

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

**Efeitos Térmicos**  
**na**  
**Teoria Quântica de Campos**  
**em**  
**(2+1) dimensões.**

Silvana Perez

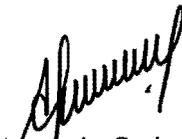
Tese apresentada ao  
IFUSP para a obtenção do  
grau de doutor em ciências.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes (IFUSP) - Orientador  
Prof. Dr. Horácio O. Girotti (UFRGS)  
Prof. Dr. Marcelo B. Hott (UNESP)  
Prof. Dr. Carlos Eugênio I. Carneiro (IFUSP)  
Prof. Dr. Fernando T. C. Brandt (IFUSP)



São Paulo  
2003



Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP



305M810T3849

530.143  
P438e  
D.  
ex. 1

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Perez, Silvana

Efeitos térmicos na teoria quântica de campos em (2 +  
1) dimensões. São Paulo, 2003

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo  
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes.  
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teorias de Chern-Simons;  
2. Teorias de calibre; 3. Blindagem;  
4. Coeficiente de Chern-Simons induzido;  
5. Teorias não comutativas.

USP/IF/SBI-037/2003

## Resumo

Efeitos térmicos em teorias de calibre em  $(2+1)$  dimensões são estudados em espaços onde as coordenadas podem ou não comutar. No caso comutativo, a dependência com a temperatura do tensor de polarização é calculada a um laço em teorias envolvendo tanto bósons quanto férmions. Como aplicação, são calculados os processos de blindagem em tais modelos, chegando ao interessante resultado de que cargas magnéticas não sofrem tais efeitos na  $QED_3$ . Uma prova válida em qualquer ordem de perturbação é desenvolvida, confirmando este comportamento. Em teorias não comutativas, são estudadas as correções a um laço ao coeficiente de Chern-Simons, sendo encontrado que não existe o fenômeno da mistura UV/IR na teoria Chern-Simons-Higgs. O comportamento assintótico de tal coeficiente é analisado no regime de altas temperaturas. Vários outros aspectos envolvendo os efeitos térmicos em teorias de Chern-Simons são explorados.

## Abstract

Thermal effects in  $(2 + 1)$ -dimensional gauge theories are studied in both commutative as well as noncommutative manifolds. In the first situation, the finite temperature polarization tensor is computed at one loop for fermionic and bosonic couplings. As an application, the screening masses are evaluated and it is found the surprising result that magnetic charges are not screened in  $QED_3$ . It is demonstrated that this result holds to any order in perturbation theory. In the noncommutative case, the one loop correction to the Chern-Simons coefficient is studied, and it is found that there is no UV/IR mixing in the Chern-Simons-Higgs model. The asymptotic behavior of such coefficient is analysed in the high temperature regime. Several other interesting aspects involving thermal effects of Chern-Simons theories are also discussed.

Dedico este trabalho aos meus pais: Carmela e José.

## Agradecimentos

Desejo agradecer:

Ao Prof. Dr. Marcelo Gomes, orientador desta tese, pela atenção dedicada às discussões dos problemas que surgiram ao longo do trabalho.

Ao prof. Dr. Ashok Das, co-orientador da tese, que com calma, paciência e dedicação, guiou-me ao longo do ano de estágio na *University of Rochester*, dando-me suporte e atenção mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao Prof. Dr. Jorge L. deLyra, que desde o início de minha vida acadêmica acompanhou-me, sempre incentivando-me a continuar e acreditar na minha capacidade.

Ao Prof. Dr. Josif Frenkel, pelo apoio e atenção demonstrados nestes anos.

À minha família: meus pais Carmela e José, meus irmãos Sandra, Toninho e Emerson, por terem me dado suporte e em certos momentos decisivos por terem me forçado a continuar diante de todas as diversidades. Ao Gabriel, por ter me ensinado o sentido do amor incondicional que nos impulsiona a seguir em frente.

Aos amigos, dentre eles Sergio, Ellen, Jessé, Ângela, Crispino, Marcia, Zi, Zul, Neli, Nara, Alex, Cida, que estiveram por perto sempre fazendo-me acreditar que valia a pena continuar.

Este trabalho foi financiado pela CAPES e UFPa.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Aspectos Gerais</b>	<b>7</b>
2.1	Formalismo de Tempo Imaginário . . . . .	7
2.2	Modelo de Chern-Simons . . . . .	14
2.3	Simetrias Discretas . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Processos de Blindagem</b>	<b>21</b>
3.1	Introdução . . . . .	21
3.1.1	Teoria da Resposta Linear . . . . .	21
3.1.2	Processo de Blindagem na $QED_4$ . . . . .	23
3.2	Resultados a um laço . . . . .	27
3.2.1	Tensor de Polarização no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs . . . . .	27
3.2.2	Tensor de Polarização na $QED_3$ com termo de Chern-Simons . . . . .	41
3.3	Massas Elétrica e Magnética . . . . .	43
3.3.1	Cálculos a um laço . . . . .	43
3.3.2	Cálculo exato na $QED_3$ com termo de Chern-Simons . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Coefficiente de Chern-Simons Induzido Não Comutativo</b>	<b>55</b>
4.1	Introdução . . . . .	55
4.2	Teorias de Campo Não Comutativas . . . . .	58
4.3	Resultados a um laço . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>75</b>

<b>A</b>	<b>Integrais Úteis</b>	<b>78</b>
A.1	Caso Comutativo . . . . .	78
A.2	Caso Não Comutativo . . . . .	82
	<b>Referências</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Os efeitos de temperatura começaram a ser incorporados à Teoria Quântica de Campos (TQC) em meados de 1950. Neste período, existia um esforço na direção de se entender melhor os sistemas quânticos de muitos corpos. Um dos principais trabalhos nesta linha foi apresentado por Matsubara em 1955 [1] e posteriormente tornou-se a base do formalismo de tempo imaginário. Em linhas gerais, o objetivo deste formalismo é unir em uma mesma abordagem a TQC e a Mecânica Estatística (ME), levando conseqüentemente em conta as diferentes características de sistemas bosônicos e fermiônicos: usando TQC pode-se considerar os efeitos das estatísticas dos campos envolvidos, através dos comutadores e anticomutadores, e usando a ME, com a escolha dos *ensembles*, pode-se introduzir efeitos térmicos ao sistema. A realização desta união dá-se através de uma generalização da teoria de campos usual, onde o tempo é rodado no plano complexo de uma maneira específica e passa a ser interpretado como temperatura. Como conseqüência, este formalismo é ideal para lidar com sistemas em equilíbrio, onde o tempo não assume papel importante. Um dos motivos do grande sucesso desta abordagem foi a possibilidade de se utilizar técnicas desenvolvidas na TQC usual para se estudar efeitos térmicos. Trabalhos subsequentes ao de Matsubara foram desenvolvidos e novos formalismos surgiram\*. Nas abordagens de caminho temporal fechado e Dinâmica de Campos Térmicos, por exemplo, não é necessária a interpretação do tempo como sendo temperatura.

Nesta tese apresentaremos vários estudos envolvendo os efeitos da temperatura em teorias de calibre em  $(2 + 1)$  dimensões, considerando sempre o

---

\*Vários livros que discutem estes formalismos podem ser encontrados na literatura [2, 3, 4, 5, 6, 7].

caso em que o grupo de simetria interno é abeliano, e fazendo a análise em dois possíveis espaços: o comutativo e o não comutativo. Os efeitos térmicos serão sempre calculados no formalismo de tempo imaginário.

Teorias de calibre em  $(2 + 1)$  dimensões têm comportamentos completamente diferentes do usual, em  $(3 + 1)$  dimensões. No plano, além da lagrangiana de Maxwell, podemos escrever um novo termo invariante de calibre e quadrático nas variáveis de campo, expresso por:

$$\mathcal{L}_{CS} \equiv \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda, \quad (1.1)$$

e conhecido como lagrangiana de Chern-Simons [8]. O parâmetro  $\kappa$  que aparece na definição acima é o coeficiente de Chern-Simons e comporta-se como um termo de massa para o campo de calibre  $A_\mu$ . Teorias cujas lagrangianas contenham a Eq. (1.1) apresentam características muito interessantes [9] e, em muitos casos, mesmo que um termo deste não exista na lagrangiana original, ele é induzido radiativamente. Por exemplo, na eletrodinâmica quântica (férmions interagindo com o termo de Maxwell) no plano,  $QED_3$ , ele surge das correções, já a um laço, ao propagador do campo de calibre devido ao termo de massa do campo fermiônico. Neste caso, pode-se demonstrar também que o termo de Chern-Simons e o termo de massa para os férmions comportam-se da mesma maneira com relação às simetrias discretas de paridade, inversão temporal e conjugação de carga: ambos mudam de sinal sob as transformações de paridade e inversão temporal e mantêm-se inalterados sob conjugação de carga.

Podemos, assim, estudar em  $(2 + 1)$  dimensões o modelo onde a lagrangiana de Chern-Simons, Eq. (1.1), é acoplada à  $QED_3$ . Outra possibilidade de teoria no plano corresponde ao acoplamento de  $\mathcal{L}_{CS}$  às lagrangianas de Maxwell e Higgs, respectivamente expressas por:

$$\mathcal{L}_M \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

e

$$\mathcal{L}_H \equiv |D_\mu \Phi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - v^2)^2, \quad (1.3)$$

onde definimos a derivada covariante como sendo  $D_\mu \Phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi$  e o valor esperado no vácuo do campo escalar  $v \equiv \langle |\Phi| \rangle \neq 0$ . O propagador livre, neste caso, adquire dois pólos, dificultando assim a análise dos processos de blindagem: sabe-se, da teoria de resposta linear, que as massas elétrica e

magnética, relacionadas com tais fenômenos, podem ser obtidas, em teorias onde o propagador completo desenvolva somente um pólo, das componentes  $(0, 0)$  e  $(i, j)$  do tensor de polarização. Se mais de um pólo continuar existindo no propagador completo, incluindo as correções radiativas, fica a questão de como identificar estas massas. Ainda classicamente, neste modelo surgem soluções tipo vórtice eletricamente carregados estáveis com energia finita, resultado não encontrado em teorias de Maxwell-Higgs em  $(3 + 1)$  dimensões e na  $QED_4$  [10, 11, 12, 13]. Devido a estas características, processos como o de blindagem de cargas, amplamente estudados em  $(3 + 1)$  dimensões, podem apresentar novos comportamentos no plano.

Independentemente do estudo de processos relacionados com a existência de massas eletromagnéticas e suas consequências, podemos nos concentrar diretamente no coeficiente de Chern-Simons induzido, extraído do limite onde o momento externo,  $p_\mu$ , se anula, da contribuição com quebra de paridade à auto-energia do campo de calibre [16]. Este estudo tem sido amplamente explorado ao longo das últimas décadas, inicialmente no formalismo usual, sem a inclusão de efeitos térmicos, e posteriormente à temperatura finita. Das análises sem envolver temperatura, vários resultados aparecem. Um dos mais importantes está associado com o teorema de Coleman-Hill [17] e diz que, em teorias abelianas não existem correções radiativas acima de um laço para o coeficiente de Chern-Simons. A prova deste teorema é baseada nas invariâncias de Lorentz e calibre da teoria e na analiticidade das amplitudes. Sempre que um destes pressupostos é violado o teorema deixa de valer. Exemplos nesta linha são teorias contendo partículas não massivas, onde divergências infravermelhas quebram a analiticidade em torno de pequenos momentos e teorias envolvendo temperatura onde sabe-se que tal analiticidade também não é respeitada [7]. A extensão do teorema para teorias não abelianas foi desenvolvida por Brandt, Das e Frenkel [18]. Cálculos diretos a dois laços confirmam estes comportamentos nas duas situações [19]. Em se tratando de teorias não abelianas, invariância de calibre grande obriga o coeficiente de Chern-Simons a ser quantizado (em unidades da constante de acoplamento). Resultados a um laço concordam com este pressuposto e portanto a ausência de correções em ordens superiores na constante de acoplamento é um resultado muito importante.

A inclusão de temperatura nos modelos torna a discussão sobre a invariância de calibre mais complicada: já a um laço existe uma dependência explícita com a temperatura o que, no caso de teorias não abelianas, implica em uma aparente quebra de tal invariância, uma vez que as correções ra-

diativas ao coeficiente de Chern-Simons passam a ser funções contínuas da temperatura. Este ainda é um problema em aberto, e estudos em  $(0 + 1)$  dimensões e em configurações particulares de campos abelianos em  $(2 + 1)$  dimensões indicam que a invariância de calibre da teoria pode ser obtida nestes modelos somente não perturbativamente [20].

Ainda com relação ao termo de Chern-Simons induzido dependente da temperatura  $T$ , outra questão relevante é a sua estrutura analítica. Como sabemos, a introdução da velocidade do banho térmico  $u^\mu$  altera a forma da dependência das amplitudes com os momentos externos. No caso da auto-energia do campo de calibre, por exemplo, surge uma dependência explícita em  $u \cdot p$  e  $(u \cdot p)^2 - p^2$  [7]. Em particular no caso do referencial de repouso do banho térmico, onde  $u^\mu \equiv (1, \vec{0})$ , tais componentes tornam-se  $u \cdot p \equiv p_0$  e  $(u \cdot p)^2 - p^2 \equiv |\vec{p}|^2$  e portanto, em geral, as contribuições relevantes têm comportamentos distintos com relação a  $p_0$  e  $\vec{p}$ . Entretanto, para modelos de Higgs em  $(3 + 1)$  dimensões, foi encontrado que quando as massas envolvidas nos laços bosônicos são diferentes, os limites estático e de onda longa são os mesmos [21]. Os modelos considerados não possuíam nenhum termo com quebra de paridade. Assim, esse estudo não traz nenhuma indicação de possíveis modificações na estrutura analítica quando o termo de Chern-Simons é incluído.

Até este ponto discutimos alguns dos principais aspectos envolvendo teorias de Chern-Simons no formalismo de teoria de campos usual. De um modo geral, correções ao coeficiente de Chern-Simons são esperadas em situações que envolvam modificações no comportamento de longas distâncias dos modelos em estudo. Isso acontece na teoria de campos a temperatura finita, como mencionamos, e também se o espaço subjacente é não comutativo [22]. O estudo da TQC em tais espaços foi inicialmente sugerido em meados de 1940 com a expectativa de resolver problemas de divergências ultravioletas, ao proporcionar um corte natural para a teoria nesta região de integração. Nas últimas décadas o estudo destes modelos ganhou um novo impulso vindo de teorias de cordas, onde certos limites reduzem o sistema a uma teoria de campos em um espaço não comutativo. Na teoria de campos de calibre em um espaço não comutativo, podemos encontrar qualitativamente, já no caso abeliano, muitos comportamentos similares às teorias de Yang-Mills. Por exemplo, o tensor  $F_{\mu\nu}$  em tais modelos é expresso por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_*, \quad (1.4)$$

onde o asterisco no comutador indica o produto Grönewold-Moyal [23]. Como consequência nestes espaços, de forma similar ao caso não abeliano, o coeficiente de Chern-Simons abeliano deve ser quantizado para preservar invariância de calibre [24]. Assim, o estudo deste coeficiente nestes modelos pode trazer novas perspectivas no entendimento de processos físicos.

Nesta tese iremos apresentar os trabalhos por nós realizados nas referências [25, 26, 27, 28] sobre alguns dos aspectos acima discutidos envolvendo teorias de Chern-Simons, mais especificamente os processos de blindagem e as correções radiativas ao coeficiente de Chern-Simons dependentes da temperatura. Inicialmente iremos estudar os processos de blindagem a um laço em teorias envolvendo férmions e bósons. Em ambos os casos, veremos que no regime de altas temperaturas somente um dos pólos do propagador sobrevive. Para férmions, iremos demonstrar um resultado interessante: muito embora na  $QED_3$  o termo de Chern-Simons assuma um papel importante, modificando intrinsecamente o seu comportamento eletromagnético, ele não é suficiente para fazer com que a massa magnética deixe de ser nula, comportamento este remanescente da  $QED_4$ . Neste caso, apresentaremos cálculos a dois laços que confirmam esta afirmação e, de uma forma mais geral, iremos desenvolver uma prova válida em qualquer ordem de perturbação.

Em uma segunda linha de trabalho, apresentaremos as correções radiativas ao coeficiente de Chern-Simons em teorias abelianas acopladas com campos escalares, tanto em espaços comutativos quanto não comutativos, à Temperatura Finita. No caso comutativo veremos que, para modelos tridimensionais envolvendo um termo com quebra de paridade o limite  $p_\mu \rightarrow 0$  não é único, muito embora as massas envolvidas no cálculo a um laço sejam diferentes. No caso não comutativo, estaremos considerando somente o limite estático. Veremos que no modelo de Chern-Simons puro acoplado com campo de Higgs não existe o fenômeno de mistura das divergências infravermelha-ultravioleta (IR/UV) para este termo (este nome é dado para o surgimento, em espaços não comutativos, de divergências em torno de pequenos momentos sempre que a equivalente contribuição comutativa apresente uma divergência para altos momentos). Em particular para o termo dependente da temperatura, estaremos considerando um específico limite  $p\theta T \rightarrow 0$  ( $p$  sendo o momento externo e  $\theta$  o parâmetro que mede a não comutatividade do espaço), e veremos que as contribuições planares e não planares comportam-se de maneira diferente com relação à temperatura. Resultados similares foram encontrados em um modelo envolvendo férmions de Majorana [29].

A tese será desenvolvida da seguinte maneira: no capítulo (2) iremos

discutir os dois principais aspectos explorados neste trabalho, ou seja, formalismo de tempo imaginário para o cálculo dos efeitos térmicos em teorias de campo e teorias de calibre em  $(2+1)$  dimensões; em (3) apresentaremos os cálculos envolvendo o espaço comutativo, mais especificamente o cálculo das massas físicas para os modelos de Maxwell-Chern-Simons-Higgs na fase de simetria quebrada e  $QED_3$  com termo de Chern-Simons; o capítulo (4) contém a análise da correção radiativa ao coeficiente de Chern-Simons a um laço no modelo de Chern-Simons puro acoplado a um campo de Higgs em um espaço não comutativo; os principais resultados e perspectivas de continuidade do trabalho serão apresentados em (5).

# Capítulo 2

## Aspectos Gerais

### 2.1 Formalismo de Tempo Imaginário

O formalismo de tempo imaginário consiste em uma generalização da teoria quântica de campos usual, na qual a variável temporal é rodada no plano complexo de tal forma a estar no eixo imaginário negativo. Com isso, o tempo passa a ser interpretado como temperatura, fazendo com que o formalismo assim desenvolvido seja mais apropriado para descrever sistemas estatísticos em equilíbrio. A seguir, iremos estudar detalhadamente estas afirmações.

Considere inicialmente um sistema mecânico descrito classicamente pela hamiltoniana  $H$ , independente do tempo. Na abordagem da mecânica estatística, a física deste sistema é obtida através do cálculo da matriz densidade  $\rho \equiv \rho(\beta)$ , definida em um particular *ensemble* através da função  $K$ , como:

$$\rho(\beta) \equiv e^{-\beta K}, \quad (2.1)$$

onde  $\beta = 1/(kT)$ , com  $T$  sendo a temperatura do sistema e  $k$  a constante de Boltzmann. Por exemplo, para o *ensemble* canônico,  $K = H$ . Já no *ensemble* grande-canônico,  $K = H - \mu N$ , onde  $N$  é o número de partículas do sistema e  $\mu$  o seu potencial químico [30]. Da expressão acima, vemos que  $\rho(\beta)$  satisfaz a equação de Bloch, expressa por:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = K\rho. \quad (2.2)$$

A partir de  $\rho$  podemos obter a função de partição  $Z$  que contém toda a

informação sobre o sistema estatístico, como sendo:

$$Z = \text{Tr} \rho. \quad (2.3)$$

Resolver o sistema significa determinar o traço acima, ou seja, somar  $\rho$  sobre todo o espectro de energias do sistema. O problema é que, na maioria dos casos, este espectro não é conhecido de maneira exata. Podemos então efetuar um cálculo perturbativo para obter  $Z$ . Consideramos que  $K$  possa ser escrito como  $K = K_0 + K_I$ , onde  $K_0$  é tal que  $Z(K_0)$  é conhecida e  $K_I$  é uma perturbação imposta ao sistema. Com isso, desenvolvemos uma teoria de perturbação de  $Z$  em torno de  $Z(K_0)$ .

Uma consequência destas hipóteses a respeito do sistema estatístico é que podemos definir uma nova função  $S \equiv S(\beta)$ , através de:

$$e^{-\beta K} = \rho \equiv e^{-\beta K_0} S(\beta), \quad (2.4)$$

de tal maneira que a equação de Bloch, expressa em termos de  $S$ , torna-se:

$$-\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = K_I S(\beta). \quad (2.5)$$

Como veremos a seguir, a expressão acima é similar à derivada com relação ao tempo do operador de evolução temporal  $\hat{U}(t, t')$  da teoria quântica, ou seja,  $S(\beta)$  é qualitativamente semelhante a  $\hat{U}(t, t')$  e esta será a essência da formulação da Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita.

Para entender melhor o que acabamos de ressaltar, vamos considerar um sistema quântico qualquer. Neste caso, os observáveis são expressos através de operadores em um espaço de Hilbert, com características que dependem da representação escolhida. Na representação de Schrödinger, por exemplo, eles são independentes do tempo. Já nas representações de Heisenberg e de interação eles são expressos, respectivamente, por:

$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (2.6)$$

e

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad (2.7)$$

onde  $\hat{O}_S$  é o operador na representação de Schrödinger. Como é claro da notação empregada, estamos considerando que a hamiltoniana do sistema

possa ser decomposta como  $H = H_0 + H_I$ . A relação entre  $\hat{O}_H(t)$  e  $\hat{O}_I(t)$  pode ser escrita com o uso do operador de evolução temporal  $\hat{U}(t_1, t_2)$ , como:

$$\hat{O}_H(t) = \hat{U}(0, t) \hat{O}_I(t) \hat{U}(t, 0). \quad (2.8)$$

Na equação acima estamos definindo  $\hat{U}(t_1, t_2)$  como sendo:

$$\hat{U}(t_1, t_2) = e^{i\hat{H}_0 t_1/\hbar} e^{-i\hat{H}(t_1-t_2)/\hbar} e^{-i\hat{H}_0 t_2/\hbar}, \quad (2.9)$$

satisfazendo a seguinte equação de movimento:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t') = \hat{H}_I(t) \hat{U}(t, t'), \quad (2.10)$$

onde  $\hat{H}_I(t)$  é o operador  $H_I$  na representação de interação. Agora, ao compararmos as Eqs. (2.5) e (2.10) podemos interpretar a primeira delas como sendo a equação de movimento para o operador  $\hat{S}$  em uma representação “modificada” de interação. Para isso, basta realizarmos uma rotação do tempo para o eixo imaginário negativo no sentido horário,  $t \rightarrow -i\hbar\beta$ , e mapearmos  $\hat{H} \rightarrow \hat{K}$ . Com estas mudanças, podemos estudar a Mecânica Estatística na abordagem quântica e esta é a idéia básica contida no formalismo de tempo imaginário. Poderíamos começar a apresentação a partir deste ponto, simplesmente definindo uma nova representação de interação a partir de:

$$\hat{O}_K(\tau) = e^{\hat{K}_0 \tau} \hat{O}_S e^{-\hat{K}_0 \tau}. \quad (2.11)$$

Como já foi dito, o ponto de partida deste formalismo é a generalização proposta na Eq. (2.11). Nesta linha, definimos também a representação “modificada” de Heisenberg como:

$$\begin{aligned} \hat{O}_H(\tau) &\equiv e^{\hat{K}\tau} \hat{O}_S e^{-\hat{K}\tau} \\ &= \hat{U}(0, \tau) \hat{O}_K(\tau) \hat{U}(\tau, 0), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde o operador de evolução temporal (modificado) é expresso por:

$$\hat{U}(\tau_1, \tau_2) \equiv e^{\hat{K}_0 \tau_1} e^{-\hat{K}(\tau_1 - \tau_2)} e^{-\hat{K}_0 \tau_2}, \quad (2.13)$$

e obedece à seguinte evolução temporal:

$$-\frac{\partial \hat{\mathcal{U}}(\tau, \tau')}{\partial \tau} = \hat{K}_I(\tau) \hat{\mathcal{U}}(\tau, \tau'). \quad (2.14)$$

O operador densidade neste novo formalismo passa a ser também uma generalização da Eq. (2.1), expressa por:

$$\hat{\rho}(\beta) \equiv e^{-\hat{K}\beta} = e^{-\hat{K}_0\beta} \hat{\mathcal{U}}(\beta, 0), \quad (2.15)$$

de tal forma que os observáveis da teoria passam a ser escritos como médias estatísticas nos *ensembles* especificados por  $\hat{\rho}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle &\equiv \langle \mathcal{O} \rangle_\beta \\ &= \frac{\text{Tr } \hat{\rho} \hat{\mathcal{O}}}{\text{Tr } \hat{\rho}} = \frac{\text{Tr } \hat{\rho} \hat{\mathcal{O}}}{Z}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $Z$  é a função de partição do sistema. A partir desta formulação, podemos interpretar a TQC a  $T \neq 0$  como sendo o caso usual, mas com os observáveis sendo calculados como médias nos *ensembles* expressos por  $\rho$  e  $K$ , ao invés de médias nos estados de vácuo. Novamente, de maneira análoga ao caso clássico, encontrar  $Z$  significa calcular o traço da matriz densidade. Quanticamente esta operação é realizada sobre todos os autoestados de  $\hat{H}$ , que na maioria dos casos não são conhecidos de maneira exata. Faz-se necessário, uma vez mais, o uso de técnicas perturbativas.

