Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Bolhas em fluidos
Uma abordagem com a Teoria do Caos

Felipe Augusto Cardoso Pereira

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Sartorelli
Co-Orientador: Prof. Dr. Eduardo Colli

Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Carlos Sartorelli (IFUSP)
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP)
Prof. Dr. Rero Marques Rubinger (UNIFEI)
Prof. Dr. Alexandre Megiorin Roma (IMEUSP)
Prof. Dr. Thadeu Josino Pereira Penna (UFF)

São Paulo
2013

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Pereira, Felipe Augusto Cardoso

Bolhas em fluidos: uma abordagem com a teoria do caos. –
São Paulo, 2013.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Sartorelli

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Sistemas dinâmicos; 2. Dinâmica dos fluidos;
3. Caos (Sistemas dinâmicos); 4. Modelagem matemática.

USP/IF/SBI-049/2013

Agradecimentos

Agradeço ao prof. Sartorelli pela sempre presente orientação e ao prof. Eduardo Colli por toda a ajuda.

Agradeço ao Bóris pelas valiosas discussões e à Flávia por toda ajuda na revisão e pelo apoio em todas as horas.

Agradeço aos técnicos do instituto, em especial ao Marcelino e ao Marcelo, pela ajuda na confecção das peças do aparato experimental.

Agradeço à toda minha família, principalmente aos meus pais, por estarem presentes quando eu precisei.

Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos a dinâmica de formação de bolhas em fluidos viscosos. Desenvolvemos novas técnicas experimentais para aprofundar o estudo do sistema de um bico borbulhador no fundo de um cilindro preenchido por uma solução de água e glicerina. Neste sistema, controlamos o fluxo de ar por meio de um fluxímetro de massa e uma válvula solenoide. Medimos simultaneamente: o tempo entre duas bolhas sucessivas usando um laser focalizado em um fotodiodo, cuja luz é espalhada com a passagem das bolhas; as ondas de pressão que o borbulhamento causa no sistema de injeção usando microfones colocados entre a válvula solenoide e o bico; e a geometria das bolhas em formação, através da análise de imagens coletadas por uma câmera de alta velocidade. Motivados pelos resultados deste sistema, construímos um modelo para a dinâmica de formação de bolhas, baseado em primeiros princípios, que descreve a rota de adição de períodos observada no experimento.

Investigamos também um novo sistema experimental, que tem dois bicos borbulhadores dentro do mesmo tubo. Usamos as mesmas técnicas experimentais desenvolvidas para o experimento de um bico. Identificamos que os borbulhamentos sincronizam apesar de seus sistemas de injeção de ar serem independentes, concluímos, portanto, que o acoplamento deve-se à circulação que o líquido introduz. Estudamos a sincronização por meio da construção de diagramas de bifurcação e espaços de parâmetros mostrando as regiões de sincronização. Adaptamos também o modelo de um bico para descrever este sistema. Descobrimos que a interação entre as duas dinâmicas de formação de bolhas é maior conforme aumentamos a altura da coluna líquida.

Abstract

We studied the bubble formation dynamics in viscous fluids. We developed new experimental techniques to provide a better understanding of the system with one bubbling nozzle on the bottom of a cylinder filled with a water and glycerol solution. In this system, we control the air flow with a mass flowmeter and a solenoid valve. We have measured simultaneously: the time between successive bubbles, using a laser focused in a photo-diode that has his light scattered when one bubble passes between them; the pressure waves that the bubbling causes in the air injecting system using microphones placed between the solenoid valve and the nozzle; and the geometry of the growing bubbles, through the analysis of the images collected by a high speed camera. The results from this system motivated us to make a model for the bubbles formation dynamics that describes the period-adding route observed in the experiment and is based on first principles.

We also investigated a new experimental system, that has two bubbling nozzles inside the same cylinder. We used the same experimental techniques developed to the one nozzle experiment. We identified that the bubbling on the nozzles synchronizes due the coupling introduced by the liquid circulation, as the air injecting systems are independent. We studied the synchronization by constructing bifurcation diagrams and parameter spaces that show the synchronized regions. We also adapted the one nozzle bubbling model to describe this system. We discovered that the interaction between the two bubble formation dynamics is stronger when we increase the liquid height.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Aspectos Teóricos	5
2.1	Sistemas Dinâmicos	5
2.1.1	Seção de Poincaré	6
2.1.2	Mapas	7
2.1.3	Bifurcações	8
2.1.4	Fase de um oscilador autônomo	13
2.2	Sincronização	14
2.2.1	Sincronização de fase	15
2.2.2	Sincronização de um oscilador com uma perturbação pe- riódica	16
2.2.3	Sincronização de dois osciladores mutuamente interagentes	16
2.2.4	Mapas no círculo	17
2.3	Mecânica de Fluidos	22
2.3.1	Equação para o fluido passando por um cano	23
2.3.2	Escoamento irrotacional	24
3	Arranjo Experimental	27
3.1	Arranjos experimentais	27
3.1.1	Um bico borbulhador	27
3.1.2	Reforma do arranjo experimental	28
3.1.3	Dois bicos borbulhadores	30
3.2	Novos sistemas de aquisição	32
3.2.1	Tempo entre bolhas	32
3.2.2	Medindo o fluxo de ar	34

3.2.3	Microfones	34
3.2.4	Câmera de alta velocidade	36
3.3	Sistemas de Comunicação	39
3.3.1	Comunicação com o gerador de sinais	39
3.3.2	Comunicação com os controladores PID	40
4	Resultados Experimentais e Discussões	43
4.1	Adição de Períodos	43
4.1.1	Pressão de equilíbrio da bolha	47
4.1.2	Modelo mapa	51
4.1.3	Modelo Dinâmico	54
4.2	Um bico com perturbação sonora	70
4.3	Interação entre Bolhas	72
4.3.1	Bicos Solitários	72
4.3.2	Diagramas de Bifurcação	75
4.3.3	Análise da Periodicidade	78
4.3.4	Análise da sincronização dos borbulhamentos	81
4.3.5	Dependência da altura	88
4.3.6	Período 1	95
4.3.7	Interação com agulhas metálicas	103
4.3.8	Simulação	106
5	Considerações Finais	119
A	Artigos Publicados	125

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de uma seção de Poincaré	7
2.2	Desenho esquemático de uma bifurcação sela-nó	10
2.3	Desenho esquemático de uma duplicação de períodos	11
2.4	Desenho esquemático do método de atribuição da fase usando uma projeção	13
2.5	Desenho esquemático do método de atribuição da fase usando uma seção de Poincaré	14
2.6	Exemplo de mapas do círculo de Arnold	19
2.7	Exemplo de mapa no círculo com biestabilidade	21
2.8	Exemplo de mapa no círculo com multiestabilidade que apre- senta histerese	22
3.1	Diagrama esquemático do arranjo experimental de um bico bor- bulhador, com os novos sistemas de aquisição.	28
3.2	Foto da nova disposição do arranjo experimental.	29
3.3	Fluxograma do novo sistema de aquisição	31
3.4	Diagrama do aparato número 2, tubo com dois bicos para en- trada de ar ilustrando o sistema de aquisição de dados.	32
3.5	Curva de resposta do microfone usado para a medição das osci- lações de pressão na mangueira.	35
3.6	Exemplo de medidas de pressão na mangueira	36
3.7	Imagens da câmera de alta velocidade	37
3.8	Exemplo de volume da bolha em função do tempo	38
4.1	Diagramas de bifurcação com bico metálico de $r_0 = 0.5$ mm para vários comprimentos de mangueira	44

