UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

Quantização Segundo o Formalismo BRST-BFV de uma Teoria com Simetria de Gauge e Simetria Conforme em um Espaço-Tempo com $(d+2)$ Dimensões

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3926 ex. 1

Wilson Pereira do Sacramento

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador:

Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles.

SBI-IFUSP

305M810T3926

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IFUSP)
Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Denis Dalmazi (UNESP)
Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits (IFT/UNESP)

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

**São Paulo
2003**

de 12/09/02

530.143

5123g

D

ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Sacramento, Wilson Pereira do

Quantização Segundo o Formalismo BRST-BFV de uma
Teoria com Simetria de Gauge e Simetria Conforme em
um Espaço-Tempo com $(d+2)$ Dimensões.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Teorias de Gauge;
2. Física com Dois Tempos;
3. Quantização BRST-BFV.

USP/IF/SBI-0652003

SBI-IFUSP

305M810T3926

Agradecimentos

À Deus, a quem devo tudo;

À minha família: meus pais, Samuel e Damaris, e meus irmãos, Anderson, Silmara e Daniel;

Ao professor Victor Rivelles, pela minha aceitação no doutoramento, pela proposta deste trabalho e pela orientação;

Aos professores que de muitas maneiras me ajudaram: Douglas Soares dos Santos, José Vicente Branco, Maria Fernanda Meira, Oswaldo Kazuo Watanabe, Pedro Luís Santucci de Mendonça e Sérgio Curti;

À USP, da qual nenhuma queixa possuo;

Aos muitos amigos: colegas de estudo, professores e funcionários do Departamento de Física Matemática, pelos anos de companheirismo;

Ao CNPq pela ajuda financeira;

À Cidade de São Paulo, ao Estado de São Paulo e ao Brasil, por me oferecerem a oportunidade de estudar em escolas públicas a níveis municipal (ensino fundamental), estadual (ensino médio e doutorado) e federal (ensino superior).

Resumo

Sistemas geralmente covariantes têm uma Hamiltoniana canônica nula, então é necessário encontrar uma Hamiltoniana efetiva para determinar sua evolução dinâmica. Esta Hamiltoniana efetiva é dependente do gauge e sua forma varia com a escolha do gauge. Dirac propôs um método baseado em teoria de grupos para determinar a Hamiltoniana efetiva. Nós propomos um método baseado em teorias de gauge, segundo o formalismo BRST-BFV, para determiná-la. Aplicaremos o método à partícula relativística e a um modelo com dois tempos, também geralmente covariante. Para a partícula relativística com massa nula e spin $N/2$ encontraremos a Hamiltoniana efetiva nos gauges canônicos propostos por Dirac, chamados as formas da dinâmica: instante, frente de onda e pontual. Para isso, determinaremos a função fermiônica fixadora de gauge apropriada no formalismo BRST-BFV. A função fermiônica fixadora de gauge quebra as simetrias da ação original, tanto as simetrias locais quanto as globais, de forma que a Hamiltoniana efetiva é invariante por um grupo de simetria menor que o da ação clássica.

No caso da física com dois tempos, o grupo de simetria da ação clássica, é o grupo conforme $SO(d,2)$, maior que o grupo de Poincaré da partícula relativística. A ação também é invariante pela simetria local $OSp(N|2)$. Utilizando a mesma técnica aplicada à partícula relativística determinaremos, após as fixações dos gauges, as Hamiltonianas efetivas. Veremos que suas simetrias são menores que as simetrias da ação original, porém maiores que as da partícula relativística. Encontraremos uma Hamiltoniana não-relativística arbitrária, invariante por rotações em um espaço com $(d-1)$ dimensões espaciais e spin $N/2$.

Neste trabalho, procuramos resolver alguns problemas que aparecem na física com dois tempos formulada por I. Bars, tais como a arbitrariedade das Hamiltonianas e das escolhas de gauge que levam a elas. Bars escolheu arbitrariamente as Hamiltonianas como combinações de geradores do grupo conforme, e fez escolhas de gauge complicadas e arbitrárias. Nós apresentamos escolhas de gauge mais simples que, de modo sistemático, resultam em Hamiltonianas com grupos de simetrias menores que os da ação original. Além disso, o resultado descrito no parágrafo acima, i.e., a Hamiltoniana arbitrária e com spin $N/2$, não havia sido obtido antes.

Abstract

A general covariant system has a vanishing canonical Hamiltonian and its time evolution is determined by an effective Hamiltonian. This effective Hamiltonian is gauge dependent and its form depends on the gauge choice. Dirac has proposed a method based on groups theory in order to determine the effective Hamiltonian. We proposed a method based on gauge theories, according to the BRST-BFV formalism to determine it. This method will be applied both to the relativistic particle and to a two-times model. For the massless relativistic particle and spin $N/2$ we will show how to get the effective Hamiltonian for the canonical gauges discussed by Dirac, called the forms of dynamics: instant, front and point. We will find the appropriate gauge fixing function in the BRST-BFV formalism. The gauge fixing function breaks the symmetries of the original action, the local and the global symmetries, so that the effective Hamiltonian is invariant by a gauge symmetry group which is smaller than the gauge symmetry group of the classical action.

In the two times physics, the symmetry group of the classical action is the conformal group $SO(d,2)$, which is larger than the Poincare's group of the relativistic particle. The action is also invariant by the local symmetry $OSp(N|2)$. By using the same technique used in the relativistic particle, we will determine the effective Hamiltonians, after the gauges had been fixed. We will see that their symmetries are smaller than the original action symmetries, but they are larger than the symmetry group of the relativistic particle. We will find a non-relativistic arbitrary Hamiltonian, invariant by rotations in a space with $(d-1)$ dimensions and spin $N/2$.

In this work, we tried to solve some problems that appeared in two times physics elaborated by I Bars, just like the arbitrariness of Hamiltonians and the choices of gauges, which lead to them. Bars has chosen the Hamiltonians arbitrarily as combinations of the generators of the conformal group and has chosen complicated and arbitrary gauges. We have presented simple gauge choices, in which, in a systematic way, arise in Hamiltonians with symmetry groups that are smaller than the symmetry groups of the original action. Besides, the results showed in the former paragraph, i.e., an arbitrary Hamiltonian with spin $N/2$, hadn't been obtained before.

Índice

1	Introdução.....	1
2	Sistemas Hamiltonianos Vinculados.....	4
2.1	A Ação-Vínculos Primários.....	4
2.2	Hamiltonianas – As Equações de Movimento.....	6
2.3	Vínculos Secundários – Funções de Primeira e Segunda Classe.....	11
2.4	Transformações de Gauge – Hamiltoniana Estendida.....	13
2.5	Fixação de Gauge.....	17
2.6	Espaço de Fase Reduzido.....	18
2.7	Aplicação: Cálculo da Hamiltoniana Canônica da Partícula Relativística.....	18
3	Quantização de Sistemas Vinculados.....	21
3.1	Quantização Canônica – Método dos Operadores.....	21
3.1.1	Vínculos de Segunda Classe.....	23
3.1.2	Vínculos de Primeira Classe – Espaço de Fase Reduzido.....	23
3.2	Quantização por Integrais de Trajetória.....	24
3.2.1	Sistemas Vinculados.....	28
3.3	Quantização pelo Método de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV)...	30
3.3.1	Aplicação: A Partícula Relativística no Gauge Covariante.....	33
4	As Formas da Dinâmica Relativística.....	36
4.1	Escolha da Hamiltoniana – A Partícula Relativística.....	37
4.2	Grupo de Poincaré – Representação da Partícula Relativística.....	40
4.2.1	Forma Instante.....	42
4.2.2	Forma Frente de Onda.....	44
4.2.3	Forma Pontual.....	46
4.2.3.1	Equações de Movimento em Coordenadas Curvilíneas.....	50
4.3	Quantização BRST da Partícula Relativística com Spin $\frac{1}{2}$ e Massa Nula nas Três Formas da Dinâmica.....	54

4.3.1	A Forma Instante.....	59
4.3.2	A Forma Frente de Onda.....	64
4.3.3	A Forma Pontual.....	66
4.4	Quantização BRST da Partícula Relativística com Massa Nula e N Supersimetrias.....	70
4.4.1	A Forma Instante.....	76
4.4.2	A Forma Frente de Onda.....	79
4.4.3	A Forma Pontual.....	81
5	Simetria de Gauge Simetria Conforme e Espaço-Tempo com Dois Tempos.....	83
5.1	Introdução.....	83
5.2	Partícula Relativística e Oscilador Harmônico.....	86
5.3	Átomo de Hidrogênio.....	90
5.4	Hamiltoniana Arbitrária e Spin $\frac{1}{2}$	92
5.5	Quantização BRST-BFV.....	97
5.5.1	A Forma Instante.....	101
5.5.2	A Forma Frente de Onda.....	106
5.5.3	A Forma Pontual.....	109
5.6	Hamiltoniana Arbitrária e Spin $N/2$	112
5.6.1	Quantização BRST-BFV.....	114
5.6.1.1	A Forma Instante.....	120
5.6.1.2	A Forma Frente de Onda.....	123
5.6.1.3	A Forma Pontual.....	126
6	Conclusão.....	129

Capítulo 1

Introdução

Teorias que envolvem duas ou mais dimensões tipo-tempo foram propostas recentemente, alguns exemplos são: extensões da teoria M [1] para a teoria F [2] e teoria S [3], e também em teorias de gauge [4,5,6]. Nosso trabalho refere-se a teoria com dois tempos ao longo desta última linha de pesquisa, que faz uma ponte com os cálculos da amplitude de transição da partícula relativística e supersimetria estendida. Estes cálculos estabeleceram [7,8,9] a equivalência entre as amplitudes de transição da partícula relativística com e sem spin e os propagadores de Feynmann para os campos de Dirac e de Klein-Gordon. Nosso trabalho procura fundamentar a linha de pesquisa [4,5,6], realizando sua quantização por integrais de trajetórias no contexto da mecânica quântica.

A partícula relativística possui Hamiltoniana canônica nula, pois é uma teoria invariante por reparametrização. Para determinar sua evolução temporal precisamos encontrar outra Hamiltoniana, que é dependente da escolha de gauge. Dirac apresentou um método para determiná-la através de teoria de grupos [11,12,13]. Apresentamos uma maneira alternativa de determinar essa Hamiltoniana através de teorias de gauge, segundo o formalismo BRST-BFV. Mostramos como, através de escolhas de gauge convenientes, é possível reproduzir os resultados de Dirac. Aplicamos a mesma técnica a partículas com spin e teorias com dois tempos.

Na primeira parte do trabalho, capítulo 2, definimos um sistema Lagrangeano singular, estudamos a passagem para o formalismo Hamiltoniano e encontramos os vínculos da teoria bem como suas equações de movimento. Classificamos os vínculos em primeira e segunda classe, caracterizamos as transformações de gauge e as teorias de gauge. Por último, fazemos uma aplicação para a partícula relativística e encontramos sua Hamiltoniana canônica.

No capítulo 3, estudamos a quantização dos sistemas vinculados. Iniciamos explicando a quantização pelo método dos operadores, passamos para o método das

integrais de trajetória e continuamos revisando a evolução histórica da quantização dos sistemas vinculados até alcançar o formalismo desenvolvido por Batalin-Fradkin-Vilkovisky com a ilustração da partícula relativística, encontrando sua Hamiltoniana efetiva no gauge covariante.

Apresentamos no capítulo 4 a quantização da partícula relativística com massa nula e spin $\frac{1}{2}$ e também com spin arbitrário, em três gauges canônicos que correspondem às três formas da dinâmica: instante, frente de onda e pontual. Encontramos as Hamiltonianas efetivas da partícula relativística nas três formas da dinâmica, bem como a amplitude de transição. Mostramos também, como obter na ação efetiva uma Hamiltoniana que é uma função arbitrária do espaço de fase. A arbitrariedade é permitida pelo teorema de Batalin-Vilkovisky, porém restringida pela simetria de Poincaré. Devido a esta restrição, obtemos a Hamiltoniana da partícula relativística.

Iniciamos o capítulo 5 com uma revisão da teoria formulada em [4] e [5], a qual apresenta um modelo em um espaço-tempo com $(d+2)$ dimensões que possui invariância pela simetria de gauge $Sp(2)$ e é manifestamente invariante pela simetria conforme $SO(d,2)$. Não há simetria de translação em $(d+2)$ dimensões. Posteriormente, em [6], generaliza-se o modelo acrescentando-se graus de liberdade fermiônicos com uma simetria de gauge $OSp(1|2)$. Há simetria conforme $SO(d,2)$ neste modelo também. A fixação do gauge permite obter uma Hamiltoniana arbitrária com spin $\frac{1}{2}$ em um espaço de $(d-1)$ dimensões espaciais. Observamos que a Hamiltoniana arbitrária deve obedecer a uma restrição, a invariância por rotação em $(d-1)$ dimensões espaciais. Há invariância pela simetria $SO(d-1)$, subgrupo de $SO(d,2)$.

Em um gauge não covariante, realizamos a quantização segundo o formalismo BRST-BFV desta teoria e mostramos como obter a partícula relativística com spin $N/2$ em um espaço-tempo com uma única dimensão temporal nas três formas da dinâmica. Isto ainda não havia sido realizado no formalismo BRST-BFV e, em [6], é apresentada a escolha de gauge que leva a esta teoria, porém, a ação não foi obtida. A escolha de gauge que fizemos difere desta no setor fermiônico. Procuramos, assim, resolver alguns problemas da teoria com dois tempos. Por último, em outro gauge não covariante, obtivemos a amplitude de transição para uma ação efetiva com Hamiltoniana não-

relativística arbitrária invariante por $SO(d-1)$ e spin $N/2$ em $(d-1)$ dimensões espaciais nas três formas da dinâmica. Isto é original, não foi obtido em nenhum outro lugar.

Na teoria com dois tempos formulada por Itzhak Bars existe uma simetria de gauge entre infinitos sistemas físicos, mostrando que eles são diferentes aspectos da mesma teoria quântica. A teoria bosônica é construída “calibrando” a simetria $Sp(2)$ que trata a posição e o momento como dupletos no espaço de fase. A ação é construída de forma a apresentar uma simetria global manifesta $SO(d,2)$ atuando linearmente em um espaço-tempo com dois tempos. Graças à simetria de gauge a teoria com dois tempos é equivalente a uma teoria com um único tempo, mas a escolha do “tempo” não é única. Para diferentes escolhas de gauge do “tempo” a Hamiltoniana é diferente e descreve sistemas físicos diferentes. No entanto, esses sistemas são equivalentes de gauge. O setor invariante de gauge por $Sp(2)$ é caracterizado na teoria quântica por uma única representação unitária do grupo conforme $SO(d,2)$. O operador Casimir quadrático é dado por

$$C_2(SO(d,2)) = 1 - \frac{d^2}{4},$$

e todos os operadores Casimir de ordem mais elevada ($n=3,4,\dots$) também têm valores fixos [4,5,6]. A partícula relativística, o átomo de hidrogênio, o oscilador harmônico, etc., são descritos pela mesma representação unitária do grupo conforme $SO(d,2)$. Portanto, eles são equivalentes de gauge tanto ao nível clássico quanto ao nível quântico.

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos Vinculados

2.1) A Ação – Vínculos Primários

Iniciamos a discussão da dinâmica dos sistemas vinculados a partir do princípio da ação na forma Lagrangeana.

A ação para um sistema com um número finito de graus de liberdade é definida da seguinte forma [14]

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(q^i, \dot{q}^i, \tau) \quad (2.1)$$

onde L é uma função Lagrangeana dependendo das coordenadas generalizadas, q^i , das velocidades generalizadas, $\dot{q}^i$, e do parâmetro temporal τ ($i=1,2, \dots, N$).

As trajetórias clássicas são pontos estacionários da ação, e uma condição necessária para encontrá-las é através do anulamento da primeira variação da ação, $\delta A = 0$, do qual obtemos as equações de Euler-Lagrange para o movimento (para $\tau_1 < \tau < \tau_2$),

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0, \quad (2.2)$$

se impormos $\delta q^i|_{\tau_1} = 0 = \delta q^i|_{\tau_2}$ como condições de contorno.

Expressando a derivada total em termos de derivadas parciais, podemos reescrever as equações de Euler-Lagrange com mais detalhe,

$$\ddot{q}^k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \tau} - \dot{q}^k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial \dot{q}^i} \right) \quad (2.3)$$

Vemos de (2.3) que se a matriz Hessiana,

$$W_{ki} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} \quad (2.4)$$

puder ser invertida, i.e., tiver determinante diferente de zero, poderemos em um dado instante determinar as acelerações $\ddot{q}^k$ em função das velocidades $\dot{q}^k$ e das posições q^k naquele instante.

Quando o determinante da matriz Hessiana for nulo [15,16,17,18], as acelerações não poderão ser univocamente determinadas pelas velocidades e posições. Diz-se, então, que a Lagrangeana que descreve o sistema é singular, em contrapartida a Lagrangeanas regulares, cujas Hessianas possuem determinante não nulo.

Neste capítulo consideraremos esses sistemas com Lagrangeanas singulares, chamados *Sistemas Lagrangeanos Singulares*. O procedimento usual é tratar tais sistemas no formalismo Hamiltoniano – um passo intermediário para a quantização.

A transição para o formalismo Hamiltoniano é a definição do momento canônico,

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (2.5)$$

Quando o determinante da matriz (2.4) se anula, há conseqüências para a equação (2.5) – não é possível inverter as velocidades como funções das coordenadas e momentos. Os momentos não são todos independentes e, se o posto da matriz (2.4) for $N - P$, há P vínculos primários, i.e., relações,

$$\Phi_p(q,p) = 0, \quad p=1,2,\dots,P, \quad (2.6)$$

independentes das equações de movimento, e que se seguem da definição dos momentos (2.5), que substituída em (2.6) resulta em uma identidade. Assumiremos que temos um *sistema irredutível*, i.e., que todos os vínculos são independentes. Se não o forem, descartam-se os dependentes, sem detrimento da dinâmica. A equação (2.5) define um mapeamento do espaço $(q, \dot{q}, \tau)$ com $2N$ dimensões para um espaço menor (q, p, τ) , chamado *espaço de fase original* $\Gamma^r = \Gamma \otimes \mathcal{R}$, com $2N-P$ dimensões, sendo Γ o *espaço de fase independente do tempo* (q, p) . Portanto, dado um ponto (q^i, p_i, τ) do espaço de fase original que satisfaça os vínculos (2.6), a imagem inversa $(q^i, \dot{q}^i, \tau)$ que satisfaça (2.5) não é única. Para obtermos uma transformação biunívoca, deve-se adicionar aos momentos, P parâmetros adicionais, chamados multiplicadores de Lagrange no formalismo Hamiltoniano.

2.2) As Hamiltonianas – As Equações de Movimento

Definimos a *Hamiltoniana canônica* da seguinte forma

$$H = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, \tau), \quad (2.7)$$

que, aparentemente, é uma função das posições e velocidades. Porém, as velocidades estão relacionadas com os momentos pela transformação de Legendre (2.7), de modo que usando-a na variação da Hamiltoniana,

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \tau} d\tau \\ &= \delta p_i \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.8)$$

notamos que ela é uma função das coordenadas e momentos.

A equação (2.8) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) \delta q^i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i\right) \delta p_i + \left(\frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial \tau}\right) d\tau = 0, \quad (2.9)$$

de onde obtemos

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = - \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = - \frac{\partial H}{\partial \tau}. \quad (2.10c)$$

Agora, vamos introduzir dois conceitos importantes:

Primeiro, o de colchetes de Poisson entre duas funções F e G sobre o espaço de fase,

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}. \quad (2.11)$$

Do ponto de vista geométrico, os colchetes de Poisson desempenham um papel fundamental na mecânica analítica.

Segundo, o de *igualdade fraca* ($\approx$) para as equações de vínculos. Assim, a equação (2.6) pode ser denotada por

$$\Phi_p(q, p) \approx 0, \quad (2.6')$$

para enfatizar que $\Phi_p(q, p)$ não é numericamente zero em todo o espaço de fase. Conseqüentemente, os vínculos podem ter colchetes de Poisson não nulo com algumas

variáveis canônicas. Então, antes de utilizarmos as equações de vínculos, todos os colchetes de Poisson devem ser calculados.

Duas funções A e B são fracamente iguais, $A \approx B$, quando coincidem sobre a superfície $\Phi_p(q,p) \approx 0$, e podemos denotar

$$A - B = \kappa^p(q,p) \Phi_p$$

Caso as duas funções coincidam em todo o espaço de fase, denota-se a igualdade pelo símbolo usual e diz-se que é uma *igualdade forte*.

A Hamiltoniana canônica (2.7) não é univocamente determinada como uma função dos q 's e p 's, pois os δp_i em (2.8) não são todos independentes, mas preservam os vínculos primários. Devido à presença desses vínculos, o movimento é restrito a um subespaço, $\Gamma_R^\tau = \Gamma_R \otimes \mathfrak{R}$, do espaço de fase original, $\Gamma^\tau = \Gamma \otimes \mathfrak{R}$, e H é definida somente sobre Γ_R^τ . Desejamos estender as equações de movimento (2.10) a todo espaço de fase original. Para isso, definimos uma *Hamiltoniana primária* adicionando à *Hamiltoniana canônica* uma combinação linear dos vínculos primários,

$$H_p = H + \lambda^p(q,p) \Phi_p \approx H \quad (2.12)$$

(A razão pela qual não a denominei *Hamiltoniana total*, como usualmente se faz, é simplesmente porque ela não engloba todos os vínculos, mas apenas os primários).

Então, as equações (2.10) podem ser estendidas a todo o espaço de fase,

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &\approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial L}{\partial q^i} &\approx - \frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial L}{\partial \tau} &= - \frac{\partial H}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

permitindo expressar as velocidades como funções dos momentos e dos multiplicadores de Lagrange à custa da substituição das igualdades fortes pelas fracas. E, para obter a última equação, utilizamos que os vínculos não dependem explicitamente do tempo.

Sendo os vínculos independentes (entre si), dois λ 's diferentes fornecem duas velocidades distintas, permitindo-nos, em princípio, obter os multiplicadores como funções das coordenadas e velocidades ao resolvermos as equações,

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q}), \tau) + \lambda_p(q, \dot{q}) \frac{\partial \Phi_p}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q})).$$

Essas considerações são importantes porque permitem-nos definir mais precisamente a transformação de Legendre do espaço $(q, \dot{q}, \tau)$ para a superfície $\Phi_p(q, p) \approx 0$ definida no espaço (q, p, λ, τ) como

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}, \tau), \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\lambda_p = \lambda_p(q, \dot{q}).$$

E também a transformação inversa,

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ \dot{q}^i &\approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tau},$$

$$\Phi_p(q, p) \approx 0.$$

Concluimos que para obter-se transformações de Legendre inversíveis, deve-se adicionar variáveis extras - os multiplicadores de Lagrange.

Fazendo uso das relações (2.13) podemos obter as equações de movimento no formalismo Hamiltoniano, a partir das equações de Euler-Lagrange (2.2) e da definição de momento canônico (2.5),

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &\approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &\approx -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial q^i},\end{aligned}\tag{2.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tau},$$

$$\Phi_p(q, p) \approx 0.$$

Reciprocamente, as equações (2.16) implicam nas equações de Euler-Lagrange (2.2).

O desenvolvimento temporal de uma função arbitrária $F(q, p)$ definida no espaço de fase, Γ_p^τ , pode ser expresso mais compactamente em termo dos colchetes de Poisson

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial \tau} \\ &\approx \frac{\partial F}{\partial q^i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial q^i} \right) + \frac{\partial F}{\partial \tau}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\dot{F} \approx \{F, H\} + \lambda_p \{F, \Phi_p\} + \frac{\partial F}{\partial \tau}.\tag{2.17}$$

2.3) Vínculos Secundários – Funções de Primeira e Segunda Classe

A fim de construir um sistema consistente, exigimos que os vínculos primários sejam preservados no tempo,

$$\dot{\Phi}_p = \{\Phi_p, H\} + \lambda^r \{\Phi_p, \Phi_r\} \approx 0, \quad r=1,2,\dots,P. \quad (2.18)$$

Se as equações acima não são satisfeitas identicamente como consequência das equações (2.6'), existem duas possibilidades. Primeira, pode acontecer que as equações (2.18) não forneçam informação nova, mas simplesmente sejam restrições sobre os λ 's. Segunda, as equações (2.18) podem fornecer uma nova relação entre os p 's e q 's, independentes dos λ 's. Estas relações são denominadas *vínculos secundários* e devem ser adicionadas aos vínculos originais. Os *vínculos secundários* diferem dos *primários* porque se faz uso das equações de movimento para deduzi-los. Repete-se o processo, impondo-se condições de consistência sobre os novos vínculos até que todos os vínculos independentes e condições sobre os λ 's tenham sido encontrados. Se há S vínculos secundários, então se deve adicioná-los aos P vínculos primários para obter-se o conjunto completo simbolizado por

$$\Phi_m \approx 0, \quad m=1,2,\dots,P+S=M. \quad (2.19)$$

Definimos um vínculo, e mais geralmente uma função $A(q,p)$, como sendo de *primeira classe* se seus colchetes de Poisson com todos os vínculos são fracamente nulos, isto é, quando,

$$\{A, \Phi_m\} \approx 0.$$

E, como sendo de *segunda classe*, se ao menos um dos colchetes de Poisson da função $A(q,p)$ com algum vínculo, não for fracamente nulo.

Todos os vínculos (2.19) podem ser divididos nas duas classes. Aqueles que são de *primeira classe* denotaremos por

$$\Psi_a(q,p) \approx 0, \quad a = 1, 2, \dots, A \quad (2.20a)$$

e os de *segunda classe* por

$$\Lambda_k(q,p) \approx 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2.20b)$$

sendo $A+K=M$. Estamos definindo deste modo, pois é a classificação em *primeira* ou *segunda classe* que possui importância do ponto de vista Hamiltoniano, e não em *primário* ou *secundário*. Em cada um dos subconjuntos (2.20a) e (2.20b) há vínculos primários e secundários.

Voltando à primeira possibilidade, estudaremos as restrições sobre os multiplicadores de Lagrange. Estas restrições surgem das equações de consistência

$$\{\Phi_m, H\} + \lambda^p \{\Phi_m, \Phi_p\} \approx 0, \quad (2.21)$$

para qualquer m entre 1 e M . Temos M equações lineares não homogêneas com r incógnitas λ^r ($r=1, 2, \dots, P \leq M$) e coeficientes que são funções dos q 's e p 's. Estas equações devem possuir soluções, de outro modo o sistema descrito pela Lagrangeana (2.1) seria inconsistente. A solução geral de um sistema deste tipo é dado pela soma de uma solução particular da equação inhomogênea (I^r) mais a solução geral do problema homogêneo associado ($H^r = h^o H_o^r$):

$$\lambda^r = I^r(q,p) + h^o H_o^r(q,p), \quad o = 1, 2, \dots, O, \quad (2.22)$$

sendo cada $H_o^r(q,p)$ uma solução linearmente independente,

$$H_o^r \{\Phi_m, \Phi_r\} = 0,$$

e h^o são funções arbitrárias do tempo. Inserindo a solução (2.22) nas equações de movimento (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{F} &\approx \left\{ F, H + I' \Phi_r + h^\circ H'_o \Phi_r \right\} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \\ &\approx \left\{ F, H' + h^\circ \Phi_o \right\} + \frac{\partial F}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Onde definimos, $H' = H + I' \Phi_r$ e $\Phi_o = H'_o \Phi_r$.

2.4) Transformações de Gauge – Hamiltoniana Estendida

A presença de funções arbitrárias do tempo h° na Hamiltoniana primária

$$H_p = H' + h^\circ \Phi_o, \quad (2.24)$$

e, conseqüentemente, nas equações de movimento (2.23), indicam que nem todas as variáveis canônicas são independentes – há vínculos entre elas. Assim, retornamos às considerações iniciais do capítulo, só que agora no formalismo Hamiltoniano. Neste a existência de vínculos têm conseqüências bem nítidas – variáveis arbitrárias nas equações de movimento, i.e., na evolução temporal do sistema.

O estado do sistema para qualquer instante futuro não é univocamente determinado pelo estado inicial por causa da existência dessas variáveis arbitrárias nas equações de movimento. Em outras palavras, em um dado instante, um conjunto de q 's e p 's determinam um estado físico, mas dado um estado físico, em um determinado instante, existe mais que um conjunto de q 's e p 's que lhe corresponda. Sabemos, porém, que deve ser irrelevante qualquer ambigüidade na determinação das variáveis canônicas. Assim, se duas variáveis dinâmicas que em um dado instante considerado inicial coincidem, e evoluem sob a influência de funções arbitrárias, parecerão distintas após um certo intervalo de tempo. Porém, devem ser consideradas fisicamente equivalentes. Define-se a transformação que conecta essas duas variáveis, *transformação de gauge*.

Consideremos a evolução dessa variável dinâmica arbitrária F , em um intervalo de tempo $\Delta\tau$ [15],

$$\begin{aligned}
F(\Delta\tau) &= F_0 + \dot{F} \Delta\tau = F_0 + \left(\{F, H'\} + h^o \{F, \Phi_o\} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \right) \Delta\tau \\
&= F_0 + \{F, H'\} \Delta\tau + h^o \{F, \Phi_o\} \Delta\tau + \frac{\partial F}{\partial \tau} \Delta\tau.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Sendo h^o arbitrário podemos escolher h'^o , partir das mesmas condições iniciais e escrever

$$\dot{F}'(\Delta\tau) = F_0 + \{F, H'\} \Delta\tau + h'^o \{F, \Phi_o\} \Delta\tau + \frac{\partial F}{\partial \tau} \Delta\tau. \tag{2.26}$$

Então,

$$\delta F(\Delta\tau) = F(\Delta\tau) - F'(\Delta\tau) = (h^o - h'^o) \{F, \Phi_o\} \Delta\tau,$$

ou,

$$\delta F(\Delta\tau) = \varepsilon^o \{F, \Phi_o\}. \tag{2.27}$$

Aqui, usamos a definição $\varepsilon^o = (h^o - h'^o) \Delta\tau$.

As transformações (2.27) geradas pelos vínculos primários de primeira classe Φ_o não alteram o estado físico do sistema. Assim, os *vínculos primários de primeira classe são geradores das transformações de gauge*.

As variáveis físicas, chamadas *observáveis* da teoria, devem ser quantidades invariantes por transformações de gauge. *Um observável é, por definição, uma função sobre a superfície de vínculo que é invariante de gauge*.

É interessante enfatizar que *foi provado* que apenas os vínculos primários de primeira classe geram transformações de gauge. Porém, aceita-se como hipótese plausível – chamada *conjectura de Dirac* – que os vínculos secundários de primeira classe também geram transformações de gauge [15,17]. Ela nos diz que todos os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de gauge. A classificação dos vínculos em primários e secundários está baseada no formalismo Lagrangeano, e em primeira e segunda classe no Hamiltoniano, especificamente nos colchetes de Poisson, o qual, do ponto de vista

geométrico é a figura mais central da mecânica analítica[16]. O formalismo assim definido é consistente por três motivos: primeiro, a transformação gerada por um vínculo de primeira classe (seja primário ou secundário) preserva todos os vínculos; segundo, o colchete de Poisson entre dois vínculos de primeira classe permanece um vínculo de primeira classe; terceiro, os métodos de quantização conhecidos não discriminam os vínculos de primeira classe em primários e secundários.

O movimento gerado pela Hamiltoniana primária (2.12) não descreve graus de liberdade de gauge resultantes dos vínculos secundários de primeira classe. Para fazê-lo, iremos adicionar uma combinação linear desses vínculos à Hamiltoniana primária e definir a Hamiltoniana estendida,

$$H_E = H' + c^a \Psi_a, \quad a=1,2,\dots,A. \quad (2.28)$$

sendo os Ψ_a 's vínculos de primeira classe e H' definida em (2.23).

As três Hamiltonianas H' , H_P e H_E são invariantes de gauge. Portanto, geram evoluções temporais idênticas para variáveis que também sejam invariantes de gauge. Em contrapartida, as variáveis que não são invariantes de gauge têm evoluções temporais distintas para cada uma das Hamiltonianas. Qual delas usar ? Aquela que não exclui nenhum tipo de transformação de gauge, a saber, a Hamiltoniana estendida.

