Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Limites Topológicos do Modelo Gauge-Higgs com Simetria $\mathbb{Z}_2$ em uma Rede Bidimensional

Nelson Javier Buitrago Aza

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teôtonio-Sobrinho

Dissertação de mestrado apresentada
ao Instituto de Física
para a obtenção do título
de Mestre em Ciências

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Teôtonio-Sobrinho (Orientador) - IF-USP
- Profa. Dra. Tereza Cristina da Rocha Mendes - IFSC-USP.
- Prof. Dr. Jorge L. De Lyra - IF-USP

São Paulo, 2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Buitrago Aza, Nelson Javier

Limites topológicos do modelo de Gauge-Higgs com simetria Z_2 em uma rede bidimensional – São Paulo, 2013.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho

Área de Concentração: Métodos Matemáticos da Física

Unitermos: 1. Modelo de Gauge-Higgs; 2. Teoria de Gauge na rede; 3. Limites topológicos; 4. Álgebras de Hopf; 5. Grupos abelianos.

USP/IF/SBI-109/2013

Universidade de São Paulo - USP
Instituto de Física - IFUSP
Departamento de Física Matemática - DFMA

LIMITES TOPOLÓGICOS DO MODELO GAUGE-HIGGS COM
SIMETRIA $\mathbb{Z}_2$ EM UMA REDE BIDIMENSIONAL

Nelson Javier Buitrago Aza

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teôtonio-Sobrinho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 2013

RESUMO

Nesta dissertação estudamos as teorias de gauge acoplada com campos de matéria em variedades bidimensionais [BDI74, BDI75]. Para isso, descrevemos primeiro um formalismo em duas e três dimensões o qual é baseado na ideia de Kuperberg de definir um invariante topológico em três dimensões usando álgebras de Hopf e diagramas de Heegaard [Kup91, Ale01]. O uso do formalismo é útil para este trabalho pois é fácil a identificação de limites topológicos sem resolver o modelo. Também escrevemos o modelo de gauge com campos de matéria usando uma fixação de gauge chamada de gauge unitário [Cre80]. Trabalhamos com o grupo abeliano $\mathbb{Z}_n$ e explicamos com detalhe o caso $\mathbb{Z}_2$. Calculamos as funções de partição e loops de Wilson para este grupo nos diferentes limites topológicos. Mostramos que existem casos nos quais os resultados dependem da triangulação mas de maneira trivial, estes casos foram chamados de quase-topológicos [YTSB07, YTSM09, FPTs12].

ABSTRACT

In this thesis we study gauge theories coupled with matter fields in two-dimensional manifolds [BDI74, BDI75]. In order to proceed we first describe a formalism in two and three dimensions which is based on the idea of Kuperberg of defining a topological invariant in three dimensions using Hopf algebras and Heegaard diagrams [Kup91, Ale01]. The use of this formalism is useful here because it is easy to identify topological limits without solving the model. Furthermore, we write the gauge model with matter fields choosing the unitary gauge [Cre80]. We work with abelian groups $\mathbb{Z}_n$ and explain the $\mathbb{Z}_2$ case in detail. We calculate partition functions and Wilson loops for this group in the different topological limits. We show that, there were cases in which the results depended on the triangulation but in a trivial way, these cases are called quasi-topological [YTSB07, YTSM09, FPT12].

A Dios por acompañarme siempre

ACKNOWLEDGMENT

There are too many kind words that I would like to express to those who were involved or contributed, actively or spiritually, to the development of this thesis. Firstly, I owe special thanks to my advisor, Paulo Teotônio-Sobrinho, for his continues support and stimulating discussions. He was always encouraging me to go further and without his guidance this thesis would not have been possible.

I would like to express my deep gratitude to my research group in particular to Miguel Jorge Bernabé Ferreira, who offered me his time, feedback and support during my studies. He was constantly motivating and helping me with patience and interest. Special thanks to Allyson Morais, Anderson Alves, Javier Lorca, Pablo Ibieta and Pramod Padmanabhan who have illuminated me with comments, suggestions and warm encouragement.

Non-academically, there are also many persons which were involved during this process and which I would like to thank. Specially my mother, for her loving support in every moment. A deep gratitude to Fleurette, my precious, for always being helpful and supportive in my life. Thanks also to my Chibchombian friends, other nationalities friends and Brazilian fellows, with whom I have shared an important part of my everyday time during the last two years. I would sincerely like to name them all but it would be a very long list. Each friend has contributed to make my studies a great experience in my life.

Special thanks to Instituto de física da Universidade de São Paulo for giving me the tools and knowledge to make this thesis a reality. I would also like to express my gratitude to CAPES who gave me the financial support.

1. Introdução	3
2. Teoria de gauge na rede	9
2.1. Propriedades básicas de uma teoria de gauge na rede	9
2.1.1. Transformações de gauge	13
2.1.2. Loops de Wilson	15
2.2. O problema	16
2.3. Diagramas coloridos e diagramas de Heegaard	19
3. Teorias topológicas e quase topológicas	27
3.1. Teorias topológicas	28
3.2. Formalismo diagramático e diagramas coloridos	31
3.2.1. Resumo diagramático de álgebras de Hopf	32
3.2.2. Tensores associados a curvas	34
3.3. Função de partição, loops de Wilson e prova da invariância topológica . . .	36
3.3.1. <i>Moves</i> de Pachner como curvas coloridas	44
3.4. Álgebra do Grupo	48
3.4.1. Grupos abelianos	50
3.5. Invariância da Função de Partição por Transformações de Base	53
4. Modelo de gauge-Higgs e generalização	55
4.1. Expansões em caracteres e centro do grupo	55
4.2. Função de partição com campos de matéria	58
4.3. Função de partição para uma rede bidimensional	60
4.4. Cálculo da função de partição nos limites topológicos	65
4.4.1. Limites topológicos; caso particular	68
4.5. Loops de Wilson	72
5. Resultados e Conclusões	81
A. Formalismo diagramático e álgebras de Hopf	85
A.1. Dualidade	85
A.2. Tensores	86
A.2.1. Notação gráfica dos tensores	87

A.3. Álgebras de Hopf	88
A.3.1. Bi-álgebras	88
B. Handlebodies e diagramas de Heegaard	97
C. Transporte Paralelo	101

“I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.” (Sir Isaac Newton)

Teorias de gauge na rede aparecem pela primeira vez em 1971 quando Wegner quis fazer uma generalização do modelo de Ising [Weg71]. Para isso colocou as variáveis de spin, $\sigma(l)$, nos links de uma rede. Mostrou-se que, neste modelo, que não existia magnetização espontânea e que as fases que descreviam o modelo não eram triviais. Para diferenciar as fases do modelo, Wegner introduziu uma quantidade invariante de gauge, $W_\ell = \prod_{l \in \ell} \sigma(l)$, ao redor de um loop fechado ℓ . Isso foi suficiente para mostrar a chamada lei da área para pequenos valores da constante de acoplamento β e a lei do perímetro para valores altos da mesma [GP96].

Para definir a teoria de gauge na rede é útil falar primeiro de uma *variedade discretizada* [Rob05]. O nome de variedade discretizada deve-se naturalmente ao fato que o espaço pode ser pensado como sendo uma variedade $\mathcal{M}$ composta de várias pequenas peças que formam o que chamamos *triangulação* $\mathcal{T}$ da variedade $\mathcal{M}$ (ver figura 1.1). A saber, vértices, links, faces (plaquetas), volumes, etc. Embora redes retangulares sejam mais comuns, é conveniente para nós usarmos redes triangulares. Note-se que como é discretizada a variedade, cada link l pertence à fronteira ∂ de alguma face f . Já com isso, fazemos a escolha que cada link e cada face da triangulação $\mathcal{T}$ tenha uma orientação arbitrária, sendo a orientação de cada link l independente da orientação da face f .

FIG. 1.1. Variedade 2D discretizada.

Dito o anterior, para construir uma teoria de gauge na rede, associamos uma variável de gauge g , pertencente a um grupo finito ou infinito G , a cada link da rede. Por o link ter orientação, ele terá um vértice inicial, v_i e outro final, v_f , e assim, a cada vértice associamos um elemento h do grupo G e definimos a transformação de gauge

$$(1.1) \quad g_e \rightarrow h_{v_i} g_e h_{v_f}^{-1}.$$

Para escrever a ação primeiro multiplicamos cada variável de link ao redor de cada face f da triangulação. O objeto definido assim, é chamado de holonomia U_f . Usamos U_f para

definir a ação como sendo

$$S = -\beta \sum_f \Psi(U_f), \text{ (para } \beta \in \mathbb{R}\text{)}$$

onde Ψ é uma função tal que $\Psi : G \rightarrow \mathbb{R}$. Em uma teoria de gauge devemos escolher Ψ tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. A ação deve ser invariante de gauge quando é usada a transformação de gauge (1.1).
2. A ordem dos links deve ser irrelevante quando seja calculada a holonomia, ou seja, a função Ψ deve ser de classe, isto é, para elementos x, y e $z \in G$, $\Psi(xyz) = \Psi(yzx) = \Psi(zxy)$.
3. A orientação de cada face f deve ser irrelevante.

Com as condições anteriores definimos a ação invariante de gauge como

$$S = -\beta \sum_f (\psi(U_f) + \psi(U_f^{-1})), \text{ (para } \beta \in \mathbb{R}\text{)},$$

onde $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe. No caso em que, além dos campos de gauge, existir também campos de matéria nos vértices, também é possível definir uma ação invariante por transformação de gauge, ver capítulo 2, seção 2.1.1.

A primeira aplicação da teoria de gauge na rede foi feita por Wilson [Wil74]. Ele propôs uma versão discreta de uma teoria de gauge como um método de se estudar a teoria do contínuo. Um dos primeiros resultados foi mostrar que numa teoria de gauge pura (sem campos de matéria) os quarks estão confinados para constante de acoplamento β muito pequena.

As teorias na rede definem modelos estatísticos como por exemplo o modelo de Ising e possíveis generalizações do mesmo [Weg71, BDI74, FM83, Bou97]. É sabido que o modelo de Ising é um dos modelos mais simples de formular e ao mesmo tempo extremamente difícil de resolver analiticamente. No caso unidimensional a solução exata (com e sem campo magnético externo) é conhecida [Sal10], entretanto, em dimensão maior solução analítica não é conhecida, com exceção do caso bidimensional sem campo magnético externo em que o modelo pode ser resolvido exatamente [Kog79, Sei82, FM83]. Em dimensão 3 o modelo de Ising é dual a uma teoria de gauge com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$ [Weg71, YT07].

Uma vez fixada a ação da teoria, podemos definir a função de partição como

$$Z = \sum_{\text{conf.}} e^{S_{\text{conf.}}},$$

onde, a soma é sobre todas as possíveis configurações das variáveis. No entanto, sabemos que Z é um escalar, o qual em princípio depende da variedade sobre a qual é calculada a ação. Porém, existem casos em que a função de partição Z não depende da escolha da triangulação da variedade discretizada $\mathcal{M}$. Isso significa que para duas triangulações

diferentes $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ o valor encontrado para a função de partição é o mesmo, ou seja, quando $Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}_1) = Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}_2)$. Quando isso acontece a teoria é chamada uma *teoria de campo topológica* [FHK94, CFS94]. Agora, se Z depende trivialmente do tamanho da rede a teoria é dita ser *teoria de campo quase-topológica* [YTSM09, FPTS12].

Existem várias maneiras de definir as teorias topológicas e quase-topológicas, como por exemplo: os invariantes Dijkgraaf-Witten [DW90], os invariantes de Turaev-Viro [TV92] e os invariantes construídos a partir de álgebras de Hopf, que é o caso dos invariantes que usamos neste trabalho [CKS98]. As álgebras de Hopf $\mathcal{A}$ são definidas por um conjunto, $(\mathcal{A}, m, \Delta, e, \epsilon, S)$, onde m é o produto, Δ o co-produto, e a unidade, ϵ a co-unidade e S a antípoda [Kup91, Kup97, KR99, Ale01, BJM10].

Em 1991 Kuperberg [Kup91] definiu invariantes topológicos usando álgebras de Hopf, para o caso tridimensional, quando a antípoda S é involutória, ou seja, $S^2 = e$. Uma generalização para o caso $S^2 \neq e$ foi introduzida em 1997 [Kup97]. É sabido que variedades tridimensionais podem ser representadas por *diagramas de Heegaard* [PS97, Joh], os quais são dois conjuntos de curvas fechadas, $b = \{b_1, \dots, b_g\}$ (curvas azuis) e $r = \{r_1, \dots, r_g\}$ (curvas vermelhas) sobre superfícies bidimensionais. Por outro lado, Fukuma, Hosono, Kawai, Chung e Shapere em 1994 [FHK94, CFS94] definem teorias topológicas na rede para o caso bidimensional e tridimensional respectivamente. Mostraram que para uma álgebra de Hopf involutória, $S^2 = e$, existe uma associação um a um com uma teoria topológica na rede.

Com a intenção de combinar os dois formalismos mencionados anteriormente, fazemos a escolha de substituir faces por curvas azuis e links por curvas vermelhas. Agora, é um fato que a invariância por *moves* de Pachner implica uma teoria topológica [Pac78, Pac91, Rob05, DH12]. Com a linguagem de diagramas de Heegaard, é possível mostrar que os *moves* de Pachner são validos [Ale01].

Para o modelo de gauge-Higgs no caso bidimensional, com grupo de gauge finito G , o espaço de parâmetros é representado pela figura 1.2, [Kog79, Sei82, FM83]. Este diagrama corresponde a constantes de acoplamento com sinal positivo e as linhas tracejadas representam os limites quando $\beta_{G,H} \rightarrow \infty$. É sabido que sobre as linhas contínuas e as tracejadas existe solução exata. Nestas linhas e nas contínuas a teoria é topológica ou quase-topológica [FPTS12].

FIG. 1.2. Espaço de parâmetros.

Nosso propósito neste trabalho é estender o diagrama de fases da figura 1.2 usando grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$, para uma variedade bidimensional, orientável, conexa e fechada. Primeiro para constantes de acoplamento negativas nos limites topológicos. Depois disto, observar o que acontece para constantes de acoplamento com diferente sinal, também nos limites topológicos, as quais ao parecer não foram estudados ainda. O diagrama de fase completo é mostrado na figura 1.3. Chegaremos a que teremos solução exata para as funções de partição e o valor esperado dos observáveis, loops de Wilson, tanto nas linhas tracejadas como nas contínuas.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma.

No capítulo 2 revisaremos o que é uma teoria de gauge na rede em duas e três dimensões.

FIG. 1.3. Espaço de parâmetros. Casos onde a função de partição e os loops de Wilson são calculáveis.

Ali serão definidas transformações de gauge para um modelo de gauge acoplado a um campo de matéria. Também faremos uma escolha particular de gauge chamada de gauge unitário. Faremos isto para o grupo de gauge $\mathbb{Z}_n$ e escreveremos a ação para este caso.

Fazendo uso do formalismo de Kuperberg para variedades tridimensionais [Kup91], representamos uma rede bidimensional em termos de curvas.

No capítulo 3 discutimos as teorias topológicas na rede. Descrevemos o formalismo fornecido por Fukuma, Hosono, Kawai, Chung e Shapere [FHK94, CFS94], para variedades bidimensionais e tridimensionais. Escrevemos a função de partição e os loops de Wilson em termos de contrações de certos tensores M, Δ e S , e definimos as teorias topológicas e quase-topológicas. Mostraremos com a linguagem de curvas a invariância topológica, ou seja, mostramos a invariância por *moves* de Pachner para o caso bidimensional em que uma teoria de gauge está acoplada a um campo de matéria.

No capítulo 4 descrevemos com detalhe o modelo de gauge-Higgs, onde usamos expansão em caracteres para descrever o espaço de parâmetros do modelo. No caso particular de $\mathbb{Z}_2$ os coeficientes que descrevem o modelo de gauge puro chamados de γ_G^0 e γ_G^1 , estão relacionados pela equação da hipérbole $\gamma_G^0 \gamma_G^1 = 1$, a qual é representada pela linha da

FIG. 1.4. Espaço de parâmetros. Casos onde a função de partição e os loops de Wilson são calculáveis.

cor roxa na figura 1.4. Os valores onde a função de partição foi calculada correspondem a linha tracejada, $\beta_G = 0$ e as linhas contínuas, $\beta_G \rightarrow \pm\infty$. Um gráfico similar é obtido para o modelo de Higgs puro.

Calcularemos para a álgebra de grupo do grupo $\mathbb{Z}_n$, os elementos do centro que parametrizam a teoria e obteremos que os coeficientes da expansão de caracteres coincidem com estes. Isto é útil pois podemos estender o espaço de parâmetros 1.4 aos gráficos 1.5(a) e 1.5(b),

FIG. 1.5. Regões onde a função de partição é calculável. São representadas pelas linhas contínuas e tracejadas.

para o caso $\mathbb{Z}_2$. Veremos que a função de partição e os loops de Wilson podem também ser calculados em regiões do espaço dos parâmetros que não correspondem a nenhum modelo físico e têm somente significado matemático.

Finalmente no capítulo 5 apresentamos as tabelas que contem os resultados e as gráficas correspondentes quando foram encontradas exatamente as funções de partição e os loops de Wilson. Damos as perspectivas para o futuro próximo e possíveis aplicações dos métodos usados neste trabalho.

Adicionalmente o trabalho têm três apêndices os quais podem ser uteis ao leitor para entender o contido do trabalho; o primeiro, apêndice A, é um resumo de álgebras de Hopf, usando o formalismo diagramático fornecido por Kuperberg. Este apêndice também contém algumas demonstrações relevantes ao nosso trabalho. No apêndice B, fornecemos uma construção formal de diagramas de Heegaard. Já no apêndice C definiremos o transporte paralelo, o qual é um conceito necessário para definir uma teoria de gauge na rede.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

este capítulo, nosso objetivo é explicar de uma maneira simples o formalismo introduzido por Wegner e Wilson nos artigos, [Weg71] e [Wil74] respectivamente. Na primeira parte, daremos as definições básicas de uma teoria de gauge na rede, e mostramos a ação da teoria quando consideramos campos de gauge associados com matéria. A continuação mostramos quais são as transformações de gauge que satisfaz a ação para ser invariante de gauge. Com base nesto último, definimos o valor esperado de observáveis, que são construídos como invariantes de gauge e são chamados de loops de Wilson. Na seção seguinte especificamos o problema a tratar nesta dissertação, o modelo de gauge-Higgs, e escrevemos a ação da teoria para o grupo de gauge $\mathbb{Z}_n$, usando uma particular fixação de gauge. Finalmente damos o formalismo de curvas coloridas, para variedades bidimensionais, o qual está baseado nos diagramas de Heegaard, os quais são úteis para descrever variedades tridimensionais.

2.1. Propriedades básicas de uma teoria de gauge na rede

A ideia é simplesmente tomar uma *variedade*, que é discretizada conforme as seguintes definições [Rob05]:

2.1 Definição (Rede).

Uma rede é dada por conjuntos finitos $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$. Os elementos dos conjuntos são chamados *vértices*, *links* e *faces* respectivamente. Existem dois mapas ∂^1, ∂^2 , chamados *mapas de fronteira*. A imagem de um elemento é chamada *fronteira*. ∂^1 mapeia cada link $e \in \mathcal{E}$ em um conjunto de vértices $\{v_1, v_2\}$. ∂^2 mapeia cada face $f \in \mathcal{F}$ em uma sequência de links $(e_1, \dots, e_k)$, determinada com permutações cíclicas em algum o ordem, tal que cada link e_i possui um vértice em comum com o link anterior e_{i-1} e o outro vértice em comum com o link posterior e_{i+1} . (Figura 2.1(a)) ■

2.2 Definição (Orientação).

Considere uma rede. Se para um link $e \in \mathcal{E}$ pode-se distinguir os vértices fronteira chamando um de vértice *inicial* e o outro de vértice *final*, chamaremos isto de uma orientação o_e do link. Se todos os links estão orientados a rede é chamada *orientada pelos links*. (Figura 2.1(b)) ■

Seja $f \in \mathcal{F}$ uma face da rede. Podemos escolher uma sequência de links em sua fronteira de forma cíclica. Podemos ver que existem duas escolhas possíveis. Chamamos

(a) Rede representada por vértices (pontos), links (linhas) e faces (área sombreada). A rede não está orientada.

(b) Links orientados.

(c) Rede orientada. Dois vértices estão unidos por um link. A rede é uma composição de polígonos chamados *plaquetas*.

(d) Um link orientado e , com vértice inicial $v_1(e) = s(e)$ e vértice final $v_2(e) = t(e)$.

FIG. 2.1. Construção de uma teoria de gauge discreta.

esta escolha orientação o_f da face¹. Quando cada face é orientada falamos que a rede é *orientada pelas faces*. No caso de a rede estar orientada pelos links e orientada pelas faces chamamos esta de uma *rede orientada* (figura 2.1(c)). Por cada link $e \in \mathcal{E}$ estar orientado, ele terá um vértice inicial, $s(e)$ e um vértice final $t(e)$, isso é mostrado na figura 2.1(d), onde temos por conveniência $s(e) = v_1(e)$ e $t(e) = v_2(e)$.

Agora, consideramos um grupo G e associamos a cada link e_i a variável $g_{e_i} \in G$, como na figura 2.2. Fazer isso é definir uma *configuração de gauge*. Reconhecemos g_{e_i} como o operador de transporte paralelo de $s(e)$ a $t(e)$ [Wit91] (apêndice C). Definimos agora a *holonomia* sobre uma face f a seguir [Rob05, BDHK12]. Vamos ordenar os links $(e_1, \dots, e_n)$ da fronteira de f e vamos multiplicar os elementos do grupo associado $(g_{e_1}, \dots, g_{e_n})$ segundo a ordem cíclica. A orientação dos links é induzida pela orientação da face (e $g_e = g_{e^{-1}}^{-1}$ onde e^{-1} é o link com orientação contrária a e) [BDR11]. Levamos em consideração a orientação por $o_i(f, e_i) = \pm 1$ para o link e_i . Explicitamente a holonomia é definida como

$$(2.1) \quad U_f \equiv \prod_{e_i \in \partial^2 f} g_{e_i}^{o_i(f, e_i)}.$$

¹Em muitos textos o interior dos polígonos é chamado *plaquetas*.

FIG. 2.2. Configuração de gauge.

Ao escrever isso escolhemos um vértice inicial para fazer uma sequência adequada da ordenação cíclica das arestas. Um ponto importante da holonomia é que ela contém a informação da curvatura da variedade que ela encerra [GP96]. Explicamos isso a continuação.

Por definição, as holonomias não só podem ser calculadas para plaquetas simples, também podem ser calculadas para polígonos compostos de muitas plaquetas como segue (figura 2.3): vamos escolher algum ponto inicial P na rede tal que este coincida com o ponto final de um caminho. Tomamos uma direção determinada passando por cada link onde cada um deles tem associado um elemento do grupo G . Assim, notamos que a holonomia dependerá da orientação relativa caminho link na expressão (2.1).

Vamos agora lembrar que o grupo G está dividido em classes de conjugação pela seguinte relação. Dizemos que x está na mesma classe que y se existe $g \in G$ tal que $y = gxg^{-1}$ e escrevemos $x \sim y$, pois podemos mostrar que esta é uma relação de equivalência. Dito isto, definimos $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ como uma *função de classe* se $\psi(x) = \psi(y)$ quando x e y são elementos conjugados de G . Um importante ponto sobre holonomias é que para uma função de classe $\psi : U_f \rightarrow \mathbb{C}$, ψ é invariante sob o conjunto de transformações de gauge definidas na seguinte seção, 2.1.1. A configuração física de qualquer teoria de gauge pode ser descrita fiel e unicamente por suas holonomias. De fato, holonomias podem oferecer uma estrutura de trabalho geométrico comum para todas as forças fundamentais da natureza. Cada classe de equivalência de curvas fechadas é chamada de *loop* [GP96].

FIG. 2.3. Loop com ponto inicial P .

Obviamente, quando definamos a ação da teoria, essa deve ser uma função invariante por permutações cíclicas dos links. Ela será função da holonomia, pois a holonomia de cada face é calculada sem levar em consideração a ordem dos links na fronteira, devido a que o vértice inicial é qualquer um. Também, a ação deve ser invariante sob conjugação dos elementos do grupo, sem essa condição, a ação não será invariante sob transformações de gauge (seção 2.1.1). Para essa ação deve ser invariante a orientação da plaqueta, pois ela tem que ser irrelevante. Alterando a orientação de alguma plaqueta ou link, a ação deve permanecer inalterada. Finalmente a ação deve também ser independente dos links inicial e final quando desejemos calcular o valor numérico de cada holonomia sob cada plaqueta. Com as condições anteriores, a ação é definida como

$$(2.2) \quad S_{\text{conf. faces}} = \sum_{f \in \mathcal{F}} (\psi(U_f) + \psi(U_f^{-1})),$$

onde para um grupo de gauge geral usualmente se requer $\psi \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe; não obstante, para grupos abelianos como os considerados aqui, todas as funções são de classe [CO83].

Note que a ação do modelo (2.2) é trivialmente invariante por uma inversão das faces. Mudando a orientação de uma face f por seu inverso, temos que a holonomia U_f muda a U_f^{-1} . Não obstante, esse termo é considerado na expressão (2.2), por isso o valor numérico

devido à holonomia não muda. Pela razão de $\psi(U_f)$ ser uma função de classe, estamos certos que é invariante sob permutações cíclicas, isto é

$$\psi(xyz) = \psi(x^{-1}(xyz)x) = \psi(yzx) = \psi(y^{-1}(yzx)y) = \psi(zxy),$$

para todos x, y e $z \in G$. Assim, a holonomia pode ser calculada começando por qualquer link na fronteira.

Seja ρ uma representação de G sob um corpo F , ou seja um homomorfismo ρ que leva G a $GL(n, F)$, para algum n^2 . Onde, a dimensão de ρ é o número inteiro n . Nós podemos redefinir a ação (2.2) como

$$(2.3) \quad S_{\text{conf. faces}} = -\beta \sum_{f \in \mathcal{F}} (\alpha(\text{tr}(\rho(U_f)) + \text{tr}(\rho(U_f^{-1}))) + \gamma),$$

com $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{\dagger 3}$ [JL01], β a constante de acoplamento, α um número real não negativo e γ um número real. Por exemplo, para $G = \mathbb{Z}_2$, com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$ fornece a *ação spin-gauge* e para $\alpha = -\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$ fornece a *ação de Wilson* [BF12].

FIG. 2.4. Campo de matéria definidos nos vértices da rede.

Podem ser introduzidas variáveis de vértices ou “campos de matéria” da maneira a seguir [Sei82]: a variável v_i é um mapa que associa o sítio i de uma rede com algum espaço vetorial unitário V_H de dimensão finita, que é uma representação unitária do grupo de gauge G (figura 2.4). A ação é definida

$$(2.4) \quad S_{\text{conf. links}} = -\beta_H \sum_{\{s(e), t(e)\}} \langle v_{s(e)}, \rho(g_e) v_{t(e)} \rangle,$$

onde β_H é o termo de interação associado ao campo de Higgs e $\langle v_1, v_2 \rangle = \Re(\text{tr}(v_1^\dagger v_2))$ é o produto *interno*. É definido

$$\langle v_{s(e)}, \rho(g_e) v_{t(e)} \rangle = \Re(\text{tr}(v_{s(e)}^\dagger (\rho(g_e) v_{t(e)}))) = \Re(\text{tr}(v_{s(e)}^\dagger \rho(g_e) v_{t(e)})) \in \mathbb{R}.$$

O símbolo $\{s(e), t(e)\}$ em (2.4), faz referência aos vizinhos mais próximos.