4.2	Diagramas de bifurcação experimentais dos bicos de raio $r_0 = 0,2$ mm, para $L = 30, 88$ e 180 cm e $h = 20$ e 29 mm.	45
4.3	Diagramas de bifurcação dos bicos metálicos de raios $r_0 = 0,5$ mm e $r_0 = 1,1$ mm.	46
4.4	Séries temporais da pressão e do volume e espaços de parâmetros experimentais	47
4.5	Curvas da pressão de equilíbrio	48
4.6	Curvas de número de partículas de equilíbrio	50
4.7	Gráfico do volume da bolha de ar presa ao bico em função do tempo, obtido experimentalmente para o bico sem agulha metálica e vazão $Q = 50$ ml/min.	52
4.8	Diagrama de bifurcação para o modelo de mapa	55
4.9	Desenho esquemático dos componentes do modelo	56
4.10	Desenho esquemático do bico e da interface ar-líquido	57
4.11	Diagramas de bifurcação simulados dos bicos com agulhas de raio $r_0 = 0.2$ mm.	65
4.12	Diagramas de bifurcação simulados para as agulhas de raios $r_0 = 0.5$ mm e $r_0 = 1.1$ mm.	66
4.13	Séries temporais da pressão e do volume e espaços de parâmetros simulados	67
4.14	Mapas de retorno das pressões simuladas	69
4.15	Tempos de formação das bolhas em função da pressão inicial	70
4.16	Diagramas de bifurcação experimental e simulado para borbulhamento com perturbação sonora	72
4.17	Diagramas de bifurcação experimental e simulado com biestabilidade	73
4.18	Diagramas de bifurcação para os bicos borbulhando solitários dentro do tubo borbulhador	74
4.19	Diagramas de bifurcação experimentais do arranjo de dois bicos para duas vazões do bico 1	75
4.20	Diagramas de bifurcação experimentais do arranjo de dois bicos para duas alturas da solução	77
4.21	Exemplos de atratores experimentais	79
4.22	Exemplo do método de determinação de periodicidade	80

4.23	Espaços de parâmetros de periodicidade (Q_1, Q_2)	82
4.24	Exemplo do método de determinação da sincronização	83
4.25	Espaço de parâmetros (Q_1, Q_2) experimental de sincronização dos borbulhamentos para $H = 90$ mm.	86
4.26	Exemplos de mapas de Poincaré experimentais	89
4.27	Espaços de parâmetros (Q_1, H) experimentais de sincronização dos borbulhamentos para: (A) $Q_2 = 64$ ml/min; (B) $Q_2 =$ 84 ml/min, (C) $Q_2 = 105$ ml/min.	90
4.28	Espaços de parâmetros (Q_1, H) experimentais de sincronização dos borbulhamentos para: (A) $Q_2 = 126$ ml/min; (B) $Q_2 =$ 147 ml/min, (C) $Q_2 = 167$ ml/min.	91
4.29	Mapas de Poincaré experimentais das diferenças de fase para várias alturas	94
4.30	Estimativa da intensidade da interação	95
4.31	Diagramas de bifurcação experimentais das diferenças de fase e dos tempos entre bolhas	96
4.32	Séries temporais dos tempos entre bolhas e das diferenças de fase	97
4.33	Variação da diferença de fase em função da diferença de fase . .	98
4.34	Exemplo do método de detecção da multiestabilidade no experi- mento	100
4.35	Diagramas de bifurcações obtido usando o método de detecção de multiestabilidade	101
4.36	Mapas de retorno das diferenças de fase nas proximidades da sincronização 1:1	102
4.37	Diagramas de bifurcações do arranjo de dois bicos usando agu- lha metálica	104
4.38	Espaços de parâmetros experimentais da periodicidade usando agulha metálica nos dois bicos	105
4.39	Espaço de parâmetros experimental de sincronizações, para os dois bicos com agulhas metálicas, com os mesmos parâmetros da figura 4.38	106
4.40	Diagramas de bifurcação simulados	109
4.41	Espaços de parâmetros de sincronização simulados	111
4.42	Diagrama de bifurcação simulado para um bico sem interação .	112

4.43 Espaço de parâmetros (Q_1, Q_2) simulado de sincronização dos borbulhamentos para $\alpha = 36 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$	114
4.44 Espaços de parâmetros (Q_1, α) de sincronização simulados dos borbulhamentos para: (A) $Q_2^c = 64 \text{ ml/min}$; (B) $Q_2^c = 84 \text{ ml/min}$, (C) $Q_2^c = 105 \text{ ml/min}$	115
4.45 Espaços de parâmetros (Q_1, α) de sincronização simulados dos borbulhamentos para: (A) $Q_2^c = 126 \text{ ml/min}$; (B) $Q_2^c = 147 \text{ ml/min}$, (C) $Q_2^c = 167 \text{ ml/min}$	116
4.46 Dois mapas de primeiro retorno da diferença de fase ϕ do sistema simulado	118

Capítulo 1

Introdução

A formação de bolhas tem importante papel em processos industriais, por exemplo, na engenharia química, pois é uma eficiente maneira de acelerar reações do tipo gás-líquido por meio da maximização da área de contato [MK78]; e na produção de vidros, como um meio de medir a tensão superficial do vidro derretido, controlar a temperatura, e reforçar as correntes de convecção do vidro [GBQ04].

Devido a esta grande importância prática, muitos trabalhos sobre bolhas são realizados nas mais diferentes áreas, com uma grande variedade de abordagens [KJ05]. Por exemplo, a descrição e modelagem da dinâmica de um trem de bolhas proveniente de um bico ou da interação entre dois trens de bolhas próximos [SM98a], as mudanças de regime num sistema com vários bicos com a mesma fonte de ar [AAA09], a análise da dinâmica da interface líquido/ar [RBD09a] e modelagem do borbulhamento proveniente de uma cavidade ao invés de um bico [RBD09b]. Tubos borbulhadores com vários orifícios ou bicos para a injeção de ar também são muito estudados [RDZ01, XT03], pois reatores químicos entre gases e líquidos possuem muitos orifícios.

