Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Leptogênese e Mecanismo de See-Saw de tipo I na
Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio
Térmico**

Yuber Ferney Pérez González

Dissertação apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Orientadora:

Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal (IF/USP)

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal (IF/USP)

Prof. Dr. Gustavo Alberto Burdman (IF/USP)

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres (IFGW/UNICAMP)

São Paulo
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Perez Gonzalez, Yuber Ferney

Leptogênese e mecanismo de See-Saw de tipo I na teoria quântica de campos fora do equilíbrio térmico. - São Paulo, 2013.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal.

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria quântica de campos; 2. Neutrinos;
3. Teoria cinética; 4. Sistemas fora do equilíbrio térmico;
5. Cosmologia.

USP/IF/SBI-028/2013

A mi familia y amigos, viejos y nuevos, pues, sin su apoyo, esta pequeña contribución no sería posible.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, devo agradecer ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP) pela oportunidade de estudar e de conhecer este maravilhoso país, o Brasil. Acredito fortemente que esta experiência me fez uma pessoa melhor, pois conhecer uma cultura diferente àquela em que se nasce sempre enriquece qualquer ser humano, e mais se for o caso da cultura brasileira, sempre aberta e cálida com o estrangeiro. Igualmente, agradeço ao IFUSP e aos professores pelas aulas bem ministradas e pelos distintos colóquios que me permitiram crescer academicamente e que mudaram em muitos casos a minha visão da física.

Como a execução de uma sinfonia, este trabalho foi desenvolvido com a ajuda e o trabalho conjunto de muitas pessoas; sua presença e apoio foi fundamental para que eu pudesse realizar esta dissertação. Deste modo, devo começar agradecendo à minha família o apoio tanto com a decisão de vir para o Brasil, como durante estes dois anos desde a distância, pois o contato permanente com eles sempre me deu força para continuar adiante.

Toda boa orquestra precisa ter um excelente diretor, e esse é o caso desta dissertação. Assim que devo agradecer à minha orientadora, Profa. Renata, pois, além de ter me aceitado como seu estudante, deu ouvido a muitas dúvidas, em especial com relação à aplicação da equação de Boltzmann, e apoiou e estimulou a minha ideia de aprender o formalismo de Schwinger-Keldysh e de considerá-lo como formalismo fundamental para ter uma descrição correta de Leptogênese. Também, agradeço a ela a dedicação à dissertação, pois, enquanto ela esteve fora do Brasil, deu tempo à mesma através de múltiplas reuniões pelo Skype e de uma leitura detalhada, com muitas observações, do texto. À Renata, o meu muito-obrigado.

Devo também agradecer aos novos amigos que encontrei no passo pelo Brasil. Amigos como o pessoal da república, Jorgivan, Thaiany, Érike, Carol, por tantos momentos agradáveis, por muitas conversas que fizeram esquecer distintos problemas e diminuíram a saudade que sentia da minha família. Agradeço especialmente ao Jorgivan e à Thaiany por sempre estarem prestes a me ajudar e por serem grandes amigos que me fizeram sentir como em casa. Também devo agradecer ao pessoal do “pipoco das 4pm”, Cláudio, Nayara, Camila e Leonardo, pois, além de serem bons amigos, sei que com eles é possível ter uma discussão sobre coisas que para algumas pessoas podem ser “triviais” e de problemas que para outras pessoas não são problemas ou vice-versa, e também por me darem muitas dicas de português.

Igualmente, agradeço aos meus amigos conterrâneos, Hugo, Antonio e Faiber pois, embora somente tive a oportunidade de conhecê-los aqui no Brasil, sei que no futuro poderei contar com eles, e, além disso, agradeço por muitos bate-papos sobre incontáveis assuntos e também por não me permitirem esquecer o espanhol. Do mesmo modo agradeço ao Camilo, Luis Ever, Jackson e à

Sandra pela ajuda na chegada no Brasil, nas questões burocráticas e por me fazerem sentir orgulhoso de ser “Upetecista”.

Agradeço ao Pedro A N Machado pelo tempo que dedicou à leitura detalhada da dissertação e pelas múltiplas sugestões que fez com relação ao texto e à defesa. Agradeço também àqueles amigos que me ajudaram em distintas oportunidades, como Maria Fernanda, Victor, Denis, Javier, André, Wallace, e ao pessoal da CPG, pois eles estiveram sempre dispostos a me ajudar e a resolver as muitas dúvidas com a maior gentileza.

Finalmente, devo agradecer às instituições, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro dado.

André Ferreira Pinheiro Gonçalves

São Paulo, 21 de Abril de 2013

Um dos problemas mais importantes que precisa ser resolvido, tanto pela física de partículas como pela cosmologia, é a existência de assimetria bariônica. Entre os cenários mais atrativos para a geração dinâmica da assimetria bariônica (Bariogênese) encontra-se a denominada Leptogênese. Nesse cenário, cria-se uma assimetria leptônica que será convertida em assimetria bariônica por processos não perturbativos mediados por *sphalerons*. Na realização mais simples da Leptogênese, que será estudada nesta dissertação, neutrinos pesados de mão direita, produzidos termicamente, decaem violando CP, gerando uma assimetria leptônica nesses decaimentos. O principal atrativo deste cenário é que conecta duas escalas aparentemente diferentes: a escala da geração de assimetria leptônica e a escala das massas e oscilações dos neutrinos ativos mediante o mecanismo de See-Saw.

O estudo usual da leptogênese utiliza equações de Boltzmann para determinar a evolução temporal da assimetria. Porém, a equação de Boltzmann é uma equação semiclássica, dado que envolve, por um lado, uma função clássica no espaço de fases, a função de distribuição, mas, por outro, os termos de colisão envolvem quantidades obtidas na teoria quântica de campos à temperatura nula. Em particular, a formulação de Boltzmann não permite descrever fenômenos quânticos como oscilações coerentes e efeitos de decoerência e interferência. Uma descrição quântica completa da evolução da assimetria leptônica na leptogênese deve, de fato, ser obtida no contexto da teoria quântica de campos fora do equilíbrio térmico. O formalismo de *Schwinger-Keldysh* permite realizar isso. Nesta dissertação descreveremos a leptogênese no formalismo de Schwinger-Keldysh para o caso em que são adicionados ao espectro de partículas do Modelo Padrão três neutrinos de mão direita, sem fazer qualquer suposição sobre a hierarquia de massas.

ABSTRACT

One of the most important problems that is needed to solve by the Elementary Particle Physics as well as by the Cosmology is the existence of baryonic asymmetry. Among the most attractive scenarios of dynamic generation of baryonic asymmetry (Baryogenesis) is the so-called Leptogenesis. In that scenario, a leptonic asymmetry is created in such a way that it will be converted in baryonic asymmetry by non-perturbative processes mediated by sphalerons. In the simplest realization of Leptogenesis, that will be studied in this dissertation, heavy right-handed neutrinos, produced thermally, decay violating CP generating a leptonic asymmetry in these decays. The principal attractive of this scenario is that it connects two apparently different scales, the scale of leptonic asymmetry generation and the scale of masses and oscillations of the active neutrinos through the See-Saw mechanism.

The usual study of the leptogenesis uses Boltzmann equations in order to determine the temporal evolution of the asymmetry. However, the Boltzmann equation is a semi-classical equations, since, on one side, it is formulated for a classical function in phases space, the distribution function, but, on the other hand, the collision term involves quantities obtained in the Quantum Field Theory at zero temperature. In particular, Boltzmann formulation does not allow to describe quantum phenomena such coherent oscillations and effects of decoherence and interference. Indeed, a proper quantum description of the evolution of the leptonic asymmetry must be obtained in the context of the Non-Equilibrium Quantum Field Theory. The *Schwinger-Keldysh* formalism allows to perform this. In this dissertation, leptogenesis is described using the Schwinger-Keldysh formalism for the case in which there are three right-handed neutrinos without a definite mass hierarchy.

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Introdução	1
1 Leptogênese Padrão	7
1.1 Evidências da Existência de Assimetria Bariônica	7
1.2 Condições de Sakharov	8
1.3 Leptogênese	11
1.3.1 Violação de CP	12
1.3.2 Equações de Boltzmann	15
2 Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio Térmico	21
2.1 Introdução	21
2.2 Formalismo de Schwinger-Keldysh	21
2.3 Ação Efetiva <i>Two-Particle-Irreducible</i> (2PI)	26
2.3.1 Necessidade da descrição	27
2.3.2 Construção da Ação Efetiva 2PI	29
2.4 Ação Efetiva 2PI na TQCfE	32
2.4.1 Equações de Kadanoff-Baym (EKB)	34
2.5 Equilíbrio térmico	37
2.6 Limite de Boltzmann	41
3 Equações de Kadanoff-Baym para Neutrinos de Mão Direita	45
3.1 Introdução	45
3.2 Ação efetiva 2PI para a Leptogênese	45
3.3 Equações de Evolução para os Neutrinos	47
3.3.1 Função Espectral	51
3.3.2 Função Estatística	57

4	Assimetria Leptônica na TQCfE	67
4.1	Introdução	67
4.2	Definição da Assimetria	67
4.3	Assimetria Leptônica e Equações de Kadanoff-Baym	68
4.3.1	Autoenergia dos Léptons	71
4.3.2	Condições de Sakharov	71
4.3.3	Larguras dos léptons e Higgs no Banho Térmico	72
4.4	Comparação com Boltzmann	77
4.4.1	Análise Numérica	78
5	Conclusões e Perspectivas	97
A	Convenções	101
B	Bariogênese Eletrofraca	103
B.1	Violação de $B + L$ no Modelo Padrão	103
B.2	Sphalerons	104
B.3	Bariogênese Eletrofraca	105
C	Neutrinos de Majorana	107
C.1	Férmions de Majorana	107
C.2	Massa Efetiva e Mecanismo de See-Saw	110
C.2.1	Mecanismo de See-Saw de tipo I	111
D	Equação de Boltzmann e Teoria de Campos fora do Equilíbrio	115
D.1	Equação de Boltzmann	115
D.2	Derivação funcional	117
D.3	Inversos dos Propagadores Livres	118
D.3.1	Escalares	118
D.3.2	Férmions de Dirac	118
D.3.3	Férmions de Majorana	119
E	Equações de Kadanoff-Baym	121
E.1	Regras de Feynman	121
E.1.1	Propagadores	121
E.1.2	Vértices	121
E.2	Contribuição $2PI$ à ação efetiva	122
E.3	Obtenção da autoenergia dos neutrinos	122
E.3.1	Componentes de Wightman	123
E.3.2	Componente Espectral	124
E.4	Condição Inicial para função espectral	126
E.5	Integral de Memória	127
F	Assimetria Leptônica	131
F.1	Largura de Decaimento	131
F.2	Fator Proveniente do Traço	133
F.3	Simplificação das integrais presentes na Assimetria	135
	Referências	139

ur die Kunst und die Wissenschaft erhöhen den Menschen bis zur Gottheit.
Ludwig van Beethoven

Somente a Arte e a Ciência elevam o homem ao nível dos Deuses.
Ludwig van Beethoven

O trabalho pioneiro de Dirac [1], que pretendeu eliminar os problemas conceituais que possuía a descrição relativística de uma partícula quântica, propôs a existência de um novo tipo de matéria, descoberta posteriormente por Anderson [2], com propriedades opostas à matéria ordinária que hoje denominamos *antimatéria*. Embora a interpretação de Dirac, que descreve as antipartículas como “buracos” em um mar de partículas com energia negativa, seja diferente da interpretação de Stückelberg-Feynman [3, 4] aceita hoje em dia, e que descreve as antipartículas como partículas de energia positiva indo na direção negativa do tempo, a existência experimental das antipartículas é um fato bem estabelecido. Além disso, o teorema CPT [5, 6] estabelece que toda teoria de campos local invariante relativística deve ser invariante sob uma transformação simultânea de conjugação de carga (C), paridade (P) e inversão temporal (T), o que implica que partículas e antipartículas devem estar presentes em uma descrição quântica de campos.

Uma pergunta importante aparece neste ponto: por que não há antimatéria nas mesmas quantidades que a matéria em nosso entorno? Uma primeira consideração é que há antimatéria em grandes quantidades, mas em lugares remotos do Universo. Assim, depois do *Big-Bang* algum processo desconhecido atuou para separar matéria e antimatéria [7]. Agora, já que tal processo deve possuir características bastante inusuais, pois no estado inicial do Universo, partículas e antipartículas faziam parte de um sistema que evoluía em conjunto, vamos considerar que toda matéria e antimatéria se aniquilaram mutuamente e que, de alguma forma, depois da aniquilação sobrou a matéria que constitui as estruturas que observamos. Deste modo, como segunda consideração, poderíamos supor que havia uma maior quantidade de matéria que de antimatéria no começo do Universo, ou seja, nas condições iniciais do Universo existia uma *assimetria* entre matéria e antimatéria [7]. Não obstante, as medidas experimentais mostram que essa assimetria é muito pequena, logo, a consideração de que a assimetria aparece como consequência das condições iniciais do Universo constitui um problema de ajuste fino [7]. Além disso, não seria claro porque a natureza tem preferência por um tipo de matéria em relação ao outro.

Portanto, parece mais atraente considerar que a assimetria entre matéria e antimatéria foi criada dinamicamente nos primórdios do Universo [7].

Mas este processo de geração dinâmica de assimetria não é tão estranho quanto o processo de separação mencionado anteriormente? A diferença que consideramos mais importante é que a geração dinâmica possui boas bases, tanto teóricas quanto experimentais, o que faz com que este seja preferido sobre o processo de “separação”. Além disso, o estado inicial do universo era o suficientemente denso e a temperatura bastante alta de modo que partículas e antipartículas estavam necessariamente em contato e, assim, excluir a possibilidade de haver separação macroscópica da matéria e a antimatéria [8]. O estudo pioneiro da geração dinâmica foi desenvolvido por Sakharov [8], ali, ele descreveu as condições, que denominaremos *condições de Sakharov*, das quais precisa uma teoria para gerar dinamicamente assimetria entre matéria e antimatéria. Tais condições são: *Violação de C e CP*, já que queremos que as interações distingam entre partículas e antipartículas; *Violação do número bariônico (ou leptônico)*, pois sem essa violação não há assimetria; *Desvio do equilíbrio térmico*, visto que no equilíbrio térmico as reações de criação e aniquilação de partículas e antipartículas são compensadas pelas reações inversas, não é possível gerar uma assimetria quando não há desvio do equilíbrio. O mecanismo físico que gera assimetria entre o número de bárions e de antibárions é denominado *Bariogênese*, enquanto que, para o caso de léptons, se denomina *Leptogênese*. Esse último será discutido na presente dissertação.

Na década de 1960 foi desenvolvido o Modelo Padrão das interações eletrofracas [9, 10, 11], que, junto com a Cromodinâmica Quântica, formam o Modelo Padrão das partículas elementares (MP)¹. Tal modelo é muito bem sucedido na descrição de diversos fenômenos conhecidos, além de ter predito novos fenômenos, como interações de correntes neutras e a existência dos bósons vetoriais $W^\pm$ e Z^0 . Assim, é necessário considerar se no MP é possível ter uma bariogênese ou se precisamos supor a existência de física além do MP para explicar a assimetria observada. Embora o MP contemple, em alguma medida, todas as condições de Sakharov, mostrou-se que a violação de CP no MP é muito pequena para dar conta dessa assimetria [12]. Além disso, a descoberta de uma partícula escalar com massa de 126 GeV [13], consistente com o bóson de Higgs do MP, faz com que não seja possível o desvio do equilíbrio térmico necessário para que a assimetria criada não desapareça. Em suma, o MP não possui as condições necessárias para gerar a assimetria bariônica que observamos hoje no Universo, portanto para explicá-la é necessário ter física além do MP.

Hoje em dia, a única física além do MP que foi demonstrada experimentalmente corresponde à descoberta de que os neutrinos são partículas massivas [6]. A história dos neutrinos, do ponto de vista do autor, é uma história fascinante que gerou revoluções na física das partículas elementares. Uma excelente descrição dessa história se apresenta em [6]. Aqui vamos dar um breve resumo. A proposta da existência dos neutrinos foi feita por Pauli [14] para não haver violação da conservação da energia no decaimento beta. Logo depois, Fermi [15] descreveu de modo mais formal tal proposta ao considerar que a responsável pelo decaimento beta seria uma nova interação entre quatro férmions, que denominamos hoje *interação fraca*. A partícula de Pauli, denominada *neutrino* por Fermi,

¹Existem diversas discussões do MP em distintos livros, teses e dissertações, pelo que não vamos considerar o estudo desse modelo na presente dissertação. Ver, por exemplo [6].

era um dos férmions que aparecem no decaimento descrito pela teoria de Fermi. Essa teoria permitia avaliar a seção de choque de interação do neutrino com a matéria, e sendo essa muito pequena, foi bastante difícil de observar o neutrino experimentalmente. Isso ocorreu pela primeira vez no experimento de Reines et al. [16], 30 anos depois do trabalho de Fermi. Na mesma época em que foram descobertos os neutrinos, também foi descoberta a violação da simetria de paridade pelas interações fracas. Esta violação trouxe importantes consequências para a física dos neutrinos, pois foi demonstrado que se os neutrinos fossem partículas sem massa poderia haver violação da paridade. Assim que Landau [17], Lee-Yang [18], e Salam [19], estabeleceram a *teoria de duas componentes para neutrinos sem massa*.

Deste modo, depois do descobrimento do múon, e devido à ausência de reações do tipo $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$, $\nu + n \rightarrow p + e^-$, foi proposta a existência de um novo tipo de neutrino, denominado neutrino muônico (ν_μ) que era produzido pelo decaimento do pión, enquanto que o neutrino produzido no decaimento beta foi denominado neutrino eletrônico, ν_e [20]. Além disso, para evitar decaimentos como $\mu \rightarrow e + \gamma$, que não eram observados, foi proposto que os elétrons e neutrinos eletrônicos carregam um número quântico, denominado número leptônico eletrônico, diferente do número que carregam múons e neutrinos muônicos, e que esses números devem ser conservados nos decaimentos, o que faz com que o decaimento

$$\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,$$

seja permitido, pois o antineutrino $\bar{\nu}_e$, antipartícula do neutrino, possui o oposto do número leptônico eletrônico; enquanto que o decaimento

$$\mu \rightarrow e + \gamma,$$

não é permitido. O neutrino muônico foi descoberto em 1962 [21]. Do mesmo modo, depois do descobrimento do lépton tau τ [22], foi necessário introduzir um neutrino tauônico ν_τ ao espectro de partículas. Esse terceiro neutrino foi descoberto pelo experimento DONUT do Fermilab em 2000 [23]. Esta imagem de três famílias ou sabores de léptons, com seus respectivos neutrinos sem massa, foi introduzida ao MP.

A partir dos anos 1960 foram realizados diferentes experimentos que pretendiam determinar as distintas características dos neutrinos. Entre eles, o experimento Homestake [24] estudou os neutrinos de origem solar. Não obstante fosse bem sucedido em encontrar e caracterizar os neutrinos solares, um problema apareceu nos seus resultados: a quantidade de neutrinos era um terço da quantidade esperada. Tempo depois, outros experimentos, entre eles SuperKamiokande [25], SNO [26], LSND [27], corroboraram os resultados de Homestake. Este é o conhecido problema dos neutrinos solares. Algum tempo antes de achar esse problema, Pontecorvo propôs [28, 29], sem sabê-lo, a solução ao mesmo. Ele propôs que os neutrinos podem apresentar um fenômeno de oscilação similar ao que possuem os káons neutros $\bar{K}_0 \leftrightarrow K_0$, mas, neste caso, as oscilações ocorrem entre os sabores dos neutrinos, ou seja, $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$, com $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$. Devemos notar que a explicação mais simples é feita considerando que, em primeiro lugar, os neutrinos possuem massa e, em segundo, que existe uma disparidade entre os autoestados de sabor, que são aqueles que aparecem nas correntes carregadas, e os autoestados de massa, correspondentes àqueles que possuem massas definidas [6], ou seja, são estados do Hamiltoniano. Isto permite a existência de oscilações. Distintos experimentos com neutrinos de

diversas origens, tais como neutrinos de origem astrofísica ou de reatores, têm mostrado resultados consistentes com a existência de oscilações de neutrinos. Os resultados destes experimentos permitem determinar as seguintes diferenças entre os quadrados das massas dos neutrinos [6]:

$$\begin{aligned}\Delta m_{21}^2 &= m_2^2 - m_1^2 = (7.59 \pm 0.20) \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \\ |\Delta m_{31}^2| &= |m_3^2 - m_1^2| = (2.46 \pm 0.12) \times 10^{-3} \text{ eV}^2,\end{aligned}$$

o que parece indicar que a escala das massas dos neutrinos é no máximo da ordem dos eV, muito suprimida comparada com a escala das massas dos outros férmions do MP. Por outro lado, os ângulos de mistura compatíveis com os diversos resultados dos experimentos de oscilação são dados por [6]

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_{12} &= 0.314(1_{-0.15}^{+0.18}), \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0.44(1_{-0.22}^{+0.41}), \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.9_{-0.9}^{+2.3} \times 10^{-2},\end{aligned}$$

de forma que a mistura leptônica é muito diferente da mistura no setor de quarks. Esta grande diferença entre as escalas pode ser entendida supondo a existência de física além do MP. Mas antes de considerarmos os possíveis mecanismos para entender a pequenez da massa dos neutrinos, devemos mencionar que o fato dos neutrinos serem massivos coloca dúvidas sobre a sua natureza, pois, por serem partículas neutras, os neutrinos podem ser partículas de Dirac, similares às descritas no trabalho mencionado anteriormente, ou partículas de Majorana [30], que são suas próprias antipartículas. Isto ainda não foi evidenciado experimentalmente, mas, teoricamente, a natureza tipo Majorana é preferida pela sua simplicidade². Uma propriedade muito importante que possuem os neutrinos de Majorana é que a conservação do número leptônico só pode ser considerada como uma simetria efetiva que opera em processos em que a massa dos neutrinos pode ser desprezada devido às escalas de energia envolvidas. Porém, a violação do número leptônico pode ter efeitos tanto na fenomenologia de baixas energias, como no decaimento beta duplo sem neutrinos, quanto de altas energias, como veremos a seguir.

Um dos mecanismos mais atrativos para a geração de massa dos neutrinos é o mecanismo de See-Saw [31, 32]. Na presente dissertação consideraremos unicamente o mecanismo de See-Saw de tipo I, que, por simplicidade, denominaremos daqui em diante como mecanismo de See-Saw. Neste mecanismo são incluídos ao espectro de partículas três neutrinos de mão direita, estéreis com relação às interações do MP, isto é, estes neutrinos não possuem acoplamentos com os bósons $W^\pm$, Z e γ , mas só acoplamentos tipo Yukawa com o dubleto de Higgs. As massas dos neutrinos do MP, ou ativos, são suprimidas com respeito à escala electrofraca ao supormos que as massas dos neutrinos de mão direita são muito grandes, da ordem da escala da *Grande Unificação*, por exemplo [6, 33]. Uma consequência importante disto é que os neutrinos que observamos em nossos experimentos são partículas tipo Majorana e, em geral, vai existir mistura entre autoestados de interação e de massa. Este último fato é muito importante, pois possibilita a existência de novas fontes de violação CP tanto nos neutrinos de mão esquerda quanto nos de mão direita. Existem outras alternativas para explicar a pequenez da massa dos neutrinos,

²Esta afirmação vem do fato que os férmions de Majorana possuem a metade de graus de liberdade de um férmion de Dirac.

conhecidas como mecanismo de See-Saw de tipo II [34] e III [35]. No primeiro caso é necessário adicionar um tripleto de escalares e, no segundo, um tripleto de férmions de $SU(2)_L$ ao conjunto de partículas do MP.

Depois de notarem que duas das três condições de Sakharov são cumpridas pelo mecanismo de See-Saw, pois nesse caso há violação tanto de CP quanto do número leptônico, Fukugita e Yanagida [36] propuseram que é possível ter geração de assimetria leptônica no Universo primordial se os decaimentos dos neutrinos de mão direita ocorressem fora do equilíbrio térmico. Deste modo nasceu a denominada *Leptogênese* [37]. Vemos assim que a leptogênese é um cenário muito atrativo pois explica tanto as oscilações e a pequenez da massa dos neutrinos, quanto a assimetria entre matéria e antimatéria presente no Universo. Esta foi uma das motivações para estudar a leptogênese na presente dissertação.

No modelo padrão, a conservação do número bariônico (B) e do número leptônico (L) constitui uma simetria accidental. No entanto, tanto a corrente leptônica como a corrente bariônica não são conservadas em 1 -loop, violando $B + L$, mas conservando $B - L$. A violação de $B + L$ está relacionada à estrutura do vácuo da teoria. Em teorias de gauge não abelianas, como o MP, a estrutura do vácuo é bastante complexa. De fato, existem infinitos estados de vácuo degenerados, que correspondem a pontos no espaço dos campos separados por uma barreira de potencial. A probabilidade de tunelamento entre vácuos vizinhos, processos em que $\Delta B = \Delta L = \pm 3$, que é determinado pela configuração de instantons, foi determinada por 't Hooft [38] como sendo desprezível no MP. Porém, em 1985, Kuzmin, Rubakov e Shaposhnikov [39] mostraram que na presença de um banho térmico, transições entre vácuos vizinhos podem ocorrer por flutuações térmicas a uma taxa muito maior. De fato, se $100 \text{ GeV} < T < 10^{12} \text{ GeV}$, processos não perturbativos envolvendo *sphalerons* podem causar transições entre vácuos vizinhos violando $B + L$. Desta forma, uma violação de L pode ser convertida por *sphalerons* em violação de B , o que permite estabelecer uma conexão entre a leptogênese e a bariogênese.

Ora, as descrições da leptogênese que aparecem na literatura (ver [37] e referências ali) utilizam como equação fundamental a equação de Boltzmann para descrever o desvio do equilíbrio. A equação de Boltzmann pode ser considerada como uma equação semiclássica, pois estuda a evolução da função de distribuição, função que depende das variáveis do espaço de fases, mas nos termos de colisão aparecem amplitudes de probabilidade obtidas na Teoria Quântica de Campos a temperatura nula. Isto não parece muito satisfatório para ter uma descrição correta da leptogênese, pois este mecanismo repousa em interferências quânticas e, possivelmente, oscilações entre os neutrinos de mão direita. Este problema foi considerado na literatura recentemente; Buchmüller e Fredenhagen [40] deram o primeiro passo para uma descrição formalmente correta da leptogênese considerando como base para tal descrição o formalismo de Schwinger-Keldysh, ou formalismo de *Closed-Path-Time*.

O formalismo de Schwinger-Keldysh [41, 42] é um formalismo de primeiros princípios no contexto da teoria quântica que permite estudar sistemas fora do equilíbrio térmico. Foi desenvolvido a partir dos estudos de Martin-Schwinger sobre a teoria das funções de Green no equilíbrio térmico [43]. Schwinger, em seu trabalho sobre o movimento Browniano na mecânica quântica [41], estabeleceu as bases para descrever siste-

mas fora do equilíbrio de um modo similar ao feito no caso do equilíbrio, ou seja, mediante funções de Green. L. Keldysh [42] e L. Kadanoff e G. Baym [44] desenvolveram as ideias de Schwinger e aplicaram com sucesso o formalismo a situações da matéria condensada e física de muitos corpos, ao considerar fenômenos de transporte que podem se apresentar ali. Uma coisa importante que devemos mencionar é que esses trabalhos não consideravam efeitos relativísticos nem possíveis aplicações na física das partículas elementares. Porém, os trabalhos de Zhou et al. [45] e Jordan [46], que fizeram a extensão do formalismo a problemas relativísticos e a espaços curvos, respectivamente, permitiram que Calzetta e Hu (ver referências no livro deles [47]) fizessem os primeiros estudos sobre a aplicação do formalismo a problemas do Universo primordial. A descrição da Teoria Quântica de Campos Relativística no formalismo de Schwinger-Keldysh será denominada aqui *Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio Térmico* [48]. A aplicação deste formalismo à descrição da bariogênese e leptogênese é muito recente, ver [40]. Podemos mencionar que há dois tipos de aplicações: um que considera correções quânticas às equações de Boltzmann [49, 50, 51] e outro que considera diretamente as equações de evolução das funções de Green para o caso da leptogênese [52, 53, 54, 55]. Do nosso ponto de vista, o segundo tipo é mais satisfatório, pois não tem as considerações adicionais que possui o primeiro tipo e, além disso, descreve a dinâmica em termos de funções análogas às estudadas usualmente na Teoria de Campos, os valores esperados de operadores. Assim, o propósito desta dissertação é descrever a leptogênese no formalismo de Schwinger-Keldysh seguindo o caminho estabelecido por A. Anisimov et al. [52, 53], mas considerando que não há hierarquia entre as massas dos neutrinos de mão direita.

Três considerações razoáveis foram utilizadas no desenvolvimento do projeto: primeiro, não consideramos a expansão do Universo, pois, como é mencionado em [52], a expansão não é importante para considerarmos a geração da assimetria inicial; segundo, supomos que as constantes de acoplamento dos neutrinos de mão direita são muito pequenas; e terceiro, os neutrinos de mão direita são os únicos fora do equilíbrio, enquanto que léptons, Higgs e demais partículas estão no equilíbrio e fazem parte do banho térmico.

A presente dissertação está organizada do seguinte modo: No primeiro capítulo descreveremos a leptogênese padrão que faz uso da equação de Boltzmann, ali mostraremos em detalhe os problemas conceituais que possui esta descrição. No segundo capítulo descreve-se a Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio Térmico de modo completo, começando pela formulação básica da teoria, para logo determinarmos as equações que descrevem a dinâmica do sistema. Os capítulos terceiro e quarto estão centrados na aplicação do formalismo aprendido no segundo capítulo à leptogênese; no terceiro capítulo estuda-se a dinâmica dos neutrinos fora do equilíbrio, enquanto que no quarto estuda-se a geração e evolução da assimetria leptônica. No final apresentamos nossas conclusões e perspectivas para o futuro.

No apêndice A apresentamos as convenções utilizadas na dissertação, enquanto que no apêndice B se dá um resumo da bariogênese eletrofraca e nos apêndices C e D se apresentam brevemente as propriedades dos férmions de Majorana e o mecanismo de See-Saw, e a equação de Boltzmann, respectivamente. Nos apêndices E e F colocamos detalhes de alguns cálculos omitidos no corpo da dissertação para facilitar a leitura, mas que julgamos importantes para uma compreensão mais profunda da mesma.

1.1 Evidências da Existência de Assimetria Bariônica

Hoje em dia, diversas evidências indicam que em nosso Universo existe uma assimetria bariônica, ou seja, a densidade de número de antibárions (antiprótons e antineutrons) é pequena comparada com a densidade de número de bárions (prótons e nêutrons) [7]. Tal hipótese foi construída a partir de diferentes observações astrofísicas.

Em primeiro lugar, é possível afirmar que nosso sistema solar está constituído somente por matéria. Observou-se, por exemplo, que os raios cósmicos possuem antiprótons em uma quantidade 10^{-4} vezes menor que o número de prótons observados. Esta grandeza pode ser determinada considerando a quantidade de antiprótons que são criados na atmosfera como subprodutos de colisões. Portanto, os raios cósmicos são uma boa evidência de que existe uma diferença importante entre o número de bárions e antibárions em nosso entorno [7].

Por outro lado, nas escalas de aglomerados de galáxias, a evidência de assimetria é mais fraca. Por exemplo, se existissem galáxias de matéria e antimatéria no mesmo aglomerado, haveria uma emissão grande de raios gamma (γ) devido à grande quantidade de matéria e antimatéria em processo de aniquilação, porém, a falta de tais emissões mostra que, em geral, os aglomerados mais próximos são feitos inteiramente de bárions ou de antibárions [7].

Agora, para termos grandes quantidades de antimatéria em um universo barionicamente simétrico, é necessário que os bárions e antibárions estejam separados a escalas maiores que $10^{12} M_{\odot}$. Além disso, a descrição do Universo dada pelo Modelo Cosmológico Padrão indica que, para termos tal Universo sem assimetria bariônica, algum processo físico desconhecido deve atuar a uma temperatura de $T > 38$ MeV de modo tal que separe bárions e antibárions, evitando assim uma “catástrofe por aniquilação”: devido à ausência de assimetria o que restaria no Universo depois da aniquilação seria unicamente radiação.

Uma pergunta que podemos nos fazer é se é possível que a assimetria seja uma con-

dição inicial do Universo. Como resposta preliminar podemos dizer que não parece natural que a natureza tenha preferência por um tipo de matéria sobre outro e também teríamos um problema de *fine-tuning*, pois a assimetria é muito pequena. Por outro lado, há excelentes razões para pensarmos que no Universo teve lugar uma inflação, logo, a assimetria bariônica inicial deveria ter sido diluída exponencialmente. Em consequência, o mecanismo mais simples é considerar que a tempos pequenos ($T > 38$ MeV) se gerou dinamicamente uma assimetria entre o número de bárions e antibárions no Universo [7].

Tal assimetria pode ser caracterizada pelas razões [37]

$$\eta := \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} = (6.21 \pm 0.16) \times 10^{-10}$$

$$Y_{\Delta B} := \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = (8.75 \pm 0.23) \times 10^{-11}$$

onde a n_B é a densidade de número de bárions, $n_{\bar{B}}$ de antibárions, n_γ a densidade de fótons e s a densidade de entropia calculados no tempo presente. Este dado foi obtido a partir das observações feitas pelo satélite WMAP da radiação cósmica de fundo (CMB, por suas siglas em inglês). Isto que implica que para cada 10^{10} antiquarks havia aproximadamente $10^{10} + 1$ quarks que geraram as estruturas que vemos hoje em dia.

Outra evidência a favor da assimetria é obtida determinando a abundância primordial dos elementos leves D, ^3He , ^4He e ^7Li no modelo cosmológico padrão e comparando com dados observacionais [7]. Estes dados também indicam a existência de assimetria bariônica. Deste modo, é possível afirmar que a hipótese de assimetria entre matéria e antimatéria no Universo possui boas bases experimentais. Assim, a explicação desta assimetria de um ponto de vista teórico é considerada um dos principais problemas em aberto tanto da física de partículas elementares quanto da cosmologia.

1.2 Condições de Sakharov

Sakharov [8] há mais de 50 anos estabeleceu que são necessários três ingredientes em uma teoria para gerar dinamicamente a assimetria bariônica, ou seja, para que a chamada *bariogênese* possa ter ocorrido no Universo:

1. **Violação do Número Bariônico** Deve haver uma violação do número bariônico (B) para gerar a assimetria. Se não tivermos violação, a assimetria presente só pode ser entendida a partir das condições iniciais. A violação de número bariônico é uma característica que possuem as teorias de Grande Unificação (GUT), já que tanto léptons quanto quarks pertencem à mesma representação irredutível do grupo gauge que descreve o modelo. Porém, para o caso do Modelo Padrão o número bariônico é violado por processos não perturbativos, conhecidos como instantons [37].
2. **Violação de C e CP** No cenário no qual temos interações que violam B, a assimetria só aparecerá caso haja violação de C e CP. Para vermos isto de modo mais detalhado, vamos supor que existe um certo processo que gera a assimetria. Escrevamos $\mathcal{M}(i \rightarrow j)$ para a amplitude de transição entre o estado i e o estado j . A invariância CPT implica que

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i}),$$

com $\mathcal{M}(i \rightarrow j)$ a amplitude de probabilidade, de modo que

$$iT_{ji} = i\mathcal{M}(i \rightarrow j)(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_a^n p_i - \sum_b^n q_b\right),$$

o elemento da matriz de transição; $\bar{i}, \bar{j}$, os estados CP conjugados de i e j respectivamente. Por outro lado, a unitariedade da matriz S

$$\sum_j |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_j |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2,$$

implica que se tivermos invariância CP

$$|\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2,$$

as reações que não conservam B produzirão bárions e antibárions em quantidades idênticas, devido a que são criadas o mesmo número de partículas no estado j e no $\bar{j}$ a partir dos estados i e $\bar{i}$. Portanto, é necessário ter violação de C e CP para obter a assimetria.

3. Condições fora do equilíbrio No equilíbrio térmico a entropia é máxima quando os potenciais químicos associados com todas as quantidades não conservadas são nulos. Agora, já que as massas de partículas e antipartículas são iguais, o número de bárions e antibárions tem que ser o mesmo. Isto é uma consequência direta da invariância CPT. Se escrevemos $\Theta = CPT$ e $\rho(t) = e^{-\beta(t)H(t)}$ uma matriz densidade para o caso de equilíbrio térmico, sendo H a hamiltoneana do sistema, então

$$\begin{aligned}\langle B \rangle &= \text{tr} \left\{ e^{-\beta H} B \right\} = \text{tr} \left\{ \Theta^{-1} \Theta e^{-\beta H} B \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \Theta e^{-\beta H} \Theta^{-1} \Theta B \Theta^{-1} \right\} = \text{tr} \left\{ e^{-\beta H} (-B) \right\} \\ \langle B \rangle &= -\langle B \rangle,\end{aligned}$$

onde utilizamos que $\Theta B \Theta^{-1} = -B$ já que, por definição, o número bariônico das antipartículas é o negativo do número bariônico das partículas. Assim, vemos que quando um sistema está no equilíbrio não é possível produzir assimetria de número bariônico.

Embora todos esse ingredientes estejam presentes no Modelo Padrão das partículas elementares (MP), a violação de CP produzida pela fase complexa da matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa não é suficiente para gerar uma assimetria da ordem de 10^{-10} . Além disso, a descoberta experimental de uma partícula que parece ser o bóson de Higgs com massa $m_H = 126$ GeV, realizada pelos experimentos do LHC, implicam hoje que a transição eletrofraca responsável por desvios do equilíbrio térmico no MP não é de primeira ordem, não satisfazendo assim outra das condições de Sakharov¹. Está claro assim que a bariogênese precisa de Física além do Modelo Padrão.

Existem vários modelos que permitem gerar dinamicamente assimetria bariônica através de nova física. Para isso, é necessário estender o MP de modo tal que sejam introduzidas novas fontes de violação CP e que se produza o desvio do equilíbrio adicional necessário à transição de fase eletrofraca ou que a modifique. Alguns desses novos mecanismos são os seguintes [37]

¹Ver o apêndice B para uma explicação mais detalhada disso.

Bariogênese GUT Na bariogênese produzida por teorias de Grande Unificação, temos que a assimetria pode ser gerada pelos decaimentos dos bósons vetoriais que acoplam quarks e léptons. A evolução temporal dos campos de gauge e da assimetria é estudada pela equação de Boltzmann. Porém, as teorias GUT possuem o problema da falta de observação do decaimento do próton, o que faz com que as massas dos bósons vetoriais sejam muito grandes e as temperaturas nas quais eles decairiam ficariam maiores que a temperatura em que se supõe que ocorreu a inflação [37]. Além disso, nas teorias GUT mais simples, a soma dos números bariônicos e leptônico $B + L$ é violada mas a sua diferença $B - L$ não, logo a assimetria é destruída na transição de fase eletrofraca pelos processos de *sphalerons*.

Bariogênese Eletrofraca Nestes modelos o desvio do equilíbrio é devido à transição de fase eletrofraca. O MP pertence a esta classe de modelos, porém, como já foi mencionado, a transição é de segunda ordem e a violação de CP é muito pequena para dar conta da assimetria observada. Deste modo, os modelos de bariogênese eletrofraca incluem modificações do potencial escalar, que mudam a transição eletrofraca, e novas fontes de violação de CP. Podemos mencionar entre estes modelos, o modelo de dois dubletos de Higgs [56], onde a adição de novos dubletos modifica o potencial do MP e as possíveis misturas entre tais dubletos geram violação de CP; o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM) [57, 58], onde um stop, o parceiro supersimétrico do top, modifica o potencial do Higgs e a violação de CP é aumentada por várias possíveis fontes que possui o modelo [37]. Porém, os recentes resultados do LHC (Large Hadron Collider) mostram a existência de uma partícula consistente com o Higgs do MP com uma massa de ~ 125 GeV, enquanto que as massas dos parceiros supersimétricos devem ser menores que 300 GeV, o que impõe dois grandes problemas aos modelos supersimétricos e à bariogênese eletrofraca.

Mecanismo de Affleck-Dine A assimetria é gerada por um campo clássico que vai decair em partículas posteriormente [37]. Tal campo começa com um valor esperado do vácuo grande e “roda” em direção à origem em seu potencial escalar. Em geral, este campo é produzido por uma combinação de campos escalares dos parceiros supersimétricos de quarks, léptons e os Higgses do MSSM. Este mecanismo gera uma assimetria que é combinação de B e L . Porém, se a diluição produzida pela inflação é maior que 10^{10} , a assimetria gerada é muito pequena.

Leptogênese No cenário de leptogênese [36] se considera a existência de neutrinos pesados de mão direita com respeito às interações de gauge do MP, os quais são introduzidos no mecanismo de See-Saw². Os acoplamentos de Yukawa desses neutrinos podem introduzir novas fontes de violação de CP, enquanto que se tais interações pudessem ficar fora do equilíbrio, seria gerada uma assimetria leptônica, já que as massas de Majorana desses neutrinos violam o número leptônico. Posteriormente, processos não perturbativos conhecidos como *sphalerons* convertem parcialmente a assimetria leptônica em assimetria bariônica. Uma importante característica que possui este cenário é que liga a escala das massas dos neutrinos ativos com a escala em que se gera a assimetria. Este é um dos grandes atrativos da leptogênese.

²Para um resumo das características dos férmions de Majorana e do Mecanismo de See-Saw ver o apêndice C.

Motivados pela discussão acima, vamos estudar o modo padrão de considerarmos a geração da assimetria leptônica. Embora seja muito importante entender como é convertida parcialmente a leptogênese em bariogênese por processos na escala eletrofraca, na presente dissertação vamos considerar só a geração da assimetria leptônica por meio do decaimento dos neutrinos de mão direita, já que, como veremos a seguir, ainda há problemas conceituais nessa descrição.

1.3 Leptogênese

A geração da assimetria bariônica através de assimetria leptônica é um cenário que tem atraído muita atenção nos últimos anos, já que permite conectar dois problemas da física de partículas que em princípio parecem bastante diferentes: a pequenez da massa dos neutrinos ativos e a bariogênese. Isto é possível devido ao mecanismo de See-Saw [6]. Este mecanismo possui violação do número leptônico em duas unidades, pois para a realização do mesmo os neutrinos precisam ser de fato férmions de Majorana. Além disso, novas fases de violação de CP podem existir tanto na parte ativa quanto nos neutrinos de mão direita. Por outro lado, o desvio do equilíbrio pode estar presente nos decaimentos dos neutrinos pesados. Assim que, em princípio, a leptogênese cumpre as condições de Sakharov, porém, é necessário determinar se este cenário dá conta da assimetria observada.

Na extensão do MP com a inclusão de neutrinos de mão direita (N_a), com massas M_a usualmente maiores que a escala de quebra espontânea de simetria do MP $M_a \gg v$, é possível gerar assimetria leptônica de diferentes modos. O mais conhecido, e no qual centraremos o estudo da presente dissertação, é a leptogênese térmica. Nela, os neutrinos de mão direita são criados por espalhamentos no banho térmico e depois de decaírem, gera-se a assimetria leptônica. Entre os outros cenários da leptogênese se encontram a leptogênese “soft”, na qual a fonte de violação do número leptônico e de CP é obtida por termos soft que quebram a supersimetria; leptogênese não térmica, na que os neutrinos são produzidos não termicamente pelo decaimento do ínflaton; decaimentos dos s-neutrinos, parceiros supersimétricos dos neutrinos ativos, que geram assimetria leptônica; modelos que têm uma simetria de sabor que é quebrada sob a escala eletrofraca e geram estados pesados que carregam número leptônico. Varias referências destes modelos podem ser encontradas em [37].

Na presente seção, vamos descrever o formalismo padrão para o caso da leptogênese térmica nas situações “hierárquica” e “ressonante”. Em primeiro lugar, vamos introduzir ao conjunto de partículas do MP três neutrinos singletos de mão direita com hipercarga nula e isospin trivial, cuja lagrangeana é dada por ($P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ é o projetor ao espaço de quiralidade direita, ver apêndice A)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{MP} + \frac{1}{2}\bar{N}_a i \not{\partial} P_R N_a - \frac{1}{2}\bar{N}_a M_{ab} P_R N_b - Y_{ab}\bar{N}_a P_L \phi l_b - Y_{ab}^\dagger \bar{l}_a \phi^\dagger P_R N_b, \quad (1.1)$$

com N_a os neutrinos de mão direita, l_a os dubletos de léptons do MP, a o índice de sabor, $a = 1, 2, 3$; ϕ o dubleto de Higgs; enquanto que Y_{ab} são as constantes de Yukawa que dão conta dos acoplamentos entre neutrinos de mão direita, léptons e Higgs e vamos considerar a base na qual a matriz de massa dos neutrinos de mão direita é diagonal

$$M_{ab} = M_a \delta_{ab}.$$

A assimetria leptônica é gerada no seguinte esquema: distintos espalhamentos criam uma população importante dos N_a a temperaturas da ordem $T \sim M_a$, logo, estes neutrinos decaem ao diminuir a temperatura através dos canais

$$\begin{aligned} N_a &\longrightarrow l_b \phi, \\ N_a &\longrightarrow \bar{l}_b \phi^*. \end{aligned}$$

Se tivermos violação de CP, serão criadas assimetrias em todos os sabores; enquanto que se as interações estivessem fora do equilíbrio, tais assimetrias sobreviverão. Finalmente, os processos que ocorrem na transição eletrofraca transformam parte da assimetria em assimetria bariônica. Um fato importante, que é observado em [37], é que a criação e aniquilação é controlada por uma constante de acoplamento só, Y_{ab} . Portanto, devemos notar que a mesma assimetria CP está envolvida tanto na criação quanto nos decaimentos dos N_a . Poderíamos afirmar que, com consequência desse fato, a assimetria é nula, contudo, uma assimetria não zero vai sobreviver, já que a assimetria inicial é esgotada por decaimentos, decaimentos inversos e espalhamentos [37]. Tal esgotamento é denominado *washout*, lavagem em português, e será crítico para a leptogênese térmica. Além disso, efeitos de sabor serão muito importantes, já que a *washout* depende dos léptons e como são distinguidos nos diferentes processos.

A seguir, vamos estudar em algum detalhe a determinação da violação de CP e a geração e evolução fora do equilíbrio da assimetria leptônica utilizando o método que denominamos “padrão”: o uso da equação de Boltzmann para estudar a evolução fora do equilíbrio térmico. Por outro lado, a determinação de violação do número leptônico é tema do apêndice C no qual se estudam as propriedades dos neutrinos de Majorana.

1.3.1 Violação de CP

Na hora de considerarmos a violação de CP, devemos levar em conta que existem duas contribuições possíveis à assimetria CP: a assimetria que provém dos decaimentos dos neutrinos de mão direita, definida segundo,

$$\epsilon_{ab} := \frac{\Gamma(N_a \longrightarrow l_b \phi) - \Gamma(N_a \longrightarrow \bar{l}_b \phi^*)}{\Gamma(N_a \longrightarrow l_b \phi) + \Gamma(N_a \longrightarrow \bar{l}_b \phi^*)}$$

e a assimetria que vem de espalhamentos,

$$\epsilon_{ab} := \frac{\sigma(l_a \phi \longrightarrow \bar{l}_b \phi^*) - \sigma(\bar{l}_a \phi^* \longrightarrow l_b \phi)}{\sigma(l_a \phi \longrightarrow \bar{l}_b \phi^*) + \sigma(\bar{l}_a \phi^* \longrightarrow l_b \phi)}.$$

Vamos considerar somente o caso da assimetria por decaimentos, o caso de espalhamentos é análogo à discussão seguinte. Para decaimentos, a interferência entre o diagrama à nível de árvore e as correções de *loop* da autoenergia e do vértice gera a assimetria CP. As contribuições da autoenergia e do vértice são denominadas contribuições ϵ e ϵ' respectivamente, ver figura (1.1). Para um-*loop* teremos os diagramas da figura (1.2).

Para o caso *hierárquico*, no qual uma das massas dos neutrinos é suposta muito menor que as massas dos outros neutrinos, $M_1 \ll M_2, M_3$, temos que a contribuição ϵ não é

Figura 1.1: Tipos de Violação CP ϵ e ϵ'

relevante, já que a transição entre neutrinos é suprimida pela diferença das massas. Por outro lado, a contribuição ϵ' pode se calcular e é dada por [36, 37]

$$\epsilon'_{1b} = \frac{1}{8\pi (YY^\dagger)_{11}} \sum_{c=2,3} \left[\Im[Y_{b1}^* (YY^\dagger)_{1c} Y_{bc}] f\left(\frac{M_c^2}{M_1^2}\right) + \Im[Y_{b1}^* (YY^\dagger)_{c1} Y_{bc}] \left(1 - \frac{M_c^2}{M_1^2}\right)^{-1} \right], \quad (1.2)$$

sendo a função de um-loop de Fukugita-Yanagida [36, 59]

$$f(x) = \sqrt{x} \left[\frac{1}{1-x} + 1 - (1+x) \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \right].$$

Figura 1.2: Diagramas que contribuem à assimetria CP no decaimento a um loop. a) nível de árvore, b1) autoenergia a um-loop, b2) correção do vértice.

