até a ordem $1/k^{n}$ max, para diferentes valores de $\alpha \in \beta$.



Figura 3.4: Análogo da Fig. 3.3, para $\beta = 2$ (fixo) e diferentes valores de α .

Capítulo 4

A Não-comutatividade dependente do spin.

Até o presente, consideramos a não-comutatividade canônica, ou seja, aquela em que o parâmetro não-comutativo θ é constante. Neste capítulo vamos abordar um novo tipo de não-comutatividade, ou seja, a situação em que ela depende do spin. Este tipo de consideração para a não-comutatividade, conforme [28], estimula a construção de novos modelos na mecânica quântica, os quais formam uma extensão natural e, ao mesmo tempo, abrem novos caminhos de pesquisa a serem explorados (por exemplo, a supercondutividade não convencional [29]). Em particular, na referência [30] foram discutidas várias questões sobre o significado físico e a formulação matemática da não-comutatividade dependente do spin.

A não-comutatividade das coordenadas espaciais, \hat{x}^i , o momento conjugado, \hat{p}_i , e as variáveis de spin, \hat{s}^i , são supostas satisfazer a álgebra de Heisenberg "non-stantadard":

$$\begin{aligned} [\hat{x}^{i}, \hat{x}^{j}] &= i\theta^{2}\epsilon^{ijk}\hat{s}^{k}, \\ [\hat{x}^{i}, \hat{p}_{j}] &= i\delta^{i}_{j}, \qquad [\hat{p}_{i}, \hat{p}_{j}] = 0 \\ [\hat{x}^{i}, \hat{s}^{j}] &= i\theta\epsilon^{ijk}\hat{s}^{k}, \qquad [\hat{s}^{i}, \hat{s}^{j}] = i\epsilon^{ijk}\hat{s}^{k} \end{aligned}$$
(4.1)

em que θ é o parâmetro da não-comutatividade que chamaremos de não-comutatividade do spin. Neste capítulo iremos estudar esta nova condição para a não-comutatividade. O procedimento que adotaremos consiste em relacionar os operadores de posição \hat{x}^i , que satisfazem (4.1), com o operador x^i comutativo . Essa transformação, usualmente chamada de mudança de Bopp, é, para as coordenadas e momentos, respectivamente, dada por:

$$\hat{x}^i = x^i \mathbf{1} + \theta \hat{s}^i, \tag{4.2}$$

em que, em termos das matrizes de Pauli, $\hat{s}^i = \frac{1}{2}\sigma^i$ é operador de spin.

Visando entender as implicações desse novo tipo de não-comutatividade vamos no que segue estudar o efeito perturbativo dela decorrente na situação não-relativística usando a equação de Pauli.

4.1 A equação de Pauli.

Vamos considerar o movimento de uma partícula de carga e no plano xy, sujeita a um campo magnético, \vec{B} , perpendicular na direção do eixo z.

A hamiltoniana de Pauli é dada por:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B},$$
(4.3)

em que $\vec{\mu} = g \frac{e}{2m} \vec{S}$ é o momento magnético, g seu fator giromagnético e \vec{S} o spin, com os potencias de calibre dados por:

$$A_1 = A_3 = 0$$
; $A_2 = B\hat{x} = B(x_1 + \theta S_1) = B(x_1 + \theta \sigma_1/2).$ (4.4)

Substituindo essa expressão em (4.3) teremos a seguinte equação de autovalores:

$$\hat{H}\Psi = H_0\Psi + \theta \left(\frac{e^2 B^2 x_1 \sigma_1}{2m} - \frac{\hat{p}_2 e B \sigma_1}{2m}\right) + \theta^2 \frac{e^2 B^2}{8m}\Psi = E\Psi.$$
(4.5)

O termo proporcional a θ^2 fornece-nos um deslocamento constante em todo o espectro e daqui por diante será omitido. Para o cálculo da solução não-perturbada ($\theta = 0$) temos que o operador,

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m} + \frac{e^2 B^2 x_1^2}{2m} - \frac{\hat{p}_2 e B x_1}{m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B}, \qquad (4.6)$$

não possui coordenadas $y \in z$ explicitamente. Portanto, os operadores $\hat{p}_2 \in \hat{p}_3$ comutam com \hat{H}_0 , ou seja, as componentes $y \in z$ do momento são conservadas. Assim, iremos adotar uma solução da forma

$$\Psi(x_1, s) = C e^{i(x_2 p_2 + x_3 p_3)} \psi(x_1, s)$$
(4.7)

em que C é uma constante de normalização.

Substituindo-se a solução acima na Eq. (4.5) teremos a seguinte equação:

$$\hat{h}\psi = \left[\frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{e^2B^2}{2m}\left(x_1 - x_0\right)^2 - \vec{\mu}\cdot\vec{B} + \theta\left(\frac{e^2B^2x_1\sigma_1}{2m} - \frac{p_2eB\sigma_1}{2m}\right)\right]\psi = \bar{E}\psi, \quad (4.8)$$

em que $\bar{E} = E - \frac{p_3^2}{2m}$ e $x_0 = \frac{p_2}{eB}$, a qual pode ser resolvido perturbativamente por meio da equação:

$$\hat{h}\psi = (\hat{h}_0 + \hat{h}_{int})\psi, \qquad \hat{h}_{int} = \theta \left(\frac{e^2 B^2 x_1 \sigma_1}{2m} - \frac{p_2 e B \sigma_1}{2m}\right)$$
(4.9)

e \hat{h}_0 é a hamiltoniana do problema de Landau

$$\hat{h}_0 \psi_0 = \bar{E} \psi_0, \qquad \hat{h}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{e^2 B^2}{2m} \left(x_1 - x_0 \right)^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$
(4.10)

As soluções $\psi_n(x_1, s)$ são separáveis na forma

$$\psi_n(x_1, s) = \psi_{0n}(x_1)\chi_s \tag{4.11}$$

em que $S_3\chi_s = s\chi_s e^1$

$$\psi_{0n} = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \left(\frac{|e|B}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \qquad (4.12)$$

 $^{{}^1\}chi_s$ descreve a projeção do spin ao longo do campo magnético.