O tratamento de sistemas fluidodinâmicos usando teoria do caos é muito difundido, a própria história desta teoria está cheia de modelos, analogias e exemplos oriundos da fluidodinâmica. As equações do atrator de Lorenz [Lor63], por exemplo, foram obtidas a partir de simplificações de um problema de hidrodinâmica (convecção de Rayleigh-Bernárd). Um dos exemplos mais famosos de bifurcações e caos em sistemas hidrodinâmicos é o experimento da torneira gotejante [SGP94]. Este sistema é inclusive citado em livros-texto

de introdução à teoria do caos [ASY97]. Uma abordagem usando sistemas dinâmicos permite ainda traçar paralelos e fazer analogias com experiências e modelos provenientes de áreas completamente diferentes, por causa do grau de generalidade da abordagem (basta que seja possível descrever o fenômeno por meio de equações diferenciais ordinárias não-lineares) e tratamento topológico. Por exemplo, as rotas de adição de período já encontradas para o sistema do bico borbulhador [PTS04] (e presentes neste trabalho) aparecem em vários modelos de sistemas muito diferentes, como, por exemplo, no modelo de Chay para neurônios [YLL06] e modelos de ondas marinhas [TMA03]. No capítulo 2, apresentamos brevemente alguns conceitos e resultados de sistemas dinâmicos e de fluidodinâmica usados para analisar o sistema e desenvolver os modelos físicos propostos.

Este trabalho é uma continuação do estudo da dinâmica de formação de bolhas, que vem sendo estudado pelo Laboratório de Fenômenos Não Lineares (LFNL) há mais de uma década. O sistema de um bico borbulhador pode apresentar comportamento periódico, quasi-periódico ou caótico, dependendo dos valores dos parâmetros de controle; a saber a vazão de ar, a existência de uma perturbação sonora periódica [TS01, PCT09]), parâmetros do sistema injetor¹ [PTS04, CPT04] e a forma do bico. No capítulo 3, apresentamos o arranjo experimental e o sistema de aquisição usado originalmente, assim como as mudanças e reformas feitas no arranjo experimental, o novo sistema de aquisição de dados, as novas grandezas medidas e calculadas a partir das medições. Neste capítulo também apresentamos exemplos de resultados que os novos métodos de aquisição nos fornecem, isto é séries temporais e diagramas de bifurcação das grandezas medidas. No capítulo 3, também apresentamos o novo sistema estudado, que é o tubo borbulhador com dois bicos.

Um dos cenários que o tubo borbulhador apresenta é a cascata de adições de período. As condições para o aparecimento desta cascata são a baixa vazão, o uso do bico metálico e mangueiras longas [PTS04]. Também foi descoberta a existência de biestabilidade neste cenário [CPT04]. A partir destes resultados foi proposto um modelo topológico para descrever a dinâmica do sistema. Entretanto, a descrição do aparecimento destas cascatas carecia de

¹Como o comprimento da mangueira que leva ar do sistema de controle de vazão ao tubo borbulhador

uma melhor compreensão dos processos físicos envolvidos, pois estes modelos se restringiam a reproduzir os diagramas de bifurcação e a multi-estabilidade, sem nenhum modelo físico associado, proveniente de primeiros princípios ou equações empíricas de fluidodinâmica.

Com este intuito, usamos as novas ferramentas experimentais desenvolvidas para estudar o sistema e, motivados pelos resultados, desenvolvemos um modelo (apresentado em 4.1.2) de mapas descontínuos com motivação física e fenomenológica para descrever o sistema. Este modelo supõe a existência de duas pressões limite, uma baixa, para a qual o sistema entra dentro do bico (nucleação), e uma alta, para a qual o sistema começa a soltar bolhas.

Entretanto consideramos que a modelagem direta do crescimento da bolha, por equações diferenciais, era necessária para melhorar a fundamentação física do modelo, bem como para deixar mais claro o significado físico dos parâmetros envolvidos. O modelo resultante deste desenvolvimento é detalhadamente apresentado em 4.1.3. Este modelo dinâmico produziu previsões de como a cascata de adição de períodos se comporta quando variamos outros parâmetros além do comprimento da mangueira (expresso no volume do reservatório de ar). No caso, ele descreve como a forma das cascatas de adição de períodos depende da geometria do bico metálico acoplado na seringa, mais especificamente, seu raio interno e seu comprimento. Esta previsão do novo modelo foi testada e confirmada com a construção de bicos de diferentes raios e comprimentos (cujos diagramas de bifurcações experimentais e simulados podem ser vistos em 4.1).

Com este modelo dinâmico, revisitamos o experimento do bico sem a agulha metálica com perturbação sonora, e o modelo conseguiu reproduzir os diagramas de bifurcação experimentais. Além disso, identificamos experimentalmente multi-estabilidade neste sistema, também existente tanto no modelo aqui desenvolvido quanto o modelo usando o mapa do círculo.

Estudamos também um novo sistema, o tubo borbulhador com dois bicos injetores. Nele temos dois bicos injetores com controles de injeção de ar independentes dentro do mesmo tubo preenchido até uma determinada altura com uma solução de água e glicerina. Como a entrada de ar para os bicos é independente, temos que as dinâmicas de borbulhamento são acopladas somente através do líquido, devido às correntes de convecção no líquido, por exemplo.

Com este arranjo, estudamos o efeito desta interação na dinâmica de formação de bolhas dos dois bicos injetores. Para tal estudo, escolhemos um intervalo dos parâmetros de ambos os bicos tal que a dinâmica, caso eles não estivessem interagindo, é a mais simples possível, isto é, um borbulhamento periódico de período 1.

A fim de estudar a dinâmica deste sistema, construímos diagramas de bifurcação variando lentamente um dos fluxos de ar, mantendo o outro constante. Além disso, construímos espaços de parâmetros a partir da análise dos atratores para várias combinações de fluxos de ar. Com o intuito de caracterizar a interação, usamos ferramentas de análise de sincronização, como a diferença de fase generalizada e a construção do mapa de Poincaré da diferença de fase. Visando à melhor compreensão dos fenômenos observados, fizemos simulações deste sistema de dois bicos injetores a partir do modelo do borbulhamento de um bico, inserindo um acoplamento simples entre duas dinâmicas de bico simples. A partir destes resultados, descobrimos que a altura da solução, com relação ao topo dos bicos, tem um papel central na determinação da intensidade do acoplamento entre as duas dinâmicas. Estudamos ainda como a presença de outro bico injetor afeta as cascatas de adição de período. Os resultados do estudo do sistema de dois bicos são apresentados em 4.3.

Capítulo 2

Aspectos Teóricos

2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico consiste de um conjunto de estados que o sistema pode assumir, chamado espaço de estados, e de uma regra de como um sistema vai evoluir dado o estado atual dele. Como a evolução do sistema é completamente definida a partir da regra de evolução e do estado do sistema em um momento, um sistema dinâmico é determinista. A descrição de qualquer fenômeno usando uma modelagem por mecânica clássica, isto é, em termos de forças e acelerações é um exemplo típico de sistema dinâmico. Neste caso, o espaço de estados consiste das posições e velocidades das partículas, enquanto a regra da evolução é definida pelas forças que atuam neste sistema físico. A evolução deste sistema é descrita por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que pode ser escrito na forma:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\lambda}), \quad (2.1)$$

onde $\vec{\lambda}$ são os parâmetros da função de evolução, que no caso de um sistema mecânico simples, podem ser as massas e cargas das partículas (caso estas não variem no tempo). Quando a função $\vec{F}(\vec{x}, \vec{\lambda})$ é linear com relação às variáveis dinâmicas $\vec{x}$, a solução $\vec{x}(t)$ para qualquer condição inicial $\vec{x}_0$ pode ser obtida analiticamente.

