Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Perturbações Gravitacionais em um Meio Térmico

Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Fabiano Rabelo Machado

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IF-USP) - Orientador.

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IF-USP)

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IF-USP)

Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho (UFPB)

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação.

530.243
M 149 p
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Machado, Fabiano Rabelo

Perturbações Gravitacionais em um Meio Térmico.
São Paulo, 2003

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo
Instituto de Física. Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Fernando T. C. Brandt
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Funções de Green térmicas;
2. Grávitons; 3. Relações de Dispersão;
4. Teorias de Gauge.

USP/IF/SBI-039/2003

Abstract

We have computed the thermal one-graviton function and the self-energy in one-loop using a temporal gauge. In order to deal with the extra poles which are present in the temporal gauge, we employ an ambiguity-free technique in the imaginary-time formalism. We obtain, for temperatures T high compared with the external momentum and well below the Plank scale, the leading T^4 as well as the sub-leading T^2 and $\log(T)$ contributions to the graviton self-energy. We show that the extra pole contributions do not change the behaviour of the leading and sub-leading contributions from hard thermal loop region. We verify that the leading contributions are gauge independent. We also verify the 't Hooft identities for the sub-leading T^2 terms and show that the logarithmic part has the same structure as the residue of ultraviolet pole of zero temperature graviton self-energy. We compute the dispersion relations up to GT^2 order and we discuss the gauge dependence induced by sub-leading contributions T^2 . We also compute the thermal one-graviton Green's function in the two-loop approximation for two distinct gauge classes.

Resumo

Calculamos as funções de Green térmicas de um e dois grávitons em um “loop” no “gauge” temporal. Para tratar os polos extras que surgem neste “gauge” utilizamos uma técnica livre de ambiguidades no formalismo de tempo imaginário. Foram calculadas, para temperaturas altas comparadas com o momento externo e menores que a escala de Plank, as contribuições dominantes T^4 e sub-dominantes T^2 e $\log(T)$ para a auto-energia do gráviton. Mostramos que as contribuições dos polos extras não modificam o comportamento das contribuições dominantes e sub-dominantes em altas temperaturas. Verificamos que os termos dominantes T^4 não dependem do parâmetro de “gauge”. Verificamos também que as identidades de ‘t Hooft são satisfeitas pelos termos T^2 e mostramos que o termo $\log(T)$ tem a mesma estrutura que o resíduo do polo ultravioleta da auto-energia a temperatura zero. Calculamos as relações de dispersão no plasma de grávitons até a ordem GT^2 e discutimos a dependência de “gauge” induzida pelos termos T^2 da auto-energia. Calculamos também a função de um gráviton em dois “loops” em duas classes distintas de “gauge”.

Ao meu filho Matheus

Agradecimentos

Gostaria de agradecer,
ao meu orientador, Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt,
pela oportunidade de trabalharmos juntos e por ter me introduzido nos caminhos da
pesquisa;
e a FAPESP pelo suporte financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	Regras de Feynman	4
2.1	A Lagrangiana Total	4
2.2	Regras de Feynman no “Gauge” Temporal	6
2.2.1	Propagador e Vértices de Auto-interação do Grávitons	7
2.2.2	Propagador dos “Ghosts” e Vértice “Ghost”-Gráviton-“Ghost”	11
2.3	Regras de Feynman no “Gauge” Covariante	13
2.3.1	Propagador e Vértices de Auto-interação do Grávitons	14
2.3.2	Propagador dos “Ghosts” e Vértice “Ghost”-Gráviton-“Ghost”	15
3	Funções de um e dois Grávitons no “Gauge” Temporal	18
3.1	Função de um Gráviton	18
3.2	Função de Dois Grávitons	21
3.2.1	Contribuição Dominante	23
3.2.2	Contribuição Sub-dominante T^2	25
3.2.3	Contribuição Sub-dominante $\log(T)$	26
3.3	Contribuição dos Pólos de Prescrição para a Função do dois Grávitons	27
3.4	Conexão com a Teoria Semi-clássica de Transporte	31
4	Função de um Gráviton em dois Loops	35
4.1	A Função de um Gráviton em dois Loops	35
4.2	Gauge Covariante	36

4.3 Gauge Temporal	37
5 Relações de Dispersão	39
5.1 A Ação Efetiva Térmica	39
5.2 Fixação de "Gauge" para as Perturbações da Métrica	44
5.3 Helicidades	46
5.4 Relações de Dispersão	48
6 Conclusões	52
A Funções de Green Térmicas para Campos Escalares	54
A.1 Função de Partição para Bósons	54
A.2 O Campo Escalar Neutro	57
A.3 Regras Diagramáticas para Teoria $\lambda\phi^4$	58
B Método de Amplitudes de Espalhamento Frontais	61
B.1 Funções de Green Térmicas com um Propagador	61
B.2 Funções de Green Térmicas com Dois Propagadores	64
C Identidades de Ward Gravitacionais	68
C.1 Identidades de Ward na Aproximação de Árvore	68
C.2 Identidades de Ward na Aproximação de um "Loop"	70
D Teoria de resposta Linear	73
D.1 Resposta Linear a um Campo Externo	73
D.2 Oscilações do Plasma	75

Capítulo 1

Introdução

O problema abordado neste trabalho envolve uma investigação de teorias de “gauge” levando-se em conta efeitos térmicos, o que engloba, em princípio, todos fenômenos onde os efeitos quânticos, relativísticos e termodinâmicos são igualmente importantes.

A inclusão de efeitos térmicos em teorias de campos pode ser obtida a partir da integral funcional de Feynman, com tempo imaginário (conhecido como formalismo de tempo imaginário [Kap89]) onde o funcional gerador da teoria é identificado com a função de partição do sistema de partículas descrito pelo modelo de teoria de campos (mais detalhes são mostrados no apêndice A). As grandezas físicas são expressas, através de um tratamento perturbativo convencional, em termos de funções de Green térmicas possuindo uma expansão em diagramas de Feynman, semelhantemente ao que é feito a temperatura zero [Kap89]. Em particular, a auto-energia térmica, ou função de Green térmica de dois pontos, é de especial interesse no estudo de propriedades de um meio térmico, tais como massas térmicas induzidas, blindagem, amortecimento ou relações de dispersão.

Do ponto de vista formal, a obtenção das funções de Green térmicas é semelhante ao tratamento feito em teorias de campos quânticos a temperatura $T = 0$. De fato, em ambos os casos a expansão perturbativa é expressa em termos de diagramas de Feynman. No entanto, existe uma importante diferença. Enquanto no caso $T = 0$ as contribuições de ordem mais baixa não envolvem necessariamente “loops”, os efeitos térmicos somente se manifestam quando levamos em conta diagramas possuindo “loops” (além disso, como veremos, a maneira de se calcular os “loops” térmicos difere do procedimento a $T = 0$). Assim, podemos dizer que os efeitos térmicos são análogos aos efeitos de flutuações do vácuo que ocorrem a $T = 0$.

É conhecido que o cálculo da auto-energia térmica, em uma dada ordem de teoria de perturbação, conduz em geral, à resultados dependentes de “gauge” [Bel96, Kap89]. Atualmente sabemos que resultados consistentes podem ser obtidos, desde que as

escalas de momento envolvidas sejam identificadas de maneira adequada. Existe uma escala macia, onde o momento é da ordem de λT (λ é a constante de acoplamento), onde é preciso re-somar diagramas possuindo “loops” internos com momento duro; os “hard thermal loops” (HTL). Uma parte importante deste procedimento envolve a demonstração das propriedades de invariância de “gauge” de todas as funções de Green térmicas no limite de HTL [FT91, FT92, BP92, BFTW93].

O problema da renormalização da teoria da gravitação pode ser tratado levando-se em conta que teorias de campos podem ser interpretadas como teorias efetivas válidas em certos intervalos de energia [Wei95]. Quando as energias são suficientemente altas as interações mudam e novos graus de liberdade aparecem, modificando a natureza da teoria. Os efeitos dos novos graus de liberdade são suprimidos quando consideramos baixas energias e estes são descritos por interações não renormalizáveis. Assim, na ausência de uma teoria consistentemente quantizada podemos delimitar claramente a região de interesse físico, e verificar se a teoria disponível pode ser ou não utilizada para se fazer algum tipo de previsão.

Um aspecto importante da teoria efetiva de campos é a ordenação de cada um dos termos na lagrangiana, segundo potências de fatores das escalas de baixa energia divididos pelas escalas de altas energias. No caso da gravitação, a lagrangiana pode ser ordenada em potências da curvatura. Por sua vez, as curvaturas envolvem duas derivadas no campo gravitacional, podendo ser consideradas como quantidades pequenas. Alguns trabalhos em temperatura zero [tH75] mostraram que a inclusão dos termos quadráticos na curvatura à lagrangiana de Einstein torna a teoria renormalizável em um “loop”. A ação gravitacional incluindo termos quadráticos na curvatura R pode ser escrita da seguinte forma

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + a R^2 + b R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] \quad (1.1)$$

onde a e b são constantes numéricas. Existem na verdade três tipos de termos quadráticos mas no trabalho [tH75] utilizou-se a identidade de Gauss-Bonnet para demonstrar que apenas dois independentes.

Uma importante delimitação imposta ao tipo de problema que pretendemos estudar é

$$T^2 \ll G^{-1} \quad \Rightarrow \quad GT^2 \ll 1 \quad (1.2)$$

onde T é a temperatura e G é a constante de Newton ($\hbar = c = k_B = 1$).

No capítulo 3 mostraremos que $T_{\mu\nu}$ (o tensor energia-momento) é da ordem de T^4 . Assim levando em conta (1.2) e a equação de Einstein temos que

$$R \sim GT^4 \ll T^2 \quad (1.3)$$

Podemos verificar de (1.1) que a razão entre termos quadráticos e lineares na curvatura é GR . De (1.2) e (1.3) vemos que $GR \sim (GT^2)^2 \ll 1$, e assim os fenômenos

que satisfazem (1.2) podem ser aproximadamente descritos utilizando a gravitação como descrita pela ação de Einstein-Hilbert.

Quando $\lambda \ll 1$ a contribuição HTL estará descrevendo situações extremas de temperatura quando $T \gg k$, onde k é o momento externo típico das funções de Green térmica. Assim, levando-se em conta (1.2) a região de interesse torna-se

$$|\vec{k}|^2, k_0^2 \ll T^2 \ll G^{-1}. \quad (1.4)$$

Um dos principais objetivos do trabalho foi investigar a dependência de “gauge” de funções de Green térmicas na gravitação. Em QCD esta questão já foi bastante investigada [FT92, BP92, BFTW93]. Dentro do que foi investigado é importante ressaltar que foi formalmente demonstrada a independência de “gauge” das contribuições dominantes no regime de altas temperaturas para as funções de Green térmicas [BP90a, BP90b]. Mas em gravitação não existe uma demonstração formal dessa independência. Como cálculos explícitos das funções térmicas de um e dois grávitons já haviam sido feitos no “gauge” covariante, calculamos então estas funções de Green no “gauge” temporal e comparamos com os correspondentes resultados calculados no “gauge” covariante.

O “gauge” temporal tem despertado recentemente bastante interesse em temperatura zero. Mas neste “gauge” surgem pólos extres que trazem algumas dificuldades técnicas. Uma técnica livre de ambiguidades proposta por Leibbrandt [LS94] tem sido utilizada por preservar a possibilidade de se fazer rotação de Wick.

Investigamos também a dependência de “gauge” induzida pelas modificações da inclusão das contribuições sub-dominantes T^2 da auto-energia do gráviton nas relações de dispersão da propagação de ondas no plasma de grávitons devido a pequenas perturbações.

Essa tese esta organizada da seguinte maneira. No próximo capítulo iremos derivar as regras de Feynman em duas classes distintas de “gauge”. No capítulo 3 usaremos as regras de Feynman obtidas para calcular explicitamente as funções de Green térmicas de um e dois grávitons em um “loop” no “gauge” temporal. Iremos também obter, através de um formalismo semi-clássico, as contribuições dominantes em altas temperaturas para as funções de um e dois grávitons. No capítulo 4 calcularemos a função de um gráviton em dois “loops” em duas classes distintas de “gauge”. No capítulo 5 usaremos os resultados do cálculo das funções de um e dois grávitons para a obtenção das relações de dispersão. No capítulo 6 faremos uma conclusão geral sobre os resultados obtidos. No apêndice A faremos uma breve introdução ao formalismo de tempo imaginário. No apêndice B apresentaremos o método de amplitudes frontais usado no cálculo de funções de Green térmicas. No apêndice C apresentaremos as identidades de Ward que relacionam os vértices de interação à nível de árvore e também as que relacionam as funções de Green na aproximação de um “loop”. Finalmente no apêndice D, apresentaremos uma breve introdução à teoria de resposta linear.

Capítulo 2

Regras de Feynman

Neste capítulo apresentaremos a dedução da lagrangiana total no “gauge” de Feynman e no “gauge” temporal. Em seguida serão obtidos os respectivos vértices e propagadores dos grávitons e “ghosts” necessários para calcular as funções de green consideradas neste trabalho.

As regras de Feynman para propagadores e vértices utilizadas no formalismo de tempo imaginário podem ser lidas diretamente da lagrangiana da teoria (no apêndice A isto é demonstrado para o caso da teoria escalar), semelhantemente em temperatura zero.

2.1 A Lagrangiana Total

A teoria clássica da gravitação pode ser vista como uma teoria de “gauge” [Ram90] já que sua ação é invariante sob transformações do tipo

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x). \quad (2.1)$$

Mas ao tentarmos quantizar teorias de “gauge” através do formalismo funcional, por exemplo, surgem alguns problemas relacionados à invariância de “gauge” [Ram90, Mut87] que são resolvidos acrescentando à lagrangiana termos que reduzem os graus de liberdade da teoria. No caso gravitacional, o funcional gerador pode ser dado por

$$\begin{aligned} Z &= N \int d[g^{\mu\nu}] \det \left| \frac{\delta F_\lambda}{\delta \epsilon^\nu} \right| \delta [F_\lambda(g^{\mu\nu})] \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_E d^4x \right\} \\ &= N \int d[g^{\mu\nu}] d[\xi^\mu] d[\eta^\nu] \exp \left\{ i \int \left(\mathcal{L}_E - \frac{1}{\kappa^2 \alpha} F^2[g^{\mu\nu}] - \xi^\mu M_{\mu\nu} \eta^\nu \right) d^4x \right\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde F_λ é o termo de fixação de "gauge", ξ^μ e η^μ são variáveis de Grassmann chamadas de "ghosts" de Faddeev e Popov que juntamente com $M_{\mu\nu} = \frac{\delta F_\lambda}{\delta \epsilon^\nu}$, constituem a Lagrangiana de Faddeev e Popov. Obtemos assim uma lagrangiana efetiva dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{L}_E$ é a lagrangiana clássica de Einstein-Hilbert, $\mathcal{L}_{GF}$ é a lagrangiana de fixação de "gauge" e $\mathcal{L}_{FP}$ é a lagrangiana de Faddeev e Popov.

Na Teoria Geral da Relatividade, a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_E$ é definida como

$$\mathcal{L}_E = \frac{2}{\kappa^2} (-g)^{1/2} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$ é a constante de acoplamento gravitacional, $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $g = \det g_{\mu\nu}$ e

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho + \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma, \quad (2.5)$$

é o Tensor de Ricci com

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{g^{\alpha\omega}}{2} (g_{\beta\omega,\gamma} + g_{\omega\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\omega}), \quad (2.6)$$

os símbolos de Christoffel. Neste ponto, é conveniente introduzirmos explicitamente o campo gravitacional e assim precisamos escolher a representação a ser utilizada, ou seja, podemos expressar o campo gravitacional, por exemplo, das seguintes maneiras

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} + \kappa \tilde{\phi}^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + \kappa \phi_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski, $\tilde{\phi}_{\mu\nu}$ e $\phi_{\mu\nu}$ é o campo gravitacional nas representações (2.7) e (2.8) respectivamente. A densidade tensorial $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é dada por

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Dependendo do termo de fixação de "gauge" utilizado pode ser mais conveniente, do ponto de vista de cálculo, optar por uma determinada representação. Mas como veremos adiante podemos relacionar funções de Green térmicas calculadas em diferentes representações.

A expansão da lagrangiana (2.4) utilizando as representações (2.7) ou (2.8) é conhecida como expansão de campo fraco. Uma propriedade interessante é que esta expansão nos leva a uma lagrangiana com um número infinito de vértices. Podemos notar também que em ambas as representações estamos expandindo sobre campos de fundo plano considerando assim um sistema com espaço-tempo plano. É claro que a forma mais geral da expansão deveria ser feita sobre campos de fundo curvos, mas calcular regras de Feynman em espaço-tempo curvo é algo difícil de se fazer principalmente sob o ponto de vista técnico.

2.2 Regras de Feynman no “Gauge” Temporal

Em teorias de “gauge” não abelianas frequentemente são utilizados os “gauges” não covariantes. A escolha mais usada é aquela do “gauge” axial geral

$$n^\mu A_\mu(x) = 0 \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad n^2 = n_0^2 - \vec{n}^2,$$

onde A_μ está representando o campo de “gauge” e $n_\mu = (n_0, \vec{n})$ é um vetor constante arbitrário que define uma direção preferencial no espaço, daí o nome de “gauge” axial.

Diferentes formas funcionais da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_{GF}$, acopladas com diferentes valores de n^2 , geram alguns “gauges” axiais particularmente convenientes. No presente trabalho será usado o “gauge” temporal axial e vamos considerar o caso $n^2 > 0$. Assim, seguindo nossa notação

$$F_\lambda = \kappa n^\mu \phi_{\mu\lambda}. \quad (2.10)$$

É conveniente escrevermos o quadrivetor n_μ em termos do quadrivetor velocidade do banho térmico, $u_\mu \equiv (1, 0, 0, 0)$, da seguinte forma $n_\mu = n_0 u_\mu$ e vamos optar pela convenção

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{n_0^2}{2\Xi} (u^\mu \phi_{\mu\lambda})^2, \quad (2.11)$$

onde estamos chamando de Ξ o parâmetro de fixação de “gauge”. Com essa escolha é conveniente usar a representação $\kappa \phi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ para mantermos F na categoria de “gauges” lineares. Escrevendo o tensor de Ricci em termos de $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ obtemos da lagrangiana (2.4),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E = & -\frac{(-g)^{1/2}}{\kappa^2} \left[-g^{\mu\nu} g^{\rho\omega}_{,\nu} g_{\omega\rho,\mu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\omega} g_{\omega\rho,\mu\nu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\omega}_{,\rho} g_{\mu\nu,\omega} - g^{\mu\nu} g^{\rho\omega} g_{\mu\nu,\omega\rho} \right. \\ & + 2g^{\mu\nu} g^{\rho\omega}_{,\rho} g_{\mu\omega,\nu} + 2g^{\mu\nu} g^{\rho\omega} g_{\mu\omega,\nu\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\omega} g_{\sigma\omega} g_{\rho\gamma} g^{\rho\gamma}_{,\sigma} \\ & \left. - \frac{1}{2} g^{\sigma\omega} g_{\gamma\nu,\sigma} g^{\nu\gamma}_{,\omega} + g^{\rho\gamma} g_{\gamma\nu,\sigma} g^{\nu\sigma}_{,\rho} + g^{\nu\sigma}_{,\nu} g^{\gamma\rho}_{,\sigma} g_{\gamma\rho} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

fazendo integrais por partes nos termos com derivadas duplas e usando

$$(\sqrt{-g})_{,\alpha} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}_{,\alpha}, \quad (2.13)$$

que resulta da definição do determinante, obtemos de (2.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E = & \frac{(-g)^{1/2}}{2\kappa^2} \left[g_{\beta\rho} g_{\alpha\lambda} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{,\nu} g^{\lambda\rho}_{,\mu} - 2g_{\alpha\lambda} g^{\alpha\beta}_{,\rho} g^{\lambda\rho}_{,\beta} + 2g_{\gamma\sigma} g^{\gamma\sigma}_{,\rho} g^{\lambda\rho}_{,\lambda} \right. \\ & \left. - g_{\lambda\rho} g^{\lambda\rho}_{,\mu} g_{\gamma\sigma} g^{\gamma\sigma}_{,\nu} g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Podemos notar que todos os termos da expressão (2.14) possuem duas derivadas simples, o que é evidente devido à estrutura do tensor de Ricci (2.5). Desta forma a expansão no campo gravitacional começa com ordem zero em κ .

2.2.1 Propagador e Vértices de Auto-interação do Grávitons

Para acharmos as regras de Feynman para o propagador e as auto-interações dos grávitons precisamos expressar a lagrangiana (2.14) em termos do campo $\phi_{\mu\nu}$ usando (2.8) e a inversa desta definição, a saber,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa\phi^{\mu\nu} + \kappa^2\phi^{\mu\alpha}\phi_\alpha^\nu - \kappa^3\phi^{\mu\alpha}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\beta\nu} + \mathcal{O}(\kappa^4), \quad (2.15)$$

assim como a expansão para $\sqrt{-g}$

$$\begin{aligned} g &= \det g_{\mu\nu} \\ &= \exp\{Tr[\ln(\eta_{\mu\nu} + \kappa\phi_{\mu\nu})]\} \\ &= \det \eta_{\mu\alpha} \exp\{Tr[\ln(\delta_\nu^\alpha + \kappa\phi_\nu^\alpha)]\} \\ &\approx \det \eta_{\mu\alpha} \exp\{Tr[\kappa\phi_\nu^\alpha - \frac{\kappa^2}{2}\phi_\beta^\alpha\phi_\nu^\beta]\} \\ &= -\exp\{\kappa\phi_\alpha^\alpha - \frac{\kappa^2}{2}\phi_\beta^\alpha\phi_\alpha^\beta\} \\ &\approx -1 - \kappa\phi_\alpha^\alpha + \frac{\kappa^2}{2}(\phi_\beta^\alpha\phi_\alpha^\beta - \phi_\alpha^\alpha\phi_\beta^\beta); \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\sqrt{-g} \approx 1 + \frac{\kappa}{2}\phi_\alpha^\alpha + \frac{\kappa^2}{4}\left(\frac{1}{2}\phi_\alpha^\alpha\phi_\beta^\beta - \phi_\beta^\alpha\phi_\alpha^\beta\right) + \mathcal{O}(\kappa^3). \quad (2.16)$$

Substituindo as equações (2.8), (2.15) e (2.16) na lagrangiana (2.14) obtemos uma série em potências de κ . A parte quadrática da expansão, que é o termo de ordem zero, mais o termo de fixação de "gauge" constituirão a parte quadrática em ϕ_ν^μ da lagrangiana efetiva que no espaço dos momentos é dada por

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu\alpha\beta}^2(k) &= \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}k^2 - k_\mu k_\alpha \eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}k^2 + k_\mu k_\nu \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{n_0^2}{\Xi}\eta_{\nu\beta}u_\mu u_\alpha + \mu \leftrightarrow \nu \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \leftrightarrow \beta \right] + (\mu, \nu) \leftrightarrow (\alpha, \beta) \right\}. \end{aligned}$$

O propagador é o inverso da parte quadrática e para obtê-lo podemos escrever-lo em termos de uma base tensorial da seguinte forma

$$P_{\mu\nu\rho\sigma}^G = \sum_{i=1}^{14} c_i \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^i \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^1 &= \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} \\ \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^2 &= \eta_{\mu\rho}u_\nu u_\sigma + \eta_{\mu\sigma}u_\nu u_\rho + \eta_{\nu\rho}u_\mu u_\sigma + \eta_{\nu\sigma}u_\mu u_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^3 &= u_\mu u_\nu u_\rho u_\sigma \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^4 &= \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^5 &= \eta_{\mu\nu} u_\rho u_\sigma + \eta_{\rho\sigma} u_\mu u_\nu \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^6 &= (\eta_{\mu\rho} k_\nu + \eta_{\nu\rho} k_\mu) u_\sigma + (\eta_{\mu\sigma} k_\nu + \eta_{\nu\sigma} k_\mu) u_\rho + \\
&\quad + (\eta_{\mu\rho} u_\nu + \eta_{\nu\rho} u_\mu) k_\sigma + (\eta_{\mu\sigma} u_\nu + \eta_{\nu\sigma} u_\mu) k_\rho \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^7 &= k_\mu u_\nu u_\rho u_\sigma + k_\nu u_\mu u_\rho u_\sigma + k_\rho u_\mu u_\nu u_\sigma + k_\sigma u_\mu u_\nu u_\rho \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^8 &= \eta_{\mu\rho} k_\nu k_\sigma + \eta_{\mu\sigma} k_\nu k_\rho + \eta_{\nu\rho} k_\mu k_\sigma + \eta_{\nu\sigma} k_\mu k_\rho \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^9 &= k_\mu k_\nu u_\rho u_\sigma + k_\rho k_\sigma u_\mu u_\nu \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{10} &= (k_\mu u_\nu + k_\nu u_\mu) (k_\rho u_\sigma + k_\sigma u_\rho) \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{11} &= u_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma + u_\nu k_\mu k_\rho k_\sigma + u_\rho k_\mu k_\nu k_\sigma + u_\sigma k_\mu k_\nu k_\rho \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{12} &= k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{13} &= \eta_{\mu\nu} k_\rho k_\sigma + \eta_{\rho\sigma} k_\mu k_\nu \\
\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{14} &= \eta_{\mu\nu} k_\rho u_\sigma + \eta_{\mu\nu} u_\rho k_\sigma + \eta_{\rho\sigma} k_\mu u_\nu + \eta_{\rho\sigma} u_\mu k_\nu, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

A base (2.18) é a base tensorial mais simples que se pode construir com $\eta_{\mu\nu}$, k_μ e u_μ , levando-se em conta as propriedades de simetria por troca de índices do propagador.

Multiplicando (2.17) pela parte quadrática obtemos a identidade e resolvendo este sistema de equações em termos dos coeficientes c_i obtemos o propagador, substituindo os respectivos valores em (2.17).

O cálculo do propagador bem como os dos vértices cúbico e quártico, que serão utilizados a seguir, envolvem um número grande de termos e por isso foi usado um programa em Maple [Hec93] utilizando o pacote HIP [HY92], que calcula as regras de Feynman para grávitons a partir da lagrangiana de Einstein, dadas as definições da métrica e a sua inversa, os símbolos de Christoffel e o escalar de Ricci.

Finalmente o propagador obtido para uma dimensão arbitrária D , pode ser escrito como segue

$$\begin{aligned}
P_{\lambda\beta\rho\sigma}^G(k) &= \frac{-1}{(2\pi)^D(k^2 + i\epsilon)} \left\{ I_{\lambda\beta\rho\sigma}^1 - \frac{1}{D-2} I_{\lambda\beta\rho\sigma}^2 + \frac{\Xi}{n_0^2} \frac{k^2}{(k \cdot u)^2} [\mathcal{T}_{\lambda\beta\rho\sigma}^8 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(k \cdot u)^2} \mathcal{T}_{\lambda\beta\rho\sigma}^{12} - \frac{\mathcal{T}_{\lambda\beta\rho\sigma}^{11}}{k \cdot u}] \right\}, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma}^1 &= \frac{1}{4} (d_{\mu\kappa} d_{\nu\lambda} + d_{\mu\lambda} d_{\nu\kappa}) (d_{\rho\kappa} d_{\sigma\lambda} + d_{\rho\lambda} d_{\sigma\kappa}), \\
I_{\mu\nu\rho\sigma}^2 &= d_{\mu\kappa} d_{\nu\kappa} d_{\rho\lambda} d_{\sigma\lambda}; \quad d_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu u_\nu}{k \cdot u},
\end{aligned}$$

e $\mathcal{T}^8$, $\mathcal{T}^{11}$ e $\mathcal{T}^{12}$ pertencem à base tensorial (2.18). Este propagador concorda com o obtido na referência [CL82]. O propagador (2.19) possui além de pólos em k^2 , pólos em $k \cdot u = k_0$. Além disso devemos ressaltar que para os pólos do tipo $1/k^2$ temos apenas pólos simples. Estas propriedades ocorrem também na QCD [Mut87] sendo características do “gauge” temporal.