em que $H_n(\xi)$ representam os polinômios de Hermite² e $\xi = \sqrt{|e|B}(x - \frac{p_2}{eB})$. Os autovalores são dados por

$$\bar{E}_{0n,s} = \frac{|e|B}{m}(n+\frac{1}{2}) - \frac{ges}{2m}B.$$
(4.13)

Em particular, para um elétron, desprezando as correções radioativas, g = 2, e = -|e|, e o resultado $\overline{E}_0 = \frac{|e|B}{m}(n + \frac{1}{2} + s)$, mostra que o nível de energia com um dado n e $s = \frac{1}{2}$ é degenerado com o nível n + 1 e $s = -\frac{1}{2}$. Dessa forma, vamos analisar as seguintes condições:

1. Os níveis de energia não são degenerados ($g \neq 2$). Nesta situação podemos usar a teoria de perturbação não-degenerada para computar a correção dominante para \overline{E}_0 . Contudo, a correção de primeira ordem é

$$\bar{E}_{0,ns}^{(1)} = \int dx \left(\psi_{0,ns}^{\dagger} \hat{h}_{int} \psi_{0,ns}\right) = 0$$
(4.14)

pois, $\chi_s^{\dagger} \sigma_1 \chi_s = 0$, (s = s'). Logo, devemos examinar a fórmula de perturbação em segunda ordem

$$\bar{E}_{0n,s}^{(2)} = \sum_{k,s' \neq n,s} \frac{|\hat{h}_{int(k,s';n,s)}|^2}{E_{n,s}^{(0)} - E_{k,s'}^{(0)}}.$$
(4.15)

Agora, para $s' \neq s$, após algumas linhas de cálculo, temos:

$$\hat{h}_{int(k,s';n,s)} = \theta \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{(|e|B)^{3/2}}{2m} \left[\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} \delta_{k,n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}} \delta_{k,n-1} \right) \right], \quad (4.16)$$

em que $\hat{h}_{int(n,s';n,s)} = \hat{h}_{int(k,s;n,s)} = 0$. Dessa forma, os elementos de matriz se anulam para k = n e $s' \neq s$, bem como, para $k \neq n$ e s' = s. Portanto, a correção em segunda ordem para a energia será dada por:

²De
$$\int \Psi_{x,s}^* \Psi_{x,s} = |C|^2 \int d\xi \frac{dx}{d\xi} \psi(x_1,s)^* \psi(x_1,s) = \frac{|C|^2}{\sqrt{eB}} \int d\xi e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) = 1$$
, temos que $|C|^2 = \sqrt{\frac{eB}{\pi}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!}$.

$$\bar{E}_{n,s}^{(2)} = \sum_{k \neq n; s' \neq s} \frac{|\hat{V}_{k,s';n,s}|^2}{E_{n,s}^{(0)} - E_{k,s'}^{(0)}} = \theta^2 \frac{(|e|B)^3}{2^{n+1}(n!)^2 \cdot m \cdot 2\pi} \times \left[-\frac{1}{2\left(2|e|B + geB(s - s')\right)} + \frac{2n^2}{2|e|B - geB(s - s')} \right]$$
(4.17)

2. Os níveis de energia, fixados pela Hamiltoniana \hat{h}_0 , são degenerados (g = 2). Agora, nesta situação, temos que resolver a equação secular para \hat{h}_{int} . A solução é muito simples, pois, $\hat{h}_{int(k,s;n,s)} = 0$ e $\hat{h}_{int(n+1,-1/2;n,1/2)} = \hat{h}_{int(n,1/2;n+1,-1/2)} = \theta V$. Segue, desse modo, que a degenerescência é quebrada pela correção de primeira ordem. O nível original sendo dividido em

$$\bar{E}_{0,ns}^{(\pm)} = \bar{E}_{0,ns} \pm \theta \, |V|. \tag{4.18}$$

com $\overline{E}_{0,ns}$ dada por (4.15) e,

$$|V| = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} (n+1)!}} \frac{(|e|B)^{3/2}}{2m} \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$
(4.19)

As expressões (4.18) e (4.19) nos permitem fazer uma estimativa para o valor do parâmetro não-comutativo θ . Sendo,

$$E = E_0 + \Delta E_0 = E_0 \left(1 + \frac{\Delta E_0}{E_0} \right) \sim E_0 \left(1 + \theta \left(|e|B \right)^{1/2} \right), \tag{4.20}$$

e considerando a intensidade do campo magnético³ típica do núcleo de uma estrela de nêutrons [31], da ordem de $10^{13}G$, temos:

$$\theta \ll 10^{-20} \, cm \,, \tag{4.21}$$

em que assumimos a precisão dos resultados do efeito Hall quântico da ordem das medidas atômicas. Além disso, as duas funções de onda linearmente independentes de ordem zero, adequadas para os cálculos perturbativos, são

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{0(n,1/2)} \pm \psi_{0(n+1,-1/2)} \right]. \tag{4.22}$$

 ${}^{3}1G = 10^{4}T$, e, em unidades naturais, $B = 1 eV^{2} = 1,44.10^{-3}T$.

Conclusões.

Neste trabalho estudamos o movimento de uma partícula não-relativística no espaço N-dimensional nas situações usual, *comutativa*, bem como, na situação *não-comutativa*. Nessa dinâmica, as energias, e autofunções em alguns casos, foram calculadas por meio de uma técnica bastante poderosa, a expansão 1/N, em que N é a dimensão do espaço. Encontramos que, na situação usual, ambas, energias e autofunções, podem ser escritas como uma série em 1/N, até a ordem desejada.

Iniciamos o emprego do ferramental desenvolvido no início do Capítulo 2 no estudo do oscilador harmônico e anarmônico N-dimensional, bem como, do potencial Coulombiano. Obtivemos suas energias e autofunções na forma de uma série. No caso do Oscilador Anarmônico N-dimensional após a obtenção das energias e autofunções na situação dominante, conforme constam na literatura [13], encontramos, na situação em que $\ell \neq 0$, a contribuição para a energia em ordem sub-dominante. Verificamos, neste caso, que a energia tem uma contribuição adicional de ℓ , o momento angular da partícula.