Como dissemos na seção (2.2), a partir das equações (2.16), originadas da Hamiltoniana primária, pode-se obter as equações de Euler-Lagrange (2.2). Então, a necessidade da existência da Hamiltoniana primária segue-se da equivalência com o formalismo Lagrangeano, mas a Hamiltoniana estendida, como o nome sugere, estende o formalismo Lagrangeano com a introdução de graus de liberdade que antes não eram manifestos.

A presença de vínculos de segunda classe aponta a existência de graus de liberdade supérfluos e não geram transformações de gauge, nem sequer alguma outra transformação de significado físico; isto pode ser visto calculando-se a transformação canônica sofrida por um vínculo qualquer e gerada por um vínculo de segunda classe. Por definição, o resultado não é fracamente nulo, i.e., não preserva os vínculo $\Phi_m \approx 0$. Desde que os vínculos de

segunda classe correspondem a graus de liberdade excedentes, é conveniente eliminá-los. Antes, notamos que a matriz dos colchetes de Poisson dos vínculos de segunda classe,

$$C_{mn} = \{\Phi_m, \Phi_n\}, \quad (2.29)$$

é necessariamente não singular [15,16,17,18]. Ela deve ter ordem par, pois é antissimétrica, i.e., os vínculos de segunda classe devem aparecer somente aos pares. Pode-se eliminá-los através dos colchetes de Poisson modificados, chamados *colchetes de Dirac*,

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \Lambda_i\} C^{ij} \{\Lambda_j, G\}. \quad i, j = 1, 2, \dots, K. \quad (2.30)$$

Para $F = \Lambda_k$, temos

$$\{\Lambda_k, G\}_D = \{\Lambda_k, G\} - \{\Lambda_k, \Lambda_i\} C^{ij} \{\Lambda_j, G\},$$

mas,

$$\{\Lambda_k, \Lambda_i\} C^{ij} = C_{ki} C^{ij} = \delta^j_k,$$

então,

$$\{\Lambda_k, G\}_D = \{\Lambda_k, G\} - \delta^j_k \{\Lambda_j, G\} = 0. \quad (2.31)$$

Conseqüentemente, podemos impor $\Lambda_k = 0$, eliminando K variáveis canônicas da teoria.

Além de gozar das mesmas propriedades dos colchetes de Poisson (antissimetria, linearidade, regra do produto e identidade de Jacobi), os colchetes de Dirac, entre uma função arbitrária do espaço de fase e a Hamiltoniana estendida, gera corretamente as equações de movimento,

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}_D \approx \{F, H_E\}, \quad (2.32)$$

pois, H_E é uma função de primeira classe.

A identificação de todos os vínculos e posterior discriminação em primeira e segunda classe é realizada através dos colchetes de Poisson. Doravante, é conveniente substituir os colchetes de Poisson pelos colchetes de Dirac, a fim de eliminar os vínculos de segunda classe (que correspondem a graus de liberdade excedentes).

Através dos colchetes de Dirac podemos descrever algebricamente um observável como uma função do espaço de fase que possui colchete de Dirac fracamente nulo com os vínculos de primeira classe,

$$\{F, \Psi_a\}_D \approx 0. \quad (2.33)$$

É interessante observar que definimos um *observável* a partir dos elementos da nossa teoria, os quais foram originados do princípio da mínima ação, sem preocupação com procedimentos experimentais.

2.5)Fixação de Gauge

Se a teoria possui vínculos de primeira classe, então há mais que um conjunto de variáveis canônicas correspondentes a dado estado físico. Pode-se eliminar essa ambigüidade impondo restrições sobre as variáveis canônicas, chamadas *condições de gauge*. Após a imposição das condições de gauge, obtém-se uma correspondência biunívoca entre as variáveis canônicas e os estados físicos. Sendo assim, elas meramente removem as variáveis não observáveis da teoria e não afetam os observáveis.

Um conjunto satisfatório de condições de gauge,

$$C_a(q,p) \approx 0, \quad (2.34)$$

deve, em primeiro lugar, fixar completamente o gauge e, em segundo, não afetar as propriedades fisicamente relevantes, apenas limitar a liberdade de gauge. Para isso, devemos ter,

$$\det[C_a, \Psi_b] \neq 0, \quad (2.35)$$

ou seja, os vínculos C_a, Ψ_b formam um conjunto de segunda classe. Conseqüentemente, após a fixação de gauge, não restarão vínculos de primeira classe. A condição (2.35) ainda garante que a superfície $C_a \approx 0$ intercepta as órbitas de gauge, que existem sobre a superfície dos vínculos, somente uma vez.

Após a fixação de gauge podemos usar os colchetes de Dirac e obter, finalmente, uma teoria livre de vínculos.

2.6) Espaço de Fase Reduzido

Se tomarmos o quociente da superfície dos vínculos pelas órbitas de gauge obteremos um espaço de fase menor, chamado *espaço de fase reduzido*, obtido identificando todos os pontos sobre a mesma órbita de gauge.

Os observáveis são funções definidas sobre o espaço de fase reduzido e que por isso são constantes sobre as órbitas de gauge. Pode-se mostrar [17] que os colchetes induzidos sobre o espaço de fase reduzido são os colchetes de Poisson originais calculados para funções invariantes de gauge. Como a Hamiltoniana é invariante de gauge, o movimento de um sistema vinculado projetado no espaço de fase reduzido é gerado pelas equações de Hamilton originais, sem vínculos, expressas em função dos colchetes de Poisson.

As dificuldades surgem por que nem sempre é possível reformular a teoria unicamente em termos de quantidades invariantes de gauge. Para isso, deve-se obter um conjunto completo de soluções para as equações diferenciais

$$\{F, \Psi_a\} \approx 0.$$

Além disso, quando tomamos o quociente da superfície dos vínculos pelas órbitas de gauge podemos perder propriedades importantes, tais como, invariância de Lorentz manifesta ou, no caso da teoria de campos, localidade no espaço.

2.7) Aplicação: Cálculo da Hamiltoniana Canônica da Partícula Relativística

A ação para uma partícula relativística é dada pelo comprimento de arco de sua trajetória:

$$S = -m \int_1^2 ds. \quad (2.36)$$

Esta ação é um escalar de Lorentz quando,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2,$$

isto é,

$$ds = \sqrt{dx^2},$$

é uma distância invariante de Lorentz. Definindo a quadrivelocidade,

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \Rightarrow \sqrt{\dot{x}^2} = 1, \quad (2.37)$$

(onde para garantir a causalidade relativística assumimos que $\dot{x}^0$ é positivo) podemos reescrever a ação do seguinte modo:

$$S = -m \int_1^2 ds = -m \int_1^2 \sqrt{\dot{x}^2} ds = \int_1^2 L(s) ds, \quad (2.38)$$

e definir que uma Lagrangeana é homogênea do primeiro grau na velocidade, quando,

$$L(\alpha \dot{x}^\mu) = \alpha L(\dot{x}^\mu),$$

sendo α uma constante qualquer. Assim, é fácil provar que sob *reparametrização da linha de mundo*,

$$s \rightarrow \bar{s}, \quad x^\mu(s) \rightarrow x^\mu(\bar{s}(s)), \quad (2.39)$$

a Lagrangeana que aparece em (2.38) se comporta como uma função homogênea de primeiro grau na velocidade:

$$L\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) = L\left[\left(\frac{dx^\mu}{d\bar{s}}\right)\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)\right] = \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right) L\left(\frac{dx^\mu}{d\bar{s}}\right).$$

Isto é suficiente para garantir a invariância da ação sob reparametrização:

$$S = -m \int_1^2 ds \left(\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds}\right)^{1/2} = -m \int_1^2 d\bar{s} \frac{d\bar{s}}{ds} \left[\left(\frac{dx^\mu}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}\right) \left(\frac{dx_\mu}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}\right) \right]^{1/2} = -m \int_1^2 d\bar{s} \left(\frac{dx^\mu}{d\bar{s}} \frac{dx_\mu}{d\bar{s}}\right)^{1/2} = \bar{S},$$

desde que $s_1 = \bar{s}_1, s_2 = \bar{s}_2$.

Recorrendo às definições de momento (2.5) e da Hamiltoniana canônica (2.7):

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{m \dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}, \quad (2.40)$$

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu - L = -\frac{m \dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} + m \sqrt{\dot{x}^2} = -m \sqrt{\dot{x}^2} + m \sqrt{\dot{x}^2},$$

provamos que,

$$H = 0, \quad (2.41)$$

i.e., a Hamiltoniana canônica é nula. Assim, concluímos que para a partícula relativística que possui uma Lagrangeana homogênea do primeiro grau na velocidade, a ação é invariante por reparametrização, e a Hamiltoniana canônica é nula [16]. A invariância por reparametrização é gerada pelo vínculo de primeira classe ($g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$)

$$\Psi = p^2 - m^2 \approx 0. \quad (2.42)$$

Podemos provar isto, a partir da transformação gerada pelo vínculo sobre a coordenada x^μ :

$$\delta x^\mu = \varepsilon \{x^\mu, \Psi\}.$$

Usando (2.37) e (2.40), temos

$$\delta x^\mu = \varepsilon \{x^\mu, \Psi\} = -2 p^\mu \varepsilon = -2 m \dot{x}^\mu \varepsilon.$$

Redefinindo o parâmetro infinitesimal,

$$\Delta \tau = -2 m \varepsilon,$$

temos,

$$\delta x^\mu = \dot{x}^\mu \Delta \tau = x^\mu(\tau + \Delta \tau) - x^\mu(\tau) = x^\mu(\bar{\tau}) - x^\mu(\tau).$$

Isto prova que a *invariância por reparametrização* (2.39) é gerada pelo vínculo de primeira classe (2.42). A *invariância por reparametrização* é uma *invariância de gauge*, pois uma única trajetória pode ser descrita por um número infinito de parametrizações diferentes. Conforme já estudamos neste capítulo, ao escolher uma parametrização particular estamos fixando o gauge.

Capítulo 3

Quantização de Sistemas Vinculados

3.1) Quantização Canônica – Método dos Operadores

O termo quantização refere-se à construção da teoria quântica de um certo sistema a partir da teoria clássica correspondente. Historicamente, um dos primeiros métodos para quantizar um sistema clássico regular é o método da quantização canônica, que, esquematicamente, envolve os seguintes passos no formalismo de Schroedinger [15,16,17,18]:

a) Constrói-se o formalismo Hamiltoniano do sistema. O procedimento foi exposto no capítulo anterior.

b) Descreve-se o estado do sistema por um vetor normalizado ψ de um espaço de Hilbert abstrato $\mathfrak{H}$.

c) Associa-se a cada quantidade física clássica, $A = A(q,p)$, um operador quântico $\hat{A} = \hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ que atua no espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$. Postula-se que os operadores obedeçam às relações de comutação canônicas:

$$\left[\hat{q}^a, \hat{p}_b \right] = i\hbar \delta^a_b, \quad \left[\hat{q}^a, \hat{q}^b \right] = \left[\hat{p}_a, \hat{p}_b \right] = 0 . \quad (3.1)$$

d) Descreve-se a evolução temporal do estado ψ , através da equação de Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (3.2)$$

sendo $\hat{H}$ a Hamiltoniana quântica, correspondente à Hamiltoniana clássica H .

A evolução temporal do operador $\hat{A}$ é descrita pela equação,

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \left(\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H} \right) \rangle, \quad (3.3)$$

sendo $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ o valor médio de $\hat{A}$.

Inspirado em (3.3) podemos fazer a seguinte associação

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} \left[\hat{A}, \hat{B} \right], \quad (3.4)$$

entre os colchetes de Poisson e os comutadores.

Impondo-se as relações de comutação canônicas (3.1) em um espaço de Hilbert concreto, pode-se resolver na prática, a equação de Schroedinger e encontrar as probabilidades de medidas das quantidades físicas, seus valores médios e as probabilidades de transição de um estado para outro.

Uma tal formulação da teoria quântica em termos de operadores e vetores no espaço de Hilbert, é chamada *formulação de operadores da quantização canônica*.

Vimos no capítulo anterior que os vínculos no formalismo Hamiltoniano podem ser classificados em duas categorias distintas: *primeira e segunda classe*. Tal distinção permanece na mecânica quântica.

3.1.1) Vínculos de Segunda Classe

Na quantização canônica por operadores, os colchetes de Poisson de duas funções F e G do espaço de fase são substituídos pelos de Dirac (para evitar contradições) e estes por comutadores dos operadores associados correspondentes[15]

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hbar \left\{ \hat{F}, \hat{G} \right\}_D . \quad (3.4)$$

Por causa disto, podemos impor os vínculos de segunda classe como equações de operadores

$$\hat{\Lambda}_k = 0 . \quad (3.5)$$

Desde que $\{F, \Lambda_k\}_D = 0$, para qualquer F .

A principal dificuldade em realizar tal quantização de um sistema com vínculos de segunda classe consiste em encontrar uma representação explícita para os colchetes de Dirac na teoria quântica. Isto, em geral, é impossível, exceto, em casos muito específicos, como, por exemplo, quando o resultado do cálculo dos colchetes é um número.

Essa restrição limita seriamente a quantização canônica de teorias com vínculos de segunda classe pelo método de operadores.

3.1.2) Vínculos de Primeira Classe – Espaço de Fase Reduzido

Quando queremos quantizar um sistema com vínculos de primeira classe pelo *método do espaço de fase reduzido*, precisamos ter em mãos um conjunto completo de funções invariantes de gauge - *os observáveis* - que podem ser obtidos resolvendo as equações diferenciais

$$[F, \Psi_a] \approx 0.$$

Depois, eliminamos os vínculos e definimos um espaço de Hilbert menor (correspondente ao espaço de fase reduzido) para o sistema, como o espaço de representação irredutível das relações de comutação do conjunto completo de observáveis.

Porém, como já salientamos na seção (2.6), nem sempre é possível encontrar um conjunto completo de soluções das equações diferenciais acima. Para contornar essa dificuldade, impomos *condições de gauge canônicas*

$$\chi_a = 0. \quad (3.6)$$

Após a fixação de gauge, qualquer função do espaço de fase pode ser vista como a restrição naquele gauge de uma função invariante de gauge. Assim, um conjunto completo de funções fixadoras de gauge fornece um conjunto completo de observáveis. Concluímos que a quantização para o sistema pelo método do espaço de fase reduzido torna-se igual à quantização de um sistema com vínculos de segunda classe.

Existem várias dificuldades associadas à eliminação de graus de liberdades de gauge: pode destruir a invariância manifesta de alguma simetria; o conjunto completo de observáveis pode ser uma função complicada desses observáveis, dificultando a construção dos comutadores. Depois, a Hamiltoniana no espaço de fase reduzido pode ter uma expressão muito complexa, dificultando a definição da Hamiltoniana quântica, por causa de um problema chamado *ordenamento de operadores*.

Há vários métodos de quantização; iremos nos fixar naqueles relacionados às integrais de trajetória.

3.2) Quantização por Integrais de Trajetória

A formulação da mecânica quântica por integrais de trajetória é devida a Feynmann [19]. O termo integral de trajetória significa soma sobre todas as trajetórias ou caminhos. Em particular, a integral de trajetória pode ser entendida como uma soma sobre todas as trajetórias possíveis entre dois pontos escolhidos do espaço de fase.

Nesta seção, quero expor breve e qualitativamente a conexão entre as integrais de trajetória e a mecânica quântica, com o objetivo de, posteriormente, aplicá-las aos sistemas vinculados e discutir as dificuldades relacionadas ao cálculo das integrais de trajetória em um espaço de fase com graus de liberdade de gauge, em outras palavras, a quantização de sistemas vinculados pelo método das integrais de trajetória.

A teoria quântica diz que qualquer sistema físico é sujeito a flutuações quânticas, as quais no limite $\hbar \rightarrow 0$, não são observadas. Sendo assim, não faz sentido falar sobre a trajetória descrita por uma partícula, tal qual o faz a mecânica clássica. O limite $\hbar \rightarrow 0$, é o limite clássico, i.e., o limite através do qual obtemos a correspondência entre as teorias quântica e clássica.

Na formulação da mecânica quântica por integrais de trajetória o objeto central é a amplitude de transição

$$\langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle = \sum_{q,p} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q,p) \right]. \quad (3.7)$$

A qual calcula-se somando sobre todas as trajetórias possíveis e da qual se obtém todas as informações físicas. No limite $\hbar \rightarrow 0$, pequenas flutuações em um ponto do espaço de fase produzem grandes variações na fase, de tal modo que as contribuições individuais se cancelam, com a exceção da trajetória clássica para a qual a ação é estacionária [17].

O cálculo rigoroso da amplitude (3.7) é feito discretizando o espaço de fase e o intervalo de tempo entre t_a e t_b em um número grande de intervalos. O mesmo é feito para a ação

$$S[q(t), p(t)] = \int_{t_a}^{t_b} [p \dot{q} - H(q, p, t)] dt. \quad (3.8)$$

Então, obtém-se

$$\langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N dq_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_{N+1}) \right]. \quad (3.9)$$

A notação explicita os pontos e instantes fixos $q_a t_a$ (inicial) e $q_b t_b$ (final) para enfatizar que deles depende a amplitude.

No limite $N \rightarrow \infty$, obtém-se:

$$\langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle = \int Dq Dp \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q, p) \right]. \quad (3.10)$$

Porém, a Hamiltoniana na ação (3.9) sofre uma aproximação cuja escolha não é única, e para cada escolha obtém-se, no limite, um resultado diferente. Em casos específicos onde a Hamiltoniana não contém produtos das coordenadas e momentos, o resultado é independente da aproximação. É o mesmo problema que surge na quantização canônica pelo método dos operadores: o *ordenamento dos operadores*.

Pode-se fazer uso da propriedade de composição das amplitudes,

$$\langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_c \langle q_b t_b \| q_c t_c \rangle \langle q_c t_c \| q_a t_a \rangle, \quad (3.11)$$

para interpretá-las como uma multiplicação matricial com matrizes contínuas,

$$U_{q'q}(t', t) = \langle q' t' \| q t \rangle, \quad (3.12)$$

e considerar as matrizes como uma representação de operadores abstratos, $\hat{U}(t', t)$, atuando sobre vetores, $|q\rangle$, no espaço de Hilbert

$$\langle q' | \hat{U}(t', t) | q \rangle = U_{q'q}(t', t). \quad (3.13)$$

Então, podemos reescrever (3.11):

$$\hat{U}(t', t) = \hat{U}(t', t'') \hat{U}(t'', t). \quad (3.14)$$

Pode-se mostrar que $\hat{U}$ desempenha o papel do operador evolução no formalismo de Schroedinger:

$$\hat{U}(t_b, t_a) = \exp \left[-i(t_b - t_a) \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \right]. \quad (3.15)$$

E que a amplitude,

$$\langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle = \langle q_b | \exp \left[-i(t_b - t_a) \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \right] | q_a \rangle, \quad (3.16)$$

obedece à equação de Schroedinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle = H(q_b, -i \frac{\partial}{\partial q_b}) \langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle, \quad (3.17)$$

com condição inicial

$$\langle q_b t_b \| q_a t_a \rangle = \delta(q_b - q_a).$$

A mesma conexão existe entre as integrais de trajetória e as relações de comutação [17].

Deste modo, as integrais de trajetória também estabelecem os princípios da mecânica quântica. Porém, os cálculos envolvendo as integrais de trajetória são muitas vezes complicados. Em teorias de campos, ao contrário, existem métodos desenvolvidos para cálculos com as integrais de trajetória. Muito mais do que isso, elas são muitas vezes as únicas ferramentas disponíveis. Em teoria de campos, todas as grandezas físicas podem ser deduzidas da *função de Green de n pontos*. A qual pode ser expressa em termos de integrais de trajetória.

3.2.1) Sistemas Vinculados

Os sistemas físicos que possuem graus de liberdade de gauge merecem um tratamento especial, tanto pela sua importância física quanto pela dificuldade que oferecem a Hamiltonização e posterior quantização.

Na seção (3.1) citamos alguns obstáculos que os sistemas vinculados apresentam à quantização canônica pelo método do espaço de fase reduzido.

Consideremos inicialmente o caso de sistemas com N graus de liberdade que possuem vínculos de primeira classe Ψ_a e condições de gauge C_a ($a=1,2,\dots,A$), com ação invariante de gauge, e onde os vínculos de segunda classe não existem ou já foram eliminados. Aprendemos que para obter a amplitude de transição do sistema devemos calcular a soma sobre todos os caminhos da exponencial imaginária da ação (a fase). O cálculo é o de uma integral de trajetória onde a medida indica uma soma sobre os graus de liberdade físicos e os de gauge. Estes últimos provocam uma divergência, induzida pela invariância de gauge da ação.

Historicamente, o primeiro método de solução do problema consistiu em restringir o cálculo das integrais de trajetória aos graus de liberdade invariantes de gauge, i.e., ao espaço de fase reduzido.

Como na quantização canônica, este método necessita do conhecimento de um conjunto completo de funções invariantes de gauge, o que em geral é muito difícil.

Alternativamente, Faddeev e Popov [20] propuseram o seguinte teorema:

Teorema de Faddeev-Popov: O elemento de matriz da matriz espalhamento S é dado pela seguinte amplitude de transição

$$Z = \int Dq Dp \delta(C_a) \delta(\Psi_b) \det\{C_a, \Psi_b\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (q^i p_i - H)\right\}. \quad (3.20)$$

Onde os vínculos de primeira classe e as condições de gauge formam um sistema de segunda classe, tal que sobre a superfície dos vínculos,

$$\{\Psi_a, \Psi_b\} \approx 0, \quad \det\{\Psi_a, C_b\} \neq 0.$$

E, a amplitude de transição é localmente independente das condições de gauge escolhidas.

Foi Senjanovic' [21] quem estendeu a formulação acima com a inclusão de vínculos de segunda classe $\Lambda_k(q, p) \approx 0$

$$Z = \int Dq Dp \delta(C_a) \delta(\Psi_b) \delta(\Lambda_K) \det\{C_a, \Psi_b\} \det^{1/2}\{\Lambda_i, \Lambda_j\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (q^i p_i - H)\right\}. \quad (3.21)$$

Os determinantes e os deltas de Dirac que aparecem acima não são relativisticamente covariantes e, conseqüentemente, a amplitude de transição também não é. O formalismo de Faddeev-Popov foi construído no contexto da teoria de Yang-Mills, para a qual foi obtida uma outra expressão relativisticamente covariante para a amplitude de transição [21]. No entanto, este método levantou muitas controvérsias quando foi estendido para teorias cujas álgebras das transformações infinitesimais de gauge não fecham [22], porque as amplitudes de transição correspondentes deixam de ser simultaneamente unitárias e invariantes de gauge. Uma alternativa é introduzir campos auxiliares de tal modo que a álgebra feche [22], porém não há uma garantia de que isso seja sempre possível [23,24].

Não há contradição entre a propriedade de primeira classe dos vínculos,

$$\{\Psi_a, \Psi_b\} = C_{ab}^c \Psi_c, \quad (3.22)$$

e a álgebra das transformações infinitesimais geradas pelos vínculos,

$$\delta F = \{F, \varepsilon^a \Psi_a\}, \quad (3.23)$$

pois, quando os coeficientes de estrutura, C_{ab}^c , não são constantes, são funções, a álgebra é aberta. Podemos ver isto para uma função bosônica F [25]

$$\delta_\varepsilon \delta_\theta F - \delta_\theta \delta_\varepsilon F = \{F, \varepsilon^b \theta^a \{\Psi_a, \Psi_b\}\},$$

e, da equação (3.22),

$$\delta_\varepsilon \delta_\theta F - \delta_\theta \delta_\varepsilon F = \varepsilon^b \theta^a C_{ab}^c \{F, \Psi_c\} + \varepsilon^b \theta^a \{F, C_{ab}^c\} \Psi_c. \quad (3.24)$$

Portanto, somente com a imposição dos vínculos, $\Psi_a = 0$, as transformações (3.23) fecham.

3.3) Quantização pelo Método de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV)

O formalismo de BFV [10] consiste em quantizar uma teoria com vínculos de primeira classe através da formulação BRST de integrais de trajetória.

Os vínculos que as diversas teorias de gauge apresentam podem ser bosônicos ou fermiônicos, relativísticos ou não-relativísticos; suas álgebras podem possuir coeficientes constantes ou que sejam funções do espaço-tempo ou do espaço de fase. O método de BFV é capaz de tratar todos esse sistemas. Esta é a vantagem que este método possui sobre o de Faddeev-Popov : apresentar uma amplitude de transição unitária, invariante de gauge e relativisticamente covariante, para qualquer sistema. Seu formalismo está apoiado sobre as transformações BRST; nele o princípio da invariância de gauge do sistema original é substituído pelo princípio da invariância BRST.

A idéia central é expandir o espaço de fase original acrescentando *os fantasmas*, que são variáveis que não obedecem ao *teorema spin-estatística* e que possuem paridade de Grassmann oposta à dos vínculos (ou seja, se os vínculos forem bosônicos os fantasmas são fermiônicos, e vice-versa), de tal modo que a ação invariante de gauge original perca essa invariância e torne-se invariante por BRST. Os graus de liberdade de gauge são eliminados pelos fantasmas através do princípio da invariância BRST.

Assim, a amplitude de transição deixa de ser divergente para sistemas vinculados ao substituímos a invariância de gauge, local, pela invariância BRST, global.

O teorema de Batalin-Vilkovisky considera sistemas dinâmicos em um espaço de fase original com coordenadas bosônicas e fermiônicas (q^i, p_i) ($i=1,2,...,N$) e uma Hamiltoniana (canônica) bosônica $H(q,p)$. Os vínculos Ψ_a ($a=1,2,...,A$) podem ser bosônicos ou fermiônicos e possuem a seguinte álgebra:

$$\{\Psi_a, \Psi_b\} = C_{ab}^s \Psi_c, \quad \{H, \Psi_a\} = V_a^b \Psi_b. \quad (3.25)$$

Seguindo o formalismo BfV, ampliamos o espaço de fase original acrescentando inicialmente um par de variáveis canonicamente conjugadas: o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo e o momento canonicamente associado ao multiplicador: (e_a, p_{e_a}) .

Para não modificar o conteúdo dinâmico da teoria, impomos o momento conjugado ao multiplicador como um novo vínculo (de primeira classe):

$$p_{e_a} \approx 0. \quad (3.26)$$

Doravante denotaremos os vínculos (Ψ_a, p_{e_a}) por G_α ($\alpha=1,2,\dots,2A$), satisfazendo a álgebra:

$$\begin{aligned} \{G_\alpha, G_\beta\} &= C_{\alpha\beta}^\gamma G_\gamma \\ \{H, G_\alpha\} &= V_\alpha^\beta G_\beta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para cada vínculo de primeira classe deve-se associar um par de fantasmas com paridade de Grassmann, ε , oposta à do vínculo correspondente:

$$\begin{aligned} G_\alpha &\rightarrow (\eta_\alpha, \wp_\alpha), \\ \varepsilon(G_\alpha) &= \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon(\eta_\alpha) = \varepsilon(\wp_\alpha) = \varepsilon_\alpha + 1 \\ (\eta_\alpha)^* &= \eta_\alpha, \quad \varepsilon(\wp_\alpha)^* = (-1)^{\varepsilon_\alpha+1} \wp_\alpha. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Os colchetes de Dirac generalizados (englobam variáveis com ambas as paridades) para os fantasmas são:

$$\{\eta_\alpha, \wp_\beta\} = -\delta_{\alpha\beta} = (-1)^{\varepsilon_\alpha} \{\wp_\beta, \eta_\alpha\}. \quad (3.29)$$

Então, o espaço de fase original foi estendido do seguinte modo:

$$(p, q) \rightarrow (p, q) \oplus (p_{e_a}, e_a) \oplus (\eta_a, \wp_a). \quad (3.30)$$

Teorema de Batalin-Vilkovisky

O teorema afirma que dada uma função fermiônica completamente arbitrária $\psi(q, p, e, p_e, \eta, \wp)$, a integral funcional:

$$Z = \int Dq Dp D\eta D\wp \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\dot{q}^i p_i + \dot{\lambda}_a \pi_a + \dot{\eta}_a \wp_a - H - \{Q, \psi\})\right], \quad (3.31)$$

não depende da escolha de ψ . Isto significa que mesmo possuindo uma grande liberdade na escolha de ψ , a amplitude de transição fica inalterada.

A carga BRST, Q , geradora da simetria BRST é anticomutativa e tem a seguinte forma:

$$Q = \eta^\alpha G_\alpha - \frac{1}{2}(-)^{\epsilon_\beta} \eta^\beta \eta^\gamma C_{\gamma\beta}^\alpha \wp_\alpha + \dots \quad (3.32)$$

Além disso, ela é real e nilpotente:

$$\begin{aligned} Q^* &= Q, \\ \{Q, Q\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.3.1) Aplicação: A Partícula Relativística no Gauge Covariante

Vamos ilustrar com o cálculo da partícula relativística, a qual possui originalmente apenas um vínculo de primeira classe

$$\Psi = \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu - m^2). \quad (\mu=0, 1, 2, 3)$$

$$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1). \quad (3.34)$$

Escolhemos a função fermiônica fixadora de gauge

$$\psi = -e \overline{\wp}. \quad (3.35)$$

E, a partir da equação (3.32) construímos a carga BRST

$$Q = \int d\tau (\Psi \eta - p_e \wp). \quad (3.36)$$

Agora, acrescentamos ao espaço de fase inicial, $\Gamma = (q^i, p_i)$ ($i=1,2,\dots,N$), dois pares de fantasmas canonicamente conjugados, associados aos vínculos de primeira classe

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow (\eta, \overline{\wp}), \\ p_e &\rightarrow (\wp, \overline{\eta}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

As transformações BRST sofridas pelas coordenadas deste espaço de fase estendido são

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \{Q, x^\mu\} = -p^\mu \eta, & \delta p^\mu &= \{Q, p^\mu\} = 0, & \delta e &= \{Q, \lambda\} = \wp, \\ \delta p_e &= \{Q, p_e\} = 0, & \delta \eta &= \{Q, \eta\} = 0, & \delta \overline{\wp} &= \{Q, \overline{\wp}\} = -\Psi, \\ \delta \overline{\eta} &= \{Q, \overline{\eta}\} = p_e, & \delta \wp &= \{Q, \wp\} = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

E, para a função fermiônica fixadora de gauge, temos

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \{Q, \psi\} = -\delta e \overline{\not{\rho}} - e \delta \overline{\not{\rho}}, \\ \delta\psi &= -\not{\rho} \overline{\not{\rho}} + e\Psi.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Lembrando a seção (2.7) onde mostramos que a Hamiltoniana canônica da partícula relativística é nula, chegamos à ação efetiva invariante por BRST

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^\mu p_\mu + \dot{e} p_e + \dot{\overline{\eta}} \not{\rho} + \dot{\eta} \overline{\not{\rho}} - \{Q, \psi\} \right].\tag{3.40}$$

Inserindo (3.36), a ação efetiva acima toma a forma

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^\mu p_\mu + \dot{e} p_e + \dot{\overline{\eta}} \not{\rho} + \dot{\eta} \overline{\not{\rho}} + \not{\rho} \overline{\not{\rho}} - e\Psi \right].$$

E, para a amplitude de transição

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu De Dp_e D\eta D\overline{\not{\rho}} D\overline{\eta} D\not{\rho} \exp \left\{ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^\mu p_\mu + \dot{e} p_e + \dot{\overline{\eta}} \not{\rho} + \dot{\eta} \overline{\not{\rho}} + \not{\rho} \overline{\not{\rho}} - e\Psi \right] \right\}.$$

Integrando sobre e obtemos uma delta de Dirac da condição de gauge $\delta(e)$ na medida e a amplitude de transição fica da seguinte forma após as integrações em e e $\overline{\not{\rho}}$

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu De D\eta D\overline{\eta} \delta(e) \exp \left\{ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^\mu p_\mu - \frac{e}{2} (p^2 + m^2) + \dot{\eta} \overline{\eta} \right] \right\}.$$

Integrando por partes o último termo e posteriormente η e $\overline{\eta}$, obtemos na medida o determinante

$$\det \partial_\tau^2 = -i\Delta\tau = -i(\tau_2 - \tau_1),$$

que tem um valor constante e, portanto, pode ser absorvido na medida. Então,

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu De \delta(\dot{e}) \exp \left\{ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^\mu p_\mu - \frac{e}{2} (p^2 - m^2) \right] \right\}. \quad (3.41)$$

Assim, a Hamiltoniana efetiva é

$$H_{ef} = \int d\tau \left[\frac{e}{2} (p^2 - m^2) \right].$$

E, as equações de movimento são

$$\dot{x}^\mu = e \cdot p^\mu,$$

$$\dot{p}^\mu = 0.$$

Portanto,

$$\ddot{x}^\mu = 0. \quad (3.42).$$

Esse exemplo da partícula relativística ilustra como o método BFV realiza a integração funcional de um sistema vinculado sobre um espaço de fase estendido através da simetria BRST em um gauge covariante.