Entretanto, quando esta função é não-linear com relação às variáveis não é possível, em geral, obter uma solução analítica e, muitas vezes, temos que as soluções desta equação diferencial são caóticas. A impossibilidade de se obter

soluções analíticas em sistemas não-lineares nos leva a buscar outro tipo de abordagem, que é analisar os tipos de soluções que aparecem no sistema para os vários valores que os parâmetros da equação podem tomar. Estas soluções, que são trajetórias dentro do espaço de fases, podem tanto ser obtidas por meio de métodos numéricos quanto soluções particulares das equações, possíveis de serem obtidas analiticamente. Um exemplo simples de solução particular do sistema que podemos obter são os pontos fixos. Estes pontos do espaço de fase satisfazem a condição $\vec{F}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \vec{0}$ e, portanto, tem uma evolução trivial.

Quando o sistema estudado é dissipativo, o volume de um conjunto de estados diminui conforme evoluímos ele no tempo, estudamos como os atratores variam quando modificamos os parâmetros $\vec{\lambda}$. Atratores são regiões do espaço de fases para as quais regiões (maiores que os atratores) do espaço de fases convergem quando evoluídas no tempo. Estes atratores podem ter tanto estrutura regular, como pontos fixos ou ciclos-limite, quanto serem atratores estranhos ou caóticos, apesar destes últimos só serem possíveis para fluxos com espaço de fases com dimensão maior ou igual a três.

2.1.1 Seção de Poincaré

Muitas vezes, o sistema físico a ser modelado possui um grande número de variáveis dinâmicas ou as trajetórias dele são muito complexas tal que o estudo das soluções no espaço de fases é difícil. Nestes casos, podemos definir uma seção de Poincaré. Uma seção de Poincaré é construída a partir de uma partição do espaço de fases em duas partes por meio de uma hipersuperfície Σ de dimensão $n - 1$, onde n é a dimensão do espaço de fases completo, transversal ao fluxo definido por $\vec{F}(\vec{x}, \vec{\lambda})$, isto é, não podem existir pontos de Σ em que o fluxo é tangente a ela.

Definida a hipersuperfície Σ , acompanhamos a evolução do sistema e guardamos a sequência de pontos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ na qual o sistema cruza Σ apenas quando o fluxo cruza em uma das duas direções possíveis. A figura 2.1 mostra um exemplo deste procedimento. A sequência dos pontos $\vec{x}_n$ define um mapa em um espaço de $n - 1$ dimensões que é chamado mapa de Poincaré. Como temos regras determinísticas na evolução do fluxo $\vec{F}(\vec{x}, \vec{\lambda})$, existe uma função $\vec{f}(\vec{x})$ tal que $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n, \vec{\lambda})$. Portanto, este procedimento constrói um mapa de dimensão $n - 1$ a partir de um fluxo n -dimensional.

Figura 2.1 – Exemplo de uma seção de Poincaré em um fluxo. Neste caso temos um espaço de fases tridimensional e a seção de Poincaré Σ é uma superfície horizontal, e a trajetória apresenta dois pontos do mapa de Poincaré (os pontos pretos, $\vec{x}_n$ e $\vec{x}_{n+1}$) e um ponto no qual a trajetória intercepta na direção oposta (ponto branco).

Como a função de recorrência do mapa $\vec{f}$ é construída a partir da evolução do fluxo $\vec{F}$, podemos estudar a dinâmica qualitativa deste fluxo a partir do mapa de Poincaré, pois órbitas periódicas no fluxo são pontos fixos ou órbitas periódicas de mesmo período no mapa e as órbitas no fluxo possuem a mesma estabilidade que os pontos fixos do mapa.

2.1.2 Mapas

Mapas são sistemas dinâmicos cuja evolução se dá por iterações, ou seja, a trajetória que o sistema segue é uma sequência $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \dots$, e, portanto, a função que determina a evolução do sistema relaciona os pontos da trajetória na forma:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n, \vec{\lambda}). \quad (2.2)$$

Os mapas podem apresentar também tanto comportamento regular, isto é, pontos fixos e órbitas periódicas quanto comportamento estranho e caótico. Porém em mapas, ao contrário de fluxos, o comportamento caótico pode ocorrer para espaços de fases de qualquer dimensão. Tanto que um dos principais exemplos de sistema caótico em mapas é o mapa logístico $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$ para $p = 4$.

Assim como nos fluxos, as soluções mais simples que podem ser obtidas em mapas são os pontos fixos, que, em mapas, são as raízes da equação $\vec{x}^* =$

$\vec{f}(\vec{x}^*, \vec{\lambda})$, ou seja, pontos cujas iterações levam o sistema aos próprios pontos. Para mapas unidimensionais, a estabilidade dos pontos fixos está relacionada com a derivada da função $x_{n+1} = f_{\vec{\lambda}}(x_n)$, pois, se expandirmos esta função ao redor do ponto fixo x^* até primeira ordem, teremos:

$$x_{n+1} - x^* = \left. \frac{df_{\vec{\lambda}}}{dx} \right|_{x^*} (x_n - x^*), \quad (2.3)$$

e, portanto, caso o módulo da derivada de $f_{\vec{\lambda}}(x)$ no ponto fixo x^* for menor que a unidade, as trajetórias nas proximidades do ponto fixo se aproximam exponencialmente do mesmo. Caso este módulo seja maior que a unidade, as trajetórias se afastam exponencialmente do ponto fixo.

A análise da estabilidade dos pontos fixos de mapas com mais de uma dimensão pode ser determinada usando a matriz jacobiana $\vec{J}_f = \frac{\partial(\vec{f})}{\partial(\vec{x})}$. A linearização da equação ao redor do ponto fixo $\vec{x}^*$ nos fornece:

$$\vec{x}_{n+1} - \vec{x}^* = \vec{J}_f(\vec{x}^*)(\vec{x}_n - \vec{x}^*), \quad (2.4)$$

logo, para que este ponto fixo seja estável, precisamos que todos os auto-valores da matriz jacobiana estejam dentro do círculo unitário, pois todos os auto-valores com módulo maior que 1 definem direções de afastamento do ponto fixo.

