

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

**Aspectos Estatísticos em Colisões de Partículas
Relativísticas**

ISAAC 'STEVÃO DE ANDRADE OLIVEIRA SENA

Orientador: Prof. Dr. Airton Deppman

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Airton Deppman

Prof. Dr. Jun Takahashi

Prof. Dr. Otaviano Augusto Marcondes Helene

São Paulo

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Sena, Isaac 'Stevão de Andrade Oliveira

Aspectos Estatísticos em Colisões de Partículas
Relativísticas. – São Paulo, 2011.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física, Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Airton Deppman

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Física; 2. Física Experimental;
3. Mecânica Estatística.

USP/IF/SBI-090/2011

Aspectos Estatísticos em Colisões de Partículas Relativísticas

*Aos meus pais, José Wilson e Sonielli
Sena.*

Agradecimentos

Muitas são as pessoas que gostaria de agradecer e anunciar pelo apoio e auxílio direto e indireto, entretanto este limitado espaço não permite. Por esta razão, desde já me desculpo e peço a compreensão pelas indesejáveis e inevitáveis omissões.

Primeiramente tenho que agradecer àquele que é, indubitavelmente, digno de toda a gratidão: Deus. Agradeço também à toda minha família, especialmente meus pais, pelo amor e confiança. Agradeço à minha namorada, Raquel, que foi uma fonte de grande apoio durante todo o período deste trabalho. Agradeço ao Prof. Dr. Airton Deppman pela paciência, sabedoria, e fundamental papel na orientação. Aos alunos do grupo, especialmente ao Evandro e Ricardo, pelo grande auxílio nos problemas computacionais. Também gostaria de agradecer pela maravilhosa oportunidade de participar da colaboração ALICE e de ter trabalhado no LHC/CERN (Suíça). Neste caso, devo mencionar o Prof. Dr. Marcelo Munhoz, pelo auxílio nas questões administrativas/burocráticas. Neste espaço também devo manifestar a minha gratidão aos queridos amigos da Igreja Maranata, de modo especial do bairro Sumaré, que se tornaram uma família deste o início desta empreitada.

Por fim, agradeço ao IFUSP pelas facilidades oferecidas, bem como ao CNPq pelo suporte financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

*“Grandes coisas fez o SENHOR por
nós, e por isso estamos alegres.”*

Salmos 126:3

Bíblia Sagrada

Resumo

Várias propriedades das colisões de partículas hadrônicas são bem descritas pela teoria termodinâmica de Hagedorn para hádrons altamente excitados (em inglês, *fireballs*) [1]. Uma destas propriedades é a distribuição dos momentos das partículas decorrentes da colisão. O modelo estatístico desenvolvido por Hagedorn se mostra em concordância com dados experimentais produzidos em colisões cuja energia no centro de massa é relativamente baixa ($\sqrt{s} < 10 GeV$), mas começa a apresentar falhas descrições com o aumento de \sqrt{s} [2]. Todavia, esta teoria foi generalizada usando um formalismo termodinâmico não-extensivo proposto por Tsallis [3] [4] [5] que tem se mostrado útil no ajuste dos dados experimentais. Essa generalização tem sido bem sucedida na descrição da distribuição dos momentos transversais obtidos para colisões de partículas ultra-relativísticas. Com o objetivo de melhor compreender os aspectos estatísticos envolvidos nas colisões de partículas em altas energias, este trabalho constituiu no estudo, do ponto de vista macroscópico, da produção e distribuição de partículas em colisões relativísticas, utilizando-se das ferramentas estatísticas desenvolvidas pela mecânica elaborada por Hagedorn e sua generalização. Ao analisar os resultados, que são apresentados logo a seguir, tornou-se um dos objetivos deste projeto denotar que as propriedades das teorias indicadas anteriormente (especialmente a generalização de Hagedorn) podem ser utilizadas como ferramentas na descrição e fornecimento de propriedades do meio em colisões de partículas em condições extremas.

Palavras-Chave: Colisões de Partículas; Estatística Não-Extensiva; Termodinâmica; Espectro; Momentos Transversais; Tsallis; Hagedorn.

Abstract

Many properties of hadron particles collisions are well described by Hagedorn thermodynamical theory for highly excited hadrons or fireballs [1]. One of these properties is the momentum distribution of secondary particles produced. Hagedorn's statistical model is in good agreement with experimental data for collision with $\sqrt{s} < 10 GeV$ [2], but it starts to show failed descriptions for higher \sqrt{s} [2]. However, this theory was generalized by using a non-extensive thermodynamics formalism proposed by Tsallis [3] [4] [5], which has been useful to fit experimental data. Such generalization has been successful in describing transverse momentum distributions obtained in ultra-relativistic proton-proton collisions. Within the purpose of comprehending the statistical aspects involved in collisions of particles in high energies, this work constitutes, in a macroscopic point of view, a study of production and distribution of particles in relativistic collisions, through the use of statistical tools developed by Hagedorn's mechanics and its generalization. In analysing results (to be shown later), it became a purpose to denote that the proprieties of the previously indicated theories (especially Hagedorn's generalization) may be used as appropriate tools in describing and providing environment properties in particles collisions in extreme conditions.

Keywords: Particle Collision; Non-extensive Statistics; Thermodynamic; Spectra; Transverse Momentum; Tsallis; Hagedorn.

Sumário

Lista de Figuras	p. xvi
Lista de Tabelas	p. xxi
1 Introdução	p. 1
1.1 Física das Colisões	p. 2
1.1.1 Energia do Centro de Massa - \sqrt{s}	p. 2
1.1.2 Colisões de Íons - Aspectos Geométricos	p. 3
1.2 Crômodinâmica Quântica - QCD	p. 5
1.3 Transição de Fase da QCD	p. 7
1.3.1 Evolução Temporal	p. 10
1.4 Organização deste trabalho	p. 12
2 Modelos Estatísticos	p. 14
2.1 Distribuições de Probabilidades	p. 16
2.1.1 Distribuição de Maxwell	p. 17
2.1.2 Distribuições de Probabilidades no Espaço de Fase	p. 18
2.2 Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs	p. 19
2.2.1 Aspectos Matemáticos	p. 20

2.3	Mecânica Estatística Não-Extensiva	p. 21
2.3.1	Formulação Não-Extensiva	p. 23
2.3.2	Aplicações	p. 26
2.3.3	Índice Entrópico q	p. 27
2.4	Superestatística	p. 27
3	Teoria de Hagedorn	p. 30
3.1	Gás quântico ideal no Ensemble Canônico	p. 31
3.2	Condição de auto-consistência - “ <i>bootstrap</i> ”	p. 34
3.3	Temperatura Limite	p. 37
3.4	Distribuição de Probabilidades	p. 39
4	Generalização da Teoria de Hagedorn	p. 41
4.1	Probabilidades de estado	p. 41
4.2	Distribuição de Probabilidades	p. 43
4.3	Aproximação para altos p_{\perp}	p. 45
4.3.1	Seção de choque diferencial	p. 45
4.4	Temperatura Efetiva T_{ef}	p. 47
5	Metodologia	p. 50
5.1	Funções Estatísticas	p. 51
5.1.1	Comportamento das funções	p. 52
5.2	Dados Experimentais	p. 53
5.2.1	Colisões p+p	p. 53

5.2.2	Colisões de Íons Pesados	p. 54
5.3	Pacotes Computacionais	p. 54
6	Resultados e Análises	p. 56
6.1	Melhor ajuste de T e q	p. 56
6.1.1	Colisões p+p	p. 56
6.1.2	Colisões de Íons Pesados	p. 60
6.2	Análises Estatísticas	p. 66
6.2.1	Corte para baixos p_{\perp}	p. 69
6.3	Dependência de q e T	p. 74
6.4	Fixando a Temperatura	p. 76
6.4.1	Dependência de q e T	p. 84
7	Sumário e Considerações Finais	p. 86
7.1	Resultados para a temperatura da teoria de Hagedorn	p. 87
7.2	Resultados para a temperatura da generalização de Hagedorn	p. 88
7.3	Corte para baixos p_{\perp}	p. 88
7.4	Dependência de q e T	p. 89
7.5	Fixando a Temperatura	p. 90
7.6	Considerações Finais	p. 91
	Apêndice A – Gráficos - Análise Estatística	p. 92
A.1	Colisões p+p	p. 92
A.2	Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV	p. 99

A.3	Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 106
A.4	Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 114
Referências Bibliográficas		p. 121
Glossário		p. 126
Índice		p. 132

Lista de Figuras

- | | | |
|-----|---|-------|
| 1.1 | Simulação de um processo de colisão de núcleos (Retirado da referência [12]). | p. 4 |
| 1.2 | Relacionamento de diversas propriedades e grandezas envolvidas em uma colisão de núcleos (Figura modificada da referência [14]). . . | p. 5 |
| 1.3 | Na matéria ordinária (esquerda), os quarks estão confinados em hádrons. No QGP os quarks não se encontram confinados dentro dos hádrons, mas livres. Retirado de [22]. | p. 7 |
| 1.4 | Cálculos da densidade de energia ε e da pressão P como função da temperatura T utilizando QCD na rede [24] (quarks u e d). A temperatura crítica T_c aqui é ≈ 150 MeV. Retirado de [8]. | p. 9 |
| 1.5 | Esquema do diagrama de fase da matéria nuclear, dado pela Temperatura x Densidade bariônica. A possibilidade da nova fase, QGP, pode ser observada quando há um aumento da temperatura (que pode ser alcançada artificialmente nos aceleradores de íons a altas energias) ou aumento da densidade bariônica (encontrada nas estrelas de nêutrons) [26]. Retirado de [25]. | p. 10 |

1.6	Evolução temporal do processo de colisão. Dois núcleos se aproximam um do outro, observem que os núcleos estão achatados devido à efeitos relativísticos; logo após a colisão ocorre a formação do QGP, como uma onda de choque atingindo a matéria nuclear; a etapa posterior é marcada pela expansão e esfriamento do QGP, e pela hadronização. Retirado de [27].	p. 12
2.1	Distribuição de Maxwell com $\beta m = 1$	p. 18
2.2	Comparações das funções <i>q-exponencial</i> e exponencial.	p. 24
4.1	Comparação entre a fórmula exata 4.20 com $m_{\beta}^2 = (m_{\pi}/T_0)^2 = 1,3$ e a aproximação 4.22 para vários valores de q , com c igual a 1. Figura tirada da referência [2].	p. 47
5.1	Comparação de ajustes das diferentes teorias.	p. 53
6.1	Ajuste das equações das teorias de Hagedorn e Hagedorn-Tsallis no espectro de p_{\perp} de diversos dados experimentais (ver Tabela 5.1) resultantes de colisões $p + p$	p. 57
6.2	Resultados dos ajustes da equação de Hagedorn-Tsallis (equação 5.5) nos dados experimentais da Tabela 5.1. Dados comparados com [63].	p. 59
6.3	Ajuste das equações das teorias de Hagedorn e Hagedorn-Tsallis para diversas centralidades em colisões $A + A$ identificadas na Tabela 5.2.	p. 61
6.4	Valores obtidos para T com os ajustes da equação de Hagedorn em diversas centralidades de colisões $A + A$ identificadas na Tabela 5.2.	p. 63
6.5	Resultados para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.	p. 65

6.6	Resultados para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Dados comparados com [63].	p. 65
6.7	Resultados para colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 65
6.8	Variáveis estatísticas. Experimento ALICE: p+p com $\sqrt{s} = 900$ GeV.	p. 67
6.9	Variáveis estatísticas. Centralidade: 45 - 50 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.	p. 67
6.10	Variáveis estatísticas. Centralidade: 20 - 40 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 68
6.11	Variáveis estatísticas. Centralidade: 0 - 6 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 68
6.12	Corte para baixos p_{\perp}	p. 70
6.13	<i>Corte para baixos p_{\perp}</i> . Colisões p+p para diversas energias. Dados comparados com [63].	p. 72
6.14	<i>Corte para baixos p_{\perp}</i> . Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.	p. 73
6.15	<i>Corte para baixos p_{\perp}</i> . Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Dados comparados com [63].	p. 73
6.16	<i>Corte para baixos p_{\perp}</i> . Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 73
6.17	Colisões p+p	p. 74
6.18	Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.	p. 75
6.19	Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 75
6.20	Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 76
6.21	Diversos A+A com diversos $\sqrt{s_{NN}}$ e centralidades.	p. 76
6.22	Colisões p+p. Ajustes mantendo o parâmetro T da equação 5.5 fixo.	p. 78

6.23 Ajuste da equação derivada da teoria de Hagedorn-Tsallis (com o parâmetro T mantido fixo) para diversas centralidades para as colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.	p. 79
6.24 Ajuste da equação derivada da teoria de Hagedorn-Tsallis (com o parâmetro T mantido fixo) para diversas centralidades para as colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 80
6.25 Ajuste da equação derivada da teoria de Hagedorn-Tsallis (com o parâmetro T mantido fixo) para diversas centralidades para as colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	p. 81
6.26 Comparação dos valores obtidos para o parâmetro q em diferentes T fixos (marcadores não-preenchidos) com os dados da literatura [63] (marcadores preenchidos).	p. 82
6.27 Ajuste linear para os valores das médias de q obtidas para diversos valores de T mantido como fixo (80, 100, 120, 140, 160 e 180 MeV) no ajuste da equação 5.5 nos dados experimentais.	p. 85
A.1 RICH: $\sqrt{s} = 200$ GeV	p. 93
A.2 ALICE: $\sqrt{s} = 900$ GeV	p. 94
A.3 ATLAS: $\sqrt{s} = 900$ GeV	p. 95
A.4 CMS: $\sqrt{s} = 900$ GeV	p. 96
A.5 CMS: $\sqrt{s} = 2,36$ TeV	p. 97
A.6 CMS: $\sqrt{s} = 7$ TeV	p. 98
A.7 Centralidade: 0 - 6 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV	p. 100
A.8 Centralidade: 6 - 15 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV	p. 101
A.9 Centralidade: 15 - 25 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV	p. 102

A.10 Centralidade: 25 - 35 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV	p. 103
A.11 Centralidade: 35 - 45 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV	p. 104
A.12 Centralidade: 45 - 50 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV	p. 105
A.13 Centralidade: 0 - 12 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 107
A.14 Centralidade: 10 - 20 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 108
A.15 Centralidade: 20 - 40 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 109
A.16 Centralidade: 40 - 60 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 110
A.17 Centralidade: 60 - 80 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 111
A.18 Centralidade: 40 - 80 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 112
A.19 Centralidade: 0 - 80 % (<i>Minimum bias</i>). Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 113
A.20 Centralidade: 0 - 6 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 115
A.21 Centralidade: 6 - 15 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 116
A.22 Centralidade: 15 - 25 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 117
A.23 Centralidade: 25 - 35 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 118
A.24 Centralidade: 35 - 45 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 119
A.25 Centralidade: 45 - 50 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV	p. 120

Lista de Tabelas

- 5.1 Fontes de dados, com suas especificações, para colisões próton-próton p. 54
- 5.2 Fontes de dados, com suas especificações, para colisões de Íons Pesados. p. 54
- 6.1 Comparação dos valores de χ^2 por ndf (graus de liberdade) para os ajustes em todo o espectro de p_{\perp} (coluna “*todo intervalo de p_{\perp}* ”) e os ajustes com os cortes para baixos p_{\perp} (coluna “*corte para baixos p_{\perp}* ”). p. 71
- 6.2 Valores de χ^2/ndf para ajustes com diferentes temperaturas, T é dado em MeV. p. 84

1 Introdução

A invenção e construção de ferramentas para auxiliar as observações e medições foram cruciais para o avanço da ciência. Os colisores de partículas podem se enquadrar como recentes ferramentas utilizadas pela ciência na incansável busca pela compreensão do universo, não só nos domínios do micro, mas do macroscópico. Há mais de 70 anos a descoberta e o entendimento da radiação guiaram à ideia de acelerar e colidir feixes de partículas, e desde então o desenvolvimento do processo de aceleração e da coleta das informações após as colisões de tais feixes tem evoluído de forma significativa. Os atuais aceleradores conseguem alcançar energias da ordem de TeV (10^{12} eV), seis ordens de magnitude mais alta do que a MeV (10^6 eV), energia produzida há 70 anos [6]. A evolução da instrumentação científica nessa área possibilitou o entendimento, comprovação e a descoberta de muitos aspectos pertinentes ao mundo das partículas subatômicas, e contribuiu para a emancipação dos ramos da Física de Partículas e de Altas Energias.

Neste capítulo iremos introduzir algumas propriedades e conceitos relacionados à ciência envolvida com as colisões de partículas produzidas experimentalmente.

1.1 Física das Colisões

A Física das colisões cresceu de um pequeno papel que assumia na década de 60 do passado século para o de principal método de pesquisa da física de altas energias. Os colidores de partículas permitem aos cientistas desvendarem a estrutura da matéria em distâncias extremamente curtas e com alta densidade de energia, funcionando como um potente microscópio. A escala de precisão destas gigantescas máquinas permite o estudo das interações fundamentais, com exceção da gravidade, sem precedentes [7].

Em um experimento de colisão de partículas, dois feixes de partículas são acelerados em direções opostas para colidirem em um local pré-determinado ¹. As colisões entre feixes constituídos de nucleons tais como nêutron (n), ou próton (p), dizem-se colisões $N + N$. Caso as colisões ocorram entre feixes compostos por núcleos, como ouro (Au), cobre (Cu) ou chumbo (Pb), diz-se colisões $A + A$. Há também as colisões entre elétrons (e^-) e pósitrons (e^+) que foram bastante estudados principalmente na década de 90 pelo *Large Electron–Positron Collider* (LEP), no *Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire* (CERN), devido à relativa pureza, uma vez que e^- e e^+ são partículas elementares. Entretanto, no escopo de sondar novas regiões, a física de partículas juntamente com as novas operações do maior acelerador de partículas da atualidade, o *Large Hadron Collider* (LHC), tem voltado às atenções para as colisões entre prótons, $p + p$, e entre núcleos, $A + A$ [8].

1.1.1 Energia do Centro de Massa - \sqrt{s}

Uma maneira de se caracterizar as colisões é através da quantidade de energia disponível no centro de massa no referencial da colisão, denotado por \sqrt{s} . Para colisões simétricas $\sqrt{s} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, i.e., a energia do centro de massa é igual a raiz

¹Há também colisões em que partículas são aceleradas contra um alvo fixo.

quadrada da soma do quadrado da energia cinética das duas partículas colisoras. Para as colisões entre núcleos, se usa a energia do centro de massa por nucleon, $\sqrt{s_{NN}} \equiv \sqrt{s}/2N$, onde N é o número de nucleons de cada núcleo.

Um dos principais objetivos do LHC é acelerar prótons até alcançarem a energia $\sqrt{s} = 7$ TeV por próton. Essa energia deverá ser alcançada através de *upgrades* no LHC dentro de alguns anos, pois atualmente os prótons são acelerados à energia de $\sqrt{s} = 3,5$ TeV. Cada feixe possui aproximadamente 2.808 aglomerados (grupos) de prótons que se cruzam 10^7 Hz em um anel de 27 km de perímetro. Cada aglomerado é composto por aproximadamente $1,15 \times 10^{11}$ prótons. Isso significa o LHC será capaz de produzir feixes com uma energia de aproximadamente

$$E_{\text{feixe}} = 2808 \times 1,15 \times 10^{11} \times 7 \times 10^{12} \text{ eV} = 2,36 \times 10^{27} \text{ eV} = 3,63 \times 10^8 \text{ J}. \quad (1.1)$$

Essa energia é equivalente a de um carro de 3.200 kg com uma velocidade de 1.700 km/h [9].

1.1.2 Colisões de Íons - Aspectos Geométricos

Em colisões envolvendo íons pesados é essencial que se conheça o regime da colisão, que é expressa através de fatores tais como o parâmetro de impacto \vec{b} , onde $|\vec{b}|$ mede a distância entre os centros dos dois núcleos, e a seção de choque σ . Destes parâmetros pode-se extrair a centralidade, que também está relacionada com a geometria da colisão. Como mostra a Figura 1.1, após uma colisão envolvendo núcleos pode-se discriminar os nucleons que efetivamente participaram do processo de colisão, denominados *participantes*, das demais partículas, conhecidas como *espectadores*. Pode-se caracterizar a região de *superposição* (em inglês, *overlap*) a partir do parâmetro de impacto. Outra forma de caracterizar essa região é através da faixa de

centralidade, medindo a razão da seção de choque integrada pela total, i.e.,

$$\frac{\sigma(b)}{\sigma_{TOTAL}}, \text{ onde } \sigma(b) = \int_0^b \frac{d\sigma}{db'} b'. \quad (1.2)$$

Assim, *eventos 10% mais centrais* referem-se ao parâmetro de impacto b cuja seção de choque corresponde apenas 0.1 de σ_{TOTAL} , ou seja, quanto menor o percentual mais central é a colisão, implicando em uma maior *superposição* [10] e um maior número de participantes, N_{part} , por este ser uma função de b (além de depender dos tipos de partículas colisoras). Comumente, para se obter os valores dos diferentes parâmetros geométricos da colisão, recorre-se a ferramentas matemáticas, tais como o modelo ótico de Glauber [11].

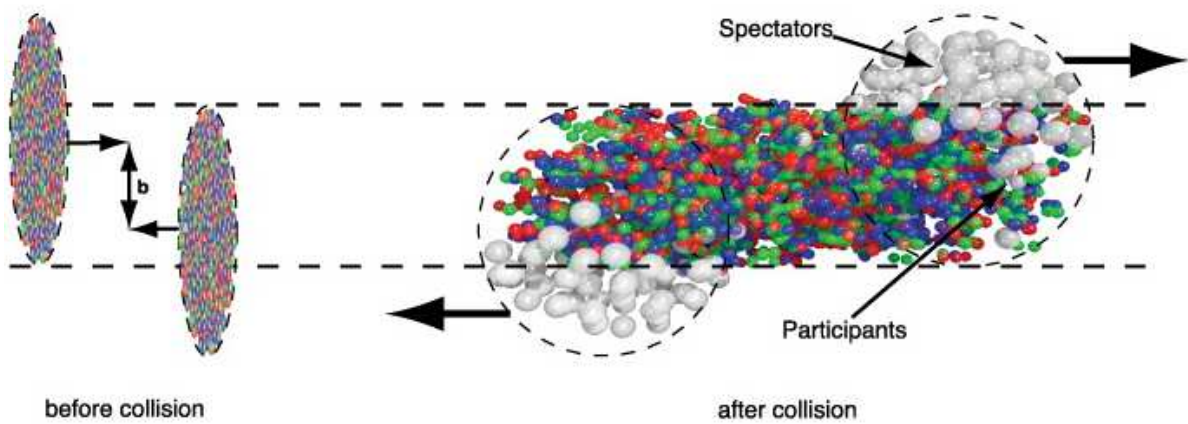


Figura 1.1: Simulação de um processo de colisão de núcleos (Retirado da referência [12]).

A Figura 1.2 mostra o relacionamento de diversas propriedades e grandezas envolvidas em uma colisão de núcleos (centralidades, número de partículas participantes, energia, número de partículas carregadas, seção de choque, ...) para uma colisão Au+Au, com $\sqrt{s} = 200$ GeV. Foi utilizado o HIJING [13].

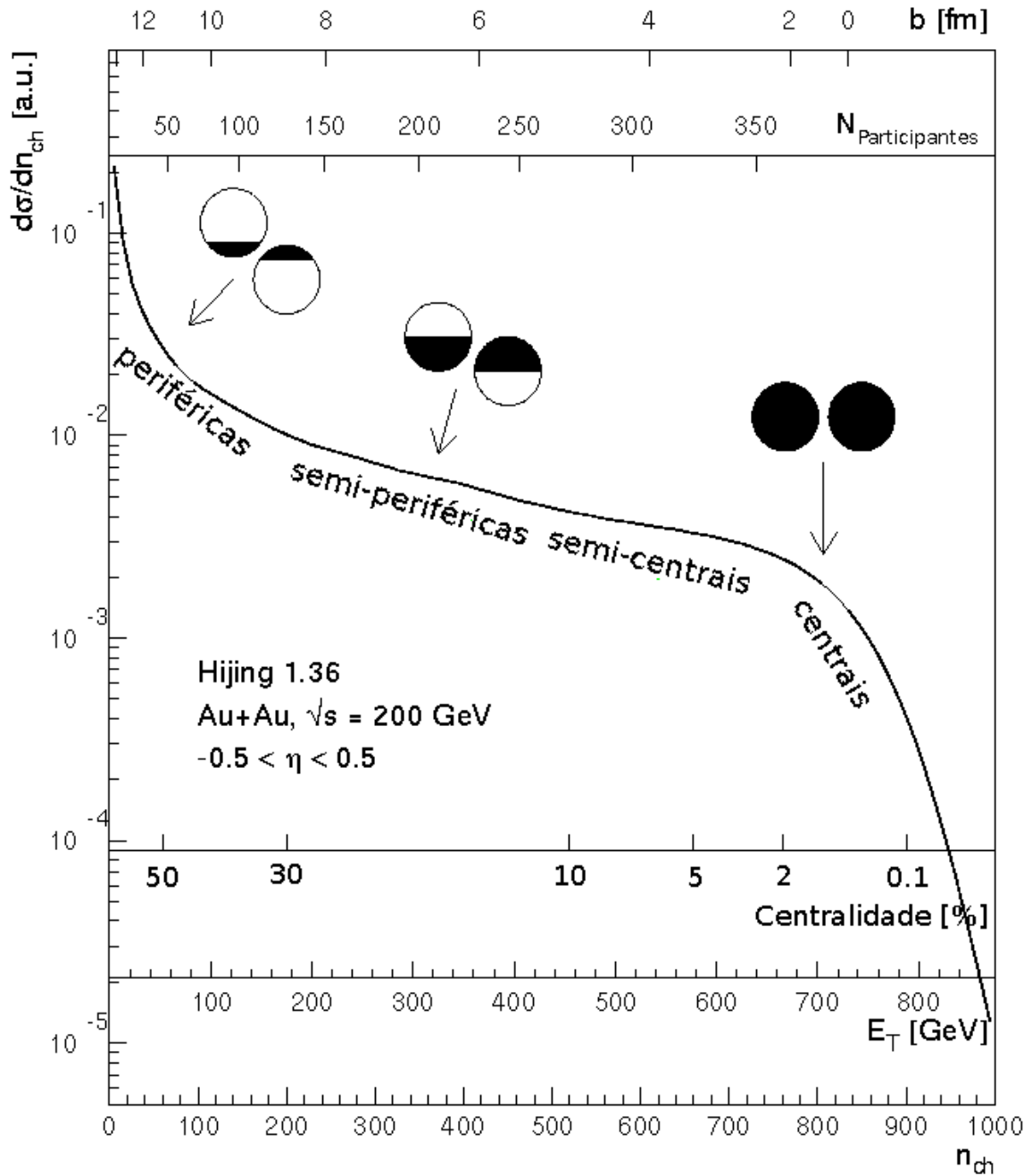


Figura 1.2: Relacionamento de diversas propriedades e grandezas envolvidas em uma colisão de núcleos (Figura modificada da referência [14]).

1.2 Crômodinâmica Quântica - QCD

A Cromodinâmica Quântica (QCD²) é a teoria que descreve como interagem os pártons, formados por quarks e glúons que, por sua vez, são partículas elementares.

²sigla, em inglês, para *Quantum ChromoDynamics*

A QCD faz parte de um modelo mais geral conhecido como *Modelo Padrão* que é o modelo usado para as partículas elementares (não apenas os pártons) e as suas interações. Para cada tipo de interação há um designado tipo de carga. O caso mais familiar é o das interações eletromagnéticas, onde temos a carga elétrica. Já para a interação forte, a forma com que essas partículas interagem umas com as outras depende da carga *cor* das partículas envolvidas. Assim como no eletromagnetismo a interação entre duas partículas eletricamente carregadas é mediada pelos bósons fótons, na QCD, o acoplamento entre dois pártons *coloridos* é mediado pelos bósons de gauge chamados de *glúons*. Uma característica da QCD que difere das demais teorias que descrevem interações entre partículas é o fato de que os próprios glúons interagem com eles mesmos, pelo fato deles serem *coloridos* [8]. A interação entre glúons está relacionada com uma propriedade da QCD que confina os quarks dentro dos hádrons, conhecida como *confinamento*.

A propriedade de *confinamento* diz que um quark em um méson, ou um bárion, nunca poderá escapar de outros quarks. A QCD diz que para que um quark se distancie mais e mais de outro quark é necessário conceder mais energia ao sistema, uma vez que força não desaparece. Há uma determinada distância, haverá bastante energia no intenso campo *crômoelétrico* entre os quarks para formar um novo par de quark-antiquark ($q - \bar{q}$). Esse efeito acaba eliminando a possibilidade de se estudar as propriedades de um quark livre, i.e., não-interagente, isolado [15]. O fato de se observar apenas partículas sem *cor* na natureza corrobora com esta propriedade. As medidas que sustentam a QCD são todas realizadas de maneira indireta devido à impossibilidade de se observar os pártons diretamente [8].

Apesar do fenômeno de confinamento da QCD, é possível obter o desconfinamento dos pártons ao submetê-los a condições extremas de temperatura e/ou pressão (ou densidade). Isso se deve a outra propriedade da QCD, conhecida como *liberdade ass-*

intótica [15] [16]. Esta propriedade prevê que quando dois quarks estão bastantes próximos um do outro, a interação entre eles é muito pequena, ao ponto de poderem ser tratados como livres. Há especulações teóricas que mostram o desconfinamento dos quarks nos instantes iniciais do universo, logo após o *Big Bang* (altas temperaturas) [17] e no interior das estrelas de nêutrons (altas densidades) [18].

1.3 Transição de Fase da QCD

Aproximadamente na mesma época em que a propriedade de *liberdade assintótica* da QCD foi formulada, os pesquisadores Collins e Perry [19]³ propuseram que para densidades muito altas, $\rho \gg \rho_0$ - onde ρ_0 é a densidade nuclear -, e/ou altas temperaturas, $T \gg m_\pi$ - onde m_π é massa do píons -, a matéria fortemente interagente deve-se comportar como um gás (ideal) de quarks e glúons em equilíbrio térmico [10]. Este estado da matéria nuclear é chamado de Plasma de Quark-Glúon (QGP⁴). A Figura 1.3 retrata a diferença entre a matéria ordinária e o QGP.

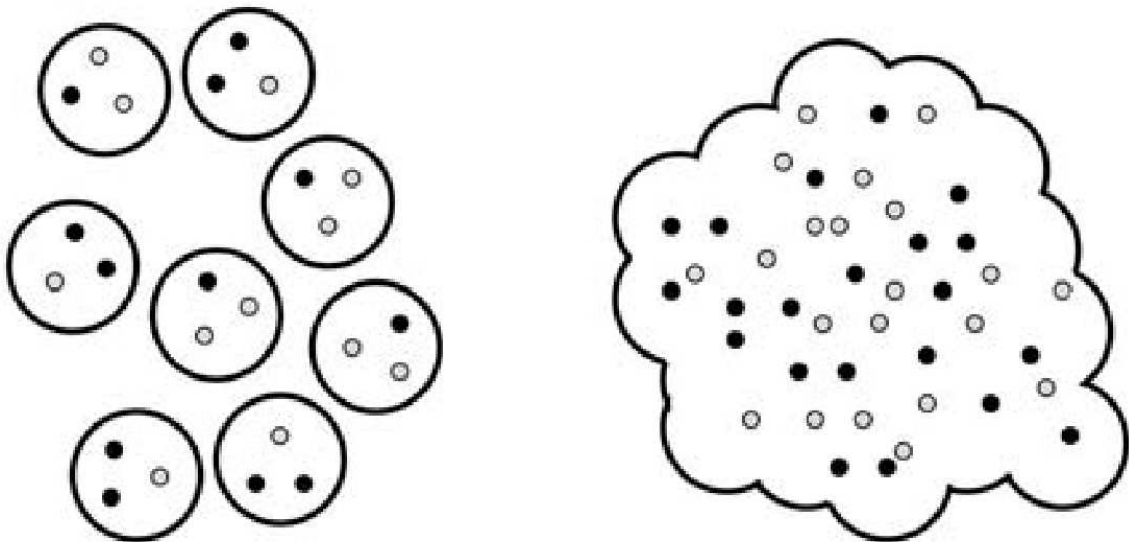


Figura 1.3: Na matéria ordinária (esquerda), os quarks estão confinados em hádrons. No QGP os quarks não se encontram confinados dentro dos hádrons, mas livres. Retirado de [22].

³Collins e Perry foram motivados pelo trabalho [20] [21] e pelo trabalho sobre o espectro térmico hadrônico de Hagedorn [1]

⁴Em inglês, *Quark-Gluon Plasma*

Basicamente, o que ocorre é que, com a matéria hadrônica quente e densa, as interações entre quarks se tornam mais fortes e as típicas transferências de momento se tornam muito grandes em curtas distâncias. Em uma determinada temperatura crítica T_c é esperado que os quarks se tornem desconfiados, devido à *liberdade assintótica* da QCD. Em tal estado muito denso e quente de quarks, essencialmente espera-se que quarks e glúons não interajam mais fortemente. Cálculos utilizando QCD na rede (LQCD⁵) mostram um forte aumento da densidade de energia ε em função de T , e um mais modesto crescimento para a pressão P , motivando a ideia da transição de fase da matéria hadrônica, ou confinada, para o estado desconfiado [8]. A Figura 1.4 mostra a densidade da energia como função da temperatura, calculada utilizando QCD na rede. Cálculos recentes indicam que a transição de fase ocorre com $T_c \approx 150 - 175$ MeV, o qual corresponde a uma densidade de energia $\varepsilon_c = 0,3 - 1,0 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ [23].

⁵Em inglês, *Lattice QCD*

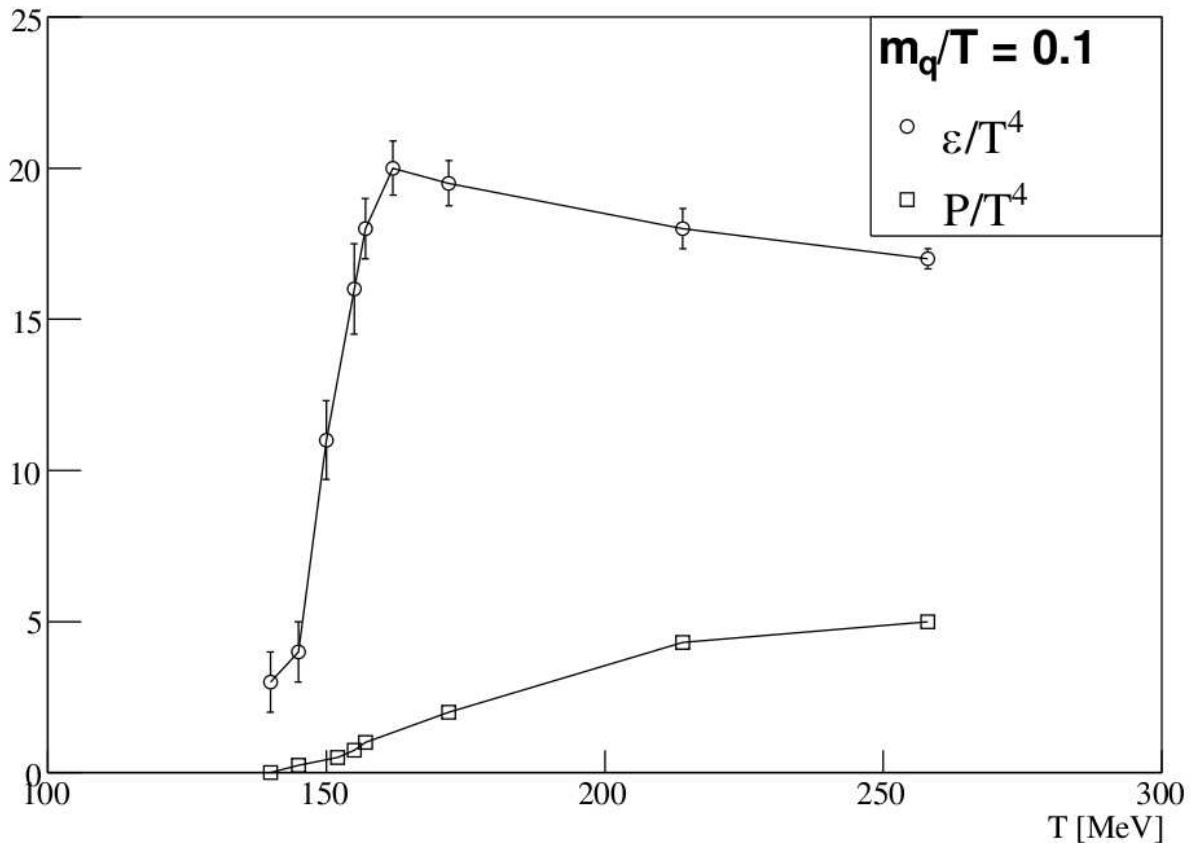


Figura 1.4: Cálculos da densidade de energia ϵ e da pressão P como função da temperatura T utilizando QCD na rede [24] (quarks u e d). A temperatura crítica T_c aqui é ≈ 150 MeV. Retirado de [8].

A transição de fase da matéria pode dizer muito sobre o relativamente desconhecido QCD [8]. Uma forma de estudar a ocorrência da transição de fase é através da colisão de hádrons. A ideia é basicamente colidir nucleons, ou núcleos, para formar um *fireball* onde os quarks estão essencialmente livres, podendo até virar um QGP.

Uma alternativa experimental para se obter o estado desconfiado da matéria, é através de colisões entre íons pesados ($A \gg 1$, onde A é o número atômico do íon) relativísticos, i.e., velocidades próximas a da luz. Neste ambiente controlado experimentalmente, espera-se alcançar densidades de energias ϵ , temperaturas T e densidades da matéria ρ acima dos valores críticos para a formação do QGP, com o propósito de se investigar os regimes de acoplamentos fracos e de interações fortes. A Figura 1.5, representação do diagrama de fase da matéria nuclear, apresenta as

prováveis regiões de transição para os diferentes valores de temperatura e densidade bariônica. Para altas densidades e temperaturas próximas de zero é esperada a fase do não confinamento [25].

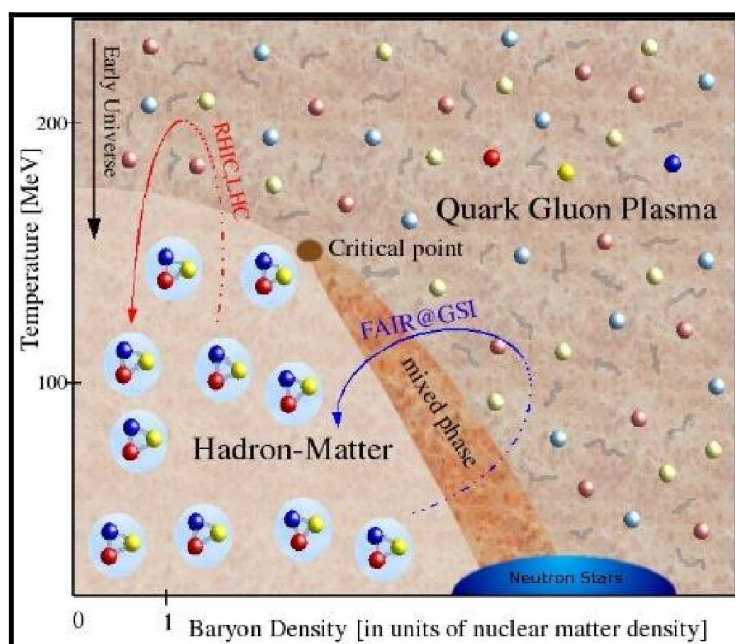


Figura 1.5: Esquema do diagrama de fase da matéria nuclear, dado pela Temperatura x Densidade bariônica. A possibilidade da nova fase, QGP, pode ser observada quando há um aumento da temperatura (que pode ser alcançada artificialmente nos aceleradores de íons a altas energias) ou aumento da densidade bariônica (encontrada nas estrelas de nêutrons) [26]. Retirado de [25].

1.3.1 Evolução Temporal

Pode-se dividir por etapas os processos envolvidos na colisão de íons pesados, como mostra a Figura 1.6. Com a aceleração dos íons a velocidades próximas a da luz, esses passam a assumir a forma de discos, devido à efeitos relativísticos. O primeiro estágio da colisão é conhecido como a fase do *pré-equilíbrio*. Nesta etapa, que envolve a chamada *hard physics*, ocorre as colisões inelásticas entre os pártons com altos valores de momento transferido. Como a região de interação é pequena, com a colisão, há um grande aumento na temperatura, chegando a valores críticos para a formação do QGP. Na etapa da formação do QGP, o sistema formado por quarks e glúons, que estão no estado desconfinado, se expande e ao mesmo tempo

produz grande quantidade de pares. Dessa forma, a densidade de quarks se mantém aproximadamente constante durante a expansão, com a maior parte da energia sendo consumida na produção $q - \bar{q}$. Com isso, a temperatura do sistema se mantém constante num valor crítico. A etapa subsequente é caracterizada por uma fase mista, onde há uma considerável diminuição da densidade de sistema, e com isso alguns quarks já não possuem energia suficiente para permanecerem desconfiados, ocorrendo então o efeito de hadronização, i.e., confinamento do pártons. Com o processo de hadronização, há o surgimento das partículas como os hádrans, léptons e fótons. São as partículas geradas através do processo de hadronização que são, de fato, detectadas pelos experimentos.

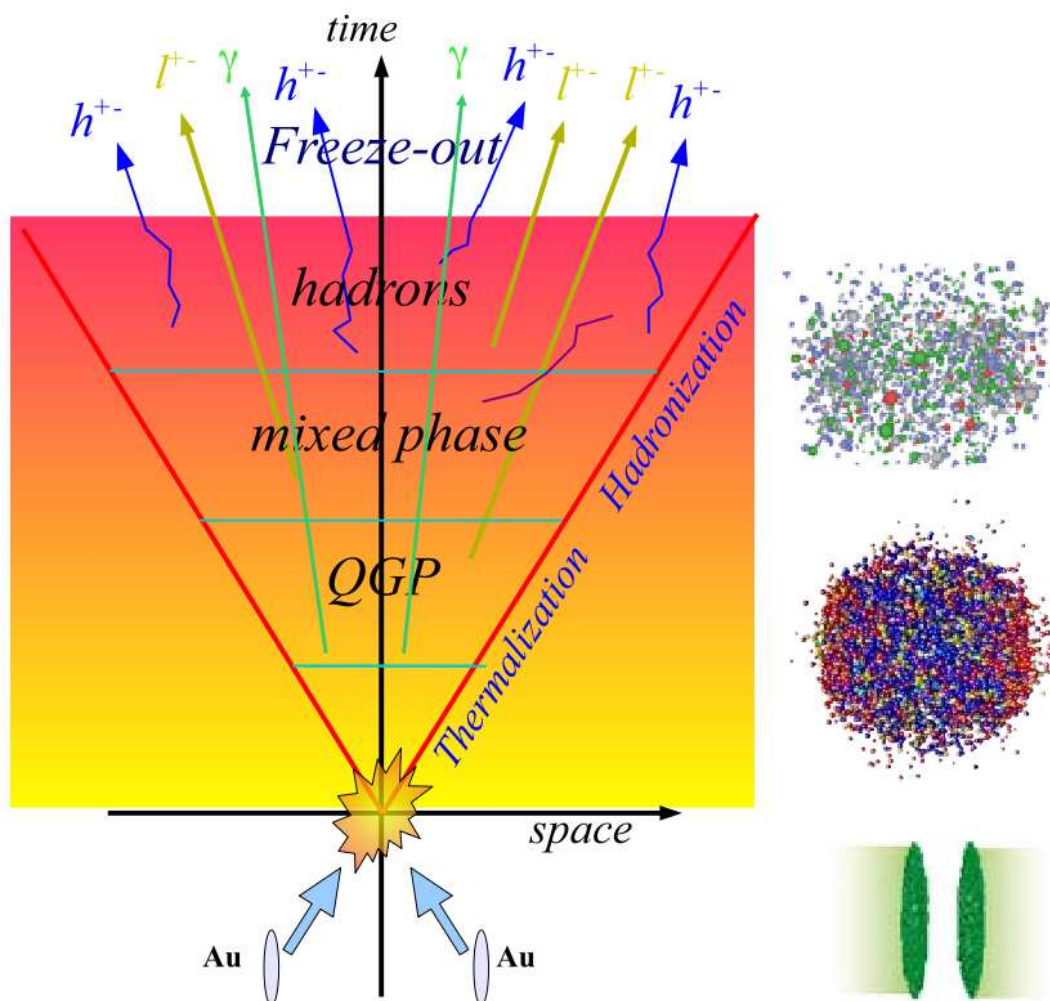


Figura 1.6: Evolução temporal do processo de colisão. Dois núcleos se aproximam um do outro, observem que os núcleos estão achatados devido à efeitos relativísticos; logo após a colisão ocorre a formação do QGP, como uma onda de choque atingindo a matéria nuclear; a etapa posterior é marcada pela expansão e esfriamento do QGP, e pela hadronização. Retirado de [27].

1.4 Organização deste trabalho

Devido à grande complexidade inerente no processo de espalhamento após as colisões, têm-se recorrido a técnicas computacionais baseadas em modelos que fazem uso das técnicas de Monte Carlo para explicar os dados experimentais. A vantagem de tal abordagem é a possibilidade de se obter as distribuições de probabilidades de vários estágios no processo, evitando a complexidade microscópica. Os modelos utilizados são implementados com todos os aspectos conhecidos da QCD. Já os as-

pectos desconhecidos, como a hadronização, são modelados fenomenologicamente [28]. Entretanto, não há um entendimento fundamental da matéria [29].

Uma forma alternativa para entender o processo de espalhamento é estudar todo o processo do ponto de vista macroscópico, i.e., sem levar em conta as interações microscópicas entre os pártons, governadas pela QCD. Os pioneiros neste tipo de abordagem foram Enrico Fermi [30], Lev Landau e Isaak Pomeranchuk [31], seguidos, posteriormente, por Hagedorn [1], que apresentou um modelo estatístico mais consistente e bastante difundido para a descrição de importantes características Termodinâmicas. No **Capítulo 2**, veremos as vantagens de se utilizar a Mecânica Estatística e a Termodinâmica para estudar sistemas com este ponto de vista, além de apresentamos algumas formulações nesta área. No **Capítulo 3** é mostrado os passos desenvolvidos por Hagedorn na formulação da sua teoria e no **Capítulo 4** é apresentada uma generalização da teoria de Hagedorn para os casos que a primeira apresenta resultados não coerentes. Após a descrição das teorias utilizadas para o estudo de tais processos, apresentamos alguns resultados no **Capítulo 6** das previsões de tais teorias nos dados experimentais, onde a metodologia é descrita no **Capítulo 5**. Por fim, no **Capítulo 7** é apresentada uma sumarização dos resultados deste trabalho, juntamente com as considerações finais.

2 *Modelos Estatísticos*

Historicamente, a Mecânica Estatística, considerada uma junção da mecânica (clássica, relativística especial ou geral, quântica, ou qualquer outra) com teoria de probabilidades [32], originou-se com a tentativa de descrever as propriedades térmicas da matéria em termos das suas partículas constituintes. Um exemplo de notável sucesso desta ciência está no papel fundamental que ela executou no desenvolvimento da Mecânica Quântica [33].

As raízes da Mecânica Estatística guiam à Termodinâmica, pois a primeira tem como um de seus objetivos explicar e/ou explorar conceitos termodinâmicos em termos de uma teoria microscópica [34]. Em outras palavras, dar uma base microscópica para a Termodinâmica. Já a Termodinâmica possui a tarefa de definir quantidades físicas (*quantidades de estado*) apropriadamente. Estas quantidades caracterizam as propriedades macroscópicas da matéria, i.e., *macroestado*, de uma forma um tanto não-ambígua quanto possível. A Termodinâmica relaciona-as através das *funções (ou equações) de estado* [35], que por sua vez tem o relacionamento descrito pelas *leis da Termodinâmica*, na busca pelo significado, i.e., pela informação que estas quantidades pode nos fornecer sobre o sistema. Uma analogia interessante é a da descrição das propriedades do sistema macroscópico pelas funções de estado, possibilitando quantificar o estado de uma partícula através de suas coordenadas e momentos. Nessa

analogia, as quantidades de estado assumem os papéis de coordenadas termodinâmicas. As mais familiares coordenadas termodinâmicas são aquelas que estão relacionadas com o trabalho mecânico, tais como a pressão e o volume (no caso de um fluido), tensão de superfície e área (para uma película), tensão e comprimento (para um fio), campo elétrico e polarização (para um dielétrico), dentre outras [33].

Uma descrição mais formal da Termodinâmica é dada em [33], que a define como sendo uma

descrição fenomenológica das propriedades de sistemas macroscópicos em equilíbrio térmico

onde o termo *descrição fenomenológica* está relacionado com o fato das leis da Termodinâmica serem axiomáticas, i.e., baseadas em um número de observações empíricas e com uma coerente estrutura lógica e matemática construída com base nestas observações. Essa estrutura lógica conduz a uma variedade de conceitos úteis e a um testável relacionamento entre diversas quantidades. As leis da Termodinâmica podem ser justificadas apenas por uma mais fundamental teoria (microscópica) da natureza. Como exemplo, a Mecânica Estatística tenta obter estas leis partindo de equações da mecânica clássica ou quântica para o conjunto de partículas [33]. O fato dos conceitos da Termodinâmica serem bastante gerais e extensos faz com que sejam intensamente aplicados a muitos campos da ciência [35].

As funções de estado são bem definidas apenas quando o sistema está em equilíbrio, i.e., quando as suas propriedades não se alteram apreciavelmente com o tempo no intervalo de interesse (tempo de observação). A dependência com o tempo de observação torna o conceito de equilíbrio subjetivo. Como exemplo, uma janela de vidro está em equilíbrio como um sólido por muitas décadas, mas em movimento como um fluido sob um escala de tempo de um milênio. Em outro extremo, é perfeitamente legí-

timo considerar o equilíbrio entre a matéria e a radiação no início do universo durante os primeiros minutos do *Big Bang* [33]. A evolução temporal dos sistemas em direção ao equilíbrio é governada pela *segunda lei da Termodinâmica*.

Neste trabalho iremos apresentar aspectos que envolvem a estatística dos processos físicos relacionados à dinâmica da reação. Para este fim, introduzimos uma breve descrição da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) e a ideia Termodinâmica da entropia. Logo após, apresentamos um formalismo que generaliza a teoria de BG. Esse formalismo surgiu com o objetivo de estender o domínio e a aplicabilidade da estatística de BG em situações de impossibilidade de verificação dos postulados e em sistemas onde as previsões da mecânica de BG apresentam discordância com a realidade.

2.1 Distribuições de Probabilidades

As leis termodinâmicas são baseadas nas observações de estruturas macroscópicas e encapsulam suas propriedades térmicas. Por outro lado, a matéria é composta de átomos e moléculas cujos movimentos são governados por leis mais fundamentais, sendo estas das mecânicas Clássica ou Quântica. Em princípio deveria ser possível derivar o comportamento de uma estrutura macroscópica a partir do conhecimento de seus componentes, i.e., seus constituintes. Na verdade, descrever completamente a dinâmica do grande número de partículas envolvidas é uma árdua tarefa.

A essência da Mecânica Estatística reside na análise estatística de modelos os quais se aproximam da realidade física. Esses modelos constam com algum tipo de *distribuição de probabilidades*, que é utilizado para calcular as médias estatísticas ou os valores esperados de determinadas quantidades físicas ou estatísticas. Esta distribuição de probabilidades pode depender de um pequeno número de parâmetros

os quais podem ser estimados através de dados experimentais [34]. Para discutir as propriedades deste sistema macroscópico, não é necessário o total conhecimento do comportamento de suas partículas constituintes. Tudo o que é requerido é a probabilidade das partículas estarem em um particular estado microscópico. Portanto, a Mecânica Estatística é inerentemente uma descrição probabilística do sistema [33].