Capítulo 4

As Formas da Dinâmica Relativística

Neste capítulo iremos estudar como encontrar a Hamiltoniana da partícula relativística nas três formas da dinâmica: instante, frente de onda e pontual.

Foi Dirac quem propôs as três formas da dinâmica [11] e encontrou o modo correto de calcular as Hamiltonianas. Posteriormente sua técnica foi aprimorada por Fubini, Hanson e Jackiw em [12] e por Heinzl em [13].

Precisaremos identificar a Hamiltoniana da partícula relativística e de outros sistemas físicos não-relativísticos quando tratarmos da física de dois tempos, que iremos estudar à luz do formalismo BRST-BFV. Por isso, também estudaremos como obter as Hamiltonianas neste formalismo.

O contexto no qual Dirac estava inserido era a procura de uma teoria satisfatória que descrevesse as interações das partículas elementares. Os modelos propostos eram insatisfatórios, então avaliou que as imperfeições surgiam de escolhas erradas para as Hamiltonianas e para as energias de interação. Ele destacou a necessidade de conciliar o *princípio da relatividade restrita* com a *exigência da teoria quântica em exprimir as equações de movimento na forma Hamiltoniana*.

Dirac resolveu o problema ao encontrar dez quantidades que ele denominou *quantidades fundamentais*: a energia total do sistema P_0 , o momento total P_i , o momento angular total J_{ij} e mais três quantidades J_{0i} ($i, j = 1, 2, 3$). Segundo suas próprias palavras algumas destas quantidades são “especialmente simples”, outras são “complicadas”. As complicadas ele chamou de *Hamiltonianas*.

4.1) Escolha da Hamiltoniana – A Partícula Relativística

Iremos realizar uma união dos métodos de Dirac, Jackiw e Heinzl à partícula relativística nas três formas da dinâmica.

A partícula relativística possui uma simetria de gauge: a invariância por reparametrização. Uma única trajetória (linha mundo) pode ser descrita por um número infinito de diferentes parametrizações. O sistema possui um único vínculo,

$$\Psi = p^2 - m^2, \quad (4.1)$$

que tem colchete de Poisson nulo consigo mesmo, portanto, é de primeira classe. A evolução temporal do sistema é indeterminada porque sua Hamiltoniana canônica é nula, e isso é devido à invariância da ação por reparametrização, conforme vimos na seção (2.7).

Utilizaremos a liberdade de gauge para escolher uma *condição de gauge*:

$$C(q, \tau) = 0. \quad (4.2)$$

Exigindo *consistência*,

$$\dot{C} = \frac{\partial C}{\partial \tau} + \{C, H_P\} = 0,$$

determinaremos o multiplicador de Lagrange λ , que foi introduzido adicionando o vínculo à Hamiltoniana nula. Obtém-se assim, conforme já vimos no capítulo 2, a Hamiltoniana primária:

$$H_P = \lambda(p^2 - m^2). \quad (4.3)$$

Da *condição de consistência*, temos:

$$0 = \frac{\partial C}{\partial \tau} + \lambda\{C, \Psi\} = \frac{\partial C}{\partial \tau} + 2\lambda p^\mu \frac{\partial C}{\partial q^\mu} = \frac{\partial C}{\partial \tau} + 2\lambda(p \cdot \partial)C$$

$$\lambda = -\frac{1}{2(p \cdot \partial)C} \frac{\partial C}{\partial \tau}. \quad (4.4)$$

É crucial para a determinação de λ que a condição *de gauge* C dependa explicitamente de τ e no mínimo de um dos q^μ . Em geral, C terá a forma:

$$C(q, \tau) = \tau - F(q). \quad (4.5)$$

Neste caso, temos para a equação (4.4):

$$\lambda = \frac{1}{2(p \cdot \partial)F(q)}. \quad (4.6)$$

A quantidade $(p \cdot \partial)F(q)$ é a projeção do quadrimomento p^μ sobre a normal $N^\mu = \partial^\mu F$ à hipersuperfície $\tau = \text{constante}$. Definiremos essa quantidade como sendo a *Hamiltoniana*:

$$H = (p \cdot \partial)F(q) = N^\mu p_\mu, \quad (4.7)$$

nas formas *instante* e *pontual*. E, na forma *frente de onda*,

$$H = n^\mu p_\mu. \quad (4.8)$$

Onde n^μ é um vetor unitário perpendicular à hipersuperfície $\tau = \text{constante}$.

Fixando o gauge, como em (4.5), estamos decompondo o espaço-tempo de Minkowski, em espaço e tempo, ou, mais precisamente, em hipersuperfícies onde temos $\tau = \text{constante}$, i.e., superfícies tridimensionais perpendiculares à direção temporal. Assim, podemos entender como evolução temporal a evolução da hipersuperfície $\Sigma_0 : \tau = \tau_0$ em $\Sigma_1 : \tau = \tau_1$. Isto é, dadas as condições iniciais sobre Σ_0 , as equações de movimento determinarão o estado do sistema dinâmico sobre Σ_1 .

A decomposição do espaço de Minkowski é feita do seguinte modo: introduzimos coordenadas arbitrárias que podem ser curvilíneas, $\xi^\alpha = \xi^\alpha(q)$; três delas, $\xi^i = \xi^i(q)$, parametrizando a hipersuperfície tridimensional Σ , e a outra, ξ^0 , representando a variável temporal, $\tau = \xi^0(q)$. Esta equação pode ser vista como uma fixação de gauge.

Como fazer uma escolha de tempo? Existem [13] dois critérios: *existência* e *unicidade*. Existência significa que a hipersuperfície Σ corta qualquer linha de mundo possível, e unicidade, que ela o faz somente uma vez. Desde que o colchete de Poisson do vínculo com a superfície de gauge, que chamaremos de *operador de Faddeev-Popov (FP)*, é necessariamente não-nulo para uma escolha de gauge correta, ele pode ser encarado como a expressão matemática para a *unicidade*:

$$FP = \{\xi^0, \Psi\} = \{\xi^0, p^2\} = -2 \frac{\partial \xi^0}{\partial q^\mu} p^\mu = -2N \cdot p, \quad (4.9)$$

onde definimos o vetor normal, N , à hipersuperfície Σ ,

$$N^\mu = \frac{\partial \xi^0}{\partial q^\mu}. \quad (4.10)$$

Então, podemos afirmar que existe unicidade se o operador de Faddeev-Popov não se anula. Isto significa que a trajetória da partícula não deve ser paralela à hipersuperfície Σ . Portanto, a normal N à hipersuperfície deve ser um vetor *tipo-tempo*, ou *tipo-luz*, $N^2 \geq 0$

Comparando (4.7) com (4.9), vemos que, *aparentemente*, podemos identificar o operador de Faddeev-Popov com a Hamiltoniana, pois ambos são a projeção do momento p^μ sobre a normal N à hipersuperfície Σ . Faremos três escolhas de gauge, chamadas as formas da dinâmica, e verificaremos a veracidade dessa identificação.

4.2) Grupo de Poincaré – Representação da Partícula Relativística

Não basta considerar o desenvolvimento temporal do sistema relativístico e o seu correspondente gerador - a Hamiltoniana. Desejamos ser capazes de identificar a Hamiltoniana a partir dos geradores do grupo de Poincaré [11], cujos elementos são: os momentos P^μ , geradores de translações espaço-temporais, e os operadores $J^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), geradores de rotações espaciais e Lorentz boosts. Estes geradores são elementos da álgebra de Poincaré:

$$\begin{aligned}\{P^\mu, P^\nu\} &= 0, \\ \{J^{\mu\nu}, P^\rho\} &= g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu, \\ \{J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\} &= g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Uma representação da álgebra de Poincaré é dada por qualquer sistema dinâmico invariante pelo grupo de Poincaré. Os correspondentes geradores são construídos a partir das variáveis dinâmicas fundamentais: posição, momento, etc. Encontramos então

$$P^\mu = p^\mu, \quad J^{\mu\nu} = q^\mu p^\nu - q^\nu p^\mu.\tag{4.12}$$

Se substituirmos (4.12) em (4.11), verificamos a álgebra. Então, uma transformação infinitesimal de Poincaré é gerada por

$$\delta G = \delta a_\mu P^\mu - \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}.\tag{4.13}$$

Assim, o grupo de Poincaré atua sobre uma função das coordenadas $F(x)$ do seguinte modo

$$\delta F = \{F, \delta G\} = \partial^\mu F \delta a_\mu - \frac{1}{2} (q^\mu \partial^\nu - q^\nu \partial^\mu) F \delta \omega_{\mu\nu}.\tag{4.14}$$

Devemos enfatizar, como o fez Dirac [11], que os geradores (4.12), apesar de serem covariante não descrevem qualquer interação em um sistema de partículas; como também não levam em conta a condição concha de massa, $p^2 = m^2$, necessária para garantir a causalidade relativística.

A solução encontrada por Dirac foi decompor o espaço-tempo de Minkowski em espaço e tempo, ou, mais precisamente, em hipersuperfícies tipo-espaço, Σ , onde temos $\tau = \text{constante}$, i.e., superfícies tridimensionais perpendiculares à direção temporal. É o mesmo procedimento que adotamos ao fixar o gauge. Como já vimos, a exigência de causalidade relativística seria satisfeita escolhendo Σ que intercepte todas linhas de mundo possíveis uma única vez. Algumas decomposições seriam possíveis, e, para uma decomposição particular, importa saber quais dos geradores de Poincaré deixam Σ invariante, e quais mapeiam Σ em outra hipersuperfície Σ' . O conjunto dos geradores que deixam a hipersuperfície Σ invariante formam um subgrupo do grupo de Poincaré chamado *Grupo de Estabilidade* G_Σ de Σ , e os geradores associados *Cinemáticos*. Enquanto que os geradores que mapeiam Σ em Σ' são denominados *Dinâmicos*. Estes, portanto, estão associados à evolução temporal do sistema dinâmico e devem depender da Hamiltoniana.

Dirac encontrou três escolhas possíveis de hipersuperfícies $\Sigma: \tau = \text{constante}$, e as denominou: *Forma Instante*, *Forma Frente de Onda* e *Forma Pontual*. Em todas, o *Grupo de Estabilidade* G_Σ de Σ , atua transitivamente, i.e., dois pontos quaisquer sobre Σ podem ser conectados por uma transformação gerada por um elemento do *Grupo de Estabilidade* G_Σ .

4.2.1) Forma Instante

A *Forma Instante* é definida pela família de planos: $F(q) = q^0 = \tau$. Iremos classificar os geradores do Grupo de Poincaré, P^0, P^i, J^{0i}, J^{ij} , aqui denotados como $\mathcal{G}$, em *Cinmáticos* ou *Dinâmicos*, conforme seu comportamento quando sob a ação do operador [12]

$$\delta F(q) = F(q) + \varepsilon \cdot \{F(q), \mathcal{G}\}. \quad (4.15)$$

Usaremos a seguinte convenção para a métrica $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Gerador P^0

$$\delta_{P^0} F(q) = q^0 + \varepsilon \{q^0, P^0\} = q^0 + \varepsilon \cdot g^{00} = \tau + \varepsilon. \quad (4.16)$$

Portanto, o gerador P^0 é *Dinâmico*. Ela é Hamiltoniana procurada, pois realizada um pequeno deslocamento na direção temporal da hipersuperfície tipo-espaço sem distorcê-la ou girá-la. Isto é, realiza a evolução temporal da sistema dinâmico.

Gerador P^i

$$\delta_{P^i} F(q) = q^0 + \varepsilon \{q^0, P^i\} = q^0.$$

Assim, o gerador de translações espaciais sobre a hipersuperfície, P^i , é *Cinmático*.

Gerador J^{0i}

$$\delta_{J^{0i}} F(q) = q^0 + \varepsilon \{q^0, J^{0i}\} = q^0 + \varepsilon^{0i} \cdot q^i.$$

Ocorre uma distorção na hipersuperfície e, assim, o gerador é *Dinâmico*, mas não é a Hamiltoniana.

Gerador J^{ij}

$$\delta_{J^{ij}} F(q) = q^0 + \varepsilon \{q^0, J^{ij}\} = q^0.$$

Este operador realiza rotações espaciais sobre a hipersuperfície tipo-espaço.

Agora que sabemos que a componente temporal do momento é a Hamiltoniana, iremos expressá-la em termos das outras variáveis do espaço de fase. Inserindo em (4.5) a função que define a família de planos, temos

$$C = \tau - q^0. \quad (4.17)$$

De maneira que a Hamiltoniana é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= (p \cdot \partial)F(q) = p^\mu \partial_\mu q_0 = p^0, \\ H &= (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Podemos encontrar as equações de movimento correspondente

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H\} = \left\{ q^i, (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \right\} = \frac{\partial}{\partial p_i} (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} = \frac{p^i}{(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}}, \\ \dot{p}^i &= \{p^i, H\} = \left\{ p^i, (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

A partir da primeira equação, encontramos a aceleração. Utilizando a segunda, o resultado é

$$\ddot{q}^i = \frac{\dot{p}^i}{(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}} - \frac{p^i}{(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}} (p^k \dot{p}^k) = 0.$$

Resumindo

$$\dot{p}^i = 0, \quad \ddot{q}^i = 0. \quad (4.19)$$

Estas são as equações de movimento da partícula livre. Portanto, a equação (4.10) realmente fornece *A Hamiltoniana da partícula relativística na forma instante*. Ou, ainda, para a condição de gauge (4.17) a Hamiltoniana é a projeção do momento p^μ sobre a normal N , à hipersuperfície Σ .

4.2.2) Forma Frente de Onda

A *forma frente de onda* é definida pela família de planos: $F(q) = q^+ = \tau$. Como na forma instante, iremos classificar os geradores do Grupo de Poincaré, $P^+, P^-, P^i, J^{0i}, J^{ij}$, ($i=2,3$), aqui denotados como $\mathcal{G}$, em *Cinemáticos* ou *Dinâmicos*, conforme seu comportamento quando sob a ação do operador (4.15)

$$\delta F(q) = F(q) + \varepsilon \cdot \{F(q), \mathcal{G}\}.$$

Definimos,

$$g_{+-} = +\frac{1}{2}, g^{+-} = +2,$$

$$g_{ii} = g^{ii} = -1,$$

$$q^- = q^0 - q^1, q^+ = q^0 + q^1,$$

$$p^- = (p^0 - p^1),$$

$$q_+ = (q_0 + q_1), q_- = (q_0 - q_1),$$

$$p^+ = (p^0 + p^1),$$

$$q^0 = \frac{1}{2} \cdot (q^+ + q^-), q^1 = \frac{1}{2} \cdot (q^+ - q^-),$$

$$q_0 = \frac{1}{2} (q_+ + q_-), q_1 = \frac{1}{2} (q_+ - q_-).$$

(4.20)

Os geradores: P^+, P^i, J^{+i}, J^{23} , são *Cinemáticos*, como pode ser facilmente comprovado. Os quatro restantes: P^-, J^{+-}, J^{-i} , são *Dinâmicos*. Vamos mostrar que P^- , é a Hamiltoniana.

$$\delta_{P^-} F(q) = q^+ + \varepsilon \{q^+, p^-\} = q^+ + \varepsilon \cdot g^{+-} = \tau + \varepsilon \cdot g^{+-} = \tau + 2\varepsilon.$$

Portanto, o gerador P^- é *Dinâmico*. Ele é a Hamiltoniana, pois realizada um pequeno deslocamento na direção temporal da hipersuperfície tipo-espaco sem distorcê-la ou girá-la. Istoé, realiza a evolução temporal do sistema dinâmico.

Agora que já conhecemos a Hamiltoniana, iremos expressá-la em termos das outras variáveis do espaço de fase.

Da família de planos, $F(q) = q^+ = \tau$, temos

$$C = \tau - q^+. \quad (4.21)$$

Na *forma frente de onda* a Hamiltoniana não é mais a projeção do momento sobre a normal à hipersuperfície, pois,

$$N_\mu p^\mu = \partial_\mu (q^+) p^\mu = \delta_\mu^+ p^\mu = p^+,$$

está na superfície $q^+ = \tau$: $N = (1, -1, 0, 0) \Rightarrow N^2 = 0$. Isto é, a própria normal N^μ está sobre a superfície $q^+ = \tau$.

Então, definimos a Hamiltoniana como

$$H = n \cdot p. \quad (4.22)$$

Sendo n^μ um vetor unidade na direção q^+

$$n_\mu = \frac{\partial q_\mu}{\partial (2q^-)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial q_\mu}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial q^-} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial q_\mu}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial q^-} = \frac{1}{4} \cdot (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu),$$

$$n_\mu p^\mu = \frac{1}{4} \cdot (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) p^\mu = \frac{1}{4} \cdot (p^0 - p^1) = \frac{p^-}{2} = \frac{\vec{p}^2 + m^2}{2p^+}.$$

Portanto, a Hamiltoniana expressa em termo das variáveis da forma frente de onda, tem a seguinte forma

$$H = \frac{\vec{p}^2 + m^2}{2p^+}. \quad (4.23)$$

E, suas equações de movimento são

$$\dot{q}^- = \{q^-, H\} = \frac{1}{2}(\vec{p}^2 + m^2)\{q^-, (p^+)^{-1}\} = -\frac{(\vec{p}^2 + m^2)}{2(p^+)^2}\{q^-, p^+\}$$

$$\dot{q}^- = -\frac{(\vec{p}^2 + m^2)}{2(p^+)^2}g^{-+} = -\frac{(\vec{p}^2 + m^2)}{(p^+)^2} = -\frac{p^-}{p^+}.$$

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} = \frac{1}{2p^+}\{q^i, \vec{p}^2 + m^2\} = -\frac{p^i}{p^+}.$$

$$\dot{p}^+ = \{p^+, H\} = 0, \quad \dot{p}^i = \{p^i, H\} = 0.$$

Quando as equações de movimento são expressas em termos das acelerações, obtemos

$$\ddot{q}^- = 0, \quad \ddot{q}^i = 0. \quad (4.24)$$

Que são as equações de movimento da partícula livre. Portanto, a equação (4.23) realmente fornece a *Hamiltoniana da partícula relativística na forma frente de onda*.

4.2.3) Forma Pontual

A *forma pontual* é definida pela família de hiperbolóides: $F(q) = q^2 = \tau^2$, que pode ser expressa em coordenadas hiperbólicas, $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = (\rho, \omega, \theta, \varphi)$, tal que : $F(q) = \rho = \tau$. Os momentos conjugados são: $p_\xi = (p_\rho, p_\omega, p_\theta, p_\varphi)$. Novamente, iremos classificar os geradores do Grupo de Poincaré, $P_\xi^\mu = (P^0, P^1, P^2, P^3)$, $J_\xi^\mu = (J^{0i}, J^{ij})$

($i=1,2,3$), aqui denotados como $\mathcal{Q}$, em *Cinemáticos* ou *Dinâmicos*, conforme seu comportamento quando sob a ação do operador (4.15).

Os geradores: P^i, J^{ij} , são *Cinemáticos*, como pode ser facilmente comprovado. Os quatro restantes: P^0, J^{0i} , são *Dinâmicos*. Vamos mostrar que $P^0 = p^\rho$, é a Hamiltoniana.

Gerador $P^0 = p^0 = p^\rho$:

$$\delta_{p^0} F(q) = q^0 + \varepsilon \{q^0, p^0\} = \rho + \varepsilon \cdot g^{00} = \tau + \varepsilon.$$

Portanto, o gerador, $P^0 = p^\rho$, é *Dinâmico*. Ela é Hamiltoniana procurada, pois realizada um pequeno deslocamento na direção temporal da hipersuperfície tipo-espaço sem distorcê-la ou girá-la. Isto é, realiza a evolução temporal do sistema dinâmico.

A hipersuperfície tipo-espaço é uma família de hiperbolóides, sendo assim podemos expressar a condição de gauge do seguinte modo

$$C = \tau - (q^2)^{1/2}. \quad (4.25)$$

E a Hamiltoniana tem a seguinte forma

$$H = (p \cdot \partial) F(q) = p^\mu \partial^\mu \left[(q^2)^{1/2} \right],$$

$$H = \frac{p \cdot q}{(q^2)^{1/2}}. \quad (4.26)$$

Vamos reescrevê-la em coordenadas hiperbólicas. As equações de transformação das coordenadas cartesianas $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, com métrica $g_{\alpha\beta} = (1, -1, -1, -1)$, para coordenadas hiperbólicas $\xi^\mu = (\rho, \omega, \theta, \varphi)$, são

$$\begin{aligned}
x^0 &= \rho \cosh \omega, \\
x^1 &= \rho \sinh \omega \sin \theta \cos \varphi, \\
x^2 &= \rho \sinh \omega \sin \theta \sin \varphi, \\
x^3 &= \rho \sinh \omega \cos \theta.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Podemos compactar a notação da seguinte forma

$$x^\alpha = \rho n^\alpha(\xi) \quad \Rightarrow \quad n^\alpha = \frac{x^\alpha}{\rho}. \tag{4.28}$$

Sendo que os vetores ortonormais são

$$\begin{aligned}
n^0 &= \cosh \omega \\
n^a &= \sinh \omega e_r^a \\
e_r^a &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A transformação da métrica pode ser expressa em função dos *vierbeins*

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^\alpha e_\nu^\beta g_{\alpha\beta} \quad e_\mu^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu}. \tag{4.29}$$

Os quais possuem a forma matricial

$$e_\mu^\alpha = \begin{bmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega \sin \theta \cos \varphi & \sinh \omega \sin \theta \sin \varphi & \sinh \omega \cos \theta \\ \rho \sinh \omega & \rho \cosh \omega \sin \theta \cos \varphi & \rho \cosh \omega \sin \theta \sin \varphi & \rho \cosh \omega \cos \theta \\ 0 & \rho \sinh \omega \cos \theta \cos \varphi & \rho \sinh \omega \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sinh \omega \sin \theta \\ 0 & -\rho \sinh \omega \sin \theta \sin \varphi & \rho \sinh \omega \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

A partir disto, temos a métrica em coordenadas hiperbólicas

$$\begin{aligned}
g_{\rho\rho} &= e_\rho^\alpha e_\rho^\beta g_{\alpha\beta} = 1, & g_{\omega\omega} &= e_\omega^\alpha e_\omega^\beta g_{\alpha\beta} = -\rho^2, \\
g_{\theta\theta} &= e_\theta^\alpha e_\theta^\beta g_{\alpha\beta} = -\rho^2 \sinh^2 \omega, & g_{\varphi\varphi} &= -\rho^2 \sinh^2 \omega \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{4.31a}$$

Ou seja, a métrica possui a forma diagonal

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -\rho^2, -\rho^2 \sinh^2 \omega, -\rho^2 \sinh^2 \omega \sin^2 \theta). \tag{4.31b}$$

Em coordenadas cartesianas o quadrado do vetor posição possui importantes informações

$$x^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \rho^2 g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \rho^2 n^2.$$

Mas,

$$n^2 = \cosh^2 \omega - \sinh^2 \omega \cdot e_r^a e_r^a = \cosh^2 \omega - \sinh^2 \omega = 1.$$

Portanto,

$$x^2 = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2} \quad \Rightarrow \quad n^\alpha = \frac{x^\alpha}{\sqrt{x^2}}. \quad (4.32)$$

Assim, podemos reescrever a *condição de gauge* (4.17)

$$C = \rho - \tau. \quad (4.33)$$

Também precisaremos da transformação dos momentos

$$p_\rho = e_\rho^\alpha p_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \rho} p_\alpha = n^\alpha p_\alpha. \quad (4.34)$$

Fazendo uso da equação (4.32), obtemos

$$p_\rho = \frac{p \cdot x}{\sqrt{x^2}}. \quad (4.35)$$

A partir do vínculo de primeira classe,

$$\Psi = [p_\xi^2 - m^2]^{1/2} = [p_\rho^2 - \rho^2 \cdot p_\omega^2 - \rho^2 \sinh^2 \omega \cdot p_\theta^2 - \rho^2 \sinh^2 \omega \sin^2 \theta \cdot p_\phi^2 - m^2]^{1/2} = 0.$$

Encontramos a componente temporal do momento expressa em coordenadas hiperbólicas

$$p_\rho = [\rho^2 p_\omega^2 + \rho^2 \sinh^2 \omega \cdot p_\theta^2 + \rho^2 \sinh^2 \omega \sin^2 \theta \cdot p_\phi^2 + m^2]^{1/2}. \quad (4.36)$$

A qual, como mostrado no início da seção, é a Hamiltoniana. Compactaremos a notação em coordenadas hiperbólicas para reescrever a Hamiltoniana assim

$$H = p_\rho = \sqrt{\vec{p}_\xi^2 + m^2}. \quad (4.37)$$

Precisaremos, doravante, saber qual é o jacobiano das transformações de coordenadas e momentos quando calcularmos a amplitude de transição da partícula relativística na forma pontual. Partiremos da amplitude de transição expressa em coordenadas e momentos cartesianos e a transformaremos para coordenadas e momentos curvilíneos. O jacobiano que aparecerá na medida de Liouville tem o seguinte valor

$$J_x \cdot J_p = |\det e_\mu^\alpha| \cdot |\det e_\alpha^\nu| = \left| \det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} \right) \right| = |\det \delta_\nu^\mu| = 1. \quad (4.38)$$

Portanto, a transformação é canônica.

4.2.3.1) Equações de Movimento da Partícula Relativística em Coordenadas Curvilíneas

A partir da métrica (4.31) e da Hamiltoniana (4.37), ambas em coordenadas curvilíneas, podemos deduzir as equações de Hamilton. Para isto, necessitamos dos colchetes de Poisson das variáveis do espaço de fase em coordenadas hiperbólicas. Já vimos que a transformação das coordenadas cartesianas em hiperbólicas é canônica, (4.38), portanto, os colchetes de Poisson das quantidades fundamentais possuem a forma canônica

$$\{\xi^\sigma, p_\xi^\eta\} = g^{\sigma\eta}. \quad (4.39)$$

Assim, podemos reescrever a Hamiltoniana (4.37) do seguinte modo:

$$H = (g_{ij} p_\xi^i p_\xi^j + m^2)^{1/2} \quad (g_{ij} = (g_{\omega\omega}, g_{\theta\theta}, g_{\varphi\varphi})).$$

A partir dela, encontramos as equações de Hamilton

$$\begin{aligned}\xi^i &= \{\xi^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi^i} = \frac{g^{ij} p_{\xi j}}{\left(\vec{p}_\xi^2 + m^2\right)^{1/2}} \\ \dot{p}_{\xi i} &= \{p_{\xi i}, H\} = -\frac{\partial H}{\partial \xi^i} = -\frac{\partial_i g^{jk} p_{\xi j} p_{\xi k}}{2\left(\vec{p}_\xi^2 + m^2\right)^{1/2}}.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Desenvolvendo o cálculo da aceleração, obtemos

$$\ddot{\xi}^i = -\frac{1}{2} \left(\vec{p}_\xi^2 + m^2 \right) g^{ij} (\partial_k g_{jl} + \partial_l g_{jk} - \partial_j g_{kl}) p_\xi^k p_\xi^l.$$

Identificando o símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_k g_{jl} + \partial_l g_{jk} - \partial_j g_{kl}).$$

E redefinindo os momentos,

$$\overline{p}_\xi^i = \frac{p_\xi^i}{\left(\vec{p}_\xi^2 + m^2\right)^{1/2}}.$$

Temos,

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma_{kl}^i \overline{p}_\xi^k \overline{p}_\xi^l = 0.\tag{4.41a}$$

E para os momentos,

$$\dot{\overline{p}}_\xi^i = (g^{ij} p_{\xi j})^\cdot = \partial_k g^{ij} \xi^k p_{\xi j} + g^{ij} \dot{p}_{\xi j}.$$

Utilizando as mesmas definições anteriores, obtemos

$$\dot{\overline{p}}_\xi^i + \Gamma_{kl}^i \overline{p}_\xi^k \overline{p}_\xi^l = 0.\tag{4.41b}$$

Podemos reescrever a primeira equação de Hamilton eliminando os momentos

$$\xi^i = g^{ij} \bar{p}_{\bar{j}} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{\bar{\xi}}^i = \xi^i \quad (4.42)$$

Então, as equações de movimento para uma partícula relativística na forma pontual, em coordenadas curvilíneas, são equações de geodésicas no espaço de fase

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^i + \Gamma_{kl}^i \dot{\xi}^k \dot{\xi}^l &= 0 \\ \dot{\bar{p}}^i + \Gamma_{kl}^i \bar{p}^k \bar{p}^l &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Portanto, as equações (4.18) e (4.30) fornecem a *Hamiltoniana da partícula relativística na forma pontual em coordenadas cartesianas e hiperbólicas*, respectivamente.

Para mostrar que realmente a geometria da hipersuperfície de evolução é um hiperbolóide, calcularemos as componentes do tensor de Riemann. O tensor de Riemann,

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}, \quad (4.44)$$

informa qual é a curvatura do espaço. Uma condição necessária e suficiente para que um espaço, ou uma superfície, seja plano é que o tensor de Riemann seja nulo. Sendo o espaço de Minkowski plano, seu tensor de Riemann é nulo, $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = 0$, seu escalar de curvatura também. Porém, queremos apenas mostrar que a hipersuperfície tipo-espaço é um hiperbolóide imerso no espaço-tempo de Minkowski.

Em um espaço quadridimensional o tensor curvatura possui ao todo 20 componentes independentes [26]. Podemos, através de uma rotação conveniente, reduzir o tensor aos seus eixos principais, de tal modo que se anule seis componentes do tensor curvatura (o número seis é o número de rotações independentes possíveis do sistema de coordenadas quadridimensional). Resulta que a curvatura do espaço quadridimensional é determinada em cada ponto por 14 componentes independentes do tensor curvatura. No espaço tridimensional, o tensor curvatura tem seis componentes independentes. O tensor de Ricci também. Assim, podemos exprimir o tensor curvatura em termos do tensor de Ricci [26]. Semelhantemente ao caso quadridimensional, aqui, também podemos por meio de uma rotação conveniente, reduzir o tensor de Ricci aos seus eixos principais. De tal modo

que a curvatura de um espaço tridimensional seja determinada em cada ponto por três componentes do tensor de Ricci.

Calculamos o tensor curvatura (4.44) para a métrica hiperbólica (4.31). Encontramos que o tensor curvatura para o espaço-tempo de Minkowski (que como argumentamos tem 14 componentes independentes) tem todas componentes nulas, exceto 3. As três componentes não-nulas são as componentes espaciais diagonais do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} = R_{010}^1 &= 0, & R_{22} &= R_{202}^0 + R_{212}^1 = \cosh^2 \omega, \\ R_{11} = R_{101}^0 &= \frac{1}{2}, & R_{33} &= R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 = -\sin^2 \theta (\cot g^2 \theta + \sinh^2 \omega). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Portanto, as componentes não-nulas do tensor curvatura são aquelas sobre a superfície tridimensional tipo-espaço, isto é, sobre a superfície de evolução.

O escalar de curvatura do hiperbolóide é o traço do tensor de Ricci: $R = R_{\mu\rho} g^{\mu\rho}$.

Calculando-o, obtemos

$$R = \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \cot g^2 \omega + \frac{1}{\rho^2} \frac{\cot g^2 \theta}{\sinh^2 \omega}. \quad (4.46)$$

Provando que a hipersuperfície tipo-espaço é um hiperbolóide imerso no espaço-tempo de Minkowski.

4.3) Quantização BRST da Partícula Relativística com Spin $\frac{1}{2}$ e Massa Nula nas Três Formas da Dinâmica.

A quantização pelo método de Dirac da partícula relativística com spin $\frac{1}{2}$ e massa nula foi realizada em [7]. A ponte com a teoria de campos foi construída quando mostraram [7] que sua amplitude de transição é o propagador de Feynman para o campo de Dirac. Iremos realizar sua quantização pelo formalismo BRST-BFV nas *três formas da dinâmica* nesta seção, e na próxima, trataremos a partícula com spin $N/2$. Existem alguns trabalhos em que é realizada a quantização da partícula relativística com spin $N/2$ e massa nula, tanto pelo método de Dirac [7], quanto pelo formalismo BRST-BFV [8]. Neles, a ação que descreve a partícula possui invariância por reparametrização temporal, supersimetria estendida e simetria local $O(N)$. Por isso, doravante, consideraremos tão somente o caso com massa nula. Em [9], é realizada a quantização para a partícula massiva com duas supersimetrias, ($N=2$) e a adição de um termo de Chern-Simons à ação.