Também podemos obter, em analogia ao formalismo usual, os mesmos resultados utilizando o método de integração funcional. Somente para ressaltar com um novo enfoque os principais conceitos envolvidos até aqui, vamos apresentar a seguir esta análise. Considere a função de partição da Mecânica Estatística, expressa a partir da função densidade como:

$$Z(\beta) = \text{Tr } \hat{\rho}(\beta) = \text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}. \quad (2.17)$$

Por simplicidade, estamos considerando o ensemble canônico, onde  $K = H$ . Neste caso, a operação de traço deve ser calculada em uma base completa qualquer. Normalmente, considera-se esta como sendo o conjunto completo de autovetores de  $\hat{H}$ . Ao invés disso, vamos considerar o conjunto completo de autovetores do operador de campo  $\hat{\phi}$  (vale salientar que, porque estamos

interessados em analisar apenas aspectos gerais do formalismo, consideraremos o caso bosônico; sempre que o comportamento difira qualitativamente para o caso fermiônico, iremos ressaltar). Obtemos assim:

$$Z(\beta) = \int d\phi \langle \phi | \hat{\rho}(\beta) | \phi \rangle. \quad (2.18)$$

Novamente aqui podemos facilmente identificar  $\hat{\rho}(\beta)$  como sendo um operador de evolução temporal para tempos imaginários. Em outras palavras, existe uma estrutura similar entre  $Z(\beta)$  e a amplitude de transição da TQC usual [31]. Assim, se fizermos a generalização do operador evolução temporal proposta na Eq. (2.13) e seguirmos os passos da integração funcional chegaremos a [5, 6]:

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E}, \quad (2.19)$$

onde  $\mathcal{L}_E$  é a densidade de lagrangiana associada com  $\mathcal{H}$ , no espaço euclidiano. A partir da Eq. (2.19), podemos expressar a média estatística (2.16) em termos de uma integração funcional. Assim, a função de partição  $Z$  e consequentemente quaisquer observáveis estatísticos, como por exemplo pressão e número médio de partículas, podem ser calculados, senão de forma exata, pelo menos perturbativamente com o uso de técnicas similares às desenvolvidas nos métodos tradicionais. Podemos ainda obter as funções de correlação de maneira análoga às funções de Green da TQC. Para isso, basta usarmos a definição do funcional gerador da funções de Green da teoria, neste caso expresso por:

$$Z(\beta; j) \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\mathcal{L}_E - j(\vec{x}, \tau)\phi]}, \quad (2.20)$$

de tal forma que a função de Green  $\mathcal{G}(\tau_1, \tau_2)$ , pode ser obtida como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z(\beta; j)}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} \Big|_{j=0} &= \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}\phi \phi_{\tau_1} \phi_{\tau_2} e^{-S_E(\beta)} \\ &\equiv \mathcal{G}(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde por simplicidade estamos suprimindo a dependência em  $\vec{x}$  das funções acima. Também definimos a ação  $S_E(\beta)$  como sendo:

$$S_E(\beta) \equiv \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E. \quad (2.22)$$

Nesta linha muitos resultados da abordagem usual de TQC para o cálculo de diagramas de Feynman podem ser utilizados a  $T \neq 0$ . Alguns exemplos são o teorema de Wick e o cancelamento de diagramas desconexos [32]. A principal diferença aparece no fato de que nas integrais temporais para  $T \neq 0$  o tempo é considerado num intervalo finito ao invés de variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ , como na abordagem usual. Uma consequência direta deste fato é que na transformada de Fourier de  $\mathcal{G}$  as frequências associadas com o tempo finito são múltiplos inteiros de  $\frac{\pi}{\beta}$ . Mais especificamente, através de um cálculo direto [7], obtém-se que, para bósons, elas são dadas por:

$$w_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (2.23)$$

e para férmions:

$$w_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad (2.24)$$

que são conhecidas como as frequências de Matsubara [32, 33]. Pode-se ainda demonstrar que, no caso bosônico, as variáveis de campo satisfazem condições de contorno periódicas com período  $\beta$  na componente temporal e no caso fermiônico, antiperiódicas [7]. Em resumo, para uma análise perturbativa no formalismo de tempo imaginário, podemos utilizar as mesmas técnicas desenvolvidas na TQC usual. Os vértices da teoria não se alteram; já para os propagadores, devemos considerar as componentes temporais dos quadrimomentos como sendo iguais a  $w_n$ .

Como um exemplo, considere a teoria  $\phi^4$ , expressa pela seguinte densidade de lagrangiana no espaço de Minkowski:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.25)$$

O propagador do campo  $\phi$  é dado, no espaço euclidiano, por:

$$\Delta(k) = \frac{1}{k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2} \equiv \frac{1}{w_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}, \quad (2.26)$$

com  $w_n$  sendo as frequências de Matsubara, neste caso expressas pela Eq. (2.23). Já os vértices da teoria são os usuais, ou seja,

$$\text{vértice quadrilinear} \rightarrow \frac{\lambda}{4!}. \quad (2.27)$$

A correção de massa a um laço é escrita como:

$$\begin{aligned} -\Delta m^2 &= -\frac{\lambda}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2} \\ &\equiv -\frac{\lambda}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{w_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Note que, uma vez que as energias assumem valores específicos neste formalismo, dados pelas Eqs. (2.23) e (2.24), estamos utilizando o seguinte mapeamento para as variáveis de integração

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (2.29)$$

As somas envolvidas no cálculo acima podem ser avaliadas sem dificuldades [5, 6]. Já as integrais restantes nas componentes espaciais são mais complicadas e em geral requerem o uso de aproximações, como por exemplo os limites de alta e baixa temperaturas. Nos capítulos seguintes apresentaremos em detalhes alguns destes cálculos. Assim, neste exemplo, para o termo dependente da temperatura, obtemos [7]:

$$\Delta m_T^2 = \frac{\lambda}{24\beta^2} + \mathcal{O}(\beta m). \quad (2.30)$$

Podemos ainda calcular observáveis termodinâmicos da teoria. Neste caso, precisamos determinar a função de partição  $Z$ . Novamente, em uma teoria interagente, este cálculo somente é possível perturbativamente. Assim temos:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0} e^{-S_E^I} \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (S_E^I)^l \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0}} \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (S_E^I)^l. \end{aligned} \quad (2.31)$$

No cálculo que segue a partir deste ponto usamos, de maneira análoga à TQC sem incluir temperatura, a técnica diagramática para obter  $\ln Z$  ordem a ordem na constante de acoplamento, ou seja,

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln \left[ \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0} \right] + \ln \left[ \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \langle (S_I)^l \rangle}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^0}} \right] \\ &\equiv \ln Z_0 + \ln \left[ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \langle (S_I)^l \rangle_{(0,\beta)} \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde o índice  $(0, \beta)$  aparecendo em  $\langle (S_I)^l \rangle$  indica que devemos considerar as médias com relação ao *ensemble* especificado por  $H_0$  e  $\beta$ .

O último ponto que gostaríamos de ressaltar é quanto à estrutura analítica da Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita. Como sabemos, a introdução da velocidade do banho térmico possibilita uma nova dependência das amplitudes. No caso da auto-energia do campo de calibre, por exemplo, surge uma dependência explícita em  $u \cdot p$  e  $\sqrt{(u \cdot p)^2 - p^2}$  [7], o que no referencial de repouso do banho térmico, torna-se  $p_0$  e  $|\vec{p}|$ . Isto não é nenhum problema, visto que este comportamento tem consequências físicas naturais. Como veremos no capítulo seguinte, certos limites em torno da origem do plano energia-momento estão associados com processos físicos bem específicos. O processo de blindagem de cargas dentro de um plasma, por exemplo, está associado com o limite estático, onde  $p_0 = 0$  e  $\vec{p} \rightarrow 0$ . Existe também outro limite, conhecido como limite de onda longa, onde  $\vec{p} = 0$  e  $p_0 \rightarrow 0$ , relacionado com oscilações dentro de um plasma.

## 2.2 Modelo de Chern-Simons

Antes de discutirmos teorias de Chern-Simons propriamente ditas, vale a pena relembrar alguns fatos de teorias de calibre em geral. Considere, assim, uma teoria representando férmions livres em uma dimensão  $D$  qualquer. A lagrangiana deste modelo é a de Dirac, expressa por:

$$\mathcal{L}_D^{(0)} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x). \quad (2.33)$$

Esta lagrangiana é invariante sob uma transformação de calibre global, ou seja,

$$\delta\psi = i\alpha\psi, \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}, \quad (2.34)$$

onde  $\alpha = \text{constante}$  é o parâmetro da transformação. Podemos promover esta invariância de calibre global a uma invariância de calibre local (com  $\alpha \equiv \alpha(x)$ ), através de um campo de calibre auxiliar  $A_\mu$ , que se transforma como:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha. \quad (2.35)$$

Incluimos este novo campo na teoria de forma a preservar a sua invariância de calibre local, através de uma derivada covariante, ou seja,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.36)$$

de tal forma que a nova teoria agora é dada por

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x). \quad (2.37)$$

Podemos ainda dar uma dinâmica para este campo de calibre. A forma usual de ser fazer isso é obrigando-o a obedecer a dinâmica imposta pelas equações de Maxwell. Neste caso, a sua lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

e a lagrangiana total da teoria torna-se:

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_M. \quad (2.39)$$

A teoria descrita por  $\mathcal{L}_T$  é a eletrodinâmica.

Porém no plano, isto é, em  $(2 + 1)$  dimensões, existe um outro possível termo quadrático no campo de calibre que, assim como o termo de Maxwell, também respeita invariância de Lorentz e de calibre. Este termo é dado pela Eq. (1.1), ou seja,

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu\partial^\nu A^\lambda. \quad (2.40)$$

A teoria descrita pela Eq. (2.40) é conhecida como teoria de Chern-Simons [9] e tem características próprias [34], como veremos a seguir. Em primeiro lugar,  $\mathcal{L}_{CS}$  é de primeira ordem nas derivadas espaço-temporais. Desta forma, é de se esperar que a dinâmica do modelo tenha uma estrutura consideravelmente

diferente da imposta pela lagrangiana de Maxwell. De fato, ao calcularmos as equações de Euler-Lagrange, chegamos a:

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.41)$$

ou seja, a teoria admite somente soluções com configurações triviais de campo, se não estiver acoplada a algum tipo de matéria ou, pelo menos, que tenha um novo termo cinético, modificando as suas equações de movimento. Neste texto apresentaremos algumas possibilidades: acoplamento com uma corrente  $J_\mu$  e com um campo de Higgs, e inserção de um termo de Maxwell.

Começando por acoplar ao campo de Chern-Simons uma densidade de corrente  $J_\mu$ , temos:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{CS} - A_\mu J^\mu. \quad (2.42)$$

Neste caso a equação de movimento torna-se:

$$J^\mu = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}, \quad (2.43)$$

ou, em termos de componentes,

$$\rho = \kappa B,$$

$$J^i = \kappa \epsilon^{ij} E_j. \quad (2.44)$$

onde  $B$  e  $\vec{E}$  representam os campos magnético e elétrico respectivamente. Aqui notamos um resultado interessante: o acoplamento de Chern-Simons pode ser visto como um vínculo ao sistema, ou seja, ele associa um fluxo de campo magnético  $B$  à densidade de corrente  $\rho$ . Sempre que houver um, o outro deverá aparecer também. A referência [34] traz uma boa discussão das consequências deste acoplamento.

Uma segunda possibilidade seria unir  $\mathcal{L}_M$ , Eq. (1.2), a  $\mathcal{L}_{CS}$ . Neste caso a equação de movimento torna-se:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.45)$$

Em termos do campo de Maxwell, podemos interpretar a introdução do termo de Chern-Simons,  $\mathcal{L}_{CS}$ , como um mecanismo para geração de massa para o campo  $A_\mu$  que não depende da escolha de calibre. Existem duas maneiras de

entender melhor esta afirmação. Uma é olhar diretamente para a equação de movimento acima, através do uso de um campo auxiliar  $\bar{F}^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}$ . Ao invés disso, já pensando na teoria quântica, vamos examinar o propagador do modelo, expresso, no espaço euclidiano, por:

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 + \kappa^2} \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{p_\lambda}{p^2} \right] + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2}, \quad (2.46)$$

onde estamos considerando um calibre covariante tipo Lorentz e  $p \equiv (2\pi nT, \vec{p})$ . Podemos identificar a massa do campo de calibre,  $m_{A_\mu}$ , como sendo o pólo do propagador, ou seja,

$$m_{A_\mu} = \kappa. \quad (2.47)$$

Neste contexto, vale lembrar que existe um outro mecanismo de geração de massa para o campo  $A_\mu$ , conhecido como Mecanismo de Higgs, associado com a quebra espontânea de simetria. Como veremos, juntando estas duas possibilidades, obtemos uma teoria com características próprias. Considerando este caso, temos a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{MCSH} \equiv \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_H, \quad (2.48)$$

onde  $\mathcal{L}_H$  é expresso pela Eq (1.3), ou seja,

$$\mathcal{L}_H = |D_\mu \Phi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - v^2)^2. \quad (2.49)$$

Podemos, ainda, expandir o campo escalar em torno do seu valor esperado no vácuo,  $\langle |\Phi| \rangle = v$ , como  $\Phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\chi)$ . Fazendo isso e considerando o calibre  $R_\xi$ , ou seja,

$$\mathcal{L}_{FG} = -\frac{1}{2\xi} \left( \partial_\mu A^\mu + \xi e \sqrt{2} v \chi \right)^2, \quad (2.50)$$

a lagrangiana  $\mathcal{L}_{MCSH}$  torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCSH} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \\ &- e \sigma \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi A_\mu + \frac{e^2}{2} (\sigma^2 + \chi^2 + 2\sqrt{2} v \sigma) A_\mu A^\mu \end{aligned}$$

$$- \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}v\sigma(\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{16}(\sigma^2 + \chi^2)^2. \quad (2.51)$$

Com esta escolha de calibre, o termo bilinear  $\sqrt{2}v\chi\partial_\mu A^\mu$ , que mistura o bóson de Goldstone ao campo de calibre, desaparece. Estamos também definindo as seguintes massas:

$$m^2 = 2e^2v^2, \quad m_\sigma^2 = \lambda v^2, \quad m_\chi^2 = \xi m^2. \quad (2.52)$$

O propagador do campo  $A_\mu$  é dado por [25]:

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{(p^2 + m_+^2)(p^2 + m_-^2)} \times \left[ \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu \frac{(1 - \xi)(p^2 + m^2) - \xi\kappa^2}{p^2 + \xi m^2} - \kappa\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p_\lambda \right], \quad (2.53)$$

com

$$m_\pm^2 = \frac{\kappa^2 + 2m^2 \pm |\kappa|\sqrt{\kappa^2 + 4m^2}}{2}. \quad (2.54)$$

A teoria descrita por  $\mathcal{L}_{MCSH}$  possui muitas propriedades interessantes, algumas delas completamente diferentes das existentes no acoplamento do campo de Maxwell com o campo de Higgs. Olhando diretamente para o propagador (2.53), por exemplo, podemos notar a presença agora de duas massas físicas,  $m_\pm$ . Este resultado era, de certa forma, esperado, uma vez que introduzimos na teoria dois mecanismos de geração de massa para o campo de calibre: a massa topológica  $\kappa$  e a massa gerada via mecanismo de Higgs. Algumas questões surgem devido a esta propriedade, como por exemplo, como fazer a análise dos processos de blindagem, já que as massas físicas com eles associadas podem ser obtidas dos pólos do propagador. Deixaremos a análise deste ponto para ser explorada mais profundamente no próximo capítulo.

Outra característica está associada com a existência de soluções estáveis com energia finita. Em  $(2 + 1)$  dimensões, sabe-se que as teorias de campo de Maxwell acoplado com campo de Higgs, tanto abelianas [10] quanto não abelianas [11], não admitem soluções tipo vórtice eletricamente carre-

gado com o comportamento acima\*. Já a inserção, nestes modelos, de um termo de Chern-Simons altera completamente esta estrutura, possibilitando a existências de tais soluções [12, 13].

## 2.3 Simetrias Discretas

Outro aspecto interessante a ser discutido é a questão das simetrias discretas. Para fazer esta análise, vamos considerar a  $QED_3$  com a inserção de um termo de Chern-Simons, na representação de Dirac de menor dimensionalidade para as matrizes gama.

A transformação de paridade em  $(2+1)$  dimensões tem que ser redefinida, uma vez que a usual, levando  $\vec{x}$  em  $-\vec{x}$ , corresponde no plano a uma rotação. Assim, esta transformação deve ser tal que somente uma das componentes espaciais se altere. Neste caso, podemos escolher, sem perda de generalidade, por exemplo,

$$x_1 \rightarrow -x_1, \quad x_2 \rightarrow x_2. \quad (2.55)$$

Para garantir que o termo cinético mude no máximo por um sinal, fazemos com que  $A_1$  seja a única componente do campo de calibre que se altera nesta transformação e conseqüentemente, pode-se facilmente demonstrar que, sob esta transformação, o termo de Chern-Simons muda de sinal. Já o campo  $\psi$  transforma-se sob paridade como:

$$\psi(x_1, x_2, t) \rightarrow \gamma^1 \psi(-x_1, x_2, t), \quad (2.56)$$

alterando assim o sinal do termo de massa para o campo fermiônico. Sob inversão temporal, tanto o termo de Chern-Simons quanto o termo de massa para o campo fermiônico mudam de sinal, já que, neste caso,  $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$  e  $\psi \rightarrow \gamma^2 \psi$ . Somente a transformação de carga, expressa por:

$$(\gamma^\mu)^T = -C^{-1} \gamma^\mu C, \quad (2.57)$$

---

\*Um vórtice é o análogo, em  $(2+1)$  dimensões, do monopólo magnético em  $(3+1)$  dimensões [35]. Monopólos magnéticos passaram a ser incorporados à eletrodinâmica clássica de Maxwell a partir de estudos feitos por Dirac [36] em meados de 1930 e possibilitaram uma explicação, a nível quântico, da quantização da carga elétrica. Mais tarde 't Hooft incorporou esta análise às teorias de Yang-Mills [37].

mantém a lagrangiana  $\mathcal{L}_T$  invariante. Podemos concluir daí que o termo de Chern-Simons e o termo de massa do campo fermiônico estão relacionados entre si. Uma consequência disso é que em uma análise perturbativa, correções radiativas para o termo de Chern-Simons podem ser geradas a partir do termo de massa fermiônico e vice-versa.

# Capítulo 3

## Processos de Blindagem

### 3.1 Introdução

#### 3.1.1 Teoria da Resposta Linear

O objetivo da teoria da resposta linear é calcular a alteração sofrida por um sistema, inicialmente em equilíbrio térmico, devido à uma pequena perturbação externa. A correção é medida, em primeira ordem na variável externa, através da variação na média estatística dos observáveis. Apresentaremos a seguir as linhas gerais desta teoria. Este tipo de discussão pode ser encontrado em vários livros didáticos [3, 5, 6]. Nós seguiremos o estudo desenvolvido em [3].