A assimetria para o caso *ressonante*, o qual ocorre quando a diferença das massas dos neutrinos é da mesma ordem da largura de decaimento $M_a - M_b \sim \Gamma_{a,b}$, é composta pelas seguintes componentes [59, 60]

$$\epsilon'_a = \sum_{b \neq a} \frac{\Im[(YY^\dagger)_{ab}^2]}{8\pi (YY^\dagger)_{aa}} f\left(\frac{M_b^2}{M_a^2}\right), \quad (1.3)$$

$$\epsilon_a = \sum_{b \neq a} \frac{\Im[(YY^\dagger)_{ab}^2]}{8\pi (YY^\dagger)_{aa}} \frac{(M_b^2 - M_a^2) M_a M_b}{(M_a^2 - M_b^2)^2 + (M_a \Gamma_a - M_b \Gamma_b)^2}. \quad (1.4)$$

Devemos notar que os termos $M_{a,b}^2 \Gamma_{a,b}^2$ correspondem a fatores tipo absorptivo que regulariza a assimetria no limite $M_a \rightarrow M_b$. Estes termos são de fácil interpretação física, aparecem devido à finitude da largura dos neutrinos. Uma consideração importante que devemos levar em conta neste ponto é que nos dois cenários, hierárquico e ressonante, a

assimetria é obtida considerando a interferência quântica entre os diagramas a nível de árvore e a 1-*loop*. Isto deve ser analisado mais a fundo na hora de estudarmos a descrição com a equação de Boltzmann.

Antes de passarmos à obtenção da assimetria leptônica, é necessário descrever um problema que possuem as assimetrias CP que discutimos acima. Para descrevermos tal problema, lembremos que a invariância CPT implica que para os decaimentos dos neutrinos pesados teremos que

$$|\mathcal{M}(N_a \rightarrow l_b \phi)|^2 = |\mathcal{M}(\bar{l}_b \phi^* \rightarrow N_a)|^2.$$

Por outro lado, como foi descrito anteriormente, a unitariedade da matriz S e a condição de invariância CPT implicam que

$$\sum_j |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_j |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow j)|^2,$$

o que indica que podemos ter violação de CP através de decaimentos parciais. Agora, supondo que os neutrinos N_a podem ser considerados como estados assintóticos, o que se pode afirmar se sua vida média é muito maior que as escalas de tempo envolvidas nos processos, temos que a unitariedade da matriz S é satisfeita pelos elementos matriciais com N_a no estado inicial ou final. Porém, devemos notar que ao considerar todos os processos $l_a \phi \rightarrow$ qualquer coisa [37]:

- a unitariedade e CPT implicam que não podemos ter violação CP na razão total

$$|\mathcal{M}(l_a \phi \rightarrow \text{qualquer coisa})|^2 = |\mathcal{M}(\bar{l}_a \phi^* \rightarrow \text{qualquer coisa})|^2,$$

- mas, para a leptogênese é necessário que $\epsilon_{ab} \neq 0$, o que implica que há violação de CP nas razões parciais de decaimento

$$|\mathcal{M}(l_a \phi \rightarrow N_b)|^2 \neq |\mathcal{M}(\bar{l}_a \phi^* \rightarrow N_b)|^2,$$

- contudo, a nível de árvore nos espalhamentos, não podemos ter assimetria CP, devido ao fato que a matriz de transição T_{ab} , definida a partir da matriz S segundo $S_{ab} = 1 + iT_{ab}$, cumpre [37]

$$|T_{ab}|^2 - |T_{ba}|^2 = -2\Im \left\{ (TT^\dagger)_{ab} T_{ba}^* \right\} - |(TT^\dagger)_{ab}|^2.$$

Isto indica que a violação de CP só pode aparecer nas correções de *loop*.

Deste modo temos um paradoxo aparente: seria necessário ter violação de CP a nível de árvore para que na razão total não se apresentasse assimetria CP, o que contradiz a última consideração. Não obstante, este paradoxo é resolvido notando que, de fato, estamos fazendo uma dupla contagem, já que no canal s o neutrino N_a pode estar *on-shell*: por exemplo, no espalhamento $|\mathcal{M}(l_a \phi \rightarrow l_b \phi)|^2$ também estamos considerando os processos em que são criados os neutrinos e logo decaem, $|\mathcal{M}(l_a \phi \rightarrow N_c, N_c \rightarrow l_b \phi)|^2$. Deste modo, o paradoxo é resolvido devido a que a nível de árvore há uma violação de

CP “aparente” na criação e na posterior aniquilação dos neutrinos. Portanto, é necessário subtrair o “estado intermediário real”

$$|\mathcal{M}'(l_a\phi \rightarrow l_b\phi)|^2 := |\mathcal{M}(l_a\phi \rightarrow l_b\phi)|^2 - |\mathcal{M}^{os}(l_a\phi \rightarrow l_b\phi)|^2, \quad (1.5)$$

$$|\mathcal{M}'(l_a\phi \rightarrow l_b\phi)|^2 := |\mathcal{M}(l_a\phi \rightarrow \bar{l}_b\phi^*)|^2 - |\mathcal{M}^{os}(l_a\phi \rightarrow \bar{l}_b\phi^*)|^2, \quad (1.6)$$

onde $|\mathcal{M}^{os}(l_a\phi \rightarrow \bar{l}_b\phi^*)|^2$ corresponde ao elemento matricial no caso em que o neutrino está on-shell. Podemos reescrever esse termo utilizando a razão de ramificação $B_{l_b\phi}^{N_c}$ para $N_c \rightarrow l_b\phi$,

$$|\mathcal{M}'(l_a\phi \rightarrow l_b\phi)|^2 := |\mathcal{M}(l_a\phi \rightarrow l_b\phi)|^2 - \sum_c |\mathcal{M}(l_a\phi \rightarrow N_c)|^2 B_{l_b\phi}^{N_c}. \quad (1.7)$$

1.3.2 Equações de Boltzmann

O método padrão para determinarmos a geração e evolução de assimetria leptônica utiliza a equação de Boltzmann como equação fundamental na descrição dos neutrinos de mão direita fora do equilíbrio térmico. Um resumo da equação de Boltzmann pode ser encontrado no apêndice D. Nesse apêndice se obtém a equação para a densidade de número de partículas para a espécie k , definida segundo

$$n_k(t) = g_k \int_{\vec{p}} f_k(p, t),$$

sendo $f_k(p, t)$ a função de distribuição; g_k os graus de liberdade que possui a espécie e introduzimos a notação $\int_{\vec{p}_i} := \int \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2p_i^0}$. No caso em que se considera um Universo descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker (FLRW), tal equação é dada por

$$\frac{dn_k}{dt} + 3Hn_k = \sum_{int} \int_{\vec{p}_k} \left\{ \hat{C}^{1\leftrightarrow 2}[f_k] + \hat{C}^{2\leftrightarrow 2}[f_k] \right\}, \quad (1.8)$$

sendo H o fator de expansão de Hubble, $\hat{C}^{1\leftrightarrow 2, 2\leftrightarrow 2}[f_k]$ os termos de colisão para decaimentos e espalhamentos definidos segundo

$$\hat{C}^{1\leftrightarrow 2}[f_k] = \frac{1}{2} \int_{\vec{p}_m, \vec{p}_n} [f_m f_n (1 \pm f_k) W_{mn|k} - (1 \pm f_m)(1 \pm f_n) f_k W_{k|mn}], \quad (1.9a)$$

$$\hat{C}^{2\leftrightarrow 2}[f_k] = \frac{1}{2} \int_{\vec{p}_l, \vec{p}_m, \vec{p}_n} [f_m f_n (1 \pm f_k)(1 \pm f_l) W_{mn|kl} - (1 \pm f_m)(1 \pm f_n) f_k f_l W_{kl|mn}], \quad (1.9b)$$

onde o sinal $\pm$ indica a natureza fermiônica o bosônica dos campos e se definiram as densidades de probabilidade de interação invariantes relativísticas,

$$W_{mn|k} := \frac{1}{2p_k^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_k - p_m - p_n) |\overline{\mathcal{M}(mn \rightarrow k)}|^2,$$

$$W_{mn|kl} := \frac{1}{2p_k^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_k + p_l - p_m - p_n) |\overline{\mathcal{M}(mn \rightarrow kl)}|^2,$$

sendo $|\overline{\mathcal{M}(mn \rightarrow k(l))}|^2$ as amplitudes de probabilidade médias nos graus de liberdade internos de ocorrer as interações $mn \rightarrow k(l)$. O sistema de equações não lineares de

Boltzmann para todas as espécies presentes no Universo será difícil de resolver, pois para cada espécie haverá uma equação que, em geral, vai depender das outras espécies. Porém, para resolvermos tal sistema, devemos entender primeiro como é que as condições fora do equilíbrio aparecem no Universo. A expansão do Universo vai determinar quando uma espécie está ou não no equilíbrio [7]: se as taxas de interação de uma espécie Γ são da mesma ordem ou menores que a taxa de expansão de Hubble H ,

$$\Gamma \lesssim H,$$

tal espécie não poderá se equilibrar e ficará fora do equilíbrio; enquanto que se as taxas de interação são maiores que H as espécies estarão em equilíbrio com o plasma primordial [7]. Este critério determina quais espécies podem se considerar em equilíbrio e assim simplificar o sistema de equações de Boltzmann.

Como condições iniciais, vamos assumir que o Universo reaquece a uma temperatura T_{ra} o banho térmico, composto com as partículas do MP interagindo a través das interações de gauge e por elas o banho permanece no equilíbrio. Uma densidade térmica de neutrinos de mão direita é produzida quando $T_{ra} \gtrsim M_a/5$, com M_a a massa do neutrino com massa menor, e se a escala de tempo de produção dos neutrinos $1/\Gamma_{pr}$ é menor que a idade do Universo naquela época H^{-1} , com

$$H(T = M_a) = 1.66 g_*^{\frac{1}{2}} \frac{T^2}{m_{pl}} \Big|_{T=M_a},$$

sendo $g_* = 106.75$ o número efetivo de graus de liberdade relativísticos do banho térmico e m_{pl} a massa de Planck.

Neste ponto devemos determinar as equações de Boltzmann que governam a geração e evolução de assimetria leptônica, porém, já que nosso propósito não é descrever como são obtidas e simplificadas, além de resolvidas, mas entender os problemas que possui a aplicação do formalismo de Boltzmann, vamos usar aqui diretamente os resultados de artigos da literatura. O procedimento que é utilizado consiste em resolver a equação de Boltzmann para a evolução dos neutrinos de mão direita e logo resolver a equação de movimento para a assimetria leptônica. Tais equações são dadas por [7, 61, 62]

$$\frac{dn_{N_a}}{dt} + 3Hn_{N_a} = - \left(\frac{n_{N_a}}{n_{N_a}^{\text{eq}}} - 1 \right) \gamma_{N_a}, \quad (1.10a)$$

$$\frac{dn_L}{dt} + 3Hn_L = \sum_{a=1}^3 \left[\epsilon_{aa} \left(\frac{n_{N_a}}{n_{N_a}^{\text{eq}}} - 1 \right) - \frac{n_L}{2n_l^{\text{eq}}} \right] \gamma_{N_a} - \frac{n_L}{2n_l^{\text{eq}}} \gamma_{\sigma}, \quad (1.10b)$$

sendo n_{N_a} , $n_L := n_l - n_{\bar{l}}$ as densidades de número dos neutrinos de mão direita e da assimetria leptônica respectivamente; $n_{N_a}^{\text{eq}}$, n_l^{eq} são seus valores no equilíbrio térmico e γ_{N_a} , γ_{σ} são os termos de colisão reduzidos,

$$\gamma_{N_a} = n_{N_a}^{\text{eq}} \frac{K_1(M_a^2 T^{-1})}{K_2(M_a^2 T^{-1})} \Gamma_a, \quad (1.11a)$$

$$\gamma_{\sigma} = \frac{T}{8\pi^4} \int_0^\infty ds s^{\frac{3}{2}} K_1(\sqrt{s} T^{-1}) \sigma'(s), \quad (1.11b)$$

com $K_1(z)$ e $K_2(z)$ as funções modificadas de Bessel, Γ_a , $\sigma'(s)$ são as expressões a temperatura nula ($T = 0$) do decaimento total e a seção de choque dos espalhamentos $l\phi \rightarrow \bar{l}\phi^*$, respectivamente. Devemos notar que na obtenção da seção de choque não foram consideradas as contribuições dos estados intermediários reais [62]. Varias suposições foram consideradas na hora de obtermos essas equações [7, 62]. Em primeiro lugar, supomos que as partículas obedecem a estatística de Maxwell-Boltzmann o que é uma boa aproximação na ausência de efeitos de condensados de Bose-Einstein ou na presença de degenerescência de graus de liberdade fermiônicos. Segundo, assumimos que léptons e Higgs estão em equilíbrio térmico. Terceiro, as interações que geram a *washout* são fracas e podem ser desprezadas na discussão.

Usualmente, para estudar numericamente as soluções das equações de Boltzmann, utiliza-se a variável adimensional

$$x := \frac{M_1}{T},$$

é útil também introduzir a razão entre a densidade de número e a densidade de entropia s segundo

$$Y_f := \frac{n_f}{s},$$

com $f = \{N_a, L\}$, assim, obtemos [7, 59, 61, 62]

$$\frac{dY_{N_a}}{dx} = -x^2 K_a (Y_{N_a} - Y_{N_a}^{\text{eq}}), \quad (1.12a)$$

$$\frac{dY_L}{dx} = x^2 \sum_{a=1}^3 K_a \left[\epsilon_{aa} (Y_{N_a} - Y_{N_a}^{\text{eq}}) - g_* Y_{N_a}^{\text{eq}} Y_L \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma_\sigma}{\gamma_{N_a}} \right) \right], \quad (1.12b)$$

sendo

$$K_a := \frac{K_1(m_a x)}{K_2(m_a x)} \frac{\Gamma_a}{H(x=1)},$$

com $m_a = \frac{M_a}{M_1}$. Em geral, para resolver as equações de Boltzmann, se escolhem como condições iniciais as condições de vácuo, $n_{N_a}(0) = n_L(0) = 0$, ou seja, se supõe que tanto a densidade de número dos neutrinos quanto a assimetria leptônica são nulas no tempo inicial. Distintos estudos resolveram numericamente as equações acima fornecendo diversos resultados para os casos ressonante e hierárquico considerando essas e outras condições iniciais [59, 61, 62, 52]. Apresentamos alguns gráficos das assimetrias e densidades de número dos neutrinos pesados nas figuras 1.3 e 1.4 para os casos hierárquico e ressonante, respectivamente. As figuras foram tomadas de [63] e [64].

A figura 1.3 foi obtida em [63] para no caso hierárquico para dois diferentes tipos de condição inicial da abundância dos neutrinos de mão direita. Além disso, se apresenta a evolução da abundância tanto dos neutrinos como da assimetria leptônica. Para o caso de abundância inicial dos neutrinos nula (linha cheia), temos que é possível ver como essa abundância cresce de modo tal que para $T = 0.5M_1$ tal abundância excede a abundância no equilíbrio (linha pontilhada), para logo decrescer e tender ao equilíbrio. Para este caso, uma assimetria leptônica aparece mesmo antes de que a abundância dos neutrinos

se aproxime à abundância no equilíbrio, agora, quando a abundância dos neutrinos é igual à no equilíbrio, essa assimetria inicial desaparece e depois cria-se uma nova assimetria quando a abundância dos neutrinos fica fora do equilíbrio de novo, e a partir de $T \sim 0.3M_1$ a assimetria vira constante por causa do *freeze-out*. Um aspecto que devemos notar é que na criação da assimetria inicial a mudança na temperatura não é tão relevante quanto para o caso da assimetria final. Isto permite que podamos ignorar a expansão do Universo. Agora, o segundo caso da abundância inicial dos neutrinos corresponde ao caso térmico (linha tracejada), ali escolhe-se que $n_{N_1} = \frac{3}{4}$ ³. Ao evoluir a abundância dos neutrinos, esta fica fora do equilíbrio e nesse ponto a assimetria leptônica é criada. Outro aspecto importante de ressaltar é que nos dois casos a assimetria leptônica final é da mesma ordem.

Na figura 1.4, obtida em [64], se apresenta outro fenômeno muito importante na leptogênese, os efeitos de sabor. Neste caso vemos como os resultados são diferentes para os casos em que são considerados os feitos que tem levar em conta os sabores dos neutrinos pesados através dos acoplamentos de Yukawa Y_{ab} . Deste modo, é possível gerar uma assimetria para cada número leptônico $L_{e,\mu,\tau}$, e ao mesmo tempo, proteger a assimetria final da *washout* produzida pelos *sphalerons*. Como vemos na mesma figura, os efeitos de sabor são importantes já que sua introdução faz com que a assimetria cresça em uma ordem de grandeza, aproximadamente. Porém, nesta dissertação não vamos levar em conta estes efeitos.

Figura 1.3: Densidades de neutrinos de mão direita e assimetria leptônica para o caso hierárquico com condições iniciais de vácuo (linha completa) e térmicas (linha tracejada).

Como vemos, a aplicação do formalismo de Boltzmann pode, em geral, descrever a geração e evolução da assimetria leptônica a partir das suposições que discutimos. Mas, essa descrição pode se considerar como completa? Isto é, todos os possíveis fenôme-

³Esta escolha não é arbitrária, pois corresponde ao número de neutrinos no elemento de volume comóvel, que, em geral, é igual a $\frac{3}{8}g$, onde g é o número de graus de liberdade dos campos.

Figura 1.4: Resultados numéricos para a leptogênese no caso em que $M_3 = 3M_1$, $M_2 = 2M_1$, $M_1 = 10^{10}\text{GeV}$.

nos quânticos que podem se apresentar estão incluídos aqui? Para respondermos esta pergunta notemos que, como já foi mencionado, a assimetria CP é gerada quando se considera a interferência quântica entre diagramas a nível de árvore e correções de um *loop*, assim, neste ponto são muito importantes os fenômenos de origem quântico. Além disso, no caso ressonante, existe a possibilidade de termos oscilações entre neutrinos de mão direita devido à pequena diferença das massas, porém, a formulação que acabamos de descrever não leva em conta esta possibilidade e para tê-la seria necessário incluir novas suposições ao tratamento. Por outro lado, as larguras e seções de choque que são incluídas nos termos de colisão são calculadas a temperatura nula, o que não parece muito satisfatório, já que estamos estudando um sistema a uma temperatura que se supõe alta. Do mesmo modo, como vimos, é necessário fazer uma subtração *a posteriori* da amplitude de probabilidade de espalhamento no caso em que o estado intermediário é *on-shell*, já que há de fato uma dupla contagem na determinação da assimetria CP. Finalmente, lembremos que a equação de Boltzmann é uma equação de origem puramente clássica que descreve a evolução de uma função que mora no espaço de fases, mas, no termo de colisão se incluem probabilidades de origem quântica, o que é contraditório. Deste modo, a resposta à pergunta formulada anteriormente é *não*: o formalismo de Boltzmann *não* inclui muitos fenômenos que deveriam ser levados em conta para ter uma descrição que possa ser considerada como completa da leptogênese. Contudo, como seria uma descrição completa, e claro, correta, da leptogênese? Consideramos que uma descrição completa deve ser aquela em que se estude a leptogênese em um formalismo que incluía efeitos quânticos e fora do equilíbrio térmico a partir de primeiros princípios. Tal forma-

lismo de primeiros princípios, que denominaremos aqui *Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio Térmico* (TQCfE), existe e é utilizado em sistemas da matéria condensada, mostrando-se muito útil e dando bons resultados [44]. No próximo capítulo vamos descrever o formalismo da TQCfE e nos capítulos seguintes aplicaremos esse formalismo à leptogênese térmica.

CAPÍTULO 2

TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS FORA DO EQUILÍBRIO TÉRMICO

2.1 Introdução

Os novos fenômenos que tem sido vistos experimentalmente nos últimos anos, entre os que temos, por exemplo, o plasma de quarks e glúons, condensados de Bose-Einstein, supercondutividade a altas temperaturas, tem gerado uma revolução no desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos (TQC) à temperatura T finita. Existem duas extensões da TQC que permitem estudar sistemas termodinâmicos à temperatura não nula $T \neq 0$: o formalismo de tempo imaginário e o formalismo de tempo real.

No formalismo de tempo imaginário se utiliza o fato que fazendo a substituição $t \rightarrow -i\beta$, com $\beta = (k_B T)^{-1}$ (usaremos um sistema de unidades tal que a constante de Boltzmann, k_B , será adimensional e igual a 1 daqui em diante) nos funcionais geradores da TQC à temperatura zero, obter-se-ão quantidades análogas às estudadas na mecânica estatística. Não obstante, para situações fora do equilíbrio térmico, o formalismo de tempo imaginário falha já que não é possível falar de uma única temperatura do sistema. Por outro lado, o formalismo de tempo real apareceu com o propósito de descrever e estudar a evolução temporal de um sistema do qual só conhecemos as condições iniciais em algum tempo $t = t_0$. Tal formalismo foi desenvolvido por Schwinger [41] e logo estendido por Keldysh [42] e outros. Uma característica muito importante é que essa teoria pode descrever sistemas que se encontram fora do equilíbrio térmico. Por esta razão esse formalismo, que será discutido no presente capítulo foi recentemente introduzido, com grande sucesso, no contexto da leptogênese [53, 52, 65, 55].

2.2 Formalismo de Schwinger-Keldysh

O problema fundamental da Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio Térmico (TQCfE) consiste em determinar os valores médios, à temperatura finita, de diferentes quantidades físicas e sua evolução temporal a partir de um estado inicial, não térmico, do sistema. Deste modo, a TQCfE é um problema de valores iniciais que requerer que o

estado inicial seja não térmico para assegurar condições fora do equilíbrio [48]. Notemos que um sistema fora do equilíbrio não é um estado quântico puro e por isso deve ser descrito por uma matriz densidade, ρ . Essa matriz densidade tem a interpretação estatística de um conjunto de sistemas idênticos em diferentes estados quânticos. Para descrevermos o problema de modo mais detalhado, vamos assumir que o sistema é descrito por um estado inicial, dado pela matriz densidade $\rho_i(t_0)$ não térmica, em um tempo t_0

$$\rho_i(t_0) \neq \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr}\{e^{-\beta H}\}}. \quad (2.1)$$

Agora bem, lembrando que todas as quantidades físicas na TQC podem ser expressadas em termos das funções de n-pontos da teoria, teremos que as distintas funções de correlação entre os campos fora do equilíbrio, denominadas *funções de Green fora do equilíbrio*, serão as principais quantidades que estudaremos na TQCfE¹. Porém, antes de determinarmos as relações gerais entre tais funções de Green, devemos considerar um problema importante que possui a TQCfE: a inaplicabilidade do formalismo padrão à temperatura zero, o formalismo *in - out*.

No formalismo ordenado temporalmente, ou formalismo *in - out*, se estuda a função de Green ordenada temporalmente, [66, 5]

$$G_F(x, y) := \langle \Phi | \mathcal{T} \psi_H(x) \psi_H^\dagger(y) | \Phi \rangle, \quad (2.2)$$

sendo $\mathcal{T}$ o operador de ordenamento temporal usual

$$\mathcal{T} \psi(x) \psi^\dagger(y) = \theta(x_0 - y_0) \psi(x) \psi^\dagger(y) \pm \theta(y_0 - x_0) \psi^\dagger(y) \psi(x), \quad (2.3)$$

onde o sinal $\pm$ depende da natureza bosônica ou fermiônica dos campos, respectivamente; $\psi_H(x)$ é o campo na representação de Heisenberg, e $|\Phi\rangle$ é um estado quântico arbitrário. Para entendermos o problema que possui esta descrição, vamos estudar o procedimento padrão para obtermos a partir da expressão anterior a matriz de dispersão $S(-\infty, \infty)$ [5]. Em primeiro lugar, passamos à representação de interação,

$$\psi_I(\vec{x}, t) = \mathcal{U}(t, 0) \psi_H(\vec{x}, t) \mathcal{U}(0, t), \quad (2.4a)$$

$$|\Phi(t)\rangle_I = \mathcal{U}(t, 0) |\Phi\rangle \quad (2.4b)$$

com $\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right\}$ é o operador de evolução temporal, onde supomos que o sistema possui uma hamiltoneana $\mathcal{H} = H + H'_I$, sendo H livre enquanto que $H'_I(t)$ é uma perturbação na representação de interação. Substituindo na função de Green (2.2), temos que

$$G_F(x, y) = \langle \Phi(t_f) |_I \mathcal{U}(t_f, 0) \mathcal{T} \left\{ \mathcal{U}(0, x_0) \psi_H(x) \mathcal{U}(x_0, y_0) \psi_H^\dagger(y) \mathcal{U}(y_0, 0) \right\} \mathcal{U}(0, t_i) | \Phi(t_i) \rangle_I, \quad (2.5)$$

com t_i o tempo correspondente ao estado inicial, t_f o tempo correspondente ao estado final.

¹Embora seja possível determinar diretamente a evolução da matriz densidade $\rho_i(t_0)$, é mais eficiente estudar as funções de correlação fora do equilíbrio [48]

Agora bem, sabemos que o formalismo ordenado temporalmente se interessa principalmente em estudar o caso em que o estado inicial e final são assintoticamente livres, como no caso de uma colisão, logo tomamos $t_i \rightarrow -\infty$ e $t_f \rightarrow \infty$, por tanto,

$$G_F(x, y) = \langle \Phi(\infty) | \mathcal{T} \left\{ \mathcal{U}(\infty, -\infty) \psi_H(x) \psi_H^\dagger(y) \right\} | \Phi(-\infty) \rangle. \quad (2.6)$$

Para obter uma expressão geral no formalismo *in-out* é necessário aplicar o teorema de Gell-Mann–Low, ou teorema adiabático [5]: escolhendo como estado $|\Phi\rangle = |0_t\rangle$ o estado de vácuo, não degenerado, da hamiltoniana total $\mathcal{H}$, supomos que a interação é “ligada” adiabaticamente, assim temos que os estados assintoticamente livres só podem diferir por um fator de fase

$$|\Phi(\infty)\rangle = e^{iL} |\Phi(-\infty)\rangle, \quad (2.7)$$

com

$$e^{iL} = \langle \Phi(-\infty) | \mathcal{U}(\infty, -\infty) | \Phi(-\infty) \rangle. \quad (2.8)$$

Deste modo, se obtém a relação padrão em teoria de campos a temperatura zero, [5]

$$G_F(x, y) = \frac{\langle \Phi(-\infty) | \mathcal{T} \left\{ \mathcal{U}(\infty, -\infty) \psi_H(x) \psi_H^\dagger(y) \right\} | \Phi(-\infty) \rangle}{\langle \Phi(-\infty) | \mathcal{U}(\infty, -\infty) | \Phi(-\infty) \rangle}. \quad (2.9)$$

Porém, para o caso de um sistema a temperatura finita e *a fortiori* fora do equilíbrio, o uso do teorema adiabático é injustificado, já que, em geral, a evolução pela hamiltoneana total $\mathcal{H}$ não é adiabática. Além disso, os estados $|\Phi\rangle$ em geral não precisam ser autoestados da hamiltoneana, logo o teorema de Gell-Mann–Low é inválido no caso de um sistema fora do equilíbrio. Em suma, fora do equilíbrio térmico os estados $|\Phi(\infty)\rangle$ e $|\Phi(-\infty)\rangle$ não estão relacionados de modo simples, como era de se esperar, já que, para o caso que estamos tratando, o estado final, correspondente a um estado térmico, não terá relação com o estado inicial, não térmico. Porém, Schwinger [41] desenvolveu um truque que permite evitar qualquer referencia ao estado no futuro “assintótico”, como veremos a seguir.

Voltando ao problema da TQCfE, em primeiro lugar devemos lembrar que, por definição, o valor médio de um operador é obtido mediante [67, 48, 54, 55]

$$\langle A \rangle(t) := \frac{\text{tr} \{ A \rho(t) \}}{\text{tr} \{ \rho(t) \}}. \quad (2.10)$$

Para $t > t_0$ a matriz densidade evolui segundo [67]²

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho_i(t_0) U(t_0, t). \quad (2.11)$$

²Note-se que o operador de evolução temporal está na representação de Heisenberg, já que na presente discussão não consideramos a representação de interação. Deste modo, o operador de evolução temporal é

$$U(t_1, t_0) = \mathcal{T} \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} dt' \mathcal{H}(t') \right\}$$

Deste modo, o valor médio do operador A se relaciona com a matriz densidade inicial mediante,

$$\begin{aligned}\langle A \rangle(t) &= \frac{\text{tr } U(t, t_0) \rho_i(t_0) U(t_0, t) A}{\text{tr } \rho(t)} \\ &= \frac{\text{tr } \rho_i(t_0) U(t_0, t) A U(t, t_0) U(t_0, \mathfrak{T}) U(\mathfrak{T}, t_0)}{\text{tr } \rho_i(t_0)} \\ &= \frac{\text{tr } \rho_i(t_0) U(t_0, t) A U(t, \mathfrak{T}) U(\mathfrak{T}, t_0)}{\text{tr } \rho_i(t_0)},\end{aligned}\quad (2.12)$$

onde utilizamos as propriedades do traço e dos operadores de evolução temporal e definimos um $\mathfrak{T} > t_0$.

O resultado anterior pode se interpretar da seguinte maneira: o sistema se encontra inicialmente em t_0 e logo evolui a um tempo $t > t_0$ onde o operador A é introduzido, a seguir, o sistema evolui a $\mathfrak{T} > t$ e depois volta de $\mathfrak{T}$ a t_0 . Assim, o truque de Schwinger consiste em considerar que *todos os argumentos temporais das quantidades e operações da TQCfE devem ser definidos no contorno de Kadanoff-Baym*: $\mathcal{C}_{KB} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$, sendo $\mathcal{C}_+ = [t_0 + i\epsilon, \mathfrak{T} + i\epsilon]$ e $\mathcal{C}_- = [\mathfrak{T} - i\epsilon, t_0 - i\epsilon]$, com $\epsilon \rightarrow 0$. Usualmente, escolhe-se por simplicidade $\mathfrak{T} \rightarrow \infty$, não obstante, vamos deixar o $\mathfrak{T}$ sem especificar neste ponto [54, 55]. Por outro lado, devemos notar que o tempo inicial t_0 precisa ser finito, já que um sistema pode termalizar em qualquer tempo finito se o tempo inicial está no passado infinito. Notemos que o contorno de Kadanoff-Baym é necessário para descrevermos situações fora do equilíbrio, pois tais problemas são problemas de valores iniciais, como já foi mencionado, enquanto que o estado final é desconhecido [54].

Figura 2.1: Contorno de Kadanoff-Baym $\mathcal{C}_{KB}$ no plano temporal complexo

As quantidades mais importantes, as funções de correlação de n -pontos ordenadas temporalmente, são definidas no contorno de Kadanoff-Baym (ver fig. 2.1)

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n) &:= \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle, \\ &= \text{tr} \{ \rho_i(t_0) \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \}\end{aligned}\quad (2.13)$$

sendo $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ o ordenamento temporal no contorno $\mathcal{C}_{KB}$ e $\phi(x_i)$ os campos, que consideramos como escalares reais por simplicidade e supomos que $\text{tr } \rho_i(t_0) = 1$. Para o caso da função de dois pontos, teremos que

$$\Delta_{\mathcal{C}}(x, y) := \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \phi(x) \phi(y) \rangle = \theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \Delta^>(x, y) + \theta_{\mathcal{C}}(y_0 - x_0) \Delta^<(x, y), \quad (2.14)$$

com as funções de Wightman $\Delta^{<, >}(x, y)$ definidas como o valor esperado dos campos no estado do sistema mediante [67, 68, 54]

$$\Delta^>(x, y) := \langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \text{tr} \{ \rho_i(t_0) \phi(x) \phi(y) \}, \quad (2.15a)$$

$$\Delta^<(x, y) := \langle \phi(y) \phi(x) \rangle = \text{tr} \{ \rho_i(t_0) \phi(y) \phi(x) \}, \quad (2.15b)$$

onde a função Theta de Heaviside no contorno, $\theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0)$ é definida levando em conta que tanto x_0 quanto y_0 podem estar nas distintas partes do contorno [67]

$$\theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) := \begin{cases} \theta(x_0 - y_0) & x_0, y_0 \in \mathcal{C}_+, \\ \theta(y_0 - x_0) & x_0, y_0 \in \mathcal{C}_-, \\ 0 & x_0 \in \mathcal{C}_+, y_0 \in \mathcal{C}_-, \\ 1 & x_0 \in \mathcal{C}_-, y_0 \in \mathcal{C}_+. \end{cases} \quad (2.16)$$

Devemos notar que a definição da função de Heaviside implica na existência de quatro tipos de funções de Green

$$\begin{aligned} \Delta^{++}(x, y) &:= \langle \mathcal{T} \phi(x) \phi(y) \rangle && \text{para } x_0, y_0 \in \mathcal{C}_+, \\ \Delta^{+-}(x, y) &:= \Delta^<(x, y) && \text{para } x_0 \in \mathcal{C}_+, y_0 \in \mathcal{C}_-, \\ \Delta^{-+}(x, y) &:= \Delta^>(x, y) && \text{para } x_0 \in \mathcal{C}_-, y_0 \in \mathcal{C}_+, \\ \Delta^{--}(x, y) &:= \langle \tilde{\mathcal{T}} \phi(x) \phi(y) \rangle && \text{para } x_0, y_0 \in \mathcal{C}_-, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $\tilde{\mathcal{T}}$ é o ordenamento antitemporal, ou ordenamento de Dyson, definido por

$$\tilde{\mathcal{T}} \psi(x) \psi^\dagger(y) := \theta(y_0 - x_0) \psi(x) \psi^\dagger(y) \pm \theta(x_0 - y_0) \psi^\dagger(y) \psi(x). \quad (2.18)$$

Porém, as funções de correlação $\Delta^{\pm\pm}(x, y)$ não são totalmente independentes [54, 47]: é possível definir duas novas funções $\Delta^\pm(x, y)$, denominadas, respectivamente, funções estatística e espectral, mediante [54, 47]

$$\Delta^+(x, y) := \frac{1}{2} \{ \Delta^{-+}(x, y) + \Delta^{+-}(x, y) \} = \frac{1}{2} \langle \{ \phi(x), \phi(y) \} \rangle, \quad (2.19a)$$

$$\Delta^-(x, y) := i \{ \Delta^{-+}(x, y) - \Delta^{+-}(x, y) \} = i \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle, \quad (2.19b)$$

sendo $[,]$ $\{ , \}$ o comutador e o anticomutador dos campos, respectivamente. Em consequência, vemos que estas funções são números- c que contêm as informações estatísticas do sistema. É possível escrever que

$$\Delta_{\mathcal{C}}(x, y) = \Delta^+(x, y) - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \Delta^-(x, y), \quad (2.20)$$

com $\text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0)$ é a função sinal no contorno,

$$\begin{aligned} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) &:= \theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) - \theta_{\mathcal{C}}(y_0 - x_0) \\ &= \begin{cases} \text{sgn}(x_0 - y_0) & x_0, y_0 \in \mathcal{C}_+, \\ -\text{sgn}(x_0 - y_0) & x_0, y_0 \in \mathcal{C}_-, \\ -1 & x_0 \in \mathcal{C}_+, y_0 \in \mathcal{C}_-, \\ 1 & x_0 \in \mathcal{C}_-, y_0 \in \mathcal{C}_+. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Daqui é evidente que só as funções $\Delta^\pm(x, y)$ são independentes, já que a partir delas é possível obter qualquer uma das funções dadas nas eqs. (2.17).

A extensão para campos fermiônicos e vetoriais pode ser feita de modo simples. Para campos fermiônicos temos que as funções de Wightman são definidas mediante

$$\mathcal{S}^>(x, y) := \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle, \quad (2.22a)$$

$$\mathcal{S}^<(x, y) := -\langle \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle, \quad (2.22b)$$

onde o sinal negativo vem da anticomutação dos campos. Assim, temos que a função de dois pontos no contorno é definida segundo,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\mathcal{C}(x, y) &:= \langle \mathcal{T}_\mathcal{C} \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \\ &= \mathcal{S}^+(x, y) - \frac{i}{2} \text{sgn}_\mathcal{C}(x_0 - y_0) \mathcal{S}^-(x, y), \end{aligned} \quad (2.23)$$

com as funções estatística e espectral definidas segundo

$$\mathcal{S}^+(x, y) := \frac{1}{2} \{ \mathcal{S}^>(x, y) + \mathcal{S}^<(x, y) \} = \frac{1}{2} \langle [\psi(x), \bar{\psi}(y)] \rangle, \quad (2.24a)$$

$$\mathcal{S}^-(x, y) := i \{ \mathcal{S}^>(x, y) - \mathcal{S}^<(x, y) \} = i \langle \{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \} \rangle. \quad (2.24b)$$

No caso de campos vetoriais $A^\mu(x)$ (omitindo os possíveis índices de gauge) temos que as funções de Wightmann são definidas por

$$D^>(x, y)^{\mu\nu} := \langle A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle, \quad (2.25a)$$

$$D^<(x, y)^{\mu\nu} := \langle A^\nu(y) A^\mu(x) \rangle, \quad (2.25b)$$

de forma que a função de dois pontos no contorno é

$$\begin{aligned} D_\mathcal{C}(x, y)^{\mu\nu} &:= \langle \mathcal{T}_\mathcal{C} A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle \\ &= D^+(x, y)^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \text{sgn}_\mathcal{C}(x_0 - y_0) D^-(x, y)^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

sendo

$$D^+(x, y)^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \{ D^>(x, y)^{\mu\nu} + D^<(x, y)^{\mu\nu} \} = \frac{1}{2} \langle \{ A^\mu(x), A^\nu(y) \} \rangle, \quad (2.27a)$$

$$D^-(x, y)^{\mu\nu} := i \{ D^>(x, y)^{\mu\nu} - D^<(x, y)^{\mu\nu} \} = i \langle [A^\mu(x), A^\nu(y)] \rangle. \quad (2.27b)$$

2.3 Ação Efetiva *Two-Particle-Irreducible* (2PI)

Armados com o formalismo de Schwinger-Keldysh, devemos determinar as equações de movimento das diferentes funções de Green fora do equilíbrio, considerando as possíveis interações presentes no sistema. Em geral, deveríamos estudar o funcional gerador no contorno de Kadanoff-Baym e a partir dele ou da ação efetiva obtermos as equações de Schwinger-Dyson. Porém, existe uma complicação adicional devido a fato que o sistema se encontra fora do equilíbrio [48]: a evolução sofre de termos, denominados termos *seculares*, que “crescem” sem controle no tempo e quebram a validade teoria de perturbações. Por outro lado, uma das características que deve possuir a expansão é a denominada

Universalidade: no futuro distante, o sistema deve ser independente das condições iniciais, ou seja, o sistema precisa alcançar o equilíbrio, determinado por características do sistema, independente das condições iniciais. Existe uma técnica que permite curar o problema da secularidade e possui um comportamento *universal*, a denominada **ação efetiva *N*-Particle-Irreducible**. Antes de descrevermos tal técnica, vamos estudar um exemplo que ilustra a aparição dos termos seculares.

2.3.1 Necessidade da descrição

Seguindo a discussão de J. Berges [48], vamos considerar a evolução temporal de um oscilador amortecido clássico na presença de termos anarmônicos³

$$\ddot{y} + \epsilon \dot{y} + y = -(\epsilon y)^3 - (\epsilon y)^5 - (\epsilon y)^7 - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} (\epsilon y)^{2n+1}, \quad \epsilon \ll 1 \quad (2.28)$$

onde os termos de ordem superior são análogos às autointerações na TQC em altas potências dos campos. Para determinar a evolução temporal deste sistema, é necessário encontrar uma aproximação da solução completa $y(t)$ a uma ordem de ϵ determinada. Usualmente, escolhe-se a expansão perturbativa como [48]

$$y_p(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \frac{\epsilon^2}{2} y_2(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (2.29)$$

substituindo na equação de movimento, teremos a hierarquia de equações até ordem $\mathcal{O}(\epsilon^3)$

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \quad \ddot{y}_1 + y_1 = -\dot{y}_0, \quad \ddot{y}_2 + y_2 = -2\dot{y}_1. \quad (2.30)$$

Escolhendo como condições iniciais $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -\frac{\epsilon}{2}$, encontramos as seguintes soluções

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \cos(t) - \frac{\epsilon}{2} t \cos(t) + \frac{\epsilon^2}{8} \{t^2 \cos(t) + t \sin(t)\} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ &= \frac{e^{it}}{2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} t + \frac{\epsilon^2}{8} \{t^2 - it\} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^3) + h.c. \end{aligned} \quad (2.31)$$

como vemos, devido aos termos proporcionais a ϵt , $(\epsilon t)^2$, a expansão perturbativa só pode ser válida no caso em que $\epsilon t \ll 1$, condição que não é satisfeita em geral. Tais termos são os termos *seculares*.

Deste modo devemos considerar outro tipo de aproximação para tentarmos resolver a equação (2.28). Para isto, vamos considerar uma expansão de tipo *n*-Particle-Irreducible: classificamos os termos da equação (2.28) de acordo com as potências do parâmetro ϵ . À ordem mais baixa, $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, temos a equação

$$\ddot{y}_{nPI}^{(0)} + y_{nPI}^{(0)} = 0, \quad \rightarrow \quad y_{nPI}^{(0)}(t) = \cos(t), \quad (2.32)$$

à ordem seguinte, $\mathcal{O}(\epsilon^1)$, temos

$$\ddot{y}_{nPI}^{(2)} + y_{nPI}^{(2)} = -\epsilon \dot{y}_{nPI}^{(1)}, \quad \rightarrow \quad y_{nPI}^{(2)}(t) = e^{-\frac{\epsilon}{2}t} \cos \left\{ \sqrt{1 - \epsilon^2/4} t \right\}. \quad (2.33)$$

³O ponto indica a derivação com respeito ao t

Figura 2.2: Soluções da equação diferencial (2.28) por métodos numérico, perturbativo, nPI , para $\epsilon = 0.05$

A próxima ordem leva em conta termos do tipo $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ e assim por diante. Notemos que o resultado para o $y_{nPI}^{(2)}(t)$ não possui termos singulares, já que este resultado não excede em tempo nenhum $\mathcal{O}(\epsilon^3)$. Assim, o $y_{nPI}^{(2)}(t)$ é uma boa aproximação à solução da equação (2.28). Na figura (2.2) podemos confirmar a essa afirmação comparando o resultado numérico com os resultados *perturbativo* (2.31) e usando a solução nPI (2.33). Vemos como a solução (2.33) concorda bastante bem com a solução numérica, enquanto que a solução (2.31) a partir de $t \sim 20$ começa a desviar-se da solução exata.

Mas, isto indica que a solução *perturbativa* é incorreta? Não necessariamente, já que se expandirmos a solução nPI em potências de ϵ , teremos que

$$\begin{aligned}
 y_{nPI}^{(2)}(t) &= e^{-\frac{\epsilon}{2}t} \cos \left\{ \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} t \right\} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\epsilon}{2}t + it\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}} + h.c. \\
 &= \frac{e^{it}}{2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2}t + \frac{\epsilon^2}{8} \{t^2 - it\} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^3) + h.c. \\
 &= y_p(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3),
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

permitindo observar que o resultado nPI “resoma” todos os termos seculares à ordem infinita perturbativa em ϵ , ou seja, a soma infinita das ordens perturbativas é necessária para obter uma *aproximação uniforme à solução exata* [48]. Deste exemplo obtemos o procedimento nPI para não ter termos seculares na expansão perturbativa: devemos resolver as equações de movimento para cada ordem no parâmetro perturbativo sem considerar nenhuma aproximação nos graus de liberdade. Em geral, como é mencionado por [48], o preço que temos que pagar é que vamos ter de resolver equações não-lineares, porém, como é mostrado na mesma referência, esta não-linearidade é requerida para gerar a *universalidade* que precisa o formalismo.

2.3.2 Construção da Ação Efetiva 2PI

Em geral, é possível construir a ação efetiva nPI na TQC tomando uma aproximação análoga à estudada na seção anterior para a ação que depende das funções de n -pontos, que serão os “graus de liberdade” da teoria. Porém, a aproximação a 2PI, ou seja, considerando como graus de liberdade as funções de 1- e 2-pontos, dá uma descrição autoconsistente a uma ordem viável computacionalmente, como vimos no exemplo do oscilador. Assim, em primeiro lugar, vamos discutir a construção da ação efetiva 2PI na TQC a $T = 0$, para logo, na próxima seção, aplicarmos o aprendido à TQC fora do Equilíbrio Térmico. Por simplicidade, vamos separar a construção para escalares e para férmions.

Escalares

Vamos estudar o caso de um campo escalar real autointeragente com ação clássica $S[\phi]$ dada por

$$S[\phi] = \int_x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right\}, \quad (2.35)$$

onde introduzimos a notação $\int_x = \int_{\mathcal{C}} dx^0 \int d^3x$, sendo $\mathcal{C}$ um contorno no tempo que pode ser o contorno de Kadanoff-Baym ou simplesmente $\mathcal{C}_{T=0} = (-\infty, \infty)$.

O funcional gerador das funções de Green conexas $W[J, R]$ em presença de *duas* fontes $J(x)$, $R(x, y)$ é [48, 54, 55, 47, 69]

$$\begin{aligned} Z[J, R] &= \exp(i W[J, R]) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left(S[\phi] + \int_x J(x) \phi(x) + \frac{1}{2} \int_{xy} R(x, y) \phi(x) \phi(y) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A introdução das duas fontes deve-se a que queremos limitar os desvios do campo ϕ conhecendo tanto o valor esperado do campos quanto as suas flutuações (ou seja, seu propagador). Para isso, introduzimos dois multiplicadores de Lagrange associados às fontes [47], que serão os dois graus de liberdade, o campo *macroscópico*, correspondente ao valor esperado do campo, e a função de dois-pontos *conexa* [69],

$$\varphi(x) := \langle \phi(x) \rangle = \frac{\delta W[J, R]}{\delta J(x)}, \quad (2.37a)$$

$$\Delta(x, y) := \langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{\delta W[J, R]}{\delta R(x, y)} - \frac{1}{2} \varphi(x) \varphi(y). \quad (2.37b)$$

Agora, de modo padrão, fazemos uma dupla transformação de Legendre de $W[J, R]$ com respeito às duas fontes,

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi, \Delta] &= W[J, R] - \int_x \frac{\delta W[J, R]}{\delta J(x)} J(x) - \int_{xy} \frac{\delta W[J, R]}{\delta R(x, y)} R(x, y) \\ &= W[J, R] - \int_x \varphi(x) J(x) - \frac{1}{2} \int_{xy} R(x, y) \varphi(x) \varphi(y) - \frac{1}{2} \text{tr } R \Delta, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde definimos o traço dos funcionais através de

$$\text{tr } AB := \int_{xyz\dots} \sum_{ijk\dots} A_{\dots kji}(\dots, z, y, x) B_{ijk\dots}(x, y, z, \dots), \quad (2.39)$$

sendo a integral feita sob todas as variáveis das quais dependem A e B e a soma feita sobre todos os índices que A e B possuem. A partir da ação efetiva, obtemos as condições estacionárias

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi, \Delta]}{\delta\varphi(x)} = -J(x) - \int_y R(x, y)\varphi(y), \quad (2.40a)$$

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi, \Delta]}{\delta\Delta(y, x)} = -\frac{1}{2}R(x, y), \quad (2.40b)$$

que fornecem as equações de movimento para o campo macroscópico e a função de correlação na ausência de fontes [69].

Para aplicarmos a aproximação $2PI$ à ação efetiva, devemos usar o seguinte esquema, tomado do exemplo do oscilador[48]:

- Classificar as contribuições à $\Gamma[\varphi, \Delta]$ de acordo com as potências do parâmetro perturbativo.
- Determinar as equações de movimento para φ, Δ a partir da ação efetiva segundo (2.40) sem qualquer suposição adicional.

Este programa vai gerar equações integro-diferenciais não-lineares que, em geral, serão difíceis de resolver. Porém, como já foi mencionado, a não-linearidade é um ingrediente fundamental para a universalidade. Por outro lado, devemos mencionar que este procedimento é muito satisfatório pois torna possível determinar a dinâmica de um sistema longe do equilíbrio, assim como a sua evolução ao equilíbrio térmico, em uma Teoria Quântica de Campos desde primeiros princípios.