A ação da partícula relativística com massa nula e spin $\frac{1}{2}$ tem a seguinte forma [7],

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{1}{e} \dot{x}^2 - \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - \frac{i}{2e} \chi \psi^\mu \dot{x}_\mu \right) - \psi_\mu(\tau_1) \psi^\mu(\tau_2). \quad (4.47)$$

Explicando os termos da ação acima: $x_\mu(t)$ é a coordenada da partícula, $\psi^\mu(t)$ é a coordenada fermiônica; e é o einbein e $\chi(t)$ é o gravitino. O termo de contorno adicionado à ação tem por objetivo a imposição de uma única condição de contorno à coordenada fermiônica quando da aplicação do princípio variacional [7]. A ação (4.47) possui invariância por duas simetrias locais: reparametrização temporal e supersimetria. E também pela simetria global de Poincaré. A primeira é justificada pelo fato de que precisamos ser capazes de escolher qualquer parâmetro de evolução sem alterar a física do sistema, e a segunda invariância é necessária para garantir que estados com norma negativa (que podem ser induzidos pela componente temporal de ψ^μ) não apareçam no espectro físico [7].

A invariância por reparametrização da linha de mundo tem a forma

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= \varepsilon \cdot \dot{x}^\mu, \\
\delta \psi^\mu &= \varepsilon \cdot \dot{\psi}^\mu, \\
\delta e &= (\varepsilon \cdot e) \cdot, \\
\delta \chi &= (\varepsilon \cdot \chi) \cdot.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

E a condição de contorno sobre o parâmetro infinitesimal é $\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon(\tau_2) = 0$.

A invariância pela transformação de supersimetria ($N = 1$) é dada por

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= i\alpha \psi^\mu, \\
\delta \psi^\mu &= \alpha \left[\frac{\dot{x}^\mu}{e} - \frac{i}{2e} \chi \psi^\mu \right], \\
\delta e &= i\alpha \chi, \\
\delta \chi &= 2\dot{\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Sendo a condição de contorno sobre o parâmetro infinitesimal $\alpha(\tau_1) = \alpha(\tau_2) = 0$.

A fim de fazer a transição para o formalismo Hamiltoniano, calculemos os momentos canonicamente associados às variáveis da ação

$$\begin{aligned}
p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e} \dot{x}^\mu - \frac{i}{2e} \chi \psi^\mu, & \Pi &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = 0, \\
\Pi_\mu &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\mu} = -\frac{i}{2} \psi_\mu, & p_e &= \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

A partir das equações de Euler-Lagrange e da definição dos momentos descobrimos dois vínculos

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{\dot{x}^2}{2e^2} - \frac{i}{2e^2} \chi \psi^\mu \dot{x}_\mu = 0, \tag{4.51}$$

$$\frac{i}{2} \psi^\mu p_\mu = \frac{i}{2e} \psi^\mu \dot{x}_\mu = 0. \tag{4.52}$$

O momento canonicamente associado à variável fermiônica ψ^μ , (4.50), é um vínculo de segunda classe. Então, associamos à variável fermiônica o colchete de Poisson,

$$\{\psi^\mu, \psi^\nu\} = -ig^{\mu\nu}.$$

Podemos, agora, reescrever a ação original na forma Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[p^\mu \dot{x}_\mu + \Pi_\psi^\mu \dot{\psi}_\mu - e \left(\frac{p^2}{2} \right) - \chi \left(\frac{i}{2} \psi^\mu p_\mu \right) \right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[p^\mu \dot{x}_\mu - \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - \frac{e}{2} p^2 - \frac{i}{2} \chi \psi^\mu p_\mu \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Sendo e , χ , multiplicadores de Lagrange.

Os vínculos (4.51) e (4.52) são de primeira classe, geradores, respectivamente, da simetria de reparametrização e da supersimetria. Se denotarmos,

$$\phi_1 = -\frac{1}{2} p^2, \quad \phi_2 = -\frac{i}{2} \psi^\mu p_\mu. \quad (4.54)$$

Temos, que eles satisfazem à álgebra

$$\{\phi_1, \phi_1\} = 0, \quad \{\phi_1, \phi_2\} = 0, \quad \{\phi_2, \phi_2\} = \frac{i}{2} \phi_1. \quad (4.55)$$

A fim de estender o espaço de fase sem modificar o conteúdo dinâmico da teoria, vamos impor os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange como novos vínculos da teoria

$$\begin{aligned} e &\Rightarrow p_e \approx 0, \\ \chi &\Rightarrow \Pi \approx 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para cada vínculo associamos um par de fantasmas canonicamente conjugados e com paridade de Grassmann oposta

$$\begin{aligned}\phi_1 &\Rightarrow (\eta, \bar{\wp}); & p_e &\Rightarrow (\bar{\eta}, \wp), \\ \phi_2 &\Rightarrow (c, \bar{P}), & \Pi &\Rightarrow (\bar{c}, P).\end{aligned}\quad (4.57)$$

Seus Colchetes de Poisson são

$$\{e, p_e\} = 1, \quad \{\chi, \Pi\} = -1, \quad \{\eta, \bar{\wp}\} = -1, \quad \{c, \bar{P}\} = 1. \quad (4.58)$$

E quanto, à hermiticidade dos fantasmas, temos

$$\begin{aligned}\eta^* &= \eta, & \bar{\chi}^* &= -\bar{\wp}, & \bar{\eta}^* &= \bar{\eta}, & \wp^* &= -\wp, \\ c^* &= c, & \bar{P}^* &= \bar{P}, & \bar{c}^* &= \bar{c}, & P^* &= P.\end{aligned}$$

O espaço de fase é estendido da seguinte forma

$$(x, p) \oplus (\psi, \Pi_\psi) \oplus (e, p_e) \oplus (\chi, \Pi) \oplus (c, \bar{P}) \oplus (\bar{c}, P) \oplus (\eta, \bar{\wp}) \oplus (\bar{\eta}, \wp).$$

Usando a álgebra (4.55), podemos obter a carga BRST

$$Q = \int d\tau \left[\eta \phi_1 + c \phi_2 - i \wp p_e - P \Pi + \frac{i}{4} \bar{\wp} \chi c c \right]. \quad (4.59)$$

Que possui as propriedades de *nilpotência* e *hermiticidade*

$$\{Q, Q\} = 0, \quad Q^* = Q.$$

As transformações BRST são

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \{Q, x^\mu\} = p^\mu \eta + \frac{i}{2} c \psi^\mu, & \delta p^\mu &= \{Q, p^\mu\} = 0, \\ \delta e &= \{Q, e\} = i \wp, & \delta p_e &= \{Q, p_e\} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\eta &= \{Q, \eta\} = -\frac{i}{4} c \cdot c, & \delta\bar{\wp} &= \{Q, \bar{\wp}\} = \frac{1}{2} p^2, \\
\delta\bar{\eta} &= \{Q, \bar{\eta}\} = ip_e, & \delta\wp &= \{Q, \wp\} = 0, \\
\delta c &= \{Q, c\} = 0, & \delta\bar{P} &= \{Q, \bar{P}\} = \phi_2 + \frac{i}{2} \bar{\wp} \cdot c, \\
\delta\bar{c} &= \{Q, \bar{c}\} = \Pi, & \delta P &= \{Q, P\} = 0, \\
\delta\chi &= \{Q, \chi\} = P, & \delta\Pi &= \{Q, \Pi\} = 0 \\
\delta\psi^\mu &= \{Q, \psi^\mu\} = \frac{1}{2} c \cdot p^\mu. & & (4.60)
\end{aligned}$$

A amplitude de transição será calculada de um ponto x_1, τ_1 até um outro ponto x_2, τ_2 , resulta que as condições de contorno sobre as coordenadas $x^\mu(\tau_1)$ são

$$x^\mu(\tau_1) = x_\mu^1, \quad x^\mu(\tau_2) = x_2^\mu. \quad (4.61a)$$

As coordenadas fermiônicas $\psi^\mu(\tau)$ obedecem a uma equação de primeira ordem no tempo, portanto, podemos impor uma única condição de contorno sobre elas [27]

$$\frac{1}{2}[\psi^\mu(\tau_1) + \psi^\mu(\tau_2)] = \gamma^\mu \quad (4.61b)$$

As condições de contorno sobre os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange são

$$p_e(\tau_1) = p_e(\tau_2) = 0, \quad \Pi(\tau_1) = \Pi(\tau_2) = 0. \quad (4.61c)$$

Todas essas condições de contorno devem possuir invariância BRST, a fim de que a ação também a possua, então, de (4.61), temos

$$\begin{aligned}
c(\tau_1) = c(\tau_2) = 0, & \quad \bar{c}(\tau_1) = \bar{c}(\tau_2) = 0 \\
\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2) = 0, & \quad \bar{\eta}(\tau_1) = \bar{\eta}(\tau_2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.61d}$$

Podemos, agora, escrever a ação efetiva no formalismo BRST-BFV

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^\mu p_\mu + \dot{e} p_e - \frac{i}{2} \dot{\psi}_\mu \dot{\psi}^\mu + \dot{\chi} \Pi + \dot{\eta} \bar{\phi} + \dot{\bar{\eta}} \phi + \dot{c} \bar{P} + \dot{\bar{c}} P - \{Q, \Psi\} \right] - \psi_\mu(\tau_1) \psi^\mu(\tau_2). \tag{4.62}$$

Quando, doravante, realizarmos integração funcional de $\psi^0(\tau)$ encontraremos dificuldades se não eliminarmos o termo de superfície, então faremos a transformação de variáveis

$$\psi^\mu(\tau) \rightarrow \psi^\mu(\tau) + \gamma^\mu \tag{4.61e}$$

A qual, juntamente com a condição de contorno (4.61b) determinam, sobre a nova variável, a seguinte condição de contorno

$$\psi^\mu(\tau_1) = -\psi^\mu(\tau_2) \tag{4.61f}$$

4.3.1) A Forma Instante

A função que fixará o gauge na forma instante é dada por

$$\Psi = \frac{1}{\varepsilon} \chi \bar{c} + \frac{i}{\varepsilon} e \bar{\eta} - \frac{1}{p_e} (p^0 - iF) \bar{\eta}. \tag{4.63}$$

Na função fixadora de gauge inserimos uma função arbitrária do espaço de fase $F = F(x^\mu, p_\mu)$, isto é permitido pelo teorema de Batalin-Vilkovisky, seção (3.3). Esta

Sendo $D\mu = Dx^\mu Dp_\mu D\psi^\nu DeDp_e D\chi D\Pi Dc D\bar{P}D\bar{c}DPD\eta D\bar{\varphi}D\bar{\eta}D\varphi$. Realizando a transformação de variáveis

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow ix^\mu, & \psi^\mu &\rightarrow i\psi^\mu, \\ p_\mu &\rightarrow ip_\mu, & & \end{aligned} \tag{4.67}$$

e integrando $\bar{\eta}$, o termo do integrando que contém a transformação BRST da função arbitrária F é eliminado de modo legítimo, pois as transformações BRST das variáveis que são argumentos de F , não dependem das variáveis que já foram integradas: $\bar{\eta}$. Em seguida integrais trivialmente, $e, p_e; \Pi, \chi; P, \bar{c}$. Posteriormente, integramos $\bar{P}, \bar{\phi}$; obtendo na medida

$$\delta(\dot{c})\delta(\dot{\eta}) = (\det \partial_{\dot{\tau}})^{-1} \cdot (\det \partial_{\dot{\tau}})\delta(c)\delta(\eta) = \delta(c)\delta(\eta).$$

Eliminamos c e η , integrando-os. Assim, a amplitude de transição fica com a seguinte expressão

$$Z = \int D\mu' \exp \left\{ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[ip_0(\dot{x}^0 - 1) + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - F \right] \right\}$$

A integração em ψ^0 , coloca na medida o fator constante

$$(\det \partial_\tau)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Integrando p_0 , obtemos na medida a delta funcional que define a *forma instante*,

$$Z = \int Dx^0 D\vec{x} D\vec{p} D\vec{\psi} \delta(x^0 - 1) \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \vec{\psi} \cdot \dot{\vec{\psi}} - F(x^\mu, \vec{p}) \right) \right].$$

Agora, devemos fazer uma análise da função F . O sistema físico estudado é a partícula relativística, que, como vimos na seção (4.2), é uma representação do grupo de Poincaré. Portanto, a função F deve possuir a seguinte dependência, $F = F(\vec{p}^2)$, isto é, deve tão somente ser uma função quadrática das componentes espaciais do momento. De outro modo, se dependesse das coordenadas ou de outra função dos momentos, haveria quebra da simetria de Poincaré, $ISO(d-1,1) = SO(d-1,1) \otimes T_d$ (produto semi-direto das rotações com as translações no espaço-tempo).

Assim, a Hamiltoniana efetiva que não quebra a simetria de Poincaré é a função F , quadrática nas componentes espaciais do momento

$$H = F(\vec{p}^2). \quad (4.68)$$

Isto concorda com o resultado (4.18), o qual diz que a Hamiltoniana da partícula relativística com massa nula na forma instante é a raiz quadrada do quadrado das componentes espaciais do momento. Podemos conectar as duas Hamiltonianas por uma transformação canônica cuja função geratriz é

$$\Phi = \vec{x} \cdot \vec{p} \sqrt{\frac{F^2(\vec{p}^2)}{\vec{p}^2}}. \quad (4.69)$$

Então, a amplitude de transição para a partícula relativística com massa nula, spin $\frac{1}{2}$ e d dimensões espaço-temporais na forma instante é

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} D\vec{\psi} \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{\psi} - \sqrt{\vec{p}^2} \right) \right]. \quad (4.70)$$

As simetrias locais presentes na ação original (4.47): reparametrização e supersimetria, foram quebradas pela função fermiônica fixadora de gauge (4.63) e substituídas pela simetria global de BRST. Desejamos, então, discutir a simetria global de Poincaré do

sistema original. O teorema BV afirma que a amplitude de transição é independente da função fixadora de gauge, então a simetria global de Poincaré não pode ser quebrada, apenas tornar-se não manifesta na ação efetiva e na Hamiltoniana efetiva. A amplitude (4.70) possui simetria de Poincaré não manifesta.

4.3.2) A Forma Frente de Onda

A função fixadora de gauge que irá fornecer a amplitude de transição correspondente à forma *frente de onda* para a partícula relativística com massa nula e spin $\frac{1}{2}$ possui a seguinte expressão

$$\Psi = \frac{1}{\varepsilon} \chi \bar{c} + \left[\frac{i}{\varepsilon} e + \frac{1}{p_e} \left(\frac{1}{2} p^- - iF \right) \right] \bar{\eta} \quad (4.71)$$

Doravante veremos quais restrições a função $F = F(x^\mu, p_\mu)$, a princípio arbitrária por causa do teorema de Batalin-Vilkovisky, deverá satisfazer para manter a invariância de Poincaré do sistema.

Como na forma instante, estamos trabalhando em um espaço-tempo com d dimensões: $\mu = +, -, 2, 3, \dots, d-2$. Então, reescrevendo o vínculo primário na forma frente de onda, temos

$$p^2 = g_{+-} p^+ p^- + g_{-+} p^- p^+ + g_{ij} p^i p^j = p^+ p^- - \vec{p}^2$$

A transformação BRST da função fixadora de gauge $\{Q, \Psi\}$ tem a seguinte forma

$$\delta \Psi = \{Q, \Psi\} = \frac{1}{\varepsilon} P \bar{c} + \frac{1}{\varepsilon} \chi \Pi - \frac{1}{\varepsilon} e p_e + \frac{i}{2} p^- + F - \frac{i}{\varepsilon} \wp \bar{\eta} - \frac{i}{p_e} \delta F \bar{\eta}$$

Do formalismo BFV temos a ação efetiva

$$\begin{aligned} S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau & \left[\frac{1}{2} \dot{x}^+ p^- + \frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \dot{e} p_e - \frac{i}{2} \dot{\psi}_\mu \psi^\mu + \dot{\chi} \Pi + \dot{\eta} \bar{\wp} + \dot{\bar{\eta}} \wp + \dot{c} \bar{P} + \dot{\bar{c}} P + \frac{1}{\varepsilon} \dot{e} \cdot p_e - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\varepsilon} P \bar{c} - \frac{1}{\varepsilon} \chi \Pi - \frac{i}{2} p^- - F + \frac{i}{\varepsilon} \wp \bar{\eta} + \frac{i}{p_e} \delta F \bar{\eta} \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

O termo de superfície não aparece porque já foi cancelado devido à transformação (4.61e).

Novamente, faremos as transformações de variáveis (compatíveis com as transformações BRST, e cujo Jacobiano é um)

$$\begin{aligned}\Pi &\rightarrow \varepsilon \cdot \Pi, & p_e &\rightarrow \varepsilon \cdot p_e, \\ \bar{c} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{c}, & \bar{\eta} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}.\end{aligned}$$

Agora, tomamos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ e a amplitude de transição do sistema é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}Z = \int D\mu \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [& \frac{1}{2} \dot{x}^+ p^- + \frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{4} \dot{\psi}^+ \dot{\psi}^- - \frac{i}{4} \dot{\psi}^- \dot{\psi}^+ + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}} \cdot \dot{\vec{\psi}} + \dot{\eta} \bar{\phi} + \dot{c} \bar{P} - \\ & - P \dot{c} - \chi \Pi + e p_e - \frac{i}{2} p^- - F + i \phi \bar{\eta} + \frac{i \delta F}{p_e} \bar{\eta}] \end{aligned} \quad (4.73)$$

Onde a medida de Liouville é

$$D\mu = Dx^\mu Dp_\mu De Dp_e Dc D\bar{P} D\bar{c} D\bar{P} D\eta D\bar{\phi} D\bar{\eta} D\phi D\chi D\Pi D\psi^\mu.$$

Vamos iniciar as integrações na mesma ordem da *forma instante*, as diferenças serão denotadas. Integraremos inicialmente as variáveis canonicamente conjugadas $\bar{\eta}$, eliminando o último termo do integrando. Depois integramos trivialmente, $P, \bar{c}$; e, p_e ; Π, χ . As integrações em $\bar{P}, \bar{\phi}$, colocam na medida o mesmo produto de deltas funcionais da *forma instante*. Após as transformações de variáveis (4.67)

$$\begin{aligned}x^\mu &\rightarrow ix^\mu, & \psi^\mu &\rightarrow i\psi^\mu, \\ p_\mu &\rightarrow ip_\mu,\end{aligned}$$

a amplitude de transição fica assim

$$Z = \int D\mu' \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\frac{i}{2} p^- (\dot{x}^+ - 1) - \frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{4} \dot{\psi}^+ \dot{\psi}^- - \frac{i}{4} \dot{\psi}^- \dot{\psi}^+ + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}} \cdot \dot{\vec{\psi}} - F]$$

Integrando em p^- desaparece a dependência de F com esta variável, e aparece na medida a delta funcional que define a *forma frente de onda*

$$Z = \int Dx^+ Dx^- D\vec{x} Dp^+ D\vec{p} D\psi^\nu \cdot \delta(x^+ - 1) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{4} \dot{\psi}^+ \psi^- - \frac{i}{4} \dot{\psi}^- \psi^+ + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{\psi} - F(x^\mu, p^+, \vec{p}) \right]$$

Uma função arbitrária F que conserve a simetria de Poincaré deve ser invariante por rotações e translações no espaço-tempo, cujos geradores estão na seção (4.2.2). Portanto, sua forma é

$$H = F(p^+, \vec{p}^2). \quad (4.74)$$

A Hamiltoniana da partícula relativística com massa nula e spin $\frac{1}{2}$ na forma frente de onda foi calculada em (4.23), em concordância com o resultado acima. Se considerássemos

$(\frac{1}{2} p^- - F) = 0$ em (4.70), obteríamos a expressão exata para a Hamiltoniana efetiva da

partícula relativística, que está em (4.23), a qual pode ser obtida de $H = F(p^+, \vec{p}^2)$ por uma transformação canônica, como na *forma instante*. Portanto, a *amplitude de transição da partícula relativística com massa nula e spin $\frac{1}{2}$ na forma frente de onda em d dimensões espaço-temporais* é

$$Z = \int Dx^- D\vec{x} Dp^+ D\vec{p} D\psi^+ D\psi^- D\bar{\psi} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{4} \dot{\psi}^+ \psi^- - \frac{i}{4} \dot{\psi}^- \psi^+ + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{\psi} - \frac{\vec{p}^2}{2p^+} \right] \quad (4.75)$$

4.3.3) A Forma Pontual

Na *forma pontual*, diferentemente das outras formas da dinâmica em que generalizamos a dimensão do espaço-tempo para um número arbitrário d , iremos trabalhar em um espaço-tempo quadridimensional: $\mu = 0, 1, 2, 3$. A razão é que a superfície de evolução é um hiperbolóide que por construção [11] tem quatro dimensões.

A função que irá fornecer a fixação do gauge da partícula relativística com massa nula e spin $\frac{1}{2}$ é

$$\Psi = \frac{1}{\varepsilon} \chi \bar{c} + \frac{i}{\varepsilon} e \bar{\eta} - \frac{1}{p_e} (\rho - iF) \bar{\eta}. \quad (4.76)$$

A função arbitrária $F = F(\xi^\mu, p_{\xi\mu})$ fornecerá a Hamiltoniana efetiva do sistema após a imposição da condição de conservação da simetria de Poincaré.

Os cálculos tornam-se mais fáceis se realizarmos uma transformação para coordenadas hiperbólicas (4.30). Nessas coordenadas, o vínculo tem a seguinte expressão

$$p_\xi^2 = (p^\rho)^2 - \rho^2 (p^\omega)^2 - \rho^2 \sinh^2 \omega (p^\theta)^2 - \rho^2 \sinh^2 \omega \sin^2 \theta (p^\varphi)^2 \equiv (p^\rho)^2 - \bar{p}_\xi^2 \quad (4.77)$$

Do cálculo de $\{Q, \Psi\}$, que iremos utilizar na ação, resulta

$$\delta\Psi = \{Q, \Psi\} = \frac{1}{\varepsilon} P \bar{c} + \frac{1}{\varepsilon} \chi \Pi - i(p^\rho - iF) - \frac{1}{\varepsilon} e p_e - \frac{1}{\varepsilon} \wp \bar{\eta} - \frac{i}{p_e} \delta F \bar{\eta} \quad (4.78)$$

A ação efetiva, invariante pela simetria global BRST e com condições de contorno (4.61), se escreve assim

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{\xi}^\mu p_{\xi\mu} + \dot{e} p_e - \frac{i}{2} \dot{\psi}_{\xi\mu} \dot{\psi}^{\xi\mu} + \dot{\chi} \Pi + \dot{\eta} \bar{\wp} + \dot{\bar{\eta}} \wp + \dot{c} \bar{P} + \dot{\bar{c}} P - \{Q, \Psi\} \right]$$

$$(4.79)$$

Sendo agora,

$$\begin{aligned} \xi^\mu p_{\xi\mu} &= \dot{\rho} p^\rho - \rho^2 \dot{\omega} p^\omega - \rho^2 \sinh^2 \omega \dot{\theta} p^\theta - \rho^2 \sinh^2 \omega \sin^2 \theta \dot{\varphi} p^\varphi \\ &= \dot{\rho} p^\rho - \dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{p}_\xi \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\psi_{\xi\mu}\dot{\psi}_{\xi}^{\mu}&=\psi^{\rho}\dot{\psi}^{\rho}-\rho^2\dot{\psi}^{\omega}\dot{\psi}^{\omega}-\rho^2\sinh^2\omega\dot{\psi}^{\theta}\dot{\psi}^{\theta}-\rho^2\sinh^2\omega\sin^2\theta\dot{\psi}^{\varphi}\dot{\psi}^{\varphi}\\&=\psi^{\rho}\dot{\psi}^{\rho}-\vec{\psi}_{\xi}\cdot\dot{\vec{\psi}}_{\xi}\end{aligned}$$

Semelhantemente às outras duas formas da dinâmica, faremos as seguintes transformações de variáveis (compatíveis com as transformações BRST, e cujo Jacobiano é um)

$$\begin{array}{ll} \Pi \rightarrow \varepsilon \cdot \Pi, & p_e \rightarrow \varepsilon \cdot p_e, \\ \bar{c} \rightarrow \varepsilon \cdot \bar{c}, & \bar{\eta} \rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}. \end{array}$$

Após tomarmos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a amplitude de transição do sistema é dada pela seguinte expressão

$$Z = \int D\mu \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\xi}^\mu p_{\xi\mu} - \frac{i}{2} \psi_{\xi\mu} \dot{\psi}_\xi^\mu + \dot{\eta} \bar{\phi} + \dot{c} \bar{P} - P \dot{c} - \chi \Pi - i \cdot p^\rho - F + e p_e + \phi \bar{\eta} + \frac{i}{p_e} \delta F \bar{\eta}] \quad (4.80)$$

Sendo a medida de Liouville

$$D\mu = D\xi^\mu Dp_{\xi\mu} De Dp_e Dc D\bar{P} D\bar{c} D P D\eta D\bar{\wp} D\bar{\eta} D\wp D\chi D\Pi D\psi_{\xi\mu}.$$

Os cálculos com as integrações em $\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\eta}, P, \bar{c}, \bar{P}, c, \Pi, \chi$, são iguais aos da *forma instante*. A restrição imposta sobre a função F , também. Então, a amplitude de transição é

$$Z = \int D\xi^\mu D\vec{p}_\xi D\vec{\psi}_\xi \cdot \delta(\rho - \tau) \cdot \exp i \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{p}_\xi + \frac{i}{2} \vec{\psi}_\xi \cdot \dot{\vec{\psi}}_\xi - F(\xi^\mu, \vec{p}_\xi) \right) \right] \quad (4.81)$$

Esta forma da função F quebra a simetria de Poincaré original do sistema. Para mantê-la, devemos ter uma dependência quadrática nas componentes espaciais do momento

$$H = F(\vec{p}_\xi^2). \quad (4.82)$$

Esta expressão para a Hamiltoniana efetiva de nosso sistema está em concordância com a equação (4.37) que fornece a Hamiltoniana partícula relativística na forma pontual. Uma transformação canônica conecta as duas Hamiltonianas. De forma que podemos expressar a amplitude de transição para a *partícula relativística com massa nula, spin $\frac{1}{2}$ e $d=4$ dimensões espaço-temporais na forma pontual* assim

$$Z = \int D\vec{\xi} D\vec{p}_\xi D\vec{\psi}_\xi \exp i \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{p}_\xi + \frac{i}{2} \vec{\psi}_\xi \cdot \dot{\vec{\psi}}_\xi - \sqrt{-2} \right) \right]. \quad (4.83)$$

Finalizamos esta seção fazendo uma rápida discussão sobre a Hamiltoniana da partícula relativística. Descobrimos na seção (4.2) qual é a Hamiltoniana da partícula relativística nas três formas da dinâmica, através do método de Dirac. Na seção (4.3) utilizamos o formalismo BRST-BFV para encontrar a amplitude de transição da partícula relativística com massa nula e spin $\frac{1}{2}$ nas três formas da dinâmica. Em razão do teorema de Batalin-Vilkovisky descobrimos uma função arbitrária (F) do espaço de fase desempenhando o papel de Hamiltoniana do sistema. Porém, a fim de não perdermos a invariância de Poincaré, impusemos a simetria por translação e rotação espaço-temporal a essa função arbitrária. Com isso encontramos o resultado esperado: que essa função é a Hamiltoniana da partícula relativística com massa nula nas três formas da dinâmica, como no método de Dirac seção (4.2).

Além desse resultado para a partícula relativística, aprendemos como obter de modo seguro a Hamiltoniana efetiva de um sistema no formalismo BRST-BFV.

4.4) Quantização BRST da Partícula Relativística com Massa Nula e N Supersimetrias.

1) Descrição

A ação que descreve a partícula relativística com massa nula e supersimetria estendida tem a seguinte forma [7]:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2e} (\dot{x}^\mu - i\chi_a \psi_a^\mu) (\dot{x}^\nu - i\chi_b \psi_b^\nu) g_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \dot{\psi}_a^\mu \dot{\psi}_b^\nu g_{\mu\nu} - \frac{i}{2} f_{ab} \psi_a^\mu \psi_b^\nu g_{\mu\nu} \right] - \psi_a^\mu(\tau_1) \psi_a^\nu(\tau_2) g_{\mu\nu} \quad (4.84)$$

Esta ação possui invariância por três simetrias locais: supersimetria estendida, reparametrização temporal e simetria interna $O(N)$. E também pela simetria global de Poincaré. Na referência [8] é calculada, no formalismo BRST-BFV, a amplitude de transição da ação definida acima, no gauge do tempo próprio. E, para dimensões pares, é mostrado que quando $N \geq 2$, a amplitude de transição corresponde ao propagador de Feynmann da intensidade do campo de Dirac, e não ao potencial da teoria. Do ponto de vista da quantização de Dirac, isto pode ser entendido porque após a segunda quantização a função de onda torna-se a intensidade de campo [7] e não o potencial, e nas equações de movimento aparecem somente as intensidades de campo. Porém, quando, $N=0$ ou $N=1$, é diferente, e encontramos os propagadores para os potenciais.

Na ação definida acima, posição da partícula é descrita por $x^\mu(\tau)$, os graus de liberdade spin por $\psi_a^\mu(\tau)$, e é o 'einbein' unidimensional, $\chi_a(\tau)$ é o gravitino e f_{ab} as conexões para a simetria interna $O(N)$. Um termo de contorno foi adicionado a fim de possibilitar o uso de uma única condição de contorno sobre a coordenada fermiônica quando da aplicação do princípio variacional [7]. A invariância da ação por reparametrização da linha de mundo é dada por

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= \varepsilon \cdot x^\mu, \\
\delta e &= (\varepsilon \cdot e), \\
\delta \psi_a^\mu &= \varepsilon \cdot \psi_a^\mu, \\
\delta \chi_a &= (\varepsilon \cdot \chi_a), \\
\delta f_{ab} &= (\varepsilon \cdot f_{ab}).
\end{aligned} \tag{4.85}$$

O parâmetro local $\varepsilon(\tau)$ deve satisfazer às condições de contorno $\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon(\tau_2) = 0$.

A ação (4.84) também é invariante por transformações locais de supersimetria na linha de mundo

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= i\alpha_a \psi_a^\mu, \\
\delta e &= 2i\chi_a \alpha_a, \\
\delta \psi_a^\mu &= -\frac{1}{e} \alpha_a (x^\mu - i\chi_b \psi_b^\mu), \\
\delta \chi_a &= \alpha_a - f_{ab} \alpha_b, \\
\delta f_{ab} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Os parâmetros locais $\alpha_a(\tau)$ devem satisfazer às condições de contorno $\alpha_a(\tau_1) = \alpha_a(\tau_2) = 0$.

A ação é invariante, também, por transformações locais $O(N)$

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= 0, \\
\delta e &= 0, \\
\delta \psi_a^\mu &= b_{ab} \psi_b^\mu, \\
\delta \chi_a &= b_{ab} \chi_b, \\
\delta f_{ab} &= b_{ab} + b_{ac} f_{cb} - b_{bc} f_{ca}.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Não há condições de contorno nos parâmetros locais $b_{ab}(\tau)$, portanto, a simetria $O(N)$ é interna.