Mapas também podem apresentar soluções periódicas que não os pontos fixos. Estas são as órbitas periódicas: uma órbita periódica de período i possui a propriedade $\vec{x}_{n+i} = \vec{x}_n$, tal que i é o menor número inteiro positivo que esta relação vale. Estas órbitas muitas vezes são chamadas também de pontos fixos de período i , pois todos os pontos desta órbita são pontos fixos no mapa de i -ésimo retorno $\vec{x}^i = \vec{f}^i(\vec{x}^i)$. Toda a análise de estabilidade em pontos fixos pode ser estendida para órbitas periódicas de período n se usarmos o mapa de n iterações $\vec{f}^n(\vec{x})$ no lugar do mapa original.

2.1.3 Bifurcações

Chamamos de bifurcações as mudanças qualitativas na dinâmica do sistema que ocorrem quando variamos um ou mais parâmetros do sistema. Aqui, especificamente, faremos a descrição de bifurcações locais que aparecem nos mapas do sistema experimental ou dos modelos simulados. Bifurcações locais

são bifurcações que são descritas pela análise das proximidades dos pontos de equilíbrio somente, ou seja, pela análise da estabilidade de pontos fixos ou órbitas periódicas.

Como nos sistemas experimentais trabalhamos tipicamente com mapas, mostraremos bifurcações em mapas unidimensionais com apenas um parâmetro de controle λ . Neste caso, as bifurcações ocorrem quando $\frac{df_\lambda}{dx}$ cruza o círculo unitário. Portanto, as bifurcações de pontos fixos podem ocorrer em duas situações: $\frac{df_\lambda}{dx} = \pm 1$. Mostraremos aqui apenas bifurcações que os sistemas estudados apresentam dentro das combinações de parâmetros usados. Uma lista exhaustiva de bifurcações em mapas unidimensionais pode ser encontrada em livros sobre sistemas dinâmicos e caos, como, por exemplo, [ASY97, AFH94].

As análises de estabilidade e bifurcações utilizadas podem ser estendidas também para órbitas periódicas de qualquer período, basta substituir $f_\lambda(x)$ por $f_\lambda^n(x)$, onde n é o período, e usar qualquer x_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) pertencente a esta órbita, no lugar de x^* .

Bifurcação tipo sela-nó

A bifurcação sela-nó é um dos três casos (os outros sendo a bifurcação transcítica e a bifurcação de forquilha) em que $\frac{df_\lambda}{dx} = 1$. Nesta bifurcação, uma região do espaço de fases que não possuía pontos fixos passa a ter dois, um estável e outro instável no caso de um mapa unidimensional ou um ponto de sela e um nó para mapas de maior dimensionalidade. Na figura 2.2, apresentamos um desenho esquemático do aparecimento de uma bifurcação sela-nó em um mapa unidimensional.

Esta bifurcação também é conhecida como bifurcação tangente no caso de mapas unidimensionais, porque ela ocorre quando a função $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ tangencia a diagonal $x_{n+1} = x_n$, passando de uma situação na qual as duas curvas não se interceptam, sem pontos fixos, para uma situação onde as duas curvas são secantes, isto é, existem dois pontos fixos nesta região.

Um exemplo de mapa que apresenta esta bifurcação é o mapa quadrático $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$, para $\lambda_c = -0.25$. Para $\lambda < -0.25$, este mapa não possui pontos fixos nem atratores e todas as condições iniciais divergem para $-\infty$. Já para $\lambda > -0.25$, temos dois pontos fixos ($x_\pm^* = -0.5 \pm \sqrt{0.25 + \lambda}$), um deles estável (x_+^* , se $\lambda < 0.75$) e o outro instável (x_-^*).

Figura 2.2 – Desenho esquemático de uma bifurcação sela-nó em mapas. Conforme aumentamos o parâmetro λ , uma região do espaço de fases sem pontos fixos ($\lambda < \lambda_c$) sobre uma bifurcação em $\lambda = \lambda_c$, passando a ter agora dois pontos fixos, um estável (preto) e outro instável (branco). Também mostramos como as iterações do mapa $f(x)$ são alteradas devido ao aparecimento deste par de pontos fixos.

Órbitas de maior periodicidade também podem sofrer bifurcações sela-nó, na qual duas órbitas periódicas de mesmo período aparecem (ou colidem e desaparecem), uma estável e outra instável. É possível visualizar esta bifurcação no mapa de retorno do período da órbita, ou seja, em $f_\lambda^n(x)$, onde n é o período. Neste caso, quando $\lambda = \lambda_c$, ocorrem n tangências simultâneas da função $f_\lambda^n(x)$ com a diagonal $x_{n+1} = x_n$. Esta bifurcação é a responsável pelo aparecimento dos períodos fora da cascata de duplicação de período $n = 2^q$ no mapa logístico e quadrático, como, por exemplo, $n = 3$. Uma análise detalhada sobre as bifurcações no mapa logístico pode ser vista em [May76].

Este aparecimento de órbitas periódicas estáveis na região que existe um atrator caótico leva a uma crise interior, na qual o atrator caótico desaparece, passando a existir somente a órbita periódica nesta região. Este cenário apresenta intermitência, que é uma aparente alternância entre um regime periódico e o regime caótico, na qual o sistema parece ficar parte do tempo em um regime periódico, para logo depois voltar ao caótico, alternando entre estes dois regimes. No caso da bifurcação sela-nó, este comportamento é facilmente compreendido, pois, quando estamos próximos da bifurcação, a região em que o par de pontos fixos (ou, analogamente, órbitas periódicas) aparecerá passa a iterar nas proximidades dela mesma, ou seja $f(x_n) = x_n + \delta$ com δ pequeno e, portanto, sempre quando o atrator caótico leva o sistema para esta região, ele tende a passar algum tempo preso nela, devido ao pequeno valor de δ .

A intermitência devido à proximidade de uma bifurcação sela-nó é chamada de intermitência tipo I. Este cenário, no qual temos um ponto fixo estável sumindo por meio de uma bifurcação sela-nó e gerando um atrator caótico com intermitência, também é conhecido como rota para o caos via intermitência.

Bifurcação tipo duplicação de período

Temos uma duplicação de período quando uma órbita estável de período n perde sua estabilidade e nasce uma órbita periódica de período $2n$ da primeira. Esta duplicação ocorre, para um ponto fixo quando $\frac{df_\lambda}{dx} = -1$, aparecendo uma órbita estável de período 2, isto é, $x_{n+2} = x_n \neq x_{n+1}$. Como esta bifurcação ocorre quando a derivada cruza o círculo unitário em -1 , ela ocorre em pontos fixos alternantes, ou seja, em pontos fixos que as trajetórias que converge para ele apresenta alternância entre valores maiores e menores que o ponto fixo ($x_n < x^* < x_{n+1}$). A figura 2.3 mostra um desenho esquemático de uma duplicação de período em um ponto fixo. No caso da duplicação de períodos para períodos diferentes de 1, podemos fazer a mesma análise de estabilidade que no ponto fixo, apenas trocando a função $f(x)$ por $g(x) = f^n(x)$, onde n é o período a ser duplicado.