A ação “completa”, portanto é a soma de (2.3) e (2.4)

$$(2.5) \quad S_{\text{conf.}} = -\beta_G \sum_{f \in \mathcal{F}} (\alpha(\text{tr}(\rho(U_f)) + \text{tr}(\rho(U_f^{-1}))) + \gamma) - \beta_H \sum_{\{s(e), t(e)\}} \langle v_{s(e)}, \rho(g_e) v_{t(e)} \rangle,$$

onde os índices G e H são para fazer a distinção dos campos de gauge e de Higgs. Juntando

² $GL(n, F)$ denota o grupo de matrizes inversíveis $n \times n$ com entradas em F .

³A matriz $A^\dagger$ faz referência a matriz transposta conjugada da matriz A .

os termos, a função de partição considerada é da forma

$$(2.6) \quad Z = \sum_{\text{conf.}} e^{S_{\text{conf.}}}.$$

2.1.1. Transformações de gauge

Como em teorias de gauge no contínuo [Mor83], também pode-se definir uma transformação de gauge [Rob05, BDR11] na rede. Esta é dada por um mapeamento $\vartheta : \mathcal{V} \rightarrow G$, ou seja, uma atribuição de um elemento h do grupo G , a cada vértice v . A transformação de gauge para os links é definida como

$$(2.7) \quad g_e \rightarrow h_{s(e)} g_e h_{t(e)}^{-1}$$

onde h_v são parâmetros de gauge associados aos vértices da rede (lembre que $s(e)$ é o vértice inicial do link e e $t(e)$ o vértice final). A informação invariante de gauge está contida na classe de conjugação de U_f . Para um “polígono orientado”, um loop com ponto inicial P , de n links, escolhemos um sentido como na figura 2.5(a), então associamos cada link com g_{e_i} e cada vértice com h_{e_i} , com a restrição $h_{e_{n+1}} = h_{e_1}$. Assumimos que todos os links estão orientados, portanto cada link tem um vértice inicial e final. Vemos que quando a orientação coincide (não coincide) com a orientação do loop ℓ , o sinal $o_i(\ell, e_i)$ em (2.1) relativa a orientação do loop-link é positivo (negativo). Logo o

FIG. 2.5. Loop ℓ com alguma orientação e links na rede com orientação.

vértice inicial (com respeito ao loop) sempre será encontrado ao lado esquerdo da transformação (2.7) (Por exemplo se a orientação do loop coincide com a orientação de algum link, $\{e_i\}_{i=1}^n$, então $(h_{e_i} g_{e_i} h_{e_{i+1}}^{-1})^1 = h_{e_i} g_{e_i} h_{e_{i+1}}^{-1}$. Por outro lado, para a orientação inversa $(h_{e_{i+1}} g_{e_i} h_{e_i}^{-1})^{-1} = h_{e_i} g_{e_i}^{-1} h_{e_{i+1}}^{-1}$). Por essa razão quando os dois elementos associados com dois links consecutivos são multiplicados, resultará

$$g_{e_1}^{o_1(\ell, e_1)} g_{e_2}^{o_2(\ell, e_2)} \rightarrow (h_{e_1, e_2} g_{e_1} h_{e_2, e_1}^{-1})^{o_1(\ell, e_1)} (h_{e_2, e_3} g_{e_2} h_{e_3, e_2}^{-1})^{o_2(\ell, e_2)},$$

além disso, $t(e_1)$ deve coincidir com $s(e_2)$ porque os dois links estão unidos. Assim

$$g_{e_1}^{o_1(\ell, e_1)} g_{e_2}^{o_2(\ell, e_2)} \rightarrow h_{e_1} g_{e_1}^{o_1(\ell, e_1)} g_{e_2}^{o_2(\ell, e_2)} h_{e_3}^{-1}.$$

Por indução obtemos para $1 \leq j \leq n$ que

$$\prod_{e_i \in \ell} g_{e_i}^{o_i(\ell, e_i)} \rightarrow h_{e_1} \left(\prod_{e_i \in \ell} g_{e_i}^{o_i(\ell, e_i)} \right) h_{e_{j+1}}^{-1} \text{ para } 1 \leq i \leq j.$$

Fazendo para todos os links do loop, $h_{e_{n+1}} = h_{e_1}$, provamos o lema a seguir

2.3 Lema.

O produto dos campos ao longo de uma curva fechada $\ell = e_1 e_2 \cdots e_n e_1$ desenhada sob a rede

$$U_\ell = U_{e_1 e_2} U_{e_2 e_3} \cdots U_{e_n e_1}$$

é transformado como

$$U_\ell \rightarrow g_{e_1} U_\ell g_{e_1}^{-1}.$$

Isto é, permanece na mesma classe de conjugação do grupo. ◼

2.4 Corolário.

No caso de só uma plaqueta orientada tomamos a orientação do loop igual a da plaqueta. A transformação de gauge $U_f \rightarrow g_{e_1} U_f g_{e_1}^{-1}$ fornece para uma função de classe ψ

$$\psi(U_f') = \psi(U_f).$$

Ou seja, a condição necessária para a invariância da ação dependente das faces (2.2). ♦

2.5 Exemplo.

Para mostrar a invariância por transformações de gauge, consideramos a holonomia da figura 2.6(a) dada por

$$U_f = g_{e_1} g_{e_2} g_{e_3}^{-1} g_{e_4}^{-1} g_{e_5}.$$

No entanto, com a transformação de gauge para cada link (ver figura 2.6(b)), obtemos

FIG. 2.6. Transformação de gauge aplicada sobre cada link para uma plaqueta em particular.

$$\begin{aligned}
U'_f &= (h_{v_1} g_{e_1} h_{v_2}^{-1})(h_{v_2} g_{e_2} h_{v_3}^{-1})(h_{v_4} g_{e_3} h_{v_3}^{-1})^{-1}(h_{v_5} g_{e_4} h_{v_4}^{-1})^{-1}(h_{v_5} g_{e_5} h_{v_1}^{-1}) \\
&= (h_{v_1} g_{e_1} h_{v_2}^{-1})(h_{v_2} g_{e_2} h_{v_3}^{-1})(h_{v_3} g_{e_3}^{-1} h_{v_4}^{-1})(h_{v_4} g_{e_4}^{-1} h_{v_5}^{-1})(h_{v_5} g_{e_5} h_{v_1}^{-1}) \\
&= h_{v_1} g_{e_1} g_{e_2} g_{e_3}^{-1} g_{e_4}^{-1} g_{e_5} h_{v_1}^{-1} \\
&= h_{v_1} U_f h_{v_1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Como em (2.2), ψ é uma função de classe, note que

$$\begin{aligned}
\psi(U'_f) &= \psi(h_{v_1} U_f h_{v_1}^{-1}) = \psi(U_f) \\
\rightarrow \psi(U'^{-1}_f) &= \psi((h_{v_1} U_f h_{v_1}^{-1})^{-1}) = \psi(h_{v_1} U_f^{-1} h_{v_1}^{-1}) = \psi(U_f^{-1}),
\end{aligned}$$

ou seja, a ação permanece inalterada. *

FIG. 2.7. Transformação de gauge com campo de matéria.

Para o campo de matéria tomamos a transformação de gauge como (figura 2.7)

$$v_{i(e)} \rightarrow \rho(h_{i(e)}) v_{i(e)}, \text{ para todos } i(e) = s(e) \text{ ou } t(e),$$

onde é fácil ver, usando (2.7), que a parte associada ao campo de matéria é invariante

$$\begin{aligned}
\langle v'_{s(e)}, \rho(g'_e) v'_{t(e)} \rangle &= v_{s(e)}^{\dagger} \rho(g'_e) v'_{t(e)} \\
&= (\rho(h_{s(e)}) v_{s(e)})^{\dagger} \rho(h_{s(e)} g_e h_{t(e)}^{-1}) (\rho(h_{t(e)}) v_{t(e)}) \\
&= v_{s(e)}^{\dagger} (\rho(h_{s(e)})^{\dagger} \rho(h_{s(e)})) \rho(g_e) (\rho(h_{t(e)}^{-1}) \rho(h_{t(e)})) v_{t(e)} \\
&= v_{s(e)}^{\dagger} \rho(g_e) v_{t(e)} \\
&= \langle v_{s(e)}, \rho(g_e) v_{t(e)} \rangle.
\end{aligned}$$

Resumindo, a invariância de gauge é válida quando são feitas as transformações de gauge [Cre80, OHZ06]

$$(2.8a) \quad g_e \rightarrow h_{s(e)} g_e h_{t(e)}^{-1},$$

$$(2.8b) \quad v_{i(e)} \rightarrow \rho(h_{i(e)}) v_{i(e)}, \text{ para todos } i(e) = s(e) \text{ ou } t(e),$$

como mostrado anteriormente.

2.1.2. Loops de Wilson

Observáveis em teorias de gauge precisam ser invariantes de gauge. Portanto é útil introduzir um conjunto de quantidades em termos das quais qualquer invariante de gauge possa ser escrito. Esses objetos são chamados *loops de Wilson* os quais são construídos

invariantes de gauge, considerando um loop fechado ℓ e definindo

$$(2.9) \quad \langle W(\ell) \rangle = \frac{\sum_{\text{conf}} W(\ell) e^{S_{\text{conf.}}}}{\sum_{\text{conf}} e^{S_{\text{conf.}}}},$$

onde $W(\ell) = \chi_r(U_\ell)$. χ_r são os *caracteres*, isto é, os traços das correspondentes matrizes na representação irreduzível. U_ℓ em (2.9) é a holonomia das variáveis link ao redor da curva fechada ℓ .

Numa teoria de gauge pura, para loops muito grandes ℓ , existem dois possíveis comportamentos limite [OHZ06, GP96]⁴

1. LEI DA ÁREA. $\langle W(\ell) \rangle \sim e^{-K \times \text{área}(\ell)}$, para $\beta_G \ll 1$.
2. LEI DO PERÍMETRO. $\langle W(\ell) \rangle \sim e^{-K' \times \text{perímetro}(\ell)}$, para $\beta_G \gg 1$.

2.2. O problema

Na primeira parte do capítulo, definimos o que é uma teoria de campo na rede e suas propriedades básicas. No entanto, queremos calcular funções de partição (2.6) e o valor esperado de observáveis (invariantes de gauge) com os loops de Wilson (2.9) para modelos específicos. Neste trabalho usaremos $\mathbb{Z}_2$ como grupo de gauge. No entanto, nesse momento definiremos uma teoria mais geral com $\mathbb{Z}_n$ como grupo de gauge⁵.

No caso de $\mathbb{Z}_n$, as n representações irredutíveis denotadas por $\{\rho_r\}_{0 \leq r \leq n-1}$ em $\mathbb{C}$ são [JL01]

$$\rho_r(\omega^k) = e^{\frac{2rk\pi}{n}i} \quad (0 \leq k \leq n-1 \text{ e } \omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}).$$

Como as representações são irredutíveis de dimensão 1×1 , a ação de gauge com campos de matéria ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$ na expressão 2.3) pode ser escrita

$$\begin{aligned} S_{\text{gauge-Higgs}} = & -\beta_G \sum_{f \in \mathcal{F}} \left(\frac{1}{2} (\text{tr}(\rho_r(U_f)) + \text{tr}(\rho_r(U_f^{-1}))) \right) \\ & -\beta_H \sum_{\{s(e), t(e)\}} \Re(\text{tr}(v_{s(e)}^\dagger \rho_r(g_e) v_{t(e)})). \end{aligned}$$

Além disso, como foi dito na seção anterior, cada link e de cada face f tem associado um elemento do grupo $\mathbb{Z}_n$. Sendo N_{e_f} o número de links da face f , a representação será dada

⁴De forma geral os loops de Wilson tem duas propriedades fundamentais [GP96]

- AS IDENTIDADES DE MANDELSTAM: as quais são relações entre os loops de Wilson que refletem a estrutura de um determinado grupo de gauge.
- A PROPRIEDADE DA RECONSTRUÇÃO: podemos reconstruir toda a informação invariante de gauge de uma teoria a partir deles.

⁵Se define $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ com a soma mod(n).

por

$$(2.10) \quad \chi_r(U_f) = \exp\left(\frac{2rk_1\pi}{n}i\right) \exp\left(\frac{2rk_2\pi}{n}i\right) \cdots \exp\left(\frac{2rk_{N_{ef}}\pi}{n}i\right),$$

com $\text{tr}(\rho_r(\omega^k)) = \chi_r(\omega^k)$ o caráter da representação. Em (2.10) 1 é o primeiro link onde a holonomia começa ser calculada e N_{ef} o último link da face. Temos portanto:

$$\begin{aligned} \chi_r(U_f) + \chi_r(U_f^{-1}) &= \exp\left(\frac{2r(k_1 + \cdots + k_{N_{ef}})\pi}{n}i\right) + \exp\left(-\frac{2r(k_1 + \cdots + k_{N_{ef}})\pi}{n}i\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2r(k_1 + \cdots + k_{N_{ef}})\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Neste trabalho, usaremos a representação fiel na expressão anterior⁶, isto é, $r = 1$. Devido ao fato que cada face tem um número determinado de links, podemos escrever a ação

$$S_{\text{gauge-Higgs}} = -\beta_G \sum_f \cos\left(\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^{N_{ef}} k_i\right) - \beta_H \sum_{\{s(e), t(e)\}} \Re(\text{tr}(v_{s(e)}^\dagger e^{\frac{2k\pi}{n}i} v_{t(e)})).$$

Segue-se que o campo de matéria nos vértices, representados por v_i , devem ser uma matriz de tamanho 1×1 e além disso, a transformação de gauge também deve ser satisfeita $v_{i(e)} \rightarrow \rho(h_{i(e)})v_{i(e)}$, escolhemos $v_{i(e)} = \rho(h_{i(e)})^{-1}$, tal que o campo de matéria nos vértices seja a unidade. Essa fixação de gauge equivale a uma teoria pura de gauge acoplada a um campo que não é invariante de gauge com constante de acoplamento β_H . Essa escolha é chamada de *gauge unitário* [Cre80]. Representamos essa escolha como na figura 2.8. O

FIG. 2.8. Configuração sem campos de matéria nos vértices.

“novo” termo do campo de matéria pode ser escrito agora como $e^{\frac{2k_1\pi}{n}i} e^{\frac{2k_2\pi}{n}i} \cdots e^{-\frac{2k_{N_{ef}}\pi}{n}i}$, sendo k_1 e k_2 números inteiros ($0 \leq k_1, k_2 \leq n-1$). Por ciclicidade, é claro que este novo termo pertence a $\mathbb{Z}_n$, logo a ação completa fica

$$\begin{aligned} S_{\text{gauge-Higgs}} &= -\beta_G \sum_f \cos\left(\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^{N_{ef}} k_i\right) - \beta_H \sum_l \Re(e^{\frac{2k_l\pi}{n}i}). \\ (2.11) \quad &= -\beta_G \sum_f \cos\left(\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^{N_{ef}} k_i\right) - \beta_H \sum_l \cos\left(\frac{2k_l\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

⁶No caso que a cada elemento do grupo corresponda uma transformação distinta, se fala que a representação é fiel, *faithful* [Tun85].

Por exemplo, pode-se simplificar o problema tomando-se $\mathbb{Z}_2$ como grupo de gauge e considerando-se o caso bidimensional, com uma variedade formada somente por triângulos, isto é, cada polígono tem três links. Note que, para $\mathbb{Z}_2$, o termo de holonomias $\cos\left(\pi \sum_{i=1}^3 k_i\right)$, pode ser escrito $(-1)^{k_1+k_2+k_3} = (-1)^{k_1}(-1)^{k_2}(-1)^{k_3}$, reconhecendo $(-1)^k$ como um elemento do grupo $\mathbb{Z}_2$, para $k = 0, 1$ (o produto de dois elementos, $(-1)^g$ e $(-1)^h \in \mathbb{Z}_2$ está dado por $(-1)^{g+h}$, com $g, h \in \{0, 1\}$ e $g + h$ é a soma mod 2, isto é $g + h \equiv 0 \pmod{2}$). Assim, o elemento de holonomias pode ser escrito $\prod_{l \in f} g_l$. O termo que corresponde ao campo de matéria é simplesmente $(-1)^k$, isto é g_l . Por este motivo a ação geral (2.11), agora é escrita

$$(2.12) \quad S_{\text{gauge-Higgs}} = -\beta_G \sum_f \left(\prod_{l \in f} g_l \right) - \beta_H \sum_l g_l,$$

e a função de partição é

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\text{conf.}} e^{-\beta_G \sum_f \left(\prod_{l \in f} g_l \right) - \beta_H \sum_l g_l} \\ &= \sum_{\text{conf.}} \prod_f e^{-\beta_G \prod_{l \in f} g_l} \prod_l e^{-\beta_H g_l}. \end{aligned}$$

Observa-se ainda que a função $M(g) = e^{-\beta g}$ é de classe para $g \in \mathbb{Z}_2$. Logo pode ser expandida em caracteres χ_r

$$M(g) = \sum_r M^r \chi_r(g),$$

onde, neste caso, $r = 0, 1$. Lembrando que em geral $\chi_r(g) = g^r$ para $r, g \in \mathbb{Z}_n$, reescrevemos a última expressão como

$$Z = \sum_{\text{conf.}} \prod_f \left(M_G^0 + M_G^1 \prod_{l \in f} g_l \right) \prod_l (M_H^0 + M_H^1 g_l).$$

2.6 Exemplo.

Suponhamos que queremos encontrar a função de partição para uma rede 2D com a topologia de um toro. Consideremos, por simplicidade a menor rede possível. Esta pode ser representada colando dois triângulos orientados (links e faces) e impondo condições periódicas de fronteira,

FIG. 2.9. Dois triângulos colados, os quais têm associados a cada link um elemento do grupo $g \in G$.

isto é, identificando os links paralelos $a = c$ e $b = d$ onde a união de ambos é dada pelo link e , como é mostrado na figura 2.9. Considerando apenas os dois triângulos a função de partição pode ser escrita como segue

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = \sum_{g \in \{-1, 1\}} (M_G^0 + M_G^1 g_a g_b g_e) (M_G^0 + M_G^1 g_e g_c g_d) \prod_{g_l} (M_H^0 + M_H^1 g_l),$$

onde a soma sobre g é para cada um dos g 's, pois temos condições periódicas e só para g_e em caso de não ter tais condições. É fácil ver que a função de partição acima é bastante difícil de calcular, mesmo para apenas dois triângulos, e simplifica-se se as condições são periódicas. *

Para uma variedade bi-dimensional com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$ a função de partição foi calculada exatamente para $\beta_H = 0$, e pode-se mostrar que esta quantidade só depende do número de triângulos da variedade [Weg71, YT07]. O caso geral para $\mathbb{Z}_2$ é dual ao modelo de Ising com campo externo [Weg71, Kog79, Sav80], e como é bem conhecido a solução exata ainda é esquivada. Em geral, para o grupo $\mathbb{Z}_n$ a solução analítica não é conhecida mesmo para $\beta_H = 0$. No entanto, para $\beta_G = 0$ a solução é encontrada facilmente. Por outro lado, aproximações pelo método de Monte Carlo no caso geral são encontradas em diversos artigos do texto [Reb83], e mostram que para $n \rightarrow \infty$ o comportamento do modelo é muito similar a $U(1)$. Nosso propósito é encontrar valores numéricos da função de partição e dos loops de Wilson para $\beta_H \neq 0$. Por esta razão, consideramos os métodos utilizados em [BF12, FPTS12, YT07], onde estão algumas técnicas para calcular a função de partição de variedades tridimensionais, não o caso geral $\beta_{G,H} \neq 0$, mas nos limites $\beta_{G,H} \rightarrow \pm\infty$ e outros pontos. Nos procuraremos os limites da teoria para o caso bidimensional com campos de gauge e de Higgs. O caso tridimensional é mais complicado e não é estudado aqui.

2.3. Diagramas coloridos e diagramas de Heegaard

O formalismo fornecido até aqui não é mais que o usual. No entanto, a ideia principal deste trabalho é apresentar um formalismo equivalente ao tradicional mas útil para os cálculos da função de partição e loops de Wilson que faremos.

FIG. 2.10. Associação de cores a faces e links numa triangulação.

Consideremos uma variedade $\mathcal{M}$ bidimensional qualquer triangularizada, ver definição 2.1. Escolhamos uma plaqueta da triangulação orientada tanto em face como em link, figura 2.10(a). A cada face será associada uma curva fechada da cor azul e para cada link se associa uma curva fechada da cor vermelha perpendicular ao link, figura 2.10(b). A orientação relativa entre a face e cada link estará determinada no cruzamento das curvas respectivas (isto será explicado com detalhe no capítulo 3). Dessa maneira teremos um

FIG. 2.11. Dois triângulos ligados por meio de um link sem colocar as orientações das faces e dos links. Notamos que a curva vermelha que conecta os dois triângulos ao parecer está em 3D. No entanto foi representado assim para notar que a curva é fechada.

conjunto de curvas para faces e links denotados por b e r . A regra para cada conjunto de curvas azuis ou vermelhas é simples: nenhuma curva pode cruzar-se consigo mesma e duas curvas da mesma cor não se cruzam. Essas duas condições são compatíveis com o fato que cada face e cada links de uma triangulação não se cruza com outra face e outro link qualquer respectivamente. Em caso de querer representar dois triângulos colados (por ser o triângulo homeomorfo a o círculo), usam-se círculos ligados por um link (figura 2.11). Note que cada triângulo tem três curvas vermelhas para denotar suas arestas. E sua vez elas estão conectadas a outras curvas azuis que representam as outras faces vizinhas.

Para o caso tridimensional um diagrama similar ao 2.11 é feito de uma maneira mais complicada. A construção de curvas fechadas azuis e vermelhas que contêm a informação de faces e links da triangulação está baseada nos *diagramas de Heegaard*. As curvas sob os diagramas de Heegaard podem ser manipuladas usando álgebras de Hopf (apêndice A)

FIG. 2.12. Triangulação em 3D.

com o objetivo de calcular funções de partição. Trabalhar com esse tipo de curvas é muito útil pois os diagramas de Heegaard contêm toda a informação da variedade tridimensional estando eles contidos em um espaço bidimensional.

É dada no apêndice B uma construção formal dos diagramas de Heegaard. No entanto, queremos saber como é a construção delas a partir de uma triangulação dada: Imaginemos uma triangulação T como da figura 2.12. Seja T_1 o esqueleto unidimensional de T , o qual contém somente os links e vértices dos tetraedros (figura 2.13(a)).

Consideremos que a cada vértice associamos uma bola sólida e a cada link um cilindro (figura 2.13(b)). É claro que vamos obter um handlebody denotado por H_1 (ver apêndice B). Vamos definir o complemento de T_1 com respeito a T como T_2 (figura 2.13(c)). A cada tetraedro de T_2 associe uma bola sólida em seu interior e cilindros sólidos colados a esta bola de tal forma que cada cilindro intercepta uma das faces do tetraedro (figura 2.13(d)). O handlebody resultante será denotado por H_2 (a figura 2.13(e) mostra um

FIG. 2.13. Construção dos handlebodies H_1 e H_2 a partir de um tetraedro. As figuras 2.13(f) e 2.13(g) mostram a atribuição de curvas vermelhas (azuis) aos links (faces) do tetraedro.

pedaço dele). Em outras palavras H_1 e H_2 são as *vizinhanças tubulares da rede e da rede*

dual, respectivamente [BF12]⁷⁸.

Seja $\mathcal{M}$ a 3-variedade fechada, conexa e orientável com triangulação T . H_1 e H_2 são subvariedades de $\mathcal{M}$, ambas homeomorfas a um handlebody H de gênero g . Como H_1 é homeomorfo a H , existe uma coleção finita $\{D_1, \dots, D_g\}$ de pares de 2-discos disjuntos que cortam H_1 em um conjunto de 3-bolas disjuntas. Para o caso H_1 representamos as fronteiras destes discos por curvas *vermelhas* (figura 2.13(f)). Similarmente, existe uma coleção finita $\{D'_1, \dots, D'_g\}$ de 2-discos disjuntos que cortam H_2 em um conjunto de 3-bolas disjuntas. Para o caso H_2 representamos as fronteiras destes discos por curvas *azuis* (figura 2.13(g)). O conjunto de curvas vermelhas se denotará por $r = \{r_1, \dots, r_g\}$ e o conjunto de curvas azuis por $b = \{b_1, \dots, b_g\}$.

Além disso, já que H_1 e H_2 são homeomorfos a uma mesma superfície, existe um mapa de colagem $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ que irá mapear as curvas vermelhas, da superfície de H_1 , em curvas na superfície de H_2 de forma que podemos representar os dois sistemas de curvas na superfície de um único handlebody. Esse conjunto de curvas é chamado *diagrama de*

FIG. 2.14. Diagramas de Heegaard obtidos da triangulação T .

Heegaard (figura 2.14(a)). O inverso também pode ser feito, uma vez que h é um mapa inversível. Assim, pode-se mapear as curvas azuis, da superfície de H_2 , em curvas na superfície de H_1 usando-se o mapa $h^{-1} : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$, esse conjunto de curvas é chamado *diagrama de Heegaard dual* (figura 2.14(b)). Portanto, podemos representar de forma diagramática os dois sistemas de curvas em único handledody [BF12]. Já que os links e as faces têm orientação as curvas vermelhas e azuis também devem ter. No entanto, não representamos isso na figura 2.14. Note que cada curvas vermelha (azul) intercepta um número finito de curvas azuis (vermelhas). Assim, para calcular funções de partição e

⁷Se $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^m$, são n vetores linearmente independentes, a rede L gerada por eles é definida como $L(b_1, \dots, b_n) = \{\sum x_i b_i | x_i \in \mathbb{Z}\}$. Chamamos $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ como uma base da rede.

⁸Se $L(b_1, \dots, b_n)$ é uma rede. Então a rede dual

$$L^* := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, \ell \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \ell \in L\}$$

é outra vez uma rede em $\mathbb{R}^n$ e a base dual $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ com $\langle b_i^*, b_j \rangle = \delta_{ij}$ é uma base da rede L^* .

loops de Wilson usando essas curvas, devemos levar a consideração dos cruzamentos entre curvas vermelhas e azuis além da orientação das mesmas.

A ideia principal de usar as curvas é deformá-las até que obtenhamos outras curvas mais simples. Por exemplo, os diagramas de Heegaard 2.14(a) e 2.14(b) podem ser deformados continuamente até obtermos os diagramas de Heegaard equivalentes das figuras 2.15(a) e 2.15(b). Por cada um deles ter toda a informação da variedade, a ideia é usar o mais simples de forma que possa se manipular facilmente. Das figuras em 2.15 notamos que o

FIG. 2.15. Diagramas de Heegaard equivalentes aos da figura 2.14, os quais são mais simples. As regiões pintadas de cor verde representam buracos na superfície dos handlebodies

diagrama de Heegaard é mais simples que seu dual. Existe ainda uma maneira mais fácil e elegante de representar esses diagramas. Tal representação consiste em desenharmos as curvas dos sistemas de curvas num plano e não em um handlebody, embora este não seja planar. Damos a este diagrama o nome de *diagrama simplificado de Heegaard* (figuras 2.16(a) e 2.16(b))⁹.