Vamos considerar um sistema quântico em equilíbrio, expresso, na representação de Schrödinger pelo operador hamiltoniana  $\hat{H}$  independente do tempo e pelo vetor de estado  $|\psi_S(t)\rangle$ . Agora, suponhamos que em  $t = t_0$  uma fraca perturbação externa ao sistema,  $H^{ext}$ , seja ligada. Devido a esta mudança, o vetor de estado passa de  $|\psi_S(t)\rangle$  para  $|\bar{\psi}_S(t)\rangle$ . A evolução temporal destes vetores é governada pelas equações:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H} |\psi_S(t)\rangle, \quad (3.1)$$

e

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\psi}_S(t)\rangle = [\hat{H} + \hat{H}^{ext}(t)] |\bar{\psi}_S(t)\rangle. \quad (3.2)$$

No primeiro caso, isto é, para o sistema não perturbado, a solução de (3.1) é dada por:

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi_S(0)\rangle. \quad t < t_0 \quad (3.3)$$

Já para  $t > t_0$ , vamos considerar que a solução da equação da Eq. (3.2) possa ser escrita como:

$$|\bar{\psi}_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}(t)|\psi_S(0)\rangle, \quad (3.4)$$

com  $\hat{A}(t) = 1$  para  $t \leq t_0$ . Para que (3.4) satisfaça (3.2),  $\hat{A}(t)$  deve obedecer à seguinte equação:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}(t) = \hat{H}_H^{ext}(t)\hat{A}(t), \quad (3.5)$$

onde  $\hat{H}_H^{ext}(t) \equiv e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{H}^{ext}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  é o operador hamiltoniana externa na representação de Heisenberg. Se considerarmos que  $\hat{H}^{ext}$  seja pequeno, então  $\hat{A}(t)$ , até primeira ordem em  $\hat{H}^{ext}$ , pode ser expresso como:

$$\hat{A}(t) = 1 - i\hbar^{-1} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_H^{ext}(t'), \quad (3.6)$$

de tal forma que o novo vetor de estado, Eq. (3.4), torna-se:

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}_S(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}(t)|\psi_S(0)\rangle \\ &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left[ 1 - i\hbar^{-1} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_H^{ext}(t') \right] |\psi_S(0)\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Com este resultado podemos calcular o valor esperado de um observável qualquer  $\hat{O}$  no estado final como sendo:

$$\begin{aligned} \langle\hat{O}(t)\rangle &\equiv \langle\bar{\psi}_S(t)|\hat{O}|\bar{\psi}_S(t)\rangle \\ &= \langle\hat{O}_H\rangle_{n.p.} + i\hbar^{-1} \int_{t_0}^t dt' \langle[\hat{H}_H^{ext}(t'), \hat{O}_H(t)]\rangle_{n.p.}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde estamos considerando somente termos lineares em  $\hat{H}_H^{ext}$  e o índice  $n.p.$  indica que a média está sendo tomada com relação ao sistema não perturbado. Além disso, o símbolo  $[, ]$  indica o comutador. Da expressão acima, obtemos a variação sofrida por  $\hat{O}$  como sendo:

$$\begin{aligned}\delta\langle\hat{O}(t)\rangle &\equiv \langle\hat{O}(t)\rangle - \langle\hat{O}(t)\rangle_{n.p.} \\ &= i\hbar^{-1} \int_{t_0}^t dt' \langle[\hat{H}_H^{ext}(t'), \hat{O}_H(t)]\rangle_{n.p.},\end{aligned}\quad (3.9)$$

o que, em termos do operador densidade  $\hat{\rho}$  e da função de partição  $Z$  pode ser escrito como:

$$\delta\langle\hat{O}(t)\rangle = i\hbar^{-1} Z^{-1} \int_{t_0}^t dt' \text{Tr} \hat{\rho} [\hat{H}_H^{ext}(t'), \hat{O}_H(t)]. \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Processo de Blindagem na $QED_4$

Como exemplo, considere um plasma a temperatura  $T$ , onde são colocadas duas cargas elétricas clássicas pontuais  $Q_1$  e  $Q_2$  nas posições  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ , respectivamente. A variação na energia dentro do plasma é proporcional a:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \sim \int d^3x \left[ \vec{E}_1^{cl}(\vec{x}_1, \vec{x}) \cdot \langle\vec{E}_2\rangle(\vec{x}_2, \vec{x}) + \vec{E}_2^{cl}(\vec{x}_2, \vec{x}) \cdot \langle\vec{E}_1\rangle(\vec{x}_1, \vec{x}) \right], \quad (3.11)$$

onde  $\vec{E}_i^{cl}$ ,  $i = 1, 2$  são os campos elétricos clássicos (obedecendo, portanto às equações de Maxwell) gerados por  $Q_1$  e  $Q_2$ , e  $\vec{E}_i$  é o campo dentro do plasma (já considerando o efeito da carga  $i$ ).

Uma vez que  $\vec{E}_i^{cl}$ ,  $i = 1, 2$ , são conhecidos da teoria clássica, precisamos somente calcular  $\langle\vec{E}_i\rangle$ . Para isso, vamos utilizar a teoria de resposta linear. Neste caso,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}'$  e  $\mathcal{H}^{ext}$  são as densidades de hamiltoniana dos sistemas não perturbado, perturbado e externo, respectivamente dadas por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{B}^2, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2} (\vec{E} + \vec{E}^{cl})^2 + \frac{1}{2} \vec{B}^2, \quad (3.13)$$

e

$$\mathcal{H}^{ext} = \vec{E} \cdot \vec{E}^{cl} + \frac{1}{2} (\vec{E}^{cl})^2, \quad (3.14)$$

devido à presença de uma carga  $Q$  no plasma. A variação na  $i$ -ésima componente do campo elétrico no plasma devido à presença da carga é expressa, pela teoria de resposta linear, através da Eq. (3.10), como sendo:

$$\delta\langle\hat{E}_i(\vec{x}, t)\rangle \sim -i \int_0^t dt' \int d^3x' E_j^{cl}(\vec{x}') \text{Tr}\hat{\rho}[\hat{E}_i(\vec{x}, t), \hat{E}_j(\vec{x}', t')]\theta(t-t'), \quad (3.15)$$

onde a função  $\theta(t-t')$  não altera a expressão e foi colocada de modo a facilitar a identificação do comutador acima com as funções de Green da teoria. Os passos seguintes no cálculo de  $\delta\langle\hat{E}_i(\vec{x}, t)\rangle$  envolvem escrever os campos  $E_\mu$  em termos do potencial vetor  $A_\mu$ , a imposição das regras de comutação para estes campos e a utilização das propagadores e funções de Green para o campo  $A_\mu$ . Estas contas já foram apresentadas na literatura sob vários enfoques\*. Assim, sem entrar em detalhes, pode-se demonstrar que:

$$\langle\hat{E}_i(\vec{x})\rangle = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} E_j^{cl}(\vec{k}) k_i k_j D_{00}^R(0, \vec{k}). \quad (3.16)$$

Aqui  $D_{00}^R$  representa a função de Green retardada da teoria e estamos considerando um calibre covariante qualquer tipo Lorentz. Finalmente, se incluímos as correções radiativas provenientes da teoria quântica, o potencial entre duas cargas pontuais  $Q_1$  e  $Q_2$  separadas por uma distância  $R$  dentro do plasma, Eq. (3.11), torna-se:

$$V(\vec{R} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2) = Q_1 Q_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\vec{k}^2 + \Pi_{00}(0, \vec{k})}, \quad (3.17)$$

com  $\Pi_{\mu\nu}$  sendo o tensor de polarização, satisfazendo à seguinte decomposição:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi_1 P_{\mu\nu} + \Pi_2 Q_{\mu\nu}, \quad (3.18)$$

onde

$$P_{\mu\nu} = \tilde{\delta}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{\tilde{p}^2}, \quad Q_{\mu\nu} = \frac{p^2}{\tilde{p}^2} \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu, \quad (3.19)$$

com

$$\bar{u}_\mu = u_\mu - \frac{u \cdot p}{p^2} p_\mu, \quad \tilde{p}_\mu = p_\mu - (u \cdot p) u_\mu, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu, \quad (3.20)$$

---

\*Veja, por exemplo, a referência [5].

e  $u_\mu$  sendo a velocidade do banho térmico (no referencial de repouso expressa por  $u_\mu \equiv (1, \vec{0})$ ). Desta forma as componentes  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são dadas respectivamente por  $\Pi_1 = \Pi_{ii}$  e  $\Pi_2 = \Pi_{00}$ . Note que, uma vez que o tensor de polarização envolvido na integração em (3.17) deve ser considerado em  $k_0 = 0$ , estamos interessados no limite estático desta amplitude.

Para interpretar o resultado expresso em (3.17), vamos considerar o caso onde  $R \gg 0$ . Neste limite, o termo dominante na integral (3.17) vem de  $\vec{k} \sim 0$ . Assim, definindo a massa elétrica  $m_{el}$  como sendo:

$$m_{el}^2 \equiv \Pi_{00}(0, \vec{0}), \quad (3.21)$$

a Integral (3.17) torna-se:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\vec{k}^2 + \Pi_{00}(0, \vec{k})} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_{el}^2} \sim \frac{e^{-m_{el}R}}{R}, \quad (3.22)$$

ou seja, é um potencial de Yukawa. Uma interpretação deste resultado é que o plasma interage com a partícula carregada amortecendo o seu efeito a longas distâncias: parte dos íons livres com carga negativa dentro do plasma “blindam” o efeito das cargas positivas livres. Este fenômeno é conhecido como blindagem (figura (3.1)). Podemos também estudar o efeito de interação de campos magnéticos clássicos com o plasma. Neste caso, obtemos uma expressão muito semelhante à Eq. (3.22), com  $m_{el}$  sendo trocado pela massa magnética, definida por:

$$m_{mag}^2 \equiv \Pi_1 = \Pi^{ii}(0, \vec{0}). \quad (3.23)$$

O efeito de blindagem foi extensamente estudado em (3+1) dimensões e vários resultados são conhecidos. Na  $QED_4$ , por exemplo, as massas físicas foram calculadas até ordem  $eT$  em [14, 15], como sendo:

$$m_{el} = \frac{eT}{\sqrt{3}} + \mathcal{O}(e^2T), \quad m_{mag} = 0. \quad (3.24)$$

Já para a eletrodinâmica escalar, as massas físicas foram calculadas em [38] e são dados por:

$$m_{el} = \frac{eT}{\sqrt{3}} + \mathcal{O}(e^2T), \quad m_{mag} = 0. \quad (3.25)$$

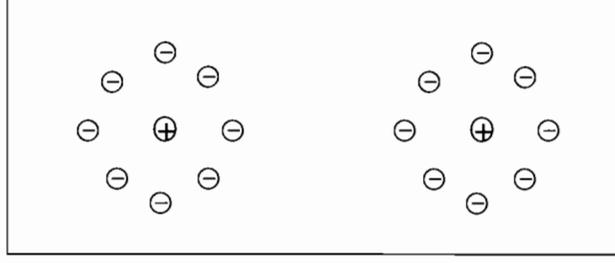


Figura 3.1: Fenômeno de blindagem dentro do plasma.

Neste capítulo faremos uma análise do processo de blindagem em  $(2+1)$  dimensões. Este estudo é interessante e como veremos, apresenta novos resultados com relação ao caso quadridimensional por vários motivos. Qualitativamente, no plano, sabemos que o termo de Chern-Simons assume um papel muito importante em teorias de calibre, alterando consideravelmente as características magnéticas do modelo. Na teoria de Maxwell-Chern-Simons-Higgs na fase quebrada, por exemplo, já podemos perceber o seu efeito no propagador, Eq. (2.53). Note que ele possui duas massas distintas  $m_{\pm}$ . Assim, se estas massas continuarem a existir no cálculo perturbativo, fica a questão de como generalizar este processo, de forma a englobá-las. Vale salientar que em  $(2+1)$  dimensões, devido à mudança  $d^3k \rightarrow d^2k$ , embora o potencial entre duas cargas não possa mais ser escrito através da Eq. (3.22), ele ainda pode ser determinado como sendo:

$$\begin{aligned}
 & \sim \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\vec{k}^2 + \Pi_{00}(0, \vec{k})} \\
 & \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_{el}^2} \\
 & \sim K_0(m_{el}R) \approx \frac{e^{-m_{el}R}}{\sqrt{m_{el}R}}, \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

onde  $K_0$  é a função de Bessel modificada, e estamos considerando o seu comportamento assintótico para grandes valores de  $R$ .

## 3.2 Resultados a um laço

### 3.2.1 Tensor de Polarização no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs

O modelo que iremos estudar inicialmente é o Maxwell-Chern-Simons-Higgs na fase quebrada, expresso pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + |D_\mu\Phi|^2 - \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - v^2)^2. \quad (3.27)$$

Expandindo o campo escalar em torno do seu valor esperado no vácuo,  $\langle|\Phi|\rangle = v$ , como  $\Phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\chi)$  e considerando o calibre unitário, no qual o campo de Goldstone desacopla completamente do campo  $A_\mu$ , podemos reescrever  $\mathcal{L}$  como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma^2 + \frac{e^2}{2}(\sigma^2 + 2\sqrt{2}v\sigma)A_\mu A^\mu - \frac{\lambda v}{2\sqrt{2}}\sigma^3 - \frac{\lambda}{16}\sigma^4. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Vamos efetuar o cálculo envolvendo temperatura no formalismo de tempo imaginário. Neste caso, os propagadores devem ser expressos no espaço euclidiano. Temos, portanto, para o campo de calibre:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(p) = & \frac{1}{(p^2 + m_+^2)(p^2 + m_-^2)} \\ & \times \left[ \delta_{\mu\nu}(p^2 + m^2) + p_\mu p_\nu \frac{p^2 + m^2 + \kappa^2}{m^2} - \kappa\epsilon_{\mu\nu\lambda}p_\lambda \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

e para o campo escalar  $\sigma$ :

$$D_\sigma^{(\beta)}(p) = \frac{1}{(p^2 + m_\sigma^2)}, \quad (3.30)$$

onde  $p = (w_n, \vec{p})$  e  $w_n \equiv 2\pi nT$  são as frequências de Matsubara para campos bosônicos. Também estamos utilizando as Eqs. (2.52) e (2.54), ou seja,

$$m^2 = 2e^2v^2, \quad m_\sigma^2 = \lambda v^2, \quad (3.31)$$

e

$$m_\pm^2 = \frac{\kappa^2 + 2m^2 \pm |\kappa|\sqrt{\kappa^2 + 4m^2}}{2}. \quad (3.32)$$

Novamente aqui vamos ressaltar a presença de dois pólos massivos para o campo de calibre, Eq. (3.29). Como já comentamos no capítulo anterior, este resultado é esperado, uma vez que estamos introduzindo na teoria dois diferentes mecanismos de geração de massa para este campo.

A seguir, iremos calcular o tensor de polarização a um laço.

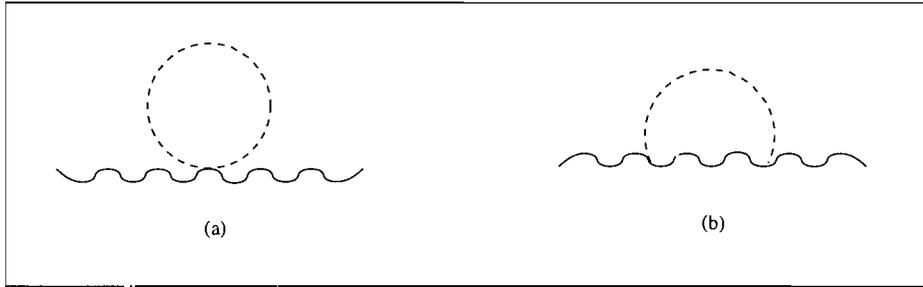


Figura 3.2: Diagramas *alça*, fig. (a), e *sol nascente*, fig. (b), que contribuem para a auto-energia do fóton no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs e calibre unitário. As linhas pontilhadas representam o campo  $\sigma$  e as ondula-das, o  $A_\mu$ .

Neste calibre, temos que calcular apenas dois diagramas: o *alça* e o *sol nascente*, figura (3.2). O diagrama *alça* contém apenas um termo que conserva paridade, ou seja,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\text{al}} &= \frac{1}{2}(2e^2\delta_{\mu\nu})\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_0^2 + w_\sigma^2} \\ &= e^2\delta_{\mu\nu} \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_n \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{\beta w_\sigma}{2\pi}\right)^2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde  $k_0 = 2\pi nT$  e

$$w_\sigma^2 = \vec{k}^2 + m_\sigma^2. \quad (3.34)$$

A soma em  $n$  pode ser calculada de diversas maneiras. Nós iremos sempre utilizar a seguinte fórmula:

$$\sum_n f(n) = -\pi \text{Res}[f(z) \cot \pi z], \quad (3.35)$$

onde os resíduos são calculados nos pólos de  $f(z)$  [5, 6]. Com o uso da expressão acima,  $\Pi_{\mu\nu}^{\text{al}}$  torna-se:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{al}} = \frac{1}{2} e^2 \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{w_\sigma} \coth \frac{\beta w_\sigma}{2}. \quad (3.36)$$

Lembrando que:

$$\coth \frac{\beta x}{2} = 1 + \frac{2}{e^{\beta x} - 1}, \quad (3.37)$$

podemos extrair a parte dependente da temperatura como sendo:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{al}}(T) = e^2 \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{w_\sigma} \frac{1}{e^{\beta w_\sigma} - 1} = -\delta_{\mu\nu} \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(1 - e^{-\beta m_\sigma}). \quad (3.38)$$

Vale ressaltar que, apesar de termos conseguido obter um resultado exato, válido para qualquer temperatura, nem sempre isso é possível. De fato, como veremos a seguir, já no cálculo do diagrama *sol nascente* seremos forçados a considerar alguma aproximação para resolver as integrais espaciais. Como iremos somar as contribuições provenientes dos dois diagramas no resultado final é interessante expressar  $\Pi_{\mu\nu}^{\text{al}}(T)$  no regime que iremos estudar. Considerando, por exemplo, o limite de altas temperaturas<sup>†</sup>, temos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{al}}(T) = -\delta_{\mu\nu} \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma). \quad (3.39)$$

O cálculo do diagrama *sol nascente*, figura (3.2)(b), é um pouco mais delicado por vários motivos. Primeiro, podemos observar que este diagrama

---

<sup>†</sup>Este limite existe ainda na fase de simetria quebrada. Por exemplo, para  $\lambda \sim 10^{-4}$ , a temperatura crítica  $T_c$  na qual a simetria é restaurada é da ordem de  $10^2 m$  [39, 7] e portanto existe uma temperatura  $T$  inferior a  $T_c$  e ainda suficientemente grande para que possa ser considerada a expansão de altas temperaturas.

apresenta dois termos, um com paridade conservada e outro com quebra de paridade, ou seja,

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{\text{sn}}(p) &= -8e^4v^2\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\delta_{\mu\nu}(k_0^2+w^2)+k_\mu k_\nu\frac{k_0^2+w^2+\kappa^2}{m^2}-\kappa\epsilon_{\mu\nu\lambda}k_\lambda}{(k_0^2+w_+^2)(k_0^2+w_-^2)[(k+p)^2+m_\sigma^2]} \\ &\equiv \Pi_{\mu\nu}^{\text{sn}(PC)}(p)+\Pi_{\mu\nu}^{\text{sn}(PV)}(p),\end{aligned}\quad (3.40)$$

onde definimos:

$$w^2 = \vec{k}^2 + m^2, \quad w_\pm^2 = \vec{k}^2 + m_\pm^2. \quad (3.41)$$

Também introduzimos as componentes com paridade ímpar e par, respectivamente por:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{\text{sn}(PV)}(p) &= 8\kappa e^4v^2\epsilon_{\mu\nu\lambda}\frac{1}{\beta} \\ &\times \sum_n\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_\lambda}{[(k_0+p_0)^2+(\vec{k}+\vec{p})^2+m_\sigma^2](k_0^2+w_+^2)(k_0^2+w_-^2)},\end{aligned}\quad (3.42)$$

e

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{\text{sn}(PC)}(p) &= -8e^4v^2\frac{1}{\beta} \\ &\times \sum_n\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\delta_{\mu\nu}(k_0^2+w^2)+k_\mu k_\nu\frac{(k_0^2+w^2+\kappa^2)}{m^2}}{[(k_0+p_0)^2+(\vec{k}+\vec{p})^2+m_\sigma^2](k_0^2+w_+^2)(k_0^2+w_-^2)}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Na análise que iremos desenvolver estaremos considerando dois casos: **a.** limite estático, onde  $p_0 = 0$  e  $\vec{p} \rightarrow 0$ , e **b.** limite de onda longa, onde  $\vec{p} = 0$  e  $p_0 \rightarrow 0$ . A escolha destes limites está diretamente relacionada com a obtenção das massas físicas do sistema. As massas elétrica e magnética, por exemplo, podem ser obtidas, como já apresentamos na introdução deste capítulo, do limite estático do tensor de polarização, Eq. (3.21).

## Limite Estático

Partindo da Eq. (3.42) e considerando  $p_0 = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}) &= 8\kappa e^4 v^2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{1}{\beta} \\ &\times \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_\lambda}{[k_0^2 + (\vec{k} + \vec{p})^2 + m_\sigma^2](k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Olhando em separado para cada uma das contribuições a  $\Pi_{\mu\nu}$  ( $\lambda = 0$  e  $\lambda = i$ ), é imediato concluir que:

$$\Pi_{ij(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}) = 0, \quad (3.45)$$

devido à antisimetria do integrando na Eq. (3.44) (a soma em  $k_0$  para  $\lambda = 0$  é ímpar). Consequentemente, nos resta calcular apenas a componente  $\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p})$ . Podemos ainda, antes de efetuar a soma, expandir o integrando em torno de  $\vec{p} = 0$ . Utilizando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[k_0^2 + (\vec{k} + \vec{p})^2 + m_\sigma^2]} &= \frac{1}{(k_0^2 + w_\sigma^2)} - \frac{2\vec{p} \cdot \vec{k}}{(k_0^2 + w_\sigma^2)^2} + \mathcal{O}(\vec{p}^2) \\ &= \left[ 1 + 2\vec{p} \cdot \vec{k} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \right] \frac{1}{(k_0^2 + w_\sigma^2)} + \mathcal{O}(\vec{p}^2), \end{aligned} \quad (3.46)$$

obtemos, para pequenos momentos,

$$\begin{aligned} \Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}) &= 8\kappa e^4 v^2 \epsilon_{0ij} \frac{1}{\beta} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} k_j \left[ 1 + 2\vec{p} \cdot \vec{k} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \right] \\ &\times \sum_n \frac{1}{(k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)(k_0^2 + w_\sigma^2)} \\ &+ \mathcal{O}(\vec{p}^2). \end{aligned} \quad (3.47)$$

O primeiro termo no integrando (linear em  $k_j$ ) se anula devido a antisimetria. Chegamos assim a:

$$\begin{aligned}
\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}) &= 16\kappa e^4 v^2 \epsilon_{0ij} p_l \frac{1}{\beta} \\
&\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} k_j k_l \sum_n \frac{1}{(k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)(k_0^2 + w_\sigma^2)} \\
&+ \mathcal{O}(\vec{p}^2), \tag{3.48}
\end{aligned}$$

O próximo passo consiste em efetuar a soma em  $k_0 = 2\pi nT$ . Com o uso da Eq. (3.35), chegamos a:

$$\begin{aligned}
&T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k_0^2 + w_\sigma^2)(k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{1}{w_\sigma} \coth(\frac{\beta w_\sigma}{2})}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)} - \frac{\frac{1}{w_+} \coth(\frac{\beta w_+}{2})}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_+^2 - m_-^2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{w_-} \coth(\frac{\beta w_-}{2})}{(m_\sigma^2 - m_-^2)(m_+^2 - m_-^2)} \right]. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em  $\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p})$ , Eq. (3.48), temos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}) &= 4\kappa e^4 v^2 \epsilon_{0ij} p_j \\
&\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \vec{k}^2 \left[ \frac{\frac{1}{w_\sigma} \coth(\frac{\beta w_\sigma}{2})}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)} \right. \\
&\quad - \frac{\frac{1}{w_+} \coth(\frac{\beta w_+}{2})}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_+^2 - m_-^2)} \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{w_-} \coth(\frac{\beta w_-}{2})}{(m_\sigma^2 - m_-^2)(m_+^2 - m_-^2)} \right]. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

A parte com  $T = 0$  da expressão acima pode ser extraída diretamente com o uso da Eq. (3.37) e concorda com resultados obtidos no formalismo usual [40] (vale salientar que esta comparação deve levar em conta o fato de

estarmos fazendo o cálculo no espaço euclidiano). A correção dependente da temperatura é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}; T) &= 8\kappa e^4 v^2 \epsilon_{0ij} p_j \\ &\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \vec{k}^2 \left[ \frac{\frac{1}{w_\sigma} n_B(w_\sigma)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)} \right. \\ &\quad - \frac{\frac{1}{w_+} n_B(w_+)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_+^2 - m_-^2)} \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{w_-} n_B(w_-)}{(m_\sigma^2 - m_-^2)(m_+^2 - m_-^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde estamos utilizando a função distribuição bosônica, ou seja,

$$n_B(x) = \frac{1}{e^{\beta x} - 1}. \quad (3.52)$$

As integrais que aparecem na Eq. (3.51) podem ser expressas em termos da função  $h_n(y)$ , definida como [5]:

$$h_n(y) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - 1}, \quad (3.53)$$

e, em geral, não podem ser calculadas de maneira exata. É possível, porém, obter os seus limites para pequenos valores de  $y$  [5, 39]. No apêndice (A) iremos calcular explicitamente  $h_3$ . Com o uso deste resultado, podemos obter a integral que aparece na Eq. (3.51), ou seja,

$$\begin{aligned} I &\equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\vec{k}^2}{w} n_B(w) \\ &= \frac{1}{2\pi\beta^3} \left\{ 2\zeta(3) + (\beta m)^2 \left[ \ln(\beta m) - \frac{1}{2} \right] \right\} + \mathcal{O}(\beta^0), \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde  $\zeta(x)$  é a função Zeta de Riemann [51]. Com o uso de (3.54), extraímos o termo dominante, a altas temperaturas, de  $\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}; T)$ , Eq. (3.51), como sendo [25]:

$$\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}; T) = \frac{4\kappa e^4 v^2}{\pi\beta} \epsilon_{0ij} p_j F(m_+, m_-, m_\sigma) \equiv \epsilon_{0ij} p_j \Pi_B, \quad (3.55)$$

onde definimos:

$$\Pi_B = \frac{4\kappa e^4 v^2}{\pi\beta} F(m_+, m_-, m_\sigma), \quad (3.56)$$

e

$$F(m_+, m_-, m_\sigma) = \frac{m_+^2 \ln\left(\frac{m_+}{m_\sigma}\right)}{(m_+^2 - m_-^2)(m_\sigma^2 - m_+^2)^2} - \frac{m_-^2 \ln\left(\frac{m_-}{m_\sigma}\right)}{(m_+^2 - m_-^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)^2} + \frac{1}{2(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)}. \quad (3.57)$$

Deste resultado pode-se também obter o limite de uma teoria de Chern-Simons pura, no qual o termo de Maxwell é retirado da lagrangiana. Este limite é obtido de (3.55) considerando-se  $e^2, \kappa \rightarrow \infty$ , com  $e^2/\kappa$  finito. Neste caso,  $m_+ \rightarrow \infty$ ,  $m_- \rightarrow m^2/|\kappa|$  e (3.55) torna-se:

$$\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(\vec{p}; T) \rightarrow -\epsilon_{0ij} p_j \frac{\kappa}{|\kappa|} \frac{e^2 m_-}{\pi\beta} \left[ \frac{2m_-^2 \ln\left(\frac{m_-}{m_\sigma}\right) + m_\sigma^2 - m_-^2}{(m_\sigma^2 - m_-^2)^2} \right]. \quad (3.58)$$

No próximo capítulo iremos obter o mesmo resultado de uma outra maneira.