Os termos de ordem 1, 2 e 3 em κ nos dão os vértices de três, quatro e cinco grávitons respectivamente, a saber,

$$V_{\alpha\beta\rho\lambda\delta\gamma}^3(k_1, k_2, k_3) = \frac{\kappa}{4} \{ [k_2 \cdot k_3 (\eta_{\alpha\beta} (\eta_{\rho\lambda} \eta_{\delta\gamma} - \eta_{\rho\delta} \eta_{\lambda\gamma}) + 4\eta_{\alpha\delta} (\eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\lambda} - \eta_{\rho\lambda} \eta_{\beta\gamma})) \\ + 2k_{2\alpha} (k_{3\beta} (\eta_{\lambda\gamma} \eta_{\rho\delta} - \eta_{\rho\lambda} \eta_{\delta\gamma}) + 2k_{3\rho} (\eta_{\beta\lambda} \eta_{\delta\gamma} - 2\eta_{\beta\delta} \eta_{\lambda\gamma})) \\ + 2k_{2\rho} (2k_{3\alpha} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\delta\gamma} + k_{3\lambda} (2\eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\delta\gamma})) + 2k_{2\delta} k_{3\rho} \\ (\eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\gamma} - 2\eta_{\beta\lambda} \eta_{\alpha\gamma})] + \text{simet. sobre } (\alpha \leftrightarrow \beta), (\rho \leftrightarrow \lambda), \\ , (\delta \leftrightarrow \gamma) \} + \text{permut. de } (k_1, \alpha, \beta), (k_2, \rho, \lambda), (k_3, \delta, \gamma), \quad (2.20)$$

$$V_{\alpha\beta\rho\lambda\delta\gamma\tau\sigma}^4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{\kappa^2}{16} \{ [k_3 \cdot k_4 ((\eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} - 2\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda}) (\eta_{\delta\gamma} \eta_{\tau\sigma} - \eta_{\delta\tau} \eta_{\gamma\sigma}) + 8(\eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\rho} \\ + \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\delta\rho}) (\eta_{\lambda\gamma} \eta_{\tau\sigma} - \eta_{\sigma\gamma} \eta_{\tau\lambda}) + 8\eta_{\rho\tau} \eta_{\alpha\delta} (\eta_{\beta\gamma} \eta_{\sigma\lambda} - \eta_{\beta\sigma} \eta_{\gamma\lambda})) \\ + 4k_{3\alpha} (2k_{4\rho} \eta_{\beta\lambda} - k_{4\beta} \eta_{\rho\lambda}) (\eta_{\delta\gamma} \eta_{\tau\sigma} - \eta_{\delta\tau} \eta_{\gamma\sigma}) + 16(k_{3\rho} k_{4\alpha} \eta_{\beta\delta} - k_{3\alpha} k_{4\beta} \eta_{\delta\rho}) \\ (\eta_{\gamma\sigma} \eta_{\lambda\tau} - \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\tau\sigma}) + 8(k_{3\alpha} k_{4\delta} + k_{3\delta} k_{4\alpha}) (\eta_{\rho\lambda} \eta_{\beta\gamma} - 2\eta_{\gamma\lambda} \eta_{\beta\rho}) \eta_{\tau\sigma} \\ + 16k_{3\alpha} k_{4\delta} (\eta_{\rho\tau} (2\eta_{\beta\sigma} \eta_{\gamma\lambda} - \eta_{\beta\gamma} \eta_{\sigma\lambda}) + \eta_{\gamma\sigma} (2\eta_{\rho\tau} \eta_{\beta\lambda} - \eta_{\rho\lambda} \eta_{\beta\tau})) \\ - 16k_{3\delta} k_{4\alpha} \eta_{\rho\tau} \eta_{\beta\gamma} \eta_{\sigma\lambda} + 2(k_{3\tau} k_{4\delta} \eta_{\gamma\sigma} - k_{3\delta} k_{4\gamma} \eta_{\tau\sigma}) (\eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} - 2\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda}) \\ + 8(k_{3\tau} k_{4\delta} \eta_{\gamma\lambda} - k_{3\delta} k_{4\gamma} \eta_{\lambda\tau}) (2\eta_{\beta\sigma} \eta_{\alpha\rho} - \eta_{\rho\sigma} \eta_{\alpha\beta})] \\ + \text{simet. sobre } (\alpha \leftrightarrow \beta), (\rho \leftrightarrow \lambda), (\delta \leftrightarrow \gamma), (\tau \leftrightarrow \sigma) \} \\ + \text{permut. de } (k_1, \alpha, \beta), (k_2, \rho, \lambda), (k_3, \delta, \gamma), (k_4, \tau, \sigma), \quad (2.21)$$

$$V_{\alpha\beta\rho\lambda\delta\gamma\tau\sigma\mu\nu}^5(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) =$$

$$\frac{\kappa^3}{96} \{ [-12 \eta_{\mu\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\gamma\tau} k_{5\delta} - 12 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\delta\mu} - 48 \eta_{\gamma\tau} k_{4\sigma} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} k_{5\delta} \eta_{\lambda\nu} \\ - 6 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} k_{5\gamma} k_{4\delta} - 96 \eta_{\delta\sigma} \eta_{\gamma\nu} k_{5\alpha} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\mu} k_{4\rho} + 48 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\delta\lambda} \\ + 48 \eta_{\mu\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\tau} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} + 96 k_{5\delta} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\lambda\tau} k_{4\rho} - 96 \eta_{\mu\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\rho} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} \\ + 48 \eta_{\gamma\mu} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\tau} k_{5\delta} \eta_{\lambda\sigma} + 96 \eta_{\gamma\nu} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\tau} k_{4\delta} \eta_{\lambda\mu} + k_4 \cdot k_5 ((-120 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\rho} \eta_{\delta\nu} \eta_{\lambda\tau} \\ - 48 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\tau} \eta_{\gamma\mu} \eta_{\delta\lambda} + 24 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\delta\rho} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\lambda\mu} - 6 \eta_{\mu\nu} \eta_{\delta\rho} \eta_{\sigma\tau} \eta_{\gamma\lambda} + 24 \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\delta\lambda} \\ + 96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\rho\tau} \eta_{\delta\nu} \eta_{\lambda\mu} + \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\tau} \eta_{\delta\gamma} - 6 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\mu} - \eta_{\nu\sigma} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\mu\tau} \eta_{\delta\gamma} \\ + 6 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\delta\rho} \eta_{\mu\tau} \eta_{\gamma\lambda}) \eta_{\alpha\beta} + (-24 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\mu} \eta_{\delta\tau} + 12 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\mu} - 192 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\nu} \eta_{\lambda\tau} \\ - 48 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\beta\delta} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\lambda\mu} - 96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\tau} \eta_{\lambda\nu} + 48 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\beta\delta} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\lambda\mu} + 12 \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\delta\tau} \\ + 48 \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\delta\lambda} + 96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\tau} \eta_{\delta\nu} \eta_{\lambda\mu}) \eta_{\alpha\rho} + (-48 \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\rho\sigma} - 48 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\nu} \eta_{\mu\rho} \\ + 8 \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\sigma\tau} \eta_{\gamma\lambda} - 48 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\lambda\mu} + 144 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\lambda\nu} \eta_{\rho\tau} - 8 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\beta\rho} \eta_{\mu\tau} \eta_{\gamma\lambda} \\ - 48 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\lambda\tau}) \eta_{\alpha\delta} + (48 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\lambda\nu} \eta_{\delta\rho} + 96 \eta_{\gamma\nu} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\rho\sigma} - 96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\nu} \eta_{\lambda\mu}$$

$$\begin{aligned}
& -144 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\nu\rho} + 144 \eta_{\gamma\nu} \eta_{\beta\delta} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\rho\sigma} - 96 \eta_{\gamma\nu} \eta_{\beta\mu} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\delta\rho} - 96 \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\delta\lambda} \\
& + 48 \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\delta} \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\rho\sigma}) \eta_{\alpha\tau} + (96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\nu} \eta_{\lambda\tau} + 96 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\delta\lambda} + 96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\nu} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\delta\rho} \\
& - 96 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\lambda} - 96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\tau} \eta_{\lambda\nu} + 48 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\beta\delta} \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\nu\rho}) \eta_{\alpha\mu}) + (96 \eta_{\gamma\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\delta\rho} \\
& - 48 \eta_{\gamma\nu} \eta_{\sigma\tau} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\mu\rho} - 48 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\delta\rho} - 48 \eta_{\gamma\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\mu\rho} + 192 \eta_{\delta\sigma} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\rho\tau} \\
& - 192 \eta_{\delta\sigma} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\mu\rho} + 144 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\tau} \eta_{\gamma\mu} \eta_{\delta\lambda}) k_{4\alpha} k_{5\beta} - 48 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\tau} \eta_{\gamma,\mu\nu} \eta_{\delta\lambda} \\
& + 96 \eta_{\gamma\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\delta} \eta_{\lambda\mu} k_{5\rho} - 96 \eta_{\gamma\mu} k_{5\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\tau} k_{4\delta} \eta_{\lambda\sigma} + 96 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\delta\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\lambda\mu} \\
& + 48 \eta_{\gamma\nu} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} \eta_{\delta\tau} \eta_{\lambda\mu} - 48 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} k_{4\alpha} \eta_{\beta\rho} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} + 192 \eta_{\gamma\mu} \eta_{\nu\sigma} k_{4\alpha} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\tau} k_{5\lambda} \\
& + 96 \eta_{\gamma\tau} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\delta\lambda} k_{4\rho} + 24 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} + 96 \eta_{\gamma\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\mu} k_{5\rho} \\
& - 48 k_{5\delta} k_{4\gamma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\rho\tau} - 24 \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} - 48 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} k_{5\delta} \eta_{\lambda\tau} \\
& - 96 \eta_{\gamma\nu} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\tau} k_{4\lambda} - 96 \eta_{\gamma\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} k_{5\rho} \eta_{\delta\tau} \eta_{\lambda\mu} - 48 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\delta\rho} \eta_{\gamma\mu} \eta_{\lambda\tau} \\
& - 96 \eta_{\gamma\sigma} k_{4\nu} k_{5\alpha} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\delta\rho} + 96 k_{4\gamma} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\nu\rho} - 12 \eta_{\mu\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\delta\rho} k_{5\tau} \eta_{\gamma\lambda} \\
& + 96 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\mu} \eta_{\delta\lambda} - 12 \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} k_{5\gamma} k_{4\delta} - 192 \eta_{\gamma\tau} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\nu} k_{4\lambda} \\
& - 48 k_{4\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\tau} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} + 48 \eta_{\gamma\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} k_{5\delta} \eta_{\lambda\mu} + 48 k_{4\delta} k_{5\gamma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\nu\rho} \\
& + 96 \eta_{\gamma\tau} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} \eta_{\delta\nu} \eta_{\lambda\mu} + 96 \eta_{\delta\mu} \eta_{\gamma\nu} k_{5\alpha} k_{4\beta} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\rho\tau} - 192 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\lambda\mu} \\
& + 48 \eta_{\gamma\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} \eta_{\delta\mu} k_{5\lambda} + 24 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\delta\mu} - 96 \eta_{\gamma\mu} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} \eta_{\delta\tau} k_{5\lambda} \\
& - 48 \eta_{\gamma\nu} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} k_{4\delta} \eta_{\lambda\tau} + 12 k_{4\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\gamma\tau} k_{5\delta} + 48 k_{5\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} k_{4\gamma} \eta_{\delta\lambda} \\
& - 48 k_{5\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\delta\lambda} + 12 k_{5\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\gamma,\mu\nu} k_{4\delta} + 96 k_{5\sigma} \eta_{\mu\nu} k_{4\alpha} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\delta\lambda} \\
& + 96 \eta_{\gamma\nu} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\mu} k_{4\delta} \eta_{\lambda\tau} - 96 k_{5\gamma} \eta_{\nu\sigma} k_{4\alpha} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\rho\tau} - 96 \eta_{\gamma\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\rho} k_{5\delta} k_{4\lambda} \\
& - 96 \eta_{\gamma\tau} k_{5\sigma} k_{4\alpha} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\nu\rho} - 48 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} k_{4\alpha} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\tau} k_{5\lambda} + 96 k_{4\delta} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\mu} \eta_{\lambda\sigma} k_{5\rho} \\
& + 96 k_{5\gamma} \eta_{\mu\nu} k_{4\alpha} \eta_{\beta\tau} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\rho\sigma} + (96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\lambda\tau} - 96 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\nu\rho} - 48 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta,\lambda} \\
& - 96 \eta_{\nu\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\rho\tau} + 96 \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\rho\sigma}) k_{4\alpha} k_{5\delta} + 48 k_{4\tau} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\rho\tau} \\
& - 48 k_{4\tau} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\nu\rho} - 12 k_{4\tau} k_{5\sigma} \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} - 6 k_{4\tau} k_{5\sigma} \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \\
& + 96 k_{4\alpha} k_{5\delta} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\beta\mu} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\rho\tau} - 96 k_{4\alpha} k_{5\delta} \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\rho\sigma} + (-96 \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\delta} \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\nu\rho} \\
& + 96 \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\mu} \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\nu\rho} + 12 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\mu} + 192 \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\lambda} - 96 \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\mu} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\lambda} \\
& + 12 \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\delta\rho} \eta_{\gamma\lambda} - 24 \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\mu} - 96 \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\delta} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\lambda\mu} - 16 \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\lambda} \\
& - 48 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\lambda} - 6 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} + 6 \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} + 12 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} \\
& + 48 \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\nu\rho}) k_{4\tau} k_{5\sigma} + 48 k_{4\alpha} k_{5\delta} \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\lambda} - 48 k_{4\alpha} k_{5\delta} \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\lambda} \\
& - 24 k_{4\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\tau} k_{5\delta} + 16 \eta_{\mu\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\rho} k_{5\tau} \eta_{\gamma\lambda} - 48 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} k_{5\alpha} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\tau} k_{4\lambda} \\
& - 96 \eta_{\gamma\nu} k_{5\sigma} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\mu} k_{4\rho} + 24 k_{5\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\mu} k_{4\delta} - 12 k_{5\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\gamma\mu} k_{4\delta} \\
& - 96 \eta_{\delta\mu} \eta_{\gamma\nu} k_{4\alpha} k_{5\beta} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\rho\tau} + 96 k_{4\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha,\tau} \eta_{\beta\rho} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} + 96 \eta_{\gamma\sigma} k_{5\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\delta} \eta_{\lambda\mu} k_{4\rho} \\
& + 24 \eta_{\mu\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} \eta_{\gamma\tau} k_{5\delta} + 96 \eta_{\gamma\sigma} k_{5\nu} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\tau} \eta_{\lambda\mu} k_{4\rho} - 96 \eta_{\gamma\tau} \eta_{\nu\sigma} k_{4\alpha} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\mu} k_{5\lambda} \\
& - 96 \eta_{\gamma\mu} k_{4\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\tau} k_{5\delta} \eta_{\lambda\sigma} + 24 \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} k_{4\rho} \eta_{\delta\tau} k_{5\lambda} + 96 \eta_{\gamma\mu} k_{4\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\delta} \eta_{\lambda\sigma} k_{5\rho} \\
& + 2 \eta_{\mu\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} k_{5\tau} \eta_{\delta\gamma} + 12 k_{4\tau} k_{5\sigma} \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} + 6 k_{4\tau} k_{5\sigma} \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\rho} \\
& + 12 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} k_{5\gamma} k_{4\delta} + 48 \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} k_{4\alpha} \eta_{\beta\rho} k_{5\gamma} \eta_{\delta\lambda} - 96 k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\gamma\tau} \eta_{\delta\lambda}] \\
& + \text{simet. sobre } (\alpha \leftrightarrow \beta), (\rho \leftrightarrow \lambda), (\delta \leftrightarrow \gamma), (\tau \leftrightarrow \sigma), (\mu \leftrightarrow \nu)\} \\
& + \text{permut. de } (k_1, \alpha, \beta), (k_2, \rho, \lambda), (k_3, \delta, \gamma), (k_4, \tau, \sigma), (k_5, \mu, \nu),
\end{aligned}$$

(2.22)

As expressões (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22) estão relacionadas por identidades de Ward que são obtidas a partir da invariância da ação sob transformações gerais dos campos. Estas relações estão deduzidas no apêndice C.

2.2.2 Propagador dos "Ghosts" e Vértice "Ghost"-Gráviton-"Ghost"

A fim de obtermos as regras de Feynman para os "ghosts" precisamos escrever a lagrangiana de Faddeev e Popov em termos do campo gravitacional. Para isto, primeiro vamos calcular a variação de $g_{\mu\nu}$ por transformações de "gauge". Usando a lei de transformação para tensores

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma},$$

onde $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$.

Assim,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon^\rho g_{\rho\nu} - \partial_\nu \epsilon^\rho g_{\mu\rho} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.23)$$

Expandindo em série o termo da esquerda

$$g'_{\mu\nu}(x'^\lambda) = g'_{\mu\nu}(x^\lambda) + \epsilon^\lambda \partial_\lambda g'_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.24)$$

onde no segundo termo do lado direito podemos aproximar em primeira ordem $g'_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu}$.

Substituindo (2.23) e (2.24) na definição de $\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x^\lambda) - g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, temos

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \epsilon^\rho g_{\rho\nu} - \partial_\nu \epsilon^\rho g_{\mu\rho} - \epsilon^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Introduzimos agora o campo gravitacional covariante $\phi_{\mu\nu}$ mediante a relação (2.8), então,

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu - \kappa(\partial_\mu \epsilon^\rho \phi_{\rho\nu} + \partial_\nu \epsilon^\rho \phi_{\mu\rho} + \epsilon^\lambda \phi_{\mu\nu,\lambda}). \quad (2.26)$$

Achando a variação de (2.10), $\delta F_\nu = \kappa n_0 u^\mu \delta \phi_{\mu\nu}$, para obter $M_{\lambda\nu}$ e como $\kappa \delta \phi_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$, temos

$$\delta F_\lambda = -n_0[u \cdot \partial \eta_{\lambda\nu} + u_\lambda \partial_\nu + \kappa(\phi_{\lambda\nu} u \cdot \partial + u_\mu \phi_{\mu\lambda} \partial_\nu + u_\mu \phi_{\mu\nu,\lambda})] \epsilon_\lambda.$$

Assim $M_{\lambda\nu}$ será dado por

$$M_{\lambda\nu} = -n_0[u \cdot \partial \eta_{\lambda\nu} + u_\lambda \partial_\nu + \kappa(\phi_{\lambda\nu} u \cdot \partial + u_\mu \phi_{\mu\lambda} \partial_\nu + u_\mu \phi_{\mu\nu,\lambda})],$$

e o funcional $\det \left| \frac{\delta F_\lambda}{\delta \epsilon^\nu} \right|$ será

$$\det \left| \frac{\delta F_\lambda}{\delta \epsilon^\nu} \right| = \int d[\xi_\lambda] d[\eta_\nu] \exp \left\{ -i \int n_0 [u \cdot \partial \eta_{\lambda\nu} + u_\lambda \partial_\nu + \kappa(\phi_{\lambda\nu} u \cdot \partial + u_\mu \phi_{\mu\lambda} \partial_\nu + u_\mu \phi_{\mu\nu,\lambda})] \xi_\lambda dx \right\}.$$

Finalmente o funcional gerador (2.2) será

$$Z = N \int d[g_{\mu\nu}]d[\xi]d[\eta] \exp[i \int (\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{GF} - n_0 \xi [(u \cdot \partial)\eta_{\lambda\nu} + u_\lambda \partial_\nu + \kappa(\phi_{\lambda\nu} u \cdot \partial + u_\mu \phi_{\mu\lambda} \partial_\nu + u_\mu \phi_{\mu\nu,\lambda})] \eta) dx], \quad (2.27)$$

onde $\mathcal{L}_E$ e $\mathcal{L}_{GF}$ estão dados por (2.4) e (2.11) respectivamente e o último termo da exponencial é a lagrangiana de Faddeev e Popov

$$\mathcal{L}_{FP} = n_0 \eta_\nu [u \cdot \partial \eta_{\lambda\nu} + u_\lambda \partial_\nu + \kappa(\phi_{\lambda\nu} u \cdot \partial + u_\mu \phi_{\mu\lambda} \partial_\nu + u_\mu \phi_{\mu\nu,\lambda})] \xi_\lambda. \quad (2.28)$$

Optamos pela convenção de escolher a lagrangiana com sinal positivo e acrescentar o fator -1 em cada "loop" dos fantasmas.

O operador proveniente do termo quadrático nos campos de fantasmas é

$$n_0 [(u \cdot \partial)\eta_{\lambda\nu} + u_\lambda \partial_\nu].$$

Expressando no espaço dos momentos

$$i n_0 [(u \cdot k)\eta_{\lambda\nu} + u_\lambda k_\nu].$$

Vamos achar o inverso deste operador, multiplicando-o pela combinação linear de uma base de tensores formados a partir da métrica plana $\eta_{\mu\nu}$, o vetor axial u e o momento k carregado pelos fantasmas, e fazendo o resultado igual à delta quadri-dimensional. Assim, teremos que

$$n_0 (iu \cdot k \eta_{\lambda\nu} + iu_\lambda k_\nu) \cdot (A \eta_{\lambda\mu} + B u^\lambda u^\mu + C k^\lambda k^\mu + D u^\lambda k^\mu + E u^\mu k^\lambda) = \delta_\nu^\mu$$

$$n_0 [iA u \cdot k \delta_\nu^\mu + iA u^\mu k_\nu + iB u \cdot k u_\nu u^\mu + iB k_\nu u^\mu + iC (u \cdot k) k_\nu k^\mu + iC (u \cdot k) k_\nu k^\mu + iD (u \cdot k) u_\nu k^\mu + iD k_\nu k^\mu + iE u \cdot k u^\mu k_\nu + iE (u \cdot k) k_\nu u^\mu] = \delta_\nu^\mu.$$

Juntando termos semelhantes chegamos às seguintes equações

$$\begin{aligned} i n_0 A u \cdot k - 1 &= 0, \\ iA + iB + 2iE(u \cdot k) &= 0, \\ iB(u \cdot k) &= 0, \\ 2iC(u \cdot k) + iD &= 0, \\ iD(u \cdot k) &= 0. \end{aligned}$$

Das quais obtemos

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i}{n_0 u \cdot k}, \\ B &= 0, \\ C &= 0, \\ D &= 0, \\ E &= \frac{i}{n_0 2(u \cdot k)^2}, \end{aligned}$$

Então o propagador do “ghost” é

$$P_{\lambda\mu}^g(k) = \frac{i}{n_0(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2(u \cdot k)^2} k_\lambda u_\mu - \frac{1}{u \cdot k} \eta_{\lambda\mu} \right]. \quad (2.29)$$

O propagador (2.29), como no caso da QCD [Mut87], possui apenas pólos do tipo $1/(k \cdot u)$. Como veremos no próximo capítulo este fato implica em uma propriedade particular do “gauge” temporal. O vértice gráviton-ghost-ghost vem do termo proporcional a κ na lagrangiana de Faddeev e Popov (2.28), o qual expressado no espaço dos momentos é

$$V_{\mu\sigma\rho\nu}^{Ggg}(k_1, k_2, k_3) = (2\pi)^4 i n_0 \kappa [\eta_{\rho\mu} \eta_{\nu\sigma} u \cdot k_2 + \eta_{\rho\sigma} u_\mu k_{2\nu} + \eta_{\nu\sigma} u_\mu k_{1\rho} + \mu \leftrightarrow \sigma], \quad (2.30)$$

2.3 Regras de Feynman no “Gauge” Covariante

Um “gauge” frequentemente utilizado em gravitação é o “gauge” de Feynman-De Donder, onde

$$\begin{aligned} F^\nu &= \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{\kappa^2 \xi} (\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu})^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Com esta escolha é conveniente usar a representação $\tilde{g}^{\mu\nu}$; assim a função F^ν fica restrita à categoria dos “gauges” lineares e o termo de fixação de “gauge” adquire uma forma bilinear nos campos gravitacionais. Assim, precisamos obter a lagrangiana de Einstein em termos de $\tilde{g}^{\mu\nu}$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}$. De (2.9) temos que

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \tilde{g}^{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Derivando ambos os lados de (2.32) obtemos

$$g^{\mu\nu}_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \tilde{g}^{\mu\nu}_{,\alpha} + \frac{1}{2} (-g)^{-3/2} g_{,\alpha} \tilde{g}^{\mu\nu} \quad (2.33)$$

Usando a definição de determinante

$$g_{,\rho} = g \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\rho}. \quad (2.34)$$

Finalmente, usando (2.34) em (2.33) obtemos

$$g^{\mu\nu}_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \tilde{g}^{\mu\nu}_{,\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \tilde{g}_{\sigma\beta} \tilde{g}^{\sigma\beta}_{,\alpha} \tilde{g}^{\mu\nu} \quad (2.35)$$

Usando (2.35) e o inverso de (2.32) obtemos da lagrangiana (2.14), após simplificarmos alguns termos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E &= \frac{1}{2\kappa^2} [\tilde{g}_{\beta\rho} \tilde{g}_{\alpha\lambda} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\nu} \tilde{g}^{\lambda\rho}_{,\mu} - 2 \tilde{g}_{\alpha\lambda} \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\rho} \tilde{g}^{\lambda\rho}_{,\beta} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\lambda\rho} \tilde{g}^{\lambda\rho}_{,\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\mu} \tilde{g}^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (2.36)$$

que é a equação (A14) da referência [CLM73].

2.3.1 Propagador e Vértices de Auto-interação do Grávítons

Para obtermos os vértices e propagador expressamos (2.36) em termos do campo $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ usando (2.7) e a sua inversa, a saber,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \kappa \tilde{\phi}_{\mu\nu} + \kappa^2 \tilde{\phi}_{\mu\alpha} \tilde{\phi}_{\nu}^{\alpha} - \kappa^3 \tilde{\phi}_{\mu\alpha} \tilde{\phi}^{\alpha\beta} \tilde{\phi}_{\beta\nu} + \mathcal{O}(\kappa^4). \quad (2.37)$$

Para invertermos o termo quadrático de (2.36) mais o termo (2.31) e obter assim o propagador, como não temos neste caso a presença do quadrivetor u_{μ} precisamos apenas de uma base com os cinco tensores da base (2.18) que não contem esse quadrivetor, e o propagador pode ser escrito como

$$P_{\mu\nu\rho\sigma}^G = c_1 \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^1 + c_4 \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^4 + c_8 \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^8 + c_{12} \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{12} + c_{13} \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{13} \quad (2.38)$$

Invertendo o termo quadrático de (2.36) mais o termo (2.31) usando (2.38) obtemos para o propagador [BF98]

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu\rho\sigma}^G = & \frac{1}{(2\pi)^4(k^2 + i\epsilon)} \left\{ \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \frac{(1 - \xi)}{k^2 + i\epsilon} (2k_{\mu}k_{\nu}\eta_{\rho\sigma} \right. \\ & \left. + 2k_{\rho}k_{\sigma}\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}k^2 - k_{\mu}k_{\rho}\eta_{\nu\sigma} - k_{\nu}k_{\rho}\eta_{\mu\sigma} - k_{\mu}k_{\sigma}\eta_{\nu\rho} - k_{\nu}k_{\sigma}\eta_{\mu\rho}) \right\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

O propagador (2.39), diferentemente do caso do “gauge” temporal, possui apenas pólos do tipo $1/k^2$, mas agora temos pólos simples e pólos duplos. Desta forma o método de amplitudes frontais, apresentado no apêndice B, para o cálculo de funções de Green térmicas neste “gauge” precisa ser generalizado.