A seguir damos as regras para saber como as curvas são deformadas. Formalmente é dito que dois diagramas coloridos (para o caso bidimensional) ou de Heegaard (para o caso tridimensional) são equivalentes se pode ser obtido um a partir do outro com uma sequência dos seguintes *moves* [Ale01]

TIPO I HOMEOMORFISMO DA SUPERFÍCIE: Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ superfícies fechadas, conexas e orientadas. Se $\mathcal{S}$ é homeomorfa a $\mathcal{S}'$, as curvas azuis (vermelhas) sob $\mathcal{S}$ são homeomorfas às curvas azuis (vermelhas) sob $\mathcal{S}'$. As cores das curvas ficam invariantes.

TIPO II ORIENTAÇÃO CONTRÁRIA: A orientação de curvas azuis (vermelhas) é trocada por seu inverso. O inverso da curva vermelha a_i é a_i^{-1} . De forma análoga b_j^{-1} é inverso da curva azul b_j .

⁹A contrução aqui descrita dos diagramas de Heegaard não é geral, já que foi feita a partir de uma triangulação e existem diagramas que não representam triangulações. Uma elaboração geral é feita no apêndice B.

FIG. 2.16. Diagramas simplificados de Heegaard equivalentes aos da figura 2.14. Sistemas de curvas num plano.

TIPO III TWO POINT MOVE: Se uma curva azul cruza-se duas vezes com uma curva de cor vermelha como na figura 2.17(a), pode-se eliminar o cruzamento das mesmas como mostra-se na figura 2.17(b). A cor de cada curva fica invariante depois de separar as mesmas.

FIG. 2.17. Propriedade *two point move*.

TIPO IV ESTABILIZAÇÃO: Seja $\mathcal{T}_1$ um toro com gênero um e seja $\mathcal{T}_2$ um toro de gênero maior ou igual a um, ambos com seus respectivos diagramas de Heegaard. Se as curvas azuis e vermelhas dos dois toros são disjuntas, pode-se adicionar ou remover o toro $\mathcal{T}_1$.

TIPO V SLIDING: Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas da mesma cor num diagrama de Heegaard sob uma superfície $\mathcal{S}$. Seja $b \in \mathcal{S}$ alguma curva que conecta C_1 e C_2 de tal maneira que esta não cruza nenhuma curva do diagrama como na figura 2.18(a). A curva C_1 é substituída pela curva C'_1 . A nova curva C'_2 é uma isotopia C_2 . A curva C'_1 (resp. C'_2) tem a mesma orientação de C_1 (resp. C_2), figura 2.18(b).

(a) Dois curvas do mesmo cor coladas por uma fita.

(b) Sliding.

FIG. 2.18. 2.18(a). A curva C_1 (resp. C_2) tem m (resp. n) cruzamentos com as curvas do cor diferente. 2.18(b). Depois do sliding a curva final C'_1 (resp. C'_2) tem $m + n$ (resp. n) cruzamentos com as curvas do cor diferente.

Vamos ver a utilidade de deformar os diagramas coloridos ou de Heegaard até uns mais simples no capítulo 3. A conexão dos diagramas e a *invariância topológica* definida em 3 será a chave do desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo a seguir descrevemos como podem ser calculadas funções de partição e loops de Wilson associando pesos sobre as faces e os links da triangulação, ou seja, pesos nas curvas azuis e vermelhas respectivamente.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

TEORIAS TOPOLÓGICAS E QUASE TOPOLÓGICAS

formalismo básico da teoria de gauge na rede foi fornecido no capítulo 2. Lembramos como é definida a função de partição de uma variedade $\mathcal{M}$ e como são definidos os observáveis da teoria, loops de Wilson. Também mostramos a invariância da função de partição com transformações de gauge puras e com campos de matéria. No entanto, no final do capítulo fizemos uma particular associação de curvas fechadas azuis e vermelhas para faces e links respectivamente. Em três dimensões esta escolha foi muito útil pois mostramos que a informação da variedade está contida neste tipo de curvas e é resumida num diagrama bidimensional. Em duas dimensões foi mais claro a relação que se fez pois simplesmente mudamos os polígonos por curvas azuis e os links de cada polígono por curvas vermelhas que cruzavam uma vez no polígono.

Em matemáticas, é bem conhecido que cada variedade conexa, fechada e orientável, pode ser triangularizada de diferentes maneiras. No caso particular de um toro, podem se colar dois triângulos como na figura 3.1(a). No entanto, também poderíamos descrever o

FIG. 3.1. Três formas equivalentes para representar um toro. Note que temos que colar os links a e c e também os links b e d . Todas as faces e links estão devidamente orientados.

mesmo toro colando três ou quatro triângulos (ver figuras 3.1(b) e 3.1(c)). Por outro lado, é de interesse físico definir quantidades invariantes da topologia, tais quantidades são as funções de partição. Numa teoria física que não dependa da topologia, em princípio, a função de partição não deve depender da triangulação da variedade discretizada, pois ela é simplesmente uma ferramenta de cálculo. Porém, não necessariamente é assim. Dito isso, a teoria pode depender do número de triângulos da variedade, do número de links e no

caso tridimensional também do número de tetraedros da triangulação. No entanto, essa dependência será trivial. Neste capítulo, mostramos como se pode construir uma teoria que em princípio não dependa dos detalhes da rede. Por isso, o objetivo deste capítulo é definir o que são *teorias topológicas* e *teorias quase topológicas* além de dar as ferramentas de cálculo de funções de partição e loops de Wilson do capítulo 4.

3.1. Teorias topológicas

Fukuma, Hosono, Kawai, Chung e Shapere fornecem um formalismo para descrever teorias de campo topológicas em duas e três dimensões [FHK94, CFS94] e as ideias básicas são descritas a seguir: Suponhamos uma variedade $\mathcal{M}$ com triangulação $\mathcal{L}$. Seja $\mathcal{L}$ uma rede composta por uma coleção de polígonos orientados com as faces unidas por meio de *articulações* ou *dobradiças*. Vamos *colorir* a rede associando-se a cada uma das faces

FIG. 3.2. Decomposição de uma rede tridimensional em faces e dobradiças.

um elemento x de um conjunto X (similar ao capítulo anterior onde fizemos a associação de um grupo de gauge G com as faces de uma rede usando a holonomia). Feito isso, é estabelecida a regra que determina o peso para cada poliedro como uma função das colorações das faces. A função de partição será a soma destes pesos totais sob todas as triangulações com os respectivos pesos. No caso tridimensional várias faces podem ser coladas por meio de uma *dobradiça*, a qual é uma vizinhança aberta da linha pelas

FIG. 3.3. Representação diagramática de uma face e uma dobradiça.

quais as faces se colam (ver figuras 3.2(a) e 3.2(b)). A teoria é descrita supondo que cada polígono pode se decompor em triângulos (figura 3.2(c)). Por isso, podemos simplesmente especificar quais são os pesos dos triângulos além do peso das dobradiças introduzindo somente a regra de colagem entre triângulos.

Definamos qual será o peso de uma face f qualquer: imagine um polígono como o da figura 3.3(a). A cada aresta do polígono associamos um elemento a_i de um grupo G , finito ou infinito. Associemos a cada polígono um tensor simétrico $M_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$, sendo n o número de arestas do polígono. Escolhemos o tensor M cíclico, ou seja $M_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} = M_{a_2 \dots a_{n-1} a_n a_1} = \dots = M_{a_n a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$. Para cada dobradiça d como da figura 3.3(b) fazemos algo análogo. Associamos a cada uma delas, um tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m}$, sendo m o número de polígonos que estão colados por meio da mesma. O tensor Δ também será cíclico, ou seja $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m} = \Delta^{b_2 \dots b_{m-1} b_m b_1} = \dots = \Delta^{b_m b_1 b_2 \dots b_{m-1}}$.

Poder decompor cada polígono em triângulos é a primeira condição para construir uma *teoria de rede topológica*. No entanto, temos que definir como eles estão colados. O caso bidimensional é o mais simples, damos o exemplo a seguir.

3.1 Exemplo.

Considere um polígono orientado de quatro arestas como o da figura 3.4(a), com tensor M_{abcd} (figura 3.4(d)) associado a ele. Por ter quatro links, pode ser decomposto em dois triângulos colados por meio de uma dobradiça. Cada triângulo terá associado um tensor M com três índices e a dobradiça é representada pelo tensor Δ com dois índices. Por esse motivo o tensor M_{abcd} é escrito como $M_{abx} \Delta^{xy} M_{ycd}$ (figuras 3.4(b) e 3.4(e)). Note que só estamos contraindo os tensores pela regra de colagem entre índices inferiores para M e superiores para Δ . Como dito, os tensores M e Δ são ciclicamente simétricos, no entanto, a orientação relativa face-link deve ser levada em consideração na contração dos tensores. Por essa razão introduzimos o operador S_x^y cuja função é trocar a direção de um link numa dobradiça. Na figura 3.4(c) mudamos a direção de um link, e o tensor associado $M_{abx} \Delta^{xy'} S_{y'}^y M_{ycd}$ é representado por 3.4(f). *

As mesmas regras de colagem são usadas para polígonos tridimensionais lembrando que mais de uma face pode ser colada numa dobradiça. Feito isso, definimos que a função

FIG. 3.4. Forma de colar os polígonos com os respectivos tensores.

de partição¹ da triangulação é $Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \sum \prod M_{xyz} \Delta^{uv} S_t^w$, onde a soma é tomada sob todos os rótulos e o produto sob todos os elementos f , d e suas orientações relativas o . A função de partição é invariante topológica se ela não depende da triangulação. Isso se deve ao fato que a triangulação é uma ferramenta de ajuda da qual o resultado não deveria depender. Por isso de alguma forma temos que conectar duas triangulações diferentes da mesma variedade. Esses requerimentos são satisfeitos pelo conceito de *moves*. Esses *moves* foram descobertos por Pachner no caso geral de variedades n -dimensionais. Eles têm a importante propriedade que, se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são triangulações de uma mesma variedade $\mathcal{M}$, usando um número finito de passos, obtemos a triangulação $\mathcal{T}_2$ partindo de $\mathcal{T}_1$, da mesma maneira posso obter $\mathcal{T}_1$ a partir de $\mathcal{T}_2$ [Rob05, CKS98, Pac78, Pac91]. Os *moves* para

FIG. 3.5. *Moves* de Pachner em variedades bidimensionais.

o caso bidimensional são mostrados nas figuras 3.5(a) e 3.5(b). São chamados *moves* de Pachner (1,3) e (2,2), devido ao número de triângulos que estão relacionados. Para o caso tridimensional, teremos *moves* mais complicados, no entanto, não mostramos eles pois estamos interessados numa teoria bidimensional. Podem ser encontrados os diferentes

¹Essa função foi definida no caso bidimensional, para o caso tridimensional será definida uma expressão similar.

moves tridimensionais em [Pac78] e para quatro dimensões se mostram os *moves* em [CKS98, DH12].

Agora lembremos o formalismo de curvas coloridas fornecido no capítulo anterior: a cada face corresponde uma curva azul e a cada link uma curva vermelha. Assim, notando o número de links e de faces, para o caso bidimensional, os *moves* de Pachner (1,3) e

FIG. 3.6. *Moves* de Pachner como curvas coloridas.

(2,2) estão representados nas figuras 3.6(a) e 3.6(b). Note que nas curvas não estamos representando as orientações de nenhuma delas. Como falamos no capítulo 2, existem os diagramas coloridos, chamados diagramas de Heegaard, para o caso tridimensional. Os diagramas são um pouco mais complicados que os mostrados aqui e eles estão baseados em colar vários diagramas de Heegaard. Essa colação é feita usando a figura 2.16(a) do capítulo 2, a qual corresponde a um polígono de quatro faces e seis links. Bernabe Ferreira [BF12], mostra detalhadamente como ligar vários diagramas de Heegaard, os quais serão equivalentes aos *moves* de Pachner em 3 dimensões.

Como dito antes, em [FHK94, CFS94] e [CKS98] pode-se encontrar o formalismo clássico para construir uma teoria de rede topologicamente invariante. Basicamente, é necessário que se considere que o conjunto de polígonos e de dobradiças que compõem uma variedade sejam ciclicamente simétricos, além de ser válidos os *moves* de Pachner. Essa foi a razão para introduzir os tensores M e Δ além das orientações relativas face-link representadas pelo tensor S . No entanto, com a finalidade de usar os diagramas coloridos para os cálculos desejados da função de partição e loops de Wilson, na seção a seguir, mostramos que de fato as curvas azuis e vermelhas são simétricas, contêm a informação da orientação, além de satisfazer os *moves* de Pachner.

3.2. Formalismo diagramático e diagramas coloridos

Existe uma relação um a um entre uma álgebra associativa e semi-simples e uma teoria topológica na rede [FHK94, CFS94, CKS98]. É mostrado que há uma relação entre a invariância topológica e as álgebras de Hopf. Em [Kup91, Kup97] Kuperberg define os invariantes quando a álgebra de Hopf é *involutória* e *não involutória* respectivamente. Neste trabalho usaremos a álgebra como involutória.

A seguir damos as propriedades básicas de uma álgebra de Hopf. Usamos a linguagem diagramática fornecido por Kuperberg a qual é útil para representar as propriedades

básicas deste tipo de álgebras. Muitas das demonstrações estão no apêndice A ou podem se encontrar em [Kup91, KR99]². Feito isso definiremos diagramaticamente os tensores M, Δ e S .

3.2.1. Resumo diagramático de álgebras de Hopf

A estrutura de uma álgebra de Hopf $\mathcal{A}$ está fornecida pelo produto $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, a unidade $e : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$, o co-produto $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, a co-unidade $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow 1$, e a

FIG. 3.7. Formalismo diagramático.

antípoda $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Eles são representados como na figura 3.7. As setas entrando simbolizam o produto e são lidas no sentido anti-horário e as setas saindo simbolizam

FIG. 3.8. Representação dos tensores m_{ij}^k e Δ_i^{jk} , nas figuras 3.8(a) e 3.8(b) respectivamente.

o co-produto e são lidas no sentido horário. As constantes de estrutura m_{ij}^k e Δ_i^{jk} para álgebra e co-álgebra estão fornecidas pelas expressões

$$(3.1a) \quad m(\phi_i \otimes \phi_j) = m_{ij}^k \phi_k,$$

$$(3.1b) \quad \Delta(\phi_i) = \Delta_i^{jk} \phi_j \otimes \phi_k,$$

representadas nas figuras 3.8(a) e 3.8(b). A relação entre o produto (A.5) é representada na figura 3.9. As propriedades da antípoda diagramaticamente estão representadas pelas

FIG. 3.9. Relação entre produto e co-produto.

figuras 3.10(a) a 3.10(d).

²A manipulação dos diagramas é explicado no apêndice A.

FIG. 3.10. Representação diagramática das propriedades da antípoda.

Como dito com o formalismo diagramático podemos mostrar propriedades muito interessantes da álgebra de Hopf. Para uma álgebra de Hopf involutória $S^2 = 1$ como a usada aqui, vamos numerar algumas das propriedades importantes. Elas são provadas no apêndice A

1. Contração co-integral, integral $\Delta_i^{ij} m_{jk}^k$,

FIG. 3.11. A contração entre os tensores Δ_i^{ij} e m_{jk}^k fornece a dimensão da álgebra $\dim(\mathcal{A})$.

2. $m_{ij}^i = m_{ij}^j$,

FIG. 3.12. Os tensores m_{ij}^i e m_{ij}^j são iguais.

3. $\Delta_i^{ij} = \Delta_j^{ij}$,

FIG. 3.13. Os tensores Δ_i^{ij} e Δ_j^{ij} são iguais.

4. Identidade que relaciona os tensores M, Δ e S

FIG. 3.14. Relação entre os tensores M, Δ e S .

FIG. 3.15. Representação diagramática dos tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ and $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_m}$.

3.2.2. Tensores associados a curvas

Por meio da associatividade e co-associatividade os tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_m}$ podem ser definidos diagramaticamente como nos diagramas 3.15(a) e 3.15(b), sendo definidos o traço, m_{ij}^j e co-traço Δ_i^{ij} como nos diagramas 3.15(c) e 3.15(d).

3.2 Lema.

Os tensores $M_{a_1 \dots a_n}$ e $\Delta^{b_1 \dots b_m}$ representados por 3.15(a) e 3.15(b), respectivamente, são ciclicamente simétricos. ◼

Demonstração. A ideia é mostrar que os tensores 3.15(a) e 3.15(b) podem ser representados pelos diagramas 3.16(a) e 3.16(b), respectivamente. Para o tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$, a prova está

FIG. 3.16. Outra representação diagramática dos tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_m}$.

baseada na associatividade da álgebra. Somente note a seqüência dos diagramas 3.17(a) e 3.17(b). Vemos que a última seta à esquerda é a mesma que a primeira na figura 3.17(b). Juntando essas duas setas, temos a prova.

Para o tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_k}$, usamos um argumento semelhante com a co-associatividade da álgebra. End

O lema anterior garante que os tensores M e Δ são cíclicos tal como desejamos que eles sejam para descrever polígonos e dobradiças conforme na seção precedente [Ale01]. Com a notação tensorial definida, forneceremos um peso relacionado às faces (curvas azuis) e links (curvas vermelhas) da triangulação num diagrama colorido ou de Heegaard.

FIG. 3.17. Prova diagramática da invariância do tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ por permutações cíclicas de seus índices.

Naturalmente podemos associar o tensor M para as curvas azuis e o Δ para as curvas vermelhas. Por cada face e link estarem orientados, as curvas azuis e vermelhas devem estar também orientadas. O tensor $M_{a_1 \dots a_n}$ associado a cada curva azul representará os n cruzamentos com curvas vermelhas. Analogamente é definido um tensor $\Delta^{b_1 \dots b_m}$ associado a cada curva vermelha, sendo m o número de cruzamentos com curvas azuis. Note que por M e Δ serem cíclicos, não importa a ordem desses cruzamentos. Igualmente, como é bem conhecido, a orientação das faces e links não deve mudar o valor da função de partição. Definamos agora como é considerada a orientação relativa curva azul (face) curva vermelha (link): seja P o ponto de cruzamento entre curvas³ e sejam $\vec{t}_a$ e $\vec{t}_v$ os vetores tangentes às curvas azuis e vermelhas em P . Se $\hat{n}$ é o vetor normal da superfície ∂H , temos dois possíveis casos sob o produto vetorial $\vec{t}_a \times \vec{t}_v$ e as contrações de tensores entre M e Δ

1. $\hat{n}$ e $\vec{t}_a \times \vec{t}_v$ são paralelos segundo a regra da mão direita, figura 3.18(a).
2. $\hat{n}$ e $\vec{t}_a \times \vec{t}_v$ são antiparalelos segundo a regra da mão direita, figura 3.18(c).

FIG. 3.18. 3.18(a), 3.18(b). Cruzamentos de curvas com sentido paralelo e contração de tensores. 3.18(c), 3.18(d). Cruzamentos de curvas com sentido antiparalelo e contração de tensores. Colocamos a antípoda.

Note que introduzimos o tensor S em 3.18(d) para representar a orientação relativa à curva azul vermelha. No caso em que as curvas se cruzam duas vezes como na figura 3.19(a), usamos os diagramas 3.18(b) e 3.18(d) para escrever o tensor 3.19(b)⁴.

³Lembre que duas curvas da mesma cor não se cruzam.

⁴O número de setas entrando a M (saindo de Δ) é o número de curvas vermelhas (azuis) que cruzam cada curva azul (vermelha).

FIG. 3.19. Cruzamentos e contração de tensores.

Até aqui vimos como é possível descrever uma teoria de rede topológica. Porém, ainda não definimos como contribuem numericamente os tensores M e Δ . Em [FHK94], Fukuma, Hosono, e Kawai mostram que toda a informação física relevante está relacionada com o centro da álgebra considerada. Seja $\rho(\phi_i)^k_j$ a representação regular de um elemento ϕ_i da álgebra, onde será representada sem ambiguidade somente pelo mesmo ϕ_i . O tensor M estará relacionado com o centro da álgebra mediante o elemento z e o tensor Δ com o co-centro da álgebra (dual) denotado por ζ da seguinte maneira

$$(3.2) \quad M_{a_1 a_2 \dots a_n} = \text{tr}(z \phi_{a_1} \phi_{a_2} \dots \phi_{a_n}),$$

$$(3.3) \quad \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k} = \text{cotr}(\zeta \phi^{b_1} \phi^{b_2} \dots \phi^{b_k}),$$

sendo ϕ_i e ϕ^j os elementos da base de $\mathcal{A}$ e seu dual $\mathcal{A}^*$ respectivamente (ver apêndice A). Os tensores generalizados M e Δ fornecidos pelos diagramas 3.15(a) e 3.15(b) são

(a) Definição geral de M .

(b) Definição geral de Δ .

FIG. 3.20. Os tensores M e Δ são redefinidos usando o centro e co-centro da álgebra.

representados agora pela figura 3.20. Por ser z (ζ) um elemento do centro (co-centro), M (Δ) será ciclicamente simétrico como se espera ao construir uma LTFT.

3.3. Função de partição, loops de Wilson e prova da invariância topológica

Estamos prontos para definir a função de partição da variedade $\mathcal{M}$. Devido aos polígonos serem decompostos em triângulos colados por dobradiças e cada dobradiça pode ter colado um número arbitrário de polígonos, a função de partição para a variedade $\mathcal{M}$ e triangulação $\mathcal{T}$ é naturalmente definida por

$$(3.4) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o M_{abc}(f) \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k}(l) S_x^y(o),$$

onde colocamos f e l para destacar que o produtório é sobre todas as faces e os links. O produtório sobre “ o ” significa um produtório sobre todos os cruzamentos que possuem orientação diferente do vetor normal da superfície $\partial\mathcal{M}$. Nós escrevemos a função de partição da maneira que Kuperberg fez no caso tridimensional [Kup91] e é basicamente a mesma de Chung, Fukuma e Shapere [CFS94]. A diferença com relação ao caso bidimensional é como foi descrito antes as dobradiças podem ser pensadas como links, os quais somente podem colar duas faces o polígonos⁵. Ou seja, o tensor $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_k}$ em (3.4) terá somente dois índices, isto é, $\Delta^{b_1 b_2}$. Porém, é bem sabido que as quantidades físicas relevantes dependerão da função de partição. No entanto, esta, para uma variedade $\mathcal{M}$, escrita do jeito anterior pode ou não depender da triangulação da variedade. Resumimos isto em dois casos:

1. INVARIANTE TOPOLÓGICO: a função de partição de cada triangulação é igual para quaisquer duas triangulações $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ da variedade $\mathcal{M}$, ou seja, $Z(\mathcal{T}_1) = Z(\mathcal{T}_2)$. Isto pode ser feito escolhendo (ou encontrando) os pesos z e ζ sobre as curvas tal que essa condição seja satisfeita.
2. INVARIANTE QUASE TOPOLÓGICO: a função de partição dependerá somente da diferença das faces, dos links e dos tetraedros das triangulações $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ da variedade $\mathcal{M}$. Como no caso do invariante topológico, escolhemos (ou encontramos) os pesos z e ζ associado às curvas tal que essa condição seja satisfeita.

Segundo o anterior os loops de Wilson neste caso serão definidos da seguinte forma

$$(3.5) \quad \langle W(\ell) \rangle = \frac{1}{Z(\mathcal{M}, \mathcal{T})} \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o W(\ell) M_{abc}(f) \Delta^{b_1 b_2 \dots b_m}(l) S_x^y(o),$$

onde tomamos a função de partição não nula.

Como definido, a invariância ou quase invariância da função de partição será satisfeita tomando os elementos do centro (co-centro) da álgebra de grupo. Pode ser visto a relação com as curvas azuis e vermelhas simplesmente associando um “ponto” a cada curva (figura 3.21). Por estar z relacionado las curvas azuis, esse fornecerá a informação dos campos de gauge residindo nas faces. Por outro lado ζ estará relacionado com os campos de matéria segundo a seção 2.2, onde fizemos a escolha de gauge unitário, $v_{i(e)} = \rho(h_{i(e)})^{-1}$, tal que o campo de matéria nos vértices desaparece e o campo de matéria encontra-se nos links.

Como, previsto, toda a informação contida da triangulação está fornecida nos tensores M, Δ e S os quais foram construídos a partir de uma álgebra de Hopf. No entanto, ainda falta mostrar que podemos obter uma triangulação a partir de outra num número finito de passos. Para triangulações como dito anteriormente, Pachner mostrou que somente precisa-se de alguns *moves* para esta finalidade. Nos falta então mostrar que usando a linguagem de

FIG. 3.21. Curvas com pesos.

⁵Somente duas faces podem compartilhar os mesmos links.

curvas coloridas podemos obter uma triangulação $\mathcal{T}_2$ com diagrama $\mathcal{D}_2$ a partir de uma triangulação $\mathcal{T}_1$ com diagrama $\mathcal{D}_1$ num número finito de *moves*. Ao provar isso, estamos mostrando a invariância da função de partição.

No capítulo anterior, vimos as condições para dois diagramas coloridos ou de Heegaard ser equivalentes (ver seção 2.3 e as condições sobre *moves* 2.3). Nosso objetivo é mostrar a invariância ou quase invariância (a menos de fatores escalares), da função de partição usando essas condições [Kup91, Ale01, BF12]. Vamos supor que cada curva azul (vermelha) tem um peso associado z (ζ). No entanto, por simplicidade não representaremos esse peso como um ponto e sim simplesmente como mais uma curva vermelha (azul) nos diagramas e também nas demonstrações dos lemas a seguir.

3.3 Lema (Homeomorfismo da superfície).

Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ superfícies fechadas, conexas e orientadas. Se $\mathcal{S}$ é homeomorfa a $\mathcal{S}'$, as curvas azuis (vermelhas) sobre $\mathcal{S}$ são homeomorfas às curvas azuis (vermelhas) sobre $\mathcal{S}'$. As cores das curvas ficam iguais. ◼

Isso equivale a mostrar que duas superfícies homeomorfas tem o mesmo diagrama colorido ou de Heegaard⁶. Claramente a função de partição (3.4) é invariante com respeito a essa condição.

3.4 Lema (Orientação contrária).

A orientação de curvas azuis (vermelhas) é trocada por seu inverso. O inverso da curva vermelha a_i é a_i^{-1} . De forma análoga b_j^{-1} é inverso da curva azul b_j . ◼

Demonstração. A prova está baseada na ciclicidade dos tensores M e Δ . Considere uma curva azul com três cruzamentos de curvas vermelhas, como na figura 3.22(a). Para n cruzamentos a prova é trivial seguindo o mesmo procedimento. A ideia é mostrar que o tensor associado a 3.22(b) é $M_{S(a_3)S(a_2)S(a_1)}$ (figura 3.22(d)) e esse é igual a $M_{a_1a_2a_3}$. A figura 3.22(a) terá o tensor associado $M_{a_1a_2a_3}$, figura 3.22(c). O tensor $M_{a_1a_2a_3}$ na figura 3.22(c) é igual à sequência de passos, desde a figura 3.23(a) até a figura 3.24(d). Passo a passo, usamos os fatos da álgebra ser associativa e a antípoda ser um anti-homomorfismo do produto. Finalmente no apêndice A mostramos que a orientação do produto fica invariante, assim os tensores $M_{a_1a_2a_3}$ e $M_{S(a_3)S(a_2)S(a_1)}$ são iguais. End

⁶A prova deste fato pode ser encontrada em [Joh] para o caso de diagramas de Heegaard.