Examinando o caso NC escrevemos como se modifica a equação de Schrödinger após a transformação (3.2) para as coordenadas e momentos. Encontramos que nesta situação surgirá na hamiltoniana o operador de momento angular L_{12} . Vimos, conforme Eq. (3.10), que o termo contendo o parâmetro NC, θ , é de ordem 1/N. Dessa forma, após a extensão dos cálculos em ordem sub-dominante de 1/N, calculamos as duas primeiras correções para a energia do estado fundamental do oscilador anarmônico não-comutativo. Apresentamos gráficos para alguns valores numéricos de ℓ e de λ , os quais sugerem uma boa convergência para pequenos valores de λ e $\ell = 0$. No entanto, para maiores valores de ℓ os resultados não são estáveis devido à existência de fatores da forma ℓ/N na expansão para o ponto de mínimo do potencial, \bar{r}_0 , conforme Eq. (3.16).

No intuito de se estudar a aplicabilidade do método até então utilizado, procuramos

potenciais com maior "conteúdo físico" e resultados experimentais. Assim, direcionamos nossos estudos para o potencial Coulombiano NC. Nessa situação foi constatado que o potencial Coulombiano, conforme Eq. (3.28), tem a correção em θ bastante singular na origem. Aplicando o método da expansão 1/N, calculamos a correção para a energia do estado fundamental. Vimos que a contribuição para a energia para os termos da série independentes de θ convergem rapidamente. No entanto, a parte dependente de θ diverge completamente. Tal resultado já pode ser observado por meio da Eq. (3.45). Neste momento, os cálculos com as diferentes tentativas de mudanças de termo da ordem em que o parâmetro θ se encontrava, ou seja, por meio da mudança

$$\theta \to \frac{\theta}{k^{\tau}}; \tau = 1, 2, 3, \cdots,$$
(4.23)

não melhoraram a convergência para a série (3.45).

Vimos que a expansão 1/N não nos fornece um bom método de cálculo para este tipo de potencial. Esta divergência, no entanto, surge devido à parte da energia dependente de θ , i.e., na parte NC do potencial. Introduzimos então uma modificação no potencial e o devido ajuste na posição do parâmetro θ na ordem da expansão. Esse novo potencial concorda com o Coulombiano para grandes distâncias. Com isto, e as devidas redefinições das coordenadas, foi calculada a energia do estado fundamental para este potencial modificado. Foram feitos os devidos ajustes das constantes $\alpha \in \beta$ para encontrarmos o melhor resultado de convergência.

No tratamento perturbativo usual as divergências que envolvem o potencial Coulombiano não ocorrem [32]. Isto se deve ao fato que nessa situação em geral se está interessado em integrais da forma $\int \psi^* V(r) \psi$, as quais são regulares, apesar da singularidade do potencial na origem, pois, exceto para a onda *s* a função de onda se anula na origem.

Concluímos que, a expansão 1/N pode ser realmente aplicada em sistemas da MQNC, mas, ela é mais sensível a singularidades do potencial que a expansão perturbativa usual.

Todo esse desenvolvimento acima mencionado envolveu a chamada não-comutatividade canônica (θ constante). No entanto, conforme sabemos, não é razoável assumir sempre esta condição para a não-comutatividade, principalmente em regiões de campos gravitacionais intensos, como buracos-negros. Ela pode depender do ponto do espaço-tempo [33]. Assim, a não-comutatividade pode ser dependente da posição (gerador de transformação de Lorentz) ou de um outro operador. Dessa forma, numa segunda e última etapa, estudamos a não-comutatividade dependente do spin. Usando a equação de Pauli foram calculadas correções para a energia, até a segunda-ordem, para uma partícula num campo magnético constante. A hamiltoniana não-perturbada apresenta uma degenerescência contínua e, no caso do elétron (g = 2), uma degenerescência discreta [34]. A degenerescência contína persiste e a discreta é modificada pela perturbação, como mostramos na tese. Todos estes estudos não descartam a possibilidade de suas aplicações às situações relativísticas. No problema relativístico, com $\theta = 0$, ocorrem as mesmas degenerescências do não-relativístico, e essa degenerescência pode ser tanto contínua como discreta (no caso do elétron) [35].

Uma extensão natural deste trabalho é a análise da situação relativística, a qual se encontra presentemente em desenvolvimento. Outras propriedades que também merecem estudos é a construção da teoria de campos correspondente, cálculo dos propagadores e efeitos das correções radioativas.

Desde a descoberta de estruturas não-comutativas em teoria de cordas houve um crescente interesse no estudo das propriedades dos espaços NC. A mecânica quântica não-comutativa vem contribuindo atualmente com uma importante parcela de trabalhos sobre a não-comutatividade em suas mais diferentes formas de abordagem e estudo.

Apêndice A

O Laplaciano em N dimensões

O Laplaciano em N dimensões pode ser escrito [36] em termos das coordenadas cartesianas x_1, x_2, \ldots, x_N , ou seja

$$\nabla_N^2 = \sum_{i=1}^N \partial^2 / \partial x_i^2. \tag{A.1}$$

Vamos definir as coordenadas polares N-dimensional como

$$x_{1} = r \cos \theta_{1} \sin \theta_{2} \sin \theta_{3} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$x_{2} = r \sin \theta_{1} \sin \theta_{2} \sin \theta_{3} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$x_{3} = r \cos \theta_{2} \sin \theta_{3} \sin \theta_{4} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$x_{4} = r \cos \theta_{3} \sin \theta_{4} \sin \theta_{5} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$\vdots$$

$$x_{i} = r \cos \theta_{i-1} \sin \theta_{i} \sin \theta_{i+1} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$\vdots$$

$$x_{N-1} = r \cos \theta_{N-2} \sin \theta_{N-1},$$

$$x_{N} = r \cos \theta_{N-1}.$$
(A.2)

a qual vale para $N = 3, 4, 5, \ldots$ Para N = 2 temos $x_1 = r \cos \theta_1, x_2 = r \sin \theta_1$. Temos ainda para as variáveis os seguintes limites $0 \le r \le \infty, 0 \le \theta_1 \le 2\pi, 0 \le \theta_i \le \pi$ para $j=2,3,\ldots,N-1.$ A soma dos quadrados da Eq. (A.2) é

$$r^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2,$$
 (A.3)

o raio de uma esfera N-dimensional (hiperesfera). O Laplaciano pode ainda ser escrito em termos de coordenadas polares como

$$\nabla_N^2 = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\frac{h}{h_k^2} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right), \tag{A.4}$$