O termo com paridade conservada pode ser calculado explicitamente, utilizando passos muito semelhantes aos acima apresentados. Existe, porém, um caminho alternativo para este cálculo, se lembrarmos que, à temperatura finita, a auto-energia do campo de calibre pode ser parametrizada, na fase de simetria quebrada, como [15, 7, 26]:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = P_{\mu\nu}\Pi_1(p) + Q_{\mu\nu}\Pi_2(p) + \delta_{\mu\nu}\Pi_3(p) + \Pi_{\mu\nu(PV)}(p), \quad (3.59)$$

onde

$$P_{\mu\nu} = \tilde{\delta}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{\tilde{p}^2}, \quad Q_{\mu\nu} = \frac{p^2}{\tilde{p}^2} \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu, \quad (3.60)$$

com

$$\bar{u}_\mu = u_\mu - \frac{u \cdot p}{p^2} p_\mu, \quad \tilde{p}_\mu = p_\mu - (u \cdot p) u_\mu, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu. \quad (3.61)$$

e  $u_\mu$  sendo a velocidade do banho térmico (no referencial de repouso expressa por  $u_\mu \equiv (1, \vec{0})$ ). Os dois primeiros termos são os usuais, associados com a decomposição do tensor de polarização a  $T \neq 0$ . Já  $\Pi_3$  aparece porque estamos considerando o sistema na fase quebrada. Usando esta decomposição podemos, através de uma álgebra direta, obter cada uma das componentes associadas com o termo de paridade conservada. Assim, temos:

$$\Pi_1(p) = -\frac{p_0^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \Pi_{00}(p) + \Pi_{ii}(p) - \frac{p_0^2 - 2\vec{p}^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \Pi_{ij}(p),$$

$$\Pi_2(p) = \frac{p_0^2 + \vec{p}^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \left[ -\Pi_{00}(p) + \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \Pi_{ij}(p) \right],$$

e

$$\Pi_3(p) = \frac{p_0^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \Pi_{00}(p) - \frac{\vec{p}^2}{p_0^2 - \vec{p}^2} \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \Pi_{ij}(p). \quad (3.62)$$

No limite estático, as componentes acima tornam-se:

$$\Pi_1(\vec{p}) = \Pi_{ii}(\vec{p}) - 2 \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \Pi_{ij}(\vec{p}),$$

$$\Pi_2(\vec{p}) = \Pi_{00}(\vec{p}) - \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \Pi_{ij}(\vec{p}),$$

e

$$\Pi_3(\vec{p}) = \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \Pi_{ij}(\vec{p}). \quad (3.63)$$

Ao invés de calcularmos diretamente  $\Pi_{\mu\nu(PC)}$ , é muito mais simples calcular  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  e  $\Pi_3$  que dependem somente de  $\Pi_{00}$ ,  $\Pi_{ii}$  e  $p_i p_j \Pi_{ij}$ . Além disso,

estas componentes são suficientes para determinarmos as massas elétrica e magnética do sistema.

A componente  $(0, 0)$  da Eq. (3.43) é dada, para  $p_0 = 0$ , por:

$$\Pi_{00}^{\text{Sn}}(\vec{p}) = -4e^2 m^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(k_0^2 + w^2) + k_0^2 \frac{k_0^2 + w^2 + \kappa^2}{m^2}}{[k_0^2 + (\vec{k} + \vec{p})^2 + m_\sigma^2](k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)}. \quad (3.64)$$

Novamente aqui, utilizamos passos similares aos utilizados no cálculo do termo com quebra de paridade: a expansão em pequenos momentos (neste caso estamos interessados no termo independente de  $\vec{p}$ ) e a soma em  $k_0$ . Considerando somente a contribuição dependente da temperatura, no limite de altas temperaturas chegamos a [26]:

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{\text{Sn}}(\vec{p} = 0; T) &\equiv \Pi_{00}^{\text{Sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0; T) \\ &= \frac{e^2}{2\pi\beta} \left[ 2 + \frac{4m^2(m^2 - m_\sigma^2)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_\sigma}{m_-} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4m^2(m^2 - m_+^2)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_+^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_+}{m_-} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde nós empregamos, de maneira análoga ao cálculo da Eq. (3.54),

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{w} n_B(w) \rightarrow -\frac{1}{2\pi\beta} + \mathcal{O}(\beta^0), \quad (3.66)$$

e

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} w n_B(w) \rightarrow \frac{2\zeta(3)}{2\pi\beta^3} - \frac{m^2}{4\pi\beta} + \mathcal{O}(\beta^0). \quad (3.67)$$

O cálculo de  $\Pi_{ii}$  é semelhante ao de  $\Pi_{00}$  e fornece, a altas temperaturas, o resultado [26]:

$$\begin{aligned} \Pi_{ii}^{\text{Sn}}(\vec{p} = 0; T) &\equiv \Pi_{ii}^{\text{Sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0; T) \\ &= -\frac{e^2}{2\pi\beta} \left[ -4 \ln(\beta m_\sigma) + 2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(2m^4 - 3m^2 m_-^2 - m_-^2 \kappa^2 + m_-^4)}{(m_\sigma^2 - m_-^2)(m_+^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_\sigma}{m_-} \right) \right] \end{aligned}$$

$$- \frac{4(2m^4 - 3m^2m_+^2 - m_+^2\kappa^2 + m_+^4)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_+^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_\sigma}{m_+} \right) \Big]. \quad (3.68)$$

Finalmente,

$$\frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \Pi_{ij}^{\text{sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0; T) = \frac{1}{2} \Pi_{ii}^{\text{sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0; T). \quad (3.69)$$

Segue, portanto que, no limite estático,

$$\Pi_1^{\text{sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = 0,$$

$$\Pi_2^{\text{sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = -2 \left[ \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta}\right),$$

e

$$\Pi_3^{\text{sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = 2 \left[ \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (3.70)$$

Adicionando a este resultado a contribuição proveniente do diagrama *alça*, chegamos finalmente a

$$\Pi_1(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = 0,$$

$$\Pi_2(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = -2 \left[ \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma) \right],$$

e

$$\Pi_3(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = \left[ \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma) \right]. \quad (3.71)$$

### Limite de Onda Longa

O limite de onda longa pode ser efetuado de maneira análoga ao limite estático. A diferença aparece somente no momento de tomarmos a extensão analítica para  $p_0$  contínuo, neste caso expresso pelo momento de efetuarmos

a expansão em torno de  $p_0 = 0$ . Somente após da soma efetuada e das propriedades de periodicidade terem sido utilizadas, é que podemos efetuar a extensão analítica. Considerando  $\vec{p} = 0$  na Eq. (3.42) temos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu(PV)}^{\text{sn}}(p_0) &= 8\kappa e^4 v^2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{1}{\beta} \\ &\times \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_\lambda}{[(k_0 + p_0)^2 + w_\sigma^2](k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Neste caso, de maneira análoga ao caso estático,

$$\Pi_{0i(PV)}^{\text{sn}}(p_0) = 0, \quad (3.73)$$

por simetria, e  $\Pi_{ij(PV)}^{\text{sn}}(p_0)$  é expresso por:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij(PV)}^{\text{sn}}(p_0) &= 8\kappa e^4 v^2 \epsilon_{0ij} \frac{1}{\beta} \\ &\times \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_0}{[(k_0 + p_0)^2 + w_\sigma^2](k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Efetuando a soma em  $k_0$ , com o uso da Eq. (3.35), obtemos:

$$\begin{aligned} &T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_0}{[(k_0 + p_0)^2 + w_\sigma^2](k_0^2 + w_+^2)(k_0^2 + w_-^2)} \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{i \coth\left(\frac{\beta w_+}{2}\right)}{[(p_0 - iw_+)^2 + w_\sigma^2](m_+^2 - m_-^2)} - \frac{i \coth\left(\frac{\beta w_-}{2}\right)}{[(p_0 - iw_-)^2 + w_\sigma^2](m_+^2 - m_-^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\coth\left(\frac{\beta w_\sigma}{2}\right)}{w_\sigma} \frac{(-p_0 + iw_\sigma)}{[(-p_0 + iw_\sigma)^2 + w_+^2][(-p_0 + iw_\sigma)^2 + w_-^2]} \right] \\ &- \quad (p_0 \rightarrow -p_0), \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde utilizamos as propriedades de periodicidade da cotangente para simplificar o último termo da expressão acima. Somente agora podemos considerar

valores contínuos de  $p_0$ . Desta forma, para  $T \neq 0$ , o termo linear em  $p_0$  é dado por (considerando apenas o termo dominante na expansão de altas temperaturas):

$$\Pi_{ij(PV)}^{\text{sn}}(p_0; T) = \frac{4\kappa e^4 v^2 \epsilon_{0ij} p_0}{\pi \beta} \frac{\ln(\beta m_\sigma)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)}. \quad (3.76)$$

Aqui vale a pena confrontar os valores obtidos para o termo com quebra de paridade nos dois limites avaliados. Comparando as Eqs. (3.55) e (3.76) vemos que este pedaço da amplitude não é analítico na origem dos momentos. Este resultado é muito interessante, ou seja, mesmo com diferentes massas envolvidas no cálculo do laço bosônico, o termo com paridade quebrada, ao contrário do com paridade conservada, não é analítico na origem do plano energia-momento. Em modelos mais simples, sem termos com quebra de paridade, é sabido que, se as massas envolvidas no cálculo dos laços bosônicos são diferentes, é encontrada uma analiticidade em torno de  $p = 0$  [21]. Aqui, a introdução de um termo que quebra paridade destrói este comportamento.

Para o cálculo do termo com paridade conservada no limite de ordem longa, utilizamos novamente a decomposição (3.59) e as relações (3.62), que tornam-se:

$$\Pi_1(p_0) = -\Pi_{00}(p_0) + \Pi_{ii}(p_0) - \frac{p_i p_j}{p^2} \Pi_{ij}(p_0),$$

$$\Pi_2(p_0) = -\Pi_{00}(p_0) + \frac{p_i p_j}{p^2} \Pi_{ij}(p_0),$$

e

$$\Pi_3(p_0) = \Pi_{00}(p_0). \quad (3.77)$$

As passagens seguintes no cálculo das componentes  $(0, 0)$  e  $(i, i)$  do tensor de polarização não acrescentam nenhuma dificuldade com relação ao que já discutimos. Obtemos, assim,

$$\begin{aligned}
\Pi_{00}^{\text{sn}}(p_0 = 0; T) &\equiv \Pi_{00}^{\text{sn}}(p_0 \rightarrow 0, \vec{p} = 0; T) \\
&= \frac{e^2}{2\pi\beta} \left[ 2 + \frac{4m^2(m^2 - m_\sigma^2)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_\sigma^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_\sigma}{m_-} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4m^2(m^2 - m_+^2)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_+^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_+}{m_-} \right) \right] \\
&\equiv \Pi_{00}^{\text{sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0; T) = \Pi_{00}^{\text{sn}}(\vec{p} = 0; T), \quad (3.78)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pi_{ii}^{\text{sn}}(p_0 = 0; T) &\equiv \Pi_{ii}^{\text{sn}}(p_0 \rightarrow 0, \vec{p} = 0; T) \\
&= -\frac{e^2}{2\pi\beta} \left[ -4 \ln(\beta m_\sigma) + 2 \right. \\
&\quad + \frac{4(2m^4 - 3m^2m_-^2 - m_-^2\kappa^2 + m_-^4)}{(m_\sigma^2 - m_-^2)(m_+^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_\sigma}{m_-} \right) \\
&\quad \left. - \frac{4(2m^4 - 3m^2m_+^2 - m_+^2\kappa^2 + m_+^4)}{(m_\sigma^2 - m_+^2)(m_+^2 - m_-^2)} \ln \left( \frac{m_\sigma}{m_+} \right) \right] \\
&\equiv \Pi_{ii}^{\text{sn}}(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0; T) = \Pi_{ii}^{\text{sn}}(\vec{p} = 0; T). \quad (3.79)
\end{aligned}$$

Vemos destes dois resultados que as contribuições ao tensor de polarização com paridade conservada são analíticas na origem do espaço energia-momento. Considerando a contribuição proveniente do diagrama *alça* os resultados finais são listados abaixo:

$$\Pi_1(p_0 \rightarrow 0, \vec{p} = 0) = 2 \left[ \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma) \right],$$

$$\Pi_2(p_0 \rightarrow 0, \vec{p} = 0) = 2 \left[ \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma) \right],$$

e

$$\Pi_3(p_0 \rightarrow 0, \vec{p} = 0) = - \left[ \frac{e^2}{2\pi\beta} \ln(\beta m_\sigma) \right]. \quad (3.80)$$

### 3.2.2 Tensor de Polarização na $QED_3$ com termo de Chern-Simons

Na seção anterior calculamos o tensor de polarização no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs na fase de simetria quebrada. Naquele caso, o propagador na aproximação de árvore já apresentava dois pólos, o que poderia modificar o estudo dos processos de blindagem. Se ao invés de considerarmos um campo de Higgs, acoplarmos o campo  $A_\mu$  a férmions, esta estrutura de dois pólos, como veremos a seguir, aparecerá no propagador completo da teoria. Portanto a pergunta sobre como estudar os processos de blindagem ainda se mantém.

O modelo considerado é a  $QED$  em  $(2+1)$  dimensões com um termo de Chern-Simons, expresso pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_F)\psi + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (3.81)$$

onde  $m_F$  é a massa do campo fermiônico. Para o cálculo vamos utilizar os seguintes propagadores no espaço euclidiano:

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 + \kappa^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) - \kappa\epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{p_\lambda}{p^2} \right] + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2}, \quad (3.82)$$

e

$$S_F(p) = \frac{-\gamma_\mu p_\mu + m_F}{p^2 + m_F^2}, \quad (3.83)$$

respectivamente para o campo de calibre e o campo fermiônico. A notação escolhida para as matrizes  $\gamma$  é tal que  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$ , ou seja,

$$\gamma_0 = i\sigma_3, \quad \gamma_1 = i\sigma_1, \quad \gamma_2 = i\sigma_2, \quad (3.84)$$

onde  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli. Além disso,  $p_0 \equiv (2n+1)\pi T$  são as frequências de Matsubara para o campo fermiônico.

O cálculo da auto-energia do fóton a um laço envolve apenas um diagrama, figura (3.3), e pode ser expresso por:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \gamma_\mu S_F(k+p) \gamma_\nu S_F(k) \quad (3.85)$$

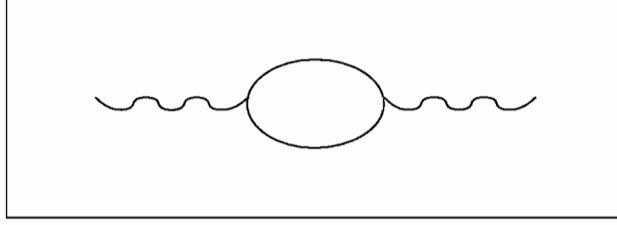


Figura 3.3: Auto-energia do fóton a um laço na  $QED_3$  com Chern-Simons. As linhas onduladas representam o campo de calibre e as contínuas, o campo fermiônico.

$$\equiv \frac{e^2}{\beta} \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \frac{\gamma_\mu (-k_\alpha \gamma_\alpha + m_F) \gamma_\nu [-(k+p)_\rho \gamma_\rho + m_F]}{(k^2 + m_F^2)[(k+p)^2 + m_F^2]}.$$

Devido ao traço atuando sobre as matrizes  $\gamma$  surgirão deste diagrama dois pedaços com comportamentos distintos, um com paridade conservada e outro com quebra de paridade<sup>†</sup>. O termo com quebra de paridade já foi calculado em [41] e no limite estático e regime de altas temperaturas é dado por:

$$\Pi_{0i(PV)}(\vec{p}; T) = \frac{e^2}{8\pi} \beta m_F \epsilon_{0ij} \mathcal{L}_{ij} \equiv \epsilon_{0ij} p_j \Pi_F(\vec{p}), \quad (3.86)$$

onde definimos  $\Pi_F$  como sendo:

$$\Pi_F(\vec{p}) \equiv \frac{e^2}{8\pi} \beta m_F. \quad (3.87)$$

Já o termo com paridade conservada é expresso por:

$$\Pi_{\mu\nu(PC)}(p) = -2e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-k_\mu (k+p)_\nu - k_\nu (k+p)_\mu + \delta_{\mu\nu} [k \cdot (k+p) + m_F^2]}{(k^2 + m_F^2)[(k+p)^2 + m_F^2]}. \quad (3.88)$$

Neste caso a decomposição de  $\Pi_{\mu\nu}$  torna-se:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = P_{\mu\nu} \Pi_1(p) + Q_{\mu\nu} \Pi_2(p) + \Pi_{\mu\nu(PV)}(p), \quad (3.89)$$

<sup>†</sup>Note que, em  $(2+1)$  dimensões o traço de três matrizes  $\gamma$  deixa de ser nulo, como acontece em  $(3+1)$  dimensões e passa a ser proporcional a  $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ . Com isso, no caso de férmions massivos, correções radiativas são geradas para o termo de Chern-Simons, independentemente dele existir ou não na aproximação de árvore.

ou seja, a mesma considerada no caso bosônico, mas sem o termo proveniente da quebra de simetria, isto é, com  $\Pi_3 = 0$ . O cálculo de  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  não apresenta muitas diferenças com relação ao anterior. A principal delas é que devemos modificar a soma em  $k_0$  de forma a considerar valores ímpares. Por simplicidade, listaremos somente os resultados para o limite estático e regime de altas temperaturas. Assim temos:

$$\Pi_1(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = 0,$$

e

$$\Pi_2(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = \frac{e^2 \ln 2}{\pi\beta}. \quad (3.90)$$

### 3.3 Massas Elétrica e Magnética

#### 3.3.1 Cálculos a um laço

Como já observamos no início deste capítulo, em um plasma carregado em  $(2+1)$  dimensões, o potencial entre duas cargas estáticas separadas por uma distância  $R = |\vec{R}|$  é dado pela Eq. (3.26), ou seja,

$$\begin{aligned} & \sim \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\vec{k}^2 + \Pi_{00}(0, \vec{k})} \\ & \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_{el}^2} \\ & \sim K_0(m_{el}R) \approx \frac{e^{-m_{el}R}}{\sqrt{m_{el}R}}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

onde  $K_0$  é a função de Bessel modificada e  $m_{el}$  é a massa elétrica. Nesta seção vamos calcular, a um laço,  $m_{el}$  para os modelos Maxwell-Chern-Simons-Higgs e QED com um termo de Chern-Simons em  $2+1$  dimensões.

Inicialmente iremos calcular explicitamente o propagador completo do campo de calibre no caso escalar. Como já foi visto anteriormente, Eq. (3.29), o campo de calibre adquire, já na aproximação de árvore, dois pólos massivos com massas  $m_{\pm}^2$ . Se quisermos adicionar a ele as contribuições provenientes da auto-energia do fóton, temos [26]:

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(p) &= \frac{P_{\mu\nu}(p^2 + M_2^2) + Q_{\mu\nu}(p^2 + M_1^2) - (\kappa + \Pi_B)\epsilon_{\mu\nu\lambda}p_\lambda}{(p^2 + M_+^2)(p^2 + M_-^2)} \\
&+ \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{1}{m^2 + \Pi_3},
\end{aligned} \tag{3.92}$$

com

$$M_1^2 = m^2 + \Pi_1 + \Pi_3,$$

$$M_2^2 = m^2 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

$$\Pi_{\mu\nu(PV)} \equiv \epsilon_{\mu\nu\lambda}p_\lambda \Pi_B,$$

e

$$\begin{aligned}
M_\pm^2 &= \frac{(\kappa + \Pi_B)^2 + M_1^2 + M_2^2}{2} \\
&\pm \frac{[(M_1^2 - M_2^2)^2 + 2(M_1^2 + M_2^2)(\kappa + \Pi_B)^2 + (\kappa + \Pi_B)^4]^{1/2}}{2}.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Assim, a inclusão de correções radiativas, *a priori*, preserva a estrutura de duas massas para o campo de calibre, agora  $M_\pm$  ao invés de  $m_\pm$ . Colecionando os resultados obtidos para os fatores de forma no limite estático, Eq. (3.71) podemos calcular  $M_1^2$ ,  $M_2^2$  e  $M_\pm^2$  como sendo:

$$M_1^2 = m^2 + \Pi_1 + \Pi_3 \equiv m^2 + \Pi_3 \rightarrow \Pi_3, \tag{3.94}$$

$$M_2^2 = m^2 + \Pi_2 + \Pi_3 \rightarrow \Pi_2 + \Pi_3, \tag{3.95}$$

e

$$M_\pm^2 \rightarrow \frac{\Pi_B^2 + (M_1^2 + M_2^2) \pm \Pi_B^2 \sqrt{1 + 2\frac{(M_1^2 + M_2^2)}{\Pi_B^2} + \frac{(M_1^2 - M_2^2)^2}{\Pi_B^4}}}{2}, \tag{3.96}$$

levando a:

$$M_+ \rightarrow \Pi_B, \quad (3.97)$$

e

$$M_- \rightarrow \frac{(M_1^2 - M_2^2)}{\Pi_B}. \quad (3.98)$$

Unindo estes resultados, podemos obter  $D_{00}$  de (3.92) como:

$$\begin{aligned} D_{00}(\vec{p}) &= Q_{00} \frac{\vec{p}^2 + M_1^2}{(\vec{p}^2 + M_-^2)(\vec{p}^2 + M_+^2)} \\ &= Q_{00} \left[ \frac{M_+^2 - M_1^2}{M_+^2 - M_-^2} \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2} - \frac{M_-^2 - M_1^2}{M_+^2 - M_-^2} \frac{1}{\vec{p}^2 + M_-^2} \right] \\ &\sim \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2} + \frac{M_1^2}{M_+^2} \frac{1}{\vec{p}^2} \\ &= \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2} + \frac{\pi\beta \ln(\beta m_\sigma)}{8e^2 \kappa^2 m^4 F^2} \frac{1}{\vec{p}^2} \\ &\sim \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

e de maneira análoga, chegamos a:

$$D_{ii}(\vec{p}) \sim \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2}. \quad (3.100)$$

Concluimos deste resultado que, embora na forma geral do propagador completo do campo de calibre apareçam duas massas, a um laço, limite estático e regime de altas temperaturas, somente uma delas sobrevive tanto em  $D_{00}$  quanto em  $D_{ii}$  e podemos identificá-las trivialmente com as  $m_{el}$  e  $m_{mag}$ , respectivamente. Note que aqui, em contraste com o caso quadridimensional, a massa magnética não é nula.