A ação efetiva $2PI$ pode ser calculada tomando a seguinte expansão⁴ [48, 47, 69],

$$\Gamma[\varphi, \Delta] = S[\varphi] + \frac{i}{2} \text{tr} \ln \Delta^{-1} + \frac{i}{2} \text{tr} \Delta_0^{-1}(\varphi)\Delta + \Gamma_2[\varphi, \Delta] + \text{const}, \quad (2.41)$$

onde $\Delta_0^{-1}(\varphi)$ é o propagador inverso da teoria livre. Por outro lado, o funcional $i\Gamma_2[\varphi, \Delta]$ é igual à soma de todos os diagramas *two-Particle-Irreducible*⁵ sem linhas externas. Porém, devemos levar em conta que as linhas internas correspondem aos propagadores completos, ou seja, aos propagadores sem nenhum tipo de aproximação. Isto é análogo ao feito no exemplo do oscilador: em vez de considerarmos os propagadores como uma expansão nas constantes de acoplamento, devemos tomar o propagador completo e tentar resolver a equação de movimento sem nenhum tipo de suposição. Para a ação que estamos analisando, temos a seguinte expansão para o $i\Gamma_2[\varphi, \Delta]$,

$$i\Gamma_2[\varphi, \Delta] = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \dots,$$

⁴Por simplicidade na presente discussão, e para não sairmos muito do tópico da dissertação, não vamos derivar a expansão $2PI$, ver [48, 47, 69]

⁵Define-se um diagrama two-Particle-Irreducible àquele diagrama que não fica desconexo após “abrir” duas linhas

à ordem de dois *loop* há duas contribuições,

$$i\Gamma_2^{2\text{-loop}}[\varphi, \Delta] = -\frac{3i\lambda}{4!} \int_x \Delta^2(x, x) - 3 \int_{xy} \frac{(-i\lambda)}{6} \varphi(x) \Delta^3(x, y) \frac{(-i\lambda)}{6} \varphi(y), \quad (2.42)$$

para uma fase simétrica ($\varphi(x) = 0$), só a primeira integral contribui à ação.

Para o caso no qual as fontes são nulas, vemos que a segunda equação 2.40b dá a equação de movimento para o propagador $\Delta(x, y)$

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi, \Delta]}{\delta\Delta(y, x)} = \frac{\delta}{\delta\Delta(y, x)} \left\{ S[\varphi] + \frac{i}{2} \text{tr} \ln \Delta^{-1} + \frac{i}{2} \text{tr} \Delta_0^{-1}(\varphi) \Delta + \Gamma_2[\varphi, \Delta] \right\} = 0,$$

temos que⁶

$$i\Delta^{-1}(x, y) = i\Delta_0^{-1}(x, y) + 2 \frac{\delta\Gamma_2[\varphi, \Delta]}{\delta\Delta(y, x)}. \quad (2.43)$$

Definindo a *autoenergia* dos escalares como

$$-i\Pi(x, y; \varphi, \Delta) := 2 \frac{\delta\Gamma_2[\varphi, \Delta]}{\delta\Delta(y, x)}, \quad (2.44)$$

obtemos a equação de **Schwinger-Dyson** para os campos escalares,

$$\Delta^{-1}(x, y) = \Delta_0^{-1}(x, y) - \Pi(x, y; \varphi, \Delta). \quad (2.45)$$

Reescrevemos de modo mais útil a equação anterior para a discussão na próxima seção, para isso, definimos o produto de dois funcionais segundo,

$$(A \odot B)(x, y)_{ij} := \int_z \sum_k A(x, z)_{ik} B(z, y)_{kj}, \quad (2.46)$$

onde a soma é feita sobre todos os índices que os funcionais possuem. Deste modo, o propagador e seu inverso cumprem a relação

$$(\Delta^{-1} \odot \Delta)(x, y) = \int_z \Delta^{-1}(x, z) \Delta(z, y) = \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y), \quad (2.47)$$

sendo a delta de Dirac $\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y)$ definida no contorno, que será definida posteriormente. Assim, multiplicando à direita por $\Delta(y, z)$ e integrando em y a equação (2.45) fica

$$(\partial_x^2 + m^2)\Delta(x, z) + i(\Pi \odot \Delta)(x, z) = -i\delta_{\mathcal{C}}^4(x - z), \quad (2.48)$$

onde utilizamos que $i\Delta_0^{-1}(x, z) = -(\partial_x^2 + m^2)\delta_{\mathcal{C}}^4(x - z)$ (ver apêndice D). Assim, a partir da equação de Schwinger-Dyson vamos obter equações que descreverão a dinâmica do sistema fora do equilíbrio.

⁶As derivações são feitas no apêndice D

Férmions

Para o caso dos férmions, a derivação da ação efetiva segue do mesmo modo que para bósons, levando em conta que os férmions seguem uma estatística diferente [48]. Para campos fermiônicos que não sejam de Majorana, o inverso do propagador livre é dado por (ver apêndice D)

$$iS_0^{-1}(x, y) = (i\cancel{\partial}_x - m_f)\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y), \quad (2.49)$$

assim, para o caso em que os valores esperados dos campos dos férmions serem nulos $\langle \psi \rangle = \langle \bar{\psi} \rangle = 0$, a expansão $2PI$ da ação efetiva é dada por [48, 47, 69],

$$\Gamma[S] = -i \text{tr} \ln S^{-1} - i \text{tr} S_0^{-1} S + \Gamma_2[S], \quad (2.50)$$

onde $\Gamma_2[S]$ contém os diagramas $2PI$ com linhas internas associadas ao propagador completo $S(x, y)$. A equação de movimento para o propagador é obtida, na ausência de fontes, a partir de

$$\frac{\delta \Gamma[S]}{\delta S(y, x)} = 0. \quad (2.51)$$

Definindo a *autoenergia* para o caso de férmions,

$$i\Sigma(x, y; S) := \frac{\delta \Gamma_2[S]}{\delta S(y, x)}, \quad (2.52)$$

encontramos a equação de Schwinger-Dyson,

$$S^{-1}(x, y) = S_0^{-1}(x, y) - \Sigma(x, y; S). \quad (2.53)$$

Do mesmo modo ao feito no caso de bósons, reescrevemos a equação de Schwinger-Dyson na forma integro-diferencial,

$$(i\cancel{\partial}_x - m_f)S(x, y) - i(\Sigma \odot S)(x, y) = i\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y). \quad (2.54)$$

2.4 Ação Efetiva $2PI$ na TQCfE

Para aplicarmos os resultados da seção anterior à TQCfE devemos entender primeiro como introduzir as condições iniciais, dadas por $\rho_i(t_0)$, ao formalismo. Para isso, definiremos o *funcional gerador fora-do-equilíbrio* [47]

$$\begin{aligned} Z[J, R; \rho_i] &= \text{tr} \left\{ \rho_i(t_0) \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \exp \left\{ i \left(S[\phi] + \int_x J(x) \phi(x) + \frac{1}{2} \int_{xy} R(x, y) \phi(x) \phi(y) \right) \right\} \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi_+ \int \mathcal{D}\varphi_- \langle \varphi_+, t_0 | \rho_i(t_0) | \varphi_-, t_0 \rangle \times \\ &\quad \langle \varphi_-, t_0 | \exp \left\{ iS[\phi] + i \int_x J(x) \phi(x) + \frac{i}{2} \int_{xy} R(x, y) \phi(x) \phi(y) \right\} | \varphi_+, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde a integral é definida no contorno de Kadanoff-Baym (2.1) e supomos que existe uma base completa de autoestados do operador de campo $\phi(t_0, \vec{x})$ em t_0 ,

$$\phi(t_0, \vec{x}) | \varphi, t_0 \rangle = \varphi(\vec{x}) | \varphi, t_0 \rangle. \quad (2.56)$$

O segundo elemento matricial pode se escrever como uma integral de trajetória no contorno de Kadanoff-Baym cumprindo as condições de contorno $\varphi(t_{\pm}, \vec{x}) = \varphi_{\pm}(\vec{x})$ [47], para obter

$$Z[J, R; \rho_i] = \int \mathcal{D}\varphi_+ \int \mathcal{D}\varphi_- \langle \varphi_+ | \rho_i(t_0) | \varphi_- \rangle \times \int_{\varphi_+}^{\varphi_-} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ iS[\varphi] + i \int_x J(x) \varphi(x) + \frac{i}{2} \int_{xy} R(x, y) \varphi(x) \varphi(y) \right\}. \quad (2.57)$$

Esse funcional gerador carrega toda a informação que precisa a TQCfE, as condições iniciais codificadas na média da matriz densidade inicial e as flutuações quânticas descritas pela integral de trajetória com ação $S[\varphi]$. É importante notar que o funcional pode ser aplicado ao caso de um estado inicial térmico, assim, podemos dizer que este formalismo inclui o caso de equilíbrio térmico.

Para simplificarmos o funcional gerador, vamos parametrizar a matriz densidade mais geral como [48]

$$\langle \varphi_+ | \rho_i(t_0) | \varphi_- \rangle = \mathcal{N} e^{i\mathfrak{f}[\varphi]}, \quad (2.58)$$

sendo $\mathcal{N}$ um fator de normalização, e $\mathfrak{f}[\varphi]$ é uma serie de potências dos campos

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}[\varphi] = & \alpha_0 + \int_x \alpha_1(x) \varphi(x) + \frac{1}{2!} \int_{xy} \alpha_2(x, y) \varphi(x) \varphi(y) \\ & + \frac{1}{3!} \int_{xyz} \alpha_3(x, y, z) \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) + \dots, \end{aligned} \quad (2.59)$$

devemos mencionar que essa parametrização leva em conta que $\rho_i(t_0)$ só é especificado no tempo inicial t_0 , de forma que os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, se anulam identicamente para tempos diferentes ao t_0 , enquanto que α_0 é uma constante de normalização irrelevante. Assim, temos que o funcional (2.57) fica

$$Z[J, R; \rho_i] = \int \mathcal{D}\varphi e^{\left\{ iS[\varphi] + i \int_x J(x) \varphi(x) + \frac{i}{2} \int_{xy} R(x, y) \varphi(x) \varphi(y) + \frac{i}{3!} \int_{xyz} \alpha_3(x, y, z) \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) + \dots \right\}}, \quad (2.60)$$

onde fizemos as transformações $J \rightarrow J - \alpha_1$, $R \rightarrow R - \alpha_2$, ou seja, as fontes absorveram as contribuições lineares e quadráticas que vieram da matriz densidade associada ao estado inicial. Esse funcional gerador é útil para qualquer estado inicial, porém, para muitos propósitos práticos, a matriz densidade inicial pode ser descrita por uma matriz densidade Gaussiana, para a qual temos que $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 0$ [48], assim, temos que

$$Z[J, R; \rho_i] = Z[J, R]. \quad (2.61)$$

Em consequência, o funcional gerador fora-do-equilíbrio é idêntico ao funcional gerador (2.36) avaliado no contorno de Kadanoff-Baym. Deste modo, a construção da ação efetiva 2PI feita anteriormente pode se aplicar diretamente ao caso fora do equilíbrio. A extensão para matrizes densidade iniciais que não são Gaussianas foi feita por M. Garny e M. M. Müller [70].

2.4.1 Equações de Kadanoff-Baym (EKB)

Assim, a partir dos resultados anteriores, podemos escrever diretamente a equação de Schwinger-Dyson (2.45) para o propagador dos escalares no contorno (2.14) como [48, 54, 55, 47]

$$(\partial_x^2 + m^2)\Delta_{\mathcal{C}}(x, y) + i(\Pi_{\mathcal{C}} \odot \Delta_{\mathcal{C}})(x, y; \Delta) = -i\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y), \quad (2.62)$$

sendo a função delta de Dirac $\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0)$, com a parte temporal definida no contorno mediante [67]

$$\delta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) = \frac{d}{dx_0}\theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) = \begin{cases} \delta(x_0 - y_0) & x_0, y_0 \in \mathcal{C}_+, \\ -\delta(x_0 - y_0) & x_0, y_0 \in \mathcal{C}_-, \\ 0 & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Agora bem, devemos achar equações de movimento para as funções espectral e estatística $\Delta^{\pm}(x, y)$, para obtermos as equações que serão úteis na hora de estudar a dinâmica de um sistema fora do equilíbrio. É claro que estas equações serão totalmente equivalentes à equação de Schwinger-Dyson, mas elas terão uma interpretação física muito mais simples. Para este propósito, vamos decompor a autoenergia em suas componentes espectral e estatística mais uma componente local,

$$\Pi_{\mathcal{C}}(x, y; \Delta) = -i\Pi^{(0)}(x; \Delta)\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) + \bar{\Pi}_{\mathcal{C}}(x, y; \Delta), \quad (2.63)$$

com

$$\bar{\Pi}_{\mathcal{C}}(x, y; \Delta) = \Pi^+(x, y) - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0)\Pi^-(x, y). \quad (2.64)$$

A parte local pode ser vista como um *running* espaço-temporal da massa do escalar [48], pelo qual podemos definir

$$M_x^2 = M^2(x, \Delta) := m^2 + \Pi^{(0)}(x; \Delta). \quad (2.65)$$

Introduzindo as decomposições do propagador e a autoenergia (2.20), (2.64) na equação de Schwinger-Dyson, vamos determinar as equações para as componentes espectral e estatística. Já que tal derivação é importante, vamos fazê-la em detalhe a seguir.

Em primeiro lugar, calculamos o produto funcional da autoenergia e do propagador

$$\begin{aligned} i(\bar{\Pi}_{\mathcal{C}} \odot \Delta_{\mathcal{C}})(x, y; \Delta) &= i \int_z \bar{\Pi}_{\mathcal{C}}(x, z; \Delta) \Delta_{\mathcal{C}}(z, y) \\ &= i \int_z \left\{ \Pi^+(x, z) - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - z_0) \Pi^-(x, z) \right\} \times \\ &\quad \left\{ \Delta^+(z, y) - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) \Delta^-(z, y) \right\}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde omitimos a dependência da autoenergia em $\Delta(x, y)$. Multiplicando, temos que

$$\begin{aligned} i(\bar{\Pi}_{\mathcal{C}} \odot \Delta_{\mathcal{C}})(x, y; \Delta) &= i \int_z \left\{ \Pi^+(x, z) \Delta^+(z, y) \right. \\ &\quad - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) \Pi^+(x, z) \Delta^-(z, y) - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - z_0) \Pi^-(x, z) \Delta^+(z, y) \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - z_0) \text{sgn}_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) \Pi^-(x, z) \Delta^-(z, y) \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

O primeiro termo é nulo já que

$$\begin{aligned}
 i \int_z \Pi^+(x, z) \Delta^+(z, y) &= i \int_{\mathcal{C}} dz_0 \int d^3 z \Pi^+(x, z) \Delta^+(z, y) \\
 &= i \int d^3 z \left\{ \int_{t_0}^{\infty} dz_0 \Pi^+(x, z) \Delta^+(z, y) + \int_{\infty}^{t_0} dz_0 \Pi^+(x, z) \Delta^+(z, y) \right\} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

onde escolhemos $\Im \rightarrow \infty$. Para simplificarmos o segundo e terceiro termos, devemos dividir o contorno de modo tal que as funções sinal tenham valor definido no mesmo. Lembrando que todas as operações estão definidas no contorno, vemos que, para o segundo termo, no caso em que $\theta_{\mathcal{C}}(y_0 - z_0) = 1$ ⁷ a integração possui um sinal negativo no intervalo $[t_0, y_0]$; enquanto que para o caso $\theta_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) = 1$, válido no intervalo $[y_0, t_0]$, a integral vai ser positiva,

$$\int_{\mathcal{C}} dz_0 \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) = \int_{t_0}^{y_0} dz_0 (-1) + \int_{y_0}^{t_0} dz_0 = -2 \int_{t_0}^{y_0} dz_0,$$

na figura 2.3 vemos isto no contorno de Kadanoff-Baym. Para o quarto termo, devemos

Figura 2.3: Separação da integração no contorno segundo o valor de $\theta_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0)$.

separar dois casos possíveis segundo o sinal de $x_0 - y_0$ no contorno (ver figura (2.4))

$$* \theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) = 1$$

$$\int_{\mathcal{C}} dz_0 \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - z_0) \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) = \int_{t_0}^{y_0} dz_0 (-1) + \int_{y_0}^{x_0} dz_0 + \int_{x_0}^{t_0} dz_0 (-1), \quad (2.68)$$

$$* \theta_{\mathcal{C}}(y_0 - x_0) = 1$$

$$\int_{\mathcal{C}} dz_0 \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - z_0) \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) = \int_{t_0}^{x_0} dz_0 (-1) + \int_{x_0}^{y_0} dz_0 + \int_{y_0}^{t_0} dz_0 (-1), \quad (2.69)$$

⁷ $\theta_{\mathcal{C}}(y_0 - z_0) = 1$ quer dizer que y_0 encontra-se *depois* de z_0 no contorno $\mathcal{C}$ ver figura 2.3

portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} dz_0 \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - z_0) \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(z_0 - y_0) &= \theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \left\{ - \int_{t_0}^{y_0} dz_0 + \int_{y_0}^{x_0} dz_0 - \int_{x_0}^{t_0} dz_0 \right\} \\ &\quad + \theta_{\mathcal{C}}(y_0 - x_0) \left\{ - \int_{t_0}^{x_0} dz_0 + \int_{x_0}^{y_0} dz_0 - \int_{y_0}^{t_0} dz_0 \right\} \\ &= 2 \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - z_0) \int_{y_0}^{x_0} dz_0, \end{aligned}$$

Assim, temos que o produto da autoenergia e do propagador vai ser

$$\begin{aligned} i(\bar{\Pi}_{\mathcal{C}} \odot \Delta_{\mathcal{C}})(x, y; \Delta) &= \int d^3 z \left\{ \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \Pi^-(x, z) \Delta^+(z, y) - \int_{t_0}^{y_0} dz_0 \Pi^+(x, z) \Delta^-(z, y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \int_{y_0}^{x_0} dz_0 \Pi^-(x, z) \Delta^-(z, y) \right\} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Agora, para expandirmos nas componentes o termo

$$(\partial_x^2 + M_x^2) \Delta_{\mathcal{C}}(x, y),$$

devemos levar em conta que a função espectral e sua derivada cumprem as seguintes propriedades para tempos iguais, isto é,

$$\Delta^-(x, y)|_{x_0=y_0} = i \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle|_{x_0=y_0} = 0, \quad (2.71)$$

$$\partial_{x_0} \Delta^-(x, y)|_{x_0=y_0} = i \langle [\partial_{x_0} \phi(x), \phi(y)] \rangle|_{x_0=y_0} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.72)$$

onde utilizamos as relações de quantização canônicas impostas na teoria. Notemos que isto mostra a importância da função espectral. Ao derivarmos

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \partial_{x_0}^2 \{ \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \Delta^-(x, y) \} &= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \partial_{x_0}^2 \Delta^-(x, y) - i \delta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \partial_{x_0} \Delta^-(x, y), \\ &= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \partial_{x_0}^2 \Delta^-(x, y) - i \delta_{\mathcal{C}}^4(x_0 - y_0), \end{aligned}$$

assim, tomando a derivada do propagador, obtemos

$$\partial_x^2 \Delta_{\mathcal{C}}(x, y) = \partial_x^2 \Delta^+(x, y) - \frac{i}{2} \operatorname{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) \partial_x^2 \Delta^-(x, y) - i \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y). \quad (2.73)$$

Figura 2.4: Separação da integração no contorno segundo os sinais de $z_0 - y_0, y_0 - z_0$ para o caso em que $\theta_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0) = 1$.

Deste modo, separando as partes imaginárias e reais da equação (2.62) a partir dos resultados anteriores, obtemos as denominadas **Equações de Kadanoff-Baym** [54, 55],

$$(\partial_x^2 + M_x^2)\Delta^-(x, y) = - \int_{y_0}^{x_0} d^4z \Pi^-(x, z)\Delta^-(z, y). \quad (2.74a)$$

$$(\partial_x^2 + M_x^2)\Delta^+(x, y) = \int_{t_0}^{y_0} d^4z \Pi^+(x, z)\Delta^-(z, y) - \int_{t_0}^{x_0} d^4z \Pi^-(x, z)\Delta^+(z, y), \quad (2.74b)$$

sendo $\int_{x_0}^{y_0} d^4z := \int_{x_0}^{y_0} dz_0 \int d^3z$. Essas equações são as equações de governam a evolução temporal das funções espectral e estatística ou seja, a evolução temporal do sistema fora do equilíbrio nesta teoria [47, 48], portanto, são equivalentes às equações de Boltzmann. Estas equações são *causais* e possuem efeitos de *memória*, de forma que, este formalismo é *não-markoviano*, já que nelas se efetua integrações no tempo. Contudo, estes efeitos de memória não quebram nenhuma simetria, em especial, não quebram a simetria de inversão temporal.

A extensão para férmions e bósons vetoriais não possui nenhum problema. Para o caso de campos fermiônicos, devemos levar em conta que a autoenergia não vai possuir termos de tipo local, já que as interações que gerariam esses termos são não-renormalizáveis. Em consequência, teremos as **equações de Kadanoff-Baym** para férmions⁸

$$(i\partial_x - m_f)\mathcal{S}^-(x, y) = \int_{y_0}^{x_0} d^4z \Sigma^-(x, z)\mathcal{S}^-(z, y). \quad (2.75a)$$

$$(i\partial_x - m_f)\mathcal{S}^+(x, y) = - \int_{t_0}^{y_0} d^4z \Sigma^+(x, z)\mathcal{S}^-(z, y) + \int_{t_0}^{x_0} d^4z \Sigma^-(x, z)\mathcal{S}^+(z, y), \quad (2.75b)$$

Por conseguinte, para obter uma descrição completa da leptogênese será necessário resolver equações de Kadanoff-Baym análogas às anteriores. Notemos também que as soluções dessas equações podem apresentar novos efeitos não considerados no caso padrão. Porém, antes de tentar resolver tais equações vamos estudar um caso muito especial no presente formalismo: o equilíbrio térmico.

2.5 Equilíbrio térmico

Devido à hipótese ergódica, um sistema fechado, fora do equilíbrio, vai se aproximar assintoticamente de um estado de equilíbrio térmico em escalas de tempo grandes, portanto, devemos entender primeiro como o equilíbrio térmico pode se descrever no presente formalismo. Em primeiro lugar, um sistema no equilíbrio possui a característica de que é invariante sob translações espaciais e temporais, de forma que as funções de correlação dependerão unicamente da diferença entre as coordenadas, [67, 54]

$$\Delta_{\mathcal{C}}(x, y) = \Delta_{\mathcal{C}}(x - y). \quad (2.76)$$

Assim, para descrevermos um sistema no equilíbrio, vamos supor que a matriz densidade inicial corresponde a uma matriz térmica,

$$\rho(t_0) = \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr} \{e^{-\beta H}\}}, \quad (2.77)$$

⁸Neste pontos estamos considerando férmions de Dirac. O caso de férmions de Majorana, que será relevante para nossos propósitos, se estudará no próximo capítulo

sendo H a hamiltoneana independente do tempo que descreve as interações presentes no sistema. Agora, a matriz densidade definida em (2.77) pode ser considerada formalmente como um operador de evolução temporal para tempos $t_0 \rightarrow t_0 - i\beta$, ou seja, [67]

$$\rho(t_0) = \frac{U(t_0 - i\beta, t_0)}{\text{tr } U(t_0 - i\beta, t_0)}. \quad (2.78)$$

Da definição do valor médio de um operador, eq (2.12), vamos ter que

$$\langle A \rangle(t) = \frac{\text{tr } U(t_0, t) A U(t, \mathfrak{T}) U(\mathfrak{T}, t_0) U(t_0 - i\beta, t_0)}{\text{tr } U(t_0 - i\beta, t_0)}, \quad (2.79)$$

ou seja, no caso de equilíbrio, é necessário modificar o contorno de Kadanoff- Baym introduzindo uma parte que “desce” paralela ao eixo imaginário até $-i\beta$. Assim, consideramos o contorno $\mathcal{C}'_{KB} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_3$, sendo $\mathcal{C}_3 = [t_0, t_0 - i\beta]$ (ver figura 2.5)

Figura 2.5: Contorno de Kadanoff-Baym $\mathcal{C}'_{KB}$ para o caso de equilíbrio térmico

Outra propriedade importante obtida ao considerar a matriz densidade como um operador de evolução temporal corresponde à denominada condição de Kubo-Martin-Schwinger (KMS), que para o caso de escalares é dada por [67, 54, 68]

$$\Delta^<(t + i\beta) = \Delta^>(t), \quad (2.80)$$

onde $t := x_0 - y_0$, o que mostra que o formalismo só possui um propagador independente; além disso, esta relação pode se interpretar como uma manifestação do balanço presente no equilíbrio. Agora, é possível fazer a transformada de Fourier do propagador no contorno,

$$\Delta_{\mathcal{C}'}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - y)} \Delta_{\mathcal{C}'}(k), \quad (2.81)$$

com $kx := k^\mu x_\mu$. Portanto, no espaço de momentos a condição KMS fica

$$\Delta^<(k) = e^{-\beta k_0} \Delta^>(k).$$

Dessa relação se tem que as funções espectral e estatística não são independentes,

$$\Delta^+(k) = -i \left\{ \frac{1}{2} + f_B(k_0) \right\} \Delta^-(k), \quad (2.82)$$

sendo $f_B(k_0)$ a função de distribuição de Bose-Einstein (k_0 não está on-shell),

$$f_B(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}. \quad (2.83)$$

Deve-se mencionar que essa função de distribuição aparece como consequência das condições de contorno expressas na condição de KMS. Assim, no equilíbrio, os propagadores $\Delta^\pm(k)$ estão relacionados pela relação KMS. Portanto, uma prova para determinarmos se um sistema fora do equilíbrio apresenta termalização no futuro assintótico é estabelecermos se as funções espectral e estatística obedecem as relações de KMS. Este será um teste de nossos resultados.

A partir da relação KMS, o propagador no contorno $\Delta_{\mathcal{C}}(x - y)$ pode se escrever como

$$\Delta_{\mathcal{C}'}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - y)} \{ \theta_{\mathcal{C}'}(x_0 - y_0) + f_B(k_0) \} (-i\Delta^-(k)). \quad (2.84)$$

Agora, o funcional gerador $Z_{\mathcal{C}'}[J, R]$ e a ação efetiva $\Gamma_{\mathcal{C}'}[\varphi, \Delta]$ só se verão modificados pela definição do contorno. Por outro lado, tomando o limite $t_0 \rightarrow -\infty$ e $\mathfrak{T} \rightarrow \infty$, é possível ver [67, 68] que o funcional gerador fatora em uma parte idêntica ao caso fora do equilíbrio e em uma parte no contorno $\mathcal{C}_3$, $Z_{\mathcal{C}'}[J, R] = Z_{\mathcal{C}_3}[J, R] Z_{\mathcal{C}_{KB}}[J, R]$. A parte $Z_{\mathcal{C}}[J, R]$ pode ser vista como uma constante de normalização irrelevante, de forma que, o formalismo da ação efetiva $2PI$ pode se aplicar no caso de equilíbrio do mesmo modo que fora do equilíbrio com a condição que se tomem os limites mencionados anteriormente.

Para o caso de uma teoria livre, podemos determinar os propagadores no equilíbrio. Em primeiro lugar, a função $\Delta^-(k)$ pode ser obtida lembrando da sua definição

$$\begin{aligned} \Delta^-(x - y) &= i\Delta^>(x - y) - i\Delta^<(x - y) \\ &= i\langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - y)} (2\pi) \operatorname{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m^2), \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde utilizamos o resultado padrão da função de Jordan-Wigner, definida como o comutador a tempos diferentes de dois campos escalares, ver por exemplo [5]. Definimos a função $\rho(k)$

$$\begin{aligned} \rho(k) &:= -i\Delta^-(k) \\ &= (2\pi) \operatorname{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m^2). \end{aligned} \quad (2.86)$$

A partir dessa função e de (2.84) temos que os propagadores $\Delta^{\pm\pm}(k)$ são dados por [67, 68, 54]

$$\Delta^{++}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi \operatorname{sgn}(k_0) f_B(k_0) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.87a)$$

$$\Delta^{+-}(k) = 2\pi \operatorname{sgn}(k_0) f_B(k_0) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.87b)$$

$$\Delta^{-+}(k) = 2\pi \operatorname{sgn}(k_0) (1 + f_B(k_0)) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.87c)$$

$$\Delta^{--}(k) = \frac{-i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi \operatorname{sgn}(k_0) f_B(k_0) \delta(k^2 - m^2). \quad (2.87d)$$

A aparência dos operadores $\Delta^{\pm\pm}(k)$ permite sua interpretação física. Notamos, por exemplo, que o propagador $\Delta^{++}(k)$ é composto de duas partes, a primeira é idêntica ao propagador à temperatura nula, o qual pode se interpretar como o intercâmbio de uma partícula virtual, enquanto que a segunda corresponde à contribuição térmica do meio, o qual está representado por uma contribuição *on-shell*. Esse último, pode se analisar do seguinte modo: Em um banho térmico existem partículas reais que participam em processos de espalhamento, além das partículas virtuais presentes a $T = 0$. Outra propriedade importante da forma obtida é que as propriedades ultravioletas não são modificadas pelo banho térmico, já que tal banho contribui de modo *on-shell*. Portanto, para desenvolver o processo de renormalização nesta teoria é suficiente utilizar os contra-termos à temperatura nula.

Por outro lado, os propagadores $\Delta^{\pm}(k)$ são dados por

$$\Delta^{+}(k) = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} + f_B(k_0) \right\} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.88a)$$

$$\Delta^{-}(k) = 2i\pi \text{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.88b)$$

como já foi mencionado, estes propagadores carregam a informação estatística do sistema. O propagador $\Delta^{-}(k)$ contem a informação sobre a densidade de estados quânticos, enquanto que o $\Delta^{+}(k)$ da conta da distribuição dos estados. Por essa razão, estes propagadores são conhecidos como propagador espectral e propagador estatístico, respectivamente.

Para nossos propósitos futuros, vamos tomar a antitransformada de Fourier com respeito à energia das funções espectral e estatística, ou seja, vamos determinar

$$\Delta^{\pm}(t, \vec{k}) = \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 t} \Delta^{\pm}(k), \quad (2.89)$$

temos que

$$\Delta^{+}(t, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_k} \coth \left(\frac{\beta \omega_k}{2} \right) \cos(\omega_k t), \quad (2.90a)$$

$$\Delta^{-}(t, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k t), \quad (2.90b)$$

com $\omega_k^2 := |\vec{k}|^2 + m^2$. Estas funções de Green serão úteis na hora de descrevermos a Leptogênese.

Para o caso de férmions, a relação KMS se vê modificada pela anticomutação dos mesmos [67, 54, 68],

$$\mathcal{S}^{<}(p) = -e^{-\beta p_0} \mathcal{S}^{>}(p), \quad (2.91)$$

de forma que, a relação entre funções espectral e estatística vai ser

$$\mathcal{S}^{+}(p) = -i \left\{ \frac{1}{2} - f_F(p_0) \right\} \mathcal{S}^{-}(p), \quad (2.92)$$

onde usamos a função de distribuição de Fermi-Dirac definida por

$$f_F(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1}. \quad (2.93)$$

Da função de Jordan-Wigner para os férmions livres [5], temos que as funções espectral e estatística são dadas por

$$\mathcal{S}^-(p) = 2i\pi(\not{p} + m_f) \operatorname{sgn}(p_0) \delta(p^2 - m^2), \quad (2.94a)$$

$$\mathcal{S}^+(p) = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} - f_F(p_0) \right\} (\not{p} + m_f) \operatorname{sgn}(p_0) \delta(p^2 - m^2), \quad (2.94b)$$

que depois de tomarmos a transformada com respeito à energia ficam,

$$\mathcal{S}^+(t, \vec{p}) = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p}{2}\right) \left\{ i\gamma_0 \sin(\omega_p t) - \frac{m_f - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p} \cos(\omega_p t) \right\}, \quad (2.95a)$$

$$\mathcal{S}^-(t, \vec{p}) = i\gamma_0 \cos(\omega_p t) + \frac{m_f - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p} \sin(\omega_p t), \quad (2.95b)$$

devemos mencionar que os propagadores $\mathcal{S}^{\pm\pm}(p)$ podem também ser obtidos de modo análogo ao caso de escalares.

2.6 Limite de Boltzmann

O formalismo que acabamos de descrever pode ser utilizado para obter uma descrição tipo Boltzmann⁹ para distribuições de número de *quasi-partícula*. A derivação de uma equação desse tipo a partir dos nossos resultados precisa de aproximações adicionais às consideradas anteriormente [48]. Uma importante consideração na descrição *cinética* é que se estudam distribuições de número de partícula, logo deve-se escolher um *ansatz* que permitirá relacionar as funções de Green do formalismo TQcFE com funções de distribuição *fora do equilíbrio*.

Para descrevermos o limite de Boltzmann, vamos estudar o caso de escalares descritos pela ação (2.35). Assim, vamos aplicar a seguinte “receita” [48]

- Considerarmos a expansão de $\Gamma[\Delta]$ (supomos que $\varphi = 0$) até ordem de três-*loops*.
- Tomarmos o tempo inicial para o passado remoto $t_0 \rightarrow -\infty$.
- Efetuarmos uma expansão tipo “gradiente” em relação à coordenada de centro de massa $u := (x + y)/2$.
- Escolhermos o *ansatz quasi-partícula* ou *ansatz* de Kadanoff-Baym [47],

$$\Delta^-(u, k) := 2\pi \mathcal{D}(u, k) \operatorname{sgn}(k_0), \quad (2.96a)$$

$$\Delta^+(u, k) := 2\pi \mathcal{D}(u, k) \operatorname{sgn}(k_0) \left\{ \frac{1}{2} + f(u, k) \right\}, \quad (2.96b)$$

sendo $\mathcal{D}(u, \vec{k})$ a densidade de estados e $f(u, k)$ uma função de distribuição desconhecida.

⁹Para um resumo da equação de Boltzmann ver apêndice D

Vamos aplicar a receita acima para nosso caso. Em primeiro lugar, a expansão a três loops dá um termo que gera uma massa dependente de x

$$M_x^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2} \Delta^+(x),$$

e as autoenergias seguintes [48]

$$\Pi^+(x, y) = -\frac{\lambda^2}{6} \int_z \Delta^+(x, z) \left\{ \Delta^+(z, y) \Delta^+(z, y) - \frac{3}{4} \Delta^-(z, y) \Delta^-(z, y) \right\}, \quad (2.97a)$$

$$\Pi^-(x, y) = -\frac{\lambda^2}{2} \int_z \Delta^-(x, z) \left\{ \Delta^+(z, y) \Delta^+(z, y) - \frac{1}{12} \Delta^-(z, y) \Delta^-(z, y) \right\}. \quad (2.97b)$$

$$(2.97c)$$

Tomando $t_0 \rightarrow -\infty$, vamos aplicar a aproximação “gradiente” para as equações para os propagadores $\Delta^{<,>}(x, y)$ seguindo o feito em [49]. Temos que as equações para tais operadores são [49]

$$(\partial_x^2 + M_x^2) \Delta^{<,>}(x, y) - i(\Pi^+ \odot \Delta^{<,>})(x, y) - i(\Pi^{>,<} \odot \Delta^+)(x, y) = \mathcal{C}_\phi, \quad (2.98)$$

sendo $\mathcal{C}_\phi$ o termo de colisão, definido por

$$\mathcal{C}_\phi := \frac{1}{2} (\Pi^+ \odot \Delta^< - \Pi^< \odot \Delta^+)(x, y). \quad (2.99)$$

A seguir, devemos separar a dependência do sistema nas flutuações a escalas macroscópicas e microscópicas. Para isto, transformamos das coordenadas x, y às coordenadas relativa $r := x - y$, que descreverá as dependências microscópicas, e a coordenada média $u := (x + y)/2$, que descreverá o comportamento a escalas macroscópicas. Depois de fazermos esta transformação, tomamos uma transformação de Fourier com respeito à coordenada relativa, definindo a *transformação de Wigner* [49]

$$G(u, k) = \int d^4r e^{ikr} G\left(u + \frac{r}{2}, u - \frac{r}{2}\right).$$

Ao aplicarmos a transformada de Wigner ao produto (2.46), temos que

$$\int d^4(x - y) e^{ik(x-y)} \int d^4z A(x, z) B(z, y) = e^{-i\phi} \{A(u, k)\} \{B(u, k)\}, \quad (2.100)$$

sendo o operador diamante $\diamond$ definido por

$$\diamond \{A(u, k)\} \{B(u, k)\} := \frac{1}{2} (\partial_u A(u, k) \cdot \partial_k B(u, k) - \partial_k A(u, k) \cdot \partial_u B(u, k)). \quad (2.101)$$

Assim, aplicando a transformada de Wigner às equações (2.98) encontramos que

$$\left(k^2 - \frac{\partial_u^2}{4} + ik \cdot \partial_u - M_u^2 e^{-\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_u \cdot \overleftarrow{\partial}_k}\right) \Delta^{<,>} - e^{-i\phi} \{\Pi^+\} \{\Delta^{<,>}\} - e^{-i\phi} \{\Pi^{>,<}\} \{\Delta^+\} = \tilde{\mathcal{C}}_\phi \quad (2.102)$$

com

$$\tilde{\mathcal{C}}_\phi(u, k) = \frac{1}{2} e^{-i\phi} (\{\Pi^+\} \{\Delta^<\} - \{\Pi^<\} \{\Delta^>\}). \quad (2.103)$$

A aproximação gradiente consiste em considerarmos que a variação do campo de fundo é pequena comparada com o momento das excitações do plasma [49]

$$\partial_u \ll k. \quad (2.104)$$

Assim, é possível fazer uma expansão nas derivadas com respeito ao u . Considerando as partes hermitiana e antihermitiana da equação anterior se obtém duas equações que correspondem à equação *cinética*, que caracteriza a dinâmica do sistema, e à equação de *vínculo* que restringe o espaço de parâmetros do sistema. Visto de outro modo, a equação cinética vai ser a equivalente à equação de Boltzmann, enquanto que a equação de vínculo vai caracterizar as relações de dispersão do sistema. Agora, já que queremos estudar o limite clássico de Boltzmann (ordem $\mathcal{O}(\hbar^0)$), consideramos unicamente a equação cinética, enquanto que a solução da equação de vínculo faz com que a densidade de estados fique

$$\mathcal{D}(k) = \delta(k^2 - m^2),$$

isto significa que a aproximação gradiente só vai considerar processos *on-shell*. A equação cinética vai ser

$$k \cdot \partial_u \Delta^<(u, k) = \tilde{\mathcal{E}}_\phi(u, k). \quad (2.105)$$

Logo de introduzirmos o *ansatz* de Kadanoff-Baym (2.96) e integrarmos nas energias positivas, obtemos a seguinte equação [49]

$$\left(\partial_{u_0} + \frac{\vec{k} \cdot \nabla}{\omega_k} \right) f(u; \omega_k, \vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_0 \tilde{\mathcal{E}}_\phi(u, k), \quad (2.106)$$

sendo $\omega_k^2 = |\vec{k}|^2 + m^2$. O termo de colisão, dado por [48, 49]

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{3} \int_{\vec{p}\vec{q}\vec{r}} (2\pi)^4 \delta^4(p - q - r - k) \frac{1}{2\omega_k} \times \\ & \quad \{ [(1 + f_{\vec{p}})(1 + f_{\vec{q}})(1 + f_{\vec{k}})(1 + f_{\vec{r}}) - f_{\vec{p}}f_{\vec{q}}f_{\vec{k}}f_{\vec{r}}] \} \quad (I) \\ & \quad + 3 [(1 + f_{\vec{p}})(1 + f_{\vec{q}})(1 + f_{\vec{k}})f_{\vec{r}} - f_{\vec{p}}f_{\vec{q}}f_{\vec{k}}(1 + f_{\vec{r}})] \quad (II) \\ & \quad + 3 [(1 + f_{\vec{p}})(1 + f_{\vec{q}})f_{\vec{k}}f_{\vec{r}} - f_{\vec{p}}f_{\vec{q}}(1 + f_{\vec{k}})(1 + f_{\vec{r}})] \quad (III) \\ & \quad [(1 + f_{\vec{p}})f_{\vec{q}}f_{\vec{k}}f_{\vec{r}} - f_{\vec{p}}(1 + f_{\vec{q}})(1 + f_{\vec{k}})(1 + f_{\vec{r}})] \}, \quad (IV) \end{aligned}$$

com $f_{\vec{k}} := f(u; \omega_k, \vec{k})$ e $\int_{\vec{p}} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}$. Analisando o anterior termo de colisão, vemos que este termo possui a estrutura de um termo de colisão usual na equação de Boltzmann, com uma interpretação simples

(I) Descreve produção a aniquilação de quatro quasi-partículas ($0 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 0$).

(II) e (IV) Descrevem os processos ($1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$).

(III) Processos de espalhamento ($2 \rightarrow 2$).

É claro que só o processo (III) contribui ao termo cinético, já que os outros elementos devem se anular pois apresentam violação da conservação do momento e da energia. Deste modo, vemos que a TQCfE possui um limite clássico, que gera uma equação tipo Boltzmann. Observamos que é possível obter a equação de Boltzmann de outra forma, sem

utilizar a expansão gradiente. Veja, por exemplo, na referência [71].

A obtenção do limite de Boltzmann possui uma pergunta muito importante: O *ansatz* de Kadanoff-Baym (2.96) é válido longe do equilíbrio? Em geral, a resposta é *não*, já que distintos efeitos quânticos, tais como interferência, oscilações, etc. , podem invalidá-lo. Por isto, na descrição da leptogênese, devemos tentar resolver diretamente as equações de Kadanoff-Baym (2.74) que encontraremos ao considerarmos a geração da assimetria leptônica.

Em suma, no presente capítulo apresentamos a Teoria Quântica de Campos fora do equilíbrio térmico a partir do estudo do formalismo de Schwinger-Keldysh. Vimos como é necessário introduzir novos conceitos que não aparecem na TQC à temperatura nula, como o contorno de Kadanoff-Baym e a ação efetiva $2PI$, devido a que a natureza dos fenômenos que estuda a TQCfE é bastante diferente ao caso padrão, em que se estudam as colisões, nas quais se conhecem os estados inicial e final. Além disso, estudou-se como é necessário considerar a ação efetiva $2PI$ para evitar o problema da secularidade e introduzir a universalidade que requer um sistema fora do equilíbrio. Assim, a partir desses novos conceitos, obtivemos as equações de Kadanoff-Baym para as duas funções espectral e estatística que descrevem de modo completo a evolução do sistema. Logo de obtermos essas equações, vimos como o formalismo inclui o caso do equilíbrio térmico, que é caracterizado pela condição KMS, e como é possível obter um limite clássico ou de Boltzmann a partir de algumas considerações adicionais às aplicadas na obtenção das equações de Kadanoff-Baym. No próximo capítulo vamos começar a aplicar esse formalismo da TQCfE ao caso da leptogênese, obtendo e resolvendo as equações de Kadanoff-Baym que descrevem a evolução fora do equilíbrio dos neutrinos estéreis introduzidos no Modelo Padrão do modo similar ao visto no capítulo anterior.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DE KADANOFF-BAYM PARA NEUTRINOS DE MÃO DIREITA

3.1 Introdução

Como vimos no Cap. 1, onde discutimos a leptogênese padrão, para termos assimetria leptônica que logo se converterá em assimetria bariônica, devemos obedecer as três condições de Sakharov. Uma delas é que o sistema, nesse caso, o Universo deve possuir condições fora do equilíbrio térmico. Como vimos no caso padrão, isto é introduzido ao considerarmos a evolução mediante a equação de Boltzmann, porém, no caso da leptogênese, a aplicação daquela equação é injustificada já que a geração da assimetria leptônica requer interferência quântica e, em alguns cenários, oscilações de neutrinos [52, 53]. Concluimos que é necessário ter uma descrição quântica de um sistema fora do equilíbrio térmico para poder aplicá-la no estudo da leptogênese. Tal descrição é o formalismo de Schwinger-Keldysh que estudamos no capítulo anterior.

É importante ressaltar que no que se segue não vamos considerar a expansão do Universo. Temos duas razões para isso. A primeira é que, tal como mencionado em [52], ainda não existem equações de Kadanoff-Baym para férmions em um espaço-curvo. A segunda é que segundo [52], para a geração da assimetria inicial, a mudança na temperatura devido à expansão de Hubble não é importante. Porém, é evidente que em algum ponto será necessário introduzir a expansão, mas isso será o tópico de um trabalho futuro. Assim, vamos considerar o Universo plano e sem expansão descrito pela métrica de Minkowski. Neste capítulo vamos resolver as equações de Kadanoff-Baym para um sistema composto pelas partículas do modelo padrão mais neutrinos de mão direita pesados que geram tanto a assimetria leptônica quanto explicam a pequenez da massa dos neutrinos ativos.

3.2 Ação efetiva $2PI$ para a Leptogênese

Hoje em dia, considera-se que na época em que aconteceu a leptogênese ainda não houve a quebra espontânea de simetria do Modelo Padrão, já que as escalas de energia em que os neutrinos de mão direita são criados e decaem devem ser da ordem das mas-

sas desses neutrinos¹, as quais são muito maiores que a escala eletrofraca [55, 53]. Deste modo, tanto léptons quanto o dubleto de Higgs serão partículas sem massa e dos dubletos possuirão 4 graus de liberdade independentes. Assim, para começarmos, vamos definir os propagadores fora do equilíbrio de léptons, neutrinos de mão direita e Higgs, segundo [65]

Dubletos de Léptons l_a^A

$$S_{\mathcal{L}}^{ab}(x, y)^{AB} := \langle \mathcal{T}_{\mathcal{L}} l_a^A(x) \bar{l}_b^B(y) \rangle,$$

Dubleto de Higgs ϕ_A

$$\Delta_{\mathcal{L}}(x, y)^{AB} := \langle \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \phi_A(x) \phi_B^\dagger(y) \rangle,$$

Neutrinos singletos de mão direita N_a

$$\mathcal{G}_{\mathcal{L}}^{ab}(x, y) := \langle \mathcal{T}_{\mathcal{L}} N_a(x) N_b(y) \rangle,$$

onde A, B são índices de $SU(2)_L$, a, b são índices de sabor, enquanto que omitimos os índices espinoriais e de quiralidade dos léptons.

A lagrangeana que descreverá a leptogênese será similar àquela que foi utilizada no caso padrão, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & \frac{1}{2} \bar{N}_a i \not{\partial} P_R N_a - \frac{1}{2} \bar{N}_a M_{ab} P_R N_a + \bar{l}_a i \not{\partial} l_a + (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) \\ & - Y_{ab} \bar{N}_a P_L \phi l_b - Y_{ab}^\dagger \bar{l}_a \phi^\dagger P_R N_b, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo M_{ab} a matriz de massa dos neutrinos de mão direita, Y_{ab} a matriz de Yukawa dos acoplamentos com léptons e Higgs. Similarmente ao feito anteriormente, vamos escolher a matriz de massa dos neutrinos e a matriz de Yukawa de léptons carregados como diagonais, $M_{ab} = M_a \delta_{ab}$. Por outro lado, devemos mencionar que os índices de $SU(2)_L$ estão contraídos na lagrangeana acima do seguinte modo,

$$\begin{aligned} \bar{l}_a \phi^\dagger & \equiv \bar{l}_a^A \varepsilon_{AB} \phi_B^\dagger, \\ \phi l_a & \equiv -\phi_A \varepsilon_{AB} l_a^B, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_{AB} := (i\sigma_2)_{AB}$ a matriz “métrica” de $SU(2)_L$, com σ_2 a segunda matriz de Pauli. Além disso, supomos que existem três neutrinos de mão direita e três sabores de léptons, ou seja, $a, b = 1, 2, 3$. Além disso, vamos escolher uma hierarquia *normal* entre as massas dos neutrinos pesados, ou seja, $M_1 < M_2 < M_3$.

Como já foi mencionado, a lagrangeana (3.1) é idêntica àquela que descreve o mecanismo de see-saw (ver apêndice C), assim, esta lagrangeana descreve tanto a pequenez da massa dos neutrinos ativos quanto a geração da assimetria bariônica. Este é um dos grandes atrativos deste cenário. De fato, foram introduzidos aqui três neutrinos pesados

¹Se considerarmos um espectro de massas hierárquico, a escala corresponderá à escala do neutrino de massa menor.

para poder ter coerência com a fenomenologia de baixas energias. Assim, como consequência dessa lagrangeana, os neutrinos de mão direita serão férmions de Majorana.

Para aplicarmos o formalismo de Schwinger-Keldysh à leptogênese, devemos obter as equações de Kadanoff-Baym, para o caso em questão. Para isso, escrevemos a ação efetiva na expansão $2PI$, [65]

$$\Gamma[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}] = \frac{i}{2} \text{tr} \ln \Delta^{-1} + \frac{i}{2} \text{tr} \Delta_0^{-1} \Delta - i \text{tr} \ln \mathcal{S}^{-1} - i \text{tr} \mathcal{S}_0^{-1} \mathcal{S} - i \text{tr} \ln \mathcal{G}^{-1} - i \text{tr} \mathcal{G}_0^{-1} \mathcal{G} + \Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}], \quad (3.2)$$

onde $\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]$ contém as interações $2PI$. As equações de Schwinger-Dyson obtêm-se a partir de

$$\frac{\delta \Gamma[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta \Delta_{\mathcal{C}}(y, x)^{BA}} = 0, \quad \frac{\delta \Gamma[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}^{BA}} = 0, \quad \frac{\delta \Gamma[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}} = 0, \quad (3.3)$$

onde explicitamos os índices que possuem as funções de correlação.