Os termos de ordem 1, 2 e 3 em κ de (2.36) dão respectivamente [BF98]

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\rho\lambda\delta\gamma}^3(k_1, k_2, k_3) = & \frac{\kappa}{4} [-4k_{2\delta}k_{3\lambda}\eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\gamma} - k_2 \cdot k_3 \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}\eta_{\rho\lambda} + 2k_2 \cdot k_3 \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\gamma}\eta_{\rho\delta} \\ & + 2k_2 \cdot k_3 \eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\delta}\eta_{\lambda\gamma} - k_2 \cdot k_3 \eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\delta\gamma} - 2k_{2\alpha}k_{3\beta}\eta_{\rho\delta}\eta_{\lambda\gamma} + k_{2\alpha}k_{3\beta}\eta_{\rho\lambda}\eta_{\delta\gamma} \\ & + (\text{simet. sobre } (\alpha \leftrightarrow \beta), (\rho \leftrightarrow \lambda), (\delta \leftrightarrow \gamma))], \\ & + \text{permut. de } (k_1, \alpha, \beta), (k_2, \rho, \lambda), (k_3, \delta, \gamma), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\rho\lambda\delta\gamma\tau\sigma}^4(k_1, k_2, k_3, k_4) = & \frac{\kappa^2}{16} [k_{3\rho}k_{4\lambda}(-2\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\tau\delta} + \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}\eta_{\tau\sigma} + \eta_{\alpha\tau}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\delta\gamma} - 2\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\tau\gamma}) \\ & - 4k_{3\sigma}k_{4\gamma}\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\rho\tau} + k_3 \cdot k_4 \eta_{\alpha\delta}(2\eta_{\beta\lambda}\eta_{\rho\tau}\eta_{\gamma\sigma} - \eta_{\beta\lambda}\eta_{\tau\sigma}\eta_{\gamma\rho} \\ & + 2\eta_{\beta\lambda}\eta_{\tau\gamma}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\beta\gamma}\eta_{\tau\rho}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\beta\sigma}\eta_{\rho\gamma}\eta_{\tau\lambda}) - k_3 \cdot k_4 \eta_{\alpha\tau}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\delta\gamma} \\ & + (\text{simet. sobre } (\alpha \leftrightarrow \beta), (\rho \leftrightarrow \lambda), (\delta \leftrightarrow \gamma), (\tau \leftrightarrow \sigma))], \\ & + \text{permut. de } (k_1, \alpha, \beta), (k_2, \rho, \lambda), (k_3, \delta, \gamma), (k_4, \tau, \sigma). \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\beta\rho\lambda\delta\gamma\tau\sigma\mu\nu}^5(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = & \frac{\kappa^3}{4} \{ [(-\eta_{\sigma\tau} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\gamma\nu} - \eta_{\gamma\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\sigma} \eta_{\mu\rho} \eta_{\delta\lambda} + 2\eta_{\gamma\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\delta\sigma} \\
& - \eta_{\gamma\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\delta\mu} + 2\eta_{\gamma\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\mu} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\delta\lambda} + 4\eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\gamma\mu} \\
& - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\gamma\sigma}) k_4 \cdot k_5 - 2\eta_{\delta\sigma} \eta_{\gamma\nu} k_{5\alpha} k_{4\beta} \eta_{\rho\tau} \eta_{\lambda\mu} \\
& - 4k_{5\sigma} k_{4\nu} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\rho} \eta_{\delta\lambda} \eta_{\gamma\mu} + \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} k_{4\alpha} k_{5\beta} \eta_{\rho\tau} \eta_{\delta\lambda} \\
& + \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\mu\nu} k_{5\alpha} k_{4\beta} \eta_{\rho\tau} \eta_{\delta\lambda} + \eta_{\delta\mu} \eta_{\gamma\nu} k_{5\alpha} k_{4\beta} \eta_{\rho\tau} \eta_{\lambda\sigma} \\
& - 4\eta_{\gamma\tau} \eta_{\nu\sigma} k_{4\alpha} k_{5\beta} \eta_{\mu\rho} \eta_{\delta\lambda}] \\
& + \text{simet. sobre } (\alpha \leftrightarrow \beta), (\rho \leftrightarrow \lambda), (\delta \leftrightarrow \gamma), (\tau \leftrightarrow \sigma), (\mu \leftrightarrow \nu) \} \\
& + \text{permut. de } (k_1, \alpha, \beta), (k_2, \rho, \lambda), (k_3, \delta, \gamma), (k_4, \tau, \sigma), (k_5, \mu, \nu), \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Podemos ver, comparando os resultados (2.40), (2.41) e (2.42) obtidos na representação $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ com os correspondentes (2.20), (2.21) e (2.22) obtidos na representação $\phi_{\mu\nu}$, que na representação $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ os vértices possuem números de termos bem menores. Isso é fácil de entender uma vez que a raiz de $-g$ é expandida na representação $\phi_{\mu\nu}$ enquanto que na representação $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ está embutida no campo de grávitons.

As equações (2.39), (2.40), (2.41) e (2.42) também obedecem as identidades de Ward mostradas no apêndice C.

2.3.2 Propagador dos “Ghosts” e Vértice “Ghost”-Gráviton-“Ghost”

Para calcular a matriz M que aparece em (2.2), e assim encontrarmos o propagador e o vértice dos “ghosts”, no “gauge” covariante, onde o termo de fixação F é dado por (2.31), vamos achar a variação de $\tilde{g}^{\mu\nu}$ ao fazer uma transformação de “gauge”

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x). \quad (2.43)$$

Sabemos que $g^{\mu\nu}$ transforma-se como um tensor

$$\begin{aligned}
g'^{\mu\nu}(x'^\lambda) &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} g^{\sigma\rho}(x^\lambda) \\
&= (\delta_\sigma^\mu + \partial_\sigma \epsilon^\mu)(\delta_\rho^\nu + \partial_\rho \epsilon^\nu) g^{\sigma\rho} \\
&= g^{\mu\nu} + \partial_\rho \epsilon^\nu g^{\mu\rho} + \partial_\sigma \epsilon^\mu g^{\sigma\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Expandindo em série o termo da esquerda

$$\begin{aligned}
g'^{\mu\nu}(x'^\lambda) &= g'^{\mu\nu}(x^\lambda + \epsilon^\lambda(x)) \\
&= g'^{\mu\nu}(x^\lambda) + \epsilon^\lambda(x) \partial_\lambda g'^{\mu\nu}(x^\lambda) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.45)
\end{aligned}$$

O segundo termo da direita pode aproximar-se em primeira ordem em ϵ como

$$\epsilon^\lambda(x) \partial_\lambda g^{\mu\nu}(x^\lambda).$$

A variação de $g^{\mu\nu}$ é definida como

$$\delta g^{\mu\nu} = g'^{\mu\nu}(x^\lambda) - g^{\mu\nu}(x^\lambda).$$

Utilizando (2.44) e (2.45)

$$\delta g^{\mu\nu} = \partial_\rho \epsilon^\nu g^{\mu\rho} + \partial_\sigma \epsilon^\mu g^{\sigma\nu} - \epsilon^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Então a variação em $\tilde{g}^{\mu\nu}$ será

$$\delta \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \delta \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \quad (2.47)$$

Usando (2.13) temos

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}(-g)^{-1/2} \delta g \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Utilizando (2.46)

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} (\partial_\rho \epsilon^\beta g^{\alpha\rho} + \partial_\sigma \epsilon^\alpha g^{\sigma\beta} - \epsilon^\lambda \partial_\lambda g^{\alpha\beta}) \\ &= -\sqrt{-g} \partial_\rho \epsilon^\rho + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \epsilon^\lambda \partial_\lambda g^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Então, usando (2.34)

$$\delta \sqrt{-g} g^{\mu\nu} = -\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho - g^{\mu\nu} \epsilon^\lambda \partial_\lambda \sqrt{-g}. \quad (2.48)$$

Neste ponto é conveniente introduzirmos explicitamente o campo gravitacional $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ em termos da relação (2.7). Substituindo (2.46), (2.48) e (2.13) em (2.47) teremos finalmente

$$\begin{aligned} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} &= \tilde{g}^{\mu\rho} \partial_\rho \epsilon^\nu + \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \epsilon^\mu - \epsilon^\lambda (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \sqrt{-g} - \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho - g^{\mu\nu} \epsilon^\lambda \partial_\lambda \sqrt{-g} \\ &= \tilde{g}^{\mu\rho} \partial_\rho \epsilon^\nu + \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \epsilon^\mu - \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho - \epsilon^\lambda \partial_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu} \\ &= \eta^{\mu\rho} \partial_\rho \epsilon^\nu + \eta^{\sigma\nu} \partial_\sigma \epsilon^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho + \kappa \tilde{\phi}^{\mu\rho} \partial_\rho \epsilon^\nu + \kappa \tilde{\phi}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \epsilon^\mu - \\ &\quad - \kappa \tilde{\phi}^{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho - \kappa \epsilon^\lambda \tilde{\phi}^{\mu\nu}_{,\lambda}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Assim a variação de F_λ será

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\lambda}) &= \partial_\mu (\delta \tilde{g}^{\mu\lambda}) \\ &= \square \epsilon_\lambda + \partial_\lambda \partial_\mu \epsilon_\mu - \partial_\lambda \partial_\rho \epsilon_\rho + \kappa \tilde{\phi}_{\mu\rho,\mu} \partial_\rho \epsilon_\lambda + \kappa \tilde{\phi}_{\mu\rho} \partial_\mu \partial_\rho \epsilon_\lambda + \\ &\quad + \kappa \tilde{\phi}_{\sigma\lambda,\mu} \partial_\sigma \epsilon_\mu + \kappa \tilde{\phi}_{\sigma\lambda} \partial_\sigma \partial_\mu \epsilon_\mu - \kappa \tilde{\phi}_{\mu\lambda,\mu} \partial_\rho \epsilon_\rho - \kappa \tilde{\phi}_{\mu\lambda} \partial_\mu \partial_\rho \epsilon_\rho - \\ &\quad - \kappa \partial_\mu \epsilon_\nu \tilde{\phi}_{\mu\lambda,\nu} - \kappa \epsilon_\nu \tilde{\phi}_{\mu\lambda,\nu\mu} \\ &= [\eta_{\lambda\nu} \square - \kappa (\tilde{\phi}_{\mu\lambda,\nu\mu} - \tilde{\phi}_{\mu\rho} \eta_{\lambda\nu} \partial_\mu \partial_\rho - \tilde{\phi}_{\mu\rho,\mu} \eta_{\lambda\nu} \partial_\rho + \\ &\quad + \tilde{\phi}_{\mu\lambda,\mu} \partial_\nu)] \epsilon_\nu. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Assim, $M_{\lambda\nu}$ será dado por

$$M_{\lambda\nu} = \eta_{\lambda\nu} \square - \kappa(\tilde{\phi}_{\mu\lambda,\nu\mu} - \tilde{\phi}_{\mu\rho}\eta_{\lambda\nu}\partial_\mu\partial_\rho - \tilde{\phi}_{\mu\rho,\mu}\eta_{\lambda\nu}\partial_\rho + \tilde{\phi}_{\mu\lambda,\mu}\partial_\nu) \quad (2.51)$$

e finalmente temos a lagrangiana de Faddeev e Popov

$$\mathcal{L}_{FP} = \xi[\eta_{\lambda\nu}\square - \kappa(\tilde{\phi}_{\mu\lambda,\nu\mu} - \tilde{\phi}_{\mu\rho}\eta_{\lambda\nu}\partial_\mu\partial_\rho - \tilde{\phi}_{\mu\rho,\mu}\eta_{\lambda\nu}\partial_\rho + \tilde{\phi}_{\mu\lambda,\mu}\partial_\nu)]\eta. \quad (2.52)$$

Da lagrangiana (2.52) obtemos para o propagador e o vértice gráviton-ghost-ghost

$$P_{\mu\nu}^g = \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu\alpha\beta}^g(k_1, k_2, k_3) &= \frac{\kappa}{2}[\eta_{\alpha\beta}(k_{2\mu}k_{3\nu} + k_{3\mu}k_{2\nu}) \\ &\quad - (\eta_{\mu\alpha}k_{1\nu} + \eta_{\nu\alpha}k_{1\mu})k_{2\beta}] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Podemos observar dos resultados (2.52) e (2.53) que neste caso, semelhantemente ao que acontece na QCD [Mut87], não temos a presença do vetor u_μ e o único pólo do propagador está em $k^2 = 0$.

Capítulo 3

Funções de um e dois Grávitons no “Gauge” Temporal

Neste capítulo, vamos aplicar as regras de Feynman obtidas no capítulo anterior ao estudo das funções de Green térmicas de um e dois grávitons em um “loop” no “gauge” temporal. Usaremos estas funções no próximo capítulo para obtenção das relações de dispersão. No caso da função de dois grávitons (auto-energia gravitacional) a solução analítica exata é de difícil obtenção e o que fazemos é uma expansão em altas temperaturas. Estas funções foram estudadas anteriormente [BFT92, FT91, GDH89, GPY82, KMT84, KR91, Reb92, Reb91], e mostram um comportamento dominante proporcional a T^4 . Consideraremos o termo dominante (proporcional a T^4) e os dois primeiros termos sub-dominantes (proporcionais a T^2 e $\log T$) da série perturbativa. Mostraremos que o termo dominante T^4 pode também ser obtido via formalismo de equação de transporte de Boltzmann.

3.1 Função de um Gráviton

O termo de ordem mais baixa na expansão perturbativa da lagrangiana efetiva térmica é a função de um gráviton ou “tadpole” $\Gamma_{\mu\nu}$. A função de um gráviton é interessante por si mesma já que está diretamente relacionada com o tensor energia-momento efetivo [BF98, Reb91]. Além disso, diferente do caso a temperatura zero, é não nula e proporcional a T^4 . A função de um gráviton em um “loop” é dada pela

contribuição dos seguintes diagramas

$$\Gamma_{\mu\nu} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \quad (3.1)$$

onde a linha ondulada representa os grávitons e a linha tracejada os “ghosts”.

Do formalismo de tempo imaginário utilizando a equação (B.1) temos a seguinte contribuição para o segundo diagrama em (3.1)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\text{ghost}} = \kappa T \sum_{q_0} \int \frac{d^{D-1} \vec{q}}{(2\pi)^{D-1}} \eta_{\mu\nu}; \quad q_0 = 2\pi i n T; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

Logo a soma em (3.2) pode ser calculada usando a relação (B.7) obtendo

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\text{ghost}} = \kappa \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \frac{dq_0}{2\pi i} \int \frac{d^{D-1} \vec{q}}{(2\pi)^{D-1}} 2\eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} + N(q_0) \right). \quad (3.3)$$

Em geral a parte de vácuo das amplitudes (proporcional a $1/2$) diverge no limite $D \rightarrow 4$. Uma dimensão arbitrária D regulariza a parte de vácuo da função de Green térmica como usualmente é feito em temperatura zero. Para a parte de matéria o fator $N(q_0)$ produz um “cutoff” exponencial no ultravioleta das integrais e assim nenhuma nova divergência ultravioleta é introduzida a temperatura finita e todas as divergências aparecem em $T = 0$. Isto pode ser entendido da seguinte forma. Imaginemos construir um conjunto completo de estados que são auto-estados da hamiltoniana com energias E_S , a função de partição é obtida diretamente de

$$Z = \sum_S e^{-\beta E_S} \quad (3.4)$$

assim nenhuma nova divergência em $T > 0$ poderia aparecer. Por outro lado para obtermos a função de partição como uma integral funcional fizemos apenas uma continuação analítica de tempo real para imaginário na amplitude de transição (A.13).

A parte de temperatura zero de (3.3) se anula como consequência da identidade [Mut87]

$$\int d^{D-1} \vec{q} |\vec{q}|^r = 0. \quad (3.5)$$

A parte térmica de (3.3) também se anula ao fecharmos o contorno pelo lado direito do plano q_0 já que não há pólos. O fato de os “ghosts” efetivamente não contribuírem é uma característica do gauge temporal e ocorre também na QCD [FTBM99]. Como

sabemos os “ghosts” aparecem por uma necessidade de eliminarmos graus de liberdade expurios da teoria. Em vista disso o fato dos “ghosts” não contribuírem efetivamente no “gauge” temporal leva ao argumento de que este “gauge” seria uma escolha mais física.

A contribuição do primeiro diagrama de (3.1), usando as regras de Feynman (2.19) e (2.20), é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu} = \kappa T \sum_{q_0} \int \frac{d^{D-1} \vec{q}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{D}{8} \left[2(D-3) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - (D-5) \eta_{\mu\nu} \right]. \quad (3.6)$$

O resultado (3.6) é independente do parâmetro Ξ e tem apenas pólo em q^2 . O fato do resultado ser independente do parâmetro de “gauge” não é por acaso e está relacionado com a estrutura do propagador (2.19) e as identidades de Ward (C.6).

Como a expressão (3.6) tem apenas pólo em q^2 podemos usar o método de integral de contorno mostrado no apêndice B. Usando a relação (B.7) e tomando $D = 4$ obtemos

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_0 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{q} N(q_0) \left[2 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \quad (3.7)$$

Fechando o contorno pelo lado direito o pólo $q_0 = |\vec{q}|$ da seguinte contribuição

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{q} \left[-\frac{N(|\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} 2q_\mu q_\nu \right] \\ &= -\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|}{2} N(|\vec{q}|) d|\vec{q}| \int d\Omega 2q_\mu q_\nu. \end{aligned}$$

Devido à condição de camada de massa, $q^2 = 0$, podemos escrever

$$q_\mu = |\vec{q}| Q_\mu \quad (3.8)$$

onde $Q_\mu = (1, \vec{q}/|\vec{q}|)$ e $Q^2 = 0$. O valor da integral $\int d\Omega Q_\mu Q_\nu$, pode ser obtido da seguinte maneira

$$\int d\Omega Q_\mu Q_\nu = A u_\mu u_\nu + B \eta_{\mu\nu},$$

Projetando na base $u_\mu u_\nu$ e $\eta_{\mu\nu}$ obtemos duas equações

$$\begin{aligned} \int d\Omega (u \cdot Q)^2 &= A + B = 4\pi \\ \int d\Omega Q^2 &= A + 4B = 0, \end{aligned}$$

das quais,

$$\begin{aligned} A &= \frac{16\pi}{3} \\ B &= -\frac{4\pi}{3}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\int d\Omega Q_\mu Q_\nu = \frac{4\pi}{3}(4u_\mu u_\nu - \eta_{\mu\nu}). \quad (3.9)$$

Precisamos também do valor da integral espacial $\int_0^\infty |\vec{q}|^3 N(|\vec{q}|) d|\vec{q}|$, que pode ser obtido da fórmula [GR80]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x/T} - 1} dx = \Gamma(\nu) \zeta(\nu) T^\nu, \quad (3.10)$$

para $\nu > 2$, onde Γ é a função gamma de Euler. Então o “tadpole” será, finalmente [BCMM03]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} &= -\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|^3}{e^{|\vec{q}|/T} - 1} d|\vec{q}| \int d\Omega Q_\mu Q_\nu \\ &= -\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|^3}{e^{|\vec{q}|/T} - 1} d|\vec{q}| \left[\frac{4\pi}{3} (4u_\mu u_\nu - \eta_{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{90} \kappa T^4 (\eta_{\mu\nu} - 4u_\mu u_\nu). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como vemos, o resultado é independente do “gauge” como era de se esperar por resultados já obtidos em “gauges” covariantes [BF98, Reb91] e tratando-se de uma quantidade proporcional ao tensor energia-momento. Além disso a equação (3.11) exhibe a mesma propriedade de traço nulo característico do tensor energia-momento para o campo gravitacional [Wei72].

3.2 Função de Dois Grávitons

O segundo termo na série perturbativa da lagrangiana efetiva térmica é a função de dois grávitons ou auto-energia do gráviton $\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}$. As contribuições a esta são dadas pelos diagramas

$$\Pi_{\mu\nu\alpha\beta} = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3}. \quad (3.12)$$

Consideramos inicialmente o diagrama de ghost, ou seja, o terceiro diagrama de (3.12). Como podemos ver da estrutura do propagador (2.29) o integrando irá envolver uma combinação de frações do tipo

$$\frac{1}{(q \cdot u)^m [(k+q) \cdot u]^n}, \quad m, n = 0, 1, 2. \quad (3.13)$$

Antes de calcular a integração no momento interno é conveniente simplificar o integrando usando a decomposição parcial das quantidades (3.13), como por exemplo

$$\frac{1}{q \cdot u [(k+q) \cdot u]} = \frac{1}{k \cdot u} \left[\frac{1}{q \cdot u} - \frac{1}{(q+k) \cdot u} \right] \quad (3.14)$$

e em seguida fazer o deslocamento $q \rightarrow q - k$ na fração resultante contendo potências de $[(k+q) \cdot u]^{-1}$. O resultado obtido é dado por

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu,\alpha\beta}^{gh} = & T \sum_{q_0} \int \frac{d^{D-1}\vec{q}}{(2\pi)^{D-1}} \left[\frac{k^2 k \cdot q u_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^3 q \cdot u} - \frac{1}{2} \frac{k^2 u_\mu u_\nu q_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{u_\mu k_\nu u_\alpha q_\beta}{k \cdot u q \cdot u} \right. \\ & - \frac{1}{2} \frac{k^2 q_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{u_\mu k_\nu q_\alpha u_\beta}{k \cdot u q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{k_\mu u_\nu u_\alpha q_\beta}{k \cdot u q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{k_\mu u_\nu q_\alpha u_\beta}{k \cdot u q \cdot u} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} \\ & - \frac{1}{2} \frac{k \cdot q u_\mu u_\nu u_\alpha k_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{q_\mu u_\nu u_\alpha k_\beta}{k \cdot u q \cdot u} - \frac{1}{2} \frac{k^2 u_\mu u_\nu u_\alpha q_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{k \cdot q u_\mu u_\nu u_\alpha q_\beta}{k \cdot u (q \cdot u)^2} \\ & + \frac{1}{2} \frac{k \cdot q u_\mu u_\nu q_\alpha u_\beta}{k \cdot u (q \cdot u)^2} - \frac{1}{2} \frac{k \cdot q u_\mu k_\nu u_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{k \cdot q q_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta}{k \cdot u (q \cdot u)^2} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \\ & - \frac{1}{2} \frac{u_\mu q_\nu q_\alpha u_\beta}{(q \cdot u)^2} + \frac{1}{2} \frac{u_\mu q_\nu u_\alpha k_\beta}{k \cdot u q \cdot u} - \frac{1}{2} \frac{(k \cdot q)^2 u_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^2 (q \cdot u)^2} - \frac{1}{2} \frac{k \cdot q k_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} \\ & - \frac{1}{2} \frac{k^2 u_\mu q_\nu u_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{k \cdot q u_\mu q_\nu u_\alpha u_\beta}{k \cdot u (q \cdot u)^2} - \frac{1}{2} \frac{q_\mu u_\nu q_\alpha u_\beta}{(q \cdot u)^2} - \frac{1}{2} \frac{q_\mu u_\nu u_\alpha q_\beta}{(q \cdot u)^2} \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{u_\mu q_\nu u_\alpha q_\beta}{(q \cdot u)^2} + \frac{1}{2} \frac{u_\mu q_\nu k_\alpha u_\beta}{k \cdot u q \cdot u} + \frac{1}{2} \frac{q_\mu u_\nu k_\alpha u_\beta}{k \cdot u q \cdot u} - \frac{1}{2} \frac{k \cdot q u_\mu u_\nu k_\alpha u_\beta}{(k \cdot u)^2 q \cdot u} \right] \quad (3.15) \end{aligned}$$

Note que a decomposição parcial é justificada já que os integrandos são regularizados. Podemos notar que o integrando da expressão (3.15) possui um denominador simples com pólos apenas em $q \cdot u = 0$. Na próxima seção mostraremos que este tipo de integrando se anula devido a regularização dimensional.

Consideremos agora os dois primeiros diagramas de (3.12). Agora além dos pólos em $q \cdot u$ e $(q+k) \cdot u$ temos os pólos na camada de massa, ou seja, em q^2 e $(q+k)^2$. Com o intuito de poder usar o método integral descrito no apêndice B, usaremos a seguinte prescrição para os pólos em $q \cdot u = q_0$ [LS94]

$$\frac{1}{q_0^r} \rightarrow \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{q_0^r}{(q_0^2 - \mu^2)^r}. \quad (3.16)$$

Com essa prescrição estes pólos são deslocados do eixo imaginário e assim é possível usar a relação (B.7). A integração em q_0 pode ser feita fechando o contorno de integração pelo lado direito como no caso da função de um gráviton. Na próxima seção analisaremos a contribuição dos pólos de prescrição localizados em $q_0 = \mu$, por hora veremos a contribuição dos pólos na camada de massa. Seguindo os passos do apêndice B para a função de Green com dois propagadores, obtemos para a parte de

amplitudes frontais de (3.12)

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu,\alpha\beta}|_{AF} = & -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{4|\vec{q}|} \frac{1}{e^{\frac{|\vec{q}|}{T}} - 1} \left\{ \begin{array}{c} \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \\ + \quad q \leftrightarrow -q \end{array} \right\}_{q_0=|\vec{q}|}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Está subentendido que as linhas externas de gráviton estão contraídas com o tensor dado entre chaves na expressão (2.19). Ressaltamos que a dependência no parâmetro de “gauge” envolve apenas termos lineares em Ξ . Isto é de se esperar já que os termos de as potência quadrática em Ξ , os quais deveriam surgir em princípio do propagador (2.19), não possuem pólos na camada de massa. Outra propriedade interessante de (3.17) é que ela envolve “ghosts” térmicos.

A expressão em termos de amplitudes frontais é bastante conveniente quando consideramos as contribuições da expansão em altas temperaturas as quais surgem da região onde o momento interno q é da ordem da temperatura T , que é muito grande em relação ao momento externo k . Neste regime podemos expandir os denominadores na equação (3.17) como segue

$$\frac{1}{k^2 \pm 2k \cdot q} = \pm \frac{1}{2k \cdot q} - \frac{k^2}{(2k \cdot q)^2} + \dots \quad (3.18)$$

Devido a soma $q \leftrightarrow -q$ em (3.17) os pólos de camada de massa contribuem apenas com termos pares na temperatura. Isto pode ser entendido uma vez que usando (3.18) em (3.17) sobrarão apenas termos pares em $|\vec{q}|$ (lembrando a fórmula (3.10)).

3.2.1 Contribuição Dominante

A contribuição dominante é obtida por considerar todos os termos de grau dois no momento interno q da expansão das amplitudes entre chaves de (3.17). O resultado obtido para a contribuição dominante pode ser escrita na forma compacta [BCMM03]

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu,\alpha\beta}^{T^4}|_{AF} = & -\kappa^2 \frac{\pi^2 T^4}{30} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{2} \left[\left(k \cdot \frac{\partial}{\partial Q} \right) \frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta}{Q \cdot k} - \eta_{\mu\alpha} Q_\nu Q_\beta - \eta_{\nu\alpha} Q_\mu Q_\beta \right. \\ & \left. - \eta_{\nu\beta} Q_\mu Q_\alpha - \eta_{\mu\beta} Q_\nu Q_\alpha \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

após utilizar a fórmula (3.10), com Q_μ tendo o mesmo significado de (3.8). Podemos verificar facilmente que a contribuição dominante T^4 está relacionada com a função

de um gráviton da equação (3.11) pela identidade de Ward na equação (C.8). O resultado (3.19), além de não depender do parâmetro de “gauge”, também está de acordo com o correspondente resultado obtido no “gauge” de Feynman-De Donder [Reb91, BF98]. É esperado que a contribuição dominante seja independente de “gauge”, sendo uma propriedade geral de temperatura finita. Esta propriedade foi formalmente demonstrada em QCD por Braaten e Pisarski [BP90a, BP90b] através de um procedimento não trivial onde um número infinito de diagramas devem ser somados. Desta forma, as contribuições dos pólos de prescrição não devem modificar o comportamento dominante T^4 . Isto será confirmado explicitamente na próxima seção.