onde $\theta_0 = r$, $h = \prod_{i=0}^{N-1} h_j$, e

$$h_k^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial x_i}{\partial \theta_k}\right)^2. \tag{A.5}$$

 com

$$h_{0} = 1,$$

$$h_{1} = r \sin \theta_{2} \sin \theta_{3} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$h_{2} = r \sin \theta_{3} \sin \theta_{4} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$\vdots$$

$$h_{k} = r \sin \theta_{k+1} \sin_{k+2} \dots \sin \theta_{N-1},$$

$$\vdots$$

$$h_{N-2} = r \sin \theta_{N-1},$$

$$h_{N-1} = r,$$

$$h = r^{N-1} \sin \theta_{2} \sin^{2} \theta_{3} \sin^{2} \theta_{4} \dots \sin^{N-1} \theta_{k} \dots \sin^{N-2} \theta_{N-1},$$
(A.6)

para $n = 3, 4, 5, \ldots$; temos ainda $h_0 = 1, h_1 = r$ para N = 2. A substituição dos resultados da Eq. (A.6) na Eq. (A.4) fornecem uma outra forma para o laplaciano

$$\nabla_{N}^{2} = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{\sin^{2} \theta_{k+1} \sin^{2} \theta_{k+2} \dots \sin^{2} \theta_{N-1}} \times \left\{ \frac{1}{\sin^{2} k - 1} \frac{\partial}{\partial \theta_{k}} \sin^{k-1} \theta_{k} \frac{\partial}{\partial \theta_{k}} \right\} \right\}.$$
(A.7)

É possível generalizar o operador momento angular; em analogia com o laplaciano tridimensional, ou seja:

$$L_{1}^{2} = -\frac{\partial^{2}}{\partial\theta_{1}^{2}},$$

$$L_{2}^{2} = -\left\{\frac{1}{\sin\theta_{2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{2}}\sin\theta_{2}\frac{\partial}{\partial\theta_{2}} - \frac{L_{1}^{2}}{\sin^{2}\theta_{2}}\right\},$$

$$\vdots$$

$$L_{k}^{2} = -\left\{\frac{1}{\sin^{k-1}\theta_{k}}\frac{\partial}{\partial\theta_{k}}\sin^{k-1}\theta_{k}\frac{\partial}{\partial\theta_{k}} - \frac{L_{k-1}^{2}}{\sin^{2}\theta_{k}}\right\},$$

$$\vdots$$

$$L_{N-1}^{2} = -\left\{\frac{1}{\sin^{N-2}\theta_{N-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{N-1}}\sin^{N-2}\theta_{N-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{N-1}} - \frac{L_{N-2}^{2}}{\sin^{2}\theta_{N-1}}\right\}.$$
(A.8)

Tomando o resultado acima para L^2_{N-1} e comparando-o com o último termo da Eq. (A.7) chegaremos a expressão para o laplaciano, conforme Eq. (2.2)

$$\nabla_N^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} L_{N-1}^2$$
(A.9)

onde fizemos a identificação $\hat{\Lambda}^2(N) = L^2_{N-1}$

A parte radial do operador de Laplace em (2.2).

Para determinarmos a parte radial do Laplaciano para dimensões arbitrárias vamos aplicar o Δ numa função, f(r), que dependa somente da coordenada r,

$$\Delta f(r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f(r), \qquad (A.10)$$

e teremos o seguinte resultado:

$$\Delta f(r) = \frac{(N-1)}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}.$$
 (A.11)

Este resultado explica a parte radial do operador de Laplace, Δ_r , em (2.2).

A parte angular do operador de Laplace em (2.2)

Para obtermos a equação

$$\hat{\Lambda}^{2}(N)Y(\Omega_{N}) = \ell_{N-1}(\ell_{N-1} + N - 2)Y(\Omega_{N}), N > 1$$
(A.12)

precisamos entender o conceito de polinônimo homogêneo e harmônico de ordem N. Consideremos um espaço Euclidiano N-dimensional com coordenadas cartesians x_1, x_2, \ldots, x_N . Neste espaço, podemos definir um hiperraio r por meio da equação:

$$r^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$
 (A.13)

e o operador de Laplace generalizado ∇^2 , como em (2.2), definido por

$$\nabla^2 = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{A.14}$$

Um polinômio homogêneo de ordem n nas coordenadas x_1, x_2, \ldots, x_N é definido como sendo um polinômio da forma:

$$f_n = Ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_N^{n_N} + Bx_1^{n'_1}x_2^{n'_2}\dots x_N^{n'_N} + \dots$$
(A.15)

onde A, B, C, etc são constantes, e

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n \tag{A.16}$$

$$n'_1 + n'_2 + \ldots + n'_N = n$$
 etc. (A.17)

e os números $n_1, \ldots, n_N, n'_1, \ldots, n'_N$, etc. são inteiros positivos ou zero. Qualquer polinômio homogêneo de orde n tem a interessante propriedade

$$\sum_{j=1}^{N} = x_j \frac{\partial f_n}{\partial x_j} = n f_n \tag{A.18}$$

Além de um polinômio homogêneo podemos definir um polinômio harmônico. Um polinômio harmônico é um polinômio homogêneo o qual é também uma solução da equação de Laplace generalizada. Ele tem a forma

$$h_n = A x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_N^{n_N} + + B x_1^{n'_1} x_2^{n'_2} \dots x_N^{n'_N} + \dots$$
(A.19)

onde os n_j 's satisfazem (A.16) e (A.17), e além disso $\Delta h_n = 0$. Iremos mostrar que se h_ℓ é um polinômio harmônico então

$$[\hat{\Lambda}^2 - \ell(\ell + N - 2)]r^{-\ell}h_{\ell} = 0$$
(A.20)