2.1.1 Distribuição de Maxwell

No intuito de mostrarmos a importância que a Mecânica Estatística desempenha no estudo de sistemas físicos do ponto de vista macroscópico, iremos tomar a distribuição de Maxwell e aplicá-la a fim de obtermos algumas das propriedades de um determinado sistema. O número de moléculas em um metro cúbico de ar é da ordem de 10^{25} moléculas. Seria uma árdua, se não impossível, tarefa tentar conhecer o estado de cada uma destas partículas. Entretanto, ao tratar o sistema com o ponto de vista macroscópico pode-se utilizar, como ferramenta, a poderosa e econômica Mecânica Estatística para encontrar quantidades e variáveis físicas como, e.g., as velocidades das partículas. Consideremos como exemplo um gás composto por partículas idênticas com massa m , onde m é massa para cada partícula. Através da densidade de probabilidade podemos encontrar uma boa aproximação da velocidade v das partículas neste gás. A conhecida distribuição de Maxwell tem a forma

$$f(v) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2}, \quad (2.1)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (2.2)$$

sendo T a temperatura e k_B a constante de Boltzmann que tem a dimensão de energia por temperatura [J/K]. Será considerado neste trabalho $k_B = 1$, i.e., $\beta = 1/T$. A equação 2.1 está normalizada, i.e.,

$$\int_0^\infty dv f(v) = 1. \quad (2.3)$$

Se derivarmos a equação 2.3, que é uma constante, com relação à β , teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^{\infty} dv f(v) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle &= \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} T, \end{aligned} \quad (2.4)$$

mostrando que a média da energia cinética é proporcional à temperatura T . Este resultado é um caso particular da *lei de equipartição*. A segunda parte da equação 2.4 é bastante utilizada, no contexto experimental, para a definição da temperatura T [33]. A representação gráfica da distribuição de Maxwell, para $\beta m = 1$, pode ser conferida na Figura 2.1.

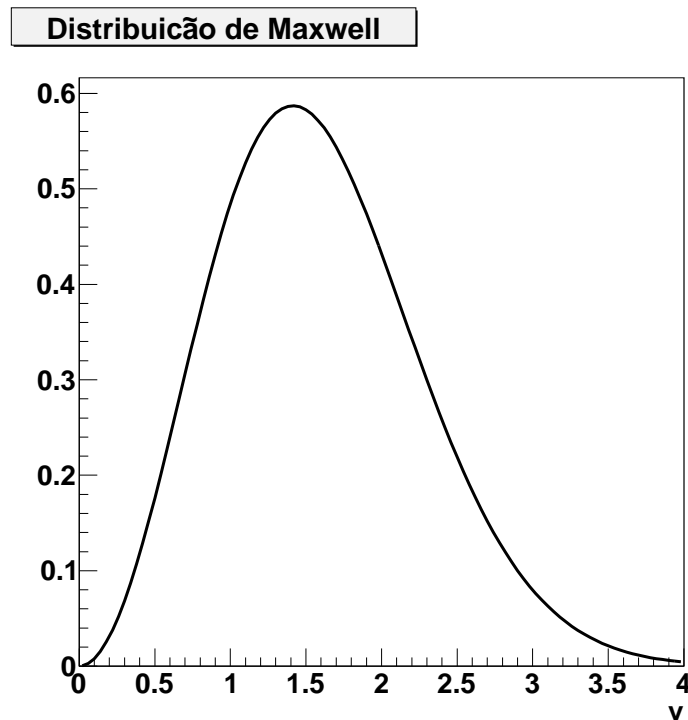


Figura 2.1: Distribuição de Maxwell com $\beta m = 1$.

2.1.2 Distribuições de Probabilidades no Espaço de Fase

Boltzmann generalizou a distribuição de Maxwell introduzindo a distribuição de probabilidades no espaço de fase. Como vimos anteriormente, a distribuição de Maxwell considerou apenas um parâmetro, a velocidade das moléculas no gás. Pode-se obter uma melhor e mais geral distribuição ao se considerar dois parâmetros: a

posição e o momento das moléculas no gás. Podemos então tomar uma distribuição de probabilidades $f(q, p)$ no espaço de fase Γ , onde $f(q, p)$ é uma função positiva que depende das coordenadas q_1, q_2, \dots, q_N e dos momentos p_1, p_2, \dots, p_N de todas as N partículas do sistema. A normalização é dada por

$$\frac{1}{N!h^{3N}} \int_{\Gamma} dq dp f(q, p) = 1, \quad (2.5)$$

sendo h uma constante com as dimensões do produto da posição pelo momento. Uma frequente escolha para valor de h é o da constante de Plank [33].

Através de qualquer distribuição de probabilidade, pode-se calcular o valor esperado de alguma outra função $A(q, p)$ no espaço de fase da seguinte forma

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N!h^{3N}} \int_{\Gamma} dq dp f(q, p) A(q, p). \quad (2.6)$$

2.2 Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs

Na segunda metade do século XIX, Boltzmann e Gibbs desenvolveram uma estatística que, com notável sucesso, tem sido aplicada a diversos sistemas. A distribuição de probabilidades de Boltzmann-Gibbs tem executado um papel central nos fundamentos da Mecânica Estatística [33], e tem a específica forma

$$f(q, p) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(q, p)}, \quad (2.7)$$

onde $Z(\beta)$, denominada *função de partição*, normaliza a função $f(q, p)$ e é dado por

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!h^{3N}} \int_{\Gamma} dq dp e^{-\beta H(q, p)}, \quad (2.8)$$

onde, como antes, $\beta = 1/T$ e $H(q, p)$ é o hamiltoniano. $H(q, p)$ equivale a energia total de um sistema onde as partículas tem as posições q_1, q_2, \dots, q_N associadas com os momentos p_1, p_2, \dots, p_N . Um sistema descrito pela distribuição de Boltzmann-Gibbs (equação 2.7) é dito como pertencente ao *ensemble canônico* [33].

Um dos principais aspectos dessa teoria de Boltzmann–Gibbs é a apresentação da entropia com uma abordagem probabilística na forma

$$S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (2.9)$$

com i representando os microestados de um sistema, p_i a probabilidade, k_B a Constante de Boltzmann e W a quantidade de microestados compatíveis com o estado microscópico do sistema isolado. A equação 2.9, conhecida como *entropia de Boltzmann–Gibbs–Shannon*, satisfaz algumas propriedades matemáticas que mostram que a entropia é *não-negativa, côncava e extensiva* [36].

Quando levamos em conta que a probabilidade é mesma para os microestados, i.e., $p_i = \frac{1}{W}$, podemos expressar a ideia Termodinâmica da entropia como

$$S_{BG} = -k \ln W, \quad (2.10)$$

A equação 2.10 está entre as equações fundamentais da Mecânica Estatística, e ela é conhecida na literatura como *princípio de Boltzmann*.

Embora o *princípio de Boltzmann* se refira a estados microscópicos, não é possível implementar cálculos para derivar este princípio da própria dinâmica microscópica [36]. Por mais que essa teoria não seja derivada de algo mais fundamental, em sistemas em que interações de curto alcance temporal e espacial são dominantes ela tem sido bastante útil.

2.2.1 Aspectos Matemáticos

Um dos principais aspectos da entropia de BG é a aditividade. Como exemplo, tomemos a forma da entropia do sistema $S(A, B)$ composto por dois subsistemas A e B , sendo $S(A)$ e $S(B)$ a entropia destes subsistemas, respectivamente. A entropia do sistema $S(A, B)$ é determinada pela lei de composição, sendo a soma das entropias

dos subsistemas, ou seja,

$$S(A, B) = S(A + B) = S(A) + S(B). \quad (2.11)$$

A equação 2.11 pode ser generalizada para o caso de N subsistemas iguais

$$S\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = S(NA) = NS(A), \quad (2.12)$$

onde $A_i = A$. Há ainda o caso mais geral da entropia, o caso de N subsistemas diferentes,

$$S\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N S(A_i). \quad (2.13)$$

Outra propriedade que a forma da entropia de BG conduz é o da extensividade. Um sistema propriamente extensivo com N subsistemas possui um comportamento assintótico tal que o conceito de extensividade pode ser relacionado na seguinte forma:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S(NA)|}{N} < \infty. \quad (2.14)$$

A equação 2.14 mostra que existe um fator de proporcionalidade finito entre $|S(N)|$ e N . De forma mais específica, a aditividade em relação a uma dada lei de composição, implica em extensividade, onde temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S(NA)|}{N} = S(A), \quad (2.15)$$

ou seja, pode-se considerar que um sistema extensivo é assintoticamente aditivo [36].

2.3 Mecânica Estatística Não-Extensiva

Apesar da entropia de BG se mostrar bem sucedida para uma enorme gama de sistemas físicos, o fato de ela desprezar as interações entre elementos de subsistemas diferentes conduz, em alguns casos de sistemas que possuem interações de longo-alcance, a resultados incoerentes. Neste caso, interações de elementos pertencem

centes a diferentes subsistemas são tratados como interações dentro de cada subsistema. Nestes tipos de sistemas, que, por vezes, são categorizados como sistemas complexos, as previsões da estatística de BG apresentam desvios e as características dinâmicas estão frequentemente associadas a não-ergodicidade. A ocupação de fase não-equiprovável também pode conduzir a estruturas não-triviais que invalidam hipóteses relacionadas com a mecânica de BG. Recentemente, um considerável esforço tem sido feito para estender a o formalismo da física estatística para além dos limites estabelecidos por Gibbs em seu livro *Princípios elementares na Mecânica Estatística*, de 1902 [37]. A tradicional física estatística foca em sistemas com muitos graus de liberdade, e o formalismo torna-se exato no limite termodinâmico. Uma motivação para ir além do formalismo padrão é o atual interesse em sistemas relativamente pequenos [34].

Há muitos sistemas que não são bem descritos pela estatística de BG. No caso das colisões de hádrons com altas energias, a interação de longo alcance é uma usual interpretação do fenômeno de intermitência. Este fenômeno é dado pela grande flutuação da densidade de partículas, e está presente na produção hadrônica. As interações de longo alcance podem ocorrer em muitas situações, especialmente em processos onde o volume de interação é da ordem da dimensão dos próprios hádrons, resultando assim em uma alta densidade hadrônica [28].

Portanto, com o objetivo de tratar estes sistemas anômalos, uma maneira alternativa para descrever a estatística de tais sistemas se mostrou completamente plausível. Para este fim, foi necessário elaborar outras entropias físicas (em acréscimo à de BG), para os quais a hipótese simplificadora de ergodicidade e/ou independência (no sentido de ausência de correlações) não fosse possível [36].

2.3.1 Formulação Não-Extensiva

Em 1988 Tsallis propôs [3], no intuito de estender o domínio de aplicação da estatística de BG para os sistemas onde as usuais funções eram violadas, uma Mecânica Estatística baseada em um formalismo não-extensivo. Neste formalismo, a função exponencial foi generalizada para uma função denominada *q-exponencial*

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/1-q} \quad (q \in \mathfrak{R}), \quad (2.16)$$

onde q é um parâmetro real também conhecido como *índice entrópico*. Pode-se verificar que a equação 2.16, além de ser não negativa e monotonamente crescente, tem as seguintes características [5] (ver Figura 2.2):

- i) Para $q \rightarrow 1 \Rightarrow e_q^x = e^x \quad (\forall x)$;
- ii) Para $q > 1$, possui a característica de uma lei-de-potência quando $x \rightarrow \infty$ e diverge em $x = \frac{1}{q-1}$;
- iii) Para $q < 1$ tem um ponto de corte em $x = \frac{-1}{1-q}$, abaixo do qual é definido como sendo identicamente zero;
- iv) Se $x \rightarrow 0$, temos que: $e_q^x \sim 1 + x \quad (\forall q)$.

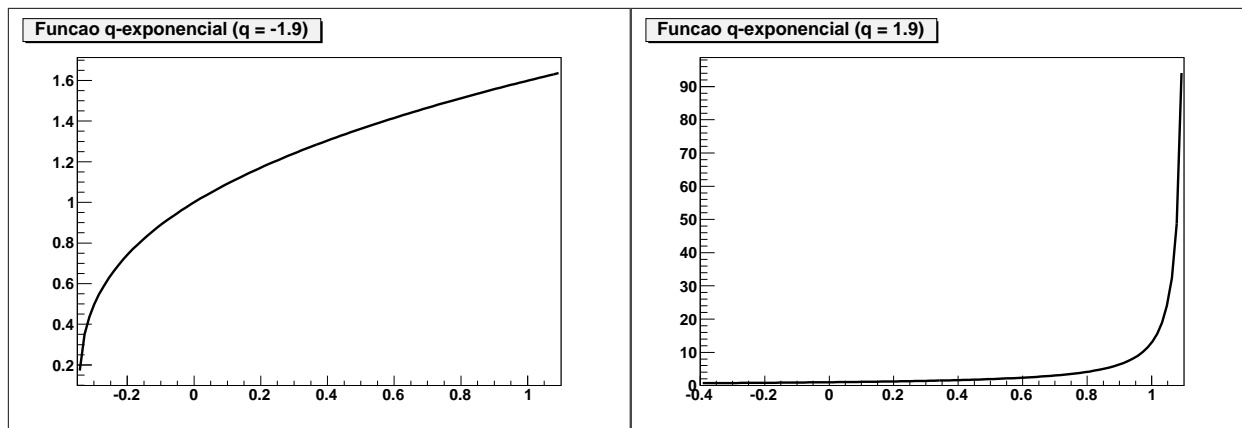
O inverso da função *q-exponencial* é o *q-logaritmo*, que é

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (q \in \mathfrak{R}). \quad (2.17)$$

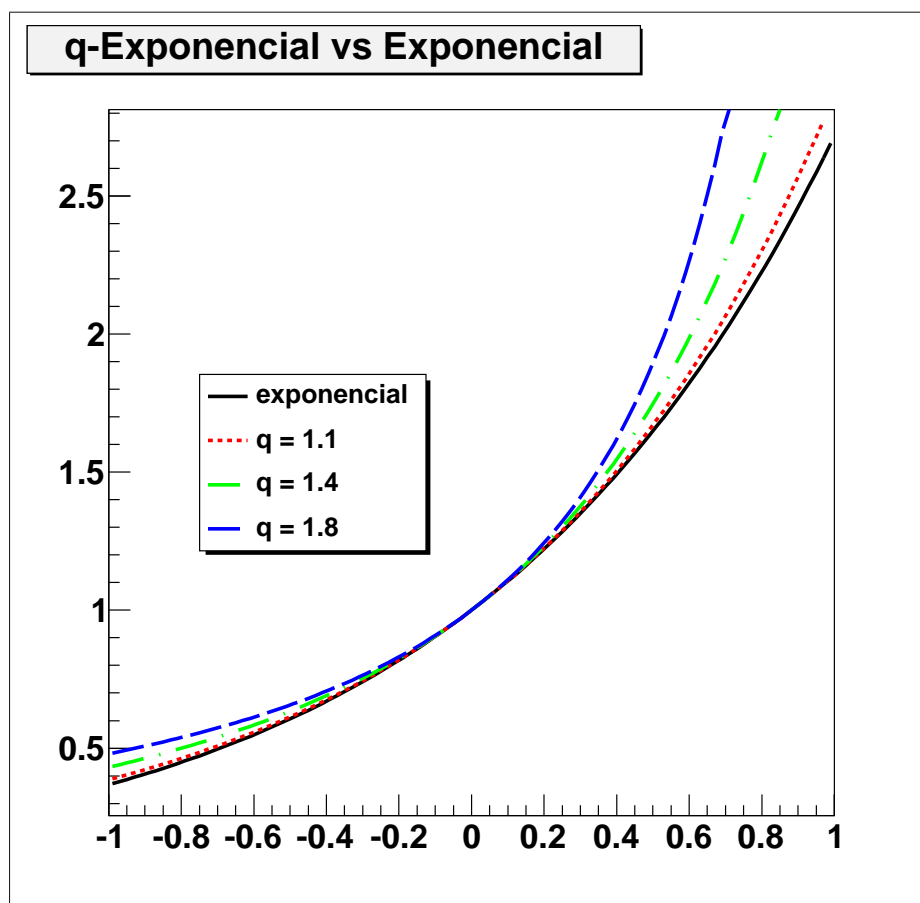
Utilizando o mesmo raciocínio usado para a equação 2.16, pode-se verificar que $\ln_1 x = \ln x \quad (\forall x)$ e se $x \rightarrow 1 \Rightarrow \ln_q x \sim x - 1 \quad (\forall x)$. A entropia nessa formulação será dada pela fórmula

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad (q \in \mathfrak{R}), \quad (2.18)$$

onde k é uma constante positiva (que, sem perda de generalidade, assumimos como igual a 1), W é o número total de configurações microscópicas e $\{p_i\}$ é um conjunto de



(a) q -exponencial com $q = -1.9$. Ponto de corte em $x \approx -0,345$ (b) q -exponencial com $q = 1.9$. Diverge em $x \approx 1.1111$



(c) exponencial

Figura 2.2: Comparações das funções q -exponencial e exponencial.

probabilidades associadas $\{\sum_{i=1}^W p_i = 1\}$. A expressão contínua pode ser obtida com a fórmula

$$S_q = \frac{1 - \int dx p(x)^q}{q-1}, \quad (2.19)$$

enquanto que a expressão quântica é

$$S_q = \frac{1 - \text{Tr} \rho^q}{q-1}, \quad (2.20)$$

sendo ρ a matriz densidade.

No limite em que $q \rightarrow 1$, a entropia formulada por Tsallis, se torna na bem conhecida entropia de BG, ou seja,

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_{BG}, \quad (2.21)$$

mostrando-se uma possível generalização da Mecânica Estatística de BG.

A propriedade de não-extensividade pode ser exemplificada ao obter, e.g., o valor da entropia para dois sistemas independentes A e B , onde $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B \forall (i, j)$, que nos dará

$$S_q(A, B) = S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (q-1)S_q(A)S_q(B). \quad (2.22)$$

Os casos em que $q < 1$ correspondem a *superextensividade* de S_q , quando $q > 1$, *subextensividade* de S_q [5]. Tanto para *superextensividade* quanto *subextensividade* $S_q \geq 0$.

É conhecido que o valor esperado de uma determinada variável pode ser obtido com a equação

$$\langle (\dots) \rangle \equiv \sum_{i=1}^W p_i (\dots). \quad (2.23)$$

Na Mecânica Estatística Não-Extensiva, pode-se determinar o valor q -esperado normalizado com a fórmula

$$\langle \langle (\dots) \rangle \rangle_q \equiv \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q (\dots)}{\sum_{i=1}^W p_i^q} \quad (2.24)$$

onde pode-se verificar que:

- $\langle\langle(\dots)\rangle\rangle_1 = \langle(\dots)\rangle_1 = \langle(\dots)\rangle$;
- $\langle\langle(\dots)\rangle\rangle_q = \frac{\langle(\dots)\rangle_q}{\langle 1 \rangle_q}$

Para o ensemble canônico de um sistema Hamiltoniano em equilíbrio térmico pode-se otimizar S_q restringindo $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ e $\langle\langle\varepsilon_i\rangle\rangle_q = U_q$, onde $\{\varepsilon_i\}$ são os auto-valores do sistema Hamiltoniano e U_q é a energia interna generalizada. Tsallis mostra em [4] que

$$p_i = \frac{e_q^{-\beta(\varepsilon_i - U_q)}}{Z_q} \propto \frac{1}{[1 + (q-1)\beta(\varepsilon_i - U_q)]^{\frac{1}{q-1}}} \propto \frac{1}{[1 + (q-1)\beta'\varepsilon_i]^{\frac{1}{q-1}}}, \quad (2.25)$$

sendo β o parâmetro de Lagrange, $Z_q \equiv \sum_{j=1}^W e_q^{-\beta(\varepsilon_j - U_q)}$ e β' uma função bem definida de β . Para $q = 1$ a equação 2.25 volta a ter o peso de BG. Quando $\beta > 0$ e a energia ε_i aumenta, a probabilidade decai como uma lei-de-potência para $q > 1$ e exibe um ponto de corte para $q < 1$.

Analogamente, ao se otimizar S_q no caso contínuo (equação 2.19), com as condições $\int dx p(x) = 1$ e $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_q = \sigma^2$ ($\sigma > 0$), obtém a distribuição Gaussiana q-generalizada [5], a saber:

$$p_q(x) = \frac{e_q^{-\bar{\beta}x^2}}{\int dy e_q^{-\bar{\beta}y^2}} \propto \frac{1}{[1 + (q-1)\bar{\beta}x^2]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (q < 3), \quad (2.26)$$

onde $\bar{\beta}$ pode estar direta e explicitamente relacionado com σ . A variância destas distribuições é finita se $q < 5/3$, e diverge se $5/3 < q < 3$. Para $q = 2$ temos a distribuição de Cauchy-Lorentz. Para $q \geq 3$ não é possível normalizar a função, não podendo ser aceita como uma distribuição de probabilidades [5].

2.3.2 Aplicações

Uma quantidade considerável de sistemas foram e estão sendo tratados com o formalismo não-extensivo, em uma variedade de maneiras. Não apenas em áreas

mais fundamentais da ciência como física, matemática, química, . . . , mas também na economia, medicina, psicologia, linguística, dentre outras [38]. Para o nosso estudo da distribuição de partículas após colisões relativísticas, um dos pontos que mais pesa a favor da generalização da Mecânica Estatística é o fato desta apresentar uma função densidade de probabilidade com o comportamento na forma lei-de-potência (assintótica).

2.3.3 Índice Entrópico q

O valor do índice entrópico é uma característica do sistema ou da classe de universalidade do sistema [39]. Acredita-se que o valor de q para um sistema específico deve ser determinado *a priori* da dinâmica microscópica. Isto tem como fundo a discussão sobre a origem dinâmica da Mecânica Estatística e que, mesmo no formalismo de BG, ainda não é completamente compreendida [36].

2.4 Superestatística

Apesar da formulação da Mecânica Estatística feita por Tsallis ser uma generalização da de Boltzmann-Gibbs, esta teoria não é a única que apresenta uma generalização da entropia. O prêmio Nobel M. Gell-Mann juntamente com C. Tsallis identificaram aproximadamente 20 formulações da entropia que apresentam notável sucesso em determinados ramos da ciência [32], mostrando uma possível não-universalidade da entropia [40].

Dentre as teorias há uma conhecida como *Superestatística*, que surgiu com a busca do significado do índice entrópico, pelos pesquisadores Z. Włodarczyk e G. Wilk [41]. Neste estudo eles encontram uma relação do índice entrópico com as flutuações dos parâmetros na exponencial de Boltzmann. Posteriormente, C. Beck e o prêmio Nobel E. G. D. Cohen propuseram formalmente a teoria em [42], onde tam-

bém apresentaram uma série de cálculos analíticos para diferentes casos da teoria, assim como as relevantes propriedades da média e variância. A *Superestatística* é uma superposição de duas ou mais diferentes estatísticas [43], onde

- uma teoria é fornecida pelo fator de Boltzmann ordinário;
- e a(s) outra(s) dada(s) por flutuações de grande escala de um ou vários parâmetros intensivos.

E os parâmetros podem ser

- o inverso da temperatura;
- um potencial químico, num sistema com contrações inomogêneas;
- energia de dissipação local;
- amplitude de um ruído perturbador;
- um atrito efetivo constante;
- dentre outras grandezas...

A variável β é a indicação destes parâmetros e as correspondentes distribuições de probabilidades estacionárias se formam como uma convolução das várias estatísticas [43]. Geralmente todas as *Superestatísticas* possuem entropias não-aditivas e não-extensivas [40] e a própria Mecânica Estatística não-extensiva é um caso especial da *Superestatística*, a qual se forma para uma distribuição χ^2 .

Considerando as distribuições $f(\beta)$ e Hamiltonianos efetivos para sistemas dinâmicos complexos, pode-se definir, através da *Superestatística*, um fator de Boltzmann generalizado $B(E)$ (com E sendo a energia de um microestado) para o sistema fora de equilíbrio com a seguinte equação

$$B(E) = \int_0^{\infty} d\beta f(\beta) e^{-\beta E}, \quad (2.27)$$

de onde pode-se recuperar o fator de Boltzmann usual com $f(\beta) = \delta(\beta - \beta_0)$. Com a forma da equação 2.27 pode-se reconhecer que $B(E)$ é a transformada de Laplace da densidade de probabilidade $f(\beta)$, sendo que também há interpretações de $B(E)$ como uma convolução do fator de Boltzmann usual com $f(\beta)$ [44]. F. Navarro em [43], lista alguns critérios que devem ser usados para obter os casos fisicamente importantes:

- A distribuição $f(\beta)$ não pode ser qualquer função, mas uma densidade de probabilidade normalizada, e.g., distribuição Gaussiana, Uniforme, χ^2 , Log Normal, dentre outras;
- A integral $\int_0^\infty B(E)dE$ deve existir, i.e., a nova estatística deve ser normalizada. Em geral, isto significa que a integral $\int_0^\infty \rho(E)B(E)dE$ deve ser convergente. Nesta integral, $\rho(E)$ representa a densidade de estados;
- Por fim, se não houver flutuações de quantidades intensivas, qualquer nova estatística deve se reduzir à estatística de Boltzmann-Gibbs.

Em [45] C. Tsallis, juntamente com A. M. C. Souza, argumenta que a Superestatística necessita de princípios fundamentais, e fornece uma derivação. Em [46] pode-se encontrar uma relação das aplicações com respeito a Superestatística.

3 *Teoria de Hagedorn*

Em 1965 Hagedorn desenvolveu um modelo estatístico visando estudar o processo de espalhamento em uma colisão de partículas do ponto de vista macroscópico [1] ¹. Com este modelo foi possível extrair informações com um tratamento termodinâmico sem levar em conta interações microscópicas entre partons que, em nível fundamental, são governadas pela QCD ² [28].

O pressuposto básico da Teoria de Hagedorn é que na região de espalhamento a densidade de estados cresce tão rapidamente que a temperatura não pode exceder certo valor máximo, conhecido como a temperatura de Hagedorn T_0 . Essa condição é similar a transição de fase de primeira ordem da ebulição da água, uma vez que a temperatura de Hagedorn descreve a ebulição da matéria nuclear [2]. Muitos pesquisadores relacionam a temperatura de Hagedorn com a temperatura crítica T_c da transição de fase da QCD. Iremos, nessa seção, apresentar a abordagem utilizada por Hagedorn para estudar o processo de espalhamento de colisões de partículas. Neste capítulo, iremos descrever os passos seguidos por Hagedorn em [1], no desenvolvimento de sua teoria.

¹Apesar de Enrico Fermi, Lev Landau e Isaak Pomeranchuk terem feito contribuições pioneiras com essa abordagem, apenas com o modelo de Hagedorn que essa abordagem passou a ser bastante difundida [31] [30].

²A QCD não era conhecida na época em que Hagedorn desenvolveu seu modelo.

3.1 Gás quântico ideal no Ensemble Canônico

Um gás composto por uma combinação qualquer de partons (quarks e glúons) pode ser considerado como um sistema hadrônico. Devido à interação entre os partons e a possibilidade de conversão entre eles, o número total de partículas é constante. Consideremos então um ensemble canônico, ou seja, um sistema dentro de um volume V_0 - região de interação - mantido em temperatura constante T . O número de partículas de cada tipo não é limitado e iremos rotular por i os possíveis momentos na caixa cúbica V_0 e por j os tipos de partículas. Nessas condições, a função de partição será

$$1 + Z(V_0, T) = Z_q(V_0, T) \cdot Z_g(V_0, T) = \sum_{(v)} \exp \left[-\beta \sum_{(ij)} \varepsilon_{ij} v_{ij} \right], \quad (3.1)$$

onde:

- $\beta = \frac{1}{T}$;
- $\varepsilon_{ij} \equiv \sqrt{p_i^2 + m_j^2}$ é a energia associada;
- v_{ij} : número de partículas do tipo j com momento \vec{p}_i , sendo:
 - Para bósons: $v_{ij} = 0, 1, 2, \dots, \infty$;
 - Para férmions: $v_{ij} = 0, 1$;
- $\sum_{(v)}$: somatório sobre todos os possíveis números de partículas.

Sendo assim, uma particular matriz v descreve completamente um estado quântico do sistema. A contribuição 1 do estado fundamental (sem a presença de partículas: $v_{ij} \equiv 0$) foi subtraída. Uma vez que as quantidades físicas relevantes são obtidas das derivadas logarítmicas de $Z(V_0, T)$, não há consequências. Da somatória anterior,

temos

$$1 + Z(V_0, T) = \sum_{(v)} \exp \left[\left(-\frac{\varepsilon_{11} v_{11}}{T} \right) + \left(-\frac{\varepsilon_{12} v_{12}}{T} \right) + \dots \right. \\ \left. + \left(-\frac{\varepsilon_{21} v_{21}}{T} \right) + \left(-\frac{\varepsilon_{22} v_{22}}{T} \right) + \dots + \left(-\frac{\varepsilon_{ij} v_{ij}}{T} \right) + \dots \right]. \quad (3.2)$$

Escrevendo $x_{ij} \equiv \exp \left[\frac{-\varepsilon_{ij}}{T} \right]$ e lembrando de uma das propriedades básicas das funções exponenciais, a de que $y^{a+b} = y^a y^b$, temos

$$1 + Z(V_0, T) = \sum_{(v)} \left(x_{11}^{v_{11}} \cdot x_{12}^{v_{12}} \cdot \dots \cdot x_{21}^{v_{21}} \cdot x_{22}^{v_{22}} \cdot \dots \cdot x_{ij}^{v_{ij}} \cdot \dots \right) \\ = \sum_{(v)} \prod_{ij} x_{ij}^{v_{ij}} \quad (3.3) \\ = \left(\sum_{v_{11}} x_{11}^{v_{11}} \right) \cdot \left(\sum_{v_{12}} x_{12}^{v_{12}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{v_{21}} x_{21}^{v_{21}} \right) \cdot \left(\sum_{v_{22}} x_{22}^{v_{22}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{v_{ij}} x_{ij}^{v_{ij}} \right) \cdot \dots$$

Iremos distinguir os bósons - que permanecerão rotulados como j - dos férmions - rotulando-os com j' . Para esses dois tipos de partículas, temos que:

- Para bósons:

$$\sum_{v_{ij}} x_{ij}^{v_{ij}} = \frac{1}{1 - x_{ij}}; \quad (3.4)$$

- Para férmions:

$$\sum_{v_{ij'}} x_{ij'}^{v_{ij'}} = 1 + x_{ij'}, \quad (3.5)$$

de onde obtemos

$$1 + Z(V_0, T) = \prod_{ij} \frac{1}{1 - x_{ij}} \prod_{ij'} (1 + x_{ij'}). \quad (3.6)$$

O logaritmo da função de partição será

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = - \sum_{ij} \ln(1 - x_{ij}) + \sum_{ij'} \ln(1 + x_{ij'}). \quad (3.7)$$

Iremos substituir os somatórios pelas seguintes variáveis contínuas:

$$\sum_i [\dots] \rightarrow \int_0^\infty \frac{V_0 4\pi p^2}{h^3} [\dots] dp = \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 [\dots] dp \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1) \quad (3.8)$$

e

$$\sum_{j,j'} [\dots] \rightarrow \int_0^\infty \rho_{B,F}(m) [\dots] dm, \quad (3.9)$$

onde $\rho_{B,F}(m)$ é o espectro da massa para bósons e férmions. Fazendo essas substituições na equação 3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \ln[1 + Z(V_0, T)] = & - \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty p^2 \rho_B(m) \ln(1 - x_{pm}) dm dp \\ & + \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty p^2 \rho_F(m) \log(1 + x_{pm}) dm dp \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo $x_{pm} = \exp(-\beta \sqrt{p^2 + m^2}) < 1$. Da equação anterior

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \left\{ \int_0^\infty dm [\rho_F(m) \ln(1 + x_{pm}) - \rho_B(m) \ln(1 - x_{pm})] \right\}. \quad (3.11)$$

A série de Taylor para o logaritmo natural (também conhecida como série de Newton-Mercator) é

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \\ \ln(1 - x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo $|x| < 1$. Aplicando a eq. 3.12 na eq. 3.11 temos

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = \frac{V_0}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty \int_0^\infty dp dm [\rho_B(m) - (-1)^n \rho_F(m)] p^2 x_{pm}^n, \quad (3.13)$$

onde não há hádrões com $m = 0$.

Para as distribuições de massa, podemos escrever:

$$\rho_B(m) - (-1)^n \rho_F(m) \equiv \rho(m; n) \equiv \begin{cases} \rho(m) & \text{para } n \text{ ímpar;} \\ \Delta\rho(m) & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

A integral sobre p pode ser resolvida usando a função de Bessel modificada de segundo tipo (também conhecida como função de Hankel modificada). Essa função tem a forma

$$K_n(y) = \frac{1}{2} \pi i^{n+1} H_n^{(1)}(ix) = \frac{1}{2} \pi i^{n+1} [J_n(ix) + iN_n(ix)] = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin(n\pi)}.$$

Considerando $y \equiv \beta n m$, podemos escrever

$$\int_0^\infty dp p^2 \exp[-\beta n \sqrt{p^2 + m^2}] = -m^3 \frac{d}{dy} \left[\frac{K_1(y)}{y} \right] = \frac{m^3}{y} K_2(y). \quad (3.14)$$

Assim, substituindo a equação 3.14 na equação 3.13, finalmente teremos

$$\ln[1 + Z(V_0, T)] = \frac{V_0 T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\infty \rho(m; n) m^2 K_2(\beta n m) dm. \quad (3.15)$$

3.2 Condição de auto-consistência - “bootstrap”

Hagedorn introduziu em sua teoria a condição de auto-consistência do processo de espalhamento, e descreveu os diversos estados possíveis de um hádron altamente excitado como uma *fireball*, definindo como [47]:

Um *Fireball* é:

- * um equilíbrio estatístico de um indeterminado número de *fireballs*, onde cada qual, por sua vez, é considerado ...

(retornar a *)

Ou seja, um hádron excitado (*fireball*) pode ser considerado como um conjunto ligado

de hádrons excitados em diferentes energias. Esse estado da matéria está proxima-mente relacionado com o QGP [2]. Esse sistema deve ser descrito pela mesma Termodinâmica determinada pela equação 3.15 estudada na seção 3.1. Nessa condição, o número total de estados pode ser representado por

$$Z(V_0, T) = \int_0^E \tau(E') Z_0(E') dE', \quad (3.16)$$

sendo:

- $Z_0(E') = e^{-\beta E'}$ a função de partição de um sistema hadrônico com energia E' ;
- $\tau(E') dE'$ o número de estados excitados entre E' e $E' + dE'$.

Tal representação decorre do significado físico da equação 3.1.

Para baixas energias, os estados hadrônicos são discretos e $\int \tau(E') dE'$ deve ser substituído por uma somatória sobre esses estados. Para evitar essa somatória, vamos nos restringir a sistemas altamente excitados, isto é, $E \rightarrow \infty$, de onde temos

$$Z(V_0, \beta) = \int_0^\infty \tau(E) e^{-\beta E} dE. \quad (3.17)$$

Como se percebe, as funções de partição definidas em 3.15 e 3.16 devem ser idênticas, portanto,

$$Z(V_0, \beta) = \exp \left\{ \frac{V_0}{2\pi 2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\infty \rho(m; n) m^2 K_2(\beta n m) dm \right\} - 1 \equiv \int_0^\infty \tau(E) e^{-\beta E} dE \quad (3.18)$$

A integral do lado esquerdo converge para qualquer n se convergir para $n = 1$, então precisamos apenas nos preocupar com o primeiro termo de somatória. Hagedorn expressa a condição de auto-consistência na forma (fraca) [1]:

$$\log \rho(x) \rightarrow \log \tau(x) \quad \text{para } x \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Percebe-se então que o problema é encontrar as formas de $\rho(x)$ e $\tau(x)$ que satisfaçam as condições impostas por 3.18 e 3.19. A função de Hankel $K_2(x)$ tem as seguintes propriedades:

$$K_2(x) \rightarrow \frac{2}{x^2} + O\left(x^2 \log\left(\frac{x}{2}\right)\right) \text{ para } x \rightarrow 0 \quad (3.20)$$

e

$$K_2(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x \left(1 + \frac{\theta}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \text{ para } x \rightarrow \infty \text{ e } |\theta| < 1. \quad (3.21)$$

Aplicando as propriedades acima nos integrandos da equação 3.18, teremos

$$\rho(m;n)m^2 K_2(\beta nm) \rightarrow \frac{2}{\beta^2 n^2} \rho(m;n) \text{ para } m \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

e

$$\rho(m;n)m^2 K_2(\beta nm) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m^{3/2} \rho(m;n)}{\sqrt{\beta n}} e^{-\beta nm} \text{ para } m \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

No limite superior da integral da equação 3.18 temos que

$$\int_0^\infty m^2 K_2(\beta nm) \rho(m;n) dm < \infty \text{ para } \operatorname{Re}(\beta) > \beta_0 \text{ se } \rho(m;n) = O(e^{\beta_0 m}), \quad (3.24)$$

de onde pode-se mostrar que [1]:

- Se a integral com $n = 1$ converge, a somatória em 3.18 converge;
- Se a integral com $n = 1$ não converge, mas com $n = 2$ converge, então a somatória em 3.18 de $n = 2$ até ∞ converge.

Hagedorn mostra que para as equações 3.18 e 3.19 não é possível existir uma solução com $\rho(x)$ e $\tau(x)$ sendo não exponencial. Isso implica na existência de um $\beta_0 > 0$ ou, em outras palavras, de uma temperatura mais alta $T_0 = \frac{1}{\beta_0}$ na qual a somatória da função de partição 3.18 diverge para valores mais altos que T_0 [1].

Para $n = 1$ e $m \rightarrow \infty$, um termo da forma

$$m^{3/2} \rho(x) \rightarrow \frac{a}{m} e^{\beta_0 m}, \quad (3.25)$$

nos dá um desejado comportamento exponencial para inserirmos na equação 3.18, de onde teríamos

$$Z(V_0, \beta)_{\beta \rightarrow \beta_0^+} \rightarrow \left(\frac{1}{\beta - \beta_0} \right)^{\frac{aV_0}{(2\pi\beta_0)^{3/2}}} K, \quad (3.26)$$

onde K não depende de β e nem de m (pois a integração foi feita).

Para satisfazer 3.19, $\tau(E)$ deve ter a forma assintótica quando $E \rightarrow \infty$,

$$\tau(E) \rightarrow b E^{\alpha-1} e^{S_0 E}, \quad (3.27)$$

que substituída na integral do lado direito em 3.18 resulta em

$$\int_0^\infty \tau(E) e^{-\beta E} dE \rightarrow \left(\frac{1}{\beta - \beta_0} \right)^\alpha K', \quad (3.28)$$

para $\beta \rightarrow \beta_0^+$, onde K' é independente de β .

As expressões 3.26 e 3.28 serão assintoticamente iguais se:

$$\alpha = \frac{aV_0}{(2\pi\beta_0)^{3/2}} \text{ e } K' = K \quad (3.29)$$

3.3 Temperatura Limite

Da equação 3.26 temos

$$Z(T)_{T \rightarrow T_0^-} \rightarrow \text{const} \cdot \left(\frac{1}{T_0 - T} \right)^\alpha. \quad (3.30)$$

Na conexão entre a Termodinâmica e a mecânica estatística temos a relação

$$\bar{E}(T) = -\frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta}, \quad (3.31)$$

de onde podemos tirar o valor esperado para a energia quando $T \rightarrow T_0^-$,

$$\bar{E}(T) \rightarrow \alpha \frac{T_0^2}{T_0 - T}, \quad (3.32)$$

mostrando que a energia média diverge quando $T \rightarrow T_0^-$. Isto implica que T_0 é uma temperatura limite do sistema e não pode ser superada.

Vamos então verificar uma consequência física facilmente observável que resulta da existência de um limite superior para a temperatura do sistema. Vimos na seção 3.1 que a função de partição pode ser escrita na forma:

$$Z(T) = \sum_{\nu} \prod_{ik} x_{ik}^{\nu_{ik}} \quad \text{onde } k = \begin{cases} j = 0, 1, 2, \dots, \infty & \text{para bósons;} \\ j' = 0, 1 & \text{para férmions,} \end{cases} \quad (3.33)$$

que é análoga à forma

$$Z(T) = \prod_k \left(\sum_{\nu} e^{-\beta \varepsilon_k \nu} \right), \quad (3.34)$$

e portanto

$$\ln Z(T) = \sum_k \ln \left(\sum_{\nu} e^{-\beta \varepsilon_k \nu} \right) \quad (3.35)$$

Derivando esta expressão em relação a ε_k e dividindo por $-\beta$, teremos o número médio de ocupação $\bar{\nu}_k$ (o número médio de constituintes do sistema no estado k)

$$\bar{\nu}_k = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z(T)_{\pm}}{\partial \varepsilon_k} = \sum_k \frac{\nu_k e^{-\beta \varepsilon_k \nu_k}}{\sum_{\nu} e^{-\beta \varepsilon_k \nu}} \quad (3.36)$$

Vimos também que para férmions (+) e bósons (-), a função de partição do gás ideal é dada por

$$Z(T)_{\pm} = (1 + e^{-\beta \varepsilon_k})^{\pm 1} \Rightarrow \ln Z(T)_{\pm} = \pm (1 \pm e^{-\beta \varepsilon_k}), \quad (3.37)$$

nos dando

$$\bar{\nu}_k^{\pm} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z(T)_{\pm}}{\partial \varepsilon_k} = \pm \frac{e^{-\beta \varepsilon_k}}{1 + e^{-\beta \varepsilon_k}} = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_k \pm 1}}. \quad (3.38)$$

Daqui podemos obter a primeira consequência desta teoria. Observe que para energias suficientemente altas a temperatura tende a T_0 e, portanto, $\beta \rightarrow \beta_0 = \frac{1}{T_0}$. Substituindo β por β_0 em 3.38 e considerando apenas o estado j com energia ε_k suficientemente grande, obtemos que

$$\bar{v}_k = e^{-\beta_0 \varepsilon_k} \Rightarrow \ln(\bar{v}_k) = -\beta_0 \varepsilon_k, \quad (3.39)$$

onde os sinais (+, -) foram retirados, já que esta equação vale tanto para férmions quanto para bósons. Uma verificação simples da teoria é observar se a distribuição de energia das partículas obedece a esta lei. Note também que a temperatura T_0 pode ser obtida a partir das distribuições de energia.

Ao fazer o tipo de análise descrito acima, deve-se levar em conta que nas colisões entre partículas, aquelas que saem com pequeno momento transversal (p_\perp) quando comparado ao momento longitudinal (p_z) devem ser tratados com cuidado. O modelo proposto supõe a formação de um estado excitado, e todas as grandezas cinemáticas são calculados num referencial no qual este estado está em repouso. É preferível então restringir a análise a estados com alto p_\perp , já que este é pouco alterado, e.g., por transformações de Lorentz [48].

3.4 Distribuição de Probabilidades

Para obter a probabilidade de observar uma partícula de massa m em um estado de certo momento, temos que multiplicar o número médio de ocupação com o volume disponível no espaço momento. De forma mais geral, pode-se também encontrar a distribuição desses momentos transversais. Para isso devemos olhar a densidade de estados por unidade de momento, que é

$$\frac{V_0}{2\pi^2} dp_x dp_y dp_z. \quad (3.40)$$

Também é conveniente, neste caso, selecionar uma partícula de massa determinada m . Vamos considerar o eixo z como a direção de colisão (do feixe) e $p_z = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. Supondo que $T \rightarrow T_0$, o número de estados com momento transversal entre p_\perp e $p_\perp + dp_\perp$ será

$$w(p_\perp)dp_\perp = C \cdot p_\perp dp_\perp \int_0^\infty dp_z \frac{1}{\exp\left[\sqrt{\frac{p_z^2 + \mu^2}{T_0}}\right]}, \quad (3.41)$$

onde $w(p_\perp)$ é a densidade de probabilidade de momento transversal, $\mu^2 \equiv p_\perp^2 + m^2$ e C é uma constante. Também estamos supondo que $m \gg T_0$ e, portanto, $e^{\varepsilon/T_0} \gg 1$, sendo $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$. A integral pode ser resolvida em termos da função de Bessel, resultando

$$w(p_\perp)dp_\perp \approx C \cdot p_\perp dp_\perp \int_0^\infty dp_z \exp\left[-\beta \sqrt{p_z^2 + \mu^2}\right] = C \cdot p_\perp \sqrt{p_\perp^2 + m^2} K_1\left(\frac{\sqrt{p_\perp^2 + m^2}}{T_0}\right), \quad (3.42)$$

Usando o comportamento assintótico de K_1 (equação 3.21), obtemos finalmente

$$w(p_\perp) \approx C \cdot p_\perp \sqrt{T_0 \sqrt{p_\perp^2 + m^2}} \exp\left(-\frac{1}{T_0} \sqrt{p_\perp^2 + m^2}\right), \quad (3.43)$$

que para o caso de $p_\perp \gg T_0 \gg m$, se reduz a

$$w(p_\perp) \approx C \cdot p_\perp^{3/2} \exp\left(-\frac{p_\perp}{T_0}\right). \quad (3.44)$$

4 *Generalização da Teoria de Hagedorn*

Enquanto que para colisões de partículas com a energia do centro de massa relativamente pequena ($\sqrt{s} < 10 \text{ GeV}$) a teoria de Hagedorn descreve e apresenta resultados de maneira satisfatória, ela falha para energias mais altas. De fato, como vimos anteriormente, a abordagem de Hagedorn prediz um decaimento exponencial da seção de choque para altos momentos, enquanto que experimentalmente é observado um decaimento não-exponencial, mais próximo de um decaimento em lei-de-potência. Por essa razão, geralmente os resultados para altas energias são restritos à comparações com simulações com Monte Carlo. A generalização das idéias originais de Hagedorn apresenta-se como uma boa opção para se obter um melhor entendimento nos processos de colisões. Neste capítulo iremos apresentar os passos seguidos por C. Beck em [2], ao estender a teoria de Hagedorn com o formalismo de Tsallis.

4.1 **Probabilidades de estado**

Para generalizar a teoria de Hagedorn, considerando um sistema com N partículas independentes, deve-se introduzir a função de partição na Mecânica Estatística não-extensiva, considerando que as probabilidades deverão ser fatoradas [2]. Vamos então considerar um distinto estado fatorado onde cada probabilidade condicional é dada através do produto da distribuição de Tsallis das partículas individuais, que tem a

forma

$$P_i = \frac{1}{Z_q} (1 + (q-1)\beta\varepsilon_i)^{-q/q-1}, \quad (4.1)$$

onde

$$Z_q = \sum_i (1 + (q-1)\beta\varepsilon_i)^{-q/q-1}. \quad (4.2)$$

Isso significa que a probabilidade condicional P_{i_1, i_2, \dots, i_N} para observar a partícula 1 em um estado de energia ε_{i_1} , partícula 2 em um estado de energia ε_{i_2} , e assim por diante, será

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \frac{1}{Z} \prod_{j=1}^N (1 + (q-1)\beta\varepsilon_{i_j})^{-q/q-1}. \quad (4.3)$$

O Hamiltoniano $H(i_1, i_2, \dots, i_N)$, energia total do sistema, na abordagem não-extensiva é dado por

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \frac{1}{Z} (1 + (q-1)\beta H(i_1, i_2, \dots, i_N))^{-q/q-1}. \quad (4.4)$$

Com as equações 4.3 e 4.4 vemos que a energia total do sistema será

$$1 + (q-1)\beta H = \prod_{j=1}^N (1 + (q-1)\beta\varepsilon_{i_j}), \quad (4.5)$$

o qual podemos escrever como

$$H = \sum_j \varepsilon_{i_j} + (q-1)\beta \sum_{j,k} \varepsilon_{i_j} \varepsilon_{i_k} + (q-1)^2 \beta^2 \sum_{j,k,l} \varepsilon_{i_j} \varepsilon_{i_k} \varepsilon_{i_l} + \dots \quad (4.6)$$

(somatório em todos os pares de índices diferentes). A equação acima indica claramente que a energia total de um sistema não-extensivo não é igual a soma das energias de cada partícula. Em outras palavras, do ponto de vista da energia, as partículas estão interagindo com uma constante de acoplamento $(q-1)\beta$. Isso está relacionado com o fato do formalismo da Mecânica Estatística Não-Extensiva ter sido naturalmente projetado para descrever sistemas com interações de longo alcance, e também com a propriedade não aditiva da entropia.

A seguir, vamos generalizar a teoria Hagedorn utilizando os estados únicos das probabilidades - introduzindo assim, implicitamente, interações entre as partículas do

ponto de vista da energia.

4.2 Distribuição de Probabilidades

Vamos considerar partículas de diferentes tipos e rotular os tipos das partículas com um índice j . Cada partícula pode ter um certo estado momento rotulado pelo índice i . A energia associada a este estado é

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{p_i^2 + m_j^2}, \quad (4.7)$$

que é a relação relativística energia-momento. Vamos definir um fator de Boltzmann generalizado (não-extensivo) como

$$x_{ij} = (1 + (q - 1)\beta\varepsilon_{ij})^{-q/(q-1)}. \quad (4.8)$$

Esse fator aproxima do fator original de Boltzmann $e^{-\beta\varepsilon_{ij}}$ quando $q \rightarrow 1$. Agora seguiremos as idéias originais de Hagedorn, substituindo o fator original de Boltzmann pelo generalizado. A função de partição generalizada é introduzida como

$$Z = \sum_{(v)} \prod_{ij} x_{ij}^{v_{ij}}. \quad (4.9)$$

Assim como na sessão 3.1, v_{ij} denota o número de partículas do tipo j no estado de momento i e $\sum_{(v)}$ representa o somatório de todos os números possíveis de partículas. Vale lembrar que para bósons temos $v_{ij} = 0, 1, 2, \dots, \infty$ enquanto que para férmions $v_{ij} = 0, 1$. Disto, segue que, para bósons

$$\sum_{v_{\alpha\beta}} x_{\alpha\beta}^{v_{\alpha\beta}} = \frac{1}{1 - x_{\alpha\beta}}, \quad (4.10)$$

enquanto que para férmions

$$\sum_{v_{\alpha\varphi}} x_{\alpha\varphi}^{v_{\alpha\varphi}} = 1 + x_{\alpha\varphi}, \quad (4.11)$$

de onde podemos escrever a função de partição como

$$Z = \prod_{ij} \frac{1}{1-x_{ij}} + \prod_{i'j'} (1+x_{i'j'}), \quad (4.12)$$

onde as partículas fermiônicas estão rotuladas com um ($'$). O logaritmo da função de partição será

$$\log Z = - \sum_{ij} \log(1-x_{ij}) + \sum_{i'j'} \log(1+x_{i'j'}). \quad (4.13)$$

Aqui também iremos trabalhar com variáveis contínuas, substituindo

$$\sum_i [\dots] \rightarrow \int_0^\infty \frac{V_0 4\pi p^2}{h^3} [\dots] dp = \frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 [\dots] dp \quad (\hbar = 1), \quad (4.14)$$

onde V_0 é o volume da região de interação e

$$\sum_j [\dots] \rightarrow \int_0^\infty \rho(m) [\dots] dm, \quad (4.15)$$

onde $\rho(m)$ é o espectro de massa.