Da Lagrangeana do sistema

$$L = \frac{1}{2e} (x^\mu - i\chi_a \psi_a^\mu) (x^\nu - i\chi_b \psi_b^\nu) g_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \psi_a^\mu \dot{\psi}_b^\nu g_{\mu\nu} - \frac{i}{2} f_{ab} \psi_a^\mu \psi_b^\nu g_{\mu\nu} \tag{4.88}$$

definimos o momento canonicamente associado às coordenadas

$$p = (-1)^s \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

Sendo $s=0$, para as variáveis que comutam e $s=1$, para as demais. Assim,

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow p^\mu = \frac{1}{e} \dot{x}^\mu - \frac{i}{e} \chi_a \psi_a^\mu, \\ \psi_a^\mu &\rightarrow \Pi_a^\mu = -\frac{i}{2} \dot{\psi}_a^\mu, \\ e &\rightarrow p_e = 0, \\ \chi_a &\rightarrow \Pi_a = 0, \\ f_{ab} &\rightarrow p_{ab} = 0. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Temos, então, os seguintes vínculos primários

$$\begin{aligned} \phi_a^\mu &= \Pi_a^\mu, \\ p_e &= 0, \\ \Pi_a &= 0, \\ p_{ab} &= 0. \end{aligned} \tag{4.90}$$

E, a Hamiltoniana canônica é dada por

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu + \Pi_{a\mu} \dot{\psi}_a^\mu - L = \frac{e}{2} p^2 + i \chi_a p_\mu \psi_a^\mu + \frac{i}{2} f_{ab} \psi_a^\mu \psi_{\mu b}. \tag{4.91}$$

Os vínculos de primeira classe que podem ser encontrados da mesma modo do caso $N=1$

$$\begin{aligned} \Phi &= p^2 \approx 0, \\ \phi_a &= i \psi_a^\mu p_\mu \approx 0, \\ \varphi_{ab} &= i \psi_a^\mu \psi_{\mu b} \approx 0, \end{aligned} \tag{4.92}$$

(vemos que a Hamiltoniana canônica (4.91) é nula, como se espera de um sistema geralmente covariante) e satisfazem à álgebra

$$\begin{aligned}
\{\phi_a, \phi_b\} &= i\delta_{ab}\Phi, \\
\{\varphi_{ab}, \phi_c\} &= \delta_{ac}\phi_b - \delta_{bc}\phi_a, \\
\{\phi_{ab}, \phi_{cd}\} &= \delta_{ac}\varphi_{bd} - \delta_{ad}\varphi_{bc} - \delta_{bc}\varphi_{ad} + \delta_{bd}\varphi_{ac}.
\end{aligned}
\tag{4.93}$$

Cada vínculo de primeira classe é um gerador de uma simetria da ação

$$\begin{aligned}
\Phi &\rightarrow \text{reparametrização}, \\
\phi_a &\rightarrow \text{supersimetria}, \\
\varphi_{ab} &\rightarrow \text{simetria } O(N).
\end{aligned}$$

II) Quantização BRST-BFV

Podemos reescrever a ação que descreve a partícula relativística com massa nula e N supersimetrias, com a introdução dos vínculos de primeira classe (4.92)

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \psi_a^\mu \dot{\psi}_a^\nu g_{\mu\nu} - \frac{e}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - i\chi_a \psi_a^\mu p_\mu - \frac{i}{2} f_{ab} \psi_a^\mu \psi_b^\nu g_{\mu\nu} \right] - \psi_\mu(\tau_1) \psi^\mu(\tau_2)
\tag{4.94}$$

Onde e , χ_a e f_{ab} , são multiplicadores de Lagrange.

O formalismo BRST-BFV elimina os graus de liberdade de gauge estendendo o espaço de fase ao introduzir os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange como novos vínculos da teoria

$$\begin{aligned}
e &\rightarrow p_e \approx 0, \\
\chi_a &\rightarrow \Pi_a \approx 0, \\
f_{ab} &\rightarrow p_{ab} \approx 0.
\end{aligned}$$

Agora, para cada vínculo associamos um par de fantasmas canonicamente conjugados e com paridade de Grassmann oposta

$$\begin{aligned}
\Phi &\rightarrow (\eta, \bar{\wp}), \\
\phi_a &\rightarrow (c_a, \bar{P}_a), \\
\varphi_{ab} &\rightarrow (\eta_{ab}, \bar{\wp}_{ab}), \\
p_e &\rightarrow (\bar{\eta}, \wp), \\
\Pi_a &\rightarrow (\bar{c}_a, P_a), \\
p_{ab} &\rightarrow (\bar{\eta}_{ab}, \wp_{ab}).
\end{aligned}$$

Os parênteses de Poisson são definidos de tal modo que são comutantes para as variáveis bosônicas e anticomutantes para as fermiônicas

$$\{e, p_e\} = 1, \quad \{\chi_a, \Pi_b\} = -\delta_{ab}, \quad \{f_{ab}, p_{cd}\} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc},$$

$$\{f_{ab}, p_{cd}\} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}, \quad \{\eta, \bar{\wp}\} = \{\bar{\eta}, \wp\} = -1,$$

$$\{\eta_{ab}, \bar{\wp}_{cd}\} = \{\bar{\eta}_{ab}, \wp_{cd}\} = -\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}, \quad \{c_a, \bar{P}_b\} = \{\bar{c}_a, P_b\} = \delta_{ab}.$$

Usando a álgebra (4.93) construímos a carga BRST,

$$Q = \int d\tau [\eta \cdot \Phi + c_a \phi_a + \frac{1}{2} \eta_{ab} \varphi_{ab} + \wp \cdot p_e + P_a \Pi_a + \frac{1}{2} \wp_{ab} p_{ab} + \bar{P}_a \eta_{ab} c_b - \frac{i}{2} \bar{\wp} \cdot c_a \cdot c_a - \frac{1}{2} \bar{\wp}_{ab} \eta_{bc} \eta_{ca}] \quad (4.95)$$

As condições de contorno devem ser invariante por BRST, a fim de que a ação também o seja, então precisamos calcular as transformações geradas pelas variáveis canônicas da teoria

$$\delta x^\mu = -2p^\mu \eta, \quad \delta p^\mu = 0, \quad \delta \psi_a^\mu = c_a p^\mu + \eta_{ab} \psi_b^\mu, \quad \delta e = -\wp,$$

$$\delta p_e = 0, \quad \delta \chi_a = -P_a, \quad \delta \Pi_a = 0, \quad \delta f_{ab} = -\wp_{ab},$$

$$\delta p_{ab} = 0, \quad \delta \eta = i/2 c_a c_a, \quad \delta \bar{\varphi} = -p^2, \quad \delta \bar{\eta} = -p_e,$$

$$\delta \wp = 0, \quad \delta c_a = -\eta_{ac} c_c, \quad \delta \bar{P}_a = i \psi_{a\mu} p^\mu + \bar{P}_b \eta_{ba} - i \bar{\wp} c_a, \quad \delta \bar{c}_a = -\Pi_a,$$

$$\delta P_a = 0, \quad \delta \eta_{ab} = -\eta_{ac} \eta_{cb}, \quad \delta \bar{\wp}_{ab} = -\varphi_{ab} - \bar{P}_a c_b + \bar{P}_b c_a - \bar{\wp}_{ac} \eta_{cb} + \bar{\wp}_{bc} \eta_{ca},$$

$$\delta \bar{\eta}_{ab} = -p_{ab}, \quad \delta \wp_{ab} = 0.$$

Não é difícil, ainda que trabalhoso, mostrar que as transformações acima são nilpotentes.

Usaremos as seguintes condições de contorno que, como já dissemos, devem ser invariante pelas transformações BRST

$$x^\mu(\tau_1) = x_1^\mu, \quad x^\mu(\tau_2) = x_2^\mu, \quad (4.96a)$$

$$\frac{1}{2} [\psi_i^\mu(\tau_1) + \psi_i^\mu(\tau_2)] = \gamma_i^\mu, \quad (4.96b)$$

$$\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2) = 0, \quad \bar{\eta}(\tau_1) = \bar{\eta}(\tau_2) = 0, \quad c_a(\tau_1) = c_a(\tau_2) = 0, \quad (4.96c)$$

$$\bar{c}_a(\tau_1) = \bar{c}_a(\tau_2) = 0, \quad \eta_{ab}(\tau_1) = \eta_{ab}(\tau_2) = 0, \quad \bar{\eta}_{ab}(\tau_1) = \bar{\eta}_{ab}(\tau_2) = 0, \quad (4.96d)$$

$$p_{ab}(\tau_1) = p_{ab}(\tau_2) = 0, \quad p_e(\tau_1) = p_e(\tau_2) = 0, \quad \Pi_a(\tau_1) = \Pi_a(\tau_2) = 0. \quad (4.96e)$$

Realizando em (4.96b) a transformação (4.61e), obtemos as condições de contorno (4.61f), cancelando o termo de superfície em (4.94).

Nas formas instante e frente de onda trabalharemos em um espaço-tempo com d dimensões e na forma pontual com quatro dimensões no espaço-tempo. O motivo da diferença está em que a superfície de evolução hiperbólica tem quatro dimensões.

4.4.1) A Forma Instante

Na seção (4.3) realizamos a quantização BRST-BFV da partícula relativística com spin $\frac{1}{2}$ nas três formas da dinâmica. Na subseção (4.3.1) definimos, na forma instante, uma função fermiônica fixadora de gauge, Ψ , com uma função arbitrária do espaço de fase $F = F(x^\mu, p_\mu)$. Esta arbitrariedade na escolha de F é permitida pelo teorema de Batalin-Vilkovisky, porém, a simetria de Poincaré restringe F a uma função do quadrado das componentes espaciais do momento, em concordância com a Hamiltoniana da partícula relativística com massa nula. Nesta seção, iremos generalizar o spin para o caso $N/2$. Porém, não mais iremos iniciar com uma função arbitrária F na função fermiônica fixadora de gauge, Ψ , antes, escolheremos a seguinte função fermiônica que nos dará a expressão exata da Hamiltoniana da partícula relativística com massa nula:

$$\Psi = \left[\frac{1}{\varepsilon} e - \frac{i}{p_e} (p_0 - i\sqrt{p^2}) \right] \bar{\eta} + \frac{1}{\varepsilon} \chi_a \bar{c}_a + \frac{1}{2\varepsilon} f_{ab} \bar{\eta}_{ab} \quad (4.97)$$

O cálculo de sua transformação BRST fornece

$$\delta\Psi = \{Q, \Psi\} = \frac{1}{\varepsilon} P_a \bar{c}_a + \frac{1}{\varepsilon} \chi_a \Pi_a - \frac{1}{2\varepsilon} \wp_{ab} \bar{\eta}_{ab} - \frac{1}{2\varepsilon} f_{ab} p_{ab} + ip^0 + \sqrt{p^2} - \frac{1}{\varepsilon} ep_e - \frac{1}{\varepsilon} \wp \bar{\eta}$$

Podemos agora considerar a amplitude de transição do sistema, onde aparece a expressão acima

$$Z = \int D\mu \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[x^\mu p_\mu - \frac{i}{2} \psi_{\mu a} \dot{\psi}_a^\mu + \dot{e} p_e + \dot{\chi}_a \Pi_a + \frac{1}{2} \dot{f}_{ab} p_{ab} + \dot{\eta} \bar{\wp} + \dot{\bar{\eta}} \wp + \right. \\ \left. + \dot{c}_a \bar{P}_a + \dot{\bar{c}}_a P_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\wp}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}_{ab} \wp_{ab} - \{Q, \Psi\} \right] \quad (4.98)$$

Sendo a medida de Liouville,

$$D\mu = Dx^\mu Dp_\mu D\psi_{av} De Dp_e D\eta D\bar{\wp} D\bar{\eta} D\wp D\chi_b D\Pi_b Dc_c D\bar{P}_c D\bar{c}_d DP_d Df_{ef} DP_{ef} D\eta_{gh} D\bar{\wp}_{gh} D\bar{\eta}_{ij} D\wp_{ij}$$

As simetrias locais da ação original (4.84) foram substituídas pela simetria global de BRST exibida na ação efetiva que pode ser lida na amplitude de transição (4.98).

Após aplicarmos as transformações (invariante por BRST e com Jacobiano igual a um) infinitesimais

$$\begin{aligned} p_e &\rightarrow \varepsilon \cdot p_e, & \Pi_a &\rightarrow \Pi_a, & p_{ab} &\rightarrow \varepsilon \cdot p_{ab}, \\ \bar{\eta} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}, & \bar{c}_a &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{c}_a, & \bar{\eta}_{ab} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}_{ab}, \end{aligned}$$

e o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ à amplitude de transição, obtemos

$$\begin{aligned} Z = \int D\mu \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [& \dot{x}^\mu p_\mu - \frac{i}{2} \psi_{a\mu} \dot{\psi}_a^\mu + \dot{\eta} \bar{\phi} + \dot{c}_a \bar{P}_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\phi}_{ab} - P_a \dot{\bar{c}}_a - \chi_a \Pi_a + \frac{1}{2} \phi_{ab} \dot{\bar{\eta}}_{ab} + \\ & + \frac{1}{2} f_{ab} p_{ab} - ip^0 - \sqrt{\vec{p}^2} + ep_e + \phi \bar{\eta}] \end{aligned}$$

Com a integração das variáveis $p_e, e; \Pi_a, \chi_a; p_{ab}, f_{ab}; \eta; \phi_{ab}, \bar{\eta}_{ab}; P_a, \bar{c}_a$, obtemos

$$Z = \int D\mu' \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_0 (\dot{x}^0 - i) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{2} \psi_{a\mu} \dot{\psi}_a^\mu + \dot{\eta} \bar{\phi} + \dot{c}_a \bar{P}_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\phi}_{ab} - \sqrt{\vec{p}^2}]$$

Realizaremos a transformação de variáveis (4.67)

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow ix^\mu, & \psi^\mu &\rightarrow i\psi^\mu, \\ p_\mu &\rightarrow ip_\mu, \end{aligned}$$

e integrando p_0 e ψ^0 , obtemos na medida

$$Z = \int D\mu' \cdot \delta(x^0 - 1) \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \vec{\psi}_a \cdot \dot{\vec{\psi}}_a + \dot{\eta} \bar{\phi} + \dot{c}_a \bar{P}_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\phi}_{ab} - \sqrt{\vec{p}^2}]$$

E depois, integramos $\overline{\eta}_{ab}, \overline{P}_a, c_a; \overline{\eta}$

$$Z = \int D\vec{x}^\mu Dp_\mu D\psi_a^\nu \cdot \delta(x^0 - 1) \cdot (\det \partial_\tau)^{-(N-1)} \cdot (\det \partial_\tau)^{\frac{N(N-1)}{2}} \cdot \exp \left[\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}}_a \cdot \vec{\psi}_a - \sqrt{\vec{p}^2} \right]$$

O determinante com expoente negativo é devido à integração em c_a e η , enquanto que o determinante com expoente fracionário à integração em η_{ab} . A fração indica o número de componentes independentes de η_{ab} . Aplicando o resultado, $\det \partial_\tau = 2$ e, após a absorção dos fatores constantes, encontramos a amplitude de transição da *partícula relativística com massa nula e N supersimetrias na forma instante*

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} D\vec{\psi}_a \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}}_a \cdot \vec{\psi}_a - \sqrt{\vec{p}^2} \right]. \quad (4.99)$$

Como já esperávamos, a Hamiltoniana efetiva é aquela que já foi calculada em (4.18) pelo método de teoria de grupos de Dirac, aqui a encontramos pelo método de teorias de gauge. Isto acontece também aqui, porque a diferença para os casos $N=1$ ou $N=0$ está no setor fermiônico da teoria, o qual não é afetado pelas formas da dinâmica. A evolução do sistema é determinada pela Hamiltoniana efetiva, que é um operador bosônico.

As simetrias locais presentes na ação original (4.84): reparametrização, supersimetria e simetria interna $O(N)$, foram quebradas pela função fermiônica fixadora de gauge (4.97) e substituídas pela simetria global de BRST. Resta discutir a simetria global de Poincaré do sistema original. O teorema BV afirma que a amplitude de transição é independente da função fixadora de gauge, então a simetria global de Poincaré não pode ser quebrada, apenas tornar-se não manifesta na ação efetiva e na Hamiltoniana efetiva. É o que acontece em (4.99).

4.4.2) A Forma Frente de Onda

Iremos utilizar a mesma definição (4.12). Os vínculos se escrevem assim:

$$\begin{aligned}\Phi &= p^2 = p^+ p^- - \vec{p}^2 \approx 0, \\ \phi_a &= i\psi_a^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\psi_a^+ p^- + \frac{i}{2}\psi_a^- p^+ - i\psi_a^i p^i \approx 0, \\ \varphi_{ab} &= i\psi_a^\mu \psi_b^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\psi_a^+ \psi_b^- + \frac{i}{2}\psi_a^- \psi_b^+ - i\psi_a^i \psi_b^i \approx 0.\end{aligned}$$

Como na forma instante, estes satisfazem à álgebra (4.93).

A função fixadora de gauge correspondente à forma frente de onda é dada por:

$$\Psi = \frac{1}{\varepsilon} \chi_a \bar{c}_a + \left[\frac{i}{\varepsilon} e - \frac{i}{p_e} \left(\frac{1}{2} p^- - i \frac{\vec{p}^2}{2p_+} \right) \right] \bar{\eta} + \frac{1}{2\varepsilon} f_{ab} \bar{\eta}_{ab} \quad (4.100)$$

Portanto,

$$\delta\Psi = \{Q, \Psi\} = -\frac{1}{\varepsilon} P_a \bar{c}_a - \frac{i}{\varepsilon} e p_e - \frac{1}{\varepsilon} \chi_a \Pi_a + \frac{i}{2} p^- + \frac{\vec{p}^2}{2p_+} - \frac{1}{2\varepsilon} \wp_{ab} \bar{\eta}_{ab} - \frac{1}{2\varepsilon} f_{ab} p_{ab}$$

A amplitude de transição no espaço de fase estendido tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}Z &= \int D\mu \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [x^\mu \dot{p}^\nu g_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \psi_a^\mu \dot{\psi}_a^\nu g_{\mu\nu} + \dot{e} p_e + \dot{\chi}_a \Pi_a + \frac{1}{2} \dot{f}_{ab} p_{ab} + \dot{\eta} \bar{\wp} + \dot{\bar{\eta}} \wp + \\ &+ \dot{c}_a \bar{P}_a + \dot{\bar{c}}_a P_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\wp}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}_{ab} \wp_{ab} - \{Q, \Psi\}] \quad (4.101)\end{aligned}$$

Sendo a medida de Liouville,

$$\begin{aligned}D\mu &= Dx^\mu Dp_\mu D\psi_{a\nu} De Dp_e D\eta D\bar{\wp} D\bar{\eta} D\wp D\chi_b D\Pi_b Dc_c D\bar{P}_c D\bar{c}_d DP_d Df_{ef} Dp_{ef} \times \\ &\times D\eta_{gh} D\bar{\wp}_{gh} D\bar{\eta}_{ij} D\wp_{ij}\end{aligned}$$

Após sofrer as transformações infinitesimais (invariante por BRST e com Jacobiano igual a um),

$$\begin{aligned} p_e &\rightarrow \varepsilon \cdot p_e, & \Pi_a &\rightarrow \Pi_a, & p_{ab} &\rightarrow \varepsilon \cdot p_{ab}, \\ \bar{\eta} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}, & \bar{c}_a &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{c}_a, & \bar{\eta}_{ab} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}_{ab}. \end{aligned}$$

A amplitude toma a seguinte forma, após o limite $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} Z = \int D\mu \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [x^\mu \dot{p}_\mu - \frac{i}{2} \psi_{a\mu} \dot{\psi}_a^\mu + \dot{\eta} \bar{P} + \dot{c}_a \bar{\phi}_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\phi}_{ab} + P_a \dot{\bar{c}}_a + e p_e + \chi_a \Pi_a + \\ + \frac{1}{2} \phi_{ab} \dot{\bar{\eta}}_{ab} + \frac{1}{2} f_{ab} p_{ab} - \frac{i}{2} p^- - \frac{\vec{p}^2}{2p^+}] \end{aligned}$$

Integrando $e, p_e; \chi_a, \Pi_a; f_{ab}, p_{ab}; \bar{\eta}_{ab}, \phi_{ab}; \bar{c}_a, P_a$, obtemos

$$Z = \int D\mu' \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\frac{1}{2} \dot{x}^+ p^- + \frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{2} \psi_{a\mu} \dot{\psi}_a^\mu + \dot{\eta} \bar{\phi} + \dot{c}_a \bar{P}_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\phi}_{ab} - \frac{i}{2} p^- - \frac{\vec{p}^2}{2p^+}]$$

Como na *forma instante*, faremos a transformação de variáveis (4.67) e integraremos $\bar{\eta};$

$\bar{P}_a, c_a; \bar{\eta}_{ab}, \eta_{ab}$. Assim,

$$Z = \int D\mu'' \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\frac{1}{2} p^- (\dot{x}^+ - 1) - \frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{2} \psi_a^\mu \dot{\psi}_{a\mu} - \frac{\vec{p}^2}{2p^+}]$$

Integraremos, finalmente, p^- , e a medida ficará com a delta funcional da condição de gauge que fornece a *forma frente de onda*

$$\begin{aligned} Z = \int Dx^+ Dx^- Dp^+ D\vec{x} D\vec{p} D\psi_a^+ D\psi_a^- D\bar{\psi}_a \cdot \delta(\dot{x}^+ - 1) \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{4} \psi_a^+ \dot{\psi}_a^- - \frac{i}{4} \psi_a^- \dot{\psi}_a^+ + \\ + \frac{i}{2} \psi_a^- \dot{\bar{\psi}}_a - \frac{\vec{p}^2}{2p^+}], \end{aligned}$$

(4.102)

Esta é a amplitude de transição onde se lê a Hamiltoniana da *partícula relativística com massa nula e spin $N/2$ na forma frente de onda em d dimensões espaço-temporais*. A parte bosônica coincide com a equação (4.23) quando $m=0$.

4.4.3) A Forma Pontual

Adotando as mesmas convenções da seção (4.3.3), escolhemos como nossa função fixadora de gauge

$$\Psi = \frac{1}{\varepsilon} \chi_a \bar{c}_a + \frac{1}{2\varepsilon} f_{ab} \bar{\eta}_{ab} + \left[\frac{1}{\varepsilon} e - \frac{i}{p_e} (\rho - i\sqrt{\vec{p}_\xi^2}) \right] \bar{\eta} \quad (4.103)$$

Os vínculos podem ser escritos do seguinte modo ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \Phi = p^2 &= (p^\rho)^2 - \vec{p}_\xi^2 \approx 0, \\ \phi_a &= i\psi_a^\mu p_\mu = i\psi_a^\rho p^\rho - i\vec{\psi}_{\xi a} \cdot \vec{p}_\xi \approx 0, \\ \varphi_{ab} &= i\psi_a^\mu \psi_{\mu b} = i\psi_a^\rho \psi_{\rho b} - i\vec{\psi}_{\xi a} \cdot \vec{\psi}_{\xi b} \approx 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta\Psi = \{Q, \Psi\} = -\frac{1}{\varepsilon} P_a \bar{c}_a - \frac{1}{\varepsilon} \chi_a \Pi_a - \frac{1}{2\varepsilon} \wp_{ab} \bar{\eta}_{ab} - \frac{1}{2\varepsilon} f_{ab} p_{ab} - \frac{1}{\varepsilon} e p_e + i\rho + \sqrt{\vec{p}_\xi^2}$$

A amplitude de transição tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z &= \int D\mu \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\xi^\mu p_{\xi\mu} - \frac{i}{2} \psi_{\xi a\mu} \dot{\psi}_{\xi a}^\mu + \dot{e} p_e + \dot{\chi}_a \Pi_a + \frac{1}{2} \dot{f}_{ab} p_{ab} + \dot{\eta} \wp + \dot{\bar{\eta}} \wp + \\ &+ \dot{\bar{c}}_a P_a + \dot{c}_a P_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \wp_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}_{ab} \wp_{ab} - \{Q, \Psi\}] \end{aligned}$$

Após sofrer as transformações infinitesimais (invariante por BRST e com Jacobiano igual a um) já conhecidas

$$\begin{aligned} p_e &\rightarrow \varepsilon \cdot p_e, & \Pi_a &\rightarrow \Pi_a, & p_{ab} &\rightarrow \varepsilon \cdot p_{ab}, \\ \bar{\eta} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}, & \bar{c}_a &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{c}_a, & \bar{\eta}_{ab} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}_{ab}, \end{aligned}$$

a amplitude toma a seguinte forma, após fazermos ε se anular

$$\begin{aligned} Z = \int D\mu \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [& \dot{\xi}^\mu p_{\xi\mu} - \frac{i}{2} \psi_{\xi a \mu} \dot{\psi}_{\xi a}^\mu + \dot{\eta} \bar{\wp} + \dot{c}_a \bar{\wp}_a + \frac{1}{2} \dot{\eta}_{ab} \bar{\wp}_{ab} + P_a \dot{\bar{c}}_a + \chi_a \Pi_a + \\ & + \frac{1}{2} \wp_{ab} \bar{\eta}_{ab} + \frac{1}{2} f_{ab} p_{ab} + e p_e - i \rho - \sqrt{\vec{p}_\xi^2}] \end{aligned} \quad (4.104)$$

A medida é

$$D\mu = Dx^\mu Dp_{\xi\mu} De Dp_e Dc_a D\bar{P}_a D\bar{c}_b DP_b D\eta_c D\bar{\wp}_c D\bar{\eta}_d D\wp_d D\chi_e D\Pi_e D\psi_{\xi f}^\mu.$$

Não iremos reproduzir os cálculos das integrações funcionais e transformações de variáveis na amplitude de transição (4.104), pois são semelhantes aos da forma instante. A amplitude de transição da *partícula relativística com massa nula spin N/2 em um espaço-tempo com d=4 dimensões na forma pontual* é

$$Z = \int D\vec{\xi} D\vec{p} D\vec{\psi}_{\xi a} \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{p}_\xi + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}}_{\xi a} \cdot \vec{\psi}_{\xi a} - \sqrt{\vec{p}_\xi^2} \right) \right]. \quad (4.105)$$

Como observamos no final da subseção (4.4.1), as formas da dinâmica não afetam o setor fermiônico da teoria porque as Hamiltonianas são geradores do grupo de Poincaré, o qual é constituído unicamente por geradores bosônicos.

Capítulo 5

Simetria de Gauge, Simetria Conforme e Espaço-Tempo com Dois Tempos

5.1) Introdução

Neste capítulo, as quatro primeiras seções revisam a *teoria com dois tempos* proposta por Itzhak Bars. As duas últimas, (5.4) e (5.5), explanam nossa contribuição dentro do formalismo BRST-BFV, sendo que na seção (5.4) realizamos a quantização BRST-BFV da teoria bosônica e na (5.5) a quantização da teoria fermiônica. Na última seção encontramos, a partir da ação original proposta por Bars em $(d+2)$ dimensões, a amplitude de transição com uma ação não-relativística, Hamiltoniana arbitrária invariante por rotação e spin $N/2$ em um espaço de $(d-1)$ dimensões, nas três formas da dinâmica.

Iniciaremos apresentando a *teoria com dois tempos* formulada em [4], [5], através da reformulação da simetria simplética $Sp(2)$ em uma simetria de gauge, método que denominaremos de “*calibramento (gauging)*”. A simetria simplética $Sp(2)$ aparece nas regras de quantização da *mecânica quântica* através da troca das coordenadas pelos momentos, i.e., transforma (x,p) como um duplete. Estudaremos um sistema elementar com simetria $Sp(2)$, local e contínua. Bars reformulou a *ação da partícula relativística com massa nula* “calibrando” a simetria $Sp(2)$. Como resultado, obteve uma teoria mais geral, capaz de descrever não somente a partícula relativística como também outros sistemas físicos tais como o átomo de hidrogênio e o oscilador harmônico. Como consequência da simetria de gauge, ao espaço-tempo de Minkowski é adicionado uma dimensão tipo-espaço e outra tipo-tempo

$$(x^\mu, p^\mu) \rightarrow (X^M, P^M). \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, d-1; \quad M = 0, 1, 2, \dots, d+1. \quad (5.1)$$

A simetria global manifesta $SO(d,2)$ atua sobre o vetor (X^M, P^M) como vetores de $(d+2)$ dimensões. Esta simetria contém a simetria de Poincaré $ISO(d-1,1)$ como subgrupo, mas não há simetria de translação em $d+2$ dimensões. Os geradores da simetria $SO(d,2)$ são

$$L^{MN} = X^M P^N - X^N P^M. \quad (5.2)$$

Eles são manifestamente invariante sob a simetria de gauge local $Sp(2)$.

A presença da simetria conforme $SO(d,2)$ é a evidência da existência de duas coordenadas tipo-tempo. É mostrado em [4], [5] que os diferentes sistemas físicos: partícula relativística, átomo de hidrogênio e outros aparentemente diferentes, correspondem ao mesmo espaço de Hilbert quântico, caracterizado por uma única representação unitária do grupo conforme $SO(d,2)$. A física é aparentemente diferente porque a escolha de “tempo” não é única e, portanto, as Hamiltonianas são diferentes. Esses sistemas físicos são relacionados entre si pela simetria de gauge $Sp(2)$. Duas ou mais dimensões temporais são possíveis somente com simetria de gauge apropriada e vínculos que reduzam a teoria a uma teoria efetiva com uma única dimensão temporal.

A ação proposta em [4], [5] é

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (D_\tau X_i^M) \varepsilon^{ij} X_j^N \eta_{MN} \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (X^M \dot{P}^N - \frac{1}{2} A^{ij} X_i X_j) \eta_{MN} \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{X}^M P_M - \frac{1}{2} A^{11} (X \cdot X) - A^{12} (X \cdot P) - \frac{1}{2} A^{22} (P \cdot P)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

A derivada covariante é $D_\tau X_i^M = \partial_\tau X_i^M - \varepsilon_{ik} A^{kl} X_l^M$ ($i, j, k, l = 1, 2$). Este sistema é não-trivial somente se a métrica plana η_{MN} tem assinatura $(d, 2)$: $\eta_{MN} = (-1, -1, 1, \dots, 1)$. As coordenadas canonicamente conjugadas são $(X_1^M, X_2^M) = (X^M, P^M)$.

A simetria de gauge $Sp(2)$ atua do seguinte modo:

$$\delta_\omega X_i^M(\tau) = \varepsilon_{ij} \omega^{jk}(\tau) X_k^M, \quad (5.4)$$

sendo ω^{ij} uma matriz simétrica com três parâmetros locais, e ε_{ij} é o símbolo de Levi-Civita, invariante sob atuação da simetria $Sp(2)$. Os três campos de gauge $A^{ij} = (A^{11}, A^{12}, A^{22})$ são simétricos nos índices i, j e transformam-se como

$$\delta_\omega A^{ij} = \partial_i \omega^{ij} + \omega^{ik} \varepsilon_{kl} A^{lj} + \omega^{jk} \varepsilon_{kl} A^{il}. \quad (5.5)$$

As equações de movimento de Euler-Lagrange para as variáveis $X_i^M = (X^M, P^M)$ são

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^M \\ \dot{P}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{12} & A^{22} \\ -A^{11} & -A^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^M \\ P^M \end{pmatrix}, \quad (5.6a)$$

e para os campos de gauge, são os vínculos de primeira classe:

$$\begin{aligned} X \cdot X &= 0, \\ X \cdot P &= 0, \\ P \cdot P &= 0. \end{aligned} \quad (5.6b)$$

No mínimo duas dimensões tipo-tempo são necessárias para obtermos soluções não triviais para os vínculos, isto é, a teoria existe se, e somente, se a métrica tiver assinatura $(d, 2)$.

Se tivéssemos considerado apenas um parâmetro, ω^{22} , para a simetria de gauge $Sp(2)$, isto é, considerado um subgrupo de $Sp(2)$ com um único campo de gauge A^{22} , a ação resultante seria a da partícula relativística com massa nula. Assim, ω^{22} está relacionado à invariância por reparametrização.

A ação (5.3) possui a simetria global manifesta $SO(d, 2)$ que é subgrupo do grupo $ISO(d, 2)$: $ISO(d, 2) = SO(d, 2) \oplus T_{d+2}$, onde T_{d+2} indica translação no espaço-tempo de $(d+2)$ dimensões. Para caracterizar mais precisamente a relação entre o grupo $SO(d, 2)$ e o grupo conforme, devemos notar que a álgebra dos geradores do grupo conforme é isomorfa à álgebra dos geradores do grupo $SO(d, 2)$.

O grupo de Poincaré $ISO(d-1, 1) = SO(d-1, 1) \oplus T_d$ é subgrupo do grupo conforme porque deixa a métrica invariante. No espaço de Minkowski, o grupo de Poincaré atua linearmente, não é o caso do grupo conforme que precisa de um espaço maior, com $(d+2)$

dimensões para atuar linearmente, como já havia sido observado por Barut e Raczka [28]. Por isso, a simetria $SO(d,2)$ é manifesta na ação (5.3).

A ação (5.3) possui dois termos, os vínculos $X^M X_M$ e $X^M P_M$, que a impede de ser invariante pela simetria de translação $X^M \rightarrow X^M + \varepsilon^M$ em $(d+2)$ dimensões. Porém, como o grupo de Poincaré, $SO(d-1,1) \oplus T_d$, é subgrupo de $SO(d,2)$, a ação possui simetria de translação em d dimensões.

5.2) Partícula Relativística e Oscilador Harmônico

O grupo de gauge $Sp(2)$ tem três parâmetros livres. Iremos fazer três escolhas que eliminarão os graus de liberdade de gauge da ação (5.3), fornecendo a partícula relativística na forma frente de onda.