O resultado (3.19) também pode ser expresso em termos de uma estrutura tensorial generalizada. Para isso é conveniente usar a decomposição tensorial

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_{l=1}^{14} C_l \mathcal{T}_l^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (3.20)$$

onde os tensores $\mathcal{T}_l$ são dados pela base (2.18). Os coeficientes C_l são obtidos resolvendo o sistema

$$\Pi_i - \sum_{l=1}^{14} C_l \mathcal{T}_l^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{T}_{i\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (3.21)$$

onde as quantidades Π_i são as seguintes projeções da auto-energia do gráviton

$$\Pi_i = \Pi_{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{T}_i^{\mu\nu\alpha\beta}; \quad i = 1, \dots, 14. \quad (3.22)$$

Podemos integrar em $d\Omega$, escolhendo $k = (k_0, 0, 0, |\vec{k}|)$, para cada projeção. Inserindo o resultado em (3.22) e resolvendo o sistema (3.21) para C_l obtemos

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[\frac{1}{8} \frac{k^4}{\vec{k}^4} L(k) - \frac{1}{24} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{1}{6} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ C_2 &= \left[\frac{5}{8} \frac{k^6}{\vec{k}^6} L(k) - \frac{5}{24} \frac{k^4}{\vec{k}^4} + \frac{1}{12} \frac{k^2}{\vec{k}^2} - \frac{1}{3} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ C_3 &= \left[\frac{35}{8} \frac{k^8}{\vec{k}^8} L(k) - \frac{35}{24} \frac{k^6}{\vec{k}^6} + \frac{17}{12} \frac{k^4}{\vec{k}^4} - \frac{1}{3} \frac{k^2}{\vec{k}^2} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ C_4 &= \left[\frac{1}{8} \frac{k^4}{\vec{k}^4} L(k) - \frac{1}{24} \frac{k^2}{\vec{k}^2} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ C_5 &= \left[\frac{5}{8} \frac{k^6}{\vec{k}^6} L(k) - \frac{5}{24} \frac{k^4}{\vec{k}^4} + \frac{1}{12} \frac{k^2}{\vec{k}^2} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ C_6 &= -\frac{k_0}{\vec{k}^2} \left[\frac{5}{8} \frac{k^4}{\vec{k}^4} L(k) - \frac{5}{24} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{1}{12} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ C_7 &= -\frac{k_0}{\vec{k}^2} \left[\frac{35}{8} \frac{k^6}{\vec{k}^6} L(k) - \frac{35}{24} \frac{k^4}{\vec{k}^4} + \frac{7}{12} \frac{k^2}{\vec{k}^2} - \frac{1}{3} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_8 &= \frac{1}{\vec{k}^2} \left[\left(\frac{5k^2}{8\vec{k}^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{k^2}{\vec{k}^2} L(k) - \frac{5k^2}{24\vec{k}^2} - \frac{1}{12} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\
C_9 &= \frac{1}{\vec{k}^2} \left[\left(\frac{35k^2}{8\vec{k}^2} + \frac{15}{4} \right) \frac{k^4}{\vec{k}^4} L(k) - \frac{35k^4}{24\vec{k}^4} - \frac{2k^2}{3\vec{k}^2} + \frac{1}{6} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\
C_{10} &= \frac{1}{\vec{k}^2} \left[\left(\frac{35k^2}{8\vec{k}^2} + \frac{15}{4} \right) \frac{k^4}{\vec{k}^4} L(k) - \frac{35k^4}{24\vec{k}^4} - \frac{2k^2}{3\vec{k}^2} + \frac{1}{6} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\
C_{11} &= -\frac{k_0}{\vec{k}^4} \left[\left(\frac{35k^2}{8\vec{k}^2} + \frac{5}{2} \right) \frac{k^2}{\vec{k}^2} L(k) - \frac{35k^2}{24\vec{k}^2} - \frac{1}{4} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\
C_{12} &= \frac{1}{\vec{k}^4} \left[\left(\frac{35k^4}{8\vec{k}^4} + 5\frac{k^2}{\vec{k}^2} + 1 \right) L(k) - \frac{35k^2}{24\vec{k}^2} - \frac{13}{12} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\
C_{13} &= \frac{1}{\vec{k}^4} \left[\left(\frac{5k^2}{8\vec{k}^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{k^2}{\vec{k}^2} L(k) - \frac{5k^2}{24\vec{k}^2} - \frac{1}{12} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \\
C_{14} &= -\frac{k_0}{\vec{k}^2} \left[\frac{5k^4}{8\vec{k}^4} L(k) - \frac{5k^2}{24\vec{k}^2} + \frac{1}{12} \right] \frac{\pi^2 T^4}{15} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

onde

$$L(k) = \frac{k_0}{2|\vec{k}|} \log \frac{k_0 + |\vec{k}|}{k_0 - |\vec{k}|} - 1 \tag{3.24}$$

Este resultado está de acordo com o obtido na referência [Reb91] calculado num “gauge” covariante.

3.2.2 Contribuição Sub-dominante T^2

Consideremos agora a contribuição sub-dominante que é obtida quando expandimos o integrando de (3.17) e tomamos os termos de ordem zero em q . Por contagem de potência e usando (3.10) estes termos devem ser da ordem T^2 . A contribuição sub-dominante obtida na forma (3.20) é a seguinte [BCMM03]

$$\begin{aligned}
C_1^{T^2} &= \left[\frac{k^4 L(k)}{\vec{k}^2} \left(\frac{1}{12} + \frac{5k^2}{192\vec{k}^2} \right) + \frac{1}{36\vec{k}^2} - \frac{5k^4}{576\vec{k}^2} - \frac{1}{144}k^2 - \frac{1}{30} \frac{\Xi}{n_0^2} k^4 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_2^{T^2} &= \left[\frac{k^6 L(k)}{\vec{k}^4} \left(\frac{7}{32} + \frac{25k^2}{192\vec{k}^2} \right) - \frac{25k^6}{576\vec{k}^4} - \frac{1k^4}{18\vec{k}^2} - \frac{1}{36}k^2 + \frac{4}{45} \frac{\Xi}{n_0^2} k^4 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_3^{T^2} &= \left[\frac{k^8 L(k)}{\vec{k}^6} \left(\frac{15}{16} + \frac{175k^2}{192\vec{k}^2} \right) - \frac{175k^8}{576\vec{k}^6} - \frac{55k^6}{288\vec{k}^4} + \frac{1k^4}{18\vec{k}^2} + \frac{1}{9}k^2 - \frac{4}{15} \frac{\Xi}{n_0^2} k^4 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_4^{T^2} &= \left[\left(-\frac{1}{16} + \frac{5k^2}{192\vec{k}^2} \right) \frac{k^4 L(k)}{\vec{k}^2} - \frac{4}{15} \frac{\Xi}{n_0^2} (\vec{k}^4 + k^2\vec{k}^2 - \frac{1}{12}k^4) - \frac{5k^4}{576\vec{k}^2} + \frac{5}{288}k^2 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_5^{T^2} &= \left[\frac{25k^8 L(k)}{192\vec{k}^6} + \frac{1}{18}\vec{k}^2 - \frac{25k^6}{576\vec{k}^4} + \frac{5k^4}{288\vec{k}^2} + \frac{1}{9}k^2 - \frac{1}{15} \frac{\Xi}{n_0^2} (4k^2\vec{k}^2 + \frac{14}{3}k^4) \right] \kappa^2 T^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_6^{T^2} &= k_0 \left[- \left(\frac{7}{32} + \frac{25}{192} \frac{k^2}{\vec{k}^2} \right) \frac{k^4 L(k)}{\vec{k}^4} + \frac{25}{576} \frac{k^4}{\vec{k}^4} + \frac{1}{18} \frac{k^2}{\vec{k}^2} - \frac{4}{45} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_7^{T^2} &= k_0 \left[- \left(\frac{15}{16} + \frac{175}{192} \frac{k^2}{\vec{k}^2} \right) \frac{k^6 L(k)}{\vec{k}^6} + \frac{175}{576} \frac{k^6}{\vec{k}^6} + \frac{55}{288} \frac{k^4}{\vec{k}^4} - \frac{1}{18} \frac{k^2}{\vec{k}^2} - \frac{1}{18} + \frac{4}{15} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_8^{T^2} &= \left[\left(\frac{13}{96} + \frac{31}{96} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{25}{192} \frac{k^4}{\vec{k}^4} \right) \frac{k^2 L(k)}{\vec{k}^2} - \frac{25}{576} \frac{k^4}{\vec{k}^4} + \left(\frac{4}{45} \vec{k}^2 + \frac{11}{90} k^2 \right) \frac{\Xi}{n_0^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{48} - \frac{13}{144} \frac{k^2}{\vec{k}^2} \right] \kappa^2 T^2 \\
C_9^{T^2} &= \left[\left(\frac{15}{16} + \frac{55}{32} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{175}{192} \frac{k^4}{\vec{k}^4} \right) \frac{k^4 L(k)}{\vec{k}^4} - \frac{175}{576} \frac{k^6}{\vec{k}^6} - \frac{65}{144} \frac{k^4}{\vec{k}^4} - \frac{11}{72} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{2}{45} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_{10}^{T^2} &= \left[\left(\frac{23}{32} + \frac{55}{32} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{175}{192} \frac{k^4}{\vec{k}^4} \right) \frac{k^4 L(k)}{\vec{k}^4} - \frac{175}{576} \frac{k^6}{\vec{k}^6} - \frac{65}{144} \frac{k^4}{\vec{k}^4} - \frac{23}{288} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{1}{12} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{15} \frac{\Xi}{n_0^2} (\vec{k}^2 + \frac{4}{3} k^2) \right] \kappa^2 T^2 \\
C_{11}^{T^2} &= \frac{k_0}{\vec{k}^2} \left[- \left(\frac{1}{2} + \frac{35}{24} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{175}{192} \frac{k^4}{\vec{k}^4} \right) \frac{k^2 L(k)}{\vec{k}^2} + \frac{175}{576} \frac{k^4}{\vec{k}^4} + \frac{35}{96} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{1}{24} + \frac{2}{15} \frac{\Xi}{n_0^2} \vec{k}^2 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_{12}^{T^2} &= \frac{1}{\vec{k}^2} \left[\left(\frac{1}{6} + \frac{29}{24} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{95}{48} \frac{k^4}{\vec{k}^4} + \frac{175}{192} \frac{k^6}{\vec{k}^6} \right) L(k) - \frac{175}{576} \frac{k^4}{\vec{k}^4} - \frac{155}{288} \frac{k^2}{\vec{k}^2} - \frac{5}{24} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{45} \frac{\Xi}{n_0^2} \vec{k}^2 \right] \kappa^2 T^2 \\
C_{13}^{T^2} &= \left[\left(\frac{1}{16} + \frac{5}{48} \frac{k^2}{\vec{k}^2} + \frac{25}{192} \frac{k^4}{\vec{k}^4} \right) \frac{k^2 L(k)}{\vec{k}^2} - \frac{25}{576} \frac{k^4}{\vec{k}^4} - \frac{5}{288} \frac{k^2}{\vec{k}^2} - \left(\frac{14}{45} \vec{k}^2 + \frac{1}{3} k^2 \right) \frac{\Xi}{n_0^2} \right] \kappa^2 T^2 \\
C_{14}^{T^2} &= k_0 \left[- \frac{25}{192} \frac{k^6 L(k)}{\vec{k}^6} + \frac{25}{576} \frac{k^4}{\vec{k}^4} - \frac{5}{288} \frac{k^2}{\vec{k}^2} - \frac{1}{18} + \frac{1}{15} \frac{\Xi}{n_0^2} (4\vec{k}^2 + \frac{14}{3} k^2) \right] \kappa^2 T^2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Certas propriedades da contribuição T^2 que devem ser ressaltadas. Primeiro, a contribuição T^2 mostra sua dependência de “gauge” através do parâmetro de “gauge” Ξ . Cada um desses termos dependentes do parâmetro de “gauge” têm duas potências a mais no momento externo em relação aos correspondentes independentes de Ξ . Esta potência a mais de momento nos termos dependentes do parâmetro de “gauge” é uma propriedade geral do “gauge” temporal e ocorre porque a quantidade n_0 tem dimensão de momento. Segundo, o resultado obedece a identidade de ‘t Hooft (C.9).

3.2.3 Contribuição Sub-dominante $\log(T)$

Os termos de grau -2 em q na expansão de (3.18) nos dão a contribuição $\log(T)$. Obtivemos os seguintes resultados para as 14 projeções [BCMM03]

$$\begin{aligned}
\Pi_1^{\log} &= \frac{1}{15\pi^2} \kappa^2 k^4 \left[\frac{1}{32} (1312y^2 - 304y - 363) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{28} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 (4336y^3 - 1948y^2 - 1272y + 39) \right] \log(T) \\
\Pi_2^{\log} &= -\frac{1}{15\pi^2} \kappa^2 k^4 (y-1) \left[\frac{1}{16} (8y - 113) - \frac{1}{14} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 (1332y^2 - 928y - 19) \right] \log(T) \\
\Pi_3^{\log} &= \frac{1}{15\pi^2} \kappa^2 k^4 (y-1)^2 \left[\frac{17}{16} - \frac{1}{28} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 (76y + 1) \right] \log(T) \\
\Pi_4^{\log} &= \frac{1}{15\pi^2} \kappa^2 k^4 \left[\frac{1}{32} (352y^2 - 464y - 23) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{7} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 (y-1) (1084y^2 - 243y - 1) \right] \log(T) \\
\Pi_5^{\log} &= -\frac{1}{15\pi^2} \kappa^2 k^4 (y-1) \left[\frac{1}{16} (56y + 59) + \frac{1}{7} \frac{\Xi}{n_0^2} k^2 (y-1) (174y + 1) \right] \log(T) \\
\Pi_6^{\log} &= \frac{4}{3\pi^2} \kappa^2 k^4 k_0 (y-1) y \log(T) \\
\Pi_7^{\log} &= \Pi_8^{\log} = \Pi_9^{\log} = \Pi_{10}^{\log} = \Pi_{11}^{\log} = \Pi_{12}^{\log} = \Pi_{14}^{\log} = 0 \\
\Pi_{13}^{\log} &= \frac{2}{3\pi^2} \kappa^2 k^6 (y-1) y^2 \log(T)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde

$$y \equiv \frac{k_0^2}{k^2} \tag{3.27}$$

O resultado acima está relacionado de forma simples com as projeções correspondentes à parte de divergência ultravioleta da temperatura zero da auto-energia do gráviton. Os resultados a temperatura zero foram calculados no caso particular quando $\Xi = 0$ em [CL82]. Fazendo $\Xi = 0$ em (3.26) verificamos que

$$\Pi_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\log} \Big|_{\text{AF}} = \log(T) \Pi_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\epsilon}, \tag{3.28}$$

onde $\Pi_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\epsilon}$ é o resíduo da divergência ultravioleta da temperatura zero calculada na dimensão $D = 4 - 2\epsilon$. Esta relação também é geral em temperatura finita. Em [BF97b] Brandt e Frenkel esta relação para a QED e QCD. A relação foi verificada explicitamente em diversas teorias como por exemplo na QED [BF95], na QCD em diferentes “gauges” [BF97a, FTBM99] e na gravitação [BF98].

3.3 Contribuição dos Pólos de Prescrição para a Função do dois Grávítos

A fim de investigar as contribuições dos pólos de prescrição para cada projeção

podemos escreve-las numa forma geral, levando-se em conta que o denominador das projeções depende apenas do denominador do propagador (2.19) e o numerador é uma combinação dos escalares k^2 , q^2 , $k \cdot q$, $k \cdot u$ e $q \cdot u$. Assim, estas contribuições podem ser escritas numa forma geral

$$\Pi_i^{\text{presc}} = \sum_{r=1}^4 T \sum_{q_0} \int d^{D-1} \vec{q} \left[\frac{f_i^r(k_0, \vec{k} \cdot \vec{q}, \vec{q}^2, \vec{k}^2)}{q^2(q+k)^2} + g_i^r(k_0, \vec{k} \cdot \vec{q}, \vec{q}^2, \vec{k}^2) \right] \frac{1}{q_0^r} \quad (3.29)$$

onde f_i^r e g_i^r são funções polinomiais em seus argumentos. Nos cálculos a seguir não explicitaremos a forma de f_i^r e g_i^r . Em particular, podemos notar que a expressão do diagrama de “ghosts” dada por (3.15) contribui com termos do tipo g_i^r que não contem pólos na camada de massa.

As somas contendo $1/q_0^r$ são divergentes e para trata-las precisamos usar a prescrição proposta por Leibbrandt [LS94] de acordo com a qual fazemos a substituição (3.16). O parâmetro μ regulariza a originalmente mal definida soma e também torna possível usar a fórmula (B.7), já que o integrando é regular ao longo do eixo imaginário de q_0 . Desta forma, (3.29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Pi_i^{\text{presc}} = & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{r=1}^4 \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dq_0}{2\pi i} \int d^{D-1} \vec{q} \frac{1}{2} \coth \left(\frac{q_0}{2T} \right) \left\{ \frac{(q_0)^r}{(q_0^2 - \mu^2)^r} \left[\frac{f_i^r(k_0, \vec{k} \cdot \vec{q}, \vec{q}^2, \vec{k}^2)}{q^2(q+k)^2} \right] \right. \\ & \left. + \quad q \leftrightarrow -q \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde usamos a identidade (3.5) e a integração dimensionalmente regularizada dos termos g_i^r se anula. Esta importante propriedade mostra como os “ghosts” efetivamente se desacoplam em temperatura finita.

Calculando a integração em q_0 fechando o contorno de integração pela direita (vide apêndice B), obtemos de (3.30)

$$\Pi_i^{\text{presc}} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{r=1}^4 \frac{d^r}{d\mu^r} \coth \left(\frac{\mu}{2T} \right) \int d^{D-1} \vec{q} G^r(\mu, k_0, \vec{k} \cdot \vec{q}, \vec{q}^2, \vec{k}^2). \quad (3.31)$$

onde G^r são funções que dependem das derivadas das funções f_i^r . Para obter o limite $\mu \rightarrow 0$, utilizamos a expansão da cotangente hiperbólica e suas derivadas

$$\begin{aligned}\coth\left(\frac{\mu}{2T}\right) &= \frac{2T}{\mu} + \mathcal{O}(\mu), & \frac{d}{d\mu} \coth\left(\frac{\mu}{2T}\right) &= -\frac{2T}{\mu^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{T} + \mathcal{O}(\mu^2) \\ \frac{d^2}{d\mu^2} \coth\left(\frac{\mu}{2T}\right) &= \frac{4T}{\mu^3} + \mathcal{O}(\mu), & \frac{d^3}{d\mu^3} \coth\left(\frac{\mu}{2T}\right) &= -\frac{12T}{\mu^4} - \frac{1}{60} \frac{1}{T^3} + \mathcal{O}(\mu^2).\end{aligned}\quad (3.32)$$

Uma importante propriedade das contribuições dos pólos de prescrição é que toda a dependência na temperatura surge apenas da expansão da cotangente hiperbólica e suas derivadas, mostrado acima serem potências ímpares em T .

Usando a simetria da integral angular todas as potências inversas de μ se anulam. Trata-se na verdade de uma combinação especial de integrais angulares que dá zero. Obtemos assim o resultado finito dado por [BCMM03]

$$\begin{aligned}\Pi_i^{\text{presc}} &= T \int d^{D-1} \vec{q} \frac{F_i^1(k_0, \vec{k} \cdot \vec{q}, \vec{q}^2, \vec{k}^2)}{\vec{q}^6 [-k_0^2 + (\vec{q} + \vec{k})^2]^5 [-k_0^2 + (\vec{q} - \vec{k})^2]^5} \\ &+ \frac{1}{T} \int d^{D-1} \vec{q} \frac{F_i^2(k_0, \vec{k} \cdot \vec{q}, \vec{q}^2, \vec{k}^2)}{\vec{q}^4 [-k_0^2 + (\vec{q} + \vec{k})^2]^3 [-k_0^2 + (\vec{q} - \vec{k})^2]^3} \\ &+ \frac{1}{T^3} \int d^{D-1} \vec{q} \frac{F_i^3(k_0, \vec{k} \cdot \vec{q}, \vec{q}^2, \vec{k}^2)}{\vec{q}^2 [-k_0^2 + (\vec{q} + \vec{k})^2] [-k_0^2 + (\vec{q} - \vec{k})^2]}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Todas essas integrais são regulares e podem ser feitas. Para $i = 7, \dots, 14$ obtemos $\Pi_i^{\text{presc}} = 0$, sendo que todas as outras não se anulam. A partir do resultado (3.33) podemos ver que estes termos envolvem somente potências ímpares de T (apenas T , $1/T$ e $1/T^3$) não contribuindo para os termos T^4 , T^2 e $\log(T)$, que são os termos relevantes em altas temperaturas.

Como um exemplo simples, vamos calcular explicitamente a projeção Π_6^{presc} . Esta contribuição pode ser escrita como

$$\Pi_6^{\text{presc}} = \kappa^2 T \sum_{q_0} \int \frac{d^{D-1} \vec{q}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(D-3)D}{2D-4} \left[\frac{\vec{q}^4 + (5-2D)k_0^4 + (2D-6)k_0^2(\vec{k}^2 + \vec{q}^2) + \vec{k}^4 - 2\vec{q}^2\vec{k}^2}{q_0(q+k)^2} \right]. \quad (3.34)$$

Usando (3.16) e usando o método de amplitudes frontais obtemos

$$\begin{aligned}\Pi_6^{\text{presc}} &= \kappa^2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dq_0}{4\pi i} \int \frac{d^{D-1} \vec{q}}{(2\pi i)^{D-1}} \coth\left(\frac{q_0}{2T}\right) \left\{ \frac{(D-3)D}{2D-4} \times \right. \\ &\times \left. \frac{q_0 \left[\vec{q}^4 + (5-2D)k_0^4 + (2D-6)k_0^2(\vec{k}^2 + \vec{q}^2) + \vec{k}^4 - 2\vec{q}^2\vec{k}^2 \right]}{(q_0^2 - \mu^2)(q+k)^2} + q \leftrightarrow -q \right\}.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Fechando o contorno de integração pelo lado direito, integrando em q_0 e expandindo em μ obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_6^{\text{presc}} = & \kappa^2 \frac{(D-3)D}{2D-4} T k_0 \int \frac{d^{D-1}\vec{q}}{(2\pi i)^{D-1}} \left\{ \frac{(2D-6)k_0^2(\vec{q}^2 + \vec{k}^2) + (5-2D)k_0^4 + (\vec{k}^2 - \vec{q}^2)^2}{[k_0^2 - (\vec{q} + \vec{k})^2]^2} \right. \\ & \left. + \vec{k} \leftrightarrow -\vec{k} \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Fazendo o deslocamento $\vec{q} \rightarrow \vec{q} - \vec{k}$ e $k_0 = -ik_4$ temos

$$\begin{aligned} \Pi_6^{\text{presc}} = & \frac{(D-3)D}{D-2} T i k_4 \int \frac{d^{D-1}\vec{q}}{(2\pi i)^{D-1}} \\ & \times \left[\frac{-(2D-6)k_4^2(\vec{q}^2 + 2\vec{k}^2) + (5-2D)k_4^4 + \vec{q}^4 + 4\vec{k} \cdot \vec{q}^2}{(k_4^2 + \vec{q}^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

No limite $D \rightarrow 4$ de (3.37) temos que

$$\Pi_6^{\text{presc}} = \kappa^2 \frac{2iT}{\pi} |k_4|^2 (|k_4|^2 - \vec{k}^2) \quad (3.38)$$

As contribuições para as projeções $\Pi_7 = \Pi_9 = \Pi_{13} = \Pi_{14} = 0$ são obtidas de forma similar. Entretanto, para as projeções $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ e Π_5 temos expressões contendo potências inversas de T como na equação (3.33).

Uma importante propriedade de (3.33) é que a parte dependente da prescrição não é bem definida quando $T \rightarrow 0$. Isso a princípio não deveria ocorrer uma vez que esse resultado é exato em relação a temperatura [não utilizamos a expansão de altas temperaturas como fizemos na contribuição de amplitudes frontais (3.17)]. Para entender essa aparente inconsistência primeiro devemos notar que tornar μ pequeno é equivalente, sob o ponto de vista de cálculo, a tornar T grande. De fato, nos cálculos em QCD os termos $1/T$ obtidos usando o método da função zeta e expansão em altas temperatura se mostraram consistentes com o resultado obtido pelo mesmo método integral que usamos [LS94]. Ressaltamos que estas integrais não-nulas incluem as contribuições de temperatura zero e térmicas (note que os integrandos contêm uma cotangente hiperbólica ao invés da distribuição de Bose-Einstein). Calculando a parte térmica separadamente surgem divergências quando $\mu \rightarrow 0$ além das potências inversas de T . Uma vez que a regularização dimensional foi imposta apenas na parte espacial das integrais, a parte de vácuo também contém potências inversas de μ (os cálculos a temperatura zero com regularização dimensional completa são bem definidos no limite $\mu \rightarrow 0$ [LS94]). Se observa que as potências inversas de μ na parte térmica são canceladas pelas correspondentes da parte de vácuo. Esta propriedade indica que as mal-definidas potências inversas de μ foram trocadas pelas potências inversas de T .

3.4 Conexão com a Teoria Semi-clássica de Transporte

Nesta seção mostraremos que é possível obter os mesmos resultados para as contribuições dominantes T^4 das funções de um e dois grávitons através de um formalismo totalmente distinto.

Teorias de campos no limite de altas temperaturas possuem uma formulação equivalente em termos da equação de transporte [KLLM94]. Fisicamente esta equivalência ocorre tendo em vista que o número de ocupação dos modos do campo externo é grande devido à amplificação fornecida pelo fator de Bose-Einstein.

No limite clássico um sistema de partículas é descrito por uma função de distribuição $F(x^\mu, q_\mu)$, a qual é a densidade de probabilidade no espaço de fase. A função de distribuição clássica pode ser definida como

$$f(x^\mu, q_\mu) = F(x^\mu, q_\mu) \theta(q_0) \delta(g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu) \quad (3.39)$$

No caso sem colisões, a função distribuição satisfaz a equação de Liouville

$$\frac{df}{d\tau} = 0 \quad (3.40)$$

A equação (3.40) pode ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{d\tau} = 0 \quad (3.41)$$

Uma partícula livre sem massa viajando em um espaço-tempo curvo obedece as seguintes relações

$$\begin{aligned} \frac{dq^\alpha}{d\tau} &= -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha q^\mu q^\nu \\ q^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Usando as relações (3.42) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{d\tau} &= \frac{dg_{\alpha\rho} q^\rho}{d\tau} = g_{\alpha\rho} \frac{dq^\rho}{d\tau} + q^\rho \frac{dg_{\alpha\rho}}{d\tau} \\ &= -g_{\alpha\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho q^\mu q^\nu + q^\mu q^\nu \partial_\mu g_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Da forma explícita do símbolo de Christoffel, obtemos de (3.43)

$$\frac{dq_\alpha}{d\tau} = q^\mu q_\gamma \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma \quad (3.44)$$

Inserindo o resultado acima em (3.41), temos

$$q^\alpha \left(\partial_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma q_\gamma \frac{\partial}{\partial q_\beta} \right) f = 0 \quad (3.45)$$

Escrevendo Γ explicitamente em termos de g e definindo o campo de gráviton como

$$\tilde{\phi}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \quad (3.46)$$

obtemos

$$\sqrt{-g} q^\alpha q_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = -\frac{q_\rho q_\mu}{2} \partial_\beta \tilde{\phi}^{\mu\rho} \quad (3.47)$$

Inserindo este resultado no segundo termo da equação (3.45), e usando (3.46) no primeiro termo, obtemos

$$q \cdot \partial f(x, q) = \hat{L} f(x, q) \quad (3.48)$$

onde $q \cdot \partial \equiv \eta^{\mu\nu} q_\mu \partial_\nu$ e

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{2} \left[\left(\partial_\gamma \tilde{\phi}^{\alpha\beta} \right) q_\alpha q_\beta \frac{\partial}{\partial q_\gamma} - \tilde{\phi}^{\alpha\beta} (q_\beta \partial_\alpha + q_\alpha \partial_\beta) \right] \quad (3.49)$$

Entretanto se expandirmos f perturbativamente ($f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + \dots$), teremos

$$f^{(n)} = \left(\frac{1}{q \cdot \partial} \hat{L} \right)^n f^{(0)} \quad (3.50)$$

A função $f^{(0)}$ representa o estado de equilíbrio e de (3.39) é definida como

$$f^{(0)} = 4\theta(q_0) \delta(g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu) N(q_0) \quad (3.51)$$

onde $N(q_0)$ é a distribuição de Bose-Einstein.

As funções de n-pontos podem ser obtidas da relação

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta g^{\alpha\beta}} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} q_\alpha q_\beta f(x, q) \quad (3.52)$$

onde Γ é a ação efetiva e $T^{\mu\nu}$ o tensor energia-momento do sistema.

Por diferenciação funcional de $\int d^4 q q_\alpha q_\beta f(x, q)$, podemos obter as funções de n-grávitons. De fato esperamos que apenas as funções de Green dominante em altas temperaturas sejam obtidas nesse procedimento. Isto porque o formalismo cinético é clássico e no regime de altas temperaturas se espera que as flutuações quânticas sejam desprezíveis.

Para obter as funções de n-pontos de um modo sistemático, primeiro escrevemos, usando (3.50),

$$q_\mu q_\nu f^{(0)} = 4\theta(q_0) \delta(g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu) N(q_0) q_\mu q_\nu$$

$$\begin{aligned}
q_{\mu_2} q_{\nu_2} f^{(1)} &= f^{(0)} C_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} \tilde{\phi}^{\mu_1 \nu_1} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$q_{\mu_n} q_{\nu_n} f^{(n-1)} = f^{(0)} C_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \tilde{\phi}^{\mu_1 \nu_1} \dots \tilde{\phi}^{\mu_{(n-1)} \nu_{(n-1)}}$$

A função $C_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ é o operador que aparece em (3.50) sem os $\tilde{\phi}$'s multiplicado por $q_{\mu_n} q_{\nu_n}$. Inserindo (3.53) em (3.52), obtemos para a função de n-pontos

$$\tilde{\Pi}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \equiv \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \tilde{\phi}^{\mu_1 \nu_1} \dots \delta \tilde{\phi}^{\mu_n \nu_n}} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} f^{(0)} (n-1)! C_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \tag{3.54}$$

Levando-se em conta (3.51) e usando a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \theta(q_0) \int d^3 \vec{q} \delta(q_0^2 - \vec{q}^2) g(q_0, \vec{q}) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{2|\vec{q}|} g(|\vec{q}|, \vec{q}) \tag{3.55}$$

onde $g(q_0, \vec{q})$ é uma função arbitrária de q_0 e do tri-vetor $\vec{q}$, a equação (3.54) torna-se

$$\tilde{\Pi}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} = \rho \int \frac{d\Omega}{4\pi} (n-1)! \bar{C}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \tag{3.56}$$

onde a integral é sobre as direções de tri-vetor $\vec{q}$, e $\bar{C}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ é obtido de $C_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ por fazer a substituição $q \rightarrow Q \equiv q/|\vec{q}|$ e

$$\rho = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|^3 d|\vec{q}|}{\exp(|\vec{q}|/T) - 1} = \frac{\pi^2 T^4}{30} \tag{3.57}$$

é a densidade de energia térmica das partículas. Note que, de (3.49) e (3.50), todos os $C_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ tem a mesma dimensão, a saber q^2 . Então, todas as funções de n-pontos tem dimensão T^4 .