Para a  $QED_3$ , o propagador completo é obtido como sendo:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(p) &= \frac{P_{\mu\nu}(p^2 + \Pi_2) + Q_{\mu\nu}(p^2 + \Pi_1) - (\kappa + \Pi_F)\epsilon_{\mu\nu\lambda}p_\lambda}{(p^2 + M_+^2)(p^2 + M_-^2)} \\ &+ \frac{\xi p_\mu p_\nu}{(p^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

onde  $M_{\pm}^2$  são as mesmas massas do caso escalar, Eq. (3.93), com  $m \equiv 0 \equiv \Pi_3$  e  $\Pi_B \rightarrow \Pi_F$ . Vale salientar que no caso fermiônico, embora na aproximação de árvore haja somente um pólo massivo, como podemos observar na Eq. (3.82), quando incorporamos a este resultado as correções radiativas, chegamos à mesma estrutura de duas massas do caso bosônico. Neste caso, substituindo os valores de  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  obtidos no limite estático, Eq. (3.90), temos que:

$$M_1^2 = \Pi_1 = 0, \quad (3.102)$$

$$M_2^2 = \Pi_2, \quad (3.103)$$

e

$$M_{\pm}^2 = \frac{\Pi_F^2 + \Pi_2 \pm \sqrt{\Pi_2^2 + 2\Pi_2\Pi_F^2 + \Pi_F^4}}{2}, \quad (3.104)$$

onde  $\Pi_F$  é definido a partir da Eq. (3.86). Dos resultados acima chegamos a

$$M_+^2 = \Pi_2, \quad (3.105)$$

$$M_-^2 = 0, \quad (3.106)$$

o que implica nas seguinte componentes de  $D_{\mu\nu}$

$$D_{00}(\vec{p}) = Q_{00} \left[ \frac{M_+^2 - M_1^2}{M_+^2 - M_-^2} \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2} - \frac{M_-^2 - M_1^2}{M_+^2 - M_-^2} \frac{1}{\vec{p}^2 + M_-^2} \right] = \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2}, \quad (3.107)$$

e

$$\begin{aligned} D_{ii}(\vec{p}) &= P_{ii} \left[ \frac{M_+^2 - M_2^2}{M_+^2 - M_-^2} \frac{1}{\vec{p}^2 + M_+^2} - \frac{M_-^2 - M_2^2}{M_+^2 - M_-^2} \frac{1}{\vec{p}^2 + M_-^2} \right] \\ &\sim \frac{1}{\vec{p}^2}, \end{aligned} \quad (3.108)$$

ou seja, neste caso campos magnéticos estáticos não sofrem o processo de blindagem. Matematicamente, este resultado é uma consequência de  $\Pi_1 = 0$  a um laço. Note que mesmo no caso bosônico  $\Pi_1$  é nula. Lá, porém, o

pólo não massivo não se desenvolve porque  $m \neq 0 \neq \Pi_3$ . Como veremos na próxima seção, este resultado para o caso fermiônico é válido em qualquer ordem de perturbação. Pictoricamente, podemos entendê-lo da seguinte maneira: na  $QED_3$  o termo de Chern-Simons não é suficiente para quebrar o comportamento da massa magnética encontrado na  $QED_4$ . Já no caso bosônico o fato da massa magnética não ser nulo pode estar associado com as soluções tipo vórtice eletricamente carregados existentes na teoria de Higgs abeliana acoplada com campo de Chern-Simons em  $(2 + 1)$  dimensões.

### 3.3.2 Cálculo exato na $QED_3$ com termo de Chern-Simons

Como foi visto na seção anterior, a massa magnética na  $QED_3$  mesmo com a inclusão na teoria de um termo de Chern-Simons, é nula a um laço. Na análise desenvolvida, este resultado foi uma consequência de  $\Pi_1 = 0$  no limite estático e é, de certa forma, remanescente do resultado encontrado na  $QED_4$ . Este comportamento é surpreendente, uma vez que em  $(2 + 1)$  dimensões o termo de Chern-Simons assume um papel importante na teoria fermiônica, modificando intrinsecamente seu caráter eletromagnético. Mesmo assim, ele não é suficiente para gerar uma massa magnética ao sistema. Um estudo detalhado desta questão foi desenvolvido em [27]. Naquele trabalho mostramos que  $\Pi_1 = 0$ , através de um cálculo direto a dois laços e de um prova geral, válida em qualquer ordem de perturbação. Apresentaremos a seguir tal análise.

Da decomposição do tensor de polarização, Eq. (3.59), podemos concluir que, para uma dimensão  $D$  qualquer,  $\Pi_1(0)$  pode ser escrito como:

$$\Pi_1(0) = \frac{1}{D-2} \Pi_{ii}(0) = \frac{1}{D-2} \Pi_{ii(PC)}(0), \quad D > 2, \quad (3.109)$$

ou seja,  $\Pi_1$  não depende da estrutura do termo com quebra de paridade do tensor de polarização e pode ser determinado diretamente de  $\Pi_{ii}$ .

Indo para o cálculo a um laço podemos expressar  $\Pi_{\mu\nu}$  como sendo:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(p) &= e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} [\gamma_\mu S^{(0)}(k+p) \gamma_\nu S^{(0)}(k)] \\ &= \frac{e^2}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} \text{Tr} [\gamma_\mu S^{(0)}(k+p) \gamma_\nu S^{(0)}(k)], \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde os índices (0) e (1) indicam respectivamente as aproximações de árvore e um laço. Usando que:

$$\text{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu = -2^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \delta_{\mu\nu} = -C(D)\delta_{\mu\nu}, \quad (3.111)$$

onde  $\lfloor \frac{D}{2} \rfloor$  representa o maior inteiro menor ou quanto muito igual a  $\frac{D}{2}$ , e  $C(D) \equiv \lfloor \frac{D}{2} \rfloor$ , podemos escrever  $\Pi_1^{(1)}(0)$  com o uso das Eqs. (3.109) e (3.110) como sendo:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(1)}(0) &= \frac{1}{D-2} \Pi_{ii}^{(1)}(0) \\ &= \frac{1}{D-2} \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{\text{Tr}\gamma_i(m_F - \gamma_\alpha k_\alpha)\gamma_i(m_F - \gamma_\rho k_\rho)}{(k^2 + m_F^2)^2} \\ &= -\frac{C(D)e^2}{2(D-2)} \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \left[ (D-1) + \frac{\vec{k}^2}{w_k} \frac{\partial}{\partial w_k} \right] \left[ \frac{\tanh(\frac{\beta w_k}{2})}{w_k} \right] \\ &= -\frac{1}{D-2} \frac{C(D)e^2}{2^{D-1} \pi^{\frac{D-1}{2}} \Gamma(\frac{D-1}{2})} \\ &\quad \times \int_0^\infty dk k^{D-2} \left[ (D-1) + \frac{k^2}{w_k} \frac{\partial}{\partial w_k} \right] \left[ \frac{\tanh(\frac{\beta w_k}{2})}{w_k} \right], \end{aligned} \quad (3.112)$$

onde  $w_k^2 = \vec{k}^2 + m_F^2$ . Considerando somente o termo dependente da temperatura, temos:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(1)(\beta)}(0) &= \frac{1}{D-2} \frac{C(D)e^2}{2^{D-2} \pi^{\frac{D-1}{2}} \Gamma(\frac{D-1}{2})} \\ &\quad \times \int_0^\infty dk k^{D-2} \left[ (D-1) + \frac{k^2}{w_k} \frac{\partial}{\partial w_k} \right] \left[ \frac{n_F(w_k)}{w_k} \right], \end{aligned} \quad (3.113)$$

onde  $n_F$  representa a distribuição de Fermi-Dirac, ou seja,

$$n_F(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1}. \quad (3.114)$$

Agora, fazendo uma mudança na variável de integração chegamos a:

$$\begin{aligned}\Pi_1^{(1)(\beta)}(0) &= \frac{1}{D-2} \frac{C(D)e^2}{2^{D-2}\pi^{\frac{D-1}{2}}\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_m^\infty dw_k \frac{\partial}{\partial w_k} \left[ (w_k^2 - m_F^2)^{\frac{D-1}{2}} \frac{n_F(w_k)}{w_k} \right] \\ &= 0,\end{aligned}\quad (3.115)$$

para  $D \geq 2$ . Este resultado, em geral, é válido somente para o termo com temperatura finita, que não apresenta divergência ultravioleta. Em uma dimensão  $D$  qualquer, a contribuição independente da temperatura não pode ser incluída na expressão acima, devido a problemas com divergência ultravioleta. Em  $(2+1)$  dimensões, porém, inclusive este termo pode ser considerado, uma vez que a divergência ultravioleta nele existente pode ser renormalizada [9]. Em tal situação, mesmo o termo independente da temperatura se anula.

É de se esperar que um cálculo a dois laços seja mais complicado, mas lembrando que o anulamento de  $\Pi_1$  a um laço deu-se devido a uma derivada total do integrando, podemos buscar este mesmo tipo de estrutura a dois laços. Com esta expectativa, vamos estudar tal correção. Neste caso, existem dois diagramas a serem calculados,  $\Pi_{\mu\nu}^{(a)}$  e  $\Pi_{\mu\nu}^{(b)}$ , figura (3.4), respectivamente expressos por:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a)} = e^4 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} D_{\beta\alpha}(q) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} N_{\mu\alpha\nu\beta}^{(a)}(p, q, k), \quad (3.116)$$

e

$$\Pi_{\mu\nu}^{(b)} = e^4 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} D_{\beta\alpha}(q) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} N_{\mu\alpha\nu\beta}^{(b)}(p, q, k), \quad (3.117)$$

onde definimos:

$$N_{\mu\alpha\nu\beta}^{(a)}(p, q, k) = \text{Tr} \gamma_\mu S(k+p) \gamma_\alpha S(k+p+q) \gamma_\nu S(k+q) \gamma_\beta S(k), \quad (3.118)$$

e

$$N_{\mu\alpha\nu\beta}^{(b)}(p, q, k) = \text{Tr} \gamma_\mu S(k+p) \gamma_\nu S(k) \gamma_\alpha S(k+q) \gamma_\beta S(k). \quad (3.119)$$

Podemos simplificar estas expressões utilizando a invariância de calibre da teoria. Assim, definindo a amplitude com quatro fótons externos a um laço,  $\Gamma_{\mu\alpha\nu\beta}(p, q, -p-q)$ , como sendo:

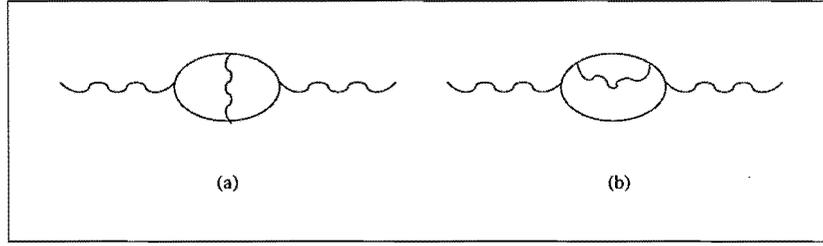


Figura 3.4: Auto-energia do fóton a dois laços.

$$\Gamma_{\mu\alpha\nu\beta}(p, q, -p - q) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ N_{\mu\alpha\nu\beta}^{(a)}(p, q, k) + 2N_{\mu\alpha\nu\beta}^{(b)}(p, q, k) \right], \quad (3.120)$$

então vale que:

$$q_\alpha \Gamma_{\mu\alpha\nu\beta}(p, q, -p - q) = 0, \quad (3.121)$$

devido à invariância de calibre de  $\Gamma_{\mu\alpha\nu\beta}(p, q, -p - q)$ . Desta forma temos que:

$$D_{\beta\alpha}(q) \Gamma_{\mu\alpha\nu\beta}(p, q, -p - q) \rightarrow \frac{1}{q^2 + \kappa^2} \left[ \delta_{\beta\alpha} - \kappa \epsilon_{\beta\alpha\lambda} \frac{q_\lambda}{q^2} \right] \Gamma_{\mu\alpha\nu\beta}(p, q, -p - q). \quad (3.122)$$

Com estas simplificações sendo utilizadas, somamos as duas contribuições ao tensor de polarização a dois laços, finalmente chegando, após algumas manipulações algébricas, a:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(2)}(0) &= 4e^4 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + \kappa^2} \\ &\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial k_i} \left\{ \frac{k_i}{(k^2 + m_F^2)^2} - \frac{k_i [q^2 + 4m_F(\kappa - m_F)]}{(k^2 + m_F^2)^2 [(k + q)^2 + m_F^2]} \right\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.123)$$

ou seja, de maneira análoga ao cálculo a um laço, chegamos a uma derivada total que se anula na integração  $\int d^3k$ , incluindo o termo com temperatura nula.



## Prova Geral

Para estudarmos a generalização dos resultados anteriores para qualquer ordem de perturbação, vamos inicialmente escrever a fórmula geral de  $\Pi_1(0)$ , utilizando a relação de Schwinger-Dyson, figura (3.5):

$$\begin{aligned}\Pi_1(0) &\equiv \Pi_{ii}(0) \\ &= \frac{e}{\beta} \sum_n \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \gamma_i S(k) \Gamma_i(k, -k, 0) S(k),\end{aligned}\quad (3.124)$$

onde  $S(k)$  e  $\Gamma_i$  são o propagador e a função de vértice completos da teoria, respectivamente. Agora precisamos obter uma relação entre estas duas funções a temperatura finita. Note que no formalismo usual esta relação é dada através da forma diferencial da identidade de Ward [42]. No formalismo de tempo imaginário, entretanto, a generalização desta igualdade não é direta, devido a dificuldades relacionadas com a não analiticidade das amplitudes na origem do plano energia-momento. Na aproximação de árvore sabemos que:

$$\frac{\partial S^{(0)}(p)}{\partial p_\mu} = -S^{(0)}(p) \gamma_\mu S^{(0)}(p),\quad (3.125)$$

ou, em outras palavras,

$$\frac{[\partial S^{(0)}(p)]^{-1}}{\partial p_\mu} = \gamma_\mu.\quad (3.126)$$

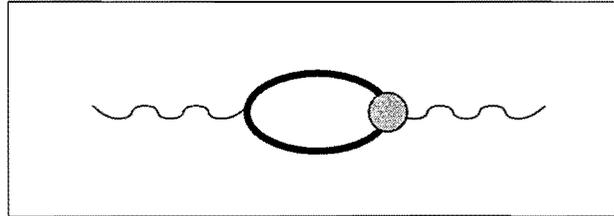


Figura 3.5: Relação de Schwinger-Dyson para a auto-energia do fóton. As linhas internas representam o propagador completo e o círculo, o vértice completo.

Para tentar obter alguma possível informação em ordens superiores, vamos olhar para função de  $N$  pontos do fóton a um laço, ou seja,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\Gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(k; q_1, q_2, \dots, q_N) \\ &\equiv \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{\Gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(k; q_1, q_2, \dots, q_N).\end{aligned}\tag{3.127}$$

Usando a Eq. (3.126), podemos ver que se inserirmos nesta função mais uma linha externa de fóton com índice espacial e tensor energia-momento nulo, então vale que:

$$\begin{aligned}\Gamma_{i, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(0; q_1, q_2, \dots, q_N) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{\Gamma}_{i, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(k; 0, q_1, q_2, \dots, q_N) \\ &\equiv \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_i} \tilde{\Gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(k; q_1, q_2, \dots, q_N) \\ &\equiv 0.\end{aligned}\tag{3.128}$$

Esta é uma espécie de generalização do Teorema de Furry: qualquer laço fermiônico com um fóton externo carregando índice espacial e sem energia nem momento se anula (figura (3.6)).

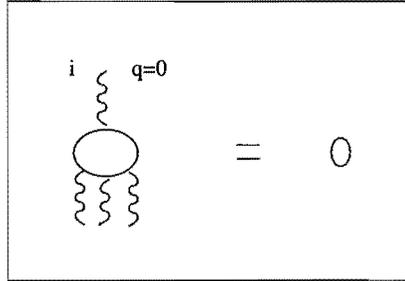


Figura 3.6: Anulamento dos laços fermiônicos com um dos fótons externos carregando um índice espacial e sem energia nem momento.

Uma consequência direta deste resultado é que, em qualquer ordem temos:

$$\Gamma_i(p, -p, 0) = e \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_i}, \quad (3.129)$$

ou seja, obtemos para  $T \neq 0$  um resultado semelhante à Identidade de Ward no formalismo usual, mas válido somente para os índices espaciais. Esta igualdade é óbvia na aproximação de árvore. Já em uma ordem arbitrária, usando a identidade (3.128), podemos ver que um vértice do tipo  $\psi\bar{\psi}A_\mu$  com a linha de fóton com índice espacial e sem energia nem momento se anula (figura (3.7)). Com o uso desta propriedade, a atuação da derivada na função de dois pontos completa pode ser obtida ordem a ordem (figura (3.8)), de forma a chegarmos na Eq. (3.129).

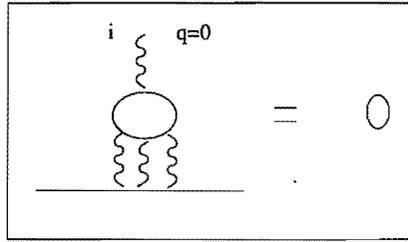


Figura 3.7: Anulamento dos vértices contendo a linha de fóton carregando um índice espacial e sem energia e momento.

Voltando para a expressão de  $\Pi_1(0)$ , Eq. (3.124), temos que:

$$\begin{aligned} \Pi_1(0) &= \frac{e}{\beta} \sum \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \gamma_i S(k) \Gamma_i(k, -k, 0) S(k) \\ &= \frac{e^2}{\beta} \sum \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \gamma_i S(k) \frac{\partial S^{-1}(k)}{\partial k_i} S(k) \\ &= -\frac{e^2}{\beta} \sum \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_i} [\text{Tr} \gamma_i S(k)] \\ &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Vemos da análise acima, que este resultado é geral e válido em qualquer ordem de perturbação.

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left( \text{diagram} \right) = \text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 + \text{diagram}_4$$

Figura 3.8: Atuação da derivada com relação ao momento externo em um diagrama qualquer.

# Capítulo 4

## Coeficiente de Chern-Simons Induzido Não Comutativo

### 4.1 Introdução

Nesta seção vamos descrever alguns dos principais aspectos envolvendo a teoria quântica de campos não comutativa, necessários ao entendimento das seções seguintes. Não será nosso objetivo demonstrar as propriedades, uma vez que boas revisões deste tópico podem ser encontradas na literatura [22].

Na TQC usual trabalhamos com funções  $f(x)$  definidas no espaço  $R^D$  “comutativo”, ou seja, onde as variáveis  $x^\mu$  satisfazem:

$$[x^\mu, x^\nu] = 0. \quad (4.1)$$

Introduzimos a não comutatividade definindo um novo espaço  $R_\theta^D$ , onde as variáveis  $x^\mu$  passam a ser mapeadas em operadores  $\hat{x}^\mu$ , satisfazendo à seguinte relação de comutação:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Aqui,  $\theta^{\mu\nu}$  é uma matriz antisimétrica, que estamos considerando constante\*. Para ver como produtos entre funções são abordados neste novo espaço, vamos considerar o seguinte. Inicialmente, definimos um elemento em  $R_\theta^D$  como:

---

\*A álgebra de operadores nestes espaços foi extensivamente estudada, sendo conhecidas muitas propriedades [23, 43].

$$\hat{W}[f] \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \hat{T}(k), \quad (4.3)$$

onde  $\tilde{f}(k)$  é a transformada de Fourier de  $f(x)$  e  $\hat{T}(k)$  é dado por:

$$\hat{T}(k) \equiv e^{-ik \cdot \hat{x}}. \quad (4.4)$$

Como podemos perceber da definição (4.3), para cada  $f(x)$  com  $x$  pertencente a  $R^D$  existe um  $\hat{W}[f]$  em  $R_\theta^D$ . Mais explicitamente, através de um operador  $\hat{\Delta}(x, \hat{x})$ , expresso por:

$$\hat{\Delta}(x, \hat{x}) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik \cdot \hat{x}} e^{-ik \cdot x}, \quad (4.5)$$

podemos relacionar  $\hat{W}[f]$  diretamente com  $f(x)$ , ou seja,

$$\hat{W}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x, \hat{x}). \quad (4.6)$$

Além disso, podemos inverter  $\hat{W}[f]$  com o uso de  $\hat{\Delta}(x, \hat{x})$  de forma a obter  $f(x)$  em termos de  $\hat{W}[f]$  como sendo:

$$f(x) = \text{Tr} \left[ \hat{W}[f] \hat{\Delta}(x, \hat{x}) \right]. \quad (4.7)$$

Na expressão acima, a operação de traço é realizada em  $R_\theta^D$  e é definida por:

$$\text{Tr} \hat{W}[f] \equiv \int d^D x f(x), \quad (4.8)$$

com a normalização  $\text{Tr} \hat{\Delta}(x, \hat{x}) \equiv 1$ .