Consideremos a decomposição $X^M = (X^{+'}, X^{-'}, X^+, X^-, X^i)$ e a métrica $\eta^{+'-'} = \eta^{+-} = -1$, $\eta^{ij} = \delta^{ij}$, ($i=1, 2, \dots, d$). As escolhas de gauge para a partícula relativística são: $X^{+'} = 1, P^{+'} = 0, X^+ = \tau$, chamadas *gauge da partícula*. Note que ambas as coordenadas temporais estão sendo fixadas. Substituindo as escolhas de gauge nos vínculos (5.6b) e resolvendo-os em termos dos graus de liberdade independentes $x^-, p^+, \vec{x}, \vec{p}$, obtemos

$$\begin{aligned} X^{+'} &= 1, & X^{-'} &= \left(\frac{\vec{x}^2}{2} - \tau \cdot x^- \right), & x^+ &= \tau, \\ P^{+'} &= 0, & P^{-'} &= \vec{x} \cdot \vec{p} - x^- p^+ - \frac{\tau \vec{p}^2}{2p^+}, & p^- &= \frac{\vec{p}^2}{2p^+}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Inserindo estes resultados na ação (5.3), encontramos

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau X^{+'} P^{+'} \eta_{MN} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\vec{x} \cdot \vec{p} - x^- p^+ - \frac{\vec{p}^2}{2p^+} \right), \quad (5.8)$$

que é a ação efetiva para a partícula relativística com massa nula na forma frente de onda

em um espaço-tempo com d dimensões. A Hamiltoniana, $p^- = \frac{\vec{p}^2}{2p^+}$, está correta;

obtivemos-na em (4.23) como a projeção do momento p^μ sobre a direção perpendicular à superfície de evolução, $x^+ = \tau$.

Nesta abordagem não-covariante da partícula relativística, após escolher o gauge e substituí-los nos vínculos, antes de resolvê-los ao nível clássico, quantizamos os graus de liberdade remanescentes. Lembrando (5.7), realizaremos, em $\tau = 0$, a quantização canônica dos graus de liberdade físicos:

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij}, \quad [x^-, p^+] = i\eta^{+-} = -i, \quad (5.9)$$

sendo,

$$x^+ = 0, \quad X^{+'} = 1, \quad P^{+'} = 0, \quad (5.10)$$

as escolhas de gauge e,

$$p^- = \frac{\vec{p}^2}{2p^+}, \quad P^{-'} = (\vec{x} \cdot \vec{p} - x^- p^+), \quad X^{-'} = \frac{x^-}{2}, \quad (5.11)$$

operadores dependentes das variáveis físicas e que devem ser expressos em termos delas nos observáveis da teoria.

Os geradores do grupo $SO(d,2)$, (5.2), são independentes do gauge e comutam com os geradores do grupo $Sp(2)$. Portanto, podem ser expressos em qualquer gauge, desde que sejam hermitianos e satisfaçam a álgebra do grupo $SO(d,2)$ na teoria quântica, ou seja, à regra de quantização para os geradores desse grupo:

$$[L^{MN}, L^{RS}] = i\eta_{MR}L_{NS} + i\eta_{NS}L_{MR} - i\eta_{NR}L_{MS} - i\eta_{MS}L_{NR} \quad (5.12)$$

Substituindo nossa escolha de gauge (5.9, 10) em (5.2), obtemos os geradores da álgebra de Lorentz $L^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
L^{ij} &= x^i p^j - x^j p^i, & L^{+i} &= -x^i p^+, & L^{-i} &= x^- p^i - \frac{p^j x^i p^j}{2p^+}, \\
L^{+-} &= -\frac{1}{2}(x^- p^+ + p^+ x^-). & & & & (5.13a)
\end{aligned}$$

Depois, os geradores de translações P_μ

$$L^{++} = p^+, \quad L^{+-} = \frac{\vec{p}^2}{2p^+}, \quad L^{+i} = p^i, \quad (5.13b)$$

como também o operador dilatação D

$$L^{+-} = \frac{1}{2}(\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{x} - x^- p^+ - p^+ x^-), \quad (5.13c)$$

e os geradores das transformações conformes especiais K^μ

$$\begin{aligned}
L^{-+} &= \frac{1}{2} \vec{x}^2 p^+, & L^{-i} &= \frac{1}{8p^+}(\vec{x}^2 \vec{p}^2 + \vec{p}^2 \vec{x}^2 - 2\alpha) - \frac{x^-}{2}(\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{x}) + x^- p^+ x^-, \\
L^{-i} &= \frac{1}{2} x^j p^i x^j - \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \vec{p} x^i - \frac{1}{2} x^i \vec{p} \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} x^i (x^- p^+ + p^+ x^-). & & (5.13d)
\end{aligned}$$

Os operadores L^{MN} foram ordenados de forma a assegurar sua hermiticidade. Com isso, foi possível fixar todas as constantes que surgiram no ordenamento, exceto o parâmetro α que surgiu no gerador de transformações conformes especiais L^{-i} . Podemos fixá-lo exigindo que satisfaçam à regra de comutação para os geradores do grupo $SO(d,2)$, equação (5.12). Em particular,

$$[L^{-i}, L^{-j}] = i\delta^{ij} L^{-+}, \quad (5.14)$$

portanto,

$$\alpha = -1.$$

Observe que um dos geradores de translações, $L^{+-} = \frac{\vec{p}^2}{2p^+}$, é a Hamiltoniana da partícula relativística na forma frente de onda em (d-1) dimensões e, a soma deste gerador de translações com um dos geradores das transformações conformes especiais, $L^{-+} = \frac{1}{2} \vec{x}^2 p^+$, fornece a Hamiltoniana do oscilador harmônico em (d-2) dimensões:

$$H = L^{+-} + L^{-+} = \frac{\vec{p}^2}{2p^+} + \frac{1}{2} p^+ \vec{x}^2. \quad (5.15)$$

Veremos como relacionar essas duas interpretações.

O espaço de Hilbert da partícula livre é construído diagonalizando os operadores

$$p^+ = L^{++}, \quad \vec{p} = L^{+i}.$$

Os autoestados do momento

$$|p^+, \vec{p}\rangle,$$

formam um espaço de Hilbert completo. Sobre este espaço, a Hamiltoniana da partícula relativística,

$$L^{+-} = \frac{\vec{p}^2}{2p^+},$$

é diagonal. Esses estados de norma positiva formam uma base para a representação, (5.13), dos geradores do grupo $SO(d,2)$, que é uma representação unitária.

Para construir o espaço de Hilbert do oscilador harmônico, deve-se escolher uma base de $SO(d,2)$ na qual os seguintes operadores comutantes sejam simultaneamente diagonais:

$$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i \quad \text{momento angular orbital } SO(d,2),$$

$$L^{++} = p^+ \quad \text{momento linear no cone de luz},$$

$$L^{+-} + L^{-+} = \frac{\vec{p}^2}{2p^+} + \frac{1}{2} p^+ \vec{x}^2, \quad \text{Hamiltoniana do oscilador harmônico em (d-2) dimensões.}$$

O passo posterior realizado em [5] foi relacionar o número quântico n que aparece no espectro do oscilador:

$$E_n = n + \frac{1}{2}(d-2),$$

e os números quânticos associados ao momento angular orbital, com o espaço de representação do grupo $SO(d,2)$. Isto foi feito classificando o espaço de representação deste grupo com a representação dos subgrupos $SO(d-2) \otimes SO(2,2)$, por intermédio da decomposição: $SO(2,2) = SL(2,R)_L \otimes SL(2,R)_R$. Não iremos nos estender sobre essa decomposição que está discutida em [5]. Basta saber que Bars mostrou que a Hamiltoniana do oscilador harmônico é o gerador compacto de $SL(2,R)_R$ e que o espectro de energia do oscilador harmônico está associado a uma série de estados, $|j_R, m_R\rangle$, que correspondem à representação de $SL(2,R)_R$. Para cada número quântico, ℓ , associado ao momento angular orbital $SO(d-2)$, Bars encontrou uma relação entre j_R, j_L e ℓ , sendo que j_L corresponde aos estados $|j_L, m_L\rangle$, associados à representação de $SL(2,R)_L$.

5.3) Átomo de Hidrogênio

O átomo de hidrogênio corresponde a uma outra escolha de gauge, mais complicada e com uma base diferente: $X^M = (X^{0'}, X^0, X^I)$ e $P^M = (P^{0'}, P^0, P^I)$. Desta vez, estamos na *forma instante*, com métrica: $\eta^{00'} = \eta^{00} = -1$, $\eta^{IJ} = \delta^{IJ}$, sendo $I=[1', i]$ e $I=1'$ denota uma dimensão espacial extra, relativamente às coordenadas espaciais ordinárias $i=[1, 2, \dots, (d-1)]$. A primeira escolha de gauge que trataremos expressa as quatro funções, $X^{0'}, X^0, P^{0'}, P^0$ em termos de outras três, F, G, u ,

$$X^{0'} = F \cos u, \quad X^0 = F \sin u, \quad P^{0'} = -G \sin u, \quad P^0 = G \cos u. \quad (5.16)$$

Substituindo estas escolhas nos vínculos (5.6b), resulta

$$\begin{aligned} X^M &= F[\cos u, \sin u, n^I], \\ P^M &= G[-\sin u, \cos u, m^I], \end{aligned} \quad (5.17)$$

sendo os vetores n^I, m^I , ortonormais e euclidianos:

$$n^I = \left[-\frac{1}{\alpha} \sqrt{-2H} \vec{r} \cdot \vec{p}, \left(\frac{1}{r} r^i - \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\alpha} p^i \right) \right],$$

$$m^I = \left[\left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}^2}{\alpha} \right), \sqrt{-2H} \frac{r}{\alpha} p^i \right], \quad n^I n^I = m^I m^I = 1, \quad n^I m^I = 0, \quad (5.18)$$

onde $H = \frac{\vec{p}^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$, é a Hamiltoniana do átomo de hidrogênio. Esta escolha de coordenadas é muito particular, mas não implica numa escolha de gauge, ainda restam duas:

Segunda escolha de gauge: $GF = \frac{\alpha}{\sqrt{-2H}}. \quad (5.19)$

Terceira escolha de gauge: $u(\tau) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau d\tau' \left(\vec{r} \cdot \vec{p} \partial_{\tau'} \sqrt{-2H} + H \sqrt{-2H} \right), \quad (5.20)$

a última escolha de gauge está relacionada ao parâmetro de evolução.

Substituindo a primeira escolha de gauge (5.18) na ação original (5.3), resulta

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{X}_1^M X_2^N \eta_{MN} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau GF (-\partial_\tau u + m^I \partial_\tau n^I). \quad (5.21)$$

Substituindo a segunda e terceira escolhas de gauge na equação acima, obtemos (após eliminar uma derivada total),

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\vec{r} \cdot \vec{p} - \frac{\vec{p}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \right), \quad (5.22)$$

a ação não-relativística para o átomo de hidrogênio em $(d-1)$ dimensões espaciais.

5.4) Hamiltoniana Arbitrária e Spin 1/2.

A generalização da teoria com dois tempos com a inclusão de variáveis fermiônicas no espaço de fase foi realizada em [6] com a consideração do grupo de gauge $OSp(1|2)$, em lugar do grupo simplético $Sp(2)$. Consideremos o grupo de gauge $OSp(1|2)$ para o qual o tripleto $\Phi_a^M = (\psi^M, X_1^M, X_2^M)$, transforma-se como

$$\delta\psi^M = s^i X_i^M, \quad \delta X_i^M = \varepsilon_{ik} (\omega^{kl} \varepsilon X_l^M - i s^k \psi^M). \quad (5.23)$$

Para cada ponto do espaço-tempo com $(d+2)$ dimensões, ψ^M transforma-se como um singlete do grupo $Sp(2, \mathbb{R})$, enquanto X_i^M , como um duplete, como no caso com spin zero.

O grupo $OSp(1|2)$ tem três parâmetros bosônicos locais $\omega^{ij}(\tau)$, como o grupo $Sp(2)$, e dois parâmetros fermiônicos $s^i(\tau)$ ($i=1, 2$). Associados a eles estão os três campos de gauge bosônicos $A^{ij}(\tau)$, e os dois fermiônicos $F^i(\tau)$. A transformação destes campos de gauge sob a ação do grupo $OSp(1|2)$ é

$$\begin{aligned} \delta A^{ij} &= \partial_\tau \omega^{ij} + \omega^{ik} \varepsilon_{kl} A^{lj} + \omega^{jk} \varepsilon_{kl} A^{il} - i s^i F^j - i s^j F^i \\ \delta F^i &= \partial_\tau s^i + \omega^{ik} \varepsilon_{kl} F^l - A^{ik} \varepsilon_{kl} s^l. \end{aligned} \quad (5.24)$$

A ação postulada para a teoria,

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [(D_\tau \Phi_a^M) g^{ab} \Phi_b^N \eta_{MN}] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [D_\tau X_i^M \varepsilon^{ij} X_j^N - i D_\tau \psi^M \psi^N] \eta_{MN} \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [X_1 \cdot X_2 + \frac{i}{2} \psi \cdot \dot{\psi} - \frac{1}{2} A^{ij} X_i \cdot X_j + i F^i X_i \cdot \psi], \end{aligned} \quad (5.25)$$

possui a simetria de gauge $OSp(1|2)$ e é manifestamente invariante pela atuação do grupo conforme $SO(d,2)$. Como no caso puramente bosônico, a ação (5.25) é definida em um

espaço-tempo com $(d+2)$ dimensões, permitindo a atuação linear do grupo conforme. Como lá, é imposto que a assinatura da métrica seja $(d,2)$ e, como consequência, obtemos vínculos com soluções não triviais.

As derivadas covariantes que aparecem na ação são

$$\begin{aligned} D_\tau X_i^M &= \dot{X}_i^M - \varepsilon_{ik} (A^{kl} X_l^M - iF^k \psi^M), \\ D_\tau \psi^M &= \dot{\psi}^M - F^i X_i^M, \end{aligned} \quad (5.26)$$

que sob a ação do grupo $OSp(1|2)$ transformam-se semelhantes ao tripleto

$\Phi_a^M = (\psi^M, X_1^M, X_2^M)$, na equação (5.23).

Os vínculos são obtidos a partir das equações de movimento dos campos de gauge. Temos três vínculos bosônicos e dois fermiônicos,

$$X_i^M X_{jM} = 0, \quad X_i^M \cdot \psi_M = 0. \quad (5.27)$$

A simetria $SO(d,2)$ possui, agora, além do gerador bosônico,

$$L^{MN} = X^M P^N - X^N P^M, \quad (5.28a)$$

também a parte fermiônica relacionada ao spin,

$$S^{MN} = \frac{1}{2i} (\psi^M \psi^N - \psi^N \psi^M), \quad (5.28b)$$

sendo o gerador total,

$$J^{MN} = L^{MN} + S^{MN}, \quad (5.29)$$

invariante sob a ação do grupo $OSp(1|2)$.

A partir da ação (5.25), obtemos os pares canônicos,

$$(X^M, P^M) \quad \text{e} \quad \left(\psi^M, \frac{i}{2} \psi^M \right). \quad (5.30)$$

Neste último par, o momento é um vínculo de segunda classe, então, os comutadores usados na quantização canônica da teoria são

$$[X^M, P^N] = i\eta^{MN}, \quad [\psi^M, \psi^N] = \eta^{MN}. \quad (5.31)$$

Iremos realizar uma escolha de gauge que, no setor bosônico, é semelhante à do átomo de hidrogênio da seção anterior, mas que corresponde à solução mais geral que pode ser obtida para os vínculos da teoria, (5.27). Ou seja, uma escolha de gauge que corresponde a um sistema físico com Hamiltoniana efetiva arbitrária e spin $\frac{1}{2}$.

Consideremos a decomposição $X^M = (X^{0'}, X^0, X^I)$ e $P^M = (P^{0'}, P^0, P^I)$. Como no caso do átomo de hidrogênio, estamos na *forma instante*, com métrica: $\eta^{0'0'} = \eta^{00} = -1$, $\eta^{IJ} = \delta^{IJ}$, sendo $I=[1', i]$ e $I=1'$ denota uma dimensão espacial extra em relação às coordenadas espaciais ordinárias $i=[1, 2, \dots, (d-1)]$.

A primeira escolha de gauge bosônica

$$\begin{aligned} X^{0'} &= F \cos u, & X^0 &= F \sin u, \\ P^{0'} &= -G \sin u, & P^0 &= G \cos u, \end{aligned} \quad (5.32)$$

expressa quatro funções em termos de outras três. Substituindo (5.32) em (5.27), obtemos

$$\begin{aligned} X^M &= F[\cos u, \sin u, n^I], \\ P^M &= G[-\sin u, \cos u, m^I], \\ \psi^M &= [\psi^0, \psi^{0'}, \psi^I], \end{aligned} \quad (5.33)$$

onde,

$$\begin{aligned} \psi^{0'} &= (n \cdot \psi) \cos u - (m \cdot \psi) \sin u, \\ \psi^0 &= (n \cdot \psi) \sin u + (m \cdot \psi) \cos u. \end{aligned}$$

Os vetores n^I e m^I são ortonormais, escritos com a seguinte parametrização

$$\begin{aligned}
n^i &= \left[\frac{1}{rV} \sqrt{-2H} (\vec{r} \cdot \vec{p}), \left(\frac{1}{r} r^i + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{rV} p^i \right) \right], \\
m^i &= \left[\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{V} \right), -\sqrt{-2H} \frac{1}{V} p^i \right], \quad n^i n^i = m^i m^i = 1, \quad n^i m^i = 0.
\end{aligned}
\tag{5.34}$$

Escolhemos uma parametrização em que H seja uma Hamiltoniana arbitrária

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2} + V(\vec{r}, \vec{p}, \psi). \tag{5.35}$$

Esta é a solução mais geral para os vínculos (5.27) da teoria. A parametrização (5.34) não corresponde a uma escolha de gauge, ainda restam duas.

Substituindo a primeira escolha de gauge (5.32) e a parametrização (5.34) na ação original (5.25), obtemos

$$\begin{aligned}
S_0 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ -FG(\partial_\tau u - m^i \partial_\tau n^i) + \frac{i}{2} \psi' \partial_\tau \psi' - \frac{i}{2} [(m \cdot \psi)(n \cdot \psi) + (m \cdot \psi) \partial_\tau (m \cdot \psi)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2} [(n \cdot \psi) \partial_\tau (n \cdot \psi) + (m \cdot \psi) \partial_\tau (m \cdot \psi)] \right\}
\end{aligned}
\tag{5.36}$$

Faremos, agora, as outras duas escolhas que eliminarão a invariância de gauge bosônica:

A segunda escolha de gauge bosônica

$$FG = -\frac{rV}{\sqrt{-2H}}, \tag{5.37}$$

induz o aparecimento do termo $\vec{r} \cdot \vec{p}$ na ação efetiva, garantindo que o momento, $\vec{p}$, será o canônico conjugado do vetor posição $\vec{r}$.

Na terceira escolha de gauge bosônica

$$u(\tau) = -\int d\tau' \left[(H + Q) \frac{\sqrt{-2H}}{rV} \right], \tag{5.38}$$

Q depende da escolha abaixo

$$\left[1 - \frac{i}{2}[(m \cdot \psi)(n \cdot \psi) \frac{\sqrt{-2H}}{rV}]\right] Q = \vec{r} \cdot \vec{p} \partial_\tau (\ln \sqrt{-2H}) + \frac{i}{2}[(m \cdot \psi)(n \cdot \psi) - (n \cdot \psi)(m \cdot \psi)] \frac{\sqrt{-2H}}{rV} H + \\ + \frac{i}{2} \psi'^I \partial_\tau \psi'^I - \frac{i}{2}[(n \cdot \psi) \partial_\tau (n \cdot \psi) + (m \cdot \psi) \partial_\tau (m \cdot \psi)]. \quad (5.39)$$

Esta escolha complexa assegura que o único termo, na ação, contendo $\dot{\vec{\psi}}$ é da forma

$\frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}} \cdot \dot{\vec{\psi}}$. Além disso, da definição (5.34), usamos que

$$m^I \partial_\tau n^I = -\frac{\sqrt{-2H}}{rV} [\vec{r} \cdot \vec{p} \partial_\tau (\ln \sqrt{-2H}) - \partial_\tau (\vec{r} \cdot \vec{p}) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p}],$$

em (5.36). Resta fazer a *escolha de gauge fermiônica* que deve simplificar (5.39). Podemos tomar

$$\psi'^I = -m \cdot \psi = -\frac{\vec{p} \cdot \vec{\psi}}{\sqrt{-2H}}, \quad n \cdot \psi = \frac{\vec{\psi} \cdot \vec{r}}{r}. \quad (5.40)$$

De tal modo que a Hamiltoniana arbitrária não-relativística (5.35), aparece na ação efetiva

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}} \cdot \dot{\vec{\psi}} - \frac{\vec{p}^2}{2} - V(\vec{r}, \vec{p}, S^{ij}) \right). \quad (5.41)$$

Esta ação efetiva, obtida a partir das escolhas de gauge (5.32, 37, 38, 40), mostra que $(\vec{r}, \vec{p})$, $\vec{\psi}$, são as variáveis do espaço de fase restrito. A ação efetiva (5.36), em $(d-1)$ dimensões espaciais, possui simetria dinâmica $SO(d)$. Em particular, quando o potencial

tem a forma $V = -\frac{\alpha}{r}$, temos o átomo de hidrogênio, (5.22), agora, porém, com spin $\frac{1}{2}$.

Então a restrição a ser imposta sobre o potencial e, consequentemente, sobre a Hamiltoniana é a invariância por rotação, de modo que o potencial em (5.41) deve ter a seguinte forma

$$V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{S}) = V(r^2, p^2, \vec{S}).$$

Esta restrição não havia sido imposta em [6]. Os sistemas físicos obtidos anteriormente, partícula livre, oscilador harmônico e átomo de hidrogênio, obedecem essa invariância.

5.5) Quantização BRST-BFV

Na seção anterior definimos a ação proposta em [4], [5] para $(d+2)$ dimensões espaço-temporais

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (D_\tau X_i^M) \varepsilon^{ij} X_j^N \eta_{MN} \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [X^M P_M - \frac{1}{2} A^1 (X^M X_M) - A^2 (X^M P_M) - \frac{1}{2} A^3 (P^M P_M)]
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Os vínculos de primeira classe,

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -\frac{1}{2} (X^M X_M), \\
 \varphi_2 &= -(X^M P_M), & \varphi_a &= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\
 \varphi_3 &= -\frac{1}{2} (P^M P_M),
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

obedecem à álgebra:

$$\begin{aligned}
 C_{12}^1 &= 2 = -C_{21}^1, \\
 \{\varphi_a, \varphi_b\} &= C_{ab}^c \varphi_c, & C_{13}^2 &= 1 = -C_{31}^2, \\
 C_{23}^3 &= 2 = -C_{32}^3.
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Realizaremos, nesta seção, a quantização por integrais de trajetória desta teoria à luz do formalismo BRST-BFV. Mostraremos como podemos obter a partícula relativística, o oscilador harmônico e o átomo de hidrogênio, encontrados em [4] e [5]. Para a partícula relativística e o oscilador harmônico, a escolha de gauge é única, denominada “gauge da partícula”. O átomo de hidrogênio foi obtido em [5] para uma outra escolha de gauge. No entanto, após a fixação de gauge, somente para a partícula relativística foi obtida uma ação efetiva. Para os outros dois sistemas físicos, a Hamiltoniana efetiva foi encontrada escolhendo um gerador do grupo $SO(d,2)$, no caso do átomo de hidrogênio, e uma soma de dois geradores do mesmo grupo, no caso do oscilador harmônico. Em [6], em uma *mesma* escolha de gauge, não trivial e diferente das anteriores, é encontrada uma ação efetiva não

relativística para um sistema físico com Hamiltoniana arbitrária em $(d-1)$ dimensões espaciais. Mostraremos com obter, tanto a ação efetiva com Hamiltoniana não-relativística arbitrária em $(d-1)$ dimensões espaciais, quanto a ação efetiva para a partícula relativística em d dimensões espaço-temporais, *a partir de uma mesma escolha de gauge, o gauge da partícula*. Como observamos no final da seção anterior, a arbitrariedade da Hamiltoniana é restringida por uma simetria de rotação no espaço.

Introduzimos o formalismo BFMV estendendo o espaço de fase inicial conforme prescrito na seção (3.3)

$$(X^M, P_M) \rightarrow (X^M, P_M) \oplus (A^a, \Pi_a) \oplus (\eta^a, \wp_a).$$

Além disso, precisamos da carga BRST definida em (3.32). Podemos construí-la introduzindo os vínculos da teoria (5.2), as constantes de estrutura de sua álgebra (5.3) e os momentos canonicamente conjugados aos campos de gauge A^a , que são impostos como novos vínculos (primeira classe) da teoria

$$\Pi_a \approx 0.$$

Então, a carga é

$$Q = \int d\tau [\eta_a \varphi_a + i \wp_a \Pi_a + \frac{i}{2} \eta_b \eta_c C_{bc}^a \bar{\wp}_a]. \quad (5.45)$$

A carga BRST induz as seguintes transformações nas variáveis do espaço de fase estendido:

$$\begin{aligned} \delta X^M &= -\eta_2 X^M - 2\eta_3 P^M, & \delta \bar{\eta}_a &= -i\Pi_a, \\ \delta P^M &= 2\eta_1 X^M + \eta_2 P^M, & \delta \wp_a &= 0, \\ \delta A_a &= -\wp_a, & \delta \eta_a &= -\frac{i}{2} \eta_b \eta_c C_{bc}^a, \\ \delta \Pi_a &= 0, & \delta \bar{\wp}_a &= -\varphi_a - iC_{ac}^d \eta_c \bar{\wp}_d. \end{aligned} \quad (5.46)$$

O formalismo BFV garante que a amplitude de transição da teoria é independente da escolha que fazemos para a função fermiônica fixadora de gauge. Por conveniência, vamos construí-la da seguinte forma

$$\Psi = \frac{i}{\varepsilon} f^a \bar{\eta}_a + A^{a''} \bar{\wp}_{a''}, \quad a''=1,3. \quad (5.47)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} f^1 &= X^{+'} - 1, \\ f^2 &= P^{-'} - \frac{A^2}{A^3} + \frac{F(x^\mu, p_\mu)}{A^3 P^{+'}}, \end{aligned} \quad (5.47')$$

f^3 a ser escolhida posteriormente.

Antes de construir a amplitude de transição, precisamos calcular o colchete de Poisson da carga BRST com a função fermiônica escrita acima,

$$\begin{aligned} \delta\Psi = \{Q, \Psi\} &= -A^{a''} \wp_{a''} - A^1 (2\bar{\wp}_1 \eta_2 + \bar{\wp}_2 \eta_3) + A^3 (\bar{\wp}_2 \eta_1 + 2\bar{\wp}_3 \eta_2) - \frac{1}{\varepsilon} f^a \Pi_a + \\ &+ \frac{i}{\varepsilon} (X^{+'} \eta_2 + P^{+'} \eta_3) \bar{\eta}_1 - \frac{i}{\varepsilon} (X^{-'} \eta_1 + P^{-'} \eta_2) \bar{\eta}_2 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\wp_3}{(A^3)^2} (A^2 + \frac{F}{P^{+'}}) \bar{\eta}_2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\wp_2 \bar{\eta}_2}{A^3} - \\ &- \frac{i}{\varepsilon} \frac{\delta F}{A^3 P^{+'}} \bar{\eta}_2 - \frac{iF}{\varepsilon \cdot A^3} \frac{(X^{+'} \eta_1 + P^{+'} \eta_2)}{(P^{+'})^2} \bar{\eta}_2 + \frac{i}{\varepsilon} \delta f^3 \bar{\eta}_3 + i \wp_{a''} \bar{\wp}_{a''} \end{aligned}$$

Agora, a ação efetiva sobre todo o espaço de fase estendido já pode ser construída

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [X^M \dot{P}_M + \dot{A}^a \Pi_a + \dot{\eta}_a \bar{\wp}_a + \dot{\bar{\eta}}_a \wp_a - \{Q, \Psi\}] \quad (5.48)$$

Após as transformações de variáveis, $\Pi_a \rightarrow \varepsilon \cdot \Pi_a$, $\bar{\eta}_a \rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}_a$, serem realizadas, faremos ε se anular. O jacobiano é trivial e as transformações acima são compatíveis com as transformações BRST (5.46). Então, a amplitude de transição, após a integração em Π_a é dada por

$$Z = \int D\mu \cdot \delta(f^a) \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{X}^M P_M + \dot{\eta}_a \bar{\wp}_a + A^1 \varphi_1 + A^3 \varphi_3 + A^1 (2\bar{\wp}_1 \eta_2 + \bar{\wp}_2 \eta_3) - \\ - A^3 (\bar{\wp}_2 \eta_1 + 2\bar{\wp}_3 \eta_2) - i(X^{+'} \eta_2 + P^{+'} \eta_3) \bar{\eta}_1 + i(X^{-'} \eta_1 + P^{-'} \eta_2) \bar{\eta}_2 + \frac{\wp_3}{(A^3)^2} (A^2 + \frac{F}{P^{+'}}) \bar{\eta}_2 + \\ + \frac{\wp_2 \bar{\eta}_2}{A^3} + i \frac{\delta F}{A^3 P^{+'}} \bar{\eta}_2 + i \frac{F}{A^3} \frac{(X^{+'} \eta_1 + P^{+'} \eta_2)}{(P^{+'})^2} \bar{\eta}_2 - i \delta f^3 \bar{\eta}_3 - i \wp_{a''} \bar{\wp}_{a''}]$$

Integrando a segunda componente do momento fermiônico, obtemos na medida a delta de Dirac $\delta(\frac{\bar{\eta}_2}{A^3}) = (\det A^3)^{-1} \delta(\bar{\eta}_2)$; integrando $\bar{\eta}_2$ e depois as primeiras e terceiras componentes dos momentos fantasmas e antifantasmas fermiônicos, obtemos

$$Z = \int D\mu^I \delta(f^3) \delta(X^{+'} - 1) \delta(P^{-'} - \frac{A^2}{A^3} + \frac{F}{A^3 P^{+'}}) (\det A^3)^{-1} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [-\dot{X}^{+'} P^{-'} - \dot{X}^{-'} P^{+'} + \dot{x}^\mu p_\mu + \\ + A^1 (X^{+'} X^{-'}) - \frac{1}{2} A^1 (x^\mu x_\mu) + A^3 (P^{+'} P^{-'}) - \frac{1}{2} A^3 (p_\mu p^\mu) + \eta^2 \bar{\wp}_2 + A^1 \bar{\wp}_2 \eta^3 - A^3 \bar{\wp}_2 \eta_1 - \\ - i(X^{+'} \eta_2 + P^{+'} \eta_3) \bar{\eta}_1 - i \delta f^3 \bar{\eta}_3]$$

Sendo $D\mu^I = DX^M DP_M DA^a D\eta_a D\bar{\wp}_2 D\bar{\eta}_1 D\bar{\eta}_3 D\bar{\wp}_2$. Observe na medida a primeira escolha de gauge: $\delta(X^{+'} - 1)$. Ao integrar $X^{+'}$ e $P^{-'}$, há uma quebra da simetria $SO(d,2)$:

$$Z = \int D\mu^{II} \delta(f^3) (\det A^3)^{-1} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [-\dot{X}^{-'} P^{+'} + \dot{x}^\mu p_\mu + A^1 X^{-'} - \frac{1}{2} A^1 (x^\mu x_\mu) + \\ + A^2 P^{+'} - F - \frac{1}{2} A^3 (p_\mu p^\mu) + \eta_2 \bar{\wp}_2 + A^1 \bar{\wp}_2 \eta_3 - A^3 \bar{\wp}_2 \eta_1 - i \eta_2 \bar{\eta}_1 - i P^{+'} \eta_3 \bar{\eta}_1 - i \delta f^3 \bar{\eta}_3]$$

Integrando A^2 obtemos a segunda escolha de gauge: $\delta(P^{+'})$, integrando $P^{+'}$ e $\bar{\eta}_1$, obtemos $\delta(\eta_2)$. Integrando o argumento da delta de Dirac, eliminamo-lo. Integrando na seguinte ordem: $X^{-'}$, A^1 e a segunda componente do momento antifantasma fermiônico, cancelamos o determinante que está na medida:

$$(\det A^3)^{-1} \delta(A^3 \eta_1) = \delta(\eta_1) .$$

Após a integração em η_1 , temos

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu DA^3 D\eta_3 D\bar{\eta}_3 \delta(f^3) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [x^\mu p_\mu - F(x^\mu, p^\mu) - \frac{1}{2} A^3(p_\mu p^\mu) - i \delta f^3 \bar{\eta}_3] \quad (5.49)$$

A escolha de terceira condição de gauge f^3 , define as formas da dinâmica

$$\begin{aligned} f^3 = x^0 - \xi \cdot \tau & \rightarrow \text{forma instante,} \\ f^3 = x^+ - \tau & \rightarrow \text{forma frente de onda,} \\ f^3 = \rho - \xi \cdot \tau & \rightarrow \text{forma pontual.} \end{aligned}$$

5.5.1) Forma Instante

A transformação BRST da função que define a forma instante, f^3 , aparece no integrando de (5.49)

$$\delta f^3 \bar{\eta}_3 = (x^0 \eta_2 + p^0 \eta_3) \bar{\eta}_3.$$

Porém, η_2 já foi corretamente eliminado. Ao integrar η_3 e $\bar{\eta}_3$, eliminamos todas variáveis fermiônicas da amplitude de transição

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu DA^3 \delta(f^3) (\det p^0) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [x^\mu p_\mu - F(x^\mu, p^\mu) - \frac{1}{2} A^3(p_\mu p^\mu)] \quad (5.50)$$

1) Partícula Relativística

Após integrar o campo de gauge remanescente, A^3 , obtemos

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu \delta(x^0 - \xi \cdot \tau) \delta\left[\frac{(p^0)^2 - \vec{p}^2}{2}\right] (\det p^0) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [x^\mu \dot{p}_\mu - F(x^\mu, p^\mu)].$$

A fim de obter a partícula relativística, devemos impor

$$F = 0.$$

(Isto é permitido por causa da liberdade na escolha de Ψ , e conseqüentemente de F , concedida pelo formalismo BfV), fixar o terceiro gauge,

$$x^0 = \xi \cdot \tau,$$

integrar p^0 usando a seguinte propriedade da delta de Dirac,

$$\begin{aligned} \delta\left[(p^0)^2 - \vec{p}^2\right] \cdot (\det p^0) &= (\det p^0) \cdot \frac{\delta\left[p^0 - \left(\vec{p}^2\right)^{1/2}\right]}{\left|\det\left[2\left(\vec{p}^2\right)^{1/2}\right]\right|} + \frac{\delta\left[p^0 + \left(\vec{p}^2\right)^{1/2}\right]}{\left|\det\left[-2\left(\vec{p}^2\right)^{1/2}\right]\right|} \\ &= \left|\det\left(\frac{p^0}{2(\vec{p}^2)^{1/2}}\right)\right| \delta\left[p^0 - (\vec{p}^2)^{1/2}\right] + \left|\det\left(\frac{p^0}{2(\vec{p}^2)^{1/2}}\right)\right| \delta\left[p^0 + (\vec{p}^2)^{1/2}\right], \end{aligned} \quad (5.51)$$

a fim de obter uma amplitude de transição com a medida de Liouville livre de qualquer condição de gauge

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \sqrt{\vec{p}^2}]. \quad (5.52)$$

Assim, encontramos a *amplitude de transição da partícula relativística com massa nula em d dimensões espaço-temporais na forma instante*.