FIG. 3.22. Curvas se cruzando com uma primeira e segunda orientação e seus tensores $M_{a_1 a_2 a_3}$ e $M_{S(a_3) S(a_2) S(a_1)}$ iguais.

FIG. 3.23. Prova de ser os tensores $M_{a_1 a_2 a_3}$ e $M_{S(a_3) S(a_2) S(a_1)}$ iguais.

FIG. 3.24. Prova de serem os tensores $M_{a_1 a_2 a_3}$ e $M_{S(a_3) S(a_2) S(a_1)}$ iguais.

Nota. Por estar tomando o peso z sobre a curva azul como uma curva vermelha pareceria como se, não o estivéssemos levado in conta. Neste caso precisamos que a antípoda sobre o peso z , ou seja $S(z)$ seja igual a z . Isto assegura também a invariância com relação a mudança de orientação. No capítulo 4 calculamos como é o peso associado ao modelo de gauge-Higgs estudado aqui e ele cumprirá essa condição.

3.5 Lema (Two point move).

Se uma curva azul se cruza duas vezes com uma curva de cor vermelha, como na figura 3.25(a), pode-se eliminar o cruzamento das mesmas como mostra-se na figura 3.25(b). A cor de cada curva fica invariante depois de separá-las mesmas⁷. $\blacksquare$

FIG. 3.25. Propriedade two point move.

Demonstração. O diagrama associado à figura 3.25(a) está representado pelo diagrama

FIG. 3.26. Prova do two point move.

3.26(a). Usando a propriedade da antípoda $m \circ (S \otimes 1) \circ \Delta = e \circ \epsilon$, diagrama 3.10(a), obtemos os diagramas 3.26(c) e 3.26(d), o qual é o tensor associado à figura 3.25(b).

End

3.6 Lema (Estabilização).

Seja $\mathcal{T}_1$ um toro com gênero um e seja $\mathcal{T}_2$ um toro de gênero maior ou igual a um, ambos

⁷Falar que a cor de cada curva fica invariante, é falar que o peso sobre cada curva fica inalterado.

com suas respectivas curvas azuis e vermelhas. Se as curvas azuis e vermelhas dos dois toros são disjuntas, pode se adicionar ou remover o toro $\mathcal{T}_1$. $\blacksquare$

Demonstração. Consideremos a figura 3.27(a), que terá o tensor representado em 3.27(c).

FIG. 3.27. Prova da estabilização, trivial.

Desejamos unir o toro com curvas azuis e vermelhas ao toro de gênero ≥ 1 . Escrevemos os tensores associados antes e depois da união, sendo eles iguais. End

Um resultado mais interessante é aquele onde é usada a propriedade da co-integral (resp. integral).

3.7 Lema (Propriedade da co-integral (integral)).

Seja uma curva azul (vermelha) com peso a co-integral (integral) (figura 3.28(a)), cruzada por um número qualquer de curvas vermelhas (azuis). A co-integral (integral) pode ser substituída por uma curva vermelha (azul), como na figura 3.28(b). Podemos separar a curva azul (vermelha) dos outros cruzamentos, como na figura 3.28(c). $\blacksquare$

FIG. 3.28. Propriedade da co-integral.

Demonstração da propriedade da co-integral. Pela definição da co-integral A.6, tensor 3.29(a), temos que ela pode ser relacionada a uma curva vermelha, assim obtemos a figura 3.28(b).

Seja $n + 1$ o número de cruzamentos da curva azul com as curvas vermelhas. O tensor associado a 3.28(b) será 3.29(b).

FIG. 3.29. Prova da propriedade da co-integral.

Por definição de M temos o tensor 3.29(c). Usando a propriedade da co-integral A.6, temos os tensores 3.29(d) a 3.29(e). E observamos que o tensor 3.29(e) é o associado à figura 3.28(c). Para provar a propriedade da integral usamos argumentos similares.

End

3.8 Corolário.

Para a co-integral λ , a configuração diagramática representada na figura 3.30(a) pode ser representada como na figura 3.30(b).

FIG. 3.30. Curva azul com peso λ que cruza somente uma vermelha.

Demonstração. Simplesmente aplicar a propriedade da co-integral sobre a curva azul.

End

3.9 Lema (Sliding).

Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas da mesma cor num diagrama de Heegaard sobre uma superfície $\mathcal{S}$. Seja $b \in \mathcal{S}$ a conexão entre C_1 e C_2 como na figura 3.31(a). A curva C_1 é substituída pela curva C'_1 . A nova curva C'_2 é uma isotopia de C_2 . A curva C'_1 (C'_2) tem a mesma orientação de C_1 (C_2), figura 3.31(b). $\blacksquare$

(a) Dois curvas da mesma cor coladas por uma fita.

(b) Sliding.

FIG. 3.31. 3.31(a). A curva C_1 (C_2) tem m (n) cruzamentos com as curvas da cor diferente. 3.31(b). Depois do sliding a curva final C'_1 (C'_2) tem $m+n$ (n) cruzamentos com as curvas do cor diferente.

Demonstração. A prova será feita para o caso básico no qual o peso da curva da direita é trivial, ou seja $z = e$. Já na seção 3.4 mostraremos que existem outros pesos não triviais com os quais pode-se também aplicar o *move sliding*. Deve-se seguir os diagramas 3.32(a)

(a) Forma dos tensores (b) Definição de M e da unidade e . (c) Propriedade da integral das curvas.

(d) Definição de M de novo.

(e) Uso da relação entre produto e co-produto.

FIG. 3.32. Primeira parte da demonstração da propriedade do sliding.

a 3.32(e), onde se usam as definições do tensor M e da unidade e , além da relação entre produto e co-produto. Agora, das figuras 3.33(a) a 3.33(d) é usada a definição de Δ reiteradamente, também a relação entre produto e co-produto n vezes, sendo n o número de cruzamentos da curva original da direita. $\boxed{\text{End}}$

FIG. 3.33. Segunda parte da demonstração da propriedade do sliding.

3.3.1. Moves de Pachner como curvas coloridas

Agora usaremos os *moves* para curvas coloridas mostrados anteriormente. Em particular o *two point move* e o *move sliding*. Sobre cada curva azul e vermelha não representaremos os elementos do centro da álgebra e do co-centro da álgebra. No entanto, cada vez que fizemos o *move sliding* vamos supor que o elemento do centro, co-centro associado permite fazer tal. Não colocaremos também as orientações das curvas mas veremos que não precisam ser colocadas. Chegaremos que os *moves* de Pachner (1,3) e (2,2) definidos em 2D são satisfeitos e assim a prova da invariância topológica usando curvas coloridas estaria realizada totalmente.

Move (1,3)

Prova. Por definição o *move* de Pachner (1,3) é o inverso do *move* (3,1). Assim, vamos partir da triangulação que possui três triângulos e seis links 3.34(a), denotada por (3,6) e com o diagrama colorido da figura 3.34(b). Chegaremos à outra a qual tem um triângulo e três links e será denotada por (1,3), figura 3.34(c) com diagrama colorido 3.34(d). Em primeiro lugar usamos o *move sliding*, lema 3.9, sobre as curvas azuis superiores. Isso é representado em 3.35(a). Fazemos novamente o *move sliding*, mas agora sobre a curva azul inferior do gráfico. Representamos isto na figura 3.35(b). Usamos *two point move* e obtemos a figura 3.35(c). Fazemos *move sliding* sobre as curvas vermelhas de baixo e obtemos 3.35(d). Usamos *two point move* e a curva vermelha fica na azul. Isso se mostra na figura 3.35(e). Fazemos o sliding entre as duas curvas vermelhas que cruzam a mesma azul. Podemos tirar uma delas, figura 3.35(f). Fazemos agora sliding da curva vermelha que cruza duas azuis 3.36(a). Usando *two point move*, chegamos à figura 3.36(b). Agora, cada curva vermelha que cruza uma azul pode se mover com liberdade sobre essa curva azul. Temos então, a figura 3.36(c). Fazemos sliding da curva vermelha que cruza dois azuis, como na figura 3.36(d). Usamos *two point move* para obter o diagrama 3.36(e). Notamos que no último diagrama há uma curva azul que cruza somente uma vermelha. Ela pode se extrair do diagrama pois não cruza nenhuma outra curva. Fazendo o mesmo para a outra curva vermelha teremos a figura 3.36(f). Notamos que o diagrama final é o correspondente a um triângulo com

FIG. 3.34. Representação dos triângulos 3.34(a) e 3.34(c) em curvas coloridas.

FIG. 3.35. Primeira parte da demonstração *move* de Pachner (1,3) em curvas coloridas.

três links, além de dois curvas da cor azul cruzadas por sua vez com uma vermelha e duas da cor vermelho. End

As curvas adicionais dão conta das faces e links sobressalente da figura (3,6) com respeito

FIG. 3.36. Segunda parte da demonstração *move* de Pachner (1,3) em curvas coloridas.

a figura (1,3). No capítulo seguinte encontraremos o peso de cada uma dessas curvas adicionais. Mostraremos que no caso de gauge-Higgs de nosso interesses essas curvas adicionais terão valor numérico 1.

Move (2,2)

FIG. 3.37. Representação da colagem de dois triângulos 3.37(a) e 3.37(c) em curvas coloridas 3.37(b) e 3.37(d).

Prova. A prova está baseada novamente no *move sliding*. Vamos chegar ao diagrama 3.37(c) a partir do diagrama 3.37(a). Primeiro, fazemos o *move sliding* sobre a curva azul da esquerda, ver gráfico 3.38(a). Depois, lembramos que a curva vermelha que cruza somente uma azul pode se mover livremente por ela, como na figura 3.38(b). Fazemos o *move sliding* entre curvas vermelhas e obtemos a figura 3.38(c). Fazendo *two point move* encontramos a figura 3.38(d). Fazendo *sliding* de novo, extraímos a curva azul que cruza somente uma vermelha. Depois disso, extraímos essas curvas e obtemos a figura 3.38(e). Os mesmos passos se fazem para a outra triangulação e chegamos à igualdade entre gráficos.

End

FIG. 3.38. Prova diagramática do *move* de Pachner (2,2) em curvas coloridas.

3.4. Álgebra do Grupo

Até aqui demos o formalismo mais geral possível de uma teoria topológica. Simplesmente escolhemos uma álgebra de Hopf, $(A, m, \Delta, S, e, \epsilon)$ e mostramos que os *moves* de Pachner deixam invariante a teoria, a menos de fatores multiplicativos. No entanto, o objetivo desta dissertação é trabalhar com grupos discretos, em particular $\mathbb{Z}_n$ e ao final, com $\mathbb{Z}_2$. Por ser $\mathbb{Z}_n$ discreto usaremos a *álgebra de grupo* definida a seguir [JL01, pag. 53].

3.10 Definição (Álgebra de grupo).

Seja G um grupo finito cujos elementos são $g_1, \dots, g_n$, e seja F um corpo ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). Um espaço vetorial sobre F com $\phi_{g_1}, \dots, \phi_{g_n}$ como uma base, é chamado espaço vetorial FG . Os elementos de FG são todos os elementos da forma $\sum_{g \in G} \lambda^g \phi_g = \lambda^g \phi_g$. As regras de soma e multiplicação por um escalar em FG estão dadas de forma natural por: se

$$u = \lambda^i \phi_i \text{ e } v = \mu^i \phi_i$$

são elementos de FG , e $\lambda \in F$, então

$$u + v = (\lambda^i + \mu^i) \phi_i \text{ e } \lambda u = (\lambda \lambda^i) \phi_i.$$

Devido a G ser um grupo finito de ordem n , $\dim FG = n$. ▀

O produto entre dois elementos ϕ_g, ϕ_h da base está fornecido por $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$, onde

o produto gh é o mesmo do grupo G . Por consistência as constantes de estrutura do produto

$$\phi_g \phi_h = m_{gh}^k \phi_k,$$

estão dadas por $m_{gh}^k = \delta(gh, k)$. O elemento identidade é escrito sem ambiguidade como $e = \phi_e$, onde $e \in G$ é a identidade do grupo G . Para que a álgebra de grupo seja uma álgebra de Hopf as seguintes relações devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned} (\phi_g \phi_h) \phi_k &= \phi_g (\phi_h \phi_k), \\ \Delta(\phi_g) &= \phi_g \otimes \phi_g, \\ \Delta(\phi_g \phi_h) &= \Delta(\phi_g) \Delta(\phi_h), \\ \epsilon(\phi_g \phi_h) &= \epsilon(\phi_g) \epsilon(\phi_h) \\ S(\phi_g) &= \phi_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

As constantes de estrutura do co-produto e antípoda são $\Delta_g^{hk} = \delta(g, h) \delta(g, k)$, $S_g^h = \delta(g, h^{-1})$. O diagrama que representa a propriedade $\Delta(\phi_g) = \phi_g \otimes \phi_g$ é 3.39. O elemento

$$\phi_g \rightarrow \Delta \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \equiv \begin{array}{l} \phi_g \rightarrow \\ \phi_g \rightarrow \end{array}$$

FIG. 3.39. Elemento homogêneo aplicado ao co-produto.

ϕ_g da base será chamado elemento homogêneo da álgebra de grupo.

No caso da álgebra de grupo os elementos do centro na álgebra de grupo FG , estarão fornecidos por

$$Z(FG) = \{z \in FG : zr = rz \text{ para todo } r \in FG\},$$

com $z = t^g \phi_g$ para alguns coeficientes $t^g \in F, \forall g \in G$. É fácil verificar que se todos os t^g são iguais a um $t \in F$ então o elemento $t \sum_{g \in G} \phi_g$ pertence ao $Z(FG)$. No caso particular de $t = 1$ estamos falando do elemento co-integral da álgebra [BF12].

3.11 Proposição.

Seja ϕ_g um elemento homogêneo da álgebra de grupo, definimos o diagrama 3.40(a) por simplicidade. Então, Δ pode ser modificado como na figura 3.40(b). ♦

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \rightarrow m \rightarrow \equiv \rightarrow \phi_g \rightarrow \\ \nearrow \phi_g \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \phi_g \rightarrow \Delta \begin{array}{l} \nearrow \phi_g^{-1} \\ \searrow \phi_g^{-1} \end{array} \equiv \rightarrow \Delta \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \end{array} \\ \text{(a) Definição } \rightarrow \phi_g \rightarrow. & \text{(b) } \Delta \text{ modificado.} \end{array}$$

FIG. 3.40. Proposição.

Demonstração. Consideramos a seqüência de figuras 3.41(a) a 3.41(e).

FIG. 3.41. Prova da proposição.

Provamos o desejado.

End

3.4.1. Grupos abelianos

Vamos mostrar algumas propriedades úteis para grupos abelianos discretos na álgebra de grupo. Por ser $\mathbb{Z}_n$ de nosso interesse obteremos uma “aplicação” direta no capítulo 4.

Sabemos que os tensores M e Δ podem ser expressados em termos do centro z e co-centro ζ de uma álgebra. Como dito anteriormente isso é representado nas curvas azuis e vermelhas por pontos. No caso do grupo G ser comutativo, na álgebra de grupo a álgebra de Hopf é comutativa e co-comutativa. Sabendo que o *move sliding* implica ser a teoria topológica, desejamos saber o que acontece com os pesos das curvas depois desse *move*. O lema 3.9 afirma que é possível fazer o sliding para curvas da mesma cor quando o peso de uma delas é trivial. No entanto, o lema a seguir é válido quando os grupos são abelianos e o sliding é aplicado sobre uma curva azul com peso um, ϕ_g , elemento homogêneo.

3.12 Lema (Sliding sobre elementos homogêneos).

Seja G um grupo abeliano com $\phi_{g \in G}$ a base da álgebra de grupo. Sejam C_1 e C_2 duas curvas azuis fechadas com pesos z e ϕ_g respectivamente, figura 3.42(a). A curva C_1 é substituída pela curva C'_1 com peso $z\phi_g$. A nova curva C'_2 é uma isotopia de C_2 . A curva C'_1 (C'_2) tem a mesma orientação de C_1 (C_2), figura 3.42(b). ■

FIG. 3.42. **3.42(a).** A curva azul C_1 (C_2) tem m (n) cruzamentos com as curvas da cor vermelho. **3.42(b).** Depois do sliding a curva final C'_1 (C'_2) tem $m + n$ (n) cruzamentos com as curvas da cor vermelho.

Demonstração. A prova é similar a do sliding para o caso trivial da curva azul da direita em 3.9. No entanto, neste caso os pesos foram representados nas figuras como pontos.

FIG. 3.43. Primeira parte da demonstração da propriedade do sliding.

Outra diferença é que para a demonstração do lema 3.9 o centro era considerado como uma curva vermelha, porém, o elemento do centro é representado explicitamente. Associamos a cada tensor M o elemento do centro como é mostrado na figura 3.43(a). Seguimos os passos até a figura 3.43(d).

FIG. 3.44. Segunda parte da demonstração da propriedade do sliding.

Finalmente usamos a proposição 3.40 em 3.44(a) até chegar a 3.44(d).

End

Mais uma propriedade que pode se mostrar é o seguinte lema

3.13 Lema.

Considere a configuração diagramática 3.45(a). Ela é equivalente à figura 3.45(b). Onde

FIG. 3.45. Prova da propriedade da co-integral.

ζ é um elemento do co-centro da álgebra, que pode ser escrito como $\zeta = \sum_h \zeta_h \phi^h$. Assim, o elemento $\phi_{g^{-1}} \rightarrow \zeta$ é $\zeta_{g^{-1}}$. ◼

Demonstração. A prova está baseada em escrever o tensor relacionado a cada curva e usar a proposição 3.11. End

3.5. Invariância da Função de Partição por Transformações de Base

A função de partição é invariante por mudança de base como mostramos a seguir. Consideremos o vetor $T = \underbrace{\mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}}_{p \text{ vezes}} \otimes \underbrace{\mathcal{V}^* \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}^*}_{q \text{ vezes}}$, onde $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial e $\mathcal{V}^*$ o dual de $\mathcal{V}$. Em notação de soma, como dito no apêndice A seção A.2, pode-se escrever T como

$$(3.6) \quad T = T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} v_{a_1} \otimes \cdots \otimes v_{a_p} \otimes v^{b_1} \otimes \cdots \otimes v^{b_q},$$

sendo v_i e v^j elementos da base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$ respectivamente. Por outro lado, sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases do espaço vetorial $\mathcal{V}$, a matriz A (com base $\mathcal{B}$) está relacionada à matriz $\bar{A}$ (com base $\mathcal{B}'$) pela expressão

$$\bar{A} = D^{-1}AD,$$

para alguma matriz D invertível. É fácil mostrar que o tensor $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ com base $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}^*$ para seu dual) definido em (3.6) está relacionado com o tensor $\bar{T}_{b'_1 \dots b'_q}^{a'_1 \dots a'_p}$ com base $\mathcal{B}'$ ($\mathcal{B}'^*$ para seu dual) pela expressão

$$\bar{T}_{b'_1 \dots b'_q}^{a'_1 \dots a'_p} = (D^{-1})_{b'_1}^{b_1} \cdots (D^{-1})_{b'_q}^{b_q} T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} D_{a'_1}^{a_1} \cdots D_{a'_p}^{a_p},$$

diagramaticamente essa expressão é representada pela figura 3.46. Para a função de partição ser invariante por transformações de base todos os índices dos tensores devem

FIG. 3.46. Relação tensores $\bar{T}$ e T .

estar somados, isto significa que não há índices livres. Nosso interesse é saber qual é a nova forma dos tensores m_{ij}^k , Δ_i^{jk} e S_i^j . Para isso, observe a figura 3.47, onde se mostra como será a representação diagramática de $\bar{m}_{ij}^k$, $\bar{\Delta}_i^{jk}$ e $\bar{S}_i^j$ com os m_{ij}^k , Δ_i^{jk} e S_i^j originais. Nota-se que em geral a mudança de base não deixa invariante nenhum tensor. Então, mesmo sendo invariante a função de partição o modelo físico muda. Esse fato tem por nome *dualidade* entre modelos. Por exemplo, o modelo dual do modelo de gauge com campo de Higgs é o modelo de Ising com campo externo [Weg71, Kog79, Sav80, YT07].

(a) $\overline{m}_{ij}^k = (D^{-1})_i^{i'} (D^{-1})_j^{j'} m_{i'j'}^{k'} D_{k'}^k.$

(b) $\overline{\Delta}_i^{jk} = (D^{-1})_i^{i'} \Delta_{i'}^{j'k'} D_{j'}^j D_{k'}^k.$

(c) $\overline{S}_i^j = (D^{-1})_i^{i'} S_{i'}^{j'} D_{j'}^j.$

FIG. 3.47. Relação dos tensores m, Δ e S em duas bases diferentes.

Resumimos esse capítulo como a construção de uma teoria topologicamente invariante com respeito a certas condições. Consideramos uma álgebra de Hopf, $(\mathcal{A}, m, \Delta, S, e, \epsilon)$ e mostramos que a associação de cores às triangulações deixa invariante a função de partição mediante os *moves* de Pachner. Também demos as ferramentas para o capítulo seguinte as quais serão úteis para calcular valores numéricos nos *limites topológicos*.

MODELO DE GAUGE-HIGGS E GENERALIZAÇÃO

té aqui lembramos no capítulo 2 qual é o formalismo clássico quando se define uma teoria de gauge com campos de matéria. Nele usamos o gauge unitário o qual faz com que as variáveis não estejam nos vértices, e sim nos links da variedade discretizada $\mathcal{M}$. Também, no capítulo 3 fizemos um resumo de como uma teoria topológica na rede pode ser contraída. Ali, definimos os tensores M e Δ que fornecem a informação das faces e links de uma variedade e o tensor S que fornece a orientação relativa face-link nos cruzamentos deles. Além disso, mostramos a invariância da função de partição a través da linguagem das curvas orientadas azuis e vermelhas que estão associadas às faces e links respectivamente. Porém, mesmo definindo a função de partição e os loops de Wilson não calculamos explicitamente nenhum deles.

Neste capítulo calcularemos funções de partição e loops de Wilson de variedades bidimensionais para o modelo de gauge-Higgs. Faremos isso lembrando que a informação da triangulação da variedade $\mathcal{M}$ está contida nos pesos nas curvas azuis e vermelhas. Como já dissemos, esses pesos estão relacionados ao centro e co-centro de uma álgebra de Hopf. Mostraremos que os pesos das curvas vermelhas associados ao co-centro, podem ser relacionados um a um com o centro. De maneira que somente conhecendo a forma do centro do grupo, teremos a informação do modelo de gauge-Higgs. A continuação, definiremos o que é um limite topológico, e veremos que nesse limite os modelos serão topológicos ou quase topológicos. Encontramos o valor esperado dos observáveis, loops de Wilson e finalmente mostramos que podem ser calculadas funções de partição as quais não correspondem a modelos físicos.

4.1. Expansões em caracteres e centro do grupo

No capítulo 2 vimos que a ação para o campo de gauge-Higgs, é fornecida para o grupo $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ por

$$(4.1) \quad S_{\text{gauge-Higgs}} = -\beta_G \sum_f \cos \left(\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^{N_{ef}} k_i \right) - \beta_H \sum_l \cos \left(\frac{2k_l \pi}{n} \right),$$

com cada $k_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Como dito anteriormente, o termo de campo spin-gauge é devido à holonomia sob todas as faces. Então, a ação de gauge pode ser escrita como

$$(4.2) \quad S_{\text{gauge}} = -\frac{\beta_G}{2} \sum_f \left(\prod_{i=1}^{N_{ef}} g_i + \prod_{i=1}^{N_{ef}} g_i^{-1} \right),$$

com $g_i \in e^{\frac{2k_i\pi}{n}\mathbf{i}}$. A parte da função de partição associada com as faces é fornecida pela expressão

$$(4.3) \quad W_{\text{gauge}}(f) = \prod_f e^{\frac{\beta_G}{2}(G_f + G_f^{-1})}, \text{ sendo } G_f = \prod_{i=1}^{N_{ef}} g_i = \exp \left(\frac{2\pi}{n} \mathbf{i} \sum_{i=1}^{N_{ef}} k_i \right) = \omega^{k_f},$$

onde $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}\mathbf{i}}$ e $k_f \in \mathbb{Z}_n$ ¹. Assim, seja $M(G_f) = e^{\frac{\beta_G}{2}(G_f + G_f^{-1})} = e^{\frac{\beta_G}{2}(\omega^{k_f} + \omega^{-k_f})} = M(k_f)$ por depender explicitamente de k_f . Como $\mathbb{Z}_n$ é um grupo abeliano, para todo $h = \omega^{l_i}, l_i \in \mathbb{Z}_n$, $M(hG_fh^{-1}) = M(G_f)$. Então, $M(G_f)$ é uma função de classe e pode ser expandida em termos de caracteres da seguinte maneira

$$M(G_f) = M(k_f) = \sum_{r=0}^{n-1} M^r \chi_r(G_f) = \sum_{r=0}^{n-1} M^r \chi_r(\omega^{k_f}).$$

Os coeficientes M^r são fornecidos por

$$M^r = \frac{1}{n} \sum_{G_f} M(G_f) \overline{\chi_r(G_f)} = \frac{1}{n} \sum_{k_f=0}^{n-1} M(k_f) \overline{\chi_r(\omega^{k_f})}.$$

Como dito no capítulo 2, seção 2.2, os caracteres de $\mathbb{Z}_n$ são $\chi_r(\omega^k) = \omega^{kr}$, com $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}\mathbf{i}}$. A expansão em caracteres é

$$(4.4) \quad M(G_f) = M(k_f) = \sum_{r=0}^{n-1} M^r \omega^{k_f r} \text{ com } M^r = \frac{1}{n} \sum_{k_f=0}^{n-1} M(k_f) \omega^{-k_f r}.$$

Pode-se notar que há uma relação de cada uma das arestas a_i ao redor da face com os elementos $k_i \in \mathbb{Z}_n$. E notamos por consistência que $M(G_f)$ é o tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_{N_{ef}}}$ definido em (3.2), onde para cada aresta a_i associamos algum elemento g de um grupo G .