A operação de derivação é expressa em  $R_\theta^D$  através de um operador  $\hat{\partial}_\mu$  definido a partir das seguintes relações de comutação:

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta_\mu^\nu, \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0. \quad (4.9)$$

Uma característica importante de  $\hat{\partial}_\mu$ , que será utilizada na versão não comutativa da teoria quântica de campos, é que o comutador dele com  $\hat{W}[f]$  atua como uma derivada ordinária em  $f(x)$ , ou seja,

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{W}[f]] = \hat{W}[\partial_\mu f]. \quad (4.10)$$

A próxima propriedade que estamos interessados em discutir é a multiplicação entre dois elementos  $\hat{W}[f]$  e  $\hat{W}[g]$ . Como veremos a seguir, desta relação iremos naturalmente definir o produto Grönewold-Moyal entre duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  (também conhecido como produto-estrela): com o uso das Eqs. (4.6) e (4.7), pudemos relacionar  $\hat{W}[f]$  e  $f(x)$  de maneira única através de  $\hat{\Delta}(x, \hat{x})$ ; de maneira análoga, com o uso do produto-estrela iremos relacionar a multiplicação entre  $\hat{W}[f]$  e  $\hat{W}[g]$  com as respectivas funções  $f(x)$  e  $g(x)$ . Esta relação é dada por:

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \hat{W}[f * g], \quad (4.11)$$

onde está sendo definido o produto-estrela entre  $f(x)$  e  $g(x)$ ,  $(f * g)(x)$ , como sendo:

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &\equiv \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k' - k) e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{k'_\lambda x^\lambda} \\ &= \lim_{x \rightarrow y} f(x) \left( e^{\frac{i}{2} \partial_{x^\mu} \theta^{\mu\nu} \partial_{y^\nu}} \right) g(y) \\ &= f(x) g(x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Finalmente, como consequência da definição do traço, Eq. (4.8), e do produto-estrela, Eq. (4.11), temos que:

$$\text{Tr} \hat{W}[f_1] \hat{W}[f_2] \dots \hat{W}[f_n] = \int d^D x f_1(x) * f_2(x) * \dots * f_n(x), \quad (4.13)$$

e portanto, pelas propriedades do traço no lado esquerdo da expressão acima, podemos perceber que o produto-estrela de um número qualquer de funções é cíclico dentro de uma integral em  $x$ . Em particular, para duas funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ , vale que:

$$\text{Tr} \hat{W}[f_1] \hat{W}[f_2] = \int d^D x f_1(x) * f_2(x) = \int d^D x f_1(x) f_2(x), \quad (4.14)$$

ou seja, a integração em  $x$  do produto-estrela de duas funções quaisquer, é idêntica à integração do produto usual. Esta propriedade vai ser muito importante na definição da teoria quântica e mostra que os propagadores, e de forma mais geral, a teoria livre, não são alterados pela introdução de coordenadas que não comutam.

Em resumo, criamos uma correspondência entre funções em  $R^D$  e elementos em  $R_\theta^D$  através de:

$$\begin{aligned}
R^D &\leftrightarrow R_\theta^D, \\
f(x) &\leftrightarrow \hat{W}[f], \\
f(x)g(x) &\leftrightarrow \hat{W}[f]\hat{W}[g] \equiv \hat{W}[f * g], \\
\int d^D x f(x) &\leftrightarrow \text{Tr } \hat{W}[f], \\
\int d^D x f_1(x) \dots f_n(x) &\leftrightarrow \text{Tr } \hat{W}_1[f] \dots \hat{W}_n[f] \\
&\equiv \int d^D x f_1(x) * \dots * f_n(x). \quad (4.15)
\end{aligned}$$

## 4.2 Teorias de Campo Não Comutativas

Como exemplo de uma teoria de campos não comutativa, vamos considerar o modelo  $\phi^4$  de um campo escalar real, expresso pela seguinte ação<sup>†</sup>:

$$\begin{aligned}
S[\phi] &\equiv \text{Tr} \left( \frac{1}{2} [\hat{\partial}_\mu, \hat{W}[\phi]]^2 + \frac{m^2}{2} \hat{W}[\phi]^2 + \frac{g^2}{4!} \hat{W}[\phi]^4 \right) \\
&\equiv \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x)]^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2(x) + \frac{g^2}{4!} \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) \right\}, \quad (4.16)
\end{aligned}$$

---

<sup>†</sup>Note que, devido à definição do produto-estrela, Eq. (4.12), os termos em  $S$  contendo interação entre campos passam a conter um número ilimitado de derivadas, o que indica que a teoria assim descrita é não-local.

onde na segunda linha em (4.16) estamos utilizando a propriedade (4.10) do operador derivada.

Do cálculo acima podemos obter uma maneira muito simples de introduzir a não comutatividade na TQC. Basta escrevermos a lagrangiana do modelo usual com a troca dos produtos ordinários entre funções pelos produtos-estrela. Mais ainda, também consideramos que o produto-estrela entre duas funções dentro de uma integração em  $x_\mu$  não é afetado pela não comutatividade do espaço, como vimos na Eq. (4.14)<sup>†</sup>. Desta forma, os propagadores da teoria não são alterados pela não comutatividade. Já os vértices passam a ser expressos, neste exemplo, por:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{W}[\phi])^4 &\equiv \int d^D x \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) \\ &= \prod_{a=1}^4 \int d^D k_a \tilde{\phi}(k_a) \delta^D \left( \sum_{a=1}^4 k_a \right) V(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde definimos  $V(k_1, k_2, k_3, k_4)$  como:

$$\begin{aligned} V(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \prod_{a < b} e^{-i k_a \wedge k_b} \\ &= e^{-i(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \\ &\equiv \frac{1}{3} [\cos(k_1 \wedge k_2) \cos(k_3 \wedge k_4) + \cos(k_1 \wedge k_3) \cos(k_2 \wedge k_4) \\ &\quad + \cos(k_1 \wedge k_4) \cos(k_2 \wedge k_3)]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Na última passagem em (4.18) usamos o fato de  $V$  estar sendo integrado em  $k_a$  através da Eq. (4.17). Além disso estamos definindo de forma compacta  $k \wedge p \equiv \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu p_\nu$  e vamos considerar o caso onde  $\theta^{0i} = 0$ <sup>§</sup>

Como um exemplo de cálculo, considere a correção de massa a um laço, neste caso dada por:

<sup>†</sup>Implicitamente o que está sendo considerado é que a medida funcional não se altera com a introdução do produto Moyal. A referência [44] apresenta uma boa discussão sobre esta questão.

<sup>§</sup>A restrição da não comutatividade somente às componentes espaciais de  $x_\mu$  é assumida para evitarmos complicações associadas com unitariedade e/ou causalidade [45].

$$\begin{aligned}
\Delta m^2 &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\frac{1}{3} [2 \cos^2(k \wedge p) + 1]}{k^2 + m^2} \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\frac{1}{3} [2 + \cos(2k \wedge p)]}{k^2 + m^2} \\
&\equiv \Pi_p + \Pi_{np},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde definimos:

$$\Pi_p \equiv \frac{2}{3} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2}, \tag{4.20}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pi_{np} &\equiv \frac{1}{3} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2 + m^2} \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{2i(k \wedge p)}}{k^2 + m^2}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Neste modelo simples, já podemos observar um aspecto interessante de teorias não comutativas: a decomposição dos diagramas de Feynman em duas componentes com comportamentos distintos, chamadas planares e não planares. As contribuições planares ( $\Pi_p$  no nosso caso), a menos de uma fase que depende exclusivamente dos momentos externos e fatores numéricos, são equivalentes às da teoria comutativa. Já as não planares ( $\Pi_{np}$ ) misturam dentro do integrando o momento externo com o de integração, por meio de fatores oscilatórios. Partindo da Eq. (4.17) e da primeira linha em (4.18), podemos generalizar esta discussão de forma a obter a expressão dos vértices em uma teoria qualquer. Assim, para uma interação contendo  $n$  campos  $\phi_1 \dots \phi_n$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\hat{W}[\phi_1] \hat{W}[\phi_2] \dots \hat{W}[\phi_n]) &\equiv \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \dots * \phi_n(x) \\
&= \int \prod_{a=1}^n d^D k_a \tilde{\phi}_a(k_a) \delta^D \left( \sum_{a=1}^n k_a \right) V(k_1, k_2, \dots, k_n),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

com

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \prod_{a < b} e^{-ik_a \wedge k_b}. \quad (4.23)$$

Como vemos, os vértices da teoria não comutativa carregam uma fase que depende dos momentos e esta é a principal diferença com relação ao caso comutativo. Mais ainda, é possível demonstrar que  $V$  sempre pode ser expresso em termos de componentes planares e não planares, com as características acima apresentadas [22, 46].

Voltando ao cálculo que estamos desenvolvendo, em particular para  $D = 4$ , podemos perceber que  $\Pi_p$  é quadraticamente divergente. Já  $\Pi_{np}$  não apresenta divergências no ultravioleta, devido ao fator oscilatório no numerador. Este corte das divergências ultravioletas, típico das contribuições não planares, parece indicar que a expectativa inicial de melhora destas divergências em uma teoria não comutativa se justifica. Entretanto, como veremos a seguir, o que irá aparecer agora é um outro tipo de divergência nestes diagramas na região do infravermelho. Calculando  $\Pi_{np}$  [47, 22, 44], chegamos a:

$$\Pi_{np}(p) \sim \frac{1}{96\pi^2} \left( \Lambda_{eff}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{eff}^2}{m^2} \right), \quad (4.24)$$

com

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + \tilde{p}^2}, \quad (4.25)$$

onde definimos  $\tilde{p} \equiv \theta^{ij} p_j$ . Além disso, o parâmetro extra  $\Lambda$  foi introduzido nas passagens intermediárias de forma a facilitar as contas e deve tender a infinito no resultado final. Se considerarmos este limite, obtemos:

$$\Pi_{np} \sim \frac{1}{96\pi^2} \left( \frac{1}{\tilde{p}^2} - m^2 \ln \frac{1}{\tilde{p}^2 m^2} \right), \quad (4.26)$$

Por outro lado, se ao invés disso, mantivermos  $\Lambda$  fixo e fizermos  $\tilde{p} = 0$  na Eq. (4.24), temos

$$\Pi_{np} \sim \frac{1}{96\pi^2} \left( \Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right). \quad (4.27)$$

Aqui aparece uma das principais características de teorias não comutativas. Da Eq. (4.26) podemos perceber que embora  $\Pi_{np}$  seja finito para

$\tilde{p} \neq 0$ , ao contrário da contribuição planar, ele apresenta uma divergência infravermelha expressa pela singularidade em  $\tilde{p} = 0$ : se tentarmos retirar a não comutatividade, ou mesmo mantendo  $\theta$  fixo, mas tendendo  $p \equiv |\tilde{p}|$  a zero, recuperaremos a divergência quadrática do caso comutativo. Por outro lado, a inversão dos limites realizada em (4.27) é suficiente para retirar a não comutatividade do modelo, mas recupera a divergência quadrática, expressa em  $\Lambda$  (de certa forma este parâmetro está associado com o limite ultravioleta). Assim, as duas divergências se misturam em uma teoria não comutativa e a expectativa inicial de que a introdução de coordenadas que não comutam poderia resolver o problema ultravioleta não se observa. Este fenômeno é conhecido com mistura infravermelho-ultravioleta (UV/IR) e é comum de teorias não comutativas [47]. Tal comportamento pode ser melhorado em alguns modelos supersimétricos [48].

A quantização de teorias de calibre em espaços não comutativos requer atenção na definição das derivadas covariantes e transformações de calibre utilizadas, uma vez que os produtos de campos agora dependem da ordem. Considere, por exemplo a teoria de um campo escalar complexo  $\phi$  acoplado a um campo de calibre  $A_\mu$ , expresso pela seguinte lagrangiana comutativa:

$$\mathcal{L}^{(c)} = (D_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (4.28)$$

onde estamos considerando  $D_\mu \phi \equiv (\partial - ieA_\mu)\phi$ .

Como vimos anteriormente, a teoria não comutativa é obtida a partir de  $\mathcal{L}^{(c)}$  através da troca do produto usual pelo produto-estrela dos campos. Porém, se quisermos preservar a invariância de calibre da teoria, devemos nos preocupar com a ordem em que escrevemos tais produtos. Se fizermos o mapeamento:

$$\phi^\dagger \phi \rightarrow \phi^\dagger * \phi, \quad (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \rightarrow (D_\mu \phi)^\dagger * (D^\mu \phi), \quad (4.29)$$

devemos definir as transformações de calibre como sendo:

$$\phi \rightarrow (e^{i\Lambda})_* * \phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow \phi^\dagger * (e^{-i\Lambda})_*,$$

$$A_\mu \rightarrow (e^{i\Lambda})_* * A_\mu * (e^{-i\Lambda})_* + i [\partial_\mu (e^{i\Lambda})_*] * (e^{-i\Lambda})_*,$$

e a derivada covariante:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + iA_\mu * \phi, \quad (4.30)$$

de forma a manter a invariância de calibre. Aqui  $(e^{i\Lambda})_*$  representa a transformação de calibre no espaço não comutativo e é expresso por:

$$(e^{i\Lambda})_* = 1 + i\Lambda + \frac{i^2}{2}\Lambda * \Lambda + \dots \quad (4.31)$$

A lagrangiana não comutativa assim obtida é escrita como;

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger * (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger * \phi, \quad (4.32)$$

e a teoria de campos descrita no espaço não comutativo por  $\mathcal{L}$  é dita estar na representação fundamental à esquerda.

Similarmente, podemos obter as representações à direita e adjunta. Por exemplo, na representação à direita, ao invés de considerarmos a versão não comutativa expressa pelas Eqs. (4.29) e (4.30), o mapeamento considerado é:

$$\phi^\dagger \phi \rightarrow \phi * \phi^\dagger \quad (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \rightarrow (D_\mu \phi) * (D^\mu \phi)^\dagger, \quad (4.33)$$

de tal forma que os campos escalares se transformam como:

$$\phi \rightarrow \phi * (e^{i\Lambda})_*, \quad \phi^\dagger \rightarrow (e^{-i\Lambda})_* * \phi^\dagger. \quad (4.34)$$

A transformação do campo  $A_\mu$  não se altera e a derivada covariante passa a ser expressa por:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i\phi * A_\mu. \quad (4.35)$$

A teoria de Chern-Simons em  $(2+1)$  dimensões é definida incorporando à lagrangiana do campo de calibre um termo do tipo:

$$\mathcal{L}_{CS} \equiv \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left( A_\mu * \partial_\nu A_\lambda + \frac{2i}{3} A_\mu * A_\nu * A_\lambda \right). \quad (4.36)$$

Um comportamento interessante já pode ser percebido neste modelo. Como no espaço não comutativo a ordem do produto dos campos importa, agora, apesar de ainda estarmos considerando campos de calibre abelianos, existe em  $\mathcal{L}_{CS}$  um termo trilinear em  $A_\mu$ , típico de teorias não abelianas. Este termo modifica intrinsecamente o comportamento dos modelos e como veremos mais adiante, passaremos agora a obter vários comportamentos qualitativamente mais próximos de uma teoria não abeliana.

### 4.3 Resultados a um laço

Nesta seção iremos apresentar o cálculo da contribuição ao coeficiente de Chern-Simons proveniente do tensor de polarização a um laço. O modelo considerado é o Chern-Simons-Higgs, expresso em termos do produto-estrela como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left( A_\mu * \partial_\nu A_\lambda + \frac{2i}{3} A_\mu * A_\nu * A_\lambda \right) \\ & + (D_\mu \Phi) * (D^\mu \Phi)^\dagger - \frac{\lambda}{4} (\Phi * \Phi^\dagger - v^2)_*^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde a derivada covariante considerada é  $D_\mu \Phi \equiv \partial_\mu \Phi - i\Phi * A_\mu$ . Na fase de simetria quebrada, de maneira análoga ao que fizemos no capítulo anterior, para o modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, vamos considerar  $\langle |\Phi| \rangle \equiv v \neq 0$  e decompor o campo escalar como  $\Phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\chi)$ , de tal forma que a lagrangiana (4.37), em termos destes novos campos, torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left( A_\mu * \partial_\nu A_\lambda + \frac{2i}{3} A_\mu * A_\nu * A_\lambda \right) \\ & + \frac{m^2}{2} A_\mu * A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu) * (\partial_\nu A^\nu) \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) * (\partial^\mu \sigma) - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma * \sigma + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) * (\partial^\mu \chi) - \frac{m_\chi^2}{2} \chi * \chi \\ & - \frac{1}{2} A_\mu * \left( \sigma * \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \chi - \chi * \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \sigma - i[\sigma, \partial^\mu \sigma]_* - i[\chi, \partial^\mu \chi]_* \right) \\ & + \frac{1}{2} A_\mu * A^\mu * \left( \sigma * \sigma + \chi * \chi + 2\sqrt{2}v\sigma + i[\sigma, \chi]_* \right) \\ & - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} v \left\{ \sigma, \left( \frac{\sigma * \sigma + \chi * \chi}{2} + \frac{i}{2} [\chi, \sigma]_* \right) \right\}_* \\ & - \frac{\lambda}{16} (\sigma * \sigma + \chi * \sigma + i[\chi, \sigma]_* )_*^2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde estamos considerando o calibre  $R_\xi$ , definido em (2.50), e definindo as seguintes massas:

$$m^2 = 2v^2, \quad m_\sigma^2 = \lambda v^2, \quad m_\chi^2 = \xi m^2. \quad (4.39)$$

Também estamos definindo o comutator  $[\cdot, \cdot]_*$  e o anticomutador  $\{\cdot, \cdot\}_*$  como sendo os usuais com o produto simples mapeado no estrela.

Como vimos na seção anterior, os propagadores não são afetados pela não comutatividade e podem ser obtidos da maneira usual através dos termos bilineares dos campos. Desta forma, o propagador do campo de calibre no espaço euclidiano é dado por:

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 + M^2} \left( m^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu \frac{m^2 - \xi \kappa^2}{p^2 + \xi m^2} - \kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda} p_\lambda \right) \frac{1}{\kappa^2}, \quad (4.40)$$

onde  $p_0 = w_n = 2\pi nT$  são as frequências de Matsubara para o caso bosônico e estamos definindo uma nova massa  $M$  para o campo de calibre como:

$$M \equiv \frac{m^2}{\kappa}. \quad (4.41)$$

Note que o propagador acima pode ser extraído da Eq. (2.53), para o propagador do campo de calibre no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs, no limite  $e^2, \kappa \rightarrow \infty$ , com  $e^2/\kappa$  finito. Nesta situação, um dos pólos de (2.53) deixa de existir e a teoria passa a ter uma única massa física para o campo de calibre, expressa pela Eq. (4.41). Já o propagador do campo escalar é o mesmo utilizado no capítulo anterior, Eq. (3.30), ou seja:

$$D_\sigma(p) = \frac{1}{p^2 + m_\sigma^2}. \quad (4.42)$$

Com relação às contribuições em  $\mathcal{L}$  para os vértices, além dos produtos usuais entre campos, novos termos aparecem, exclusivos da teoria não comutativa. Um deles, o com três campos de calibre, pode ser observado diretamente de  $\mathcal{L}_{CS}$ , Eq. (4.36). Além deste, podemos notar a presença de novos vértices que dependem de comutadores entre campos e que no caso não comutativo não são nulos. No cálculo que iremos desenvolver somente dois diagramas contribuem (figura (4.1)).

Considerando o primeiro diagrama, figura (4.1)(a), o termo que quebra paridade pode ser extraído diretamente (uma vez que só existe uma linha interna do campo de calibre) e é dado por:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a)} \equiv \pi_{\mu\nu}^{(a)}(p) = \frac{8v^2}{\kappa} \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda} k_\lambda \cos^2(k \wedge p)}{(k^2 + M^2)[(p-k)^2 + m_\sigma^2]}. \quad (4.43)$$

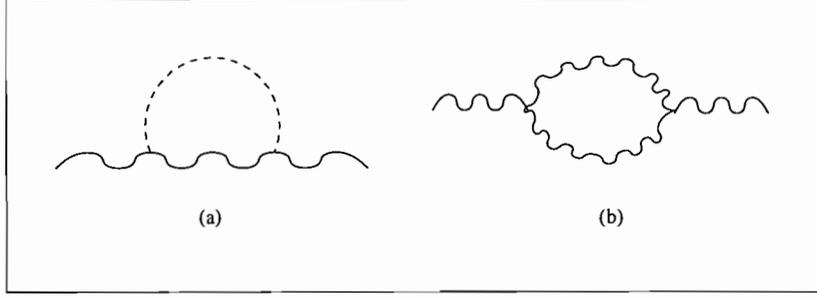


Figura 4.1: Diagramas que contribuem para o termo com quebra de paridade na auto-energia do fóton a um laço. As linhas onduladas representam o campo  $A_\mu$  e as pontilhadas, o campo  $\sigma$ .

Para  $p_0 = 0$ , a expressão acima torna-se:

$$\pi_{0i}^{(a)}(\vec{p}) = \frac{8v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \cos^2(k \wedge p) \epsilon_{0ij} k_j \times T \sum_n \frac{1}{(k_0^2 + w_M^2) [k_0^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2 + m_\sigma^2(p)]}. \quad (4.44)$$

Para calcular esta integral note que, enquanto o denominador contém apenas somas em  $\vec{k}$  e  $\vec{p}$  e pode ser expandido em pequenos momentos externos, usando uma expressão similar à Eq. (3.46), o numerador contém o produto  $\theta_{ij} k_i p_j$ , que não necessariamente é pequeno para pequenos valores de  $\vec{p}$ . Para evitar possíveis problemas, vamos usar a variável  $\tilde{p}_i \equiv \theta_{ij} p_j$ , tal que  $p \cdot \tilde{p} = 0$ . Desta forma, calculamos a soma em  $k_0$ , expandindo somente o denominador e deixamos a expansão em torno de  $\tilde{p} = 0$  para após o cálculo das integrais espaciais. Seguindo estes passos, chegamos a:

$$\pi_{0i}^{(a)}(\vec{p}) = \frac{4v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{0ij} k_j \cos^2(k \wedge p) \left[ 1 - 2\vec{k} \cdot \vec{p} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \right] \times \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\beta w_M/2)}{w_M} - \frac{\coth(\beta w_\sigma/2)}{w_\sigma} \right] \right\}, \quad (4.45)$$

onde usamos a Eq. (3.35) na soma em  $k_0$ .