Podemos mostrar que a amplitude de transição da partícula relativística na forma instante (gauge canônico e não covariante) tem a mesma expressão do gauge canônico. Partiremos da equação (5.49):

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu DA^3 D\eta_3 D\bar{\eta}_3 \delta(x^0 - \xi \cdot \tau) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{x}^\mu p_\mu - F(x^\mu, p^\mu) - \frac{1}{2} A^3 (p_\mu p^\mu) - ip^0 \eta_3 \bar{\eta}_3]$$

Integrando a componente temporal da coordenada e realizando a transformação de variáveis

$$x^\mu(\tau) = x_1^\mu + \frac{\Delta x^\mu}{\Delta \tau} (\tau - \tau_1) + y^\mu(\tau),$$

sendo $y^\mu(\tau_1) = y^\mu(\tau_2) = 0$, temos que a ação fica assim

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\xi \cdot p^0 - \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta \tau} \cdot \vec{p} - y^\mu p_\mu - \frac{1}{2} A^3 (p_0^2 - \vec{p}^2) + p^0 \eta_3 \bar{\eta}_3].$$

Integrando por partes o terceiro termo e depois integrando y^μ obtemos na medida $\delta(p^\mu)$.

A integração funcional no momento produz uma integral ordinária

$$Z = \int D\vec{x} DA^3 D\eta_3 D\bar{\eta}_3 \int d^D p \delta(x^0 - \xi \cdot \tau) \cdot \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ \xi \cdot p_0 - \vec{p} \cdot \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta \tau} - \frac{1}{2} A^3 [(p_0)^2 - \vec{p}^2] - ip^0 \eta_3 \bar{\eta}_3 \}$$

Reescreveremos $A^3(\tau)$ e $p_0(\tau)$ em termos de seus modos constantes e não constantes

$$A^3(\tau) = A^3(0) + A^{3'}(\tau), \quad \text{sendo } A^{3'}(0) = 0,$$

e,

$$p_0(\tau) = p_0(0) + p'_0(\tau), \quad \text{sendo } p'_0(0) = 0.$$

Então,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2} A^3(\tau) (p_0^2 - \vec{p}^2) \right] = \frac{1}{2} A^3(0) (p_0^2(0) - \vec{p}^2) \Delta\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2} A^{3'}(\tau) (p_0^2(\tau) - p_0^2(0)) \right]$$

Integrando $A^3(0)$, obtemos na medida

$$\frac{1}{p^\mu p_\mu},$$

integrando em $A^{3'}(\tau)$ obtemos a delta

$$\delta(p_0^2(\tau) - p_0^2(0)) = \frac{\delta(p_0(\tau) - p_0(0))}{2p_0(0)} + \frac{\delta(p_0(\tau) + p_0(0))}{2p_0(0)}.$$

A raiz positiva corresponde a $\xi = 1$, e a negativa a $\xi = -1$.

Integrando na componente temporal do momento, resulta que

$$Z = \int D\eta_3 D\bar{\eta}_3 \int d^D p \cdot \det[p^0(0)] \exp i[p_0(0)\Delta\tau - \vec{p} \cdot \Delta\vec{x} - i p_0(0) \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\eta_3 \bar{\eta}_3)]$$

Integrando no fantasmas remanescentes, o termo na medida contendo o determinante da componente temporal do momento é cancelado. Resulta que a amplitude de transição da partícula relativística na forma instante tem a mesma expressão que no gauge covariante

$$A^3 = 0:$$

$$Z = \int \frac{d^D p}{p^2} \cdot e^{-ip \cdot \Delta x}.$$

II) Hamiltoniana Arbitrária

Para obter uma Hamiltoniana efetiva arbitrária, escolhemos $F = H(\vec{x}, \vec{p}) - \xi \cdot p^0$ em (5.50) e integramos x^0

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} Dp^0 DA^3 (\det p^0) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - H(\vec{x}, \vec{p}) + \frac{1}{2} A^3 [(p^0)^2 - \vec{p}^2] \}$$

Utilizando, novamente, a mesma propriedade (5.51) da delta de Dirac, resulta que, após as integrações em A^3 e p^0 , a amplitude torna-se livre da componente temporal do momento,

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - H(\vec{x}, \vec{p}) \}, \quad (5.53)$$

e a ação possui uma *Hamiltoniana efetiva arbitrária em (d-1) dimensões espaciais*. Em particular, para

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\vec{x}^2}} = \frac{\vec{p}^2}{2} - \frac{\alpha}{r},$$

a Hamiltoniana têm o potencial de Coulomb caracterizando o átomo de hidrogênio

$$Z = \int D\vec{r} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - \frac{\vec{p}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \}. \quad (5.54)$$

Como em [5], o átomo de hidrogênio está em (d-1) dimensões espaciais.

Devemos observar que a teoria original possui invariância pelo grupo $SO(d,2)$, não havendo simetria de translação em (d+2) dimensões. Assim, há uma restrição a ser imposta na arbitrariedade da Hamiltoniana. Ela deve ser invariante por rotação, mas não necessariamente por translação. Assim, devemos quebrar a simetria original do seguinte modo

$$SO(d,2) \rightarrow SO(d-1).$$

Portanto, a Hamiltoniana que aparece em (5.51) deve ter a seguinte forma

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = H(\vec{x}^2, \vec{p}^2). \quad (5.55)$$

A partícula relativística, o oscilador harmônico e o átomo de hidrogênio obedecem a esta restrição.

5.5.2) Forma Frente de Onda

A forma frente de onda fornece a amplitude de transição com uma ação efetiva para cada um dos outros dois sistemas físicos encontrados em [4] e [5]: a partícula relativística “no cone de luz” e o oscilador harmônico. Nesta forma, implementamos a terceira escolha de gauge,

$$f^3 = x^+ - \tau, \quad \text{para a qual,} \quad \delta f^3 \bar{\eta}_3 = (x^+ \eta_2 + p^+ \eta_3) \bar{\eta}_3,$$

na amplitude de transição. Desde que η_2 já foi eliminado, podemos integrar os fantasmas $\eta_3, \bar{\eta}_3$ e o último campo de gauge que restou, A^3 , para obter na medida

$$(\det p^+) \delta(p^+ p^- - \vec{p}^2) = \delta(p^- - \frac{\vec{p}^2}{p^+}).$$

Agora, integramos p^- para obter

$$Z = \int Dx^- Dp^+ D\vec{x} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [-\dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{\vec{p}^2}{2p^+} - F(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p})] \quad (5.56)$$

I) Partícula Relativística

A partícula relativística é facilmente encontrada após impormos

$$F = 0,$$

em (5.54):

$$Z = \int Dx^- Dp^+ D\vec{x} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{\vec{p}^2}{2p^+}] \quad (5.57)$$

Esta é a *amplitude de transição da partícula relativística com massa nula em (d-1) dimensões espaciais na forma instante.*

II) Oscilador Harmônico

Se escolhermos $F = \frac{p^+ \omega^2 \vec{x}^2}{2}$, obtemos a amplitude de transição para o oscilador harmônico em (d-1) dimensões espaciais:

$$Z = \int Dx^- Dp^+ D\vec{x} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{\vec{p}^2}{2p^+} - \frac{p^+ \omega^2 \vec{x}^2}{2}]. \quad (5.58)$$

Observamos que aparece a componente do momento no cone de luz no lugar onde usualmente estaria a massa do oscilador. E o motivo pelo qual temos o sistema físico em (d-1) dimensões espaciais e não em (d-2), como em [5], é porque obtivemos sua ação canônica. Resulta que precisaríamos eliminar, por integração, x^- , que é a coordenada

canonicamente conjugada ao momento p^+ , para que a ação efetiva estivesse em $(d-2)$ dimensões do espaço. Em [4], [5] é mostrado como obter a Hamiltoniana do oscilador somando arbitrariamente um dos geradores de translação da álgebra de Poincaré $ISO(d-1,1)$ com um dos geradores das transformações conformes especiais.

A Hamiltoniana do oscilador é invariante por rotações em $(d-1)$ dimensões espaciais como pode ser visto a partir dos geradores de rotações na forma frente de onda, subseção (4.2.2)

III) Hamiltoniana Arbitrária

Podemos obter uma Hamiltoniana efetiva com potencial V arbitrário na forma frente de onda, se escolhermos $F = V(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p})$ em (5.56)

$$Z = \int Dx^- Dp^+ D\vec{x} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [-\dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{\vec{p}^2}{2p^+} - V(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p})]. \quad (5.59)$$

Esta amplitude de transição atua em uma espaço-tempo com d dimensões. E, a partir dos geradores de rotações em $(d-1)$ dimensões na forma frente de onda, concluímos que a Hamiltoniana (5.59) é invariante pelo grupo $SO(d-1)$ subgrupo de $SO(d,2)$, desde que as componentes espaciais sejam quadráticas

$$V(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p}) = V(x^-, \vec{x}^2, p^+, \vec{p}^2).$$

Temos a possibilidade de obter uma Hamiltoniana arbitrária em $(d-2)$ dimensões espaciais se eliminarmos x^- . Podemos fazê-lo, se escolhermos $F = H(\vec{x}, \vec{p}) - \frac{\vec{p}^2}{2p^+} - \frac{(p^+)^2}{\Delta\tau}$ em (5.54), integrarmos por partes o primeiro termo da ação e, depois, x^-

$$Z = \int Dp^+ D\vec{x} D\vec{p} \delta(p^+) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - H(\vec{x}, \vec{p}) + \frac{(p^+)^2}{\Delta\tau}]$$

Integrando p^+ , a integral funcional torna-se uma integral ordinária para a componente do momento no cone de luz

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} \left\{ \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - H(\vec{x}, \vec{p})] \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0^+ \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{(p_0^+)^2}{\Delta\tau} \right].$$

O resultado da integral ordinária é uma constante: $\int_{\tau_1}^{\tau_2} dp_0^+ \exp[i(p_0^+)^2] = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i).$

Absorvendo o fator constante, observamos que a amplitude de transição procurada,

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - H(\vec{x}, \vec{p})], \quad (5.60)$$

atua em $(d-2)$ dimensões espaciais. Para a Hamiltoniana ser invariante por rotações neste espaço com $(d-2)$ dimensões, devemos ter

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = H(\vec{x}^2, \vec{p}^2).$$

5.5.3) Forma Pontual

Podemos expressar a amplitude de transição (5.49) na forma pontual, escolhendo

$$f^3 = \rho - \xi \cdot \tau:$$

$$Z = \int D\xi^\mu Dp_{\xi\mu} DA^3 D\eta_3 D\bar{\eta}_3 \delta(\rho - \xi \cdot \tau) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\xi^\mu p_\mu - F(\xi^\mu, p_{\xi\mu}) - \frac{1}{2} A^3 (p_{\xi\mu} p^{\xi\mu}) - ip^\rho \eta_3 \bar{\eta}_3]$$

I) Partícula Relativística

Semelhantemente à forma instante, após integrar $\eta_3, \bar{\eta}_3$ e A^3 , fazemos uso da propriedade (5.51) da delta de Dirac, escolhemos $F=0$, e integramos a componente temporal do momento para obter a *partícula relativística com massa nula na forma pontual em $d=4$ dimensões espaço-temporais*

$$Z = \int D\vec{\xi} D\vec{p} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{p}_{\xi} - \sqrt{\vec{p}_{\xi}^2}].$$

II) Hamiltoniana Arbitrária

Seguindo o mesmo procedimento da forma instante, obtemos na amplitude de transição uma Hamiltoniana efetiva arbitrária em $(d-1=3)$ dimensões espaciais

$$Z = \int D\vec{\xi} D\vec{p}_{\xi} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{p}_{\xi} - H(\vec{\xi}, \vec{p}_{\xi})].$$

A Hamiltoniana deve ter a seguinte forma

$$H(\vec{\xi}, \vec{p}_{\xi}) = H(\vec{\xi}^2, \vec{p}_{\xi}^2),$$

ou seja, invariância por rotação no espaço tridimensional.

Mostramos então, que a partir da ação (5.3), definida em um espaço-tempo com $(d+2)$ dimensões com simetria de gauge $Sp(2)$ e simetria global manifesta $SO(d,2)$, podemos obter diferentes sistemas físicos em um espaço-tempo usual com uma única dimensão tipo-tempo. O gauge que implementa esses sistemas físicos é dado por

$$f^1 = X^{+'} - 1,$$

$$f^2 = P^{-'} - \frac{A^2}{A^3} + \frac{F(x^\mu, p_\mu)}{A^3 P^{+'}},$$

$$f^3 = x^0 - \xi \cdot \tau, x^+ - \tau \text{ ou } \rho - \tau.$$

A terceira escolha de gauge define a forma da dinâmica e, na segunda, a partir da função $F = F(x^\mu, p_\mu)$, encontramos o sistema físico desejado. Seja a partícula relativística com massa nula ou uma Hamiltoniana arbitrária invariante por rotação $SO(d-1)$.

5.6) Hamiltoniana Arbitrária e Spin N/2

Partindo de uma ação proposta por I. Bars [6] em um espaço-tempo com simetria de gauge $OSp(N|2)$ e simetria global manifesta $SO(d,2)$ em um espaço-tempo com $(d+2)$ dimensões, são dois os resultados importantes obtidos nesta seção: 1) amplitude de transição da partícula relativística com massa nula e supersimetria estendida em d dimensões espaço-temporais, segundo a formulação BRST-BFV; 2) amplitude de transição de um sistema físico com ação em $(d-1)$ dimensões espaciais, Hamiltoniana não-relativística arbitrária invariante por rotação $SO(d-1)$ e spin $N/2$, também na formulação BRST-BFV e nas três formas da dinâmica.

A ação definida por I. Bars em $(d+2)$ dimensões espaço-temporais [6]

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (D_\tau \Phi_I^M) g^{IJ} \Phi_J^N \eta_{MN}$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(X^M P_M - \frac{i}{2} \psi_\alpha^M \dot{\psi}_{\alpha M} + A^a \phi_a + F^{i\alpha} \phi_{i\alpha} + B^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} \right), \quad (5.61)$$

é invariante pelo grupo de gauge $OSp(N|2)$ e manifestamente invariante por transformações $SO(d,2)$. Vamos definir os elementos que aparecem na ação

$$\Phi_I^M(\tau) = (\psi_\alpha^M, X_1^M, X_2^M) = (\psi_\alpha^M, X^M, P^M);$$

$$D_\tau \psi_\alpha^M = \partial_\tau \psi_\alpha^M - iF_\alpha^+ X^M - iF_\alpha^- P^M;$$

$$D_\tau X^M = \partial_\tau X^M - A^2 X^M - A^3 P^M + iF^{-\alpha} \psi_\alpha^M;$$

$$D_\tau P^M = \partial_\tau P^M + A^1 X^M + A^2 P^M - iF^{+\alpha} \psi_\alpha^M; \quad (a=1,2,3; \quad \alpha, \beta=1,2,\dots,N; \quad i=+,-).$$

(5.64)

As equações de movimento dos campos de gauge fornecem os vínculos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= X^2, & \phi_{+\alpha} &= iX^M \psi_{\alpha M}, \\ \phi_2 &= X \cdot P, & \phi_{-\alpha} &= iP^M \psi_{\alpha M}, \\ \phi_3 &= P^2, & \phi_{\alpha\beta} &= i\psi_\alpha^M \psi_{\beta M}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Estes vínculos formam a superálgebra $\text{OSp}(N|2)$ com $3 + \frac{N(N-1)}{2}$ geradores bosônicos

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_{\alpha\beta})$ e $2N$ fermiônicos $(\phi_{+\alpha}, \phi_{-\alpha})$:

$$\begin{aligned} \{\varphi_a, \varphi_b\} &= C_{ab}^c \varphi_c, & \{\phi_{i\alpha}, \phi_{j\beta}\} &= i\delta_{\alpha\beta} K_{ij}^a \varphi_a + i\varepsilon_{ij} \phi_{\alpha\beta}, & \{\varphi_a, \phi_{i\alpha}\} &= \lambda_{ai}^j \phi_{aj}, \\ \{\varphi_a, \phi_{\alpha\beta}\} &= 0, & \{\phi_{i\alpha}, \phi_{\beta\gamma}\} &= \delta_{\alpha\beta} \phi_{i\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \phi_{i\beta}, \\ \{\phi_{\alpha\phi}, \phi_{\gamma\delta}\} &= -\delta_{\alpha\gamma} \phi_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \phi_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma} \phi_{\alpha\delta} - \delta_{\beta\delta} \phi_{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

As componentes das constantes de estrutura são

$$\begin{aligned} C_{12}^1 &= 2 = -C_{21}^1, & K_{++}^1 &= i, & \lambda_{1-}^+ &= 2 = -\lambda_{-1}^+, \\ C_{13}^2 &= 4 = -C_{31}^2, & K_{+-}^2 &= i = K_{-+}^2, & \lambda_{2-}^- &= 1 = -\lambda_{-2}^-, \\ C_{23}^3 &= 2 = -C_{32}^3, & K_{++}^3 &= i, & \lambda_{2+}^+ &= -1 = -\lambda_{+2}^+, \\ & & & & \lambda_{3+}^- &= -2 = -\lambda_{+3}^-. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Os colchetes de Poisson que usamos no cálculo dos elementos da álgebra $\text{OSp}(N|2)$ são

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha^M, \psi_\beta^N\} &= -i\delta_{\alpha\beta} \eta^{MN}, & \{\eta_a, \bar{\wp}_b\} &= \{\bar{\eta}_a, \wp_b\} = -\delta_{ab}, \\ \{c_\alpha^i, \bar{P}_\beta^j\} &= \{c_\alpha^i, P_\beta^j\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{ij}, & \{\eta_{\alpha\beta}, \bar{\wp}_{\gamma\delta}\} &= \{\bar{\eta}_{\alpha\beta}, \wp_{\gamma\delta}\} = -\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}, \\ \{A^a, \Pi_b\} &= \delta_{ab}, & \{F_{i\alpha}, \Omega_{j\beta}\} &= -\delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}, & \{B_{\alpha\beta}, \Gamma_{\lambda\delta}\} &= \delta_{\alpha\gamma} \chi_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

5.6.1) Quantização BRST-BFV

Segundo o formalismo BRST-BFV, ao estender o espaço de fase devemos impor os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange como novos vínculos a fim de não modificar a dinâmica da teoria

$$A_a \rightarrow \Pi_a \approx 0,$$

$$F_{i\alpha} \rightarrow \Omega_{i\alpha} \approx 0,$$

$$B_{\alpha\beta} \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta} \approx 0.$$

Para cada vínculo associamos um par de fantasmas canonicamente conjugados e com paridade de Grassmann oposta à dos vínculos

$$\begin{aligned} \varphi_a &\rightarrow (\eta_a, \bar{\wp}_a); & \Pi_a &\rightarrow (\bar{\eta}_a, \wp_a); \\ \phi_{i\alpha} &\rightarrow (c_{i\alpha}, \bar{P}_{i\alpha}); & \Omega_{i\alpha} &\rightarrow (\bar{c}_{i\alpha}, P_{i\alpha}); \\ \phi_{\alpha\beta} &\rightarrow (\eta_{\alpha\beta}, \bar{\wp}_{\alpha\beta}); & \Gamma_{\alpha\beta} &\rightarrow (\bar{\eta}_{\alpha\beta}, \wp_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (5.69)$$

A partir da superálgebra $\text{OSp}(N|2)$ construímos a carga BRST

$$\begin{aligned} Q = \int d\tau [& \eta_a \varphi_a + i c_{i\alpha} \phi_{i\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} + i \wp_a \Pi_a + P_{i\alpha} \Omega_{i\alpha} + \frac{i}{2} \wp_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \eta_b \eta_c C_{bc}^a \bar{\wp}_a - \\ & - \frac{i}{2} c_{i\alpha} c_{j\alpha} K_{ij}^a \bar{\wp}_a + i \eta_a c_{i\alpha} \lambda_{ai}^k \bar{P}_{k\alpha} - \frac{i}{2} \bar{\wp}_{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} \eta_{\gamma\alpha}] \end{aligned}$$

(5.70)

Esta carga é hermitiana por construção. Podemos ver isto a partir da definição da hermiticidade dos fantasmas

$$\begin{aligned} \eta_a^* &= \eta_a, & \bar{\wp}_a^* &= -\bar{\wp}_a, & \bar{\eta}_a^* &= \bar{\eta}_a, & \wp_a^* &= -\wp_a, \\ c_{i\alpha}^* &= c_{i\alpha}, & \bar{P}_{i\alpha}^* &= \bar{P}_{i\alpha}, & \bar{c}_{i\alpha}^* &= \bar{c}_{i\alpha}, & P_{i\alpha}^* &= P_{i\alpha}, \\ \eta_{\alpha\beta}^* &= -\wp_{\alpha\beta}, & \bar{\eta}_{\alpha\beta}^* &= \bar{\eta}_{\alpha\beta}, & \bar{\wp}_{\alpha\beta}^* &= -\bar{\wp}_{\alpha\beta}, & \wp_{\alpha\beta}^* &= \wp_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

As escolhas de gauge que irão fixar a liberdade de gauge da ação (5.61) são as seguintes

$$\begin{aligned} f^1 &= X^{+'} - 1, & g_{i\alpha} &= F_{i\alpha}, & h_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta}, \\ f^2 &= P^{+'} - \frac{A^2}{A^3} + \frac{F(x^\mu, p_\mu, S_{\alpha\beta})}{A^3 P^{+'}}, & S_{\alpha\beta} &= -i(\psi_\alpha \cdot \psi_\beta - \psi_\beta \cdot \psi_\alpha). \end{aligned} \quad (5.71)$$

A escolha de f^3 definirá as formas da dinâmica: instante para $f^3 = x^0 - \xi \cdot \tau$; frente de onda para $f^3 = x^+ - \tau$; e pontual para $f^3 = \rho - \tau$. Por praticidade, iremos condensar a notação assim: $f^3 = x^t - \tau$. Então, podemos ter $x^t = x^0, x^+, \rho$. A escolha da função $F = F(x^\mu, p_\mu, S_{\alpha\beta})$ permite obter a partícula relativística ou uma Hamiltoniana arbitrária.

A função fermiônica que no formalismo BRST-BFV implementa a fixação de gauge discutida acima é

$$\Psi = \frac{i}{\varepsilon} f_a \bar{\eta}_a + \frac{i}{\varepsilon} g_{i\alpha} \bar{c}_{i\alpha} + \frac{i}{\varepsilon} h_{\alpha\beta} \bar{\eta}_{\alpha\beta} + A_a \bar{\wp}_a - iF_{i\alpha} \bar{P}_{i\alpha} + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} \bar{\wp}_{\alpha\beta}. \quad (5.72)$$

Onde utilizamos as seguintes definições para os índices: $a' = 1, 3$; $i = +, -$; $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

Antes de construir a ação efetiva precisamos conhecer as transformações BRST de todas as variáveis do espaço de fase estendido, pois a ação deve ser invariante por BRST:

$$\begin{aligned} \delta X^M &= -\eta_2 X^M - 2\eta_3 P^M + c_{-\alpha} \psi_\alpha^M, & \delta \Pi_a &= 0, \\ \delta P^M &= 2\eta_1 X^M + \eta_2 P^M - c_{+\alpha} \psi_\alpha^M, \\ \delta A_a &= -\wp_a, & \delta \Omega_{i\alpha} &= 0, \\ \delta \psi_\alpha^M &= ic_{+\alpha} X^M + ic_{-\alpha} P^M - \eta_{\alpha\beta} \psi_\beta^M, & \delta \Gamma_{\alpha\beta} &= 0, \\ \delta F_{i\alpha} &= -P_{i\alpha}, \\ \delta B_{\alpha\beta} &= -i \wp_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\eta_a &= -\frac{i}{2}\eta_b\eta_c C_{bc}^a + \frac{i}{2}C_{ia}C_{ja}K_{ij}^a, & \delta\bar{\wp}_a &= -\varphi_a - iC_{ac}^d\eta_c\bar{\wp}_d - ic_{ia}\lambda_{ai}^k\bar{\wp}_{ak}, \\
\delta\bar{\eta}_a &= -i\Pi_a, & \delta\wp_a &= 0, \\
\delta c_{ia} &= -i\eta_a c_{ja}\lambda_{aj}^i, & \delta\bar{P}_{ia} &= i\phi_{ia} - ic_{ka}K_{ik}^a\bar{\wp}_a + i\eta_a\lambda_{ai}^k\bar{P}_{ka}, \\
\delta\bar{c}_{ia} &= -\Omega_{ia}, & \delta P_{ia} &= 0, \\
\delta\eta_{\alpha\beta} &= i\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta}, & \delta\bar{\wp}_{\alpha\beta} &= -\phi_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\bar{\wp}_{\gamma\beta} - \eta_{\beta\gamma}\bar{\wp}_{\gamma\alpha}), \\
\delta\bar{\eta}_{\alpha\beta} &= -\Gamma_{\alpha\beta}, & \delta\wp_{\alpha\beta} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Então, podemos calcular o colchete de Poisson da carga BRST com a função fixadora de gauge,

$$\begin{aligned}
\{Q, \Psi\} &= \frac{i}{\varepsilon}(-\eta_2 X^{+'} - 2\eta_3 P^{+'} + c_{-a}\psi_a^{+'})\bar{\eta}_1 + \frac{i}{\varepsilon}[2\eta_1 X^{-'} + \eta_2 P^{-'} - c_{+a}\psi_a^{-'} + \frac{\wp_2}{A^3} - \frac{A^2}{(A^3)^2}\wp_3 + \\
&+ \frac{\delta F}{A^3 P^{+'}} + \frac{F}{A^3 (P^{+'})^2}(2\eta_1 X^{+'} + \eta_2 P^{+'} - c_{+a}\psi_a^{+'})\bar{\eta}_2 + \delta f^3 \bar{\eta}_3 + \frac{1}{\varepsilon}f_a \Pi_a - \\
&- \frac{i}{\varepsilon}P_{ia}\bar{c}_{ia} - \frac{i}{\varepsilon}F_{ia}\Omega_{ia} - \wp_{a'}\bar{\wp}_{a'} - A_{a'}\varphi_{a'} - iA_{a'}C_{a'c}^d\eta_c\bar{\wp}_d - iA_{a'}c_{ia}\lambda_{ai}^k\bar{P}_{ak} + \\
&+ iP_{ia}\bar{P}_{ia} - F_{ia}\phi_{ia} + F_{ia}c_{ka}K_{ik}^a\bar{\wp}_a - F_{ia}\eta_a\lambda_{ai}^k\bar{P}_{ka} - \frac{i}{2}\wp_{\alpha\beta}\bar{\wp}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta} - \frac{i}{4}B_{\alpha\beta}(\eta_{\alpha\gamma}\bar{\wp}_{\gamma\beta} - \eta_{\beta\gamma}\bar{\wp}_{\gamma\alpha}) - \\
&- \frac{1}{\varepsilon}\wp_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\varepsilon}B_{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Agora estamos preparados para construir a ação efetiva definida para todo o espaço de fase estendido, segundo a formulação BRST-BFV

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (X^M \dot{P}_M - \frac{i}{2}\psi_\alpha^M \dot{\psi}_{\alpha M} + \dot{A}^a \Pi_a + \dot{F}_{ia} \Omega_{ia} + \dot{B}_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} + \dot{\eta}_a \bar{\wp}_a + \dot{\bar{\eta}}_a \wp_a + \dot{c}_{ia} P_{ia} + \dot{\eta}_{\alpha\beta} \bar{\wp}_{\alpha\beta} + \\
&+ \dot{\bar{\eta}}_{\alpha\beta} \wp_{\alpha\beta} - \{Q, \Psi\})
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Iremos realizar a seguinte transformação, que é invariante por BRST e possui jacobiano igual a 1 (com o objetivo de eliminar algumas variáveis inconvenientes para o resultado desejado)

$$\begin{aligned}\Pi_a &\rightarrow \varepsilon \cdot \Pi_a, & \Omega_{i\alpha} &\rightarrow \varepsilon \cdot \Omega_{i\alpha}, & \Gamma_{\alpha\beta} &\rightarrow \varepsilon \cdot \Gamma_{\alpha\beta}, \\ \bar{\eta}_a &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}_a, & \bar{c}_{i\alpha} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{c}_{i\alpha}, & \bar{\eta}_{\alpha\beta} &\rightarrow \varepsilon \cdot \bar{\eta}_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (5.76)$$

Depois de fazer ε se anular, a amplitude de transição toma a forma

$$\begin{aligned}Z = \int D\mu \cdot \exp \left\{ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[X^M P_M - \frac{i}{2} \psi_\alpha^M \dot{\psi}_{\alpha M} + \eta_a \dot{\bar{\phi}}_a + \dot{c}_{i\alpha} \bar{P}_{i\alpha} + \eta_{\alpha\beta} \dot{\bar{\phi}}_{\alpha\beta} + i(\eta_2 X^{+'} + 2\eta_3 P^{+'} \right. \right. \\ \left. \left. - c_{-\alpha} \psi_\alpha^{+'} \right) \bar{\eta}_1 - i[2\eta_1 X^{-'} + \eta_2 P^{-'} - c_{+\alpha} \psi_\alpha^{-'} + \frac{\wp_2}{A^3} - \frac{A^2}{(A^3)^2} \wp_3 + \frac{\delta F}{A^3 P^{+'}} + \frac{F}{(A^3)^2 P^{+'}} \wp_3 - \right. \\ \left. - \frac{F}{A^3 (P^{+'})^2} (2\eta_1 X^{+'} + \eta_2 P^{+'} - c_{+\alpha} \psi_\alpha^{+'}) \bar{\eta}_2 + (x^t \eta_2 + 2p^t \eta_3 - c_{-\alpha} \psi_\alpha^t) \bar{\eta}_3 - f_a \Pi_a + \right. \\ \left. + iP_{i\alpha} \bar{c}_{i\alpha} + iF_{i\alpha} \Omega_{i\alpha} + \wp_{a'} \bar{\phi}_{a'} + A_{a'} \phi_{a'} + iA_{a'} C_{a'c}^d \eta_c \bar{\phi}_d + iA_{a'} c_{i\alpha} \lambda_{a'i}^k \bar{P}_{\alpha k} - iP_{i\alpha} \bar{P}_{i\alpha} + \right. \\ \left. + F_{i\alpha} \phi_{i\alpha} - F_{i\alpha} c_{k\alpha} K_{ik}^a \bar{\phi}_a + F_{i\alpha} \eta_a \lambda_{ai}^k \bar{P}_{k\alpha} + \frac{i}{2} \wp_{\alpha\beta} \bar{\phi}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} + \frac{i}{2} B_{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} \bar{\phi}_{\gamma\alpha} + \right. \\ \left. + \wp_{\alpha\beta} \bar{\eta}_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \right] \} \end{aligned}\quad (5.77)$$

Sendo a medida de Liouville

$$\begin{aligned}D\mu = DX^M DP_M D\psi_\alpha^M DA^a D\Pi_a DF_{i\alpha} D\Omega_{i\alpha} DB_{\alpha\beta} D\Gamma_{\alpha\beta} Dc_{jb} D\bar{P}_{jb} D\bar{c}_{kc} DP_{kc} D\eta_d D\bar{\phi}_d \times \\ \times D\bar{\eta}_e D\wp_e D\eta_{\gamma\delta} D\bar{\phi}_{\gamma\delta} D\bar{\eta}_{\mu\nu} D\wp_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Integrando $\Pi_a, \Omega_{i\alpha}, \Gamma_{\alpha\beta}$, obtemos na medida o produto de fatores $\delta(f_a)\delta(F_{i\alpha})\delta(B_{\alpha\beta})$.