Lembremos que a função de partição no formalismo de diagramas de Heegaard depende dos pesos sob as faces e os links (3.4). No entanto, o peso devido às faces, relacionado com as curvas azuis está associado ao centro de grupo de gauge G , nosso caso $\mathbb{Z}_n$. Por ser um grupo abeliano, todo elemento da álgebra do grupo pertencerá ao centro. Também, como dito, o tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_{N_{ef}}} = \text{tr}(z \phi_{a_1} \phi_{a_2} \dots \phi_{a_{N_{ef}}})$, sendo a_i as arestas ao redor da

¹Note-se que devido a que cada $k_i \in \mathbb{Z}_n$ a soma $\sum_{i=1}^{N_{ef}} k_i$ pertencerá também a $\mathbb{Z}_n$

face, terá que coincidir com $M(G_f)$. Para o tensor $M_{a_1 a_2 \dots a_{N_{ef}}}$ associamos a cada link a_i um elemento do grupo $k_i = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Na álgebra de grupo temos

$$M_{a_1 a_2 \dots a_{N_{ef}}} |_{a_i \in \partial f} = \text{tr}(z \phi_{k_1} \phi_{k_2} \dots \phi_{k_{N_{ef}}}) = \text{tr}(z \phi_{k_1 + k_2 + \dots + k_{N_{ef}}}) = \text{tr}(z \phi_{k_f}),$$

com $k_f = \sum_{i=1}^{N_{ef}} k_i \pmod n$. Como o elemento z é do centro, pode ser expandido em termos dos elementos da base ϕ_g , $z = \sum_{h=0}^{n-1} z^h \phi_h$, por esse motivo

$$M_{a_1 a_2 \dots a_{N_{ef}}} = \sum_{h=0}^{n-1} z^h \text{tr}(\phi_{h+k_f}).$$

Em termos das constantes de estrutura m_{ab}^c o traço é $\text{tr}(\phi_a) = \sum_b m_{ab}^b = \sum_b \delta(ab, b) = n\delta(a, e)$. Logo encontramos

$$M_{a_1 a_2 \dots a_{N_{ef}}} = \sum_{h,b=0}^{n-1} z^h m_{(h+k_f)b}^b = \sum_{h,b=0}^{n-1} z^h \delta(h+k_f, 0) = n z^{-k_f}.$$

Essa expressão fornece a relação entre os coeficientes do centro do grupo $\mathbb{Z}_n$ com o $M(G_f)$ ². Já que $M_{a_1 a_2 \dots a_{N_{ef}}} = M(G_f)$, os coeficientes z^h devem satisfazer

$$(4.5) \quad e^{\beta \cos\left(\frac{2k_f \pi}{n}\right)} = n z^{-k_f}.$$

Fazendo $k_f \rightarrow n - k_f$ obtemos que $z^{k_f} = z^{-k_f}$. Ou seja o centro será fornecido do seguinte modo

$$(4.6) \quad z = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} e^{\beta \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right)} \phi_h.$$

Pela expressão (4.4) os caracteres são dados em termos dos coeficientes que expandem o centro do grupo por

$$(4.7) \quad M^r = \sum_{k_f=0}^{n-1} z^{k_f} \omega^{-k_f r} = \frac{1}{n} \sum_{k_f=0}^{n-1} e^{\beta \cos\left(\frac{2k_f \pi}{n}\right)} \omega^{-k_f r}.$$

Nota-se, que esse centro z , associado às faces, terá uma relação similar no caso dos links, pela expressão (4.1). No entanto, temos que ter cuidado com isso, pois a informação dos links está associada ao co-centro da álgebra e não ao centro da mesma. Na próxima seção, mostraremos como obter as informações físicas da variedade $\mathcal{M}$ triangularizada usando

²O elemento $-k_f$ pode parecer ambíguo por ser $\mathbb{Z}_n$ composto somente de números positivos. Para $k \in \mathbb{Z}_n$ o inverso $-k$ tal que $k + (-k) \equiv 0$, é definido como $-k \equiv n - k$.

somente os elementos z do centro do grupo G .

4.2. Função de partição com campos de matéria

Com o propósito de estudar os campos de gauge acoplados com matéria, temos que procurar a relação que existe entre os dois campos. Já no capítulo 3 falamos que a informação contida nas curvas vermelhas, as quais estão associadas aos links, depende dos elementos ζ do co-centro da álgebra $\mathcal{A}$. No entanto, a seguir mostraremos que existe uma relação um a um entre os elementos do co-centro ζ e do centro z da álgebra de tal maneira que conhecendo a informação de algum deles obtemos a informação do outro.

4.1 Lema.

Considere a álgebra de grupo $\mathcal{A}$. Seja uma curva vermelha com peso $\zeta = \zeta_h \phi^h$ como na figura 4.1(a). O peso ζ pode ser substituído por uma curva azul com peso $z = z^h \phi_h$ como

FIG. 4.1. Equivalência entre curvas vermelhas.

mostra-se na figura 4.1(b). A relação entre os coeficientes z^h de z e os coeficientes ζ_h de ζ é dada por $z^h = \frac{1}{\dim(\mathcal{A})} \zeta_{h^{-1}}$. $\blacksquare$

Antes da prova do lema 4.1 vejamos qual é o significado diagramático dele: imagine uma curva vermelha v com peso ζ e n cruzamentos com curvas azuis $a_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$, com pesos z_i como na figura 4.1(a). Originalmente, v tinha n cruzamentos com curvas azuis e cada curva azul a_i por sua vez tinha vários cruzamentos com curvas vermelhas. O que o lema afirma é que se pode adicionar uma curva azul com peso z , mas ela só vai ter um cruzamento e por esse motivo a função de partição de Kuperberg para uma variedade $\mathcal{M}$ com triangulação $\mathcal{T}$ (3.4)

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o M_{abc}(f) \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k}(l) S_x^y(o),$$

será

$$(4.8) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o M_{abc}(f) N_{b_{k+1}}(f') \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1}}(l) S_x^y(o).$$

Note que as diferenças entre as duas funções de partição são a face extra f' e o Δ associado as dobradiças. $M(f')$ terá um elemento associado ao centro z' o qual em geral é diferente ao z relacionado com as curvas azuis originais. $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1}}$ implica em adicionar mais um polígono a cada dobradiça.

Demonstração lema 4.1. O tensor relacionado à curva vermelha é fornecido pelo diagrama

FIG. 4.2. Prova diagramática do lema 4.1.

4.2(a). Usamos a relação 3.14 (figura 4.2(b)) para a seta que chega em ζ . Escrevemos os tensores explicitamente como diagramas. Algebricamente

$$z^h = \frac{1}{\dim(\mathcal{A})} \sum_{g,k} \Delta^{h,g} S_g^k \zeta_k$$

na álgebra de grupo $\Delta^{h,g} = \delta(h, g)$ e $S_g^k = \delta(g, k^{-1})$, logo

$$\begin{aligned} z^h &= \frac{1}{\dim(\mathcal{A})} \sum_{g,k} \delta(h, g) \delta(g, k^{-1}) \zeta_k \\ &= \frac{1}{\dim(\mathcal{A})} \zeta_{h^{-1}}, \end{aligned}$$

o resultado desejado. End

Em 3 dimensões o que o lema afirma é que equivale adicionar mais uma face a cada dobradiça como dito anteriormente. No entanto, no caso 2-dimensional por ter cada link originalmente duas faces coladas a ele (figura 4.3(a)), quando se adiciona mais uma face, teríamos um modelo 3-dimensional. A nova face será perpendicular ao plano, como vemos na figura 4.3(b). Note que as cores das faces perpendiculares são diferentes das originais.

(a) Rede bidimensional. Links com peso colando dois polígonos.

(b) Rede tridimensional. Links sem peso colando três polígonos.

FIG. 4.3. Equivalência entre uma rede bidimensional com peso nos links e uma tridimensional sem peso nos links.

Isto ocorre pois elas tem um peso associado diferente (elemento do centro). As faces originais dão conta dos campos de gauge e os novos polígonos dão conta dos campos de Higgs.

4.3. Função de partição para uma rede bidimensional

Vamos definir a função de partição para uma rede bidimensional constituída somente por triângulos (três links por triângulo), figura 4.4(a). Como dito, os campos de gauge estão

(a) Rede bidimensional. Links com peso colando dois polígonos.

(b) Rede tridimensional. Links sem peso colando três polígonos.

(c) Rede bidimensional. Links com peso colando dois polígonos.

(d) Rede bidimensional. Links com peso colando dois polígonos.

FIG. 4.4. Equivalência entre uma rede bidimensional com peso nos links e uma tridimensional sem peso nos links.

relacionados com as faces e os campos de matéria com os links da triangulação. Por sua vez as faces e links estão relacionados com os elementos z do centro e ζ do co-centro respectivamente (como pode-se ver na figura 4.4(a) e o diagrama tensorial relacionado é representado na figura 4.4(c)). Por outro lado, para o grupo $G = \mathbb{Z}_n$ encontramos que o

elemento z do centro da álgebra de grupo é fornecido por

$$z = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} e^{\beta \cos(\frac{2h\pi}{n})} \phi_h.$$

Essa expressão dá toda a informação relacionada com as faces da triangulação. No entanto, o lema 4.1 afirma que para a álgebra de grupo a informação contida nos links também é fornecida pelos elementos do centro do grupo, figura 4.4(b). Para fazer a distinção entre os elementos do centro relacionados com faces (campos de gauge) e com os links (campo de Higgs) chamamos z_G os elementos do centro associados às curvas azuis (faces) e z_H os elementos do centro associados às curvas azuis que cruzam somente uma curva vermelha (link), figura 4.4(b) (diagrama tensorial 4.4(d)). Para uma variedade $\mathcal{M}$ sem fronteira, com triangulação $\mathcal{T}$ (por exemplo o toro definido na seção 2.2, figura 2.9), nota-se que como cada link tem três faces coladas a função de partição de Kuperberg (4.8) neste caso será

$$(4.9) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o M_{abc}(f) N_{b_3}(f') \Delta^{b_1 b_2 b_3}(l) S_x^y(o)$$

e os loops de Wilson serão

$$(4.10) \quad \langle W(\ell) \rangle = \frac{1}{Z(\mathcal{M}, \mathcal{T})} \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o W(\ell) M_{abc}(f) N_{b_3}(f') \Delta^{b_1 b_2 b_3}(l) S_x^y(o).$$

Conforme a seção 3.5, a função de partição é invariante sob transformações de base. Em termos de tensores, os tensores 4.4(d) do modelo 4.4(b) passarão a ser os tensores

FIG. 4.5. Equivalência entre tensores de uma rede bidimensional com peso nos links e uma tridimensional sem peso nos links.

representados na figura 4.5, com $DE = ED = I_{n \times n}$ ³. O tensor $\bar{M}$ em termos do M original é

$$\bar{M}_{xyz} = E_x^a E_y^b E_z^c M_{abc},$$

³ $I_{n \times n}$ denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

para a matriz inversível E^4 . Queremos encontrar qual é a forma da matriz E tal que o novo $\overline{M}$ seja trivial, isto é, proporcional a $\delta(x, y)\delta(x, z)\delta(y, z) \equiv \delta(x, y, z)$. Usamos a expansão de caracteres de M . Temos

$$(4.11) \quad \overline{M}_{xyz} = \sum_r \sum_{a,b,c} M^r E_x^a E_y^b E_z^c \chi_r(abc).$$

Como dito antes no caso de $\mathbb{Z}_n$ os caracteres são $\chi_r(\omega^k) = \omega^{kr}$ com $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$. Isso equivale à expressão $\chi_r(abc)$ ser $\chi_r(\omega^k)$, com $k = \sum_{i=1}^3 k_i$ e $a, b, c = \omega^{k_1, k_2, k_3}$. Temos então que

$$\chi_r(abc) = \chi_r(\omega^k) = \omega^{kr} = \omega^{k_1 r} \omega^{k_2 r} \omega^{k_3 r} = \chi_r(a) \chi_r(b) \chi_r(c).$$

reorganizando a expressão (4.11) temos

$$\overline{M}_{xyz} = \sum_{r,a,b,c} M^r E_x^a \chi_r(a) E_y^b \chi_r(b) E_z^c \chi_r(c).$$

Agora faremos uso do seguinte teorema provado em [JL01, página 161]

4.2 Teorema.

Sejam $\chi_1, \dots, \chi_k$ os caracteres irredutíveis de um grupo finito G . Sejam $g_1, \dots, g_k$ as classes conjugadas representativas de G . As seguintes relações são válidas para qualquer $r, s \in \{1, \dots, k\}$.

1. Relações de ortogonalidade entre linhas:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\chi_r(g_i) \overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta(r, s).$$

2. Relações de ortogonalidade entre colunas:

$$\sum_{i=1}^k \chi_i(g_r) \overline{\chi_i(g_s)} = \delta(r, s) |C_G(g_r)|.$$

Sendo $C_G(x)$ o centralizador de x em G , isto é, os elementos de $g \in G$ que comutam com x . ◼

Assumindo a matriz E como $E_x^a = \mathcal{N} \overline{\chi_{R(x)}(a)}$, com $\mathcal{N}$ o fator de normalização e $R(x)$ a representação de x ⁵. Com isso, a expressão (4.11) finalmente é

$$\overline{M}_{xyz} = (\mathcal{N})^3 \sum_{r,a,b,c} M^r \left(\overline{\chi_{R(x)}(a)} \chi_r(a) \right) \left(\overline{\chi_{R(y)}(b)} \chi_r(b) \right) \left(\overline{\chi_{R(z)}(c)} \chi_r(c) \right).$$

⁴Note-se que E é a matriz inversa da matriz D definida na seção 3.5.

⁵Como dito $G = \mathbb{Z}_n$, x é um elemento da forma $\omega^{R(x)}$, com $R(x) \in \mathbb{Z}_n$, isso é para assegurar as relações de ortogonalidade do teorema 4.2.

Por $\mathbb{Z}_n$ ser abeliano a ordem do centralizador $|C_G(x)|$ será n . Assim usamos a relação de ortogonalidade entre filas do teorema 4.2 da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\overline{M}_{xyz} &= (\mathcal{N})^3 n^3 \sum_{r,a,b,c} M^r \left(\frac{\overline{\chi_{R(x)}(a)} \chi_r(a)}{n} \right) \left(\frac{\overline{\chi_{R(y)}(b)} \chi_r(b)}{n} \right) \left(\frac{\overline{\chi_{R(z)}(c)} \chi_r(c)}{n} \right) \\ &= (\mathcal{N})^3 n^3 \sum_r M^r \delta(R(x), r) \delta(R(y), r) \delta(R(z), r) \\ &= (\mathcal{N})^3 n^3 M^{R(x)} \delta(R(x), R(y), R(z)).\end{aligned}$$

Por $R(x)$ ter uma relação um a um com x e pela escolha do novo M não depender explicitamente de n , tomamos $\mathcal{N} = \frac{1}{n}$, assim

$$(4.12) \quad \overline{M}_{xyz} = M^x \delta(x, y, z).$$

Conforme dito, para o novo N temos

$$\begin{aligned}\overline{N}_x &= E_x^a N_a \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r,a} N^r \overline{\chi_{R(x)}(a)} \chi_r(a) \\ &= N^{R(x)},\end{aligned}$$

então podemos fazer $\overline{N}_x = N^x$. Por outro lado o novo Δ será

$$(4.13) \quad \overline{\Delta}^{xyz} = D_a^x D_b^y D_c^z \Delta^{abc},$$

com $D = E^{-1}$. Note que, pela segunda relação de ortogonalidade, $D_a^x = \chi_{R(x)}(a)$. Uma vez que $\Delta^{abc} = \delta(a, b, c)$, encontramos

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}^{xyz} &= \sum_{a,b,c} \chi_{R(x)}(a) \chi_{R(y)}(b) \chi_{R(z)}(c) \Delta^{abc} \\ &= \sum_{a,b,c} \chi_{R(x)}(a) \chi_{R(y)}(b) \chi_{R(z)}(c) \delta(a, b, c) \\ &= \sum_a \chi_{R(x)}(a) \chi_{R(y)}(a) \chi_{R(z)}(a),\end{aligned}$$

e devido ao fato de que $a = \omega^k$ e $\chi_r(\omega^k) = \omega^{kr}$, teremos:

$$\begin{aligned}\chi_{R(x)}(a) \chi_{R(y)}(a) \chi_{R(z)}(a) &= \omega^{kR(x)} \omega^{kR(y)} \omega^{kR(z)} \\ &= \omega^{k(R(x)+R(y)+R(z))} \\ &= \chi_{R(x)+R(y)+R(z)}(a).\end{aligned}$$

Com isso e com $\chi_0(a) = 1$ o novo tensor Δ , da expressão (4.13) fica

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}^{xyz} &= \sum_a \chi_{R(x)}(a) \chi_{R(y)}(a) \chi_{R(z)}(a) \overline{\chi_0(a)} \\ &= \sum_a \chi_{R(x)+R(y)+R(z)}(a) \overline{\chi_0(a)} \\ &= n\delta(R(x) + R(y) + R(z), 0).\end{aligned}$$

Por $R(x)$ ter uma relação um a um com x , obtemos finalmente

$$(4.14) \quad \overline{\Delta}^{xyz} = n\delta(xyz, 1).$$

Note que os tensores M e Δ originais e $\overline{M}$ e $\overline{\Delta}$ estão contraídos, por isso a antípoda não mudará, isto é, $\overline{S}_x^y = S_x^y$. A função de partição agora fica

$$\begin{aligned}(4.15) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) &= \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o \overline{M}_{abc}(f) \overline{N}_{b_3}(f') \overline{\Delta}^{b_1 b_2 b_3}(1) S_x^y(o) \\ &= \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o M^{a(f)} \delta(a, b, c) N^{b_3(f')} (n\delta(b_1 b_2 b_3, 1)) S_x^y(o) \\ &= n^{N_1} \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_o M^{a(f)} N^{(b_1 b_2)^{-1}(f')} S_x^y(o),\end{aligned}$$

onde estamos fazendo a distinção das faces f e f' e a soma é sob todas as possíveis configurações, isto é a soma sob todas os possíveis valores de a, b_1, b_2, x e y . Em geral, para $\mathbb{Z}_n$ o modelo de gauge-Higgs foi estudado em vários artigos, ver [Cre80, CO83]. No entanto, o problema ainda não conseguiu ser resolvido exatamente. Estudos com o de método Monte Carlo indicam que no limite $N \rightarrow \infty$, $\mathbb{Z}_n$ haverá simetria $U(1)$, isto é, neste limite os dois grupos terão diagramas de fase que serão muito similares [FS79, Cre80, CC82]. Note que no caso de não existirem campos de matéria, ou seja, $\beta_H = 0$ a expressão (4.6) que fornece o centro do grupo em termos do β_H dá que todos os coeficientes que o expandem são $z^h = \frac{1}{n}$. Colocando isso na expressão (4.7) que dá os coeficientes da expansão de caracteres em termos dos coeficientes z^h temos

$$N^r = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k_f r}.$$

Se $r = 0$, $N^0 = 1$. Para $r \neq 0$, usamos a série geométrica para obter

$$N^r = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k_f r} = \frac{\omega^{-nr} - 1}{\omega^{-r} - 1} = 0,$$

por que $\omega^{nr} = e^{2\pi r i} = 1$. Segue que para campos de gauge puros

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = n^{N_1} \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_o M^{a(f)} S_x^y(o).$$

O modelo continua sendo difícil de resolver pois temos que considerar todos os cruzamentos possíveis.

4.3 Exemplo ($\mathbb{Z}_2$).

No caso particular de $\mathbb{Z}_2$, os elementos do grupo são fornecidos por $a = \omega^k$, com $k = 0, 1$ e $\omega = e^{\frac{2\pi}{2}i} = -1$. Neste caso, o inverso de um elemento do grupo é ele próprio, pois $a^2 = 1$ e $k + k \equiv 0 \pmod{2}$. Portanto, a função de partição não dependerá da orientação relativa face-link. Assim, as expressões da função de partição de Kuperberg (4.9) e de caracteres (4.15) serão dadas respectivamente por

$$(4.16a) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o M_{abc}(f) N_{b_3}(f') \Delta^{b_1 b_2 b_3}(1),$$

$$(4.16b) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = 2^{N_1} \sum_{\text{conf}} \prod_f M^{a(f)} N^{b_1 b_2}(f').$$

Para uma teoria pura de gauge, temos

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) &= 2^{N_1} \sum_{\text{conf}} \prod_f M^{a(f)} \\ &= 2^{N_1} ((M^0)^{N_f} + (M^1)^{N_f}), \end{aligned}$$

onde, segundo a expressão (4.7) temos

$$M^r = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 e^{\beta_G \cos(k\pi)} (-1)^{kr} = \begin{cases} \cosh(\beta_G), & \text{se } r = 0 \\ \sinh(\beta_G), & \text{se } r = 1, \end{cases}$$

assim

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = 2^{N_1} (\cosh(\beta_G)^{N_f} + \sinh(\beta_G)^{N_f}),$$

resultado que coincide com [Weg71, YT07].

✱

4.4. Cálculo da função de partição nos limites topológicos

Até aqui mostramos o formalismo matemático necessário para encontrar funções de partição de variedades. Nosso objetivo é calcular funções de partição o mais geral possíveis usando a representação diagramática fornecida até aqui. Vamos lembrar que para o grupo $\mathbb{Z}_n$ com a álgebra de grupo mostramos varias propriedades úteis tal como os lemas 3.12, 3.13, além de cada uma dos *moves* gerais 2.3 definidos no capítulo 2 sendo provados como lemas (ver lemas 3.3 a 3.9) no capítulo 3.

Note primeiro que na expressão que dá o centro (para o campo de gauge z_G e para o campo de matéria z_H), em termos dos elementos do grupo $\mathbb{Z}_n$,

$$z_{G,H} = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} e^{\beta_{G,H} \cos(\frac{2h\pi}{n})} \phi_h.$$

FIG. 4.6. Modelo da rede bidimensional.

FIG. 4.7. Modelo de gauge puro caso bidimensional.

temos que se $\beta_{G,H} \rightarrow 0$, o elemento do centro irá ser $z_{G,H} = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \phi_h$, isto é, o elemento co-integral dividido n . Se tomamos então para o campo de Higgs esse limite, a figura 4.6 irá ser modificada pela figura 4.7(a). Sendo λ o elemento co-integral da álgebra $\mathcal{A}$. Usando a propriedade da co-integral, lema 3.7, obtemos a figura 4.7(b). No entanto, no apêndice A mostra-se que as curva azul e vermelha separadas do diagrama tem valor numérico igual a dimensão da álgebra. Assim obtemos o modelo de gauge puro como

FIG. 4.8. Modelo de Higgs puro caso bidimensional.

esperado [Kog79, YT07], figura 4.7(c). Por outro lado, no caso de ser $\beta_G \rightarrow 0$, teremos que 4.6 será modificada pela figura 4.8(a). Usando de novo a propriedade da co-integral teremos o diagrama 4.8(b), onde N_f e N_l são o número de faces e links respectivamente. Mas sabemos que uma curva vermelha com uma azul tem valor numérico igual a dimensão da álgebra $\mathcal{A}$, por isso o fator em 4.8(b) dependente do número de faces é um. Para o termo que depende só dos links vemos que os tensores estarão fornecidos pela figura 4.9(a).

Lembre-se que $\phi_g \rightarrow \epsilon : \epsilon(\phi_g) = 1$ para todo $g \in G$. Por ser ϵ uma operação linear, o valor

FIG. 4.9. 4.9(a). Representação diagramática dos tensores de uma curva azul com peso z_H e uma curva vermelha. 4.9(b). Tensores triviais.

numérico da parte esquerda da figura 4.9(b) em termos dos coeficientes do centro é

$$\epsilon(z_H) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} e^{\beta_H \cos(\frac{2h\pi}{n})}.$$

Assim o valor numérico da função de partição para uma variedade $\mathcal{M}$ com triangulação $\mathcal{T}$ no caso Higgs puro é

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \left(\sum_{h=0}^{n-1} e^{\beta_H \cos(\frac{2h\pi}{n})} \right)^{N_1},$$

resultado que coincide com Salinas [Sal10, página 91] no caso de $\mathbb{Z}_2$. Obtemos que a função de partição depende explicitamente do número de links da triangulação. Neste caso, dizemos que o modelo é quase-topológico como definiu-se na expressão (3.4).

Neste trabalho queremos observar como é o comportamento da função de partição e loops de Wilson nos limites $T_{G,H} = 0^\pm, T_{G,H} = \pm\infty$, pois como veremos as funções de partição nestos casos podem ser calculadas usando os *moves* sobre curvas coloridas o que significa que a função de partição é invariante ou quase invariante topológico. Desta forma, esses limites são chamados *limites topológicos* da teoria, que equivalem a procurar o que acontece em $\beta_{G,H} = \pm\infty$ ou $\beta_{G,H} = 0^\pm$. Note que o centro para $\mathbb{Z}_n$ no limite $\beta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{n} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{n-1} e^{\beta \cos(\frac{2h\pi}{n})} \phi_h \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{\beta \cos(\frac{2h\pi}{n})} \phi_h \right). \end{aligned}$$

As raízes $\omega^h, h = 0, \dots, n-1$ da unidade estão sob o círculo unitário. Assim, ao tomar $\cos(\frac{2h\pi}{n})$ teremos P valores positivos, N valores negativos e Z' valores nulos (zeros), com $P + N + Z' = n$. Portanto o centro estará fornecido por

$$z = \frac{1}{n} P \gamma \sum_h \phi_h,$$

onde $\gamma \rightarrow \infty$ e a soma é sobre os h tais que $\cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) > 0$.

4.4.1. Limites topológicos; caso particular

FIG. 4.10. Modelo bi-dimensional gauge-Higgs para $\mathbb{Z}_2$.

Para $\mathbb{Z}_2$ o modelo bidimensional é representado pela figura 4.10. Para este caso não é necessário orientar as curvas, pois a orientação relativa face-link não é necessária. Note que o centro do grupo é fornecido para os campos de gauge e Higgs como

$$\begin{aligned} z_{G,H} &= \frac{1}{2} \sum_{h=0}^1 e^{\beta_{G,H} \cos(h\pi)} \phi_h \\ &= \frac{1}{2} (e^{\beta_{G,H}} \phi_0 + e^{-\beta_{G,H}} \phi_1) \\ &= \sum_{g=0}^1 \tilde{\gamma}_{G,H}^g \phi_g, \end{aligned}$$

onde os coeficientes $\tilde{\gamma}_{G,H}^g$ são números reais positivos. Escrevendo o termo ϕ_g da base como

$$(0, \dots, \underbrace{1}_{g+1\text{-ésima posição}}, \dots, 0)$$

temos $z_{G,H} = (\tilde{\gamma}_{G,H}^0, \tilde{\gamma}_{G,H}^1)$; sendo $\tilde{\gamma}_{G,H}^0$ e $\tilde{\gamma}_{G,H}^1$ como dito anteriormente os coeficientes que expandem a base $\{\phi_0, \phi_1\}$.

Vamos calcular as funções de partição para os diferentes z . Por exemplo, os casos em que a temperatura vai para 0 pela esquerda e direita. Isto é, quando $\beta_{G,H} = \pm\infty$. Os centros serão dados por

$$z_{G,H} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_{G,H}^0 \phi_0, & \text{se } T_{G,H} = 0^+, \beta_{G,H} \rightarrow \infty \\ \tilde{\gamma}_{G,H}^1 \phi_1, & \text{se } T_{G,H} = 0^-, \beta_{G,H} \rightarrow -\infty \end{cases} = \begin{cases} (\tilde{\gamma}_{G,H}^0, 0), & \text{se } T_{G,H} = 0^+, \beta_{G,H} \rightarrow \infty \\ (0, \tilde{\gamma}_{G,H}^1), & \text{se } T_{G,H} = 0^-, \beta_{G,H} \rightarrow -\infty \end{cases}.$$

Ou seja, os centros serão uma expressão da forma $z_{G,H} = \tilde{\gamma}_{G,H}^g \phi_g$, onde não está sendo usado a notação de soma de Einstein. Vamos considerar vários casos para os centros:

1. $z_H = \tilde{\gamma}_H^h \phi_h$: o modelo 4.10 estará representado pela figura 4.11(a). Por ser o centro um elemento homogêneo multiplicado por uma constante usamos o lema 3.13 do capítulo 3 para obter a figura 4.11(b). Note que o peso de cada curva associada a um triângulo tem um fator ϕ_{-3h} multiplicado por ter três links colados. Por estar trabalhando com o grupo

FIG. 4.11. Modelo bidimensional para $z_H = \tilde{\gamma}_H^h \phi_h$.