A parte $2PI$ da ação efetiva $\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]$ pode ser obtida a partir de uma expansão tipo (2.41), se supomos que $|Y_{ab}| \ll 1$, de forma que

$$i\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}] = \text{bubble} + \text{bubble with vertical line} + \dots$$

à ordem mais baixa (dois-loops) a contribuição possui a seguinte expressão, obtida a partir das regras de Feynman associadas à lagrangeana (3.1) (ver apêndice E),

$$i\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}] = -Y_{ab} Y_{cd}^* \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} \int_x \int_y \Delta_{\mathcal{C}}(x, y)^{AD} \text{Tr} \left\{ \mathcal{C} P_L \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{bd}(x, y)^{BC} P_R \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ca}(y, x) \right\}, \quad (3.4)$$

onde o Tr indica o traço sob índices de Dirac, $\mathcal{C}$ a matriz de conjugação de carga e todos os índices estão contraídos. Como já foi mencionado, a característica mais importante da contribuição $2PI$ à ação efetiva é que a partir dela é possível obter as autoenergias, para escalares, léptons e neutrinos, segundo

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mathcal{C}}(x, y)^{AB} &:= -2 \frac{\delta \Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta \Delta_{\mathcal{C}}(y, x)^{BA}}, & i\Xi_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta}^{AB} &:= \frac{\delta \Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}^{BA}}, \\ i\mathcal{C}\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta} &:= \frac{\delta \Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

respectivamente. A matriz $\mathcal{C}$ foi introduzida na definição da autoenergia dos neutrinos por conveniência.

3.3 Equações de Evolução para os Neutrinos

Para procedermos na obtenção da assimetria leptônica, vamos seguir um procedimento similar ao feito no caso padrão: em primeiro lugar, é necessário determinar a

evolução temporal dos neutrinos fora do equilíbrio, e a partir de tal resultado obtermos a geração da assimetria. Assim, nesta seção vamos obter e resolver as equações de Kadanoff-Baym para os neutrinos de mão direita.

A equação de Schwinger-Dyson para os neutrinos é calculada mediante

$$\frac{\delta\Gamma[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ca}(z, x)_{\beta\alpha}} = 0, \quad (3.6)$$

derivando funcionalmente de modo similar ao feito no apêndice D, temos que

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ac}(x, z)^{-1} = \mathcal{G}_0^{ac}(x, z)^{-1} - \mathcal{C}\Sigma_{\mathcal{C}}^{ac}(x, z). \quad (3.7)$$

Por outro lado, temos que o inverso do propagador livre dos neutrinos é dado por (ver apêndice D)

$$i\mathcal{G}_0^{ac}(x, z)^{-1} = \mathcal{C}(i\partial_x - M_{ac})\delta_{\mathcal{C}}^4(x - z)\delta_{ac}.$$

Multiplicando à direita por $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cb}(z, y)$, somando sobre c e integrando no contorno em z , encontramos a versão integro-diferencial da equação de Schwinger-Dyson,

$$(i\partial_x - M_{aa})\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y) - \int_z i\Sigma_{\mathcal{C}}^{ac}(x, z)\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cb}(z, y) = i\mathcal{C}^\dagger\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y)\delta_{ab}. \quad (3.8)$$

Introduzimos as funções espectral e estatística associadas ao neutrinos de modo análogo ao caso de escalares e férmions de Dirac, [65]

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y) = \mathcal{G}_{ab}^+(x, y) - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0)\mathcal{G}_{ab}^-(x, y) \quad (3.9)$$

sendo as funções espectral e estatística definidas do modo padrão

$$\mathcal{G}_{ab}^+(x, y) := \frac{1}{2} \langle [N_a(x), N_b(y)] \rangle, \quad (3.10a)$$

$$\mathcal{G}_{ab}^-(x, y) := i \langle \{N_a(x), N_b(y)\} \rangle. \quad (3.10b)$$

A autoenergia também se descompõe em componentes espectral e estatística, [55, 53, 65]

$$\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y) = \Sigma_{ab}^+(x, y) - \frac{i}{2} \text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0)\Sigma_{ab}^-(x, y). \quad (3.11)$$

Operando do mesmo modo ao feito para escalares, obtemos as equações de Kadanoff-Baym para os neutrinos de mão direita, (só há soma sobre c) [65]

$$(i\partial_x - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^-(x, y) = \int_{y_0}^{x_0} d^4z \Sigma_{ac}^-(x, z)\mathcal{G}_{cb}^-(z, y). \quad (3.12a)$$

$$(i\partial_x - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^+(x, y) = - \int_{t_0}^{y_0} d^4z \Sigma_{ac}^+(x, z)\mathcal{G}_{cb}^-(z, y) + \int_{t_0}^{x_0} d^4z \Sigma_{ac}^-(x, z)\mathcal{G}_{cb}^+(z, y). \quad (3.12b)$$

Considerando a homogeneidade do espaço tridimensional, podemos fazer uma transformação de Fourier com relação às coordenadas espaciais,

$$\mathcal{G}_{ab}^\pm(x_0, y_0; \vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \mathcal{G}_{ab}^\pm(x_0, y_0; \vec{p}), \quad (3.13a)$$

$$\Sigma_{ab}^\pm(x_0, y_0; \vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \Sigma_{ab}^\pm(x_0, y_0; \vec{p}), \quad (3.13b)$$

de forma que obtemos as equações para os modos de Fourier,

$$(i\gamma^0\partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^-(x_0, y_0; \vec{p}) = \int_{y_0}^{x_0} dz_0 \Sigma_{ac}^-(x_0, z_0; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^-(z_0, y_0; \vec{p}), \quad (3.14a)$$

$$(i\gamma^0\partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p}) = - \int_{t_0}^{y_0} dz_0 \Sigma_{ac}^+(x_0, z_0; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^-(z_0, y_0; \vec{p}) \\ + \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \Sigma_{ac}^-(x_0, z_0; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^+(z_0, y_0; \vec{p}). \quad (3.14b)$$

Com o fim de resolvermos essas equações, vamos considerar a seguinte aproximação: os acoplamentos de neutrinos de mão direita com léptons e Higgs são muito menores que os acoplamentos de gauge e de Yukawa g, y_h entre léptons, Higgs, ou seja,²

$$|Y_{ab}| \ll g, y_h,$$

isto tem uma consequência muito importante na presente discussão, já que o sistema possui mais graus de liberdade em equilíbrio do que fora do equilíbrio e as interações do banho térmico, composto por léptons, Higgs e as outras partículas do Modelo Padrão, são mais fortes do que as dos neutrinos pesados [55, 53, 52, 65], podemos desprezar a *backreaction* no banho térmico. Visto de outro modo, a escala de tempo de equilíbrio $\tau_{MP} \sim 1/g^2 M_{ab}$ a uma temperatura $T \sim M_{ab}$ das partículas do modelo padrão, é muito menor do que o tempo de equilíbrio $\tau_N \sim 1/Y_{ab}^2 M_{ab}$ dos neutrinos de mão direita, logo o banho térmico não se verá afetado pela criação dos neutrinos e permanecerá em equilíbrio [52].

Para finalizarmos a discussão desta seção, vamos determinar a autoenergia para os neutrinos,

$$iC\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta} = \frac{\delta\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}} \quad (3.15)$$

derivando funcionalmente a contribuição de 2-loops à ação efetiva (3.4) temos que (ver apêndice E)

$$\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x - y) = \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} \left\{ Y_{ac}Y_{bd}^* \Delta_{\mathcal{C}}(x - y)^{AD} P_L \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(x - y)^{BC} P_R \right. \\ \left. - Y_{bc}Y_{ad}^* \Delta_{\mathcal{C}}(y - x)^{AD} P_R \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(y - x)^{BC} P_L \right\}, \quad (3.16)$$

onde escrevemos que os propagadores dependem da coordenada relativa $x - y$, já que consideramos os léptons e o Higgs em equilíbrio térmico. Graficamente,

Agora, as interações que geram a assimetria não mudam os índices de $SU(2)_L$, logo, podemos considerar que o sistema está em um estado que denominamos *estado $SU(2)_L$ -simétrico*, [65]

$$\Delta_{\mathcal{C}}(x - y)^{AD} = \delta_{AD} \Delta_{\mathcal{C}}(x - y), \\ \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(x - y)^{BC} = \delta_{BC} \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(x - y),$$

²Notemos que isto está de acordo com a suposição $Y_{ab} \ll 1$, já que na escala dos neutrinos pesados, os acoplamentos de gauge e Yukawa g, y_h são menores que um.

sendo $\Delta_{\mathcal{C}}(x - y)$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(x - y)$ os propagadores associados à teoria livre calculados no capítulo anterior.

A autoenergia fica,

$$\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x - y) = -Y_{ac}Y_{bd}^*\Delta_{\mathcal{C}}(x - y)P_L\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(x - y)P_R + Y_{bc}Y_{ad}^*\Delta_{\mathcal{C}}(y - x)P_R\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(y - x)P_L. \quad (3.17)$$

Como sabemos que a assimetria gerada deve ser pequena, vamos supor que o propagador de léptons é quase diagonal [65],

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(x - y) \approx \delta_{cd}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(x - y),$$

desta forma, podemos simplificar a autoenergia ainda mais,

$$\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x - y) = -(YY^\dagger)_{ab}\Delta_{\mathcal{C}}(x - y)\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(x - y)P_R + (YY^\dagger)_{ab}^*\Delta_{\mathcal{C}}(y - x)\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(y - x)P_L. \quad (3.18)$$

Para acharmos as funções espectral e estatística associadas a essa autoenergia, vamos supor que a componente temporal de x está no contorno $\mathcal{C}_-$ e o y_0 em $\mathcal{C}_+$ e vice-versa, assim,

$$\Sigma_{ab}^{>,<}(x - y) = -h_{ab}\Delta^{>,<}(x - y)\mathcal{S}^{>,<}(x - y)P_R + h_{ab}^*\Delta^{<,>}(y - x)\mathcal{S}^{<,>}(y - x)P_L, \quad (3.19)$$

com $h := YY^\dagger$. Devido ao fato que as funções acima estão no equilíbrio, vamos fazer uma transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}^{>,<}(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \mathcal{F}^{>,<}(p),$$

sendo $\mathcal{F} = \{\Sigma_{ab}, \Delta, \mathcal{S}\}$. A autoenergia no espaço de momentos fica,

$$\Sigma_{ab}^{>,<}(p) = -h_{ab}\Sigma_1^{>,<}(p)P_R + h_{ab}^*\Sigma_2^{<,>}(p)P_L, \quad (3.20)$$

onde definimos,

$$\Sigma_1^{>,<}(p) := \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta^{>,<}(q)\mathcal{S}^{>,<}(p - q), \quad (3.21a)$$

$$\Sigma_2^{<,>}(p) := \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta^{<,>}(-q)\mathcal{S}^{<,>}(q - p). \quad (3.21b)$$

A partir dessa expressão para a autoenergia, podemos obter a função espectral associada a ela mediante,

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab}^-(p) &= i \{ \Sigma_{ab}^>(p) - \Sigma_{ab}^<(p) \} \\ &= i \{ 1 + e^{-\beta p_0} \} \Sigma_{ab}^>(p), \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde utilizamos a relação KMS que cumpre a autoenergia uma vez que consideramos o banho térmico em equilíbrio. Utilizando $\Sigma_1^>(p) = -\Sigma_2^<(p)$ (ver apêndice E) encontramos uma expressão final para a função espectral da autoenergia dos neutrinos pesados,

$$\Sigma_{ab}^-(p) = -i \{ h_{ab}P_L + h_{ab}^*P_R \} \aleph(p), \quad (3.23)$$

sendo

$$\begin{aligned}\aleph(p) &:= \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \Sigma_1^>(p) \\ &= \int_{\vec{k}, \vec{q}} \not{k} \sigma(p; k, q),\end{aligned}\tag{3.24}$$

com (ver apêndice E) [55, 53]

$$\begin{aligned}\sigma(p; k, q) &:= f_{FB}(k_0, q_0)(2\pi)^4 \left\{ \delta^4(p - k - q) + \delta^4(p + k + q) \right\} \\ &\quad + \bar{f}_{FB}(k_0, q_0)(2\pi)^4 \left\{ \delta^4(p + k - q) + \delta^4(p - k + q) \right\},\end{aligned}\tag{3.25}$$

sendo $k_0 = |\vec{k}|$, $q_0 = |\vec{q}|$ as energias *on-shell* de léptons e Higgs, enquanto que p_0 está *off-shell*. Por outro lado, os fatores estatísticos dados por [72, 52, 53]

$$\begin{aligned}f_{FB}(k_0, q_0) &:= 1 - f_F(k_0) + f_B(q_0), \\ \bar{f}_{FB}(k_0, q_0) &:= f_F(k_0) + f_B(q_0).\end{aligned}$$

Notemos que esses fatores estatísticos são equivalentes aos fatores que aparecem no termo de colisão da equação de Boltzmann,

$$\begin{aligned}f_{FB}(k_0, q_0) &= (1 - f_F(k_0))(1 + f_B(q_0)) + f_F(k_0)f_B(q_0), \\ \bar{f}_{FB}(k_0, q_0) &= f_F(k_0)(1 + f_B(q_0)) + (1 - f_F(k_0))f_B(q_0),\end{aligned}$$

o $f_{FB}(k_0, q_0)$ dá conta de decaimentos e decaimentos inversos dos neutrinos de Majorana, enquanto que $\bar{f}_{FB}(k_0, q_0)$ corresponde ao aparecimento ou desaparecimento dos neutrinos devido à absorção de um quanta, lépton ou Higgs no banho térmico [52]. Portanto, a parte espectral da autoenergia está caracterizando os processos que criam e aniquilam neutrinos de mão direita por léptons e Higgs.

Para determinarmos a função estatística, aplicamos a relação KMS,

$$\begin{aligned}\Sigma_{ab}^+(p) &= -\frac{i}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \Sigma_{ab}^-(p) \\ &= -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \{h_{ab}P_L + h_{ab}^*P_R\} \aleph(p)\end{aligned}\tag{3.26}$$

Com estes resultados podemos resolver as equações de Kadanoff-Baym.

3.3.1 Função Espectral

Para resolvermos a equação para a função espectral³,

$$(i\gamma^0\partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^-(x_0 - y_0; \vec{p}) - \int_{y_0}^{x_0} dz_0 \Sigma_{ac}^-(x_0 - z_0; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^-(z_0 - y_0; \vec{p}) = 0,\tag{3.14a}$$

³ Escrevemos $\mathcal{G}_{ab}^-(x_0 - y_0; \vec{p})$ já que a única dependência de $\mathcal{G}_{ab}^-$ em x_0, y_0 é dada através da autoenergia, que depende de $x_0 - y_0$ devido a que o banho térmico está no equilíbrio.

que depois de fazermos a transformação

$$\begin{aligned} t &:= x_0 - y_0 \\ t' &:= z_0 - y_0 \end{aligned}$$

fica

$$(i\gamma^0 \partial_t - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^-(t; \vec{p}) - \int_0^t dt' \Sigma_{ac}^-(t - t'; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^-(t'; \vec{p}) = 0. \quad (3.27)$$

Vamos aplicar a transformada de Laplace $\mathcal{L}$ [55, 54, 53, 52], definida segundo,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(s; \vec{p}) &:= \mathcal{L} \{ \mathcal{G}_{ab}^-(t; \vec{p}) \} = \int_0^\infty dt e^{-st} \mathcal{G}_{ab}^-(t; \vec{p}), \\ \tilde{\Sigma}_{ab}^-(s; \vec{p}) &:= \mathcal{L} \{ \Sigma_{ab}^-(t; \vec{p}) \} = \int_0^\infty dt e^{-st} \Sigma_{ab}^-(t; \vec{p}), \end{aligned}$$

à equação (3.27). Assim, aplicando as seguintes propriedades da transformada de Laplace, com $f(0)$ a condição inicial,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ f'(t) \} &= s \mathcal{L} \{ f(t) \} - f(0), \\ \mathcal{L} \left\{ \int_0^t dt f(t - \tau) g(\tau) \right\} &= \mathcal{L} \{ f(t) \} \mathcal{L} \{ g(t) \}, \end{aligned}$$

obtemos a equação algébrica,

$$(i\gamma^0 s - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{ab})\tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(s; \vec{p}) - \tilde{\Sigma}_{ac}^-(s; \vec{p})\tilde{\mathcal{G}}_{cb}^-(s; \vec{p}) = -\mathcal{C}^\dagger \delta_{ab}, \quad (3.28)$$

onde usou-se que as condições iniciais da função espectral são dadas por

$$\mathcal{G}_{ab}^-(0; \vec{p}) = i\gamma^0 \mathcal{C}^\dagger \delta_{ab}.$$

Como vimos anteriormente quando apresentamos o formalismo de Schwinger-Keldysh, as equações de Kadanoff-Baym precisam de condições iniciais. No presente caso da função espectral, as condições iniciais são obtidas a partir do estudo do anticomutador a tempos iguais dos campos dos neutrinos pesados, ver apêndice E.

Para resolvermos essa equação matricial 3×3 no espaço de sabor, vamos separar as equações para $a \neq b \neq c$, com $a, b, c = 1, 2, 3$, (não há soma)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{aa}\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^- - \tilde{\Sigma}_{ab}^-\tilde{\mathcal{G}}_{ba}^- - \tilde{\Sigma}_{ac}^-\tilde{\mathcal{G}}_{ca}^- &= -\mathcal{C}^\dagger, \\ -\tilde{\Sigma}_{ba}^-\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^- + \mathcal{A}_{bb}\tilde{\mathcal{G}}_{ba}^- - \tilde{\Sigma}_{bc}^-\tilde{\mathcal{G}}_{ca}^- &= 0, \\ -\tilde{\Sigma}_{ca}^-\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^- - \tilde{\Sigma}_{cb}^-\tilde{\mathcal{G}}_{ba}^- + \mathcal{A}_{cc}\tilde{\mathcal{G}}_{ca}^- &= 0, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A}_{aa} := (i\gamma^0 s - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_a - \tilde{\Sigma}_{aa}^-)$ e omitimos a dependência em s e $\vec{p}$ por simplicidade na notação. É possível inverter o sistema anterior para obter

$$\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^- = - \left[\mathcal{A}_{aa} - \left\{ \tilde{\Sigma}_{ab}^-(\mathcal{A}_{cc}\{\tilde{\Sigma}_{bc}^- \}^{-1}\mathcal{A}_{bb} - \tilde{\Sigma}_{cb})^{-1}(\mathcal{A}_{cc}\{\tilde{\Sigma}_{bc}^- \}^{-1}\tilde{\Sigma}_{ba}^- + \tilde{\Sigma}_{ca}) + \{b \leftrightarrow c\} \right\} \right]^{-1} \mathcal{C}^\dagger, \quad (3.29a)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ba}^- = (\mathcal{A}_{cc}\{\tilde{\Sigma}_{bc}^- \}^{-1}\mathcal{A}_{bb} - \tilde{\Sigma}_{cb})^{-1}(\mathcal{A}_{cc}\{\tilde{\Sigma}_{bc}^- \}^{-1}\tilde{\Sigma}_{ba}^- - \tilde{\Sigma}_{ca})\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^-, \quad (3.29b)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ca}^- = (\mathcal{A}_{bb}\{\tilde{\Sigma}_{cb}^- \}^{-1}\mathcal{A}_{cc} - \tilde{\Sigma}_{bc})^{-1}(\mathcal{A}_{bb}\{\tilde{\Sigma}_{cb}^- \}^{-1}\tilde{\Sigma}_{ca}^- - \tilde{\Sigma}_{ba})\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^-. \quad (3.29c)$$

Essas soluções foram obtidas sem tomar nenhum tipo de aproximação. Porém, para o caso que estamos estudando, devemos inverter a transformada de Laplace, o que não será simples se não considerarmos algum tipo de aproximação. É necessário lembrar que $\tilde{\Sigma}_{ab}^- \sim \mathcal{O}((YY^\dagger)_{ab})$, assim, considerando apenas o termo dominante em $\mathcal{O}(h)$ nos resultados anteriores, temos que⁴

$$\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^- = -\frac{\mathcal{C}^\dagger}{i\gamma^0 s - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_a - \tilde{\Sigma}_{aa}^-}, \quad (3.30a)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ab}^- = -\mathcal{A}_{aa}^{-1} \tilde{\Sigma}_{ab}^- \mathcal{A}_{bb}^{-1} \mathcal{C}^\dagger, \quad (3.30b)$$

com $a, b = 1, 2, 3$ e $a \neq b$. Vemos que as soluções para as componentes na diagonal, $\tilde{\mathcal{G}}_{aa}^-$, possuem a estrutura de um propagador corrigido pela autoenergia, enquanto que as componentes fora da diagonal, $\tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-$, são suprimidas por h_{ab} , isto pode se explicar notando que o propagador $\mathcal{G}_{ab}^-$ dá conta de transições $N_a \rightarrow N_b$, as quais devem ser proporcionais à multiplicação das matrizes de Yukawa $h_{ab} = (YY^\dagger)_{ab}$.

Podemos agora inverter a transformada de Laplace. Para isto, é necessário determinar [55, 54, 53, 52]

$$\mathcal{G}_{ab}^-(t; \vec{p}) = \int_{C_B} \frac{ds}{2\pi i} e^{sy} \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(s; \vec{p}), \quad (3.31)$$

sendo C_B o contorno de Bromwich (ver figura 3.1).

Figura 3.1: Contorno de Bromwich

Da definição da transformada de Laplace da autoenergia podemos fazer uma transformada de Fourier com relação a t , para obtermos

$$\tilde{\Sigma}_{ab}^-(s; \vec{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{i\Sigma_{ab}^-(p_0; \vec{p})}{is - p_0}, \quad (3.32)$$

isto permite ver que a autoenergia é analítica no eixo real de s , mas possui descontinuidades no eixo imaginário. Neste ponto é útil introduzirmos os propagadores avançado e

⁴De novo, não há soma sob índices repetidos.

retardado, mediante

$$\Sigma_{ab}^R(x, y) = \theta(x_0 - y_0) \Sigma_{ab}^-(x, y), \quad (3.33a)$$

$$\Sigma_{ab}^A(x, y) = -\theta(y_0 - x_0) \Sigma_{ab}^-(x, y), \quad (3.33b)$$

os quais possuem a seguinte representação espectral [55, 54, 53, 52]

$$\Sigma_{ab}^{R,A}(p_0) = \int \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{i\Sigma_{ab}^-(p'_0; \vec{p})}{p_0 - p'_0 \pm i\epsilon} = \underbrace{\mathcal{P} \int \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{i\Sigma_{ab}^-(p'_0; \vec{p})}{p_0 - p'_0}}_{\Re \Sigma_{ab}^{R,A}(p_0)} \pm \underbrace{\frac{1}{2} \Sigma_{ab}^-(p'_0; \vec{p})}_{\pm i \Im \Sigma_{ab}^{R,A}(p_0)}, \quad (3.34)$$

sendo $\mathcal{P}$ o valor principal de Cauchy. Devido ao fato que a função espectral é imaginária, vemos que a parte real dos propagadores avançado e retardado são iguais, enquanto que a parte imaginária de um deles é igual a menos a do outro, e, além disso, é proporcional à função espectral [55, 54, 53, 52]. Assim, comparando com a dupla transformação, de Laplace e de Fourier, da autoenergia, encontramos as relações

$$\tilde{\Sigma}_{ab}^-(-ip_0 \pm \epsilon; \vec{p}) = \Sigma_{ab}^{R,A}(p_0). \quad (3.35)$$

Armados com essas relações e tomando o contorno de Bromwich como $\int_{C_B} \rightarrow \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} + \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon}$ obtemos a inversa da transformada de Laplace,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^-(t; \vec{p}) &= \int_{C_B} \frac{ds}{2\pi i} e^{sy} \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(s; \vec{p}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0 y} \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(-ip_0 + \epsilon; \vec{p}) - \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(-ip_0 - \epsilon; \vec{p}) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0 y} \mathcal{G}_{ab}^-(p), \end{aligned} \quad (3.36)$$

de onde definiu-se a transformada de Fourier no espaço quadridimensional $\mathcal{G}_{ab}^-(p)$, $p = p^\mu = (p_0, \vec{p})$, segundo,

$$\mathcal{G}_{ab}^-(p) := \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(-ip_0 + \epsilon; \vec{p}) - \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^-(-ip_0 - \epsilon; \vec{p}). \quad (3.37)$$

Agora, vamos obter as expressões de $\mathcal{G}_{ab}^-(p)$ para os casos das componentes na e fora da diagonal a partir das expressões (3.30).

Componentes na Diagonal

Para as componentes na diagonal temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{aa}^-(p) &= -\frac{\mathcal{C}^\dagger}{\not{p} - M_a - \tilde{\Sigma}_{aa}^-(-ip_0 + \epsilon; \vec{p})} - \frac{\mathcal{C}^\dagger}{\not{p} - M_a - \tilde{\Sigma}_{aa}^-(-ip_0 - \epsilon; \vec{p})} \\ &= -\frac{\mathcal{C}^\dagger}{\not{p} - M_a - \Sigma_{aa}^R(p)} - \frac{\mathcal{C}^\dagger}{\not{p} - M_a - \Sigma_{aa}^A(p)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Neste ponto devemos nos preocupar com o processo de renormalização. Sem entrar em detalhes, podemos dizer que as condições de renormalização são escolhidas de modo que

tanto a parte divergente quanto a parte finita da parte real dos propagadores avançado e retardado se anulem. Deste modo, só a parte imaginária ficará nas expressões,

$$\mathcal{G}_{aa}^-(p) = -\frac{\mathcal{C}^\dagger}{\not{p} - M_a - i\Im\Sigma_{aa}^R(p)} - \frac{\mathcal{C}^\dagger}{\not{p} - M_a + i\Im\Sigma_{aa}^R(p)}. \quad (3.39)$$

Simplificando 3.39, e considerando apenas o termo dominante só, vamos ter que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{aa}^-(p) &= -\frac{4ip \cdot \Im\Sigma_{aa}^R(p)}{(p^2 - M_a^2)^2 + (2p \cdot \Im\Sigma_{aa}^R(p))^2} (\not{p} + M_a) \mathcal{C}^\dagger \\ &= \frac{2ip_0 \Gamma_p^a}{(p_0^2 - \omega_p^{a2})^2 + (p_0 \Gamma_p^a)^2} (\not{p} + M_a) \mathcal{C}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.40)$$

sendo $\omega_p^{a2} = |\vec{p}|^2 + M_a^2$ e definimos a largura mediante

$$\begin{aligned} p_0 \Gamma_p^a &:= -2p \cdot \Im\Sigma_{aa}^R(p) \\ &= p \cdot i\Sigma_{aa}^-(p) \\ &= h_{aa} \int_{\vec{k}, \vec{q}} p \cdot k \sigma(p; k, q). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Notemos que no limite $p_0 \Gamma_p^a \rightarrow 0$, temos que ⁵

$$\mathcal{G}_{aa}^-(p) = 2i\pi \operatorname{sgn}(p_0) \delta(p^2 - M_a^2) (\not{p} + M_a) \mathcal{C}^\dagger, \quad (3.42)$$

que corresponde à função espectral para férmions de Majorana, análoga a (2.94a) encontrada no caso de campos livres. Isto mostra a consistência de nosso resultado.

Finalmente, devemos calcular a transformada inversa de Fourier com relação à energia da função espectral,

$$\mathcal{G}_{aa}^-(t; \vec{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0 y} \mathcal{G}_{aa}^-(p_0; \vec{p}), \quad (3.43)$$

para isso, fazemos uso do teorema de resíduos,

$$\oint_C dz f(z) = \pm 2\pi i \sum_{z_0} \operatorname{Res} f(z_0),$$

onde o sinal depende da orientação da trajetória fechada C que envolve os polos da função, e o $\operatorname{Res} f(z_0)$ corresponde aos resíduos da função avaliados no polos da mesma. Por outro lado, utilizando que os Yukawas são muito pequenos, podemos tomar a aproximação de largura fina: já que os yukawas são pequenos, consideramos a largura avaliada na camada de massa,

$$p_0 \Gamma_p^a(p) \approx \omega_p^a \Gamma_p^a(\omega_p^a; \vec{p}).$$

⁵ Aqui utilizamos que

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Assim, encontramos a função espectral associada às componentes na diagonal,

$$\mathcal{G}_{aa}^-(t; \vec{p}) = \left\{ i\gamma^0 \cos \omega_p^a t + \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \sin \omega_p^a t \right\} e^{-\frac{\Gamma_p^a}{2}|t|} \mathcal{C}^\dagger. \quad (3.44)$$

A diferença deste resultado com o resultado livre aparece na exponencial que depende da largura, isto é consequência da aproximação de largura fina [52, 53]. Notemos que para este caso obtemos que a função espectral possui a mesma estrutura que as obtidas em [52, 53]. Isto se deve ao fato de termos considerado apenas o termo dominante de ordem mais alta.

Componentes fora da Diagonal

Após inverter a transformada de Laplace, obtém-se a função espectral no espaço de momentos,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^-(p) = & -\frac{1}{\not{p} - M_a - \Sigma_{aa}^R(p)} \Sigma_{ab}^R(p) \frac{1}{\not{p} - M_b - \Sigma_{bb}^R(p)} \mathcal{C}^\dagger \\ & + \frac{1}{\not{p} - M_a - \Sigma_{aa}^A(p)} \Sigma_{ab}^A(p) \frac{1}{\not{p} - M_b - \Sigma_{bb}^A(p)} \mathcal{C}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.45)$$

aplicando o processo de renormalização descrito na seção anterior, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^-(p) = & -\frac{1}{\not{p} - M_a - i\Im \Sigma_{aa}^R(p)} i\Im \Sigma_{ab}^R(p) \frac{1}{\not{p} - M_b - i\Im \Sigma_{bb}^R(p)} \mathcal{C}^\dagger \\ & - \frac{1}{\not{p} - M_a + i\Im \Sigma_{aa}^R(p)} i\Im \Sigma_{ab}^R(p) \frac{1}{\not{p} - M_b + i\Im \Sigma_{bb}^R(p)} \mathcal{C}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Considerando essa expressão até ordem $\mathcal{O}(h)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^-(p) = & i \frac{p^2 - M_a^2}{(p^2 - M_a^2)^2 + (p_0 \Gamma_p^a)^2} (\not{p} + M_a) i \Sigma_{ab}^-(p) (\not{p} + M_b) \mathcal{C}^\dagger \frac{p^2 - M_b^2}{(p^2 - M_b^2)^2 + (p_0 \Gamma_p^b)^2} \\ = & i \frac{p^2 - M_a^2}{(p^2 - M_a^2)^2 + (p_0 \Gamma_p^a)^2} \eta_{ab}^-(p) \frac{p^2 - M_b^2}{(p^2 - M_b^2)^2 + (p_0 \Gamma_p^b)^2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde definimos

$$\eta_{ab}^-(p) := (\not{p} + M_a) i \Sigma_{ab}^-(p) (\not{p} + M_b) \mathcal{C}^\dagger. \quad (3.48)$$

Notemos que no limite $\Gamma_p^{a,b} \rightarrow 0$, ou seja, $(YY^\dagger)_{ab} \rightarrow 0$ (3.47) tende a zero, o que está de acordo com a interpretação de $\mathcal{G}_{ab}^-(p)$ como a função que caracteriza a transição entre $N_a \rightarrow N_b$, o que não é possível se $(YY^\dagger)_{ab} \rightarrow 0$, já que estamos considerando a matriz de massa diagonal. Para acharmos a função espectral $\mathcal{G}_{ab}^-(t; \vec{p})$ das componentes fora do equilíbrio, tomamos a transformada de Fourier inversa. Para resolver a integral, é necessário aplicar o teorema dos resíduos. Obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^-(t; \vec{p}) = & \frac{1}{4\omega_p^a} \left\{ \psi_{ab}^{(1)}(t) \eta_{ab}^-(\omega_p^a) e^{-i\omega_p^a t} - \psi_{ab}^{(1)*}(t) \eta_{ab}^-(\omega_p^a) e^{i\omega_p^a t} \right\} \\ & - \frac{1}{4\omega_p^b} \left\{ \psi_{ab}^{(2)}(t) \eta_{ab}^-(\omega_p^b) e^{-i\omega_p^b t} - \psi_{ab}^{(2)*}(t) \eta_{ab}^-(\omega_p^b) e^{i\omega_p^b t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

sendo $\eta_{ab}^-(\omega_p^{a,b}) = \eta_{ab}^-(\omega_p^{a,b}; \vec{p})$ avaliada nas energias *on-shell* $\omega_p^{a,b}$. As funções $\psi_{ab}^{(1,2)}(t)$ estão dadas por

$$\psi_{ab}^{(1)}(t) := \theta(t)\xi_{ab}^{(a)}e^{-\frac{\Gamma_a}{2}t} - \theta(-t)\xi_{ab}^{(a)*}e^{\frac{\Gamma_a}{2}t}, \quad (3.50a)$$

$$\psi_{ab}^{(2)}(t) := \theta(t)\xi_{ab}^{(b)*}e^{-\frac{\Gamma_b}{2}t} - \theta(-t)\xi_{ab}^{(b)}e^{\frac{\Gamma_b}{2}t} \quad (3.50b)$$

com

$$\xi_{ab}^{(a)} = \xi_{ab}^{(a)}(\omega_p^a, \omega_p^b) := \frac{M_a^2 - M_b^2 - i\omega_p^a\Gamma_p^a}{(M_a^2 - M_b^2 - i\omega_p^a\Gamma_p^a)^2 + (\omega_p^a\Gamma_p^b)^2}, \quad (3.51a)$$

$$\xi_{ab}^{(b)} = \xi_{ab}^{(b)}(\omega_p^a, \omega_p^b) := \frac{M_a^2 - M_b^2 - i\omega_p^b\Gamma_p^b}{(M_a^2 - M_b^2 - i\omega_p^b\Gamma_p^b)^2 + (\omega_p^b\Gamma_p^a)^2}, \quad (3.51b)$$

Essas expressões apareceram na hora de fazermos as integrais por resíduos.

Como vemos, para o caso das componentes fora da diagonal, as expressões são mais complicadas que para as componentes na diagonal. Porém, elas carregam a informação das possíveis transições entre neutrinos, e como elas se vem afetadas pela forma das matrizes de Yukawa, além disso, os fatores $\xi_{ab}^{(a,b)}$ vão caracterizar os limites ressonante e hierárquico na assimetria leptônica, como veremos mais adiante. Tendo solucionado a equação espectral, (3.44) e (3.49), podemos passar ao caso da função estatística.

3.3.2 Função Estatística

A solução da equação para a função estatística,

$$\begin{aligned} (i\gamma^0\partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p}) - \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \Sigma_{ac}^-(x_0, z_0; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^+(z_0, y_0; \vec{p}) \\ = - \int_{t_0}^{y_0} dz_0 \Sigma_{ac}^+(x_0, z_0; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^-(z_0, y_0; \vec{p}), \end{aligned} \quad (3.14b)$$

é dada por [55, 52, 53]

$$\mathcal{G}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p}) = \mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) + \mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}), \quad (3.52)$$

sendo $\mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p})$ a denominada *Integral de Memória* [55, 52, 53, 65], que é solução da equação (3.14b)⁶, dada por

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) = \sum_{c,d} \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \int_{t_0}^{y_0} dw_0 \mathcal{G}_{ac}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\Sigma_{cd}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{db}^-(w_0 - y_0; \vec{p}), \quad (3.53)$$

a integral de memória é denominada desse modo já que ao tomar a integração desde t_0 , podemos dizer que nela se “lembra” de tudo que aconteceu desde que o sistema começou a evoluir a partir do seu estado inicial, ou seja, na integral de memória estão os efeitos que fazem a TQCfE ser um formalismo *não-markoviano*. Por outro lado, $\mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p})$ corresponde à solução da equação homogênea,

$$(i\gamma^0\partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) - \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \Sigma_{ac}^-(x_0, z_0; \vec{p})\mathcal{G}_{cb}^{+h}(z_0, y_0; \vec{p}) = 0.$$

Vamos determinar as duas partes da solução separadamente.

⁶Ver a demonstração no apêndice E

Integral de Memória

Para determinarmos a integral de memória

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) = \sum_{c,d} \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \int_{t_0}^{y_0} dw_0 \mathcal{G}_{ac}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\Sigma_{cd}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{db}^-(w_0 - y_0; \vec{p}),$$

primeiro devemos considerar o termo dominante para as componentes na e fora da diagonal, para isto, lembramos que a parte estatística da autoenergia é dada por,

$$\Sigma_{ab}^+(p) = -\frac{i}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \Sigma_{ab}^-(p),$$

de forma que a $\Sigma_{ab}^+(p)$ também é proporcional a h_{ab} , assim devemos considerar os termos que contribuem à ordem $\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(\Gamma_p^a/p_0)$ tanto nas componentes na diagonal quanto fora dela (não há soma)

$$\mathcal{G}_{aa}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) = \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \int_{t_0}^{y_0} dw_0 \mathcal{G}_{aa}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\Sigma_{aa}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{aa}^-(w_0 - y_0; \vec{p}), \quad (3.54a)$$

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) = \mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(x_0, y_0; \vec{p}) + \mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(x_0, y_0; \vec{p}), \quad (3.54b)$$

com

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(x_0, y_0; \vec{p}) = \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \int_{t_0}^{y_0} dw_0 \mathcal{G}_{aa}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\Sigma_{ab}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{bb}^-(w_0 - y_0; \vec{p}) \quad (3.55a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(x_0, y_0; \vec{p}) = \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \int_{t_0}^{y_0} dw_0 \{ & \mathcal{G}_{ab}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\Sigma_{bb}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{bb}^-(w_0 - y_0; \vec{p}) \\ & + \mathcal{G}_{aa}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\Sigma_{aa}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{ab}^-(w_0 - y_0; \vec{p}) \}. \end{aligned} \quad (3.55b)$$

Devemos notar que embora pareça que o termo $\mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(x_0, y_0; \vec{p})$ é de ordem superior, ao fazermos a integração desse termo aparece uma contribuição de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{\Gamma_p^a}{p_0}\right)$ que deve ser levada em conta.

Assim, devemos calcular separadamente as componentes na e fora da diagonal. Para as componentes na diagonal, vamos calcular

$$\mathcal{G}_{aa}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) = \int_{t_0}^{x_0} dz_0 \int_{t_0}^{y_0} dw_0 \mathcal{G}_{aa}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\Sigma_{aa}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{aa}^-(w_0 - y_0; \vec{p}),$$

onde $\mathcal{G}_{aa}^-(w_0 - y_0; \vec{p})$ são as funções espectrais determinadas na última seção. Agora, tomamos a transformada de Fourier com relação a $z_0 - w_0$ da autoenergia [55, 52],

$$\Sigma_{aa}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(z_0 - w_0)} \Sigma_{aa}^+(\omega; \vec{p}),$$

escolhendo como tempo inicial $t_0 = 0$, temos que é possível separar as integrais do seguinte modo

$$\mathcal{G}_{aa}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) = \int_0^{x_0} dz_0 \mathcal{G}_{aa}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C}\mathcal{G}(z_0, y_0; \omega, \vec{p}), \quad (3.56)$$

com

$$\mathcal{G}(z_0, y_0; \omega, \vec{p}) := \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega z_0} \Sigma_{aa}^+(\omega; \vec{p}) \int_0^{y_0} dw_0 e^{-i\omega w_0} \mathcal{G}_{aa}^-(w_0 - y_0; \vec{p}).$$

A integral em dw_0 pode ser feita de modo analítico [55, 52],

$$\begin{aligned} \int_0^{y_0} dw_0 e^{-i\omega w_0} \mathcal{G}_{aa}^-(w_0 - y_0; \vec{p}) &= \\ &= -\frac{1}{(\omega - i\Gamma_p^a/2)^2 - \omega_p^a{}^2} \left\{ \gamma^0 \left[e^{-\Gamma_p^a y_0/2} (\omega \cos \omega_p^a y_0 + i\omega_p^a \sin \omega_p^a y_0) - \omega e^{i\omega y_0} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \left[e^{-\Gamma_p^a y_0/2} (\omega_p^a \cos \omega_p^a y_0 + i\omega \sin \omega_p^a y_0) - \omega_p^a e^{i\omega y_0} \right] \right\} \mathcal{C}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Agora, para determinarmos o $\mathcal{G}(z_0, y_0; \omega, \vec{p})$, devemos fazer a integração em ω mediante o teorema dos resíduos. Os polos do integrando serão

$$\omega = \pm \omega_p^a + \frac{i\Gamma_p^a}{2}.$$

Para escolher o contorno devemos levar em conta o sinal do expoente para poder aplicar o lemma de Jordan, e a resposta será a soma das distintas contribuições dos resíduos. Porém, devemos notar que pelo mesmo teorema é necessário avaliar o integrando nos polos anteriores, logo, devemos desprezar termos da ordem $\mathcal{O}\left(\frac{\Gamma_p^a}{\omega_p^a}\right)$ no numerador, já que só consideramos o termo de ordem mais alta; notemos que isto é equivalente a fazermos as substituições $\omega \leftrightarrow \text{sgn}(\Re \omega) \omega_p^a$ no mesmo numerador [53, 52]. Assim, operando de modo padrão, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z_0, y_0; \omega, \vec{p}) &= \frac{-ie^{\Gamma_p^a/2(z_0 - y_0)}}{2\omega_p^a} \{ \theta(-z_0) - \theta(y_0 - z_0) \} \\ &\quad \left\{ \Sigma_{ab}^+(\omega_p^a, \vec{p}) (\omega_p^a \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_a) e^{-i\omega_p^a(z_0 - y_0)} \right. \\ &\quad \left. - \Sigma_{ab}^+(-\omega_p^a, \vec{p}) (-\omega_p^a \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_a) e^{i\omega_p^a(z_0 - y_0)} \right\} \mathcal{C}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.58)$$

introduzindo esse resultado na expressão (3.56), utilizando que

$$\int_0^a \theta(x - (a - b)) f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \theta(a - b) \int_{a-b}^0 f(x) dx$$

e simplificando as expressões para os fatores que incluem as matrizes de Dirac e a autoenergia [53, 52],

$$\begin{aligned} (\omega_p^a \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_a) i \Sigma_{ab}^-(\omega_p^a, \vec{p}) (\omega_p^a \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_a) &= 2\omega_p^a{}^2 \Gamma_p^a \left\{ \gamma^0 + \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \right\}, \\ (-\omega_p^a \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_a) i \Sigma_{ab}^-(-\omega_p^a, \vec{p}) (-\omega_p^a \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_a) &= 2\omega_p^a{}^2 \Gamma_p^a \left\{ \gamma^0 - \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \right\}, \end{aligned}$$

temos que a integral de memória para as componentes na diagonal é dada por [55, 53, 52]

$$\mathcal{G}_{aa}^{+m}(t, \tau; \vec{p}) = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta \omega_p^a}{2}\right) \left\{ i\gamma^0 \sin \omega_p^a t - \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \cos \omega_p^a t \right\} \left\{ e^{-\Gamma_p^a/2|t|} - e^{-\Gamma_p^a \tau} \right\} \mathcal{C}^\dagger, \quad (3.59)$$

com $t := x_0 - y_0$ e $\tau := \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$. Notemos que para $x_0 = y_0 = 0$ a integral de memória é nula, tal como deveria ser, devido a que não há efeitos de memória no tempo inicial. Por outro lado, um teste importante a que devemos submeter essas soluções é o de *universalidade*. Para isso, tomamos o limite $\tau \rightarrow \infty$ [55, 52],

$$\mathcal{G}_{aa}^{+eq}(t, \infty; \vec{p}) = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^a}{2}\right) \left\{ i\gamma^0 \sin\omega_p^a t - \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \cos\omega_p^a t \right\} e^{-\Gamma_p^a/2|t|} \mathcal{C}^\dagger, \quad (3.60)$$

tomando a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{aa}^{+eq}(p_0, \infty; \vec{p}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ip_0 t} \mathcal{G}_{aa}^{+eq}(t, \infty; \vec{p}) \\ &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \underbrace{\frac{2p_0 \Gamma_p^a}{(p_0^2 - \omega_p^a)^2 + (p_0 \Gamma_p^a)^2} (\not{p} + M_a) \mathcal{C}^\dagger}_{-i\mathcal{G}_{aa}^-(p_0, \vec{p})} \\ &= -\frac{i}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \mathcal{G}_{aa}^-(p_0, \vec{p}), \end{aligned} \quad (3.61)$$

portanto, a condição que indica o equilíbrio, a condição KMS, é satisfeita no limite em que a média das coordenadas tende a infinito, isto é, a universalidade está presente nas soluções, o que demonstra a validade das mesmas [55, 52].

Para o caso das componentes fora da diagonal,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) &= \int_0^{x_0} dz_0 \int_0^{y_0} dw_0 \left\{ \mathcal{G}_{aa}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C} \Sigma_{ab}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{bb}^-(w_0 - y_0; \vec{p}) \right. \\ &\quad + \mathcal{G}_{ab}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C} \Sigma_{bb}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{bb}^-(w_0 - y_0; \vec{p}) \\ &\quad \left. + \mathcal{G}_{aa}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{C} \Sigma_{aa}^+(z_0 - w_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{ab}^-(w_0 - y_0; \vec{p}) \right\}, \end{aligned}$$

deve-se adotar o mesmo procedimento, embora apresente maior dificuldade já que em muitos casos não é possível fazer simplificações devido a que as integrais devem ser avaliadas nas duas possíveis energias do sistema $\omega_p^{a,b}$. Não obstante, utilizando esse procedimento encontramos a integral de memória para as componentes fora da diagonal,

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0; \vec{p}) = \mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(x_0, y_0; \vec{p}) + \mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(x_0, y_0; \vec{p}), \quad (3.62)$$

sendo⁷

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(x_0, y_0; \vec{p}) &= -\frac{1}{8\omega_p^a \omega_p^b} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^b}{2}\right) \sum_{k,l=\pm 1} \frac{ik\zeta_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b)}{k\omega_p^a - l\omega_p^b - i\Gamma_{ab}} \left\{ \theta(t) e^{(-ik\omega_p^a - \Gamma_p^a/2)t} \right. \\ &\quad \left. + \theta(-t) e^{(-il\omega_p^b + \Gamma_p^b/2)t} - e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0) - \frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.63a)$$

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(x_0, y_0; \vec{p}) = \sum_{\substack{c=a,b \\ j=\pm 1}} \frac{i}{8\omega_p^c} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^c}{2}\right) \xi_{ab}^{(c)}(-j\omega_p^c) \eta_{ab}(j\omega_p^c) e^{-ij\omega_p^c t} \left\{ e^{-\Gamma_p^c/2|t|} - e^{-\Gamma_p^c \tau} \right\} \quad (3.63b)$$

⁷Escrevemos aqui $\xi_{ab}^{(c)}(\pm\omega_p^c) := \xi_{ab}^{(c)}(\pm\omega_p^a, \pm\omega_p^b)$ por simplicidade na notação. Ver as definições (3.51)

sendo $\Gamma_{ab} := \frac{1}{2}(\Gamma_p^a + \Gamma_p^b)$ e

$$\zeta_{ij}^-(\omega_1, \omega_2) := (\omega_1 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_i) i \Sigma_{ij}^-(\omega_2; \vec{p}) (\omega_2 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_j) \mathcal{C}^\dagger. \quad (3.64)$$

Em vez de demonstrarmos a derivação da integral de memória (3.62), vamos provar que se cumprem as condições iniciais e a universalidade. Para $x_0 = y_0 = 0$, temos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{+m}(0, 0; \vec{p}) &= -\frac{1}{8\omega_p^a \omega_p^b} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^b}{2}\right) \sum_{k,l=\pm 1} \frac{ik\zeta_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b)}{k\omega_p^a - l\omega_p^b - i\Gamma_{ab}} \{\theta(0) + \theta(0) - 1\} + 0, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde utilizamos que $\theta(0) = \frac{1}{2}$. Assim, no tempo inicial não há efeitos de memória. Agora, para tomarmos o limite $\tau \rightarrow \infty$, vamos considerar separadamente as duas partes da integral de memória (3.62). Para o caso da parte $\mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(x_0, y_0; \vec{p})$, reescrevemos o último termo de (3.63a) usando as definições de t e τ , segundo,

$$\begin{aligned} e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0) - \frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)} &= e^{-i[(k\omega_p^a - l\omega_p^b)t - \frac{1}{2}(k\omega_p^a + l\omega_p^b)\tau] - \frac{1}{2}[(\Gamma_p^a + \Gamma_p^b)\tau + \frac{t}{2}(\Gamma_p^a - \Gamma_p^b)]} \\ e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0) - \frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)} &\xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

portanto, a primeira parte da integral de memória fica

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(t, \infty; \vec{p}) &= -\frac{1}{8\omega_p^a \omega_p^b} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^b}{2}\right) \sum_{k,l=\pm 1} \frac{ik\zeta_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b)}{k\omega_p^a - l\omega_p^b - i\Gamma_{ab}} \left\{ \theta(t) e^{(-ik\omega_p^a - \Gamma_p^a/2)t} \right. \\ &\quad \left. + \theta(-t) e^{(-il\omega_p^b + \Gamma_p^b/2)t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

tomando a transformada de Fourier com relação a t se obtém,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(p_0, \infty; \vec{p}) &= -\frac{1}{8p_0^2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \zeta_{ab}(p_0, p_0) \sum_{k,l=\pm 1} \frac{k}{(p_0 - k\omega_p^a + i\Gamma_p^a/2)(p_0 - l\omega_p^b - i\Gamma_p^b/2)} \\ &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \underbrace{\frac{p^2 - M_a^2}{(p^2 - M_a^2)^2 + (p_0 \Gamma_p^a)^2} \eta_{ab}^-(p) \frac{p^2 - M_b^2}{(p^2 - M_b^2)^2 + (p_0 \Gamma_p^b)^2}}_{-i\mathcal{G}_{ab}^-(p)} \\ &= -\frac{i}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \mathcal{G}_{ab}^-(p), \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde utilizamos que $\zeta_{ab}(p_0, p_0) = \eta_{ab}^-(p)$. Deste modo, no limite $\tau \rightarrow \infty$, a primeira parte da integral de memória cumpre a condição KMS, e, portanto, nesta parte está contido o equilíbrio térmico. Assim, podemos afirmar que a universalidade está presente no sistema. Agora, para o caso da segunda parte da integral de memória, $\mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(x_0, y_0; \vec{p})$, ao tomarmos o limite $\tau \rightarrow \infty$, fica

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(t, \infty; \vec{p}) = \frac{i}{8} \sum_{\substack{c=a,b \\ k=\pm 1}} \frac{1}{\omega_p^c} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^c}{2}\right) \xi_{ab}^{(c)}(-k\omega_p^c) \eta_{ab}(k\omega_p^c) e^{-ik\omega_p^c t} e^{-\Gamma_p^c/2|t|},$$

tomando a transformada de Fourier com relação a t , encontramos

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(p_0, \infty; \vec{p}) = \frac{i}{8p_0} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) \sum_{\substack{c=a,b \\ k=\pm 1}} \xi_{ab}^{(c)}(-k\omega_p^c) \eta_{ab}(k\omega_p^c) \frac{\Gamma_p^c}{\omega - j\omega_p^c},$$

assim, vemos que $\mathcal{G}_{ab}^{+m(2)}(p_0, \infty; \vec{p})$ contribui a uma ordem superior ($\mathcal{O}(h^2)$) e, portanto, podemos desprezar sua contribuição no limite térmico. Em consequência, é possível afirmar que as condições iniciais e de universalidade são cumpridas pela integral de memória das componentes fora da diagonal (3.62).