Integrando os argumentos das duas últimas deltas e também η_2 , obtemos

$\delta(f_a)\delta(\frac{\bar{\eta}_2}{A^3}) = (\det A^3)^{-1} \delta(f_a)\delta(\bar{\eta}_2)$. Eliminamos $\bar{\eta}_2$, integrando-o. Depois de substituirmos na amplitude de transição os valores das constantes de estrutura (5.65) da superálgebra (5.64), resulta que

$$\begin{aligned}
Z = \int D\mu' (\det A^3)^{-1} \delta(f^a) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ & \dot{X}^M P_M - \frac{i}{2} \dot{\psi}_\alpha^M \dot{\psi}_{\alpha M} + \dot{\eta}_a \bar{\wp}_a + \dot{c}_{i\alpha} \bar{P}_{i\alpha} + \\
& + \dot{\eta}_{\alpha\beta} \bar{\wp}_{\alpha\beta} + i(\eta_2 X^{+'} + 2\eta_3 P^{+'} - c_{-\alpha} \psi_\alpha^{+'}) \bar{\eta}_1 + (x^t \eta_2 + 2p^t \eta_3 - c_{-\alpha} \psi_\alpha^t) \bar{\eta}_3 - iP_{i\alpha} \bar{c}_{i\alpha} + \\
& + \wp_{a'} \bar{\wp}_{a'} + A_{a'} \varphi_{a'} + 2iA^1 \eta_2 \bar{\wp}_1 - 4iA^3 \eta_1 \bar{\wp}_2 + 2iA^1 c_{-\alpha} \bar{P}_{+\alpha} - 2iA^3 c_{+\alpha} \bar{P}_{-\alpha} - iP_{i\alpha} \bar{P}_{i\alpha} + \\
& + \frac{i}{2} \wp_{\alpha\beta} \bar{\wp}_{\alpha\beta} + \wp_{\alpha\beta} \bar{\eta}_{\alpha\beta} \}
\end{aligned}$$

Damos prosseguimento integrando $\bar{c}_{i\alpha}, \bar{\eta}_{\alpha\beta}$, que acrescenta à medida o produto de deltas $\delta(\bar{\wp}_{a'}) \delta(P_{i\alpha}) \delta(\wp_{\alpha\beta})$. Integrando os argumentos das deltas e depois $\bar{\wp}_{\alpha\beta}$ e $\bar{P}_{i\alpha}$, aparece a seguinte expressão na medida

$$\delta(\eta_{\alpha\beta}) \delta(c_{i\alpha}) = (\det \partial_\tau)^{\frac{N(N-1)}{2}} \delta(\eta_{\alpha\beta}) (\det \partial_\tau)^N \delta(c_{i\alpha}).$$

Absorvendo os fatores constantes e integrando $\eta_{\alpha\beta}$ e $c_{i\alpha}$, temos

$$\begin{aligned}
Z = \int D\mu'' (\det A^3)^{-1} \delta(f^a) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ & -\dot{X}^{+'} P^{-'} - \dot{X}^{-'} P^{+'} + x^\mu p_\mu + \frac{i}{2} \dot{\psi}_\alpha^{+'} \dot{\psi}_\alpha^{-'} + \frac{i}{2} \dot{\psi}_\alpha^{-'} \dot{\psi}_\alpha^{+'} - \frac{i}{2} \dot{\psi}_\alpha^{\rightarrow} \dot{\psi}_\alpha^{\rightarrow} + \\
& + \dot{\eta}_2 \bar{\wp}_2 + i(X^{+'} \eta_2 + 2P^{+'} \eta_3) \bar{\eta}_1 + (x^t \eta_2 + 2p^t \eta_3) \bar{\eta}_3 + A^{a'} \varphi_{a'} - 4iA^3 \eta_1 \bar{\wp}_2 \}
\end{aligned}$$

Agora, iremos quebrar a simetria $SO(d,2)$ ao impor a *primeira escolha de gauge*, $f^1 = X^{+'} - 1$. Depois, faremos a *segunda escolha de gauge* ao integrar $P^{-'}$. Além disso, iremos integrar por partes o quinto termo do integrando da equação acima

$$\begin{aligned}
Z = \int D\mu''' (\det A^3)^{-1} \delta(f^3) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ & -\dot{X}^{-'} P^{+'} + x^\mu p_\mu + i \dot{\psi}_\alpha^{+'} \dot{\psi}_\alpha^{-'} - \frac{i}{2} \dot{\psi}_\alpha^\mu \dot{\psi}_{\alpha\mu} + \dot{\eta}_2 \bar{\wp}_2 + \\
& + i\eta_2 \bar{\eta}_1 + 2iP^{+'} \eta_3 \bar{\eta}_1 + (x^t \eta_2 + 2p^t \eta_3) \bar{\eta}_3 - 2A^1 X^{-'} + A^1 (x^\mu x_\mu) - 2A^2 P^{+'} - 2F + \\
& + A^3 (p^\mu p_\mu) - 4iA^3 \eta_1 \bar{\wp}_2 \}
\end{aligned}$$

Integrando A^2 e $\psi_\alpha^{+'}$, obtemos as deltas $\delta(P^{+'})\delta(\psi_\alpha^{-'}) = \delta(P^{+'})\delta(\psi_\alpha^{-'})(\det \partial_\tau)^N$.
Integrando os argumentos das deltas e absorvendo os fatores constantes

$$Z = \int D\mu^{\nu} (\det A^3)^{-1} \delta(f^3) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ x^\mu p_\mu - \frac{i}{2} \psi_\alpha^\mu \dot{\psi}_{\alpha\mu} + \dot{\eta}_2 \bar{\phi}_2 + i \eta_2 \bar{\eta}_1 + (x^t \eta_2 + 2 p^t \eta_3) \bar{\eta}_3 - \\ - 2 A^1 X^{-'} + A^1 (x^\mu x_\mu) - 2F + A^3 (p^\mu p_\mu) - 4i A^3 \eta_1 \bar{\phi}_2 \}$$

Integrando $X^{-'}$ e $\bar{\eta}_1$, aparecem as deltas $\delta(A^1)\delta(\eta_2)$ na medida. Eliminamos estas variáveis integrando-as. Integrando também $\bar{\phi}_2$, resulta que a medida fica assim

$$(\det A^3)^{-1} \delta(f^3) \delta(A^3 \eta_1) = (\det A^3)^{-1} (\det A^3) \delta(\eta_1) \delta(f^3) = \delta(f^3) \delta(\eta_1).$$

A amplitude de transição, após a integração em η_1 , é

$$Z = \int D\mu^\nu \delta(f^3) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ x^\mu p_\mu - \frac{i}{2} \psi_\alpha^\mu \dot{\psi}_{\alpha\mu} + 2 p^t \eta_3 \bar{\eta}_3 - 2F + A^3 (p^\mu p_\mu) \}$$

Eliminando os dois fantasmas remanescentes, obtemos

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu D\psi_\alpha^\nu DA^3 \delta(f^3) (\det p^t) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [x^\mu p_\mu - \frac{i}{2} \psi_\alpha^\mu \dot{\psi}_{\alpha\mu} + A^3 (p^\mu p_\mu) - \\ - 2F(x^\mu, p_\mu, S^{\alpha\beta})] \quad (5.78)$$

A partir desta amplitude queremos encontrar nas três formas da dinâmica, a amplitude de transição para dois casos: a partícula relativística com massa nula e spin N/2 e uma Hamiltoniana não-relativística arbitrária invariante por rotação com spin N/2.

5.6.1.1) Forma Instante

1) Partícula Relativística e Supersimetria Estendida

A amplitude de transição da partícula relativística na forma instante pode ser obtida escolhendo

$$f^3 = x^0 - \xi \cdot \tau \quad \text{e} \quad F=0, \quad (5.79)$$

e substituindo essas funções em (5.76):

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu D\psi_\alpha^\nu DA^3 \delta(x^0 - \xi \cdot \tau) (\det p^0) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [x^\mu \dot{p}_\mu + \frac{i}{2} \psi_\alpha^0 \dot{\psi}_\alpha^0 - \frac{i}{2} \vec{\psi}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha + A^3 (p^\mu p_\mu)]$$

Integrando A^3 , x^0 e ψ_α^0 , obtemos na medida $(\det \partial_\tau)^{N/2} (\det p^0) \delta[(p^0)^2 - \vec{p}^2]$. O primeiro termo multiplicativo pode ser absorvido, pois é um fator constante, enquanto que os dois últimos podem ser combinados segundo a propriedade (5.51) da delta de Dirac, para depois integrarmos p^0 . Então

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} D\vec{\psi}_\alpha \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}} - \frac{i}{2} \vec{\psi}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha - \sqrt{\vec{p}^2}]. \quad (5.80)$$

Este resultado, que obtivemos em (4.99), é a amplitude de transição da partícula relativística com massa nula e spin $N/2$ em d dimensões espaço-temporais, na forma instante. Para alcançá-lo, realizamos a seguinte quebra de simetria

$$SO(d,2) \rightarrow SO(d-1,1) \oplus T_d.$$

Ou seja, quebramos a simetria conforme original, $SO(d,2)$, e obtivemos um sistema invariante por um subgrupo do grupo conforme, o grupo de Poincaré, $SO(d-1,1) \oplus T_d$, realizando as seguintes escolhas de gauge,

$$\begin{aligned}
f^1 &= X^{+'} - 1, & g_{+\alpha} &= F_{+\alpha}, & h_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta}, \\
f^2 &= P^{+'} - \frac{A^2}{A^3}, & g_{-\alpha} &= F_{-\alpha}, \\
f^3 &= x^0 - \xi \cdot \tau.
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Podemos chamar (5.81) de *gauge da partícula relativística com supersimetria estendida*.

Em [6] I. Bars indica um outro gauge que leva à partícula relativística com spin $N/2$ no gauge covariante.

II) Hamiltoniana Arbitrária com Spin $N/2$

Mostraremos como encontrar a amplitude de transição para um sistema não-relativístico com Hamiltoniana arbitrária invariante por rotação e spin $N/2$, em $(d-1)$ dimensões espaciais, a partir da ação (5.61). As escolhas de gauge são

$$\begin{aligned}
f^1 &= X^{+'} - 1, & g_{+\alpha} &= F_{+\alpha}, & h_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta}, \\
f^2 &= P^{+'} - \frac{A^2}{A^3} + \frac{1/2[H(\vec{x}, \vec{p}, \vec{S}_{\alpha\beta}) - \xi \cdot p^0]}{A^3 P^{+'}}, & g_{-\alpha} &= F_{-\alpha}, \\
f^3 &= x^0 - \xi \cdot \tau, & \vec{S}_{\alpha\beta} &= -i(\vec{\psi}_\alpha \cdot \vec{\psi}_\beta - \vec{\psi}_\beta \cdot \vec{\psi}_\alpha).
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Para implementar o gauge acima, falta substituir $f^3 = x^0 - \xi \cdot \tau$ e

$$F = \frac{1}{2}[H(\vec{x}, \vec{p}, \vec{S}_{\alpha\beta}) - \xi \cdot p^0] \text{ em (5.78):}$$

$$\begin{aligned}
Z &= \int Dx^\mu Dp_\mu D\psi_\alpha^\nu DA^3 \delta(x^0 - \xi \cdot \tau) (\det p^0) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ -\dot{x}^0 p^0 + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \dot{\psi}_\alpha^0 \dot{\psi}_\alpha^0 - \\
&\quad - \frac{1}{2} \dot{\vec{\psi}}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha + A^3 [(p^0)^2 - \vec{p}^2] - H(\vec{x}, \vec{p}, \vec{S}_{\alpha\beta}) + \xi \cdot p^0 \}
\end{aligned}$$

Integrando x^0, A^3 e ψ_α^0 , encontramos

$$Z = \int D\vec{x} Dp_\mu D\vec{\psi}_\alpha (\det p^0) \delta[(p^0)^2 - \vec{p}^2] (\det \partial_\tau)^{N/2} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{2} \vec{\psi}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha - H(\vec{x}, \vec{p}, \vec{S}_{\alpha\beta})]$$

Absorvendo o fator constante, usando a propriedade (5.51) e integrando p^0 , encontramos a seguinte amplitude de transição

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} D\vec{\psi}_\alpha \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \frac{i}{2} \vec{\psi}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha - H(\vec{x}, \vec{p}, \vec{S}_{\alpha\beta})]. \quad (5.83)$$

Devemos impor a restrição

$$H(\vec{x}, \vec{p}, \vec{S}_{\alpha\beta}) = H(\vec{x}^2, \vec{p}^2, \vec{S}_{\alpha\beta}), \quad (5.84)$$

isto é, teremos uma Hamiltoniana invariante por rotações em $(d-1)$ dimensões espaciais.

A ação (5.61) possui simetria global manifesta $SO(d,2)$ e contém o grupo de Poincaré $ISO(d-1,1)$ como subgrupo, mas não há simetria de translação em $(d+2)$ dimensões. O sistema descrito pela ação que está em (5.83, 84) também não possui simetria de translação nas d dimensões espaço-temporais. Se desejássemos impor a invariância pela simetria de Poincaré, a Hamiltoniana teria a expressão particular da amplitude de transição (5.80), isto é, seria a Hamiltoniana da partícula relativística.

5.6.1.2) Forma Frente de Onda

1) Partícula Relativística e Supersimetria Estendida

A escolha de gauge que nos leva à partícula relativística com massa nula e spin $N/2$, em d dimensões espaço-temporais, é composta de três escolhas bosônicas e duas escolhas fermiônicas

$$\begin{aligned} f^1 &= X^{+'} - 1 & g_{+\alpha} &= F_{+\alpha} \\ f^2 &= P^{+'} - \frac{A^2}{A^3} & g_{-\alpha} &= F_{-\alpha} \\ f^3 &= x^+ - \tau & & \end{aligned} \quad (5.85)$$

Isto é equivale a fazer $f^3 = x^+ - \tau$ e $F=0$ em (5.78):

$$\begin{aligned} Z &= \int Dx^\mu Dp_\mu D\psi_\alpha^\nu DA^3 \delta(x^+ - \tau) (\det p^+) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ -\frac{1}{2} \dot{x}^+ \dot{p}^- - \frac{1}{2} \dot{x}^- \dot{p}^+ + \dot{x} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{i}{4} \dot{\psi}_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha^- + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4} \dot{\psi}_\alpha^- \dot{\psi}_\alpha^+ - \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha + A^3 (p^+ p^- - \vec{p}^2) \right\} \end{aligned}$$

Integrando x^+ , A^3 , obtemos

$$\begin{aligned} Z &= \int Dx^- D\vec{x} Dp_\mu D\psi_\alpha^\nu DA^3 \delta(p^+ p^- - \vec{p}^2) (\det p^+) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\frac{1}{2} \dot{x}^- \dot{p}^+ + \dot{x} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{i}{4} \dot{\psi}_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha^- + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4} \dot{\psi}_\alpha^- \dot{\psi}_\alpha^+ - \frac{i}{2} \dot{\vec{\psi}}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha - \frac{1}{2} \dot{p}^- \right] \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte propriedade para a delta de Dirac,

$$\delta(p^+ p^- - \vec{p}^2) \det p^+ = \delta(p^- - \frac{\vec{p}^2}{p^+}), \quad (5.86)$$

e integrando p^- , encontramos

$$Z = \int D\vec{x} D\vec{p} D\psi_\alpha^+ D\psi_\alpha^- D\bar{\psi}_\alpha \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{4} \psi_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha^- + \frac{1}{4} \psi_\alpha^- \dot{\psi}_\alpha^+ - \frac{i}{2} \bar{\psi}_\alpha \cdot \dot{\psi}_\alpha - \frac{\vec{p}^2}{2p^+} \right] \quad (5.87)$$

Esta é a amplitude de transição da partícula relativística com massa nula e spin $N/2$ em d dimensões do espaço-tempo na forma frente de onda. Esta amplitude obtivemos em (4.99) e o setor bosônico da ação fornece a Hamiltoniana correta para a forma frente de onda, calculada em (4.23), bastando impor o caso particular $m=0$.

II) Hamiltoniana Arbitrária e Spin $N/2$

O gauge que permite implementar uma Hamiltoniana arbitrária invariante por rotação em $(d-1)$ dimensões espaciais e spin $N/2$, a partir da ação com duas dimensões temporais (5.61), é

$$\begin{aligned} f^1 &= X^{+'} - 1, & g_{+\alpha} &= F_{+\alpha}, \\ f^2 &= P^{-'} - \frac{A^2}{A^3} + \frac{\frac{1}{2}[H(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p}, S_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}p^-]}{A^3 P^{+'}}, & g_{-\alpha} &= F_{-\alpha}, \\ f^3 &= x^+ - \tau, & S_{\alpha\beta} &= -i(\psi_\alpha \cdot \psi_\beta - \psi_\beta \cdot \psi_\alpha). \end{aligned} \quad (5.88)$$

O que corresponde à substituição $f^3 = x^+ - \tau$ e $F = \frac{1}{2}[H(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p}, S_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}p^-]$ em
(5.78)

$$Z = \int Dx^\mu Dp_\mu D\psi_\alpha^+ D\psi_\alpha^- D\vec{\psi}_\alpha D\vec{\psi}_\alpha DA^3 \delta(x^+ - \tau) (\det p^+) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^- - \frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{x} \cdot \vec{p} + \right. \\ \left. + \frac{i}{4} \psi_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha^- + \frac{i}{4} \psi_\alpha^- \dot{\psi}_\alpha^+ - \frac{i}{2} \vec{\psi}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha + A^3 (p^+ p^- - \vec{p}^2) - H(x^-, \vec{x}, x^+, \vec{p}, S_{\alpha\beta}) + \frac{p^-}{2} \right]$$

Implementamos a terceira escolha de gauge ao integrar x^+ , e integrando A^3 aparece na medida a delta funcional do vínculo de primeira classe

$$Z = \int Dx^- D\vec{x} Dp_\mu D\psi_\alpha^+ D\psi_\alpha^- D\vec{\psi}_\alpha (\det p^+) \delta(p^+ p^- - \vec{p}^2) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{x} \cdot \vec{p} + \frac{i}{4} \psi_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha^- + \right. \\ \left. + \frac{i}{4} \psi_\alpha^- \dot{\psi}_\alpha^+ - \frac{i}{2} \vec{\psi}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha - H(x^-, \vec{x}, \vec{p}, p^+, S_{\alpha\beta}) \right]$$

Podemos agrupar os dois termos multiplicativos que aparecem na medida, utilizando a propriedade (4.73) para a delta de Dirac. Depois eliminamos p^- , integrando-o

$$Z = \int Dx^- D\vec{x} Dp^+ D\vec{p} D\psi_\alpha^+ D\psi_\alpha^- D\vec{\psi}_\alpha \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-\frac{1}{2} \dot{x}^- p^+ + \dot{x} \cdot \vec{p} + \frac{i}{4} \psi_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha^- + \frac{i}{4} \psi_\alpha^- \dot{\psi}_\alpha^+ - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \vec{\psi}_\alpha \cdot \dot{\vec{\psi}}_\alpha - H(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p}, S_{\alpha\beta}) \right] \quad (5.89)$$

Para haver invariância por $SO(d-1)$ devemos obedecer a restrição

$$H(x^-, \vec{x}, p^+, \vec{p}) = H(x^-, \vec{x}^2, p^+, \vec{p}^2).$$

Este resultado é a versão na forma frente de onda da amplitude de transição para uma Hamiltoniana arbitrária invariante por rotações e spin $N/2$ em $(d-1)$ dimensões espaciais. Não há simetria de translação no espaço. Isto é permitido porque partimos da ação original (5.61) que também não possui esta simetria em $(d+2)$ dimensões.

5.6.1.3) Forma Pontual

1) Partícula Relativística e Supersimetria Estendida

Como já sabemos, relativamente à manipulação da integração funcional, a forma pontual possui semelhanças com a forma instante. Utilizaremos as coordenadas curvilíneas e métrica definidas em (4.27) e (4.31), respectivamente. As funções $f^3 = \rho - \tau$ e $F = 0$, implementam o *gauge da partícula relativística com supersimetria estendida*

$$\begin{aligned} f^1 &= X^{+'} - 1, & g_{+\alpha} &= F_{+\alpha}, \\ f^2 &= P^{+'} - \frac{A^2}{A^3}, & g_{-\alpha} &= F_{-\alpha}, \\ f^3 &= \rho - \xi \cdot \tau, \end{aligned} \tag{5.90}$$

em (5.78)

$$Z = \int D\xi^\mu Dp_\mu D\psi_{\xi\alpha}^\mu DA^3 \delta(\rho - \xi \cdot \tau) (\det p^\rho) \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\xi^\mu \dot{p}_{\xi\mu} - \frac{i}{2} \psi_{\xi\alpha}^\mu \dot{\psi}_{\xi\alpha\mu} + A^3 (p^\mu p_\mu)]$$

Integrando ρ , A^3 , $\frac{\rho}{\alpha}$ utilizando a propriedade (5.51) da delta de Dirac, integrando p^ρ e absorvendo o fator constante resultante da integração fermiônica, obtemos a amplitude de transição para a partícula relativística em $d=4$ dimensões espaço-temporais na forma pontual

$$Z = \int D\vec{\xi} D\vec{p} D\vec{\psi}_{\xi\alpha} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\vec{\xi} \cdot \dot{\vec{p}}_\xi - \frac{i}{2} \vec{\psi}_{\xi\alpha} \cdot \dot{\vec{\psi}}_{\xi\alpha} - \sqrt{\vec{p}_\xi^2}] \tag{5.91}$$

Este resultado coincide com a expressão obtida em (4.105) e “fecha” nossas considerações sobre a partícula relativística.

II) Hamiltoniana Arbitrária e Spin $N/2$

Agora desejamos obter a amplitude de transição com Hamiltoniana invariante por rotações e spin arbitrário na forma pontual. O gauge que realiza esta tarefa é

$$\begin{aligned}
 f^1 &= X^{+'} - 1, & g_{+\alpha} &= F_{+\alpha}, \\
 f^2 &= P^{-'} - \frac{A^2}{A^3} + \frac{1/2[H(\vec{\xi}, \vec{p}_\xi, \vec{S}_{\alpha\beta}) - \xi \cdot p^\rho]}{A^3 P^{+'}}, & g_{-\alpha} &= F_{-\alpha}, \quad h_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}, \\
 f^3 &= \rho - \xi \cdot \tau, & \vec{S}_{\alpha\beta} &= -i(\vec{\psi}_\alpha \cdot \vec{\psi}_\beta - \vec{\psi}_\beta \cdot \vec{\psi}_\alpha).
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

Ele é obtido fazendo $f^3 = \rho - \tau$ e $F = \frac{1}{2}[H(\vec{\xi}, \vec{p}_\xi, \vec{S}_{\alpha\beta}) + \xi \cdot p^\rho]$ em (5.78). Para isto, iremos seguir a mesma prescrição da forma instante, a saber, após as substituições apontadas acima, integramos $\rho, A^3, \psi_\alpha^\rho$, usamos a propriedade (5.51), absorvemos o fator constante advindo da integração fermiônica e integramos p^ρ . Resulta que

$$Z = \int D\vec{\xi} D\vec{p}_\xi D\vec{\psi}_{\xi\alpha} \exp i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{p}_\xi - \frac{i}{2} \vec{\psi}_{\xi\alpha} \cdot \dot{\vec{\psi}}_{\xi\alpha} - H(\vec{\xi}, \vec{p}_\xi, \vec{S}_{\alpha\beta})] \tag{5.93}$$

Onde, a Hamiltoniana deve ser invariante por rotação espacial

$$H(\vec{\xi}, \vec{p}_\xi, \vec{S}_{\alpha\beta}) = H(\vec{\xi}^2, \vec{p}_\xi^2, \vec{S}_{\alpha\beta}). \tag{5.94}$$

Também aqui na forma pontual, obtivemos em $(d-1=3)$ dimensões espaciais a amplitude de transição para um sistema físico não-relativístico com Hamiltoniana invariante por rotação e spin $N/2$. As equações (5.92) fornecem as escolhas de gauge que permitiram eliminar a liberdade de gauge existente em (5.61).

Capítulo 6

Conclusão

Iniciamos este trabalho apresentando um método alternativo ao de Dirac para determinar a Hamiltoniana efetiva da partícula relativística à luz do formalismo BRST-BFV. Realizamos escolhas de gauge canônicas para reproduzir os resultados de Dirac. E depois generalizamos para partículas com spin e teorias com dois tempos. Encontramos uma função arbitrária do espaço de fase desempenhando o papel da Hamiltoniana. Esta liberdade advém do teorema de Batalin-Vilkovisky, porém é restringida pela simetria da Poincaré, que se manifesta linearmente no espaço-tempo de Minkowski, exigindo que a Hamiltoniana seja uma função quadrática das componentes espaciais do momento.

A simetria conforme $SO(d,2)$ não é realizada linearmente no espaço de Minkowski. A ação (5.61) é definida em um espaço-tempo com duas dimensões tipo-tempo e assinatura $(d+2)$, permitindo uma realização linear de $SO(d,2)$. Não há simetria de translação nesta teoria. Já havia sido notado por Barut em [28] a realização linear do grupo conforme em um espaço com duas dimensões temporais. A dificuldade consistia em fornecer uma interpretação para a dimensão temporal adicional. A simetria de gauge $Sp(2)$, para o caso sem graus de liberdade fermiônicos, e $OSp(1|2)$ quando se adicionam variáveis de Grassmann, fornece uma interpretação para as dimensões adicionais, como sendo graus de liberdade de gauge. A fixação de gauge a elimina as dimensões adicionadas ao espaço físico. Mais do que isto, permite obter um sistema físico diferente para cada uma das diferentes escolhas de gauge.

Impusemos uma restrição na liberdade que a escolha de gauge concede e que consiste, simplesmente, em respeitar a simetria original do sistema físico. No caso da partícula relativística, invariância pelo grupo de Poincaré e para o sistema com Hamiltoniana arbitrária, simetria por rotação espacial. No último caso, quebramos a invariância pela simetria $SO(d,2)$ para obter invariância por $SO(d-1)$. Então, não há

invariância por translações no espaço com $(d-1)$ dimensões. Isto é permitido porque em $(d+2)$ dimensões também não há esta simetria. Daí, o motivo pelo qual obtemos diferentes sistemas físicos, tais como o átomo de hidrogênio e o oscilador harmônico, além da partícula relativística.

A invariância conforme restringe ainda mais a liberdade na escolha das Hamiltonianas ao exigir sistemas físicos para os quais a massa seja nula. Estas restrições não haviam sido impostas antes à teoria com dois tempos. Também não havia sido obtida a Hamiltoniana arbitrária com invariância por rotação e spin $N/2$ em nenhum outro lugar. Este resultado está na seção (5.6).

Referências

- [1] E.Witten, Nucl.Phys. B443, 85 (1995);
- [2] C. Vafa, Nucl. Phys. B469, 403 (1996);
- [3] I. Bars, Phys. Rev. D55, 257 (1997);
- [4] I. Bars, Phys. Rev. D58, 0660004 (1998);
- [5] I. Bars, Phys. Rev. D58, 0660006 (1998);
- [6] I. Bars, Phys. Rev. D58, 106004 (1998);
- [7] L.Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia, P. Howe, Phys. Lett. B 64, 435 (1976);
F. A. Berezin, M. S. Marinov, Ann. Phys. (NY) 104, 336 (1977);
L.Brink, P. Di Vecchia, P. Howe, Nucl. Phys.B 118 76 (1977);
P.S.Howe, S. Penati, M. Pernici, P.K. Townsend, Phys. Lett. B 215, 555 (1988);
- [8] M. Pierri, V.O.Rivelles, Phys. Lett. B 251, 421(1990);
- [9] V.O.Rivelles, L. Sandoval Jr, Class. Quantum Grav. 6, 1605 (1991);
- [10] I. A. Batalin, G. Vilkovisky, Phys. Lett. 69B, 309 (1977);
A. Batalin, G. Vilkovisky, Phys. Lett. 102 B, 27 (1981);
I. A. Batalin, E. S. Fradkin, Phys. Lett. 122B, 157 (1983);
I. A. Batalin, E. S. Fradkin, Phys. Lett. 128B, 303 (1983);
- [11] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. 21, 392 (1949);

- [12] S. Fubini, A.J. Hanson, R. Jackiw, Phys. Rev.D 7,1732 (1973);
- [13] T. Heinzl, "*Light-Cone Quantization: Foundations and Applications*", hep-th 000806 (2000);
- [14] H. Goldstein, "*Classical Mechanics*", Addison-Wesley, Reading, MA (1950);
- [15] P.A.M. Dirac, "*Lectures on Quantum Mechanics*", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964);
- [16] K. Sundermeyer, "*Constrained Dynamics*", Lect. Notes Phys. Vol. 169, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1982);
- [17] M. Henneaux, C. Teitelboim, "*Quantization of Gauge Systems*", Princeton University Press, New Jersey (1992);
- [18] D.M.Gitman, I.V. Tyutin, "*Quantization of Gauge Systems with Constraints*", Springer-Verlag (1990);
- [19] R.P. Feynmann, Acta Phys. Polonica, 24, 697 (1963);
- [20] L.D. Faddeev, V.N. Popov, Phys. Lett. 25B, 29 (1967);
L.D. Faddeev, Theor. Math. Phys. 1, 1 (1970);
- [21] P. Senjanovic', Ann. Phys. (N.Y), 100, 227 (1976);
- [22] P. van Nieuwenhuizen, G. Sterman, P.K. Townsend, Phys. Rev. D 17, 1501 (1978);
P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. 68, 191 (1981);
- [23] V.O. Rivelles, J.G. Taylor, Phys. Lett. 104B, 131 (1981);

- [24] W. Siegel, M. Rocek, Phys. Lett. 105B, 275 (1981);
- [25] M. Henneaux, Phys. Rep. 126, 1 (1985);
- [26] L.Landau, E.Lifchitz, "*Teoria do Campo*" - HEMUS Livraria Editora, São Paulo (1960);
- [27] M. Henneaux and C. Teitelboim, Ann. Phys. (NY) 143, 127 (1982);
- [28] A. O. Barut e Raczka, "*Theory of Group Representations and Applications* ", World Scientific, Singapore (1986).