$\mathbb{Z}_2$, o peso é $z_G \phi_{-3h} = z_G \phi_h$. Assim o termo associado a cada curva azul é

$$\text{tr}(z_G \phi_h) = \sum_g \tilde{\gamma}_G^g \text{tr}(\phi_{g+h}) = 2\tilde{\gamma}_G^g \delta(g+h, 0) = 2\tilde{\gamma}_G^g \delta(g, h).$$

Por outro lado, o fator dependente do número de links é $2\tilde{\gamma}_H^h$. Com isso a função de partição estará fornecida por

$$(4.17) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = (2\tilde{\gamma}_G^g \delta(g, h))^{N_f} (2\tilde{\gamma}_H^h)^{N_l}.$$

Chamando $\gamma_{G,H}^{g,h} = 2\tilde{\gamma}_{G,H}^{g,h}$ temos finalmente

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = (\gamma_G^g)^{N_f} (\gamma_H^h)^{N_l} \delta(g, h).$$

A função de partição é quase topológica.

2. $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$ e $z_H = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$: o modelo 4.10 é um modelo de gauge puro, ele está representado pela figura 4.7(c) para $\mathbb{Z}_n$ e por 4.12(a) para $\mathbb{Z}_2$. Notamos que pelos pesos serem elementos homogêneos, usamos o *move sliding*, lema 3.12, obtendo a figura 4.12(b). Notamos que pode ser usada a propriedade da co-integral, lema 3.7, para extrair a curva

FIG. 4.12. Modelo de gauge puro com elementos homogêneos como pesos.

azul ligada à curva vermelha dentro da curva fechada maior. Agora a co-integral contribui com um fator de 2 e a constante $\tilde{\gamma}_G^g$ ainda está presente. Assim, cada face contribui com um fator de $2\tilde{\gamma}_G^g$. Pode-se fazer o *move sliding* mas vamos observar que por ter N_f faces, a função de partição neste caso é

$$(4.18) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = (\gamma_G^g)^{N_f},$$

onde $\gamma_G^g = 2\tilde{\gamma}_G^g$. De novo, a função de partição é quase topológica.

3. $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$ e $z_H = \tilde{\gamma}_H^0 \phi_0 + \tilde{\gamma}_H^1 \phi_1$: para este caso, com os métodos usados neste trabalho não foi possível encontrar uma expressão analítica. No entanto, em [YTSM09] é mostrado que se o *move* de Pachner (2,2) é satisfeito a função de partição é calculável de uma maneira exata. Nosso propósito é mostrar então o *move* de Pachner (2,2). Para isso lembramos o

FIG. 4.13. *Move* de Pachner (2,2).

move de Pachner nas figuras 4.13(a) e 4.13(b). Notamos que em cada caso o link que cola os dois triângulos está na posição horizontal e vertical respectivamente. A ideia básica para mostrar a equivalência entre os dois diagramas é fazer sliding das duas curvas com peso ϕ_g como na figura 4.12(b). Depois disso fazemos sliding da curva azul como peso $z_H = \tilde{\gamma}_H^0 \phi_0 + \tilde{\gamma}_H^1 \phi_1$ sob a curva azul da direita e notamos que poderíamos extrair a mesma. Fazemos o mesmo para em caso dos dois triângulos compartilhar o link na direção vertical e obteríamos que os diagramas são equivalentes.

Até aqui foi calculada a função de partição para vários elementos do centro dados da forma $z = (\gamma^0, \gamma^1)$, com os γ^g parâmetros positivos. Mas em geral, pode ser calculada a função de partição para elementos gerais da forma $z = (\gamma^0, \gamma^1)$, com os γ^g parâmetros reais não necessariamente positivos. Isto significa que, assim como no caso anterior tivemos elementos do centro da forma $\gamma_{G,H} \phi_g$ para os $\gamma_{G,H}$ positivos, no caso geral estes coeficientes podem também ser negativos. De essa maneira, podemos também encontrar funções de partição quando os coeficientes são de sinal contrária, ou seja, poderia ser calculada para um elemento do centro fornecido dado por $\frac{1}{2}(1, -1)$. Vamos mostrar que, de fato, pode se encontrar a função de partição para elementos do centro da forma $z_{G,H} = \frac{1}{2}(1, -1)$. Usaremos o lema a seguir:

4.4 Lema.

Seja uma curva azul com n cruzamentos com curvas vermelhas.

1. *O diagrama da curva azul com peso $z = z_1 + z_2$ é a soma dos diagramas individuais de uma curva azul e peso z_1 e a mesma curva mas com peso z_2 .*
2. *O diagrama de uma curva azul com peso $z' = \alpha z$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ é igual a uma curva com peso z multiplicada por α .* ◼

Demonstração. A prova é devida à linearidade do traço. Temos que para uma curva azul com n cruzamentos com curvas vermelhas, $\text{tr}(z\phi_{a_1} \cdots \phi_{a_n}) = \text{tr}(z_1\phi_{a_1} \cdots \phi_{a_n}) + \text{tr}(z_2\phi_{a_1} \cdots \phi_{a_n})$. Para a segunda parte, sabemos que $\text{tr}(\alpha z\phi_{a_1} \cdots \phi_{a_n}) = \alpha \text{tr}(z\phi_{a_1} \cdots \phi_{a_n})$. End

Pelo anterior, pode ser mostrada a seguinte relação:

4.5 Lema.

Consideramos $\mathbb{Z}_2$ com ϕ_0 e ϕ_1 a base da álgebra de grupo. Sejam C_1 e C_2 duas curvas azuis fechadas com pesos $\lambda' = \phi_0 - \phi_1$ e $z = \alpha^0\phi_0 + \alpha^1\phi_1$ ($\alpha^0, \alpha^1 \in \mathbb{C}$) respectivamente, figura 4.14(a). A curva C_1 é substituída pela curva C'_1 com peso λ' . A nova curva C'_2 é uma isotopia de C_2 com peso $z^- = \alpha^0\phi_0 - \alpha^1\phi_1$. A curva C'_1 (resp. C'_2) tem a mesma orientação de C_1 (resp. C_2), figura 4.14(b). □

FIG. 4.14. 4.14(a). A curva azul C_1 (resp. C_2) tem m (resp. n) cruzamentos com as curvas do cor vermelho. 4.14(b). Depois do sliding a curva final C'_1 (resp. C'_2) tem $m + n$ (resp. n) cruzamentos com as curvas do cor vermelho.

Demonstração. O importante da prova é separar a curva da direita como a soma de dois gráficos. O primeiro tem peso $\alpha^0\phi_0$ e o segundo $\alpha^1\phi_1$. Depois aplicamos o sliding sob elementos homogêneos, lema 3.12, e notamos que o segundo gráfico terá peso $\phi_1\lambda' = -\lambda'$. Aplicamos linearidade e obtemos o resultado desejado. End

O lema anterior será muito útil no cálculo dos loops de Wilson na próxima seção. No entanto, por enquanto faremos uso dele para calcular funções de partição. Consideramos o primeiro caso no qual $z_G = \frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_1) = \frac{1}{2}\lambda'$, figura 4.15(a). A seguir fazemos uso do lema 4.5 e temos a figura 4.15(b), onde λ é a co-integral. Finalmente usamos a propriedade da co-integral para extrair as curvas com peso $\frac{1}{2}\lambda$, as quais contribuem com um valor numérico de $\frac{1}{2}\text{tr}(\phi_0 + \phi_1) = 1$. Notamos que teremos uma curva azul com peso $z_H = \tilde{\gamma}_H^0\phi_0 + \tilde{\gamma}_H^1\phi_1$ ligada a uma curva vermelha, que contribuem num valor numérico $\epsilon(z_H) = \gamma_H^0 + \gamma_H^1$ por 2, ver figura 4.9(b) (modelo de Higgs puro). O fato importante é que notamos que o sliding elimina um link, assim, podemos aplicar o *move sliding* sob toda a rede e ao final ter simplesmente uma curva azul com peso $\frac{1}{2}\lambda'$, com fator numérico $\frac{1}{2}\text{tr}(\phi_0 - \phi_1) = 1$. Obteremos assim que para $z_G = \frac{1}{2}(1, -1)$ e $z_H = (\tilde{\gamma}_H^0, \tilde{\gamma}_H^1)$ a função de partição é

$$(4.19) \quad Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = 2^{N_1} (\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_1},$$

FIG. 4.15. Curvas azuis relacionadas às faces com peso $z_G = \lambda'$.

resultado que coincide com o modelo de Higgs puro, $z_G = \frac{1}{2}(1, 1)$, no caso de $\mathbb{Z}_2$.

Vamos tomar agora $z_H = \frac{1}{2}\lambda'$. A figura que representa este caso é 4.16(a). Fazemos o *move sliding* da curva azul no link com peso $\frac{1}{2}\lambda'$ sob a curva da esquerda que representa uma face com peso $z_G = \gamma_G^0\phi_0 + \gamma_G^1\phi_1$. Segundo o lema 4.5, depois do sliding o peso

FIG. 4.16. Curvas azuis relacionadas aos links com peso $z_H = \lambda'$.

mudará a $z_G^- = \gamma_G^0\phi_0 - \gamma_G^1\phi_1$, figura 4.16(b). Usamos *two point move* e aplicamos de novo sliding sob a curva da direita para obter a figura 4.16(c).

4.5. Loops de Wilson

Como mencionado anteriormente, a função de partição com campos de matéria pode ser escrita como na expressão (4.8), ela é

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o M_{abc}(f) N_{b_{k+1}}(f') \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1}}(1) S_x^y(o).$$

Desta forma os loops de Wilson para um loop ℓ deverão ser

$$\langle W(\ell) \rangle = \frac{1}{Z(\mathcal{M}, \mathcal{T})} \sum_{\text{conf}} \prod_f \prod_l \prod_o W(\ell) M_{abc}(f) N_{b_{k+1}}(f') \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1}}(1) S_x^y(o),$$

com $W(\ell) = \chi_r(U_\ell)$. χ_r são os caracteres e U_ℓ é a holonomia das variables link ao redor da curva fechada ℓ . Por simplicidade, consideramos uma variedade bidimensional $\mathcal{M}$.

FIG. 4.17. Loop com links κ_i .

Consideremos um loop ℓ , com origem em P e com o conjunto de links $\kappa(\ell) = \{\kappa_1, \dots, \kappa_n\}$ como se mostra na figura 4.17. Seja o grupo de gauge G e seja a rede orientada. A holonomia sob o loop ℓ é (ver expressão (2.1))

$$U_\ell = \prod_{\kappa_i \in \ell} g_{\kappa_i}^{o_i(\ell, \kappa_i)},$$

com $o_i(\ell, \kappa_i) = \pm 1$ a orientação relativa loop-link. No caso de $\mathbb{Z}_n$, $\chi_r(U_\ell)$ estará dada por

$$\chi_r(U_\ell) = \prod_{\kappa_i \in \ell} \omega^{o_i(\ell, \kappa_i) r k_i} = (\omega^r)^{(o_1(\ell, \kappa_1) k_1 + o_2(\ell, \kappa_2) k_2 + \dots + o_n(\ell, \kappa_n) k_n)},$$

onde $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ e $r, k_i = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Conforme ao anterior, definimos o tensor covariante $W_{k_1 k_2 \dots k_n}^r \equiv \chi_r(U_\ell)$, de modo que os loops de Wilson podem ser escritos

$$(4.20) \quad \langle W(\ell) \rangle = \frac{1}{Z(\mathcal{M}, \mathcal{T})} \sum_{\text{conf}} \prod_f M_{abc}(f) N_{b_{k+1}}(f') \prod_{1 \notin \kappa(\ell)} \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1}}(1) \prod_{\kappa_j \in \kappa(\ell)} \Delta^{b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} k_j}(1) W_{k_1 k_2 \dots k_n}^r \prod_o S_x^y(o),$$

onde cada índice covariante de $W_{k_1 \dots k_n}^r$ está contraído com o índice adicional k_j em $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} k_j}(1)$. O significado deste último termo é que os links κ_i pertencentes ao loop ℓ , pareceria se adicionar um polígono à variedade $\mathcal{M}$, ver figura 4.18, por isso, representamos o loop com cor azul. Note que não é necessário localizar a origem do loop já que esta é arbitrária. Esse polígono terá relacionado um elemento do centro $z_r = \sum_b z^b \phi_b$ tal que para $k = k_1 + \dots + k_n$, temos

$$(\omega^r)^{o'(\ell, \kappa) k'} = \text{tr}(\phi_k z_r) = \sum_b z^b \text{tr}(\phi_{k+b}) = n z^{-k},$$

FIG. 4.18. Loop numa rede triangular regular.

isto é, fazendo $-k \equiv n - k \rightarrow k$, os coeficientes que expandem o centro z_r , são da forma

$$z^k = \frac{1}{n} (\omega^r)^{-o'(\ell, \kappa)k'},$$

onde, $o'(\ell, \kappa)k' = \sum_{i=1}^n o_i(\ell, \kappa_i)k_i \in \mathbb{Z}_n$. No caso de $\mathbb{Z}_2$, o termo orientação relativa loop-link não é relevante. Por isso, $z^0 = \frac{1}{2}$ e $z^1 = \frac{1}{2}(-1)^r$. O centro da “face” W será

$$(4.21) \quad z_r = \frac{1}{2}(\phi_0 + (-1)^r \phi_1).$$

FIG. 4.19. Representação na linguagem de curvas coloridas de uma variedade bidimensional com loop ℓ . Cada curva tem um peso associado. Todas as curvas azuis tem pesos relacionados ao centro da álgebra. As faces: z_G . Os pontos azuis relacionados aos links: z_H . O loop de Wilson: z_W .

Em termos de curvas coloridas com pesos, a figura 4.18 será representada pela figura 4.19. Como antes, cada curva tem associada um peso, as curvas azuis pertencentes aos links somente, estão representadas por pontos azuis e pesos z_H . Devemos notar que ao parecer a nova curva com peso z_W cruza esses pontos e lembramos que dois curvas da mesma cor não podem se cruzar, o que seria contraditório. Na realidade elas não se cruzam, é por simplicidade do diagrama. Uma peça do diagrama 4.19 é a figura 4.20. Note que na expressão (4.21), para a representação trivial $r = 0$, temos $z_W = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$,

isto é, a co-integral dividida por 2, e a nova face pode se extrair do diagrama, por isso, na representação trivial

$$(4.22) \quad \langle W(\ell) \rangle = 1.$$

Consideramos por esse motivo, o elemento do centro dado por $z_W = \frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_1)$, escrito dessa forma para denotar que é o peso da face W relacionada aos loops de Wilson [FPTS12]. Com z_W fixo, fazemos varias escolhas para os pesos $z_{G,H}$, assim como fizemos no caso das funções de partição.

Vamos variar primeiro o elemento do centro z_H , relacionado com os campos de matéria. Primeiro, nos limites topológicos $z_H = \tilde{\gamma}_H^0 \phi_h$ e $\tilde{\gamma}_H^1$ os limites quando $\beta_H = \pm\infty$, respectivamente. Segundo em $\beta_H = 0$, isto é, para $z_H = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$:

FIG. 4.20. Rede com loop de Wilson.

(a)

$$z_W \phi_{-N_W h} \left(z_G \phi_{-3h} \right)^{N_f \text{ vezes}} \left(\tilde{\gamma}_H^h \right)^{N_l \text{ vezes}}$$

(b)

FIG. 4.21. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_H = \tilde{\gamma}_H^h \phi_h$.

1. $z_H = \tilde{\gamma}_H^h \phi_h$: o diagrama é mostrado em 4.21(a). Por ser o centro um elemento homogêneo multiplicado por uma constante, usamos o lema 3.13 do capítulo 3 para obter a figura 4.21(b). Note que o peso de cada curva associada a um triângulo tem um fator ϕ_{-3h} multiplicado por ter três links colados. No caso do loop de Wilson, o fator que multiplica o peso é $\phi_{-N_W h}$, onde N_W é o número de links por onde está cruzando o loop. Por estar trabalhando com o grupo $\mathbb{Z}_2$, os pesos respectivos são $z_G \phi_{-3h} = z_G \phi_h$ e $z_W \phi_{-N_W h} = z_W \phi_{N_W h}$. Assim o termo associado a cada face é

$$\text{tr}(z_G \phi_h) = \sum_g \tilde{\gamma}_G^g \text{tr}(\phi_{g+h}) = 2\tilde{\gamma}_G^g \delta(g+h, 0) = 2\tilde{\gamma}_G^g \delta(g, h)$$

e ao loop

$$\text{tr}(z_W \phi_{N_W h}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\phi_0 \phi_{N_W h}) - \text{tr}(\phi_1 \phi_{N_W h})) = \delta(0, N_W h) - \delta(1, N_W h).$$

Note que se $h = 0$, o valor numérico é simplesmente 1. No caso de h ser 1, o valor numérico depende se N_W é par ou ímpar. Em caso de N_W ser par temos de novo 1. Se N_W é ímpar, temos -1 . Isto é resumido como

$$\text{tr}(z_W \phi_{N_W h}) = \begin{cases} 1, & \text{se } h = 0, \text{ para todo } N_W \\ (-1)^{N_W}, & \text{se } h = 1, \text{ para todo } N_W. \end{cases}$$

O fator dependente do número de links é $2\tilde{\gamma}_H^h$. Denominando $\gamma_{G,H}^{g,h} = 2\tilde{\gamma}_{G,H}^{g,h}$ obtemos que

o numerador em (4.21) é

$$\begin{cases} (\gamma_G^g)^{N_f} (\gamma_H^h)^{N_l} \delta(g, h), & \text{se } h = 0, \text{ para todo } N_W \\ (-1)^{N_W} (\gamma_G^g)^{N_f} (\gamma_H^h)^{N_l} \delta(g, h), & \text{se } h = 1, \text{ para todo } N_W. \end{cases}$$

Com (4.17) obtemos que os loops de Wilson são fornecidos por

$$\langle W(\ell) \rangle = \begin{cases} (-1)^{g_{N_W}}, & \text{se } g = h, \text{ para todo } N_W \\ \text{indefinido,} & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

FIG. 4.22. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_H = \frac{1}{2}\lambda$.

2. $z_H = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$: o diagrama é mostrado em 4.22(a). Usamos o fato de o peso ser a co-integral dividida 2. Podemos extrair cada curva com esse peso, pela propriedade da co-integral, lema 3.7. O fator numérico que contribui ao peso dos links é 2 dividido entre 2, isto é, temos que calcular os loops de Wilson no caso de um modelo de gauge puro, figura 4.22(b). No entanto, em [GP96], Gambini e Pullin mostraram que, para altas temperaturas, $\beta_G \ll 1$, o comportamento será da forma

$$(4.23) \quad \langle W(\ell) \rangle = e^{-f(\beta_G) \text{área}(\ell)}$$

sendo $f(\beta_G) = -\ln(\tanh(\beta_G))$ e a $\text{área}(\ell)$ é o número de plaquetas elementares dentro do loop ℓ . Para baixas temperaturas, $\beta_G \gg 1$, a dependência de $\langle W(\ell) \rangle$ é com relação ao perímetro do loop [OHZ06]. Usando os métodos deste trabalho vamos confirmar de fato o resultado anterior. Tomamos $\beta = 0$ e $\beta = \infty$, para o limite de altas e baixas temperaturas respectivamente:

- $\beta_G = 0$ Se $z_G = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$, pela propriedade da co-integral podemos extrair todas as curvas azuis relacionadas as faces da triangulação. Agora, o loop vai cruzar N_W links, assim o loop terá N_W curvas vermelhas cruzando ele. As curvas pelas que o loop não cruza, são tiradas do diagrama e tem fator numérico 2. O anterior é representado na figura 4.23(a). Usando de novo a propriedade da co-integral tiramos uma por uma as curvas vermelhas até faltar uma. Teremos ao final uma curva azul com peso $z_W = \frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_1) = \frac{1}{2}\lambda'$ cruzada com uma vermelha. Esse tensor é representado na figura 4.23(b). Usamos mais uma vez a propriedade da co-integral e obtemos o tensor da figura 4.23(c), onde $z_W \rightarrow \epsilon$ contribuí como: $\epsilon(z_W) = \frac{1}{2}(\epsilon(\phi_0) - \epsilon(\phi_1)) = 0$. Encontramos que neste caso o loop de Wilson é simplesmente 0. Note-se que para $\beta_G = 0$ na expressão (4.23) temos zero também.

FIG. 4.23. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_G = z_H = \frac{1}{2}\lambda$.

$\beta_G = \pm\infty$ Se $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$, fazemos o *move sliding*, lema 4.5, sob cada uma das faces. Sabemos que o peso de cada face mudará, assim, se originalmente $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$, figura 4.24(a), depois do sliding será $z_G^- = (-1)^g \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$, figura 4.24(b). Podemos fazer isso sob cada

FIG. 4.24. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$ e $z_H = \frac{1}{2}\lambda$.

face. Ao final, teremos que as faces dentro do loop mudarão de peso se $\beta = -\infty$, ou seja, $g = 1$. O fato, é que é possível fatorar o sinal $N_{f,W}$ vezes, sendo $N_{f,W}$ o número de faces dentro do loop de Wilson. Os loops de Wilson terão o mesmo valor da função de partição (4.18), a diferença do fator $(-1)^{N_{f,W}}$. Encontramos assim que o loop de Wilson tem valor

$$\langle W(\ell) \rangle = (-1)^{g N_{f,W}}.$$

Essa expressão pareceria ter a forma da lei da área para limites de alta temperatura, $\beta_G = 0$. No entanto, notamos das figuras 4.24(a) e 4.24(b) que por cada face que se

adiciona (retira) dentro do loop o loop vai cruzar um link mais (menos). Por isso, na verdade podem ser escritos os loops de Wilson neste caso como

$$\langle W(\ell) \rangle = (-1)^{gN_W},$$

a qual tem forma de lei do perímetro [FPTS12].

Agora, para z_H fixo vamos variar o elemento do centro z_G , relacionado com os campos de gauge. Nos limites topológicos $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$, com $\tilde{\gamma}_G^0$ e $\tilde{\gamma}_G^1$ os limites quando $\beta_G = \pm\infty$, respectivamente. Depois em $\beta_G = 0$, ou seja, para $z_G = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$. Finalmente para $z_G = \frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_1)$:

FIG. 4.25. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$.

$z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$ O diagrama é mostrado em 4.25(a). Mesmo sem encontrar explicitamente a função de partição neste caso, o argumento é o mesmo dos limites $\beta_G = \pm\infty$ da parte anterior. Por ser o centro um elemento homogêneo fazemos o *move sliding*, lema 4.5, sob cada uma das faces. Sabemos que o peso de cada face mudará, assim, se originalmente $z_G = \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$, figura 4.25(a), depois do sliding será $z_G^- = (-1)^g \tilde{\gamma}_G^g \phi_g$, figura 4.25(b). Mas reconhecemos que a curva azul isolada tem valor numérico 1 e factoramos os sinais. Os loops do Wilson terão o mesmo valor numérico da função de partição, se ela não é zero, exceto pelo fator $(-1)^{gN_W}$, logo

$$\langle W(\ell) \rangle = \frac{(-1)^{gN_W}}{Z(\mathcal{M}, \mathcal{T})} Z(\mathcal{M}, \mathcal{T}) = (-1)^{gN_W}.$$

$z_G = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$ O diagrama é representado na figura 4.26(a). Neste caso, pela propriedade da co-integral as curvas azuis relacionadas às faces podem se extrair do diagrama. Os links que não cruzam o loop saem do diagrama, os restantes permanecem nele como representado na figura 4.26(b). Fazemos o *move sliding* do loop com peso $z_W = \frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_1)$ sob cada curva azul com peso $z_H = \tilde{\gamma}_H^0 \phi_0 + \tilde{\gamma}_H^1 \phi_1$, figura 4.26(c) (lembre mais uma vez que o valor numérico da curva azul com uma vermelha é 2). Depois do sliding os pesos mudarão a $z_H^- = \tilde{\gamma}_H^0 \phi_0 - \tilde{\gamma}_H^1 \phi_1$. Fazendo *two point move* e aplicando o *move sliding* às seguintes $N_W - 1$ curvas azuis, temos a figura 4.26(d). Agora, o valor numérico de uma curva azul com peso colada com uma vermelha é calculada usando o tensor representado em 4.26(e) e 4.26(f). Para as curvas com peso z_H é 2 vezes $\epsilon(z_H) = \tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1$ e para as curvas com peso z_H^- é 2 vezes $\epsilon(z_H^-) = \tilde{\gamma}_H^0 - \tilde{\gamma}_H^1$. Assim o loop de Wilson é usando (4.19)

$$\langle W(\ell) \rangle = \frac{2^{N_W} (\tilde{\gamma}_H^0 - \tilde{\gamma}_H^1)^{N_W} 2^{N_1 - N_W} (\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_1 - N_W}}{2^{N_1} (\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_1}} = \frac{(\tilde{\gamma}_H^0 - \tilde{\gamma}_H^1)^{N_W}}{(\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_W}},$$

FIG. 4.26. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_G = \frac{1}{2}\lambda$.

para $\tilde{\gamma}_H^0 \neq -\tilde{\gamma}_H^1$.

$z_G = \frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_1)$ O diagrama é representado na figura 4.27(a). Neste caso, usamos o *move sliding* do loop sob cada face. O peso de cada face é $z_G = \frac{1}{2}\lambda'$. No entanto o de loop também. Pelo lema 4.5, sabemos que os pesos sob cada face mudarão a $z_G^- = \frac{1}{2}\lambda$. Ao final do processo teremos a figura 4.27(b). Pela propriedade da co-integral as curvas azuis relacionadas às faces podem se extrair do diagrama. Depois de desligar as $N_{f,W}$ faces dentro do loop, notamos que os $N_{f,W}$ links dentro do loop que conectam as faces ficam isolados. Isso é representado na figura 4.28(a). Agora, poderíamos escolher uma face f e fazer sliding sob cada face colada a ela por meio de um link. É claro que o peso da curva com peso $z_G = \frac{1}{2}\lambda'$, à qual se faça o sliding vai poder se extrair do diagrama pois o sliding muda o peso da curva a ser $z_G^- = \frac{1}{2}\lambda$. Fazemos sliding até extrair todas as curvas azuis. No entanto, note-se que cada vez que se aplique o *move sliding* a face f , terá mais e mais links cruzando ela. Ao final teremos a figura 4.28(b), onde $N_1 - N_{l,W}$. Finalmente, fazemos de novo o *move sliding* como na figura 4.26(c) até chegar à figura 4.28(c). Lembramos que de esquerda à direita os pesos de cada uma das curvas da figura 4.28(c): $\frac{1}{2}2 = 1$, para as três primeiras, $2(\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)$ e $2(\tilde{\gamma}_H^0 - \tilde{\gamma}_H^1)$ para os dois últimos conjunto de curvas. O valor dos loops de Wilson usando (4.19) é

$$\langle W(\ell) \rangle = \frac{2^{N_{l,W}} (\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_{l,W}} 2^{N_1 - N_{l,W}} (\tilde{\gamma}_H^0 - \tilde{\gamma}_H^1)^{N_1 - N_{l,W}}}{2^{N_1} (\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_1}} = \frac{(\tilde{\gamma}_H^0 - \tilde{\gamma}_H^1)^{N_1 - N_{l,W}}}{(\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_1 - N_{l,W}}},$$

ja que $N_W = N_1 - N_{l,W}$, o resultado é $\langle W(\ell) \rangle = \frac{(\tilde{\gamma}_H^0 - \tilde{\gamma}_H^1)^{N_W}}{(\tilde{\gamma}_H^0 + \tilde{\gamma}_H^1)^{N_W}}$ e é valido para $\tilde{\gamma}_H^0 \neq -\tilde{\gamma}_H^1$.