Em outras palavras vamos mostrar que $r^{-\ell}h_{\ell}$ é uma autofunção do momento angular generalizado $\hat{\Lambda}^2$ com autovalor $\ell(\ell + N - 2)$. É necessário notar que

$$r^{-\ell}h_{\ell} \equiv Y_{\ell}(\Omega) \tag{A.21}$$

é uma função angular pura, independente do hiperraio, tal que

$$\frac{\partial}{\partial r}Y_{\ell}(\Omega) = 0 \tag{A.22}$$

Então, como $h_{\ell} = r^{\ell} Y_{\ell}(\Omega)$ e $\Delta h_{\ell} = 0$, temos:

$$\left[\frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\Lambda}^2}{r^2}\right]r^{\ell}Y_{\ell}(\Omega) = 0$$
(A.23)

ou seja,

$$r^{\ell-2}\hat{\Lambda}^{2}Y_{\ell}(\Omega) = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r} \Big[\ell r^{\ell+N-2}\Big]Y_{\ell}(\Omega)$$

$$= \frac{\ell(\ell+N-2)}{r^{N-1}}r^{\ell+N-3}Y_{\ell}(\Omega)$$

$$= \ell(\ell+N-2)r^{\ell-2}Y_{\ell}(\Omega)$$
(A.24)

Portanto,

$$\hat{\Lambda}^2 Y_\ell(\Omega) = \ell(\ell + N - 2) Y_\ell(\Omega).$$
(A.25)

Esta equação mostra como atua o operador momento angular generalizado numa função $Y_{\ell}(\Omega).$

Apêndice B

Oscilador Anarmônico - detalhes de cálculo.

1. A mudança na situação comutativa.

Para a Hamiltoniana do oscilador anarmônico, conforme [13], são feitas as seguintes mudanças

$$\frac{m_0^2}{\omega^2} = 1 - 2\lambda \tag{B.1}$$

е

$$\lambda = \frac{g}{\omega^3} \tag{B.2}$$

Na situação **comutativa** escrevemos os parâmetros m_0 e g em termos de λ e ω , e ainda, $x_i \to x_i/\sqrt{\omega}$. Tal mudança produz um fator ω global ("overall") multiplicando a Hamiltoniana, ou seja, teremos

$$\tilde{H} = \frac{H}{\omega} \tag{B.3}$$

Dessa forma teremos a eq. de Schrödinger radial

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} + V(r)\right]R(r) = ER(r)$$
(B.4)

onde V(r) agora é escrito em termos do novo parâmetro λ :

$$V(r) = \frac{1-2\lambda}{2}r^2 + \frac{\lambda}{N}r^4.$$
(B.5)

2. A mudança na situação não-comutativa.

Na situação não-comutativa, contudo, é preciso ainda fazer o seguinte "shift" no parâmetro não-comutativo

$$\theta \to \frac{\theta}{\omega}$$
 (B.6)

Desse modo, após esta mudança, mesmo não desprezando os termos de ordem θ^2 , θ^3 , etc, o fator ω "overall" continua aparecendo corretamente. No próprio "shift" (3.2) das coordenadas podemos verificar o resultado dessa mudança.

$$x_i \to x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j \tag{B.7}$$

Fazendo agora as mudanças $x_i \to x_i/\sqrt{\omega} \in \theta \to \theta/\omega$, a Eq. (B.7) torna-se:

$$x_{i} \rightarrow \frac{x_{i}}{\sqrt{\omega}} - \frac{\theta}{2\omega} \epsilon_{ij}(-i)\sqrt{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{j}} = \frac{x_{i}}{\sqrt{\omega}} - \frac{\theta}{2\sqrt{\omega}} \epsilon_{ij}(-i) \frac{\partial}{\partial x_{j}} = \frac{x_{i}}{\sqrt{\omega}} - \frac{\theta_{ij}}{2\sqrt{\omega}} p_{j}$$
(B.8)

Analisemos como fica cada termo da Hamiltoniana não-comutativa (3.27).

$$-\frac{1}{2}\nabla_N^2 \to -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d(d\sqrt{\omega})^2} = \omega\frac{d^2}{dr^2} = \omega\left(-\frac{1}{2}\nabla_N^2\right) \tag{B.9}$$

A seguir a mudança no r e no m_0 , a qual, esta última se encontra na Eq. (2.53).

$$\frac{m_0^2}{2}r^2 \to \omega^2 (1-2\lambda) \frac{1}{2} \left[\frac{r}{\sqrt{\omega}}\right]^2 = \omega (1-2\lambda)r^2 \tag{B.10}$$

Vejamos agora como fica o termo envolvendo θ . Lembremos que no produto $x_j p_\ell$ o $\sqrt{\omega}$ de um cancela o do outro, i.e., o produto independe de ω após a transformação.

$$-\frac{m_0^2}{2}\theta_{j\ell}x_jp_\ell \to -\omega^2 \frac{(1-2\lambda)}{2}\frac{\theta}{\omega}\epsilon_{j\ell}x_jp_\ell = -\omega\frac{(1-2\lambda)}{2}\theta_{j\ell}x_jp_\ell \tag{B.11}$$

Para a mudança do parâmetro g devemos recorrer à Eq. (B.3).

$$\frac{g}{N}r^4 \to \frac{\lambda\omega^3}{N} \left(\frac{r}{\sqrt{\omega}}\right)^4 = \omega \frac{\lambda r^4}{N}.$$
(B.12)

E, finalmente, para o último termo de (3.27) temos:

$$-\frac{2g}{N}r^{2}\theta_{im}x_{i}p_{m} \to -\frac{2\lambda\omega^{3}}{N}\left(\frac{r}{\sqrt{\omega}}\right)^{2}\frac{\theta}{\omega}\epsilon_{im}x_{i}p_{m} = \omega\left[-\frac{2\lambda}{N}r^{2}\theta_{im}x_{i}p_{m}\right]$$
(B.13)

As mudanças acima efetuadas reproduzem corretamente a Eq. (3.28). Implementando na Hamiltoniana acima as mudanças efetuadas na situação comutativa, conforme Eqs. (2.55) e (2.56), com $(x^2 \rightarrow r^2), x_i \rightarrow x_i/\sqrt{\omega}, L_{12} = \epsilon_{12}x_1p_2 + \epsilon_{21}x_2p_1$, e $\theta \rightarrow \theta/\omega$, teremos:

$$H = -\frac{1}{2}\nabla_N^2 + \frac{(1-2\lambda)}{2}r^2 + \frac{\lambda}{N}r^4 - \theta\left(\frac{(1-2\lambda)}{2} + \frac{2\lambda}{N}r^2\right)L_{12}$$
(B.14)

3. A parametrização sob diferentes limites.

• Caso $m^2 > 0$: Quando $m^2 > 0$ e g varia de $]0, +\infty[$ temos que a constante de acoplamento λ varia de 0 a 1/2, com ω variando de m a $(2g)^{1/3}$, pois:

• para
$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{m^2}{\omega^2} = 1 \Rightarrow \omega = m$$

- para $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{g}{\omega^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega^3 = 2g \Rightarrow \omega = (2g)^{1/3}.$
- Caso m² < 0 Poço Duplo de Potencial: No caso em que m² < 0 teremos o caso do poço duplo de potencial. Dessa forma: m²/ω² < 0 ⇒ 1 − 2λ < 0 ⇒ λ > 1/2, i.e., λ varia de]1/2, +∞[.