Não obstante, devemos notar que a primeira parte da integral de memória (3.63a) possui uma forma pouco simétrica, já que a tangente hiperbólica está avaliada na energia associada ao neutrino N_b . Assim, podemos nos perguntar se há algum modo de “simetrizar” esta primeira parte da integral de memória. Para isto, vamos aplicar as propriedades de simetria. Da definição da função estatística a partir das funções de Wightman, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^+(x, y)_{\alpha\lambda} &= \frac{1}{2} \{ \langle N_{a\alpha}(x) N_{b\lambda}(y) \rangle - \langle N_{b\lambda}(y) N_{a\alpha}(x) \rangle \} \\ \mathcal{G}_{ab}^+(x, y)_{\alpha\lambda} &= -\mathcal{G}_{ba}^+(y, x)_{\lambda\alpha}, \end{aligned}$$

tomando a transformada de Fourier com relação às coordenadas espaciais, a propriedade de simetria fica,

$$\mathcal{G}_{ab}^+(x_0, y_0, \vec{p}) = -\mathcal{G}_{ba}^+(y_0, x_0, -\vec{p})^T, \quad (3.68)$$

onde o T indica a transposta com relação aos índices de Dirac. Como veremos na seção seguinte, a parte homogênea é construída de modo que cumpra a anterior propriedade de simetria, logo, a integral de memória precisa cumprir a condição,⁸

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m}(x_0, y_0, \vec{p}) = -\mathcal{G}_{ba}^{+m}(y_0, x_0, -\vec{p})^T.$$

calculando $\mathcal{G}_{ba}^{+m(1)}(y_0, x_0, -\vec{p})^T$ encontramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ba}^{+m(1)}(y_0, x_0, -\vec{p})^T &= \frac{1}{8\omega_p^a \omega_p^b} \tanh\left(\frac{\beta \omega_p^a}{2}\right) \sum_{k,l=\pm 1} \frac{il \chi_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b)}{k\omega_p^a - l\omega_p^b - i\Gamma_{ab}} \left\{ \theta(t) e^{(-ik\omega_p^a - \Gamma_p^a/2)t} \right. \\ &\quad \left. + \theta(-t) e^{(-il\omega_p^b + \Gamma_p^b/2)t} - e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0) - \frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

com

$$\chi_{ab}^-(\omega_1, \omega_2) := (\omega_1 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_a) i \Sigma_{ab}^-(\omega_1; \vec{p}) (\omega_2 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_b) \mathcal{C}^\dagger. \quad (3.70)$$

É claro que a primeira parte da integral de memória não cumpre a propriedade de simetria (3.68). Não obstante, vemos que a estrutura temporal não é modificada e é idêntica àquela que possui tal primeira parte (3.63a), pelo que a condição inicial e a universalidade são obedecidas também por $\mathcal{G}_{ba}^{+m(1)}(y_0, x_0, -\vec{p})^T$. Assim, vamos modificar esta primeira parte da integral de memória (3.63a) por

$$\mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(x_0, y_0, \vec{p}) \longrightarrow \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{ab}^{+m(1)}(x_0, y_0, \vec{p}) - \mathcal{G}_{ba}^{+m(1)}(y_0, x_0, -\vec{p})^T \right).$$

⁸É possível verificar que as componentes na diagonal cumprem essa condição.

Por outro lado, ao calcular $\mathcal{G}_{ba}^{+m(2)}(y_0, x_0, -\vec{p})^T$ é possível verificar que a segunda parte da integral de memória (3.63b) cumpre a propriedade de simetria (3.68). Assim, temos que a integral de memória para as componentes fora da diagonal é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{+m}(t, \tau, \vec{p}) = & \sum_{\substack{c=a,b \\ k=\pm 1}} \frac{i}{8\omega_p^c} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^c}{2}\right) \xi_{ab}^{(c)}(-k\omega_p^c) \eta_{ab}(k\omega_p^c) e^{-ik\omega_p^c t} \left\{ e^{-\Gamma_p^c/2|t|} - e^{-\Gamma_p^c \tau} \right\} \\ & - \frac{i}{16\omega_p^a \omega_p^b} \sum_{k,l=\pm 1} \frac{1}{k\omega_p^a - l\omega_p^b - i\Gamma_{ab}} \left\{ \theta(t) e^{(-ik\omega_p^a - \Gamma_p^a/2)t} + \theta(-t) e^{(-il\omega_p^b + \Gamma_p^b/2)t} \right. \\ & \quad \left. - e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0) - \frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)} \right\} \times \\ & \quad \left[l\chi_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^a}{2}\right) + k\zeta_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^b}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

Com as integrais de memória determinadas, podemos passar a calcular as soluções homogêneas.

Solução homogênea

Resolvemos agora a equação para a parte homogênea

$$(i\gamma^0 \partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa}) \mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) - \int_0^{x_0} dz_0 \Sigma_{ac}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{cb}^{+h}(z_0, y_0; \vec{p}) = 0. \quad (3.72)$$

Olhando a estrutura dessa equação, vemos que é idêntica à equação que cumpre a função espectral, logo, vamos supor o seguinte *ansatz*,

$$\mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) = \mathcal{G}_{ac}^-(x_0; \vec{p}) L_{cb}(y_0; \vec{p}), \quad (3.73)$$

com $L_{cb}(y_0; \vec{p})$ uma função a determinar. É claro que este *ansatz* cumpre a equação,

$$\underbrace{\left[(i\gamma^0 \partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{aa}) \mathcal{G}_{ac}^-(x_0; \vec{p}) - \int_0^{x_0} dz_0 \Sigma_{ad}^-(x_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{dc}^-(z_0; \vec{p}) \right]}_{=0} L_{cb}(y_0; \vec{p}) = 0. \quad (3.74)$$

Para determinarmos a função $L_{cb}(y_0; \vec{p})$, devemos aplicar a propriedade de simetria (3.68) que possui a função estatística. Deste modo, fazendo as substituições $x_0 \leftrightarrow y_0$ e $a \leftrightarrow b$ na equação homogênea temos que,

$$(i\gamma^0 \partial_{x_0} - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_{bb}) \mathcal{G}_{ba}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) - \int_0^{x_0} dz_0 \Sigma_{bc}^-(y_0 - z_0; \vec{p}) \mathcal{G}_{ca}^{+h}(z_0, x_0; \vec{p}) = 0.$$

cuja solução é

$$\mathcal{G}_{ba}^{+h}(y_0, x_0; \vec{p}) = \mathcal{G}_{bd}^-(y_0; \vec{p}) \tilde{L}_{da}(x_0; \vec{p}),$$

assim, a partir da propriedade (3.68), podemos encontrar uma relação entre $L_{cb}(y_0; \vec{p})$ e $\tilde{L}_{da}(x_0; \vec{p})$

$$\mathcal{G}_{bd}^-(y_0; \vec{p}) \tilde{L}_{da}(x_0; \vec{p}) = -L_{bc}(y_0; -\vec{p})^T \mathcal{G}_{ca}^-(x_0; -\vec{p})^T,$$

como vemos, as funções L e $\tilde{L}$ devem ser proporcionais às funções $\mathcal{G}_{ab}^-(y_0; \vec{p})$, $\mathcal{G}_{ab}^-(x_0; \vec{p})$ respectivamente, logo, escolhemos,

$$\begin{aligned} L_{cb}(y_0; \vec{p}) &= -\mathcal{M}_{cd}(0, 0; \vec{p}) \mathcal{G}_{ab}^-(y_0; -\vec{p})^T \\ \tilde{L}_{da}(x_0; \vec{p}) &= \mathcal{M}_{dc}(0, 0; -\vec{p})^T \mathcal{G}_{ca}^-(x_0; -\vec{p})^T, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{M}_{cd}(0, 0; \vec{p}) = -\mathcal{M}_{dc}(0, 0; -\vec{p})^T$ vai depender das condições iniciais. Assim, a solução homogênea fica

$$\mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) = -\mathcal{G}_{ac}^-(x_0; \vec{p}) \mathcal{M}_{cd}(0, 0; \vec{p}) \mathcal{G}_{cb}^-(y_0; -\vec{p})^T.$$

Notando que as soluções para a função espectral cumprem a condição $\mathcal{G}_{ab}^-(x_0; \vec{p})^T = \mathcal{G}_{ba}^-(-x_0; -\vec{p})$, temos que a solução homogênea fica,

$$\mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) = -\mathcal{G}_{ac}^-(x_0; \vec{p}) \mathcal{M}_{cd}(0, 0; \vec{p}) \mathcal{G}_{cb}^-(-y_0; \vec{p}). \quad (3.75)$$

Nas referências [53, 52] se escreve a matriz $\mathcal{M}_{cd}(0, 0; \vec{p})$ do seguinte modo

$$\mathcal{M}_{cd}(0, 0; \vec{p}) = \mathcal{C} \gamma^0 \mathcal{G}_{cd}^{+h}(0, 0; \vec{p}) \gamma^0 \mathcal{C}^\dagger, \quad (3.76)$$

sendo $\mathcal{G}_{cd}^{+h}(0, 0; \vec{p})$ uma matriz antisimétrica que corresponde às condições iniciais. Vamos escolher o caso em que não há neutrinos de mão direita em $x_0 = y_0 = 0$, ou seja, vamos considerar uma abundância inicial nula, o que se equiparará a condições iniciais de vácuo. Tais propagadores de vácuo podem se obter a partir daqueles no equilíbrio ao tomar o limite $\beta \rightarrow \infty$ [65]

$$\mathcal{G}_{ab}^{+h}(0, 0; \vec{p}) = \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{2\omega_p^a} \mathcal{C}^\dagger \delta_{ab}. \quad (3.77)$$

A solução homogênea para condições de vácuo é dada por

$$\mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) = -\mathcal{G}_{ac}^-(x_0; \vec{p}) \mathcal{C} \gamma^0 \frac{M_c - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{2\omega_p^c} \gamma^0 \mathcal{G}_{cb}^-(-y_0; \vec{p}). \quad (3.78)$$

Com tem sido feito até agora, vamos considerar o termo dominante nessas expressões, separando para o caso das componentes na e fora da diagonal. Para o primeiro caso, teremos que o termo dominante é (não há soma)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{aa}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) &= -\mathcal{G}_{aa}^-(x_0; \vec{p}) \mathcal{C} \gamma^0 \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{2\omega_p^a} \gamma^0 \mathcal{G}_{aa}^-(-y_0; \vec{p}) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ i\gamma^0 \sin \omega_p^a(x_0 - y_0) - \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \cos \omega_p^a(x_0 - y_0) \right\} e^{-\frac{\Gamma_p^a}{2}(x_0 + y_0)} \mathcal{C}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.79)$$

enquanto que, para as componentes fora da diagonal, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{ab}^{+h}(x_0, y_0; \vec{p}) &= -\mathcal{G}_{aa}^-(x_0; \vec{p}) \mathcal{C} \gamma^0 \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{2\omega_p^a} \gamma^0 \mathcal{G}_{ab}^-(-y_0; \vec{p}) \\
&\quad - \mathcal{G}_{ab}^-(x_0; \vec{p}) \mathcal{C} \gamma^0 \frac{M_b - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{2\omega_p^b} \gamma^0 \mathcal{G}_{bb}^-(-y_0; \vec{p}) \\
&= \sum_{c=a,b} \frac{i}{8\omega_p^c} \left\{ \xi_{ab}^{(c)*} \eta_{ab}(\omega_p^c) e^{-i\omega_p^c t} + \xi_{ab}^{(c)} \eta_{ab}(-\omega_p^c) e^{i\omega_p^c t} \right\} e^{-\Gamma_p^c \tau} \\
&\quad - \frac{i e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)}}{16\omega_p^a \omega_p^b} \sum_{k,l=\pm 1} (k\omega_p^a + l\omega_p^b) \left\{ k \xi_{ab}^{(a)}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \chi_{ab}^-(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \right. \\
&\quad \left. + l \xi_{ab}^{(b)}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \zeta_{ab}^-(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \right\} e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0)}. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Esses resultados permitem escrever as soluções para as funções estatísticas:

Componentes na diagonal

$$\mathcal{G}_{aa}^+(t, \tau; \vec{p}) = \left\{ i\gamma^0 \sin \omega_p^a t - \frac{M_a - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\omega_p^a} \cos \omega_p^a t \right\} \left\{ f_F(\omega_p^a) e^{-\Gamma_p^a \tau} - \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\beta \omega_p^a}{2} \right) e^{-\frac{\Gamma_p^a}{2}|t|} \right\} \mathcal{C}^\dagger, \tag{3.81}$$

Componentes fora da diagonal

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{ab}^+(t, \tau; \vec{p}) &= -\frac{\tanh \left(\frac{\beta \omega_p^b}{2} \right)}{8\omega_p^a \omega_p^b} \sum_{k,l=\pm 1} \frac{ik \zeta_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b)}{k\omega_p^a - l\omega_p^b - i\Gamma_{ab}} \left\{ \theta(t) e^{-(ik\omega_p^a + \frac{\Gamma_p^a}{2})t} + \theta(-t) e^{-(il\omega_p^b - \frac{\Gamma_p^b}{2})t} \right\} \\
&\quad - \frac{i e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)}}{16\omega_p^a \omega_p^b} \sum_{k,l=\pm 1} (k\omega_p^a + l\omega_p^b) e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0)} \sigma_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b), \\
&\quad + \sum_{\substack{c=a,b \\ j=\pm 1}} \frac{i}{8\omega_p^c} \xi_{ab}^{(c)}(-j\omega_p^c) \eta_{ab}(j\omega_p^c) e^{-ij\omega_p^c t} \left\{ \tanh \left(\frac{\beta \omega_p^c}{2} \right) e^{-\frac{\Gamma_p^c}{2}|t|} + 2f_F(\omega_p^c) e^{-\Gamma_p^c \tau} \right\} \tag{3.82}
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\sigma_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) &:= \left(k \xi_{ab}^{(a)}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) - l \tanh \left(\frac{\beta \omega_p^a}{2} \right) \xi_{ab}^{(4)}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \right) \chi_{ab}^-(k\omega_p^a, l\omega_p^b) + \\
&\quad \left(l \xi_{ab}^{(b)}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) - k \tanh \left(\frac{\beta \omega_p^b}{2} \right) \xi_{ab}^{(4)}(k\omega_p^a, l\omega_p^b) \right) \zeta_{ab}^-(k\omega_p^a, l\omega_p^b), \tag{3.83}
\end{aligned}$$

e

$$\xi_{ab}^{(4)}(\omega_p^a, \omega_p^b) := \frac{1}{M_a^2 - M_b^2 - i(\omega_p^a \Gamma_p^a + \omega_p^b \Gamma_p^b)}. \tag{3.84}$$

As soluções que encontramos nesse capítulo para as equações de Kadanoff-Baym no contexto da lagrangeana (3.1) permitirão calcular a assimetria leptônica e a sua dependência

tanto no tempo quanto nos momentos e massas dos neutrinos. É claro que para obtermos tais soluções só supomos que os acoplamentos de Yukawa dos neutrinos de mão direita são muito menores que os outros acoplamentos presentes no Modelo Padrão. Porém, ainda é necessário introduzir a expansão do Universo para ter uma descrição que possa ser considerada como completa. O que foi desenvolvido até aqui pode ser considerado como um dos passos iniciais para lograr o objetivo de ter uma descrição completa da leptogênese.

Neste capítulo se apresentou a primeira parte do programa para o estudo da geração e evolução da assimetria leptônica, que consiste em considerarmos as equações de Kadanoff-Baym e suas soluções para a evolução dos neutrinos de mão direita. No próximo capítulo, vamos estudar a segunda parte que consistirá em determinarmos a assimetria leptônica. Como veremos, tal assimetria vai depender diretamente das equações de Kadanoff-Baym para os léptons do Modelo Padrão que serão obtidas da mesma ação efetiva $2PI$ considerada neste capítulo.

CAPÍTULO 4

ASSIMETRIA LEPTÔNICA NO FORMALISMO DE SCHWINGER-KELDysh

4.1 Introdução

A segunda parte do esquema para a descrição da leptogênese no formalismo da TQCfe consiste em determinarmos a evolução de uma quantidade que carregue a informação da assimetria leptônica a partir das funções espectral e estatística dos neutrinos de mão direita fora do equilíbrio obtidas no capítulo anterior, cap. 3. Como veremos a seguir, essa quantidade, que corresponderá a carga conservada de Noether, vai depender das funções espectral e estatística associadas aos léptons ativos do MP, logo, o que denominaremos assimetria leptônica vai evoluir segundo a dinâmica descrita pelas equações de Kadanoff-Baym para léptons.

Uma consideração importante que vamos levar em conta é que as condições de Sakharov precisam ser obedecidas sem importar o formalismo que seja utilizado na descrição da geração e evolução de assimetria. Portanto, no presente capítulo, vamos aplicar essas condições para simplificar os resultados. Além disso, vamos considerar um *ansatz* que tem sido utilizado na literatura para descrever de modo formal como é o comportamento do banho térmico através de uma modificação das funções espectral e estatística dos campos livres de escalares e férmions, obtidas no capítulo 2.

4.2 Definição da Assimetria

Do caso padrão, sabemos que a assimetria leptônica é obtida tomando a diferença entre as funções de distribuição de número de léptons e antiléptons para logo determinar sua evolução temporal usando a equação de Boltzmann. Porém, para descrevermos a leptogênese no formalismo de Schwinger-Keldysh, devemos determinar uma grandeza que carregue a informação da geração e evolução temporal da assimetria leptônica em termos de funções de Green fora do equilíbrio. Então, a pergunta neste ponto é, qual é a quantidade que da conta da assimetria na TQCfe?

Em primeiro lugar, se não tivermos assimetria a corrente [65]

$$j_{ab}^\mu(x) = \overline{l_{a\alpha}^A}(x) \gamma_{\alpha\beta}^\mu l_{b\beta}^A(x) \quad (4.1)$$

será conservada, já que os processos que geram “novos” léptons em um sistema fechado estão em equilíbrio térmico com aqueles que os aniquilam, de forma que não haverá mudança líquida do número leptônico. Deste modo, o valor esperado da corrente acima vai dar conta das possíveis variações produzidas por efeitos que mudem a quantidade de léptons.

Escrevemos o valor esperado como [52, 65]

$$\begin{aligned} j_{ab}^\mu(x) &:= \langle j_{ab}^\mu(x) \rangle = \langle \overline{l_{a\alpha}^A}(x) \gamma_{\alpha\beta}^\mu l_{b\beta}^A(x) \rangle \\ &= -\gamma_{\alpha\beta}^\mu \langle l_{b\beta}^A(x) \overline{l_{a\alpha}^A}(y) \rangle|_{x=y} \\ &= -\gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)_{\beta\alpha}^{AA}|_{x=y} \\ &= -\text{Tr}\{\gamma^\mu \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)^{AA}\}|_{x=y}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

com $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)_{\beta\alpha}^{AA}$ o propagador fora do equilíbrio dos léptons definido no capítulo 3. É claro que o propagador está ordenado no contorno $\mathcal{C}_{KB}$ pois $x_0 = y_0$. Isso implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)_{\beta\alpha}^{AA}|_{x=y} &= \mathcal{S}_{ba}^+(x, y)_{\beta\alpha}^{AA}|_{x=y} - \frac{i}{2} \underbrace{\text{sgn}_{\mathcal{C}}(x_0 - y_0)}_0 \mathcal{S}_{ba}^-(x, y)_{\beta\alpha}^{AA}|_{x=y}, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)_{\beta\alpha}^{AA}|_{x=y} &= \mathcal{S}_{ba}^+(x, y)_{\beta\alpha}^{AA}|_{x=y}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

logo, vemos que a informação do valor esperado da corrente está contida no propagador estatístico associado aos léptons. Em presença de termos que violam número leptônico, temos que a divergência da corrente 4.2 não é nula, logo

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x j_{ab}^\mu(x) &= -\text{Tr}\{\gamma^\mu \partial_\mu^x \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)^{AA}\}|_{x=y} \\ &= -\text{Tr}\{\not{\partial}_x \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)^{AA} + \not{\partial}_y \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(x, y)^{AA}\}|_{x=y}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Deste modo, a divergência da corrente será a quantidade que estudaremos para determinarmos a geração e evolução da assimetria leptônica. Assim, devido à aparição do propagador fora do equilíbrio podemos relacionar a quadri-divergência anterior com as equações de Kadanoff-Baym, como veremos a seguir.

4.3 Assimetria Leptônica e Equações de Kadanoff-Baym

A equação de Schwinger-Dyson para o propagador de léptons pode ser obtida a partir da ação efetiva $2PI$ do mesmo modo ao feito anteriormente,

$$\frac{\delta\Gamma[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}^{BA}} = 0,$$

que está dada, na sua forma integro-diferencial, por

$$i\not{\partial}_x \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)^{AB} - i(\Xi_{\mathcal{C}} \odot \mathcal{S}_{\mathcal{C}})^{ab}(x, y)^{AB} = i\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y)\delta_{ab}\delta_{AB}, \quad (4.5)$$

onde a autoenergia é definida a partir da contribuição $2PI$ do modo similar ao caso dos neutrinos, [65]

$$i\Xi_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta}^{AB} := \frac{\delta\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}^{BA}}.$$

Definimos as funções espectral e estatística

$$\mathcal{S}_{ab}^+(x, y)^{AB} := \frac{1}{2} \left\langle \left[l_a^A(x), \overline{l_b^B}(y) \right] \right\rangle, \quad (4.6a)$$

$$\mathcal{S}_{ab}^-(x, y)^{AB} := i \left\langle \left\{ l_a^A(x), \overline{l_b^B}(y) \right\} \right\rangle. \quad (4.6b)$$

que obedecerão as equações de Kadanoff-Baym,

$$i\partial_x \mathcal{S}_{ab}^-(x, y)^{AB} = \int_{y_0}^{x_0} d^4z \Xi_{ac}^-(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{cb}^-(z, y)^{CB}. \quad (4.7a)$$

$$i\partial_x \mathcal{S}_{ab}^+(x, y)^{AB} = - \int_0^{y_0} d^4z \Xi_{ac}^+(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{cb}^-(z, y)^{CB} + \int_0^{x_0} d^4z \Xi_{ac}^-(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{cb}^+(z, y)^{CB}. \quad (4.7b)$$

Tomando o hermiteano conjugado da equação para a função estatística, teremos a equação [55, 52]

$$i\mathcal{S}_{ba}^+(y, x)^{BA} \overleftarrow{\partial}_x = - \int_0^{y_0} d^4z \mathcal{S}_{bc}^-(y, z)^{BC} \Xi_{ca}^+(z, x)^{CA} + \int_0^{x_0} d^4z \mathcal{S}_{bc}^+(y, z)^{BC} \Xi_{ca}^-(z, x)^{CA}, \quad (4.8)$$

onde utilizamos a propriedade das matrizes de Dirac $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ e as propriedades [54, 55, 53, 52]

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ab}^+(x, y)^{AB})^\dagger &= \gamma^0 \mathcal{S}_{ba}^+(y, x)^{BA} \gamma^0, \\ (\mathcal{S}_{ab}^-(x, y)^{AB})^\dagger &= -\gamma^0 \mathcal{S}_{ba}^-(y, x)^{BA} \gamma^0. \end{aligned}$$

Fazendo uso das equações de Kadanoff-Baym escritas anteriormente, temos que a divergência do valor esperado da corrente fica,

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu (j_{ab})_\mu(x) &= i \text{Tr} \{ i\partial_x \mathcal{S}_{ba}^+(x, y)^{AA} + \mathcal{S}_{ba}^+(x, y)^{AA} \overleftarrow{\partial}_y \} |_{x=y} \\ &= i \text{Tr} \left\{ \int_0^{x_0} d^4z \Xi_{bc}^-(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{ca}^+(z, y)^{CA} - \int_0^{y_0} d^4z \Xi_{bc}^+(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{ca}^-(z, y)^{CA} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{x_0} d^4z \mathcal{S}_{bc}^+(y, z)^{AC} \Xi_{ca}^-(z, x)^{CA} - \int_0^{y_0} d^4z \mathcal{S}_{bc}^-(y, z)^{AC} \Xi_{ca}^+(z, x)^{CA} \right\} \Big|_{x=y}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Assim, já que o sistema é homogêneo no espaço tridimensional temos que $\partial_\mu^x j_{ab}^\mu(x) = \partial_{x_0} j_{ab}^0(x_0)$, ou seja, a divergência só terá dependência no tempo [65], definimos a assimetria leptônica como

$$n_{ab}^L(x_0) := j_{ab}^0(x_0) = \langle j_{ab}^0(x_0) \rangle. \quad (4.10)$$

A equação de movimento da assimetria fica

$$\partial_{x_0} n_{ab}^L(x_0) = i \int_0^{x_0} d^4 z \operatorname{Tr} \left\{ \Xi_{bc}^-(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{ca}^+(z, x)^{CA} - \Xi_{bc}^+(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{ca}^-(z, x)^{CA} \right. \\ \left. + \mathcal{S}_{bc}^+(x, z)^{AC} \Xi_{ca}^-(z, x)^{CA} - \mathcal{S}_{bc}^-(x, z)^{AC} \Xi_{ca}^+(z, x)^{CA} \right\}, \quad (4.11)$$

integrando em x_0 entre $[0, t]$ e tomando a assimetria inicial como zero, temos que [52, 65]

$$n_{ab}^L(t) = i \int_0^t dx_0 \int_0^{x_0} d^4 z \operatorname{Tr} \left\{ \Xi_{bc}^-(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{ca}^+(z, x)^{CA} - \Xi_{bc}^+(x, z)^{AC} \mathcal{S}_{ca}^-(z, x)^{CA} \right. \\ \left. + \mathcal{S}_{bc}^+(x, z)^{AC} \Xi_{ca}^-(z, x)^{CA} - \mathcal{S}_{bc}^-(x, z)^{AC} \Xi_{ca}^+(z, x)^{CA} \right\}. \quad (4.12)$$

Considerando que o sistema está em um estado $SU(2)_L$ simétrico e supondo que o propagador de léptons é quase diagonal,

$$\mathcal{S}_{ab}^+(x, y)^{AB} \approx \delta_{ab} \delta_{AB} \mathcal{S}^+(x, y)^{AB},$$

a equação *mestra* para a geração da assimetria leptônica é

$$n_{ab}^L(t) = i \int_0^t dx_0 \int_0^{x_0} d^4 z \operatorname{Tr} \left\{ \Xi_{ba}^-(x, z)^{AA} \mathcal{S}^+(z, x) - \Xi_{ba}^+(x, z)^{AA} \mathcal{S}^-(z, x) \right. \\ \left. + \mathcal{S}^+(x, z) \Xi_{ba}^-(z, x)^{AA} - \mathcal{S}^-(x, z) \Xi_{ba}^+(z, x)^{AA} \right\}, \quad (4.13)$$

a qual, depois de tomarmos a transformada de Fourier com relação às coordenadas espaciais,

$$\mathcal{S}^+(x, y) = \mathcal{S}^+(x_0, y_0; \vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{S}^+(x_0, y_0; \vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}, \\ \Xi_{ab}^-(z, x)^{AB} = \Xi_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{x} - \vec{y})^{AB} = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \Xi_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{q})^{AB} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})},$$

fica,

$$n_{ab}^L(t) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} n_{ab}^L(t; \vec{q}), \quad (4.14)$$

sendo¹

$$n_{ab}^L(t; \vec{q}) = i \int_0^t dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 \operatorname{Tr} \left\{ \Xi_{ba}^-(x_0, y_0; \vec{q})^{AA} \mathcal{S}^+(y_0, x_0; \vec{q}) - \Xi_{ba}^+(x_0, y_0; \vec{q})^{AA} \mathcal{S}^-(y_0, x_0; \vec{q}) \right\}. \quad (4.15)$$

Notemos que essa relação para a assimetria é independente das interações de léptons e outros campos do Modelo Padrão que tomem parte no processo. Porém, as interações com os neutrinos de mão direita são as que geram a assimetria, enquanto que as outras interações procuram reestabelecer o equilíbrio (produzem o *washout*). Assim, na hora de determinarmos a autoenergia dos léptons, só vamos considerar a lagrangeana (3.1) introduzida no capítulo anterior, ou seja, nesta abordagem não consideramos processos de *washout*.

¹Aqui utilizamos que [52, 65]

$$\int_0^t dt \int_0^{t'} dt'' \{f(t', t'') + f(t'', t')\} = \int_0^t dt \int_0^t dt'' f(t', t'')$$

4.3.1 Autoenergia dos Léptons

Procedendo do mesmo modo ao feito anteriormente, é possível obter a autoenergia dos léptons,

$$i\Xi_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta}^{AB} := \frac{\delta\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}^{BA}},$$

que é dada por

$$\Xi_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta}^{AB} = Y_{ad}^{\dagger} Y_{cb} \varepsilon_{EB} \varepsilon_{AD} \Delta_{\mathcal{C}}(y, x)^{ED} P_R \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cd}(x, y) \mathcal{C} P_L, \quad (4.16)$$

considerando um estado $SU(2)_L$ simétrico e após tomar a soma sobre os índices de $SU(2)_L$, a autoenergia toma uma forma mais simples,

$$\Xi_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y) = -2Y_{ad}^{\dagger} Y_{cb} \Delta_{\mathcal{C}}(y, x) P_R \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cd}(x, y) \mathcal{C} P_L, \quad (4.17)$$

As componentes espectral e estatística podem ser obtidas do mesmo modo que nos casos anteriores. Elas são dadas por

$$\Xi_{ab}^{-}(x, y) = 2Y_{ad}^{\dagger} Y_{cb} \left\{ \Delta^{-}(y, x) P_R \mathcal{G}_{cd}^{+}(x, y) \mathcal{C} P_L - \Delta^{+}(y, x) P_R \mathcal{G}_{cd}^{-}(x, y) \mathcal{C} P_L \right\}, \quad (4.18a)$$

$$\Xi_{ab}^{+}(x, y) = -2Y_{ad}^{\dagger} Y_{cb} \left\{ \Delta^{+}(y, x) P_R \mathcal{G}_{cd}^{+}(x, y) \mathcal{C} P_L + \frac{1}{4} \Delta^{-}(y, x) P_R \mathcal{G}_{cd}^{-}(x, y) \mathcal{C} P_L \right\}. \quad (4.18b)$$

Depois de tomarmos a transformada de Fourier dessas expressões com relação às coordenadas espaciais e introduzindo os resultados (4.18), temos que a assimetria leptônica é dada por

$$\begin{aligned} n_{ab}^L(t; \vec{q}) = & 2iY_{bd}^{\dagger} Y_{ca} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p} + \vec{q}) \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 \\ & \times \text{Tr} \left\{ P_R \mathcal{G}_{cd}^{+}(x_0, y_0; \vec{p}) \mathcal{C} P_L \Delta^{-}(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^{+}(y_0, x_0; \vec{q}) \right. \\ & - P_R \mathcal{G}_{cd}^{-}(x_0, y_0; \vec{p}) \mathcal{C} P_L \Delta^{+}(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^{+}(y_0, x_0; \vec{q}) \\ & + P_R \mathcal{G}_{cd}^{+}(x_0, y_0; \vec{p}) \mathcal{C} P_L \Delta^{+}(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^{-}(y_0, x_0; \vec{q}) \\ & \left. + \frac{1}{4} P_R \mathcal{G}_{cd}^{-}(x_0, y_0; \vec{p}) \mathcal{C} P_L \Delta^{-}(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^{-}(y_0, x_0; \vec{q}) \right\}. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Queremos aqui calcular a assimetria total sem considerar possíveis efeitos de sabor, para isso, tomamos a soma das componentes na diagonal,

$$n_L(t; \vec{q}) := \sum_a n_{aa}^L(t; \vec{q}),$$

Esta será a quantidade que vamos estudar e comparar com os resultados obtidos com a equação de Boltzmann. Antes disso, porém, podemos simplificar ainda mais nosso resultado ao considerarmos as condições de Sakharov.

4.3.2 Condições de Sakharov

Neste ponto devemos aplicar as condições de Sakharov para a assimetria que calculamos. Em primeiro lugar, devemos levar em conta que a violação de CP estará expressa

nas matrizes de Yukawa que consideramos complexas. Porém, no caso das componentes diagonais, temos que a assimetria é proporcional a

$$n_L(t; \vec{q}) \propto \sum_{a,b} Y_{ab}^\dagger Y_{ba} \mathcal{G}_{bb}^\pm(x_0, y_0; \vec{p}) = \sum_b h_{bb} \mathcal{G}_{bb}^\pm(x_0, y_0; \vec{p}), \quad (4.20)$$

sendo a matriz h definida por $h := Y Y^\dagger$. Assim, já que por definição $h_{aa} = h_{aa}^*$, as componentes diagonais não contribuirão para a assimetria, pois não geram violação de CP [65]. Portanto, não consideraremos as componentes diagonais na assimetria.

Por outro lado, a condição de desvio do equilíbrio implica que não devemos considerar os termos de equilíbrio [55, 52], dados pelo propagador espectral,

$$\mathcal{G}_{ab}^-(x_0 - y_0; \vec{p})$$

e pelas componentes dependentes de $t = x_0 - y_0$ do propagador estatístico [55, 52],

$$\mathcal{G}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p}) = \mathcal{G}_{ab}^{+e}(x_0 - y_0; \vec{p}) + \bar{\mathcal{G}}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p}),$$

sendo $\bar{\mathcal{G}}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p})$ o desvio do equilíbrio presente na função estatística. Deste modo, a assimetria fica simplesmente

$$\begin{aligned} n_L(t; \vec{q}) = 2i \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} h_{ba} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p} + \vec{q}) \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 \\ \times \text{Tr} \left\{ P_R \bar{\mathcal{G}}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p}) C P_L \left[\Delta^-(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^+(y_0, x_0; \vec{q}) \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta^+(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^-(y_0, x_0; \vec{q}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.3.3 Larguras dos léptons e Higgs no Banho Térmico

Uma pergunta muito importante que devemos nos fazer é: como podemos introduzir uma expressão completa dos propagadores dos léptons e do Higgs no equilíbrio devido às interações do Modelo Padrão? Ainda não há uma resposta satisfatória para esta pergunta. Não obstante, nas referências [55, 53, 52, 65] introduziu-se um *ansatz* que dá conta do equilíbrio mediante a modificação das funções espectral e estatística de escalares e léptons livres (2.90), (2.95) com fatores de amortecimento térmicos,

$$\Delta^\pm(t; \vec{k}) \longrightarrow e^{-\frac{\Gamma_\phi}{2}|t|} \Delta^\pm(t; \vec{k}) \quad (4.22a)$$

$$\mathcal{S}^\pm(t; \vec{k}) \longrightarrow e^{-\frac{\Gamma_l}{2}|t|} \mathcal{S}^\pm(t; \vec{k}), \quad (4.22b)$$

onde $\Gamma_{\phi,l}$ são as larguras de escalares e léptons respectivamente. Notemos que tais larguras são proporcionais às constantes de acoplamento $\Gamma_{\phi,l} \sim g^2 T$, logo, $\Gamma_{\phi,l} \gg \Gamma_p^a$ já que $g^2 T \gg Y_{ab}^2 M$ para $M \sim T$ [55, 53, 52, 65]. Devemos dizer aqui que embora este *ansatz* parece fornecer resultados corretos, sua validade ainda não foi demonstrada. Para isso precisaríamos determinar os propagadores no equilíbrio com as interações de gauge do Modelo Padrão [53, 52]. Contudo, vamos utilizar este *ansatz* na presente discussão.

Lembrando que as funções livres no equilíbrio são dadas por

$$\Delta^+(t, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_k} \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) \cos(\omega_k t), \quad (2.90)$$

$$\Delta^-(t, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k t), \quad (4.23a)$$

com $\omega_k = |\vec{k}|$ e reescrevendo as funções (2.95) como segue

$$\mathcal{S}^+(t, \vec{q}) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta\omega_q}{2}\right) \frac{1}{2\omega_q} \left\{ \not{q}_+ e^{-i\omega_q t} + \not{q}_- e^{i\omega_q t} \right\}, \quad (4.24a)$$

$$\mathcal{S}^-(t, \vec{q}) = \frac{i}{2\omega_q} \left\{ \not{q}_+ e^{-i\omega_q t} - \not{q}_- e^{i\omega_q t} \right\}, \quad (4.24b)$$

sendo $\not{q}_\pm = (\pm\omega_q \gamma^0 - \vec{q} \cdot \vec{\gamma})$, e $\omega_q = |\vec{q}|$; temos que²

$$\begin{aligned} & \Delta^-(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^+(y_0, x_0; \vec{q}) + \Delta^+(y_0, x_0; \vec{k}) \mathcal{S}^-(y_0, x_0; \vec{q}) \\ &= \frac{ie^{-\Gamma_{l\phi}|y_0-x_0|}}{2\omega_q 2\omega_k} \sum_{m,n=\pm 1} nm f_{FB}(m\omega_q, n\omega_k) e^{-i(m\omega_q+n\omega_k)(y_0-x_0)} \not{q}_m. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por outro lado, a parte fora do equilíbrio dos propagadores é (ver (3.82))

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_{ab}^+(x_0, y_0; \vec{p}) &= \sum_{\substack{c=a,b \\ l=\pm 1}} \frac{i}{4\omega_p^c} f_F(\omega_p^c) \xi_{ab}^{(c)}(-l\omega_p^c) \eta_{ab}(l\omega_p^c) e^{-il\omega_p^c(x_0-y_0)} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p^c(x_0+y_0)} \\ &\quad - \frac{ie^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0)}}{16\omega_p^a \omega_p^b} \sum_{k,l=\pm 1} (k\omega_p^a + l\omega_p^b) e^{-i(k\omega_p^a x_0 - l\omega_p^b y_0)} \sigma_{ab}(k\omega_p^a, l\omega_p^b), \end{aligned} \quad (4.26)$$

assim, introduzindo os resultados de (4.26), vemos que a assimetria pode se dividir em duas contribuições,

$$n_L(t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k}} \int_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p} + \vec{q}) \left\{ n_L^1(t; \vec{p}, \vec{q}, \vec{k}) - n_L^2(t; \vec{p}, \vec{q}, \vec{k}) \right\}, \quad (4.27)$$

com

$$n_L^1 = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \sum_{\substack{j,r=\pm 1 \\ m,n=\pm 1}} \frac{i\hbar_{ba}}{8\omega_p^a \omega_p^b} mn f_{FB}(m\omega_q, n\omega_k) (j\omega_p^a + r\omega_p^b) \text{Tr} \left\{ P_R \sigma_{ab}(j\omega_p^a, r\omega_p^b) \mathcal{C} P_L \not{q}_m \right\} I_1 \quad (4.28a)$$

$$n_L^2 = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \sum_{\substack{c=a,b \\ j,m,n=\pm 1}} \frac{i\hbar_{ba}}{2\omega_p^c} nm f_{FB}(m\omega_q, n\omega_k) f_F(\omega_p^c) \xi_{ab}^{(c)}(-j\omega_p^c) \text{Tr} \left\{ P_R \eta_{ab}(j\omega_p^c) \mathcal{C} P_L \not{q}_m \right\} I_2, \quad (4.28b)$$

²Na derivação deste resultado utilizou-se que a função $f_{FB}(\pm\omega_q, \pm\omega_k)$ avaliada nas possíveis energias de partículas e antipartículas se relacionam com $f_{FB}(\omega_q, \omega_k)$, $\bar{f}_{FB}(\omega_q, \omega_k)$. Por exemplo, temos a relação

$$f_{FB}(-\omega_q, \omega_k) = \bar{f}_{FB}(\omega_q, \omega_k).$$

sendo os $I_{1,2}$ integrais no tempo dos fatores exponenciais,

$$I_1 = \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 e^{-i(j\omega_p^a x_0 - r\omega_p^b y_0) - \frac{1}{2}(\Gamma_p^a x_0 + \Gamma_p^b y_0) - \Gamma_{l\phi}|y_0 - x_0| - i(m\omega_q + n\omega_k)(y_0 - x_0)}, \quad (4.29a)$$

$$I_2 = \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 e^{-ij\omega_p^c(x_0 - y_0) - \frac{1}{2}\Gamma_p^c(x_0 + y_0) - \Gamma_{l\phi}|y_0 - x_0| - i(m\omega_q + n\omega_k)(y_0 - x_0)}. \quad (4.29b)$$

Essas integrais podem ser feitas de modo analítico sem problema nenhum. Contudo, devemos notar que estamos interessados em tempos $t \sim \frac{1}{\Gamma_p}$, pois queremos estudar a dinâmica que gera a assimetria e ela ocorre nesses tempos [65]. Assim, é razoável considerar o limite

$$\Gamma_{l\phi} \cdot t \gg 1.$$

Considerando este limite, temos que as integrais são dadas por,

$$I_1 = \frac{i\Gamma_{l\phi} \delta_{jr} \delta_{jn} \delta_{jm}}{r\omega_p^b - j\omega_p^a + i\Gamma_{ab}} \left\{ 1 - e^{-it(j\omega_p^a - r\omega_p^b - i\Gamma_{ab})} \right\} \left\{ \frac{1}{(j\omega_p^a - m\omega_q - n\omega_k + i\Gamma_p^a/2)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} + \frac{1}{(r\omega_p^b - m\omega_q - n\omega_k - i\Gamma_p^b/2)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \right\}, \quad (4.30a)$$

$$I_2 = \frac{\Gamma_{l\phi} \delta_{jn} \delta_{jm}}{\Gamma_p^c} \left\{ 1 - e^{-\Gamma_p^c t} \right\} \Re \left\{ \frac{1}{(j\omega_p^c - m\omega_q - n\omega_k - i\Gamma_p^c/2)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \right\}. \quad (4.30b)$$

As deltas de Kroneker aparecem devido ao fato que os termos são suprimidos para, por exemplo na primeira integral, $j \neq r$, $j \neq n$, $j \neq m$, já que só no caso em que sejam iguais o termo fica da ordem desejada, pois a integração nos momentos vai restringir os valores dos momentos àqueles em que a energia é conservada [52, 53, 65]. Deste modo, os dois termos que compõem a assimetria ficam,

$$n_L^1 = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \sum_{j=\pm 1} \frac{ih_{ba}}{8\omega_p^a \omega_p^b} f_{FB}(\omega_q, \omega_k) (\omega_p^a + \omega_p^b) \text{Tr} \left\{ P_R \sigma_{ab}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) C P_L q_j \right\} \mathcal{J}_1 \quad (4.31a)$$

$$n_L^2 = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \sum_{\substack{c=a,b \\ j=\pm 1}} \frac{ih_{ba}}{2\omega_p^c} j f_{FB}(\omega_q, \omega_k) f_F(\omega_p^c) \xi_{ab}^{(c)}(-j\omega_p^c) \text{Tr} \left\{ P_R \eta_{ab}(j\omega_p^c) C P_L q_j \right\} \mathcal{J}_2, \quad (4.31b)$$

sendo

$$\mathcal{J}_1 = \frac{ij\Gamma_{l\phi}}{\omega_p^b - \omega_p^a + ij\Gamma_{ab}} \left\{ 1 - e^{-ijt(\omega_p^a - \omega_p^b)} e^{-\Gamma_{ab}t} \right\} \left\{ \frac{1}{(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} + \frac{1}{(\omega_p^b - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \right\}, \quad (4.32a)$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\Gamma_{l\phi}}{\Gamma_p^c} \left\{ 1 - e^{-\Gamma_p^c t} \right\} \left\{ \frac{2}{(\omega_p^c - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \right\}, \quad (4.32b)$$

onde desprezamos as contribuições das larguras, as quais são proporcionais aos quadrados dos acoplamentos de Yukawa [65]. Assim, a partir das expressões de $\sigma_{ab}(j\omega_p^a, j\omega_p^b)$ e

$\eta_{ab}(j\omega_p^c)$, podemos calcular os traços. Para isto, podemos primeiro simplificar as expressões

$$\begin{aligned} P_R \chi_{ab}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) C P_L &= h_{ba}^* \not{p}_j^a \aleph(j\omega_p^a) \not{p}_j^b P_L + h_{ba} M_a M_b \aleph(j\omega_p^a) P_L, \\ P_R \zeta_{ab}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) C P_L &= h_{ba}^* \not{p}_j^a \aleph(j\omega_p^b) \not{p}_j^b P_L + h_{ba} M_a M_b \aleph(j\omega_p^b) P_L, \end{aligned}$$

com $\not{p}_j^a := j\omega_p^a \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}$ e $\aleph(j\omega_p^a)$ avaliado na energia *on-shell* $j\omega_p^a$. Neste ponto devemos notar que os termos proporcionais a h_{ba}^* não contribuem para a assimetria já que

$$n_L(t) \propto \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} h_{ba} h_{ba}^* = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} |h_{ba}|^2,$$

logo, já que $|h_{ba}|^2$ é real, estes termos não contribuirão para a assimetria CP. Assim, temos que

$$P_R \chi_{ab}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) C P_L = h_{ba} M_a M_b \aleph(j\omega_p^a) P_L, \quad (4.33a)$$

$$P_R \zeta_{ab}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) C P_L = h_{ba} M_a M_b \aleph(j\omega_p^b) P_L, \quad (4.33b)$$

calculando os traços, temos que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ P_R \sigma_{ab}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) C P_L \not{q}_j \right\} &= 2j h_{ba} M_a M_b \left\{ \right. \\ &\quad \left(\xi_{ab}^{(a)}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) - \xi_{ab}^{(4)}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) \tanh \left(\frac{\beta \omega_p^a}{2} \right) \right) \aleph(j\omega_p^a) \cdot q_j + \\ &\quad \left(\xi_{ab}^{(b)}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) - \xi_{ab}^{(4)}(j\omega_p^a, j\omega_p^b) \tanh \left(\frac{\beta \omega_p^b}{2} \right) \right) \aleph(j\omega_p^b) \cdot q_j \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.34a)$$

$$\text{Tr} \left\{ P_R \eta_{ab}(j\omega_p^c) C P_L \not{q}_j \right\} = 2h_{ba} M_a M_b \aleph(j\omega_p^c) \cdot q_j, \quad (4.34b)$$

sendo

$$\aleph(j\omega_p^a) \cdot q_j = \int_{\vec{k}} \int_{\vec{q}'} k \cdot q_j \sigma(p; k, q')|_{j\omega_p^a}.$$

As integrais que aparecem em $\aleph(j\omega_p^a) \cdot q_j$ podem ser avaliadas para as energias *on-shell* $j\omega_p^a$ e são dadas por (ver apêndice F)

$$\aleph(j\omega_p^a) \cdot q_j = j \aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ \quad (4.35)$$

com

$$\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ = \frac{1}{8\pi\beta^2 p_0^2} \left\{ [p_0 \omega_q - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{p_0} \omega_p^a] \mathcal{J}_1^a + \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{p_0} M_a^2 \beta \mathcal{J}_0^a \right\}, \quad (4.36)$$

sendo $p_0 := |\vec{p}|$, $\omega_q := |\vec{q}|$ e

$$\mathcal{J}_n^a := \int_{z_-}^{z_+} dz z^n \left\{ 1 - \frac{1}{e^z + 1} + \frac{1}{e^{\beta \omega_p^a - z} - 1} \right\} \quad (4.37)$$

com $z_{\pm} := \frac{\beta}{2}(\omega_p^a \pm p_0)$ [52]. Ao introduzirmos os resultados dos traços (4.34), os resultados das integrais temporais (4.32), avaliando a soma em j e definindo a energia “reduzida”

$$\omega_p^{ab} := \frac{2\omega_p^a \omega_p^b}{\omega_p^a + \omega_p^b},$$

nas componentes (4.31), encontramos a expressão final para a assimetria leptônica que depende do tempo

$$\begin{aligned} n_L(t) = & \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \Im(h_{ba}^2) M_a M_b \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k}, \vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k} - \vec{q}) f_{FB}(\omega_q, \omega_k) \times \\ & \left\{ 2 \sum_{c=a,b} \frac{1 - e^{-\Gamma_p^c t}}{\omega_p^c \Gamma_p^c} \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^c - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} f_F(\omega_p^c) \Re(\omega_p^c) \cdot q_+ \Re \left\{ \xi_{ab}^{(c)} \right\} \right. \\ & - \frac{1}{2\omega_p^{ab}} \left\{ \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} + \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^b - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \right\} \times \\ & \left. \Re \left\{ \frac{1 - e^{-(i(\omega_p^a - \omega_p^b) + \Gamma_{ab})t}}{\Gamma_{ab} + i(\omega_p^a - \omega_p^b)} \left[f_{ab}^{\xi(a)}(\omega_p^a) \Re(\omega_p^a) \cdot q_+ + f_{ab}^{\xi(b)}(\omega_p^b) \Re(\omega_p^b) \cdot q_+ \right] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde escrevemos a parte que contribui à assimetria CP, dada pela parte imaginária de h . A assimetria possui duas partes; a primeira parte dá conta das contribuições individuais dos neutrinos $N_{a,b}$, que denominamos termo tipo *Boltzmann*; a segunda parte dá conta da contribuição à assimetria leptônica produzida pelas possíveis oscilações entre os neutrinos de mão direita $N_a \rightarrow N_b$ e o denominamos contribuição *oscilatória*. Por outro lado, devemos mencionar que as funções

$$f_{ab}^{\xi(a,b)}(\omega_p^{a,b}) := \xi_{ab}^{(a,b)} - \xi_{ab}^{(4)} \tanh \left(\frac{\beta \omega_p^{a,b}}{2} \right),$$

servem como funções de distribuição análogas a $f_F(\omega_p^{a,b})$, embora sejam modificadas pela presença dos fatores $\xi_{ab}^{(a,b)}$.