Como esperado o resultado é quase topológico e depende da forma usual dos loops de Wilson.

Os resultados encontrados são valores numéricos que coincidem com os encontrados na literatura. Os casos com significado físico são resumidos em [Sei82, Pág. 63]. Cada um dos resultados depende dos fatores de regularização, γ_G e γ_H . Por sua vez, cada um dos fatores está elevado a uma potência inteira, a qual será o número de faces para γ_G e o número de links para γ_H .

(a)

(b)

FIG. 4.27. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_G = \frac{1}{2}\lambda'$.

(a)

(b)

(c)

FIG. 4.28. Diagrama correspondente ao cálculo dos loops de Wilson para $z_G = \frac{1}{2}\lambda'$.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

este trabalho estudamos teorias de gauge na rede. Construimos, passo a passo a ação do modelo de gauge com campos de matéria para um grupo de gauge G . Depois fizemos uma fixação de gauge tal que os campos de matéria nos vértices são eliminados. Isso foi feito para usar a linguagem de curvas coloridas e diagramas de Heegaard, para variedades fechadas, conexas e orientáveis. Os detalhes foram dados no capítulo 2.

Uma vez descrito o modelo de gauge-Higgs, a ideia foi fornecer as ferramentas para nos limites topológicos calcular funções de partição e loops de Wilson. Para essa finalidade lembramos, no capítulo 3, como pode ser construída uma teoria topológica usando álgebras de Hopf. Provamos a invariância por *moves* de Pachner em 2D que implica invariância topológica. Isso foi feito usando a representação de curvas coloridas.

No capítulo 4, encontramos explicitamente funções de partição e loops de Wilson para uma rede bidimensional nos limites topológicos. Notamos que no caso $\mathbb{Z}_2$, sem campos de

$z_G \backslash z_H$	$\gamma_H(1, 0)$	$\gamma_H(0, 1)$	$\frac{1}{2}(1, 1)$	(γ_H^0, γ_H^1)
$\gamma_G(1, 0)$	$(\gamma_G^0)^{N_f}(\gamma_H^0)^{N_l}$	0	$(\gamma_G^0)^{N_f}$	★
$\gamma_G(0, 1)$	0	$(\gamma_G^1)^{N_f}(\gamma_H^1)^{N_l}$	$(\gamma_G^1)^{N_f}$	★
$\frac{1}{2}(1, 1)$	$(\gamma_H^0)^{N_l}$	$(\gamma_H^1)^{N_l}$	1	$(\gamma_H^0 + \gamma_H^1)^{N_l}$
(γ_G^0, γ_G^1)	$(\gamma_G^0)^{N_f}(\gamma_H^0)^{N_l}$	$(\gamma_G^1)^{N_f}(\gamma_H^1)^{N_l}$	$2^{N_l}(\cosh(\beta_G)^{N_f} + \sinh(\beta_G)^{N_f})$	✠

TABELA a. Função de partição para diferentes $\gamma_{G,H} \geq 0$.

matéria, o valor numérico era trivial, mas ainda assim, poderia ser considerado como um modelo quase-topológico, pois depende dos detalhes da triangulação. Em seguida foram definidos os limites topológicos da teoria e encontradas funções de partição para o caso $\mathbb{Z}_2$. A tabela a mostra os resultados para diversos valores dos parâmetros $\gamma_{G,H}^{g,h}$ positivos. Na tabela a, o símbolo ★, denota onde foi mostrado um possível valor numérico em serie de potências e não foi calculado explicitamente. Por outro lado, o símbolo ✠ faz referencia ao lugar onde não foi possível encontrar valor numérico, que corresponde ao caso geral do modelo de gauge-Higgs. Em relação à tabela a, temos resultados físicos em $\beta_{G,H} = 0$

FIG. 5.1. Regões onde a função de partição é calculável para constantes de acoplamento $\beta_{G,H}$ reais e parâmetros γ positivos. São representadas pelas linhas contínuas e tracejadas.

ou $\beta_{G,H} \rightarrow \infty$ que concordam com a literatura [Kog79, MMS79, Sei82]. No entanto, também conseguimos encontrar valores para constantes de acoplamento negativas. Elas correspondem aos parâmetros $\gamma_{G,H}^1$ e os valores numéricos estão na tabela **a**. Por outro lado, os parâmetros γ estão relacionados para o modelo de gauge-Higgs pelas hipérboles $\gamma_G^0 \gamma_G^1 = \frac{1}{4}$ e $\gamma_H^0 \gamma_H^1 = \frac{1}{4}$, pois da expansão de caracteres encontramos que $\gamma_{G,H}^0 = \frac{1}{2}e^{\beta_{G,H}}$ e $\gamma_{G,H}^1 = \frac{1}{2}e^{-\beta_{G,H}}$, com isso podemos representar os valores numéricos da função de par-

$\begin{array}{c} z_H \\ \backslash \\ z_G \end{array}$	$\gamma_H(1, 0)$	$\gamma_H(0, 1)$	$\frac{1}{2}(1, 1)$	$\frac{1}{2}(1, -1)$	(γ_H^0, γ_H^1)
$\gamma_G(1, 0)$	✓	✓	✓	✓	★
$\gamma_G(0, 1)$	✓	✓	✓	✓	★
$\frac{1}{2}(1, 1)$	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{2}(1, -1)$	✓	✓	✓	✓	✓
(γ_G^0, γ_G^1)	✓	✓	✓	✗	✗

TABELA **b**. Função de partição para diferentes $\gamma_{G,H}$.

tição no espaço de parâmetros pelas figuras 5.1(a) e 5.1(b). Notamos que outros limites topológicos podiam ser calculados e fizemos isso explicitamente; agora os parâmetros $\gamma_{G,H}^{g,h}$ podiam ser reais, positivos e negativos. A tabela de casos é **b**, onde estão representados pelo símbolo ✓, aqueles valores dos parâmetros $\gamma_{G,H}^{g,h}$ em que foi possível calcular o valor numérico da função de partição, o símbolo ★ denota onde foi mostrado um possível valor numérico em serie de potências e pelo símbolo ✗ onde não foi possível obter nenhum valor numérico. Os gráficos foram representados em 5.2(a) e 5.2(b).

O caso de loops de Wilson foi um pouco mais trabalhoso, pois tivemos que considerar três possíveis valores do centro da álgebra de grupo, z . Como no caso das funções de partição calculamos os valores dos loops de Wilson, para todos os possíveis valores reais dos parâmetros γ . Os valores com algum significado físico correspondem a aqueles onde

FIG. 5.2. Regões onde a função de partição é calculável parâmetros γ reais. São representadas pelas linhas contínuas e tracejadas.

$\begin{matrix} z_H \\ z_G \end{matrix}$	$\gamma_H(1, 0)$	$\gamma_H(0, 1)$	$\frac{1}{2}(1, 1)$	$\frac{1}{2}(1, -1)$	(γ_H^0, γ_H^1)
$\gamma_G(1, 0)$	1	indefinido	1	1	1
$\gamma_G(0, 1)$	indefinido	$(-1)^{N_w}$	$(-1)^{N_w}$	$(-1)^{N_w}$	$(-1)^{N_w}$
$\frac{1}{2}(1, 1)$	1	$(-1)^{N_w}$	0	indefinido	$\frac{(\gamma_H^0 - \gamma_H^1)^{N_w}}{(\gamma_H^0 + \gamma_H^1)^{N_w}}$
$\frac{1}{2}(1, -1)$	1	$(-1)^{N_w}$	0	indefinido	$\frac{(\gamma_H^0 - \gamma_H^1)^{N_w}}{(\gamma_H^0 + \gamma_H^1)^{N_w}}$
(γ_G^0, γ_G^1)	1	$(-1)^{N_w}$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$

TABELA c. Valores numéricos dos loops de Wilson para diferentes $\gamma_{G,H}$.

os parâmetros γ são positivos. Notamos que na maioria dos casos foi confirmada a lei do perímetro. No entanto, existe um caso “físico” onde o valor esperado do loop de Wilson é zero. Ele aconteceu quando a constante de acoplamento β_G era zero num modelo de gauge puro, $\beta_H = 0$, o qual coincide em certo sentido com o mostrado por Wilson referente ao confinamento de quarks [Wil74]. Outros valores dos loops de Wilson foram considerados indefinidos pois ao fazer o cálculo explícito obtínhamos divergências. Para o caso onde os parâmetros γ podiam ser qualquer real, foram obtidos valores numéricos e eles constam na tabela c. Onde $\boxtimes$ corresponde aos lugares onde não foi possível encontrar nenhum valor dos loops de Wilson. Os gráficos que representam onde foram encontrados valores numéricos para os loops de Wilson nos limites topológicos estão nas figuras 5.3(a) e 5.3(b).

O formalismo de curvas que utilizamos permite a fácil identificação dos limites topológi-

FIG. 5.3. Regões onde o valor esperado dos observáveis, loops de Wilson, foram calculáveis, parâmetros γ reais. São representadas pelas linhas contínuas e tracejadas.

cos de teorias na rede. Além disso é útil para provar invariâncias topológicas para grupos mais gerais que os considerados aqui. Em particular, abrange grupos compactos não abelianos. Uma possível generalização deste trabalho seria o estudo de modelos com campos de matéria em representações diferentes da representação regular.

FORMALISMO DIAGRAMÁTICO E ÁLGEBRAS DE HOPF

Este apêndice tem dois propósitos. O primeiro é mostrar como diagramaticamente podem ser representados tensores. O segundo é explicar rapidamente que são álgebras de Hopf e como podem ser representadas usando diagramas. Finalmente demostramos varias propriedades dos tensores relacionados às álgebras de Hopf que foram usados neste trabalho.

A.1. Dualidade

Consideremos um espaço vetorial de dimensão finita $\mathcal{V}$. Sejam $\{e_i\}_{i=1}^n$ os elementos de base, onde $n = \dim \mathcal{V}$. Portanto, cada elemento pertencente a $\mathcal{V}$ é fornecido por uma combinação linear dos elementos de base, isto é,

$$(A.1) \quad a = \sum_{i=1}^n a^i e_i,$$

onde os números a^i pertencem ao corpo $\mathbb{C}$. Para simplificar a notação, adotamos que (A.1) pode ser escrita como $a = a^i e_i$. Para uma função linear $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ temos

$$\alpha(\lambda a + \mu b) = \lambda \alpha(a) + \mu \alpha(b), \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

e $a, b \in \mathcal{V}$.

A.1 Definição (Espaço dual).

É chamado *espaço dual* $\mathcal{V}^*$ o conjunto de todas as funções lineares α , ou seja, o conjunto de todas as funções lineares $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$. ■

Segundo a definição anterior pode mostrar-se facilmente o lema a seguir.

A.2 Lema.

Sejam duas funciones lineares $\alpha, \beta \in \mathcal{V}^*$, aplicadas sobre $v \in \mathcal{V}$. É definida a soma

$$(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v),$$

e a multiplicação por um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, como

$$(\lambda \alpha)(v) = \lambda \alpha(v).$$

Então $\mathcal{V}^*$ é um espaço vetorial. ◻

A dimensão do espaço vetorial dual $\mathcal{V}^*$ coincide com a dimensão de $\mathcal{V}$, ou seja, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}^*$. Lembrando que os elementos da base do espaço vetorial $\mathcal{V}$ foram escritos como e_i , definimos os elementos da base de $\mathcal{V}^*$ como e^i , de tal forma que

$$e^i(e_j) = \delta_j^i, \text{ para } i, j = 1, \dots, n,$$

O anterior significa que dado um espaço vetorial, pode se construir outro espaço vetorial, tal que as bases deles sejam ortogonais como é expressado na relação anterior.

A partir do espaço vetorial $\mathcal{V}^*$, pode ser construído *outro* espaço vetorial $(\mathcal{V}^*)^*$ dual a ele. Poderíamos continuar assim indefinidamente. Mas é possível mostrar que $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^*)^*$ e assim somente pode ser construído um a partir do outro.

O *pairing* é a relação entre um espaço vetorial $\mathcal{V}$ e sua dual $\mathcal{V}^*$, definido pela função

$$(A.2) \quad \alpha(v) = \langle \alpha, v \rangle : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C},$$

onde $\langle e^i, e_j \rangle \equiv \delta_j^i$.

A.2. Tensores

Consideremos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais sob $\mathbb{C}$ com bases $\{v_i\}_{i=1}^m$ e $\{w_i\}_{i=1}^n$, respectivamente ($m = \dim \mathcal{V}$ e $n = \dim \mathcal{W}$). Para cada i, j com $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, introduzimos o símbolo $v_i \otimes w_j$. O *espaço produto* $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ é definido como o espaço vetorial mn -dimensional sobre o $\mathbb{C}$ com a base dada por [JL01]

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Dito o anterior, se $v = \sum_{i=1}^m \lambda^i v_i \in \mathcal{V}$ e $w = \sum_{j=1}^n \mu^j w_j \in \mathcal{W}$ ($\lambda^i, \mu^j \in \mathbb{C}$), definimos $v \otimes w \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ por

$$v \otimes w = \sum_{i,j} \lambda^i \mu^j (v_i \otimes w_j).$$

Então $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ consiste de todas as expressões da forma $\sum_{i,j} T^{ij} (v_i \otimes w_j)$, onde $T^{ij} \in \mathbb{C}$.

Assim, qualquer tensor $T \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, pode ser escrito como $T = \sum_{i,j} T^{ij} v_i \otimes w_j$ (observe os índices superiores). Usando a notação de soma de Einstein para contração, podemos escrevê-lo como

$$T = T^{ij} v_i \otimes w_j.$$

Os T^{ij} são chamados componentes de T . Os vetores que pertencem a $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ são chamados *tensores*, e notamos que precisam de dois índices para representá-los, ou seja, T^{ij} .

Por ser $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ espaços vetoriais arbitrários podemos tomar em particular $\mathcal{W} = \mathcal{V}^*$, ou seja o espaço dual de $\mathcal{V}$. Neste caso os elementos da base de $\mathcal{W}$ serão denotados por v^i . Assim, se $A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$, é escrito $A = A^i_j v_i \otimes v^j$. Podemos generalizar isso, e assim, de

maneira geral consideramos o vetor $B = \underbrace{\mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}}_{p \text{ vezes}} \underbrace{\mathcal{V}^* \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}^*}_{q \text{ vezes}}$, de tal modo que

$$B = B^{a_1 \cdots a_p}_{b_1 \cdots b_q} v_{a_1} \otimes \cdots \otimes v_{a_p} \otimes v^{b_1} \otimes \cdots \otimes v^{b_q}.$$

Se queremos calcular o pairing (A.2) entre dois tensores T^{ij} e M_{ij} notamos que ele é dado por $r = T^{ij} M_{ij}$, onde podemos ver que cada índice superior se cancela com um inferior. Isso assegura-nos que obtemos um número complexo. De maneira similar, podemos encontrar tensores da forma $F^i_k = T^{ij} M_{jk}$, o qual é diferente de $T^{ij} M_{kj}$, pois os índices j não estão na mesma ordem em ambas expressões. Em caso que não se cancelem índices poderíamos ter tensores da forma $R^{ij}_{kl} = T^{ij} M_{kl}$.

A.2.1. Notação gráfica dos tensores

Com o objetivo de simplificar a notação e alguns cálculos vamos introduzir uma representação gráfica para tensores. Por simplicidade, colocaremos índices superiores e inferiores na mesma linha, por exemplo $T^{a_1 \cdots a_p}_{b_1 \cdots b_q}$ a diferença da seção anterior. Graficamente definiremos um tensor pela figura A.1. As q setas que entram representam os índices inferiores

FIG. A.1. Representação diagramática de um tensor. As setas de entrada representam os índices mais baixos e as setas que saem os índices superiores.

e as p setas que saem os índices superiores do tensor. Notamos que os índices inferiores (setas chegando) se leem em sentido anti-horário e os índices superiores (setas saindo) são lidas no sentido horário.

A.3 Exemplo.

Notamos que v^i e c_j são representadas pelas figuras A.2(a) e A.2(b) respectivamente e a contração de ambos é A.2(c). A representação esquemática do pairing $r = T^{ij} M_{ij}$ se dá na figura A.2(d),

FIG. A.2. Representação dos tensores v^i e c_i e sua contração.

onde pode-se notar que todos os índices estão contraídos, isso está claro, pois devemos obter um número escalar. *

Neste ponto é preciso esclarecer qual é a vantagem do formalismo diagramático respeito ao convencional. Os tensores são simplesmente “desenhos” que podem mover-se livremente

FIG. A.3. Representação diagramática de diferentes tensores. A figura A.3(a) representa a contração dos tensores T^{ij} e M_{ik} a qual graficamente é diferente a da figura A.3(b) que representa a contração de T^{ij} e M_{ki} . Finalmente, a figura A.3(c) representa um tensor com as quatro setas livres.

prestando atenção à contração de índices como mostramos no exemplo A.3. Para perceber de novo isso, vemos que no caso do tensor $T^{ij} M_{ik}$ contraímos o índice i , de duas formas diferentes veja a figura A.3(a). O tensor $T^{ij} M_{jk}$ poderia ser também representado de forma similar. Para o tensor $T^{ij} M_{ki}$ notamos que a representação dele é diferente da representação do tensor $T^{ij} M_{ik}$, isso é mostrado na figura A.3(b). Finalmente, no caso do tensor $T^{ij} M_{kl}$ vemos que todas as setas estão livres, pois não há índices iguais no tensor, veja a figura A.3(c).

A.3. Álgebras de Hopf

A.3.1. Bi-álgebras

Álgebras

A.4 Definição (Álgebra).

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é um espaço vectorial que é fechado sob uma multiplicação bilinear. Isso significa que, para todo $x, y \in \mathcal{A}$, $x \cdot y \equiv xy \in \mathcal{A}$ e $(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz)$, onde α, β são números complexos [BJM10]. $\blacksquare$

Assim, consideremos o espaço vetorial $\mathcal{A}$, com os elementos de base dados por $\{\phi_a\}$. A multiplicação m utilizando a notação de soma é

$$(A.3) \quad \phi_a \phi_b = m_{ab}^c \phi_c,$$

onde m_{ab}^c são chamadas *constantes de estrutura da álgebra*. Por exemplo, tomemos $x, y \in \mathcal{A}$. Devido ao fato de que cada um deles é uma combinação linear dos elementos da base podemos escrever o produto entre eles como

$$(A.4) \quad xy = (x^a \phi_a)(x^b \phi_b) = x^a x^b \phi_a \phi_b = x^a x^b m_{ab}^c \phi_c.$$

Por outro lado, fica claro que m_{ab}^c é um tensor, portanto, podemos representá-lo através de diagramas, veja a figura A.4(a). Do diagrama A.2(a) pode ser visto que a representação da multiplicação entre os dois vectores $x = x^a \phi_a$ e $y = y^b \phi_b$ é dada pela figura A.4(b). O resultado

FIG. A.4. A.4(a) representação diagramática do tensor. A.4(b) produto de dois vectores com as respectivas contrações.

é o vetor $xy \in \mathcal{A}$ que coincide com a expressão (A.4). Por a constante de estrutura m_{ab}^c ter dois índices inferiores e um superior a multiplicação frequentemente é denotada por $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ [GS96]. Vamos considerar agora as seguintes propriedades adicionais para a álgebra:

Associatividade. Um álgebra $\mathcal{A}$ é *associativa*, se para três elementos $a, b, c \in \mathcal{A}$, é satisfeita a relação $(ab)c = a(bc)$. Tensorialmente se escreve $[m(m \otimes 1)](a \otimes b \otimes c) = [m(1 \otimes m)](a \otimes b \otimes c)$. Esquematicamente observamos isso na figura A.5.

FIG. A.5. Representação associativa do álgebra $\mathcal{A}$.

Unidade. Existe um elemento, $e \in \mathcal{A}$, de tal maneira que para todo $a \in \mathcal{A}$, $ae = ea = a$. e é chamado *elemento unidade*. Tensorialmente $m(a \otimes e) = m(e \otimes a) = a$. Diagramaticamente é representado na figura A.6(a). Devido ao fato de que e é um elemento genérico pode ser representado como na figura A.6(b).

FIG. A.6. Representação do elemento de identidade e .

Resumindo, a álgebra $\mathcal{A}$ com produto $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ e unidade e será denotada por $(\mathcal{A}, m, e)$. Onde para elementos ϕ_i da base a multiplicação escreve-se em termos das constantes de estrutura como

$$m(\phi_i \otimes \phi_j) = m_{ij}^k \phi_k \text{ e } e(1) = e^i \phi_i$$

Seja $(\rho(\phi_i))^b_a$ a representação regular de um elemento ϕ_i da base da algebra, com

$$\rho(\phi_i \phi_j) = \rho(\phi_i) \rho(\phi_j).$$

A representação de ϕ_i será apresentada sem ambiguidade também como ϕ_i . O traço de ϕ_i é definido como

$$\text{tr}(\phi_i) = \sum_j m_{ij}^j = m_{ii}^i$$

e é representado em A.7.

$$\rightarrow T \equiv \rightarrow \overbrace{m}^{\curvearrowright}$$

FIG. A.7. Traço m_{ij}^j .

Co-álgebras

Uma co-álgebra é definida de maneira similar à álgebra. Definimos a co-multiplicação no espaço dual $\mathcal{A}^*$ como $\Delta : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$. Neste caso, em termos da base ϕ^i a co-multiplicação é definida como

$$\Delta(\phi^j \otimes \phi^k) = \Delta_i^{jk} \phi^i.$$

Em termos de tensores por ter um índice inferior e dois superiores isso é representado na figura A.8. Escolheremos também que para três elementos a^*, b^* e c^* de $\mathcal{A}^*$ a co-multiplicação seja

$$\Delta_i^{jk} \equiv \rightarrow \Delta \begin{matrix} \nearrow^j \\ \searrow_k \end{matrix}$$

FIG. A.8. Tensor Δ_i^{jk} .

co-associativa isso é $[\Delta(1 \otimes \Delta)](a^* \otimes b^* \otimes c^*) = [\Delta(1 \otimes \Delta)](a^* \otimes b^* \otimes c^*)$ e tenha co-unidade $\epsilon : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\Delta(a^* \otimes \epsilon) = \Delta(\epsilon \otimes a^*) = a^*$. Representamos o anterior nas figuras A.9(a) e

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow \Delta \xrightarrow{a^*} \Delta \xrightarrow{b^* \atop c^*} \Delta \xrightarrow{c^*} \Delta \xrightarrow{a^* \atop b^*} \Delta & \rightarrow \Delta \xrightarrow{\epsilon} \Delta \xrightarrow{\epsilon} \Delta \xrightarrow{\epsilon} \Delta & \end{array}$$

(a)
(b)

FIG. A.9. Representação diagramática dos tensores da álgebra dual.

A.9(b) respectivamente. De maneira similar à álgebra, a representação regular de ϕ^j é $(\rho(\phi^j))^b_a$. Definimos o co-traço como

$$\text{cotr}(\phi^j) = \sum_i \Delta_i^{ij} = \Delta_i^{ij}$$

e é representado na figura A.10. Dito o anterior a partir das constantes de estrutura Δ_i^{jk} podemos

$$C \rightarrow \equiv \rightarrow \Delta \rightarrow$$

FIG. A.10. Co-traço Δ_i^{ij} .

definir em uma álgebra $\mathcal{A}$ o co-produto $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. O qual é um homomorfismo com o produto. Iremos escolher de modo que ele seja co-associativo, ou seja,

$$[(1 \otimes \Delta)\Delta](a \otimes b \otimes c) = [(1 \otimes \Delta)\Delta](a \otimes b \otimes c).$$

A co-unidade ϵ é dada por $(a \otimes \epsilon)\Delta = (\epsilon \otimes a)\Delta = a$ e é um homomorfismo de álgebra. Denotamos a co-álgebra por $(\mathcal{A}, \Delta, \epsilon)$. Onde para elementos ϕ_i da base a co-multiplicação se escreve em termos das constantes de estrutura como

$$\Delta(\phi_i) = \Delta_i^{jk} \phi_j \otimes \phi_k \text{ e } \epsilon(\phi_i) = \epsilon^i.$$

Se uma álgebra $\mathcal{A}$ tem produto, unidade, co-produto e co-unidade chamamos esta de uma bi-álgebra e se escreve $(\mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon)$. A relação entre produto e co-produto para dois elementos ϕ_i, ϕ_j da base de $\mathcal{A}$ está fornecida por

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \Delta(m(\phi_i \otimes \phi_j)) &\equiv m(\Delta(\phi_i) \otimes \Delta(\phi_j)) \\ \rightarrow (\phi_i \phi_j)_1 \otimes (\phi_i \phi_j)_2 &\equiv (\phi_i)_1 (\phi_j)_1 \otimes (\phi_i)_2 (\phi_j)_2. \end{aligned}$$

e é representada graficamente pela figura A.11.

FIG. A.11. Relação entre produto e co-produto.

A.5 Definição (Álgebra de Hopf).

Seja $(\mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon)$ uma bi-álgebra. Se existe um mapa linear $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisfaz a relação

$$m \circ (S \otimes 1) \circ \Delta = e \circ \epsilon = m \circ (1 \otimes S) \circ \Delta,$$

então o sexteto $(\mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon, S)$ é chamado álgebra de Hopf com antípoda S . Grafica-

FIG. A.12. Representação diagramática das propriedades da antípoda.

mente a relação da antípoda é mostrada em A.12(a) e A.12(b). ▀

A antípoda tem a propriedade que é um antihomomorfismo e um co-antihomomorfismo, ou seja, para elementos da base ϕ_i temos

$$\begin{aligned} S(m(\phi_i \otimes \phi_j)) &= S(\phi_j)S(\phi_i), \\ S(\Delta(\phi)) = S(\phi_i \otimes \phi_j) &= S(\phi_j) \otimes S(\phi_i), \end{aligned}$$

As propriedades da antípoda diagramaticamente estão representadas pelas figuras A.13(a) a A.13(b) e as constantes de estrutura estão fornecidas por

$$S(\phi_i) = S_i^j \phi_j.$$

Se $S^2 = 1$, chamamos a álgebra de Hopf involutória [Kup91, CFS94, CKS98].