Figura 2.3 – Desenho esquemático de uma duplicação de período em mapas. Conforme aumentamos o parâmetro λ , um ponto fixo estável alternante ($\lambda < \lambda_c$), isto é, com $f'(x^*) < 0$ sobre uma bifurcação em $\lambda = \lambda_c$, e nasce dele uma órbita periódica de período 2 estável. Também mostramos como as iterações do mapa $f(x)$ são alteradas devido ao aparecimento da órbita periódica.

A duplicação de períodos também protagoniza uma rota para o caos: trata-se do cenário de Feigenbaum, no qual temos cascata de infinitas duplicações

de períodos com as distâncias entre as bifurcações, em termos do parâmetro λ , ocorrendo cada vez mais próximas. Neste cenário, a razão entre dois tamanhos de intervalos sucessivos entre bifurcações converge para a constante de Feigenbaum $\delta = 4.669201609 \dots$. Portanto, este processo de infinitas duplicações chega ao fim em um intervalo finito do parâmetro de controle λ , pois o tamanho deste intervalo em que ocorrem infinitas bifurcações é a soma de uma progressão geométrica decrescente. É interessante notar que nos mapas logístico e quadrático, as órbitas periódicas que aparecem via bifurcação sela-nó (com intermitência do tipo I), também sofrem esta cascata de duplicação de período, conforme aumentamos o parâmetro de controle.

Rota de adição de períodos

As rotas de adição de período são um mecanismo pelo qual temos uma sequência de bifurcações sela-nó a partir das quais órbitas periódicas aparecem no sistema seguindo uma sequência em que, após o aparecimento da órbita de período n , vemos o aparecimento da órbita de período $n + 1$. Esta rota pode tanto ter adições infinitas quanto acabar em um valor máximo N . Rotas de adição de períodos estão presentes tanto no mapa logístico [GN81] quanto no mapa do círculo de Arnold [Kan82].

Em mapas contínuos, existem outros regimes e eventualmente caos entre as duas janelas periódicas pertencentes a uma adição de período. Entretanto, a estrutura de alguns mapas contínuos pode fazer com que as regiões entre as duas janelas de período n e $n + 1$ tenham um tamanho tão reduzido que na prática vemos uma rota de adição de períodos sem caos ou outros tipos de bifurcação. Exemplos deste comportamento podem ser vistos em algumas combinações de parâmetros do modelo de Chay para neurônios [YLL06], assim como no modelo que foi desenvolvido para a dinâmica de borbulhamento, apresentado na seção 4.1.3. Para conseguirmos uma rota de adição “pura”, isto é, um período n dando lugar a um período $n + 1$ diretamente, precisamos que o mapa possua descontinuidades, como nos modelos de mapa proposto inicialmente para modelar a rota de adição de período na dinâmica de formação de bolhas presentes em [PTS04].

2.1.4 Fase de um oscilador autônomo

Oscilador autônomo é todo sistema físico que oscila autonomamente, na ausência de qualquer perturbação. Estes sistemas podem ser descritos por um sistema dinâmico dissipativo do tipo fluxo no qual, para o conjunto de parâmetros adotados, nele existem somente atratores de dimensão maior que zero.

Dado um oscilador autônomo simples em um espaço de fases $\vec{r}$ com período T bem definido, isto é, $\vec{r}(t) = \vec{r}(t + T)$. Neste tipo de sistema, podemos definir uma *fase* ϕ , tal que:

$$\vec{r}(t) \Rightarrow \phi(t) \quad \text{e} \quad \vec{r}(t + T) \Rightarrow \phi(t) + 2\pi, \quad (2.5)$$

ou seja, estamos fazendo uma bijeção entre a dinâmica neste ciclo-limite e um movimento sobre um círculo de raio unitário.

Figura 2.4 – Desenho esquemático do processo de atribuir uma fase para o oscilador perturbado, mostrando em linha contínua o ciclo-limite original $\vec{r}(t)$, em linha tracejada a trajetória perturbada $\vec{r}_{\text{novo}}(t)$. Em pontilhado é mostrada a projeção da trajetória perturbada na original, encontrando $\vec{r}_{\text{proj}}$ e, conseqüentemente, a fase equivalente $\phi(t)$.

Agora, suponhamos que este oscilador esteja sujeito a uma perturbação pequena, isto é, uma perturbação tal que a distância entre a nova trajetória do sistema e o ciclo-limite original é muito menor que o tamanho do ciclo-limite original. Neste caso, ainda podemos definir a fase em que o oscilador encontra-se projetando a trajetória do oscilador no espaço de estados sobre o ciclo-limite e atribuindo ao estado $\vec{r}_{\text{novo}}(t)$ a fase do estado $\vec{r}_{\text{proj}}$ que está sobre o círculo. Um desenho esquemático deste procedimento pode ser visto na figura 2.4.

Um segundo método para definir a fase ϕ envolve usar uma seção de Poin-

caré Σ no fluxo e definir que

$$\phi(\vec{r}) = 2\pi n, \vec{r} \in \Sigma, \quad (2.6)$$

com $n \in \mathbb{N}$. Para definir as fases entre dois cruzamentos consecutivos com a seção Σ , é necessário fazer uma interpolação. A figura 2.5 apresenta um desenho esquemático deste método de obtenção da fase. A vantagem de usar uma seção de Poincaré é que, para determinar a fase do oscilador, é necessário que saibamos apenas os instantes do cruzamento com a seção de Poincaré. Como nos experimentos com a dinâmica de formação de bolhas obtemos os tempos entre bolhas, este método é ideal para determinação da fase do borbulhamento no bico.

Figura 2.5 – Desenho esquemático do processo de atribuir uma fase para o oscilador perturbado, mostrando em linha contínua o ciclo-limite original $\vec{r}(t)$, em linha tracejada a trajetória perturbada $\vec{r}_{\text{novo}}(t)$. Na figura é mostrada também a seção de Poincaré Σ , usada para obter os instantes que a fase ϕ é múltipla de 2π .

2.2 Sincronização

Sincronização é o nome dado a fenômenos que emergem quando osciladores autônomos são acoplados a um sistema externo, podendo ser um ou mais osciladores autônomos ou uma perturbação periódica. Estes fenômenos se caracterizam pela mudança no comportamento do oscilador, que passa a oscilar de maneira síncrona com relação ao sistema que causa a perturbação, mantendo, por exemplo, uma diferença de fase constante entre os dois. A primeira descrição da sincronização foi feita por Christiaan Huygens. Ele descobriu que a oscilação de dois relógios de pêndulos pendurados em um suporte comum

coincidiam perfeitamente, com os pêndulos sempre se movendo em direções opostas.

Existem vários tipos de sincronização, como, por exemplo, a *sincronização total*, que ocorre quando todos os osciladores do sistema oscilam com a mesma frequência e com a mesma fase, ou seja, todos estão no mesmo estado. Este tipo de sincronização exige que os osciladores envolvidos sejam iguais (ou pelo menos muito semelhantes), mas é de mais fácil identificação, pois, como os osciladores estão no mesmo estado, não é necessário definir uma fase para os osciladores.

