Universidade de São Paulo Instituto de Física

Efeitos da aperiodicidade sobre as transições quânticas em cadeias XY

Fleury José de Oliveira Filho Prof. Dr. André de Pinho Vieira

> Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para obtenção do título de Mestre em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. André de Pinho Vieira – IF/USP Prof. Silvio Roberto de Azevedo Salinas – IF/USP Prof. José Abel Hoyos Neto – IFSC/USP

> São Paulo 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Oliveira Filho, Fleury José de

Efeitos da aperiodicidade sobre as transições quânticas em cadeias XY. – São Paulo, 2011.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física – Depto. de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. André de Pinho Vieira

Área de Concentração: Mecânica estatística de sistemas desordenados

Unitermos: 1. Mecânica Estatística Quântica; 2. Modelo XY;3. Sistemas Aperiódicos; 4. Transições de Fase Quânticas.

USP/IF/SBI-028/2011

Aos meus queridos pais, que sempre me apoiaram, à Andréa Neiva, pela constante ajuda e motivação.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Sílvio Roberto de Azevedo Salinas, que me apresentou o método de renormalização no espaço real de Ma, Dasgupta e Hu, base teórica principal deste trabalho.

Ao Prof. Dr. André de Pinho Vieira, que teve muita paciência e trabalho ao orientar este aluno que se encontrava perdido e que participou ativamente durante toda a execução deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Antônio Fernando R. de Toledo Piza, que muito me auxiliou na aplicação da teoria de perturbação para uma configuração com 4 spins.

Ao Prof. Dr. Valerio Kurak, que muito me ensinou.

A Roberto Lopes Parra, que muito me auxiliou na parte computacional e numérica deste trabalho.

A Paulo Henrique Flose Reimberg pelo sem número de vezes em que me auxiliou no desenvolvimento deste trabalho com suas perguntas intrigantes.

Ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, onde me graduei e realizei o programa de pós graduação em nível de mestrado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela concessão parcial de bolsas de mestrado e pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

"Noite grande...

Apicum da beira dágua está gostoso Hoje tem céu que não acaba mais

esticado até aquele fundo

Bom se eu pudesse empurrar horizontes ver terras com florestas decotadas numa noite enfeitada de lua com cachos de estrelas

- Estou de mussangulá

Dentro do mato árvores niqueladas silêncio fez tincuã

Grilos dão aviso Respondem lá adiante

Sapos com dor-de-garganta escutam em voz alta Céu parece uma geometria em ponto grande

- Há tanta coisa que a gente não entende, compadre
- O que é que haverá lá atrás das estrelas? "

Raul Bopp Cobra Norato

Resumo

Neste trabalho realizo uma adaptação do método de Ma, Dasgupta e Hu para o estudo e caracterização das transições de fase quânticas, induzidas por um campo transverso, em cadeias XY de spins 1/2, unidimensionais e aperiódicas, no espírito da adaptação correspondente para cadeias XXZ. O presente trabalho determina de forma analítica uma série de expoentes críticos associados às transições ferroparamagnéticas do sistema, e dá pistas quanto à natureza das estruturas presentes no estado fundamental. Os resultados são então testados pelo emprego da técnica de férmions livres, da análise de *finite size* scaling e, no limite de Ising, de resultados extraídos do mapeamento do problema em uma caminhada aleatória.

Palavras-chaves: mecânica estatística quântica, modelo XY, sistemas aperiódicos, transições de fase quânticas.

Abstract

We employ an adaptation of the Ma, Dasgupta, Hu method in order to analyze the quantum phase transition, induced by a transversal magnetic field, at spin-1/2 aperiodic XY chains, in analogy to the corresponding adaptation for XXZ chains. We derive analytical expressions for some critical exponents related with the ferro-paramagnetic transitions, and shed light onto the nature of the ground state structures. The main results obtained by this approach were tested by the free-fermion method, finite-size scaling analyses and, at the Ising limit of the model, by using results derived from a mapping to a random-walk problem.

Keywords: quantum statistical physics, XY model, aperiodic systems, quantum phase transitions.

Sumário

D	edicatória	i		
Agradecimentos				
Epígrafe				
Re	esumo	iv		
Abstract				
Su	mário	\mathbf{vi}		
1	Introdução	1		
3	Prolegômenos 2.1 Cadeias aperiódicas e suas propriedades	5 5 7 9 10 11 12 15 17 17 18 20 21 23		
4	3.2.1 Escolha das regras de substituição Resultados 4.1 Resultados formais para o método de MDH 4.2 Resultados numéricos 4.2.1 Escalonamento dinâmico 4.2.2 Magnetização de superfície e o expoente ν 4.2.3 Magnetização de bulk e o expoente β	24 26 35 36 40 42		
5	Conclusão	47		

vi

Apêndices				
\mathbf{A}	Cálo	culos semi-explícitos de renormalização	50	
	A.1	Definição do hamiltoniano	50	
	A.2	1+2 spins	50	
	A.3	2+2 spins	53	
		A.3.1 $\gamma \leq 1$	55	
		A.3.2 Acoplamento 3 spins	57	
	A.4	$3+2$ spins \ldots	62	
Referências Bibliográficas				

Capítulo 1

Introdução

Talvez o modelo mais simples a exibir transições quânticas seja o modelo XY, introduzido por Lieb, Schultz e Mattis [1], que na presença de um campo transverso é descrito pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \left[(1+\gamma_j) \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\gamma_j) \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h_j \sigma_j^z , \qquad (1.1)$$

com os operadores de spin atuando no espaço de Hilbert $\bigotimes_{j=1}^{N} \mathbb{C}^2$. Neste modelo os operadores locais de spins são definidos como

$$\sigma_j^{x,y,z} = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I}}_{j-1 \text{ fatores}} \otimes \sigma^{x,y,z} \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}}_{N-j \text{ fatores}}$$
(1.2)

em que I é a identidade no espaço \mathbb{C}^2 , $\sigma^{x,y,z}$ são os operadores de Pauli de spin 1/2, J_j os acoplamentos, h_j os distintos campos transversos e γ_j as anisotropias entre as componentes dos eixos $x \in y$ dos acoplamentos. Note que campos, acoplamentos e anisotropias não são necessariamente uniformes.

É importante mencionar que o estudo deste modelo tem interesse não apenas teórico mas também experimental, uma vez que experimentos de espalhamento quase elástico de nêutrons evidenciam que o material Cs_2CoCl_4 comporta-se como uma rede uniforme XY unidimensional antiferromagnética de spin 1/2 [2–4]. Embora não haja realizações conhecidas de cadeias XY aperiódicas em materiais reais, testes experimentais dos resultados que relatamos nesta dissertação poderiam em princípio ser obtidos em sistemas de átomos frios em redes ópticas [5].

No limite uniforme $(J_j \equiv J, \gamma_j \equiv \gamma, h_j \equiv h > 0)$, o modelo exibe uma transição quântica¹

¹Transições de fase quânticas são transições de fase que ocorrem a temperatura nula induzidas pela variação de algum outro parâmetro do sistema. Para a versão uniforme do modelo estudado neste trabalho, equação 1.1 com $\gamma_j = \gamma$, $h_j = h$, $J_j = J$, duas transições de fase quânticas são possíveis, a saber: a transição ferro-paramagnética, induzida pela variação do campo h, e a transição XY do sistema ferromagnético, a campo nulo, induzida pela variação da anisotropia γ .

em h = J, entre uma fase dominada pelo acoplamento J e uma fase paramagnética, dominada pelo campo transverso h, que induz as flutuações. No caso de anisotropia nula ($\gamma = 0$) o modelo reduz-se à cadeia XX sob ação de campo transverso [6], e para anisotropias finitas o sistema pode se ordenar ferromagneticamente, caso h < J, com spins alinhados na direção x ou y para γ maior ou menor que zero, respectivamente. No limite de $|\gamma| = 1$, o modelo se reduz a uma cadeia de Ising na presença de campo transverso [7,8], correspondente ao limite anisotrópico extremo do modelo de Ising bidimensional. De fato, para qualquer $\gamma \neq 0$, a transição quântica em h = J pertence à mesma classe de universalidade da transição térmica de Onsager.

Como regra geral, a quebra de simetria translacional em sistemas físicos provoca efeitos notáveis, que podem afetar especialmente o comportamento crítico tanto de sistemas clássicos quanto de sistemas quânticos. Versões aleatórias da cadeia XY, em que os acoplamentos e os campos são escolhidos a partir de distribuições de probabilidade independentes, exibem na criticalidade uma modificação da relação entre escalas de comprimento e de tempo, que passa a exibir um comportamento ativado, à la Arrhenius, em contraste com a lei de potência usual. Fora da criticalidade, tais sistemas podem exibir fases de Griffiths [9], nas quais algumas propriedades termodinâmicas ainda exibem comportamento singular.

Fisher, a partir de adaptações do método de grupo de renormalização no espaço real de Ma, Dasgupta e Hu [10,11], estudou os efeitos de aleatoriedade nos parâmetros do hamiltoniano 1.1 no limite de Ising, e mostrou que as transições quânticas são fundamentalmente alteradas, sendo marcadas pela distinção entre o comportamento médio e o comportamento típico do sistema [12,13]. Fisher também calculou exatamente uma série de outras propriedades do sistema, diversas das quais não são conhecidas para o sistema uniforme, como formas de escala da magnetização em função de um campo de ordenamento. Trabalhos posteriores estenderam os resultados de Fisher para anisotropias arbitrárias [14, 15] e para cadeias XXZ [16, 17].

Efeitos similares aos produzidos pela aleatoriedade podem ser obtidos a partir de acoplamentos aperiódicos determinísticos² obtidos por regras de substituição associadas a letras de um alfabeto finito [20].

Como exemplo, sejam um alfabeto de duas letras a e b e uma regra de substituição

$$\rho: \left\{ \begin{array}{l} a \quad \mapsto \quad ab ;\\ b \quad \mapsto \quad a , \end{array} \right. \tag{1.3}$$

que substitui as letras $a \in b$ pelas respectivas palavras $w_a = ab \in w_b = a$. As regras de que

 $^{^{2}}$ Essa aperiodicidade é sugerida por analogia com os quase-cristais [18,19], estruturas que exibem simetrias proibidas pela cristalografia tradicional e correspondem a projeções de redes de Bravais de dimensão elevada sobre subespaços de baixa dimensionalidade.

tratamos aqui são distributivas, ou seja,

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) \; ,$$

de modo que aplicando sucessivamente a regra acima a uma palavra inicial $w_0 = a$ obtemos

$$w_0 = a \rightarrow \rho(a) = w_1 = ab \rightarrow \rho(ab) = \rho(a)\rho(b) = w_2 = aba \rightarrow \rho(aba) = w_3 = abaab \dots$$

Após um número infinito de iteradas obtém-se a palavra infinita $w_{\infty} = abaababaabaaba...,$ palavra essa que não possui período característico [20]. Associando as letras $a \in b$ a acoplamentos $J_a \in J_b$ distintos, obtém-se uma cadeia quântica aperiódica. Note que não apenas os acoplamentos mas também os campos e as anisotropias podem ser definidos por regras de substituição.

Sequências aperiódicas diferentes podem dar origem a flutuações geométricas diferentes, quantificadas a partir de um expoente de flutuação geométrica ω . Esse é o expoente da lei de potência que descreve o crescimento das flutuações geométricas³ nos acoplamentos com o aumento no tamanho da cadeia. Um valor de ω igual a 1/2 emularia as flutuações induzidas por acoplamentos aleatórios.

No limite de Ising, resultados exatos para cadeias aperiódicas, obtidos por outras técnicas de grupo de renormalização no espaço real, válidas no ponto crítico [21,22], permitem inferir a relação entre escalas de tempo e comprimento, e mostram que sequências aperiódicas caracterizadas por um expoente de flutuação $\omega = 1/2$ produzem sobre a fase crítica efeitos análogos àqueles induzidos por aleatoriedade. Mais do que isso, confirmam a validade de um critério heurístico proposto por Luck [23] para a análise dos efeitos da aperiodicidade sobre transições de fase ferromagnéticas. Segundo tal critério, a aperiodicidade é relevante, ou seja, é capaz de alterar o comportamento crítico da cadeia de Ising quântica, desde que seja caracterizada por um expoente de flutuação $\omega > 0$. O caso marginal $\omega = 0$ pode induzir comportamento crítico não-universal, ou seja, dependente dos valores dos acoplamentos e não apenas de suas flutuações geométricas.

Fora da criticalidade, é possível mapear a cadeia de Ising quântica em uma versão aperiódica da caminhada aleatória unidimensional e daí obter o expoente crítico ν associado ao comprimento de correlação [24, 25].

Neste trabalho, adaptamos o esquema de Fisher, inspirado no método de Ma, Dasgupta e Hu, para estudar a cadeia XY em um campo transverso na presença de acoplamentos aperiódicos. Mostramos que, exceto para o caso de anisotropia nula, o comportamento crítico corresponde àquele exibido no limite de Ising. Exploramos diversas sequências aperiódicas, que induzem flutuações geométricas variando entre irrelevantes a relevantes, passando pelo

³A flutuação geométrica é definida como sendo a diferença entre o número real de ocorrência de um dada letra do alfabeto em uma palavra de um certo comprimento e o comportamento esperado caso a frequência das letras fosse sempre igual à da palavra infinita [20].

caso não-universal de flutuações geométricas marginais. Explorando as características autossimilares das sequências aperiódicas, fomos capazes de calcular analiticamente a relação de escala dinâmica (entre escalas de tempo e de comprimento) no ponto crítico, bem como estimar os expoentes críticos associados à magnetização espontânea (na fase ferromagnética) e ao comprimento de correlação.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: primeiramente o leitor irá depararse com um capítulo bastante técnico e muito formal, capítulo 2, que pode ser omitido em uma primeira leitura, visto que os principais conceitos ali encerrados são recuperados ao longo do texto. Nesse capítulo pode ser lida uma descrição de como gerar sequências aperiódicas e avaliar seus efeitos sobre o comportamento crítico de sistemas ferromagnéticos a partir do critério de Luck. Ainda nesse capítulo apresento a descrição da técnica proposta por Lieb, Schultz e Mattis para diagonalizar o hamiltoniano do modelo XY, bem como uma indicação para a implementação numérica do método.

Nos capítulos 3 e 4 apresento sucintamente o método de renormalização no espaço real adaptado ao modelo XY, seus desenvolvimentos e resultados analíticos, além de comparações com valores da literatura e testes dos resultados pela técnica de férmions livres e dos resultados para magnetização de superfície obtidos pelo método de caminhada aleatória. Um estudo mais detalhado do método de renormalização no espaço real para o modelo XY pode ser lido no apêndice A.

Este trabalho termina com a discussão dos resultados obtidos, descrita no capítulo 5.

Capítulo 2 Prolegômenos

Para facilitar a leitura deste trabalho algumas teorias necessárias, porém relevantes principalmente para a compreensão técnico-matemática do trabalho, serão apresentadas neste capítulo. As motivações físicas serão apresentadas e discutidas quando se fizerem necessárias ao longo de todo texto. O leitor é convidado a pular esse capítulo caso queira ter uma visão geral, porém menos técnica, do assunto aqui abordado.

2.1 Cadeias aperiódicas e suas propriedades

Como descrito na Introdução, capítulo 1, é possível construir um sistema aperiódico a partir de regras se substituição. Nesta seção, vamos primeiramente formalizar o processo de construção das sequências aperiódicas e quantificar suas flutuações geométricas. Em seguida, vamos analisar os efeitos da introdução dessa aperiodicidade determinística sobre o comportamento crítico de modelos ferromagnéticos. Essa análise será realizada à luz do critério heurístico de Luck, que também será apresentado nesta seção.

2.1.1 Estruturas aperiódicas

A caracterização de aperiodicidade produzida a partir de uma regra de substituição bem definida sobre um alfabeto finito de letras vem sendo estudada há alguns anos por matemáticos e, a partir do anos 1980, passou a ser também estudada por físicos, motivados pela descoberta das estruturas conhecidas como quase-cristais [18, 19]. As referências [20, 26, 27] são um bom começo para o estudo desse tipo de aperiodicidade. A discussão nesta seção inspira-se no trabalho de Pinho e Petit Lobão [20].

A aperiodicidade determinística é sugerida por analogia aos quase-cristais, estruturas obtidas a partir de projeções de redes regulares de Bravais de dimensão elevada sobre subespaços de baixa dimensionalidade. Um exemplo é mostrado na figura 2.1, em que se constrói um quase-cristal unidimensional a partir de uma operação de corte e projeção sobre uma rede quadrada, com base na definição de uma faixa que varre essa rede com uma inclinação



Figura 2.1: Cadeia de Fibonacci formada pelo processo de projeção.

irracional. As duas distâncias distintas entre átomos na cadeia projetada podem ser associadas a letras $a \in b$, e a sequência de letras resultante pode ser igualmente obtida a partir da regra de substituição de Fibonacci,¹

$$\rho: \left\{ \begin{array}{l} a \quad \mapsto \quad ab \ , \\ b \quad \mapsto \quad a \ , \end{array} \right. \tag{2.1}$$

que gera uma sequência infinita pela simples aplicação sucessiva da regra à letra a,

$$a \to \rho(a) = ab \to \rho^2(a) = \rho(ab) = \rho(a)\rho(b) = aba \to \rho^3(a) = abaab \dots$$
 (2.2)

Uma relação direta com sistemas físicos pode ser associada a essas sequências. No caso específico deste trabalho, as sequências de substituição irão determinar unicamente os valores iniciais das constantes de acoplamento entre dois sítios vizinhos de uma cadeia unidimensional de spins. Neste caso as constantes de troca entre sítios vizinhos podem assumir os valores² J_a ou J_b , conforme a letra na posição correspondente da sequência aperiódica seja a ou b. Seria igualmente possível utilizar sequências aperiódicas para definir campos ou anisotropias iniciais do sistema estudado.

 $^{^1\}mathrm{A}$ regra de Fibonacci recebe este nome uma vez que o número de letras em cada geração segue a sequência de números de Fibonacci.

²Convém neste ponto notar que para $J_a = J_b$ teríamos um sistema homogêneo. Note ainda que se pode entender o processo de criação de uma rede aperiódica como sendo a introdução de perturbações J_b em *loci* específicos, de forma a respeitar a regra de substituição, em uma rede inicial homogênea com acoplamentos puramente J_a .

No limite termodinâmico, a cadeia de Fibonacci será dada por 2.2,

$$\lim_{k \to \infty} \rho^k(a) = abaabaabaabaab \dots ,$$

e neste ponto fica a pergunta: qual será o papel da aperiodicidade nas propriedades de um sistema físico com acoplamentos assim distribuídos?

2.1.2 Caracterização formal das sequências de substituição

Antes de responder a questão levantada no final da seção anterior, algumas definições preliminares são necessárias.

Definição 2.1 A <u>matriz de substituição</u> \mathcal{M} associada a uma regra de substituição ρ no alfabeto de N letras é uma matriz $N \times N$ cujos elementos \mathbf{m}_{ij} são dados pelo número de ocorrências da letra x_i na palavra $\rho(x_j)$. Simbolicamente tem-se $\mathbf{m}_{ij} = |\rho(x_j)|_{x_i}$.

Para a regra de substituição de Fibonacci, dada na equação 2.1, tem-se a matriz de substituição

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.3}$$

Note que a regra de substituição caracteriza a matriz de substituição univocamente, embora o contrário não seja verificado, visto que ao escrever a matriz de substituição a informação da ordem em que as letras estão dispostas na palavra da regra de substituição é perdida.³ Por exemplo, ao ler a matriz de substituição 2.3 não é possível saber se $a \mapsto ab$ ou se $a \mapsto ba$.

Mesmo não caracterizando univocamente a regra de substituição, diversas propriedades geométricas da cadeia infinita podem ser obtidas a partir da matriz de substituição que caracteriza tal regra. Por exemplo, a densidade assintótica e as flutuações geométricas após n iterações da regra são propriedades importantes extraídas da matriz de substituição.

Demonstra-se facilmente por indução finita a partir da definição 2.1 que o número de ocorrências de uma certa letra x_i na palavra da enésima geração $\rho^n(x_j)$ é obtido através das entradas da matriz \mathcal{M}^n . Pode-se então definir a noção de densidade assintótica de maneira natural e intuitiva.