Os coeficientes $C_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ em (3.53) pode ser obtido resolvendo (3.50) para $n = 1, 2, \dots$. Por exemplo para a função de um gráviton temos que $C_{\mu\nu}$ é simplesmente $q_\mu q_\nu$ e então

$$\bar{C}_{\mu\nu} = Q_\mu Q_\nu \tag{3.58}$$

e inserindo (3.58) em (3.56) temos

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu} = \rho \int \frac{d\Omega}{4\pi} Q_\mu Q_\nu \tag{3.59}$$

Para a função de dois grávitons temos que

$$\begin{aligned}
f^{(1)} &= \frac{1}{q \cdot \partial} \hat{L} f^{(0)} \rightarrow \frac{1}{q \cdot k} k_\gamma \tilde{\phi}^{\alpha\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial q_\gamma} \\
q_\mu q_\nu f^{(1)} &= k_\gamma \frac{\tilde{\phi}^{\alpha\beta}}{2} \frac{q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta}{q \cdot k} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial q_\gamma} = \\
&- f^{(0)} \frac{\tilde{\phi}^{\alpha\beta}}{2} k \cdot \partial_q \frac{q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta}{q \cdot k} + \text{termos de derivadas totais.}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Da última equação obtemos

$$\bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{2}k \cdot \partial_Q \frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta}{Q \cdot k} \quad (3.61)$$

Inserindo (3.61) em (3.56) temos

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu\alpha\beta} = -\rho \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left(\frac{1}{2}k \cdot \partial_Q \frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta}{Q \cdot k} \right) \quad (3.62)$$

O resultado (3.62) está de acordo com o obtido pelo cálculo diagramático na representação $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ [BF98].

Para comparar (3.62) com o nosso resultado (3.19) vamos derivar as relações entre as funções de um e dois grávitons nas representações $\phi_{\mu\nu}$ e $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$. Podemos escrever a ação efetiva térmica como

$$S_{termico}[g] = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\mu\nu}(0) + \frac{1}{2} \int d^4k \tilde{\phi}^{\mu\nu}(k) \tilde{\Pi}_{\mu\nu\alpha\beta}(k) \tilde{\phi}^{\alpha\beta}(k) + \dots \quad (3.63)$$

usando (2.7) e (2.8) obtemos a seguinte relação para o campo de gráviton nas duas representações

$$\tilde{\phi}_{\mu\nu} = -\phi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\phi^\alpha_\alpha \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\phi^\alpha_\alpha \phi_{\mu\nu} + \phi_{\mu\alpha} \phi^\alpha_\nu + \frac{1}{8}(\phi^\alpha_\alpha)^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{8}\phi^{\alpha\beta} \phi_{\beta\alpha} \eta_{\mu\nu} + \dots \quad (3.64)$$

Inserindo (3.64) em (3.63) e usando a propriedade de traço nulo de $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$, obtemos

$$S_{termico}[g] = \Gamma_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}(0) + \frac{1}{2} \int d^4k \phi^{\mu\nu}(k) \Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(k) \phi^{\alpha\beta}(k) + \dots \quad (3.65)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu} = -\tilde{\Gamma}_{\mu\nu} \quad (3.66)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\alpha\beta} &= \tilde{\Pi}^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2} \left(\tilde{\Pi}^{\mu\nu\sigma}{}_\sigma \eta^{\alpha\beta} + \tilde{\Pi}^{\alpha\beta\sigma}{}_\sigma \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{\Pi}^\sigma{}_\sigma{}^\gamma{}_\gamma \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \tilde{\Gamma}^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \tilde{\Gamma}^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \tilde{\Gamma}^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} - \tilde{\Gamma}^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

A expressão (3.67) mostra que a parte transversal e de traço nulo da auto-energia é a mesma para as duas representações que consideramos neste trabalho.

Usando (3.62) em (3.67) finalmente obtemos o resultado (3.19). Vemos então que as contribuições dominantes para as funções de Green térmicas podem ser obtidas por um método semi-clássico. Isso mostra que quanto mais alta a temperatura mais clássico torna-se o sistema. Esta afirmação pode ser entendida observando-se que quando a temperatura cresce o fator de Bose-Einstein torna-se grande e a parte puramente térmica das funções de Green por sua vez torna-se mais importante do que a parte de vácuo que representa as flutuações puramente quânticas. Além disso a contribuição dominante, que é o resultado obtido classicamente, torna-se a contribuição mais importante quando estamos em um regime de altas temperaturas.

Capítulo 4

Função de um Gráviton em dois Loops

Neste capítulo iremos calcular a função de um gráviton em dois “loops” em duas classes distintas de “gauge”. Nosso objetivo é tentar investigar a dependência de “gauge” das funções de Green térmicas nesta ordem de aproximação através desse caso mais simples.

4.1 A Função de um Gráviton em dois Loops

Os diagramas que contribuem para a função de um gráviton em 2 “loops” $\Gamma_{2l}^{\mu\nu}$ são dados por

$$\Gamma_{2l}^{\mu\nu} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \quad (4.1)$$

Levando em conta que $\Gamma_{2l}^{\mu\nu}$ não depende do momento externo ($k = 0$), a forma mais geral da função de um gráviton é

$$\Gamma_{2l}^{\mu\nu} = C_\eta \eta^{\mu\nu} + C_{uu} u^\mu u^\nu \quad (4.2)$$

Os coeficientes C_η e C_{uu} são obtidos resolvendo-se o sistema

$$\begin{aligned} \Gamma_\eta - (C_\eta \eta^{\mu\nu} + C_{uu} u^\mu u^\nu) \eta_{\mu\nu} &= 0 \\ \Gamma_{uu} - (C_\eta \eta^{\mu\nu} + C_{uu} u^\mu u^\nu) u_\mu u_\nu &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

As quantidades Γ_η e Γ_{uu} são as projeções obtidas pelas seguintes contrações

$$\begin{aligned}\Gamma_\eta &= \Gamma_{2l}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \\ \Gamma_{uu} &= \Gamma_{2l}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu\end{aligned}\quad (4.4)$$

4.2 Gauge Covariante

Vamos começar calculando $\Gamma_{2l}^{\mu\nu}$ no “gauge” covariante. Para isso precisamos substituir nos diagramas (4.1) as regras de Feynman no “gauge” covariante apresentadas no capítulo 1. Em seguida contraindo o resultado com os tensores $\eta_{\mu\nu}$ e $u_\mu u_\nu$ obtemos as projeções (4.4). As projeções se simplificam bastante ao fazermos transformações no integrando do tipo

$$\frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_1^4 q_2^2 (q_1 + q_2)^2} = -\frac{1}{4} \frac{(q_1 - q_2)^2}{q_1^4 q_2^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{q_2^2 (q_1 + q_2)^2} + \frac{1}{4} \frac{2q_1^2 + q_2^2}{q_1^4 (q_1 + q_2)^2} \quad (4.5)$$

e em seguida fazendo o deslocamento $q_1 \rightarrow q_1 - q_2$ apenas nos termos do tipo $\frac{1}{q_2^2 (q_1 + q_2)^2}$ e o deslocamento $q_2 \rightarrow q_2 - q_1$ nos termos do tipo $\frac{1}{q_1^4 (q_1 + q_2)^2}$. Levando em conta o resultado da regularização dimensional

$$\int d^{D-1} \vec{q} |\vec{q}|^\alpha = 0 \quad (4.6)$$

e desprezando os termos ímpares em q_1 e q_2 obtemos, para o “gauge” covariante

$$\begin{aligned}\Gamma_\eta^{gc} &= \frac{\kappa^3}{(2\pi)^6} \sum_{q_{10}} \int d^{D-1} \vec{q}_1 \sum_{q_{20}} \int d^{D-1} \vec{q}_2 (15 - 10\xi) \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_1^4 q_2^2} \\ \Gamma_{uu}^{gc} &= \frac{\kappa^3}{(2\pi)^6} \sum_{q_{10}} \int d^{D-1} \vec{q}_1 \sum_{q_{20}} \int d^{D-1} \vec{q}_2 \{ -34(q_2 \cdot u)^2 (q_1 \cdot q_2)^2 + \xi [30(q_2 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 \\ &\quad + 4q_1 \cdot q_2 q_1 \cdot u q_2 \cdot u q_2^2 + 48(q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^2 + 72(q_1 \cdot u)^2 q_2 \cdot q_2 q_1^2 \\ &\quad + 20(q_1 \cdot q_2)^2 (q_1 \cdot u)^2 - 38(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2] + \xi^2 [-14(q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^2 \\ &\quad + 6(q_1 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 + 4(q_2 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 - 18(q_1 \cdot q_2)^2 (q_1 \cdot u)^2 + 2(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2] \\ &\quad - 2(q_1 \cdot u)^2 (q_1 \cdot q_2)^2 + 39(q_1 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 - 19(q_2 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 \\ &\quad - 8q_1 \cdot q_2 q_1 \cdot u q_2 \cdot u q_2^2 + 36(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2 + 24q_1 \cdot q_2 q_1 \cdot u q_2 \cdot u q_2^2 \} / (q_2^4 q_1^4) \quad (4.7)\end{aligned}$$

Podemos escrever as somas em (4.7) como integrais usando o teorema de resíduos. Note que a relação (4.6) implica que as partes de temperatura zero se anulam. Assim podemos reescrever (4.7) como

$$\Gamma_\eta^{gc} = \frac{\kappa^3}{(2\pi)^6} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_{10} \int d^{D-1} \vec{q}_1 \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_{20} \int d^{D-1} \vec{q}_2 N(q_{10}) N(q_{20}) (60 - 40\xi) \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_1^4 q_2^2}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uu}^{gc} = & \frac{\kappa^3}{(2\pi)^6} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_{10} \int d^{D-1} \vec{q}_1 \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_{20} \int d^{D-1} \vec{q}_2 N(q_{10}) N(q_{20}) \{ -34(q_2 \cdot u)^2 (q_1 \cdot q_2)^2 \\
& + \xi [30(q_2 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 + 4q_1 \cdot q_2 q_1 \cdot u q_2 \cdot u q_2^2 + 48(q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^2 + 72(q_1 \cdot u)^2 q_2 \cdot q_2 q_1^2 \\
& + 20(q_1 \cdot q_2)^2 (q_1 \cdot u)^2 - 38(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2] + \xi^2 [-14(q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^2 + 24q_1 \cdot q_2 q_1 \cdot u q_2 \cdot u q_2^2 \\
& + 6(q_1 \cdot u)^2 q_2^2 q_1 \cdot q_1 + 4(q_2 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 - 18(q_1 \cdot q_2)^2 (q_1 \cdot u)^2 + 2(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2] \\
& - 2(q_1 \cdot u)^2 (q_1 \cdot q_2)^2 + 39(q_1 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 - 19(q_2 \cdot u)^2 q_2^2 q_1^2 - 8q_1 \cdot q_2 q_1 \cdot u q_2 \cdot u q_2^2 \\
& + 36(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2 \} / (q_2^4 q_1^4)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Podemos ver que nas expressões (4.8) aparecem pólos duplos desta forma o método de amplitudes frontais apresentado no apêndice B precisa ser generalizado. A generalização do método de amplitudes frontais para pólos múltiplos pode ser encontrada no apêndice A de [BF98]

Integrando (4.8) por resíduo e substituindo na solução de (4.3) obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
C_\eta^{gc} &= \frac{2\pi^3 \kappa}{405} (GT^2) T^4 (33 - 440\xi + 4\xi^2) \\
C_{uu}^{gc} &= \frac{2\pi^3 \kappa}{405} (GT^2) T^4 (3 + 1670\xi + 16\xi^2)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde usamos $\kappa^2 = 32\pi G$. Vemos então que o resultado depende do parâmetro ξ . Devemos lembrar que o resultado (4.9) não é completo uma vez que não estamos levando em conta as correções de curvatura. É importante ressaltar também que o fato de Γ_η^{gc} não ser nulo implica que a função de um gráviton em dois “loops” neste “gauge” não tem traço nulo.

4.3 Gauge Temporal

Consideremos agora $\Gamma_{2l}^{\mu\nu}$ no “gauge” temporal. Seguindo os mesmos passos que levaram as equações (4.7), usando agora as regras de Feynman no “gauge” temporal obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\eta}^{gt} &= \frac{\kappa^3}{(2\pi)^6} \sum_{q_{10}} \int d^{n-1} \vec{q}_1 \sum_{q_{20}} \int d^{n-1} \vec{q}_2 \left[\frac{-10 q_1 \cdot u q_2 \cdot u q_1 \cdot q_2 + 5(q_1 \cdot q_2)^2}{q_1^2 q_2^2 (q_1 \cdot u)^2} - \frac{4}{3} \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_1^2 q_2^2 [(q_1 + q_2) \cdot u]^2} \right] \\
\Gamma_{uu}^{gt} &= \frac{\kappa^3}{(2\pi)^6} \sum_{q_{10}} \int d^{n-1} \vec{q}_1 \sum_{q_{20}} \int d^{n-1} \vec{q}_2 \frac{1}{24} [-19(q_1 \cdot q_2)^4 q_1 \cdot q_1 (q_2 \cdot u)^5 (q_1 \cdot u)^2 + 1056(q_1 \cdot u)^9 q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^3 \\
&\quad - 255(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^9 (q_1 \cdot u)^2 + 1044(q_1 \cdot u)^4 q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^9 + 20(q_1 \cdot u)^9 q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^4 \\
&\quad + 4(q_1 \cdot u)^8 q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^5 - 36(q_1 \cdot u)^7 q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^6 - 35(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^{10} q_1 \cdot u \\
&\quad - 355(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^6 (q_1 \cdot u)^5 - 697(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^7 (q_1 \cdot u)^4 - 629(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^8 (q_1 \cdot u)^3 \\
&\quad - 33(q_1 \cdot q_2)^4 q_1^2 (q_2 \cdot u)^3 (q_1 \cdot u)^4 - 34(q_1 \cdot q_2)^4 q_1^2 (q_2 \cdot u)^4 (q_1 \cdot u)^3 - 9(q_1 \cdot q_2)^4 q_1^2 (q_2 \cdot u)^6 q_1 \cdot u \\
&\quad - 10(q_1 \cdot q_2)^4 q_1^2 q_2 \cdot u (q_1 \cdot u)^6 + 980(q_1 \cdot u)^5 q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^8 + 476(q_2 \cdot u)^{10} q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_1 \cdot u)^3 \\
&\quad + 76(q_2 \cdot u)^{11} q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_1 \cdot u)^2 + 15(q_1 \cdot q_2)^3 q_1^2 (q_2 \cdot u)^4 (q_1 \cdot u)^5 - 23(q_1 \cdot q_2)^4 q_1^2 (q_2 \cdot u)^2 (q_1 \cdot u)^5 \\
&\quad + 54(q_1 \cdot q_2)^3 q_1^2 (q_2 \cdot u)^5 (q_1 \cdot u)^4 + 92(q_1 \cdot q_2)^3 q_1^2 (q_2 \cdot u)^6 (q_1 \cdot u)^3 + 67(q_1 \cdot q_2)^3 q_1^2 (q_2 \cdot u)^7 (q_1 \cdot u)^2 \\
&\quad + 3(q_1 \cdot q_2)^3 q_1^2 (q_2 \cdot u)^3 (q_1 \cdot u)^6 - 13(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^3 (q_1 \cdot u)^8 - 498(q_1 \cdot u)^6 q_1^2 (q_2 \cdot u)^9 \\
&\quad + 18(q_2 \cdot u)^{12} q_1^2 (q_1 \cdot u)^3 + 18(q_2 \cdot u)^{11} q_1^2 (q_1 \cdot u)^4 + 96(q_1 \cdot u)^{11} q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^4 - 2(q_1 \cdot q_2)^4 q_1^2 (q_2 \cdot u)^7 \\
&\quad - 528(q_1 \cdot u)^8 (q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^5 - 240(q_1 \cdot u)^9 (q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^4 - 720(q_1 \cdot u)^7 (q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^6 \\
&\quad - 528(q_1 \cdot u)^5 (q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^8 + 1440(q_1 \cdot u)^8 q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^7 + 480(q_1 \cdot u)^5 q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^{10} \\
&\quad + 96(q_1 \cdot u)^4 q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^{11} - 48(q_1 \cdot u)^{10} (q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^3 - 2(q_1 \cdot q_2)^4 q_1^2 (q_1 \cdot u)^7 - 114(q_1 \cdot u)^{10} q_1^2 (q_2 \cdot u)^2 \\
&\quad - 870(q_1 \cdot u)^7 q_1^2 (q_2 \cdot u)^8 - 894(q_1 \cdot u)^8 q_1^2 (q_2 \cdot u)^7 - 498(q_1 \cdot u)^9 q_1^2 (q_2 \cdot u)^6 + 1440(q_1 \cdot u)^7 q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^3 \\
&\quad + 480(q_1 \cdot u)^{10} q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^5 - 240(q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^9 (q_1 \cdot u)^4 - 29(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^4 (q_1 \cdot u)^7 \\
&\quad - 48(q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^{10} (q_1 \cdot u)^3 - 83(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^5 (q_1 \cdot u)^6 + 316(q_1 \cdot u)^6 q_1 \cdot q_2 q_1^2 (q_2 \cdot u)^7 \\
&\quad + 17(q_1 \cdot q_2)^3 q_1^2 (q_2 \cdot u)^8 q_1 \cdot u - 138(q_1 \cdot u)^5 q_1^2 (q_2 \cdot u)^{10} + 1056(q_1 \cdot u)^6 q_1 \cdot q_2 (q_2 \cdot u)^9 \\
&\quad - 720(q_1 \cdot u)^6 (q_1 \cdot q_2)^2 (q_2 \cdot u)^7] / (q_2^2 q_1^4 [(q_1 + q_2) \cdot u]^5 (q_2 \cdot u)^5 (q_1 \cdot u)^3)
\end{aligned}$$

Novamente podemos escrever as somas em (4.10) com integrais de $N(\frac{q_{(1,2)0}}{T})$. Mas já podemos ver que a função de um gráviton em dois “loops” no “gauge” temporal é independente do parâmetro de “gauge”, diferentemente do que ocorre no “gauge” covariante. Este fato está relacionado com a propriedade que ocorre no “gauge” temporal, em que o parâmetro de “gauge” aparece sempre com duas potências a mais no momento externo. Como neste caso não temos momento externo o parâmetro de “gauge” não deveria mesmo aparecer.

Capítulo 5

Relações de Dispersão

Neste capítulo usaremos os resultados do cálculo das funções de um e dois grávitons para a obtenção das relações de dispersão no gauge temporal. Iremos considerar a função de dois grávitons até a ordem sub-dominante e dependente de “gauge” T^2 e com isso pretendemos estudar a dependência de gauge das relações de dispersão.

5.1 A Ação Efetiva Térmica

A auto-energia térmica do gráviton tem sido explorada com o objetivo de investigar a propagação de ondas gravitacionais em um plasma. Isto pode ser feito estudando os pólos do propagador completo do gráviton que pode ser obtido da ação efetiva térmica. A ação efetiva térmica, ou seja, a ação obtida a partir da ação de Einstein adicionando termos que representam os efeitos induzidos por flutuações térmicas, é dada por

$$S[g] = S_G[g] + S_{termico}[g] \quad (5.1)$$

onde $S_G[g]$ é a ação de Einstein

$$S_G[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (5.2)$$

e $S_{termico}[g]$ é a parte da ação induzida por efeitos térmicos, ou seja,

$$S_{termico}[g] = \Gamma_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}(0) + \frac{1}{2} \int d^4k \phi^{\mu\nu}(k) \Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(k) \phi^{\alpha\beta}(k) + \dots \quad (5.3)$$

A condição de que $S[g]$ é estacionária em relação à variação de $g_{\mu\nu}$ nos dá a equação de Einstein [CWMW73], ou seja,

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + 8\pi G T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.4)$$

Das expressões (5.1), (5.3) e (5.4) podemos identificar $T^{\mu\nu}$ com $\Gamma^{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = 2\Gamma^{\mu\nu} = \frac{2\rho}{3}(\eta^{\mu\nu} - 4u^\mu u^\nu) \quad (5.5)$$

onde

$$\rho = \frac{\pi^2 T^4}{30} \quad (5.6)$$

Como $T^\mu_\mu = 0$ temos que a equação de Einstein torna-se

$$R^{\mu\nu} = -8\pi G T^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G \rho}{3}(\eta^{\mu\nu} - 4u^\mu u^\nu) \quad (R = 0) \quad (5.7)$$

Para temperaturas bem abaixo da escala de Planck, $GT^2 \ll 1$, temos que

$$R^{\mu\nu} \sim GT^4 = (GT^2)T^2 \ll T^2. \quad (5.8)$$

Portanto, a inclusão das correções de curvatura

$$T^{\mu\nu} + \mathcal{O}(R^{\mu\nu})T^2 \sim T^2 (T^2 + \mathcal{O}(R^{\mu\nu})), \quad (5.9)$$

produz um efeito genuinamente sub-dominante.

Podemos observar ainda que correções de dois “loops”, GT^6 , são da mesma ordem das correções de curvatura: $GT^6 = T^2 GT^4 \sim T^2 \mathcal{O}(R^{\mu\nu})$. Desta forma vemos que os resultados obtidos no capítulo anterior para a função de um gráviton em dois “loops” podem ser modificados por correções de curvatura.

A equação (5.7) representa uma situação onde temos radiação térmica (representadas por $T^{\mu\nu}$) em equilíbrio com o plasma do campo gravitacional $g_{\mu\nu}$. Agora queremos perturbar este equilíbrio fazendo alguma variação em $T^{\mu\nu}$. A equação de Jacobi para pequenas variações $\delta g_{\mu\nu}$ em torno da solução $g_{\mu\nu}$ da equação de Einstein induzida por uma pequena variação em $T^{\mu\nu}$ é dada por

$$\frac{\delta^2 S}{\delta g_{\mu\nu} \delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -\delta \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\delta T^{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

As propriedades de propagação da variação $g_{\alpha\beta}$ são descritas pela quantidade

$$\frac{\delta^2 S}{\delta g_{\mu\nu} \delta g_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi G} P^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (5.11)$$

onde $P^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o termo quadrático no campo da ação efetiva térmica.

A solução da equação (5.10), é dada por

$$\delta g^{\alpha\beta} = -16\pi G (P^{\mu\nu\alpha\beta})^{-1} \delta T_{\mu\nu} \quad (5.12)$$

No apêndice D apresentamos a derivação mais detalhada de (5.12) através da teoria de resposta linear. Também mostramos no apêndice D que os modos de propagação

das perturbações no plasma são dados pelos pólos do propagador completo dado por $(P^{\mu\nu\alpha\beta})^{-1}$.

Para calcularmos o termo quadrático da ação efetiva térmica $P^{\mu\nu\alpha\beta}$ e, em seguida inverte-lo, precisamos notar que o fato do tensor energia-momento ser não-nulo implica que a radiação térmica produz uma curvatura no espaço-tempo e um cálculo consistente do termo quadrático deve expandir o campo de gráviton sob uma métrica de fundo curva, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu} \quad (5.13)$$

onde $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é solução da equação (5.7). Mas, como vimos de (5.8), as correções de curvatura no cálculo das funções de Green térmicas da expressão (5.3) são subdominantes o que torna consistente tomarmos uma métrica de fundo plana até a ordem T^2 no cálculo das funções de um e dois grávitons.

Para calcular explicitamente $P^{\mu\nu\alpha\beta}$ vamos começar pelo primeiro termo de (5.1), ou seja, a parte da ação de Einstein (5.2). Temos que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ onde

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \quad (5.14)$$

e

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{g^{\mu\lambda}}{2} (g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}). \quad (5.15)$$

Assim precisamos obter inicialmente o inverso de $g_{\mu\nu}$ em termos de $\delta g_{\mu\nu}$ usando (5.13). Temos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= (g^{-1})_{\mu\nu} = (\delta_\alpha^\mu + g^{(0)\mu\beta} \delta g_{\beta\alpha})^{-1} (g^{(0)})_{\alpha\nu}^{-1} \\ &\cong g^{(0)\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\alpha} \delta g_\alpha^\nu \end{aligned} \quad (5.16)$$

Calculando $\sqrt{-g}$ obtemos

$$\sqrt{-g} \cong \sqrt{-g^{(0)}} \left(1 + \frac{1}{2} \delta g_\mu^\mu + \frac{1}{8} \delta g_\mu^\mu \delta g_\nu^\nu - \frac{1}{4} \delta g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\mu} \right) \quad (5.17)$$

onde usamos as propriedades e definição do determinante. Estamos usando os tensores $g_{\mu\nu}^{(0)}$ e $g^{(0)\mu\nu}$ para abaixar e levantar índices respectivamente.

Usando (5.13), (5.16) em (5.15) obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\sigma}^\mu &\cong \Gamma_{\nu\sigma}^{(0)\mu} + \frac{1}{2} g^{(0)\mu\lambda} (\delta g_{\lambda\nu;\sigma} + \delta g_{\lambda\sigma;\nu} - \delta g_{\nu\sigma;\lambda}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta g^{\mu\lambda} (\delta g_{\lambda\nu;\sigma} + \delta g_{\lambda\sigma;\nu} - \delta g_{\nu\sigma;\lambda}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde $\Gamma_{\nu\sigma}^{(0)\mu} = \frac{g^{(0)\mu\lambda}}{2} (g_{\lambda\nu,\sigma}^{(0)} + g_{\lambda\sigma,\nu}^{(0)} - g_{\nu\sigma,\lambda}^{(0)})$ e utilizamos a definição de derivada covariante [Dir96]

$$\delta g_{\lambda\nu;\sigma} = \delta g_{\lambda\nu,\sigma} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{(0)\alpha} \delta g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{(0)\alpha} \delta g_{\alpha\lambda} \quad (5.19)$$

Agora usando (5.18) em (5.14) temos

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} \cong & R_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{2}g^{(0)\beta\lambda}(\delta g_{\beta\lambda;\mu;\nu} + \delta g_{\mu\nu;\beta;\lambda} - \delta g_{\beta\mu;\nu;\lambda} - \delta g_{\beta\nu;\mu;\lambda}) \\
 & \frac{1}{4}[(\delta g_{\mu;\alpha}^{\beta}\delta g_{\beta;\nu}^{\alpha} - \delta g_{\mu\alpha}^{\beta}\delta g_{\beta}^{\alpha}{}_{;\nu} - \delta g_{\alpha}^{\beta}\delta g_{\mu\beta;\nu} + <\beta \leftrightarrow \nu>) \\
 & + \delta g_{\mu\alpha}^{\beta}\delta g_{\beta\nu}^{\alpha} - \delta g_{\alpha}^{\beta}\delta g_{\nu\beta;\mu}]
 \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde desprezamos alguns termos que geram derivadas totais levando-se em conta a relação $\sqrt{-g}A^{\mu}_{;\mu} = (\sqrt{-g}A^{\mu})_{,\mu}$.