4. Detalhes da expansão até 2a. ordem em ϵ .

• Expansão em ordem zero de ϵ :

A expansão em ordem zero de ϵ é imediata.

$$\mathcal{O}(\epsilon^0): \qquad -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-2\lambda) + \frac{\lambda}{2} = 0$$
 (B.15)

com todos os termos do lado esquerdo da equação acima se cancelando mutuamente.

• Expansão até primeira ordem em ϵ :

Fazendo a expansão em série de Taylor do termo $(1 + \epsilon)^{-2}$ em (3.14) até a primeira ordem em ϵ , desprezando no "ansatz" para \bar{r}_0 termos de ordem ($\mathcal{O} \ge \epsilon^2$), e fazendo $\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{N}{2}}(1 + r_1\epsilon)$, temos a seguinte expressão:

$$-\frac{1}{4} + (1-2\lambda)\frac{\bar{a}^4}{4}(1-2\epsilon) + \frac{\lambda}{2}\bar{a}^6(1-2\epsilon) - \frac{4\theta\lambda}{N^3}m\frac{N^2}{4}(1-2\epsilon)\bar{a}^4 = 0$$
(B.16)

Escrevendo na equação acima as respectivas expansões de \bar{a}^4 e \bar{a}^6 , até a primeira ordem em ϵ teremos o seguinte resultado:

$$\mathcal{O}(\epsilon^{1}): \qquad (1-2\lambda)\frac{1}{4}(-2+4r_{1}) + \frac{\lambda}{2}(-2+6r_{1}) - \frac{\theta\lambda}{2\ell}m = 0 \qquad (B.17)$$

Da equação acima teremos para r_1 :

$$r_1 = \frac{\ell + \theta \lambda m}{2\ell} \frac{1}{1+\lambda} \tag{B.18}$$

Dessa forma, o ponto de mínimo do potencial \bar{r}_0 , até a primeira ordem em 1/N e levando em conta a não-comutatividade das coordenadas é:

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{N}{2}} \left[1 + \frac{\ell + \theta \lambda m}{2\ell} \frac{1}{1+\lambda} \epsilon \right]$$
(B.19)

• Expansão até segunda ordem em ϵ :

Analogamente, fazendo a expansão em série de Taylor do termo $(1 + \epsilon)^{-2}$ em (3.14) até a segunda ordem em ϵ e desprezendo no "ansatz" para \bar{r}_0 termos de ordem ($\mathcal{O} \ge \epsilon^3$) teremos:

$$(1 - 2\lambda)\frac{1}{4} \left[1 + 4r_1\epsilon + (4r_2 + 6r_1^2)\epsilon^2 \right] (1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2) + \frac{\lambda}{2} \left[1 + 6r_1\epsilon + (6r_2 + 15r_1^2)\epsilon^2 \right] \times (1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2) - \frac{\theta\lambda}{2\ell} m\epsilon \left[1 + 4r_1\epsilon + (4r_2 + 6r_1^2)\epsilon^2 \right] (1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2) = 0$$
(B.20)

em que

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{N}{2}} (1 + r_1 \epsilon + r_2 \epsilon^2).$$
 (B.21)

Tomando somente termos da ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ para a Eq. (B.20), ficamos com:

$$(1+\lambda)r_2 + \frac{(3+9\lambda)}{2}r_1^2 + \left(-2 - 2\lambda - \frac{2\theta\lambda m}{\ell}\right)r_1 = -\frac{3}{4} - \frac{\theta\lambda m}{\ell}$$
(B.22)

Isolando r_2 , temos:

$$r_{2} = -\frac{(3+9\lambda)}{2}r_{1}^{2} + \frac{(2\ell+2\lambda\ell-2\theta\lambda\ell)(\ell+\theta\lambda m)}{2\ell^{2}(1+\lambda)^{2}} - \frac{(3\ell+4\theta\lambda m)}{4\ell(1+\lambda)}$$
(B.23)

com r_1 dado por (B.18). Substituindo-se a Eq. (B.18) na equação acima teremos o coeficiente de ϵ^2 , ou seja:

$$r_{2} = -\frac{2m\ell\theta(1-5\lambda) - m^{2}\theta^{2}(-5+\lambda)\lambda^{2} + \ell^{2}[-1+\lambda(-5+2\lambda)]}{8\ell^{2}(1+\lambda)^{3}}$$
(B.24)

Os cálculos acima nos permitem escrever \bar{r}_0 até a segunda ordem em ϵ . Podemos perceber que para ordens maiores de ϵ é aconselhável o uso dos recursos da computação algébrica.

Apêndice C

Cálculo dos coeficientes na situação sub-dominante

Os coeficientes $b_1, c_1 \in d_1$ em (2.120) podem assim ser calculados:

$$\left(1 + 2\ell \frac{1}{N}\right)^{2} \left(1 - 2\ell \frac{1}{1+\lambda} \frac{1}{N}\right) \simeq 1 + \left[4\ell - 2\ell \frac{1}{1+\lambda}\right] \frac{1}{N} + \mathcal{O}(1/N^{2}) = = 1 + 2\ell \frac{1+2\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{N} + \mathcal{O}(1/N^{2})$$
(C.1)

que, comparando com a respectiva ordem em 1/N, resulta:

$$b_1 = 2\ell \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}.\tag{C.2}$$

O segundo e terceiro termos de $W_{\epsilon}(u)$ são análogos.