Definição 2.2 A <u>densidade assintótica</u> de x_i é a razão entre o número de ocorrências da letra x_i e o número de letras da palavra infinita. Simbolicamente,

$$\varrho_{\infty}^{(x_i)} = \lim_{k \to \infty} \frac{\mathbf{m}_{ij}^{(k)}}{\mathbf{m}^{(k)}} \,,$$

 $^{{}^{3}}$ É importante mencionar que a ordem das letras afeta o caráter aperiódico e a autossimilaridade da palavra infinita [20].

 $\operatorname{com} \mathfrak{m}_{ij}^{(k)} = |\rho^k(x_j)|_{x_i} e \mathfrak{m}^{(k)} = |\rho^k(x_j)|$ para qualquer x_j inicial. Aqui, $\mathfrak{m}^{(k)}$ denota o comprimento da sequência após k iterações da regra de substituição.

Mostra-se que a densidade assintótica pode ser calculada a partir do autovetor à direita, v_+ , associado ao maior autovalor λ_+ da matriz de substituição \mathcal{M} [28]. Explicitamente,

$$\varrho_{\infty}^{(x_i)} = \frac{v_+(x_i)}{\sum_j v_+(x_j)} , \qquad (2.4)$$

em que

$$\boldsymbol{v}_{+} = \begin{pmatrix} v_{+}(x_{1}) \\ v_{+}(x_{2}) \\ \vdots \\ v_{+}(x_{N}) \end{pmatrix} .$$
(2.5)

Manipulando diretamente os autovalores e autovetores da matriz \mathcal{M} , pode-se mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbf{m}^{(n)}}{\mathbf{m}^{(n-1)}} = \lambda_+ \; ,$$

ou seja, ao maior autovalor da matriz de substituição está associado, assintoticamente, o comprimento das palavras que são geradas. Poderíamos escrever então [29]

$$\mathbf{m}^{(n)} \sim \lambda_+^n \ . \tag{2.6}$$

Definição 2.3 A <u>flutuação geométrica</u> $\delta_n^{(x_i)}$ associada à letra x_i na palavra $\rho^n(x_j)$ é a diferença entre a fração de ocorrências da letra x_i após n iterações da regra de substituição e a fração correspondente na palavra infinita,

$$\delta_n^{(x_i)} = \mathbf{m}_{ij}^{(n)} - \varrho_{\infty}^{(x_i)} \mathbf{m}^{(n)} .$$
(2.7)

Com um pouco de álgebra [28], pode-se mostrar que as flutuações geométricas estão relacionadas ao segundo maior autovalor da matriz de substituição,

$$|\delta_n^{(x_i)}| \sim |\lambda_-|^n \,. \tag{2.8}$$

Combinando esse resultado com a equação 2.6, obtemos

$$|\delta_n^{(x_i)}| \sim (\mathfrak{m}^{(n)})^{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{\log|\lambda_-|}{\log\lambda_+} , \qquad (2.9)$$

definindo o expoente de flutuação geométrica ω .

Em sequências aleatórias, que obviamente não podem ser geradas por regras de substituição, as flutuações geométricas seguem a lei dos grandes números. Para uma sequência de N letras, as flutuações geométricas satisfazem

$$\delta_N \sim N^{1/2},\tag{2.10}$$

e em analogia com a equação 2.3 extraímos um expoente de flutuacao $\omega = 1/2$.

2.1.3 Critério heurístico de Harris-Luck

Em 1974, Harris [30] formula um critério para aquilatar os efeitos de aleatoriedade sobre o comportamento crítico de modelos ferromagnéticos. Sua conclusão é a de que a presença de aleatoriedade é capaz de alterar o comportamento crítico desses sistemas desde que o expoente crítico α , associado à singularidade do calor específico nas vizinhanças do ponto crítico, seja positivo.

Duas décadas mais tarde, Luck [23] estende os resultados de Harris para sistemas em que a quebra de simetria translacional é caracterizada por flutuações geométricas arbitrárias. Em particular, o novo critério de Harris-Luck é capaz de prever para quais valores do expoente de flutuação geométrica ω o comportamento crítico de sistemas ferromagnéticos é afetado pela presença de aperiodicidade determinística.

No contexto especial das transições quânticas induzidas por um campo transverso na cadeia de Ising, o critério de Harris-Luck pode ser derivado como segue. A distância à criticalidade nesse sistema pode ser definida como

$$\epsilon = \frac{h - h_c}{h_c} \,, \tag{2.11}$$

em que h_c é o campo crítico. Para um sistema uniforme, e dada uma distância à criticalidade, a escala de comprimento natural é o comprimento de correlação ξ , que satisfaz

$$\xi \sim |\epsilon|^{-\nu_0} , \qquad (2.12)$$

em que ν_0 é um expoente crítico. Perturbações geométricas caracterizadas por um expoente ω podem alterar localmente o campo crítico, e por consequência a distância local à criticalidade. Essa alteração pode ser quantificada pelas flutuações geométricas médias presentes em um subsistema de tamanho ξ ,

$$\delta \epsilon \sim \frac{\xi^{\omega}}{\xi} = \xi^{\omega - 1} \sim |\epsilon|^{(1 - \omega)\nu_0} .$$
(2.13)

Para que as perturbações geométricas não afetem o comportamento crítico, é necessário

que, para ϵ muito próximo de zero,

$$\delta \epsilon \ll |\epsilon| , \qquad (2.14)$$

o que leva à conclusão de que o expoente ω deve ser menor que um valor crítico ω_c dado por

$$\omega_c = 1 - \frac{1}{\nu_0} \,. \tag{2.15}$$

Para a cadeia de Ising em um campo transverso, $\nu_0 = 1$, de modo que $\omega_c = 0$. Espera-se, portanto, que perturbações caracterizadas por um expoente $\omega < \omega_c$ sejam irrelevantes para o comportamento crítico.⁴ Para os casos em que $\omega > \omega_c$ (como na presença de aleatoriedade descorrelacionada), as perturbações serão relevantes. Finalmente, perturbações associadas a um expoente $\omega = \omega_c$ serão marginais, podendo levar a comportamento crítico não-universal.

Caso o leitor tenha interesse, o critério de Harris-Luck pode ser derivado exatamente para cadeias unidimensionais cujas aperiodicidades sejam criadas a partir de regras de substituição [21,32] *apud* [33]. Para modelos de Ising bidimensionais aperiódicos o critério de Harris-Luck também é válido, como visto em estudos exatos [34,35], aproximados [36,37] e numéricos [37,38].

Alguns comentários finais sobre o critério de Luck são necessários. Primeiramente, para validação do critério o modelo deve ser ferromagnético, com interações de curto alcance, com distribuição dos acoplamentos "bem comportada", de forma a garantir a existência de um valor médio bem definido, e a rede deve ser regular. Lembre que o critério não prevê o comportamento do sistema nos casos marginais, que devem ser estudados caso-a-caso. Mesmo para perturbações relevantes o critério de Luck não informa se haverá, ou não, uma mudança na classe de universalidade.

2.2 Férmions livres

Esta seção tem por motivação não apenas apresentar as ideias básicas da técnica de férmions livres, mas também introduzir ao leitor ainda não familiarizado com a técnica um "algoritmo" simples para a aplicação numérica.

Em 1961, Lieb, Schultz e Mattis [1] introduzem o modelo XY, resolvendo-o analiticamente a partir da transformação de Jordan-Wigner, que mapeia o sistema quântico de spin 1/2, unidimensional, misto – quanto à estatística respeitada pelos operadores de spin – em um sistema de férmions não interagentes. Atualmente esse método de resolução de problemas quânticos unidimensionais para spins 1/2 é conhecido como técnica de férmions livres ou simplesmente fermionização.

⁴Para uma exceção no contexto da cadeia XYZ aleatória, veja o trabalho de Doty e Fisher [31].

2.2.1 Apresentação do hamiltoniano do modelo XY

O hamiltoniano proposto por Lieb *et al.*, estendedido pela introdução de acoplamentos nãouniformes e de campos transversos, descreve objetos de spin 1/2, dispostos ao longo de uma cadeia e interagindo com seus vizinhos mais próximos segundo

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \left[(1+\gamma_j) \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\gamma_j) \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h_j \sigma_j^z , \qquad (2.16)$$

em que os σ 's são os operadores de Pauli de spin 1/2,

$$\sigma^{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

 J_j os distintos acoplamentos, h_j os campos transversos, e γ_j as anisotropias entre os acoplamentos envolvendo as componentes nos eixos x ou y.

Esse hamiltoniano pode ser reescrito utilizando-se os operadores de abaixamento e levantamento $2\sigma_l^+ = \sigma_l^x + i\sigma_l^y$, $2\sigma_l^- = \sigma_l^x - i\sigma_l^y$,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \left[\gamma_j (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^-) + (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h_j (\sigma_j^+ \sigma_j^- - \sigma_j^- \sigma_j^+) .$$
(2.18)

Note que, para sítios distintos, os operadores σ^{\pm} locais respeitam relações de comutação de bósons e, para sítios iguais, relações de anticomutação de férmions, caracterizando um sistema misto quanto à estatística [1]. Uma transformação canônica não preservaria esse conjunto misto de relações de comutação e anticomutação. Pode-se recorrer à transformação de Jordan-Wigner, que mapeia operadores de levantamento e abaixamento em operadores fermiônicos.

Sejam então

$$c_j = \exp\left[i\pi \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i^+ \sigma_i^-\right] \sigma_j^-; \quad c_j^\dagger = \sigma_j^+ \exp\left[-i\pi \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i^+ \sigma_i^-\right] , \qquad (2.19)$$

os operadores de Jordan-Wigner. Com
o $c_j^\dagger c_j = \sigma_j^+ \sigma_j^-,$ tem-se que os operadores inversos são dados pelas relações

$$\sigma_j^- = \exp\left[-i\pi\sum_{i=1}^{j-1} c_i^{\dagger} c_i\right] c_j \; ; \quad \sigma_j^+ = c_j^{\dagger} \exp\left[i\pi\sum_{i=1}^{j-1} c_i^{\dagger} c_i\right] \; . \tag{2.20}$$

De posse do fato de que

$$\exp\left[\pm 2i\pi \ \sigma_j^+ \sigma_j^-\right] = 1 ; \quad \exp\left[\pm i\pi \ \sigma_j^+ \sigma_j^-\right] = -\sigma_j^z$$

pode-se facilmente provar que

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \left[\gamma_j (c_j^{\dagger} c_{j+1}^{\dagger} - c_j c_{j+1}) + (c_j^{\dagger} c_{j+1} - c_j c_{j+1}^{\dagger}) \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} h_j (c_j^{\dagger} c_j - c_j c_j^{\dagger}) . \quad (2.21)$$

Tem-se agora que o hamiltoniano do modelo anisotrópico sob ação de campo externo transversal pode ser escrito como uma forma quadrática de operadores de Fermi, que pode ser diagonalizada exatamente.

2.2.2 Diagonalizando o hamiltoniano do modelo XY

Para diagonalizar o hamiltoniano 2.21, procura-se uma transformação linear canônica para novas variáveis $\eta_q \in \eta_q^{\dagger}$, em termos das quais possamos escrever

$$\mathcal{H} = \sum_{q=1}^{N} \epsilon_q \left(\eta_q^{\dagger} \eta_q - \frac{1}{2} \right) \,. \tag{2.22}$$

Com
o η_q e η_q^\dagger são também operadores de Fermi, segue que

$$[\eta_q, \mathcal{H}] - \epsilon_q \eta_q = 0 . \tag{2.23}$$

Seguindo os passos sugeridos por Lieb et al. no belo artigo [1] e as transformações indicadas por Young em [39], introduzo as variáveis

$$c_{j}^{\dagger} + c_{j} = \sum_{q=1}^{N} \phi_{j}^{q} \left(\eta_{q}^{\dagger} + \eta_{q} \right) \quad e \quad c_{j}^{\dagger} - c_{j} = \sum_{q=1}^{N} \psi_{j}^{q} \left(\eta_{q}^{\dagger} - \eta_{q} \right) \quad .$$
(2.24)

Note que os números reais $\phi_j^q \in \psi_j^q$ podem ser vistos como elementos de matrizes $\Phi \in \Psi$, enquanto $c_j \in \eta_j$ podem ser vistos como elementos de vetores $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{\eta}$, respectivamente. Assim,

$$\boldsymbol{c}^{\dagger} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi} \left(\boldsymbol{\eta}^{\dagger} + \boldsymbol{\eta} \right) \quad e \quad \boldsymbol{c}^{\dagger} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Psi} \left(\boldsymbol{\eta}^{\dagger} - \boldsymbol{\eta} \right) .$$
 (2.25)

A imposição de que $\eta_q \in \eta_q^{\dagger}$ sejam operadores fermiônicos leva à conclusão de que as matrizes $\Phi \in \Psi$ sejam unitárias.

Pode-se então, a partir das equações 2.25, escrever os operadores η_q como função de c_j ,

$c_j^{\dagger}, \, \psi_q^j$ e ϕ_q^j .

$$\eta_q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \phi_j^q (c_j^{\dagger} + c_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \psi_j^q (c_j^{\dagger} - c_j) . \qquad (2.26)$$

Ao impor as equações 2.26 e 2.21 à relação encontrada em 2.23, chega-se a um par de equações acopladas, a saber

$$\epsilon_q \psi_j^q = -J_{j-1} \frac{1 - \gamma_{j-1}}{2} \phi_{j-1}^q - h_j \phi_j^q - J_j \frac{1 + \gamma_j}{2} \phi_{j+1}^q , \qquad (2.27a)$$

$$\epsilon_q \phi_j^q = -J_{j-1} \frac{1+\gamma_{j-1}}{2} \psi_{j-1}^q - h_j \psi_j^q - J_j \frac{1-\gamma_j}{2} \psi_{j+1}^q , \qquad (2.27b)$$

que podem ser vistas como um único sistema de 2N equações, escrito na forma $\mathbf{T} \mathbf{V}_q = \epsilon_q \mathbf{V}_q$, em que \mathbf{T} é uma matriz heptadiagonal cujos elementos não-nulos são dados por

$$T_{2j-1,2j+2} = T_{2j+2,2j-1} = \frac{J_j}{2}(1-\gamma_j) \quad j \in \{1, 2, \cdots, N-1\},$$

$$T_{2j,2j+1} = T_{2j+1,2j} = \frac{J_j}{2}(1+\gamma_j) \quad j \in \{1, 2, \cdots, N-1\},$$

$$T_{2j,2j-1} = T_{2j-1,2j} = h_j \qquad j \in \{1, 2, \cdots, N\},$$

$$(2.28)$$

e \boldsymbol{V}_q é um vetor cujos elementos são dados por

$$(V_q)_{2j-1} = -\phi_j^q \quad e \quad (V_q)_{2j} = \psi_j^q .$$
 (2.29)

Note que à matriz **T** estão associados 2N autovalores ϵ_q , embora o problema original, equação 2.22, tenha apenas N autovalores. Na verdade, os autoestados de **T** vêm aos pares, com autovalores de magnitudes iguais, mas sinais opostos [39].

Em símbolos,

14

2.2.3 Magnetização no limite de Ising

Para uma escolha de anisotropias tais que $\gamma_j \equiv 1$, a matriz **T** assume uma forma tridiagonal. A magnetização no eixo x de cadeias com extremos livres pode ser obtida através da técnica de férmions livres ao notar que na fase ordenada, e no limite termodinâmico, o primeiro estado excitado e o estado fundamental são degenerados [40]. Isso permite estimar a magnetização m_l do sítio l a partir do limite de longos tempos da função de autocorrelação, com resultado dado pelo termo não-diagonal

$$m_l = \langle 1 | \sigma_l^x | 0 \rangle , \qquad (2.31)$$

em que $|1\rangle = \eta_1^{\dagger}|0\rangle$ é o primeiro estado excitado. Como σ_l^x pode ser escrito como um produtório em termo dos operadores de Jordan-Wigner,

$$\sigma_l^x = \left[\prod_{j=1}^{l-1} (c_j^{\dagger} + c_j)(c_j^{\dagger} - c_j)\right] (c_l^{\dagger} + c_l) .$$
 (2.32)

o teorema de Wick permite reescrever a magnetização na forma do determinante

$$m_{l} = \begin{vmatrix} H_{1} & G_{1,1} & G_{1,2} & \cdots & G_{1,l-1} \\ H_{2} & G_{2,1} & G_{2,2} & \cdots & G_{2,l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{l} & G_{l,1} & G_{l,2} & \cdots & G_{l,l-1} \end{vmatrix},$$
(2.33)

sendo

$$G_{i,j} = \langle 0 | (c_i^{\dagger} - c_i) (c_j^{\dagger} + c_j) | 0 \rangle \stackrel{2.24}{=} - \sum_{q=1}^{N} \psi_i^q \phi_j^q , \qquad (2.34a)$$

$$H_j = \langle 0|\eta_1(c_j^{\dagger} + c_j)|0\rangle = \phi_j^1 . \qquad (2.34b)$$

Caso o campo no extremo à direita seja nulo, $h_N = 0$, σ_N^x torna-se um "bom número quântico", uma vez que comuta com o hamiltoniano do sistema. Novamente, tem-se que o primeiro estado excitado é degenerado com o estado fundamental. Formalmente, a expressão 2.33 é valida e ϕ_1^1 representa, diretamente, a magnetização do extremo à esquerda, ou seja, a magnetização de superfície do sistema. Pode-se provar [40] que a magnetização de superfície é dada pela equação exata

$$m_N^s = \left[1 + \sum_{l=1}^{N-1} \prod_{j=1}^l \left(\frac{h_j}{J_j}\right)^2\right]^{-1/2} , \qquad (2.35)$$

válida não apenas para sistemas no limite termodinâmico, mas também para cadeias finitas.

Para estudar o caso em que os spins em ambas as extremidades são fixos, que corresponde a impor $h_1 = h_N = 0$, podemos fazer uso de uma transformação dual, que inverte os papeis dos campos e dos acoplamentos [40]. Se definirmos os operadores duais $\tau_i^{x,z}$ tais que

$$\tau_{j+1/2}^{z} = \sigma_{j}^{x} \sigma_{j+1}^{x}, \quad \sigma_{j}^{z} = \tau_{j-1/2}^{x} \tau_{j+1/2}^{x}, \qquad (2.36)$$

o hamiltoniano pode ser reescrito na forma

$$\mathcal{H}^{\text{dual}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \tau_{j+1/2}^z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h_j \tau_{j-1/2}^x \tau_{j+1/2}^x \,. \tag{2.37}$$

Nessas condições, tanto σ_1^x quanto σ_N^x são bons números quânticos. É preciso entretanto distinguir as situações em que os spins nas extremidades têm mesmo sinal ($\sigma_1^x = \sigma_N^x = +1$) ou sinais opostos ($\sigma_1^x = +1$, $\sigma_N^x = -1$). Pode-se mostrar [40] que, para o caso em que os spins nas extremidades têm mesmo sinal, o estado fundamental do hamiltoniano original corresponde ao estado do hamiltoniano dual em que não há férmions.

A magnetização do sítio j é então dada pela expressão

$$\langle 0 \left| \sigma_l^x \right| 0 \rangle = \langle 0 \left| \tau_{1/2}^z \tau_{3/2}^z \cdots \tau_{l-1/2}^z \right| 0 \rangle,$$

que pode ser calculada pelo teorema de Wick a partir do problema de férmions associado ao hamiltoniano dual, uma vez que $\tau_{j-1/2}^z = (\hat{c}_j^{\dagger} - \hat{c}_j)(\hat{c}_j^{\dagger} + \hat{c}_j)$, com \hat{c}^{\dagger} e \hat{c} representando operadores de férmions na representação dual. O resultado é

$$m_l^{++} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{1,1} & \tilde{G}_{1,2} & \cdots & \tilde{G}_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{G}_{l,1} & \tilde{G}_{l,2} & \cdots & \tilde{G}_{l,l} \end{vmatrix}.$$
(2.38)

com $G_{i,j}$ dado pela equação 2.34b, calculada a partir de uma matriz **T** em que campos e acoplamentos são intercambiados.

Capítulo 3

Desenvolvimento

3.1 Renormalização de Ma-Dasgupta-Hu para cadeias quânticas de spins

Em 1979 Ma, Dasgupta e Hu desenvolvem um método aproximativo para o estudo de cadeias unidimensionais de spin ¹/₂ do modelo de Heisenberg com interações antiferromagnéticas aleatórias [10]. A grande diferença do novo método proposto com relação aos demais métodos existentes na época foi o fato das renormalizações não serem homogêneas quanto aos comprimentos do sistema. Essa mudança distingue-o visivelmente dos demais métodos baseados nas ideias de Kadanoff [41] e Patachinski-Pokrovski [42], que substituem blocos com comprimentos fixos por spins efetivos a cada passo de renormalização.