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \nearrow m \rightarrow S \rightarrow = \begin{array}{c} \nearrow S \\ \searrow S \end{array} \rightarrow m \rightarrow \\ \text{(a) } S(\phi_i \cdot \phi_j) = S(\phi_j)S(\phi_i). \end{array} &
\begin{array}{c} \rightarrow S \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow S \\ \searrow S \end{array} \\ \text{(b) } S(\phi_i \otimes \phi_j) = S(\phi_j) \otimes S(\phi_i). \end{array}
\end{array}$$

FIG. A.13. Representação diagramática das propriedades da antípoda.

Agora, neste trabalho usaremos a seguinte definição da co-integral e integral da álgebra fornecida em [Kup91, KR99, BF12]

A.6 Definição (Co-integral e integral).

Chamamos de co-integral o elemento $\lambda \in \mathcal{A}$ tal que quando multiplicado por qualquer outro elemento da álgebra o resultado seja ele próprio multiplicado por um número. Uma co-integral pode ser uma co-integral à esquerda ou à direita, dependendo se esta é multiplicada pela esquerda ou pela direita, figura A.14(a). Analogamente uma integral é um elemento $\Lambda \in \mathcal{A}^*$ tal que a condição desenhada na figura A.14(b) seja satisfeita. $\blacksquare$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \lambda \rightarrow m \rightarrow \equiv \lambda \rightarrow \\ \nearrow \quad \searrow \quad \epsilon \\ \text{(a) Co-integral } \lambda. \end{array} &
\begin{array}{c} \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \equiv \rightarrow \Lambda \\ \quad \quad \quad e \rightarrow \\ \text{(b) Integral } \Lambda. \end{array} \\
\begin{array}{c} \lambda \equiv \rightarrow \Delta \rightarrow \\ \text{(c) Tensor } \lambda. \end{array} &
\begin{array}{c} \Lambda \equiv \rightarrow m \rightarrow \\ \text{(d) Tensor } \Lambda. \end{array}
\end{array}$$

FIG. A.14. Representação diagramática dos elementos co-integral e integral da álgebra.

Notemos que as definições da co-integral, A.14(c), e da integral, A.14(d), coincide com a definição de co-traço e traço respectivamente.

A.7 Lema.

Em uma álgebra de Hopf involutória o tensor $\Delta_i^{ij} m_{jk}^k$ é igual a dimensão da álgebra. Diagramaticamente temos a figura A.15. $\blacksquare$

$$\rightarrow \Delta \rightarrow m \rightarrow = \dim(\mathcal{A})$$

FIG. A.15. Contração $\Delta_i^{ij} m_{jk}^k$.

Demonstração. Notemos que a co-integral pode ser representada como na figura A.16(a). Usamos a propriedade da integral e obtemos a figura A.16(b). Ligando as setas com mesmo índice obtemos a figura A.16(c). Agora, a última figura numericamente é $\sum_j e^i m_{ij}^j = \text{tr}(\phi_e)$, sendo ϕ_e a matriz identidade. Assim, $\sum_j e^i m_{ij}^j = n = \dim(\mathcal{A})$. O lema está provado. End

FIG. A.16. Representação diagramática dos tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ and $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_k}$. FIG. A.17. Representação diagramática dos tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ and $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_k}$.**A.8 Definição.**

Definimos os tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \dots b_m}$ como na figura A.17. ▀

No capítulo 3 usamos a definição anterior dos tensores M e Δ para mostrar que eles são ciclicamente simétricos, lema 3.2. Notemos que podemos construir combinações entre vários tensores M e Δ simplesmente ligando as setas segundo as regras conhecidas de contração de tensores. Em particular temos o lema a seguir:

A.9 Lema (Relação M, Δ e S).

Numa álgebra de Hopf involutória, $S^2 = 1$, temos que a contração entre os tensores M, Δ e S fornece a dimensão da álgebra, figura A.18. A seta que entra é igual à que sai. ▀

$$\xrightarrow{i} M \leftarrow \Delta \rightarrow S \xrightarrow{j} = \dim(\mathcal{A}) \xrightarrow{j}$$

FIG. A.18. Relação entre os tensores M, Δ e S .

A prova pode-se encontrar em [Kup91, BF12].

A.10 Lema.

Numa álgebra de Hopf involutória, $S^2 = 1$, as identidades seguintes são satisfeitas:

$$1. \ m_{ij}^i = m_{ij}^j,$$

$$\xrightarrow{i} m = \xrightarrow{j} m$$

FIG. A.19. Os tensores m_{ij}^i e m_{ij}^j são iguais.

$$2. \Delta_i^{ij} = \Delta_j^{ij},$$

$$\Delta \rightarrow = \rightarrow \Delta$$

FIG. A.20. Os tensores Δ_i^{ij} e Δ_j^{ij} são iguais.

Demonstração. A ideia básica é usar o lema anterior. É suficiente provar a parte 1 do lema e a parte 2 pode ser provada de maneira semelhante. Notemos que a parte esquerda

FIG. A.21. Prova diagramática dos tensores m_{ij}^i e m_{ij}^j ser iguais.

da identidade pode ser representada como na figura A.21(a). Usando as definições dos tensores M e Δ representamos A.21(a) em A.21(b). Com a associatividade da álgebra obtemos a figura A.21(c). No entanto, com a propriedade A.12(a) temos a figura A.21(d). Finalmente usando a propriedade da unidade e contraindo o tensor Δ com a co-unidade: $\Delta_i^{ij} \rightarrow \epsilon_j = \dim(\mathcal{A})$. Temos a figura A.21(e). End

No capítulo 3, mostra-se no lema 3.2 que os tensores M e Δ são ciclicamente invariantes, ou seja podem ser representados como na figuras A.22(a) e A.22(b). Usando isso, o lema

FIG. A.22. Outra representação diagramática dos tensores $M_{a_1 a_2 \dots a_n}$ e $\Delta_{b_1 b_2 \dots b_k}$.

anterior, a associatividade e co-associatividade da álgebra é fácil mostrar o resultado a seguir:

A.11 Corolário.

A orientação das setas no produto deixa invariante os tensores M e Δ , ver figuras

FIG. A.23. A orientação das setas deixa invariante o produto e co-produto.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

HANDLEBODIES E DIAGRAMAS DE HEEGAARD

amos aqui uma definição formal dos handlebodies e dos diagramas de Heegaard baseados nos trabalhos de Johnson e Virelizier [Joh, Ale01]. Se tenta definir os handlebodies e a partir deles se constroem as curvas fechadas disjuntas sob eles os quais determinam os diagramas de Heegaard.

Consideremos duas variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Sejam X e Y subconjuntos fechados das fronteiras de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ respectivamente. Definimos $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ como a união disjunta de nossas variedades ($\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$). Seja f uma função tal que, para $x \in X$ e $f(x) \in Y$ se considera a relação de equivalência $x \sim y$ se $y = f(x)$ onde $x \in X$ e $y \in Y$. O quociente de esta relação, dotado com a topologia quociente é o resultado de *grudar* $\mathcal{M}$ com $\mathcal{N}$ por médio de f . O conjunto se denota por $\mathcal{M} \cup_f \mathcal{N}$. No caso de ser X e Y subconjuntos disjuntos da mesma fronteira de $\mathcal{M}$, tomamos o quociente de $\mathcal{M}$ pela relação de equivalência $x \sim f(x)$. Neste caso, a topologia da nova variedade, se denota $\mathcal{M} \cup_f$ e é dada pela topologia quociente [Joh]. Dado o anterior, pode ser definido o seguinte objeto muito importante em topologia:

FIG. B.1. Vizinhança de pontos relacionados.

B.1 Definição (Handlebody).

Seja $B_1, \dots, B_n$ uma coleção de bolas tridimensionais fechadas e seja $D_1, \dots, D_m, D'_1, \dots, D'_m$ uma coleção de discos disjuntos emparelhados em $\cup \partial B_i$. Para cada $i \leq m$, seja $f_i : D_i \rightarrow D'_i$ um homeomorfismo. Seja H o resultado de todas as colagens. Se H é conexo então H é um *handlebody*. $\blacksquare$

Usaremos a notação $H^{n,m}$ para um handlebody construído de n bolas grudadas ao longo m discos (figura B.2). Como um handlebody é uma variedade com fronteira conexa pode ser calculado o gênero do handlebody conhecendo n e m . Pode se mostrar que a característica de Euler é dada por $\chi(\partial H^{n,m}) = 2n - 2m$. Como o gênero de uma superfície S é igual a $\frac{1}{2}(2 - \chi(S))$ obtemos que o gênero da superfície do handlebody é dado por $m + 1 - n$. Por tanto o requerimento para ser o handlebody conexo é $m \geq n - 1$. Um resultado importante é que, duas superfícies fechadas são homeomórficas se e só se elas tem o mesmo gênero [Cro05, Joh].

O próximo passo é grudar dois handlebodies para formar superfícies ainda mais complicadas. Sejam H_r e H_b do mesmo gênero, grudamos elas pelo homeomorfismo $f : \partial H_r \rightarrow$

FIG. B.2. Handlebody como uma coleção de 3-bolas, grudadas ao longo de discos. Esse handlebody é denotado por $H^{4,6}$.

∂H_b . As imagens das fronteiras ∂H_r e ∂H_b são superfícies em $\mathcal{M}$ que coincidem completamente. Ou seja, existe uma superfície Σ a qual é fronteira de H_r em $\mathcal{M}$ e de H_b em $\mathcal{M}$. Para entender as formas como a variedade $\mathcal{M}$ pode ser construída grudando handlebodies, vamos ver as maneiras como os handlebodies podem se incorporar em $\mathcal{M}$ tal que suas fronteiras coincidam.

B.2 Definição.

Uma *divisão de Heegaard* para uma variedade tridimensional $\mathcal{M}$ é uma tripla (Σ, H_r, H_b) onde Σ é uma superfície fechada incorporada em $\mathcal{M}$ e H_r, H_b são handlebodies integrados em $\mathcal{M}$ tal que $\partial H_r = \Sigma = \partial H_b = H_r \cap H_b$ e $H_r \cup H_b = \mathcal{M}$. A superfície Σ é chamada *superfície de Heegaard*. ■

As fronteiras de H_r e H_b são homeomórficas, assim H_r e H_b são homeomórficos [Joh, página 10]. Para cada superfície de Heegaard Σ , os handlebodies são os fechamentos das componentes do complemento de Σ em $\mathcal{M}$. A superfície de Heegaard determina os dois handlebodies. Com isso temos o seguinte teorema

B.3 Teorema.

Toda variedade tridimensional, compacta, fechada, conexa e orientável, permite uma divisão de Heegaard. ■

A demonstração pode se encontrar em diversos textos e artigos sobre topologia, em particular em [Joh, página 12] e [PS97, páginas 68 e 74].

Agora, vamos denotar a divisão de Heegaard da variedade tridimensional $\mathcal{M}$ por (H_r, H_b) . Por serem H_r e H_b superfícies homeomorfas com gênero g cada uma a sua vez é homeomorfa a um handlebody H com gênero g . Da definição B.1 do handlebody H existe uma coleção finita de discos bidimensionais disjuntos $\{D_1, \dots, D_g\}$ em H_r tais que cortam H_r em uma bola tridimensional, ver figura B.2. Similarmente, existe uma coleção finita $\{D'_1, \dots, D'_g\}$ de discos bidimensionais disjuntos em H_b tais que cortam H_b em uma bola tridimensional. Para $1 \leq i \leq g$, se define $r_i = \partial D_i$ e $b_i = \partial D'_i$ os quais podem ser tomados como círculos que se cruzam transversalmente. As coleções $r = \{r_1, \dots, r_g\}, b = \{b_1, \dots, b_g\}$ motivam a seguinte definição [Ale01, Joh]

B.4 Definição.

Um *diagrama de Heegaard* é uma tripla $D = (\Sigma, r, b)$, onde Σ é uma superfície de gênero g fechada, orientada e conexa e $r = \{r_1, \dots, r_g\}$, $b = \{b_1, \dots, b_g\}$ são dois pares de sistemas de curvas fechadas disjuntas sobre Σ tais que os complementos de $\cup_i r_i$ e $\cup_i b_i$ são conexos. As curvas r_i ($b = \{b_k\}$) são chamadas curvas *vermelhas* (*azuis*) do diagrama. Note que o conjunto $r \cap b$ é finito. O diagrama de Heegaard D é chamado *orientado* se todas as curvas vermelhas e azuis estão orientadas. ■

Essa definição é a definição formal da construção de diagramas de Heegaard feita no capítulo 2. Note-se que os pares de círculos r e b coincidem com as definições das curvas relacionadas com os links e as faces de uma triangulação dada. No entanto, como falado em 2.3, pelo lema B.3 cada triangulação pode ser decomposta num diagrama de Heegaard. Mas o contrário não é certo, cada diagrama de Heegaard não necessariamente corresponde a uma triangulação de uma variedade. Os moves das curvas já foram definidos na seção 2.3.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Um conceito útil em teoria de gauge na rede é o *operador de transporte paralelo* U , o qual é definido da seguinte maneira. Consideremos dois pontos, x e y , no espaço-tempo, e seja $\mathcal{C}_{yx}$, alguma curva que conecta x com y [MM94, pag. 92]. Esse mapeamento pode ser escrito como

$$U(\mathcal{C}_{yx}) : V_x \rightarrow V_y,$$

onde V_x e V_y são espaços vetoriais. Note que para cada curva do espaço-tempo está associado um transporte paralelo numa forma contínua e diferenciável. Também assumimos as seguintes condições de compatibilidade:

1. TRIVIAL. $U(\emptyset) = \mathbf{1}$, onde $\emptyset$ denota uma curva de comprimento zero.
2. COMPOSIÇÃO. $U(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1) = U(\mathcal{C}_2)U(\mathcal{C}_1)$, com $\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$ é a composição do caminho $\mathcal{C}_1$ seguido de $\mathcal{C}_2$ (figura C.1(a)).
3. PRODUTO INTERNO. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ o produto escalar no espaço vetorial V_x . Também os transportes paralelos tem que preservar o comprimento dos vetores $v \in V_x$, ou seja, para $u, v \in V_x$ devemos ter

$$\langle u, v \rangle_x = \langle U(\mathcal{C}_{yx})u, U(\mathcal{C}_{yx})v \rangle_y.$$

FIG. C.1. Propriedades do transporte paralelo.

Por outro lado, é conveniente definir $-\mathcal{C}$ como o caminho $\mathcal{C}$ de direção oposta, figura [C.1\(b\)](#), tal que $(-\mathcal{C}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ (-\mathcal{C})$. Definimos $*$ como uma operação algébrica, que mapeia transportes paralelos em transportes paralelos de direção oposta,

$$(C.1) \quad U(\mathcal{C})^* \equiv U(-\mathcal{C}).$$

Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$, onde o caminho inverso é $-\mathcal{C} = (-\mathcal{C}_1) \circ (-\mathcal{C}_2)$, a expressão [\(C.1\)](#) fornece

$$(U(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1))^* = U((-\mathcal{C}_1) \circ (-\mathcal{C}_2)),$$

com a propriedade de composição e a equação [\(C.1\)](#) obtemos

$$\begin{aligned} (U(\mathcal{C}_2)U(\mathcal{C}_1))^* &= U(-\mathcal{C}_1)U(-\mathcal{C}_2) \\ &= U(\mathcal{C}_1)^*U(\mathcal{C}_2)^* \end{aligned}$$

ou seja a operação $*$ comuta os fatores. Naturalmente, tomando $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_2 = -\mathcal{C}$ na expressão anterior temos $U(\mathcal{C})^*U(-\mathcal{C})^* = U(\mathcal{C})^*U(\mathcal{C}) = \mathbf{1}$, por esta razão tradicionalmente tomamos [\[Tho03\]](#)

$$U(-\mathcal{C}) = U(\mathcal{C})^* = U(\mathcal{C})^{-1}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [Ale01] Virelizier Alexis, *Algèbres de Hopf graduées et fibrés plats sur les 3-variétés*, Ph.D. thesis, Institut de Recherche Mathématique Avancée, 2001. (Citado nas páginas [iv](#), [v](#), [5](#), [23](#), [34](#), [38](#), [97](#) e [98](#).)
- [BDHK12] B. Bahr, B. Dittrich, F. Hellmann, and W. Kaminski, *Holonomy Spin Foam Models: Definition and Coarse Graining*, ArXiv e-prints (2012). (Citado na página [10](#).)
- [BDI74] R. Balian, J. M. Drouffe, and C. Itzykson, *Gauge fields on a lattice. I. General outlook*, Phys. Rev. D **10** (1974), 3376–3395. (Citado nas páginas [iv](#), [v](#) e [4](#).)
- [BDI75] ———, *Gauge fields on a lattice. II. Gauge-invariant Ising model*, Phys. Rev. D **11** (1975), 2098–2103. (Citado nas páginas [iv](#) e [v](#).)
- [BDR11] Benjamin Bahr, Bianca Dittrich, and James P. Ryan, *Spin foam models with finite groups*. (Citado nas páginas [10](#) e [13](#).)
- [BF12] M. J. Bernabe-Ferreira, *Teorias de Campos Discretas e Modelos Topológicos*, Master’s thesis, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 2012. (Citado nas páginas [12](#), [19](#), [22](#), [31](#), [38](#), [49](#), [92](#) e [93](#).)
- [BJM10] A.P. Balachandran, G. Jo, and G. Marmo, *Group Theory and Hopf Algebra: Lectures for Physicists*, World Scientific, 2010. (Citado nas páginas [5](#) e [88](#).)
- [Bou97] D. V. Boulatov, *Quantum Deformation of Lattice Gauge Theory*, Communications in Mathematical Physics **186** (1997), 295–322. (Citado na página [4](#).)
- [CC82] David J. E. Callaway and Larry J. Carson, *Abelian Higgs model: A Monte Carlo study*, Phys. Rev. D **25** (1982), 531–537. (Citado na página [64](#).)
- [CFS94] Stephen-wei Chung, Masafumi Fukuma, and Alfred Shapere, *Structure of Topological Lattice Field Theory in Three Dimensions*, International Journal of Modern Physics A **09** (1994), no. 08, 1305–1360. (Citado nas páginas [5](#), [6](#), [28](#), [31](#), [37](#) e [91](#).)
- [CKS98] J. Scott Carter, Louis H. Kauffman, and Masahico Saito, *Structures and Diagrammatics of Four Dimensional Topological Lattice Field Theories*, Advances in Math. **146**, 1998, pp. 980602–3. (Citado nas páginas [5](#), [30](#), [31](#) e [91](#).)

- [CO83] Michael Creutz and Masanori Okawa, *Generalized Actions in $\mathbb{Z}_p$ Lattice Gauge Theory*, Nuclear Physics B **220** (1983), no. 2, 149–166. (Citado nas páginas 11 e 64.)
- [Cre80] Michael Creutz, *Phase Diagrams for Coupled Spin-Gauge Systems*, Phys. Rev. D **21** (1980), 1006–1012. (Citado nas páginas iv, v, 15, 17 e 64.)
- [Cro05] M.D. Crossley, *Essential Topology*, Springer Undergraduate Mathematics, Springer-Verlag London Limited, 2005. (Citado na página 97.)
- [DH12] Bianca Dittrich and Philipp A Höhn, *Canonical simplicial gravity*, Classical and Quantum Gravity **29** (2012), no. 11, 115009. (Citado nas páginas 5 e 30.)
- [DW90] Robbert Dijkgraaf and Edward Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Communications in Mathematical Physics **129** (1990), no. 2, 393–429 (English). (Citado na página 5.)
- [FHK94] M. Fukuma, S. Hosono, and H. Kawai, *Lattice topological field theory in two dimensions*, Communications in Mathematical Physics **161** (1994), 157–175. (Citado nas páginas 5, 6, 28, 31 e 36.)
- [FM83] Klaus Fredenhagen and Mihail Marcu, *Charged States in $\mathbb{Z}_2$ Gauge Theories*, Communications in Mathematical Physics **92** (1983), no. 1, 81–119 (English). (Citado nas páginas 4 e 5.)
- [FPTS12] Miguel J. B. Ferreira, Victor A. Pereira, and Paulo Teotonio-Sobrinho, *Quasi-Topological Quantum Field Theories and $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theories*, International Journal of Modern Physics A **27** (2012), no. 23, 1250132. (Citado nas páginas iv, v, 5, 19, 75 e 78.)
- [FS79] Eduardo Fradkin and Stephen H. Shenker, *Phase diagrams of lattice gauge theories with Higgs fields*, Phys. Rev. D **19** (1979), 3682–3697. (Citado na página 64.)
- [GP96] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics Series, Cambridge University Press, 1996. (Citado nas páginas 3, 11, 16 e 76.)
- [GS96] Martí Ruiz-Altaba Gómez César and Germán Sierra., Cambridge University Press, 1996. (Citado na página 89.)
- [JL01] G. James and M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge mathematical textbooks, Cambridge University Press, 2001. (Citado nas páginas 12, 16, 48, 62 e 86.)
- [Joh] Jesse Johnson, *Notes on Heegaard Splittings*. (Citado nas páginas 5, 38, 97 e 98.)

- [Kog79] John B. Kogut, *An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 659–713. (Citado nas páginas 4, 5, 19, 53, 66 e 82.)
- [KR99] L. H. Kauffman and D. E. Radford, *On Two Proofs for the Existence and Uniqueness of Integrals for Finite-Dimensional Hopf Algebras*, ArXiv Mathematics e-prints (1999). (Citado nas páginas 5, 32 e 92.)
- [Kup91] Greg Kuperberg, *Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, International Journal of Mathematics **02** (1991), no. 01, 41–66. (Citado nas páginas iv, v, 5, 6, 31, 32, 37, 38, 91, 92 e 93.)
- [Kup97] ———, *Non-involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, eprint arXiv:q-alg/9712047, December 1997, p. 12047. (Citado nas páginas 5 e 31.)
- [MM94] I. Montvay and G. Munster, *Quantum fields on a lattice*, 1994, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1994) 491 p. (Cambridge monographs on mathematical physics). (Citado na página 101.)
- [MMS79] R. Marra and S. Miracle-Sole, *On the statistical mechanics of the gauge invariant Ising model*, Communications in Mathematical Physics **67** (1979), no. 3, 233–240 (English). (Citado na página 82.)
- [Mor83] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*, World Scientific, 1983. (Citado na página 13.)
- [OHZ06] Jaan Oitmaa, Chris Hamer, and Weihong Zheng, *Series Expansion Methods for Strongly Interacting Lattice Models*, Cambridge University Press, May 2006. (Citado nas páginas 15, 16 e 76.)
- [Pac78] Udo Pachner, *Bistellare Äquivalenz kombinatorischer Mannigfaltigkeiten*, Archiv der Mathematik **30** (1978), no. 1, 89–98 (German). (Citado nas páginas 5 e 30.)
- [Pac91] ———, *P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*, Eur. J. Comb. **12** (1991), no. 2, 129–145. (Citado nas páginas 5 e 30.)
- [PS97] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*, Amer Mathematical Society, 1997. (Citado nas páginas 5 e 98.)
- [Reb83] C. Rebbi, *Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulations*, World Scientific, 1983. (Citado na página 19.)
- [Rob05] Oeckl Robert, *Discrete Gauge Theory - From Lattices to TQFT*, Imperial College Press, 8 2005. MR MR2174961 (Citado nas páginas 3, 5, 9, 10, 13 e 30.)

- [Sal10] S. Salinas, *Introduction to Statistical Physics*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer, 2010. (Citado nas páginas 4 e 67.)
- [Sav80] Robert Savit, *Duality in field theory and statistical systems*, Rev. Mod. Phys. **52** (1980), 453–487. (Citado nas páginas 19 e 53.)
- [Sei82] E. Seiler, *Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics*, Lecture notes in physics, Springer-Verlag, 1982. (Citado nas páginas 4, 5, 12, 80 e 82.)
- [Tho03] Prüstel Thorsten, *Gauge Theories with Nonunitary Parallel Transport*, Ph.D. thesis, Universität Hamburg, 2003. (Citado na página 102.)
- [Tun85] W.K. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, 1985. (Citado na página 17.)
- [TV92] V.G. Turaev and O.Y. Viro, *State sum Invariant of 3-Manifolds and Quantum 6j-Symbols*, Topology **31** (1992), no. 4, 865–902. (Citado na página 5.)
- [Weg71] F. J. Wegner, *Duality in Generalized Ising Models and Phase Transitions without Local Order Parameters*, Journal of Mathematical Physics **12** (1971), 2259–2272. (Citado nas páginas 3, 4, 9, 19, 53 e 65.)
- [Wil74] Kenneth G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D **10** (1974), 2445–2459. (Citado nas páginas 4, 9 e 83.)
- [Wit91] Edward Witten, *On quantum gauge theories in two dimensions*, Communications in Mathematical Physics **141** (1991), 153–209, 10.1007/BF02100009. (Citado na página 10.)
- [YT07] Nelson Yokomizo and Paulo Teotonio-Sobrinho, *$GL(2, \mathbb{R})$ dualities in generalised $\mathbb{Z}_2$ gauge theories and Ising models*, Journal of High Energy Physics **2007** (2007). (Citado nas páginas 4, 19, 53, 65 e 66.)
- [YTSB07] Nelson Yokomizo, Paulo Teotonio-Sobrinho, and Joao C.A. Barata, *Topological low-temperature limit of $Z(2)$ spin-gauge theory in three dimensions*, Phys.Rev. **D75** (2007), 125009. (Citado nas páginas iv e v.)
- [YTSM09] Nelson Yokomizo, Paulo Teotonio-Sobrinho, and Carlos Molina, *On two-dimensional Quasitopological Field Theories*, International Journal of Modern Physics A **24** (2009), no. 32, 6105–6121. (Citado nas páginas iv, v, 5 e 69.)

- Álgebra de grupo, 48
 - Definição, 48
- Álgebras de Hopf, 31, 88
 - Definição, 91
 - Involutória, 31, 33
 - Não Involutória, 31
- moves* de Pachner, 30
- Ação
 - Ação devida às faces, 12
 - Ação devida aos links, 12
 - Ação modelo de gauge-Higgs, 16–18
 - Ação total, 12
- Caracteres, 16
- Co-integral, 92
 - Álgebra de grupo, 49
 - Propriedade, 41
- Coloração, 28
- Dobradiça, 28
- Dualidade, 53
- Espaço Dual, 85
- Função de partição, 36
 - Modificada, 58, 72
 - Caso bidimensional, 61, 64
- Handlebody, 97
- Heegaard
 - Diagramas de Heegaard, 19, 20, 99
 - Estabilização, 24
 - Homeomorfismo, 23
 - Orientação contrária, 23
 - Sliding, 24
 - Two point move, 24
- Divisão, 98
- Superfície, 98
- Holonomia, 10
 - Loops de Wilson, 73
- Integral, 92
 - Propriedade, 41
- Limites topológicos, 67
- Loops de Wilson, 15, 37
 - Modificada, 73
 - Caso bidimensional, 61
- Rede, 9
 - Orientada pelas faces, 10
 - Orientada pelos links, 9
- Sliding, 43, 71
 - Elementos homogêneos, 50
- Tensores, 86
 - Notação diagramática, 87
- Teoria topológica, 28
 - Red, 29
- Transformações de Base, 53
- Transformações de gauge, 13
 - Campo de matéria, 15
 - Gauge unitário, 17, 37
- Two point move
 - Definição, 24
 - Lema, 40