$$\left(1 + \frac{1}{1+\lambda}\frac{\ell}{N} + \dots\right)^2 \simeq 1 + 2\ell \frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{N} + \mathcal{O}(1/N^2)$$
(C.3)

resulta para c_1 :

$$c_1 = 2\ell \frac{1}{1+\lambda}.\tag{C.4}$$

E para o último termo de (2.120) temos:

$$\left(1 + \frac{1}{1+\lambda}\frac{\ell}{N} + \dots\right)^4 \simeq 1 + 4\ell \frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{N} + \mathcal{O}(1/N^2)$$
(C.5)
fornecendo o seguinte resultado para d_1 :

$$d_1 = 4\ell \frac{1}{1+\lambda}.\tag{C.6}$$

Temos que para a energia,

$$\bar{\epsilon}_0 = N\bar{W}_0(1) = NW_0(1) = N\left(\frac{2-\lambda}{4}\right).$$
 (C.7)

Neste caso, a função \overline{W}_0 será igual a situação usual. Subtraindo o resultado acima de ambos os lados da equação de Riccati teremos:

$$-\frac{1}{N\bar{a}^2} \left[U' + U^2 \right] + N \left[\bar{W}_{\epsilon}(\bar{u}) - \left(\frac{2-\lambda}{4}\right) \right] + \left(\frac{3}{4}\frac{1}{N\bar{a}^2} - \frac{1+\epsilon}{\bar{a}^2}\right) \frac{1}{\bar{u}^2} = E$$
(C.8)

Escrevendo ϵ em termos de ℓ , conforme (2.101), a equação pode ser escrita como:

$$-\frac{1}{N\bar{a}^{2}}\left[U'+U^{2}\right]+N\left[\bar{W}_{\epsilon}(\bar{u})-\left(\frac{2-\lambda}{4}\right)\right]+\left[\left(\frac{3}{4}-2\ell\right)\frac{1}{N}-1\right]\frac{1}{\bar{a}^{2}\bar{u}^{2}}=\xi.$$
 (C.9)

Escrevendo na equação acima os $\bar{a}'s$ como uma série infinita, temos:

$$- \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\bar{a}_1}{N} + \frac{\bar{a}_2}{N^2} + \cdots \right) \left[U' + U^2 \right] + N \left[\bar{W}_{\epsilon}(\bar{u}) - \left(\frac{2 - \lambda}{4} \right) \right] \\ + \left[\left(\frac{3}{4} - 2\ell \right) \frac{1}{N} - 1 \right] \left(1 + \frac{\bar{a}_1}{N} + \frac{\bar{a}_2}{N^2} + \cdots \right) \frac{1}{\bar{u}^2} = \xi.$$
(C.10)

onde, conforme vimos, as grandezas com "barra" dependem do parâmetro NC, θ . Analogamente, para a função \bar{W}_{ϵ} , podemos escrever:

$$\bar{W}_{\epsilon}(\bar{u}) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\bar{b}_1}{N} + \frac{\bar{b}_2}{N^2} + \cdots \right) \frac{1}{\bar{u}^2} + \frac{1 - 2\lambda}{4} \left(1 + \frac{\bar{c}_1}{N} + \frac{\bar{c}_2}{N^2} + \cdots \right) \bar{u}^2
- \theta \lambda \left(1 + \frac{\bar{d}_1}{N} + \frac{\bar{d}_2}{N^2} + \cdots \right) + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{\bar{e}_1}{N} + \frac{\bar{e}_2}{N^2} + \cdots \right) \bar{u}^4$$
(C.11)

Comparando os coeficientes de mesma ordem $\mathcal{O}(1/N)$, temos que:

$$\bar{a}_1 = -\frac{2(\ell + \theta\lambda m)}{1 + \lambda} \tag{C.12}$$

É imediato verificar que $\bar{a}_1 \rightarrow a_1$ quando $\theta \rightarrow 0$. Podemos, desse modo, calcular todos os coeficientes $\bar{b}_1, \bar{c}_1, etc$, que aparecem em (C.11) ordem a ordem em 1/N. Vamos fazê-lo separadamente.

• Primeiro termo de $\bar{W}_{\epsilon}(\bar{u})$

$$\frac{1}{4}\frac{(1+\epsilon)^2}{\bar{a}^2\bar{u}^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2\ell}{N}\right)^2\left(1-\frac{2(\ell+\theta\lambda m)}{(1+\lambda)N}\right)\frac{1}{\bar{u}^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{4\ell}{N}\right)\left(1-\frac{2(\ell+\theta\lambda m)}{(1+\lambda)N}\right)\frac{1}{\bar{u}^2} = \frac{1}{4}\left[1+\frac{2(\ell-2\ell\lambda-m\theta\lambda)}{N(1+\lambda)}\right]\frac{1}{\bar{u}^2}$$
(C.13)

Comparando com a Eq. (C.11) temos:

$$\bar{b}_1 = \frac{2(\ell + 2\ell\lambda - m\theta\lambda)}{(1+\lambda)} \tag{C.14}$$

• Segundo termo de $\overline{W}_{\epsilon}(\overline{u})$

$$\frac{1-2\lambda}{2}\frac{\bar{a}^2\bar{u}^2}{2} = \frac{1-2\lambda}{4} \left(1 + \frac{2(\ell+\theta\lambda m)}{N(1+\lambda)}\right)\bar{u}^2$$
(C.15)

e

$$\bar{c}_1 = \frac{2(\ell + \theta \lambda m)}{1 + \lambda} \tag{C.16}$$

• Terceiro termo de $\bar{W}_{\epsilon}(\bar{u})$ até $\mathcal{O}(1/N)$ é

$$-\frac{\theta\lambda m\epsilon}{2\ell}\frac{\bar{a}^2\bar{u}^2}{2} = -\frac{\theta\lambda m}{N}\Big(1 + \frac{\ell + \theta\lambda m}{N(1+\lambda)}\Big)^2\bar{u}^2 = -\frac{\theta\lambda m}{N}\Big(1 + \frac{2(\ell + \theta\lambda m)}{N(1+\lambda)}\Big)\bar{u}^2 = -\theta\lambda m \quad (C.17)$$

• Quarto termo de $\overline{W}_{\epsilon}(\overline{u})$:

$$\frac{\lambda}{4}\bar{a}^{4}\bar{u}^{4} = \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{4(\ell + \theta\lambda m)}{N(1+\lambda)}\right)\bar{u}^{4} \tag{C.18}$$

cuja comparação com

$$\frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{\bar{e}_1}{N} + \frac{\bar{e}_2}{N} + \dots \right) \bar{u}^4 \tag{C.19}$$

teremos

$$\bar{e}_1 = \frac{4(\ell + \theta \lambda m)}{1 + \lambda}.$$
(C.20)