Os métodos até então existentes de renormalização obtiveram grande êxito ao estudar sistemas homogêneos, uma vez que não se espera que o comprimento de correlação seja dependente da posição para sistemas puros. No entanto, a aplicação dessa ideia é questionável para sistemas que não possuem simetria translacional. Segundo o método de Ma, Dasgupta e Hu (MDH), as renormalizações são baseadas nos níveis de energia do sistema e não no comprimento de um célula espacial [43]. O processo de renormalização de MDH dá-se de forma iterativa, ao reduzir o número de graus de liberdade do sistema, eliminando os níveis de energia mais elevados e muito pouco prováveis de serem ocupados a baixas temperaturas. Após alguns passos de renormalização, obtém-se um sistema efetivo, para baixas temperaturas, hoje conhecido como "random singlet phase" ou fase de singletos aleatórios [44].

Por mais que pareça plausível a eliminação de graus de liberdade associados aos estados de maior energia para sistemas a temperaturas reduzidas, esse processo ficou quase que esquecido e só passou a ser mais conhecido e utilizado após os estudos detalhados de Daniel Fisher [12, 13, 44], que deu ao método um *status* teórico bem definido¹ e a possibilidade do

¹O método proposto por Ma, Dasgupta e Hu parecia um método aproximativo pouco controlado, porém Fisher mostrou que o fluxo das renormalizações converge a um ponto fixo de *desordem infinita*, ou seja, a desordem do sistema cresce a cada renormalização, o que faz com que o método seja assintoticamente exato [43].

cálculo analítico de algumas propriedades de sistemas quânticos. É importante mencionar que o processo de renormalização de MDH é adequado para sistemas desordenados e que tal método produz resultados pobres quando aplicado a sistemas uniformes [10].

3.1.1 Renormalização de MDH para cadeias de spin 1/2

Antes de aplicar o método diretamente à cadeia XY, um exemplo mais simples será apresentado para que seja possível o estudo detalhado e a melhor compreensão da técnica a ser empregada.

Seja o hamiltoniano descrito pela equação 3.1, que segue

$$\mathcal{H} = \sum_{i} J_{i} \boldsymbol{\sigma}_{j} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{j+1} , \qquad (3.1)$$

com $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor composto pelos três operadores de Pauli de spin ¹/₂, ou seja, $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}[\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z]$, e J_i , constantes de acoplamento, variáveis positivas e aleatórias que respeitam uma dada distribuição de probabilidades $\mathcal{P}_0(J)$. Sob essas condições – em uma rede finita porém extensa – existe uma constante de acoplamento mais forte, digamos, J_2 , que acopla os operadores dos sítios 2 e 3, que por sua vez estão ligados aos operadores $\boldsymbol{\sigma}_1 \in \boldsymbol{\sigma}_4$, respectivamente, como indicado na figura 3.1, abaixo.



Figura 3.1: Processo de dizimação dos spins $\sigma_2 \in \sigma_3$ ligados pela maior constante de acoplamento J_2 .

Pode-se então reescrever o hamiltoniano 3.1 da seguinte maneira,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V + \sum_{j \neq 1,2,3} J_j \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_{j+1}$$
(3.2)

 com

$$\mathcal{H}_0 = J_2 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 , \qquad (3.3a)$$

sendo que o hamiltoniano \mathcal{H}_0 , equação 3.3a, descreve a interação entre σ_2 e σ_3 . Tal hamiltoniano pode ainda ser reescrito na base acoplada de spins, ou seja,

$$\mathcal{H}_0 = \frac{J_2}{2} \left[\left(\boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3 \right)^2 - \frac{3}{2} \right]$$
(3.4)

e admite dois níveis de energia, a saber

$$\mathcal{E}_s = \frac{J_2}{2} \left[-\frac{3}{2} \right] = -\frac{3}{4} J_2 ,$$
 (3.5a)

$$\mathcal{E}_t = \frac{J_2}{2} \left[2 - \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{4} J_2 .$$
 (3.5b)

sendo \mathcal{E}_s a energia do singleto e \mathcal{E}_t , do tripleto.

Para escalas de energia inferiores a J_2 , os spins σ_2 e σ_3 estarão fortemente acoplados no estado de singleto e, a temperatura nula, o estado de tripleto não será povoado. Nessas condições, o sistema está *congelado* no estado de singleto.

No entanto, não se podem simplesmente eliminar os pares de spins que produzem estados fortemente acoplados, visto que estes estão ligados a dois outros sítios da rede. Para realizar a dizimação é necessário utilizar o termo V de 3.3b como hamiltoniano perturbativo ao estado fundamental de 3.3a. Ao fazê-lo até segunda ordem em teoria de perturbação, os sítios 1 e 4 serão acoplados de maneira similar à descrita na equação 3.1, caracterizando um método de renormalização. Assim

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{E}'_0 + J'_1 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4 + \sum_{j \neq 1, 2, 3} J_j \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_{j+1} , \qquad (3.6a)$$

$$\mathcal{E}'_0 = -\frac{3}{4}J_2 - \frac{3}{16J_2}\left(J_1^2 + J_3^2\right) , \qquad (3.6b)$$

$$J_1' = \frac{J_1 J_3}{2J_2} , \qquad (3.6c)$$

e o termo $J'_1 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4$ é capaz de reproduzir os quatro estados de mais baixa energia de $\mathcal{H}_0 + V$, que estão separados por uma distância de J_2 dos demais estados [45]. É importante notar que J'_1 é menor que J_1, J_3 e J_2 .

O método de MDH consiste, então, em eliminar de forma iterativa pares de spins da rede fortemente acoplados, uma vez que, para baixas energias, esses estarão acoplados no estado de "singleto", não influenciando as propriedades termodinâmicas do sistema. No entanto, a eliminação de cada par cria um novo acoplamento efetivo e soma ao sistema um termo em energia (que contribui para a energia do estado fundamental), ao mesmo tempo em que reduz a escala superior de energia Ω na cadeia efetiva. Assim, a forma da função de distribuição é alterada e obtém-se uma nova função distribuição, $\mathcal{P}(J; \Omega)$.

Partindo da equação de fluxo respeitada por $\mathcal{P}(J;\Omega)$, à medida que a maior escala de

energia é reduzida, Fisher [12, 44] foi capaz de provar que há uma distribuição de ponto fixo para distribuições iniciais suficientemente largas (de modo a ser válido o tratamento perturbativo) e que essa diverge como uma lei de potências, como haviam proposto Dasgupta e Ma [11].

3.1.2 Aplicação do método de renormalização de MDH no estudo da cadeia XY

O hamiltoniano do modelo XY sob ação de campo transverso foi apresentado na introdução deste trabalho, equação 1.1. Pretendo nesta seção apresentar os principais resultados obtidos a partir do emprego do método de MDH para estudar as propriedades de baixas energias de cadeias XY na presença de campos e acoplamentos não-uniformes. Gostaria, no entanto, de chamar a atenção do leitor para dois regimes distintos deste modelo. Quando, localmente, J > h tem-se que o sistema tende a ficar ordenado, caracterizando uma fase ferromagnética. Convém lembrar que este ordenamento pode dar-se ou na direção x ou na direção y, conforme o parâmetro que mede a anisotropia do sistema, γ , seja, respectivamente, positivo ou negativo. O segundo regime ocorrerá quando localmente J < h, ou seja, o campo, mais forte que os acoplamentos, tende a alinhar os spins do sistema na direção z, não havendo ordenamento espontâneo, caracterizando uma fase paramagnética. Como descrito anteriormente, o método de MDH dá-se de forma iterativa ao eliminar, localmente, os graus de liberdade associados às maiores energias do sistema. Enfatizo mais uma vez então que é necessário estudar o comportamento do sistema de forma *local*.

Seguindo os passos da seção anterior, seja o caso em que, localmente, o acoplamento entre dois sítios vizinhos é superior aos campos aplicados aos spins desses sítios, bem como aos demais acoplamentos vizinhos, e $\gamma > 0$. Note que a escolha de $\gamma > 0$ foi feita única e exclusivamente para indicar um direção de alinhamento dos spins, a saber, a direção x.

Nesse caso, tem-se um forte acoplamento entre os spins vizinhos. Desprezando o efeito dos campos, há quatro níveis de energia bem definidos, com o estado fundamental passando de único a duplamente degenerado quando a anisotropia $\gamma \rightarrow 1$. Note que em temperatura nula não haverá excitações térmicas e o sistema estará *congelado* no estado fundamental. Para $\gamma = 1$, os dois estados de mais baixa energia podem ser vistos como estados de um spin efetivo que representa o par de spins fortemente acoplados. Esse spin efetivo interage com os spins vizinhos do par e sofre a ação de um campo efetivo cuja intensidade pode ser calculada por teoria de perturbação, como mostrado no apêndice A.3. Valores de γ levemente inferiores a 1 levam à conclusão de que, além do spin efetivo, o hamiltoniano de baixas energias envolve uma anisotropia efetiva $\tilde{\gamma}$, com $\gamma < \tilde{\gamma} < 1$, e um termo de interação entre três spins cuja intensidade é desprezível frente aos demais parâmetros. Finalmente, valores de γ tais que $0 < \gamma \ll 1$ levam à conclusão de que o par de spins fortemente acoplado atua somente para mediar um acoplamento efetivo entre os spins vizinhos ao par, novamente com anisotropia

efetiva tal que $\gamma < \tilde{\gamma} < 1$. Portanto, nesse caso o par de spins pode de outro modo ser eliminado da discussão sobre o comportamento do sistema em baixas energias.

Para o caso de campo local forte em comparação aos acoplamentos locais, tem-se que o spin sob influência desse campo tende a alinhar-se na direção do campo, transversalmente aos eixos $x \, e \, y$, ou seja, o campo faz com que o spin "flipe" constantemente entre as direções $x \, e -x$, caso $\gamma > 0$, não contribuindo para a soma de estados estatísticos. Assim, ao renormalizar um spin sob ação de campo forte local este será removido da rede de spins e um acoplamento efetivo dar-se-á entre os spins vizinhos a esse spin dizimado. Ver cálculos no apêndice A.2.

Matematicamente, o processo de renormalização de MDH para cadeias não homogêneas dá-se pelo estudo perturbativo do hamiltoniano nos sítios sob influência de campos, ou acoplamentos, fortes quando comparados com as escalas de energia dos demais sítios. No apêndice A é possível estudar explicitamente os casos mais importantes para a análise da cadeia XY e verificar que após a renormalização obtém-se um novo hamiltoniano, semelhante ao original, mas com os valores de campos, acoplamentos e anisotropias modificados.

Ainda no apêndice A pode-se verificar que após sucessivas renormalizações as anisotropias não nulas fluem para o ponto fixo estável² $\gamma = 1$. Assim, para o estudo do comportamento crítico do sistema XY qualquer escolha de $-1 \leq \gamma \leq 1$, com $\gamma \neq 0$, é equivalente a um modelo de Ising em um campo transverso. Fica evidente que o modelo XY terá que ser estudado em dois regimes específicos, a saber: quando a anisotropia é nula e quando essa tem valor unitário.

A seguir pode ser lida a descrição do processo de renormalização para o caso de Ising sob ação de campo transverso.

3.1.3 Aplicação do método de renormalização de MDH no estudo da cadeia de Ising sob ação de campo transverso

A cadeia de Ising unidimensional com campo transverso tem como hamiltoniano a equação

$$\mathcal{H}_x = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h_j \sigma_j^z \,. \tag{3.7}$$

Como descrito na seção anterior, existem dois casos que devem ser estudados para a aplicação do método de renormalização de MDH: quando os acoplamentos são localmente fortes em comparação aos demais acoplamentos e campos magnéticos do sistema, e o caso oposto, no qual se têm campos locais intensos. A ideia física do processo de renormalização é muito semelhante à descrita para a cadeia XY, e irei analisar diretamente as consequências do processo de renormalização do tipo MDH para a cadeia de Ising sob ação de campo transverso.

²Tem-se também que $\gamma\equiv 0$ é um ponto fixo do processo de renormalização, ver contas explícitas do apêndice A.

Para as cadeias aperiódicas que serão analisadas, é importante o estudo, à luz do método de renormalização de MDH, de blocos de spins com mesmo campo ou blocos de acoplamentos iguais entre vizinhos consecutivos, uma vez que as regras de substituição empregadas nesse trabalho produzem blocos de spins com mesma constante de acoplamento que, após uma iteração do grupo de renormalização, produzem domínios sob ação de campos iguais.

Considere-se inicialmente a situação em que há vários spins consecutivos sob ação de um mesmo campo forte h, mais intenso que qualquer acoplamento entre esses spins e que qualquer acoplamento entre esses e seus vizinhos. Para um bloco de n+2 spins (figura 3.1.3) ligados por n + 1 acoplamentos diferentes J_k , $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ e com $h > J_k$, pode-se simplesmente aplicar repetidamente o resultado perturbativo da equação A.11, produzindo um acoplamento efetivo entre os spins vizinhos ao bloco, dado por



Figura 3.2: Renormalização para mais de um campo igual.

Para o caso de um bloco de spins conectados entre si por acoplamentos iguais e intensos, os cálculos perturbativos são trabalhosos, como pode ser lido no apêndice, seção A.4. No entanto, muito esforço pode ser poupado caso a simetria dual do problema seja usada. Sejam novamente os operadores duais [40] $\tau_{i+1/2}^x$ e $\tau_{i+1/2}^z$, introduzidos no capítulo 2, dados por

$$\tau_{i+1/2}^{z} = \sigma_{i}^{x} \sigma_{i+1}^{x}, \quad \sigma_{i}^{z} = \tau_{i-1/2}^{x} \tau_{i+1/2}^{x}.$$
(3.9)

Pode-se provar que o hamiltoniano do sistema, equação 3.7, pode ser reescrito como

$$\mathcal{H}_x^{\text{Dual}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \tau_{j+1/2}^z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h_j \tau_{j-1/2}^x \tau_{j+1/2}^x \,. \tag{3.10}$$

Na base dual, nota-se que campos e acoplamentos têm seus papéis trocados.

Pode-se agora utilizar a simetria dual e a equação 3.8 para ver que, havendo n + 1 spins em um bloco com mesma constante de acoplamento J (figura 3.1.3) e com campos distintos



Figura 3.3: Renormalização para mais de um acoplamento igual.

 $h_k, k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, a renormalização para o caso $J > h_k$ resultará em um campo efetivo

$$\tilde{h} = \frac{\prod_{k} h_k}{J^n} \tag{3.11}$$

atuando sobre um spin efetivo que representa os n + 1 spins no bloco

Com as equações generalizadas para renormalização, equações 3.11 e 3.8, pode-se estudar o processo de dizimação para cadeias aperiódicas de Ising sob ação de campos transversos compostas por diferentes regras de substituição binárias.³

3.2 Construção e estudo de cadeias de Ising aperiódicas

Conforme discutido na seção 2.1.3, cadeias aperiódicas podem ser classificadas em relevantes, marginais ou irrelevantes, segundo o critério heurístico de Harris-Luck.⁴ Em sequências relevantes o comportamento crítico do sistema é distinto do apresentado pelo sistema uniforme e terá os expoentes críticos definidos pela regra de substituição. Já para sequências marginais haverá um comportamento crítico não universal, dependente da razão entre os acoplamentos. Não se espera qualquer modificação do comportamento crítico caso a sequência seja irrelevante. Para uma dada sequência aperiódica, o caráter irrelevante, marginal ou relevante é determinado pelo expoente de flutuação geométrica, ω , que governa o crescimento das flutuações geométricas da sequência à medida que se investigam comprimentos cada vez maiores. Aperiodicidade irrelevante, marginal ou relevante para o comportamento crítico da cadeia de flutuação, como segue da lei dos grandes números, corresponde a $\omega = 1/2$, o que está de acordo com o fato de que aleatoriedade é relevante para o comportamento crítico da cadeia de Ising quântica [12,13].

Fazemos uso neste trabalho de aperiodicidade determinística, gerada por regras de subs-

 $^{^{3}\}mathrm{Um}$ estudo detalhado de sequências aperiódicas obtidas por regras de substituição pode ser encontrado em [20].

 $^{^{4}}$ O critério de Harris-Luck pode ser derivado exatamente para cadeias unidimensionais cujas aperiodicidades sejam criadas a partir de regras de substituição [21,32] *apud* [33].

tituição binárias, a cada uma das quais está associada uma matriz que indica como a substituição deverá ocorrer. Uma regra de substituição binária genérica, dada por

$$\rho: \left\{ \begin{array}{rcl} a & \mapsto & a^p b^q \\ b & \mapsto & a^r b^s \end{array} \right. \tag{3.12}$$

tem como matriz de substituição

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & r \\ & \\ q & s \end{pmatrix} , \qquad (3.13)$$

ou seja, tem como entrada os expoentes de a e b simplesmente.

Agora, se as constantes de acoplamento forem dadas por alguma regra de substituição, o expoente de flutuação geométrica pode ser determinado diretamente a partir dos dois maiores autovalores da matriz de substituição. Assim, o expoente de flutuação ω é dado por

$$\omega = \frac{\log|\lambda_{-}|}{\log\lambda_{+}} , \qquad (3.14)$$

sendo λ_+ e λ_- respectivamente o maior e o segundo maior autovalor associados à matriz de substituição \mathcal{M} .

3.2.1 Justificativa para a escolha das regras de substituição empregadas nesse trabalho

O estudo de diferentes regras de substituição torna-se mais interessante quando distintos expoentes de flutuação geométrica são analisados. Inicialmente, iria analisar quatro sequências bem conhecidas: regra de Fibonacci, irrelevante segundo o critério de Harris-Luck; duplicação de período, marginal; triplicação de período, relevante e Rudin-Shapiro binária, que emula a aleatoriedade.⁵

Ao estudar os passos de renormalização nos moldes de MDH para sequências de duplicação e triplicação de período pude observar que após um estado transiente tais sequências evoluem para regras "similares" à de Fibonacci. Assim, neste trabalho estudo a família de regras de

$$\rho_{dup}: \left\{ \begin{array}{ccc} a & \mapsto & ab \\ b & \mapsto & aa \end{array} \right., \quad \rho_{trip}: \left\{ \begin{array}{ccc} a & \mapsto & abb \\ b & \mapsto & aaa \end{array} \right., \quad \rho_{RS}: \left\{ \begin{array}{ccc} aa & \mapsto & aaab \\ ab & \mapsto & aaba \\ ba & \mapsto & bbab \\ bb & \mapsto & bbba \end{array} \right. \tag{3.15}$$

⁵As regras de substituição correspondentes a essas sequências são

substituição dadas por:

que possuem

$$\rho_m : \begin{cases} a \mapsto ab^m \\ b \mapsto a \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{M}_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix}$$

como matriz de substituição.⁶

Verifica-se facilmente que o comprimento da palavra criada após a enésima iterada da regra de substituição 3.16 pode ser obtido a partir da regra de composição:

$$\mathcal{F}_m(n) = \mathcal{F}_m(n-1) + m\mathcal{F}_m(n-2) \tag{3.17}$$

com $\mathcal{F}_m(0) = \mathcal{F}_m(1) = 1$ para qualquer m.⁷ Estes comprimentos são importantes pois são eles que definem os comprimentos "naturais" das cadeias construídas a serem testadas pela técnica de férmions livres.

Como será visto na seção que segue, não é possível obter um expoente de flutuação geométrico $\omega = 1/2$ a partir da regra descrita em 3.16. Assim, proponho a regra

$$\rho: \left\{ \begin{array}{rccc} a & \mapsto & b^9 a \ , \\ b & \mapsto & ba \ , \end{array} \right. \tag{3.18}$$

que emula a aleatoriedade ao produzir $\omega = 1/2$. A sequência aperiódica resultante é mais simples de estudar que aquela produzida pela regra de Rudin-Shapiro binária.

Tem-se assim o ambiente favorável para o estudo das distintas sequências de substituição, visto que é possível criar regras relevantes, marginais e irrelevantes a partir da regra de formação 3.16 e emular a aleatoriedade a partir da regra descrita em 3.18. O estudo da criticalidade das distintas regras de substituição binárias será realizado ao associar à letra *a* a constante de acoplamento J_a e, analogamente, à *b*, J_b . Para melhor observar a influência da razão entre os acoplamentos sobre a criticalidade dos sistemas estudados, seja $r = J_a/J_b$.