O número médio de ocupação de uma partícula da espécie j no estado de momento i será

$$\bar{v}_{ij} = x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \log Z = \frac{x_{ij}}{1 \pm x_{ij}} = \frac{1}{(1 + (q-1)\beta \varepsilon_{ij})^{q/(q-1) \pm 1}}, \quad (4.16)$$

onde o sinal ($-$) é para bósons e no sinal ($+$) para os férmions.

A fim de destacar uma particular partícula de massa m_0 , pode-se trabalhar com o espectro de massa $\rho(m) = \delta(m - m_0)$. Para obter a probabilidade de observar uma partícula de massa m_0 em um estado de certo momento, temos que multiplicar o número médio de ocupação com o volume disponível no espaço momento. Um volume infinitesimal no espaço de momento pode ser escrito como

$$dp_x dp_y dp_z = dp_L p_\perp \sin\theta dp_\perp d\theta, \quad (4.17)$$

onde $p_{\perp} = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$ é o momento transversal e $p_x = p_L$ o longitudinal. Através da integração em todo θ e p_L , finalmente chega-se a uma densidade de probabilidade $w(p_{\perp})$ de momento transversal dada por

$$w(p_{\perp}) = \text{const} \cdot p_{\perp} \int_0^{\infty} dp_L \frac{1}{(1 + (q-1)\beta \sqrt{p_{\perp}^2 + p_L^2 + m_0^2})^{q/(q-1) \pm 1}}. \quad (4.18)$$

Uma vez que a temperatura Hagedorn é bastante reduzida (da ordem da massa do π), em circunstâncias normais temos $\beta \sqrt{p_{\perp}^2 + p_L^2 + m_0^2} \gg 1$ e, portanto, ± 1 pode ser negligenciado se q se aproxima de 1. Assim, obtém-se tanto para férmions e bósons a estatística

$$w(p_{\perp}) \approx \text{const} \cdot p_{\perp} \int_0^{\infty} dp_L (1 + (q-1)\beta \sqrt{p_{\perp}^2 + p_L^2 + m_0^2})^{-\frac{q}{q-1}}, \quad (4.19)$$

permitindo assim determinar a dependência dos espectros das partículas medidas com p_{\perp} . A seção de choque diferencial $\sigma^{-1} \frac{d\sigma}{dp_{\perp}}$ deverá ser proporcional ao $w(p_{\perp})$.

4.3 Aproximação para altos p_{\perp}

A fim de aprimorarmos os cálculos analíticos, iremos avançar para mais uma etapa de aproximação, que terá a mesma abordagem que Hagedorn usou ao passar da equação 3.41 para a equação 3.44 na teoria original, em uma aproximação para altos p_{\perp} . Uma vez que, no nosso caso, q é bem próximo de 1, é de se esperar que tal abordagem seja possível [2].

4.3.1 Seção de choque diferencial

Vamos escrever a seção de choque diferencial na forma

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dp_{\perp}} = c u \int_0^{\infty} dx (1 + (q-1)\sqrt{x^2 + u^2 + m_{\beta}^2})^{-\frac{q}{q-1}}. \quad (4.20)$$

Aqui $x = p_L/T_0$, $u = p_{\perp}/T_0$ e $m_{\beta} := m_0/T_0$ são o momento longitudinal, transversal e a massa em unidades da temperatura de Hagedorn T_0 , respectivamente. c é uma

apropriada constante. Vejamos esta fórmula para grandes valores de p_{\perp} . Se u é muito grande, podemos aproximar

$$\sqrt{x^2 + u^2 + m_{\beta}^2} = u\sqrt{1 + (x^2 + m_{\beta}^2)/u^2} \approx u + (x^2 + m_{\beta}^2)/(2u). \quad (4.21)$$

Para que isso seja verdade a variável de integração x não deve ser muito grande, mas para valores elevados de x o integrando é, de qualquer forma, pequeno e produz apenas uma pequena contribuição para a seção de choque. Além disso, como u é grande, nós também podemos negligenciar o termo de massa m_{β}^2 , chegando à aproximação

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dp_{\perp}} \approx c u \int_0^{\infty} dx \left(1 + (q-1) \left(u + \frac{x^2}{2u} \right) \right)^{-\frac{q}{q-1}}. \quad (4.22)$$

A Figura 4.1 mostra as formas da expressão exata (equação 4.20) e a aproximação (equação 4.22), para $q = 1; 1,1; 1,2$. O intervalo de q é semelhante aos valores obtidos neste trabalho no estudo dos dados experimentais.

Dentro desta aproximação, podemos obter uma expressão analítica. Podemos escrever a equação 4.22 como [2]

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dp_{\perp}} = c u (1 + (q-1)u)^{-\frac{q}{q-1}} \int_0^{\infty} dx \left(1 + \frac{q-1}{2u(1+(q-1)u)} x^2 \right)^{-\frac{q}{q-1}}. \quad (4.23)$$

Substituindo

$$t := \sqrt{\frac{q-1}{2u(1+(q-1)u)}} x \quad (4.24)$$

e utilizando a fórmula geral

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}} dt = \frac{1}{2} B(x, y) \quad (\text{Re } x > 0, \text{Re } y > 0), \quad (4.25)$$

onde

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (4.26)$$

denota a função Beta, chega-se [2]

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dp_{\perp}} = c (2(q-1))^{-1/2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{q-1} - \frac{1}{2}\right) u^{3/2} (1 + (q-1)u)^{-\frac{q}{q-1} + \frac{1}{2}}. \quad (4.27)$$

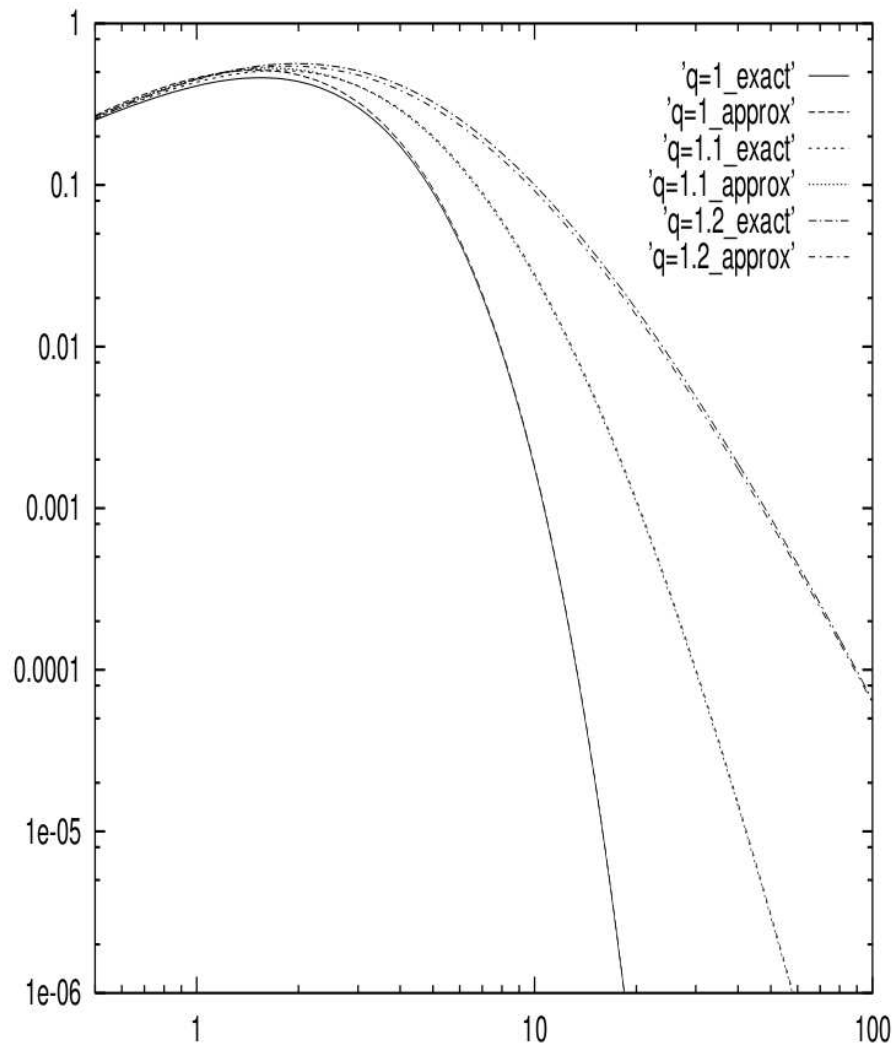


Figura 4.1: Comparação entre a fórmula exata 4.20 com $m_\beta^2 = (m_\pi/T_0)^2 = 1, 3$ e a aproximação 4.22 para vários valores de q , com c igual a 1. Figura tirada da referência [2].

Esta fórmula, com os parâmetros c , q e T_0 adequadamente determinados, conduzirá a uma boa concordância com dados experimentais da seção de choque.

4.4 Temperatura Efetiva T_{ef}

Vimos na seção anterior que a generalização consegue prever de forma satisfatória os resultados experimentais na região em que a estatística elaborada por Hagedorn, baseada na Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs, apresentava resultados não-físicos. Também vimos que a generalização torna a ter as mesmas características quando o valor do índice entrópico q tende a 1. Quais seriam então as circunstâncias

em que levariam a $q \neq 1$? O consenso comum é que isso ocorre quando [49]:

- existem correlações de longo alcance no sistema;
- existem efeitos de memória de diferentes tipos;
- o espaço de fase na qual o sistema opera é limitado ou tem uma estrutura fractal;
- e, por fim, há flutuações intrínsecas no sistema em consideração.

Ao considerar a última possibilidade mencionada logo acima, pode-se considerar que $|q - 1|$ é uma medida das flutuações na hadronização do sistema em consideração. Neste caso, estas flutuações podem ser descritos através de uma distribuição gama [41], mostrando que

$$[1 - (1 - q)\beta_0 H_0]^{1/(1-q)} = \int_0^\infty e^{-\beta H_0} f_\Gamma(\beta) d\beta, \quad (4.28)$$

onde

$$f_\Gamma(\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^\alpha \beta^{\alpha-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta_0} \beta}, \quad (4.29)$$

sendo

$$\alpha = \frac{1}{q-1}, \quad \beta_0 = \langle \beta \rangle \text{ e } q = 1 + \frac{\langle \beta^2 \rangle - \langle \beta \rangle^2}{\langle \beta \rangle^2} = 1 + \frac{\text{Var}(T)}{\langle T \rangle^2}. \quad (4.30)$$

e $\langle \dots \rangle$ as médias com respeito à f_Γ [49]. No nosso caso pode-se considerar $H_0 = \sqrt{p_\perp^2 + m_\perp^2}$ [50] [51]. O caso geral se refere ao conceito da então denominada *Superestatística* [42] introduzido na seção 2.4.

A temperatura dada pela generalização da teoria de Hagedorn é então estendida para uma *Temperatura Efetiva q-dependente*, T_{ef} , a qual leva em consideração não apenas as flutuações intrínsecas na fonte da hadronização, mas também os efeitos da possível transferência de energia entre a fonte de hadronização e o ambiente [52] [53]. T_{ef} tem a forma

$$T_{ef} = T_0 + w(q - 1), \quad (4.31)$$

onde

$$w = \frac{1}{Dc_p\rho}\phi, \quad (4.32)$$

com D , c_p e ρ sendo, respectivamente, a intensidade da flutuação da temperatura, calor específico sob constante pressão e a densidade. A Temperatura Efetiva T_{ef} ocorre quando há flutuações da temperatura T (em torno do valor T_0) e alguma transferência de energia entre a fonte e o ambiente dado por ϕ . Note que a transferência de energia afeta T_{ef} apenas quando há flutuações, i.e., para $|q - I| \neq 0$ [53].

5 Metodologia

As partículas produzidas em um experimento de colisão são caracterizadas pela decomposição do vetor momento na componente transversal p_{\perp} (ou p_T) e na componente longitudinal p_z (ou p_l, p_{\parallel}). Nestes experimentos, transformações relativísticas de sistemas de coordenadas são necessárias e, no propósito de facilitar a manipulação da álgebra, normalmente representa a componente longitudinal alternativamente pela rapidez, y , ou ainda utiliza-se a pseudo-rapidez, η , que descreve o ângulo da partícula em relação ao eixo do feixe. A massa transversal, especialmente importante para velocidades relativísticas, pode ser expressa através da massa em repouso e o momento transversal, que fica

$$m_{\perp} = \sqrt{p_{\perp}^2 + m_0^2}. \quad (5.1)$$

As médias das distribuições cinemáticas e densidades de partículas produzidas (dN/dy), também conhecidas como *yields*, são dados de relevância para análises em colisões de partículas. Entretanto, os dados resultantes apresentados em um experimento de colisão de partículas são as distribuições das partículas carregadas. Assim, para obter a densidade de partículas produzidas basta integrar a distribuição. Essa distribuição pode ser obtida através da seção de choque invariante total, ou seja,

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} m_{\perp} = E \frac{d^2\sigma}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_z} = C \cdot \frac{1}{2\pi p_{\perp}} \frac{d^2N}{dy dp_{\perp}}, \quad (5.2)$$

onde C é uma constante. Essa equação fornece o número de partículas produzidas por unidade de rapidez e momento transversal e pode ser comparada com os dados da seguinte maneira [25]

$$\frac{1}{2\pi p_{\perp}} \frac{d^2N}{dy dp_{\perp}} = \frac{\text{Sinal}}{\text{Número de eventos} \cdot \text{Correção no Sinal}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\Delta y dp_{\perp}} \quad (5.3)$$

onde Δy corresponde ao intervalo de rapidez estudado e dp_{\perp} o intervalo de p_{\perp} considerado.

Explorar tais medidas auxilia no entendimento da produção hadrônica, incluindo espalhamentos *soft* ou *hard*, principalmente em colisores com altas taxas de produção de partículas como o LHC, pois com conhecimento destas grandezas é possível distinguir sinais raros das elevadas interações de fundo e *soft*-hadrônicas [54].

Neste capítulo apresentamos as funções derivadas da teoria de Hagedorn e da sua generalização para as previsões das distribuições de probabilidade, e os dados experimentais para diversas distribuições, dadas pela equação 5.3. Logo após, é apresentado os pacotes computacionais utilizados neste trabalho.

5.1 Funções Estatísticas

No intuito de analisar o comportamento, na região de altas energias, da teoria estatística de Hagedorn e sua generalização, foi realizado um estudo da predição com os dados empíricos. Foram verificadas previsões das teorias ajustando as equações derivadas destas com as distribuições das partículas. Sendo assim, foi ajustado para diversos dados experimentais às distribuições dos momentos das partículas obtidos com as funções estatísticas da teoria de Hagedorn e da generalização da teoria de Hagedorn com a formulação de Tsallis, que, para fins práticos, chamaremos de Hagedorn-Tsallis. Para a realização do ajuste foi criado diversos códigos para ajustar

automaticamente as funções estatísticas com os melhores valores possíveis para os parâmetros de cada função, juntamente com um fator de normalização. As funções utilizadas estão descritas logo a seguir:

- Função obtida através da estatística da teoria de Hagedorn:

$$\frac{1}{2\pi p_{\perp}} \frac{dN^2}{dy dp_{\perp}} = c p_{\perp}^{3/2} e^{-\beta p_{\perp}} \quad (5.4)$$

- Função obtida através da estatística da teoria de Hagedorn-Tsallis:

$$\frac{1}{2\pi p_{\perp}} \frac{dN^2}{dy dp_{\perp}} = c(2(q-1))^{-1/2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{q-1} - \frac{1}{2}\right) u^{3/2} (1+(q-1)u)^{-q/(q-1)+1/2} \quad (5.5)$$

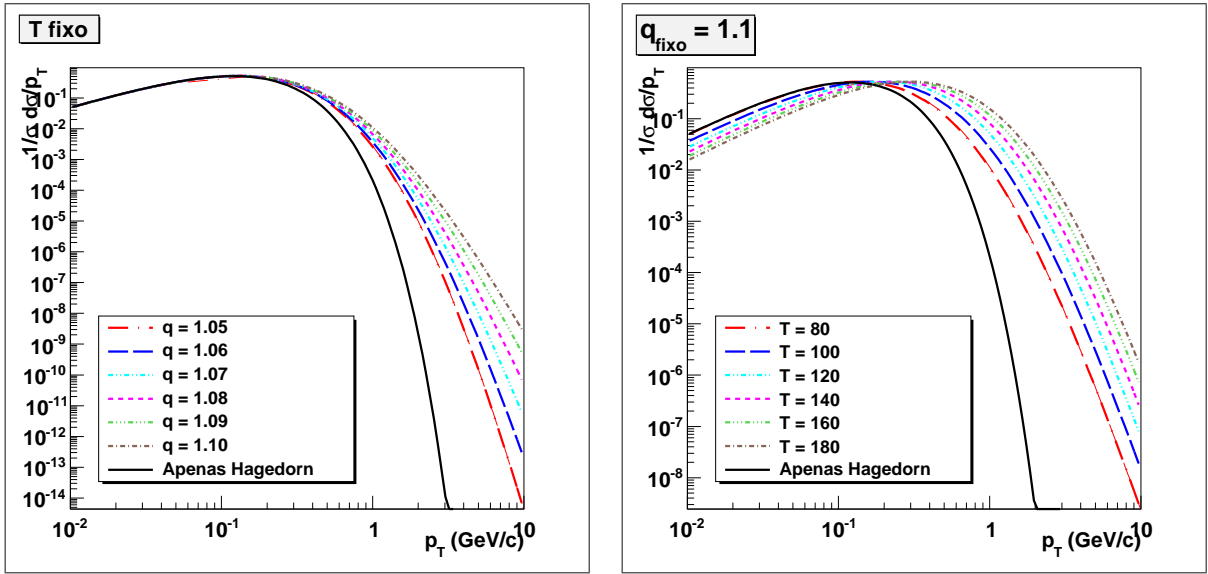
onde,

$$u = \frac{p_{\perp}}{T_0}, \text{ e } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

5.1.1 Comportamento das funções

A Figura 5.1 mostra o comportamento da equação 5.4 - comportamento exponencial decorrente da teoria de Hagedorn, e da equação 5.5 - comportamento lei-de-potência, derivada da teoria de Hagedorn-Tsallis.

A Figura 5.1a mostra a dependência da formulação Hagedorn-Tsallis com o parâmetro q , variando q mantendo a temperatura em um valor fixo. Para baixos p_{\perp} , podemos observar que a teoria de Hagedorn apresenta valores aproximados de alguns casos da teoria de Hagedorn-Tsallis, mas com o aumento dos momentos transversais, as duas teorias apresentam valores distantes. À medida que o valor de q diminui, a equação 5.5 começa a ter um comportamento exponencial, i.e., quando $q \rightarrow 1$ a estatística de Hagedorn-Tsallis passa a ter o comportamento previsto pela estatística de Hagedorn - a entropia na formulação de Tsallis passa a perder o termo não-aditivo $q-1$ tornando



(a) Variando q e mantendo a Temperatura fixa na equação 5.5.

(b) Variando a Temperatura mantendo q fixo na equação 5.5.

Figura 5.1: Comparação de ajustes das diferentes teorias.

aditiva como a entropia de Boltzmann-Gibbs. Podemos também notar que com o aumento do valor de q tem-se, conseqüentemente, um aumento da multiplicidade, ou seja, do número de partículas produzidas. Já na Figura 5.1b é mostrado a dependência da formulação Hagedorn-Tsallis com a temperatura. Neste caso o parâmetro q foi fixado e a temperatura foi variada para diversos valores. Neste caso, com o aumento de T , há um deslocamento do pico da distribuição para a direita (p_{\perp} maiores), levando também há um maior número de partículas produzidas.

5.2 Dados Experimentais

5.2.1 Colisões p+p

Para a análise das distribuições foram selecionados dados experimentais de diversos experimentos com a energia do centro de massa dos feixes variando de energias mais baixas - $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$ em experimentos mais antigos, como o *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) no *Brookhaven National Laboratory* (BNL), até à energia mais alta de $7,0 \text{ TeV}$ - no detector *Compact Muon Solenoid* (CMS), parte do LHC. Para

as colisões próton-próton, a Tabela 5.1 referencia a fonte dos dados experimentais utilizados.

Experimento	Energia (em GeV)	Intervalo de η
CMS (LHC)	7000 [54]	$ \eta < 2,4$
CMS (LHC)	2360 [54]	$ \eta < 2,4$
CMS (LHC)	900 [54]	$ \eta < 2,4$
ALICE (LHC)	900 [55]	$ \eta < 0,8$
ATLAS (LHC)	900 [56]	$ \eta < 2,5$
RHIC (BNL)	200 [57]	$3,3 < \eta < 5,0$

Tabela 5.1: Fontes de dados, com suas especificações, para colisões próton-próton

5.2.2 Colisões de Íons Pesados

Para as colisões de Íons Pesados, foram selecionados os dados experimentais resultantes de colisões Au+Au e Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ e 200 GeV. A Tabela 5.2 mostra os tipos de partículas produzidas nos dados selecionados, e também outra propriedade bastante relevante para o estudo realizado neste trabalho, a centralidade.

Tabela 5.2: Fontes de dados, com suas especificações, para colisões de Íons Pesados.

Tipo de colisão	Au+Au		Cu+Cu
Energia (em GeV)	62,4 [58]	200 [59]	200 [60]
Part. produzidas	$\frac{h^+ + h^-}{2}$	π^+	$\frac{h^+ + h^-}{2}$
Intervalo de η	$0,2 < \eta < 1,4$	$ \eta < 0,5$	$0,2 < \eta < 1,4$
Centralidades (%)	0-6	0-12	0-6
	6-15	10-20	6-15
	15-25	20-40	15-25
	25-35	40-60	25-35
	35-45	40-80	35-45
	45-50	60-80	45-50
		0-80 (<i>Minimum bias</i>)	

5.3 Pacotes Computacionais

Para o estudo do comportamento das previsões estatísticas diante dos dados experimentais, discriminados nas tabelas 5.1 e 5.2, foram criados scripts na linguagem

C++ e utilizados pacotes computacionais do framework ROOT [61]. Para os ajustes das equações 5.4 e 5.5 foi utilizado o MINUIT [62], programa de minimização numérica.

6 *Resultados e Análises*

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos para os dados experimentais de diversos tipos de colisões e as previsões segundo a teoria de Hagedorn e a sua generalização. As grandezas termodinâmicas obtidas ao tratar estes sistemas segundo uma ótica macroscópica serão descritas a seguir.

6.1 Melhor ajuste de T e q

Os primeiros procedimentos realizados foram os ajustes das teorias de Hagedorn e a sua generalização nos dados experimentais com os parâmetros T (na teoria de Hagedorn), T , q (na generalização) e c (em ambas as teorias) livres. A seguir, os resultados obtidos para o caso de colisões envolvendo prótons, $p + p$, e, em seguida, para colisões de Íons Pesados, $A + A$.

6.1.1 Colisões $p+p$

Iniciaremos a nossa análise com dados experimentais estudando a distribuição da produção inclusiva de partículas carregadas, *yields* de hádrons carregados: $\frac{h^+ + h^-}{2}$, geradas após colisões $p + p$. As equações de Hagedorn (equação 5.4) e de Hagedorn-Tsallis (equação 5.5), que são aproximações para suas respectivas teorias, foram ajustadas nos dados experimentais identificados na Tabela 5.1. Os ajustes podem

ser verificados na Figura 6.1. É importante mencionar que na elaboração das próximas figuras os dados experimentais de diferentes experimentos foram multiplicados por potências de dez a fim de facilitar a visualização destas em um mesmo gráfico.

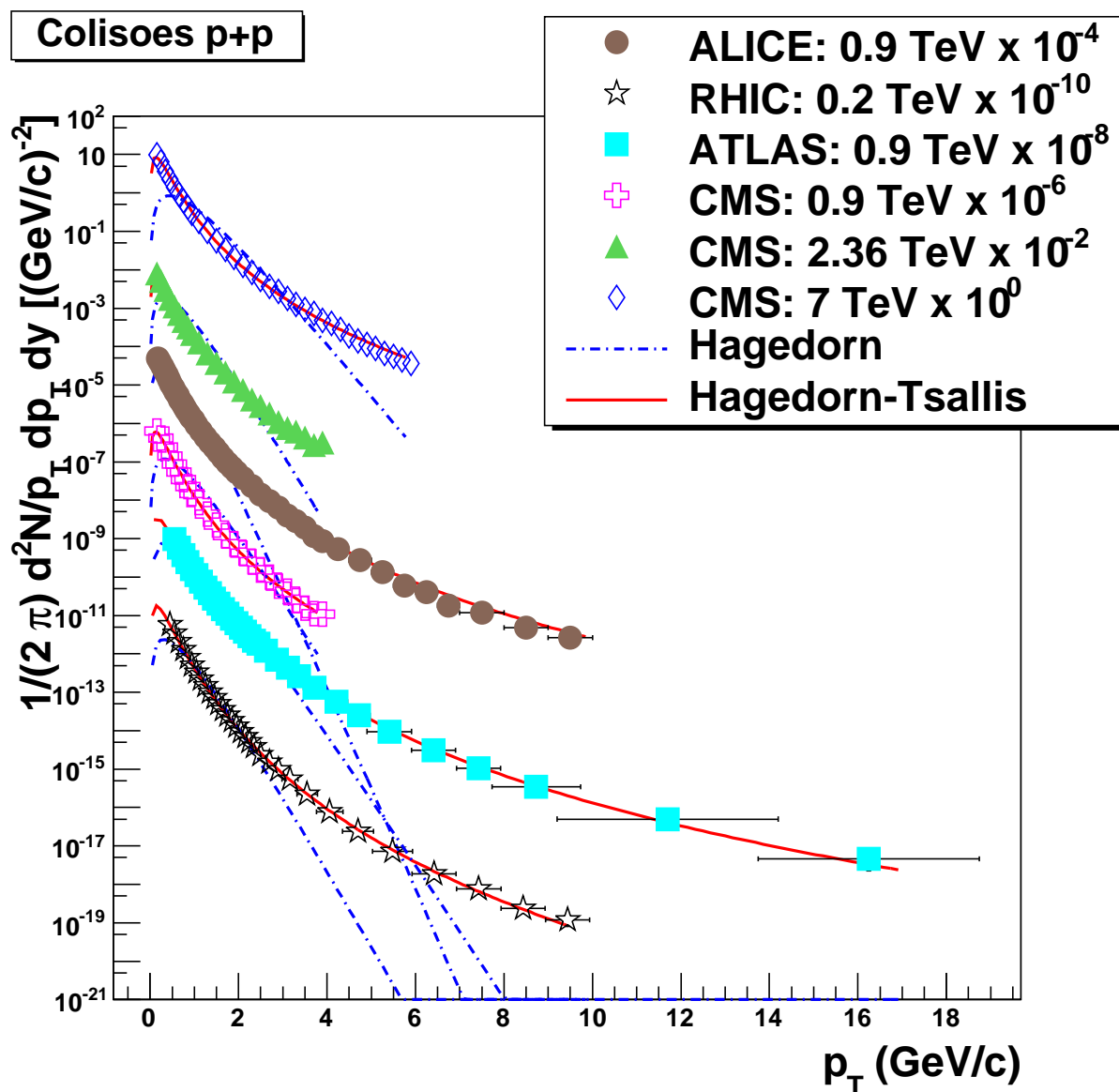


Figura 6.1: Ajuste das equações das teorias de Hagedorn e Hagedorn-Tsallis no espectro de p_{\perp} de diversos dados experimentais (ver Tabela 5.1) resultantes de colisões $p+p$.

Das distribuições na Figura 6.1 podemos observar o caráter exponencial da equação de Hagedorn (linhas azuis) mostrando o rápido decaimento dos ajustes nos espectros, afastando muito rapidamente dos valores experimentais com o aumento de p_{\perp} . Podemos notar que o experimento de mais baixa energia, com $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$, é o que

apresenta um melhor ajuste para a equação de Hagedorn na região de baixos momentos, $\sim p_{\perp} < 2,2 \text{ GeV}/c$. Para todos os outros experimentos, em nenhuma faixa do espectro de momentos os dados experimentais são bem ajustados usando unicamente a estatística de Hagedorn, mostrando que as colisões de partículas com altas energias podem não apresentar um comportamento exponencial até mesmo para o espectro das partículas com baixo momento transversal ($p_{\perp} < 1,5 \text{ GeV}/c$).

Ao contrário do que ocorre com os ajustes da estatística de Hagedorn nas colisões $p+p$, a estatística generalizada de Hagedorn consegue prever os dados experimentais com um bom ajuste para todos os experimentos e em todo o espectro de p_{\perp} , como se pode verificar na Figura 6.1. Os valores obtidos com estes ajustes para T e q , em relação às diferentes energias de centro de massa, estão na Figura 6.2 comparados com outros dados da literatura [63] que foram obtidos para colisões $p+p$ com $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ e colisões $\text{Au}+\text{Au}$ com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ e 200 GeV (ambos com a centralidade *minimum bias*).

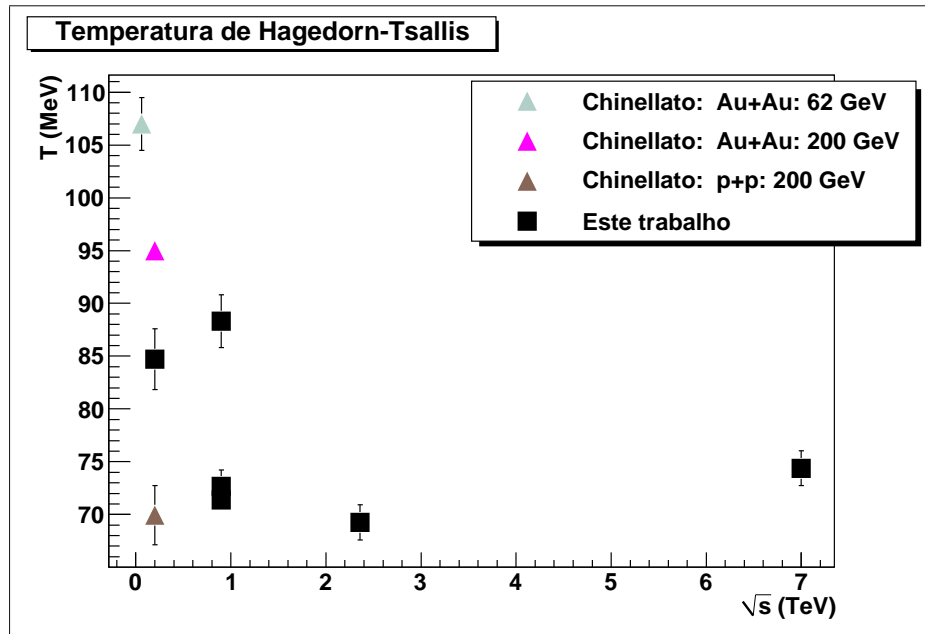
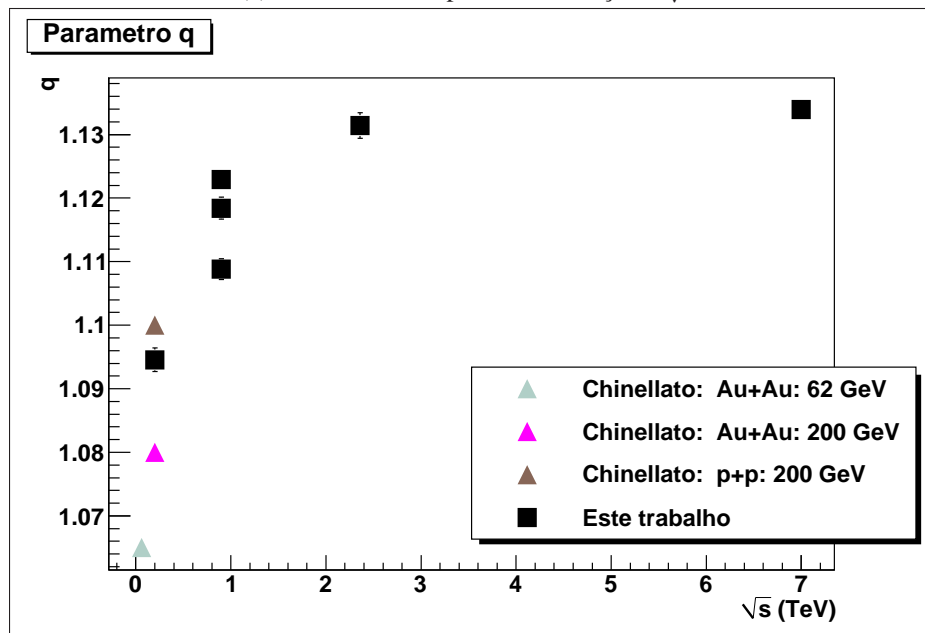
(a) Valores obtidos para T em relação à \sqrt{s} .(b) Valores obtidos para o parâmetro q em relação à \sqrt{s} .

Figura 6.2: Resultados dos ajustes da equação de Hagedorn-Tsallis (equação 5.5) nos dados experimentais da Tabela 5.1. Dados comparados com [63].

6.1.2 Colisões de Íons Pesados

Assim como foi feito um estudo do comportamento das previsões das teorias estatísticas em colisões $p + p$, também foi feito um estudo do desempenho destas em colisões $A + A$. Neste caso há mais um fator a ponderar: as diferentes centralidades possíveis. Por esse motivo foi feito um estudo da sensibilidade dos parâmetros das funções estatísticas nos espectros de diversas centralidades, identificadas na Tabela 5.2. A Figura 6.3 mostra os ajustes das equações referentes às teorias estatísticas estudadas neste trabalho nos dados experimentais de colisões Au+Au com energia $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV (Figura 6.3a), Au+Au com energia $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV (Figura 6.3b) e Cu+Cu com energia $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV (Figura 6.3c).

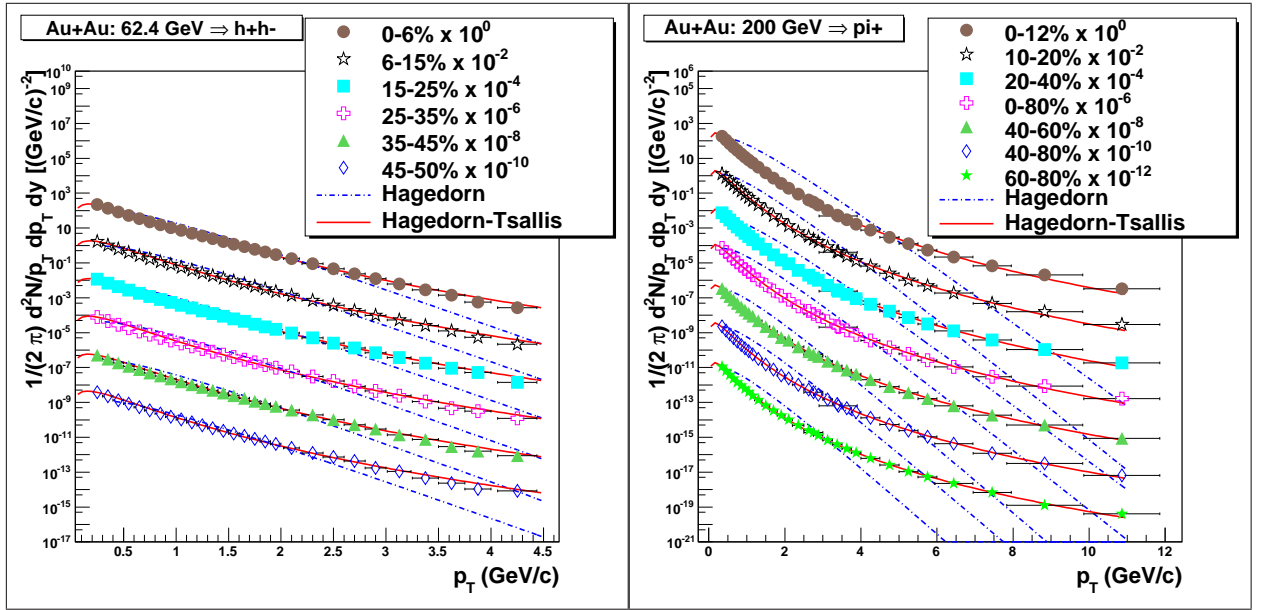
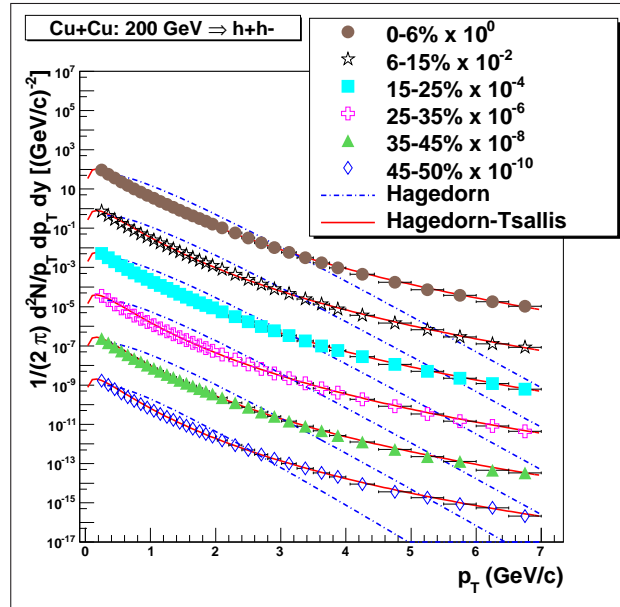
(a) Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.(b) Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.(c) Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

Figura 6.3: Ajuste das equações das teorias de Hagedorn e Hagedorn-Tsallis para diversas centralidades em colisões $A + A$ identificadas na Tabela 5.2.

Assim como no caso das colisões $p + p$, das distribuições na Figura 6.3 podemos observar o caráter exponencial da equação de Hagedorn (linhas azuis) mostrando o rápido decaimento dos ajustes nos espectros, afastando muito rapidamente dos valores experimentais com o aumento de p_{\perp} . Os melhores ajustes da teoria de Hagedorn foram para as centralidades do caso $Au + Au$ com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV, devido ao fato desta ser a menor energia entre os casos estudados. Comparando os ajustes da

teoria de Hagedorn nas colisões $Au + Au$ e $Cu + Cu$ com a mesma energia do centro de massa, $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, os dados para $Cu + Cu$ foram melhores ajustados. Isso está relacionado com as faixas de ajuste de p_{\perp} serem menores para $Cu + Cu$, pois, como a teoria de Hagedorn possui um comportamento exponencial e as distribuições um comportamento lei-de-potência, dados que possuírem um espectro maior vão apresentar resultados mais divergentes em relação às previsões da estatística de Boltzmann-Gibbs devido ao distanciamento dos valores experimentais com o aumento de p_{\perp} . Em ambos os casos com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV podemos notar que para nenhuma centralidade e em nenhuma faixa do espectro de momentos (e.g.: $p_{\perp} < 1,5$ GeV/c) os dados experimentais são bem ajustados usando unicamente a estatística de Hagedorn. Os valores obtidos para T nos ajustes da equação 5.4 são apresentados na Figura 6.4. Observe que as barras no eixo x dizem respeito ao intervalo da centralidade, que está relacionada ao número de nucleons participantes no processo de colisão. Dos resultados apresentados na Figura 6.4 apenas o caso $Au + Au$ com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV (Figura 6.4a) possui os valores dentro da faixa prevista na literatura, lembrando que para os demais casos a teoria de Hagedorn não descreveu de forma bem sucedida os dados experimentais.

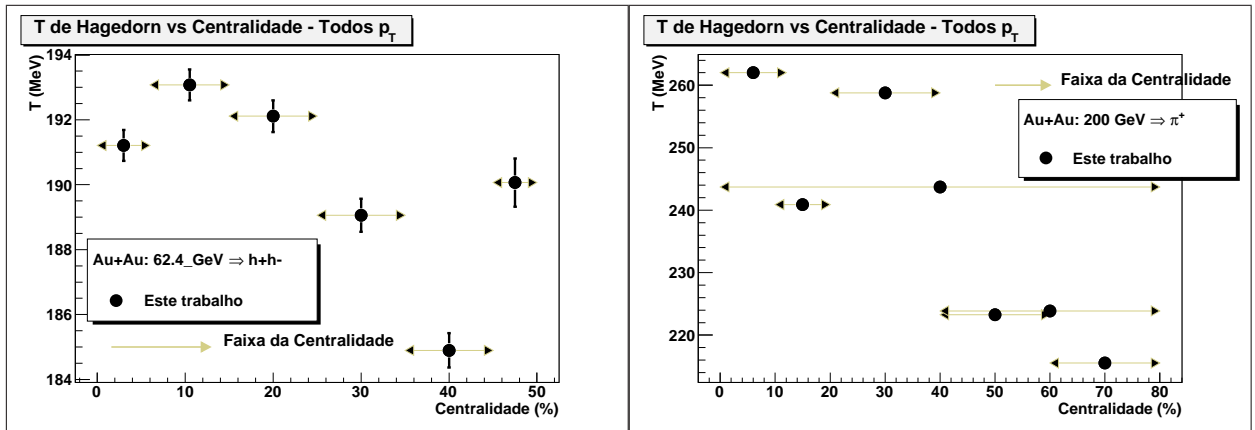
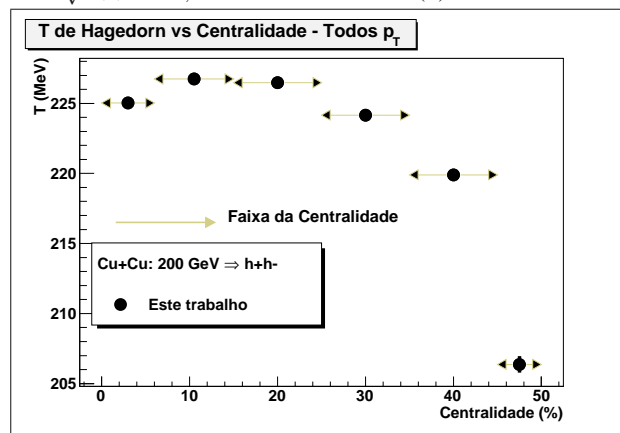
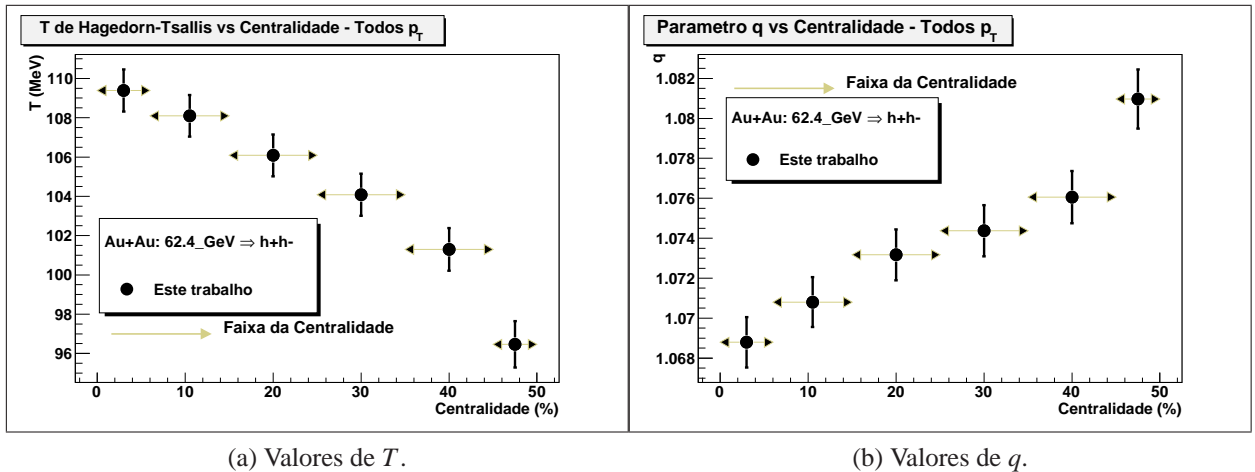
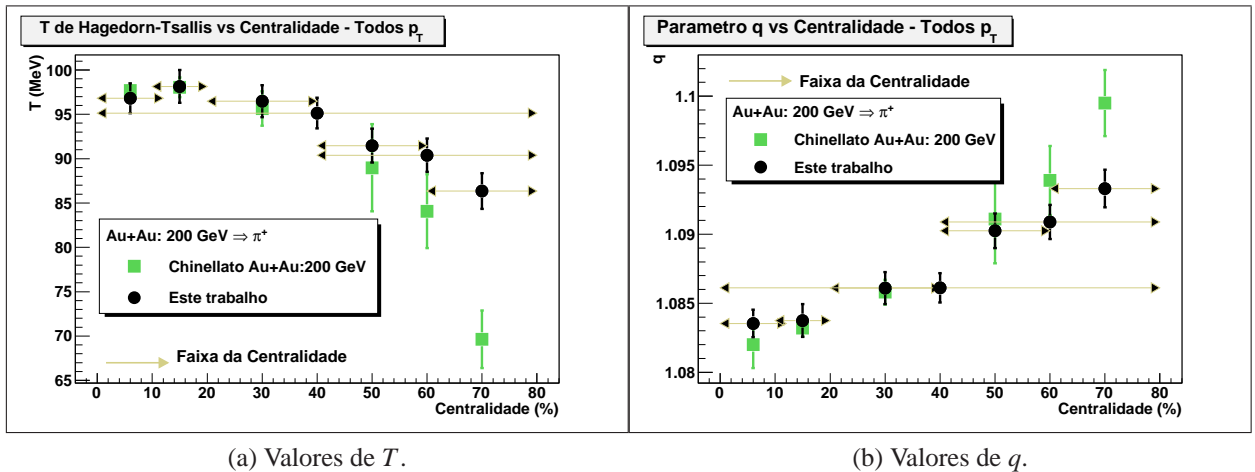
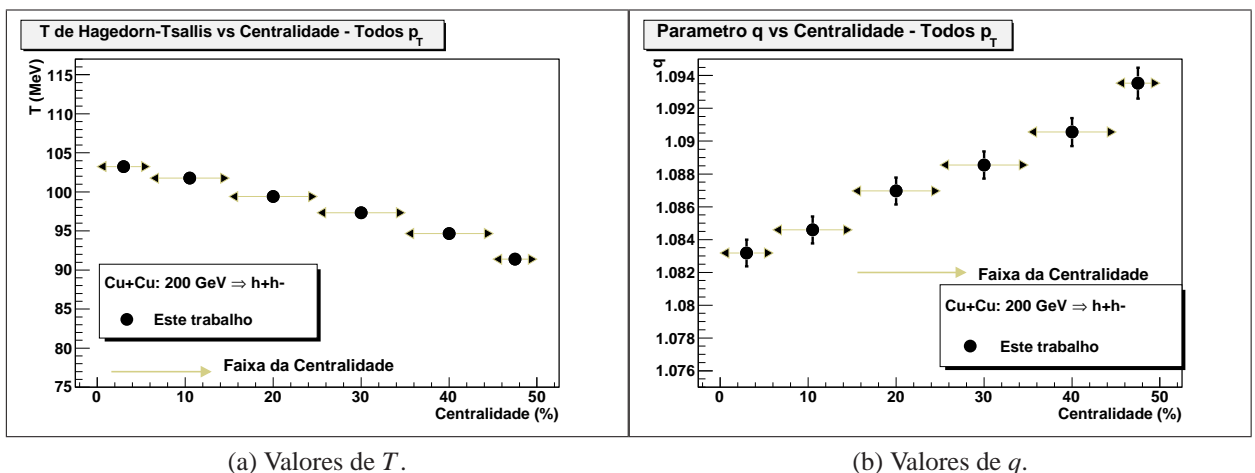
(a) Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.(b) Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.(c) Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

Figura 6.4: Valores obtidos para T com os ajustes da equação de Hagedorn em diversas centralidades de colisões $A + A$ identificadas na Tabela 5.2.

Assim como ocorreu para as colisões $p + p$, a estatística derivada da generalização da teoria de Hagedorn apresentou bons resultados com os ajustes das centralidades em todo o espectro de p_{\perp} , como se pode verificar na Figura 6.3. As Figuras 6.5, 6.6 e 6.7 permitem visualizar uma possível “anti-correlação” entre os parâmetros q e T , resultantes dos ajustes da equação de Hagedorn-Tsallis. Para o caso das colisões Au+Au com $\sqrt{s} = 200$ GeV, os resultados foram comparados com os da referência [63], que foram obtidos para caso de colisão de $Au + Au$ com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. A referência [63] também indica a anti-correlação entre esses parâmetros com relação às centralidades. [63] observou que à medida que a centralidade aumenta, ou seja, diminui o número de participantes no processo de colisão, os valores de T diminuem e os valores de q aumentam, e indicou que em colisões menos centrais as partículas estão

mais correlacionadas, levando-o a considerar o parâmetro q uma poderosa ferramenta para o estudo da produção de jatos, que estão profundamente ligados à fonte de correlação das partículas - indicador do fenômeno em que ocorre a redução da energia através da interação dos jatos emergentes das colisões com o meio, conhecido como *jet quenching*.

(a) Valores de T .(b) Valores de q .Figura 6.5: Resultados para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.(a) Valores de T .(b) Valores de q .Figura 6.6: Resultados para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Dados comparados com [63].(a) Valores de T .(b) Valores de q .Figura 6.7: Resultados para colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

6.2 Análises Estatísticas

Na seção anterior vimos que as predições da generalização de Hagedorn foram notavelmente bem sucedidas nas comparações com os dados experimentais. Entretanto, foi feita uma análise mais aprofundada do comportamento da função de Hagedorn-Tsallis nos ajustes dos dados experimentais. Para cada ajuste, de cada tipo de colisão, de cada energia e/ou centralidade, foram medidas:

- Matriz de Covariância dos parâmetros livres:

– C , T e q ;

- Apartir da Matriz de Covariância foram feitos gráficos de *curvas de níveis* para os parâmetros q e T ;
- Correlação entre os parâmetros q e T ;
- Propagação das incertezas relativas aos ajustes: $1 \pm \frac{\sigma(x)}{f(x)}$

sendo

$$\sigma(x) = \sum_{i,j}^N \frac{\partial f(x)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial c_j} \cdot COV(i, j), \quad (6.1)$$

onde c_i é i -ésimo parâmetro de ajuste (C , T ou q) e COV a Matriz de Covariância.

- Resíduos:

$$r = \frac{(y - f(x))}{\sqrt{ey^2 + (\frac{1}{2}(exl + exh) \frac{df(x)}{dx})^2}}. \quad (6.2)$$

O resíduo é calculado usando um método conhecido como *variância efetiva*. Esse método faz o *rebatimento* em y devido às incertezas em x e através deste método também é computado o χ^2 . Mais detalhes podem ser obtidos em [61].

Essas medidas, para alguns casos, estão representadas nas Figuras 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11. Os demais podem ser verificados no Apêndice A.