Juntando (5.16), (5.17) e (5.20) obtemos finalmente o termo quadrático em $\delta g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 \delta^2(\sqrt{-g}R) = & \left(\frac{1}{4}\delta g_{\mu}^{\mu}\delta g_{\nu}^{\nu}{}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\delta g_{\alpha}^{\alpha}R_{\mu\nu}^{(0)}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\alpha}{}_{;\nu} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}\delta g_{\nu}^{\nu}\delta g_{\mu\beta}{}_{;\mu;\beta} + R_{\mu\nu}^{(0)}\delta g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{8}R^{(0)}\delta g_{\mu}^{\mu 2} - \frac{1}{4}R^{(0)}\delta g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g^{(0)}}
 \end{aligned} \quad (5.21)$$

A expressão acima esta de acordo com (4.25) de T'Hooft e Veltman [HV74]. Usando a relação [Dir96]

$$\delta g_{\mu\nu;\rho;\sigma} - \delta g_{\mu\nu;\sigma;\rho} = \delta g_{\alpha\nu}R^{(0)\alpha}_{\mu\rho\sigma} + \delta g_{\mu\alpha}R^{(0)\alpha}_{\nu\rho\sigma} \quad (5.22)$$

a expressão (5.21) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \delta^2(\sqrt{-g}R) = & \left(\frac{1}{4}\delta g_{\mu}^{\mu}\delta g_{\nu}^{\nu}{}_{;\alpha} - \frac{1}{4}\delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\alpha}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\nu}^{\nu}\delta g_{\mu\beta}{}_{;\mu;\beta} \right. \\
 & - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\beta}R^{(0)\alpha\mu\nu\beta} - \frac{1}{2}\delta g_{\beta}^{\beta}R_{\mu\nu}^{(0)}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}^{(0)}\delta g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{8}R^{(0)}\delta g_{\mu}^{\mu 2} \\
 & \left. - \frac{1}{4}R^{(0)}\delta g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g^{(0)}}
 \end{aligned} \quad (5.23)$$

A expressão acima está de acordo com [Reb91].

O tensor $R^{\alpha\mu\nu\beta}$ pode ser escrito em termos do tensor de Weyl $C^{\alpha\mu\nu\beta}$ [CWMW73] da seguinte forma ($R = 0$)

$$R^{\alpha\mu\nu\beta} = C^{\alpha\mu\nu\beta} + \frac{1}{2}(g^{\alpha\nu}R^{\mu\beta} - g^{\alpha\beta}R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}R^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}R^{\alpha\nu}) \quad (5.24)$$

Num espaço conformemente plano ($C^{\alpha\mu\nu\beta} = 0$) com $R = 0$, de (5.24), os termos de curvatura na expressão (5.23) se cancelam e assim

$$\delta^2 S_G = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{1}{4}\delta g_{\mu}^{\mu}\delta g_{\nu}^{\nu}{}_{;\alpha} - \frac{1}{4}\delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\alpha}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\beta}^{\beta}\delta g_{\mu\nu}{}_{;\mu;\nu} \right] \quad (5.25)$$

Para calcular as derivadas covariantes usaremos um sistema de coordenadas localmente plano, onde

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{(0)}(x_0) &= \eta_{\mu\nu} \\ g_{\mu\nu}^{(0)}(x_0)_{,\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

e apenas as derivadas de segunda ordem não se anulam ($\Gamma_{\nu\sigma}^{(0)\mu} = 0$). Neste sistema de coordenadas pode se mostrar que [CWMW73]:

$$\Gamma_{\nu\alpha,\beta}^{(0)\mu} = -\frac{1}{3} \left(R_{\nu\alpha\beta}^{(0)\mu} + R_{\alpha\nu\beta}^{(0)\mu} \right) \quad (5.27)$$

Usando a relação (5.27) e a definição de derivada covariante obtemos:

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{;\alpha} &= \delta g_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - \frac{1}{3} \delta g_{\mu}^{\alpha} R_{\alpha\nu}^{(0)} - \frac{1}{3} \delta g_{\nu}^{\alpha} R_{\alpha\mu}^{(0)} \\ \delta g_{\mu\nu}{}^{;\mu}{}_{;\nu} &= \delta g_{\mu\nu}{}^{,\mu}{}_{,\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\nu}^{(0)} \delta g^{\mu\nu} \\ \delta g^{\mu\alpha} \delta g_{\mu\beta}{}^{;\beta}{}_{;\alpha} &= \delta g^{\mu\alpha} \delta g_{\mu\beta}{}^{,\beta}{}_{,\alpha} - \frac{1}{3} \delta g_{\beta}^{\beta} R^{(0)\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \delta g_{\mu\alpha} \delta g_{\nu}^{\alpha} R^{(0)\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde na última linha utilizamos o fato de que $R = 0$ e $C^{\alpha\mu\nu\beta} = 0$. Substituindo (5.28) em (5.25) obtemos:

$$\begin{aligned} \delta^2 S_G &= \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{1}{2} \delta g_{\mu}^{\mu} \delta g_{\nu}^{\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} + \delta g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} \right. \\ &\quad \left. - \delta g_{\beta}^{\beta} \delta g_{\mu\nu}{}^{,\mu}{}_{,\nu} - \frac{1}{3} \delta g_{\mu\alpha} \delta g_{\nu}^{\alpha} R^{(0)\mu\nu} - \frac{1}{6} \delta g_{\beta}^{\beta} \delta g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu}^{(0)} \right] \\ &= \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{(0)\mu\nu} g^{(0)\alpha\beta} \partial^2 - \frac{1}{2} g^{(0)\alpha\mu} g^{(0)\beta\nu} \partial^2 + g^{(0)\mu\beta} \partial^{\nu} \partial^{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - g^{(0)\mu\nu} \partial^{\alpha} \partial^{\beta} - \frac{1}{6} g^{(0)\mu\nu} R^{(0)\alpha\beta} - \frac{1}{3} g^{(0)\nu\beta} R^{(0)\mu\alpha} \right] \delta g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando a definição (5.11) obtemos de (5.29) e (5.3) que

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu\alpha\beta} &= \left\{ \left[\frac{k^2}{2} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta}) + \eta^{\mu\beta} k^{\nu} k^{\alpha} - \eta^{\mu\nu} k^{\alpha} k^{\beta} + \frac{4\pi G\rho}{9} \eta^{\mu\nu} (4u^{\alpha} u^{\beta} - \eta^{\alpha\beta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{8\pi G\rho}{9} \eta^{\nu\beta} (4u^{\alpha} u^{\mu} - \eta^{\alpha\mu}) + <\alpha \leftrightarrow \beta> \right] + <\mu \leftrightarrow \nu> \right\} - 16\pi G \Pi^{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde usamos (5.7), (5.26) e substituímos cada derivada por ik (ou seja, $\partial^{\mu} \rightarrow ik^{\mu}$). A expressão (5.30) está de acordo com o resultado [BF98].

5.2 Fixação de “Gauge” para as Perturbações da Métrica

Por causa da invariância de coordenadas do problema, ou seja, a invariância da ação sobre transformações gerais de “gauge”, temos que impor uma restrição física nas flutuações da métrica. A imposição que os graus de liberdade de spin total 1 não propagam restringem a perturbação da métrica $\delta g_{\mu\nu}$ ser transversal e a imposição que os graus de liberdade de spin total zero restringem a perturbação da métrica ser de traço nulo [GDH89]. Devemos notar que essa fixação tem significado distinto da utilizada para a obtenção da auto-energia do gráviton, onde a projeção do campo de gráviton em uma determinada direção é nula, ou seja, $n^\mu g_{\mu\nu} = 0$. O fato de adotarmos uma fixação diferente para a ação efetiva térmica deve-se a dois motivos. Primeiro, a fixação de “gauge” da ação efetiva térmica não precisa necessariamente ser a mesma da auto-energia. Segundo, estamos interessados em comparar os resultados das relações de dispersão obtidos no “gauge” temporal com correspondentes calculados no “gauge” covariante, assim precisamos dos resultados com a mesma fixação utilizada em [BF98]. Impor que a perturbação da métrica $\delta g_{\mu\nu}$ seja transversal e de traço nulo é equivalente a considerarmos apenas a parte transversal e de traço nulo de $P^{\mu\nu\alpha\beta}$ dado em (5.30).

Com os quatorze tensores (2.18) podemos construir 3 tensores transversais e de traço nulo. Para isso escrevemos cada um desses tensores como:

$$\mathcal{T}_{A,B,C}^{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{14} c_{(A,B,C)i} \mathcal{T}_i^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (5.31)$$

e em seguida impomos as condições de transversalidade e de traço nulo. Impondo a propriedade de transversalidade, ou seja,

$$k_\mu \mathcal{T}_{A,B,C}^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (5.32)$$

podemos obter 7 equações escalares por contrações de (5.32) com os vetores k_ρ , u_σ e $\eta_{\rho\sigma}$. Devemos notar que, como a auto-energia, os tensores $\mathcal{T}_i^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $\mathcal{T}_{A,B,C}^{\mu\nu\alpha\beta}$ são simétricos na troca dos pares $(\mu\nu) \leftrightarrow (\alpha\beta)$ e nas permutações $(\mu) \leftrightarrow (\nu)$ e $(\alpha) \leftrightarrow (\beta)$. Impondo a propriedade de traço nulo

$$\mathcal{T}_{A,B,C}^{\mu\nu\alpha\alpha} = 0 \quad (5.33)$$

podemos obter 4 equações escalares ao contrair (5.33) com os mesmos vetores. Temos um total de 11 equações e 14 incógnitas c_i . Podemos resolver o sistema em termos dos coeficientes c_i , $i = 4, \dots, 14$ deixando c_1 , c_2 e c_3 como variáveis e substituí-las na solução por valores convenientes, levando-se em conta ortogonalidade e norma real, obtendo assim os três tensores transversais e de traço nulo. O resultado obtido para cada tensor transversal e de traço nulo em termos dos componentes c_i 's é mostrado na tabela 5.1, estando de acordo com [Reb91].

i	c_{A_i}	c_{B_i}	c_{C_i}
1	$\frac{1}{2}$	0	0
2	$\frac{1}{2} \frac{k^2}{(k \cdot u)^2 - k^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{k^2}{(k \cdot u)^2 - k^2}$	0
3	$\frac{1}{2} \frac{(k^2)^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$-2 \frac{(k^2)^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$\frac{3}{2} \frac{(k^2)^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$
4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$
5	$-\frac{1}{2} \frac{k^2}{(k \cdot u)^2 - k^2}$	0	$\frac{1}{2} \frac{k^2}{(k \cdot u)^2 - k^2}$
6	$-\frac{1}{2} \frac{k \cdot u}{(k \cdot u)^2 - k^2}$	$\frac{1}{2} \frac{k \cdot u}{(k \cdot u)^2 - k^2}$	0
7	$-\frac{1}{2} \frac{k^2 k \cdot u}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$2 \frac{k^2 k \cdot u}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$-\frac{3}{2} \frac{k^2 k \cdot u}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$
8	$\frac{1}{2} ((k \cdot u)^2 - k^2)^{-1}$	$-\frac{1}{2} \frac{(k \cdot u)^2}{k^2 ((k \cdot u)^2 - k^2)}$	0
9	$\frac{1}{2} \frac{2(k \cdot u)^2 - k^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$-2 \frac{(k \cdot u)^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$\frac{1}{2} \frac{2(k \cdot u)^2 + k^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$
10	$\frac{1}{2} \frac{k^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{3(k \cdot u)^2 + k^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$\frac{3}{2} \frac{(k \cdot u)^2}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$
11	$-\frac{1}{2} \frac{k \cdot u}{((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$\frac{((k \cdot u)^2 + k^2) k \cdot u}{k^2 ((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{(2(k \cdot u)^2 + k^2) k \cdot u}{k^2 ((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$
12	$\frac{1}{2} ((k \cdot u)^2 - k^2)^{-2}$	$-2 \frac{(k \cdot u)^2}{k^2 ((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$	$\frac{1}{6} \frac{4(k \cdot u)^4 + 4(k \cdot u)^2 k^2 + (k^2)^2}{(k^2)^2 ((k \cdot u)^2 - k^2)^2}$
13	$-\frac{1}{2} ((k \cdot u)^2 - k^2)^{-1}$	0	$\frac{1}{6} \frac{2(k \cdot u)^2 + k^2}{k^2 ((k \cdot u)^2 - k^2)}$
14	$\frac{1}{2} \frac{k \cdot u}{(k \cdot u)^2 - k^2}$	0	$-\frac{1}{2} \frac{k \cdot u}{(k \cdot u)^2 - k^2}$

Tabela 5.1: Componentes dos tensores transversais e de traço nulo

Um fato importante é que os coeficientes C_A , C_B e C_C de um dado tensor podem ser obtidos em termos apenas dos coeficientes C_1 , C_2 e C_3 deste tensor na base (2.18), da seguinte forma [Reb91]

$$\begin{aligned} C_A &= 2c_1 \\ C_B &= 2\left(c_1 + \frac{k^2 - (k \cdot u)^2}{k^2} c_2\right) \\ C_C &= 2\left(c_1 + \frac{4}{3} \frac{k^2 - (k \cdot u)^2}{k^2} c_2 + \frac{1}{3} \frac{(k^2 - (k \cdot u)^2)^2}{(k^2)^2} c_3\right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Com os tensores $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ e $\mathcal{T}_C$ podemos tomar agora a parte transversal e de traço nulo de $P^{\mu\nu\alpha\beta}$ da seguinte forma

$$P_{TT}^{\mu\nu\alpha\beta} = C_A \mathcal{T}_A^{\mu\nu\alpha\beta} + C_B \mathcal{T}_B^{\mu\nu\alpha\beta} + C_C \mathcal{T}_C^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (5.35)$$

Os coeficientes C_A , C_B e C_C de um tensor do tipo dado pela equação (5.30) podem sempre ser escritos na forma

$$\begin{aligned} C_A &= k^2 + \Pi_A \\ C_B &= k^2 + \Pi_B \\ C_C &= k^2 + \Pi_C \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde em Π_I , $I = A, B, C$ está a parte de temperatura finita. Em temperatura zero existe apenas um tensor transversal e de traço nulo, chamado $\mathcal{T}_0^{\mu\nu\alpha\beta}$, mas em $T \neq 0$ o tensor $\mathcal{T}_0^{\mu\nu\alpha\beta}$ se decompõe em três tensores devido a presença do vetor u_μ ,

$$\mathcal{T}_0^{\mu\nu\alpha\beta} = \mathcal{T}_A^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathcal{T}_B^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathcal{T}_C^{\mu\nu\alpha\beta} = P^{\alpha\mu} P^{\nu\beta} - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} P^{\alpha\beta} \quad (5.37)$$

onde $P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / k^2$. De (5.36) e (5.37) vemos que o coeficiente transversal e de traço nulo a temperatura zero é k^2 .

5.3 Helicidades

Uma forma de resolvermos a equação (5.12), uma vez tendo obtido $P_{TT}^{\mu\nu\alpha\beta}$, é encontrando uma base de tensores $\epsilon_{\mu\nu}^i$ em que a matriz

$$P_{TT}^{(ij)} = \epsilon_{\mu\nu}^i P_{TT}^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}^j \quad (5.38)$$

seja diagonal. A equação (5.12) possuem a princípio 10 graus de liberdade, mas ao impor a restrição transversal e traço nulo sobram apenas 5 graus de liberdade e assim

a base para a matriz $P_{TT}^{(ij)}$ tem apenas 5 tensores. Uma base em que (5.38) é diagonal é dada por [BF99]

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu\nu}^{1,2} &= \pm \frac{1}{2} [(e_\mu^1 e_\nu^1 - e_\mu^2 e_\nu^2) \pm (e_\mu^1 e_\nu^2 + e_\mu^2 e_\nu^1)] \\ \epsilon_{\mu\nu}^{3,4} &= k_\mu e_\nu^{1,2} + k_\nu e_\mu^{1,2} - \frac{k^2}{k \cdot u} (u_\mu e_\nu^{1,2} + u_\nu e_\mu^{1,2}) \\ \epsilon_{\mu\nu}^5 &= \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \frac{3k \cdot u}{2(k \cdot u)^2 + k^2} \left(k_\mu u_\nu + k_\nu u_\mu - \frac{k^2}{k \cdot u} u_\mu u_\nu - k \cdot u \eta_{\mu\nu} \right)\end{aligned}\quad (5.39)$$

onde $e_\mu^{1,2}$ são vetores unitários e transversais os quais satisfazem $k^\mu e_\mu^{1,2} = u^\mu e_\mu^{1,2} = 0$. Utilizando a base (5.39) em (5.38) obtemos

$$P_{TT} = \begin{pmatrix} C_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_C \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Como sabemos os auto-valores da inversa de uma matriz são dados pelos inversos dos auto-valores desta matriz. Assim de (5.40) os pólos do propagador completo, ou seja, os modos de propagação da perturbação da métrica são obtidos tomando C_A , C_B e C_C iguais a zero.

É interessante saber se é possível associar uma helicidade a cada modo de propagação. Para isso precisamos saber o efeito produzido por uma rotação no sistema de coordenadas em cada um dos tensores (5.39). A mudança produzida por uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo Z está associada a helicidade desse tensor da seguinte forma [Wei72]

$$\epsilon'_{\mu\nu} = e^{is_Z \theta} \epsilon_{\mu\nu} \quad (5.41)$$

onde s_Z é exatamente a helicidade associada ao tensor, $\epsilon'_{\mu\nu}$ é o novo tensor após a rotação. A mudança produzida pela rotação ao tensor é dada por

$$\epsilon'_{\mu\nu} = R_\mu^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} R_\nu^\beta \epsilon_{\mu\nu} \quad (5.42)$$

onde R é a matriz de rotação dada por

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

Definindo $\epsilon_{\pm 2} = \epsilon_{\mu\nu}^1 \pm i\epsilon_{\mu\nu}^2$ e $\epsilon_{\pm 1} = \epsilon_{\mu\nu}^3 \pm i\epsilon_{\mu\nu}^4$ obtemos, aplicando a matriz de rotação (5.43),

$$\begin{aligned}\epsilon'_{\pm 2} &= \exp(\pm i2\theta) \epsilon_{\pm 2} \\ \epsilon'_{\pm 1} &= \exp(\pm i\theta) \epsilon_{\pm 1} \\ \epsilon_{\mu\nu}'^5 &= \epsilon_{\mu\nu}^5.\end{aligned}\quad (5.44)$$

Deste modo vemos que as perturbações com helicidades ± 2 , ± 1 e 0 propagam-se no meio térmico obedecendo as relações de dispersão A , B e C , respectivamente. Podemos verificar também que $\epsilon_{\pm 2}$ é um auto-vetor do tensor $T_0^{\mu\nu\alpha\beta}$.

Como vemos a temperatura zero, quando temos uma onda produzida pela resposta a uma perturbação propagando-se no vácuo, temos apenas um único modo de propagação que neste caso está associado as únicas possíveis helicidades ± 2 . Mas quando temos uma onda que se propaga no meio térmico ocorre uma degenerescência em três modos de propagação que estão associados as helicidades ± 2 , ± 1 e 0 . Esta propriedade é análoga a propagação de uma onda eletromagnética que, como sabemos, apenas os modos transversais se propagam no vácuo e as únicas possíveis helicidades da onda são ± 1 , mas ao se propagar em um meio as ondas eletromagnética além dos modos transversais também os modos longitudinais, com helicidade 0 , se propagam.

5.4 Relações de Dispersão

Como vimos os modos de propagação são obtidos tomando os coeficientes C_A , C_B e C_C iguais a zero. Esses coeficientes podem ser obtidos, tendo em vista as equações (5.34), através dos coeficientes C_1 , C_2 e C_3 determinados a partir da decomposição de (5.30) na base (2.18). As equações associadas com os modos A , B e C podem ser escritas, respectivamente, na forma [BCMM03]

$$\begin{aligned}
 k^2 \left[1 + \frac{16\pi GT^2 k^2 \Xi}{15n_0^2} \right] &= 16\pi G\rho \left[\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{2}r^4 L - \frac{1}{6}r^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5k^2}{\pi^2 T^2} \left(r^2 L + \frac{5}{16}r^4 L - \frac{5}{48}r^2 - \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \frac{1}{r^2} \right) \right] \\
 k^2 \left[1 + \frac{16\pi GT^2 k^2 \Xi}{15n_0^2} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{1}{r^2} \right) \right] &= 16\pi G\rho \left[\left(\frac{2}{9} - 2r^4 L + \frac{2}{3}r^2 + \frac{10}{9} \frac{1}{r^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5k^2}{\pi^2 T^2} \left(-\frac{13}{8}r^2 L - \frac{5}{4}r^4 L + \frac{5}{12}r^2 + \frac{7}{12} + \frac{2}{3} \frac{1}{r^2} \right) \right] \\
 k^2 \left[1 + \frac{16\pi GT^2 k^2 \Xi}{15n_0^2} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{1}{r^4} + \frac{32}{9} \frac{1}{r^2} \right) \right] &= 16\pi G\rho \left[\left(\frac{8}{9} + 3r^4 L - r^2 + \frac{28}{27} \frac{1}{r^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5k^2}{\pi^2 T^2} \left(\frac{5}{4}r^2 L + \frac{15}{8}r^4 L - \frac{5}{8}r^2 + \frac{1}{24} + \frac{1}{r^2} + \frac{4}{9} \frac{1}{r^4} \right) \right]
 \end{aligned}$$

onde

$$r^2 \equiv \frac{k^2}{\vec{k}^2} \quad (5.45)$$

e estamos usando a mesma definição para L em (3.24).

Para as contribuições independentes de “gauge” T^4 as relações de dispersão foram cuidadosamente estudadas [Reb91]. A inclusão das contribuições sub-dominantes

foram investigadas no “gauge” de Feynman-De Donder [BF98]. Nas relações (5.45) estamos considerando até a ordem T^2 . Uma das razões é que as correções de curvatura para a auto-energia são desprezíveis até esta ordem, como vimos. Outra razão é que embora a modificação sub-dominante das soluções seja suprimida por um fator $GT^2 \ll 1$ em relação a parte de ordem 1 que vem das contribuições T^4 é interessante saber como a dependência de “gauge” da auto-energia afeta as soluções das relações de dispersão (lembrando que a função de um gráviton que também contribui para estas relações é independente de “gauge” na ordem de um “loop” aqui considerada). Na teoria de Yang-Mills o problema da dependência de “gauge” das relações de dispersão é bem entendido uma vez que Kobes, Kunstatter e Rebhan [KKR90, KKR91] provaram um teorema que mostra a independência de “gauge” para os pólos do propagador exato. Nos cálculos em um “loop” a dependência de “gauge” dos pólos do propagador são explicados em termos das identidades KKR. Mas a completa análise no caso da gravitação ainda não foi feita.

Para se ilustrar a magnitude da contribuição T^2 vamos considerar a solução das equações (5.45) para valores reais de k_0 e $\vec{k}$, que corresponde a propagação de ondas suportadas por um plasma de grávitons, como é mostrado no apêndice D. O fato das equações (5.45) serem não-lineares torna difícil a obtenção de soluções analíticas. Para tentar obter alguma informação das soluções de (5.45) podemos resolvê-las numericamente. Na figura 5.1, onde $\bar{\omega} = k_0/(16\pi G\rho)^{1/2}$, $\bar{k} = |\vec{k}|/(16\pi G\rho)^{1/2}$ e $\bar{n}_0 = n_0/(16\pi G\rho)^{1/2}$, mostramos as soluções numéricas, para a escolha $\Xi = 0$, correspondentes aos modos A, B, C respectivamente e comparamos com o resultado para a contribuição dominante.

Figura 5.1: As relações de dispersão para o modo A, B e C em unidades de $(16\pi G\rho)^{1/2}$ para frequência e vetor de onda reais. As linhas cheias são as contribuições dominantes T^4 e as linhas tracejadas representam a inclusão das correções sub-dominantes T^2 para $GT^2 = 0.01$. O cone de luz é representado pela diagonal

Analisando os gráficos das figuras 5.1 temos uma indicação de que o comportamento das relações de dispersão pode ser determinado analiticamente nas regiões assintóticas de valores de $\bar{\omega}$ e $\bar{k}$ muito pequenos e muito grandes.

Quando $\bar{k} \rightarrow 0$ a solução das relações de dispersão é chamada de frequência de plasma ω_{pl} e representa o caso estacionário onde o plasma oscila como um todo. A solução de (5.45) neste limite, escolhendo $\bar{n}_0^2 = \bar{\omega}^2$, nos dá a forma comum [BCMM03]

$$(\bar{\omega}_{pl}^{temp})^2 = \frac{22}{45} \left[1 + \left(\frac{25}{6} - 8\Xi \right) \frac{2\pi GT^2}{15} \right] \quad (5.46)$$

onde estamos desprezando ordens superiores de GT^2 . A solução das correspondentes relações de dispersão no “gauge” covariante podem ser obtida das equações (4.15) da referencia [BF98] tomando o limite $\bar{k} \rightarrow 0$. O resultado é

$$(\bar{\omega}_{pl}^{cov})^2 = \frac{22}{45} \left[1 - \left(\frac{14}{5} + (1 - \xi) \right) \frac{32\pi GT^2}{15} \right] \quad (5.47)$$

Podemos observar de (5.46) e (5.47) que há uma forte dependência no parâmetro de “gauge” em ambas as classes de “gauge”. Este comportamento está em desacordo com o que é esperado, uma vez que consideramos a mesma fixação de “gauge” na obtenção das relações de dispersão, ou seja, estamos comparando os mesmos modos de propagação. Desta forma tanto a frequência de plasma quanto as massas térmicas induzidas deveriam ser independentes de “gauge”. Para entender este comportamento vamos re-introduzir o parâmetro dimensional $16\pi G\rho = 8\pi^3 GT^4/15$. Então em ambas as classes de “gauge” podemos ver que as correções sub-dominantes dependentes de “gauge” são da mesma ordem das correções de dois “loops” $(GT^4)(GT^2)$ que não foram incluídas. Consequentemente as contribuições sub-dominantes para a frequência de plasma constituem apenas um resultado parcial na ordem de um “loop”.

Para momento grande tal que $\bar{\omega}^2 \sim \bar{k}^2 \gg 1$, as formas assintóticas das relações de dispersão (5.45) tornam-se, escolhendo $\bar{n}_0^2 = \bar{\omega}^2$, respectivamente

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_A^{temp} &= \bar{k} + \frac{5}{18\bar{k}} \left(1 + \frac{8}{5}\pi GT^2 \bar{k}^2 \right) \\ \bar{\omega}_B^{temp} &= \bar{k} + \frac{\sqrt{10}}{6} \left(1 + \sqrt{10} \frac{4\pi GT^2}{15} \bar{k} \right) \\ \bar{\omega}_C^{temp} &= \bar{k} + \frac{\sqrt{21}}{9} \left(1 + \frac{4}{7}\pi GT^2 \bar{k}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Das relações de dispersão acima, obtemos que as massas térmicas, definidas como $\bar{m}^2 = \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2$, no “gauge” temporal são dada por [BCMM03]

$$(\bar{m}_A^{temp})^2 = \frac{5}{9} \left(1 + \frac{8}{5}\pi GT^2 \bar{k}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
(\bar{m}_B^{temp})^2 &= \frac{\sqrt{10}}{3} \left(1 + \sqrt{10} \frac{4\pi GT^2}{15} \bar{k} \right) \bar{k} \\
(\bar{m}_C^{temp})^2 &= \frac{2\sqrt{21}}{9} \left(1 + \frac{4}{7} \pi GT^2 \bar{k}^2 \right) \bar{k}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Quando as mesmas derivações são feitas usando as equações (4.15) da referência [BF98], obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
(\bar{m}_A^{cov})^2 &= \frac{5}{9} \left[1 - (9 - \xi) \frac{32\pi GT^2}{15} \right] \\
(\bar{m}_B^{cov})^2 &= \frac{\sqrt{10}}{3} \left[1 - (1 - \xi) \frac{16\pi GT^2}{15} \right] \bar{k} \\
(\bar{m}_C^{cov})^2 &= \frac{2\sqrt{21}}{9} \left[1 + (3 - \xi) \frac{16\pi GT^2}{15} \right] \bar{k}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Uma importante diferença entre os resultados dos “gauges” temporal e covariante é que no “gauge” temporal as contribuições sub-dominantes são ampliadas por potências extras de $\bar{k}$ e tornam-se maiores com relação as correções de dois “loops” $(GT^4)(GT^2)$. Mas é preciso notar que devido a condição HTL, $k^2 \ll T^2$, que implica em $\bar{k}^2 GT^2 \ll 1$, não podemos tomar $\bar{k}$ arbitrariamente grande e as contribuições sub-dominantes não excedem as dominantes de ordem 1. Outra propriedade importante do “gauge” temporal é que a dependência no parâmetro de “gauge” desaparece. Estas propriedades indicam que o resultado para as massas $\bar{m}_I$ ($I = A, B, C$) pode estar mais próximo dos valores físicos quando calculadas no “gauge” temporal. Naturalmente, todos os tipos de matéria e radiação teriam que ser incluídos em um cálculo mais realístico.

Os resultados sugerem que a contribuição da parte dependente de “gauge” da auto-energia em um “loop” para as relações de dispersão devem ser de alguma forma canceladas ao se considerar as funções de um e dois grávitons em dois “loops”. Como vimos no capítulo anterior, a função de um gráviton em dois “loops” no “gauge” temporal é independente do parâmetro de “gauge”, diferentemente do que ocorre no “gauge” covariante. Este fato nos leva a crer que a dependência no parâmetro de “gauge” das contribuições de dois “loops” nas relações de dispersão deve ser menor no “gauge” temporal do que no “gauge” covariante. Esta conclusão reforça a hipótese de que as modificações das funções de Green térmicas em dois “loops” nas relações de dispersão são menores no “gauge” temporal.