Utilizando a igualdade:

$$2 \cos^2(k \wedge p) = \left[ 1 + \cos(2\vec{k} \cdot \vec{p}) \right],$$

podemos reescrever a Eq. (4.45) como:

$$\pi_{0i}^{(a)}(\vec{p}) \equiv A_{0i}(\vec{p}) + B_{0i}(\vec{p}), \quad (4.46)$$

onde  $A_{0i}$  e  $B_{0i}$  são as contribuições planar e não-planar a  $\pi_{0i}^{(a)}(\vec{p})$ , respectivamente dadas por:

$$\begin{aligned} A_{0i}(\vec{p}) &= \frac{2v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{0ij} k_j \left[ 1 - 2\vec{k} \cdot \vec{p} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\beta w_M/2)}{w_M} - \frac{\coth(\beta w_\sigma/2)}{w_\sigma} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

e

$$\begin{aligned} B_{0i}(\vec{p}) &= \frac{2v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{0ij} k_j \cos(2\vec{k} \cdot \vec{p}) \left[ 1 - 2\vec{k} \cdot \vec{p} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\beta w_M/2)}{w_M} - \frac{\coth(\beta w_\sigma/2)}{w_\sigma} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

No cálculo da parte planar estão envolvidas as mesmas técnicas utilizadas no capítulo anterior. Assim, separando as partes independente e dependente da temperatura, chegamos a:

$$\begin{aligned} A_{0i}(\vec{p}; T=0) &= \frac{2v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{0ij} k_j \left[ 1 - 2\vec{k} \cdot \vec{p} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \right] \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \right) \left( \frac{1}{w_M} - \frac{1}{w_\sigma} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3\pi} \frac{|\kappa|}{\kappa} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma}{M} \right) \epsilon_{0ij} p_j, \end{aligned} \quad (4.49)$$

e

$$A_{0i}(\vec{p}; T) = -\frac{2v^2}{\pi\kappa} \epsilon_{0ij} p_j \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left[ \frac{m_\sigma^2 \ln\left(\frac{M}{m_\sigma}\right)}{m_\sigma^2 - M^2} \right]. \quad (4.50)$$

Vale ressaltar aqui que estamos apresentando também o termo com temperatura nula porque ele assumirá um papel importante na discussão da mistura das divergências IR/UV do modelo. Outro ponto a ser destacado é que a Eq. (4.50) é exatamente metade da Eq. (3.58), o que era de se esperar, uma vez que a contribuição planar, a menos de uma fase, que é nula neste caso, é igual ao cálculo direto do espaço comutativo (o fator de meio aparece porque estamos considerando somente a parte planar; como veremos a seguir, a outra metade virá do termo independente de  $\theta$  em  $B_{0i}$ ). Calculando  $B_{0i}$  temos:

$$\begin{aligned} B_{0i}(\vec{p}) &= \frac{2v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{0ij} k_j \cos(\vec{k} \cdot \vec{p}) \left[ 1 - 2\vec{k} \cdot \vec{p} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\beta w_M/2)}{w_M} - \frac{\coth(\beta w_\sigma/2)}{w_\sigma} \right] \right\} \\ &= -\frac{4v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{0ij} k_j \vec{k} \cdot \vec{p} \cos(\vec{k} \cdot \vec{p}) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\beta w_M/2)}{w_M} - \frac{\coth(\beta w_\sigma/2)}{w_\sigma} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

A integração em  $k$  pode ser realizada com o uso de coordenadas polares, figura (4.2), tais que:

$$\vec{k} \equiv \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})\vec{p}}{|\vec{p}|^2} + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})\vec{p}}{|\vec{p}|^2}. \quad (4.52)$$

Desta forma, obtemos:

$$B_{0i}(\vec{p}) = -\frac{4v^2}{\kappa} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{0ij} \left[ \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|^2} p_j + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|^2} \tilde{p}_j \right] (\vec{k} \cdot \vec{p}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{p})$$

$$\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\beta w_M/2)}{w_M} - \frac{\coth(\beta w_\sigma/2)}{w_\sigma} \right] \right\}. \quad (4.53)$$

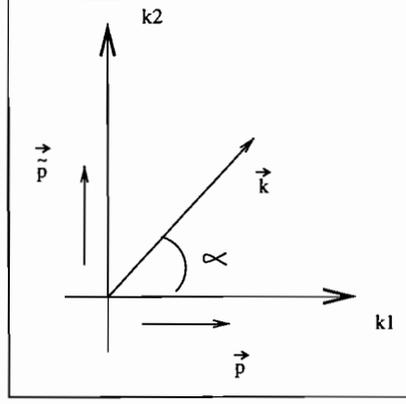


Figura 4.2: Sistema de Coordenadas polares utilizado na decomposição de  $\vec{k}$ .

Agora usando que  $\vec{k} \cdot \vec{p} \sim k_1$  e  $\vec{k} \cdot \vec{p} \sim k_2$ , podemos simplificar a Eq. (4.53), considerando somente os termos pares em  $k_i$ . Obtemos assim:

$$\begin{aligned} B_{0i}(\vec{p}) &= -\frac{4v^2}{\kappa} \frac{\epsilon_{0ij} p_j}{(2\pi)^2} \int d^2 k \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{p}|^2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{p}) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\frac{\beta w_M}{2})}{w_M} - \frac{\coth(\frac{\beta w_\sigma}{2})}{w_\sigma} \right] \right\} \\ &= \frac{4v^2}{\kappa} \frac{\epsilon_{0ij} p_j}{(2\pi)^2} \\ &\quad \times \int_0^\infty k^3 dk \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \frac{\coth(\frac{\beta w_M}{2})}{w_M} - \frac{\coth(\frac{\beta w_\sigma}{2})}{w_\sigma} \right] \right\} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\alpha \cos^2(\alpha) \cos[kp\theta \sin(\alpha)], \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde  $\tilde{p} \equiv |\vec{p}|$ .

O cálculo na variável angular,  $\alpha$ , pode ser efetuado de forma exata em termos das funções de Bessel,  $J_n(z)$  [51]. Chegamos, assim, a:

$$\begin{aligned}
B_{0i}(\vec{p}) &= -\frac{2v^2}{\kappa} \frac{\epsilon_{0ij} p_j}{\pi} \\
&\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 J_1(k\tilde{p})}{\tilde{p}} \left[ \frac{\coth\left(\frac{\beta w_M}{2}\right)}{w_M} - \frac{\coth\left(\frac{\beta w_\sigma}{2}\right)}{w_\sigma} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.55}$$

onde utilizamos:

$$J_{2n}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \cos(2n\alpha) \cos[z \sin(\alpha)]. \tag{4.56}$$

Integrais do tipo (4.55) em  $k$  irão aparecer em todas as amplitudes que iremos calcular. Assim, apresentaremos um cálculo geral no apêndice (A). Aqui, nos restringiremos a listar os resultados. Temos portanto:

$$\begin{aligned}
B_{0i}(\vec{p}; T=0) &= -\frac{2v^2}{\pi\kappa} \epsilon_{0ij} p_j \\
&\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ \left( M \frac{e^{-\tilde{p}M}}{(\tilde{p})^2} + \frac{e^{-\tilde{p}M}}{(\tilde{p})^3} \right) - (M \rightarrow m_\sigma) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.57}$$

e

$$\begin{aligned}
B_{0i}(\vec{p}; T) &= -\frac{4v^2}{\pi\kappa} \epsilon_{0ij} p_j \frac{1}{\beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \\
&\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left[ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left( M \frac{e^{-\beta M \sqrt{n^2 + \tau^2}}}{n^2 + \tau^2} + T \frac{e^{-\beta M \sqrt{n^2 + \tau^2}}}{(n^2 + \tau^2)^{3/2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m_\sigma \frac{e^{-\beta m_\sigma \sqrt{n^2 + \tau^2}}}{n^2 + \tau^2} - T \frac{e^{-\beta m_\sigma \sqrt{n^2 + \tau^2}}}{(n^2 + \tau^2)^{3/2}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.58}$$

onde definimos uma nova variável  $\tau$  como:

$$\tau \equiv \tilde{p}T. \tag{4.59}$$

Note, na Eq. (4.57), o surgimento de aparentes singularidades em torno de  $\tilde{p} = 0$  (pólos de Seiberg). Como já dissemos anteriormente, este tipo de divergência na região do infravermelho, comum de teorias não comutativas [47], expressa a mistura IR/UV. Neste caso, entretanto, ao expandirmos a Eq. (4.57) em pequenos valores de  $\tilde{p}$ , apesar de individualmente as divergências existirem, ocorre um cancelamento na soma dos vários termos. Este resultado era esperado, uma vez que já no caso comutativo a divergência ultravioleta não existe. Com este particular comportamento, podemos escrever sem dificuldades o limite  $\theta = 0$ , onde a não comutatividade é retirada da teoria. Neste caso obtemos:

$$B_{0i}(\vec{p}; T = 0) \rightarrow \epsilon_{0ij} p_j \left[ \frac{1}{3\pi} \frac{|\kappa|}{\kappa} \frac{(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma}{M})}{(1 + \frac{m_\sigma}{M})^2} \right] \equiv A_{0i}(\vec{p}; T = 0), \quad (4.60)$$

e

$$B_{0i}(\vec{p}; T) \rightarrow \frac{-2v^2}{\pi\kappa} \epsilon_{0ij} p_j \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left[ \frac{m_\sigma^2 \ln\left(\frac{M}{m_\sigma}\right)}{m_\sigma^2 - M^2} \right] \equiv A_{0i}(\vec{p}; T), \quad (4.61)$$

onde no termo com  $T \neq 0$  estamos considerando também o regime de altas temperaturas. Da Eqs. (4.60) e (4.61) podemos obter o pedaço que faltava às Eqs. (4.49) e (4.50) de forma a recuperar o limite comutativo.

O próximo passo é estudar a primeira correção às Eqs. (4.60) e (4.61) com relação à não comutatividade. No caso de temperatura nula, este estudo é feito através de uma expansão em torno de  $\tilde{p} = 0$ . Chegamos desta maneira a:

$$B_{0i}(\vec{p}; T = 0) \rightarrow \epsilon_{0ij} p_j \left[ \frac{1}{3\pi} \frac{|\kappa|}{\kappa} \frac{(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma}{M})}{(1 + \frac{m_\sigma}{M})^2} - \frac{v^2}{4\pi\kappa} \tilde{p} \right]. \quad (4.62)$$

Já para o termo dependente da temperatura, o parâmetro que surge naturalmente é  $\tau$ , e realizando uma expansão em torno de  $\tau = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
B_{0i}(\vec{p}; T) &= -\frac{2v^2}{\pi\kappa} \epsilon_{0ij} p_j \frac{1}{\beta} \\
&\times \frac{\partial}{\partial(m_\sigma^2)} \left\{ \frac{1}{m_\sigma^2 - M^2} \left[ m_\sigma^2 \ln\left(\frac{M}{m_\sigma}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tau^2 \frac{\beta^2}{8} (M^4 \ln(\beta M) - m_\sigma^4 \ln(\beta m_\sigma)) \right] \right\} \\
&+ \mathcal{O}(\tau^4). \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Vamos agora estudar o segundo diagrama, figura (4.1)(b), expresso por:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(b)}(p) = 2\kappa^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \epsilon_{\mu\alpha\beta} \epsilon_{\sigma\rho\nu} D_{\alpha\rho}(k+p) D_{\sigma\beta}(k) \sin^2(k \wedge p). \tag{4.64}$$

Aqui temos uma estrutura de índices um pouco mais delicada e não podemos extrair diretamente o termo com quebra de paridade. Olhando somente para o numerador do integrando, temos:

$$\begin{aligned}
N_{\mu\nu} &\equiv \epsilon_{\mu\alpha\beta} \epsilon_{\sigma\rho\nu} \left[ m^2 \delta_{\sigma\rho} - k_\sigma k_\rho \frac{m^2 - \xi\kappa^2}{k^2 + \xi m^2} - \kappa \epsilon_{\sigma\rho\delta} k_\delta \right] \\
&\times \left[ m^2 \delta_{\alpha\beta} - (k+p)_\alpha (k+p)_\beta \frac{m^2 - \xi\kappa^2}{(k+p)^2 + \xi m^2} - \kappa \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (k+p)_\gamma \right], \tag{4.65}
\end{aligned}$$

e considerando somente os termos que contribuem para o cálculo envolvendo a quebra de paridade, chegamos a:

$$\begin{aligned}
N_{\mu\nu} &\rightarrow \kappa m^2 \epsilon_{\mu\nu\alpha} p_\alpha \\
&- \kappa (m^2 - \xi\kappa^2) k \cdot (k+p) \epsilon_{\mu\nu\alpha} \left[ \frac{k_\alpha}{k^2 + \xi m^2} - \frac{(k+p)_\alpha}{(k+p)^2 + \xi m^2} \right]. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Incorporando este resultado à Eq. (4.64), podemos extrair o termo que quebra paridade como sendo:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu(PV)}^{(b)}(p) &\equiv \pi_{\mu\nu}^{(b)}(p) \\
&= 2\kappa^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p) \epsilon_{\mu\nu\lambda}}{(m^4 + \kappa^2 k^2)[m^4 + \kappa^2(k+p)^2]} \\
&\quad \times \left\{ \kappa m^2 p_\lambda \right. \\
&\quad \left. - \kappa(m^2 - \xi\kappa^2)k \cdot (k+p) \left[ \frac{k_\lambda}{k^2 + \xi m^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(k+p)_\lambda}{(k+p)^2 + \xi m^2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

O cálculo que segue não apresenta nenhuma novidade com relação ao anterior. Assim, sem discutir os detalhes, chegamos a:

$$\pi_{0i}^{(b)}(\vec{p}; T=0) = \frac{1}{16\pi} \frac{3m^2 - \xi\kappa^2}{\kappa} \tilde{p} \epsilon_{0ij} p_j, \tag{4.68}$$

e, no regime de altas temperaturas,

$$\pi_{0i}^{(b)}(\vec{p}; T) = -\frac{\epsilon_{0ij} p_j}{16\pi\kappa} \beta\tau^2 [2m^2 \ln(\beta M) + (m^2 - \xi\kappa^2)G], \tag{4.69}$$

onde definimos a função  $F$  como:

$$G \equiv \frac{\xi^2 m^4 (\xi m^2 + M^2)}{(\xi m^2 - M^2)^3} \ln(\beta\sqrt{\xi}m) - \frac{M^2(M^4 + 4\xi^2 m^4 - 3\xi m^2 M^2)}{(\xi m^2 - M^2)^3} \ln(\beta M). \tag{4.70}$$

Note que tanto (4.68) quanto (4.69) não apresentam um termo independente de  $\theta$ . Este resultado era esperado, uma vez que este diagrama é uma contribuição puramente não comutativa a  $\Pi_{\mu\nu}$ , que deve desaparecer quando fizermos  $\theta$  tender a zero (o termo trilinear em  $A_\mu$  na lagrangiana desaparece neste limite). Matematicamente, podemos entender este resultado diretamente da Eq. (4.64): para  $\theta = 0$  o seno se anula e este diagrama desaparece. Outra questão interessante que surge neste resultado é a dependência explícita no parâmetro de calibre  $\xi$ . Note que este comportamento veio do diagrama puramente não comutativo, fig (4.1)(b). Aqui podemos reconhecer mais um

aspecto que assemelha este modelo ao caso não abeliano, uma vez que naquela situação também obtemos uma dependência explícita do calibre neste tipo de cálculo [49].

Colecionando os resultados provenientes dos dois diagramas,  $\pi^{(a)}$  a  $\pi^{(b)}$ , obtemos:

$$\Pi_{0i(PV)}^{nc}(\vec{p}) \equiv \pi_{0i}(\vec{p}; T = 0) + \pi_{0i}(\vec{p}; T), \quad (4.71)$$

onde as componentes independente e dependente da temperatura são respectivamente dadas por:

$$\pi_{0i}(\vec{p}; T = 0) = \frac{1}{\pi\kappa} \epsilon_{0ij} p_j \left[ \frac{2|\kappa|}{3} \frac{\frac{1}{2} \frac{m_\sigma}{M}}{\left(1 + \frac{m_\sigma}{M}\right)^2} + \frac{\tilde{p}}{4} (m^2 - \frac{3}{4} \xi \kappa^2) \right], \quad (4.72)$$

e

$$\begin{aligned} \pi_{0i}(\vec{p}; T) = & -\frac{1}{\pi\kappa} \epsilon_{0ij} p_j \frac{1}{\beta} \left\{ +4v^2 \frac{\partial}{\partial m_\sigma^2} \left[ \frac{m_\sigma^2 \ln\left(\frac{M}{m_\sigma}\right)}{m_\sigma^2 - M^2} \right] \right. \\ & + \frac{\tilde{p}^2}{4} v^2 \frac{\partial}{\partial m_\sigma^2} \left[ \frac{M^4 \ln(\beta M) - m_\sigma^4 \ln(\beta m_\sigma)}{m_\sigma^2 - M^2} \right] \\ & \left. + \frac{\tilde{p}^2}{16} [2m^2 \ln(\beta M) + (m^2 - \xi \kappa^2) G] \right\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Como já destacamos anteriormente, não existem singularidades no infravermelho advindas das contribuições não planares, apesar delas aparentemente estarem presentes nas expressões completas (veja, por exemplo, Eq. (4.53)). Este resultado é esperado porque o limite comutativo também não apresenta divergências ultravioletas. Com relação ao termo com temperatura finita e não nula, a contribuição em primeira ordem em  $\tilde{p}$  apresenta uma dependência com a temperatura diferente da contribuição comutativa, isto é, a contribuição planar é proporcional a  $T$  enquanto que a contribuição não planar é proporcional a  $T \ln T$ . Esta diferença de comportamento já foi encontrada em outros modelos [29] e pode estar relacionada com a escolha de limites que estamos considerando, isto é, a expansão em torno de pequenos valores de  $\tau$ .

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Apresentamos nos capítulos anteriores um estudo de alguns efeitos térmicos em teorias de calibre em  $(2 + 1)$  dimensões acopladas tanto com campos fermiônicos quanto com campos bosônicos na fase de simetria  $U(1)$  quebrada. Em particular, estudamos sistematicamente o processo de blindagem nestas teorias, tendo sido calculadas as massas elétricas e magnéticas a um laço. Para a  $QED_3$ , encontramos o interessante comportamento de ausência do processo de blindagem para cargas magnéticas, resultado este geral e válido em qualquer ordem de perturbação. Dando continuidade ao trabalho, extendemos parte desta análise para teorias não comutativas. Desenvolvemos um estudo da mistura UV/IR e dos efeitos de temperatura no coeficiente de Chern-Simons induzido no modelo Chern-Simons-Higgs em um espaço não comutativo.

Com relação aos estudos realizados no espaço comutativo usual, em linhas gerais, vimos que, tanto em teorias com acoplamento com campos bosônicos quanto com campos fermiônicos, o coeficiente de Chern-Simons induzido apresenta a característica de não ser analítico na origem do espaço energia-momento. No caso bosônico, das Eqs. (3.58) e (3.76), podemos ver que, no regime de altas temperaturas, no limite estático ele comporta-se como  $T$  e no limite de onda longa como  $T \ln T$ . Já no caso fermiônico, os dois limites foram calculados em [41] e comportam-se respectivamente como  $\frac{1}{T}$  e  $\frac{\ln T}{T}$ . Este resultado vale ser ressaltado, porque quando as massas envolvidas nos cálculos dos laços bosônicos não são iguais, sabemos que a analiticidade em torno da origem dos momentos é recuperada, pelo menos em modelos não envolvendo termos com quebra de paridade [21]. No nosso cálculo este comportamento pôde ser observado para as contribuições com paridade con-

servada, Eqs. (3.78) e (3.79). Além do mais, o termo de Chern-Simons induzido proveniente do laço bosônico tem uma dependência com a temperatura completamente diferente daquele proveniente do laço fermiônico.

Estudando as massas físicas dos sistema, vimos que embora em ambos os casos, bosônico e fermiônico, o propagador completo desenvolva uma estrutura com dois pólos (o que modificaria a análise dos processos de blindagem), nos cálculos a um laço, limite estático e regime de altas temperaturas, apenas um deles sobrevive: no caso de bósons, sendo ele dominado pelo termo com paridade quebrada e no caso de férmions, pelo termo com paridade conservada. No caso bosônico, vimos que as massas magnética e elétrica não são nulas e existem, portanto, os respectivos processos de blindagem.

Considerando o acoplamento com campos fermiônicos, isto é, a  $QED_3$ , vimos que a massa elétrica continua existindo e a massa magnética passa a ser nula, como consequência do fato de  $\Pi_1$ , a componente transversal do tensor de polarização, se anular. Foi possível demonstrar que este resultado é geral e válido em qualquer ordem de perturbação, o que é surpreendente, pois apesar do termo de Chern-Simons alterar intrinsecamente o comportamento magnético da teoria (lembre-se que ele atrela a toda carga elétrica um fluxo de campo magnético), ele não é suficiente para modificar o comportamento encontrado na  $QED_4$ . Também demonstramos que, a um laço, a massa magnética se anula na  $QED$  à Temperatura Finita em qualquer dimensão (para  $(2 + 1)$  dimensões inclusive a parte independente da temperatura pôde ser regularizada para zero).

Em espaços não comutativos, estudamos o coeficiente de Chern-Simons induzido na teoria de Chern-Simons pura acoplada com um campo de Higgs na fase de simetria quebrada. Considerando somente o termo independente da temperatura, encontramos que não existe a mistura UV/IR, típica de teorias não comutativas. Este resultado pôde ser entendido olhando-se para a contribuição planar ao coeficiente, que é finita. Este setor da teoria nesta ordem de perturbação, portanto, não apresenta problemas com divergências; nada podemos dizer desta análise do comportamento em ordens superiores. Como consequência, pudemos recuperar a não comutatividade considerando o limite onde  $\theta = 0$  e também obter a primeira contribuição com relação ao parâmetro não comutativo como sendo proporcional a  $\tilde{p}$ , Eq. (4.72). Estudando o termo dependente da temperatura, realizamos uma expansão em torno de  $\tau = 0$  (definido na Eq. (4.59)), obtendo assim, no limite estático e regime de altas temperaturas o termo dominante proveniente da contribuição não planar como sendo proporcional a  $\tilde{p}^2 T \ln T$ , Eq. (4.73), muito diferente

da contribuição planar, que comporta-se como  $T$ . A expansão das amplitudes em torno de pequenos valores da variável  $\tau$  foi discutida em [50] em termos de uma espécie de generalização da análise de *hard thermal loop*, amplamente usado em teorias comutativas. Já em [29], estes tipos de limite são associados com alguns processos de transmutação bósons-férmions nas contribuições não planares.

Ainda com relação ao cálculo não comutativo, vimos que a teoria abeliana apresenta comportamentos típicos de teorias de Yang-Mills. Este resultado já havia sido encontrado com relação à discretização do coeficiente de Chern-Simons [24] e agora manifestou-se no aparecimento de uma dependência explícita no parâmetro de calibre deste coeficiente, como podemos observar das Eqs. (4.72) e (4.73).

Várias possibilidades surgem de continuidade deste trabalho. Com relação à dependência do termo que quebra paridade da auto-energia do fóton com o parâmetro de calibre, para estudarmos a invariância de calibre precisaríamos calcular a contribuição proveniente da função de três pontos. Neste caso, a independência de calibre apareceria, em analogia ao caso não abeliano, como:

$$\sim f(\xi) \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left[ A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{2i}{3} A_\mu * A_\nu * A_\lambda \right], \quad (5.1)$$

com  $f(\xi)$  sendo uma função a ser determinada perturbativamente. Assim seria necessário calcular a correção a um laço da função de três pontos em torno da origem do espaço energia-momento. Um estudo nesta linha já está sendo desenvolvido.

Outra possibilidade seria a análise dos processos de blindagem nos modelos não comutativos. Considerando que os propagadores não são alterados pela não comutatividade, a questão da existências de dois pólos nos propagadores dos modelos de Maxwell-Chern-Simons-Higgs e na  $QED_3$  com termo de Chern-Simons (no caso fermiônico os dois pólos somente aparecendo no propagador completo) continua a existir, e uma análise do comportamento destes propagadores no regime de altas temperaturas pode trazer resultados interessantes.

Em uma linha paralela a esta, podemos também discutir a renormalizabilidade da teoria em espaços não comutativos, no modelo aqui estudado, ou seja, Chern-Simons puro acoplado com campo de Higgs.