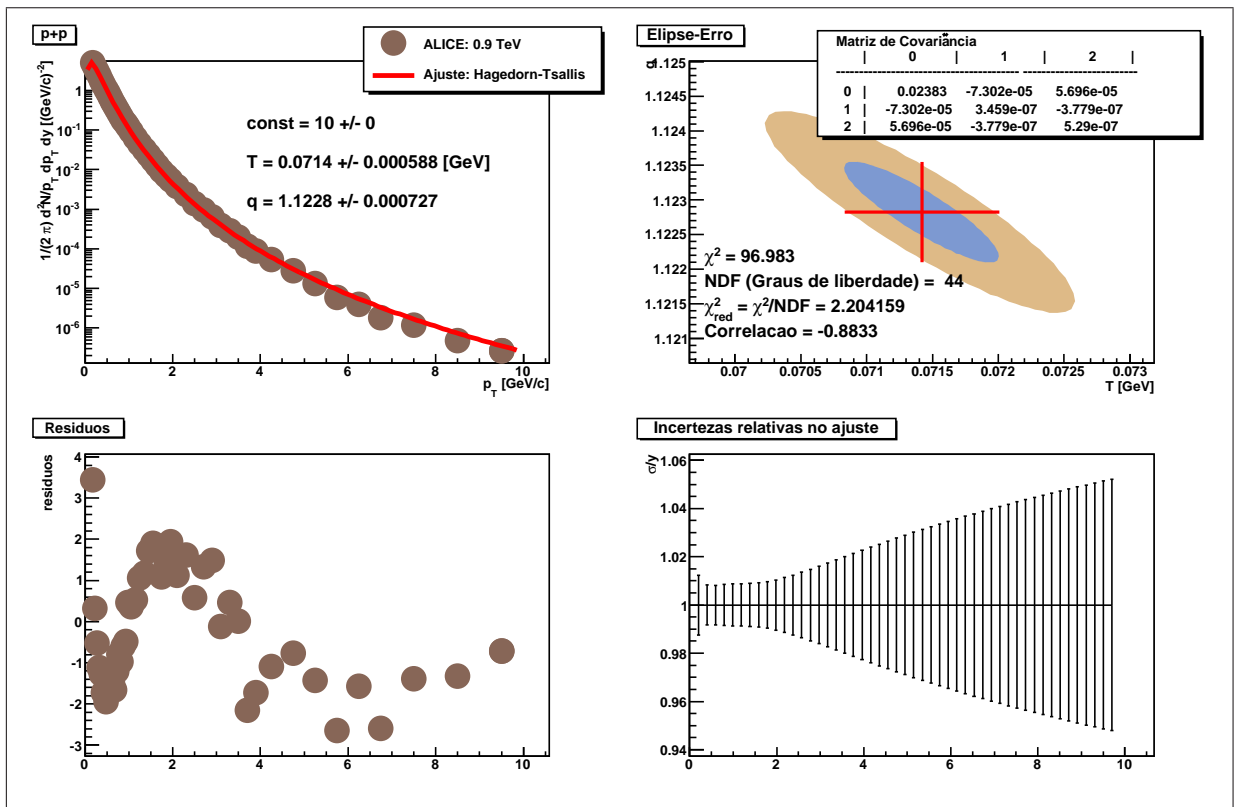


Figura 6.8: Variáveis estatísticas. Experimento ALICE: p+p com $\sqrt{s} = 900$ GeV.

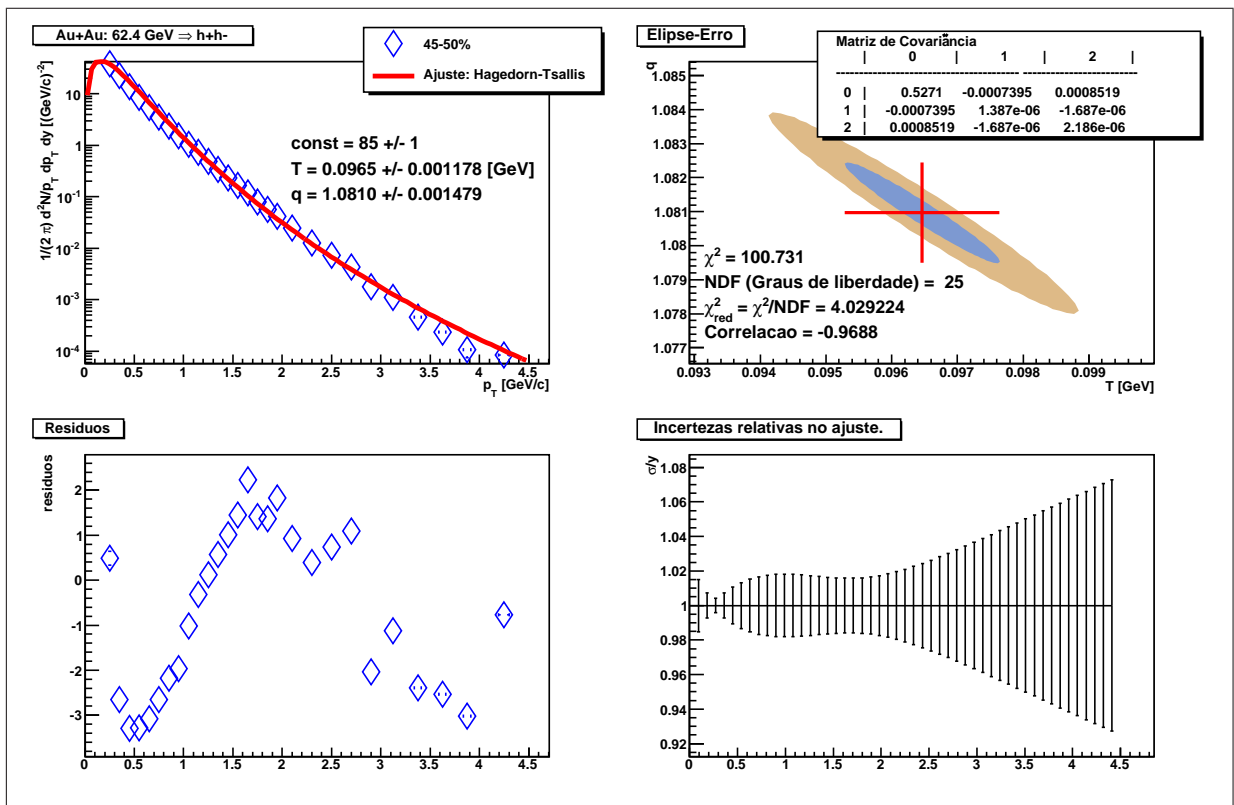


Figura 6.9: Variáveis estatísticas. Centralidade: 45 - 50 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.

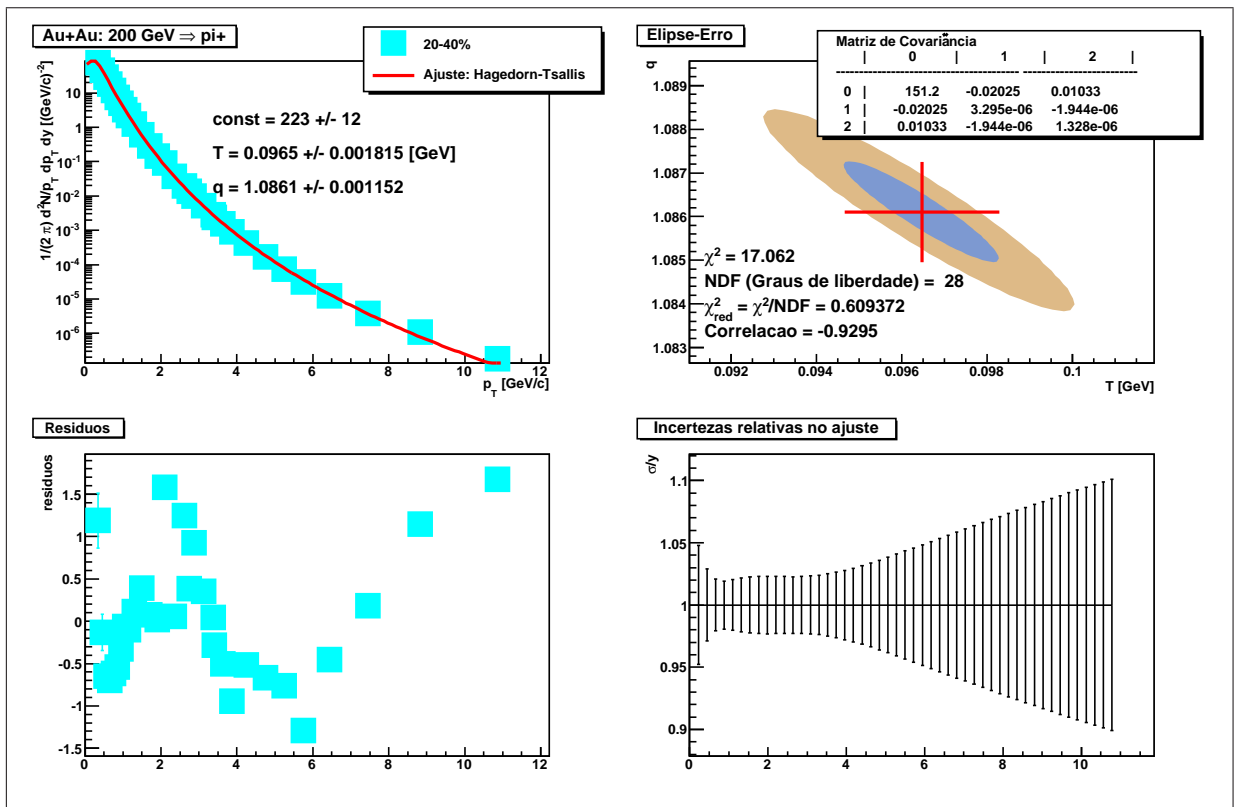


Figura 6.10: Variáveis estatísticas. Centralidade: 20 - 40 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

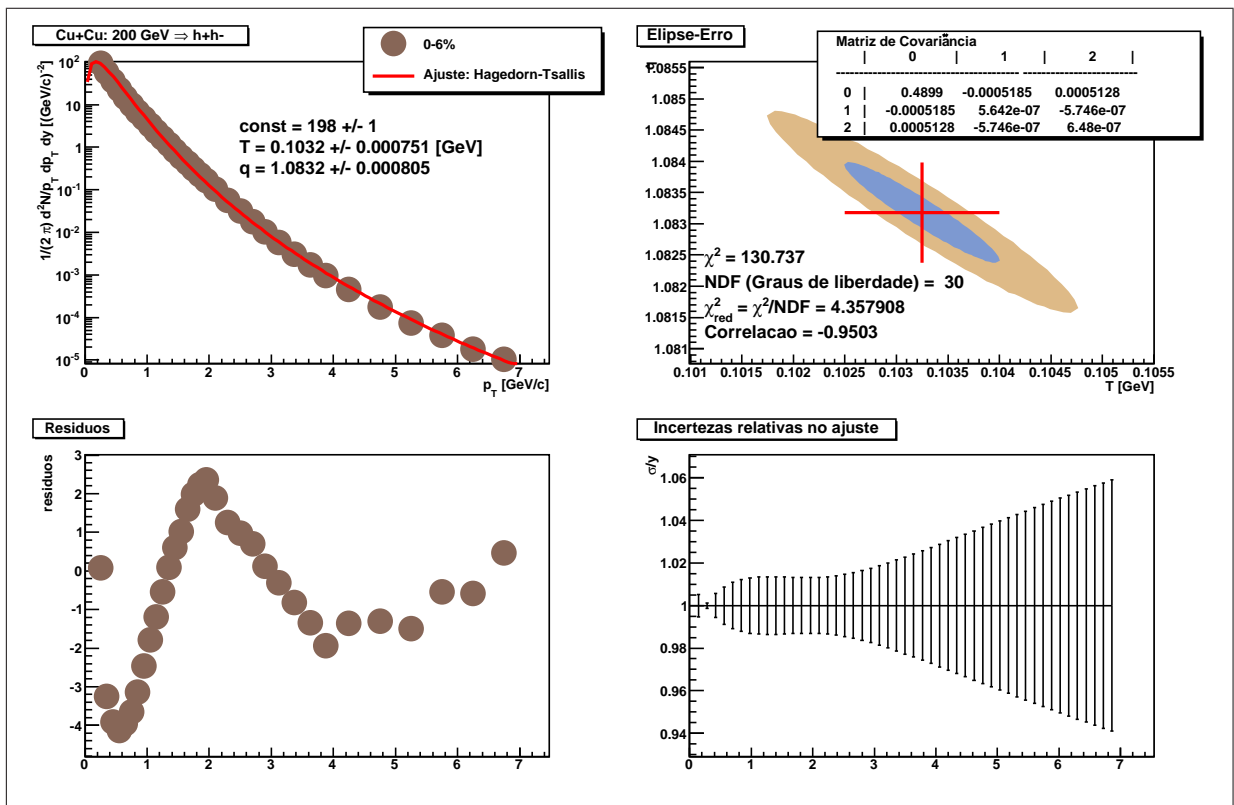


Figura 6.11: Variáveis estatísticas. Centralidade: 0 - 6 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

Pode-se verificar que para todos os casos a correlação foi negativa e maior do que 0,9, indicando, ao menos estatisticamente, uma correlação *muito* forte entre os parâmetros q e T . O fato da correlação ser negativa significa que à medida que o valor de um parâmetro aumenta, o outro diminui. A formação da elipse no gráfico da curva de níveis é uma representação gráfica dessa correlação. Os gráficos das incertezas relativas nos ajustes mostram um decaimento mais rápido de $f(x)$ com relação às incertezas, i.e., com o aumento de p_{\perp} os valores de $f(x)$ decaem com uma taxa maior do que as incertezas.

A grande maioria dos valores obtidos para os resíduos estão no intervalo de 3 e -3. Alguns casos das colisões $Au + Au$ a 62,4 GeV e $Cu + Cu$ os resíduos ultrapassaram o valor de $|3|$. Estes valores foram percebidos em intervalos com $p_{\perp} < 0,86$. Vale lembrar que a equação utilizada nos ajustes (equação 5.5) é, de fato, uma aproximação para altos p_{\perp} , e os valores mais elevados dos resíduos foram observados em intervalos de baixo p_{\perp} .

6.2.1 Corte para baixos p_{\perp}

Com o objetivo de melhorar as previsões desta equação foram feitos cortes para baixos p_{\perp} , utilizando como critério para os cortes o valor de $p_{\perp} < 0,86$. Os únicos dados que não receberam o corte foram os do experimento CMS (colisões $p + p$), pois apresentam um pequeno intervalo de p_{\perp} . A Figura 6.12 mostra alguns resultados obtidos com o corte para baixos p_{\perp} , os demais resultados podem ser verificados no Apêndice A. Com o corte foram eliminados os valores indesejados dos resíduos.

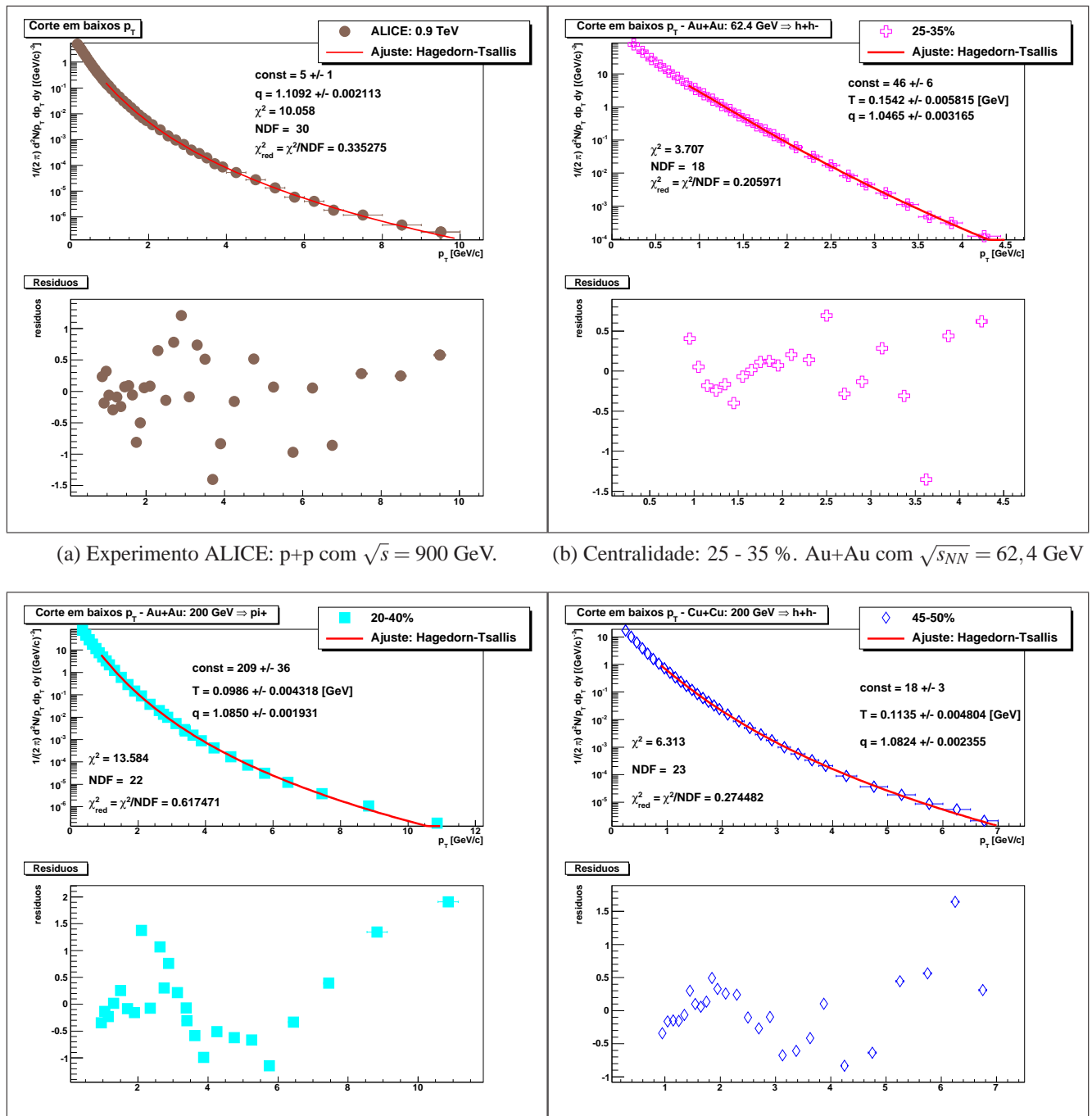


Figura 6.12: Corte para baixos p_{\perp} .

A Tabela 6.1 compara os valores obtidos de χ^2 por graus de liberdade, ndf , para os diferentes intervalos de ajustes, i.e., os ajustes em todo o espectro de p_{\perp} (coluna “*tudo intervalo de p_{\perp}* ”) e os ajustes com os cortes para baixos p_{\perp} (coluna “*corte para baixos p_{\perp}* ”). Como esperado, ao reduzir o intervalo de ajuste, obtém também uma redução nos valores de χ^2 , devido à redução do número de dados experimentais, acarretando

também na redução do número de graus de liberdade, ndf .

Tabela 6.1: Comparação dos valores de χ^2 por ndf (graus de liberdade) para os ajustes em todo o espectro de p_{\perp} (coluna “*todo intervalo de p_{\perp}* ”) e os ajustes com os cortes para baixos p_{\perp} (coluna “*corte para baixos p_{\perp}* ”).

		todo intervalo de p_{\perp}	corte para baixos p_{\perp}
p+p			
Experimento	\sqrt{s} [GeV]	χ^2/ndf	
CMS (LHC)	7000 [54]	73,28/30	73,28/30
CMS (LHC)	2360 [54]	26,36/20	26,36/20
CMS (LHC)	900 [54]	36,93/20	36,93/20
ALICE (LHC)	900 [55]	96,46/43	9,714/29
ATLAS (LHC)	900 [56]	7,771/30	3,388/26
RHIC (BNL)	200 [57]	4,810/29	4,457/24
Centralidades		χ^2/ndf	
Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV			
0-6%		194,7/25	2,445/18
6-15%		181,9/25	1,688/18
15-25%		172,8/25	3,072/18
25-35%		163,2/25	3,707/18
35-45%		140,2/25	4,714/18
45-50%		100,7/25	8,131/18
Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV			
0-12%		36,67/28	31,09/22
10-20%		19,51/28	16,17/22
20-40%		17,06/28	13,58/22
MinBias (0-80%)		20,95/28	18,13/22
40-60%		13,83/27	8,279/21
40-80%		14,76/28	8,375/22
60-80%		15,96/27	7,700/21
Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV			
0-6%		130,7/30	21,42/23
6-15%		123,4/30	16,68/23
15-25%		110,6/30	12,40/23
25-35%		104,8/30	7,548/23
35-45%		95,14/30	9,490/23
45-50%		75,27/30	6,313/23

As Figuras 6.13, 6.14, 6.15 e 6.16 mostram os valores obtidos para os parâmetros q e T nos ajustes com os cortes para baixos p_{\perp} . Ao comparar estas figuras com as Figuras 6.2, 6.5, 6.6 e 6.7, pode-se notar que o corte nos intervalos de ajustes

implicou em um aumento nos valores das incertezas. No caso das colisões de Íons Pesados, também se pode observar que com o corte houve uma considerável redução da sensibilidade dos parâmetros q e T às diferentes centralidades, pelo fato dos resultados serem aproximadamente constantes. Neste caso, houve também um aumento nas incertezas de ambos os parâmetros, que pode ser explicado pelo fato de com o corte em baixos p_{\perp} , há uma redução de ndf e, conseqüentemente, do χ^2 (ver Tabela 6.1), significando um acréscimo nos possíveis valores tanto de q quanto de T para os ajustes. Outra forma de entender o aumento na incerteza de T está relacionada com a evidência de que a média dos valores dos momentos se encontra na região de baixos p_{\perp} e que com o corte é eliminado uma considerável parcela das partículas que possuem um peso na informação cinemática.

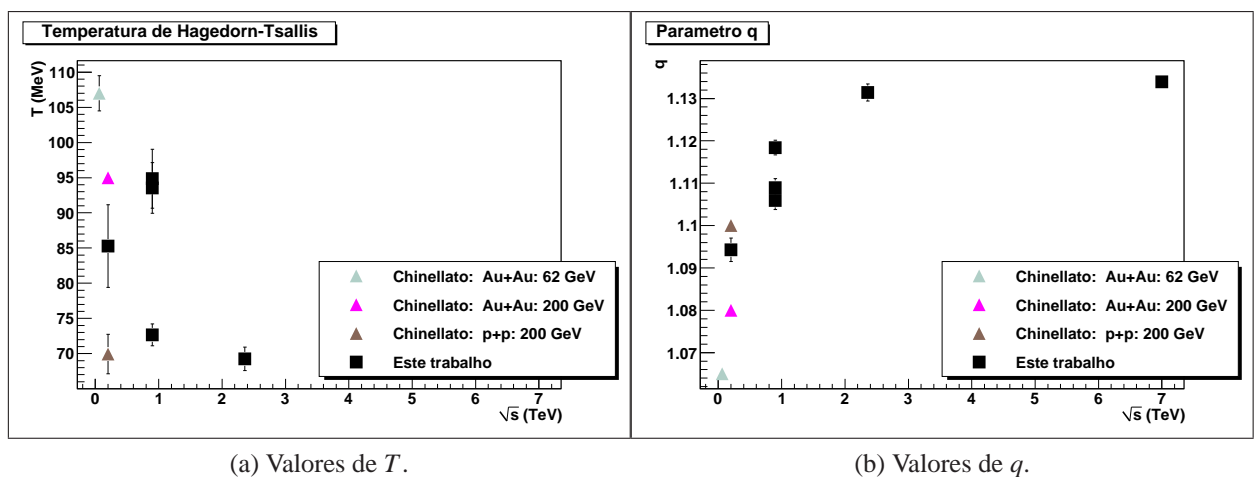


Figura 6.13: Corte para baixos p_{\perp} . Colisões p+p para diversas energias. Dados comparados com [63].

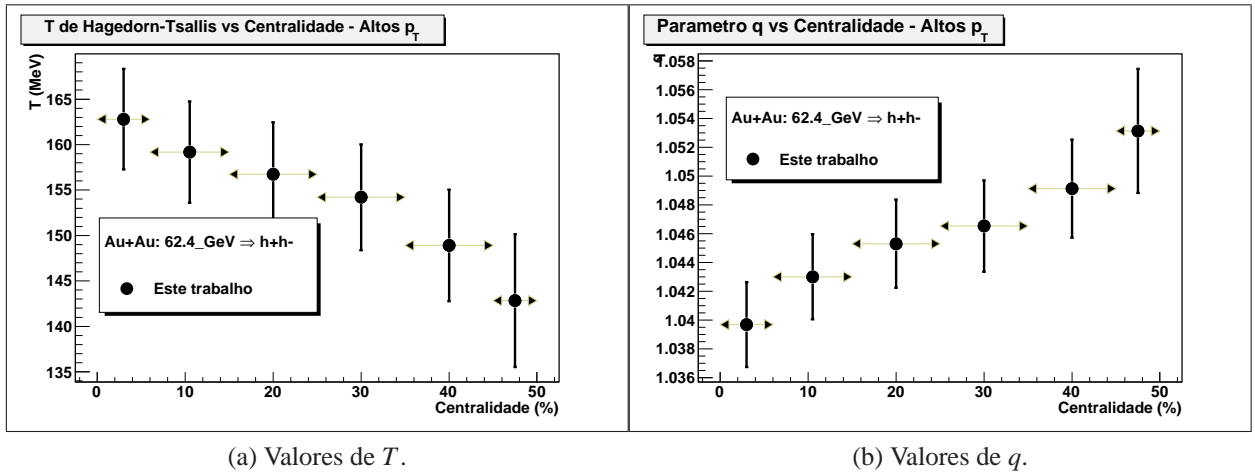


Figura 6.14: Corte para baixos p_{\perp} . Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.

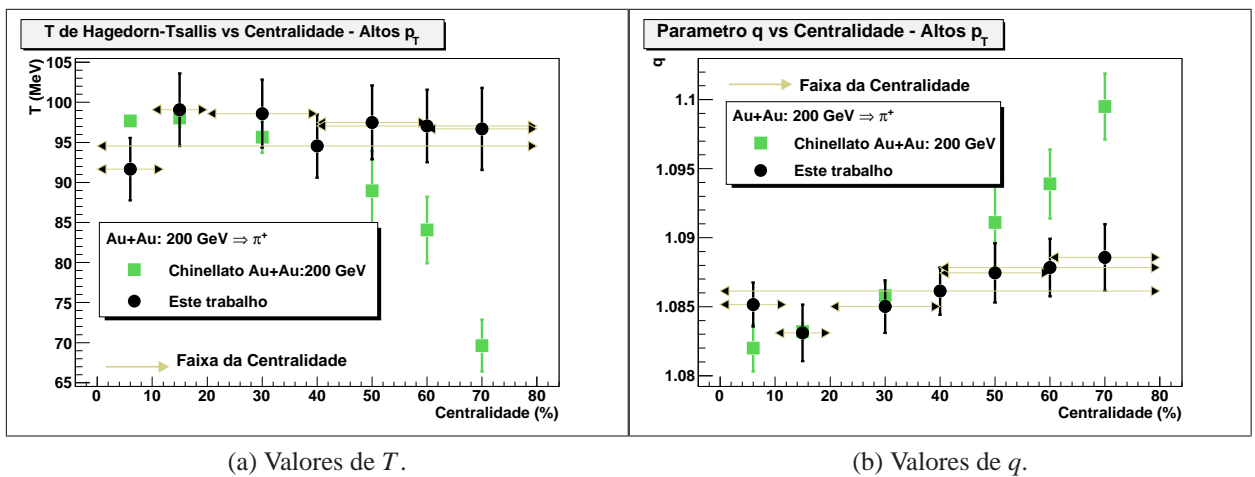


Figura 6.15: Corte para baixos p_{\perp} . Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Dados comparados com [63].

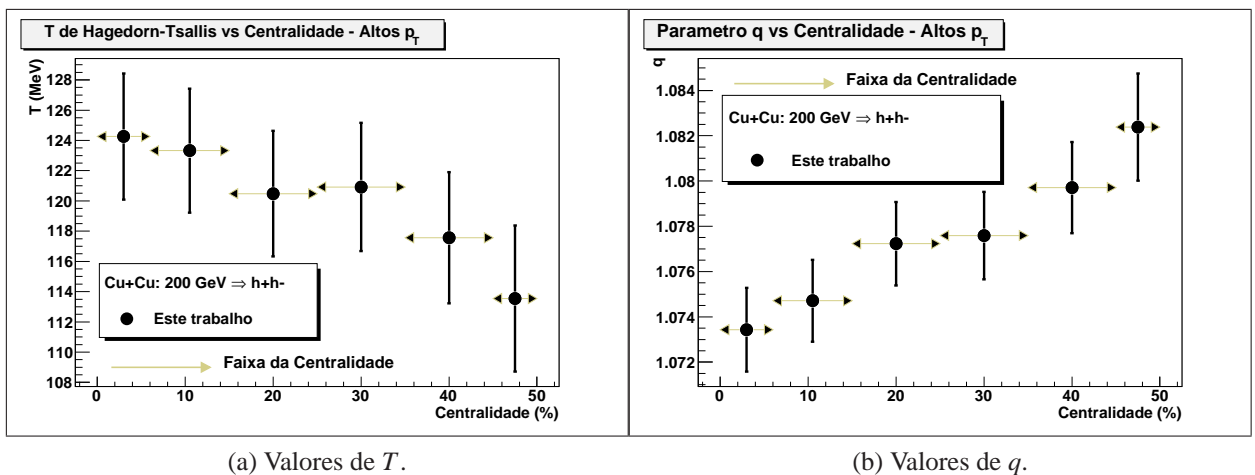


Figura 6.16: Corte para baixos p_{\perp} . Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

6.3 Dependência de q e T

Uma vez que na seção 6.2 foi observada uma alta correlação estatística entre q e T (negativa e com módulo maior do que 0,9 para todos os casos), foi feita uma análise do comportamento de T em função de q .

As Figuras 6.17, 6.18, 6.19, 6.20 e 6.21 mostram os relacionamentos entre os parâmetros q e T , considerados livres, para os casos em que foi feito o ajuste em todo o intervalo de p_{\perp} (a), e para os casos em que foram feitos os ajustes com o corte para baixos p_{\perp} (b). Observe que para a maioria dos casos foi obtido a temperatura de hadronização T_0 ao ajustar a função da temperatura efetiva T_{eff} , função 4.31. A Figura 6.17 se diferencia das demais pelo fato de que os valores obtidos para os parâmetros foram para diferentes energias (colisões $p + p$), enquanto que para os demais casos, diferentes centralidades (colisões $A + A$). Para as colisões $p + p$, os resultados não apresentam uma linearidade com relação à função de T_{eff} . Nos casos dos íons pesados, as Figuras 6.18a, 6.18b, 6.19a, 6.20a e 6.20b mostram uma linearidade, enquanto que a Figura 6.19b mostra a perda de linearidade com o corte para baixos momentos e um aumento da densidade dos valores em uma determinada região do gráfico.

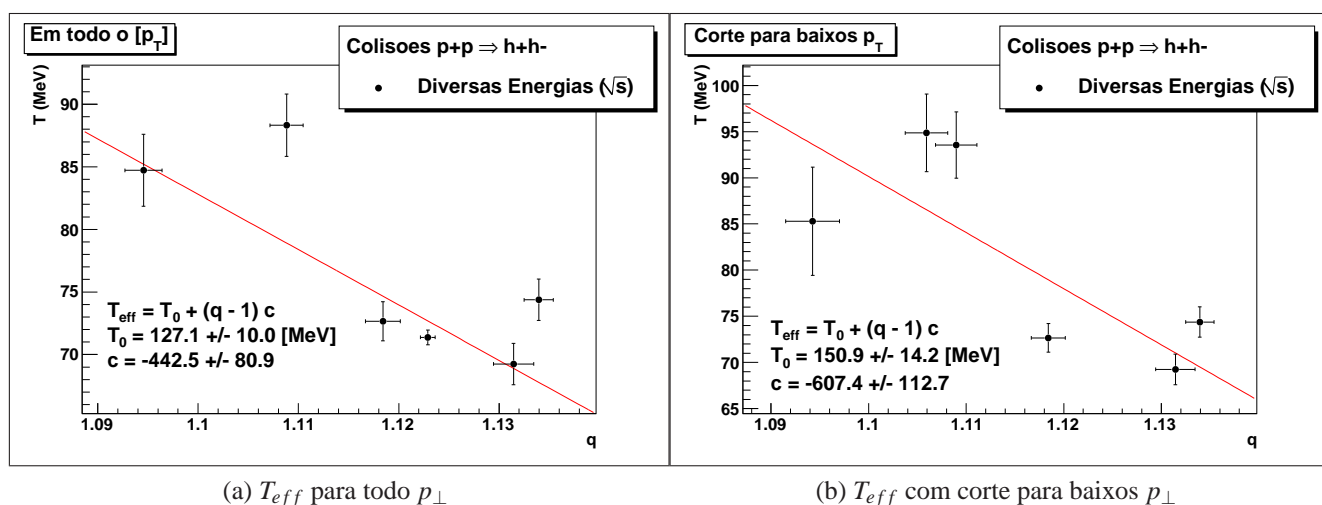


Figura 6.17: Colisões $p+p$.

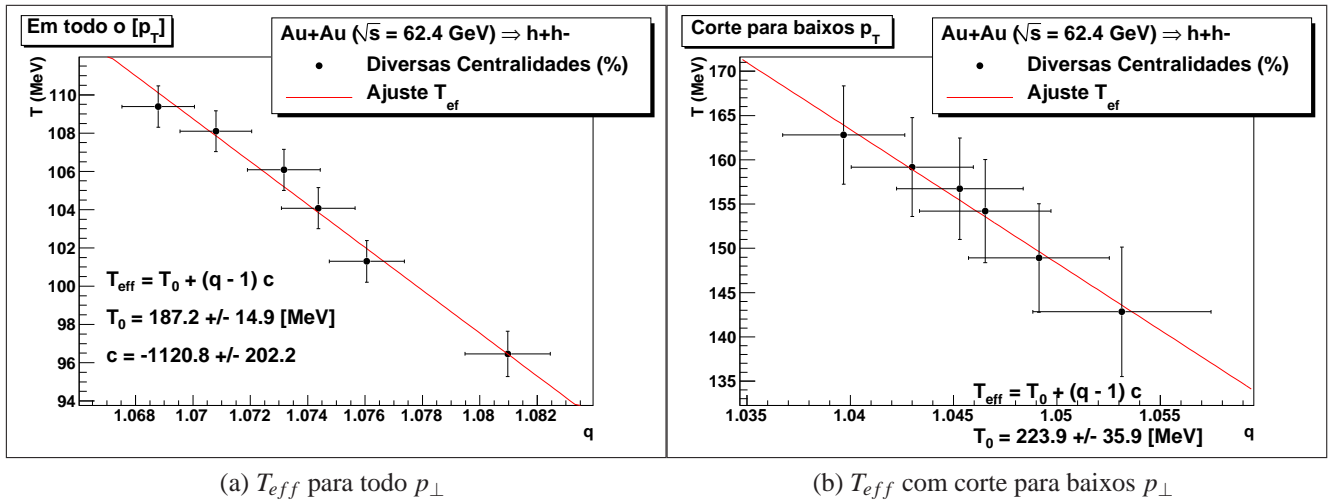


Figura 6.18: Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.

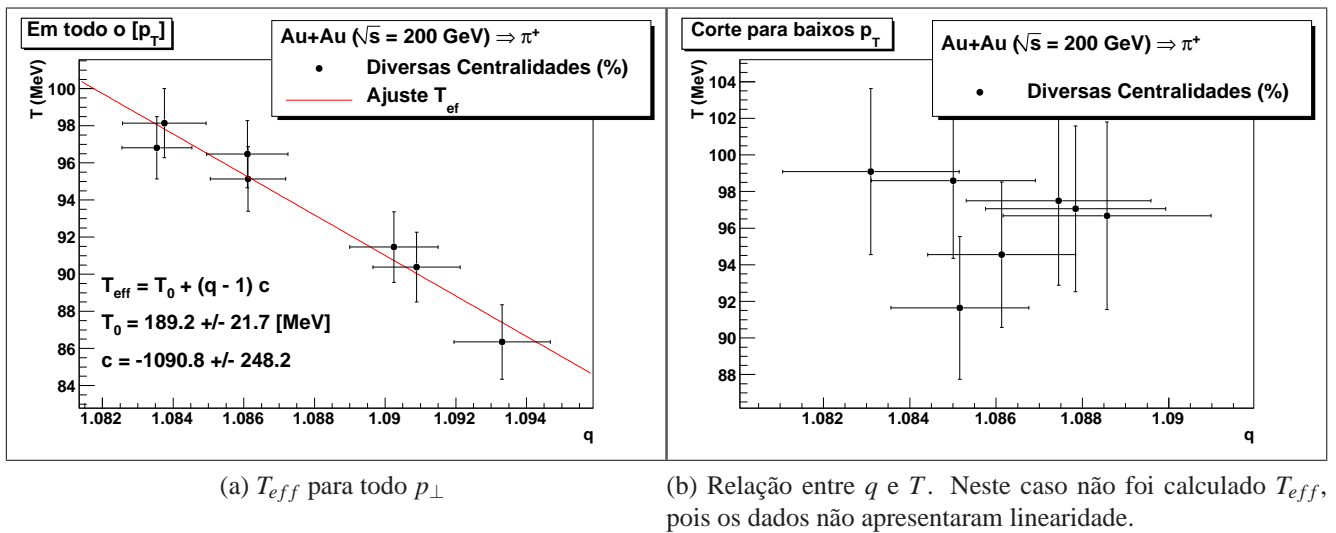


Figura 6.19: Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

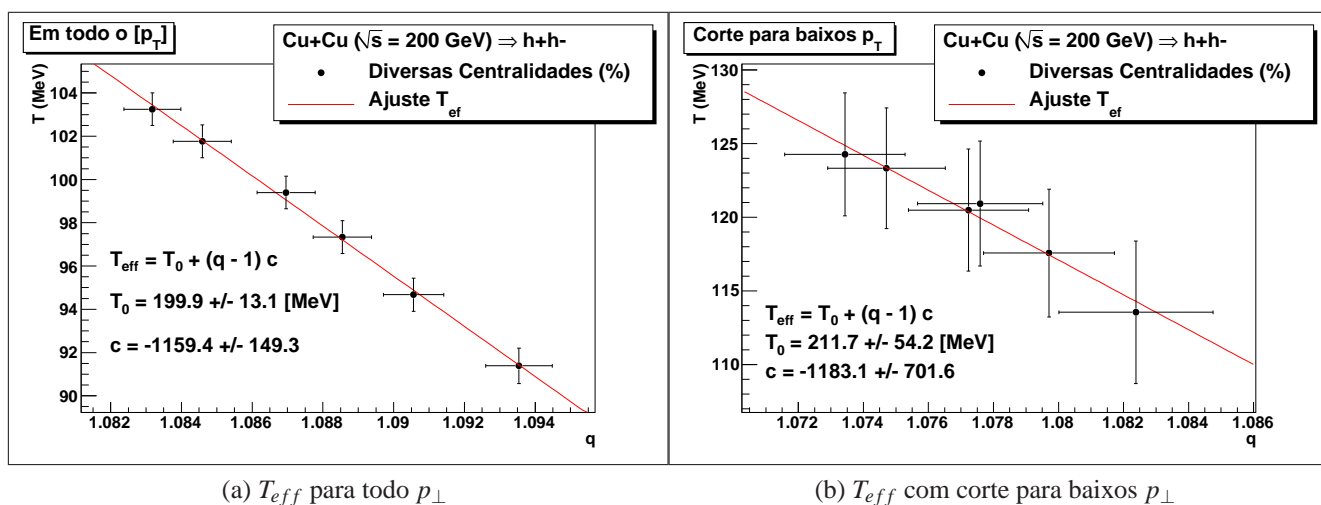


Figura 6.20: Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

Na Figura 6.21 foi feita uma análise dos valores obtidos para os parâmetros q e T para todos os dados analisados neste trabalho. Pode-se perceber que os maiores valores de q são os resultados dos ajustes nas colisões $p + p$.

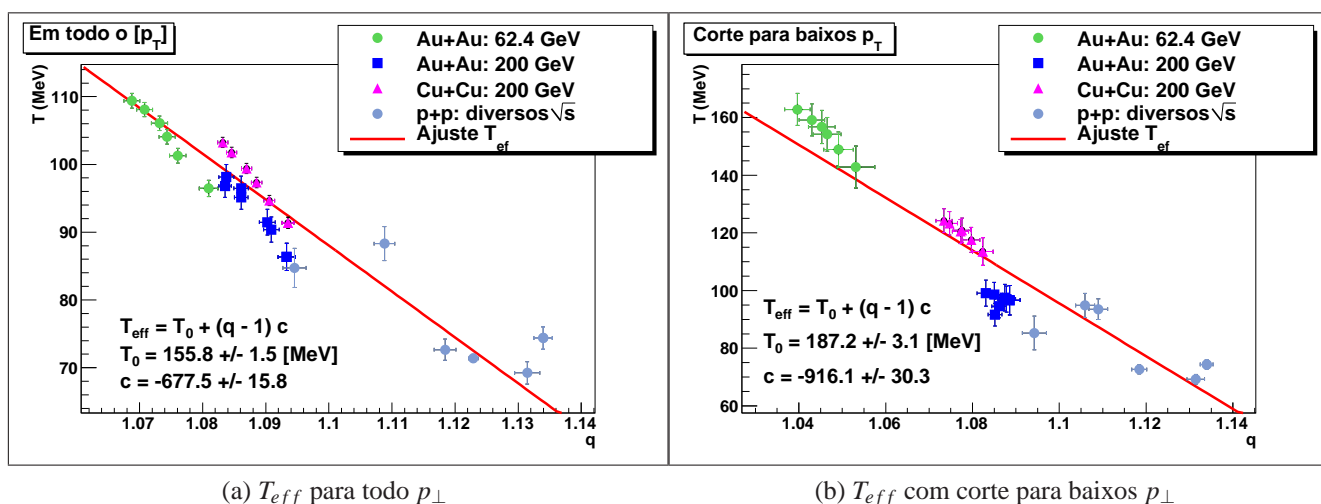


Figura 6.21: Diversos A+A com diversos $\sqrt{s_{NN}}$ e centralidades.

6.4 Fixando a Temperatura

Nessa seção, iremos fixar o valor da temperatura para as distribuições da estatística de Hagedorn-Tsallis. A principal motivação física é a de que ao tratarmos a temperatura como fixa, estamos considerando que toda a energia disponibilizada no

processo de colisão é utilizada para a produção de partículas, i.e., a velocidade de expansão do sistema é suficientemente rápida, e mantém T fixo. Na seção 6.2.1 vimos que foram realizados ajustes com os cortes para baixos p_{\perp} , devido à equação de ajuste (equação 5.5) ser uma aproximação para altos p_{\perp} . Com os resultados obtidos para estes cortes, foi observado que os valores de q e T foram aproximadamente constantes, mostrando uma insensibilidade em relação às energias do centro de massa e às centralidades. O fato dos resultados para T terem ficado aproximadamente constante contribui com a nossa motivação de mantermos T fixo, além de eliminarmos um parâmetro livre e, conseqüentemente, aumentar em um grau de liberdade os ajustes. Foram então escolhidas diversas temperaturas para fixar esse parâmetro na teoria de Hagedorn-Tsallis, deixando unicamente os parâmetros q e c como parâmetros livres, e observar o comportamento da função estatística. Os resultados dos ajustes nas distribuições de p_{\perp} dos diversos dados experimentais podem ser verificados na Figura 6.22 (colisões p+p) e nas Figuras 6.23, 6.24 e 6.25 (colisões $A + A$). Nestas figuras vemos que mesmo fixando T em valores diferentes daqueles obtidos considerando T como livre, a função estatística de Hagedorn-Tsallis consegue ajustar os dados experimentais.

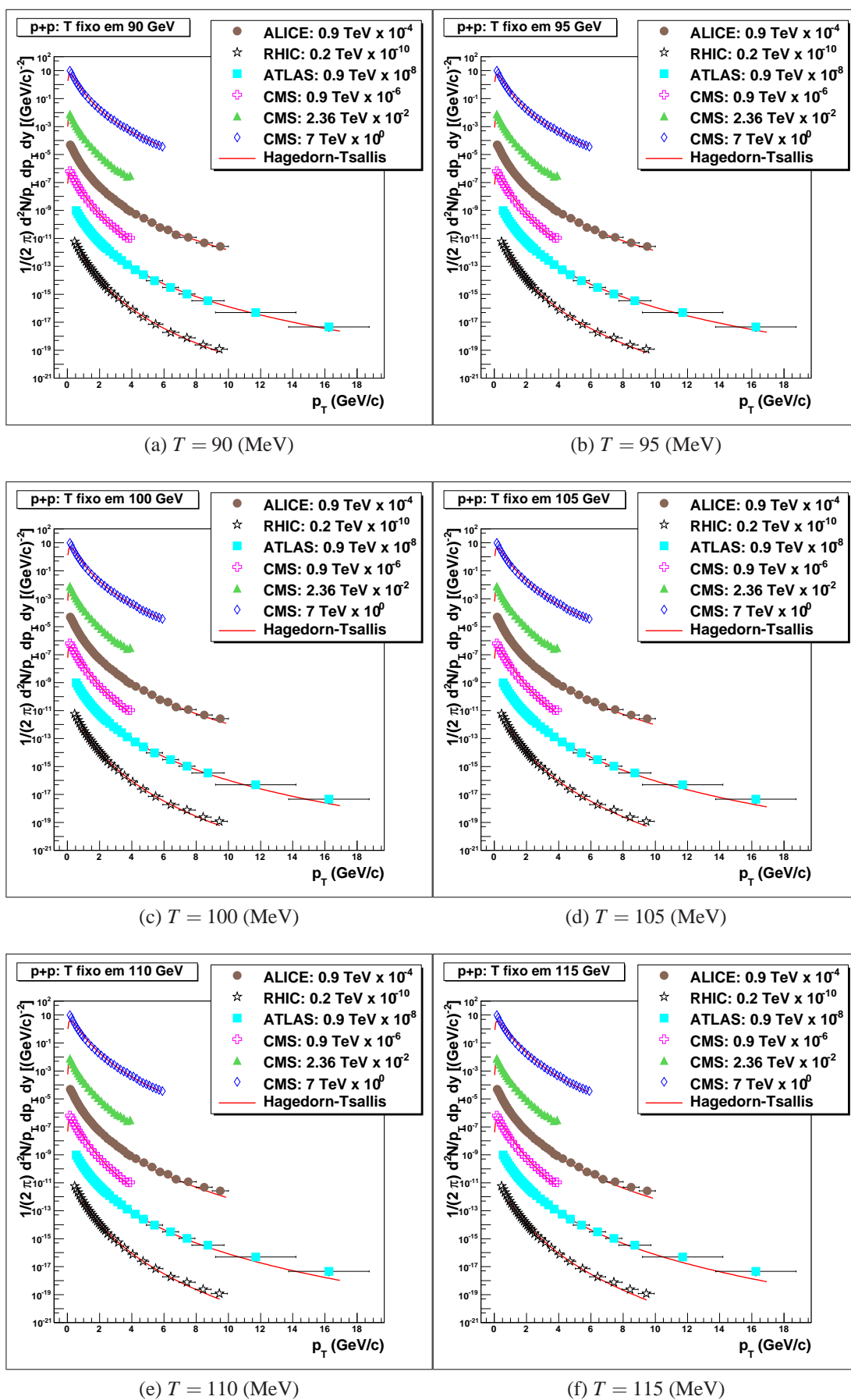


Figura 6.22: Colisões p+p. Ajustes mantendo o parâmetro T da equação 5.5 fixo.

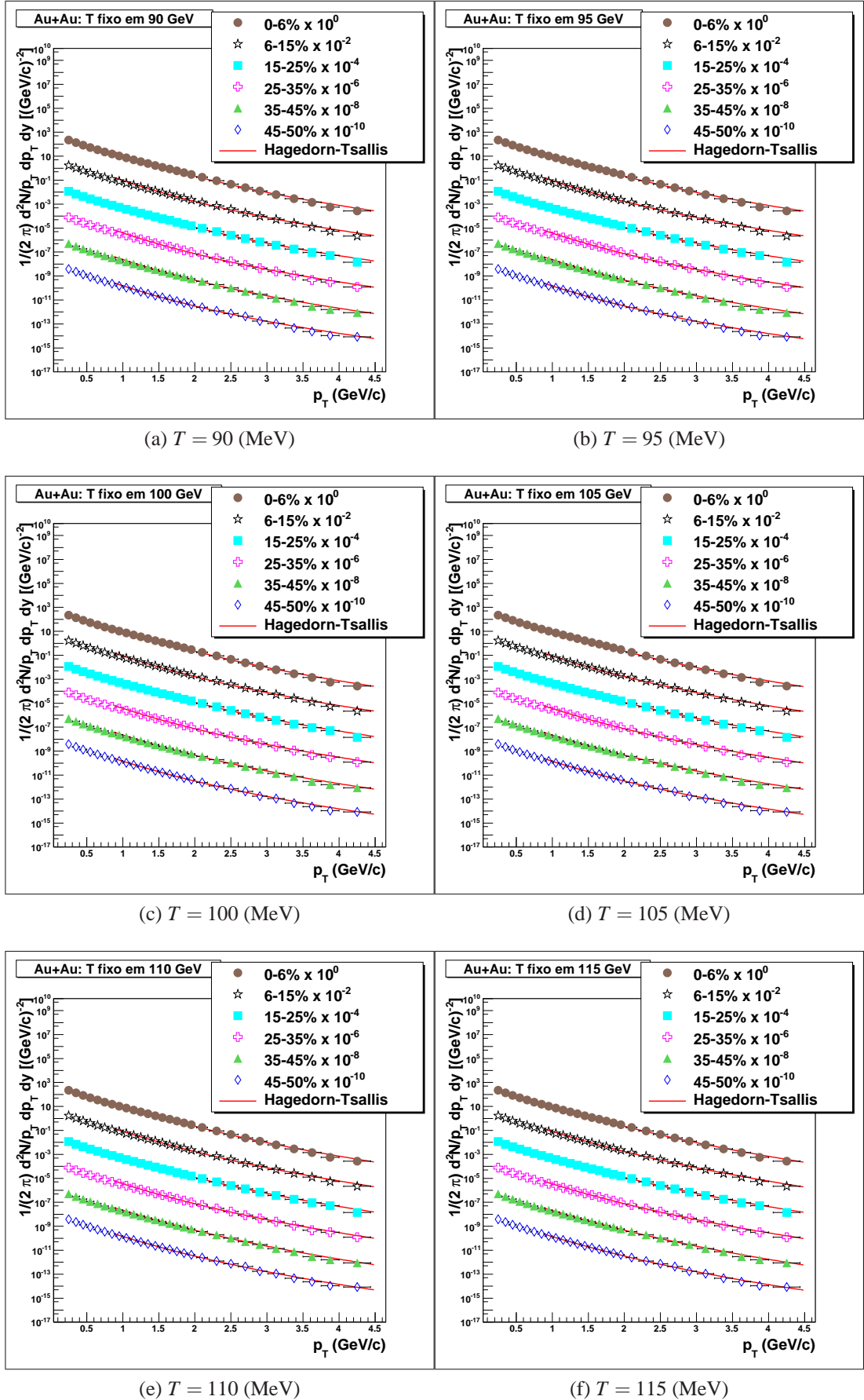


Figura 6.23: Ajuste da equação derivada da teoria de Hagedorn-Tsallis (com o parâmetro T mantido fixo) para diversas centralidades para as colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV.