2.2.1 Sincronização de fase

Outro tipo de sincronização é a chamada *sincronização de fase*, que ocorre quando os osciladores tem suas frequências travadas e, portanto, suas fases mantêm uma relação fixa ou aproximadamente fixa, ou seja, a diferença de fase ϕ entre quaisquer dois osciladores obedece a relação

$$|\phi| = |\theta_1 - \theta_2| < \text{constante}, \quad (2.7)$$

onde θ_1 é a fase de um oscilador e θ_2 a fase do outro. A sincronização de fase, em geral, faz com que os períodos naturais dos osciladores sejam modificados, mudando de $T_{osc}^{(1,2)}$ para T_{novo} , tal que T_{novo} está, tipicamente, entre os $T_{osc}^{(1,2)}$.

Existe outro tipo de sincronização de fase, que ocorre quando, após um certo número n de voltas de um dos osciladores, o sistema volta para o estado original, ou seja, $\vec{R}(t + T^{(n:m)}) = \vec{R}(t)$, onde $T^{(n:m)} > T_{osc}^{(1,2)}$, logo, o outro oscilador dá um número m de voltas. Neste tipo de sincronização, portanto, os dois osciladores do sistema estão sincronizados em frequências comensuráveis. Neste caso, podemos definir uma *diferença de fase generalizada* $\phi_{n:m}$, que obedece a relação

$$|\phi_{n:m}| = |n\theta_1 - m\theta_2| < \text{constante}, \quad (2.8)$$

onde n e m são número inteiros, isto é, a diferença de fase generalizada é limitada. É importante notar que, segundo essa definição, n é o número de voltas que o oscilador 2 dá até voltar ao estado original e m o número de voltas do oscilador 1. É importante notar que, caso um sistema esteja $n : m$ sincronizado, ele também estará $jn : jm$, pois a diferença de fase generalizada também será finita neste caso.

2.2.2 Sincronização de um oscilador com uma perturbação periódica

Dado um oscilador autônomo cujo atrator seja um ciclo-limite de frequência natural ω_0 . Caso seja inserida uma perturbação externa de período T com amplitude de perturbação ϵ pequena, ou seja, tal que o sistema permaneça próximo ao ciclo original, a dinâmica da fase θ obedece a relação¹:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \epsilon Q(\theta, t). \quad (2.9)$$

A função $Q(\theta, t)$ é uma função periódica tanto em θ ($Q(\theta + 2\pi, t) = Q(\theta, t)$) quanto em t ($Q(\theta, t + T) = Q(\theta, t)$) e depende tanto da forma da perturbação quanto da dinâmica nos arredores do ciclo-limite. Esta expressão pode ser reduzida, via um mapa estroboscópico no período da perturbação, a um mapa no círculo:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_0 T + \epsilon F(\theta_n) \mod(2\pi), \quad (2.10)$$

onde $F(\theta_n)$ é uma função periódica que depende somente da forma da função $Q(\theta, t)$.

2.2.3 Sincronização de dois osciladores mutuamente interagentes

Agora, caso tenhamos dois osciladores periódicos interagindo fraca e mutuamente² (os osciladores podem ser iguais ou não), a dinâmica da fase dos dois atratores pode ser reduzida de maneira análoga à feita na seção anterior, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + \epsilon Q_1(\theta_1, \theta_2), \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + \epsilon Q_2(\theta_1, \theta_2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde ω_1 é a frequência natural (não perturbada) do oscilador 1 e ω_2 a do oscilador 2, ϵ é a amplitude do acoplamento as funções Q_1 e Q_2 são funções 2π -periódicas³ para ambos os argumentos. Estas funções, assim como no caso de

¹Este resultado é demonstrado e discutido em [PRK01]

²Se a interação for unidirecional, caímos no caso anterior

³Uma função é 2π -periódica quando $f(x + 2\pi) = f(x)$

um oscilador com perturbação, dependem da forma da interação e da dinâmica nas proximidades dos ciclos-limite não perturbados.

A dinâmica das fases destes dois osciladores se dá em um toro $\mathbb{T}^2$. Portanto, se a perturbação for pequena o suficiente tal que as dinâmicas de ambas as fases ainda sejam rotações, podemos construir um mapa no círculo a partir delas: basta apenas definir uma seção de Poincaré, como por exemplo $\theta_2(t_n) = 0$, e, com isso, temos um mapa olhando para $\theta_1(t_n) = \theta_1(n)$. É importante notar que esta definição faz com que o valor de $\theta_1(n)$ coincida com o valor da diferença de fase $\phi = \theta_1 - \theta_2 \bmod 2\pi$. Com isso, obtemos regra de evolução:

$$\theta_1(n+1) = F(\theta_1(n)), \quad (2.12)$$

tal que $F(x+2\pi) = F(x) + 2\pi$, pois, no espaço de fases original os pontos (θ_1, θ_2) e $(\theta_1 + 2\pi, \theta_2)$ são coincidentes. A função F , para um sistema com $\epsilon = 0$ (não interagente) é facilmente obtida, pois a dinâmica das fases é trivial, sendo $\theta_i(t) = \theta_i^{(0)} + \omega_i t$. O intervalo de tempo entre dois cruzamentos com a seção $\theta_2 = 0$ é de $\Delta t = 2\pi/\omega_2$. E portanto, o mapa é dado por:

$$\theta_1(n+1) = \theta_1(n) + \omega_1 \cdot \frac{2\pi}{\omega_2}. \quad (2.13)$$

Logo, como este mapa é escrito na forma $y(x) = x + b$, ele consiste de basicamente uma reta coeficiente angular 1, ou seja, paralela a diagonal $y = x$, com coeficiente linear igual $2\pi\omega_1/\omega_2$.

Podemos também reescrever a equação 2.12 para que esta tenha a mesma forma da equação 2.10. Para isto, basta definir uma função $G(x)$ tal que $G(x) = F(x) - x - \Omega$, onde Ω é uma constante. Com esta transformação, o mapa fica:

$$\theta_1(n+1) = \theta_1(n) + \Omega + G(\theta_1(n)), \quad (2.14)$$

e pela definição de F e G , temos que $G(x)$ é uma função 2π -periódica, recuperando a equação 2.10, e podemos associar a função de $G(x)$ à interação entre os dois osciladores, dado que quando eles não interagem, $G(x) = 0$.

2.2.4 Mapas no círculo

Mapas no círculo são sistemas dinâmicos discretos cujos espaços de estados são circunferências, e, portanto, os pontos $x = \delta$ e $x = \delta + 2\pi R$, onde R

é o raio da circunferência, correspondem ao mesmo estado do sistema. Por simplicidade, escolhemos circunferências de raio unitário $R = 1$ (outra escolha comum é $R = (2\pi)^{-1}$, para que o período seja 1).