Notemos que a assimetria anterior foi obtida sem considerar nenhuma condição com relação às massas. Porém, em geral, é interessante estudar duas possíveis situações, os casos hierárquico e degenerado, similares aos apresentados no capítulo de leptogênese padrão, cap 1. A seguir, apresentamos esses dois limites da assimetria leptônica (4.38).

Limite Hierárquico

No caso hierárquico, vamos considerar que as massas possuem a hierarquia $M_1 \ll M_{2,3}$. Para tomarmos este limite, devemos levar em conta que as funções de distribuição $f_{FD}(\omega_p^{2,3})$ são suprimidas exponencialmente; a contribuição $\frac{1}{\Gamma_{ab} + i(\omega_p^a - \omega_p^b)}$ também é suprimida para $a, b = 2, 3$ comparada com a distribuição $\propto (\Gamma_p^1)^{-1}$ [65], logo, a contribuição

do termo oscilatório é suprimida com relação ao termo de Boltzmann. Assim, temos que

$$n_L(t, \beta) \approx \sum_{b=2,3} 4\Im(h_{1b}^2) \frac{M_1}{M_b} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k}, \vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k} - \vec{q}) f_{FB}(\omega_q, \omega_k) \times \left\{ \frac{1 - e^{-\Gamma_p^1 t}}{\omega_p^1 \Gamma_p^1} \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^1 - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} f_F(\omega_p^1) \Re(\omega_p^1) \cdot q_+ \right\}, \quad (4.39)$$

Limite Degenerado

Para o caso degenerado, supomos que $|M_a - M_b| \ll M_{a,b}$, logo, podemos tomar que $\omega_p^a \approx \omega_p^b$, enquanto que as larguras permaneces diferentes, $\Gamma_p^a \neq \Gamma_p^b$, pois, em geral, os Yukawas são diferentes. Ao considerarmos este limite, obtemos a assimetria

$$n_L(t, \beta) \approx 8 \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \Im(h_{ba}^2) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{M_a M_b}{\omega_p^a} \int_{\vec{k}, \vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k} - \vec{q}) (1 - f_F(\omega_q) + f_B(\omega_k)) \times \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \Re(\omega_p^a) \cdot q_+ \times \left\{ \sum_{c=a,b} \frac{1 - e^{-\Gamma_p^c t}}{\Gamma_p^c} f_F(\omega_p^a) \Re\left\{\xi_{ab}^{(c)}\right\} - \Re\left\{\frac{1 - e^{-(i(\omega_p^a - \omega_p^b) + \Gamma_{ab})t}}{\Gamma_{ab} + i(\omega_p^a - \omega_p^b)} f_{ab}^\xi(\omega_p^a)\right\} \right\}, \quad (4.40)$$

com

$$f_{ab}^\xi(\omega_p^a) := \xi_{ab}^{(a)} + \xi_{ab}^{(b)} - 2\xi_{ab}^{(4)} \tanh\left(\frac{\beta\omega_p^a}{2}\right).$$

Com os limites hierárquico (4.39) e degenerado (4.40) temos agora a assimetria leptônica (4.38) nos dois limites interessantes que são considerados na literatura. Porém, ainda podemos fazer uma comparação da assimetria (4.38) com os resultados que seriam obtidos considerando a evolução com a equação de Boltzmann. Na próxima seção consideramos esta comparação.

4.4 Comparação com Boltzmann

Para aplicarmos o formalismo semiclássico de Boltzmann, temos que as equações que descrevem a evolução dos neutrinos fora do equilíbrio e dos léptons são dadas por

$$\partial_t f_{N_a}(t, \vec{p}) = \int_{\vec{k}, \vec{q}} \frac{(2\pi)^4}{2\omega_p^a} \delta^4(p - k - q) \left\{ f_\phi f_l (1 - f_{N_a}) \left\{ |\mathcal{M}(\phi l \rightarrow N_a)|^2 + |\mathcal{M}(\phi^* \bar{l} \rightarrow N_a)|^2 \right\} - (1 + f_\phi)(1 - f_l) f_{N_a} \left\{ |\mathcal{M}(N_a \rightarrow \phi l)|^2 + |\mathcal{M}(N_a \rightarrow \phi^* \bar{l})|^2 \right\} \right\}. \quad (4.41a)$$

$$\partial_t f_{l_b}(t, \vec{q}) = \sum_{a=1}^3 \int_{\vec{p}, \vec{k}} \frac{(2\pi)^4}{2\omega_q} \delta^4(p - k - q) \left\{ (1 + f_\phi)(1 - f_l) f_{N_a} |\mathcal{M}(N_a \rightarrow \phi l_b)|^2 - f_\phi f_l (1 - f_{N_a}) |\mathcal{M}(\phi l_b \rightarrow N_a)|^2 \right\}, \quad (4.41b)$$

a equação para os antiléptons é obtida tomando as transformações $l \rightarrow \bar{l}$, $\phi \rightarrow \phi^*$. Agora, a equação para a evolução dos neutrinos de mão direita é resolvida pela função

$$f_{N_a}(t, \vec{p}) = f_{FD}(\omega_p^a) \{1 - e^{-\Gamma_p^a t}\}, \quad (4.42)$$

com a largura idêntica à obtida no capítulo 3, eq (3.41). Para determinarmos a evolução da assimetria leptônica,

$$f_L := \sum_b f_{l_b} - f_{\bar{l}_b}$$

vamos supor que $\mu_l = 0$, ou seja, as funções de distribuição para léptons e antiléptons são iguais, o que também ocorre para o caso das funções associadas aos escalares. Obtemos que

$$f_L(t, \vec{q}) = \sum_{a=1}^3 \frac{\epsilon_a h_{aa}}{\omega_q} \int_{\vec{p}, \vec{k}} (2\pi)^4 \delta^4(p - k - q) \frac{p_a \cdot q}{\Gamma_p^a} f_{FD}(\omega_p^a) f_{FB}(\omega_q, \omega_k) \{1 - e^{-\Gamma_p^a t}\}, \quad (4.43)$$

onde aparece explicitamente a assimetria CP ϵ_a e utilizamos que a largura média nos graus de liberdade do decaimento a $T = 0$ é igual $|\mathcal{M}(N_a(p_a) \rightarrow l(q)\phi(k))|^2 = 4p_a \cdot q$ [40]. A assimetria leptônica no formalismo de Boltzmann será igual à integral nos momentos da função de distribuição $f_L(t, \vec{q})$, ou seja,

$$\begin{aligned} n_L^B(t) &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} f_L(t, \vec{q}) \\ &= \sum_{a=1}^3 \epsilon_a h_{aa} \int_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} (2\pi)^4 \delta^4(p - k - q) \frac{4p_a \cdot q}{\Gamma_p^a} f_{FD}(\omega_p^a) f_{FB}(\omega_q, \omega_k) \{1 - e^{-\Gamma_p^a t}\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Tomando a contribuição da autoenergia ϵ_a à assimetria CP, eq (1.3), podemos comparar a assimetria de Boltzmann com a assimetria obtida na TQCfE (4.38): em primeiro lugar, vemos que, para o caso de Boltzmann, a assimetria não possui um termo oscilante, o que é esperado devido à natureza semiclássica do formalismo, como foi mencionado no capítulo 1; por outro lado, vemos que na assimetria (4.38) aparecem os termos $\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+$ que seriam equivalentes às larguras $|\mathcal{M}(N_a(p_a) \rightarrow l(q)\phi(k))|^2$ calculada em [40], mas corrigidas termicamente, ver eq (4.36), o que parece muito mais satisfatório. Finalmente podemos mencionar que uma importante diferença entre os dois resultados é que no resultado de Boltzmann aparece o fator da assimetria CP ϵ_a , enquanto que no caso da TQCfE, aparecem os fatores $\xi_{ab}^{(a,b,4)}$, que seriam equivalentes à ϵ_a , porém, ao estudarmos as definições desses fatores, eqs (3.51), (3.84), vemos que esses dependem diretamente do momento e indiretamente da temperatura, pelo que poderiam ser interpretados como uma assimetria CP dependente do momento e da temperatura.

Na próxima seção faremos um estudo numérico dos resultados de Boltzmann (4.44) e da TQCfE (4.38) para entendermos se as diferenças mencionadas anteriormente são relevantes ou não.

4.4.1 Análise Numérica

Para procedermos à análise numérica, devemos simplificar o máximo possível as integrais nos momentos presentes nas assimetrias. Vamos estudar tanto a dependência no

tempo quanto no momento dos neutrinos de mão direita. No apêndice F apresentamos detalhadamente algumas das seguintes derivações. Em primeiro lugar, temos que a largura de decaimento dos neutrinos corrigida termicamente é dada por

$$\Gamma_p^a = \frac{h_{aa} M_a^2}{16\pi\beta\omega_p^a p_0} \ln \left\{ \frac{e^{\beta(\omega_p^a + p_0)} - 1}{e^{\beta\omega_p^a} - e^{\beta p_0}} \right\}. \quad (4.45)$$

Resultado no formalismo de Schwinger-Keldysh

A assimetria obtida mediante o formalismo da TQCfE pode ser separada para os casos hierárquico e degenerado; esses casos estão dados por

Limite Hierárquico

No caso hierárquico temos que

$$n_L^{KB}(t, \beta) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p^1} n_L^{KB}(t, \vec{p}, \beta) \quad (4.46)$$

sendo

$$n_L^{KB}(t, \vec{p}, \beta) = - \sum_{\substack{a,b \\ a < b}} \Im(h_{ab}^2) \frac{M_a}{M_b} \frac{1 - e^{-\Gamma_p^a t}}{\Gamma_p^a} f_F(\omega_p^a) \Upsilon_a, \quad (4.47)$$

com

$$\Upsilon_a = \int_{\omega_q^-}^{\omega_q^+} d\omega_q \int_{u_+}^{u_-} du f_{FB}(\omega_q, \omega_k) \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \aleph(\omega_p^a) \cdot q_+. \quad (4.48)$$

onde os limites das integrais são dados por

$$\omega_q^\pm = \frac{1}{2}(\omega_p^a \pm p_0), \quad u_\pm = |\omega_q \pm p_0|$$

e o fator proveniente do traço, correspondente à largura de interação corrigida termicamente, fica igual a

$$\aleph(\omega_p^a) \cdot q = \frac{1}{16\pi^3 \beta^2 p_0^2} \left\{ \left[p_0 \omega_q - \frac{\omega_p^a}{2p_0} (p_0^2 + \omega_q^2 - u^2) \right] \mathcal{J}_1^a + \frac{M_a^2 \beta}{2p_0} (p_0^2 + \omega_q^2 - u^2) \mathcal{J}_0^a \right\}. \quad (4.49)$$

Limite Degenerado

Para o caso degenerado temos que

$$n_L^{KB}(t, \vec{p}, \beta) = - \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \Im(h_{ba}^2) M_a M_b \Upsilon_a \left\{ \sum_{c=a,b} \frac{1 - e^{-\Gamma_p^c t}}{\Gamma_p^c} f_F(\omega_p^a) \Re \left\{ \xi_{ab}^{(c)} \right\} \right. \\ \left. - \Re \left\{ \frac{1 - e^{-(i(\omega_p^a - \omega_p^b) + \Gamma_{ab})t}}{\Gamma_{ab} + i(\omega_p^a - \omega_p^b)} f_{ab}^\xi(\omega_p^a) \right\} \right\}. \quad (4.50)$$

Resultado no formalismo de Boltzmann

Do mesmo modo ao feito no caso anterior, o resultado no formalismo de Boltzmann (4.44) pode ser simplificado, obtemos que

$$n_L^B(t, \beta) = \int_{\vec{p}} n_L^B(t, \vec{p}, \beta), \quad (4.51)$$

com

$$n_L^B(t, \vec{p}, \beta) = \sum_{a=1}^3 \frac{\epsilon_a h_{aa}}{\Gamma_p^a} \{1 - e^{-\Gamma_p^a t}\} f_{FD}(\omega_p^a) \Upsilon_a^B, \quad (4.52)$$

sendo a assimetria CP dada por

$$\epsilon_a = \sum_{b \neq a} \frac{\Im[h_{ab}^2]}{8\pi h_{aa}} \frac{(M_b^2 - M_a^2) M_a M_b}{(M_a^2 - M_b^2)^2 + (M_a \Gamma_p^a - M_b \Gamma_p^b)^2},$$

e o fator Υ_a^B dado por

$$\begin{aligned} \Upsilon_a^B &= \int_{\omega_q^-}^{\omega_q^+} d\omega_q \int_{u_+}^{u_-} du f_{FB}(\omega_q, \omega_k) 2\pi \delta(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k) 4p_a \cdot q_+ \\ &= \frac{M_a^2}{16\pi\beta p_0} \mathcal{J}_0^a \end{aligned} \quad (4.53)$$

Como vemos, neste caso, a assimetria tem uma forma muito mais simples e só depende da integral $\mathcal{J}_0^a$ dada em (4.37).

Comparação Numérica

Para compararmos graficamente os dois resultados, é necessário resolver numericamente as integrais presentes na assimetria calculada no contexto da TQCfE, porém, seguindo o feito na referência [65] e com fins puramente ilustrativos, não vamos levar em conta a largura de léptons e Higgs ao considerarmos a substituição

$$\frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \longrightarrow 2\pi \delta(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k).$$

Assim, para incluirmos a largura do banho térmico, vamos ter que multiplicar o resultado de Kadanoff-Baym por um fator dependente do momento e da temperatura. Nas figuras (4.1(a)), (4.1(b)) e (4.1(c)) ilustramos a dependência da razão entre os resultados de Kadanoff-Baym considerando ou não a largura do banho térmico $\Gamma_{l\phi}$

$$\frac{nL^{KB}(t, \beta, \vec{p})}{nL^{KB}(t, \beta, \vec{p}, \Gamma_{l\phi})}$$

em termos do momento, tempo e temperatura. Nesses gráficos vemos que tal razão não depende muito do tempo, mas, a dependência na temperatura e no momento é bastante importante, já que para momentos pequenos e para temperaturas grandes, a inclusão da largura do banho térmico diminui substancialmente o resultado obtido na TQCfE.

(a) Momento

(b) Tempo

(c) Temperatura

Figura 4.1: Dependência da razão entre os resultados de Kadanoff-Baym considerando ou não a largura do banho térmico $\Gamma_{l\phi}$ para um espectro hierárquico, $M_2 = 5M_1$, $M_3 = 10M_1$.

Além da simplificação anterior, vamos escolher os Yukawas que estão na diagonal da matriz $h = YY^\dagger$ de modo tal que³

$$\Gamma_p^1|_{p \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty} = 0.01 M_1, \quad (4.54a)$$

$$\Gamma_p^2|_{p \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty} = 0.0125 M_1, \quad (4.54b)$$

$$\Gamma_p^3|_{p \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty} = 0.015 M_1, \quad (4.54c)$$

Por outro lado, para as componentes da diagonal escolhemos em primeiro lugar que

$$h_{12} = h_{13} = h_{23}, \quad (4.55)$$

isto permite ter certa independência da estrutura da matriz de Yukawa, como veremos mais adiante. Por outro lado, igualmente ao feito anteriormente, vamos a separar os casos hierárquico e degenerado na discussão a seguir.

Caso hierárquico

Para compararmos a dependência no momento das assimetrias leptônicas obtidas resolvendo as equações de Kadanoff-Baym (n_L^{KB}) e de Boltzmann (n_L^B) para dois espectros hierárquicos (fig (4.2)), determinamos a razão

$$\frac{n_L^X(t = \infty, \beta = M_1^{-1}, p)}{n_L^B(t = \infty, \beta = M_1^{-1}, p = M_1)},$$

com $X = KB, B$, como função do momento, normalizado com relação à massa do neutrino de massa menor N_1 , para uma temperatura $T = M_1$ e um tempo muito grande $t \rightarrow \infty$ [65]. Fazemos um gráfico com a razão entre as assimetrias para podermos avaliar as possíveis diferenças entre os dois formalismos sem dependermos da estrutura da matriz de Yukawa⁴. Por outro lado, na figura (4.3) se apresenta a dependência no tempo para um momento igual à massa do neutrino N_1 para a razão

$$\frac{n_L^X(t, \beta = M_1^{-1}, p = M_1)}{n_L^B(t = \infty, \beta = M_1^{-1}, p = M_1)},$$

ou seja, razão está normalizada de modo que o resultado de Boltzmann tende a um para tempos grandes. Devemos mencionar que estes gráficos estão feitos com relação ao parâmetro adimensional $t \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \Gamma_p^1$. Finalmente, apresentamos na figura (4.4) a dependência da razão

$$\frac{n_L^X(t = \infty, \beta, p = M_1)}{n_L^B(t = \infty, \beta = M_1^{-1}, p = M_1)},$$

na temperatura de modo que, para o caso da assimetria obtida com Boltzmann, a razão é sempre igual a um.

³Essa escolha nas larguras é feita somente com fins de ilustração, não tem relação nenhuma com dados experimentais

⁴É claro que ao fazermos a suposição (4.55) estamos escolhendo uma estrutura para a matriz de Yukawa, porém, para o caso hierárquico verificamos que os resultados não mudam quando supomos que $h_{12} \neq h_{13} \neq h_{23}$.

(a) $M_2 = 5M_1, M_3 = 10M_1$ (b) $M_2 = 50M_1, M_3 = 100M_1$

Figura 4.2: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) para dois espectros hierárquicos em termos do momento dos neutrinos.

(a) $M_2 = 5M_1, M_3 = 10M_1$ (b) $M_2 = 50M_1, M_3 = 100M_1$

Figura 4.3: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) para dois espectros hierárquicos em termos do tempo.

(a) $M_2 = 5M_1, M_3 = 10M_1$ (b) $M_2 = 50M_1, M_3 = 100M_1$

Figura 4.4: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) para dois espectros hierárquicos em termos da temperatura.

Analisemos estes resultados. Em geral, os gráficos que dão conta da dependência com o momento, fig (4.2), possuem uma estrutura similar à determinada nas referências [52, 53]; como é possível ver, essas funções crescem rapidamente e, logo, tendem a zero, o que mostra que a integração no momento vai dar resultados finitos. Além disso, vemos que o resultado de Kadanoff-Baym é muito mais significativo que o resultado de Boltzmann para os dois casos. As observações anteriores são confirmadas ao considerarmos a dependência no tempo dos resultados, figuras (4.3). Por outro lado, comparando os resultados para os dois espectros, $M_2 = 5M_1, M_3 = 10M_1$ e $M_2 = 50M_1, M_3 = 100M_1$ vemos que não há diferenças significativas entre estes dois espectros; isto pode explicarse notando que ao tomarmos a razão entre as assimetrias estamos, de fato, comparando as amplitudes de decaimentos obtidas na TQCfE e a temperatura zero, usada no formalismo de Boltzmann, as quais não dependem da razão entre as massas. Em suma, para o caso hierárquico, fig (4.3(a)), o resultado de Kadanoff-Baym é maior que o resultado de Boltzmann para o caso hierárquico, sem levarmos em conta a largura do banho térmico.

Agora, na dependência na temperatura observamos um fenômeno muito interessante, ao diminuir a temperatura com relação à massa M_1 ($\beta M_1 > 1$) a razão entre as assimetrias de Kadanoff-Baym e de Boltzmann tende a ser um, o que indica que o nosso resultado tende ao resultado de Boltzmann no limite não-relativístico, o que era de se esperar, pois os efeitos térmicos não são tão relevantes em tal regime, e portanto, a amplitude de probabilidade que aparece na TQCfE tende a ser a amplitude a temperatura nula, a qual aparece na equação de Boltzmann. Devemos mencionar também que neste ponto verificamos que sem considerar a suposição (4.55), ou seja, tomando como diferentes os elementos fora da diagonal da matriz h os resultados anteriores não mudam.

Caso degenerado

Para o caso degenerado, estudamos a dependência no momento, tempo e temperatura para a razão entre as assimetrias, similar ao feito no caso anterior,

$$\frac{n_L^X(t, \beta, p)}{n_L^B(t = \infty, \beta = M_1^{-1}, p = M_1)},$$

com $X = KB, B$. Analisando estes resultados, vemos que ocorre algo similar ao caso hierárquico, pois o resultado da TQCfE é mais significativo que o resultado de Boltzmann. Além disso, vemos que tanto na dependência no momento, fig (4.5), e no tempo, fig (4.6), há uma diferença fundamental com o resultado de Boltzmann, a contribuição do termo oscilante. Isto é fácil de ver pois o resultado de Kadanoff-Baym apresenta um comportamento oscilatório, o que mostra como a TQCfE leva em conta este tipo de fenômeno quântico. Agora, podemos perguntar se este comportamento é mantido ao mudarmos a temperatura. Por esta razão estudamos a dependência com a temperatura para o espectro mais degenerado, $M_2 = 1.25M_1$ e $M_3 = 1.5M_1$, para duas temperaturas diferentes, $T = 0.5M_1$ e $T = 0.3M_1$, fig (4.8). Vemos que o resultado de Kadanoff-Baym fica menor ao diminuirmos a temperatura, mas, ainda apresenta o comportamento oscilante.

Não obstante, há uma sutileza nos gráficos que mostram a dependência no momento, pois para momentos grandes o resultado de Kadanoff-Baym não tende para zero, mas para uma constante, o que faz pensar que ao fazermos a integral nos momentos dos neutrinos, esta vai divergir. Acreditamos que esta divergência vem do processo de renorma-

(a) $M_2 = 1.25M_1$, $M_3 = 1.5M_1$ (b) $M_2 = 1.1M_1$, $M_3 = 1.2M_1$

Figura 4.5: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym e Boltzmann para diferentes massas para $\beta^{-1} = M_1$ em termos do tempo.

(a) $M_2 = 1.25M_1, M_3 = 1.5M_1$ (b) $M_2 = 1.1M_1, M_3 = 1.2M_1$

Figura 4.6: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) para diferentes massas para $\beta^{-1} = M_1$ em termos do tempo.

(a) $M_2 = 1.25M_1, M_3 = 1.5M_1$ (b) $M_2 = 1.1M_1, M_3 = 1.2M_1$

Figura 4.7: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) para diferentes massas em termos da temperatura.

(a) $T = 0.5 M_1$ (b) $T = 0.3 M_1$

Figura 4.8: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) para diferentes temperaturas com $M_2 = 1.25 M_1$, $M_3 = 1.5 M_1$ em termos do tempo.

lização porque quando fizemos tal processo desprezamos a parte finita da parte real da componente espectral da autoenergia. Isto pode fazer com que o resultado vá para uma constante e não para zero. Além disso, quando a temperatura fica menor que a massa M_1 , o nosso resultado não está coincidindo com o resultado de Boltzmann mas está indo para uma constante, o que faz com que a razão divirja, pois o resultado de Boltzmann vai para zero. Isto também é produto no equívoco no processo de Renormalização. Ainda estamos estudando este problema.

Por outro lado, devemos notar que o anterior resultado es bastante dependente, como era de se esperar, da estrutura da matriz de Yukawa, já que se não considerarmos a suposição (4.55), mas tomarmos que

$$h_{12} = h_{11} e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad (4.56a)$$

$$h_{13} = h_{11} e^{\frac{3i\pi}{5}}, \quad (4.56b)$$

$$h_{23} = h_{11} e^{\frac{5i\pi}{3}}, \quad (4.56c)$$

por exemplo, o resultado (4.6(a)) muda ao resultado mostrado na figura (4.9), que é bastante diferente.

Figura 4.9: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) para diferentes temperaturas com $M_2 = 1.25M_1$, $M_3 = 1.5M_1$ considerando a estrutura da matriz de Yukawa dada por (4.56)

Até aqui não consideramos um caso muito importante, o limite ressonante. Lembrando que o caso ressonante é aquele em que a diferença entre as massas é da mesma ordem que a largura

$$M_a - M_b \sim \Gamma_p^{a,b},$$

apresentamos a seguir gráficos dos resultados para dois casos que cumprem a condição de ressonância, figura (4.10). Em um dos gráficos do caso de ressonância aparece uma assimetria final negativa, mas isto não é um problema, pois o sinal da assimetria é irrelevante já que uma assimetria negativa indicaria que há mais antiléptons que léptons, mas, a definição de partícula e antipartícula é questão de escolha. O caso da fig (4.10(a)) mostra que é possível que haja cancelamento entre os dois termos da assimetria (4.38), pois, para o espectro $M_2 = 1.019M_1$, $M_3 = 1.038M_1$, é possível ver que os dois termos fiquem da mesma ordem, ver fig (4.11), o que faz que o resultado de Kadanoff-Baym fique suprimido com relação ao resultado de Boltzmann em certas regiões. Na figura (4.10(b)), vemos que a contribuição do termo oscilatório é dominante sobre a contribuição do termo de Boltzmann, já que a diferença das massas é pequena comparada com a largura, o que faz que o termo oscilante vire dominante.

Comparação com Garny et al.

Garny et al. [65] desenvolveram em estudo similar ao feito na presente dissertação, mas considerando dois neutrinos com massas hierárquicas ou degeneradas. Para comparar e validar nossos resultados, vamos tomar que o terceiro neutrino tem uma massa muito grande, $M_{1,2} \ll M_3$. Agora, devemos levar em conta que no estudo de [65] toma uma aproximação não relativística com relação à temperatura, pelo que a largura vai ser o limite não relativístico da largura (4.45), o que faz com que o resultado usando a equação de Boltzmann seja um pouco diferente. Porém, fizemos a comparação entre o resultado com $N = 3$ neutrinos, e o de Garny et al. e de Boltzmann tomados da referência [65]. A comparação é feita de modo análogo à discussão para os casos hierárquico e degenerado, ou seja, vamos estudar as razões

$$\frac{n_L^X(t, \beta, p)}{n_L^{B-G}(t = \infty, \beta = M_1^{-1}, p = M_1)},$$

com X = nosso resultado, Garny et al. e Boltzmann obtido daquela referência. Além disso, vamos escolher

$$\Gamma_p^1|_{p \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty} = 0.01M_1, \quad (4.57a)$$

$$\Gamma_p^2|_{p \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty} = 0.015M_1. \quad (4.57b)$$

Ao analisarmos os gráficos da figura (4.12), vemos que no caso hierárquico o resultado de Garny et al. e de Boltzmann coincidem perfeitamente na dependência no tempo, enquanto que o nosso resultado é diferente. Isto último é explicado ao observarmos a dependência na temperatura, pois vemos que nosso resultado tem como limite o resultado de [65] para temperaturas não relativísticas ($T \ll M_1$) o que coincide com o fato de que em tal referencias foi considerado o limite não relativístico. Para o caso degenerado, fig (4.13), vemos que o resultado de Garny et al. oscila em torno do resultado de Boltzmann, tal como é mencionado por eles em [65], mas o nosso resultado não possui tal característica. Ao examinar a dependência na temperatura, vemos que neste caso o nosso resultado não tende ao resultado de Garny et al. a temperaturas não relativísticas, o que é evidência do problema que possuímos no caso degenerado no processo de renormalização.

(a) $M_2 = 1.019M_1, M_3 = 1.038M_1$ (b) $M_2 = 1.015M_1, M_3 = 1.03M_1$

Figura 4.10: Comparação dos resultados de Kadanoff-Baym (linha cheia) e Boltzmann (linha tracejada) em termos do tempo para diferentes massas que cumprem a condição de ressonância.

Figura 4.11: Comparação entre as duas contribuições presentes no resultado da assimetria (4.38) em termos do tempo para o caso $M_2 = 1.019M_1$, $M_3 = 1.038M_1$ e momento e temperatura $p = \beta^{-1} = M_1$.

Deste modo, mostramos que o formalismo da TQCfE permite determinar a geração e evolução da assimetria leptônica baseado em uma consideração básica, a pequenez dos acoplamentos entre neutrinos de mão direita, Higgs e léptons carregados; isto implica que o banho térmico constituído por léptons e Higgs permanece em equilíbrio, ou, visto de outro modo, a *backreaction* é desprezível. É claro que ainda não é possível dar uma estimativa da assimetria gerada que possa ser comparada com os dados experimentais, pois a expansão do Universo é um ingrediente fundamental. Assim, o próximo passo a ser considerado deve ser incluir os efeitos da expansão do Universo na leptogênese estudada no formalismo da TQCfE. Existem estudos da TQCfE em espaços-tempo curvos, mas, a tentativa de resolver as equações de Kadanoff-Baym resultantes para férmions, em especial para férmions de Majorana, ainda não foi feita. Este deve ser o primeiro passo a tratar no futuro.

(a) Tempo

(b) Temperatura

Figura 4.12: Comparação com os resultados de Garny et al. (linha verde cheia), Boltzmann (linha tracejada) e $N = 3$ para o caso hierárquico para momento $p = M_1$.

(a) Tempo

(b) Temperatura

Figura 4.13: Comparação com os resultados de Garny et al. (linha verde cheia), Boltzmann (linha tracejada) e $N = 3$ para o caso degenerado em que $M_2 = 1.5M_1$ para momento $p = M_1$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Em anos recentes distintos experimentos de neutrinos apresentaram a primeira prova da existência de física além do Modelo Padrão, com o descobrimento do fenômeno de oscilações de neutrinos, que é simplesmente explicado considerando que essas partículas possuem massa e apresentam mistura entre estados massivos e de sabor. Este descobrimento trouxe a pergunta fundamental sobre a natureza dos neutrinos, pois, dos férmions elementares conhecidos, estes são os únicos que podem ser partículas de Majorana. Além disso, uma questão interessante é porque os neutrinos possuem uma massa tão pequena, varias ordens de grandeza menores que as massas dos léptons carregados da mesma família. Uma resposta muito satisfatória é dada pelo mecanismo de See-Saw que introduz três neutrinos de mão direita com massas grandes que fazem com que as massas dos neutrinos ativos sejam suprimidas com relação às das outras partículas. Outro aspecto que faz o mecanismo de See-Saw tão atrativo é que pode explicar a assimetria bariônica presente no Universo. Tal cenário, denominado Leptogênese, foi tema da presente dissertação.

No primeiro capítulo, apresentamos a denominada *leptogênese padrão*, logo após introduzirmos as evidências da existência de assimetria bariônica e enumerarmos alguns cenários que podem gerar essa assimetria se cumprirem as *condições de Sakharov*, condições necessárias para gerar dinamicamente a assimetria sem termos assimetria nas condições iniciais do Universo. Como já foi mencionado, a leptogênese é um cenário muito atrativo, pois liga duas escalas de energia aparentemente diferentes, a escala da geração de assimetria e a escala das massas e oscilações dos neutrinos de mão esquerda. Entre os distintos tipos de leptogênese, consideramos a leptogênese térmica, que corresponde ao cenário em que não há densidade de número de neutrinos de mão direita no tempo inicial, mas as interações do banho térmico em equilíbrio, composto pelas partículas do MP, criam uma densidade importante desses neutrinos. Agora, com o decaimento fora do equilíbrio dos neutrinos e devido à violação de CP e do número leptônico é criada uma assimetria entre o número de léptons e antiléptons que vai gerar uma assimetria leptônica que será parcialmente convertida em assimetria bariônica por *sphalerons* em equilíbrio térmico.

Denominamos a leptogênese estudada nesse capítulo de leptogênese padrão pois a

geração da assimetria é estudada considerando a equação de Boltzmann. Alguns resultados obtidos na literatura, com relação à assimetria CP ϵ_{aa} e à solução as equações de Boltzmann para a leptogênese no Universo em expansão, foram apresentados no primeiro capítulo. Finalmente, foi discutido como, embora a descrição padrão seja bem sucedida, o uso da equação de Boltzmann possui problemas conceituais, tais como, a impossibilidade de ter oscilações de neutrinos incluídas de modo simples, a necessidade da interferência quântica na obtenção da assimetria CP e a natureza semiclássica da equação; isto faz insatisfatório o uso da equação de Boltzmann no estudo da leptogênese. Assim, para termos uma descrição completa da leptogênese, devemos estudá-la em um formalismo de primeiros princípios na Teoria Quântica de Campos que inclua efeitos fora do equilíbrio térmico.

Deste modo, no segundo capítulo descrevemos de forma geral tal formalismo, a *Teoria Quântica de Campos fora do equilíbrio térmico*. Para isso, depois de colocarmos o problema da TQCfE, vimos como é necessário modificar a descrição feita na TQC usual, à temperatura zero, já que o teorema de Gell-Mann–Low não é satisfeito em uma teoria fora do equilíbrio térmico. Assim, estudando a evolução temporal do valor médio de um operador, introduzimos o contorno de *Kadanoff-Baym*, que pode ser descrito como um contorno no plano complexo do tempo tal que começa em algum tempo inicial t_0 , vai a infinito do eixo real e volta ao mesmo tempo inicial. Este contorno possui essa forma pois os problemas de sistemas fora do equilíbrio são problemas de valores iniciais, cujos estados iniciais precisam ser não térmicos, para assegurar condições fora do equilíbrio. Assim, a modificação principal com relação à TQC usual é que todas as dependências temporais na TQCfE devem ser definidas no contorno de Kadanoff-Baym. Por outro lado, a TQCfE vai estudar as funções de n -pontos dos campos e estas quantidades vão ser fundamentais na descrição. Agora, devido ao contorno, vão existir duas funções de Green independentes, a função espectral, correspondente ao valor esperado do (anti)comutador dos campos para (férmions) bósons; e a função estatística, correspondente ao valor esperado do anti-comutador (comutador) dos campos para bósons (férmions). Estas funções carregam toda a informação do sistema.

Uma consideração importante feita no segundo capítulo é que devido à natureza dependente do tempo dos sistemas fora do equilíbrio, a expansão perturbativa pode ser invalidada por termos *seculares*, que são termos que crescem sem controle no tempo. Além disso, a expansão deve possuir um comportamento *universal*, ou seja, deve tender ao equilíbrio sem importar as condições iniciais. Assim, apresentamos a cura a estes problemas mediante o uso da *ação efetiva 2PI*. Vimos como esta ação efetiva é construída de modo que tanto o valor esperado dos campos quanto o propagador sejam os graus de liberdade, assim, para determinar as equações de movimento das funções espectral e estatística devemos seguir um esquema claro, primeiro, expandirmos a ação efetiva em termos de algum parâmetro perturbativo tomando o propagador como completo, segundo, obter as equações a partir da expansão sem nenhuma consideração adicional. Isto gera equações integro-diferenciais não lineares para as funções espectral e estatística, denominadas *equações de Kadanoff-Baym*, que serão as que descrevam a dinâmica do sistema.

Na última parte do capítulo, foi mostrado como o formalismo da TQCfE inclui o equilíbrio térmico. Uma consideração fundamental é que o equilíbrio térmico pode ser caracterizado pela condição de *Kubo-Martin-Schwinger*, que dá conta do balanço presente no

equilíbrio. A condição KMS liga as funções espectral e estatística, o que vai ser uma prova da validade dos resultados posteriores. Também, vimos como a condição KMS tem como consequência a aparição das funções de distribuição de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. Para o caso de uma teoria livre, vimos como é possível determinar as funções e que é possível dar uma interpretação às mesmas. A função espectral dá conta da densidade de estados quânticos, enquanto que a função estatística contém a informação da distribuição de estados, por isto foram denominadas desse modo. Por outro lado, na última seção do capítulo apresentamos o limite clássico da TQCfE. Com este fim, descrevemos o modo padrão de obtermos o limite de Boltzmann, mediante o uso do denominado *ansatz* de Kadanoff-Baym. Assim, apresentamos como as equações de Kadanoff-Baym tendem à equação de Boltzmann no limite clássico, o que fecha o estudo desse capítulo.

Nos capítulos três e quatro aplicamos o formalismo da TQCfE ao caso da leptogênese. No capítulo três resolvemos as equações de Kadanoff-Baym para a evolução dos neutrinos de mão direita fora do equilíbrio. Uma consideração muito importante que deve ser levada em conta é que não vamos considerar a expansão do Universo, e temos duas razões para isso, primeiro, queremos estudar a geração da assimetria inicial que não depende da mudança da temperatura; segundo, ainda não foram estudadas em detalhe as equações de Kadanoff-Baym para férmions de Majorana em um espaço-tempo curvo. Assim, levando isto em conta, em primeiro lugar, determinamos a ação efetiva 2PI, logo após estabelecermos as funções de Green para os campos de Neutrinos de mão direita, Higgs e léptons. A partir da ação efetiva é possível obter as autoenergias para esses campos, para depois determinar as equações de Kadanoff-Baym para as funções espectral e estatística. Supondo que o banho térmico não sofre de *backreaction*, o que pode ser suposto se os acoplamentos dos neutrinos são muito menores que os acoplamentos de gauge das interações do MP, a autoenergia vai possuir as propriedades do equilíbrio. Utilizando isto, é possível resolver as equações para as funções espectral e estatística, para os casos das componentes da e fora da diagonal da função de Green dos neutrinos no espaço de sabor. Com as soluções das equações é possível determinar a assimetria leptônica.

No capítulo quatro determinamos a assimetria leptônica e a comparamos com o resultado obtido utilizando o formalismo de Boltzmann. Para isto, em primeiro lugar, estudamos a corrente conservada de Noether para léptons, e mostramos que se a quadri-divergência dessa corrente não é nula, poderíamos ter criação de léptons ou antiléptons. Deste modo, definimos a assimetria como a componente temporal da corrente conservada. A equação de movimento da assimetria vai depender diretamente das equações de Kadanoff-Baym para léptons e das funções espectral e estatísticas de léptons ativos, Higgs e neutrinos de mão direita. Nesse ponto utilizamos as condições de Sakharov para simplificarmos a assimetria leptônica. Notando que só o desvio do equilíbrio e os termos que geram a assimetria CP contribuem à assimetria leptônica, o resultado vai depender das partes fora do equilíbrio da função estatística dos neutrinos de mão direita e das funções no equilíbrio de léptons e Higgs. Assim, nos perguntamos como são essas funções no equilíbrio geradas pelas interações do MP, porém, ainda não há uma resposta satisfatória para tal questão. Então, fazendo uso de um *ansatz* utilizado na literatura, correspondente a uma modificação das funções da teoria livre por um fator decrescente, dependente da largura do banho térmico, simplificamos a assimetria.

A assimetria calculada possui dois termos, um termo análogo ao que seria obtido no formalismo de Boltzmann e um termo que possui um comportamento oscilatório, que é interpretado como a contribuição à assimetria pelas oscilações entre os neutrinos de mão direita. Tendo o resultado da assimetria, procedemos a comparar com o resultado obtido com a equação de Boltzmann. Analisando numericamente encontramos que o resultado de Boltzmann é o que fica suprimido com relação ao da TQCfE, tanto para o espectro hierárquico quanto para um espectro degenerado. Quando o espectro é degenerado, o termo oscilante tem uma contribuição importante de modo que a assimetria apresenta um comportamento oscilatório. Agora, quando o espectro apresenta ressonância, que é definida para o caso em que a diferença entre as massas é da mesma ordem que a largura, os dois termos podem ficar da mesma ordem e se anular mutuamente, porém, ao compararmos com o caso de Boltzmann ainda há casos em que o resultado fica maior que o de Boltzmann. Também, mostramos como o fato que a assimetria obtida usando o formalismo da TQCfE para o caso degenerado tenda a uma constante para momentos grandes indica um problema com relação à renormalização da teoria, pois ao fazermos a integração nos momentos, tal integral diverge. Isto também se vê refletido quando mudamos a temperatura a regimes não relativísticos. Por outro lado, comparamos nossos resultados com o artigo publicado recentemente na literatura por Garny et al. e vimos como no caso hierárquico nosso resultado tende ao resultado desse trabalho no limite não relativístico. Para o caso degenerado, vimos como o problema de renormalização que possuímos não permite determinar o limite em que nossos resultados coincidem. Hoje em dia estamos trabalhando nesse problema.

Assim, mostramos como os resultados com formalismos de Boltzmann e da TQCfE são, em geral, diferentes e, por tanto, devemos realizar mais estudos para podermos comparar com dados experimentais da assimetria. Um aspecto de grande importância que deve ser considerado no futuro é incluir a expansão do Universo. Para isto, devemos estudar a TQCfE no caso de um espaço-tempo curvo, em especial para a métrica de Friedmann- Lemaître-Robertson-Walker, e deduzir e resolver as equações de Kadanoff-Baym para férmions de Majorana. Isto pode não ser uma tarefa fácil, mas pretendemos tentar realizar esse passo. Também, é preciso entender a validade do *ansatz* das funções espectral e estatística de léptons e Higgs no banho térmico. Por outro lado, devemos levar em conta o fenômeno de *washout*. Assim podemos afirmar que a descrição da leptogênese no formalismo da Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio Térmico ainda precisa de diferentes estudos para poder considerá-la como uma descrição completa da geração de assimetria leptônica. O que foi feito nesta dissertação é um passo mais para chegarmos a tal objetivo.

APÊNDICE A

CONVENÇÕES

No presente apêndice apresentamos as convenções utilizadas na dissertação

- Usaremos unidades naturais, tais que $\hbar = c = k_B = 1$.
- Utilizamos a convenção de Einstein, ou seja, índices repetidos indicam soma, salvo indicado o contrário no texto.
- As primeiras letras do alfabeto latino, quando forem minúsculas, indicarão os índices de sabor dos léptons carregados e dos neutrinos de mão direita; enquanto que quando forem maiúsculas, indicarão os índices de $SU(2)_L$.
- Para os índices espinoriais utilizaremos as primeiras letras do alfabeto grego $\alpha, \beta, \dots$.
- Escolhemos o tensor métrico com traço -2 , cujas componentes são

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

- Os quadrivetores contravariantes, tais como posições e momentos, se definirão com índices inferiores, enquanto que os covariantes, como derivadas com índices superiores:

$$x^\mu = (t, \vec{r}), \quad (\text{A.2})$$

$$p^\mu = (E, \vec{p}), \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (\text{A.4})$$

- Lembramos que as matrizes de Dirac satisfazem as seguintes relações de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

e possuem as seguintes propriedades

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\text{A.6a})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^\mu_\nu = 4\delta^\mu_\nu \quad (\text{A.6b})$$

- Quando for necessário o uso de alguma representação particular das matrizes de Dirac, utilizaremos a representação, dada por

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

- A matriz de quiralidade γ^5 está definida por

$$\gamma_5 := \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.8})$$

que possui as seguintes propriedades

$$\{\gamma^5, \gamma^\nu\} = 0, \quad (\text{A.9a})$$

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad (\text{A.9b})$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5. \quad (\text{A.9c})$$

- A matriz de projeção de quiralidade nas componentes direita e esquerda se definem por

$$P_{R,L} := \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5), \quad (\text{A.10})$$

e satisfazem as propriedades

$$P_{R,L}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{L,R}, \quad (\text{A.11a})$$

$$P_R + P_L = 1, \quad (\text{A.11b})$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (P_L)^2 = P_L, \quad (\text{A.11c})$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (\text{A.11d})$$

- A matriz de Conjugação de carga $\hat{C}$ se define mediante as propriedades

$$\hat{C}(\gamma^\mu)^T \hat{C}^{-1} = -\gamma^\mu, \quad \hat{C}(\gamma^5)^T \hat{C}^{-1} = \gamma^5, \quad (\text{A.12a})$$

$$\hat{C}^\dagger = \hat{C}^{-1} = \hat{C}^T = -\hat{C}. \quad (\text{A.12b})$$

As matrizes de projeção $P_\pm$, R , L e de conjugação de carga $\hat{C}$, cumprem a seguinte relação

$$P_{R,L} \hat{C} = \hat{C} (P_{R,L})^T \quad (\text{A.13})$$

APÊNDICE B

BARIOGÊNESE ELETROFRACA

Neste apêndice apresentamos um breve resumo da bariogênese eletrofraca e das suas consequências na fenomenologia¹.

B.1 Violação de $B + L$ no Modelo Padrão

Como é bem sabido, a conservação do número bariônico e leptônico no MP é acidental, ou seja, tal simetria não foi imposta na construção da teoria, porém, essa simetria global não é conservada a nível quântico. A divergência das correntes B e L (N_f é o número de famílias),

$$J_\mu^B = \frac{1}{3} \sum_{N_f} (\bar{q} \gamma_\mu q + \bar{u}_R \gamma_\mu u_R + \bar{d}_R \gamma_\mu d_R), \quad (\text{B.1})$$

$$J_\mu^L = \sum_{N_f} (\bar{l} \gamma_\mu l + \bar{e}_R \gamma_\mu e_R), \quad (\text{B.2})$$

é dada pela anomalia triangular,

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_\mu^B &= \partial^\mu J_\mu^L \\ &= \frac{N_f}{32\pi^2} \left(-g^2 W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a\mu\nu} + g'^2 B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde W_μ^a e B_μ são os campos de gauge de $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$ com acoplamentos g e g' respectivamente. Como consequência desta anomalia, uma mudança no número bariônico ou leptônico está relacionada com a mudança da carga topológica do campo de gauge,

$$\begin{aligned} B(t_f) - B(t_i) &= \int_{t_f}^{t_i} dt \int d^3x \partial^\mu J_\mu^B \\ &= N_f [N_{cs}(t_f) - N_{cs}(t_i)], \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde os números de Chern-Simons $N_{cs}(t)$ são dados por

$$N_{cs}(t) = \frac{g^3}{96\pi^2} \int d^3x \epsilon_{abc} \epsilon^{ABC} W^{Aa} W^{Bb} W^{Cc}, \quad (\text{B.5})$$

¹ Este apêndice está baseado na referência [73].

sendo W^{Aa} transições vácuo-vácuo puramente de gauge. Em uma teoria não-abeliana, há infinitos vácuos degenerados que vão diferir somente no valor do número de Chern-Simons, $\Delta N_{cs} = \pm 1, \pm 2, \dots$, enquanto que esses vácuos estão separados por uma barreira de potencial com altura dada pela *energia de sphalerons* E_{sph} . Agora, devido à anomalia que quebra a simetria de número bariônico e leptônico, a transição entre vácuos está associada com mudanças do número bariônico e leptônico,

$$\Delta B = \Delta L = N_f \Delta N_{cs} = 3(\pm 1, \pm 2, \dots),$$

pelo que a transição entre os vácuos mais próximos corresponde a uma mudança de $\Delta B = \Delta L = \pm 3$. É possível determinar a probabilidade de tunelamento entre vácuos [38] através de processos denominados *instantons*, e é dada por

$$\Gamma \sim e^{-S_{ins}} = \mathcal{O}(10^{-165}), \quad (\text{B.6})$$

o que de fato é um número realmente pequeno. Assim, podemos concluir que interações que violam $B + L$ são completamente desprezíveis no Modelo Padrão.