# Apêndice A

## Integrais Úteis

### A.1 Caso Comutativo

Aqui apresentaremos um exemplo dos cálculos utilizados no capítulo (3) para obter o limite de pequenos valores de  $y$  da função  $h_n$ , Eq. (3.53), ou seja,

$$h_n(y) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1}. \quad (\text{A.1})$$

O método que iremos utilizar é baseado na referência [39]. Começamos por utilizar a identidade:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2\pi m)^2}, \quad (\text{A.2})$$

de tal forma que substituindo este resultado na Eq. (A.1) obtemos:

$$h_n(y) = \int_0^\infty dx \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + (2\pi m)^2} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Cada pedaço da expressão acima contém, em geral, uma divergência para grandes valores de  $x$ . Para garantir que  $h_n(y)$  seja finito, é necessário que estas divergências se compensem no resultado final. Vamos lidar com esta dificuldade definindo uma quantidade regularizada  $h_n^\epsilon(y)$ , como sendo:

$$h_n^\epsilon(y) \equiv \int_0^\infty \frac{x^{n-\epsilon} dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - 1}, \quad (\text{A.4})$$

de tal forma que:

$$h_n(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_n^\epsilon(y). \quad (\text{A.5})$$

Usando a igualdade (A.2), podemos reescrever  $h_n^\epsilon(y)$  como:

$$\begin{aligned} h_n^\epsilon(y) &= \int_0^\infty dx \frac{x^{n-\epsilon}}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+(2\pi m)^2} \right] \\ &= \int_0^\infty dx x^{n-\epsilon} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+y^2+(2\pi m)^2} - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-\epsilon}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\equiv I_n^\epsilon(y) + J_n^\epsilon(y), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde definimos  $I_n^\epsilon(y)$  e  $J_n^\epsilon(y)$  respectivamente por:

$$I_n^\epsilon(y) \equiv \int_0^\infty dx x^{n-\epsilon} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+y^2+(2\pi m)^2}, \quad (\text{A.7})$$

e

$$J_n^\epsilon(y) \equiv -\frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-\epsilon}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (\text{A.8})$$

Calculando  $I_n^\epsilon(y)$  temos:

$$\begin{aligned} I_n^\epsilon(y) &= \int_0^\infty dx x^{n-\epsilon} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+y^2+(2\pi m)^2} \\ &= \sum_{m=-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+(2\pi m)^2} \int_0^\infty dx \left[ \frac{x^{n-\epsilon}}{1+\frac{x^2}{y^2+(2\pi m)^2}} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^\infty [y^2+(2\pi m)^2]^{\frac{n-1-\epsilon}{2}} \int_0^\infty dy \frac{y^{n-\epsilon}}{1+y^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Podemos reescrever a soma que aparece em (A.9) como sendo:

$$\sum_{m=-\infty}^\infty [y^2+(2\pi m)^2]^{\frac{n-1-\epsilon}{2}} = y^{n-1-\epsilon} + 2 \sum_{m=1}^\infty [y^2+(2\pi m)^2]^{\frac{n-1-\epsilon}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= y^{n-1-\epsilon} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (2\pi m)^{n-1-\epsilon} \\
&+ 2 \sum_{m=0}^{\infty} (2\pi m)^{n-1-\epsilon} \left( Y^{\frac{n-1-\epsilon}{2}} - 1 \right) \\
&\equiv y^{n-1} - \epsilon y^{n-1} \ln(y) + 2(2\pi)^{n-1-\epsilon} \sum_{m=0}^{\infty} m^{n-1-\epsilon} \\
&+ 2(2\pi)^{n-1-\epsilon} \sum_{m=0}^{\infty} m^{n-1-\epsilon} \left[ -1 + Y^{\frac{n-1}{2}} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{\epsilon}{2} Y^{\frac{n-1}{2}} \ln(Y) \right] \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{A.10}
\end{aligned}$$

onde na última passagem realizamos uma expansão em pequenos valores de  $\epsilon$ . Além disso, definimos a variável  $Y$  como:

$$Y \equiv \left[ 1 + \left( \frac{y}{2\pi m} \right)^2 \right]. \tag{A.11}$$

A seguir devemos expandir a expressão acima em torno  $y = 0$  (o que corresponde no nosso caso ao regime de altas temperaturas). Chegamos assim a:

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{\infty} [y^2 + (2\pi m)^2]^{\frac{n-1-\epsilon}{2}} &= y^{n-1} - \epsilon y^{n-1} \ln(y) + 2(2\pi)^{n-1-\epsilon} \zeta(\epsilon + 1 - n) \\
&+ 2(2\pi)^{n-1-\epsilon} A_{n,\epsilon} y^2 \zeta(\epsilon + 3 - n) \\
&+ 2(2\pi)^{n-1-\epsilon} B_{n,\epsilon} y^4 \zeta(\epsilon + 5 - n), \tag{A.12}
\end{aligned}$$

onde  $\zeta(x)$  são as funções Zeta de Riemann e estamos definindo:

$$A_{n,\epsilon} \equiv -\frac{1 - n + \epsilon}{2(2\pi)^2},$$

e

$$B_{n,\epsilon} \equiv \frac{3 + n^2 + 4\epsilon - 2n(2 + \epsilon)}{128\pi^4}. \tag{A.13}$$

Como as funções  $\zeta(x)$  tem comportamentos distintos para argumentos positivos e negativos, vamos considerar um caso particular, por exemplo  $n = 3$ . Neste caso, a soma torna-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{\infty} [y^2 + (2\pi m)^2]^{\frac{2-\epsilon}{2}} &= y^2 - \epsilon y^2 \ln(y) + 2(2\pi)^{2-\epsilon} \zeta(\epsilon - 2) \\
&+ 2(2\pi)^{2-\epsilon} A_{3,\epsilon} y^2 \zeta(\epsilon) \\
&+ 2(2\pi)^{2-\epsilon} B_{3,\epsilon} y^4 \zeta(\epsilon + 2).
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Agora usando que:

$$\int_0^{\infty} dy \frac{y^{3-\epsilon}}{1+y^2} = -\frac{1}{\epsilon} - \frac{\pi^2}{24} \epsilon, \tag{A.15}$$

e as seguintes relações para as funções Zeta de Riemann:

$$\zeta(\epsilon - 2) = \frac{(2\pi)^\epsilon}{4\pi^3} \left[ -\frac{\pi}{2} \Gamma(3) \zeta(3) \right] \epsilon,$$

$$\zeta(\epsilon + 2) = \zeta(2) + \epsilon \zeta'(2),$$

e

$$\zeta(\epsilon) = \zeta(0) + \epsilon \zeta'(0), \tag{A.16}$$

podemos reescrever  $I_3^\epsilon(y)$  com o uso das Eqs. (A.9) e (A.14) como:

$$\begin{aligned}
I_3^\epsilon(y) &= -\frac{1}{\epsilon} \left\{ y^2 - \epsilon y^2 \ln(y) - \epsilon \Gamma(3) \zeta(3) \right. \\
&\quad + \frac{2}{(2\pi)^\epsilon} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) y^2 [\zeta(0) + \epsilon \zeta'(0)] \\
&\quad \left. - \frac{\epsilon}{8\pi^{2+\epsilon}} y^4 [\zeta(2) + \epsilon \zeta'(2)] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Calculando  $J_n^\epsilon(y)$  a partir da Eq. (A.8), temos:

$$\begin{aligned}
J_n^\epsilon(y) &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{n-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= -\frac{y^{n-\epsilon}}{2} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{n-\epsilon}}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= -\frac{y^{n-\epsilon}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1-\epsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n+2-\epsilon}{2}\right) \sin\left[\pi\left(\frac{\epsilon-n}{2}\right)\right]}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Em particular, para  $n = 3$ , obtemos:

$$J_3^\epsilon(y) = -\frac{y^{3-\epsilon} \Gamma\left(\frac{4-\epsilon}{2}\right)}{4 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-\epsilon}{2}\right)} \frac{\pi}{\sin\left[\pi\left(\frac{\epsilon-3}{2}\right)\right]} \quad (\text{A.19})$$

Finalmente, unindo (A.17) e (A.19) chegamos a:

$$h_3(y) = 2\zeta(3) + y^2 \left[ \ln(y) - \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O}(y^0), \quad (\text{A.20})$$

que foi o resultado utilizado na Eq. (3.54).

## A.2 Caso Não Comutativo

Nesta seção iremos calcular a forma geral das integrais que aparecem no cálculo das amplitudes no espaço não comutativo. Vamos utilizar para isso algumas das técnicas sugeridas em [50]. Considere assim a seguinte definição:

$$\begin{aligned} I(M) &\equiv \int_0^\infty k^2 dk J_1(k\tilde{p}) \frac{\coth(\beta w_M/2)}{w_M}. \\ &= \int_0^\infty k^2 dk J_1(k\tilde{p}) \frac{1}{w_M} + 2 \int_0^\infty k^2 dk J_1(k\tilde{p}) \frac{n_B(w_M)}{w_M}. \\ &\equiv I^{(0)}(M) + I^{(\beta)}(M), \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

onde  $M$  é definido em (4.41) e  $w_M^2 = \vec{k}^2 + M^2$  (esta integral aparece na Eq. (4.55)). Além disso, utilizamos a decomposição da cotangente em termos da função distribuição  $n_B(x) \equiv (e^{\beta x} - 1)^{-1}$  para obter separadamente as contribuições independente e dependente da temperatura, respectivamente expressos por  $I^{(0)}(M)$  e  $I^{(\beta)}(M)$ .

Para o termo com  $T = 0$  temos

$$I^{(0)}(M) \equiv \int_0^\infty k^2 dk J_1(k\tilde{p}) \frac{1}{w_M}. \quad (\text{A.22})$$

Esta integral pode ser facilmente resolvida se utilizarmos alguns resultados conhecidos a respeito das funções de Bessel ( $J_n$ ) [51], mais especificamente a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\infty} dx (x^2 - 1)^{\nu/2} e^{-\alpha x} J_{\nu}[\rho\sqrt{x^2 - 1}] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{\nu} (\alpha^2 + \rho^2)^{-\nu/2 - 1/4} K_{\nu+1/2}(\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}), \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

Assim, considerando  $\nu = 1$ ,  $\alpha = 0$  e  $\rho = \tilde{p}M$  podemos reescrever  $I^{(0)}(M)$  como:

$$\begin{aligned}
I^{(0)}(M) &= \int_0^{\infty} k^2 dk J_1(k\tilde{p}) \frac{1}{w_M} \\
&= M^2 \int_1^{\infty} dy \sqrt{y^2 - 1} J_1[\tilde{p}M\sqrt{y^2 - 1}] \\
&= M^2 e^{-\tilde{p}M} \left[ \frac{1}{\tilde{p}M} + \frac{1}{(\tilde{p}M)^2} \right], \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

que é exatamente o resultado considerado na Eq. (4.57).

No cálculo do termo dependente da temperatura vamos utilizar a seguinte igualdade para a função distribuição de Bose-Einstein:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}. \quad (\text{A.25})$$

Desta forma podemos reescrever  $I^{(\beta)}(M)$  como

$$\begin{aligned}
I^{(\beta)}(M) &= 2 \int_0^{\infty} k^2 dk J_1(k\tilde{p}) \frac{n_B(w_M)}{w_M} \\
&= M^2 \sum_0^{\infty} \int_1^{\infty} dy \sqrt{y^2 - 1} e^{-\beta M n y} J_1[\tau\beta M\sqrt{y^2 - 1}]. \quad (\text{A.26})
\end{aligned}$$

Novamente podemos utilizar a Eq. (A.23), considerando desta vez  $\nu = 1$ ,  $\alpha = \beta M n$  e  $\rho = \tau\beta M$ . Assim chegamos ao seguinte resultado:

$$I^{(\beta)}(M) = \tilde{p}MT^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta M\sqrt{n^2 + \tau^2}}}{n^2 + \tau^2} + \tilde{p}T^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta M\sqrt{n^2 + \tau^2}}}{(n^2 + \tau^2)^{3/2}}, \quad (\text{A.27})$$

que foi utilizado na Eq. (4.58).

# Referências Bibliográficas

- [1] MATSUBARA, T., “A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics”, *Prog. Theo. Phys.* 14, 351, 1955.
- [2] ABRIKOSOV, A. A., GOR’KOV, L. P. e DZIALOSHINSKII, I. E., *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall Inc., 1963.
- [3] FETTER, A. L. e WALECKA, J. D., *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill Book Company, 1971.
- [4] UMEZAWA, H., MATSUMOTO, H. e TACHIKI, M., *Thermofield Dynamics and Condensed States*, North-Holland, 1982.
- [5] KAPUSTA, J. I., *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, 1989.
- [6] LE BELLAC, M., *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [7] DAS, A., *Finite Temperature Field Theory*, World Scientific, 1997.
- [8] CHERN, S. S. e SIMONS, J., “Characteristic Forms and Geometric Invariants”, *Ann. Math.* 99, 48, 1974.
- [9] DESER, S., JACKIW, R. e TEMPLETON, S., “Topologically Massive Gauge Theories”, *Ann. Phys.* 140, 372, 1982.
- [10] NIELSEN, H. B. e OLESEN, P., “Vortex-line Models for Dual Strings”, *Nucl. Phys.* B61, 45, 1973.
- [11] JULIA, B. e ZEE, A., “Poles with both Magnetic and Electric Charges in Non-Abelian Gauge Theory”, *Phys. Rev.* D11, 2227, 1975.

- [12] PAUL, K. e KHARE, A., “Charged Vortices in Abelian Higgs Model with Chern-Simons Term”, *Phys. Lett.* B174, 420, 1986.
- [13] VEGA, H. J. de e SCHAPOSNIK, F. A., “Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term”, *Phys. Rev. Lett.* 56, 2564-2566, 1986.
- [14] FRADKIN, E., *Proc. Lebedev Phys. Inst.* 29, 7, 1965.
- [15] WELDON, H. A., “Covariant Calculations at Finite Temperature: the Relativistic Plasma”, *Phys. Rev.* D26, 1394, 1982.
- [16] REDLICH, A. N., “Gauge Noinvariance and Parity Violation of Three-Dimensional Fermions”, *Phys. Rev. Lett.* 52, 18, 1984; “Parity Violation and Gauge Noinvariance of the Effective Gauge Field Action in Three Dimensions”, *Phys. Rev.* D29, 2366, 1984.
- [17] COLEMAN, S. e HILL, B., “No More Corrections to the Topological Mass term in QED in Three-dimensions”, *Phys. Lett.* B159, 184, 1985.
- [18] BRANDT, F. T., DAS, ASHOK e FRENKEL, J., “Absence of Higher Order Corrections to the Non-Abelian Chern-Simons Coefficient”, *Phys. Lett.* B494, 339, 2000; *Phys. Rev.* D63: 085015, 2001.
- [19] KAO, Y-C. e SUZUKI, M., “Radiatively Induced Topological Mass Term in  $(2 + 1)$  Dimensional Gauge Theories”, *Phys. Rev.* D31, 2137, 1985; MERNSTEIN, M. e LEE, T., “Radiative Corrections to the Topological Mass in  $(2 + 1)$ -dimensional Electrodynamics”, *Phys. Rev.* D32, 1020, 1985.
- [20] DUNNE, G., LEE, K., e LU, C., “The Finite Temperature Chern-Simons Coefficient”, *Phys. Rev. Lett.* 78, 3434, 1997; DAS, A. e DUNNE, G., “Finite Temperature Perturbation Theory and Large Gauge Invariance”, *Phys. Rev.* D57, 5023, 1998; DESER, S., GRIGUOLO, L., e SEMINARA, D., “Gauge Invariance, Finite Temperature and Parity Anomaly in  $D=3$ ”, *Phys. Rev. Lett.* 79, 1976, 1997; DESER, S., GRIGUOLO, L., e SEMINARA, D., “Effective QED Actions: Representations, Gauge Invariance, Anomalies and Massa Expansions”, *Phys. Rev.* D57, 7444, 1998;

- FOSCO, C., ROSSINI, G. e SCHAPOSNIK, F., “Induced Parity Breaking Term at Finite Temperature”, *Phys. Rev. Lett.* 79, 1980, 1997, Erratum, *ibid* 79, 4296, 1997; BRANDT, F., DAS, A. e FRENKEL, J., “Induced Parity Violating Thermal Effective Action for (2+1)-Dimensional Fermions Interacting with a Nonabelian Background”, *Phys. Rev.* D65, 065013, 2002; BRANDT, F., DAS, A., FRENKEL, J. e TAYLOR, J.C., “Derivative Expansion and the Parity Violating Effective Action for Thermal (2+1)-Dimensional QED at Higher Orders”, *ibid*, 64, 06501, 2001.
- [21] ARNOLD, P., VOKOS, S., BEDAQUE, P. e DAS, A., “Analytic Structure of the Self-Energy for Massive Gauge Bósons at Finite Temperature”, *Phys. Rev.* D47, 4698, 1993.
- [22] DOUGLAS, M. R. e NEKRASOV, N. A., “Noncommutative Field Theory”, *Rev. Mod. Phys.* 73, 977, 2001; SZABO, R. J., “Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces”, hep-th/0109162, 2001; GOMES, M., “Renormalization in Noncommutative Field Theory”, XI Jorge Andre Swieca Summer School, São Paulo, Brazil, 2001; GIROTTI, H. O., “Noncommutative Quantum Field Theories”, XII Jorge Andre Swieca Summer School, São Paulo, Brazil, hep-th/0301237, 2003.
- [23] GRONEWOLD, H. J., “On the Principles of Elementary Quantum Mechanics”, *Physica (Amsterdam)* 12, 405, 1946; MOYAL, J. E., *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 45, 99, 1949;
- [24] NAIR, V. P., e POLYCHRONAKOS, A. P., “On level Quantization for the Noncommutative Chern-Simons Theory”, *Phys. Rev. Lett.* 87, 030403, 2001; SHEIKH-JABBARI, M. M., “A Note on Noncommutative Chern-Simons Theories”, *Phys. Lett.* B510, 247, 2001; BAK, D., LEE, K. e PARK, J. H., “Chern-Simons Theories on Noncommutative Plane”, *Phys. Rev. Lett.* 87, 030402, 2001; DAS A. e SHEIKH-JABBARI, M. M., “Absence of Higher Order Corrections to Noncommutative Chern-Simons Coupling”, *JHEP* 0106, 028, 2001.
- [25] ALVES, V. S., DAS, A., DUNNE, G. V. e PEREZ, S., “Parity Violating Bosonic Loops at Finite Temperature”, *Phys. Rev.* D65:085011, 2002.
- [26] ALVES, V. S., DAS, A. e PEREZ, S., “Screening Length in (2+1)-dimensional Abelian Chern-Simons Theories”, *Phys. Lett.* B531, 289, 2002.

- [27] DAS, A. e PEREZ, S., “Vanishing Magnetic Mass in QED(3) with a Chern-Simons Term”, *Phys. Rev. D*66:025011, 2002.
- [28] BRITO, L. C. T., GOMES, M., PEREZ, S. e SILVA, A. J., “Radiative Corrections to the Chern-Simons Term at Finite Temperature in Noncommutative Space”, hep-th/0301124, 2003.
- [29] CHANDRASEKHAR, B. e PANIGRAHI, P. K., “Finite Temperature Effects on the Induced Chern-Simons Term in Noncommutative Geometry”, hep-th/0301030, 2003.
- [30] SALINAS, S. R. A., *Introdução à Física Estatística*, EDUSP, 1999.
- [31] GOMES, M., *Teoria Quântica dos Campos*, EDUSP, 2002.
- [32] ABRIKOSOV, A. A., GOR’KOV, L. P. e DZIALOSHINSKII, I. E., “On the application of Quantum-Field-Theory methods to problems of Quantum Statistics at Finite Temperatures”, *Sov. Phys. JETP* 9, 636, 1959.
- [33] UMEZAWA, H. e TOMOZAWA, Y., *Nuovo Cimento* 5, 810, 1957.
- [34] DUNNE, G. V., “Aspects of Chern-Simons theory”, Lectures at the 1998 Les Houches Summer School Topological Aspects of low Dimensional Systems, hep-th/9902115, 1998.
- [35] FRENKEL, J., *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*, EDUSP, 1996.
- [36] DIRAC, P. A. M., *Proc. R. Soc. A*133, 60, 1931.
- [37] ’t HOOFT G., “Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories”, *Nucl.Phys.* B79, 276, 1974;
- [38] BLAIZOT, J-P., IANCU, E. e PARWANI, R. P., “On the Screening of Static Electromagnetic Field in Hot QED Plasmas”, *Phys. Rev. D*52, 2543, 1995.
- [39] DOLAN, L. e JACKIW, R., “Symmetry Behavior at Finite Temperature”, *Phys. Rev. D*9, 3320, 1974.
- [40] KAO, Y-C. and YANG, M-F., “Radiatively Induced Chern-Simons Terms at Finite Temperature”, *Phys. Rev. D*47, 730, 1993.

- [41] BRANDT, F. T., DAS, A. e FRENKEL, J., "Parity Violating Electromagnetic Interactions in  $QED_3$  at Finite Temperature", *Phys. Rev. D* 62, 085012, 2000.
- [42] WARD, J. C., "The scattering of Light by Light", *Phys. Rev.* 77, 293, 1950.
- [43] WEYL, H., *Z. Physik* 46, 1, 1949; DOPLICHER, S., FREDENHAGEM, K. e ROBERTS, J. E., *Commun. Math. Phys* 172, 187, 1995.
- [44] MICU, A. e SHEIKH-JABBARI, M. M., "Noncommutative  $\Phi^4$  Theory at Two Loops", *JHEP* 0101, 025, 2001.
- [45] GOMIS, J. e MEHEN, T., "Space-Time Noncommutative Field Theories and Unitarity", *Nucl. Phys.* B591, 265, 2000; ALVAREZ-GAUMÉ, L., BARBÓN J. L. F. e ZWICKY, R., "Remarks on Time Space Noncommutative Field Theories", *JHEP* 0105:057, 2001; BASSETTO, A., GRIGUOLO, L., NARDELLI, G. e VIAN, F., "On the Unitarity of Quantum Gauge Theories on Noncommutative spaces", *JHEP* 0107:008, 2001; LIAO, Y. e SIBOLD, K., "Time Ordered Perturbation Theory on Noncommutative Space-Time. 2. Unitarity", *Eur. Phys. J.* C25, 479, 2002; BAHNS, D., DOPLICHER, S., FREDENHAGEN, K. e PIACITELLI, "On the Unitarity Problem in Space-Time Noncommutative Theories", *Phys.Lett.* B533, 178, 2002.
- [46] FILK, T., "Divergences in a Field Theory on Quantum Space", *Phys. Lett.* B376, 53, 1996.
- [47] MINWALLA, S., RAAMSDONK, M.V. e SEIBERG, N., "(OM) theory in Diverse Dimensions", *JHEP* 0008, 008, 2000.
- [48] GIROTTI, H. O., GOMES, M., RIVELLES, V. O. e SILVA, A. J., "A Consistent Noncommutative Field Theory: The Wess-Zumino Model", *Nucl. Phys.* B587, 299, 2000; GIROTTI, H. O., GOMES, M., PETROV, A. YU., M., RIVELLES, V. O. e SILVA, A. J., "The Three-dimensional Noncommutative Nonlinear Sigma Model in Superspace", *Phys. Lett.* B521, 119, 2001.
- [49] PISARSKI, R. D. e RAO, S., "Topologically Massive Chromodynamics in the Perturbative Regime", *Phys. Rev D* 32, 2081, 1985; PISARSKI,

R. D., "Topologically massive chromodynamics at Finite Temperature", *Phys. Rev. D*35, 664, 1987.

- [50] BRANDT, F. T., FRENKEL, J. e MCKEON, D. G. C., "Hard Thermal Effects in Noncommutative  $U(N)$  Yang-Mills theory", *Phys. Rev. D*65, 125029, 2002.
- [51] GRADSHTEYN, I. S. e RYZHIK, M., *Table of Integrals, Series and Products* , Academic, 1980.