Referências Bibliográficas

- [1] N. Seiberg, E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999), hep-th/9908142.
- [2] H. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 1947.
- [3] R. Jackiw, "Physical Instances of Noncommuting Coordinates", Nucl. Phys. B Proc. Suppl., vol. 108, 30-36 (2002), arXiv:hep-th/0110057.
- [4] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73, 977, (2002), hep-th/010604;
 R. J. Szabo, Phy.Rept. 378, 207-299, (2003), hep-th/0109162; M. Gomes, Proceedings da XI Escola de Verão Jorge André Swieca, Partículas e Campos; H. O. Girotti, hep-th 0301237.
- [5] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. 172, 187 1995.
- [6] I. Mocioiu, M. Popelov e R. Roibar, hep-ph/0005191; S. M. Carroll, J. Harvey, V. A. Kostelecky, D. D. Lane e T.Okamoto, hep-th/0105082; M. Chaichian, M. Sheik-Jabbari e A. Tureanu, hep-th/0010175; J. Gamboa, M. Loewe, F. Méndez e J. C. Rojas, hep-th/0104224, Mod. Phys. Lett. A 16, 2075-2078, (2001).
- [7] Ferrari A.F., Gomes M., Stechhahn C.A., Phys. Rev. D 76, 085008, (2007).
- [8] J. Gomis e T. Mehen "Space-Time Noncommutative Field Theories and Unitarity", Nucl. Phys. B 591, 265 2000 - hep-th/0005129.
- [9] J. Gamboa, M. Loewe, and J. C. Rojas, Phys. Rev. D 64, 067901 (2001); J. Gamboa,
 M. Loewe, F. Mendez e J. C. Rojas, Int. J. Mod. Phys. A 17, 2555-2566, (2002);

B. Muthukumar, P. Mitra, Phys. Rev. D 66, 027701 (2002); T. C. Adorno, M. C.
Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu, Phys. Letters B, 682, 235-239, (2009); F. S. Bemfica, H. O. Girotti, Phys. Rev. D 79 125024 (2009), Braz. J. Phys. 38, 227 (2008).

- [10] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B** 72, 461-473, (1974).
- [11] E. Witten, Commun. Math. Phys. 172, 187, (1995); L. Saelen, R. Nepstad, J. P. Hansen e L. B. Madsen, J. Phys. A Math. Theor 40, 1097-1104, (2007); T. Imbo, A. Pagnamenta, U. Sukhatme, Phys. Rev. D 29,1669, (1984).
- [12] A. K. Chattopadhyay, Phys. Lett. A 357, 108-111, (2006).
- [13] Koudinov A.V., Smondyrev M.A., "1/N-Expansion for the anharmonic oscillator" (1981).
- [14] Tese de mestrado de Carlos Alberto Stechhahn da Silva, "Efeito Aharonov-Bohm não-comutativo para partículas relativísticas de spin 1/2", IFUSP 2005.
- [15] A. F. Ferrari, M. Gomes, C. A. Stechhahn, Phys. Rev. **D** 82, 045009, (2010).
- [16] M. Gomes e V. G. Kupriyanov, Phys. Rev. **D** 79, 125011, (2009).
- [17] M. Gomes e V. G. Kupriyanov, J. Phys. A Math. Theor. 43, 285301, (2010).
- [18] J. Polchinski, String Theory, University Press, Cambridge, 1998; R. Szabo, "An introduction to String Theory and D-Brane Dynamics", Imperial College Press, London, 2004.
- [19] H. Falomir, J. Gamboa, J. López-Sarrión, F. Mendez e P. A. G. Pisani, Phys. Lett.
 B 680, 384-386, (2009).
- [20] J. Gamboa, F. Méndez, "Bose-Einstein condensation theory for any integer spin: approach based in noncommutative quantum mechanics", arXiv:0912.2645 [hep-th];

A. Das, H. Falomir, M. Nieto, J. Gamboa, F. Mendez, Phys. Rev. D 84, 045002 (2011).

- [21] L. D. Mlodinow, M. P. Shatz, J. Math. Phys. 25, 4, April 1984.
- [22] E. Witten, "1/N Expansion in atomic and Particle Physics", "Recent Developments in Gauge Theories", 't Hooft ed., Plenum, New York, 1979.
- [23] U. Sukhatme, T. Imbo, Phys. Rev. D 28 Number 2, 15 JULY 1983.
- [24] Morales D.A., Parra-Mejías, Z., Can. J. Phys. 77, 863-871, (1999).
- [25] N. E. J. Bjerrum-Bohr, J. Math. Phys. (N.Y.) 41, 2515, (2000).
- [26] Esta equação transcendental poderia ser resolvida por métodos numéricos. Mas, o método que estamos usando, a expansão 1/N, não é o mais recomendado para o cálculo de valores numéricos. É claro das equações (2.20) e (2.21), em uma dada ordem em 1/k, que a correção para a função de onda $U^{(n+1)}$ é uma função possuindo um potencial com singularidade do tipo 0/0 em u = 1. Desse modo, portanto, é muito difícil calcular numericamente essas funções em u = 1.
- [27] S. Kalara, "1/N Expansion In Quantum Mechanics: Formalism And Applications," Rochester Preprint COO-3065-323, 1982.
- [28] A. Das, H. Falomir, M. Nieto, J. Gamboa e F. Mendez, arXiv:1105.1800.
- [29] A. Das, J. Gamboa, F. Méndez e F. Torres, Phys. Lett. A 375, 1756, (2011).
- [30] M. Gomes, V. G. Kupriyanov e A. J. da Silva, Phys. Rev. **D** 81, 085024, (2010).
- [31] K. Bhattacharya, arXiv:0705.4275v2.
- [32] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu, Phys. Letters B, 682, 235-239, (2009); M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. 86, 2716 (2001).

- [33] R. J. Szabo, Class. Quant. Grav. 23 (2006) R199-R242.
- [34] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Mecanique Quantique, pp 496, Editions Mir (1966).
- [35] C. Itzykson, I. Zuber, "Quantum Field Theory" Dover Publication (2006).
- [36] J. D. Louck, Journal of Molecular Spectroscopy 4, 298-333 (1960).