B.2 Sphalerons

Não obstante a anterior conclusão, Kuzmin Rubakov e Shaposhnikov [39] mostraram que é possível ter transições entre diferentes vácuos não por tunelamento, mas por flutuações térmicas. Assim que a temperaturas maiores que a altura da barreira, processos que violam $B + L$ podem ocorrer a uma taxa importante e podem ficar no equilíbrio no Universo em expansão. Tal taxa pode ser determinada pela configuração denominada de *sphaleron*, um ponto crítico da energia de campo do sistema gauge-Higgs. Flutuações em torno desse ponto possuem autovalores negativos, o que permite extrair a taxa de transição, para isso precisamos a energia desses *sphalerons*, dada por

$$E_{sph}(T) \approx \frac{8\pi}{g} v_F(T), \quad (\text{B.7})$$

sendo $v_F(T)$ o valor esperado de vácuo do dubleto de Higgs dependente da temperatura. A partir deste resultado, é possível extrair a taxa de transição na fase simétrica do MP,

$$\frac{\Gamma_{B+L}}{V} = (10.8 \pm 0.7) \left(\frac{gT}{m_D} \right) \alpha^5 T^4 \left[\ln \left(\frac{m_D}{\gamma} \right) + \left(\ln \left(\frac{1}{g} \right) \right)^{-2} + 3.041 \right], \quad (\text{B.8})$$

de onde é possível determinar que os *sphalerons* estão no equilíbrio a temperaturas

$$T_{EF} \approx 100 \text{ GeV} < T < T_{sph} \sim 10^{12} \text{ GeV}. \quad (\text{B.9})$$

Este intervalo de temperaturas é muito importante pois para termos uma bariogênese através de leptogênese, a geração de assimetria leptônica deve ocorrer quando os *sphalerons* estão no equilíbrio, pois no caso contrário, a assimetria pode ser “lavada” (*washout*) pelos mesmos processos de *sphalerons*.

B.3 Bariogênese Eletrofraca

Um dos cenários que permitem criar assimetria bariônica no Universo é aquele em que o mesmo Modelo Padrão cria a assimetria, pois nesse modelo há violação de C e CP e há desvio do equilíbrio na época da transição de fase eletrofraca, mas tal transição precisa ser de primeira ordem. Um dos requerimentos que tem a denominada *bariogênese eletrofraca* é que a assimetria bariônica não deve ser eliminada pelos processos de *sphalerons*. Isto tem como consequência que o “salto” no valor esperado de vácuo do Higgs à temperatura crítica deve cumprir

$$\frac{\Delta v_F(T_c)}{T_c} > 1. \quad (\text{B.10})$$

Diferentes estudos numéricos e analíticos foram desenvolvidos para determinar a robustez da transição de fase eletrofraca como função da massa do Higgs. Para o Modelo Padrão, encontrou-se que o limite anterior é violado para um Higgs com massa maior que 45 GeV. Por outro lado, para um Higgs com massa grande um fenômeno interessante ocorre, a transição de fase de primeira ordem se transforma em um cruzamento suave, o que é interpretado como uma transição de fase de segunda ordem. Isto acontece a uma massa do Higgs definida, denominada massa crítica m_H^c . A partir de simulações na rede determinou-se que tal massa é igual a $m_H^c = 72.1 \pm 1.4$ GeV. Agora, os últimos resultados do LHC, que mostram a existência de uma partícula que pode ser o Higgs do Modelo Padrão [13] com massa $m_H \approx 125$ GeV, indicam que a bariogênese eletrofraca não pode ser considerada como um bom cenário para geração de assimetria bariônica.

APÊNDICE C

NEUTRINOS DE MAJORANA

C.1 Férmions de Majorana

Em 1937, E. Majorana [30] propôs uma teoria simetria do elétron e do pósitron mediante a generalização do princípio variacional à variáveis anticomutantes, isto é, a campos que obedecem a estatística de Fermi-Dirac. Majorana se perguntou em que condições férmions com massa não nula poderiam ser descritos por um spinor de Weyl de duas componentes, descobrindo que para isso eles deveriam ser suas próprias antipartículas. Uma condição necessária para isso é que sejam neutros, assim, os férmions neutros de Majorana são suas próprias antipartículas. Hoje em dia sabemos que os únicos férmions conhecidos que podem ser de Majorana são os neutrinos, já que sabemos que estas partículas têm massa pois o fenômeno de oscilações de neutrinos é uma evidência disso. Para descrevermos as propriedades dos férmions de Majorana, primeiro, vamos discutir a derivação da condição e equação de Majorana. As equações de Dirac para as componentes quirais do campo fermiônico, $\psi = \psi_L + \psi_R$,

$$\psi_{R,L} = P_{R,L}\psi := \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \psi, \quad (\text{C.1})$$

são dadas por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R, \quad (\text{C.2a})$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L. \quad (\text{C.2b})$$

Devemos notar que se o férmion não tivesse massa, $m = 0$, as equações anteriores estariam desacopladas, pelo que um férmion sem massa poderia se descrever unicamente por qualquer um dos campos quirais. Tal possibilidade, descrita por Weyl, foi rejeitada por Pauli devido a que causa violação da paridade: já que uma inversão espacial transforma ψ_L em ψ_R e vice-versa, a invariância de paridade implica que as duas componentes devem estar na teoria. Porém, o descobrimento experimental da violação da paridade fez ressurgir a possibilidade de que férmions não massivos possam ser descritos por um único campo quiral. Assim, Lee-Yang [18], Landau, Salam, propuseram descrever o neutrino mediante um campo quiral esquerdo não massivo ν_L , explicando assim que o neutrino com quiralidade esquerda é aquele que interage fracamente. Tal teoria é denominada *teoria em duas componentes de neutrinos não massivos* [6, 33] e foi incorporada no

Modelo Padrão de partículas nos anos 60.

Deste modo, podemos nos perguntar se é possível descrever um férmion massivo mediante uma única componente quiral $\psi_{L,R}$. Para vermos se isto é possível, lembremos que o campo conjugado de carga,

$$\psi^c = \hat{\mathcal{C}}\bar{\psi}^T, \quad (\text{C.3})$$

que obedece a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^c = 0, \quad (\text{C.4})$$

onde a matriz de conjugação de carga $\hat{\mathcal{C}}$ é definida com as propriedades apresentadas no apêndice A, representa o férmion com carga oposta do ψ mas com a mesma massa, ou seja, o campo conjugado de carga descreve formalmente o antiférmion.

A equação para o campo conjugado ψ^c (C.4) pode também se projetar nas componentes quirais de ψ , porém, devemos ter em conta que as componentes quirais (C.1) sob a conjugação de carga e as componentes quirais do campo conjugado se relacionam segundo

$$(\psi_L)^c = (\psi^c)_R, \quad (\psi_R)^c = (\psi^c)_L, \quad (\text{C.5})$$

assim, vemos que a conjugação de carga muda a quiralidade dos campos. As equações de movimento para $(\psi_{R,L})^c$ são

$$i\gamma^\mu \partial_\mu (\psi_R)^c = m(\psi_L)^c, \quad (\text{C.6a})$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L)^c = m(\psi_R)^c. \quad (\text{C.6b})$$

Ao compararmos essas equações com as equações (C.2) é claro que estas possuem uma estrutura similar. Assim, as equações são de fato equivalentes se as condições

$$\psi_L = \xi(\psi_R)^c = \xi\hat{\mathcal{C}}\bar{\psi}_R^T, \quad (\text{C.7a})$$

$$\psi_R = \xi(\psi_L)^c = \xi\hat{\mathcal{C}}\bar{\psi}_L^T, \quad (\text{C.7b})$$

onde $\xi \equiv e^{-i\alpha}$ um fator de fase arbitrário, $|\xi|^2 = 1$, são cumpridas. Portanto, o campo de Dirac associado que cumpre esta condição pode ser escrito como

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + \xi\hat{\mathcal{C}}\bar{\psi}_L^T, \quad (\text{C.8})$$

ou seja,

$$\psi = \xi\psi^c. \quad (\text{C.9})$$

A relação (C.9) é denominada *condição de Majorana*. É claro que os férmions que cumprem essa condição, que serão denominados férmions de Majorana, são suas próprias antipartículas, já que o campo e seu conjugado de carga são equivalentes. Isto implica que estes férmions devem ser partículas neutras, já que se a anterior condição for obedecida, a corrente eletromagnética $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ deve se anular identicamente

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c = -\psi^T\hat{\mathcal{C}}^\dagger\gamma^\mu\hat{\mathcal{C}}\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0, \quad (\text{C.10})$$

portanto, os únicos férmons conhecidos que podem ser de Majorana são os neutrinos.

É possível reescrever as equações (C.2a), (C.2b) usando a condição de Majorana para as componentes quirais (C.7)

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\xi \hat{C} \overline{\psi_L}^T, \quad (\text{C.11a})$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\xi \hat{C} \overline{\psi_R}^T. \quad (\text{C.11b})$$

Deste modo, mostramos que um férmon massivo pode ser descrito usando uma única componente quiral, mas o preço que temos que pagar é que tal férmon precisa ser neutro. Pode se mostrar que as duas últimas equações estão relacionadas pela conjugação complexa. Assim, passamos de ter quatro equações que descrevem as componentes quirais de férmons e antiférmons a ter duas equações independentes para os campos quirais esquerdo e direito. Este último se constrói a partir do esquerdo (C.7b), logo, só temos um campo independente, o esquerdo [6]; isto não impede que tenhamos um férmon de Majorana direito, o que isso significa é que só precisamos de uma componente quiral para termos a descrição completa de um férmon de Majorana.

Sem entrarmos em detalhes, temos que a lagrangeana que descreve os férmons de Majorana com quiralidade esquerda é dada por [6]

$$\mathcal{L}_M = \overline{\psi_L} i \not{\partial} \psi_L + \frac{m\xi}{2} \left(\psi_L^T \hat{C}^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \hat{C} \psi_L^* \right), \quad (\text{C.12})$$

onde T indica o transposto com relação aos índices de Dirac. Um questão muito importante a termos em conta é que o campo de Majorana precisa ser anticomutante mesmo antes de considerarmos a quantização do mesmo [6]. Por outro lado, a lagrangeana (C.12) não é invariante sob transformações do tipo

$$\psi_L \longrightarrow e^{i\varphi} \psi_L,$$

já que o termo de massa muda

$$\mathcal{L}_M^m = \frac{m\xi}{2} \left(\psi_L^T \hat{C}^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \hat{C} \psi_L^* \right) \longrightarrow \frac{m\xi}{2} \left(e^{2i\varphi} \psi_L^T \hat{C}^\dagger \psi_L + e^{-2i\varphi} \psi_L^\dagger \hat{C} \psi_L^* \right), \quad (\text{C.13})$$

logo não será possível falarmos de um número leptônico conservado. Assim, já que as massas dos neutrinos são muito pequenas, é possível considerar que a lagrangeana do MP é invariante sob transformações do tipo $U(1)$, pelo que poderemos atribuir aos léptons carregados e aos neutrinos um número leptônico efetivo que será conservado nos processos que não sejam sensíveis à massa de Majorana, ou seja, àqueles processos nos quais possam considerar os neutrinos como partículas sem massa. O termo de massa de Majorana poder-se-á considerar como uma perturbação que vai gerar transições que violam o número leptônico. Desta maneira, vemos como o termo de massa de Majorana é o responsável por cumprir uma das condições de Sakharov.

C.2 Massa Efetiva e Mecanismo de See-Saw

Para o caso de uma geração de neutrinos ativos de mão esquerda, ν_L , poderemos ter o termo de massa de Majorana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y^{ML} &= \frac{m_L \xi_L}{2} \left(\nu_L^T \hat{C}^\dagger \nu_L + \nu_L^\dagger \hat{C} \nu_L^* \right), \\ &= \frac{1}{2} m_L e^{i\delta_L} \nu_L^T \hat{C}^\dagger \nu_L + h.c.,\end{aligned}\tag{C.14}$$

onde $\xi_L = e^{i\delta_L}$ e $h.c.$ significa o hermítiano conjugado. Devemos notar que a lagrangeana (C.14) se constrói unicamente com as componentes quirais esquerdas, assim, poderíamos nos perguntar se é possível construir este termo de massa de Majorana de modo tal que respeite as simetrias do Modelo Padrão. Lembrando que os neutrinos possuem como terceira componente do isospin fraco a $I_3 = \frac{1}{2}$ e hipercarga $Y = -1$ [6], o termo

$$-\nu_L^T \hat{C}^\dagger \nu_L = \overline{\nu_L^c} \nu_L,\tag{C.15}$$

tem como números quânticos associados de isospin $I_3 = 1$ e hipercarga $Y = -2$. Portanto, não é possível gerar um termo renormalizável na lagrangeana que, mediante acoplamentos de tipo Yukawa, permita obter o termo de massa de Majorana, já que não existe nenhum tripleto de isospin com $Y = 2$ no MP. Em consequência, o MP proíbe a existência de termos de massa de Majorana. Porém, hoje em dia, considera-se o Modelo Padrão como uma teoria efetiva a baixas energias, similar à teoria de Fermi das interações fracas. Assim, se considerarmos o seguinte termo que respeita as simetrias do MP [74, 75, 6]

$$\mathcal{L}_5^W = \frac{g}{\mathfrak{M}} (l_L^T \sigma_2 \phi) \hat{C}^\dagger (\phi^T \sigma_2 l_L) + h.c.,\tag{C.16}$$

onde g é a constante de acoplamento e $\mathfrak{M}$ é uma constante com dimensões de massa; l_L o dubleto de léptons e ϕ o dubleto de Higgs, é possível ver, que depois da quebra espontânea da simetria eletrofraca, caracterizada pelo valor esperado de vácuo v , o operador anterior gera um termo de massa de Majorana

$$\mathcal{L}_Y^{ML} = \frac{1}{2} \frac{g v^2}{\mathfrak{M}} \nu_L^T \hat{C}^\dagger \nu_L + h.c.\tag{C.17}$$

O operador (C.16) é denominado *operador de Weinberg* [74], já que foi ele o primeiro a descrevê-lo como fonte de violação do número leptônico. É clara aqui a conexão entre a possível natureza de Majorana dos neutrinos e a violação do número leptônico. Contudo, o problema que possui o operador de Weinberg é que é de dimensão cinco, logo, não renormalizável, não é aceitável no MP, mas, podemos considerá-lo como um operador efetivo que provém de alguma teoria em uma escala superior caracterizada pela massa $\mathfrak{M}$.

Assim, com o fim de obtermos o operador de Weinberg a partir de interações renormalizáveis à nível árvore, incluir novos campos ao Modelo Padrão. Existem três possíveis formas de introduzir novos campos que geram o operador de Weinberg, os quais se denominarão *mecanismo de See-Saw de tipo I, II, III*. A seguir, vamos considerar em detalhe o mecanismo de See-Saw de tipo I, já que é o caso que estamos considerando na geração de assimetria leptônica.

C.2.1 Mecanismo de See-Saw de tipo I

No caso do mecanismo de See-Saw de tipo I, introduzimos ao espectro de partículas, um neutrino de mão direita N_R para cada geração que seja singletos sob as interações $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ do MP, logo, estes neutrinos apresentarão interações de tipo Yukawa e gravitacional. A lagrangeana tipo Yukawa pode conter um termo de massa de tipo Majorana, similar ao (C.14), pois este respeitará as simetrias do MP. Tal termo é dado por (consideramos o caso de uma geração só por simplicidade)

$$\mathcal{L}_Y^{MR} = \frac{1}{2} m_R \xi_R N_R^T \hat{C}^\dagger N_R + h.c., \quad (C.18)$$

sendo $\xi_R \equiv e^{i\delta_R}$ uma fase própria do campo quirais direito. Por outro lado, já que existe uma componente direita, o MP permite a existência de um termo de massa de Dirac, que vai ser gerado pela quebra espontânea da simetria eletrofraca, correspondente a [6]

$$\mathcal{L}_Y^D = -m_D \overline{N_R} \nu_L + h.c. \quad (C.19)$$

Portanto, em geral, é possível ter um termo de Yukawa para o neutrino que envolve o termo de massa de Majorana para os campos quirais direitos e esquerdos mais o termo de masa de Dirac, [6]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{M+D} &= \mathcal{L}_Y^{ML} + \mathcal{L}_Y^{MR} + \mathcal{L}_Y^D \\ &= \frac{1}{2} m_L e^{i\delta_L} \nu_L^T \hat{C}^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m_R e^{i\delta_R} N_R^T \hat{C}^\dagger N_R - m_D \overline{N_R} \nu_L + h.c., \end{aligned} \quad (C.20)$$

tal termo de massa é denominado *termo de massa de Dirac-Majorana* (DM). É importante ver que, a diferença de todas as outras partículas do MP, quarks e léptons carregados, o neutrino é o único que pode possuir termos de Majorana e Dirac simultaneamente.

Embora o termo de massa de Majorana para ν_L não está permitido pelas simetrias do MP, como já foi mencionado, logo $m_L = 0$, o termo de DM estará permitido no MP estendido com neutrinos de quiralidade direita N_R . Por enquanto vamos ignorar o fato que $m_L = 0$ e estudar as consequências do mesmo nas propriedades do neutrino. Com tal fim, reescrever-se-á o termo (C.20) da seguinte maneira, [6]

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = \frac{1}{2} N_L^T \hat{C}^\dagger M N_L + h.c., \quad (C.21)$$

com

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \hat{C} \overline{N_R^c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix}, \quad M_\nu = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad (C.22)$$

onde $N_R^c \equiv (N_R)^c$. É claro que os campos ν_L e N_R não possuem massas definidas devido à existência do termo de Dirac. Assim, ao diagonalizarmos a matriz M_ν mediante a transformação

$$U^T M_\nu U = \text{diag}(m_1, m_2), \quad (C.23)$$

com $m_a \geq 0$, e definindo os campos com massas definidas segundo,

$$N_L = U n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \quad (C.24)$$

podemos escrever (C.21) como

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = \frac{1}{2} \sum_{a=1,2} m_a \nu_{aL}^T \hat{C}^\dagger \nu_{aL} + h.c., \quad (C.25)$$

onde vemos que os neutrinos com massas definidas são do tipo Majorana. Vemos que devido a isso há possibilidade de oscilações entre neutrinos ativo-estéril, já que se um neutrino é criado por algum processo de interação fraca,

$$\mathcal{L}^{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{a=1,2} (U_{1a}^* \bar{\nu}_{aL} \gamma^\mu \alpha_L W_\mu) + h.c., \quad (C.26)$$

ao evoluir no tempo, existirá uma probabilidade oscilatória de detectar a componente ativa, enquanto que a aparição da componente estéril pode se ver na desapareição da componente ativa [6].

Assim, temos que as massas dos campos ν_{aL} estão dadas por,

$$m_{2,1} = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D} \right]. \quad (C.27)$$

O cenário mais interessante e importante que apresenta o termo de DM é aquele em que [6, 33]

$$m_D \ll m_R, \quad m_L = 0. \quad (C.28)$$

Tomando este caso, as massas dos neutrinos ficam,

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R}, \quad (C.29a)$$

$$m_2 \approx m_R, \quad (C.29b)$$

como podemos observar, neste caso se tem que ν_2 é muito pesado e ν_1 é muito leve comparados com a escala da quebra electro-fraca que está caracterizada indiretamente por m_D , logo, os campos possuirão a expansão [6]

$$\nu_{1L} = -i \cos \theta \nu_L + \sin \theta N_R^c \approx -i \nu_L, \quad (C.30a)$$

$$\nu_{2L} = i \sin \theta \nu_L + \cos \theta N_R^c \approx N_R^c, \quad (C.30b)$$

sendo θ o ângulo de mistura ativo-estéril. Vemos que o campo ativo ν_L está composto em sua maioria pelo campo com massa pequena ν_{1L} , enquanto que o campo estéril está composto pelo campo ν_{2L} supermassivo. Este é o mecanismo de See-Saw (gangorra em português), já que quanto maior for m_R , menor será m_L . Portanto, o mecanismo de See-saw dá uma explicação satisfatória da pequenez da massa do neutrino ativo, além de gerar a assimetria violação do número leptônico, que pode dar conta da assimetria bariônica observada como temos visto na presente dissertação. Assim, o termo de massa de Dirac está protegido pela escala da quebra da simetria eletrofraca, logo em princípio deveria ser da ordem de 10^2 GeV. Por outro lado, o termo de massa de Majorana do neutrino estéril deve estar protegido pela quebra de alguma simetria a escalas muito maiores que a escala eletrofraca, assim, a massa do neutrino ativo pode estar suprimida pela razão $\frac{m_D}{m_R} \sim 10^{-14} - 10^{-12}$ com respeito às massas dos demais férmions do MP [6].

Podemos mostrar que o termo de Dirac-Majorana no cenário de See-Saw, pode ser obtido da lagrangeana

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} = -y^\nu \left(\overline{\nu_R} \phi^{c\dagger} l_L + \overline{l_L} \phi^c \nu_R \right) + \frac{1}{2} m_R \left(\nu_R^T \hat{C}^\dagger \nu_R + \nu_R^\dagger \hat{C} \nu_R^* \right), \quad (\text{C.31})$$

sendo y^ν o acoplamento de Yukawa e ϕ^c o dublete conjugado de Higgs, gera o operador de Weinberg. Para m_R muito pesado, o campo quiral direito pode se “integrar fora” ao considerarmos o limite estático em que se despreza o termo cinético na equação de movimento [6],

$$\frac{\partial \mathcal{L}_Y^{M+D}}{\partial \nu_R} \approx 0, \quad (\text{C.32})$$

o que é equivalente a [6]

$$\nu_R \approx \frac{y^\nu}{m_R} \Phi^\dagger (i\tau_2) \hat{C} \overline{L_L}^T. \quad (\text{C.33})$$

Substituindo em (C.31), encontra-se que

$$\mathcal{L}_Y^{M+D} \approx -\frac{(y^\nu)^2}{2m_R} \left[(L_L^T \tau_2 \Phi) \hat{C}^\dagger (\Phi^T \tau_2 L_L) - (\overline{L_L} \tau_2 \Phi^*) \hat{C} (\Phi^\dagger \tau_2 \overline{L_L}^T) \right], \quad (\text{C.34})$$

que é idêntico ao operador de Weinberg (C.16) se $\mathfrak{g} = -\frac{(y^\nu)^2}{2}$ e $m_R = \mathfrak{M}$.

A extensão para o caso de n -gerações é feita sem nenhum problema, porém, naquele caso a diagonalização da matriz dos neutrinos $\mathbf{M}_\nu^{M+D}$,

$$\mathbf{M}_\nu^{M+D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{M}_D)^T \\ \mathbf{M}_D & \mathbf{M}_R \end{pmatrix}, \quad (\text{C.35})$$

não é trivial, e deve se tomar a aproximação em que

$$(\mathbf{M}_D)_{ab} \ll (\mathbf{M}_R)_{ab}.$$

Nesse caso, a matriz (C.35) pode ser diagonalizada em blocos, e até ordem $(\mathbf{M}_R)^{-1} \mathbf{M}_D$ é dada por

$$(W_L^\nu)^T \mathbf{M}_\nu^{M+D} W_L^\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{Lig} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{Pes} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.36})$$

com

$$W_L^\nu \approx \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{1}{2} \mathbf{M}_D^\dagger (\mathbf{M}_R \mathbf{M}_R^\dagger)^{-1} \mathbf{M}_D & \mathbf{M}_D^\dagger (\mathbf{M}_R^\dagger)^{-1} \\ -\mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{M}_D & \mathbf{1} - \frac{1}{2} \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{M}_D \mathbf{M}_D^\dagger \mathbf{M}_R^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.37})$$

As matrizes $n \times n$ de neutrinos ativos leves $\mathbf{M}_{Lig}$ e estéreis pesados $\mathbf{M}_{Pes}$, estão dadas por

$$\mathbf{M}_{Lig} \approx -\mathbf{M}_D^T \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{M}_D, \quad \mathbf{M}_{Pes} \approx \mathbf{M}_R. \quad (\text{C.38})$$

Deste modo, o mecanismo de See-Saw suprime as massas dos neutrinos leves com respeito aos elementos da matriz de massa de Dirac pelo fator $\mathbf{M}_D^T \mathbf{M}_R^{-1}$, enquanto que as

massas dos neutrinos pesados são iguais aos autovalores da matriz $\mathbf{M}_R$. Para fazermos a conexão com o feito para o caso da assimetria leptônica, temos que

$$\mathbf{M}_{ab}^R = M_{ab} = M_a \delta_{ab},$$

com M_{ab} que aparece em (3.1), enquanto que a matriz de Dirac $\mathbf{M}_D$ vai ser igual a

$$\mathbf{M}_{ab}^D = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ab}.$$

Deste modo, a relação de See-Saw (C.38) para os neutrinos ativos fica

$$\mathbf{M}_{ab}^{Lig} = - \sum_{c=1}^3 \frac{v^2}{2M_c} Y_{ac}^T Y_{cb}, \quad (\text{C.39})$$

como vemos, podemos relacionar a matriz de massa dos neutrinos ativos, a qual pode se estudar considerando as oscilações de neutrinos, e as matrizes de Yukawa que estão presentes na assimetria leptônica que determinamos. Assim, a partir das possíveis estruturas da matriz $\mathbf{M}_{Lig}$ que pode ser obtida da fenomenologia das oscilações podemos considerar distintos tipos de matrizes de Yukawa Y_{ab} e a sua influência na geração e evolução da assimetria leptônica. Porém, uma discussão desse tipo na presente dissertação é prematura ainda, pois, ao não considerarmos a expansão do Universo, não é possível dar uma estimativa real da assimetria gerada após o *freeze-out*, e, portanto, ainda não é possível comparar com a fenomenologia a baixas energias.

APÊNDICE D

EQUAÇÃO DE BOLTZMANN E TEORIA DE CAMPOS FORA DO EQUILÍBRIO

D.1 Equação de Boltzmann

A evolução temporal de um sistema fora do equilíbrio é determinada usualmente pela equação de Boltzmann. Esta equação tem sido objeto de estudo desde sua formulação por Boltzmann e tem dado resultados importantes em diferentes áreas da física desde transporte eletrônico em semicondutores até processos no Universo primordial. Notemos que sua aplicação na cosmologia tem dado resultados tão relevantes quanto a descrição do desacoplamento de radiação-matéria com a geração da radiação cósmica de fundo, a nucleossíntese de elementos leves, entre outros. Não vamos tentar derivar a equação de Boltzmann neste apêndice, mas vamos fazer um breve resumo desta equação e dos problemas conceituais que possui seu uso em uma teoria quântica. A equação de Boltzmann é dada por [7, 76, 77]

$$\hat{L}[f_k] = \hat{C}[f_k], \quad (\text{D.1})$$

sendo f_k a função de distribuição no espaço de fases e $\hat{L}[f_k]$ o operador de Liouville. O operador de Liouville clássico é dado por

$$\hat{L}[f_k] = \left\{ \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_r + \vec{F} \cdot \nabla_p \right\} f(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (\text{D.2})$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade das partículas e $\vec{F}$ as possíveis forças externas atuando no sistema. Na Relatividade Geral o operador de Liouville é dado por [76, 77]

$$\hat{L}[f_k] = p^\mu \frac{\partial f_k}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda \frac{\partial f_k}{\partial p^\mu}, \quad (\text{D.3})$$

com $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ os símbolos de Christoffel e $f_k = f_k(x^\mu, p^\mu)$ a função de distribuição no espaço de fases. Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) o operador de Liouville pode ser escrito como [76]

$$\hat{L}[f_k] = \frac{\partial f_k}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} p^i \frac{\partial f_k}{\partial p^i}, \quad (\text{D.4})$$

onde $R = R(t)$ é o fator de escala. Além disso, é necessário mencionar que na obtenção do operador anterior se utilizou a homogeneidade do espaço. Por outro lado, temos que o termo de colisão $\hat{C}[f_K]$, em geral, pode ser dividido em duas partes,

$$\hat{C}[f_k] = \hat{C}^{1\leftrightarrow 2}[f_k] + \hat{C}^{2\leftrightarrow 2}[f_k], \quad (\text{D.5})$$

o primeiro termo, $\hat{C}^{1\leftrightarrow 2}[f_k]$, indica o termo relacionado com processos de decaimento, nos quais esteja envolvida a espécie k , enquanto que o segundo termo, $\hat{C}^{2\leftrightarrow 2}[f_k]$, da conta de processos de espalhamento. Note-se que estes termos de colisão são obtidos estudando as interações que envolvem as espécies desde um ponto de vista quântico. Assim, a colisão é considerada como uma transição de um estado inicial a um estado final. A partir destas hipóteses e da hipótese de *caos molecular* se podem obter os termos de colisão (por simplicidade escrevemos só o termo de colisão associado aos espalhamentos, o termo para decaimentos e decaimentos inversos é análogo), [7]

$$\hat{C}^{2\leftrightarrow 2}[f_k] = \frac{1}{2} \int_{\vec{p}_l, \vec{p}_m, \vec{p}_n} [f_m f_n (1 \pm f_k)(1 \pm f_l) W_{mn|kl} - (1 \pm f_m)(1 \pm f_n) f_k f_l W_{kl|mn}], \quad (\text{D.6})$$

onde,

$$W_{mn|kl} \equiv \frac{1}{2p_k^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_k + p_l - p_m - p_n) |\overline{\mathcal{M}(mn \rightarrow kl)}|^2,$$

é a probabilidade por unidade de volume e unidade de tempo de criar as partículas m, n a partir das partículas k, l . Em detalhe, vamos explicar o significado de cada elemento no termo de colisão, tendo em conta a definição anterior:

$\int_{\vec{p}_i} \equiv \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2p_i^0}$ A integração é feita no espaço de momentos das outras partículas envolvidas na interação.

$\frac{(2\pi)^4}{2p_k^0} \delta^4(p_k + p_l - p_m - p_n)$ Este fator, invariante relativístico, dá conta da conservação da energia-momento (p_k^0 corresponde à energia da espécie k).

$f_m f_n (1 \pm f_k)(1 \pm f_l)$ Estes fatores indicam distribuições em momento/energia das diversas espécies: criação (espécies k, l) e aniquilação (espécies m, n) no processo de interação. Além disso, o sinal $\pm$ indica se as partículas são bósons ou férmions respectivamente.

$|\overline{\mathcal{M}(mn \rightarrow kl)}|^2$ Corresponde à probabilidade, feita a média nos graus de liberdade internos, de ocorrer a interação. Esta probabilidade é obtida estudando os processos que envolvem as espécies no formalismo da Teoria Quântica de Campos a temperatura zero (TQC).

Em geral, a equação de Boltzmann é reescrita em termos da densidade de número, [7]

$$n_k(t) = \sum_{int} \int_{\vec{p}_k} f_k(\vec{p}, t), \quad (\text{D.7})$$

onde a soma é feita sobre os graus de liberdade internos da espécie. Aplicando essa definição para o caso da métrica FLRW se obtém

$$\dot{n}_k + 3Hn_k = \sum_{int} \int_{\vec{p}_k} \left\{ \hat{C}^{1\leftrightarrow 2}[f_k] + \hat{C}^{2\leftrightarrow 2}[f_k] \right\}, \quad (\text{D.8})$$

com $H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$ o parâmetro de Hubble [7].

Embora a equação de Boltzmann seja bem sucedida na descrição de diferentes situações fora do equilíbrio, a sua aplicação no caso da leptogênese possui certas inconsistências e problemas conceituais. Em primeiro lugar, o termo de Liouville, é obtido em uma descrição completamente clássica, enquanto que o termo de colisão possui elementos que são calculados na TQC a temperatura nula $T = 0$. Além disso, a mesma função de distribuição é uma quantidade puramente clássica que “mora” no espaço de fases. Portanto, uma descrição completa da leptogênese deve ser feita em um formalismo de teoria quântica de campos a temperatura finita e fora do equilíbrio térmico, e que possua uma equação obtida dos primeiros princípios que, de algum modo, contenha a equação de Boltzmann como limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$). Tal formalismo é a Teoria Quântica de Campos fora do Equilíbrio Térmico (TQCfE) descrito no capítulo 2

D.2 Derivação funcional

Vamos derivar funcionalmente

$$\frac{\delta}{\delta \Delta(y, x)} \left\{ S[\varphi] + \frac{i}{2} \text{tr} \ln \Delta^{-1} + \frac{i}{2} \text{tr} \Delta_0^{-1}(\varphi) \Delta \right\},$$

separando cada termo, temos que o primeiro termo é dado por

$$\frac{\delta}{\delta \Delta(y, x)} \{ S[\varphi] \} = 0,$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \Delta(y, x)_{\beta\alpha}} \frac{i}{2} \text{tr} \ln \Delta^{-1} &= \frac{i}{2} \int_z \int_w \sum_{\sigma\rho} \frac{\delta \ln \Delta^{-1}(z, w)_{\sigma\rho}}{\delta \Delta(x, y)_{\alpha\beta}} \\ &= -\frac{i}{2} \int_z \int_w \sum_{\sigma\rho} \Delta^{-1}(z, w)_{\sigma\rho} \frac{\delta \Delta(w, z)_{\rho\sigma}}{\delta \Delta(y, x)_{\beta\alpha}} \\ &= -\frac{i}{2} \int_z \int_w \sum_{\sigma\rho} \Delta^{-1}(z, w)_{\sigma\rho} \delta_{\mathcal{C}}^4(z - x) \delta_{\mathcal{C}}^4(w - y) \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\rho\beta} \\ &= -\frac{i}{2} \Delta^{-1}(x, y)_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

sendo $\alpha\beta$ os índices espinoriais. O último termo fica

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \Delta(y, x)_{\beta\alpha}} \frac{i}{2} \text{tr} \Delta_0^{-1}(\varphi) \Delta &= \frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta \Delta(y, x)_{\beta\alpha}} \int_z \int_w \sum_{\sigma\rho} \Delta_0^{-1}(z, w)_{\sigma\rho} \Delta(w, z)_{\rho\sigma} \\ &= \frac{i}{2} \int_z \int_w \sum_{\sigma\rho} \Delta_0^{-1}(z, w)_{\sigma\rho} \frac{\delta \Delta(w, z)_{\rho\sigma}}{\delta \Delta(y, x)_{\beta\alpha}} \\ &= \frac{i}{2} \int_z \int_w \sum_{\sigma\rho} \Delta_0^{-1}(z, w)_{\sigma\rho} \delta_{\mathcal{C}}^4(z - x) \delta_{\mathcal{C}}^4(w - y) \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\rho\beta} \\ &= \frac{i}{2} \Delta_0^{-1}(x, y)_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada funcional fica

$$\frac{\delta}{\delta \Delta(y, x)} \left\{ S[\varphi] + \frac{i}{2} \text{tr} \ln \Delta^{-1} + \frac{i}{2} \text{tr} \Delta_0^{-1}(\varphi) \Delta \right\} = -\frac{i}{2} \Delta^{-1}(x, y) + \frac{i}{2} \Delta_0^{-1}(x, y).$$

D.3 Inversos dos Propagadores Livres

Nesta seção vamos determinar os inversos dos propagadores livres de escalares e férmions de Dirac e Majorana utilizados nos capítulos 2 e 3. Separamos cada caso.

D.3.1 Escalares

Para começarmos, devemos lembrar que o propagador dos escalares cumpre a equação

$$(\partial_x^2 + m^2) \Delta_0(x - y) = -i \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y). \quad (\text{D.9})$$

Por outro lado, o propagador e seu inverso cumprem que

$$\int_{\mathcal{C}} d^4 z \Delta_0(x - z) \Delta_0^{-1}(z - y) = \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y). \quad (\text{D.10})$$

Aplicando o operador $(\partial_x^2 + m^2)$ na (D.10), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} d^4 z (\partial_x^2 + m^2) \Delta_0(x - z) \Delta_0^{-1}(z - y) &= (\partial_x^2 + m^2) \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \\ -i \int_{\mathcal{C}} d^4 z \delta_{\mathcal{C}}^4(x - z) \Delta_0^{-1}(z - y) &= (\partial_x^2 + m^2) \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \\ i \Delta_0^{-1}(x - y) &= -(\partial_x^2 + m^2) \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y), \end{aligned}$$

que corresponde ao propagador utilizado no capítulo 2.

D.3.2 Férmions de Dirac

O propagador de férmions obedece a equação,

$$(i \not{\partial}_x - m_f)_{\alpha\beta} \mathcal{S}_0(x - y)_{\beta\rho} = i \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\alpha\rho}, \quad (\text{D.11})$$

onde explicitamos os índices espinoriais por simplicidade. Aplicando o operador $(i \not{\partial}_x - m_f)_{\alpha\beta}$ à relação

$$\int_{\mathcal{C}} d^4 z \mathcal{S}_0(x - z)_{\beta\rho} \mathcal{S}_0^{-1}(z - y)_{\rho\eta} = \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\beta\eta}, \quad (\text{D.12})$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} d^4 z (i \not{\partial}_x - m_f)_{\alpha\beta} \mathcal{S}_0(x - z)_{\beta\rho} \mathcal{S}_0^{-1}(z - y)_{\rho\eta} &= (i \not{\partial}_x - m_f)_{\alpha\beta} \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\beta\eta} \\ \int_{\mathcal{C}} d^4 z i \delta_{\mathcal{C}}^4(x - z) \delta_{\alpha\rho} \mathcal{S}_0^{-1}(z - y)_{\rho\eta} &= (i \not{\partial}_x - m_f)_{\alpha\beta} \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\beta\eta} \\ i \mathcal{S}_0^{-1}(x - y)_{\alpha\eta} &= (i \not{\partial}_x - m_f)_{\alpha\eta} \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \\ i \mathcal{S}_0^{-1}(x - y) &= (i \not{\partial}_x - m_f) \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y). \end{aligned}$$

D.3.3 Férmions de Majorana

Para o caso de férmions de Majorana devemos ter um pouco mais de cuidado, já que definimos o propagador segundo,

$$\mathcal{G}_0(x, y) := \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} N(x) N(y) \rangle, \quad (\text{D.13})$$

porém, o propagador $\mathcal{G}'_0(x, y)$ definido de modo similar ao férmion de Dirac,

$$\mathcal{G}'_0(x, y) := \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} N(x) \bar{N}(y) \rangle. \quad (\text{D.14})$$

é o que cumpre a seguinte equação,

$$(i\cancel{\partial}_x - m_M)_{\alpha\beta} \mathcal{G}'_0(x - y)_{\beta\rho} = i\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\alpha\rho}, \quad (\text{D.15})$$

A relação entre $\mathcal{G}_0(x, y)$ e $\mathcal{G}'_0(x, y)$ é obtida utilizando a condição de Majorana,

$$N(x) = \mathcal{C}(\bar{N}(x))^T, \quad (\text{D.16})$$

com $\mathcal{C}$ a matriz de conjugação de carga. Assim, (D.16) pode se reescrever segundo

$$\bar{N}_{\alpha} = N_{\beta} \mathcal{C}_{\beta\alpha}, \quad (\text{D.17})$$

de forma que os propagadores estão relacionados através de

$$\mathcal{G}'_0(x, y)_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_0(x, y)_{\alpha\eta} \mathcal{C}_{\eta\beta}. \quad (\text{D.18})$$

Deste modo, o propagador $\mathcal{G}_0(x, y)$ cumpre a equação

$$(i\cancel{\partial}_x - m_M)_{\alpha\beta} \mathcal{G}_0(x - y)_{\beta\rho} = i\delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \mathcal{C}_{\alpha\rho}^{\dagger}, \quad (\text{D.19})$$

Aplicando o operador $(i\cancel{\partial}_x - m_M)_{\alpha\beta}$ à relação

$$\int_{\mathcal{C}} d^4z \mathcal{G}_0(x, z)_{\beta\rho} \mathcal{G}_0^{-1}(z, y)_{\rho\eta} = \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\beta\eta},$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} d^4z (i\cancel{\partial}_x - m_M)_{\alpha\beta} \mathcal{G}_0(x, z)_{\beta\rho} \mathcal{G}_0^{-1}(z, y)_{\rho\eta} &= (i\cancel{\partial}_x - m_M)_{\alpha\beta} \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\beta\eta}, \\ \int_{\mathcal{C}} d^4z i\delta_{\mathcal{C}}^4(x - z) \mathcal{C}_{\alpha\rho}^{\dagger} \mathcal{G}_0^{-1}(z, y)_{\rho\eta} &= (i\cancel{\partial}_x - m_M)_{\alpha\beta} \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y) \delta_{\beta\eta}, \\ i\mathcal{C}_{\alpha\rho}^{\dagger} \mathcal{G}_0^{-1}(x, y)_{\rho\eta} &= (i\cancel{\partial}_x - m_M)_{\alpha\eta} \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y), \\ i\mathcal{G}_0^{-1}(x, y) &= \mathcal{C}(i\cancel{\partial}_x - m_M) \delta_{\mathcal{C}}^4(x - y). \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

APÊNDICE E

EQUAÇÕES DE KADANOFF-BAYM

E.1 Regras de Feynman

As regras de Feynman para a lagrangeana (3.1) podem se obter de modo padrão.

E.1.1 Propagadores

Vamos representar os propagadores do seguinte modo,

$$\text{Léptons} \quad \langle \mathcal{T}_{\mathcal{L}} l_{a\alpha}^A(x) \bar{l}_{b\beta}^B(y) \rangle = \begin{array}{c} x \\ \bullet \\ a, A, \alpha \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} y \\ \bullet \\ b, B, \beta \end{array}$$

$$\text{Escalares} \quad \langle \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \phi_A(x) \phi_B^\dagger(y) \rangle = \begin{array}{c} \bullet \\ x, A \end{array} \text{---} \overleftarrow{\text{---}} \begin{array}{c} \bullet \\ y, B \end{array}$$

$$\text{Neutrinos} \quad \langle \mathcal{T}_{\mathcal{L}} N_a(x) N_b(y) \rangle = \begin{array}{c} \bullet \\ x, a, \alpha \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \bullet \\ y, b, \beta \end{array}$$

E.1.2 Vértices

$$\begin{array}{c} a, A, \alpha \\ \nearrow \\ b, \beta \text{---} \bullet \\ \searrow \\ B \end{array} \quad -iY_{ba}^* \varepsilon_{AB} (P_R)_{\alpha\beta}$$

$$\begin{array}{c} a, A, \alpha \\ \nearrow \\ b, \beta \text{---} \bullet \\ \searrow \\ B \end{array} \quad -iY_{ba} \varepsilon_{AB} (\mathcal{C}P_L)_{\alpha\beta}$$

E.2 Contribuição 2PI à ação efetiva

Para calcularmos a contribuição $\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]$, vamos determinar a transição vácuo-vácuo à ordem mais baixa, que corresponde a diagramas de 2-loops. Há duas configurações possíveis,

$$i\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}] = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

A partir das regras de Feynman escritas na seção anterior, obtemos que¹

$$\begin{aligned} i\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}] &= -\frac{1}{2}Y_{ca}(\mathcal{C}P_L)_{\alpha\beta}\varepsilon_{AB}Y_{db}^*(P_R)_{\gamma\delta}\varepsilon_{CD}\int_x\int_y\Delta_{\mathcal{C}}(x,y)^{AD}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ab}(x,y)_{\beta\gamma}^{BC}\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(y,x)_{\delta\alpha} \\ &\quad -\frac{1}{2}Y_{ca}^*(P_R)_{\alpha\beta}\varepsilon_{AB}Y_{db}(\mathcal{C}P_L)_{\gamma\delta}\varepsilon_{CD}\int_x\int_y\Delta_{\mathcal{C}}(y,x)^{CB}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y,x)_{\delta\alpha}^{DA}\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cd}(y,x)_{\beta\gamma} \\ &= -\frac{1}{2}Y_{ca}Y_{db}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\int_x\int_y\Delta_{\mathcal{C}}(x,y)^{AD}(\mathcal{C}P_L)_{\alpha\beta}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ab}(x,y)_{\beta\gamma}^{BC}(P_R)_{\gamma\delta}\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(y,x)_{\delta\alpha} \\ &\quad -\frac{1}{2}Y_{db}Y_{ca}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\int_x\int_y\Delta_{\mathcal{C}}(y,x)^{CB}(\mathcal{C}P_L)_{\gamma\delta}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y,x)_{\delta\alpha}^{DA}(P_R)_{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cd}(y,x)_{\beta\gamma} \\ i\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}] &= -\frac{1}{2}Y_{ca}Y_{db}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\int_x\int_y\Delta_{\mathcal{C}}(x,y)^{AD}\text{Tr}\left\{\mathcal{C}P_L\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ab}(x,y)^{BC}P_R\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(y,x)\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}Y_{db}Y_{ca}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\int_x\int_y\Delta_{\mathcal{C}}(y,x)^{CB}\text{Tr}\left\{\mathcal{C}P_L\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ba}(y,x)^{DA}P_R\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cd}(y,x)\right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

lembrando que todos os índices estão contraídos, vamos fazer as substituições $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$, $x \leftrightarrow y$, o segundo termo é idêntico ao primeiro, desta forma obtemos a contribuição 2PI à ação efetiva,

$$i\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}] = -Y_{ca}Y_{db}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\int_x\int_y\Delta_{\mathcal{C}}(x,y)^{AD}\text{Tr}\left\{\mathcal{C}P_L\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ab}(x,y)^{BC}P_R\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(y,x)\right\}. \quad (\text{E.2})$$

E.3 Obtenção da autoenergia dos neutrinos

A autoenergia dos neutrinos de mão direita é obtida a partir de

$$i\mathcal{C}\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x,y)_{\alpha\beta} = \frac{\delta\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}, \mathcal{G}]}{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y,x)_{\beta\alpha}}. \quad (\text{E.3})$$

¹O i que aparece na contribuição provém da definição da ação efetiva.

Derivaremos funcionalmente a contribuição $2PI$ à ação efetiva, obtida anteriormente,

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{C}\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta} &= iY_{ce}Y_{df}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} \left\{ \int_z \int_w \Delta_{\mathcal{C}}(z, w)^{AD} \times \right. \\
 &\quad \left. \frac{\delta}{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}} \text{Tr} \left\{ \mathcal{C}P_L \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ef}(z, w)^{BC} P_R \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(w, z) \right\} \right\} \\
 &= iY_{ce}Y_{df}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} \int_z \int_w \Delta_{\mathcal{C}}(z, w)^{AD} (\mathcal{C}P_L)_{\gamma\delta} \mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ef}(z, w)^{BC} (P_R)_{\eta\lambda} \frac{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(w, z)_{\lambda\gamma}}{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

Na hora de fazermos a derivada devemos ter em conta que o $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta}$ é totalmente antisimétrico,

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta} = -\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha},$$

logo, a derivada vai ser dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(w, z)_{\lambda\gamma}}{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}} &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{ba}(y, x)_{\beta\alpha}} \left\{ \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{dc}(w, z)_{\lambda\gamma} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{cd}(z, w)_{\gamma\lambda} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \delta_{db}\delta_{ca}\delta_{\lambda\beta}\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\mathcal{C}}^4(w-y)\delta_{\mathcal{C}}^4(z-x) - \delta_{cb}\delta_{da}\delta_{\gamma\beta}\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\mathcal{C}}^4(w-x)\delta_{\mathcal{C}}^4(z-y) \right\},
 \end{aligned}$$

assim, a autoenergia fica

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}\Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x, y)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}Y_{ae}Y_{bf}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\Delta_{\mathcal{C}}(x, y)^{AD}(\mathcal{C}P_L)_{\alpha\delta}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ef}(x, y)_{\delta\eta}^{BC}(P_R)_{\eta\beta} \\
 &\quad - \frac{1}{2}Y_{be}Y_{af}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\Delta_{\mathcal{C}}(y, x)^{AD}(\mathcal{C}P_L)_{\beta\delta}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ef}(y, x)_{\delta\eta}^{BC}(P_R)_{\eta\alpha}. \\
 &= \frac{1}{2}Y_{ae}Y_{bf}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\Delta_{\mathcal{C}}(x, y)^{AD}(\mathcal{C}P_L\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ef}(x, y)^{BC}P_R)_{\alpha\beta} \\
 &\quad - \frac{1}{2}Y_{be}Y_{af}^*\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\Delta_{\mathcal{C}}(y, x)^{AD}(P_R^T\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{ef}(y, x)^{BC}P_L^T)_{\alpha\beta},
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

usando que $P_{L,R}^T\mathcal{C} = \mathcal{C}P_{L,R}$ e que $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^T\mathcal{C} = -\mathcal{C}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$, já que os léptons são partículas sem massa na escala de energias em que trabalhamos, a autoenergia é dada por,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\mathcal{C}}^{ab}(x-y) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} \left\{ Y_{ac}Y_{bd}^*\Delta_{\mathcal{C}}(x-y)^{AD}P_L\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(x-y)^{BC}P_R \right. \\
 &\quad \left. - Y_{bc}Y_{ad}^*\Delta_{\mathcal{C}}(y-x)^{AD}P_R\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{cd}(y-x)^{BC}P_L \right\},
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

que corresponde ao resultado escrito na seção 3.3.