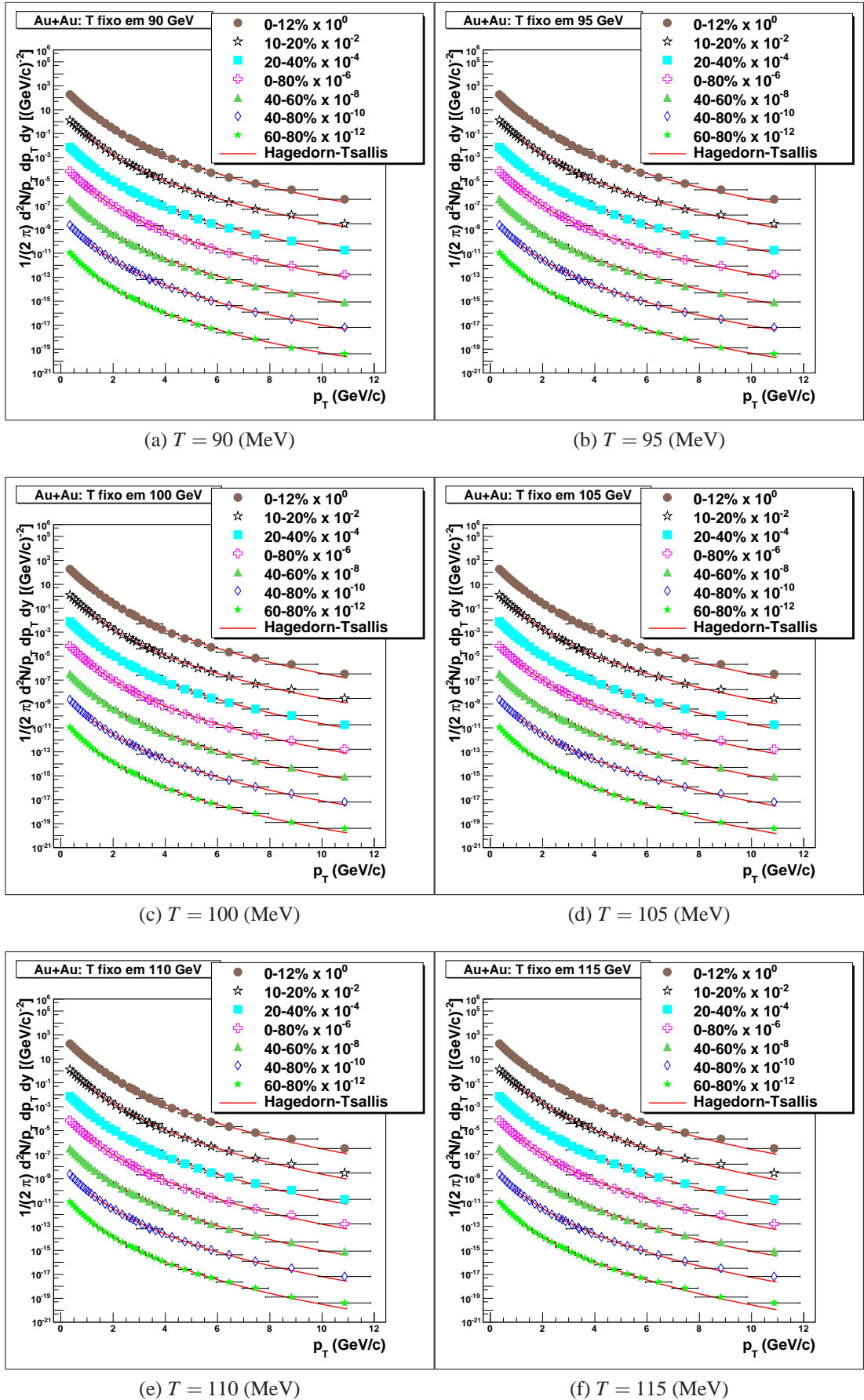


Figura 6.24: Ajuste da equação derivada da teoria de Hagedorn-Tsallis (com o parâmetro T mantido fixo) para diversas centralidades para as colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

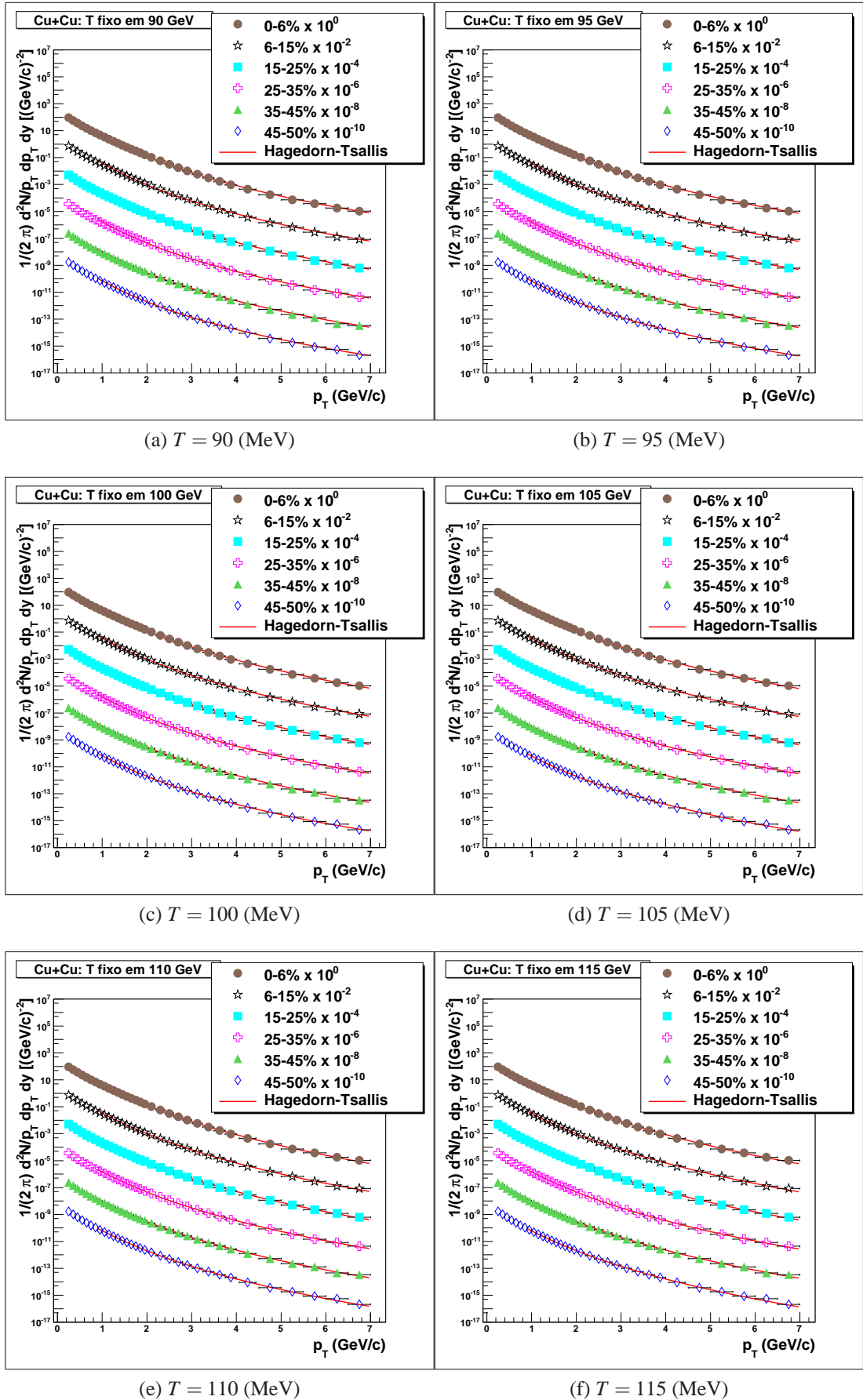


Figura 6.25: Ajuste da equação derivada da teoria de Hagedorn-Tsallis (com o parâmetro T mantido fixo) para diversas centralidades para as colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

A Figura 6.26 mostra os valores obtidos do índice entrópico q para diversos T (mantido como fixo) e compara alguns destes resultados com [63]. Nesta figura é possível verificar a diminuição dos valores de q com o aumento de T fixo. A correlação entre estes parâmetros considerando T fixo, será tratada na próxima subseção.

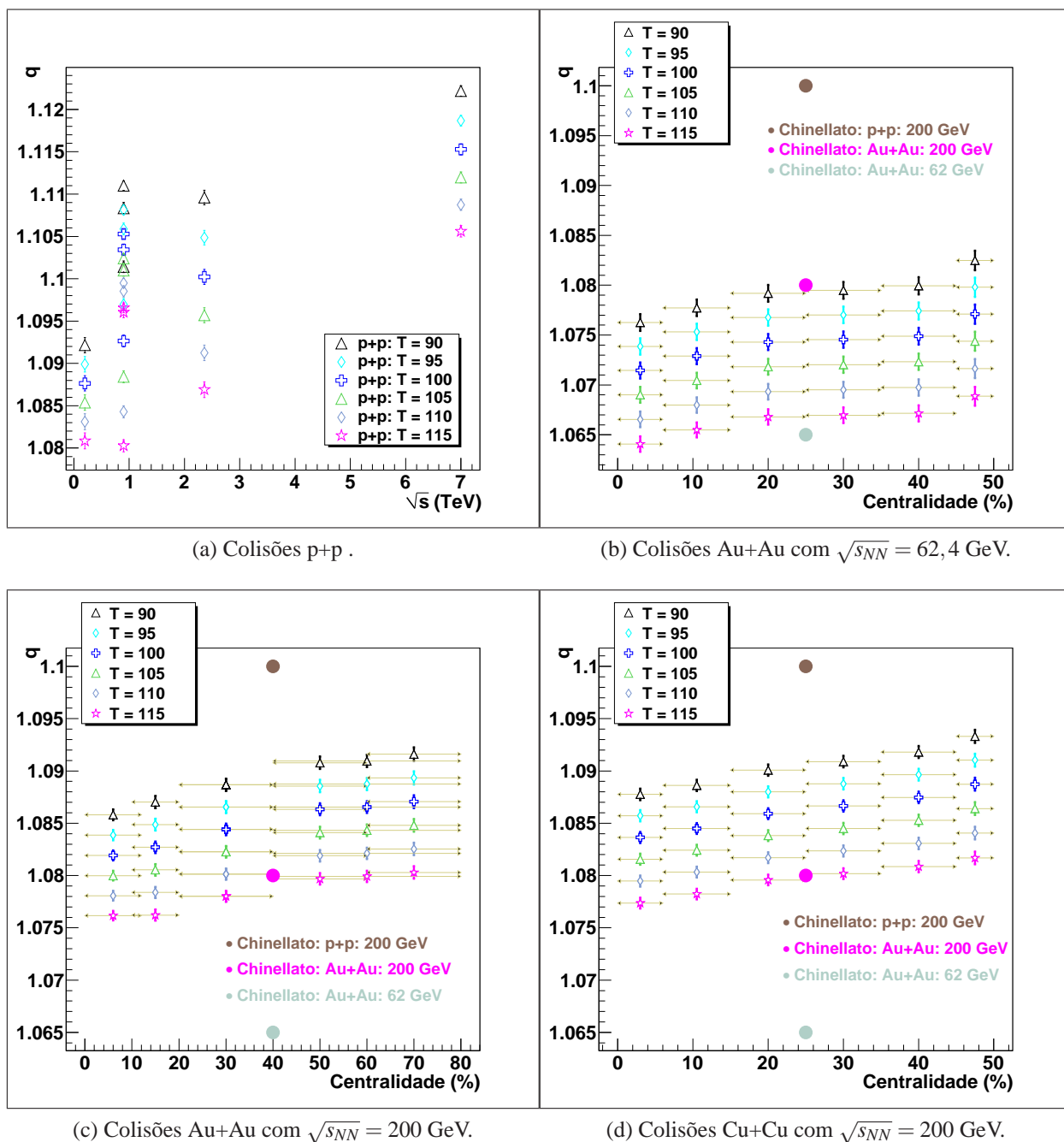


Figura 6.26: Comparação dos valores obtidos para o parâmetro q em diferentes T fixos (marcadores não-preenchidos) com os dados da literatura [63] (marcadores preenchidos).

Os valores de χ^2/ndf obtidos nos nestes ajustes estão na Tabela 6.2. Nesta tabela pode-se verificar que as colunas com T fixo que possuem os valores mais baixos para os respectivos experimentos são as que os valores de T mais se aproximam com o valor da temperatura como parâmetro livre. No caso das colisões p+p, a coluna com $T = 100$ MeV é a que possui os valores mais baixos para χ^2/ndf devido à média com T livre ser ≈ 100 MeV ¹. No caso das colisões de Íons Pesados, analogamente ao caso anterior, as colunas com T fixo que possuem os valores mais baixos de χ^2/ndf para as respectivas centralidades são as que os valores de T mais se aproximam com o valor da temperatura como parâmetro livre ².

¹Ver Figura 6.13a

²Ver as Figuras 6.14a, 6.15a e 6.16a

Tabela 6.2: Valores de χ^2/ndf para ajustes com diferentes temperaturas, T é dado em MeV.

	T livre	T = 90	T = 95	T = 100	T = 105	T = 110	T = 115
P+p							
Experimento (\sqrt{s}) [GeV]	χ^2/ndf						
CMS-LHC (7000)	73,28/30	142,6/31	184,7/31	233,2/31	286,7/31	344,3/31	405,0/31
CMS-LHC (2360)	26,36/20	154,7/21	208,3/21	266,0/21	327,5/21	392,5/21	460,6/21
CMS-LHC (900)	36,93/20	139,6/21	193,3/21	252,6/21	316,6/21	384,9/21	456,9/21
ALICE-LHC (900)	9,714/29	10,69/30	9,877/30	12,90/30	19,68/30	30,12/30	44,11/30
ATLAS-LHC (900)	3,388/26	4,656/27	3,389/27	4,887/27	9,351/27	16,97/27	27,94/27
RHIC-BNL (200)	4,457/24	5,102/25	7,187/25	10,69/25	15,58/25	21,83/25	29,38/25
Centralidades							
	χ^2/ndf						
Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV							
0-6%	2,445/18	131,3/19	116,9/19	103,0/19	89,55/19	76,71/19	64,58/19
6-15%	1,688/18	118,3/19	104,5/19	91,16/19	78,38/19	66,26/19	54,91/19
15-25%	3,072/18	108,7/19	95,57/19	82,94/19	70,92/19	59,60/19	49,06/19
25-35%	3,707/18	99,39/19	86,84/19	74,85/19	63,52/19	52,92/19	43,14/19
35-45%	4,714/18	80,53/19	69,45/19	59,00/19	49,26/19	40,29/19	32,18/19
45-50%	8,131/18	54,15/19	46,37/19	39,19/19	32,65/19	26,81/19	21,69/19
Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV							
0-12%	31,09/22	31,26/23	31,84/23	35,84/23	43,44/23	54,76/23	69,86/23
10-20%	16,17/22	20,11/23	16,98/23	16,21/23	17,89/23	22,04/23	28,68/23
20-40%	13,58/22	17,44/23	14,26/23	13,68/23	15,79/23	20,63/23	28,23/23
MinBias (0-80%)	18,13/22	19,42/23	18,15/23	20,06/23	25,34/23	34,09/23	46,36/23
40-60%	8,279/21	10,79/22	8,560/22	8,563/22	10,85/22	15,45/22	22,37/22
40-80%	8,375/22	10,70/23	8,574/23	8,788/23	11,39/23	16,41/23	23,86/23
60-80%	7,700/21	9,374/22	7,805/22	8,118/22	10,32/22	14,43/22	20,44/22
Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV							
0-6%	21,42/23	77,66/24	63,45/24	51,00/24	40,48/24	32,09/24	26,01/24
6-15%	16,68/23	72,05/24	57,67/24	45,14/24	34,64/24	26,38/24	20,54/24
15-25%	12,40/23	58,60/24	45,45/24	34,24/24	25,15/24	18,37/24	14,07/24
25-35%	7,548/23	53,98/24	40,90/24	29,73/24	20,65/24	13,83/24	9,430/24
35-45%	9,490/23	44,97/24	33,76/24	24,48/24	17,30/24	12,37/24	9,826/24
45-50%	6,313/23	27,94/24	19,94/24	13,69/24	9,292/24	6,832/24	6,401/24

6.4.1 Dependência de q e T

A Figura 6.27 permite visualizar a anti-correlação dos parâmetros q e T , pois à medida que o valor da temperatura aumenta, lembrando que esse parâmetro foi colocado como fixo na equação 5.5, o valor obtido de q diminui. Essa anti-correlação foi observada claramente na seção 6.2, e o ajuste da função da temperatura efetiva (equação 4.31) na Figura 6.27, representado pela linha vermelha, nada mais é do que um corte, na direção do semi-eixo maior, nas elipses daquela seção.

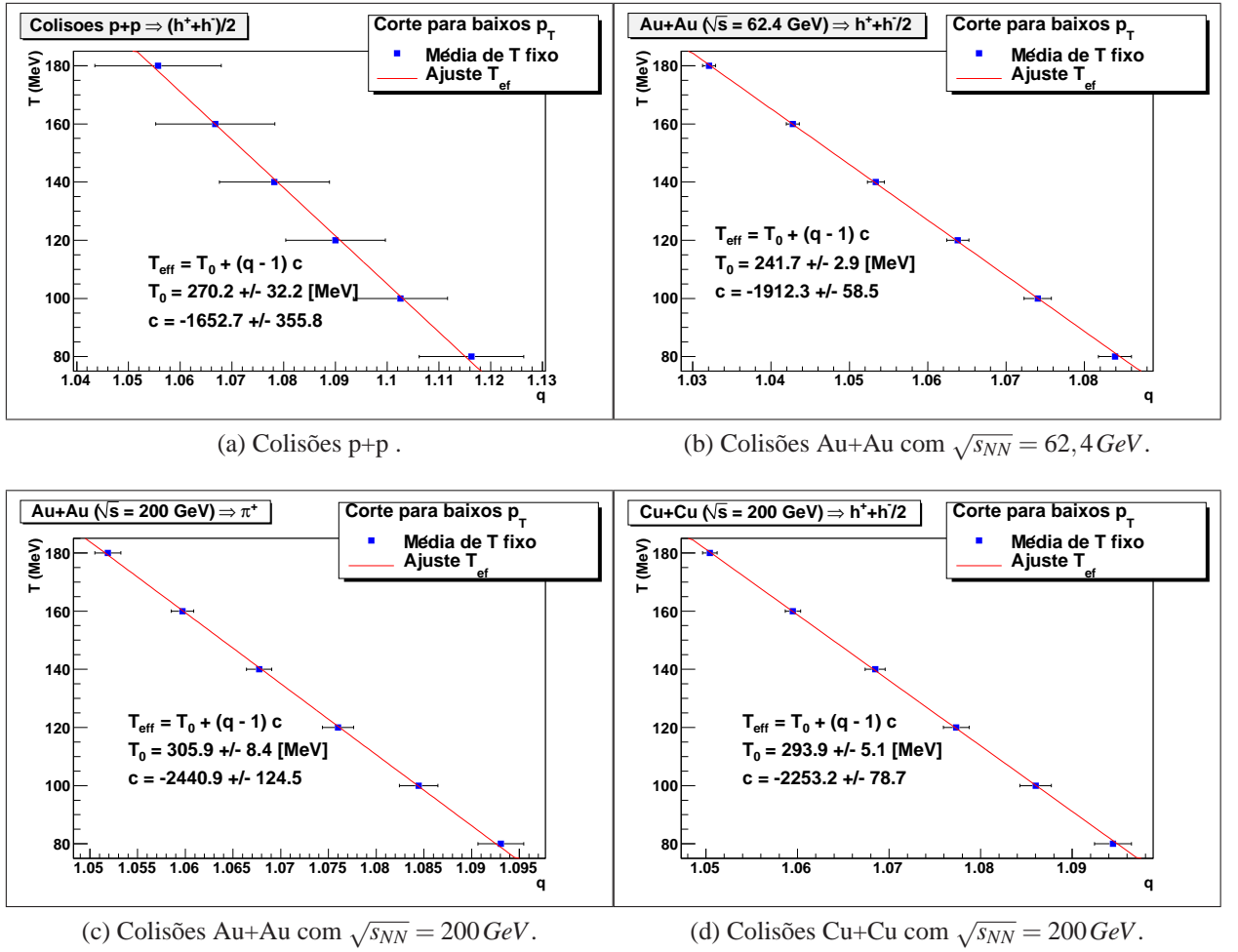


Figura 6.27: Ajuste linear para os valores das médias de q obtidas para diversos valores de T mantido como fixo (80, 100, 120, 140, 160 e 180 MeV) no ajuste da equação 5.5 nos dados experimentais.

7 *Sumário e Considerações Finais*

Neste capítulo apresentamos um breve resumo dos resultados seguido pelas considerações finais.

No escopo de melhor compreender os aspectos estatísticos e termodinâmicos envolvidos nas colisões de partículas em altas energias, este trabalho constituiu no estudo, do ponto de vista macroscópico, da produção e distribuição de partículas em colisões relativísticas, utilizando-se das ferramentas desenvolvidas pela mecânica elaborada por Hagedorn e sua generalização com o formalismo não-extensivo proposto por Tsallis que, para fins práticos, chamaremos de Hagedorn-Tsallis. Para a análise foram utilizadas equações derivadas tanto da teoria de Hagedorn quanto da generalização, identificadas como Hagedorn-Tsallis. A equação decorrente da teoria de Hagedorn (equação 5.4) apresenta um comportamento exponencial, sendo que a equação de Hagedorn-Tsallis (equação 5.5) apresenta o desejado comportamento lei-de-potência. Ambos os comportamentos podem ser verificados na Figura 5.1.

Para o estudo, foi feita uma análise de diversos dados empíricos (ver as Tabelas 5.1 e 5.2) de distribuições da produção inclusiva de partículas carregadas por p_{\perp} , selecionados de experimentos de colisões de partículas com a energia do centro de massa variando de $\sqrt{s} = 62,4$ GeV até energias mais altas, de $\sqrt{s} = 7,0$ TeV. No caso das col-

isões $A + A$ também foram consideradas diferentes centralidades. Foram ajustadas nestes dados as funções das distribuições de probabilidades da teoria de Hagedorn e da generalização e, com estes ajustes, foram obtidos os valores para os parâmetros T , no caso da teoria de Hagedorn, e T e q para a generalização.

7.1 Resultados para a temperatura da teoria de Hagedorn

Os ajustes mostraram o caráter exponencial da equação 5.4 (linhas azuis) com o rápido decaimento dos ajustes nos espectros, afastando muito rapidamente dos valores experimentais com o aumento do p_{\perp} . No caso das colisões p+p, nos dados dos experimentos RHIC ($\sqrt{s} = 200$ GeV) e ATLAS ($\sqrt{s} = 900$ GeV), pôde-se notar um bom ajuste para baixos p_{\perp} . Entretanto, ao analisarmos os outros experimentos (alguns com a mesma energia do ATLAS - CMS e ALICE), em nenhuma faixa dos momentos os dados experimentais foram bem ajustados usando unicamente a estatística de Hagedorn, mostrando que as colisões de partículas com altas energias podem não apresentar um comportamento exponencial até mesmo para o espectro das partículas com baixo momento transversal ($p_{\perp} < 1,5$ GeV/c). Já para as colisões $A + A$, os melhores ajustes da teoria de Hagedorn foram para as centralidades do caso $Au + Au$ com $\sqrt{s_{NN}} = 62,4$ GeV, devido ao fato desta ser a menor energia entre os casos estudados. Comparando os ajustes da teoria de Hagedorn nas colisões $Au + Au$ e $Cu + Cu$ com a mesma energia de centro de massa, $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, os dados para $Cu + Cu$ foram melhores ajustados. Isso está relacionado com as faixas de ajuste de p_{\perp} serem menores para $Cu + Cu$ pois, como a teoria de Hagedorn possui um comportamento exponencial e as distribuições um comportamento lei-de-potência, dados que possuïrem um espectro maior vão apresentar resultados mais divergentes em relação às previsões da estatística de Boltzmann-Gibbs devido ao distanciamento dos valores experimentais com o aumento de p_{\perp} . Em ambos os casos com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV podemos notar que para nenhuma centralidade e em nenhuma faixa do espectro de

momentos (e.g.: $p_{\perp} < 1,5 \text{ GeV}/c$) os dados experimentais são bem ajustados usando unicamente a estatística de Hagedorn.

7.2 Resultados para a temperatura da generalização de Hagedorn

Ao contrário do que ocorreu com os ajustes da estatística de Hagedorn, as distribuições de probabilidades da generalização conseguiu prever os dados experimentais com um bom ajuste nos dados para todos os experimentos e em todo o espectro de p_{\perp} . Os valores obtidos com estes ajustes para T e q , em relação às diferentes energias de centro de massa (colisões $p + p$) e centralidades (colisões $A + A$), estão nas Figuras 6.2, 6.5, 6.6 e 6.7. Esses resultados mostram que os parâmetros q e T possuem uma suave dependência com \sqrt{s} , no caso das colisões $p + p$, como também já havia mostrado [28] para o caso das colisões $e^{-} + e^{+}$. As figuras obtidas com os dados das colisões $A + A$ permitem ainda visualizar uma possível “anti-correlação” entre os parâmetros q e T , resultantes dos ajustes da equação de Hagedorn-Tsallis, em função das centralidades. Nestas figuras podemos observar que à medida que a centralidade aumenta, ou seja, diminui o número de participantes no processo de colisão, os valores de T diminuem e os valores de q aumentam. A referência [63] indicou que em colisões menos centrais as partículas estão mais correlacionadas, levando-o a considerar o parâmetro q uma poderosa ferramenta para o estudo da produção de jatos, que estão profundamente ligados à fonte de correlação das partículas - indicador do fenômeno *jet quenching*.

7.3 Corte para baixos p_{\perp}

Apesar dos bons resultados obtidos com a generalização de Hagedorn, foi feita uma análise mais aprofundada do comportamento das distribuições de probabilidades nos ajustes dos dados experimentais. Para cada ajuste, foram obtidos algumas var-

íveis estatísticas, que estão representados nas Figuras 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11, e também no Apêndice A. Dentre as variáveis, os resíduos nos chamaram a atenção, pois foi observado que em alguns casos há uma divergência para baixos p_{\perp} (resíduos que ultrapassaram o valor $|3|$). Isso pode estar relacionado com o fato de que a equação utilizada nos ajustes (equação 5.5) é, de fato, uma aproximação para altos p_{\perp} . Com o objetivo de melhorar as previsões desta equação foram feitos cortes para baixos p_{\perp} , utilizando como critério para os cortes a faixa de baixos p_{\perp} onde os resíduos possuíam o comportamento divergente. A Figura 6.12 mostra alguns resultados obtidos com o corte para baixos p_{\perp} , os demais resultados podem ser verificados no Apêndice A. Com o corte foram eliminados os valores indesejados dos resíduos. Também se pode verificar que para todos os casos a correlação foi negativa e maior do que 0,9, indicando, ao menos estatisticamente, uma correlação *muito* forte entre os parâmetros q e T . A Tabela 6.1 compara os valores obtidos de χ^2 por graus de liberdade, ndf , para os diferentes intervalos de ajustes, i.e., os ajustes em todo o espectro de p_{\perp} e os ajustes com os cortes para baixos p_{\perp} . Como esperado, ao reduzir o intervalo de ajuste, obtém também uma redução nos valores de χ^2 , devido à redução do número de dados experimentais, acarretando também na redução do número de graus de liberdade, ndf .

7.4 Dependência de q e T

O principal efeito percebido com o corte para baixos p_{\perp} foi o acréscimo nas incertezas dos parâmetros q e T , como se pode perceber comparando as Figuras 6.13, 6.14, 6.15 e 6.16, que correspondem ao resultados com os cortes para baixos p_{\perp} , com as Figuras 6.2, 6.5, 6.6 e 6.7, que apresentam os resultados para os ajustes em todo espectro. Isto está relacionado com o fato de que com o corte em baixos p_{\perp} há uma redução de ndf e, conseqüentemente, do χ^2 (ver Tabela 6.1), significando um acréscimo nos possíveis valores tanto de q quanto de T para os ajustes. Outra forma

de entender o aumento na incerteza de T está relacionado com a evidência de que a média dos valores dos momentos se encontra na região de baixos p_{\perp} e que com o corte é eliminado uma considerável parcela das partículas que possuem um peso na informação cinemática. Na Figura 6.21 foi feita uma análise dos valores obtidos para os parâmetros q e T para todos os dados analisados neste trabalho. Pode-se perceber que os maiores valores de q são os resultados dos ajustes nas colisões $p + p$. A seção 6.3 mostra os valores obtidos para a temperatura de hadronização T_0 ao ajustar a função da temperatura efetiva T_{ef} , função 4.31.

7.5 Fixando a Temperatura

Neste trabalho também foi feito um estudo das previsões estatísticas ao tratar T como fixo. A principal motivação física é a de que ao tratarmos a temperatura como fixa, estamos considerando que toda a energia disponibilizada no processo de colisão é utilizada para a produção de partículas, i.e., a velocidade de expansão do sistema é suficientemente rápida, e mantém T fixo. Na seção 6.2.1 foram realizados ajustes com os cortes para baixos p_{\perp} , devido à equação de ajuste (equação 5.5) ser uma aproximação para altos p_{\perp} . Com os resultados obtidos para estes cortes, foi observado que os valores de q e T foram aproximadamente constantes (ver as Figuras 6.13, 6.14, 6.15 e 6.16), mostrando uma insensibilidade em relação às energias do centro de massa e às centralidades. O fato dos resultados para T terem ficado aproximadamente constante contribui com a nossa motivação de mantermos T fixo, além de eliminarmos um parâmetro livre e, conseqüentemente, aumentar em um grau de liberdade os ajustes. Foram então escolhidas diversas temperaturas para fixar esse parâmetro na teoria de Hagedorn-Tsallis, deixando unicamente os parâmetros q e c como parâmetros livres, e observar o comportamento da função estatística. Os resultados, que podem ser verificados na seção 6.4, mostraram que mesmo fixando T em valores diferentes daqueles obtidos considerando T como livre, a função estatística de

Hagedorn-Tsallis consegue ajustar os dados experimentais.

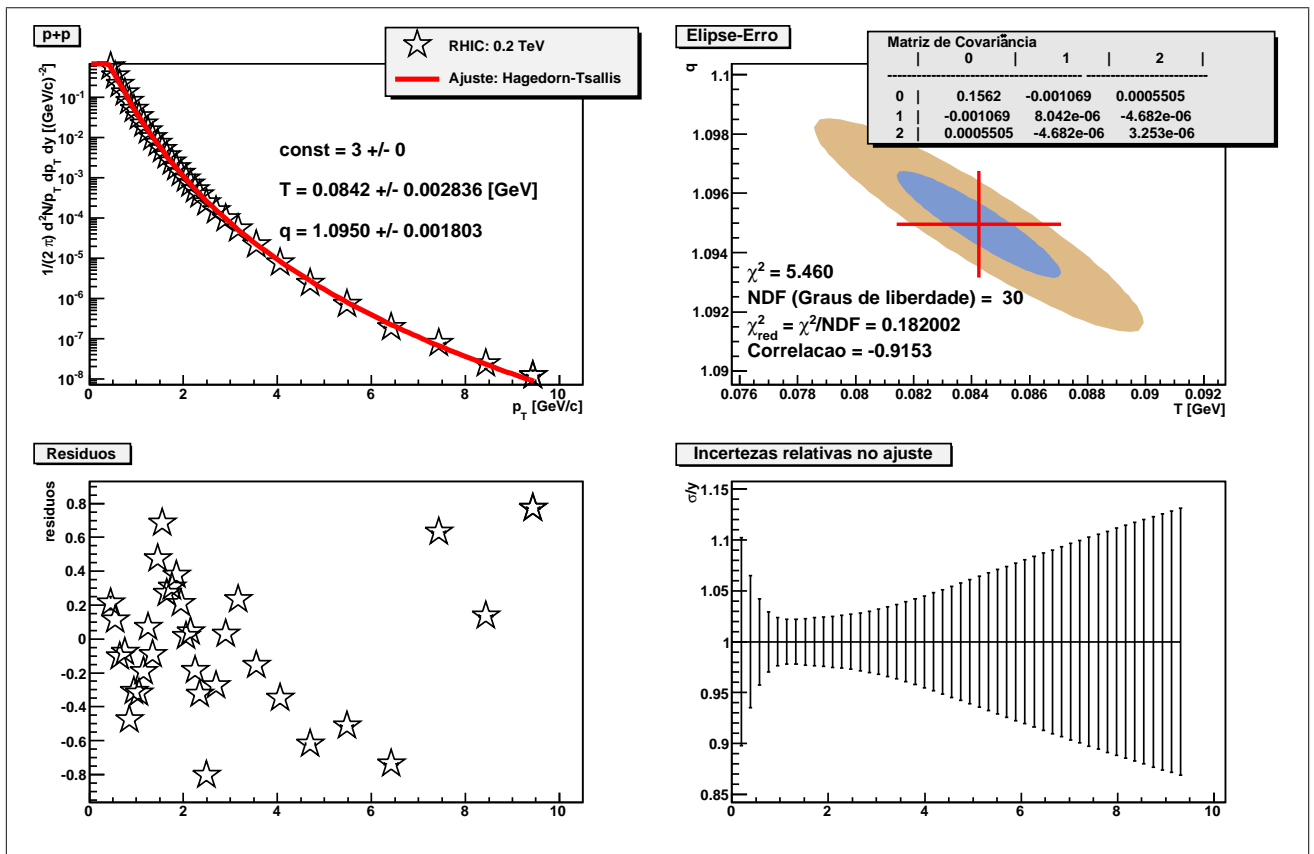
A Figura 6.27 permite visualizar a anti-correlação dos parâmetros q e diversos valores de T fixo, pois à medida que a valor da temperatura aumenta, o valor obtido de q diminui. Essa anti-correlação foi observada claramente na seção 6.2, e o ajuste da função da temperatura efetiva (equação 4.31) na Figura 6.27, representado pela linha vermelha, nada mais é do que um corte, na direção do semi-eixo maior, nas elipses daquela seção.

7.6 Considerações Finais

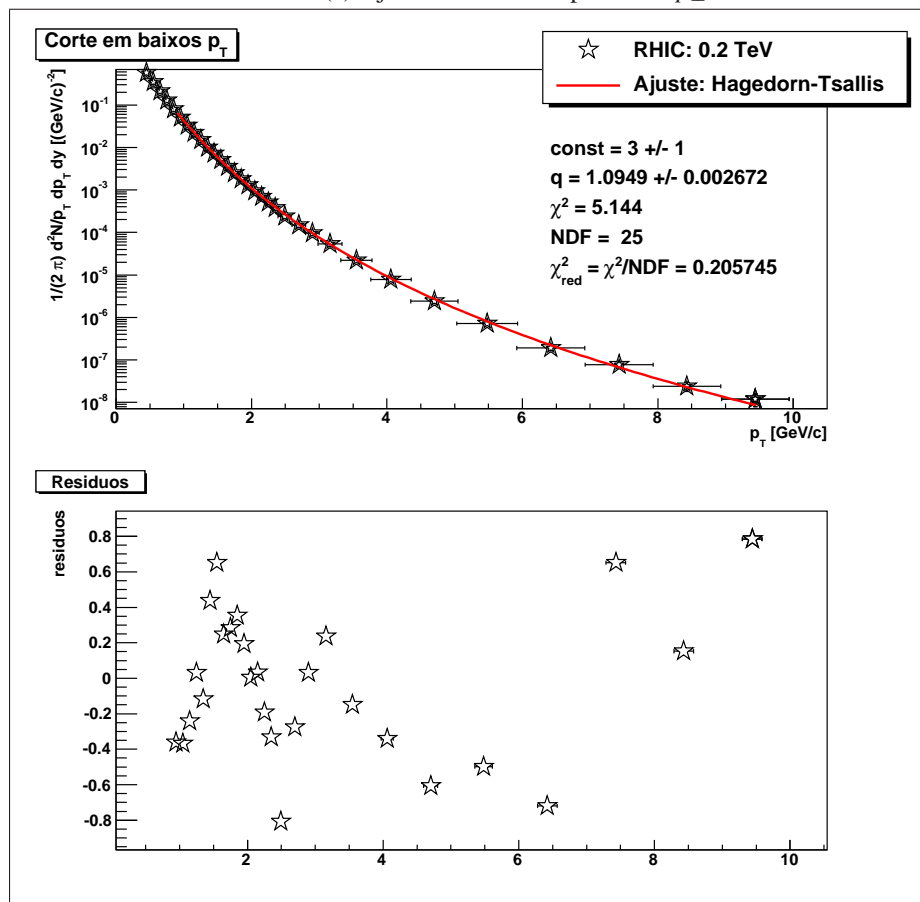
Este trabalho apresentou os principais aspectos envolvidos em colisões a altas energias do ponto de vista macroscópico. Os processos físicos/estatísticos envolvidos nas colisões foram estudados na ótica do formalismo da teoria de Hagedorn e da sua generalização, de onde foram tiradas importantes quantidades físicas, tais como a temperatura. Os resultados mostraram que, de fato, a teoria de Hagedorn não obtem resultados coerentes para as energias dos atuais aceleradores de partículas, e que é necessário uma generalização, como a não-extensiva, para a descrição dos processos à altas energias. Foi ainda aplicado a Superestatística, proposta por C. Beck E. Cohen [42], que tratou os resultados da temperatura da teoria de Hagedorn-Tsallis como uma temperatura efetiva, a partir da qual obteve uma temperatura física do sistema, conhecida como temperatura de hadronização. Os resultados obtidos nesta análise mostram que as distribuições de momento transversal de partículas geradas nas colisões $p + p$ e $A + A$ são compatíveis com uma temperatura limite independente da energia da colisão ou da centralidade, nos casos das colisões $A + A$. Este resultado, portanto, está de acordo com um regime de quarks quase-livres, resultante da liberdade assintótica da Cromodinâmica Quântica.

APÊNDICE A – Gráficos - Análise Estatística

A.1 Colisões p+p

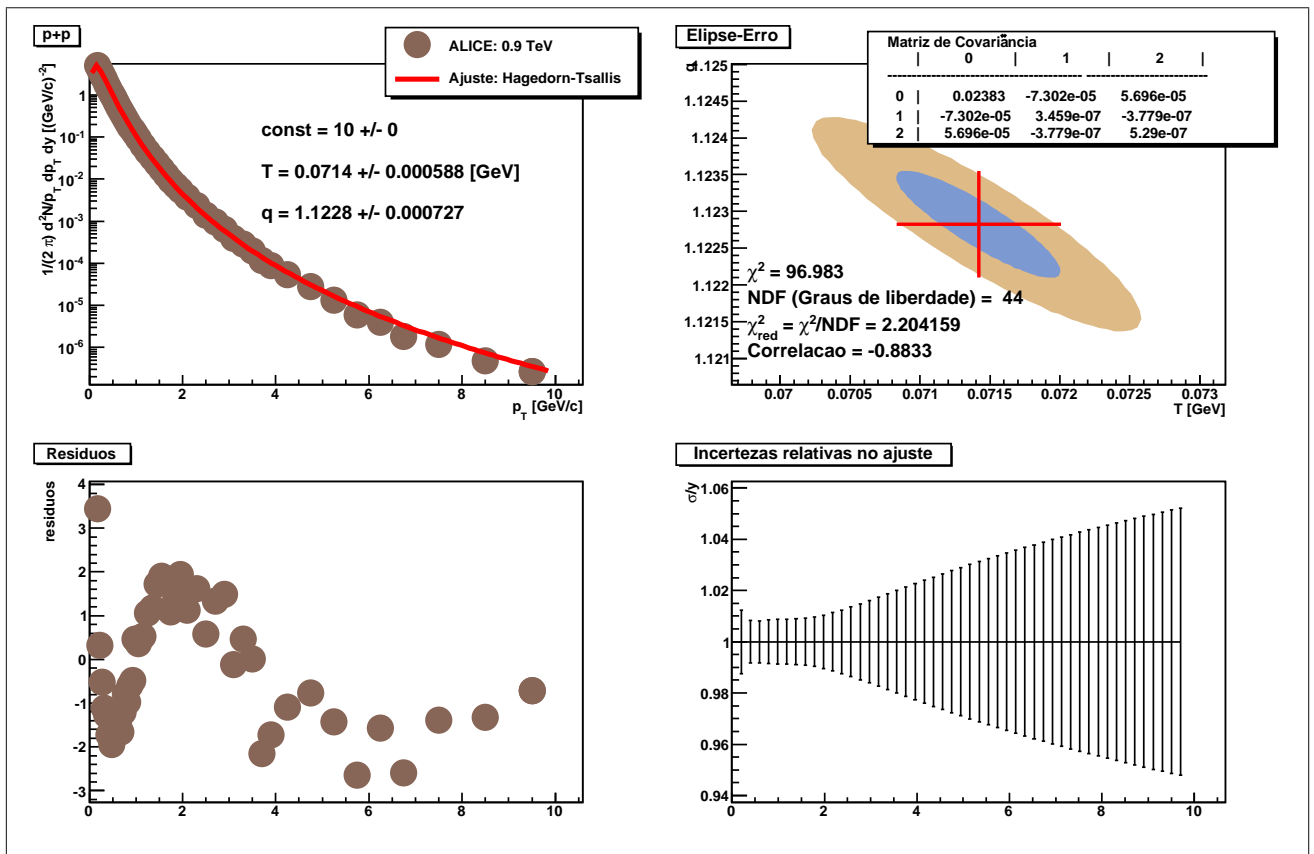


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

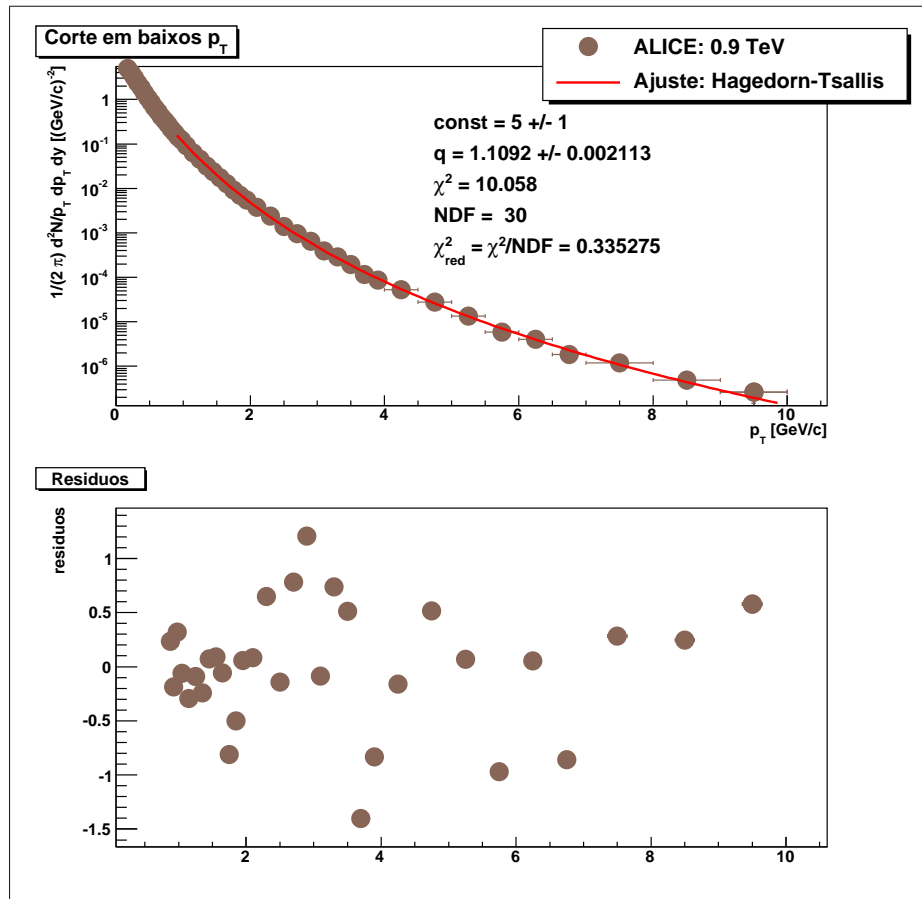


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.1: RICH: $\sqrt{s} = 200 GeV$

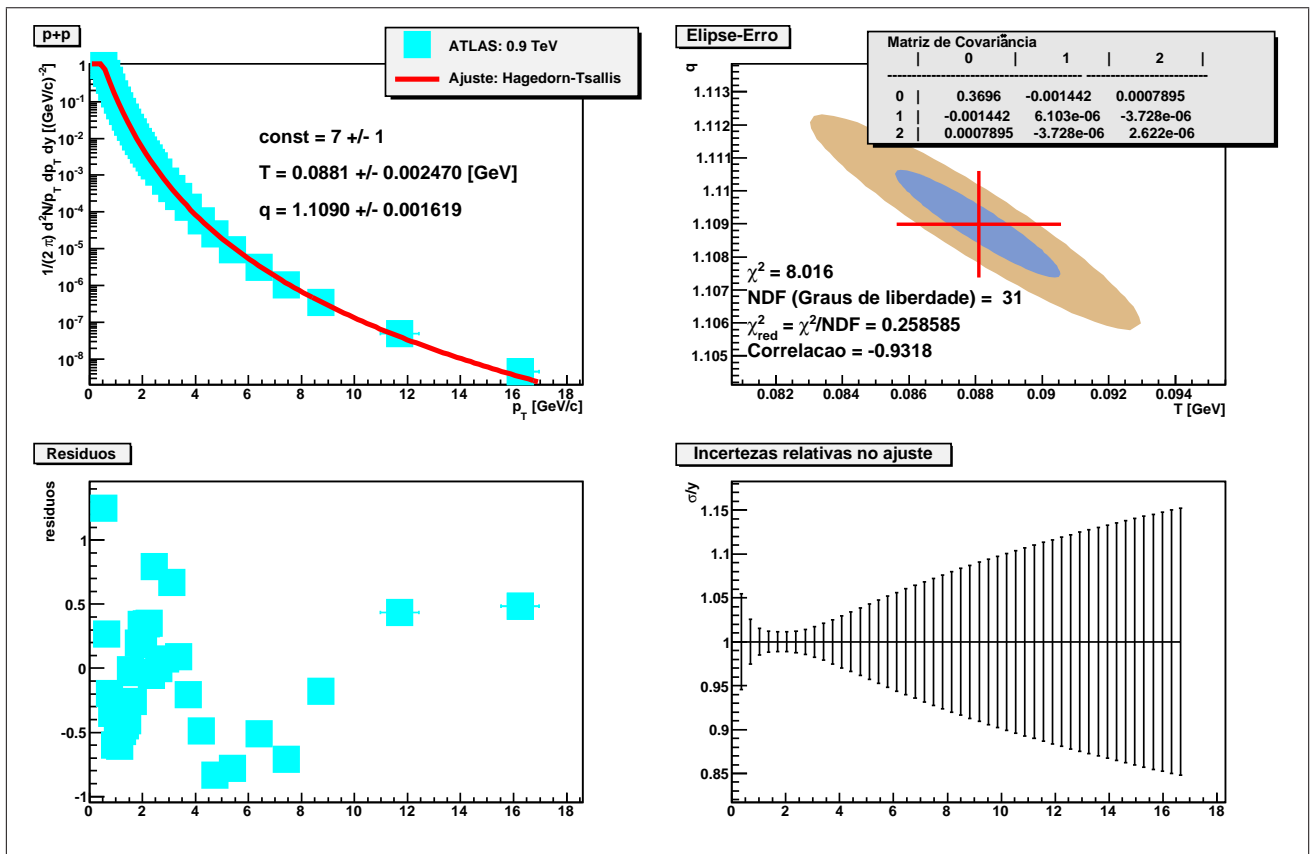


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

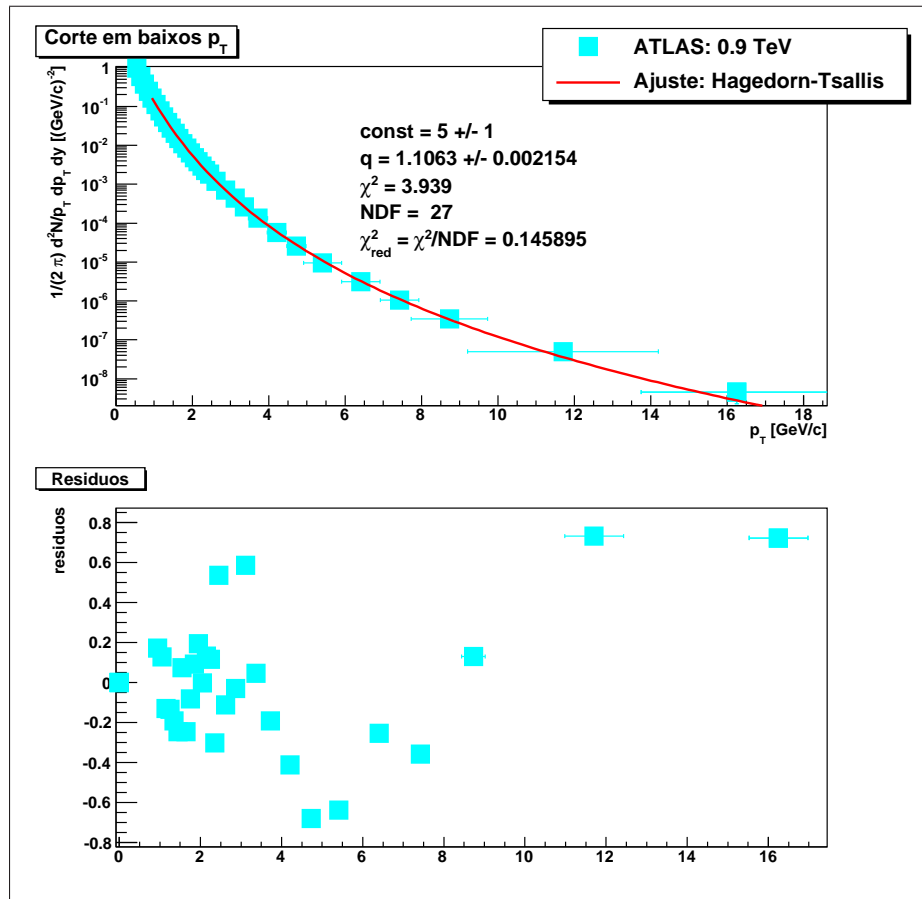


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.2: ALICE: $\sqrt{s} = 900$ GeV