⁶Note que para m = 1 recupera-se a regra de substituição de Fibonacci. A regra de duplicação de período evolui após algumas etapas de renormalização para a regra descrita em 3.16 com m = 2 e a de triplicação de período, com m = 6. Algum comentário sobre essa classe de regras de substituição pode ser encontrado em [46], em que os autores discutem o comportamento da flutuação geométrica e a distribuição dos níveis de energia para regras compostas por $m \in \{1, 2, 3\}$.

⁷Note que caso m = 1 tem-se a regra de composição dos números de Fibonacci.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Resultados formais obtidos a partir do método de MDH

Os estudos realizados nesta seção serão feitos com campo transverso inicial constante. Como ficará explícito a seguir, as sucessivas etapas de renormalização irão gerar uma rede de spins ora com acoplamentos ora com campos não uniformes.

As matrizes de substituição das regras descritas pela equação 3.16 são dadas por

$$\mathcal{M}_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

e têm por autovalores

$$\lambda_{-} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4m+1}}{2}, \quad \lambda_{+} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4m+1}}{2}.$$
(4.2)

No gráfico da figura 4.1 pode ser visto o comportamento, para diversos valores de m, do expoente de flutuação geométrica ω ao empregar os autovalores 4.2 à equação 3.14. Note que para m < 2 tem-se que $\omega < 0$; assim, valores de m < 2 geram sequências irrelevantes, ao passo que as sequências marginais e relevantes serão obtidas para m = 2 e m > 2.

As sequências estudas nesse trabalho têm seus expoentes de flutuação explicitados na tabela 4.1, que segue.

Tabela 4.1: Valores de ω para as sequências de substituição formadas a partir da regra de substituição 3.16 para os distintos valores de m estudados nesse trabalho.


Expoente de flutuação

Figura 4.1: Expoente de flutuação para os diferentes valores de m. Destaque para o valor não inteiro de m que produziria um expoente de flutuação geométrico $\omega = 1/2$.

O autovetor correspondente ao maior autovalor da matriz de substituição 4.1, é dado por

$$\boldsymbol{v}_{+} \propto \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{4m+1}}{2} \end{array}
ight),$$
 (4.3)

ao passo que as densidades assintóticas serão dadas por

$$\varrho_{\infty}^{(a)} = \frac{2}{\sqrt{4m+1}+1} = \frac{\sqrt{4m+1}-1}{2m}, \quad \varrho_{\infty}^{(b)} = \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2m} = \frac{\sqrt{4m+1}-1}{\sqrt{4m+1}+1}. \quad (4.4)$$

Seja, então, a cadeia de spins do modelo de Ising com campo transverso criada a partir da regra de substituição descrita pela equação 3.16 para um dado m fixo e composta por $N^{(0)}$ sítios inicias. Como indicado anteriormente, o estudo será realizado na situação de campo transverso constante, $h^{(0)}$, e acoplamentos iniciais $J_a^{(0)} \in J_b^{(0)}$, dados pela regra de substituição, e satisfazendo a condição inicial $J_b^{(0)} > h^{(0)} > J_a^{(0)}$, região que corresponde à localização do campo crítico, dado por

$$h_c = J_a^{\varrho_\infty^{(a)}} J_b^{\varrho_\infty^{(b)}},\tag{4.5}$$

segundo o resultado exato de Pfeuty [47], válido para a cadeia infinita. A cada spin da rede primordial está associado um momento magnético $\mu^{(0)}$ e a razão inicial entre os acoplamentos é $r^{(0)} = J_a^{(0)}/J_b^{(0)}$. Um esboço da distribuição inicial de acoplamentos é mostrado na linha superior da figura 4.2.

A condição inicial diz que $J_b^{(0)}$ é a maior escala de energia do sistema. Como mostrado na figura 4.2, os acoplamentos $J_b^{(0)}$ ocorrem sempre em blocos de m + 1 spins. Em escalas de energia inferiores a $J_b^{(0)}$, pode-se varrer a rede, substituindo os spins em cada um desses blocos por um spin efetivo sob ação de um campo efetivo

$$h^{(1)} \stackrel{3.11}{=} \frac{\left[h^{(0)}\right]^{m+1}}{\left[J_b^{(0)}\right]^m} < h^{(0)}.$$

Além disso, o spin efetivo tem momento magnético

$$\mu^{(1)} = (m+1)\mu^{(0)}.$$

Note que a cadeia original com acoplamentos aperiódicos sob ação de campo uniforme produz um cadeia renormalizada, com acoplamentos uniformes, e campos aperiódicos regidos, esses também, pela regra 3.16 (veja a segunda linha na figura 4.2).

Caso as novas escalas de energia do problema satisfaçam $h^{(0)} > J_a^{(0)} > h^{(1)}$ prossegue-se o processo de renormalização.¹ Assim, após a primeira varredura da rede, a maior escala de energia do sistema passa a ser o valor do campo transverso inicial, $h^{(0)}$, que pode ser dizimado segundo a equação 3.8, visto que agora há m spins sob ação desse campo. Produz-se assim um acoplamento efetivo

$$J_a^{(1)} = \frac{\left[J_a^{(0)}\right]^{m+1}}{\left[h^{(0)}\right]^m}.$$

Após duas varreduras sucessivas da rede, que definem o passo da renormalização, é possível renomear os novos acoplamentos $J_a^{(0)}$ como $J_b^{(1)}$, de forma a poder identificar a nova rede com a rede original.² Assim, é possível de forma iterativa fazer a identificação da rede criada a cada novo passo com a rede que a originou caso a condição $J_b^{(n)} > h^{(n)} > J_a^{(n)}$ seja

¹Como será visto adiante, a condição $h^{(0)} > J_a^{(0)} > h^{(1)}$ é sempre satisfeita se $h^{(0)}$ está suficientemente próximo do campo crítico.

 $^{^2 \}rm Este$ fato não é surpreendente visto que qualquer sequência produzida por uma regra de substituição determinística tem simetria de inflação.



Figura 4.2: Primeiro passo de renormalização para sequência dada pela regra 3.16 respeitando a condição $J_b^{(0)} > h^{(0)} > J_a^{(0)}$.

satisfeita. Tal identificação é feita a partir das seguintes regras:

$$J_{b}^{(n+1)} = J_{a}^{(n)}; \qquad J_{a}^{(n+1)} = \frac{\left[J_{a}^{(n)}\right]^{m+1}}{\left[h^{(n)}\right]^{m}}; \qquad (4.6)$$
$$h^{(n+1)} = \frac{\left[h^{(n)}\right]^{m+1}}{\left[J_{b}^{(n)}\right]^{m}}; \qquad \mu^{(n+1)} = (m+1)\mu^{(n)}.$$

Definindo

$$P^{(n)} = \frac{J_a^{(n)}}{h^{(n)}}; \quad Q^{(n)} = \frac{h^{(n)}}{J_b^{(n)}}; \quad r^{(n)} = \frac{J_a^{(n)}}{J_b^{(n)}},$$
(4.7)

pode-se mostrar que, após um passo de renormalização, sequências geradas pela regra 3.16 com um certo m terão a razão entre os acoplamentos, sobre o ponto crítico, dada por

$$r^{(n+1)} = \left[r^{(n)}\right]^{m\varrho_{\infty}^{(b)}} .$$
(4.8)

Assim, o fluxo de renormalização da razão entre os acoplamentos $J_a^{(n)} \in J_b^{(n)}$ dá-se de forma distinta para as sequências marginais, relevantes e irrelevantes, como descrito na equação abaixo,

$$\lim_{n \to \infty} r^{(n)} = \begin{cases} 1 & m < 2, \ \omega < 0 \ ,\\ r^{(0)} & m = 2, \ \omega = 0 \ ,\\ 0 & m > 2, \ \omega > 0 \ . \end{cases}$$
(4.9)

Neste ponto é importante ressaltar que o método de renormalização de MDH melhora

assintoticamente para as sequências relevantes uma vez que a razão entre os acoplamentos vai a zero; já para o caso marginal é o valor inicial dos acoplamentos que definirá a validade do método. Ainda da equação 4.9 pode-se notar que o sistema irrelevante flui para a cadeia uniforme, assim, não é de se espantar o fato de que cadeias formadas por regras de substituição irrelevantes apresentem comportamento crítico análogo ao do sistema uniforme.

As equações de recorrência das razões $P^{(n)} \in Q^{(n)}$ podem ser escritas de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \ln P^{(n)} \\ \ln Q^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & -m \\ -1 & m \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \ln P^{(0)} \\ \ln Q^{(0)} \end{pmatrix} , \qquad (4.10)$$

definindo, em notação óbvia, os vetores $V^{(n)} \in V^{(0)}$ e a matriz \mathbb{M} , tais que $V^{(n)} = \mathbb{M}^n \cdot V^{(0)}$.

As condições iniciais das constantes de acoplamento e campo podem ser escritas de tal forma que $V^{(0)} = A_1 \mathfrak{v}_1 + A_2 \mathfrak{v}_2$, com

$$\mathfrak{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\ -\varrho_{\infty}^{(a)} \end{pmatrix} , \quad \mathfrak{v}_2 = \frac{1}{\varrho_{\infty}^{(b)}} \begin{pmatrix} \varrho_{\infty}^{(b)} \\ \varrho_{\infty}^{(a)} \end{pmatrix} , \qquad (4.11)$$

em que $\mathfrak{v}_1 \in \mathfrak{v}_2$ são os autovetores da matriz \mathbb{M} associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_+ + m$ e $\lambda_2 = \lambda_- + m$, respectivamente, com $\lambda_1 > \lambda_2$. Já $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_2$ são constantes que dependem única e exclusivamente da condição inicial entre os acoplamentos e campos e da regra de substituição original.

Após *n* passos de iteração, os valores das razões efetivas $P^{(n)} \in Q^{(n)}$ serão governados pelo maior autovalor de \mathbb{M} , exceto no caso em que $V^{(0)}$ seja proporcional a v_2 , que deve assim corresponder à condição de criticalidade do sistema.³

Ao impor que $V^{(0)} \propto \mathfrak{v}_2$ para um sistema governado pela regra de substituição descrita em 3.16 e de posse das equações 4.4 tem-se que o campo crítico será dado por

$$h_{c} = \left[J_{a}^{(0)}\right]^{\varrho_{\infty}^{(a)}} \left[J_{b}^{(0)}\right]^{\varrho_{\infty}^{(b)}} , \qquad (4.12)$$

em concordância com o resultado de Pfeuty [47].

Para o estudo dos expoentes críticos é necessário que o sistema esteja próximo porém deslocado do ponto crítico. Seja então $h^{(0)} = h_c(1 - \epsilon)$, com $\epsilon \ll 1$, que ao ser introduzida na equação 4.10 resulta em

$$\begin{pmatrix} \ln P^{(n)} \\ \ln Q^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & -m \\ -1 & m \end{pmatrix}^n \cdot \left\{ \ln \left[r^{(0)} \right] \begin{pmatrix} \varrho_{\infty}^{(b)} \\ \varrho_{\infty}^{(a)} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} .$$
(4.13)

³Note que será o valor de \mathcal{A}_1 que caracterizará a fase ferromagnética ou paramagnética do sistema. Caso $\mathcal{A}_1 > 0$, $\ln Q^{(n)} < 0 \Rightarrow Q^{(n)} < 1$, indicando que o maior acoplamento local é mais forte que o campo local, definindo uma fase ferromagnética. Analogamente, se $\mathcal{A}_1 < 0$ uma fase paramagnética será induzida. Assim, a condição $\mathcal{A}_1 \equiv 0$ corresponde a transição entre as fases para- e ferromagnética.

É importante ressaltar neste ponto que a renormalização não poderá ser realizada caso a condição $J_b^{(n)} > h^{(n)} > J_a^{(n)}$ não seja satisfeita, assim, $J_a^{(n)} = h^{(n)} \Rightarrow \ln P^{(n)} = 0$ ou $h^{(n)} = J_b^{(n)} \Rightarrow \ln Q^{(n)} = 0$ podem ser utilizadas para encontrar o número máximo de iterações permitidas pelo método de renormalização. Decompondo o vetor $[1, -1] = \alpha_1 \mathfrak{v}_1 + \alpha_2 \mathfrak{v}_2$ chega-se ao sistema

$$\ln\left[r^{(0)}\right]\lambda_2^n \left(\begin{array}{c} \varrho_{\infty}^{(b)} \\ \\ \\ \varrho_{\infty}^{(a)} \end{array}\right) = -\epsilon(\alpha_1\lambda_1^n\mathfrak{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathfrak{v}_2) .$$

$$(4.14)$$

Com
o $\lambda_1^n\gg\lambda_2^n,$ o número máximo n^* de iteradas permitidas pelo método será

$$n^* \sim \frac{\ln\epsilon}{\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \,. \tag{4.15}$$

Ao número máximo de iteradas estará associado o comprimento de correlação do sistema, descrito adiante.

Não apenas a análise da evolução dos acoplamentos e campos é necessária para o estudo e obtenção dos expoentes críticos do sistema. Faz-se também necessário o estudo da evolução dos comprimentos efetivos do sistema. Seguindo os passos de Fisher, [12,13,44], associarei a cada ligação da rede inicial um comprimento de ¹/₂ e, por conta da dualidade do problema, cada spin também será indexado com um comprimento de ¹/₂. Diretamente das equações de iteração descritas em 4.6 pode-se construir a matriz de evolução dos comprimentos do sistema,

$$\begin{pmatrix} \ell_a^{(n)} \\ \ell_b^{(n)} \\ \ell_h^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & m \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & m+1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \ell_a^{(0)} \\ \ell_b^{(0)} \\ \ell_h^{(0)} \end{pmatrix} ,$$
(4.16)

com os comprimentos $\ell^{(0)} \equiv 1/2$, que pode ser reescrita como $\boldsymbol{L}^{(n)} = \mathbb{W}^n \cdot \boldsymbol{L}^{(0)}$.

Como a matriz W representa as relações de recorrência, obtidas via método de renormalização de MDH para as sequências estudadas, e o número de iterações, n^* , é grande quando próximo ao ponto crítico, condição esta requerida para o cálculo dos expoentes críticos, podese afirmar que todas as escalas de comprimento do sistema irão escalonar como λ^{n^*} , sendo λ o maior autovalor da matriz W que rege os comprimentos das sequências auto-similares.

O método de renormalização poderá ser realizado iterativamente sempre que a condição $J_b^{(n)} > h^{(n)} > J_a^{(n)}$ for válida. A violação de tal condição indica que o sistema flui ou para a fase ordenada ou para a fase paramagnética. Caso o sistema esteja na fase ferromagnética, $\epsilon < 1, \lambda^{n^*}$ indicará o comprimento, associado à rede inicial, de domínios de spins fortemente correlacionados.

Para sequências criadas a partir das regras 3.16 e 3.18, $\lambda = \lambda_1$, dessa forma, o maior

autovalor da matriz M, matriz que descreve o fluxo das renormalizações, é também o maior autovalor da matriz que computa a evolução dos comprimentos do sistema, W.

Neste ponto é importante ressaltar que $\lambda_{+}^{2} = \lambda_{1}$ indo de acordo com o esperado uma vez que, para as sequências aperiódicas determinísticas, o maior autovalor da matriz de substituição, λ_{+} , está assintoticamente associado ao comprimento das palavras que são geradas e, para os sistemas estudados, cada passo de renormalização é compostos por duas etapas que produzem cadeias ora com campos, ora com acoplamentos aperiódicos e regidos pelas equações 3.16 e 3.18.

Assim, como λ^{n^*} está associado ao comprimento natural do sistema, tem-se que

$$\begin{aligned} \xi \sim \lambda^{n^*} &= \lambda_1^{n^*} \quad ; \qquad \xi \sim \epsilon^{-\nu} \\ &\downarrow 4.15 \\ \xi \sim \lambda_1^{\frac{\ln\epsilon}{\lambda_2}} &= \epsilon^{\frac{\ln\lambda_1}{\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \Rightarrow \nu = -\ln\lambda_1 / \ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1} . \end{aligned}$$
(4.17)

De maneira análoga, pode-se obter o valor do expoente β a partir do estudo da magnetização na direção do eixo x, para campos inferiores ao campo crítico. A magnetização normalizada da n^* -ésima iterada pode ser aproximada como sendo a razão entre o número de spins da cadeia residual em relação à cadeia original, multiplicada pelo valor do momento magnético efetivo para o passo n^* . Tal método pode ser utilizado, pois, para a fase estudada, ferromagnética, o valor do campo local é inferior ao valor dos acoplamentos, assim, tem-se um ordenamento no sistema.

A razão entre o número de spins antes e depois de cada passo de renormalização é dado pelo inverso do maior autovalor associado a matriz dos comprimentos, λ_1 . Desta forma,

$$m_x \sim \frac{\mu^{(n^*)}}{\lambda_1^{n^*}} = \left(\frac{m+1}{\lambda_1}\right)^{n^*} \quad ; \qquad m_x \sim \epsilon^{\beta}$$

$$\Downarrow 4.15 \qquad (4.18)$$

$$m_x \sim \left(\frac{m+1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\ln\epsilon}{\lambda_1\lambda_1}} = \epsilon^{\frac{\ln\frac{m+1}{\lambda_1}}{\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \ln\frac{m+1}{\lambda_1} / \ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \; .$$

Os resultados teóricos obtidos pelo método de MDH para os expoentes críticos ν e β encontram-se traçados para os diferentes valores de m no gráfico 4.3. Neste ponto é importante notar que a extrapolação de m como pertencente aos números reais não produz valor de β condizente com o previsto por Fisher em [12].

De posse das equações de evolução para a razão entre os acoplamentos e do valor da maior escala de energia a cada passo de renormalização, $J_b^{(n)}$, respectivamente equações 4.8 e 4.7, pode-se escrever um par de equações acopladas das quais o comportamento das escalas



Expoentes críticos

Figura 4.3: Expoentes $\beta \in \nu$ para os diferentes valores de m. Note que apenas os valores para m > 2 foram obtidos pelo método de renormalização de MDH uma vez que sequências com m < 2 são irrelevantes segundo o critério de Harris-Luck. Destaque para o valor não inteiro de m que produziria um expoente de flutuação geométrico $\omega = 1/2$.

de energia do problema é obtido. Note antes que $m\varrho_{\infty}^{(b)} = \lambda_2$. Assim

$$\begin{pmatrix} \ln \frac{J_b^{(n+1)}}{J_b^{(0)}} \\ \ln r^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \ln r^{(0)} \end{pmatrix}.$$
(4.19)

Pode-se então [21] mostrar que para sequências marginais e irrelevantes, as escalas de energia, sobre o ponto crítico, serão proporcionais ao comprimento característico do sistema elevado ao negativo do expoente dinâmico, $\Lambda^{(n)} \sim (\ell^{(n)})^{-z}$. Para o ponto crítico da sequência gerada pela regra 3.16 com m = 2, marginal pelo critério de Luck,

$$r^{(n)} = r^{(0)} (4.20)$$

indicando que a cada valor de razão inicial entre os acoplamentos está relacionado um ponto fixo. Assim, tem-se na verdade uma linha de pontos fixos que só depende da condição inicial.

Como a maior escada de energia do sistema é $J_b^{(n)}$, $J_b^{(n)} \sim \Lambda^{(n)}$, e o comprimento do sistema está relacionado ao maior autovalor da matriz \mathbb{W} , $\ell^{(n)} \sim \lambda_1^n$. A partir das equações

4.19 e 4.20 observa-se que $J_b^{(n)} \sim \left(r^{(0)}\right)^n$. De forma que

$$z = \frac{\ln\left[\left(r^{(0)}\right)^{-1/2}\right]}{\ln 2}$$
(4.21)

que pode ser comparado ao valor exato [21]

$$z_{\text{exato}} = \frac{\ln\left[\left(r^{(0)}\right)^{-1/2} + \left(r^{(0)}\right)^{+1/2}\right]}{\ln 2} .$$
(4.22)



Figura 4.4: Valores dos expoentes dinâmicos teórico e exato para cadeias formadas a apartir da regra 3.16 com m = 2.

Note que a qualidade da aproximação do método de MDH é boa para valores pequenos de razão inicial, figura 4.4. Note ainda que, como esperado, o processo de renormalização não prevê corretamente o valor assintótico do expoente dinâmico para $r^{(0)} \rightarrow 1$, uma vez que para esse limite as hipóteses que alicerçam o método de renormalização de MDH não são mais válidas, visto que não existe uma grande diferença entre os autoestados de energia do sistema.