Capítulo 6

Conclusões

Investigamos neste trabalho as propriedades das funções de Green térmicas de um e dois grávitons no limite de altas temperaturas. Para investigar a dependência de “gauge” dessas funções de Green térmicas, comparando suas formas explícitas em duas classes distintas de “gauge”, calculamos a função de um e dois grávitons usando o “gauge” temporal. Este cálculo fornece uma verificação não trivial do comportamento esperado em altas temperaturas e indica que o “gauge” temporal pode ser consistentemente empregado no caso da gravitação térmica.

Os resultados para as contribuições dominantes T^4 indicam um comportamento independente de “gauge” uma vez que o resultado obtido no “gauge” temporal está de acordo com os cálculos prévios em “gauges” covariantes. Este é um comportamento geral em temperatura finita e já foi explicitamente verificado, bem como demonstrado formalmente, em outras teorias, como por exemplo a QCD. Mas em gravitação não há uma demonstração formal desta independência de “gauge”. Nosso resultado nos traz como perspectiva futura buscar esta demonstração.

A dependência de “gauge” das contribuições sub-dominantes T^2 é evidenciada pela dependência no parâmetro de “gauge” que ocorre tanto no caso temporal quanto no caso covariante. É importante ressaltar que nos dois casos as contribuições sub-dominantes obtidas estão de acordo com as identidades de 't Hooft.

As contribuições sub-dominantes $\log(T)$ apresentam a mesma estrutura do resíduo do pólo ultravioleta da auto-energia do gráviton dimensionalmente regularizada a temperatura zero. Esta também é uma propriedade geral em temperatura finita e já foi verificada em outras teorias para diversas funções de Green térmicas.

Como no caso da QCD o cálculo no “gauge” temporal na gravitação envolve certas dificuldades associadas à prescrição para o tratamento dos pólos em q_0 . Para tratar estes pólos em temperatura finita através de um método simples e livre de ambiguidades utilizamos a prescrição de Leibbrandt. A forma dos pólos de prescrição

do propagador no “gauge” temporal não muda o comportamento das amplitudes de espalhamento frontais em altas temperaturas. Uma importante propriedade dessas amplitudes de espalhamento frontais é que, diferente dos “gauges” covariantes, elas não envolvem os ghosts térmicos e a dependência no parâmetro de “gauge” é linear. Conseguimos generalizar a forma das contribuições desses pólos o que havia sido feito somente em QCD. Uma outra perspectiva futura é investigar o comportamento destes pólos em outras teorias como a teoria de campos não-comutativo em temperatura finita.

Um dos objetivos desse trabalho foi investigar as relações de dispersão da propagação de ondas no plasma devido a pequenas perturbações. As relações de dispersão incluindo as contribuições sub-dominantes T^2 foram calculadas no “gauge” temporal. Comparamos a estrutura de sua dependência de “gauge” com os cálculos correspondentes feitos no “gauge” covariante. Esta dependência de “gauge” surge dos termos T^2 da auto-energia do gráviton. Verificamos que a frequência de plasma possui uma forte dependência de “gauge” em ambos os casos. Uma vez que a parte dependente de “gauge” da frequência de plasma é da mesma ordem que as contribuições de dois “loops” estes resultados são parciais. Entretanto as massas térmicas assintóticas obtidas no “gauge” temporal tem uma dependência de “gauge” mais fraca e além disso são amplificadas por potências extras de $\bar{k}$ o que as tornam mais importantes com relação as contribuições da ordem de dois “loops”. Este comportamento é análogo ao que acontece na QCD, onde a constante de amortecimento do plasmon, que também é sub-dominante na temperatura, tem uma dependência de “gauge” mais fraca quando calculadas em “gauges” não covariantes. O cálculo da função de Green térmica de um gráviton em dois “loops” no “gauge” covariante e no “gauge” temporal dão um outro indício que reforça o argumento de que as correções de dois “loops” são menores no “gauge” temporal.

Apêndice A

Funções de Green Térmicas para Campos Escalares

Neste apêndice apresentaremos uma pequena introdução à teoria de campos a temperatura finita baseada no livro do J. I. Kapusta [Kap89]. Utilizaremos, como um exemplo simples, o modelo de campos escalares. Este modelo contém os ingredientes básicos necessários para o estudo dos campos de grávitons. Nosso principal objetivo é a generalização das regras de Feynman, a temperatura zero, para o cálculo de funções de Green térmicas.

A.1 Função de Partição para Bósons

Considerando $\hat{\phi}(\vec{x}, 0)$ e $\hat{\pi}(\vec{x}, 0)$ respectivamente o operador campo e o operador momento conjugado na representação de Schrodinger em $t = 0$, temos que os auto-estados desses operadores satisfazem

$$\hat{\phi}(\vec{x}, 0)|\phi\rangle = \phi(\vec{x})|\phi\rangle \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}, 0)|\pi\rangle = \pi(\vec{x})|\pi\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Estes auto-estados também satisfazem as usuais condições de ortogonalidade e completeza

$$\langle\phi_a|\phi_b\rangle = \delta[\phi_a(\vec{x}) - \phi_b(\vec{x})] \quad (\text{A.3})$$

$$\langle\pi_a|\pi_b\rangle = \delta[\pi_a(\vec{x}) - \pi_b(\vec{x})] \quad (\text{A.4})$$

$$\int d\phi(\vec{x})|\phi\rangle\langle\phi| = 1 \quad (\text{A.5})$$

$$\int \frac{d\pi(\vec{x})}{2\pi}|\pi\rangle\langle\pi| = 1 \quad (\text{A.6})$$

Em analogia com a mecânica quântica, onde $\langle x|p\rangle = e^{ipx}$, temos em teoria de campos

$$\langle\phi|\pi\rangle = \exp\left[i\int d^3x\pi(\vec{x})\phi(\vec{x})\right] \quad (\text{A.7})$$

onde fizemos a passagem de um número finito N de graus de liberdade para um contínuo e infinito número de graus de liberdade $\sum_{i=1}^N p_i x_i \rightarrow \int d^3x \pi(\vec{x})\phi(\vec{x})$.

A amplitude de transição de um estado $|\phi_a\rangle$ em $t=0$ para o mesmo estado depois de um tempo t_f é dada por $\langle\phi_a|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle$, onde H é a hamiltoniana do sistema. Expressando a hamiltoniana como um funcional do campo e momento conjugado, a saber,

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi}), \quad (\text{A.8})$$

dividindo o intervalo de tempo $(0, t_f)$ em N pedaços iguais $\Delta t = t_f/N$ e inserindo em cada intervalo de tempo um conjunto completo, alternando entre (A.5) e (A.6), temos

$$\begin{aligned} \langle\phi_a|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle &= \lim_{N\rightarrow\infty} \int \left(\prod_{i=1}^N d\pi_i d\phi_i / 2\pi \right) \langle\phi_a|\pi_N\rangle \langle\pi_N|e^{-iH\Delta t}|\phi_N\rangle \langle\phi_N|\pi_{N-1}\rangle \\ &\quad \times \langle\pi_{N-1}|e^{-iH\Delta t}|\phi_{N-1}\rangle \times \dots \times \langle\phi_2|\pi_1\rangle \langle\pi_1|e^{-iH\Delta t}|\phi_1\rangle \langle\phi_1|\phi_a\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Já que $\Delta t \rightarrow 0$, podemos fazer a expansão

$$\begin{aligned} \langle\pi_i|e^{-iH\Delta t}|\phi_i\rangle &\simeq \langle\pi_i|(1 - iH\Delta t)|\phi_i\rangle \\ &= \langle\pi_i|\phi_i\rangle(1 - iH_i\Delta t) \\ &= (1 - iH_i\Delta t) \exp\left[-i\int d^3x \pi_i(\vec{x})\phi_i(\vec{x})\right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde

$$H_i = \int d^3x \mathcal{H}(\pi_i(\vec{x}), \phi_i(\vec{x})). \quad (\text{A.11})$$

Usando (A.3), (A.7) e (A.10) temos

$$\begin{aligned} \langle\phi_a|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle &= \lim_{N\rightarrow\infty} \int \left(\prod_{i=1}^N d\pi_i d\phi_i / 2\pi \right) \delta(\phi_1 - \phi_a) \\ &\quad \times \exp\left\{-i\Delta t \sum_{j=1}^N \int d^3x [\mathcal{H}(\pi_j, \phi_j) - \pi_j(\phi_{j+1} - \phi_j)/\Delta t]\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde $\phi_{N+1} = \phi_a = \phi_1$.

Tomando o limite em (A.12), temos finalmente o resultado

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(\vec{x},0)=\phi_a(\vec{x})}^{\phi(\vec{x},t_f)=\phi_a(\vec{x})} [d\phi] \\ &\times \exp \left[i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Os símbolos $[d\pi]$ e $[d\phi]$ denotam a integração funcional definida em (A.12).

Como sabemos a função de partição é definida por

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)} = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)} | \phi_a \rangle \quad (\text{A.14})$$

onde H , $\hat{N}$, μ são respectivamente a hamiltoniana, o operador número e o potencial químico do sistema em questão. A soma é sobre todos os estados e $\beta = T^{-1}$, sendo T a temperatura. Comparando (A.13) e (A.14) vemos que Z pode ser expressa em termos de uma integral funcional sobre os campos e momento conjugado. Mas primeiro precisamos definir a variável de tempo imaginário $\tau = it$. Os limites de integração em τ são 0 e β . O operador traço em (A.14) como aplicado em (A.13) significa que a integração deve ser sobre todos os ϕ_a . Por fim, se o sistema admite alguma carga conservada, então devemos fazer

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) \rightarrow \mathcal{H}(\pi, \phi) - \mu \mathcal{N}(\pi, \phi) \quad (\text{A.15})$$

onde $\mathcal{N}(\pi, \phi)$ é a densidade de carga conservada. Assim temos finalmente

$$Z = \int [d\pi] \int_{\text{period}} [d\phi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H} + \mu \mathcal{N} \right) \right\}. \quad (\text{A.16})$$

O termo “period” significa que a integração sobre os campos está restrita de maneira que $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$. Isto é uma consequência do operador traço, colocando $\phi_a(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$. Não existe restrição na integração sobre π .

Do que foi apresentado nesta seção podemos ver que a inclusão de efeitos de temperatura em teoria de campos é obtida partindo da função de partição usual sendo escrita como uma integral funcional. Para isso, como vimos, a variável temporal é feita imaginária e por isso este formalismo é conhecido como formalismo de tempo imaginário. Outra restrição importante é que a integração funcional sobre os campos tem que ser periódica, veremos que isso irá determinar a estatística.

A.2 O Campo Escalar Neutro

A lagrangiana para o campo escalar neutro na teoria ϕ^4 é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 \quad (\text{A.17})$$

com $\lambda \geq 0$ para a estabilidade do vácuo. E assim, o momento conjugado do campo é

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (\text{A.18})$$

e a hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad (\text{A.19})$$

e não existe carga conservada.

Substituindo a hamiltoniana (A.19) na função de partição (A.15) podemos calcular a integral funcional sobre π obtendo o seguinte resultado

$$Z = c \int_{\text{period}} [d\phi] \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \right). \quad (\text{A.20})$$

O resultado (A.20) pode ser obtido tomando a função de partição na forma discretizada análoga à expressão (A.12), calculando em seguida as N integrais de Riemann, que são integrais gaussianas em π_i , e por fim retornando à forma de limite contínuo.

Para resolvermos a integração funcional sobre o campo ϕ vamos considerar primeiro o caso de campos não-interagentes, ou seja, com $\lambda = 0$ em (A.17). O caso de campos interagentes será discutido na próxima seção. Definindo

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right], \quad (\text{A.21})$$

integrando por partes, notando a periodicidade de ϕ , obtemos

$$S = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi \quad (\text{A.22})$$

Expressando o campo como

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} + \omega_n \tau)} \phi_n(\vec{p}) \quad (\text{A.23})$$

onde $\omega_n = 2\pi nT$, devido à restrição da periodicidade que $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$ para todo $\vec{x}$. No caso de férmions a periodicidade implica em $\omega_n = (2 + 1)\pi nT$ [Kap89] (essa

diferença é determinante na estatística). A normalização de (A.23) é escolhida tal que cada amplitude de Fourier seja adimensional. Substituindo (A.23) em (A.22), e notando que $\phi_{-n}(-\vec{p}) = \phi_n^*(\vec{p})$, encontramos que

$$S = -\frac{1}{2}\beta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(\vec{p}) \phi_n^*(\vec{p}) \quad (\text{A.24})$$

onde $\omega = (\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$. Vemos agora que o integrando depende apenas da amplitude e não da fase. As fases podem ser integradas para obter, a menos de uma constante,

$$\begin{aligned} Z &= \prod_n \prod_{\vec{p}} \left\{ \int dA_n(\vec{p}) \exp \left[-\frac{1}{2}\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) A_n^2(\vec{p}) \right] \right\} \\ &= \prod_n \prod_{\vec{p}} [\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Mais formalmente, podemos expressar (A.20) e (A.22) como

$$Z = c \int [d\phi] \exp \left[-\frac{1}{2}(\phi, D\phi) \right] = c' (\det D)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.26})$$

onde $D = \beta^2(-\partial^2/\partial\tau^2 - \nabla^2 + m^2)$ no espaço $(\vec{x}, \tau)$ e $D = \beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)$ no espaço $(\vec{p}, \omega_n)$ e $(\phi, D\phi)$ denota o produto interno no espaço das funções. O resultado (A.26) foi obtido com o auxílio da seguinte fórmula (com D sendo uma matriz constante):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-x_i D_{ij} x_j} = (\pi)^{n/2} (\det D)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.27})$$

A.3 Regras Diagramáticas para Teoria $\lambda\phi^4$

Considerando agora o caso da lagrangiana dada em (A.17), temos então um termo quártico nos campos e para resolvermos a integração funcional precisamos recorrer a métodos perturbativos. Em vista disto a ação pode ser decomposta como

$$S = S_0 + S_I \quad (\text{A.28})$$

onde S_0 é a parte quadrática nos campos e S_I é a parte de interação, de ordem mais alta nos campos.

Expandindo a função de partição em séries de potências de S_I temos

$$Z = c \int [d\phi] e^{S_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} S_I^l \quad (\text{A.29})$$

tomando o logaritmo em ambos os lados obtemos

$$\ln Z = \ln \left(c \int [d\phi] e^{S_0} \right) + \ln \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int [d\phi] e^{S_0} S_I^l / \int [d\phi] e^{S_0} \right) = \ln Z_0 + \ln Z_I \quad (\text{A.30})$$

Vamos considerar a mais baixa correção para $\ln Z_0$ em teoria $\lambda\phi^4$. Ela é

$$\ln Z_1 = \frac{-\lambda \int d\tau \int d^3x \int [d\phi] e^{S_0} \phi^4(\vec{x}, \tau)}{\int [d\phi] e^{S_0}} \quad (\text{A.31})$$

Expressando $\phi(\vec{x}, \tau)$ como a série de Fourier (A.23) e inserindo em (A.31) obtemos

$$\begin{aligned} \ln Z_1 = & -\lambda \int d\tau \int d^3x \sum_{n_1 \dots n_4} \sum_{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_4} \frac{\beta^2}{V^2} \\ & \times \exp[i(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4) \cdot \vec{x}] \exp[i(\omega_{n_1} + \dots + \omega_{n_4})\tau] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_l \prod_{\vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) \exp \left[-\frac{1}{2} \beta^2 (\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2) \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q}) \right] \right. \\ & \quad \left. \times \tilde{\phi}_{n_1}(\vec{p}_1) \tilde{\phi}_{n_2}(\vec{p}_2) \tilde{\phi}_{n_3}(\vec{p}_3) \tilde{\phi}_{n_4}(\vec{p}_4) \right\} \\ & \times \left\{ \prod_l \prod_{\vec{q}} \int d\tilde{\phi}_l(\vec{q}) \exp \left[-\frac{1}{2} \beta^2 (\omega_l^2 + \vec{q}^2 + m^2) \tilde{\phi}_l(\vec{q}) \tilde{\phi}_{-l}(-\vec{q}) \right] \right\} \end{aligned}$$

A integração sobre $\vec{x}$ e τ nos dá um fator $\beta V \delta_{n_1 + \dots + n_4, 0} \delta_{\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4, 0}$. O numerador de (A.32) deve ser zero pela integração simétrica menos para $n_3 = -n_1$, $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$ e $n_4 = -n_2$, $\vec{p}_4 = -\vec{p}_2$ ou as outras duas permutações, pois estas condições satisfazem a restrição das deltas de Kronecker. A integral no numerador é cancelada pela integral no denominador exceto para $l = n_1$, $\vec{q} = \vec{p}_1$ e $l = n_2$, $\vec{q} = \vec{p}_2$ e as outras duas permutações. Assim obtemos

$$\ln Z_1 = -3\lambda\beta V \left[T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) \right]^2 \quad (\text{A.33})$$

onde usamos

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^2}{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2}} = \frac{1}{a} \quad (\text{A.34})$$

O propagador $\mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})$ no espaço frequência-momento é definido como

$$\mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2} \quad (\text{A.35})$$

Definindo $p_0 = i\omega_n = 2\pi nTi$, de forma que podemos considerar p_0 como a componente zero do quadrivetor de Minkowski, temos que $\mathcal{D}(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2}$ onde $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$.

A expressão (A.33) pode ser associada com um diagrama do seguinte modo. Com $\phi^4(\vec{x}, \tau)$ associamos uma cruz, com 4 linhas (por causa da quarta potência em ϕ) que expressa em séries de Fourier nos dá a figura

A direção das setas indica o sinal dos momentos e frequências. A integração funcional dá zero menos para $n_3 = -n_1$, $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$ e $n_4 = -n_2$, $\vec{p}_4 = -\vec{p}_2$, etc. Então conectamos as extremidades das linhas em pares. Existe três maneiras de fazermos isto. Assim

$$\ln Z_1 = 3 \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama de dois loops adjacentes} \\ (\vec{p}_1, \omega_{n_1}) \quad (\vec{p}_2, \omega_{n_2}) \end{array} \quad (\text{A.36})$$

Com cada loop fechado associamos

$$T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) \quad (\text{A.37})$$

Com cada vértice, associamos um fator $-\lambda$ (que vem de $\mathcal{L}_I = -\lambda\phi^4$) e um fator $\beta\delta_{\omega_{in}, \omega_{out}}(2\pi)^3\delta(\vec{p}_{in} - \vec{p}_{out})$ que dá a conservação de energia-momento.

Os resultados obtidos aqui para o campo escalar podem ser extrapolados para outras teorias, ou seja, as regras de Feynman em temperatura finita são as mesmas a temperatura zero. O "loop" térmico é obtido da temperatura zero tomando $\frac{1}{2\pi \int dq_0} \rightarrow T \sum_n$.

Apêndice B

Método de Amplitudes de Espalhamento Frontais

Neste apêndice, vamos exibir uma relação muito simples (e bastante útil) entre as funções de Green Térmicas em um “loop” e certas amplitudes de espalhamento frontais. Veremos que esta relação manifesta-se independentemente dos detalhes específicos do modelo de teoria de campos.

B.1 Funções de Green Térmicas com um Propagador

Do apêndice anterior vemos que as funções de Green térmicas, no formalismo do tempo imaginário, com um propagador para bósons com massa zero são dadas, na forma mais geral, por

$$= \frac{s}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \vec{q} W_1 \quad (\text{B.1})$$

onde s é o fator de simetria associado ao gráfico, $\vec{q}$ representa a parte espacial do D-vetor q , e

$$W_1 = T \sum_{q_0} \frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2} t(q), \left(\frac{q_0}{2\pi iT} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right). \quad (\text{B.2})$$

Aqui $t(q)$ é uma função que depende do modelo da teoria (vértice de interação). Por exemplo, na teoria $\lambda\varphi^4$ temos que $t(q) = -\lambda$. A fim de calcularmos a soma que

aparece em (B.2), vamos considerar o caso geral

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q_0 = 2\pi nTi). \quad (\text{B.3})$$

Podemos expressar (B.3), usando o teorema de Cauchy, como a integral de contorno [Kap89]

$$\frac{T}{2\pi i} \oint_C dq_0 f(q_0) \frac{1}{2} \beta \coth \left(\frac{1}{2} \beta q_0 \right) \quad (\text{B.4})$$

onde o contorno C é descrito na figura abaixo

(note que a função $\frac{1}{2} \beta \coth \left(\frac{1}{2} \beta q_0 \right)$ tem pólos em $q_0 = 2\pi nTi$). O contorno C pode ser deformado de maneira a se obter o contorno equivalente mostrado abaixo

Assim, (B.4) torna-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\delta}^{-i\infty-\delta} dq_0 f(q_0) \frac{1}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta q_0 \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_0 f(q_0) \frac{1}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta q_0 \right) \quad (\text{B.5})$$

Podemos re-arranjar as exponenciais na cotangente hiperbólica de forma que (B.5) seja escrito como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\delta}^{-i\infty-\delta} dq_0 f(q_0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta q_0} - 1} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_0 f(q_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta q_0} - 1} \right). \quad (\text{B.6})$$

fazendo $q_0 \rightarrow -q_0$ na primeira integral temos finalmente

$$T \sum_{q_0} f(q_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_0 \coth\left(\frac{q_0}{2}\right) [f(q_0) + f(-q_0)] =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_0 [f(q_0) + f(-q_0)] N(q_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dq_0 \frac{1}{2} [f(q_0) + f(-q_0)]$$
(B.7)

onde

$$N(q_0) = \frac{1}{e^{q_0/T} - 1}$$
(B.8)

é a distribuição de Bose-Einstein. É de se esperar termos obtido o fator de distribuição de Bose-Einstein uma vez que partimos da função de partição usual e assim não poderíamos obter uma nova estatística. A expressão (B.7) tem um resultado interessante. A primeira integral possui o fator de Bose-Einstein e por isso nos dá a contribuição dos efeitos térmicos. A segunda integral é a contribuição de temperatura zero. E assim há uma separação dos efeitos térmicos e de flutuação do vácuo. É fácil de ver que a parte puramente térmica se anula ao tomarmos $T \rightarrow 0$. Como estamos interessados somente na parte puramente térmica das funções de Green vamos omitir a parte de temperatura zero daqui por diante

Usando (B.7) em (B.2) e (B.1) teremos

$$= \frac{s}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2\pi i} \int d^{D-1} \vec{q} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dz N(z) \left\{ \frac{t(q)}{z^2 - \vec{q}^2} + (z \leftrightarrow -z) \right\}$$
(B.9)

onde substituímos a variável q_0 por z . Fazendo a transformação de variável $\vec{q} \leftrightarrow -\vec{q}$ no segundo termo de (B.9) a integral (D-1)-dimensional não se altera, pois o intervalo de integração é simétrico. Assim a contribuição $z \leftrightarrow -z$ é equivalente à contribuição $q \leftrightarrow -q$. Portanto, vamos escrever W_1 na forma

$$W_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dz N(z) \left\{ \frac{t(z, \vec{q})}{z^2 - \vec{q}^2} + q \leftrightarrow -q \right\}.$$
(B.10)

Note que somente vamos obter um resultado não nulo caso $t(q)$ seja uma função par de q . Assumindo então que $t(q)$ seja uma função par de q os termos com $q \leftrightarrow -q$ resultam num fator 2. Então

$$W_1 = \frac{2}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dz N(z) \frac{t(z, \vec{q})}{(z + |\vec{q}|)(z - |\vec{q}|)}$$
(B.11)

Integrando por resíduos, fechando o contorno no semi-plano direito, como mostrado

na figura abaixo

teremos

$$W_1 = -2 \frac{N(|\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} t(q) \quad (q_0 = |\vec{q}|). \quad (\text{B.12})$$

Substituindo o fator 2 no numerador pela contribuição $q \leftrightarrow -q$ e expressando $t(q)$ numa notação gráfica como uma amplitude de espalhamento para a frente, podemos escrever então a função W_1 como

$$W_1 = -\frac{N(|\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right\}_{q^2=0} \quad (\text{B.13})$$

Diagram 1: A vertex with two incoming lines labeled $\vec{q}$ and $-\vec{q}$, and two outgoing lines labeled $\vec{k}$ and $-\vec{k}$.
Diagram 2: A vertex with two incoming lines labeled $\vec{q}$ and $-\vec{q}$, and two outgoing lines labeled $\vec{k}$ and $-\vec{k}$.

A expressão acima mostra claramente que, em geral, a função de 1 ponto (“tadpole”) não se anula a temperatura finita, o que em geral ocorre em temperatura zero. Numa representação gráfica a função de Green térmica com um propagador torna-se

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: Tadpole with loop} \\ \text{Label: } q^2 \end{array} = -\frac{s}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-1}\vec{q}}{2|\vec{q}|} N(|\vec{q}|) \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right\}_{q^2=0} + q \leftrightarrow -q \quad (\text{B.14})$$

Diagram 1: A vertex with two incoming lines labeled $\vec{q}$ and $-\vec{q}$, and two outgoing lines labeled $\vec{k}$ and $-\vec{k}$.
Diagram 2: A vertex with two incoming lines labeled $\vec{q}$ and $-\vec{q}$, and two outgoing lines labeled $\vec{k}$ and $-\vec{k}$.

B.2 Funções de Green Térmicas com Dois Propagadores

As funções de Green com dois propagadores na sua forma mais geral são dadas por

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: Bubble with external lines } \vec{k} \text{ and } \vec{k} \\ \text{Internal lines: } \vec{q} \text{ and } \vec{k}+\vec{q} \end{array} = \frac{s}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\vec{q} W_2 \quad (\text{B.15})$$

onde

$$W_2 = T \sum_{q_0} \frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2} \frac{1}{(q_0 + k_0)^2 - \vec{p}^2} t(q, p), \quad (\text{B.16})$$

sendo $p \equiv q + k$ e assim $p_0 = (q_0 + k_0)$. Seguindo os mesmos passos que levaram a expressão (B.10) para W_1 , obtemos da equação (B.16)

$$W_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dz N(z) \left\{ \frac{t((z, \vec{q}), (p_0, \vec{p}))}{(z^2 - \vec{q}^2)[(z + k_0)^2 - \vec{p}^2]} + q \leftrightarrow -q \right\}. \quad (\text{B.17})$$

Note que, devido a conservação de momento em cada um dos vértices, o produto das expressões correspondentes aos dois vértices, $t(q, p)$, somente depende de p e q explicitamente.