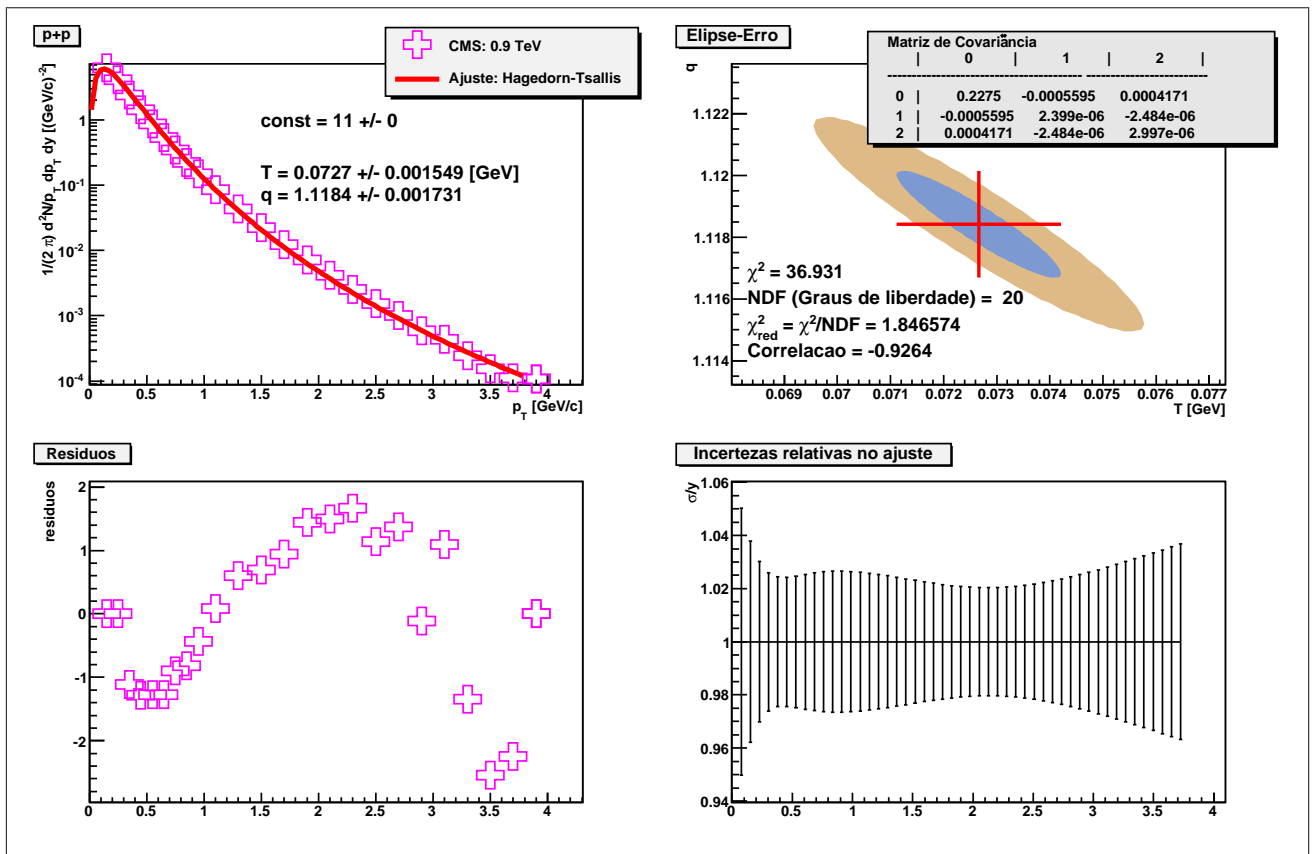


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

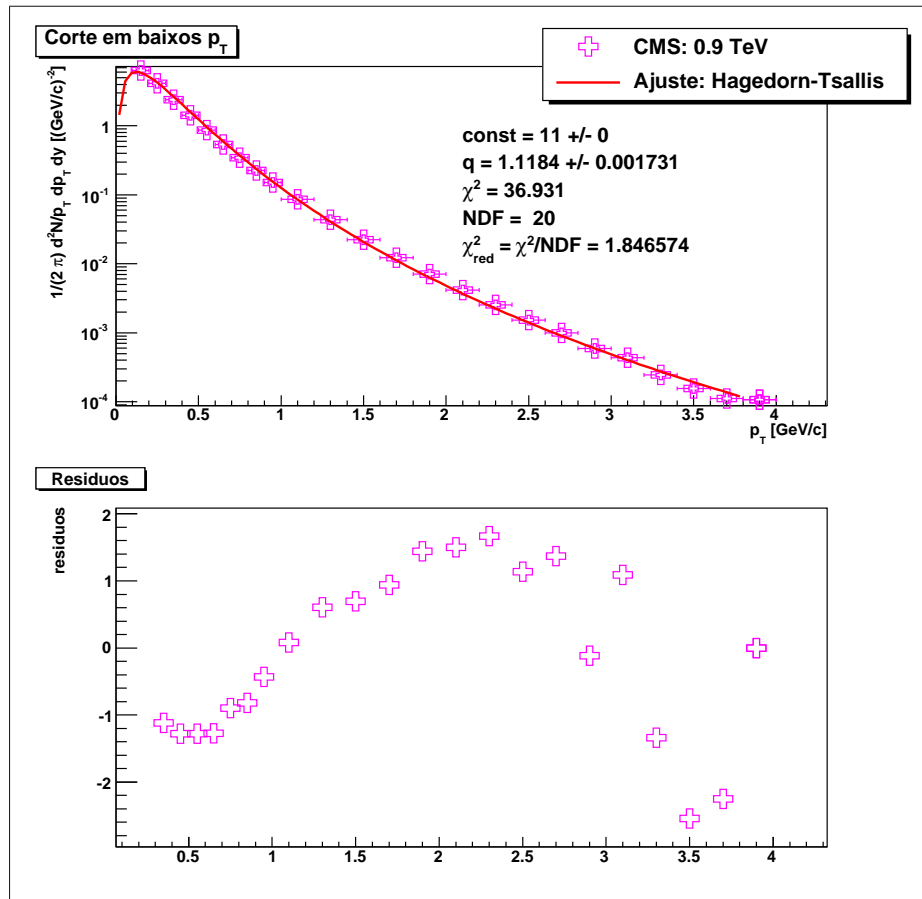


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.3: ATLAS: $\sqrt{s} = 900$ GeV

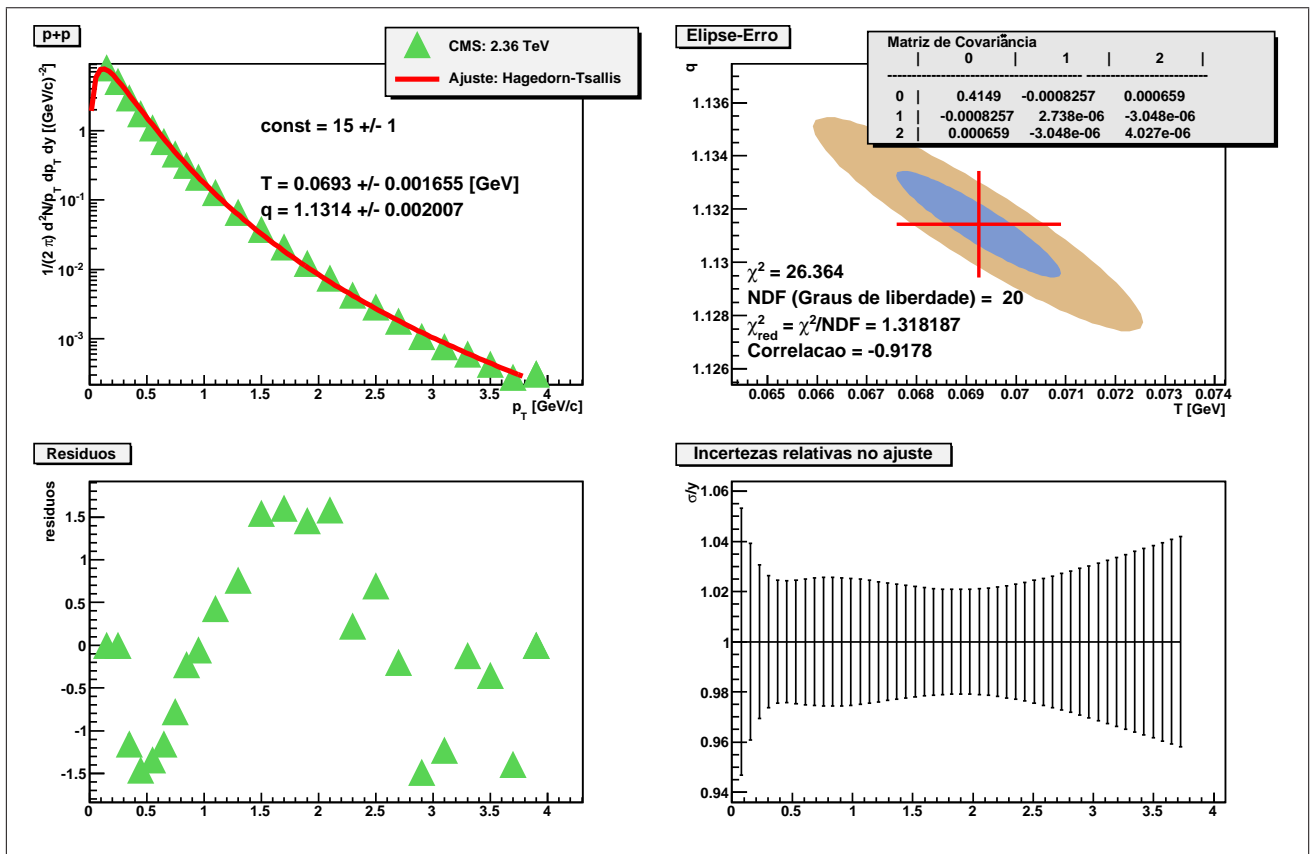


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

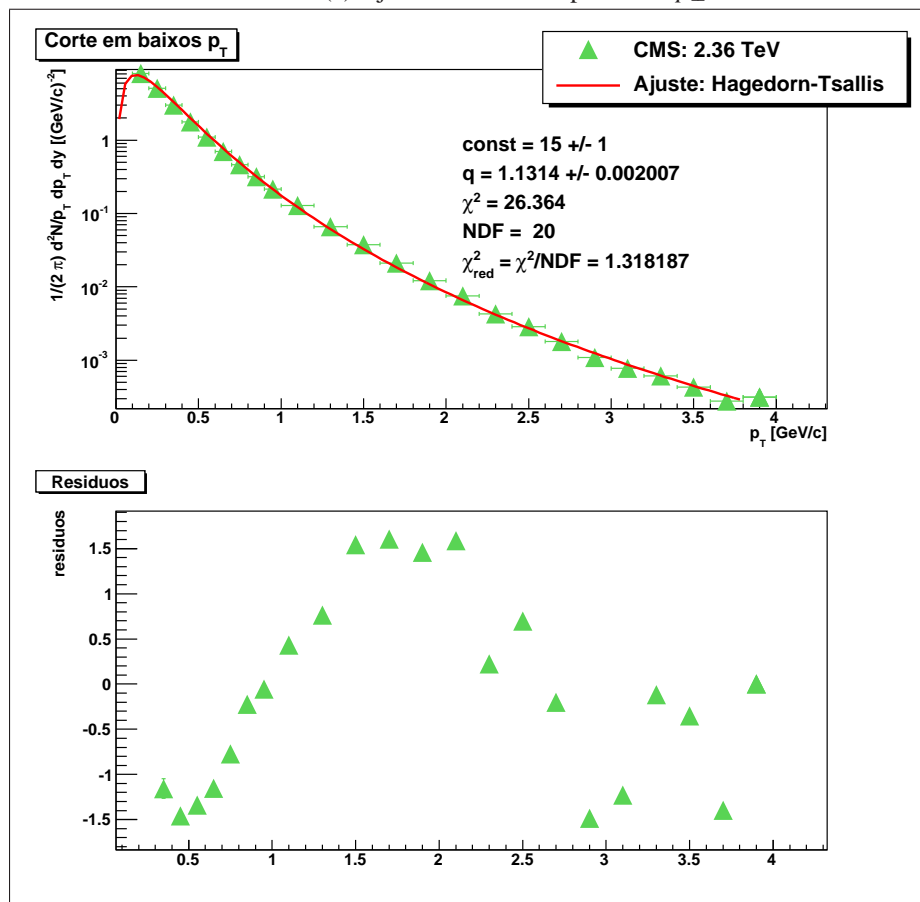


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.4: CMS: $\sqrt{s} = 900$ GeV

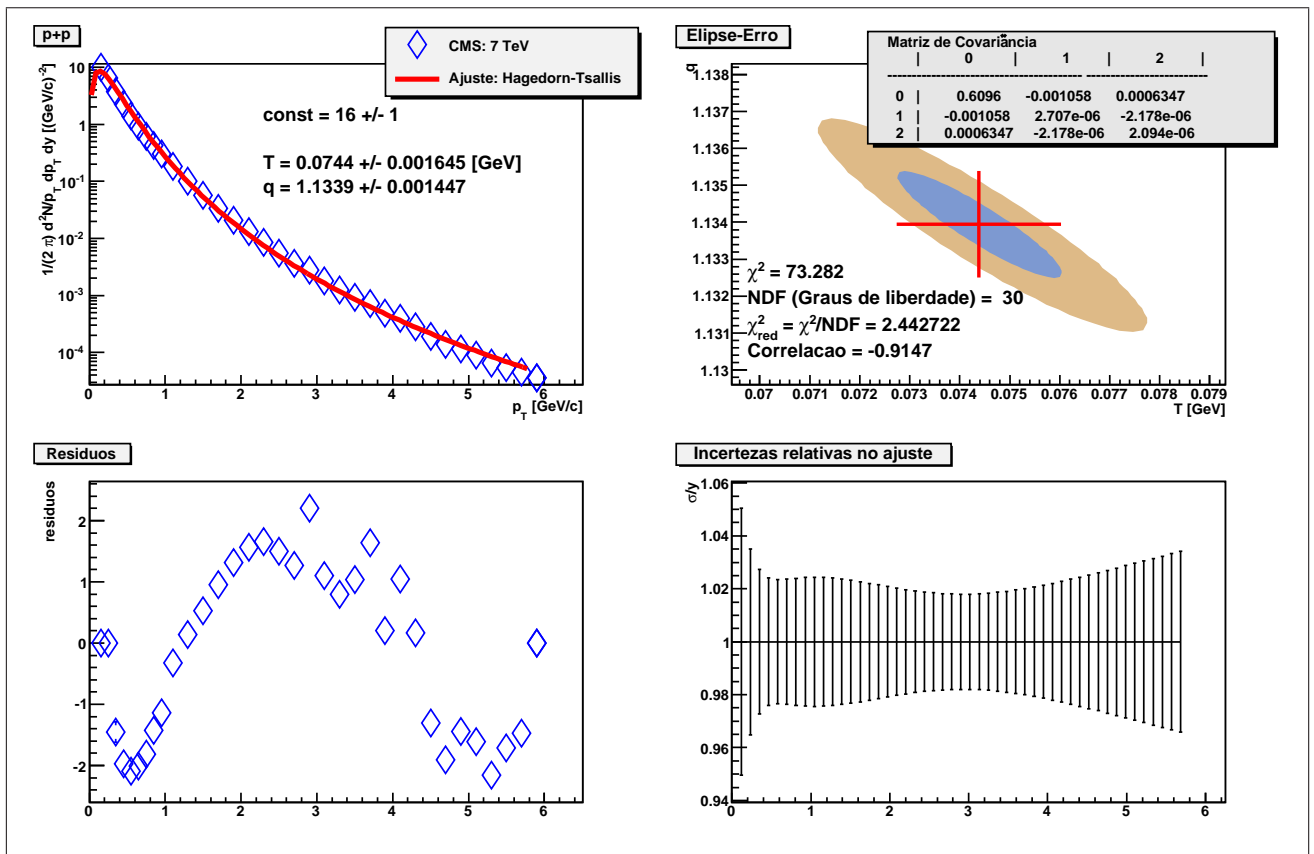


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

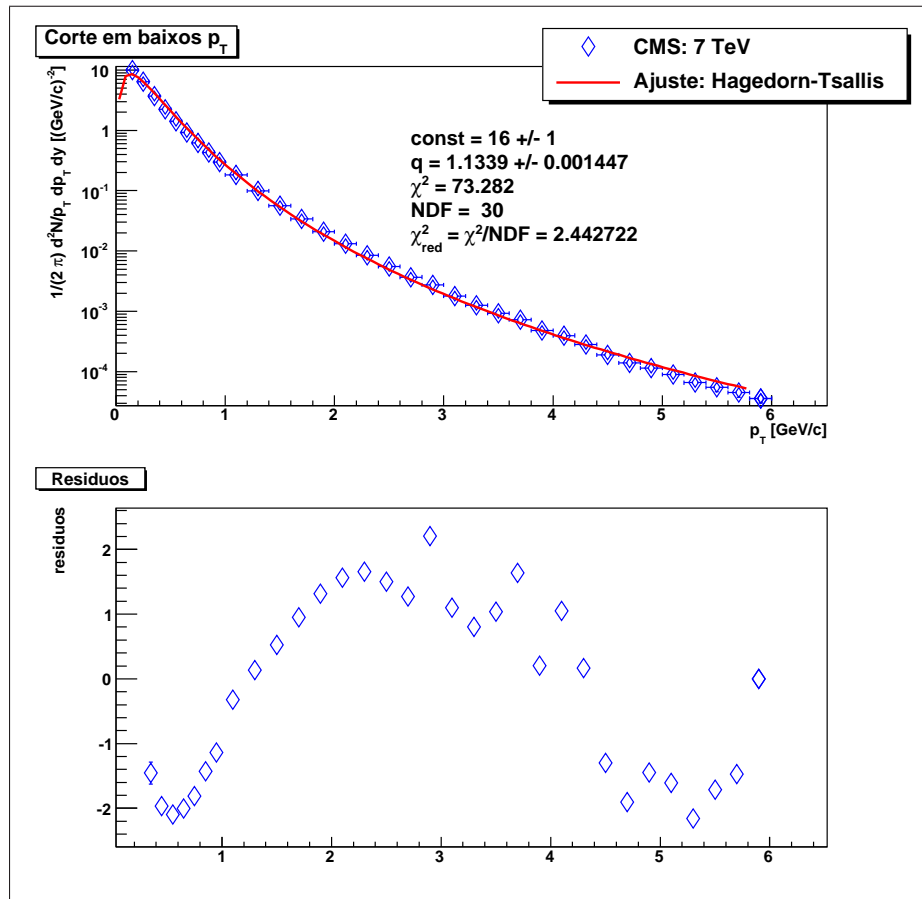


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.5: CMS: $\sqrt{s} = 2,36$ TeV



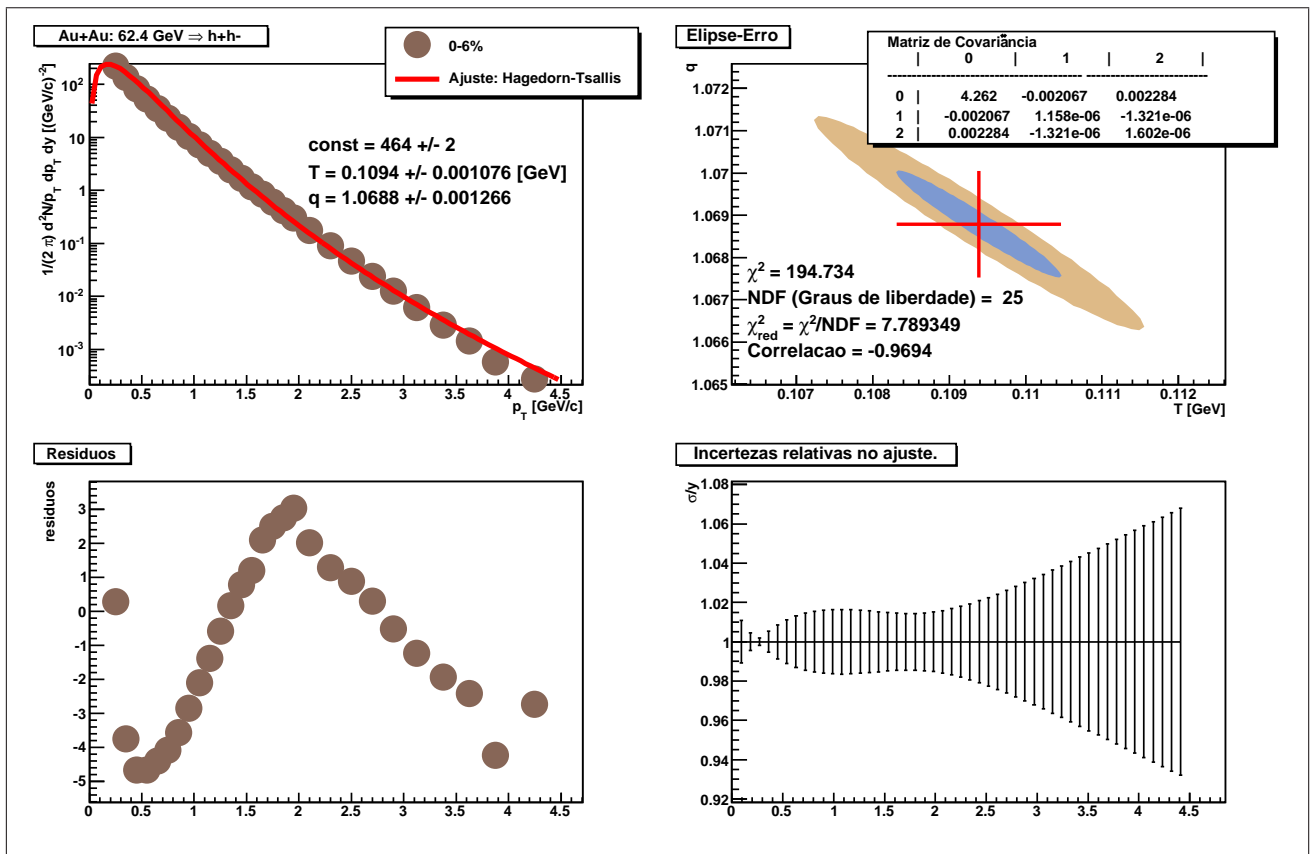
(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .



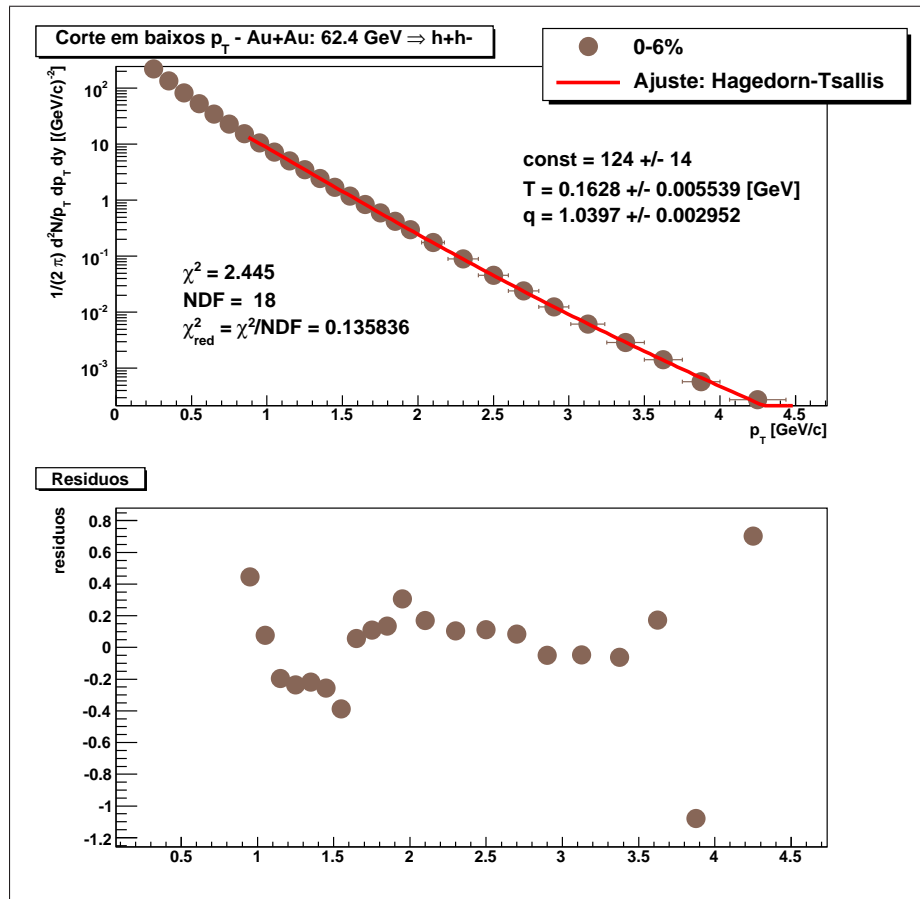
(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.6: CMS: $\sqrt{s} = 7$ TeV

A.2 Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4 \text{ GeV}$

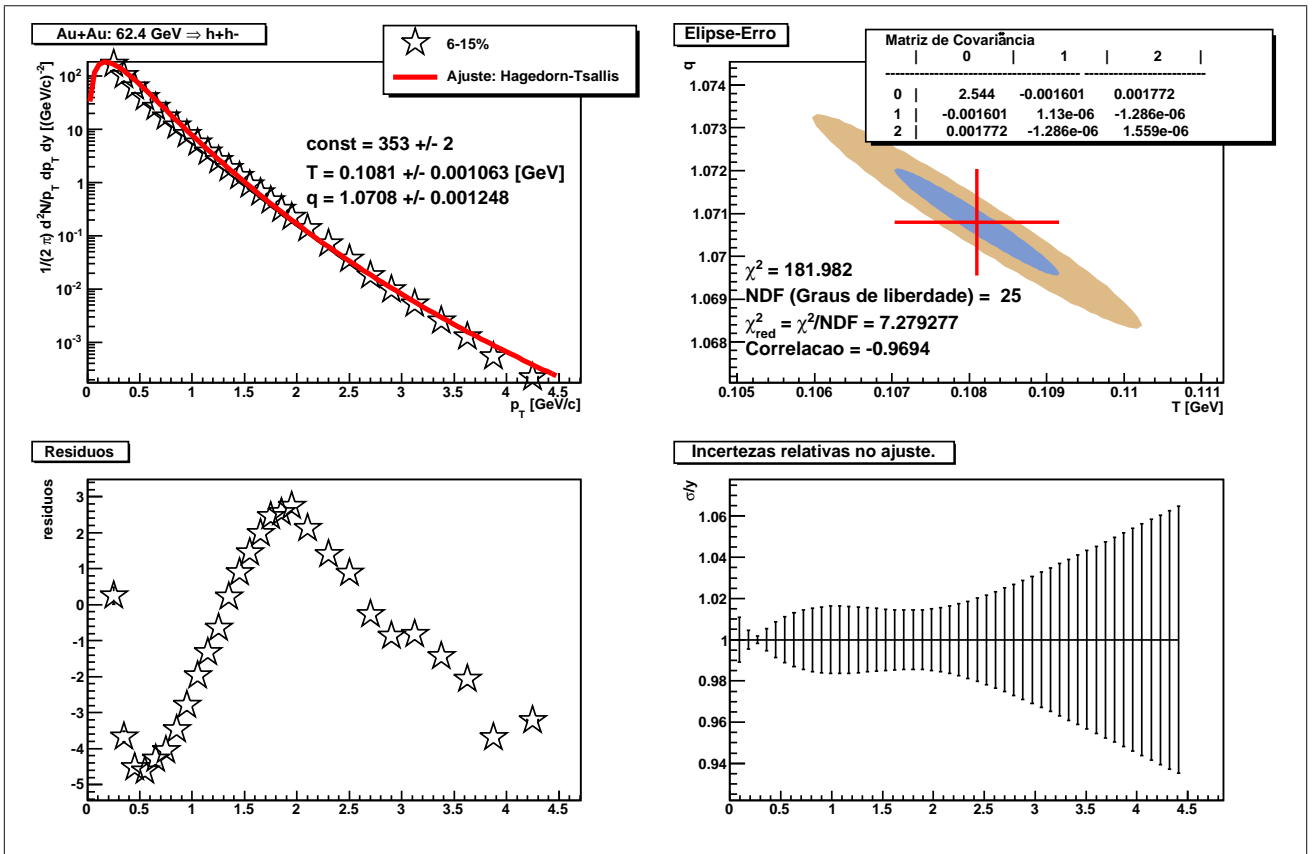


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

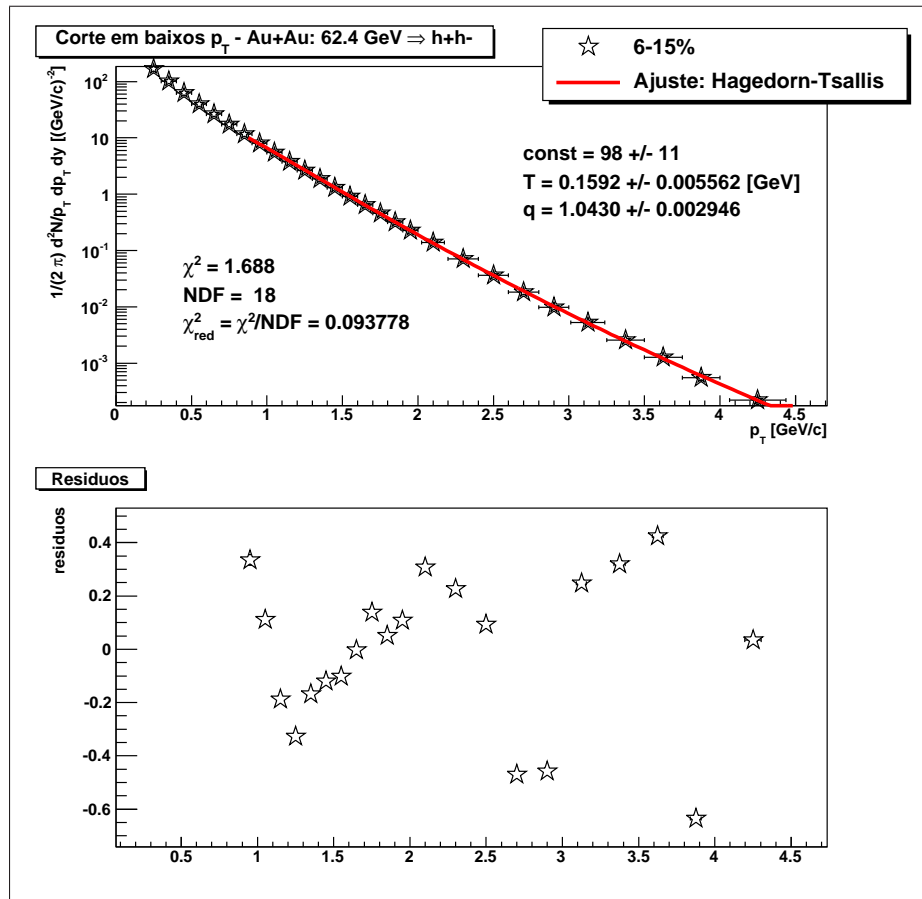


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.7: Centralidade: 0 - 6 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4 \text{ GeV}$

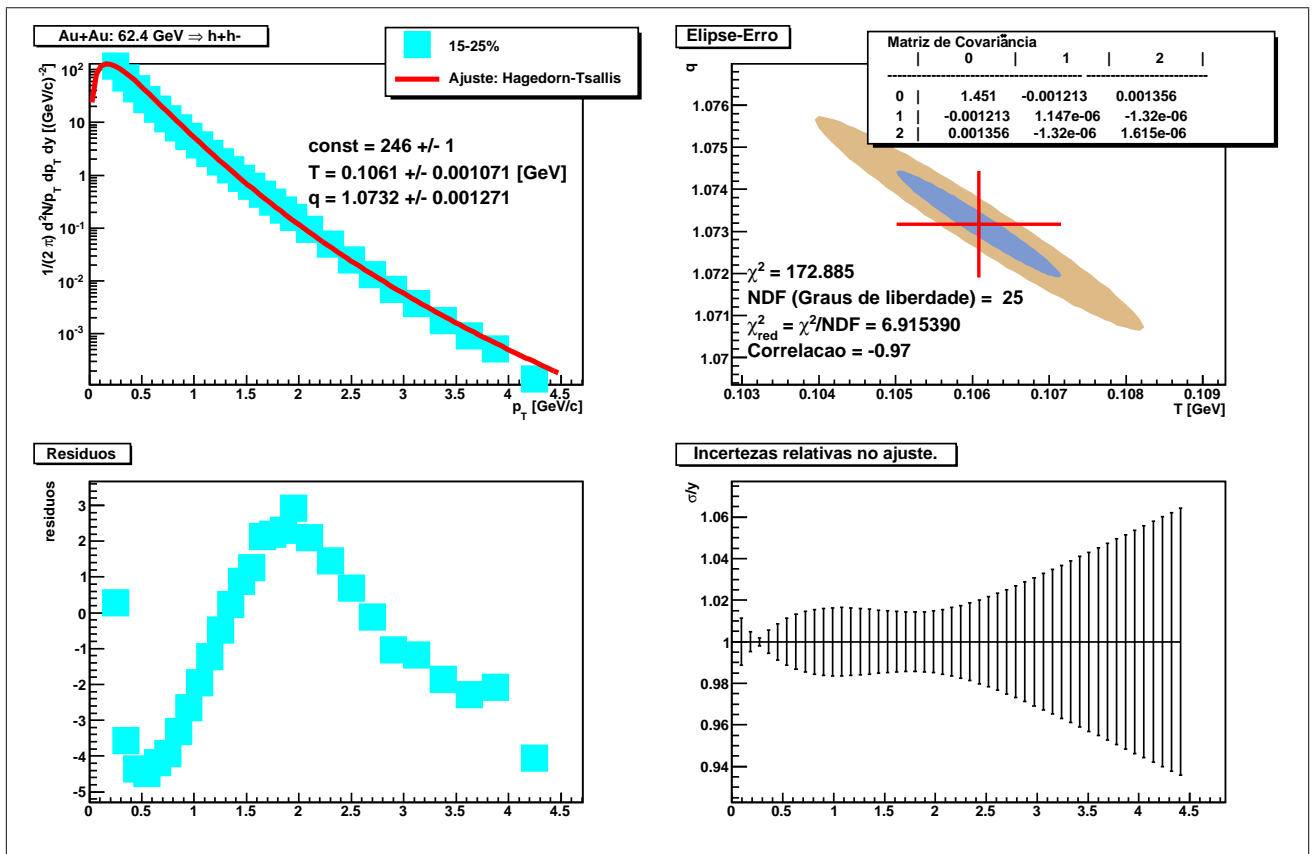


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

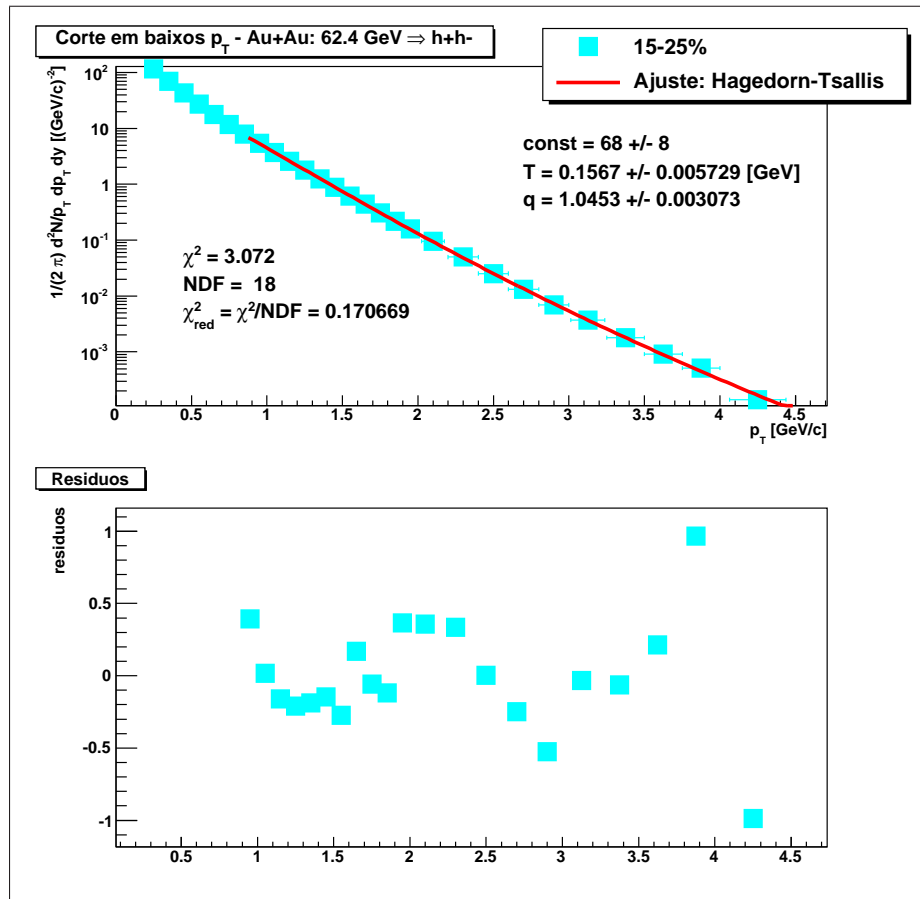


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.8: Centralidade: 6 - 15 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4 \text{ GeV}$

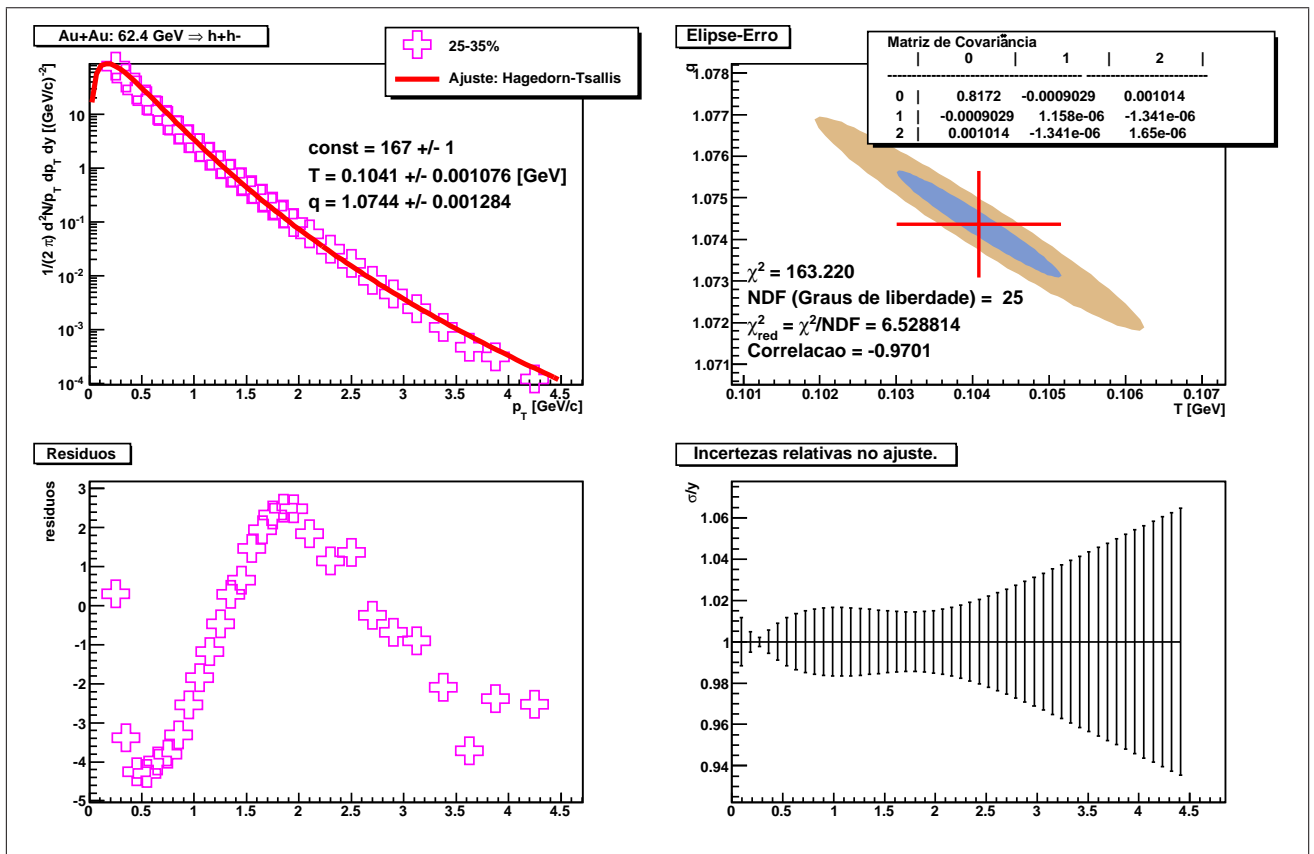


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

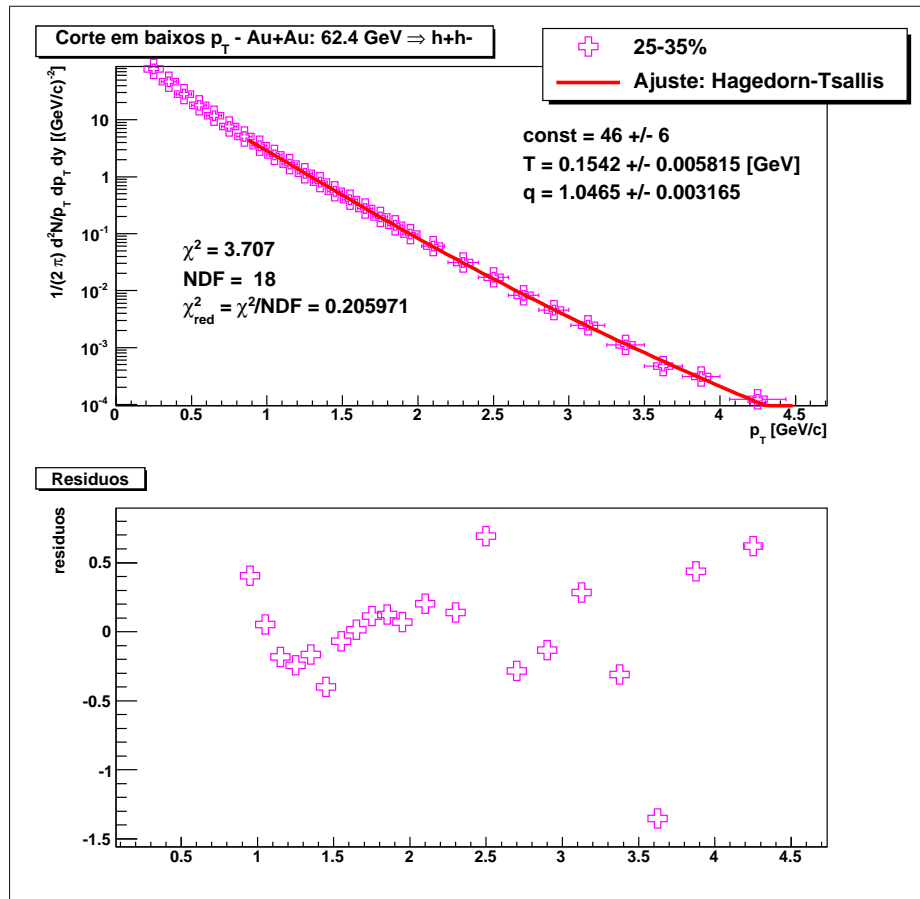


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.9: Centralidade: 15 - 25 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4 \text{ GeV}$

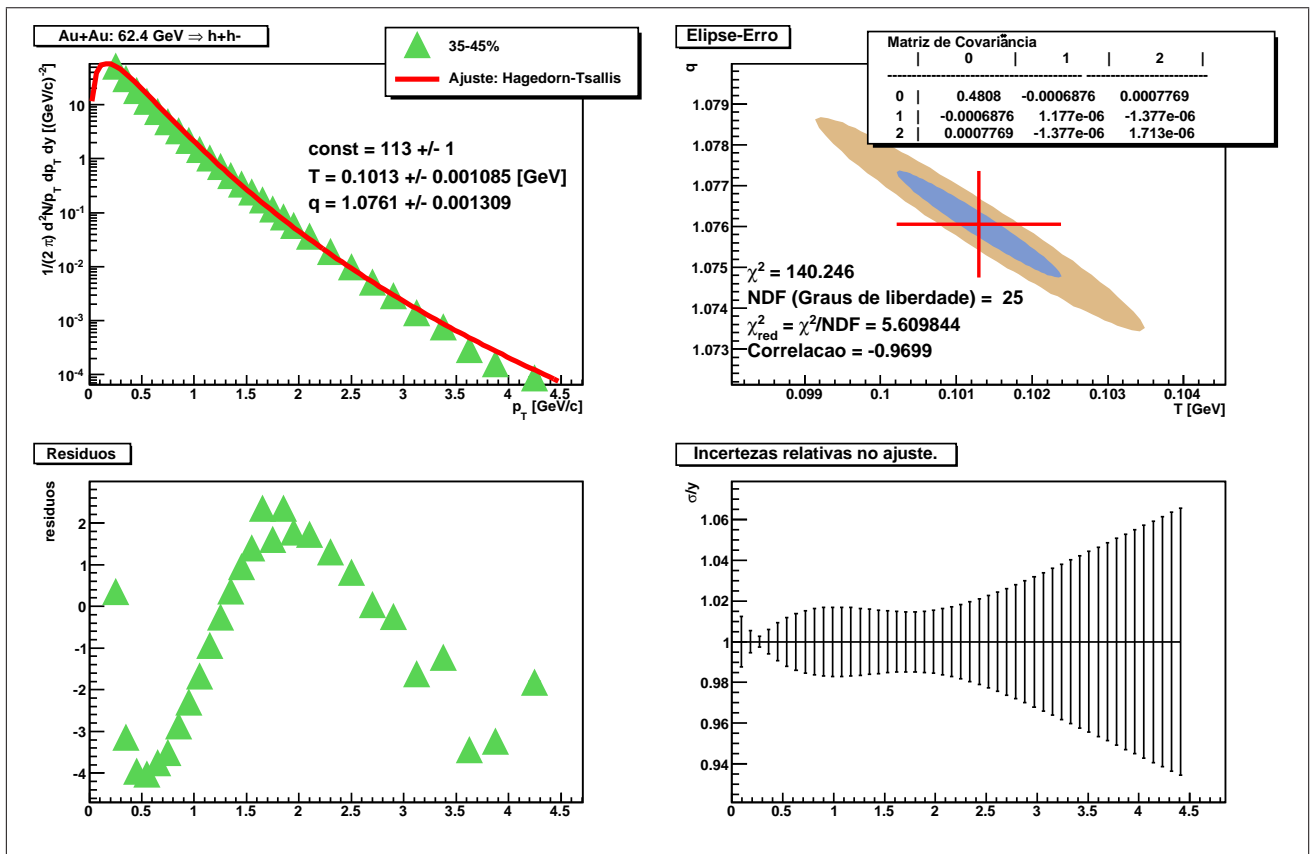


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

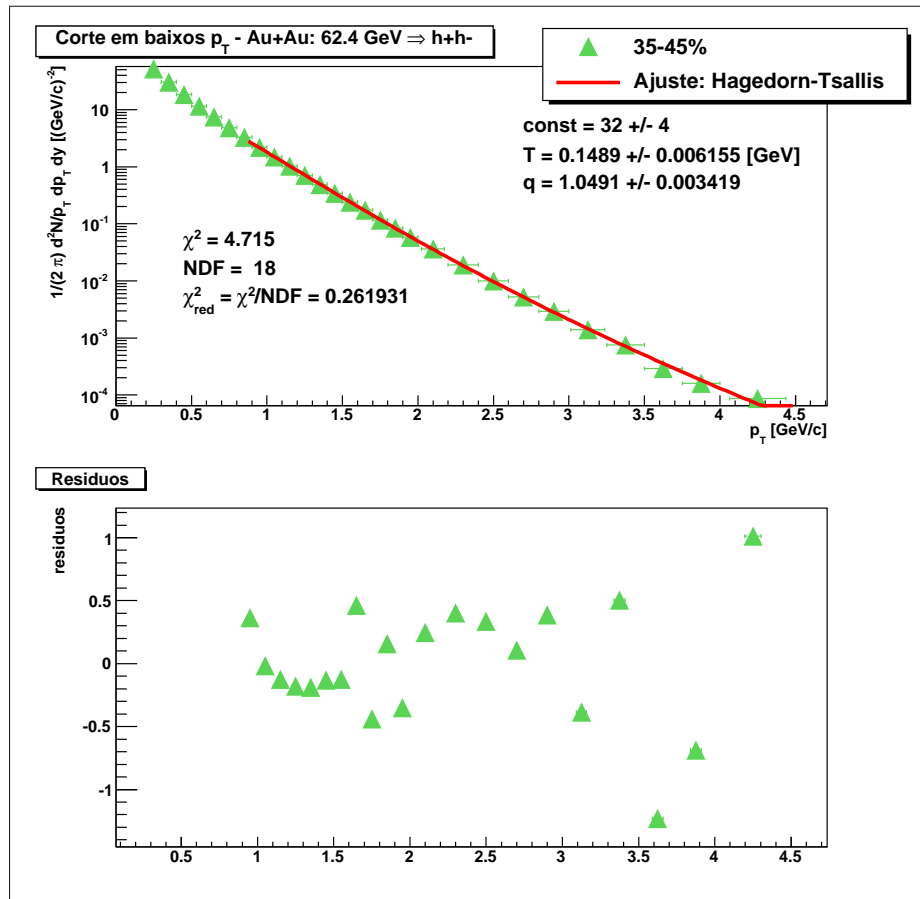


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.10: Centralidade: 25 - 35 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4 \text{ GeV}$

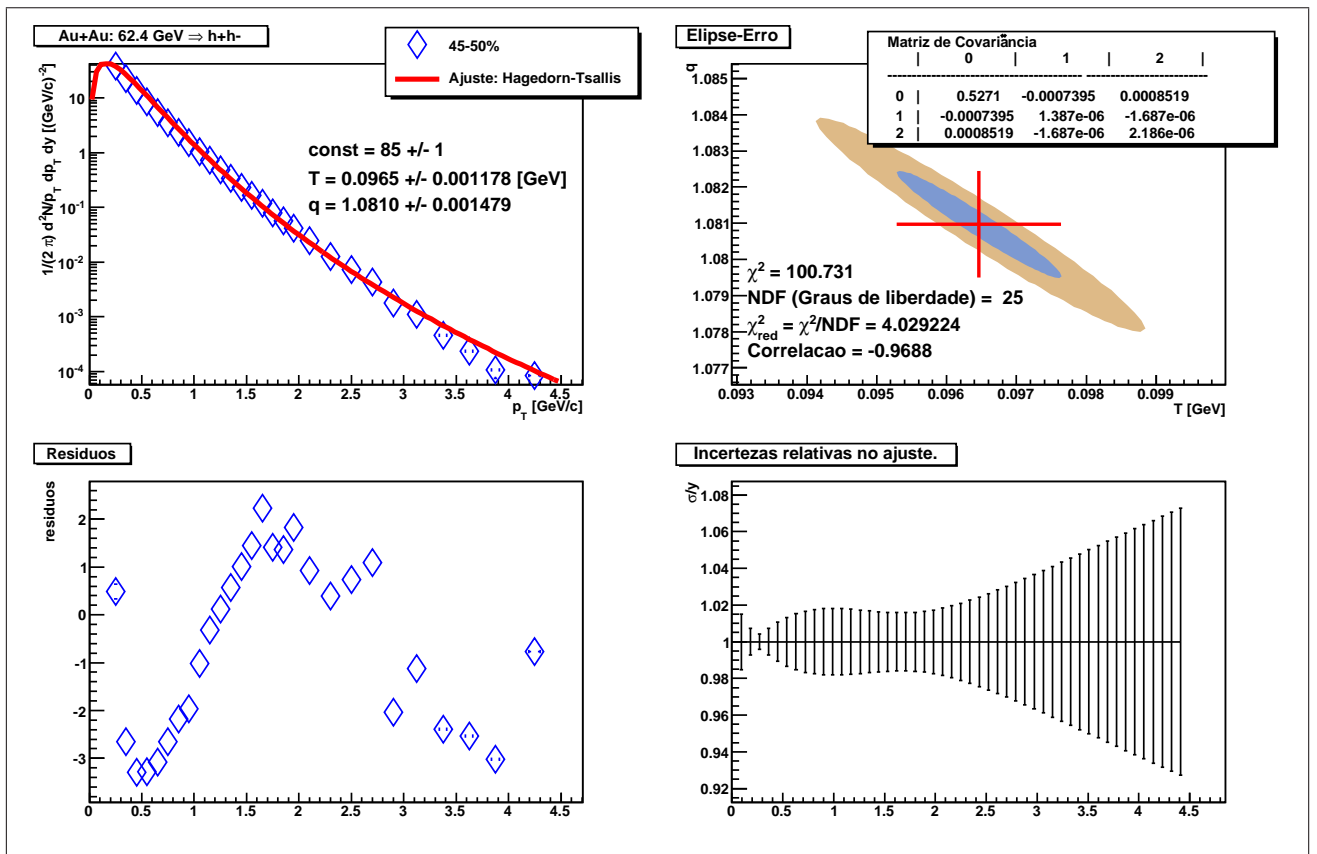


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

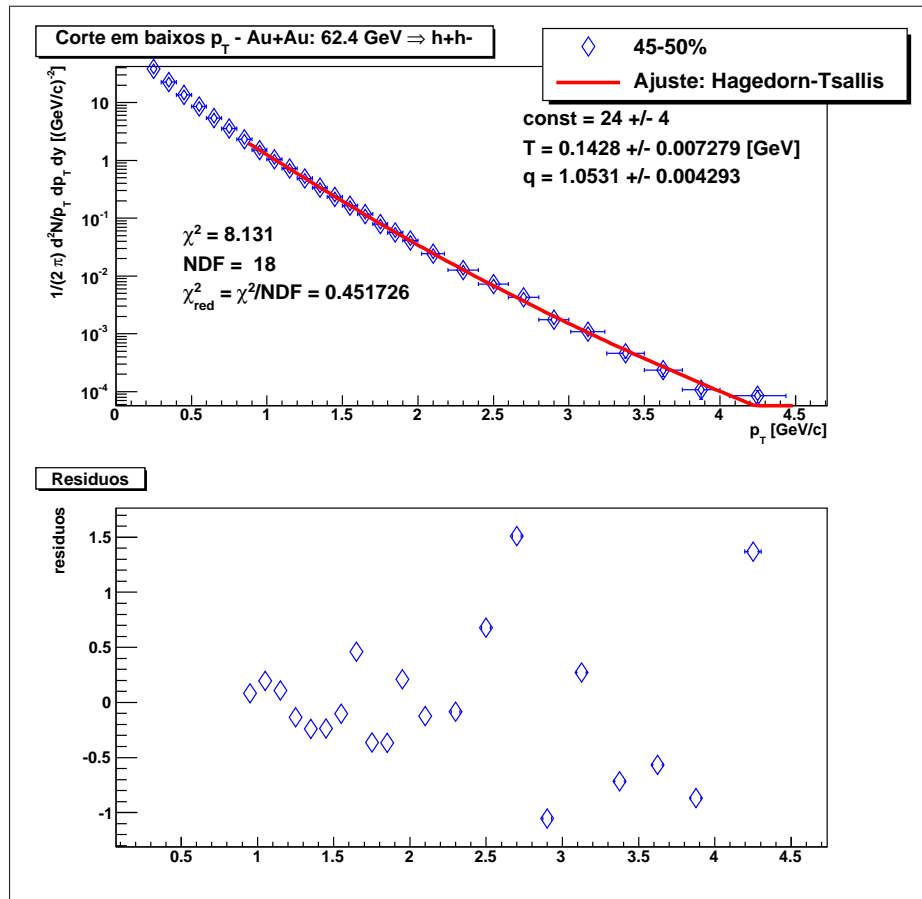


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.11: Centralidade: 35 - 45 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4 \text{ GeV}$



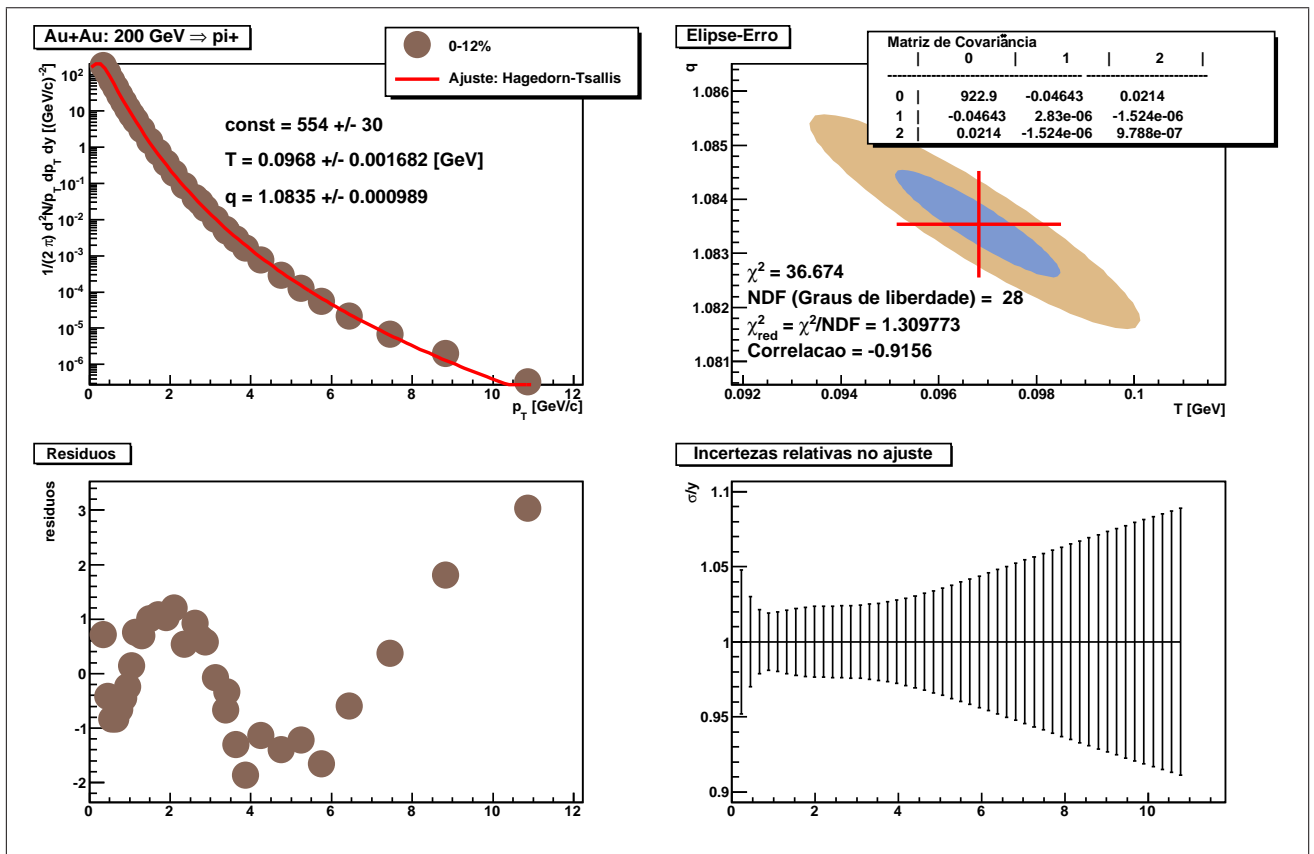
(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .



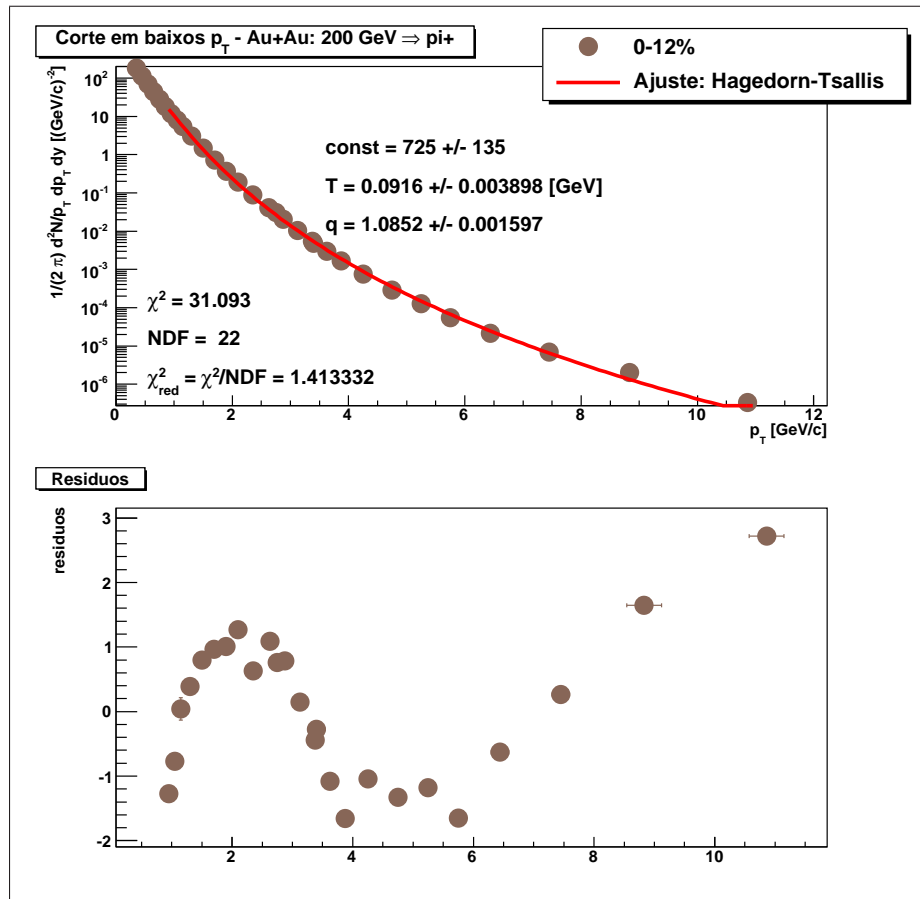
(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.12: Centralidade: 45 - 50 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 62.4 \text{ GeV}$

A.3 Colisões Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$

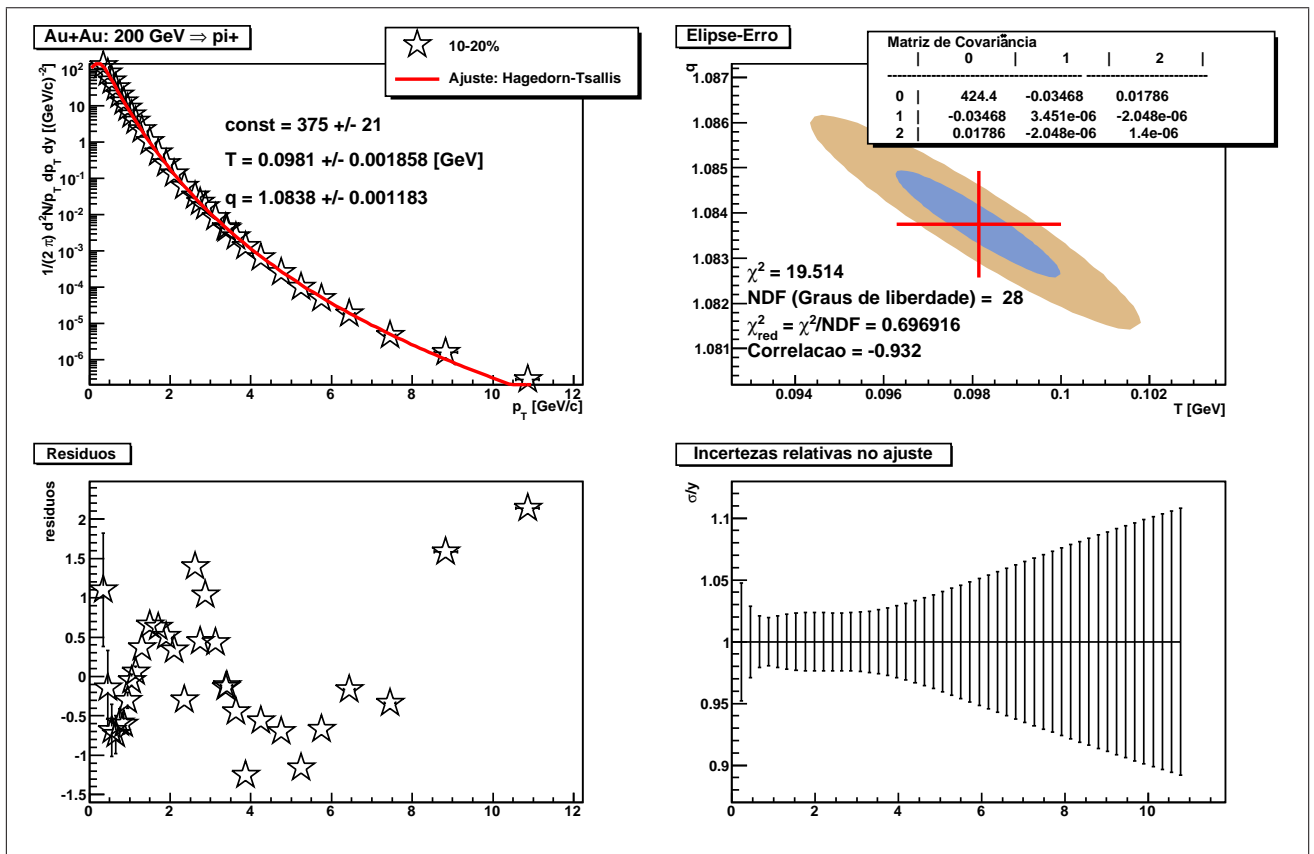


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

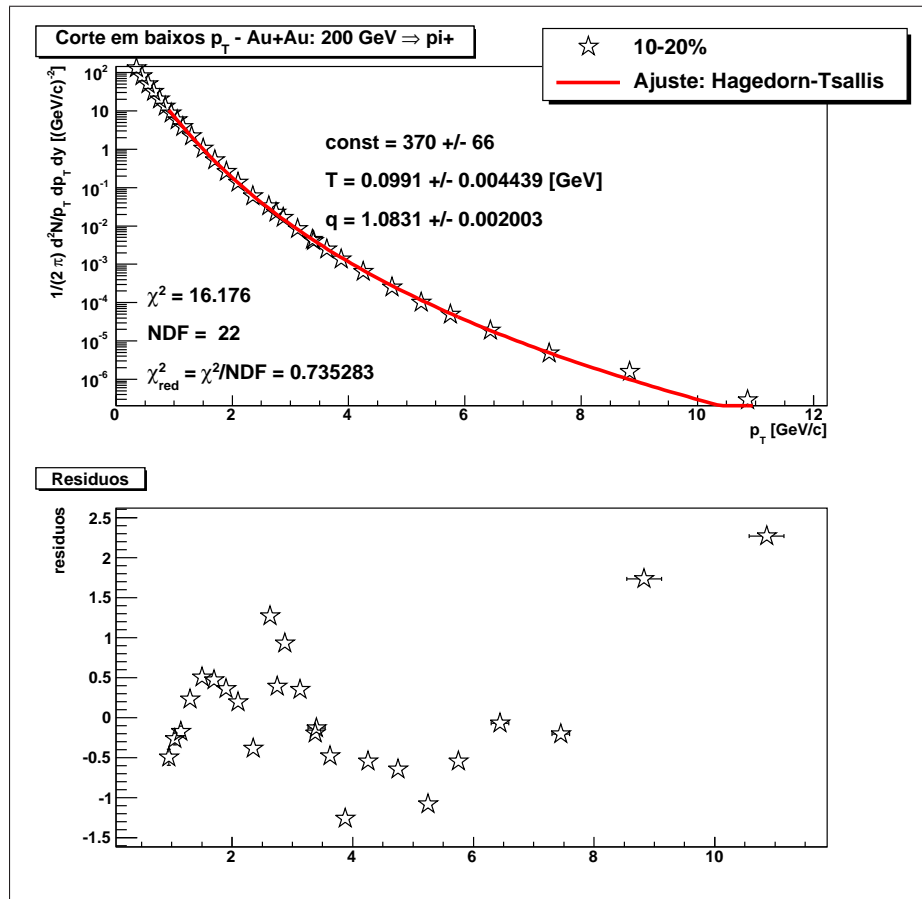


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.13: Centralidade: 0 - 12 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

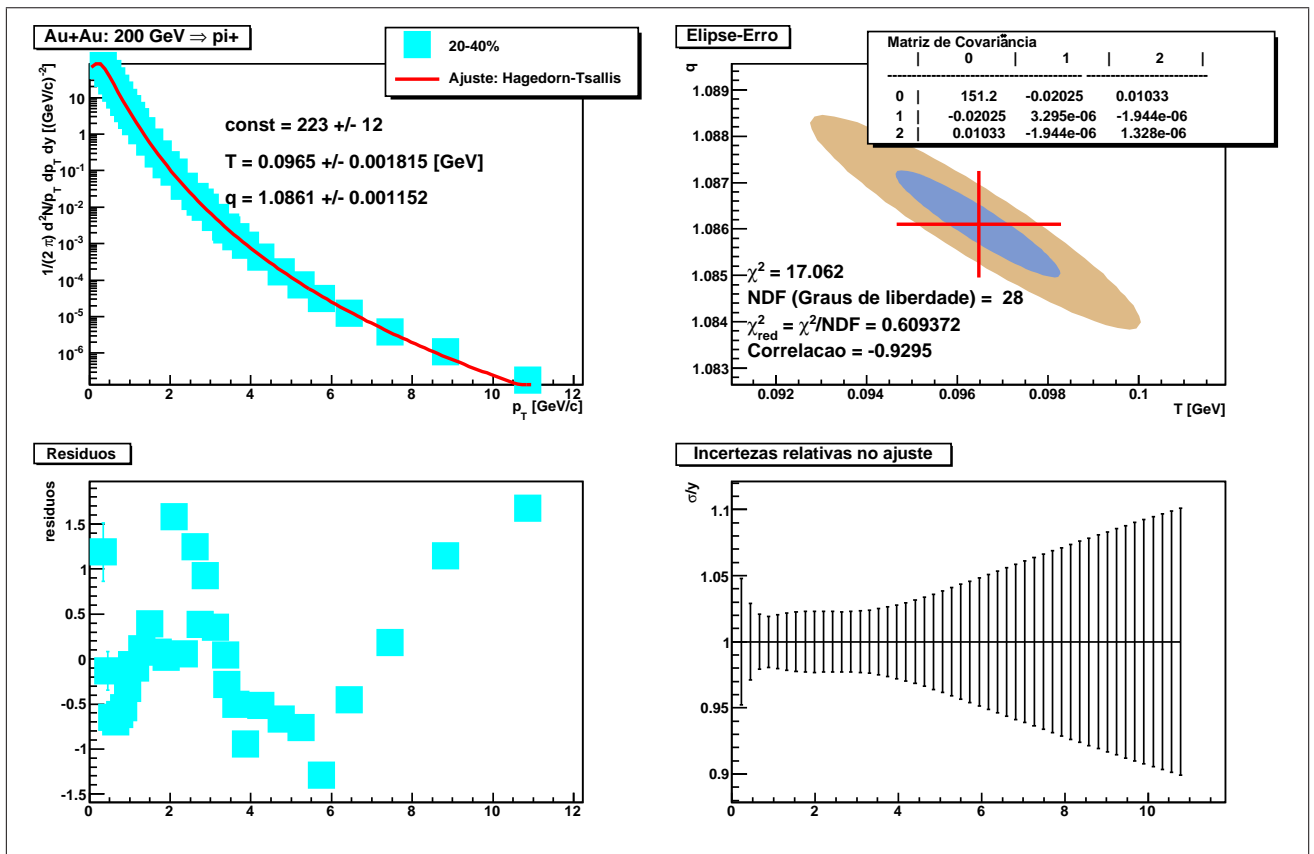


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

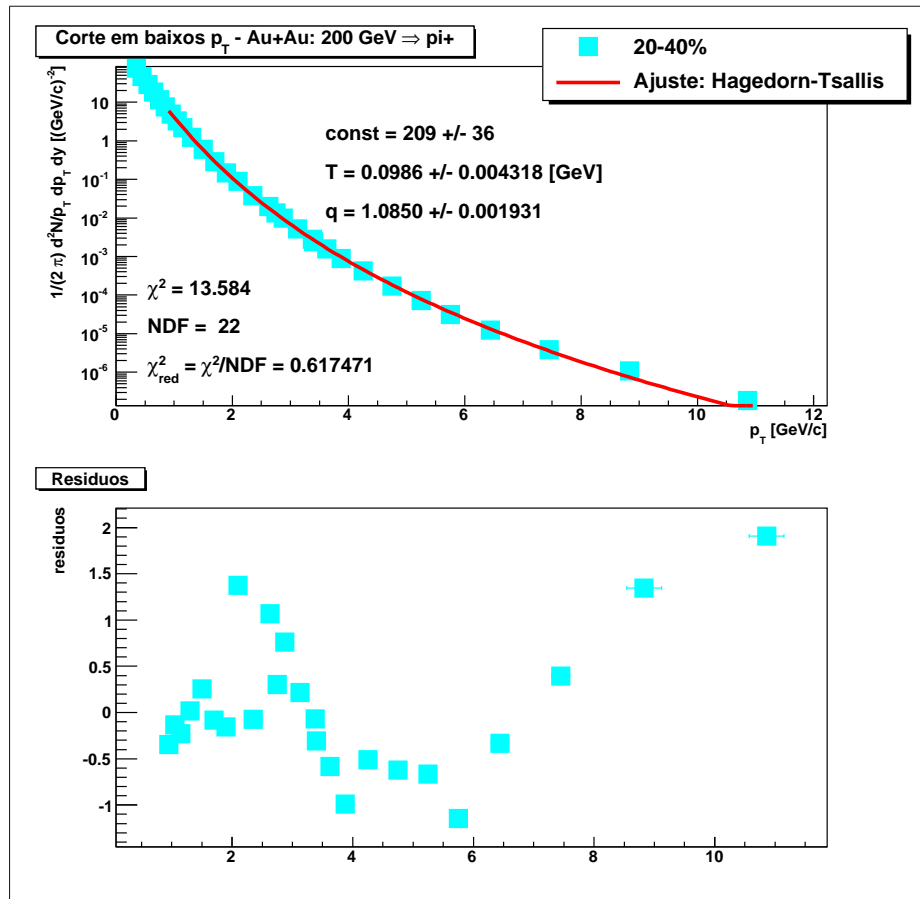


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.14: Centralidade: 10 - 20 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

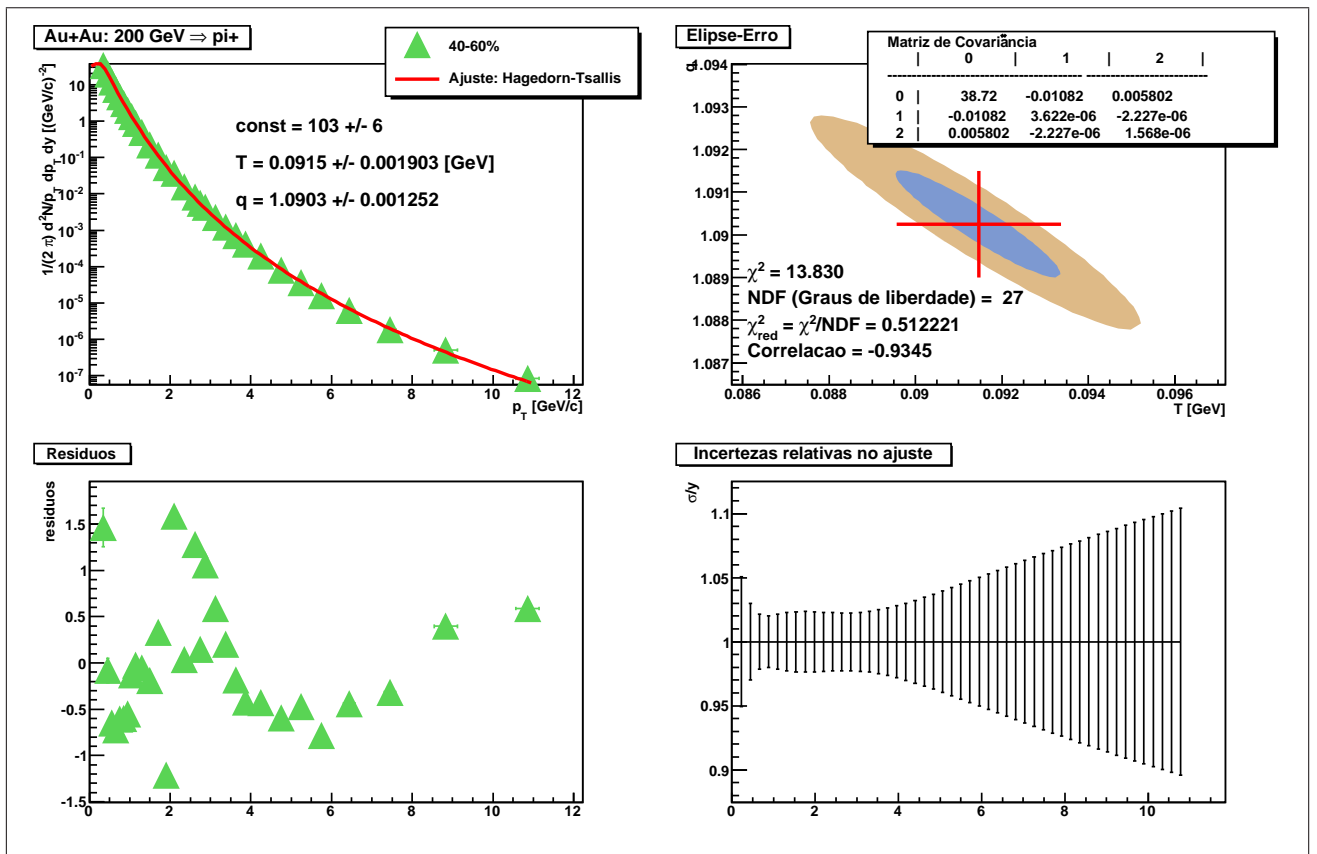


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

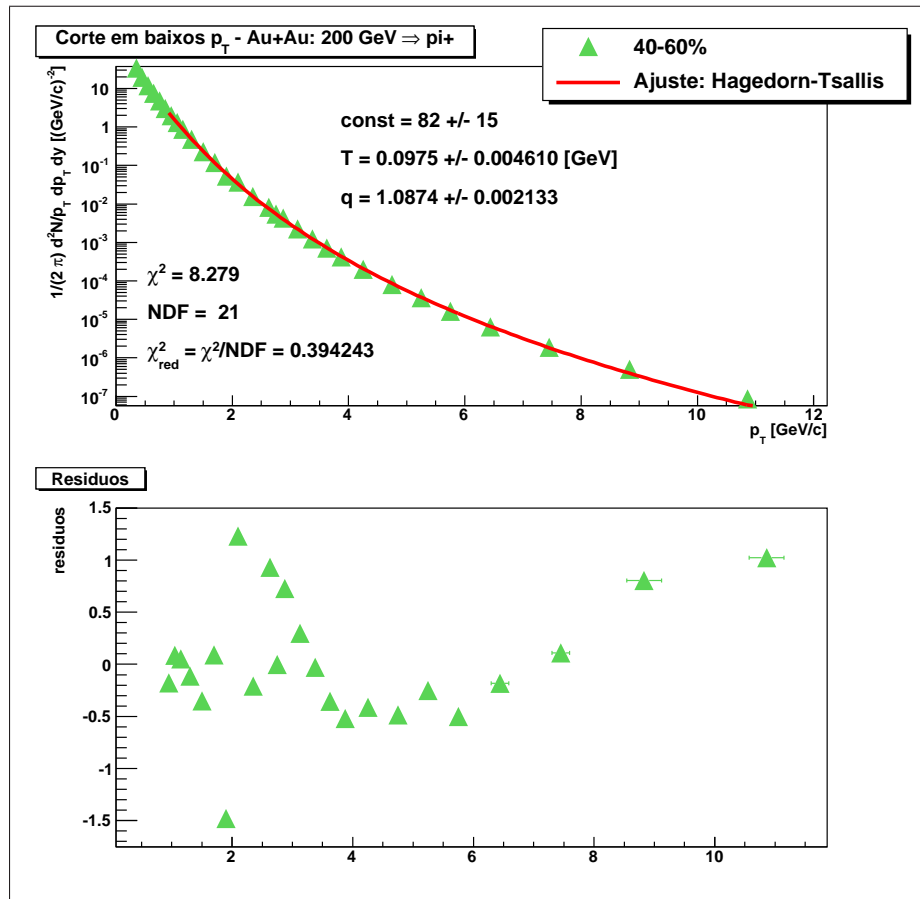


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.15: Centralidade: 20 - 40 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

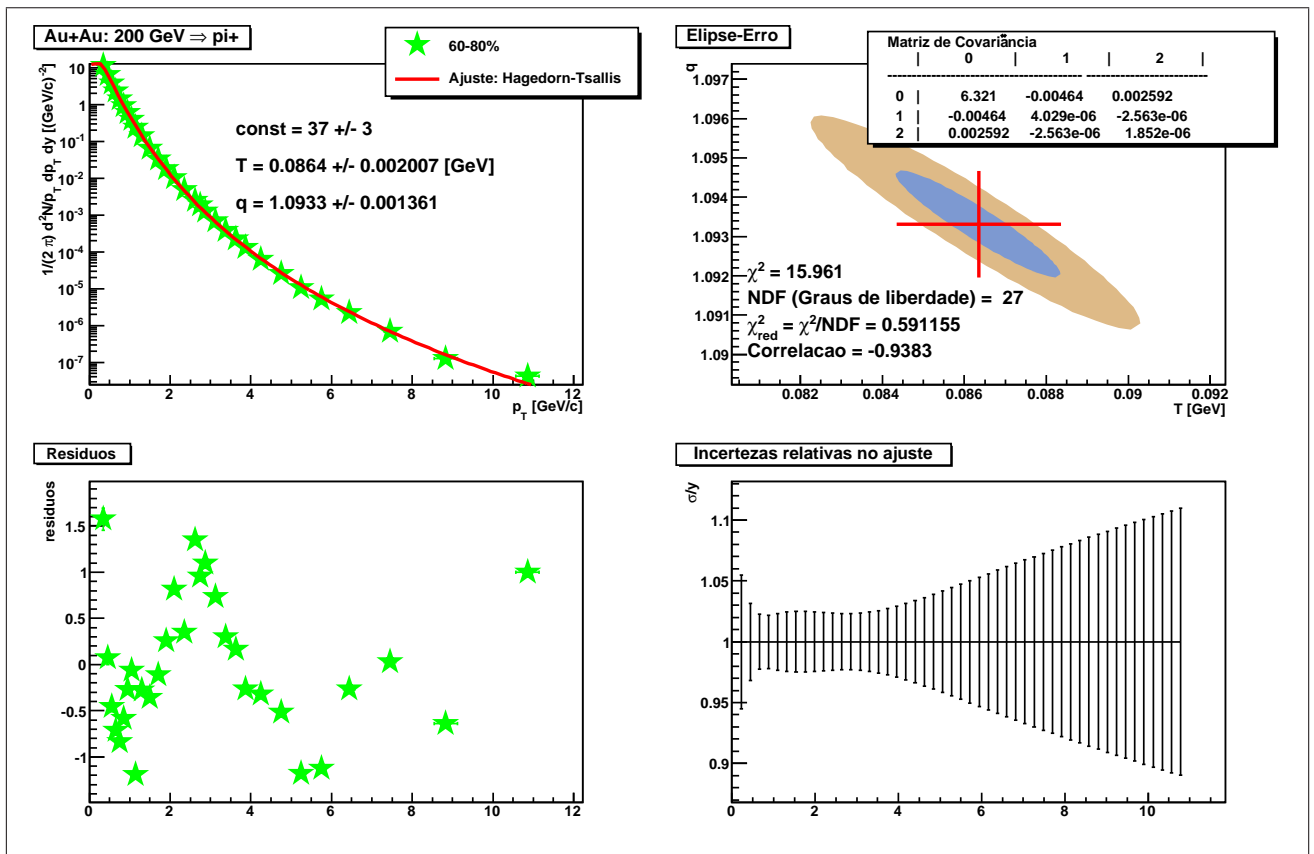


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

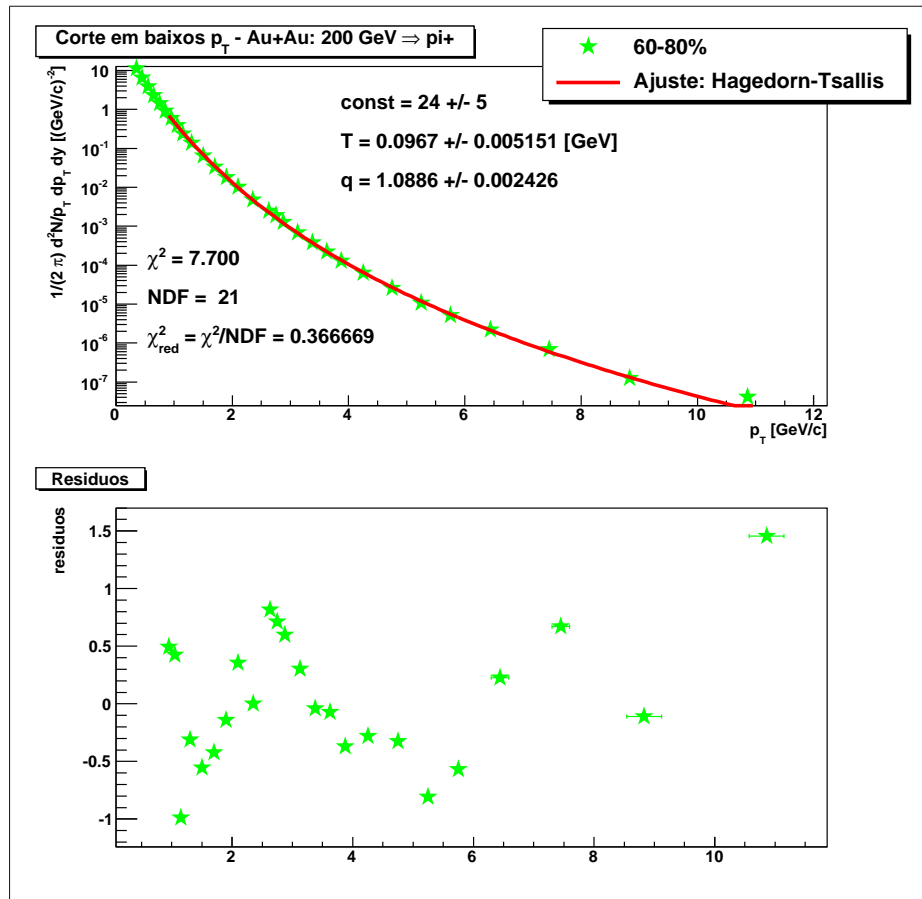


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.16: Centralidade: 40 - 60 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

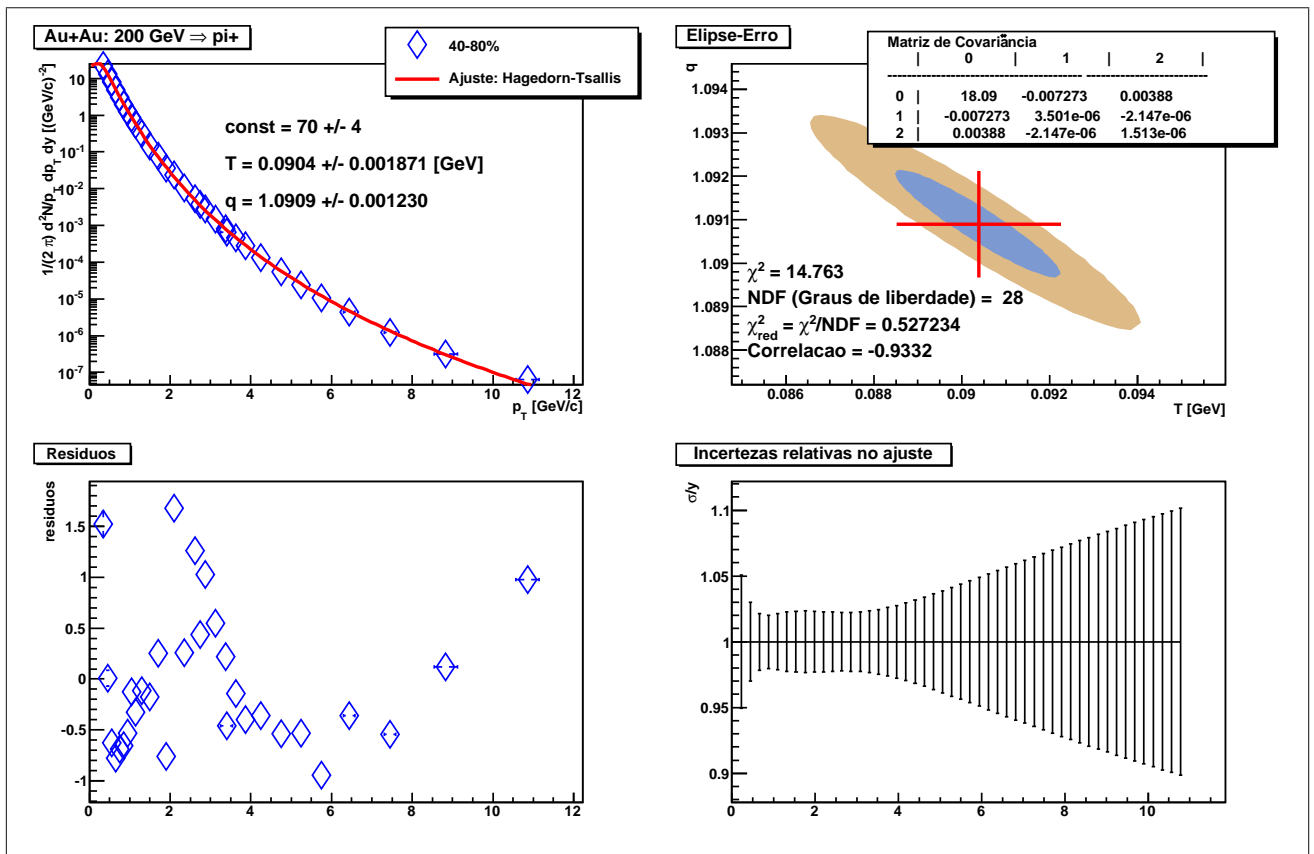


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

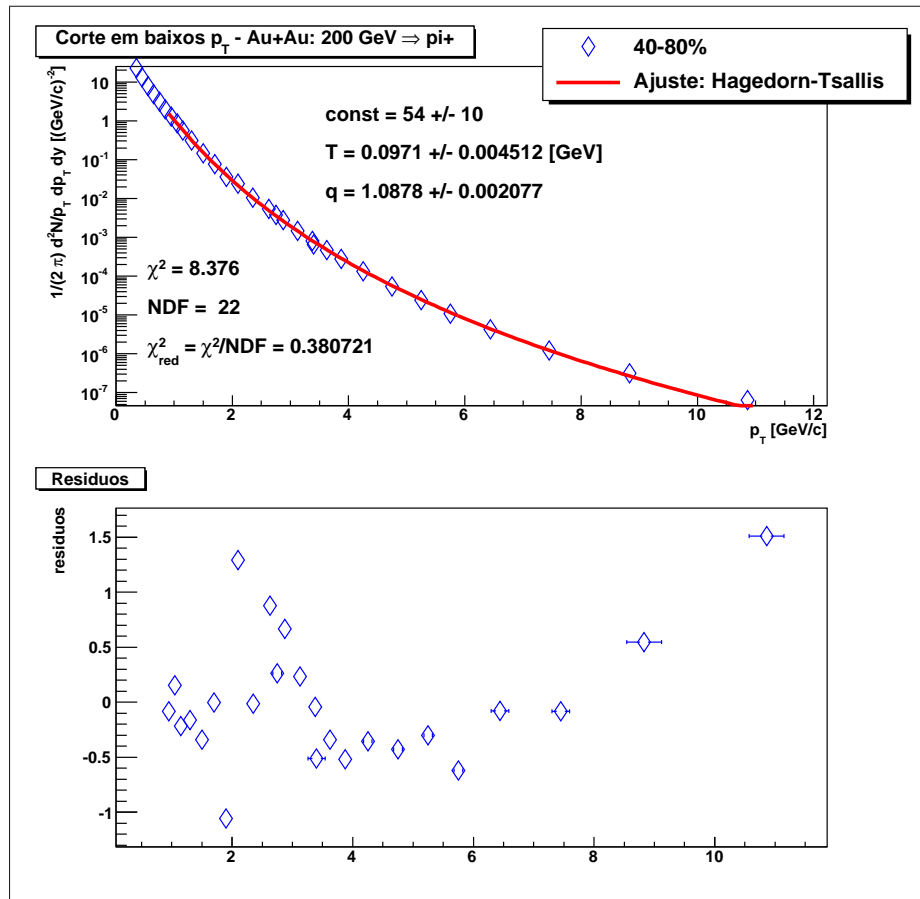


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.17: Centralidade: 60 - 80 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

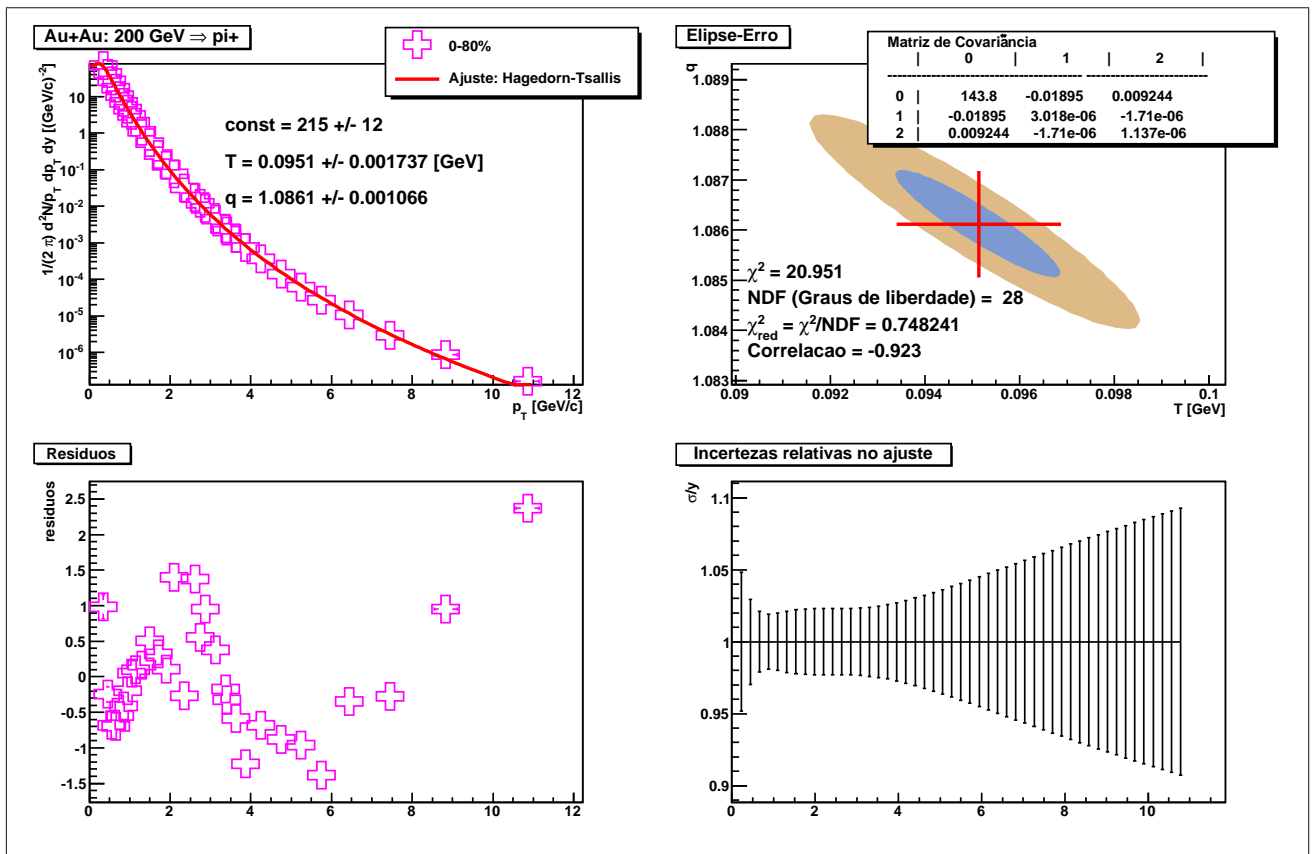


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

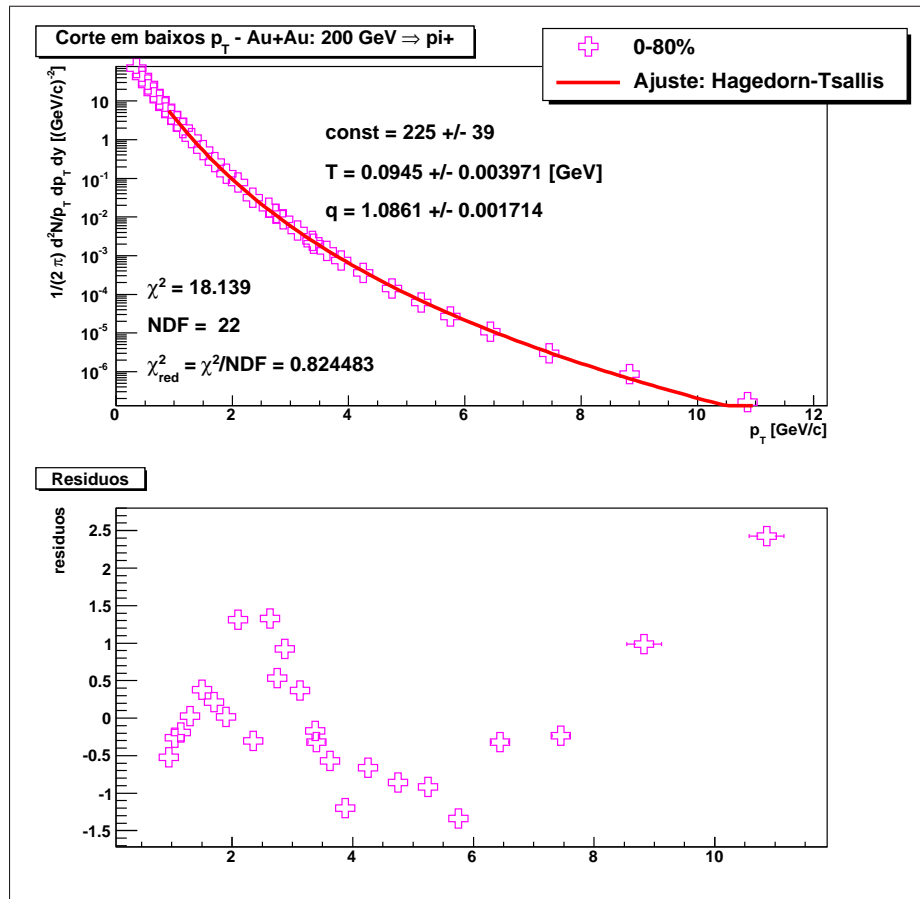


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.18: Centralidade: 40 - 80 %. Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV



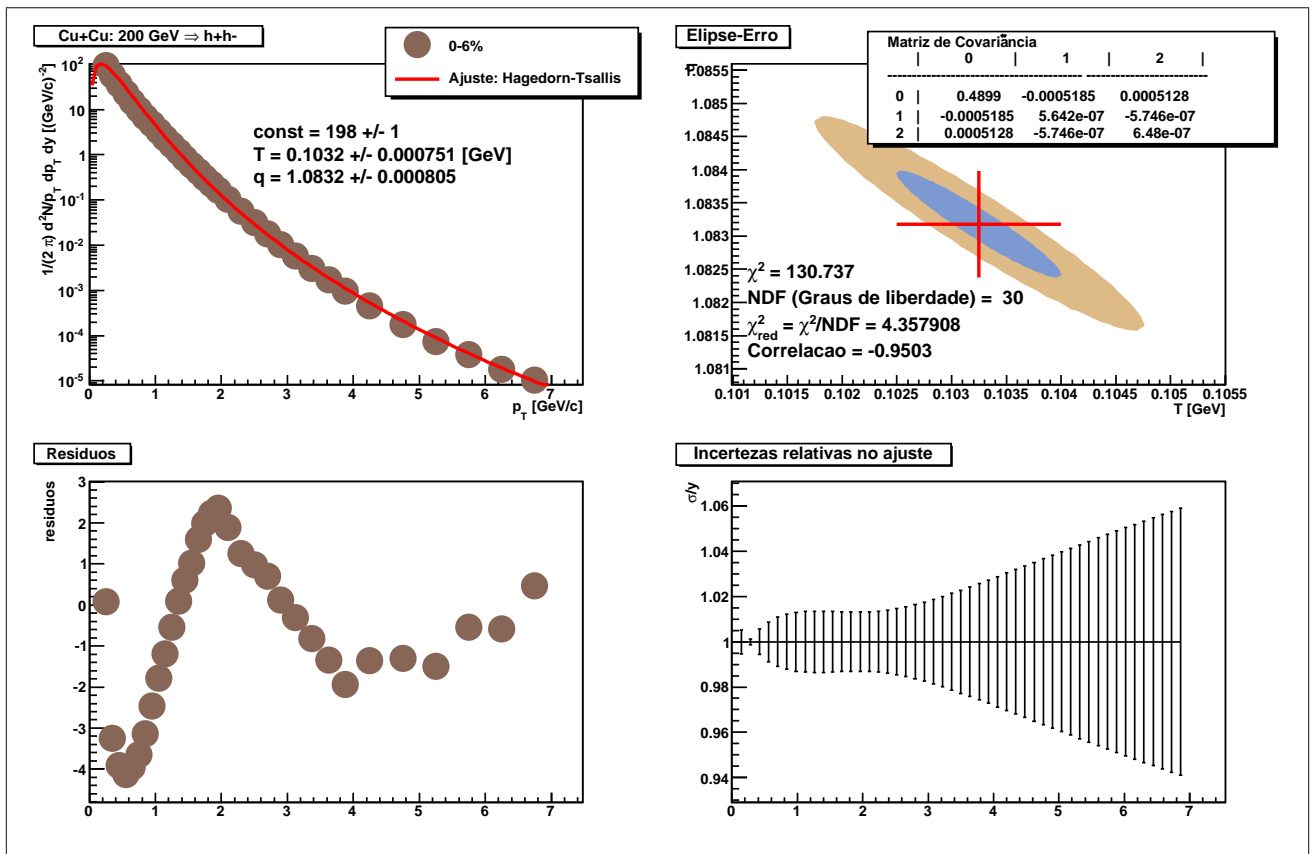
(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .



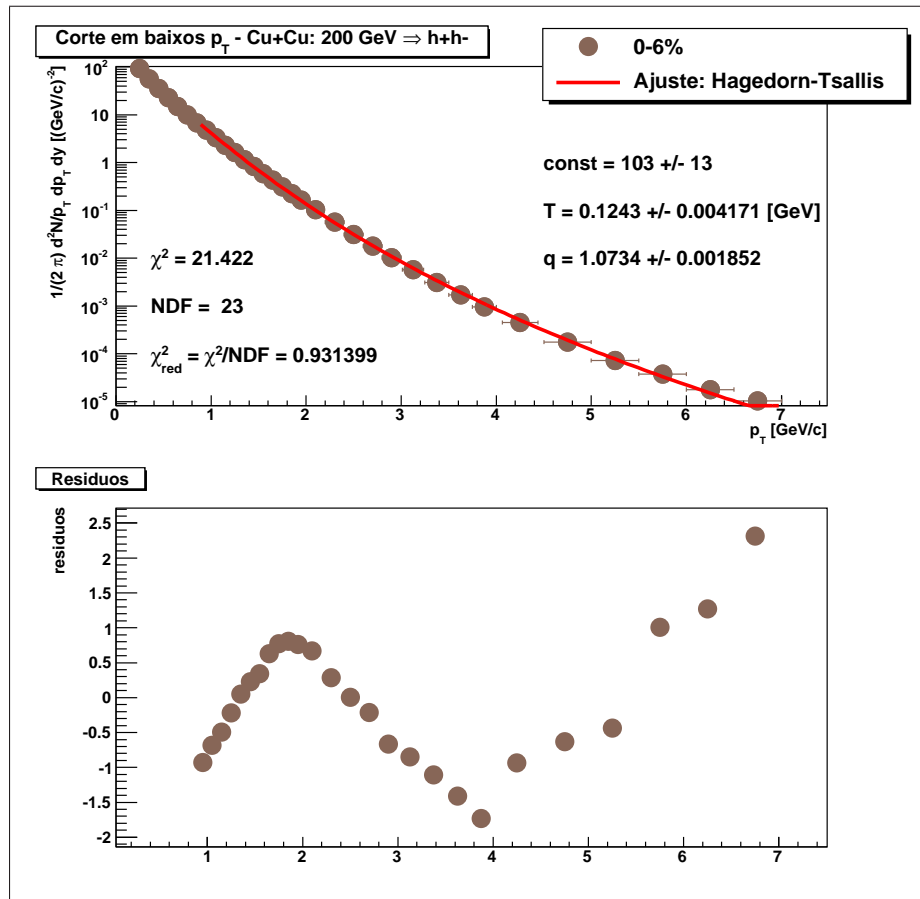
(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.19: Centralidade: 0 - 80 % (*Minimum bias*). Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$

A.4 Colisões Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$

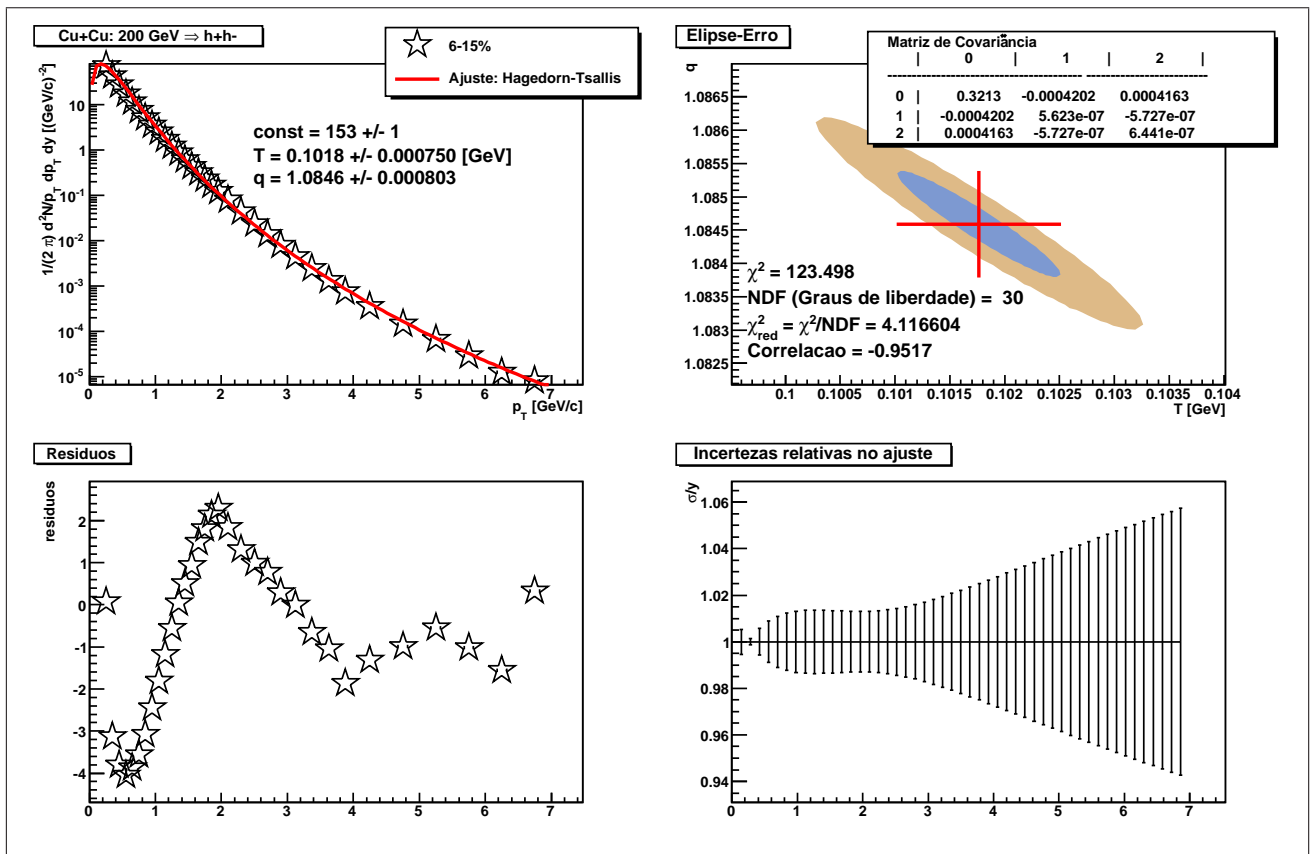


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

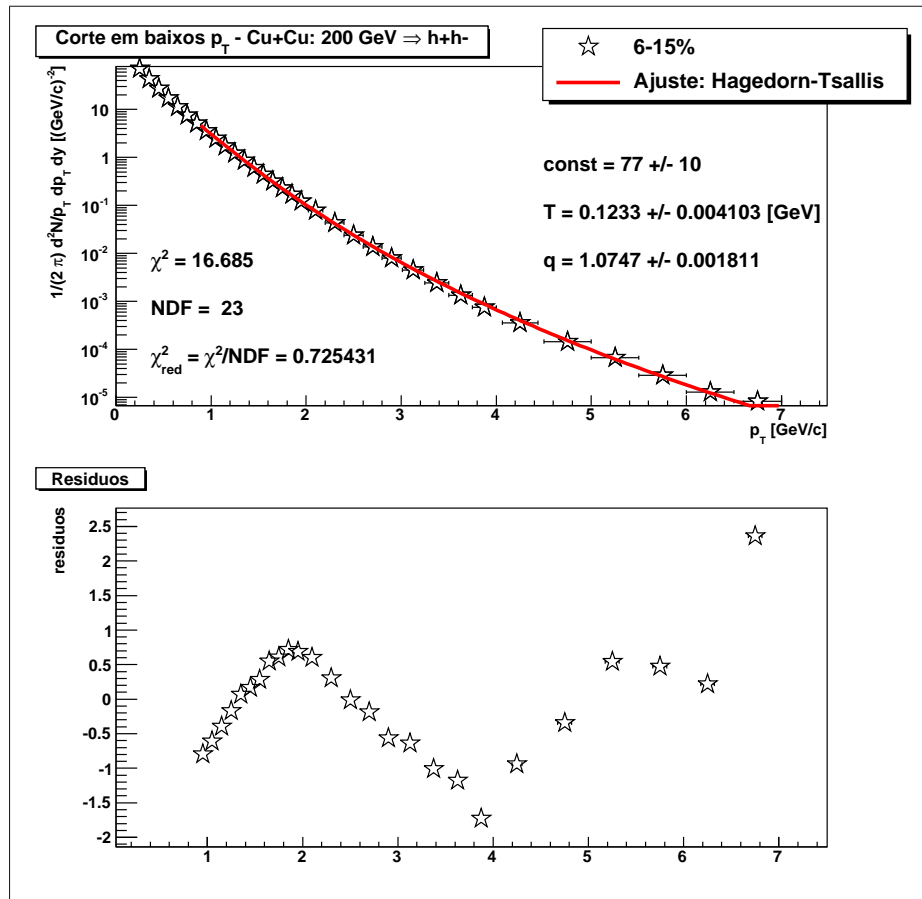


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.20: Centralidade: 0 - 6 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

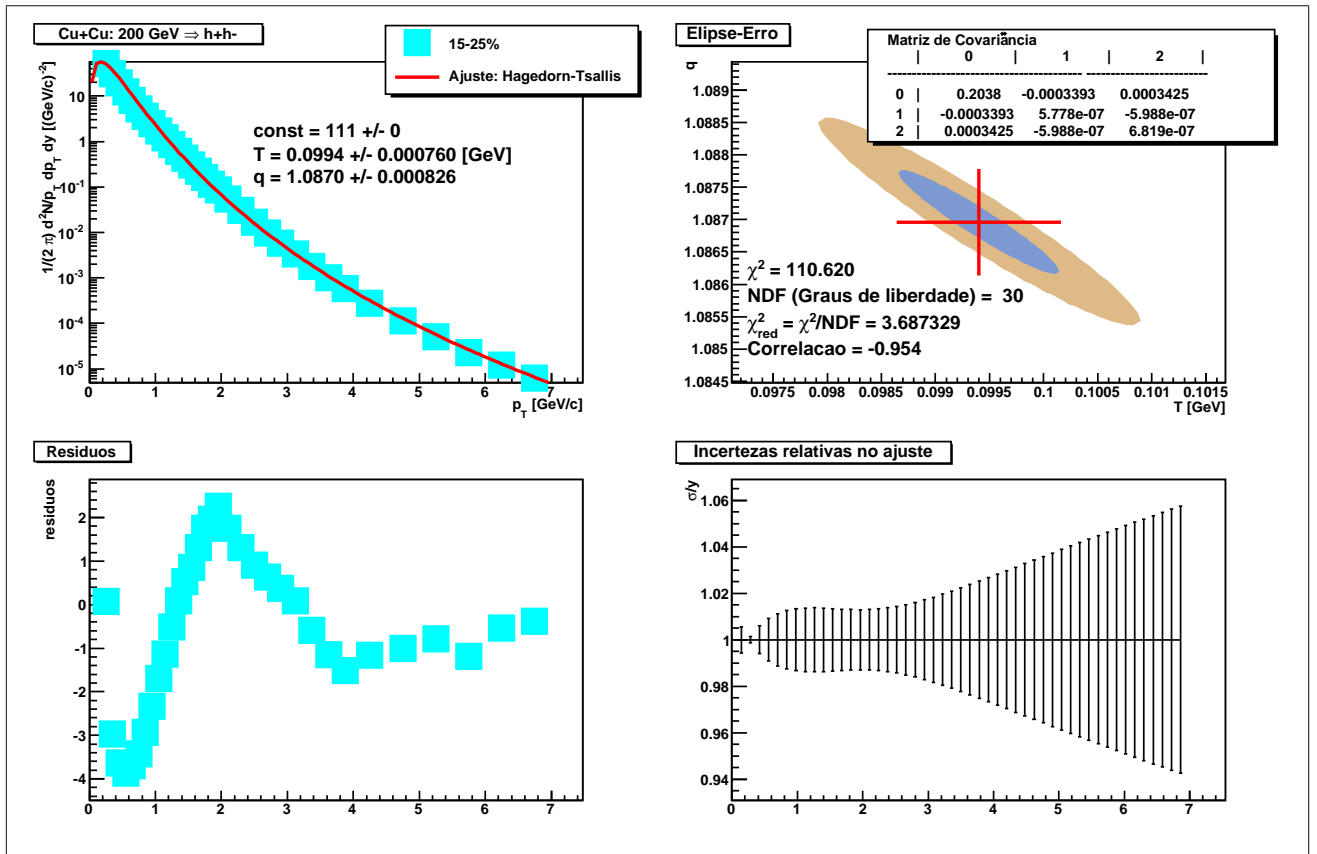


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

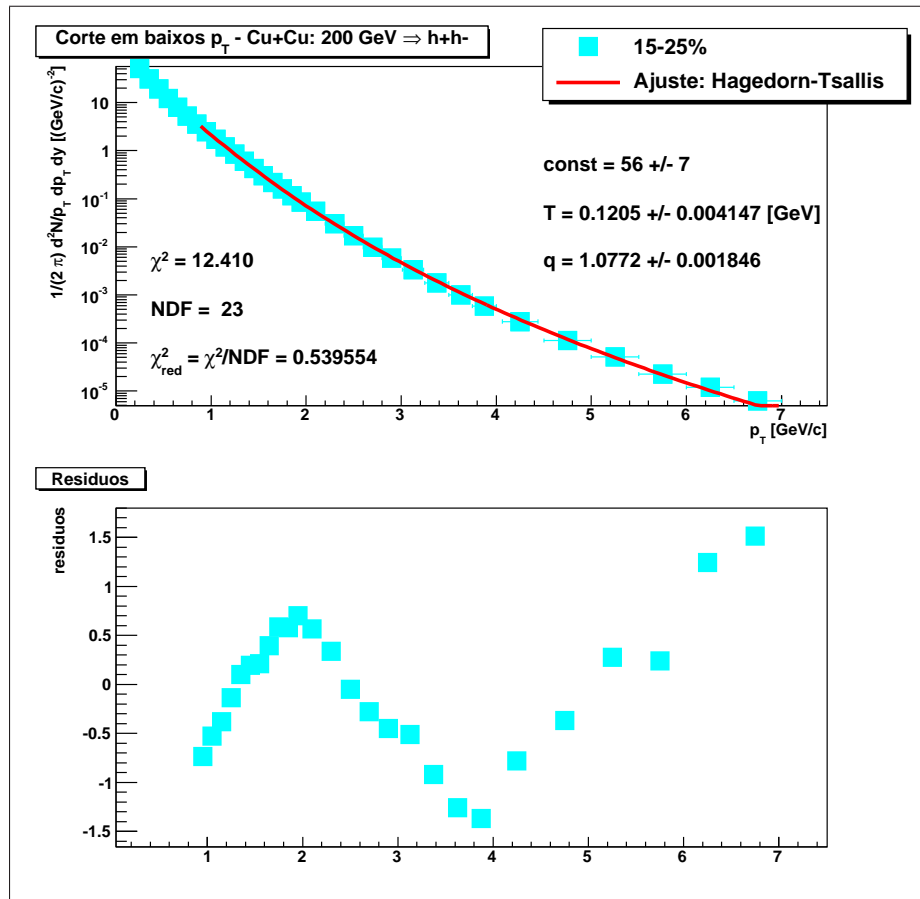


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.21: Centralidade: 6 - 15 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

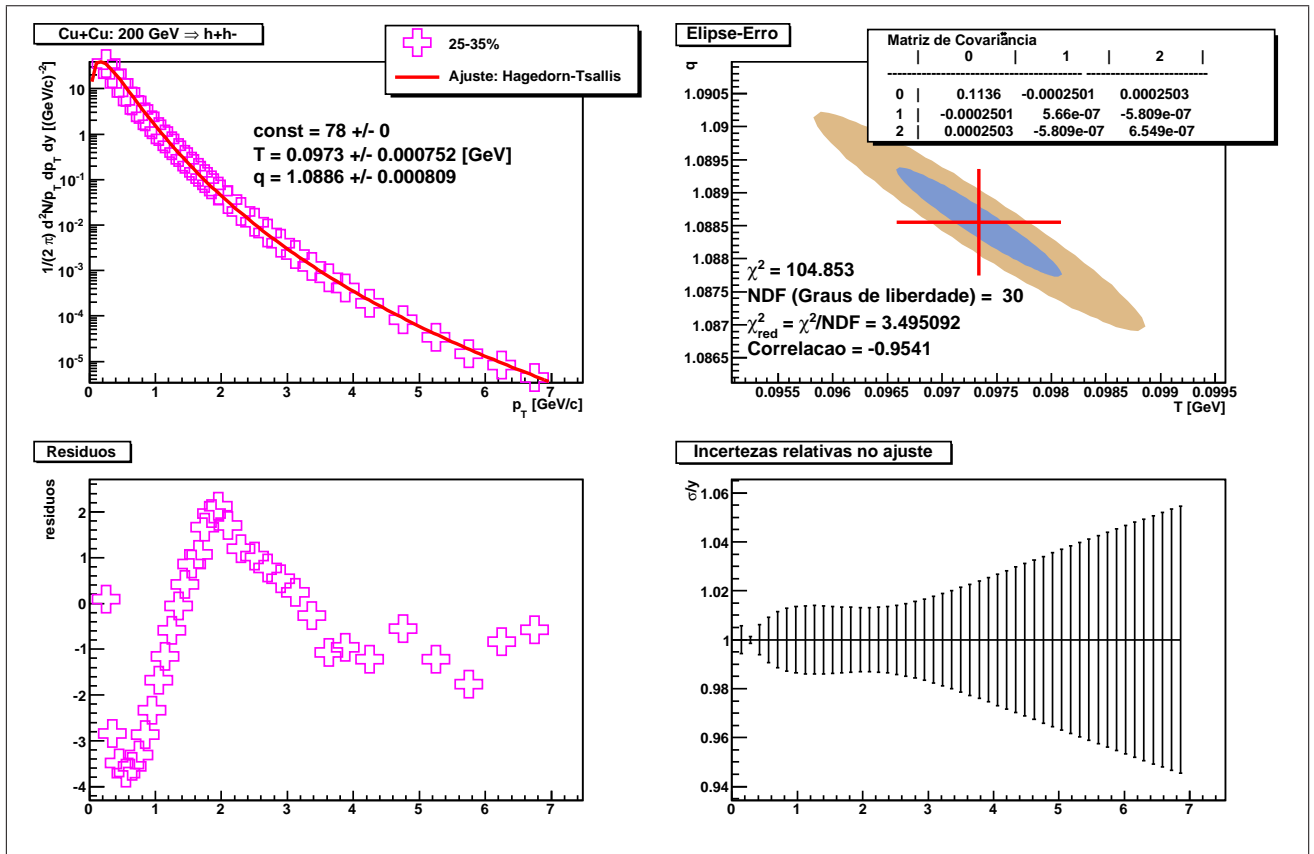


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

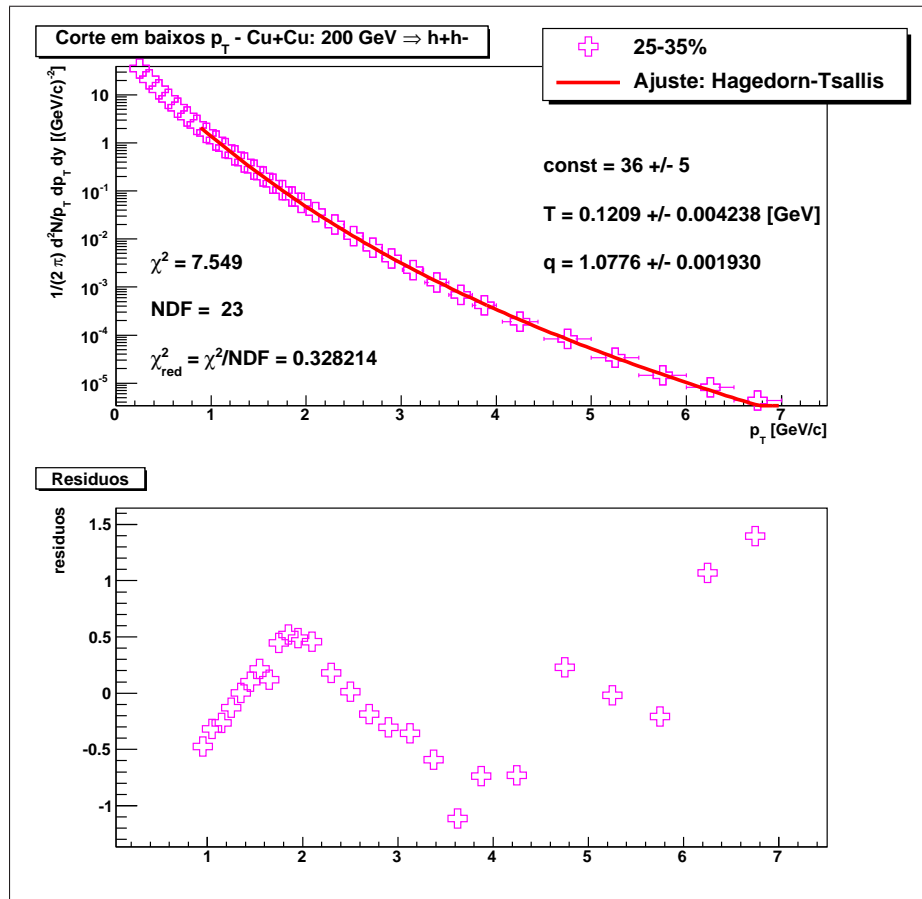


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.22: Centralidade: 15 - 25 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

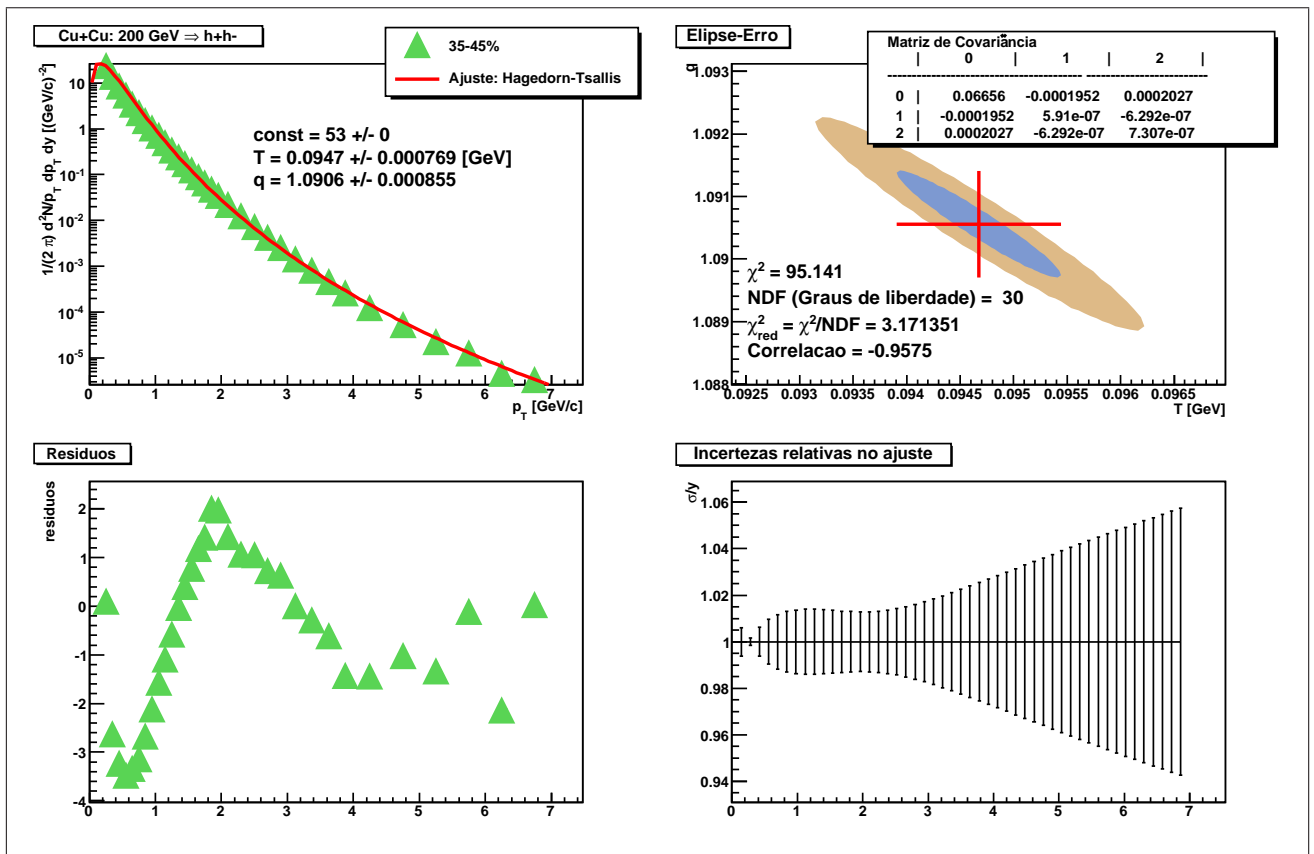


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

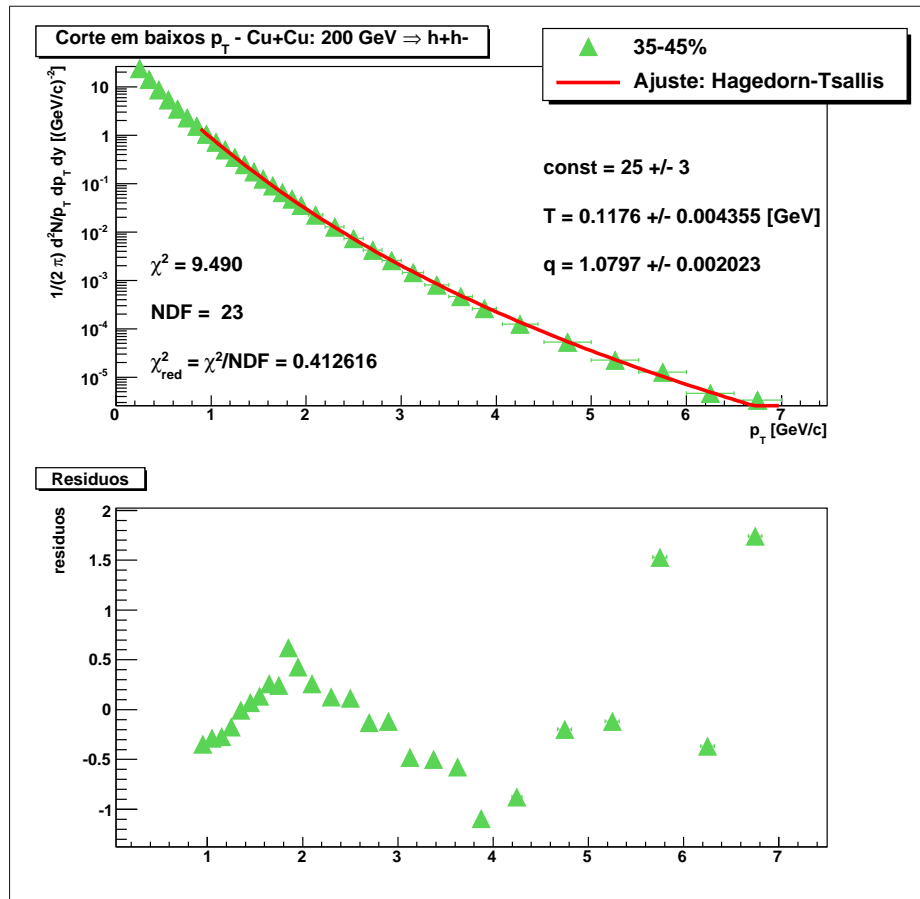


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.23: Centralidade: 25 - 35 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

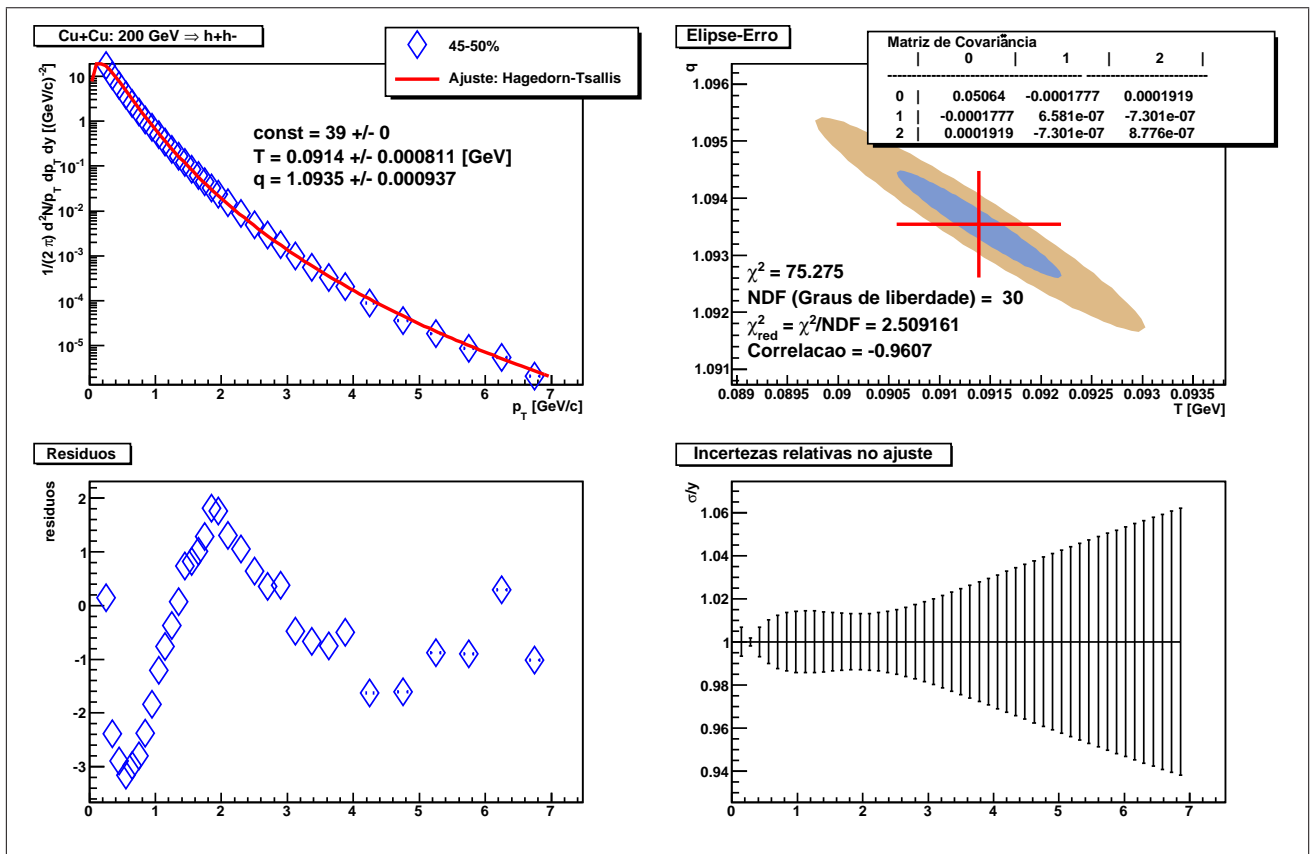


(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .

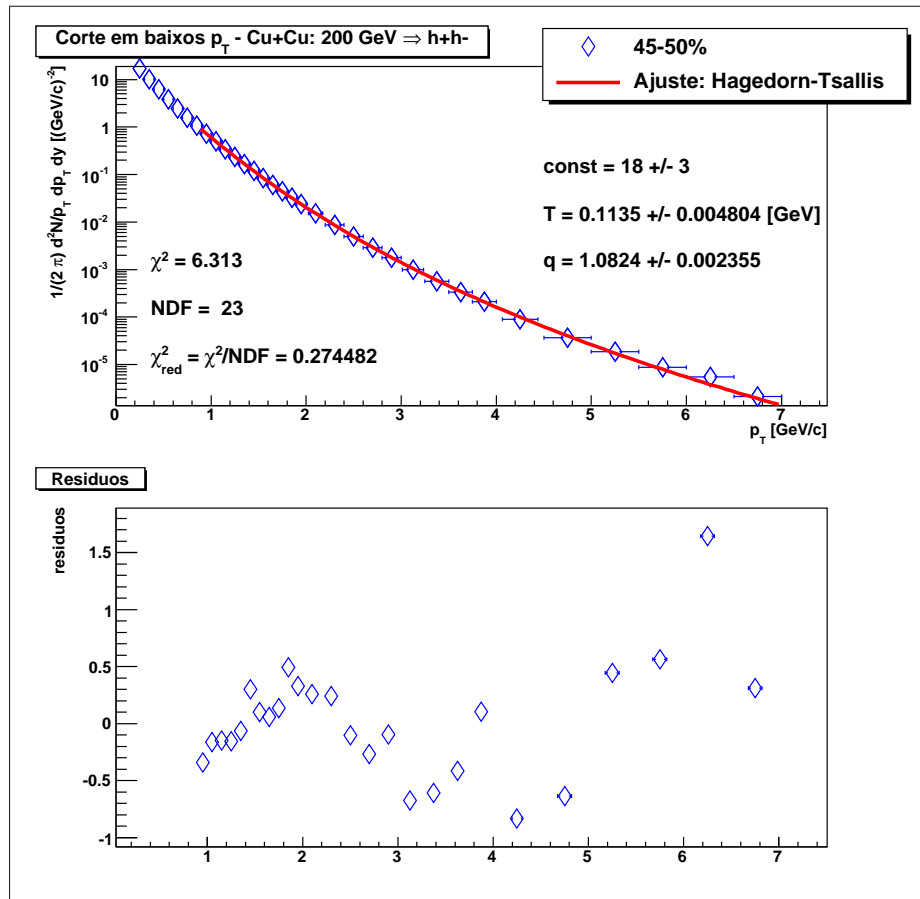


(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.24: Centralidade: 35 - 45 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV



(a) Ajuste em todo o espectro de p_{\perp} .



(b) Corte para baixos p_{\perp} .

Figura A.25: Centralidade: 45 - 50 %. Cu+Cu com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

Referências Bibliográficas

- [1] HAGEDORN, R. Statistical thermodynamics of strong interactions at high energies. *Nuovo Cimento*, Suppl. 3, p. 147, 1965.
- [2] BECK, C. Non-extensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 286, n. 1-2, p. 164 – 180, 2000. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843710000354X>>.
- [3] TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, Springer Netherlands, v. 52, p. 479–487, 1988. ISSN 0022-4715. 10.1007/BF01016429. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01016429>>.
- [4] TSALLIS, C.; MENDES, R. S.; PLASTINO, A. R. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, v. 261, n. 3-4, p. 534 – 554, 1998. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437198004373>>.
- [5] TSALLIS, C. Nonextensive statistical mechanics: a brief review of its present status. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, scielo, v. 74, p. 393 – 414, 09 2002. ISSN 0001-3765.
- [6] EDWARDS, D. A.; SYPHERS, M. J. *An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators*. Alemanha: WILEY-VCH, 1993. (WILEY Series in Beam Physics and Accelerator Technology).
- [7] ELLIS, W. J. S. R. K.; WEBBER, B. R. *QCD and Collider Physics*. Cambridge (UK): CAMBRIDGE University Press, 1996.
- [8] CHRISTENSEN, C. H. *ALICE Forward Multiplicity Detector - From Design to Installation*. Tese (Doutorado) — Niels Bohr Institute - University of Copenhagen, 2007.
- [9] SPRACE - São Paulo Research and Analysis Center. *Aceleradores e Detectores*. Introdução à Física de Altas Energias (Apresentação).
- [10] TAVARES, B. M. *Estudo hidrodinâmico das colisões ultra-relativísticas de íons pesados*. Tese (Doutorado) — UFRJ, 2006.
- [11] GLAUBER, R. J. Lectures in Theoretical Physics. *Interscience Publishers, Inc.*, v. 1, p. 315, 1959.
- [12] SNELLINGS, R. Elliptic Flow: A Brief Review. *New J. Phys.*, v. 13, p. 055008, 2011.

- [13] GYULASSY, M.; WANG, X.-N. HIJING 1.0: A Monte Carlo program for parton and particle production in high-energy hadronic and nuclear collisions. *Comput. Phys. Commun.*, v. 83, p. 307, 1994.
- [14] MITCHELL, J. T. P. *Picking Out Head-On Collisions*. [Online; Acessado em 07-Julho-2011]. Disponível em: <<http://www.phenix.bnl.gov/WWW/intro/physics/centrality.html>>.
- [15] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. USA: Addison-Wesley, 1997. (Addison-Wesley Advanced Book Program (now Perseus Books)).
- [16] MULLER, B. *Physics of the quark - gluon plasma*. 1992.
- [17] WONG, C.-Y. *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions*. USA: World Scientific Publishing, 1994.
- [18] MA, C.-Q.; GAO, C.-Y. Quark deconfinement in neutron star cores and the ground state of neutral matter. *Eur. Phys. J.*, A34, p. 153–160, 2007.
- [19] COLLINS, J. C.; PERRY, M. J. Superdense matter: Neutrons or asymptotically free quarks? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 34, p. 1353–1356, May 1975. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.34.1353>>.
- [20] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>.
- [21] POLITZER, H. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys.Rev.Lett.*, v. 30, p. 1346–1349, 1973.
- [22] Don Lincoln; foreword by Leon Lederman. *Quantum Frontier - The Large Hadron Collider*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2009.
- [23] JIA, J. *High- p_T Charged Hadron Suppression in Au – Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. Tese (Doutorado) — State University of New York, 2003.
- [24] DETAR, C. E.; DONOGHUE, J. F. Bag models of hadrons. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, v. 33, p. 235–264, 1983.
- [25] GUIMARÃES, K. S. F. F. *Estudo da produção de estranheza em colisões entre íons pesados relativísticos a $\sqrt{s_{nn}} = 62.4$ GeV de energia*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP), 2007.
- [26] GOTTLIEB, S. et al. Hybrid-molecular-dynamics algorithms for the numerical simulation of quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 35, p. 2531–2542, Apr 1987. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.2531>>.
- [27] SILVA, C. L. D. *Estudo de Mésons Vetoriais Pesados no Detector PHENIX*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP), 2007.

- [28] BEDIAGA, I.; CURADO, E. M. F.; MIRANDA, J. M. de. A nonextensive thermodynamical equilibrium approach in $e^+ e^- \rightarrow$ hadrons. *Physica*, A286, p. 156–163, 2000.
- [29] CHUN, S.; BUCHANAN, C. A simple plausible path from qcd to successful prediction of $e^+e^- \rightarrow$ hadronization data. *Physics Reports*, v. 292, n. 5-6, p. 239 – 317, 1998. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157397000471>>.
- [30] FERMI, E. Angular distribution of the pions produced in high energy nuclear collisions. *Phys. Rev.*, v. 81, p. 683–687, 1951.
- [31] ERICSON, T.; RAFELSKI, J. *The tale of the Hagedorn temperature*. [S.l.], 2003. Disponível em: <<http://cerncourier.com/cws/article/cern/28919>>.
- [32] GELL-MANN, M.; TSALLIS, C. *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications*. New York: OXFORD - University Press, 2004. (Santa Fe Institute - Studies in the Sciences of Complexity).
- [33] KARDAR, M. *Statistical Physics of Particles*. New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2007.
- [34] NAUDTS, J. *Generalised Thermostatistics*. [S.l.]: Springer, 2011.
- [35] GREINER, L. N. W.; STÖCKER, H. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. 2ª. ed. New York: Springer, 1997. (Classical theoretical physics).
- [36] MOYANO, L. G. *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*. Tese (Doutorado) — CBPF, 2006.
- [37] GIBBS, J. W. *Elementary principles in statistical mechanics*. Re-impressão. New York: Dover, 1960.
- [38] Group of Statistical Physics. *Bibliography of Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics*. [Online; Acessado em 28-Janeiro-2011]. Disponível em: <<http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>>.
- [39] MOURA, F. A. B. F. de; TIRNAKLI, U.; LYRA, M. L. Convergence of the critical attractor of dissipative maps: Log-periodic oscillations, fractality and nonextensivity. *PHYS. REV. E*, v. 62, p. 6361, 2000. Disponível em: <<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:cond-mat/0002163>>.
- [40] E.G.D.; COHEN. Superstatistics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 193, n. 1-4, p. 35 – 52, 2004. ISSN 0167-2789. <ce:title>Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity</ce:title>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016727890400020X>>.
- [41] WILK, G.; WŁODARCZYK, Z. Interpretation of the nonextensivity parameter q in some applications of tsallis statistics and lévy distributions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 84, p. 2770–2773, Mar 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.2770>>.

- [42] BECK, C.; COHEN, E. Superstatistics. *Physica A*, v. 322, p. 267–275, 2003. Disponível em: <<http://www.ingentaconnect.com/content/els/03784371/2003/00000322/00000000/art00019>>
- [43] NAVARRO, F. A. R. *Abordagem de Sistemas Compostos na Mecânica Estatística Não-Extensiva, com uma Aplicação para o Caso dos Óxidos de Manganês*. Tese (Doutorado) — CBPF, 2006.
- [44] VIGNAT, A. P. C.; PLASTINO, A. R. Superstatistics based on the microcanonical ensemble. *Nuovo Cimento B Serie*, v. 120, p. 951–+, set. 2005.
- [45] TSALLIS, C.; SOUZA, A. M. C. Constructing a statistical mechanics for beccohen superstatistics. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 67, p. 026106, Feb 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.026106>>.
- [46] BECK, C. Superstatistics: Recent Developments and Applications. In: C. Beck, G. Benedek, A. Rapisarda, & C. Tsallis (Ed.). *Complexity, Metastability and Nonextensivity*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 33–42.
- [47] HAGEDORN, R. Hadronic matter near the boiling point. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Italian Physical Society, v. 56, p. 1027–1057, 1968. ISSN 0369-3546. 10.1007/BF02751614. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02751614>>.
- [48] DEPPMAN, A. *Introdução às Colisões de Hadrons Ultra-Relativísticos*. 2010. Mini-curso.
- [49] WILK, G. Fluctuations, correlations and non-extensivity. *Brazilian Journal of Physics*, scielo, v. 37, p. 714 – 716, 06 2007. ISSN 0103-9733. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332007000500009&nrm=iso>.
- [50] BIYAJIMA, M. et al. Analyses of $k(t)$ distributions at RHIC by means of some selected statistical and stochastic models. *Eur. Phys. J.*, C40, p. 243–250, 2005.
- [51] BIYAJIMA, M. et al. Estimations of temperature at RHIC experiments. *Eur. Phys. J.*, C48, p. 597–603, 2006.
- [52] WILK, G.; WLODARCZYK, Z. Power laws in elementary and heavy-ion collisions: A Story of fluctuations and nonextensivity? *Eur. Phys. J.*, A40, p. 299–312, 2009.
- [53] WILK, G.; WLODARCZYK, Z. Multiplicity fluctuations due to the temperature fluctuations in high-energy nuclear collisions. *Phys. Rev.*, C79, p. 054903, 2009.
- [54] CMS Collaboration. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 022002, 2010.
- [55] ALICE Collaboration. Transverse momentum spectra of charged particles in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 900$ GeV with ALICE at the LHC. *Phys. Lett.*, B693, p. 53–68, 2010.

- [56] ATLAS Collaboration. Charged-particle multiplicities in pp interactions at $\sqrt{s} = 900$ GeV measured with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B688, p. 21–42, 2010.
- [57] STAR Collaboration. Transverse-momentum and collision-energy dependence of high- p_T hadron suppression in $au + au$ collisions at ultrarelativistic energies. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 91, n. 17, p. 172302, Oct 2003.
- [58] PHOBOS Collaboration. Centrality dependence of charged hadron transverse momentum spectra in Au+Au collisions from $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ to 200 GeV. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 082304, 2005.
- [59] STAR Collaboration. Identified baryon and meson distributions at large transverse momenta from Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, v. 97, p. 152301, 2006.
- [60] ALVER, B. et al. System size and centrality dependence of charged hadron transverse momentum spectra in Au + Au and Cu + Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ and 200 GeV. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, p. 212301, May 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.212301>>.
- [61] BRUN, R.; RADEMAKERS, F. *ROOT - An Object Oriented Data Analysis Framework*. Proceedings AIHENP'96 Workshop, Lausanne, Sep. 1996, Nucl. Inst. & Meth. in Phys. Res. A 389 (1997) 81-86. Disponível em: <<http://root.cern.ch/>>.
- [62] JAMES, F. *MINUIT - Function Minimization and Error Analysis - Reference Manual*. 2000. Disponível em: <<http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/minuit/minmain.html>>.
- [63] CHINELLATO, D. D.; TAKAHASHI, J.; BEDIAGA, I. A non-extensive equilibrium analysis of π^+ p_T spectra at rhic. n. arXiv:1001.3136, Jan 2010. Comments: SQM2009 Proceedings.

Glossário

e^+	<i>póstron</i> , a anti-partícula do elétron. Possui os mesmos números quânticos dos elétrons, exceto o sinal da carga que é positivo, 2
e^-	<i>elétron</i> , partícula elementar com carga negativa, 2
Íon	átomo sem parte da carga elétrica, 54
A+A	colisões envolvendo íons, 2
Au	elemento químico com $Z = 79$ e massa atômica 197 u, 2
b	(Parâmetro de impacto) O vetor entre os centros de dois núcleos colidores. O comprimento b é medido em $[fm]$, 3
BNL	Brookhaven National Laboratories , em Long Island, Nova York, EUA, 53
Bárion	partícula formada por três quarks, 6
Bóson	partícula com spin inteiro. O <i>Princípio de Exclusão Pauli</i> não se aplica a este tipo de partícula. Exemplo de bósons são os fótons e os glúons, 5

Carga de Cor	carga associada às interações fortes. Os pártons possuem esta carga, 5
CERN	sigla para <i>Organização Européia para a Pesquisa Nuclear</i> , em francês, <i>Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire</i> , 2
Confinamento	propriedade das interações da QCD que confina os quarks dentro dos hádrons, 5
Convolução	operador que, a partir de duas funções, produz uma terceira, 28
Cu	elemento químico com $Z = 29$ e massa atômica 63,6 u, 2
Ergodicidade	microestados acessíveis igualmente prováveis ao longo de um período de tempo prolongado, 21
Espectadores	Nucleons que não interagem durante a colisão, 3
eV	<i>eletron-volt</i> , é a unidade básica de energia utilizada na Física de Altas Energias. Ela é igual a energia adquirida por um elétron ao passar por um campo elétrico, por dois pontos, que possua uma diferença de potencial é igual a 1 volt. $1eV = 1,6 \times 10^{-19}$ joules, 7
Fireball	hádron altamente excitado, 9

Glúon	partícula elementar mediador da força forte. Há oito tipos de glúons que participam das interações, segundo o Modelo Padrão, 5
Hagedorn-Tsallis	Generalização da Teoria de Hagedorn com o formalismo da Mecânica Estatística Não-Extensiva elaborada por Tsallis, 41
Hádron	partícula formada por dois ou mais quarks. Pode ser um méson ou um bárion, 5
Interação	em colisões, processo no qual uma partícula detecta a presença de outra. No contexto dos decaimentos, diz respeito à própria desintegração da partícula, 5
Jet quenching	Fenômeno em que ocorre a redução da energia através da interação dos jatos emergentes das colisões com o meio, 63
LEP	sigla para <i>O Grande Colisor de Elétron-Pósitron</i> , em inglês, <i>Large Electron-Positron Collider</i> , 2
LHC	sigla para <i>O Grande Colisor de Hádrons</i> , em inglês, <i>Large Hadron Collider</i> , 2
Liberdade Assintótica	liberdade dos quarks em curtas distâncias ou no limite em que há uma grande densidade de quarks, 6

Limite Termodinâmico	número de partículas (N) ou o volume (V) tendem ao infinito. Este limite está relacionado com a extensividade (variáveis que não dependem de N ou V). O que garante a existência de um limite termodinâmico bem definido é o fato de termos forças de interação de curto alcance entre as partículas, 21
Modelo Padrão	modelo que descreve as partículas elementares e as suas interações, 5
Méson	partícula formada por par de quark-antiquark, 6
n (Nêutron)	<i>nêutron</i> , nucleon de carga nula, spin 1/2, massa $1,674 \times 10^{-27}$ kg, 2
N+N	colisões entre nucleons, 2
Nucleon	Partícula que compõe o núcleo atômico, i.e., prótons e nêutrons, 2
Núcleo	parte central do átomo. Constituídos de prótons e nêutrons, 9
p (Próton)	<i>próton</i> , nucleon de carga positiva, spin 1/2 e massa $1,602 \times 10^{-27}$ kg, 2
p+p	colisões entre prótons, 2
Participantes	nucleons que interagem durante a colisão, 3

partícula elementar	partícula com um único constituinte. Mais estritamente falando, a função de onda que descreve esse tipo de partícula não pode ser redutível à função de onda de outra partícula, 5
Pb	elemento químico com $Z = 82$ e massa atômica 207,2 u, 2
párton	quarks e glúons, 5
QCD na Rede	método de aproximações numéricas onde o espaço-tempo é considerado discreto (pontos na rede). É usado para baixas energias e grandes distâncias devido a impossibilidade de calcular analiticamente quantidades na QCD devido à grande constante de acoplamento, 7
QGP	estado da matéria nuclear, predito pelo QCD, onde a simetria quirial é restaurada e a temperatura e/ou densidade é tão alta que os hádrons se sobrepõem, e os quarks se tornam assintoticamente livres, ou desconfiados, 7
quark	partícula elementar de spin 1/2. Um quark combinado com um anti-quark forma um méson. Um conjunto de três quarks resulta em um bárion. Há <i>sabores</i> (tipos diferentes) de quarks: <i>up</i> , <i>down</i> , <i>charme</i> , <i>estranho</i> , <i>bottom</i> <i>top</i> , 5

RHIC

Relativistic Heavy Ion Collider, 53

Index

- Aditividade, 20, 21, 42
- BNL, 53
- Boltzmann-Gibbs (BG), 16, 19–23, 43,
47, 53, 62, 87
- Carga de Cor, 6
- CERN, 2
- colisões
- A+A, 2, 54, 56, 60, 61, 63, 72, 77,
83
 - Au+Au, 54, 58, 60, 61, 63, 65, 67,
68, 70, 71, 73, 75, 79, 80, 82,
84, 85
 - Cu+Cu, 54, 60, 61, 63, 65, 68, 70,
71, 73, 76, 81, 82, 84, 85
 - N+N, 2
 - p+p, 2, 53, 56–58, 60, 61, 63, 67,
71, 72, 74, 76–78, 82–85, 90
- Collins (QGP), 7
- Confinamento, 6, 8
- Convolução, 28
- dados experimentais, 51, 53, 54, 56–
60, 62, 77, 85, 87, 88
- Distribuição de Maxwell, 17, 18
- Enrico Fermi, 13
- Entropia, 16, 20–23, 25, 27, 42
- Equilíbrio, 15, 16, 34
- Fora de, 28
 - Pré, 10
 - Térmico, 7, 15, 26
- ergodicidade, 22
- extensividade, 21, 23, 25, 26, 41–43
- Subextensividade, 25
 - Superextensividade, 25
- fireball, 9, 34
- flutuação, 48, 49
- fractal, 48
- Hadronização, 11–13, 48, 74, 90, 91
- Hagedorn, viii, 13, 30, 34–36, 41, 42,
45, 48, 51, 52, 56–58, 61–63,
66, 86–88
- Hagedorn-Tsallis, 52, 53, 56, 57, 59, 61,
66, 79–81, 86
- Hamiltoniano, 26
- hard physics*, 10
- HIJING, 4
- índice entrópico, *veja q* (índice entrópico)
- interação, 5–7, 10
- longo alcance, 22, 42, 48

- jet quenching*, 64
- LEP, 2
- LHC, 2
- Liberdade Assintótica, 7, 8, 91
- Limite Termodinâmico, 22
- M. Gell-Mann, 27
- MINUIT, 55
- Modelo Padrão, 6
- momento transversal, *veja* p_{\perp} (momento transversal)
- partícula
- e^{+} (pósitron), 2
 - e^{-} (elétron), 2
 - Au (ouro), 2
 - bóson, 6
 - Cu (cobre), 2
 - elementar, 2, 6
 - glúon, 5, 6, 8
 - párton, 5, 6
 - quark, 5–8, 91
- hádron, 6
- bárion, 6
 - méson, 6
- n (nêutron), 2
- nucleon, 2, 3, 9
- núcleo, 3, 9
- p (próton), 2, 3
- Pb (chumbo), 2
- Perry (QGP), 7
- princípio de Boltzmann, 20
- Pseudo-rapidez (η), 50
- p_{\perp} (momento transversal), 39, 40, 45, 46, 50, 57, 58, 61–63, 69–77, 87–90
- q (índice entrópico), 23, 27, 45–47, 52, 53, 56, 58, 59, 63–66, 69, 71–74, 77, 82, 84, 85, 88–91
- QCD, 5–9, 12, 13, 30, 91
- QCD na Rede, 8, 9
- QGP, 7, 9, 35
- Rapidez (y), 50, 51
- RHIC, 53
- ROOT, 55
- Seção de choque, 3, 4, 41, 45–47, 50
- Superestatística, 27, 28, 48, 91
- Temperatura
- T, 8, 30, 31, 36, 38, 39, 45, 48, 49, 52, 53, 56, 58, 59, 62, 63, 65, 66, 69, 71–74, 76, 77, 79–85, 88–91
 - T_c (Temperatura Crítica), 8, 30
 - T_{ef} (Temperatura Efetiva), 47–49, 74, 90
- Temperatura Fixa, 90

Termodinâmica, 16, 20, 30, 35, 37, 56

Transição de fase, 7–9, 30

Tsallis, 23, 26, 27, 41

yields, 50, 56