Pode-se ainda estudar o comportamento do sistema para sequências relevantes, m > 2, a partir da equação 4.19. Vê-se então, que a energia, sobre o ponto crítico, escala como $\Lambda^{(n)} \sim e^{a(\ell^{(n)})^{\tilde{\omega}}}$. Assim,

$$\Lambda^{(n)} \sim J_b^{(n)} \sim e^{\frac{\ln r^{(0)}}{\lambda_2 - 1} \left(\ell^{(n)}\right)^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln \lambda_1}}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\ln r^{(0)}}{\lambda_2 - 1}, \quad \bar{\omega} = \frac{\ln \lambda_2}{\ln \lambda_1}. \tag{4.24}$$

**

Analogamente, pode-se estudar a sequência gerada pela regra de substituição 3.18 para cadeias iniciadas pela letra *b*. Como os cálculos são similares, apenas os resultados serão explicitados.

Para cadeias geradas a partir da regra de substituição 3.18, que possui expoente de flutuação geométrica $\omega = 1/2$, tem-se que $\nu = 2$ e $\beta \simeq 0.339$. Note que o valor de β difere do encontrado por Fisher no estudo de cadeias aleatórias [12], correspondente a $\beta = (3-\sqrt{5})/2 \simeq 0.382$. Note ainda que os resultados do presente trabalho diferem dos obtidos numericamente para β (0.213) e analiticamente para ν ($\frac{4}{3}$) por Iglói *et al.* para a sequência de Rudin-Shapiro [24, 25]. Portanto, o expoente de flutuação geométrica, embora defina o escalonamento dos níveis de energia na criticalidade, dado para os três casos recém-mencionados por

$$\Lambda(N) \sim e^{-cN^{\frac{1}{2}}}, \qquad (4.25)$$

não determina a classe de universalidade da transição ferromagnética.

4.2 Resultados numéricos

Para confirmar os resultados encontrados na seção anterior, análises numéricas, baseadas na técnica de férmions livres, foram realizadas e serão apresentadas, explicadas e analisadas nesta seção.

Os cálculos numéricos para cadeias contendo N + 1 spins envolvem médias sobre todas as configurações de N acoplamentos compatíveis com a regra de substituição que produz a sequência aperiódica correspondente. Na palavra aperiódica infinita, há sempre um número finito de subsequências distintas de tamanho N, cada uma das quais ocorre com uma frequência que procuramos determinar por extrapolação a partir de palavras muito grandes (cujo comprimento natural contém da ordem de 10^8 letras). Nesse processo, consideramos uma subsequência e sua simétrica por reflexão como equivalentes, de modo que todos os resultados para grandezas dependentes da posição são devidamente simetrizados. Como exemplo concreto, seja a sequência de Fibonacci, criada pela regra 3.16 com m = 1. É fácil ver que existem somente três palavras distintas formadas por N = 3 letras, a saber, *aba*, *baa* \equiv *aab*, *bab*.

4.2.1Escalonamento dinâmico

Para as distintas regras descritas por 3.16, uma análise do escalonamento dinâmico foi realizada ao estudar o comportamento da energia do primeiro estado excitado, Λ , com relação ao comprimento da cadeia, N. Os comprimentos das cadeias estudadas respeitam os comprimentos naturais de cada regra de formação, equação 3.17, a fim de minimizar os efeitos de flutuação.

Como alertado na seção anterior, espera-se que $\Lambda \sim N^{-z}$ para sequências marginais e irrelevantes, o que define um expoente crítico dinâmico z.

Para uma cadeia formada por acoplamentos seguindo a regra de Fibonacci, regra 3.16 com m = 1, espera-se que o valor do expoente dinâmico seja igual ao da rede uniforme. Assim, para a cadeia de Fibonacci z = 1, ou seja,

$$\Lambda_{m=1} \sim \frac{v\left(r^{(0)}\right)}{N} , \qquad (4.26)$$

tendo $v(r^{(0)})$, a velocidade dos férmions, valor analítico conhecido na literatura [22, 23] apud [21] e dado por

$$v\left(r^{(0)}\right) = \frac{2\ln\left(r^{(0)}\right)}{r^{(0)} - [r^{(0)}]^{-1}}.$$
(4.27)

Na figura que segue, figura 4.5, pode-se verificar a validade da equação 4.26. É importante mencionar que aos pontos foram associadas barras de erros, não incluídas na figura, proporcionais ao inverso do tamanho da cadeia para o ajuste de retas, uma vez que o resultado analítico para a obtenção do campo crítico, $\prod_j h_j = \prod_j J_j$, só é valido assintoticamente para cadeias infinitas.

Ao analisar os resultados dos diferentes expoentes dinâmicos obtidos pelos ajustes lineares aos dados referentes às distintas razões iniciais $r^{(0)}$ vê-se um grande acordo entre os valores encontrados numericamente com o expoente dinâmico teórico, z = 1, indicando que o método numérico foi realizado corretamente.

Na figura 4.6, estudo o comportamento dos dados numéricos para a velocidade dos férmions na cadeia de Fibonacci quando comparados ao resultado na equação 4.27. Note que os resultados das diferentes velocidades foram obtidos diretamente dos ajustes lineares da figura 4.5 em que o coeficiente da lei de potência foi comparado ao valor de $v(r^{(0)})$, reforçando a validade da implementação numérica.

O estudo do expoente dinâmico para sequências formadas a partir da regra 3.16 com m = 2, marginal segundo o critério heurístico de Harris-Luck, foi realizado em duas etapas. Primeiramente, estudei o comportamento do primeiro estado excitado, Λ , frente ao compri-



Figura 4.5: Estudo do escalonamento dinâmico para cadeias obtidas a partir da regra de substituição de Fibonacci. Note que o valor esperado de z = 1.

mento da cadeia, N, e em seguida, estudo a evolução do expoente dinâmico, z, em relação ao valor inicial da razão entre os acoplamentos $J_a^{(0)}$ e $J_b^{(0)}$, $r^{(0)}$.

Segundo Hermisson *et al.* [21], sequências marginais governadas pela regra de substituição $3.16 \text{ com } m = 2 \text{ têm o seguinte comportamento quanto à relação entre o primeiro estado excitado e o comprimento da cadeia,$

$$\Lambda_{m=2} \sim N^{-z(r^{(0)})} , \qquad (4.28)$$

com

$$z_{\text{exato}} = \frac{\ln\left[\left(r^{(0)}\right)^{-1/2} + \left(r^{(0)}\right)^{+1/2}\right]}{\ln 2}$$

enquanto a previsão do método aproximativo é dada por

$$z = \frac{\ln\left[\left(r^{(0)}\right)^{-1/2}\right]}{\ln 2}$$

No gráfico que segue, figura 4.7, vê-se a clara influência do valor da razão inicial entre os acoplamentos, $r^{(0)}$, no comportamento do expoente dinâmico dos sistemas governados pela regra marginal.

Para completar o estudo das cadeias marginais geradas pela regra 3.16 é necessário ana-



Figura 4.6: Estudo das velocidades dos férmions para cadeias obtidas a partir da regra de substituição de Fibonacci.

lisar o comportamento do expoente dinâmico, z, em relação a razão $r^{(0)}$.

O gráfico que segue, figura 4.8, foi realizado a partir dos expoentes dinâmicos obtidos na figura 4.7 levando em consideração os erros encontrados nos ajustes lineares.

Na figura 4.8 mostram-se não apenas os dados numéricos para os diversos valores de razão inicial, mas também a reta extraída da curva exata obtida a partir da equação 4.22, exibindo excelente concordância.

**

Sequências relevantes têm seus níveis de energia expressos teoricamente por [21]

$$\Lambda_{m>2} \sim \exp\left(-c\left|\ln\left(r^{(0)}\right)\right| N^{\omega}\right) . \tag{4.29}$$

em que ω é o expoente de flutuação geométrica e c é uma constante que pode depender do sinal de ln $(r^{(0)})$, mas é independente do valor de $r^{(0)}$ e N.

É importante nesse ponto analisar o expoente $\bar{\omega}$ encontrado em 4.24,

$$\bar{\omega} = \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1} \, .$$



Figura 4.7: Estudo do escalonamento dinâmico para cadeias obtidas a partir da regra de substituição 3.16 com m = 2 e diferentes razões $r^{(0)}$ entre os acoplamentos. As linhas correspondem a ajustes dos dados pela expressão $\Lambda(N) = AN^{-z_{aj}}$, com $z_{aj} \simeq 1.819$ para r = 1/10, $z_{aj} \simeq 3.442$ para r = 1/100 e $z_{aj} \simeq 5.216$ para r = 1/1000. Note que a estimativa para o expoente dinâmico varia com a razão inicial entre os acoplamentos.

Pode-se provar tanto analiticamente que para sequências 3.16 geradas com qualquer m

$$\bar{\omega} = \frac{\log\lambda_2}{\log\lambda_1} = \frac{|\log\lambda_-|}{\log\lambda_+} = \omega . \tag{4.30}$$

Assim, apenas reescrevendo a equação 4.24, tem-se que para o método aproximativo de MDH

$$\Lambda_{m>2} \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda_2 - 1} \ln r^{(0)} N^{\omega}\right) ,$$

$$\sim \exp\left(\frac{-1}{|\lambda_2 - 1|} \left|\ln r^{(0)}\right| N^{\omega}\right) ,$$
(4.31)

indo de acordo com o esperado teoricamente, equação 4.29.

A seguir analiso os dados para m = 3 e m = 4 seguindo o comportamento esperado, equação 4.29, para o escalonamento dinâmico de tais sistemas relevantes.

Para os dados obtidos pela regra de substituição 3.16 com m = 3 pode-se notar o grande acordo entre os dados numéricos e o comportamentos teórico, equação 4.29, para os menores valores de razão inicial em que as flutuações geométricas são menores. Note ainda que para cadeias pequenas os dados numéricos não são bem descritos pelo valor esperado uma vez



Figura 4.8: Estudo do expoente dinâmico para cadeias obtidas a partir da regra de substituição 3.16 com m = 2 e curva teórica, equação 4.22.

que os resultados teóricos são assintóticos. Conclusões análogas podem ser obtidas para a cadeia formada por m = 4, figura 4.10. Nesse caso, entretanto, em função das flutuações geométricas mais intensas, a concordância é ligeiramente inferior.

4.2.2 Magnetização de superfície e o expoente ν

A magnetização de superfície, obtida quando o spin em uma das extremidades da cadeia é fixo, é formalmente dada pela equação 2.35, e satisfaz nas proximidades do ponto crítico a forma de escala

$$m_s(\epsilon) \sim |\epsilon|^{\beta_s},$$

com $\epsilon = (1-h/h_c) e \beta_s$ um expoente crítico distinto daquele associado à magnetização de *bulk*. No ponto crítico, para cadeias finitas de tamanho N, espera-se então um comportamento para a magneização de superfície do tipo

$$m_s(N,\epsilon=0) \sim N^{-\beta_s/\nu},$$

em que ν é o expoente crítico associado ao comprimento de correlação.

A partir de um mapeamento em um problema de caminhada aleatória direcional, Iglói *et al.* [24, 25] mostram que a razão entre os expoentes críticos da magnetização de superfície e



Figura 4.9: Estudo do escalonamento dinâmico para cadeias obtidas a partir da regra de substituição 3.16 com m = 3 e ajuste do tipo $\Lambda(N) \sim A e^{-1/|\lambda_2 - 1| \ln r^{(0)} N^{\omega}}$. Note que, para cadeias grandes e baixa razão inicial entre os acoplamentos, o valor numérico é compatível com o valor encontrado analiticamente pelo método de MDH, equação 4.31.

do comprimento de correlação, em cadeias de Ising quânticas, $\beta_s/\nu = x_s$, satisfaz

$$x_s = 1 - \omega , \qquad (4.32)$$

sendo ω o expoente de flutuação geométrica da regra aperiódica.

Nas vizinhanças do ponto crítico, e para cadeias finitas, espera-se que a magnetização de superfície satisfaça a forma de escala

$$m_s(N,\epsilon) = N^{-\beta_s/\nu} \tilde{m}_s(\epsilon N^{1/\nu}),$$

em que $\tilde{m}_s(y)$ é uma função de escala bem comportada. Expandindo $\tilde{m}_s(y)$ em série de Taylor em torno de x = 0, obtém-se $\tilde{m}_s(y) = 1 + by + \cdots$, com *b* constante, e daí se conclui que

$$m_s(N,\epsilon) - m_s(N,0) \sim \epsilon N^{\Theta}$$

com

$$\Theta = \frac{1}{\nu} - x_s = \frac{1}{\nu} - 1 + \omega$$

que depende única e exclusivamente do expoente relacionado ao comprimento de correlação



Figura 4.10: Estudo do escalonamento dinâmico para cadeias obtidas a partir da regra de substituição 3.16 com m = 4 e ajuste do tipo $\Lambda(N) \sim A e^{-1/|\lambda_2 - 1| \ln r^{(0)} N^{\omega}}$. Note que o valor numérico é compatível com o valor encontrado analiticamente pelo método de MDH, equação 4.31.

do sistema e do expoente de flutuação da regra de substituição.

Para as cadeias formadas pelas regras de substituição 3.16 e 3.18, tem-se que

$$\Theta = \frac{\ln\lambda_1}{\ln^{\lambda_2/\lambda_1}} - 1 + \frac{\ln\lambda_2}{\ln\lambda_1} \equiv 0.$$
(4.33)

As figuras 4.11 e 4.12, obtidas a partir da implementação numérica da equação 2.35, confirmam, dentro da margem de erro, essa previsão para o expoente $\Theta \sim 0.045(50)$, e portanto a previsão 4.17 para o expoente ν .

4.2.3 Magnetização de *bulk* e o expoente β

O estudo da magnetização de *bulk* foi realizado em cadeias aperiódicas formadas pela regra 3.16 e que têm seus comprimentos naturais dados pela equação 3.17. Para a definição do *bulk* de cada cadeia utilizaram-se também os comprimentos naturais. Assim, para a cadeia com $\mathcal{F}(n)$ acoplamentos foram calculadas as médias de magnetização dos $\mathcal{F}(n-1)+1$ sítios centrais. É importante lembrar que este cálculo é exato no sentido em que foram levadas em consideração todas as possíveis combinações de acoplamentos com tamanho $\mathcal{F}(n)$.

Pelo critério heurístico de Harris-Luck espera-se que sequências irrelevantes não tenham



Figura 4.11: Comportamento numérico para a magnetização de superfície de cadeias marginais, sequência 3.16 com m = 2, nas proximidades do campo crítico.



Figura 4.12: Comportamento numérico para a magnetização de superfície de cadeias governadas pela sequência 3.16 com m = 3, nas proximidades do campo crítico.

seu comportamento diferenciado quando comparado ao de sistemas uniformes. Assim, esperase que esses sistemas tenham a magnetização de bulk dada, no ponto crítico, por

$$m_x \sim N^{-\beta/\nu} = N^{-1/8}$$
 (4.34)

A confirmação teórica pode ser comprovada no gráfico que segue, figura 4.13, em que é

Tabela 4.2: Valores dos expoentes críticos, $\beta \in \nu$, obtidos pelo método de renormalização no espaço real de MDH para diversos valores de m com sequências aperiódicas descritas pela regra 3.16.

m	eta	ν	β/ν
2	0.2075	1.0	0.2075
3	0.2475	1.46	0.1690
4	0.2746	1.90	0.1445

N X m_x $r^{(0)} = 0.1$ 9·10⁻¹ 1.011(21)*N ^{-0.1309(57)} $8 \cdot 10^{-1}$ -0.1317(29) 1.073(11)*N $7 \cdot 10^{-1}$ m_x $6 \cdot 10^{-1}$ $5 \cdot 10^{-1}$ 10^{2} 10^{3} 10^{0} 10^{1} N

Figura 4.13: Estudo da magnetização de *bulk* para a regra irrelevante. Note que os valores da razão β/ν são compatíveis com o valor teórico de 1/8.

possível observar o acordo entre os dados numéricos e o resultado teórico esperado.

**

Para a sequência marginal descrita por 3.16, o método de renormalizações no espaço real de Ma, Dasgupta e Hu prevê que há um salto para o expoente β , figura 4.3, que pode fluir do valor uniforme, $\beta_{unif.} = 0.125$, caso a razão entre os acoplamentos seja pequena, para um valor assintótico, $\beta_{lim.} \simeq 0.2075$, no limite em que a razão entre os acoplamentos tente a zero.

Na figura 4.14 pode-se notar claramente que o comportamento da magnetização de bulk depende não somente do tamanho da cadeia, N, mas também do valor da razão inicial entre



Figura 4.14: Estudo da magnetização de *bulk* para a regra marginal em que é possível verificar que o valor da razão inicial $r^{(0)}$ tem influência direta no valor de β .

os acoplamentos, $r^{(0)}$, deixando explícito o comportamento não-universal da regra marginal. Ainda nessa figura, é possível verificar que o comportamento do sistema flui do comportamento uniforme para o comportamento assintótico com $\beta_{lim.} \simeq 0.2075$. É importante mencionar que o valor encontrado pelo método de renormalização para o expoente associado ao comprimento de correlação independe do valor da razão inicial de forma que $\nu = 1$.

O estudo de sequências relevantes é delicado uma vez que faz-se necessária a análise de redes com um número grande de spins. No entanto, o cálculo numérico para a obtenção dos autovalores e autovetores da matriz \mathbf{T} torna-se cada vez mais instável. É imprescindível então a escolha "correta" da razão entre os acoplamentos iniciais de forma a minimizar tais efeitos. Uma maneira de conferir se os dados são confiáveis é analisar se as autoenergias da matriz \mathbf{T} vêm realmente aos pares com sinais trocados. Caso isso não seja reproduzido pode-se afirmar que há instabilidade numérica. Isso é justamente o que ocorre nos cálculos correpondentes a cadeias com tamanho da ordem de 1000 spins com m = 3, o que torna duvidosos os pontos mais à direita na figura 4.15.

Na figura 4.15 vê-se uma possível influência da flutuação numérica aos dados referentes à razão $r^{(0)} = 0.1$ para a sequência aperiódica governada pela regra 3.16 obtida para m = 3. Nessa mesma figura vê-se a curva teórica obtida pelo método aproximativo de MDH.



Figura 4.15: Estudo da magnetização de *bulk* para a regra 3.16 com m = 3.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho foi possível verificar que o método aproximativo de Ma, Dasgupta e Hu pode ser utilizado no estudo das transições de fase quântica de cadeias aperiódicas determinísticas do modelo XY.

A confirmação dos resultados foi realizada com o emprego da técnica de férmions livres aplicada ao modelo de Ising sob ação de campo transverso, limite de anisotropia máxima $\gamma =$ 1, uma vez que se verificou que, após alguns passos de renormalização nos moldes de MDH, cadeias XY com anisotropia não-nula $\gamma \neq 1$ fluem para o ponto fixo estável representado por aquele modelo. Os resultados para o expoente crítico associado ao comprimento de correlação ν foram postos à prova frente a previsões baseadas em um mapeamento do modelo de Ising na presença de um campo transverso em um problema de caminhada aleatória direcional e de resultados numericamente exatos para a magnetização de superfície.

O escalonamento dinâmico dos diferentes modelos foi comparado com o comportamento esperado e verificou-se o acordo entre os dados numéricos, os dados obtidos pelo método de renormalização de MDH e o comportamento esperado pelo método exato de renormalização de Hermisson *et al.*.

Enfatizo que o estudo numérico é complicado uma vez que os resultados obtidos são válidos para o limite termodinâmico, assim, faz-se necessário o estudo de cadeias "grandes", no entanto, tal estudo é dificultado uma vez que não apenas o tempo de cálculo, mas também a qualidade dos resultados obtidos, são afetados quando do estudo de cadeias aperiódicas com muito sítios. Dessa forma, é necessário um estudo preliminar do valor máximo da razão inicial $r^{(0)}$ para cada cadeia e para cada sequência específica. Acreditamos a análise das autoenergias da matriz **T** é um método válido para esse estudo.

Foi possível confirmar o critério heurístico de Harris-Luck para os modelos empregados em que ficou explícito que sequências com expoente de flutuação irrelevante não têm seu comportamento alterado, ao passo que que modelos relevante, segundo tal critério, possuem expoentes críticos distintos dos encontrados no sistema uniforme. Ficou evidente que a sequência marginal é diretamente influenciada pelo valor inicial da razão entre os acoplamentos. Algumas perguntas, que acreditamos serem relevantes, foram levantadas ao estudar e analisar o método de renormalização empregado. Para as sequências estudadas os dois maiores autovalores associados à matriz de substituição e à matriz que computa as renormalizações podem ser relacionados da seguinte maneira, $\lambda_{+}^2 = \lambda_1$ e $\lambda_{-}^2 = \lambda_2$. Quando isso é verdade? Acreditamos isso ocorra toda vez em que seja possível "associar" a cadeia original com a cadeia renormalizada 2 etapas do método. Será que para um sistema em que são necessários n etapas de renormalização teríamos $\lambda_{+}^n = \lambda_1$?