Reescrevendo (B.17) na forma fatorada

$$\begin{aligned} W_2 = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dz N(z) \left\{ \frac{t((z, \vec{q}), (k_0 + z, \vec{p}))}{4|\vec{p}'||\vec{q}|} \right. \\ & \times \left[\frac{1}{z - |\vec{q}|} - \frac{1}{z + |\vec{q}|} \right] \left[\frac{1}{z + k_0 - |\vec{p}|} - \frac{1}{z + k_0 + |\vec{p}|} \right] \\ & + \frac{t((-z, -\vec{q}), (k_0 - z, \vec{p}'))}{4|\vec{p}'||\vec{q}|} \left[\frac{1}{z - |\vec{q}|} - \frac{1}{z + |\vec{q}|} \right] \\ & \left. \times \left[\frac{1}{z - k_0 - |\vec{p}'|} - \frac{1}{z - k_0 + |\vec{p}'|} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

onde $\vec{p}' = \vec{k} - \vec{q}$, fechando o contorno de integração de (B.18) no semi-plano direito e integrando por resíduos teremos

$$\begin{aligned} W_2 = & -\frac{1}{4|\vec{p}'||\vec{q}|} \left\{ N(|\vec{q}|) t(q, p) \Big|_{q_0=|\vec{q}|} \frac{2|\vec{p}|}{(k_0 + |\vec{q}|)^2 - |\vec{p}|^2} \right. \\ & + N(|\vec{p}| - k_0) t((|\vec{p}| - k_0, \vec{q}), (|\vec{p}|, \vec{p})) \frac{2|\vec{q}|}{(|\vec{p}| - k_0)^2 - |\vec{q}|^2} \Big\} \\ & - \frac{1}{4|\vec{p}'||\vec{q}|} \left\{ N(|\vec{q}|) t((-|\vec{q}|, -\vec{q}), (p'_0, \vec{p}')) \frac{2|\vec{p}'|}{(k_0 - |\vec{q}|)^2 - |\vec{p}'|^2} \right. \\ & + N(|\vec{p}'| + k_0) t((-k_0 - |\vec{p}'|, -\vec{q}), (-|\vec{p}'|, \vec{p}')) \frac{2|\vec{q}|}{(k_0 + |\vec{p}'|)^2 - |\vec{q}|^2} \Big\} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Como $k_0 = 2n\pi Ti$, então $N(x + k_0) = N(x)$, pois $e^{2n\pi i} = 1$. Usando esta relação, fazendo a mudança de variável $\vec{q} \rightarrow \vec{q} - \vec{k}$ no segundo termo de (B.19) (o que implica

$\vec{p} \rightarrow \vec{q}$) e a mudança de variável $\vec{q} \rightarrow \vec{q} + \vec{k}$ no quarto termo (o que implica $\vec{p} \rightarrow -\vec{q}$) obtemos

$$W_2 = -\frac{N(|\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} \left\{ \frac{t(q, q+k)}{(q+k)^2} + \frac{t(q-k, q)}{(q-k)^2} + \frac{t(-q, k-q)}{(k-q)^2} + \frac{t(-q-k, -q)}{(q+k)^2} \right\}_{q^2=0} \quad (\text{B.20})$$

Na representação gráfica em termos de amplitudes de espalhamento (B.20) torna-se

$$W_2 = -\frac{N(|\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} \left\{ \begin{array}{c} \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + (q \leftrightarrow -q) \end{array} \right\}_{q^2=0} \quad (\text{B.21})$$

onde usamos $t(q, q+k) = V_1(q, q+k)V_2(q+k, q)$ e $t(q-k, q) = V_1(q-k, q)V_2(q, q-k)$, sendo $V_1(p, r)$ e $V_2(p, r)$ os vértices associados respectivamente aos momentos k e $-k$ entrando (e os momentos p entrando e r saindo em ambos). Numa representação gráfica a funções de Green com dois propagadores torna-se

$$\begin{array}{c} \text{diagram} = -\frac{s}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-1}\vec{q}}{2|\vec{q}|} N(|\vec{q}|) \left\{ \begin{array}{c} \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + (q \leftrightarrow -q) \end{array} \right\}_{q^2=0} \quad (\text{B.22}) \end{array}$$

Utilizando um processo semelhante ao que levou às expressões (B.14) e (B.22) para o caso de funções térmicas com 3 e 4 propagadores podemos verificar o mesmo comportamento que ocorre com um e dois propagadores, isto é, temos a permutação cíclica dos vértices em amplitudes frontais mais a contribuição $q \leftrightarrow -q$. Isto nos leva a crer que este comportamento vale para um número finito qualquer de propagadores.

Numa expansão em altas temperaturas, onde expandimos o integrando em potências de $1/|\vec{q}|$, o fato de termos sempre a contribuição $q \leftrightarrow -q$ implica que as potências ímpares da temperatura não contribuem. Isto está de acordo com o fato de que as funções de Green no formalismo do tempo imaginário estão relacionadas com as funções de Green retardadas ou avançadas [BDFdS98].

Além da utilidade prática em cálculos de funções de Green térmicas, os resultados acima permitem uma interpretação física bastante simples. Os “loops” térmicos representam “partículas térmicas” com distribuição $N(|\vec{q}|)$ na camada de massa, e interagindo com os campos externos. O termo “partículas térmicas” refere-se apenas à partícula usual que, por estar imersa em um banho térmico, sofre esses efeitos.

Apêndice C

Identidades de Ward Gravitacionais

Neste capítulo, vamos obter as equações que, ao nível das funções de Green, expressam a conservação ou não conservação de correntes, e que são chamadas de Identidades de Ward. Na primeira seção serão vistas as identidades na aproximação de árvore e na segunda veremos a aproximação de um “loop”.

C.1 Identidades de Ward na Aproximação de Árvore

As identidades de Ward podem ser deduzidas a partir da invariância da ação sob transformações gerais dos campos:

$$\int d^4x_1 \delta\phi_{\mu\nu}(x_1) \frac{\delta S}{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} = 0.$$

Derivando uma vez esta equação, obtemos:

$$\int d^4x_1 \left(\frac{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)}{\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)} \frac{\delta S}{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} + \delta\phi_{\mu\nu}(x_1) \frac{\delta S^2}{\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} \right)_{\phi=0} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Derivando duas vezes:

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 \left(\frac{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)}{\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)} \frac{\delta S^2}{\delta\phi_{\rho\sigma}(x_3)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} + \frac{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)}{\delta\phi_{\rho\sigma}(x_3)} \frac{\delta S^2}{\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} + \right. \\ \left. + \delta\phi_{\mu\nu}(x_1) \frac{\delta S^3}{\delta\phi_{\rho\sigma}(x_3)\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} \right)_{\phi=0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Derivando três vezes:

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \left(\frac{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)}{\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)} \frac{\delta S^3}{\delta\phi_{\gamma\delta}(x_4)\delta\phi_{\rho\sigma}(x_3)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} + \frac{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)}{\delta\phi_{\rho\sigma}(x_3)} \times \right. \\ & \times \frac{\delta S^3}{\delta\phi_{\gamma\delta}(x_4)\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} + \frac{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)}{\delta\phi_{\gamma\delta}(x_4)} \frac{\delta S^3}{\delta\phi_{\rho\sigma}(x_3)\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} + \\ & \left. + \delta\phi_{\mu\nu}(x_1) \frac{\delta S^4}{\delta\phi_{\gamma\delta}(x_4)\delta\phi_{\rho\sigma}(x_3)\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)} \right)_{\phi=0} = 0. \end{aligned} \quad (C.3)$$

As equações (C.1), (C.2) e (C.3) são independentes da representação. A variação de ϕ na representação $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa\phi_{\mu\nu}$ é achada a partir da equação (2.26) usando $\delta g_{\mu\nu} = \kappa\delta\phi_{\mu\nu}$

$$\delta\phi_{\mu\nu}(x_1) = \frac{1}{\kappa} [\partial_\mu \epsilon_\nu(x_1) + \partial_\nu \epsilon_\mu(x_1)] - [\partial_\mu \epsilon^\rho(x_1)\phi_{\rho\nu}(x_1) + \partial_\nu \epsilon^\rho(x_1)\phi_{\mu\rho}(x_1) + \epsilon^\lambda(x_1)\phi_{\mu\nu,\lambda}(x_1)]. \quad (C.4)$$

Assim, a variação de um campo com respeito a um outro campo será

$$\begin{aligned} \frac{\delta\phi_{\mu\nu}(x_1)}{\delta\phi_{\alpha\beta}(x_2)} &= -[\delta(x_1 - x_2)\delta_\lambda^\alpha \delta_\nu^\beta \partial_\mu^{x_1} + \delta(x_1 - x_2)\delta_\mu^\alpha \delta_\lambda^\beta \partial_\nu^{x_1} + \\ &+ \partial_\lambda^{x_1} \delta(x_1 - x_2)\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta] \epsilon^\lambda(x_1). \end{aligned} \quad (C.5)$$

Passando as equações (C.1), (C.2) e (C.3) para o espaço dos momentos e utilizando (C.5) para as representações ϕ obtemos

$$\chi_{\mu\nu\lambda}^0(k_1)V^{2\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2) = 0$$

$$\begin{aligned} & \chi_{\mu\nu\lambda}^0(k_1)V^{3\mu\nu}_{\alpha\beta\delta\gamma}(k_1, k_2, k_3) + \chi_{\mu\nu\alpha\beta\lambda}^1(k_1, k_2)V^{2\mu\nu}_{\delta\gamma}(k_1 + k_2, k_3) \\ & + \chi_{\mu\nu\delta\gamma\lambda}^1(k_1, k_3)V^{2\mu\nu}_{\alpha\beta}(k_1 + k_3, k_2) = 0 \end{aligned} \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned} & \chi_{\mu\nu\lambda}^0(k_1)V^{4\mu\nu}_{\alpha\beta\delta\gamma\tau\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \chi_{\mu\nu\alpha\beta\lambda}^1(k_1, k_2)V^{3\mu\nu}_{\delta\gamma\tau\sigma}(k_1 + k_2, k_3, k_4) \\ & + \chi_{\mu\nu\delta\gamma\lambda}^1(k_1, k_3)V^{3\mu\nu}_{\alpha\beta\tau\sigma}(k_1 + k_3, k_2, k_4) + \chi_{\mu\nu\tau\sigma\lambda}^1(k_1, k_4)V^{3\mu\nu}_{\alpha\beta\delta\gamma}(k_1 + k_4, k_2, k_3) \\ & + \chi_{\mu\nu\tau\sigma\lambda}^1(k_1, k_4)V^{3\mu\nu}_{\alpha\beta\delta\gamma}(k_1 + k_4, k_2, k_3) = 0 \end{aligned}$$

onde $\chi_{\mu\nu\lambda}^0(k_1) = k_{1\mu}\eta_{\nu\lambda} + k_{1\nu}\eta_{\mu\lambda}$ e $\chi_{\mu\nu\alpha\beta\lambda}^1(k_1, k_2) = k_{1\mu}\eta_{\alpha\lambda}\eta_{\nu\beta} + k_{1\nu}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\lambda\beta} + k_{2\lambda}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}$.

De forma semelhante podemos obter as relações equivalentes a (C.4) e (C.5) para a representação $\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ a partir da equação (2.49). Aplicando o resultado às equações (C.1), (C.2) e (C.3) obtemos para a representação $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ as mesmas relações (C.6) sendo que agora $\chi_{\mu\nu\lambda}^0(k_1) = k_{1\mu}\eta_{\nu\lambda} + k_{1\nu}\eta_{\mu\lambda} - k_{1\lambda}\eta_{\mu\nu}$ e $\chi_{\mu\nu\alpha\beta\lambda}^1(k_1, k_2) = k_{1\beta}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\lambda\nu} + k_{1\alpha}\eta_{\lambda\mu}\eta_{\beta\nu} - k_{1\lambda}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}$.

Todos os vértices e propagadores obtidos no capítulo 2 obedecem as identidades (C.6).

C.2 Identidades de Ward na Aproximação de um “Loop”

Consideremos a ação [BF98]:

$$S = \int d^4x_1 \Gamma^{\mu\nu}(x_1) \phi_{\mu\nu}(x_1) + \int d^4x_1 d^4x_2 \phi_{\mu\nu}(x_1) S^{\mu\nu\alpha\beta}(x_1 - x_2) \phi_{\alpha\beta}(x_2) + \int d^4x_1 d^4x_2 J^{\mu\nu}(x_1) \chi_{\mu\nu\lambda}(x_1 - x_2) \eta^\lambda(x_2) + \dots, \quad (C.7)$$

onde foi acrescentado um termo linear induzido por efeitos térmicos. Aqui, $\Gamma^{\mu\nu}$ denota a função de um gráviton, $S^{\mu\nu\alpha\beta}$ são as contribuições à função de dois grávitons e $\chi_{\mu\nu\lambda}$ representa o tensor gerado por uma transformação de “gauge” do campo de gráviton. $J^{\mu\nu}$ é uma fonte externa e η^λ representa o campo de “ghost”. Note que só estamos considerando os termos linear e quadrático da ação, isto é, os termos relevantes para o nosso propósito.

A seguinte identidade é obtida como uma consequência da invariância BRST da ação S [BF98]:

$$\int d^4x \frac{\delta S}{\delta J^{\mu\nu}(x)} \frac{\delta S}{\delta \phi_{\mu\nu}(x)} = 0.$$

Derivando com relação a um campo de gráviton e um campo de “ghost” e fazendo zero todos os campos analogamente ao caso da aproximação de árvore, teremos o seguinte resultado

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \left[\frac{\delta^3 S}{\delta \eta^\lambda(x_2) \delta \phi_{\alpha\beta}(x_1) \delta J^{\mu\nu}(x_1)} \frac{\delta S}{\delta \phi_{\mu\nu}(x_1)} + \frac{\delta S}{\delta \eta^\lambda(x_2) \delta J^{\mu\nu}(x_1)} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{\mu\nu}(x_1) \delta \phi_{\alpha\beta}(x_2)} \right] = 0.$$

A partir da ação (C.7), podemos construir a seguinte identidade:

$$V_{\mu\nu\alpha\beta\lambda}^{SGg} \Gamma^{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu\lambda}^0 \Pi^{\mu\nu\alpha\beta} + \chi_{\mu\nu\lambda}^{(1)} V^{2\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad (C.8)$$

onde V^{SGg} é o vértice fonte-gráviton-ghost e $\chi^{(1)}$ é o termo em ordem de um “loop” que segue a χ^0 na expansão do tensor $\chi_{\mu\nu\lambda}$, que é sub-dominante na expansão em altas temperaturas. Para os termos sub-dominantes, lembrando que o primeiro termo de (C.8) não contribui, temos a identidade de ‘t Hooft

$$\chi_{\mu\nu\lambda}^0 \Pi_{sub}^{\mu\nu\alpha\beta} = -\chi_{\mu\nu\lambda}^{(1)} V^{2\mu\nu\alpha\beta}, \quad (C.9)$$

Para derivar o vértice V^{SGg} , começamos com a lagrangiana incluindo fontes [DM85]:

$$\mathcal{L}_S = \kappa J^{\mu\nu} D_{\mu\nu\lambda} \epsilon^\lambda; \quad (C.10)$$

$$\begin{array}{c}
\hline
k_\mu k_\nu k_\lambda \\
u_\mu u_\nu u_\lambda \\
k_\lambda u_\mu u_\nu \\
u_\lambda k_\mu k_\nu \\
k_\mu u_\nu u_\lambda + k_\nu u_\mu u_\lambda \\
u_\mu k_\nu k_\lambda + u_\nu k_\mu k_\lambda \\
\eta_{\mu\nu} k_\lambda \\
\eta_{\mu\nu} u_\lambda \\
k_\mu \eta_{\nu\lambda} + k_\nu \eta_{\mu\lambda} \\
u_\mu \eta_{\nu\lambda} + u_\nu \eta_{\mu\lambda} \\
\hline
\end{array}$$

e usando o método de amplitudes frontais apresentado no apêndice B, obtemos o seguinte resultado para contribuição dominante T^2 para $\Xi_{\mu\nu\lambda}^{(1)}$

$$\chi_{\mu\nu\lambda}^{(1)} = \frac{T^2}{18} k_0 [\eta_{\lambda\nu} u_\mu + \eta_{\lambda\mu} u_\nu - 2u_\mu u_\nu u_\lambda] \quad (\text{C.13})$$

Usando (C.13) e $V^{2\mu\nu\alpha\beta}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\chi_{\mu\nu\lambda}^{(1)} V^{2\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{T^2}{18} k_0 \{ 2k \cdot u (k_\alpha u_\beta + k_\beta u_\alpha) + k \cdot u (2\eta_{\alpha\beta} k_\lambda - \eta_{\lambda\beta} k_\alpha - \eta_{\lambda\alpha} k_\beta) \\
&\quad + k^2 (\eta_{\alpha\lambda} u_\beta + \eta_{\beta\lambda} u_\alpha - 2u_\alpha u_\beta u_\lambda) - k_\lambda (k_\alpha u_\beta + k_\beta u_\alpha) - 2(k \cdot u)^2 \eta_{\alpha\beta} u_\lambda \}
\end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Usando o resultado obtido para $\Pi_{T^2}^{\mu\nu\alpha\beta}$ temos verificado que a contração com $\chi_{\mu\nu\lambda}^0$ é exatamente a equação (C.14) com sinal oposto em completo acordo com a equação (C.9).

Apêndice D

Teoria de resposta Linear

Neste apêndice apresentaremos uma breve introdução à teoria de resposta linear. Esta breve introdução contém os ingredientes básicos necessários para o estudo das relações de dispersão.

D.1 Resposta Linear a um Campo Externo

Suponhamos aplicar algum campo externo a um sistema inicialmente em equilíbrio térmico. O princípio da teoria de resposta linear é calcular a variação média de um operador $Y(\vec{x}, t)$ até primeira ordem, causada por um campo externo.

Expressando a hamiltoniana total como

$$H'(t) = H + H_{ext}(t) \quad (D.1)$$

onde H é a hamiltoniana não perturbada e H_{ext} é a perturbação que acopla o campo externo ao sistema. Considerando que H_{ext} se anula quando $t < t_0$. A exata equação do movimento para Y é

$$\frac{\partial Y(\vec{x}, t)}{\partial t} = i [H'(t), Y(\vec{x}, t)] \quad (D.2)$$

Considerando agora $|j\rangle$ ser um auto-estado de H na representação de Heisenberg. Então segue que a variação temporal do valor esperado de Y no estado $|j\rangle$ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle j | Y(\vec{x}, t) | j \rangle}{\partial t} &= i \langle j | [H'(t), Y(\vec{x}, t)] | j \rangle \\ &= i \langle j | [H_{ext}(t), Y(\vec{x}, t)] | j \rangle \end{aligned} \quad (D.3)$$

Já que (D.3) é exato, é geralmente impossível resolvê-la de forma fechada. Assim, assumimos que H_{ext} causa apenas uma pequena variação em Y . Então, podemos integrar (D.3) até a primeira ordem em H_{ext} como

$$\begin{aligned}\delta\langle j|Y(\vec{x}, t)|j\rangle &= \langle j|Y(\vec{x}, t)|j\rangle - \langle j|Y(\vec{x}, t_0)|j\rangle \\ &= i \int_{t_0}^t dt' \langle j|[H_{ext}(t'), Y(\vec{x}, t)]|j\rangle\end{aligned}\quad (D.4)$$

Agora a variação média de Y é dada por

$$\delta\langle Y(\vec{x}, t)\rangle = \frac{\sum_j e^{-\beta K_j} \delta\langle j|Y(\vec{x}, t)|j\rangle}{\sum_j e^{-\beta K_j}}\quad (D.5)$$

onde $K = H - \mu_i N_i$ e $\beta = 1/T$. Estamos considerando aqui um número arbitrário de cargas conservadas. Usando (D.4) em (D.5) obtemos

$$\delta\langle Y(\vec{x}, t)\rangle = i \int_{t_0}^t dt' \text{tr}\{\hat{\rho}[H_{ext}(t'), Y(\vec{x}, t)]\}\quad (D.6)$$

onde $\hat{\rho}$ é a matriz densidade dada por

$$\hat{\rho} = \exp\left[-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)\right].\quad (D.7)$$

A equação (D.6) expressa até primeira ordem em H_{ext} a variação média de Y em termos de um comutador entre H_{ext} e Y calculado sobre um conjunto não perturbado normalizado pela matriz densidade $\hat{\rho}$.

Como um exemplo, consideremos o campo escalar ϕ que está acoplado a uma fonte externa $J(\vec{x}, t)$ da seguinte forma

$$H_{ext}(t') = \int d^3x' J(\vec{x}', t')\phi(\vec{x}', t')\quad (D.8)$$

Estamos interessados na variação média de ϕ quando a fonte externa é ligada. Usando (D.8) em (D.6) com $Y = \phi$ temos

$$\delta\langle\phi(\vec{x}, t)\rangle = -i \int_{t_0}^t dt' \int d^3x' J(\vec{x}', t') \text{tr}\{\hat{\rho}[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t')]\}\quad (D.9)$$

Neste ponto é conveniente introduzir o propagador retardado dado por

$$iD^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \text{tr}\{\hat{\rho}[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t')]\}\theta(t - t')\quad (D.10)$$

Consequentemente (D.9) é

$$\delta\langle\phi(\vec{x}, t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' J(\vec{x}', t') D^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t')\quad (D.11)$$

Aqui temos considerado $t_0 \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$. Uma vez que o sistema não perturbado estava no equilíbrio térmico D^R deve depender apenas de $\vec{x} - \vec{x}'$ e $t - t'$. Inserindo as transformadas de Fourier

$$D^R(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \int \frac{d^3q d\omega}{(2\pi)^4} e^{i[\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \omega(t - t')]} D^R(\omega, \vec{q}) \quad (D.12)$$

$$J(\vec{x}', t') = \int \frac{d^3p d\alpha}{(2\pi)^4} e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \alpha t')} \tilde{J}(\alpha, \vec{p}) \quad (D.13)$$

em (D.11) obtemos

$$\delta\langle\phi(\vec{x}, t)\rangle = \int \frac{d^3q d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)} \tilde{J}(\omega, \vec{q}) D^R(\omega, \vec{q}) \quad (D.14)$$

ou no espaço dos momentos

$$\delta\langle\tilde{\phi}(\omega, \vec{q})\rangle = \tilde{J}(\omega, \vec{q}) D^R(\omega, \vec{q}) \quad (D.15)$$

A obtenção de (D.14) e (D.15) para o propagador no tempo imaginário pode ser feita por continuação analítica [FW71]. A extensão da equação (D.15) para o caso da gravitação pode ser feita facilmente, um vez identificando que neste caso $\tilde{J} \equiv \delta T_{\mu\nu}$ e $D^R \equiv (P^{\mu\nu\alpha\beta})^{-1}$ obtendo assim a equação (5.12).

D.2 Oscilações do Plasma

Consideremos que ao invés de aplicar a um sistema um campo externo estático, aplicar um pulso momentâneo. Então, neste caso a fonte seria dada por

$$\begin{aligned} J(\vec{x}, t) &= J_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \delta(t) \\ \tilde{J}(\omega, \vec{q}) &= (2\pi)^3 J_0(\vec{k}) \delta(\vec{q} - \vec{k}) \end{aligned} \quad (D.16)$$

Considerando (D.14) a fonte (D.16) leva a resposta do campo

$$\delta\langle\phi(\vec{x}, t)\rangle = J_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} D^R(\omega, \vec{k}) \quad (D.17)$$

Suponhamos que o propagador retardado tenha um polo simples localizado em $\omega = \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k})$ com $\gamma(\vec{k}) \geq 0$. Então

$$D^R(\omega, \vec{k}) = \frac{R(\vec{k})}{\omega - \omega(\vec{k}) + i\gamma(\vec{k})} \quad (D.18)$$

onde $R(\vec{k})$ é o resíduo do polo. Usando (D.18) em (D.17) obtemos

$$\delta\langle\phi(\vec{x}, t)\rangle = -i J_0(\vec{k}) R(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t)} e^{-\gamma(\vec{k})t} \quad (D.19)$$

O resultado (D.19) mostra que a resposta do campo é uma onda se propagando com uma relação de dispersão $\omega(\vec{k})$ e constante de amortecimento $\gamma(\vec{k})$. Como vemos a parte real do polo do propagador nos fornece a relação de dispersão da propagação de uma perturbação externa sobre o plasma inicialmente em equilíbrio térmico, enquanto a parte imaginária nos fornece a constante de amortecimento desta propagação no plasma.

Referências Bibliográficas

- [BCMM03] F. T. Brandt, B. Cuadros-Melgar, and F. R. Machado. Thermal one- and two-graviton green's functions in the temporal gauge. *Phys. Rev.*, D67:125006 (2003).
- [BDFdS98] F. T. Brandt, Ashok Das, J. Frenkel, and A. J. da Silva. Retarded greens functions and forward scattering amplitudes in thermal field theory. *Phys. Rev.*, D59:065004 (1998).
- [Bel96] Michel Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1996).
- [BF95] F. T. Brandt and J. Frenkel. Nonlinear electromagnetic interactions in thermal QED. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1705–1707 (1995).
- [BF97a] F. T. Brandt and J. Frenkel. Generalized forward scattering amplitudes in QCD at high temperature. *Phys. Rev.*, D56:2453–2456 (1997).
- [BF97b] F. T. Brandt and J. Frenkel. High temperature $\ln(t)$ contributions in thermal field theory. *Phys. Rev.*, D55:7808–7814 (1997).
- [BF98] F. T. Brandt and J. Frenkel. The structure of the graviton selfenergy at finite temperature. *Phys. Rev.*, D58:085012 (1998).
- [BF99] F. T. Brandt and J. Frenkel. General struture of the graviton self-energy. *Phys. Rev.*, D59:127701 (1999).
- [BFT92] F. T. Brandt, J. Frenkel, and J. C. Taylor. Metric dependence of partition function at high temperature. *Nucl. Phys.*, B374:169–182 (1992).
- [BFTW93] F. T. Brandt, J. Frenkel, J. C. Taylor, and S. M. H. Wong. Effective actions for Braaten-Pisarski resummation. *Can. J. Phys.*, 71:219 (1993).
- [BP90a] E. Braaten and R. D. Pisarski. Deducing hard thermal loops from ward identities. *Nucl. Phys.*, B339:310–324 (1990).
- [BP90b] E. Braaten and R. D. Pisarski. Soft amplitudes in hot gauge theories: A general analysis. *Nucl. Phys.*, B337:569 (1990).

- [BP92] E. Braaten and R. D. Pisarski. Simple effective lagrangian for hard thermal loops. *Phys. Rev.*, D45:1827–1830 (1992).
- [CL82] D. M. Capper and G. Leibbrandt. On ward identities in a general axial gauge. quantum gravity. *Phys. Rev.*, D25:1009 (1982).
- [CLM73] D. M. Capper, G. Leibbrandt, and R. Medrano. Calculation of the graviton self-energy using dimensional regularization. *Phys. Rev.*, D8:4320–4331 (1973).
- [CWMW73] K. S. Thorne C. W. Misner and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, NY (1973).
- [Dir96] P. A. M. Dirac. *General Theory of Relativity*. Princeton Univertity Press, New Jersey (1996).
- [DM85] R. Delbourgo and T. Matsuki. Gravitational counterterms and brs symmetry. *Phys. Rev.*, D32:2579 (1985).
- [FT91] J. Frenkel and J. C. Taylor. Hard thermal loops in a gravitational field. *Z. Phys.*, C49:515–520 (1991).
- [FT92] J. Frenkel and J. C. Taylor. Hard thermal QCD, forward scattering and effective actions. *Nucl. Phys.*, B374:156 (1992).
- [FTBM99] J. Frenkel F. T. Brandt and F. R. Machado. Finite temperature gluon self-energy in a class of temporal gauges. *Phys. Rev.*, D61:125014 (2000).
- [FW71] A. L. Fetter and J. D. Walecka. *Theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill (1971).
- [GDH89] P. S. Gribosky, J. F. Donoghue, and B. R. Holstein. The stability of hot curved space. *Ann. Phys.*, 190:149 (1989).
- [GPY82] D. J. Gross, M. J. Perry, and L. G. Yaffe. Instability of flat space at finite temperature. *Phys. Rev.*, D25:330 (1982).
- [GR80] I. S. Gradshteyn and M. Ryzhik. *Tables of Integral Series and Products*. Academic, New York. (1980).
- [Hec93] A. Heck. *Introduction to Maple*. Springer-Verlag, NY (1993).
- [HV74] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman. *Ann Inst. Henri Poincaré*, A20:69 (1974).
- [HY92] A. Hieh and E. Yehudai. Hip: Symbolic high-energy physics calculations. *Comput. Phys.*, 6:253–261 (1992).

- [Kap89] J. I. Kapusta. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1989).
- [KKR90] R. Kobes, G. Kunstatter, and A. Rebhan. QCD plasma parameters and the gauge dependent gluon propagator. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2992–2995 (1990).
- [KKR91] R. Kobes, G. Kunstatter, and A. Rebhan. Gauge dependence identities and their application at finite temperature. *Nucl. Phys.*, B355:1–37 (1991).
- [KLLM94] P. F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi, and C. Manuel. Classical transport theory and hard thermal loops in the quark - gluon plasma. *Phys. Rev.*, D50:4209–4218 (1994).
- [KMT84] Y. Kikuchi, T. Moriya, and H. Tsukahara. Gravitational instability and curvature effect at finite temperature. *Phys. Rev.*, D29:2220 (1984).
- [KR91] U. Krammer and A. Rebhan. Selfconsistent cosmological perturbations from thermal field theory. *Phys. Rev. Lett.*, 67:793–796 (1991).
- [LS94] G. Leibbrandt and M. Staley. Finite temperature calculations in the temporal gauge. *Nucl. Phys.*, B428:469–484 (1994).
- [Mut87] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics*. World Scientific, Singapore (1987).
- [Ram90] P. Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*. Addison-Wesley, Menlo Park (1990).
- [Reb91] A. Rebhan. Collective phenomena and instabilities of perturbative quantum gravity at nonzero temperature. *Nucl. Phys.*, B351:706–734 (1991).
- [Reb92] A. Rebhan. Analytical solutions for cosmological perturbations with relativistic collisionless matter. *Nucl. Phys.*, B368:479–508 (1992).
- [tH75] G. 't Hooft. *Quantum Gravity*. H. Rolnick and K. Pietz, Springer-Verlag (1975).
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, NY (1972).
- [Wei95] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1995).