E.3.1 Componentes de Wightman

Nesta seção vamos mostrar que os dois tipos de funções $\Sigma_{1,2}^{<,>}(p)$ cumprem

$$\Sigma_1^{<}(p) = -\Sigma_2^{>}(p).$$

Temos que a função $\Sigma_2^{<}(p)$ é dada por

$$\Sigma_2^{<}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta^{<}(-q)\mathcal{S}^{<}(q-p). \tag{E.7}$$

Assim, das formas explícitas de $\Delta^<(q)$ e $\mathcal{S}^<(k)$ que podem se obter a partir dos resultados da seção 2.5 do capítulo 2,

$$\Delta^<(q) = 2\pi \operatorname{sgn}(q_0) f_B(q_0) \delta(q^2), \quad (\text{E.8})$$

$$\mathcal{S}^<(k) = -2\pi \not{k} \operatorname{sgn}(k_0) f_F(k_0) \delta(k^2). \quad (\text{E.9})$$

Utilizando que

$$f_F(-k_0) + f_F(k_0) = 1,$$

$$f_B(-q_0) + f_B(q_0) = -1,$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^<(-k) &= -2\pi \operatorname{sgn}(-k_0) (-\not{k}) f_F(-k_0) \delta((-k)^2) \\ &= -2\pi \operatorname{sgn}(k_0) \not{k} f_F(-k_0) \delta((-k)^2) \\ &= -2\pi \operatorname{sgn}(k_0) \not{k} (1 - f_F(k_0)) \delta(k^2), \\ &= -\mathcal{S}^>(k). \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} \Delta^<(-q) &= 2\pi \operatorname{sgn}(-q_0) f_B(-q_0) \delta((-q)^2) \\ &= -2\pi \operatorname{sgn}(q_0) f_B(-q_0) \delta(q^2) \\ &= 2\pi \operatorname{sgn}(q_0) (1 + f_B(q_0)) \delta(q^2), \\ &= \Delta^>(q) \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Sigma_2^<(p) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta^<(-q) \mathcal{S}^<(q-p) \\ &= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta^>(q) \mathcal{S}^>(p-q) \\ \Sigma_2^<(p) &= -\Sigma_1^>(p). \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

E.3.2 Componente Espectral

A dedução da componente espectral da autoenergia é o tema da presente seção. Para começarmos, temos que tal componente é dada por

$$\Sigma_{ab}^-(p) = i \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \Sigma_{ab}^>(p), \quad (\text{E.13})$$

onde utilizamos a condição KMS e o resultado da seção 3.3

$$\Sigma_{ab}^>(p) = -(h_{ab} \Sigma_1^>(p) P_R - h_{ab}^* \Sigma_2^<(p) P_L). \quad (\text{E.14})$$

Dos resultados da seção anterior, temos que

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab}^-(p) &= i \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \Sigma_{ab}^>(p) \\ &= -i \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} (h_{ab} \Sigma_1^>(p) P_R - h_{ab}^* \Sigma_2^<(p) P_L) \\ &= -i \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \Sigma_1^>(p) (h_{ab} P_R + h_{ab}^* P_L) \\ &= -i \mathcal{N}(p) (h_{ab} P_R + h_{ab}^* P_L), \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

sendo

$$\aleph(p) := \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \Sigma_1^>(p) \quad (\text{E.16})$$

Vamos simplificar o $\aleph(p)$,

$$\begin{aligned} \aleph(p) &= \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \Sigma_1^>(p) \\ &= \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta^>(q) \mathcal{S}^>(p - q) \\ &= \left\{ 1 + e^{-\beta p_0} \right\} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^>(p - k) \mathcal{S}^>(k), \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

onde fizemos a transformação $k := p - q$, por simplicidade. Usando as formas explícitas de $\Delta^>(p - k)$ e $\mathcal{S}^>(k)$, temos que [55, 54]

$$\begin{aligned} \aleph(p) &= \frac{1}{f_F(-p_0)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \{1 - f_F(k_0)\} \{1 + f_B(p_0 - k_0)\} \text{sgn}(k_0) \text{sgn}(p_0 - k_0) \not{k} \times \\ &\quad \delta(k^2) \delta((p - k)^2), \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

utilizamos a seguinte identidade para o caso da delta de Dirac,

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i),$$

com x_i o zeros da função, $f(x_i) = 0$, e $f'(x_i) \neq 0$. Assim, vamos ter

$$\begin{aligned} \aleph(p) &= \frac{1}{f_F(-p_0)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{\not{k}}{2\omega_1 2\omega_2} \{1 - f_F(k_0)\} \{1 + f_B(p_0 - k_0)\} \times \\ &\quad [\delta(k_0 - \omega_1) - \delta(k_0 + \omega_1)] \text{sgn}(p_0 - k_0) [\delta(p_0 - k_0 - \omega_1) + \delta(p_0 - k_0 + \omega_1)], \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

onde $\omega_1 := |\vec{k}|$ e $\omega_2 := |\vec{k} - \vec{p}|$. Fazendo a integral em dk_0 a través das deltas de Dirac, encontramos que

$$\begin{aligned} \aleph(p) &= \frac{1}{f_F(-p_0)} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_1 2\omega_2} \times \\ &\quad \left[\{1 - f_F(\omega_1)\} \{1 + f_B(\omega_2)\} \delta(p_0 - \omega_1 - \omega_2) \{\omega_1 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma}\} \right. \\ &\quad + f_F(\omega_1) f_B(\omega_2) \delta(p_0 + \omega_1 + \omega_2) \{\omega_1 \gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma}\} \\ &\quad + \{1 - f_F(\omega_1)\} f_B(\omega_2) \delta(p_0 - \omega_1 + \omega_2) \{\omega_1 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma}\} \\ &\quad \left. + f_F(\omega_1) \{1 + f_B(\omega_2)\} \delta(p_0 + \omega_1 - \omega_2) \{\omega_1 \gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Devido à aparição das deltas de Dirac, podemos simplificar os termos que possuem as funções de distribuição, mediante o uso das seguintes identidades que podem ser mostradas de modo simples,

$$\begin{aligned} \frac{\{1 - f_F(\omega_1)\} \{1 + f_B(\omega_2)\}}{f_F(-\omega_1 - \omega_2)} &= \frac{f_F(\omega_1) f_B(\omega_2)}{f_F(\omega_1 + \omega_2)} = f_{FB}(\omega_1, \omega_2) \\ \frac{f_F(\omega_1) \{1 + f_B(\omega_2)\}}{f_F(\omega_1 - \omega_2)} &= \frac{\{1 - f_F(\omega_1)\} f_B(\omega_2)}{f_F(-\omega_1 + \omega_2)} = \bar{f}_{FB}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

com $f_{FB}(p_0, q_0) := 1 - f_F(p_0) + f_B(q_0)$ e $\bar{f}_{FB}(p_0, q_0) := f_F(p_0) + f_B(q_0)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \aleph(p) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_1 2\omega_2} & \left[f_{FB}(\omega_1, \omega_2) \delta(p_0 - \omega_1 - \omega_2) \{ \omega_1 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} \} \right. \\ & + f_{FB}(\omega_1, \omega_2) \delta(p_0 + \omega_1 + \omega_2) \{ \omega_1 \gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma} \} \\ & + \bar{f}_{FB}(\omega_1, \omega_2) \delta(p_0 - \omega_1 + \omega_2) \{ \omega_1 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} \} \\ & \left. + \bar{f}_{FB}(\omega_1, \omega_2) \delta(p_0 + \omega_1 - \omega_2) \{ \omega_1 \gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma} \} \right]. \quad (\text{E.21}) \end{aligned}$$

Com o fim de obtermos expressões mais compactas, vamos utilizar a definição da delta de Dirac de modo inverso,

$$\begin{aligned} \delta(p_0 - \omega_1 - \omega_2) &= \delta(p_0 - |\vec{k}| - |\vec{k} - \vec{p}|) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(p_0 - |\vec{k}| - |\vec{q}|) \delta^3(\vec{q} - \vec{p} + \vec{k}) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^4(p - k - q), \end{aligned}$$

operando deste modo em cada termo de $\aleph(p)$, temos que

$$\begin{aligned} \aleph(p) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2|\vec{q}|} & k (2\pi)^4 [f_{FB}(k_0, q_0) \{ \delta^4(p - k - q) + \delta^4(p + k + q) \} \\ & + \bar{f}_{FB}(k_0, q_0) \{ \delta^4(p - k + q) + \delta^4(p + k - q) \}] \quad (\text{E.22}) \end{aligned}$$

$$\aleph(p) = \int_{\vec{k}, \vec{q}} k \sigma(p; k, q), \quad (\text{E.23})$$

com

$$\begin{aligned} \sigma(p; k, q) &:= f_{FB}(k_0, q_0) (2\pi)^4 \{ \delta^4(p - k - q) + \delta^4(p + k + q) \} \\ &+ \bar{f}_{FB}(k_0, q_0) (2\pi)^4 \{ \delta^4(p + k - q) + \delta^4(p - k + q) \}. \end{aligned}$$

Deste modo, a componente espectral da autoenergia fica,

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab}^-(p) &= -i \aleph(p) (h_{ab} P_R + h_{ab}^* P_L) \\ &= -i (h_{ab} P_L + h_{ab}^* P_R) \aleph(p), \quad (\text{E.24}) \end{aligned}$$

onde pudemos trocar a ordem, já que o $\aleph(p)$ é proporcional às matrizes de Dirac.

E.4 Condição Inicial para função espectral

A característica fundamental que requer a TQCfe é a imposição de um estado inicial, nesta seção vamos determinar a condição inicial para a função espectral. Para isso, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^-(0; \vec{p})_{\alpha\beta} &= \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} \mathcal{G}_{ab}^-(x_0 - y_0; \vec{r})|_{x_0=y_0} \\ &= \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} i \langle \{ N_{a\alpha}(x), N_{b\beta}(x) \} \rangle|_{x_0=y_0}, \quad (\text{E.25}) \end{aligned}$$

com $\vec{r} := \vec{x} - \vec{y}$. Assim, para determinarmos a condição inicial devemos estudar a transformada de Fourier do anticomutador dos campos dos neutrinos de Majorana. Devemos ter em conta que na hora de impormos regras de quantização canônicas, estabelecemos que

$$\{N_{a\alpha}(x), N_{b\beta}^\dagger(x)\} |_{x_0=y_0} = \delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

ou seja,

$$\{N_{a\alpha}(x), \bar{N}_{b\beta}(x)\} |_{x_0=y_0} = \delta_{ab}\gamma_{\alpha\beta}^0\delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Utilizando a condição de Majorana, $\bar{N}_{a\eta} = N_{a\rho}\mathcal{C}_{\rho\eta}$, a regra de anticomutação para os campos de Majorana fica

$$\{N_{a\alpha}(x), N_{b\beta}(x)\} |_{x_0=y_0} = \delta_{ab}\gamma_{\alpha\eta}^0\mathcal{C}_{\eta\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Deste modo, a condição inicial para os neutrinos estéreis é

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^-(0; \vec{p})_{\alpha\beta} &= \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} i\delta_{ab}\gamma_{\alpha\eta}^0\mathcal{C}_{\eta\beta}\delta^3(\vec{r}) \\ &= i\delta_{ab}(\gamma^0\mathcal{C})_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Como vemos, no caso da função espectral, as condições iniciais são impostas pela mesma teoria.

E.5 Integral de Memória

Para demonstrarmos que a *integral de memória* é solução da equação da função estatística não-homogênea, vamos escrever a equação para o propagador retardado, definido a partir da função espectral, segundo,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^R(x, y) &:= \theta(x_0 - y_0)\mathcal{G}_{ab}^-(x, y) \\ &= i\{\mathcal{G}_{ab}^{++}(x, y) - \mathcal{G}_{ab}^<(x, y)\} = i\{\mathcal{G}_{ab}^>(x, y) - \mathcal{G}_{ab}^{--}(x, y)\}, \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

onde usamos a definição da função espectral e definimos as funções $\mathcal{G}_{ab}^{\pm\pm}(x, y)$ a partir de

$$\mathcal{G}_{ab}^{\pm\pm}(x, y) := \theta_{\pm}(x_0 - y_0)\mathcal{G}_{ab}^>(x, y) + \theta_{\pm}(y_0 - x_0)\mathcal{G}_{ab}^<(x, y), \quad (\text{E.28})$$

e lembrando que no contorno a função de Heaviside é dada por 2.16, assim

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^{++}(x, y) &:= \langle \mathcal{T} N_a(x) N_b(y) \rangle && \text{para } x_0, y_0 \in \mathcal{C}_+, \\ \mathcal{G}_{ab}^<(x, y) &:= \langle N_a(x) N_b(y) \rangle && \text{para } x_0 \in \mathcal{C}_+, y_0 \in \mathcal{C}_-, \\ \mathcal{G}_{ab}^>(x, y) &:= -\langle N_b(y) N_a(x) \rangle && \text{para } x_0 \in \mathcal{C}_-, y_0 \in \mathcal{C}_+, \\ \mathcal{G}_{ab}^{--}(x, y) &:= \langle \tilde{\mathcal{T}} N_a(x) N_b(y) \rangle && \text{para } x_0, y_0 \in \mathcal{C}_-. \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Portanto, para obtermos a equação para o propagador retardado, vamos subtrair as equações²

$$\begin{aligned} (i\partial_x - M_a)\mathcal{G}_{ab}^{++}(x, y) - i \int_0^\infty d^4z \{ \Sigma_{ac}^{++}(x, z)\mathcal{G}_{cb}^{++}(z, y) - \Sigma_{ac}^<(x, z)\mathcal{G}_{cb}^>(z, y) \} \\ = i\mathcal{C}^\dagger\delta_{ab}\delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

$$(i\partial_x - M_a)\mathcal{G}_{ab}^<(x, y) - i \int_0^\infty d^4z \{ \Sigma_{ac}^{++}(x, z)\mathcal{G}_{cb}^<(z, y) - \Sigma_{ac}^<(x, z)\mathcal{G}_{cb}^{--}(z, y) \} = 0, \quad (\text{E.31})$$

²Lembremos que por simplicidade estamos escolhendo $t_0 = 0$.

as quais são obtidas a partir da equação de Schwinger-Dyson (3.8) ao especificar as dependências temporais nas distintas partes do contorno. Ao subtrair e multiplicar por i as equações, obtém-se que

$$(i\phi_x - M_a)\mathcal{G}_{ab}^R(x, y) - \int_0^\infty d^4z \Sigma_{ac}^R(x, z)\mathcal{G}_{cb}^R(z, y) = -C^\dagger \delta_{ab} \delta^4(x - y), \quad (\text{E.32})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d^4z (-C) \{ (i\phi_x - M_a) \delta^4(x - z) \delta_{ac} - \Sigma_{ac}^R(x, z) \} \mathcal{G}_{cb}^R(z, y) &= \delta_{ab} \delta^4(x - y) \\ \int_0^\infty d^4z \mathcal{G}_{ac}^R(x, z) \mathcal{G}_{cb}^R(z, y) &= \delta_{ab} \delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

onde definimos o propagador retardado inverso

$$\mathcal{G}_{ac}^R(x, z)^{-1} := (-C) \{ (i\phi_x - M_a) \delta^4(x - z) \delta_{ac} - \Sigma_{ac}^R(x, z) \}. \quad (\text{E.34})$$

É claro que a relação

$$\int_0^\infty d^4z \mathcal{G}_{ac}^R(x, z) \mathcal{G}_{cb}^R(z, y)^{-1} = \delta_{ab} \delta^4(x - y), \quad (\text{E.35})$$

deve se cumprida, porém, não é evidente que ela é verdadeira. Assim, devemos demonstrar que de fato é obedecida. Para isto, vamos utilizar a *reductio ad absurdum*, assim, vamos supor que

$$\int_0^\infty d^4z \mathcal{G}_{ac}^R(x, z) \mathcal{G}_{cb}^R(z, y)^{-1} \neq \delta_{ab} \delta^4(x - y), \quad (\text{E.36})$$

já que se $a \neq b$ e $c \neq 0$, então, $ca \neq cb$, podemos multiplicar por $\mathcal{G}_{bd}^R(y, w)$, somar sob b e integrar em d^4y no intervalo $[0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d^4z \mathcal{G}_{ac}^R(x, z) \underbrace{\int_0^\infty d^4y (-C) \{ (i\phi_x - M_c) \delta^4(z - y) \delta_{cb} - \Sigma_{cb}^R(z, y) \} \mathcal{G}_{bd}^R(y, w)}_{\delta_{cd} \delta^4(z - w)} \\ \neq \int_0^\infty d^4y \delta_{ab} \delta^4(x - y) \mathcal{G}_{bd}^R(y, w) \\ \int_0^\infty d^4z \mathcal{G}_{ac}^R(x, z) \delta_{cd} \delta^4(z - w) \neq \int_0^\infty d^4y \delta_{ab} \delta^4(x - y) \mathcal{G}_{bd}^R(y, w) \\ \mathcal{G}_{ad}^R(x, w) \neq \mathcal{G}_{ad}^R(x, w), \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

o que evidentemente é falso, o que mostra que a relação (E.35) é verdadeira.

Voltando à equação da função estatística,

$$\begin{aligned} (i\phi_x - M_{aa})\mathcal{G}_{ab}^+(x, y) - \int_0^{x_0} d^4z \Sigma_{ac}^-(x, z)\mathcal{G}_{cb}^+(z, y) &= - \int_0^{y_0} d^4z \Sigma_{ac}^+(x, z)\mathcal{G}_{cb}^-(z, y) \\ \int_0^\infty d^4z \{ (i\phi_x - M_{aa}) \delta^4(x - z) \delta_{ac} - \theta(x_0 - z_0) \Sigma_{ac}^-(x, z) \} \mathcal{G}_{cb}^+(z, y) &= -G_{ab}(x, y) \\ \int_0^\infty d^4z (-C) \{ (i\phi_x - M_{aa}) \delta^4(x - z) \delta_{ac} - \underbrace{\theta(x_0 - z_0) \Sigma_{ac}^-(x, z)}_{\Sigma_{ac}^R(x, z)} \} \mathcal{G}_{cb}^+(z, y) &= C G_{ab}(x, y), \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

com o termo de fonte dado por,

$$G_{ab}(x, y) := \int_{t_0}^{y_0} d^4 z \Sigma_{ac}^+(x, z) \mathcal{G}_{cb}^-(z, y). \quad (\text{E.39})$$

Notemos que utilizando a definição do propagador retardado inverso, podemos reescrever a equação,

$$\int_0^\infty d^4 z \mathcal{G}_{ac}^R(x, z)^{-1} \mathcal{G}_{cb}^+(z, y) = \mathcal{C}G_{ab}(x, y), \quad (\text{E.40})$$

multiplicando à esquerda por $\mathcal{G}_{da}^R(w, x)$, somando em a e integrando em x temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d^4 z \underbrace{\int_0^\infty d^4 x \mathcal{G}_{da}^R(w, x) \mathcal{G}_{ac}^R(x, z)^{-1}}_{\delta_{dc} \delta^4(w-z)} \mathcal{G}_{cb}^+(z, y) &= \int_0^\infty d^4 x \mathcal{G}_{da}^R(w, x) \mathcal{C}G_{ab}(x, y), \\ \mathcal{G}_{db}^+(w, y) &= \int_0^\infty d^4 x \mathcal{G}_{da}^R(w, x) \mathcal{C}G_{ab}(x, y), \end{aligned}$$

deste modo, obtemos a integral de memória

$$\mathcal{G}_{db}^{+m}(w, y) = \int_0^{x_0} d^4 x \int_{t_0}^{y_0} d^4 z \mathcal{G}_{da}^-(w, x) \mathcal{C} \Sigma_{ac}^+(x, z) \mathcal{G}_{cb}^-(z, y). \quad (\text{E.41})$$

Assim, a solução da segunda equação de Kadanoff-Baym é igual à integral de memória mais um termo que cumpre a equação homogênea,

$$\int_0^\infty d^4 z \mathcal{G}_{ac}^R(x, z)^{-1} \mathcal{G}_{cb}^{+h}(z, y) = 0. \quad (\text{E.42})$$

Devemos notar que tanto a integral de memória quanto a parte homogênea são a solução da equação da função estatística sem tomar nenhum tipo de aproximação, por exemplo, o de banho térmico que utilizamos na obtenção da leptogênese. Em consequência, a dedução da solução anterior é a mais geral possível.

F.1 Largura de Decaimento

Nesta primeira seção do apêndice vamos calcular explicitamente a largura corrigida termicamente *on-shell* dada na relação (3.41),

$$\begin{aligned}\omega_p^a \Gamma_p^a &= h_{aa} \int_{\vec{k}, \vec{q}} p \cdot k \sigma(p; k, q) \\ &= h_{aa} \int_{\vec{k}, \vec{q}} p \cdot k (2\pi)^4 \delta^4(p - k - q) f_{FB}(\omega_k, \omega_q),\end{aligned}\tag{F.1}$$

onde utilizamos que a única contribuição não nula na função $\sigma(p; k, q)$, eq (3.25), é $(2\pi)^4 \delta^4(p - k - q) f_{FB}(\omega_k, \omega_q)$. Além disso, devemos lembrar que as energias *on-shell* de léptons e Higgs são, respectivamente, $\omega_q = |\vec{q}|$, $\omega_k = |\vec{k}|$. Simplificando a expressão anterior, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_p^a &= \frac{h_{aa}}{\omega_p^a} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2\omega_q} p \cdot k (2\pi)^4 \delta(\omega_p^a - \omega_k - \omega_q) \delta^3(\vec{p} - \vec{k} - \vec{q}) f_{FB}(\omega_k, \omega_q) \\ &= \frac{h_{aa}}{16\pi^2 \omega_p^a} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\omega_k} \frac{p \cdot k}{|\vec{p} - \vec{k}|} f_{FB}(\omega_k, |\vec{p} - \vec{k}|) \delta(\omega_p^a - \omega_k - |\vec{p} - \vec{k}|).\end{aligned}\tag{F.2}$$

Para determinarmos a integral em k , escolhemos o sistema de referência

deste modo,

$$\begin{aligned} p \cdot k &= \omega_p^a \omega_k - \vec{p} \cdot \vec{k} \\ &= \omega_p^a \omega_k - p_0 \omega_k \cos \theta, \end{aligned}$$

sendo $p_0 := |\vec{p}|$. Utilizando que $d^3 \vec{k} = \omega_k^2 d\omega_k d\cos \theta d\phi$, e fazendo a integral em $d\phi$ temos que

$$\Gamma_p^a = \frac{h_{aa}}{8\pi\omega_p^a} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^2 \int_{-1}^1 d\cos \theta \frac{\omega_p^a - p_0 \cos \theta}{|\vec{p} - \vec{k}|} f_{FB}(\omega_k, |\vec{p} - \vec{k}|) \delta(\omega_p^a - \omega_k - |\vec{p} - \vec{k}|).$$

Efetuada a transformação

$$\begin{aligned} u &:= |\vec{p} - \vec{k}| \\ &= (p_0^2 + \omega_k^2 - 2p_0 \omega_k \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{F.3}$$

logo

$$d\cos \theta = -\frac{u du}{p_0 \omega_k}, \tag{F.4}$$

assim as integrais ficam,

$$\Gamma_p^a = -\frac{h_{aa}}{8\pi\omega_p^a p_0} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k \int_{u_-}^{u_+} du \left\{ \omega_p^a - \frac{p_0^2 + \omega_k^2 - u^2}{2\omega_k} \right\} f_{FB}(\omega_k, u) \delta(\omega_p^a - \omega_k - u),$$

sendo $u_\pm = |\omega_k \pm p_0|$. Agora, para que a integração não seja nula por causa da delta, é necessário que

$$\omega_p^a - \omega_k - u_- < 0, \quad \omega_p^a - \omega_k - u_+ > 0, \tag{F.5}$$

isto implica que

$$\omega_k > \frac{1}{2}(\omega_p^a - p_0), \quad \omega_k < \frac{1}{2}(\omega_p^a + p_0). \tag{F.6}$$

Deste modo, a largura fica

$$\Gamma_p^a = -\frac{h_{aa}}{8\pi\omega_p^a p_0} \int_{\omega_k^-}^{\omega_k^+} d\omega_k \omega_k \int_{u_-}^{u_+} du \left\{ \omega_p^a - \frac{p_0^2 + \omega_k^2 - u^2}{2\omega_k} \right\} f_{FB}(\omega_k, u) \delta(\omega_p^a - \omega_k - u),$$

sendo $\omega_k^\pm = \frac{1}{2}(\omega_p^a \pm p_0)$. Agora, fazemos a transformação

$$\Omega := \omega_p^a - \omega_k - u,$$

para obter que

$$\begin{aligned} \Gamma_p^a &= \frac{h_{aa}}{8\pi\omega_p^a p_0} \int_{\omega_k^-}^{\omega_k^+} d\omega_k \omega_k \int_{\Omega_-}^{\Omega_+} d\Omega \left\{ \omega_p^a - \frac{2\omega_p^a(\omega_k + \Omega) - 2\omega_k \Omega - M_a^2}{2\omega_k} \right\} \times \\ &\quad f_{FB}(\omega_k, \omega_p^a - \omega_k - \Omega) \delta(\Omega), \end{aligned} \tag{F.7}$$

a integral em Ω é trivial, assim, logo após simplificarmos a expressão anterior, temos que

$$\Gamma_p^a = \frac{h_{aa} M_a^2}{16\pi \omega_p^a p_0} \int_{\omega_k^-}^{\omega_k^+} d\omega_k \left\{ 1 - \frac{1}{e^{\beta \omega_k} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega_p^a - \omega_k)} - 1} \right\}.$$

A integral em ω_k pode ser feita trivialmente, para obter a largura final

$$\Gamma_p^a = \frac{h_{aa} M_a^2}{16\pi \beta \omega_p^a p_0} \ln \left\{ \frac{e^{\beta(\omega_p^a + p_0)} - 1}{e^{\beta \omega_p^a} - e^{\beta p_0}} \right\}. \quad (\text{F.8})$$

é possível mostrar que $\Gamma_{-p}^a = \Gamma_p^a$ e $\Gamma_p^a(\omega_p^a) = \Gamma_p^a(-\omega_p^a)$.

F.2 Fator Proveniente do Traço

Para o caso do fator proveniente do traço

$$\aleph(j\omega_p^a) \cdot q_j = \int_{\vec{k}, \vec{q}'} k \cdot q_j \sigma(p; k, q'), \quad (\text{F.9})$$

com $j = \pm 1$, efetuamos um procedimento análogo ao utilizado no caso da largura, na seção anterior. Para isso, escolhemos primeiro o caso $j = 1$, assim,

$$\begin{aligned} \aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ &= \int_{\vec{k}, \vec{q}'} k \cdot q_+ (2\pi)^4 \delta^4(p - k - q') f_{FB}(\omega_k, \omega_{q'}), \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\omega_k} \frac{k \cdot q_+}{|\vec{p} - \vec{k}|} f_{FB}(\omega_k, |\vec{p} - \vec{k}|) \delta(\omega_p^a - \omega_k - |\vec{p} - \vec{k}|). \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Neste caso, escolhemos o sistema de referência

assim, temos que

$$\begin{aligned} k \cdot q_+ &= \omega_k \omega_q - \vec{k} \cdot \vec{q}' \\ &= \omega_k \omega_q (1 - \sin \theta \sin \theta' \cos \phi - \cos \theta \cos \theta'), \end{aligned}$$

utilizando que $d^3 \vec{k} = \omega_k^2 d\omega_k d\cos \theta d\phi$, fazendo a integral em $d\phi$ e introduzindo a variável u do mesmo modo ao feito no caso da largura, encontramos

$$\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ = -\frac{\omega_q}{8\pi p_0} \int_{\omega_k^-}^{\omega_k^+} d\omega_k \omega_k \int_{u_+}^{u_-} du \left\{ 1 - \cos \theta' \frac{p_0^2 + \omega_k^2 - u^2}{2\omega_k p_0} \right\} f_{FB}(\omega_k, u) \delta(\omega_p^a - \omega_k - u).$$

Neste caso também foi necessário levar em conta que a integração em ω_k deve ser restringida ao intervalo em que a delta de Dirac não é nula. De modo similar ao feito anteriormente, introduzimos a variável Ω e fazemos a integração utilizando a delta de Dirac, para obtermos que

$$\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ = \frac{\omega_q}{8\pi p_0} \int_{\omega_k^-}^{\omega_k^+} d\omega_k \omega_k \left\{ 1 - \cos \theta' \frac{2\omega_p^a \omega_k - M_a^2}{2\omega_k p_0} \right\} f_{FB}(\omega_k, \omega_p^a - \omega_k). \quad (\text{F.11})$$

Introduzindo a variável sem dimensões $z := \beta\omega_k$, temos que

$$\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ = \frac{\omega_q}{8\pi\beta^2 p_0} \int_{z_-}^{z_+} dz z \left\{ 1 - \cos \theta' \frac{2\omega_p^a z - M_a^2 \beta}{2z p_0} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{e^z + 1} - \frac{1}{e^{(\beta\omega_p^a - z)} - 1} \right\},$$

com $z_{\pm} := \frac{\beta}{2}(\omega_p^a \pm p_0)$. Utilizando que $\vec{p} \cdot \vec{q} = p_0 \omega_q \cos \theta'$, encontramos

$$\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ = \frac{1}{8\pi\beta^2 p_0^2} \left\{ \left[p_0 \omega_q - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{p_0} \omega_p^a \right] \mathcal{J}_1^a + \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{p_0} M_a^2 \beta \mathcal{J}_0^a \right\},$$

onde introduzimos as integrais $\mathcal{J}_n^a$

$$\mathcal{J}_n^a := \int_{z_-}^{z_+} dz z^n \left\{ 1 - \frac{1}{e^z + 1} + \frac{1}{e^{\beta\omega_p^a - z} - 1} \right\}.$$

Agora, para o caso $j = -1$, temos que o termo que contribui da função $\sigma(p; k, q)$ é $(2\pi)^4 \delta^4(p + k + q) f_{FB}(\omega_k, \omega_q)$, pois é o único em que a conservação da energia está assegurada. Assim,

$$\begin{aligned} \aleph(-\omega_p^a) \cdot q_- &= \int_{\vec{k}, \vec{q}} k \cdot q_+ (2\pi)^4 \delta^4(p + k + q') f_{FB}(\omega_k, \omega_{q'}), \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\omega_k} \frac{k \cdot q_-}{|\vec{p} + \vec{k}|} f_{FB}(\omega_k, |\vec{p} + \vec{k}|) \delta(\omega_p^a - \omega_k - |\vec{p} + \vec{k}|). \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Escolhendo o mesmo sistema de referência que para o caso $j = 1$, e lembrando que $q_-^\mu = (-\omega_q, \vec{q})$, temos que

$$\begin{aligned} k \cdot q_- &= -\omega_k \omega_q - \vec{k} \cdot \vec{q} \\ &= -\omega_k \omega_q (1 + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi + \cos \theta \cos \theta'), \end{aligned}$$

deste modo, temos que

$$\aleph(-\omega_p^a) \cdot q_- = -\frac{\omega_q}{8\pi p_0} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^2 \int_{-1}^1 d\cos \theta \frac{1 + \cos \theta' \cos \theta}{|\vec{p} + \vec{k}|} f_{FB}(\omega_k, |\vec{p} + \vec{k}|) \delta(\omega_p^a - \omega_k - |\vec{p} + \vec{k}|). \quad (\text{F.13})$$

Para este caso devemos definir a variável

$$\begin{aligned} u &:= |\vec{p} + \vec{k}| \\ &= (p_0^2 + \omega_k^2 + 2p_0 \omega_k \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

logo

$$d \cos \theta = \frac{u du}{p_0 \omega_k}, \quad (\text{F.15})$$

temos que

$$\aleph(-\omega_p^a) \cdot q_- = -\frac{\omega_q}{8\pi p_0} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k \int_{u_-}^{u_+} du \left\{ 1 - \cos \theta' \frac{p_0^2 + \omega_k^2 - u^2}{2\omega_k p_0} \right\} f_{FB}(\omega_k, u) \delta(\omega_p^a - \omega_k - u). \quad (\text{F.16})$$

Pelas mesmas considerações descritas anteriormente, os limites da integração em ω_k viram

$$\aleph(-\omega_p^a) \cdot q_- = -\frac{\omega_q}{8\pi p_0} \int_{\omega_k^+}^{\omega_k^-} d\omega_k \omega_k \int_{u_-}^{u_+} du \left\{ 1 - \cos \theta' \frac{p_0^2 + \omega_k^2 - u^2}{2\omega_k p_0} \right\} f_{FB}(\omega_k, u) \delta(\omega_p^a - \omega_k - u). \quad (\text{F.17})$$

Finalmente, introduzindo a variável Ω , integrando sobre a mesma e invertendo a ordem dos limites das integrais, achamos

$$\begin{aligned} \aleph(-\omega_p^a) \cdot q_- &= -\frac{\omega_q}{8\pi p_0} \int_{\omega_k^-}^{\omega_k^+} d\omega_k \omega_k \left\{ 1 - \cos \theta' \frac{2\omega_p^a \omega_k - M_a^2}{2\omega_k p_0} \right\} f_{FB}(\omega_k, \omega_p^a - \omega_k) \\ \aleph(-\omega_p^a) \cdot q_- &= -\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+, \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

ou seja,

$$\aleph(j\omega_p^a) \cdot q_j = j\aleph(\omega_p^a) \cdot q_+, \quad (\text{F.19})$$

o que foi utilizado no texto principal. Assim, mostramos que o fator proveniente do traço pode ser simplificado, para depender de duas integrais que podem ser calculadas, por exemplo, usando o pacote *Mathematica*.

F.3 Simplificação das integrais presentes na Assimetria

O procedimento para simplificar as integrais presentes nos resultados da assimetria, tanto para o caso de Kadanoff-Baym quanto para o de Boltzmann, é feito do mesmo modo ao mostrado nas seções anteriores. Porém, devemos levar em conta que no resultado obtido na TQCfE a delta de Dirac é uma delta tridimensional. Vamos mostrar a simplificação para o termo oscilante da assimetria leptônica (4.38)

$$n_L^2(t) = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \Im(h_{ba}^2) M_a M_b \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k}, \vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k} - \vec{q}) f_{FB}(\omega_q, \omega_k) N_{ab}(p, q, k) \quad (\text{F.20})$$

sendo

$$N_{ab}^2(p, q, k) := \frac{1}{2\omega_p^{ab}} \left\{ \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^a - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} + \frac{\Gamma_{l\phi}}{(\omega_p^b - \omega_q - \omega_k)^2 + \Gamma_{l\phi}^2} \right\} \times \\ \Re \left\{ \frac{1 - e^{-(i(\omega_p^a - \omega_p^b) + \Gamma_{ab})t}}{\Gamma_{ab} + i(\omega_p^a - \omega_p^b)} \left[\left(\xi_{ab}^{(a)} - \xi_{ab}^{(4)} \tanh \left(\frac{\beta\omega_p^a}{2} \right) \right) \aleph(\omega_p^a) \cdot q_+ \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\xi_{ab}^{(b)} - \xi_{ab}^{(4)} \tanh \left(\frac{\beta\omega_p^b}{2} \right) \right) \aleph(\omega_p^b) \cdot q_+ \right] \right\}, \quad (F.21)$$

A integração em $\vec{k}$ é trivialmente feita, assim,

$$n_L^2(t) = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \Im(h_{ba}^2) M_a M_b \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\omega_q} \frac{1}{2|\vec{p} - \vec{q}|} f_{FB}(\omega_q, |\vec{p} - \vec{q}|) N_{ab}^2(p, q, k)|_{\omega_k=|\vec{p}-\vec{q}|}. \quad (F.22)$$

Escolhendo o sistema de referência

e introduzindo a variável

$$u := |\vec{p} - \vec{q}|$$

logo

$$d \cos \theta = - \frac{u du}{p_0 \omega_q},$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, tal como pode ser visto na figura. Introduzindo os resultados anteriores, temos que

$$n_L^2(t) = - \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \frac{\Im(h_{ba}^2) M_a M_b}{8\pi^2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int_0^\infty d\omega_q \int_{u_+}^{u_-} du f_{FB}(\omega_q, u) N_{ab}^2(p, q, k) \Big|_{\substack{\omega_k=u, \\ \cos \theta = \frac{p_0^2 + \omega_q^2 - u^2}{2\omega_q p_0}}},$$

com $u_{\pm} = |\omega_q \pm p_0|$. A diferença dos casos apresentados nas seções anteriores, aqui não há uma delta de Dirac que simplifique a expressão, porém, é absolutamente necessário

que a energia seja conservada no processo. Assim, é necessário restringir o intervalo de integração em ω_q de modo que os pontos $\omega_p^{ab} - \omega_q - u = 0$ estejam incluídos, sendo ω_p^{ab} a energia reduzida. Estamos utilizando esta energia reduzida pois como estamos considerando o termo oscilante, devemos levar em conta as energias dos neutrinos que ali aparecem. Notemos também que quando as massas de dois neutrinos são muito maiores que a massa do outro, ou seja, quando há hierarquia entre as massa, a energia reduzida é simplesmente a energia do neutrino com a massa menor. Por outro lado, quando as massas são degeneradas, a energia reduzida corresponde à energia de qualquer um dos neutrinos. Por estas razões estamos utilizando a energia reduzida neste caso. Assim, restringimos o intervalo de integração para os casos em que

$$\omega_p^{ab} - \omega_q - |\omega_q + p_0| < 0, \quad \omega_p^{ab} - \omega_q - |\omega_q - p_0| > 0, \quad (\text{F.23})$$

ou seja,

$$\omega_k > \frac{1}{2}(\omega_p^a - p_0), \quad \omega_k < \frac{1}{2}(\omega_p^a + p_0). \quad (\text{F.24})$$

Assim, lembrando que $h_{ba} = h_{ab}^*$, ou seja, $\Im h_{ba}^2 = -\Im h_{ab}^2$, obtemos

$$n_L^2(t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \frac{\Im(h_{ab}^2) M_a M_b}{8\pi^2} \int_{\omega_q^-}^{\omega_q^+} d\omega_q \int_{u_+}^{u_-} du f_{FB}(\omega_q, u) N_{ab}^2(p, q, k) \Bigg|_{\substack{\omega_k=u, \\ \cos \theta = \frac{p_0^2 + \omega_q^2 - u^2}{2\omega_q p_0}}}, \quad (\text{F.25})$$

com $\omega_q^\pm = \frac{1}{2}(\omega_p^a \pm p_0)$. Assim, simplificamos as integrais presentes na assimetria e as deixamos prontas para o tratamento numérico. Agora, para o caso do termo tipo Boltzmann, a diferença consiste em que o intervalo de integração é restrito aos casos em que

$$\omega_p^c - \omega_q - |\omega_q + p_0| < 0, \quad \omega_p^c - \omega_q - |\omega_q - p_0| > 0, \quad (\text{F.26})$$

com $c = a, b$. Por outro lado, para simplificarmos a assimetria obtida utilizando o formalismo de Boltzmann, devemos proceder de modo idêntico ao feito no caso da largura. Desta forma, apresentamos neste apêndice as simplificações necessárias para estudar e comparar numericamente os resultados da assimetria, apresentados no capítulo 4.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. A. M. Dirac. A theory of electrons and protons. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 126:360, 1930.
- [2] C. D. Anderson. The positive electron. *Phys. Rev.*, 43:491, 1933.
- [3] E. C. C. Stückelberg. La mécanique du point matériel en théorie de la relativité. *Helv. Phys. Acta*, 15:23, 1942.
- [4] R. P. Feynman. A Relativistic Cut-Off for Classical Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 74:939, 1948.
- [5] W. Greiner, J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer Verlag, 1996.
- [6] C. Giunti Ch. Kim. *Fundamentals of Neutrino in Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 2007.
- [7] E. W. Kolb, M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [8] A. D. Sakharov. Violation of CP invariance, C assymetry Baryon Assymetry of the Universe. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 5:32, 1967.
- [9] S. L. Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nucl.Phys.*, 22:579, 1961.
- [10] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys.Rev.Lett.*, 19:1264, 1967.
- [11] A. Salam. Elementary particle theory, relativistic groups and analyticity. In N. Svarthom, editor, *8th Nobel Symposium, Stockholm, Sweden*, 1968.
- [12] M. B. Gavela, P. Hernández, J. Orloff, and Pène P. Standard model cp-violation and baryon asymmetry. *Mod. Phys. Lett. A*, 09:795, 1994.
- [13] Colaboração ATLAS. Observation of a new particle in the search of standard model Higgs boson with the ATLAS detector. *Phys. Lett. B*, 1:1, 2012.
- [14] W. Pauli. *Neutrino Physics*. Cambridge University Press, 1991.
- [15] E. Fermi. Versuch einer theorie der β -strahlen. *Z. Phys*, 88:161, 1934.
- [16] F. Reines, C. L. Cowan, F. B. Harrison, A. D. McGuire, and H. W. Kruse. Detection of the free antineutrino. *Phys. Rev.*, 117:159, 1960.

- [17] L. Landau. The conservation laws for weak interactions. *Nucl.Phys.*, 3:127, 1957.
- [18] T. D. Lee, C. N. Yang. Parity nonconservation and a two component theory of the neutrino. *Phys.Rev.*, 105:1671, 1957.
- [19] A. Salam. On parity conservation and neutrino mass. *Il Nuov. Cim*, 5:299, 1957.
- [20] B. Pontecorvo. *Sov. Phys. JETP*, 10:1236, 1960.
- [21] G. Danby et al. *Phys. Rev. Lett.*, 9:36, 1962.
- [22] M. L. Perl et al. *Phys. Rev. Lett*, 35:1489, 1975.
- [23] Colaboração DONUT. Observation of tau neutrino interactions. *Phys. Lett. B*, 508:218, 2001.
- [24] B. T. Cleveland et al. *Phys. Rev. Lett.*, 79:354, 1997.
- [25] Y. Fukuda et al, Super-KamiokANDE Collaboration. *Phys. Lett. B*, 9:443, 1998.
- [26] Q. R. Ahmad et al. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by ^8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 87:071301, 2001.
- [27] C. Athanassopoulos et al, LSND Collaboration. Candidate events in a search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2650, 1995.
- [28] B. Pontecorvo. *Sov. Phys. JETP*, 6:429, 1957.
- [29] B. Pontecorvo. *Sov. Phys. JETP*, 7:172, 1958.
- [30] E. Majorana. Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone. *Il Nuov. Cim.*, 14:171, 1937.
- [31] M. Gell-Mann et al. Supergravity. In F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, editors, *North Holland, Amsterdam*, 1979.
- [32] T. Yanagida. Workshop on unified theory and the barion number of the universe. In *KEK, Japan*, 1979.
- [33] R. N. Mohapatra P. B. Pal. *Masive Neutrinos in Physics and Astrophysics*. World Scientific Publishing, 2004.
- [34] R. N. Mohapatra, G. Senjanovic. Neutrino masses and mixings in gauge models with spotaneous parity violation. *Phys. Rev. D*, 23:165, 1988.
- [35] R. Foot, H. Lew, X. G. He, G. C. Joshi. Seesaw neutrino masses. *Z. Phys. C*, 44:441, 1989.
- [36] M. Fukugita, T. Yanagida. Baryogenesis without Grand Unification. *Phys. Lett. B*, 174:45, 1986.
- [37] S. Davidson and E. Nardi and Y. Nir. Leptogenesis. *Phys. Rep.*, 466:105, 2008.
- [38] G. 't Hooft. Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies. *Phys.Rev.Lett.*, 37:8, 1976.

- [39] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. On anomalous electroweak baryon-number non-conservation in the early Universe. *Phys. Lett. B*, 155:36, 1985.
- [40] W. Buchmüller, S. Fredenhagen. Quantum mechanics of Baryogenesis. *Phys. Lett. B*, 483:217, 2000.
- [41] J. S. Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *J. Math. Phys.*, 2:407, 1961.
- [42] L. V. Keldysh. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Zh. Eksp. Teor. Fis.*, 47:1515, 1964.
- [43] P. C. Martin, J. Schwinger. *Phys. Rev.*, 115:1352, 1959.
- [44] L. P. Kadanoff, G. Baym. *Quantum Statistical Mechanics*. W. A. Benjamin, New York, 1962.
- [45] G. Zhou, Z. Su, B. Hao, and L. Yu. *Phys. Rep.*, 118:1, 1985.
- [46] R. D. Jordan. *Phys. Rev. D*, 33:444, 1986.
- [47] E. Calzetta, B. B. Hu. *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2008.
- [48] J. Berges. Introduction to Nonequilibrium Quantum Field Theory. *AIP. Conf. Proc.*, 739:3, 2004.
- [49] T. Prokopec, M. G. Schmidt, S. Weinstock. Transport equations for chiral fermions to order $\hbar$ and electroweak baryogenesis: Part I, Part II. *Ann. Phys.*, 314:208,267, 2004.
- [50] M. Garny, A. Hohenegger, A. Kartavtsev and M. Linder. *Phys. Rev. D*, 80:150027, 2009.
- [51] M. Beneke, B. Garbrecht, M. Herraren, and P. Schwaller. Finite number density corrections to leptogenesis. *Nucl. Phys. B*, 838:1, 2010.
- [52] A. Anisimov, W. Buchmüller, M. Drewes, S. Mendizabal. Quantum Leptogenesis I. *Ann. Phys.*, 326:1998–2038, 2011.
- [53] A. Anisimov, W. Buchmüller, M. Drewes, S. Mendizabal. Leptogenesis from Quantum Interference in Thermal Bath. *Phys. Rev. Lett.*, 104:121102, 2010.
- [54] M. Drewes. *Quantum Aspects of Early Universe Thermodynamics*. PhD thesis, Deutschen Elektronen Synchrotron (DESY), 2009.
- [55] S. Mendizabal. *Quantum mechanics of leptogenesis*. PhD thesis, Universität Hamburg, 2010.
- [56] M. Losada. High Temperature dimensional reduction of the MSSM and other multi-scalar models. *Phys. Rev. D*, 56:2893, 1997.
- [57] M. S. Carena, M. Quiros, C. E. M. Wagner. Opening the Window for Electroweak Baryogenesis. *Phys. Lett. B*, 380:81, 1996.
- [58] D. Delphine, J. M. Gerard, R. Gonzalez-Felipe, J. Weyers. A light stop and Electroweak baryogenesis. *Phys. Lett. B*, 386:183, 1996.

- [59] A. Pilaftsis, T. E. J. Underwood. Resonant Leptogenesis. *Nucl. Phys. B*, 692:303, 2004.
- [60] A. Anisimov, A. Broncano, M. Plümacher. The CP-Asymmetry in resonant leptogenesis. *Nucl. Phys. B*, 737:176, 2006.
- [61] M. A. Luty. Baryogenesis via Leptogenesis. *Phys. Rev. D*, 45:455, 1992.
- [62] A. Pilaftsis. CP Violation and Baryogenesis due to Heavy Majorana Neutrinos. *ArXiv e-print*, hep-ph/9707235v1 <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9707235v1>.
- [63] W. Buchmüller, P. di Bari, M. Plumacher. *Nucl. Phys. B*, 643:367, 2002.
- [64] A. Pilaftsis. The Little Review on Leptogenesis. *J. Phys. Conf. Ser.*, 171:012017, 2009.
- [65] M. Garny, A. Kartavtsev, A. Hohenegger. Leptogenesis from first principles in the resonant regime. *Ann. Phys.*, 328:26, 2013.
- [66] J. Rammer. *Quantum Field Theory of Non-equilibrium States*. Cambridge University Press, 2007.
- [67] A. Das. *Finite Temperature Field Theory*. World Scientific, 1997.
- [68] M. Le-Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [69] J. M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis. Effective action for composite operators. *Phys. Rev. D*, 10:2428, 1974.
- [70] M. Garny, M. M. Müller. Kadanoff-baym equations with non-gaussian initial conditions: The equilibrium limit. *Phys. Rev. D*, 80:085011, 2009.
- [71] M. Drewes, S. Mendizabal, C. Weniger. Boltzmann equations from first principles without gradient expansion. *ArXiv e-print*, hep-ph/1202,1301 <http://arxiv.org/abs/hep-ph/1202.1301v1>.
- [72] H. A. Weldon. Simple Rules For Discontinuities In Finite Temperature Field Theory. *Phys. Rev. D*, 28:2007, 1983.
- [73] W. Buchmüller, R. D. Peccei and T. Yanagida. Leptogenesis as the origin of matter. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 55:311, 2005.
- [74] S. Weinberg. Baryon- and lepton-nonconserving processes. *Phys. Rev. Lett.*, 43:1566, 1979.
- [75] E. Ma. Pathways to naturally small neutrino masses. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1171, 1998.
- [76] J. Bernstein. *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Cambridge University Press, 2004.
- [77] W. Israel. *Proceeding: Relativity Astrophysics and Cosmology*. Reidel Publishing Company, 1973.