Outra pergunta que nos pareceu ainda mais intrigante foi, por que o maior autovalor λ da matriz associada à evolução dos "comprimentos" das ligações e o maior autovalor da matriz de substituição λ_1 são iguais?

E importante mencionar que ainda é possível, a partir do método de MDH, calcular o expoente da lei de potência que deve reger as funções de correlação entre spins na criticalidade, bem como estudar a forma de escala da magnetização espontânea, também na criticalidade, como função de um campo longitudinal. Esses cálculos, bem como sua eventual verificação numérica (que no caso da magnetização na presença de um campo longitudinal não pode ser realizada pela técnica de férmions livres), serão objeto de estudos futuros. Apêndices

Apêndice A

Cálculos semi-explícitos de renormalização

Nas subseções que seguem, tem-se a adaptação do método de Ma-Dasgupta-Hu para algumas configurações de spins do hamiltoniano XY.

A.1 Definição do hamiltoniano

Como descrito no capítulo 1 o hamiltoniano a ser estudada será:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} J_j \left[(1+\gamma_j) \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\gamma_j) \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right] - \sum_{j=1}^N h_j \sigma_j^z .$$
(A.1)

No entanto, a partir da definição das matrizes abaixamento e levantamento σ^+ e σ^- na base de σ^z pode-se reescrever o hamiltoniano como:

$$\mathcal{H} = -\sum_{j=1}^{N-1} J_j \left[(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^-) \gamma_j + (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) \right] - \sum_{j=1}^N h_j \sigma_j^z , \qquad (A.2)$$

que será muito útil no estudo que segue.

A seguir tem-se o estudo da renormalização no espaço real à luz da teoria desenvolvida por Ma, Dasgupta, Hu para alguns casos que serão necessários ao analisar uma cadeia infinita.

A.2 Interação de 1+2 spins

Seja a configuração de spins dada pela Figura A.1 com a condição $h_2 \gg J_1, J_2, h_1, h_3$. Tem-se assim que pode-se estimar o "gap" em energia do hamiltoniano total a partir



Figura A.1: Interação de 1 + 2 spins.

do "gap" de

$$\mathcal{H}_0 = -h_2 \sigma_2^z \tag{A.3}$$

que tem como autoenergias $E_0 = -h_2$ e $E_1 = h_2$ associadas aos autoestados $|\Psi_0\rangle_{a,b} = |a, +, b\rangle$ e $|\Psi_1\rangle_{a,b} = |a, -, b\rangle$, com a e b as projeções de σ^z para o primeiro e o terceiro sítio, respectivamente. \mathcal{H}_0 terá como perturbação

$$V = -J_1 \left[(\sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^-) \gamma_1 + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) \right] + -J_2 \left[(\sigma_2^+ \sigma_3^+ + \sigma_2^- \sigma_3^-) \gamma_2 + (\sigma_2^+ \sigma_3^- + \sigma_2^- \sigma_3^+) \right] + -h_1 \sigma_1^z - h_3 \sigma_3^z ,$$
(A.4)

e pode-se provar que:

$$_{a,b}\langle \Psi_0 | V | \Psi_0 \rangle_{c,d} = -h_1 - h_3$$
 (A.5)

$${}_{a,b}\langle\Psi_0|V|\Psi_1\rangle_{c,d} = -{}_{a,b}\langle\Psi_0|J_1(\gamma_1\sigma_1^+ + \sigma_1^-) + J_2(\gamma_2\sigma_3^+ + \sigma_3^-)|\Psi_0\rangle_{c,d}.$$
(A.6)

O hamiltoniano do problema, \mathcal{H} , pode ser aproximado, perturbativamente, por

$$\mathcal{H} \sim \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 +_{a,b} \langle \Psi_0 | V | \Psi_0 \rangle_{c,d} + \sum_{c,d} \frac{a_{,b} \langle \Psi_0 | V | \Psi_1 \rangle_{c,d\ c,d} \langle \Psi_1 | V | \Psi_0 \rangle_{e,f}}{E_0 - E_1} , \qquad (A.7)$$

e tem-se, assim, que

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{J_1 J_2}{2h_2} (\gamma_1 \gamma_2 + 1) \left[(\sigma_1^+ \sigma_3^+ + \sigma_1^- \sigma_3^-) \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1} + (\sigma_1^+ \sigma_3^- + \sigma_1^- \sigma_3^+) \right] + \\
- \left[\frac{J_1^2 (\gamma_1^2 - 1)}{h_2} + h_1 \right] \sigma_1^z - \left[\frac{J_2^2 (\gamma_2^2 - 1)}{h_2} + h_3 \right] \sigma_3^z + \\
- \frac{J_1^2 (\gamma_1^2 + 1)}{2h_2} - \frac{J_2^2 (\gamma_2^2 + 1)}{2h_2} \cdot \frac{h_1}{J_1} \stackrel{h_2}{\bigcirc} \frac{h_3}{J_2} \stackrel{h_3}{\bigcirc} \\$$
(A.8)

Vê-se assim que houve uma renormalização das contantes de acoplamento bem como dos campos magnéticos associados, ou seja,





(A.9) Figura A.2: Interação de 1 + 2 spins renormalizada.

É importante notar que $\tilde{\gamma} - \gamma$ é uma função positiva no intervalo $\gamma \in [0, 1]$ quando $\gamma_1 = \gamma = \gamma_2$, ou seja, a cada nova renormalização o valor de $\tilde{\gamma}$ tende ao ponto fixo estável $\gamma^* = 1$. Uma descrição gráfica da renormalização pode ser visualizada na Figura A.2.

Limites

 \mathcal{H}_{xx} O modelo XX pode ser obtido a partir de A.1 quanto se toma $\gamma_j \equiv 0$, assim,

$$\tilde{J}_{xx} = \frac{J_1 J_2}{2h_2}, \ \tilde{\gamma}_{xx} = 0, \ \tilde{h}_{1_{xx}} = \frac{-J_1^2}{2h_2} + h_1, \ \tilde{h}_{3_{xx}} = \frac{-J_2^2}{2h_2} + h_3.$$
(A.10)

 \mathcal{H}_x O modelo de Ising em um campo transverso pode ser obtido a partir de A.1 quanto se toma $\gamma_j \equiv 1$, assim,

$$\tilde{J}_x = \frac{J_1 J_2}{h_2}, \ \tilde{\gamma}_x = 1, \ \tilde{h}_{1x} = h_1, \ \tilde{h}_{3x} = h_3 .$$
 (A.11)

Teste Vejamos como podem ser escritas $\mathcal{H} \in \tilde{\mathcal{H}}$, equação A.8, para a configuração com 3 spins da figura A.2.

$$\mathcal{H} = \left(\begin{array}{cc} M+N & 0\\ 0 & M-N \end{array}\right) \tag{A.12}$$

com:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -J_1\gamma_1 & -J_2\gamma_2 & 0 \\ -J_1\gamma_1 & 0 & 0 & -J_2 \\ -J_2\gamma_2 & 0 & 0 & -J_1 \\ 0 & -J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}$$
 (A.13)

$$N = \begin{pmatrix} -h_1 - h_2 - h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 + h_2 - h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_1 + h_2 + h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 - h_2 + h_3 \end{pmatrix}.$$
 (A.14)

$$\tilde{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3 & -\tilde{J}\tilde{\gamma} & 0 & 0\\ -\tilde{J}\tilde{\gamma} & \tilde{h}_1 + \tilde{h}_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\tilde{h}_1 + \tilde{h}_3 & -\tilde{J}\\ 0 & 0 & -\tilde{J} & \tilde{h}_1 - \tilde{h}_3 \end{pmatrix}$$
(A.15)

com $\tilde{J}, \tilde{h}_j, \tilde{\gamma}$ dados pela equação A.9.

Obtém-se assim que as diferenças entre os diversos níveis de energia e o nível de energia fundamental são:

• $J_i = 1, \gamma_i = 1, h_1 = h_3 = 1, h_2 = 10$ $\Delta_{\mathcal{H}} = 1.6117127, 2.3889869, 4.0006997, 20.777274, 22.388987, 23.166261, 24.777974 e$ $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 1.6396078, 2.4396078, 4.0792156$

•
$$J_i = 1, \gamma_i = 1, h_1 = h_3 = 1, h_2 = 100$$

 $\Delta_{\mathcal{H}} = 1.960012, 2.039988, 4.0000001, 200.07998, 202.03999, 202.11996, 204.07998 e$ $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 1.9604, 2.0404, 4.0007999$ • $J_i = 1, \gamma_i = 0, h_1 = h_3 = 1, h_2 = 10$

 $\Delta_{\mathcal{H}} = 1.5660189, \, 2., \, 3.5660189, \, 20.433981, \, 22., \, 22.433981, \, 24. \ \mathrm{e}$ $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 1.6, \, 2., \, 3.6$

•
$$J_i = 1, \gamma_i = 0, h_1 = h_3 = 1, h_2 = 100$$

 $\Delta_{\mathcal{H}} = 1.9596042, 2., 3.9596042, 200.0404, 202., 202.0404, 204.$
 $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 1.96, 2., 3.96$

Note que o método de renormalização descreve bem os 3 primeiros níveis exitados do sistema, que são separados das demais excitações de alta energia por um "gap" da ordem de $2h_2$.

A.3 Interação de 2+2 spins

Seja a configuração de spins dada pela Figura A.3 com a condição $J \gg J_r, J_l, h_l, h_1, h_2, h_r$. Para o estudo do "gap" em energia do hamiltoniano total é necessário analisar o problema de duas maneiras distintas, uma vez que o estado fundamental torna-se degenerado



е

Figura A.3: Interação de 2 + 2 spins.

quando $\gamma=1.$ Assim, estudarei o problema quando $\gamma\neq 1$ e quando $\gamma\sim 1.$

Primeiro caso, $0 < \gamma \ll 1$

Quando $0 < \gamma \ll 1$ pode-se estudar o "gap" original a partir do "gap" de

$$\mathcal{H}_{0} = -J\left[(\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{-})\gamma + (\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{+})\right]$$
(A.16)

que tem como autoenergias $E_1 = -J$, $E_2 = -J\gamma$, $E_3 = J\gamma$ e $E_4 = J$, associadas aos autoestados $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle+|-+\rangle), |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle+|--\rangle), |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle-|--\rangle)$ e $|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle).^1$

O estado fundamental de \mathcal{H}_0 terá como perturbação

$$V = -J_{l} \left[(\sigma_{l}^{+} \sigma_{1}^{+} + \sigma_{l}^{-} \sigma_{1}^{-}) \gamma_{l} + (\sigma_{l}^{+} \sigma_{1}^{-} + \sigma_{l}^{-} \sigma_{1}^{+}) \right] + -J_{r} \left[(\sigma_{2}^{+} \sigma_{r}^{+} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{r}^{-}) \gamma_{r} + (\sigma_{2}^{+} \sigma_{r}^{-} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{r}^{+}) \right] + -h_{l} \sigma_{l}^{z} - h_{1} \sigma_{1}^{z} - h_{2} \sigma_{2}^{z} - h_{r} \sigma_{r}^{z} .$$
(A.17)

¹Note que os subíndices referem-se única e exclusivamente ao ordenamento dos níveis de energia.

Como nos restringimos ao caso em que $0 < \gamma \ll 1$, o estado fundamental corresponde a $|\Psi_1\rangle$.

Pode-se provar que

$$\langle \Psi_2 | V | \Psi_1 \rangle = -\frac{J_l}{2} (\gamma_l + 1) (\sigma_l^+ + \sigma_l^-) - \frac{J_r}{2} (\gamma_r + 1) (\sigma_r^+ + \sigma_r^-)$$
(A.18)

$$\langle \Psi_3 | V | \Psi_1 \rangle = -\frac{J_l}{2} (\gamma_l - 1) (\sigma_l^+ - \sigma_l^-) - \frac{J_r}{2} (\gamma_r - 1) (\sigma_r^+ - \sigma_r^-)$$
(A.19)

$$\langle \Psi_1 | V | \Psi_1 \rangle = 0 \tag{A.20}$$

$$\langle \Psi_4 | V | \Psi_1 \rangle = -h_1 + h_2 , \qquad (A.21)$$

assim, tem-se que, usando V como hamiltoniano perturbativo de \mathcal{H}_0 ,

$$\tilde{\mathcal{H}}_{0 \leq \gamma < 1} = -\frac{J_l J_r}{2J} \left[\frac{(\gamma_l - 1)(\gamma_r - 1)}{\gamma + 1} - \frac{(\gamma_l + 1)(\gamma_r + 1)}{\gamma - 1} \right] \times \\
\times \left[(\sigma_l^+ \sigma_r^+ + \sigma_l^- \sigma_r^-) \frac{(\gamma_l + 1)(\gamma_r + 1)(\gamma + 1) + (\gamma_l - 1)(\gamma_r - 1)(\gamma - 1)}{(\gamma_l + 1)(\gamma_r + 1)(\gamma_r + 1)(\gamma_r - 1)(\gamma_r - 1)(\gamma_r - 1)} + (\sigma_l^+ \sigma_r^- + \sigma_l^- \sigma_r^+) \right] + \\
-h_l \sigma_l^z - h_r \sigma_r^z - \frac{(-h_1 + h_2)^2}{2J} + \frac{J_l^2 (\gamma_l + 1)^2 + J_r^2 (\gamma_r + 1)^2}{4J(\gamma - 1)} - \frac{J_l^2 (\gamma_l - 1)^2 + J_r^2 (\gamma_r - 1)^2}{4J(\gamma + 1)} .$$
(A.22)

Vê-se assim que houve uma renormalização das constantes de acoplamento, ou seja,

$$\tilde{J}_{\substack{0 \le \gamma < 1 \\ \gamma > 1}} = \frac{J_l J_r}{2J} \left[\pm \frac{(\gamma_l - 1)(\gamma_r - 1)}{\gamma + 1} \mp \frac{(\gamma_l + 1)(\gamma_r + 1)}{\gamma - 1} \right],$$

$$\tilde{\gamma}_{\substack{0 \le \gamma < 1 \\ \gamma > 1}} = \frac{(\gamma_l + 1)(\gamma_r + 1)(\gamma + 1) + (\gamma_l - 1)(\gamma_r - 1)(\gamma - 1)}{(\gamma_l + 1)(\gamma_r + 1)(\gamma_r - 1)(\gamma_r - 1)(\gamma - 1)}.$$
(A.23)

É importante notar que $\tilde{\gamma} - \gamma$ é uma função positiva no intervalo $\gamma \in [0, 1)$ quando $\gamma_l = \gamma = \gamma_r$, ou seja, a cada nova renormalização o valor de $\tilde{\gamma}$ tende ao ponto fixo estável $\gamma^* = 1$. Uma descrição gráfica da renormalização pode ser visualizada na Figura A.4.



Figura A.4: Interação de 2+2 spins renormalizada para $\gamma \neq 1$.

Limite

 \mathcal{H}_{xx} Para o modelo \mathcal{H}_{xx} tem-se:

$$\tilde{J}_{xx} = \frac{J_l J_r}{J}, \ \tilde{\gamma}_{xx} = 0 \ . \tag{A.24}$$

Recuperando os resultados obtidos por D. Fisher em [44].

Teste $\tilde{\mathcal{H}}_{\gamma\neq 1}$ pode ser escrita como:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\gamma \neq 1} = \begin{pmatrix} -h_l - h_r & -\tilde{J}\tilde{\gamma} & 0 & 0\\ -\tilde{J}\tilde{\gamma} & h_l + h_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & -h_l + h_r & -\tilde{J}\\ 0 & 0 & -\tilde{J} & h_l - h_r \end{pmatrix}$$
(A.25)

com $\tilde{J} \in \tilde{\gamma}$ dados pela equação A.23.

Obtém-se, assim, que as diferenças entre os diversos níveis de energia e o nível de energia fundamental são:

- $J_l = J_r = 1, J = 10, \gamma_i = 0.5, h_i = 1$ $\Delta_{\mathcal{H}} = 1.5333273, 2.4265735, 3.9599008, 10.658062, 12.191389, 13.084635, 14.617963, 30.235184, 31.768512, 32.661758, 34.195085, 40.893246, 42.426573, 43.31982, 44.853147 e$ $<math>\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 1.5797394, 2.5130727, 4.0928121$
- $J_l = J_r = 1, J = 10, \gamma_i = 0, h_i = 1$

$$\begin{split} \Delta_{\mathcal{H}} &= 1.801961,\, 2.198039,\, 4.,\, 18.198039,\, 20.,\, 20.396078,\, 22.198039,\, 22.198039,\, 24.,\\ 24.396078,\, 26.198039,\, 40.396078,\, 42.198039,\, 42.594117,\, 44.396078 \text{ e}\\ \Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} &= 1.8,\, 2.2,\, 4. \end{split}$$

Note que o "gap" entre excitações de baixa e alta energia é da ordem de $2J(1-\gamma)$.

A.3.1 Segundo caso, $\gamma \lesssim 1$

Quando $\gamma \lesssim 1$ pode-se estudar o "gap" original a partir do "gap" de

$$\mathcal{H}_0 = -J\left[(\sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^-) + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) \right] , \qquad (A.26)$$

correspondente a dois spins interagindo por um acoplamento do tipo Ising,

$$\mathcal{H} = -J\sigma_1^x \sigma_2^x , \qquad (A.27)$$

com perturbação

$$V = -J(\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{-})(\gamma - 1) +$$

$$-J_{l}\left[(\sigma_{l}^{+}\sigma_{1}^{+} + \sigma_{l}^{-}\sigma_{1}^{-})\gamma_{l} + (\sigma_{l}^{+}\sigma_{1}^{-} + \sigma_{l}^{-}\sigma_{1}^{+})\right] +$$

$$-J_{r}\left[(\sigma_{2}^{+}\sigma_{r}^{+} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{r}^{-})\gamma_{r} + (\sigma_{2}^{+}\sigma_{r}^{-} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{r}^{+})\right] +$$

$$-h_{l}\sigma_{l}^{z} - h_{1}\sigma_{1}^{z} - h_{2}\sigma_{2}^{z} - h_{r}\sigma_{r}^{z}.$$
(A.28)

Neste caso o hamiltoniano \mathcal{H}_0 é degenerado em energia e é necessário calcular a contribuição de termos $\langle \Psi_1 | V | \Psi_2 \rangle$ e $\langle \Psi_1 | V | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | V | \Psi_2 \rangle$ para primeira e segunda ordem de perturbação, respectivamente. É conveniente neste ponto notar que não era possível tomar o limite da expressão A.23 pois $\lim_{\gamma \to 1^+} \tilde{J} \neq \lim_{\gamma \to 1^-} \tilde{J}$, fisicamente, para $\gamma = 1$, o estado fundamental torna-se duplamente degenerado, invalidando o tratamento anterior.

Note antes que

$$\langle \Psi_2 | V | \Psi_2 \rangle = -J(\gamma - 1) \tag{A.29}$$

$$\langle \Psi_3 | V | \Psi_2 \rangle = -h_1 - h_2 \tag{A.30}$$

$$\langle \Psi_1 | V | \Psi_2 \rangle = -\frac{J_l}{2} (\gamma_l + 1) (\sigma_l^+ + \sigma_l^-) - \frac{J_r}{2} (\gamma_r + 1) (\sigma_r^+ + \sigma_r^-)$$
(A.31)

$$\langle \Psi_4 | V | \Psi_2 \rangle = -\frac{J_l}{2} (\gamma_l - 1) (\sigma_l^+ - \sigma_l^-) - \frac{J_r}{2} (\gamma_r - 1) (-\sigma_r^+ + \sigma_r^-)$$
(A.32)

$$\langle \Psi_2 | V | \Psi_1 \rangle = -\frac{J_l}{2} (\gamma_l + 1) (\sigma_l^+ + \sigma_l^-) - \frac{J_r}{2} (\gamma_r + 1) (\sigma_r^+ + \sigma_r^-)$$
(A.33)

$$\langle \Psi_3 | V | \Psi_1 \rangle = -\frac{J_l}{2} (\gamma_l - 1) (\sigma_l^+ - \sigma_l^-) - \frac{J_r}{2} (\gamma_r - 1) (\sigma_r^+ - \sigma_r^-)$$
(A.34)

$$\langle \Psi_1 | V | \Psi_1 \rangle = 0 \tag{A.35}$$

$$\langle \Psi_4 | V | \Psi_1 \rangle = -h_1 + h_2 .$$
 (A.36)

Assim, considerando apenas termos de primeira e segunda ordem em teoria de perturbação tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\gamma \lesssim 1} &= -J_l \left[\frac{\gamma_l + 1}{2} - h_2 \frac{\gamma_l - 1}{2J} \right] \left\{ (\sigma_l^+ \sigma_{12}^+ + \sigma_l^- \sigma_{12}^-) \left[\frac{2J(\gamma_l + 1) + h_2(\gamma_l - 1)}{2J(\gamma_l + 1) - h_2(\gamma_l - 1)} \right] + (\sigma_l^+ \sigma_{12}^- + \sigma_l^- \sigma_{12}^+) \right\} + \\ &- J_r \left[\frac{\gamma_r + 1}{2} - h_1 \frac{\gamma_r - 1}{2J} \right] \left\{ (\sigma_{12}^+ \sigma_r^+ + \sigma_{12}^- \sigma_r^-) \left[\frac{J(\gamma_r + 1) + h_1(\gamma_r - 1)}{J(\gamma_r + 1) - h_1(\gamma_r - 1)} \right] + (\sigma_{12}^+ \sigma_r^- + \sigma_{12}^- \sigma_r^+) \right\} + \\ &- \frac{J_l J_r}{4J} (\gamma_l - 1)(\gamma_r - 1) \left[(\sigma_l^+ \sigma_r^+ + \sigma_l^- \sigma_r^-) - (\sigma_l^+ \sigma_r^- + \sigma_l^- \sigma_r^+) \right] \sigma_{12}^z + \\ &- h_l \sigma_l^z - \left[\frac{J}{2} (\gamma - 1) + \frac{h_1 h_2}{J} \right] \sigma_{12}^z - h_r \sigma_r^z - \frac{J}{2} (\gamma - 1) - \frac{h_1^2 + h_2^2}{2J} - \frac{J_l^2 (\gamma_l - 1)^2 + J_r^2 (\gamma_r - 1)^2}{8J} , \end{aligned}$$
(A.37)

em que σ_{12} pode ser entendido como uma variável de spin efetiva, uma vez que o termo perturbativo de segunda ordem, $\langle \Psi_{1,2}|V|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|V|\Psi_{1,2}\rangle$, "acopla" os spins $\sigma_l \in \sigma_r$ por uma matriz proporcional a σ^z .

Vê-se claramente que A.37 não pode ser comparada ao hamiltoniano A.2 uma vez que existe um termo em que o acoplamento entre três spins é não nulo, representado pela linha tracejada na Figura A.5. É conveniente, no entanto, notar que este termo terá uma contribuição



Figura A.5: Interação entre 2 + 2spins renormalizada para $\gamma \lesssim 1$.

menor que os demais quando $\gamma_i \sim 1$.

- **Limite** Quando $\gamma_i \equiv 1$ pode-se comparar A.37 com A.2.
- \mathcal{H}_x Note que houve apenas a renormalização do campo magnético no limite de Ising, tal que:

$$\tilde{h}_x = \frac{h_1 h_2}{J}, \ \tilde{J}_l = J_l, \ \tilde{\gamma}_l = 1, \ \tilde{J}_r = J_r, \ \tilde{\gamma}_r = 1$$
 (A.38)

Teste Quando $\gamma_i \equiv 1$ tem-se:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\gamma_i \equiv 1} = \begin{pmatrix} O+P & 0\\ 0 & O-P \end{pmatrix}$$
(A.39)

com:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{J}_{l}\tilde{\gamma}_{l} & -\tilde{J}_{r}\tilde{\gamma}_{r} & 0 \\ -\tilde{J}_{l}\tilde{\gamma}_{l} & 0 & 0 & -\tilde{J}_{r} \\ -\tilde{J}_{r}\tilde{\gamma}_{r} & 0 & 0 & -\tilde{J}_{l} \\ 0 & -\tilde{J}_{r} & -\tilde{J}_{l} & 0 \end{pmatrix}$$
 (A.40)

$$P = \begin{pmatrix} -h_l - \tilde{h} - h_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & h_l + \tilde{h} - h_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & -h_l + \tilde{h} + h_r & 0\\ 0 & 0 & 0 & h_l - \tilde{h} + h_r \end{pmatrix},$$
(A.41)

em que as constante \tilde{J}_l , \tilde{J}_r e \tilde{h} são dadas em A.38.

Assim, pode-se obter os "gap's" em energia.

• $J_l = J_r = 1, J = 10, \gamma_i = 1, h_i = 1$

$$\begin{split} \Delta_{\mathcal{H}} &= 0.0199884, \, 4.4276085, \, 4.4475969, \, 4.5083738, \, 4.5283622, \, 8.9359822, \, 8.9559707, \\ 40.100754, \, 40.120742, \, \, 44.528362, \, 44.548351, \, 44.609128, \, 44.629116, \, 49.036736, \\ 49.056724 \ \mathrm{e} \end{split}$$

 $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0.0199984, \, 4.4324929, \, 4.4524913, \, 4.5124945, \, 4.5324929, \, 8.9449874, \, 8.9649858$

• $J_l = J_r = 1, J = 100, \gamma_i = 1, h_i = 1$

$$\begin{split} &\Delta_{\mathcal{H}} = 0.0020000, \, 4.4680944, \, 4.4700944, \, 4.4760952, \, 4.4780952, \, 8.9441896, \, 8.9461896, \\ &400.01, \, 400.012, \, \, 404.4781, \, 404.4801, \, 404.4861, \, 404.4881, \, 408.95419, \, 408.95619 \, \mathrm{e} \\ &\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0.0020000, \, 4.4681395, \, 4.4701395, \, 4.4761395, \, 4.4781395, \, 8.9442791, \, 8.9462791 \end{split}$$

A.3.2 Renormalização do acoplamento entre três spins

Vê-se na equação A.37 que existe um termo não nulo que acopla três spins quando $\gamma_l \neq 1$ e $\gamma_r \neq 1$. Nesta subseção estudarei o efeito deste termo quando renormalizado.

Estudarei alguns casos distintos. Apenas os resultados da perturbação até segunda ordem serão apresentados nesta subseção.

* Primeiro caso

Para o caso descrito pela Figura A.6 com $h_3 \gg J_1, J_2, J, J, h_1, h_2, h_4$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -J_1 \left[(\sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^-) \gamma_1 + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) \right] + \\ &- J_2 \left[(\sigma_2^+ \sigma_3^+ + \sigma_2^- \sigma_3^-) \gamma_2 + (\sigma_2^+ \sigma_3^- + \sigma_2^- \sigma_3^+) \right] + \\ &- \mathcal{J} \left[(\sigma_1^+ \sigma_3^+ + \sigma_1^- \sigma_3^-) - (\sigma_1^+ \sigma_3^- + \sigma_1^- \sigma_3^+) \right] \sigma_2^z + \\ &- J \left[(\sigma_3^+ \sigma_4^+ + \sigma_3^- \sigma_4^-) \gamma_3 + (\sigma_3^+ \sigma_4^- + \sigma_3^- \sigma_4^+) \right] + \\ &- h_1 \sigma_1^z - h_2 \sigma_2^z - h_3 \sigma_3^z - h_4 \sigma_4^z \;. \end{aligned}$$



Figura A.6: Interação entre 3 + 1 spins renormalizada.

$$\begin{split} \tilde{\mathcal{H}} &= -\left[J_{1} - \frac{J_{2}\mathcal{J}(\gamma_{2}+1)}{2h_{3}}\right] \left[\left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{-}\right) \frac{2J_{1}\gamma_{1}h_{3} + J_{2}\mathcal{J}(\gamma_{2}+1)}{2J_{1}h_{3} - J_{2}\mathcal{J}(\gamma_{2}+1)} + \left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{+}\right) \right] + \\ &- \frac{J_{2}\mathcal{J}(1+\gamma_{2}\gamma_{3})}{2h_{3}} \left[\left(\sigma_{2}^{+}\sigma_{4}^{+} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{4}^{-}\right) \frac{\gamma_{2}+\gamma_{3}}{1+\gamma_{2}\gamma_{3}} + \left(\sigma_{2}^{+}\sigma_{4}^{-} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{4}^{+}\right) \right] + \\ &- \frac{\mathcal{J}J(1-\gamma_{3})}{2h_{3}} \left[\left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{4}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{4}^{-}\right) - \left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{4}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{4}^{+}\right) \right] \sigma_{2}^{z} + \\ &- h_{1}\sigma_{1}^{z} - \left[h_{2} + \frac{J_{2}^{2}(\gamma_{2}^{2}-1)}{4h_{3}}\right] \sigma_{2}^{z} - \left[h_{4} + \frac{J^{2}(\gamma_{3}^{2}-1)}{4h_{3}}\right] + cte \;. \end{split}$$
(A.43)

Na equação A.43 nota-se que existe um termo em que o acoplamento entre 3 spins é novamente não nulo, no entanto, convém notar que este termo terá uma contribuição menor que os demais quando $\gamma_i \rightarrow 1$.

* Segundo caso

Para o caso descrito pela Figura A.7 com $J \gg J_1, J_2, J_r, \mathcal{J}, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$ será necessário estudar mais dois casos em específico.



Figura A.7: Interação entre 3 + 1 + 1 spins.

**

 $\mathcal{\widetilde{H}}$

Novamente, tem-se a existência do termo que acopla 3 spins. Pode-se notar, a partir da equação A.45, que o termo em questão terá contribuição menor para $\gamma_i \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{H}} = -J_1 \left[(\sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^-) \gamma_1 + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) \right] + \\ &- \frac{J_2(\gamma_2 + 1)}{2} \left[1 - \frac{h_4}{2J} \right] \left[(\sigma_2^+ \sigma_{12}^+ + \sigma_2^- \sigma_{12}^-) \frac{2J + h_4}{2J - h_4} + (\sigma_2^+ \sigma_{12}^- + \sigma_2^- \sigma_{12}^+) \right] + \\ &- \frac{J_r(\gamma_r + 1)}{2} \left[1 - \frac{h_3}{2J} \right] \left[(\sigma_5^+ \sigma_{12}^+ + \sigma_5^- \sigma_{12}^-) \frac{2J + h_3}{2J - h_3} + (\sigma_5^+ \sigma_{12}^- + \sigma_5^- \sigma_{12}^+) \right] + \\ &- \frac{J_2 J_r}{4J} (\gamma_2 - 1) (\gamma_r - 1) \left[(\sigma_2^+ \sigma_5^+ + \sigma_2^- \sigma_5^-) - (\sigma_2^+ \sigma_5^- + \sigma_2^- \sigma_5^+) \right] \sigma_{12}^z + \\ &- \frac{J_r \mathcal{A}}{2J} \left[(\sigma_1^+ \sigma_{12}^+ + \sigma_1^- \sigma_{12}^-) - (\sigma_1^+ \sigma_{12}^- + \sigma_1^- \sigma_{12}^+) \right] \sigma_2^z + \\ &- \frac{J_r \mathcal{A}}{2J} (\gamma_r - 1) \left[(\sigma_1^+ \sigma_5^+ + \sigma_1^- \sigma_5^-) - (\sigma_1^+ \sigma_5^+ + \sigma_1^- \sigma_5^-) \right] \sigma_2^z \sigma_{12}^z + \\ &- h_1 \sigma_1^z - h_2 \sigma_2^z \left[\frac{J}{2} (\gamma - 1) + \frac{h_3 h_4}{J} \right] \sigma_{12}^z - h_5 \sigma_5^z + cte . \end{aligned}$$

Na equação A.46 há termos não desejados, dois em que ocorre o acoplamento entre 3 spins e outro em que existe o acoplamento entre 4 spins.

É conveniente neste ponto notar que $\mathcal{J} = \mathcal{O}((\gamma_i - 1)^2)$, para tal basta comparar as equações A.37 e A.44, assim, tem-se mais uma vez que os termos "indesejáveis" contribuem de maneira menos significativa quando $\gamma_i \to 1$.

* Terceiro caso

Para o caso descrito pela Figura A.9 com $h_3 \gtrsim J_1, J_2, J_3, J_4, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, h_1, h_2, h_4, h_5$ tem-se:

$$\gg \stackrel{h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4 \quad h_5}{\underbrace{J_1 \quad J_2 \quad \downarrow \quad J_3 \quad J_4}}_{J_1 \quad J_2 \quad \downarrow \quad J_3 \quad J_4}$$

Figura A.9: Interação entre 5 spins renormalizada.

$$\mathcal{H} = -J_{1} \left[(\sigma_{1}^{+} \sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{2}^{-}) \gamma_{1} + (\sigma_{1}^{+} \sigma_{2}^{-} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{2}^{+}) \right] + \\ -J_{2} \left[(\sigma_{2}^{+} \sigma_{3}^{+} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{3}^{-}) \gamma_{2} + (\sigma_{2}^{+} \sigma_{3}^{-} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{3}^{+}) \right] + \\ -\mathcal{J}_{1} \left[(\sigma_{1}^{+} \sigma_{3}^{+} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{3}^{-}) - (\sigma_{1}^{+} \sigma_{3}^{-} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{3}^{+}) \right] \sigma_{2}^{z} + \\ -J_{3} \left[(\sigma_{3}^{+} \sigma_{4}^{+} + \sigma_{3}^{-} \sigma_{4}^{-}) \gamma_{3} + (\sigma_{3}^{+} \sigma_{4}^{-} + \sigma_{3}^{-} \sigma_{4}^{+}) \right] + \\ -J_{4} \left[(\sigma_{4}^{+} \sigma_{5}^{+} + \sigma_{4}^{-} \sigma_{5}^{-}) \gamma_{4} + (\sigma_{4}^{+} \sigma_{5}^{-} + \sigma_{4}^{-} \sigma_{5}^{+}) \right] + \\ -\mathcal{J}_{2} \left[(\sigma_{3}^{+} \sigma_{5}^{+} + \sigma_{3}^{-} \sigma_{5}^{-}) - (\sigma_{3}^{+} \sigma_{5}^{-} + \sigma_{3}^{-} \sigma_{5}^{-}) \right] \sigma_{4}^{z} +$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= -\left[J_{1} - \frac{J_{1}J_{2}(\gamma_{2}+1)}{2h_{3}}\right] \left[\left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{-}\right)\frac{2J_{1}\gamma_{1}h_{3}+J_{1}J_{2}(\gamma_{2}+1)}{2J_{1}h_{3}-J_{1}J_{2}(\gamma_{2}+1)} + \left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{+}\right)\right] + \\ &- \left[J_{4} - \frac{J_{3}J_{2}(\gamma_{3}+1)}{2h_{3}}\right] \left[\left(\sigma_{4}^{+}\sigma_{5}^{+} + \sigma_{4}^{-}\sigma_{5}^{-}\right)\frac{2J_{4}\gamma_{4}h_{3}+J_{3}J_{2}(\gamma_{3}+1)}{2J_{4}h_{3}-J_{3}J_{2}(\gamma_{3}+1)} + \left(\sigma_{4}^{+}\sigma_{5}^{-} + \sigma_{4}^{-}\sigma_{5}^{+}\right)\right] + \\ &- \frac{J_{2}J_{3}(1+\gamma_{2}\gamma_{3})}{2h_{3}} \left[\left(\sigma_{2}^{+}\sigma_{4}^{+} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{4}^{-}\right)\frac{\gamma_{2}+\gamma_{3}}{\gamma_{2}\gamma_{3}+1} + \left(\sigma_{2}^{+}\sigma_{4}^{-} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{4}^{+}\right)\right] + \\ &- \frac{J_{2}J_{2}(1-\gamma_{2})}{2h_{3}} \left[\left(\sigma_{2}^{+}\sigma_{5}^{+} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{5}^{-}\right) - \left(\sigma_{2}^{+}\sigma_{5}^{-} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{5}^{+}\right)\right]\sigma_{4}^{z} + \\ &- \frac{J_{3}J_{1}(1-\gamma_{3})}{2h_{3}} \left[\left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{4}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{4}^{-}\right) - \left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{4}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{4}^{+}\right)\right]\sigma_{2}^{z} + \\ &- \frac{J_{1}J_{2}}{h_{3}} \left[\left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{5}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{5}^{-}\right) - \left(\sigma_{1}^{+}\sigma_{5}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{5}^{+}\right)\right]\sigma_{2}^{z}\sigma_{4}^{z} + \\ &- h_{1}\sigma_{1}^{z} - \left[h_{2} + J_{2}^{2}\frac{\gamma_{2}^{2}-1}{8}\right]\sigma_{2}^{z} - \left[h_{4} + J_{3}^{2}\frac{\gamma_{3}^{2}-1}{8}\right]\sigma_{4}^{z} - h_{5}\sigma_{5}^{z} + cte \;. \end{aligned}$$
(A.48)

Tem-se novamente que os termos "indesejáveis" vão a zero quando $\gamma_i \to 1$. Note ainda que aparece um termo em que há o acoplamento de 4 spins e este termo será proporcional a $(\gamma - 1)^4$ caso todos os γ 's sejam iguais entre si.

* Quarto caso

Para o caso descrito pela Figura A.10 em que $J \gg J_1, J_2, J_4, J_5, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_5, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$ é necessário, novamente, estudar dois casos específicos.

$$h_1$$
 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6
 J_1 J_2 J J_4 J_5

Figura A.10: Interação de 3 + 3 spins.

$$\mathcal{H} = -J_{1} \left[(\sigma_{1}^{+} \sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{2}^{-}) \gamma_{1} + (\sigma_{1}^{+} \sigma_{2}^{-} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{2}^{+}) \right] + -J_{2} \left[(\sigma_{2}^{+} \sigma_{3}^{+} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{3}^{-}) \gamma_{2} + (\sigma_{2}^{+} \sigma_{3}^{-} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{3}^{+}) \right] + -\mathcal{J}_{2} \left[(\sigma_{1}^{+} \sigma_{3}^{+} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{3}^{-}) - (\sigma_{1}^{+} \sigma_{3}^{-} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{3}^{+}) \right] \sigma_{2}^{z} + -J \left[(\sigma_{3}^{+} \sigma_{4}^{+} + \sigma_{3}^{-} \sigma_{4}^{-}) \gamma + (\sigma_{3}^{+} \sigma_{4}^{-} + \sigma_{3}^{-} \sigma_{4}^{+}) \right] + -J_{4} \left[(\sigma_{4}^{+} \sigma_{5}^{+} + \sigma_{4}^{-} \sigma_{5}^{-}) \gamma_{4} + (\sigma_{4}^{+} \sigma_{5}^{-} + \sigma_{4}^{-} \sigma_{5}^{+}) \right] + -J_{5} \left[(\sigma_{5}^{+} \sigma_{6}^{+} + \sigma_{5}^{-} \sigma_{6}^{-}) \gamma_{5} + (\sigma_{5}^{+} \sigma_{6}^{-} + \sigma_{5}^{-} \sigma_{6}^{+}) \right] + -\mathcal{J}_{5} \left[(\sigma_{4}^{+} \sigma_{6}^{+} + \sigma_{4}^{-} \sigma_{6}^{-}) - (\sigma_{4}^{+} \sigma_{6}^{-} + \sigma_{4}^{-} \sigma_{6}^{+}) \right] \sigma_{5}^{z} + -h_{1} \sigma_{1}^{z} - h_{2} \sigma_{2}^{z} - h_{3} \sigma_{3}^{z} - h_{4} \sigma_{4}^{z} - h_{5} \sigma_{5}^{z} - h_{6} \sigma_{6}^{z} \right] .$$

 $**\gamma
eq 1$

$$\begin{split} \tilde{\mathcal{H}} &= -J_1 \left[(\sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^-) \gamma_1 + (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) \right] + \\ &- J_5 \left[(\sigma_5^+ \sigma_6^+ + \sigma_5^- \sigma_6^-) \gamma_5 + (\sigma_5^+ \sigma_6^- + \sigma_5^- \sigma_6^+) \right] + \\ &- \frac{J_2 J_4}{2J} \left[\frac{(\gamma_2 + 1)(\gamma_4 + 1)}{(1 - \gamma)} + \frac{(\gamma_2 - 1)(\gamma_4 - 1)}{(1 + \gamma)} \right] \times \\ &\times \left[(\sigma_2^+ \sigma_5^+ + \sigma_2^- \sigma_5^-) \frac{(\gamma_2 + 1)(\gamma_4 + 1)(\gamma_4 + 1)(\gamma_4 - 1)(\gamma_4 - 1)(\gamma_4 - 1)}{(\gamma_4 + 1)(\gamma_4 + 1)(\gamma_4 - 1)(\gamma_4 - 1)(\gamma_4 - 1)} + (\sigma_2^+ \sigma_5^- + \sigma_2^- \sigma_5^+) \right] + \\ &- \frac{J_2 J_2 (\gamma_2 - 1)}{J(\gamma_4 + 1)} \left[- (\sigma_2^+ \sigma_6^+ + \sigma_2^- \sigma_6^-) + (\sigma_2^+ \sigma_6^- + \sigma_2^- \sigma_6^+) \right] \sigma_5^z + \\ &- \frac{J_2 J_4 (\gamma_4 - 1)}{J(\gamma_4 + 1)} \left[- (\sigma_1^+ \sigma_5^+ + \sigma_1^- \sigma_5^-) + (\sigma_1^+ \sigma_5^- + \sigma_1^- \sigma_5^+) \right] \sigma_2^z + \\ &- 2 \frac{J_2 J_5}{J(\gamma_4 + 1)} \left[- (\sigma_1^+ \sigma_6^+ + \sigma_1^- \sigma_6^-) + (\sigma_1^+ \sigma_6^- + \sigma_1^- \sigma_6^+) \right] \sigma_2^z \sigma_5^z + \\ &- h_1 \sigma_1^z - h_2 \sigma_2^z - h_5 \sigma_5^z - h_6 \sigma_6^z + cte \,. \end{split}$$

Novamente, os termos que acoplam mais de dois spins terão uma contribuição menor quando $\gamma_i \to 1.$

$$\begin{split} \tilde{\mathcal{H}} &= -J_{1} \left[(\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{-})\gamma_{1} + (\sigma_{1}^{+}\sigma_{2}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{2}^{+}) \right] + \\ &-J_{2} \left[\frac{\gamma_{2}+1}{2} + \frac{(\gamma_{2}-1)h_{4}}{-2J} \right] \left[(\sigma_{2}^{+}\sigma_{12}^{+} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{12}^{-}) \frac{J(\gamma_{2}+1)+(\gamma_{2}-1)h_{4}}{J(\gamma_{2}+1)-(\gamma_{2}-1)h_{4}} + (\sigma_{2}^{+}\sigma_{12}^{-} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{12}^{+}) \right] + \\ &-J_{4} \left[\frac{\gamma_{4}+1}{2} + \frac{(\gamma_{4}-1)h_{3}}{-2J} \right] \left[(\sigma_{12}^{+}\sigma_{5}^{+} + \sigma_{12}^{-}\sigma_{5}^{-}) \frac{J(\gamma_{4}+1)+(\gamma_{4}-1)h_{3}}{J(\gamma_{4}+1)-(\gamma_{4}-1)h_{3}} + (\sigma_{12}^{+}\sigma_{5}^{-} + \sigma_{12}^{-}\sigma_{5}^{+}) \right] + \\ &-2 \frac{g_{2}h_{4}}{2J} \left[(\sigma_{1}^{+}\sigma_{11}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{12}^{-}) - (\sigma_{1}^{+}\sigma_{12}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{12}^{-}) \right] \sigma_{2}^{z} + \\ &-2 \frac{g_{3}h_{3}}{2J} \left[(\sigma_{12}^{+}\sigma_{6}^{+} + \sigma_{12}^{-}\sigma_{6}^{-}) - (\sigma_{12}^{+}\sigma_{6}^{-} + \sigma_{12}^{-}\sigma_{6}^{+}) \right] \sigma_{2}^{z} + \\ &-2 \frac{g_{3}h_{3}}{2J} \left[(\sigma_{12}^{+}\sigma_{6}^{+} + \sigma_{12}^{-}\sigma_{6}^{-}) - (\sigma_{12}^{+}\sigma_{6}^{-} + \sigma_{12}^{-}\sigma_{6}^{-}) \right] \sigma_{12}^{z} + \\ &-J_{5} \left[(\sigma_{5}^{+}\sigma_{6}^{+} + \sigma_{5}^{-}\sigma_{6}^{-}) \gamma_{5} + (\sigma_{5}^{+}\sigma_{6}^{-} + \sigma_{5}^{-}\sigma_{6}^{-}) \right] + \\ &- \frac{J_{2}J_{4}(\gamma_{2}-1)}{4J} \left[(\sigma_{2}^{+}\sigma_{5}^{+} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{5}^{-}) - (\sigma_{2}^{+}\sigma_{5}^{-} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{5}^{-}) \right] \sigma_{12}^{z} + \\ &- \frac{J_{2}J_{5}(\gamma_{2}-1)}{2J} \left[(\sigma_{1}^{+}\sigma_{6}^{+} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{6}^{-}) - (\sigma_{1}^{+}\sigma_{6}^{-} + \sigma_{2}^{-}\sigma_{6}^{-}) \right] \sigma_{12}^{z} \sigma_{5}^{z} + \\ &- \frac{J_{2}J_{4}(\gamma_{4}-1)}{2J} \left[(\sigma_{1}^{+}\sigma_{5}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{5}^{-}) - (\sigma_{1}^{+}\sigma_{5}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{5}^{+}) \right] \sigma_{2}^{z} \sigma_{12}^{z} + \\ &- \frac{J_{2}J_{5}}(\sigma_{1}^{+} - \sigma_{6}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{6}^{-}) - (\sigma_{1}^{+}\sigma_{6}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{5}^{+}) \right] \sigma_{2}^{z} \sigma_{12}^{z} + \\ &- \frac{J_{2}J_{5}}}{J} \left[(\sigma_{1}^{+}\sigma_{6}^{+} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{0}^{-}) - (\sigma_{1}^{+}\sigma_{6}^{-} + \sigma_{1}^{-}\sigma_{5}^{+}) \right] \sigma_{2}^{z} \sigma_{12}^{z} \sigma_{5}^{z} + \\ &- h_{1}\sigma_{1}^{z} - h_{2}\sigma_{2}^{z} - \left[\frac{J}{2}(\gamma - 1) + \frac{h_{3}h_{4}}}{J} \right] \sigma_{12}^{z} - h_{5}\sigma_{5}^{z} - h_{6}\sigma_{6}^{z} + cte . \end{split}$$
(A.51)

Mais uma vez, tem-se termos que acoplam mais de dois spins. No entanto, estes termos têm uma contribuição menor para $\gamma_i \rightarrow 1$, sendo alguns proporcionais a $(\gamma_i - 1)^4$.

A.4 Interação de 3+2 spins

Seja a configuração de spins representada h_l h_1 h_2 h_3 h_r pela Figura A.11 com a condição: $J \gg 0$ J_l J_l J_r J_r Figura A.11: Interação de 3 + 2 spins.

$$\mathcal{H}_{0} = -J \left[\left(\sigma_{1}^{+} \sigma_{2}^{+} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{2}^{-} \right) \gamma + \left(\sigma_{1}^{+} \sigma_{2}^{-} + \sigma_{1}^{-} \sigma_{2}^{+} \right) + \left(\sigma_{2}^{+} \sigma_{3}^{+} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{3}^{-} \right) \gamma + \left(\sigma_{2}^{+} \sigma_{3}^{-} + \sigma_{2}^{-} \sigma_{3}^{+} \right) \right] .$$
(A.52)

Para facilitar a resolução deste problema é interessante notar que o hamiltoniano \mathcal{H}_0 ,
equação A.52, pode ser representado pela matriz bloco diagonal A.53.

 \mathcal{H}_0 tem como autoenergias 0 e $\pm J\sqrt{2(\gamma^2+1)}$ associadas aos estados:

$$|\Psi_0\rangle_+ = \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}}|+++\rangle + \frac{1}{2}|+--\rangle + \frac{1}{2}|--+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}}|-+-\rangle \quad (A.54)$$

$$|\Psi_1\rangle_+ = -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}}|+++\rangle + \frac{1}{2}|+--\rangle + \frac{1}{2}|--+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}}|-+-\rangle$$
(A.55)

$$|\Psi_2\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}|+--\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|--+\rangle$$
 (A.56)

$$|\Psi_3\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} |+++\rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} |-+-\rangle \tag{A.57}$$

$$|\Psi_0\rangle_{-} = \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}} |---\rangle + \frac{1}{2} |-++\rangle + \frac{1}{2} |++-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}} |+-+\rangle \quad (A.58)$$

$$|\Psi_1\rangle_{-} = -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}}| - --\rangle + \frac{1}{2}| - ++\rangle + \frac{1}{2}| + +-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}}| + -+\rangle$$
(A.59)

$$|\Psi_2\rangle_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}|-++\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|++-\rangle \tag{A.60}$$

$$|\Psi_3\rangle_{-} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} |---\rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} |+-+\rangle \tag{A.61}$$

Tem-se que o estado fundamental é degenerado, assim, é necessário calcular a contribuição de termos $_{+}\langle \Psi_{0}|V|\Psi_{0}\rangle_{+}, _{-}\langle \Psi_{0}|V|\Psi_{0}\rangle_{-}, _{-}\langle \Psi_{0}|V|\Psi_{0}\rangle_{+}$ e $_{+}\langle \Psi_{0}|V|\Psi_{0}\rangle_{-}$ já em primeira ordem de perturbação.

Pode-se provar que:

$$_{+}\langle \Psi_{0}|V|\Psi_{0}\rangle_{+} = \frac{\gamma^{2}-1}{2(\gamma^{2}+1)}(-h_{1}-h_{3})$$
(A.62)

$$-\langle \Psi_0 | V | \Psi_0 \rangle_{-} = \frac{\gamma^2 - 1}{2(\gamma^2 + 1)} (h_1 + h_3)$$
(A.63)

$$-\langle \Psi_0 | V | \Psi_0 \rangle_+ = -\frac{1}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}} \left\{ \gamma \left[J_l(\gamma_l \sigma_l^- + \sigma_l^+) + J_r(\gamma_r \sigma_r^- + \sigma_r^+) \right] + (A.64) \right\}$$

+
$$\left[J_l(\gamma_l\sigma_l^+ + \sigma_l^-) + J_r(\gamma_r\sigma_r^+ + \sigma_r^-)\right]$$
 . (A.65)

Assim,

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{J_l(\gamma_l + \gamma)}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}} \left[\left(\sigma_l^+ \sigma_{12}^+ + \sigma_l^- \sigma_{12}^- \right) \frac{\gamma_l \gamma + 1}{\gamma_l + \gamma} + \left(\sigma_l^+ \sigma_{12}^- + \sigma_l^- \sigma_{12}^+ \right) + \right] + \\ -\frac{J_r(\gamma + \gamma_r)}{\sqrt{2(\gamma^2 + 1)}} \left[\left(\sigma_{12}^+ \sigma_r^+ + \sigma_{12}^- \sigma_r^- \right) \frac{\gamma \gamma_r + 1}{\gamma + \gamma_r} + \left(\sigma_{12}^+ \sigma_r^- + \sigma_{12}^- \sigma_r^+ \right) + \right] + \\ -h_l \sigma_l^z - \left[\frac{\gamma^2 - 1}{2(\gamma^2 + 1)} (h_1 + h_3) \right] \sigma_{12}^z - h_r \sigma_r^z , \qquad (A.66)$$

que terá contribuição nula caso $\gamma_i = 1$.

Teste Para aproximação em primeira ordem tem-se

- $J_1 = J_4 = 1, J_2 = J_3 = 10, \gamma_i = 0, h_i = 1$ $\Delta_{\mathcal{H}} = 3.908D - 14, 2., 2., 4., 4., 6., 6., \cdots$ e $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 8.882D - 16, 2., 2., 4., 4., 6., 6.$
- $J_1 = J_4 = 1, J_2 = J_3 = 10, \gamma_i = 0.9, h_i = 1$ $\Delta_{\mathcal{H}} = 0.0361557, 4.2015461, 4.2377019, 4.3712752, 4.4074309, 8.5728213, 8.608977 \cdots$ e $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0.0369552, 4.20467, 4.2416253, 4.3776595, 4.4146148, 8.5823296, 8.6192848$

•
$$J_1 = J_4 = 1, J_2 = J_3 = 10, \gamma_i = 1, h_i = 1$$

 $\Delta_{\mathcal{H}} = 0.0009995, 4.4655613, 4.4665608, 4.4696505, 4.47065, 8.9352118, 8.9362113 \cdots$ e

 $\Delta_{\tilde{\mathcal{H}}} = 2.665D - 15, \, 4.472136, \, 4.472136, \, 4.472136, \, 4.472136, \, 8.9442719, \, 8.9442719$

Referências Bibliográficas

- E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. Annals of Physics, 16(3):407 – 466, 1961.
- [2] H. Yoshizawa, G. Shirane, H. Shiba, and K. Hirakawa. Neutron scattering study of a one-dimensional XY antiferromagnet Cs₂CoCl₄. *Phys. Rev. B*, 28(7):3904–3908, Oct 1983.
- [3] K. Hirakawa, H. Yoshizawa, G. Shirane, and H. Shiba. Neutron scattering study of Cs₂CoCl₄: A system of 1D, antiferromagnetic chains with spin frustration. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 31-34(Part 3):1137 – 1138, 1983.
- [4] M. Kenzelmann, R. Coldea, D. A. Tennant, D. Visser, M. Hofmann, P. Smeibidl, and Z. Tylczynski. Order-to-disorder transition in the XY-like quantum magnet Cs₂CoCl₄ induced by noncommuting applied fields. *Phys. Rev. B*, 65(14):144432, Apr 2002.
- [5] L. Guidoni, C. Triché, P. Verkerk, and G. Grynberg. Quasiperiodic optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 79(18):3363–3366, Nov 1997.
- [6] R. Jullien and P. Pfeuty. Zero-temperature renormalization-group method for quantum systems. II. Isotropic X-Y model in a transverse field in one dimension. *Phys. Rev. B*, 19(9):4646–4652, May 1979.
- [7] P. Pfeuty. The one-dimensional Ising model with a transverse field. Annals of Physics, 57(1):79 - 90, 1970.
- [8] P. Pfeuty and R. J. Elliott. The Ising model with a transverse field. II. ground state properties. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 4(15):2370, 1971.
- [9] R. B. Griffiths. Nonanalytic behavior above the critical point in a random Ising ferromagnet. *Phys. Rev. Lett.*, 23(1):17–19, Jul 1969.
- [10] S. Ma, C. Dasgupta, and C. Hu. Random antiferromagnetic chain. Phys. Rev. Lett., 43(19):1434–1437, Nov 1979.
- [11] C. Dasgupta and S. Ma. Low-temperature properties of the random Heisenberg antiferromagnetic chain. *Phys. Rev. B*, 22(3):1305–1319, Aug 1980.

- [12] D. S. Fisher. Random transverse field Ising spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, 69(3):534–537, Jul 1992.
- [13] D. S. Fisher. Critical behavior of random transverse-field Ising spin chains. *Phys. Rev.* B, 51(10):6411–6461, Mar 1995.
- [14] R. H. McKenzie. Exact results for quantum phase transitions in random XY spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, 77(23):4804–4807, Dec 1996.
- [15] J. E. Bunder and R. H. McKenzie. Effect of disorder on quantum phase transitions in anisotropic XY spin chains in a transverse field. *Phys. Rev. B*, 60(1):344–358, Jul 1999.
- [16] A. P. Vieira. Low-energy properties of aperiodic quantum spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, 94(7):077201, Feb 2005.
- [17] A. P. Vieira. Aperiodic quantum XXZ chains: Renormalization-group results. Phys. Rev. B, 71(13):134408, Apr 2005.
- [18] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 53(20):1951–1953, Nov 1984.
- [19] D. Levine and P. J. Steinhardt. Quasicrystals: A new class of ordered structures. *Phys. Rev. Lett.*, 53(26):2477–2480, Dec 1984.
- [20] S. T. R. Pinho and T. C. Petit Lobão. Rigorous results for aperiodic and almost periodic substitution sequences. *Brazilian Journal of Physics*, 30:772 – 777, 12 2000.
- [21] J. Hermisson, U. Grimm, and M. Baake. Aperiodic Ising quantum chains. Journal of Physics A: Mathematical and General, 30(21):7315, 1997.
- [22] J. M. Luck. J. Stat. Phys., 72:417, 1993.
- [23] J. M. Luck. Europhys. Lett., 24:359, 1993.
- [24] F. Iglói, D. Karevski, and H. Rieger. Comparative study of the critical behavior in one-dimensional random and aperiodic environments. *The European Physical Journal* B - Condensed Matter and Complex Systems, 5:613–625, 1998. 10.1007/s100510050486.
- [25] F. Iglói, D. Karevski, and H. Rieger. Random and aperiodic quantum spin chains: A comparative study. The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems, 1:513–517, 1998. 10.1007/s100510050213.
- [26] M. Queffélec. Substitutional dynamics systems Spectral Analysis, volume 1294 of Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1987.

- [27] A. Cobham. Uniform tag sequences. Theory of Computing Systems, 6:164–192, 1972.
 10.1007/BF01706087.
- [28] T. A. S. Haddad. Comportamento crítico universal em ferromagnetos de Potts com interações aperiódicas. Dissertação de mestrado sob orientaço de Silvio R. A. Salinas apesentada no IFUSP, 1999.
- [29] S. T. R. Pinho, T. A. S. Haddad, and S. R. Salinas. Critical behavior of the Ising model on a hierarchical lattice with aperiodic interactions. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 257(1-4):515 – 520, 1998.
- [30] A. B. Harris. Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 7(9):1671, 1974.
- [31] Curtis A. Doty and Daniel S. Fisher. Effects of quenched disorder on spin-1/2 quantum XXZ chains. *Phys. Rev. B*, 45(5):2167–2179, Feb 1992.
- [32] J. Hermisson. Aperiodische und Ordnung und Magnetische Phasenübergänge. Universität Tübingen, Shaker, Aachen, 1999.
- [33] J. Hermisson. Renormalization of two-dimensional ising systems with irrelevant, marginal and relevant aperiodic (dis)order. *Materials Science and Engineering A*, 294-296:642 - 645, 2000.
- [34] V. Korepin. Completely integrable models in quasicrystals. Communications in Mathematical Physics, 110:157–171, 1987. 10.1007/BF01209021.
- [35] M. Baake, U. Grimm, and R. J. Baxter. A critical Ising model on the labyrinth. Int. J. Mod. Phys. B, 8(solv-int/9902009):3579–3600, 1994.
- [36] C. Godéche and H. Orland. J. Phys. Colloque, 47-C3:197–203, 1994.
- [37] H. Simon. Ferromagnetische Isingmodelle auf aperiodischen Strukturen. Universität Tübingen, 1997.
- [38] D. Ledue, D. P. Landau, and J. Teillet. Static critical behavior of the ferromagnetic Ising model on the quasiperiodic octagonal tiling. *Phys. Rev. B*, 51(18):12523–12530, May 1995.
- [39] A. P. Young. Finite-temperature and dynamical properties of the random transversefield Ising spin chain. *Phys. Rev. B*, 56(18):11691–11700, Nov 1997.
- [40] F. Iglói and H. Rieger. Random transverse Ising spin chain and random walks. Phys. Rev. B, 57(18):11404–11420, May 1998.

- [41] L. Kadanoff. Spin-spin correlations in the two-dimensional ising model. Il Nuovo Cimento B (1965-1970), 44:276–305, 1966. 10.1007/BF02710808.
- [42] A. Z. Patachinski; V. L. Pokrovski. Soviet Physics JETP-USSR, 23:292, 1966.
- [43] C. Monthus. Méthodes de renormalisation dans l'espace réel de type Ma-Dasgupta pour divers systèmes désordonnés. "Mémoire d'Habilitation", apesentada na Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [44] D. S. Fisher. Random antiferromagnetic quantum spin chains. Phys. Rev. B, 50(6):3799– 3821, Aug 1994.
- [45] C. Monthus, O. Golinelli, and Th. Jolicœur. Phases of random antiferromagnetic spin-1 chains. Phys. Rev. B, 58(2):805–815, Jul 1998.
- [46] U. Grimm and M. Baake. Aperiodic Ising Models. In R. V. Moody, editor, The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order, volume 489 of C, pages 199–237, April 1997.
- [47] P. Pfeuty. An exact result for the 1D random Ising model in a transverse field. Phys. Lett. A, 72(3):245 – 246, 1979.