Como estamos interessados em discutir mapas no círculo dentro do contexto de interação de osciladores e sincronização, discutiremos mapas no círculo na forma:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + \epsilon F(\theta_n) \quad (2.15)$$

tal que $F(x + 2\pi) = F(x)$, $\max(F') \leq 1$ e $0 \leq \epsilon < 1$, para garantirmos que os mapas são inversíveis, que é uma das condições para que as aproximações usadas para deduzir a dinâmica das fases façam sentido. É importante notar que para este tipo de mapas, sistemas com $\Omega = K$ ou $\Omega = K + 2\pi$, possuem o mesmo comportamento, pois $\theta_{n+1} = f(\theta_n, \Omega = K) = f(\theta_n, \Omega = K + 2\pi)$.

Dentre os mapas no círculo, o exemplo mais conhecido é o mapa do círculo de Arnold:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + \epsilon \sin(\theta_n) \quad (2.16)$$

Este mapa, com $\epsilon = 0$, apresenta uma rotação quasi-periódica para todos os Ω irracionais e periódica para os Ω racionais, isto é, o comportamento periódico tem medida nula para $\epsilon = 0$. Porém, quando aumentamos o valor de ϵ , as regiões periódicas passam a ter interior (em relação a Ω) não nulo, crescendo conforme o valor do parâmetro ϵ cresce. Os tamanhos destas janelas, para $\epsilon > 0$, é maior quanto menor o período da janela (ou quanto menor é o divisor q do número de rotação $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i}{2\pi n} = p/q$). Estas janelas são línguas de Arnold. Detalhes das discussões sobre regimes periódicos e quasi-periódicos podem ser vistas em [Arn80].

A figura 2.6(A) mostra o efeito de aumentar a perturbação ϵ , para $\Omega = 0.4$. A partir deste gráfico, podemos ver que o aumento da intensidade da perturbação ϵ afasta o comportamento do sistema não perturbado (uma reta $g(\theta) = \theta + K$). Este afastamento permite o aparecimento de órbitas estáveis, por meio de bifurcações sela-nó, que criam também órbitas instáveis de mesma periodicidade. Nesta figura, uma órbita estável de período 1 aparece ao aumentarmos ϵ de 0.1 (azul) para 0.5 (verde). Já a figura 2.6(B), mostra o efeito de mudar Ω (que é basicamente $2\pi\rho$, onde ρ é o número de rotação), que consiste em mudar o coeficiente linear da reta $g(\theta) = \theta + K$, ao redor da qual a função θ_{n+1} oscila (pois $\epsilon F(x + 2\pi) = \epsilon F(x)$). Logo, ao variarmos Ω , para um valor

Figura 2.6 – (A) Gráficos dos próximos iterados $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ do mapa do círculo de Arnold, com o valor de Ω fixo e variando a perturbação ϵ , e (B) mantendo o valor de ϵ fixo e variando o número de rotação Ω ; Em (C) foi feito um espaço de parâmetros (Ω, ϵ) , mostrando as periodicidades dos atratores para os respectivos valores dos parâmetros, este gráfico apresenta claramente as línguas de Arnold p/q com $q = 1, 2, 3$ e 4 .

fixo de $\epsilon > 0$, podemos ver também orbitas estáveis aparecendo por meio de bifurcações sela-nó. Os efeitos da variação das constantes ϵ e Ω , apesar de ter sido ilustrado pelo mapa do círculo de Arnold, valem para qualquer mapa no círculo que possa ser escrito na forma da equação 2.15. A figura 2.6(C), mostra um espaço de parâmetros (Ω, ϵ) com a periodicidade dos atratores. Nela, podemos ver claramente as línguas de Arnold de período 1, 2, 3 e 4, ou seja, $p/q = 1/1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4$ e $3/4$. O intervalo de Ω foi escolhido de 0 até 4π para mostrar que o espaço de parâmetros se repete a cada 2π .

Multiestabilidade

É sabido que o mapa do círculo de Arnold apresenta multiestabilidade para $\epsilon > 1$ [PG82] nas regiões que as línguas se cruzam. Entretanto, como estamos discutindo regimes de baixa interação/perturbação, este caso de biestabilidade não será abordado. Por simplicidade, aqui abordaremos multiestabilidade de órbitas periódicas de período 1, porém, abordagens semelhantes podem ser feitas analisando as proximidades de quaisquer janelas e os respectivos mapas de n -ésimo retorno.

Em mapas no círculo na forma da equação 2.15, a presença ou não de mais de um ponto fixo de mesmo período depende unicamente da forma da função $F(\theta)$. O número de pontos fixos de mesma periodicidade potencialmente coexistentes depende do número de máximos (ou mínimos) que a função $F(\theta)$ possui.

Isto ocorre pois, em cada ponto no qual $F'(\theta) = 0$, o mapa completo possui derivada 1, e ao variarmos o valor de Ω , temos uma bifurcação tangente (sela-nó), com o aparecimento de um ponto fixo estável e um instável. Um dos sistemas mais simples com mais de um máximo (e mínimo) que pode ser construído é $F(x) = \sin(2x)$, ficando o mapa na forma:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + \frac{\epsilon}{2} \sin(2\theta_n) \quad (2.17)$$

como os valores dos máximos e mínimos de $F(x)$ são sempre os mesmos, temos que as duas bifurcações sela-nó responsáveis pela criação ou destruição destes atratores ocorrem para o mesmo valor de Ω . Logo, em um diagrama de bifurcação, só é possível ver um dos pontos fixos, o qual depende apenas do estado do sistema imediatamente após a dupla bifurcação sela-nó.

A figura 2.7 mostra a função $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ em azul, para $\Omega = 0.2$ e $\epsilon = 0.9$. Os dois pontos fixos (em vermelho e verde) e suas respectivas bacias de atração (na mesma cor do ponto fixo). Podemos ver claramente que as bacias de atração de cada um dos pontos fixos são determinadas pelos pontos fixos instáveis que nascem nas bifurcações sela-nó.

Um caso de maior interesse é aquele em que os máximos (ou mínimos) de $F(\theta)$ tem valores diferentes e, portanto, as bifurcações sela-nó aparecem (e desaparecem) em diferentes valores de Ω . Um exemplo deste caso pode ser

Figura 2.7 – Exemplo de mapa de retorno $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ para a equação 2.17, com $\Omega = 0.2$ e $\epsilon = 0.9$, em vermelho e verde temos os dois pontos fixos estáveis e suas respectivas bacias de atração, mostradas como faixas coloridas.

construído a partir dos dois mapas anteriores:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + \frac{\epsilon}{5} [\sin(\theta_n) + 2 \sin(2\theta_n)] \quad (2.18)$$

este tipo de mapa, quando olhamos um diagrama de bifurcação variando Ω , apresenta uma bifurcação com o sistema indo de um atrator de período 1, que desaparece por meio de uma bifurcação sela nó, e para outro atrator também de período 1, com outro valor de θ .

A figura 2.8, mostra este cenário de bifurcação para o mapa da equação 2.18, para $\epsilon = 0.9$. Na figura 2.8(A), temos apenas 1 dos pontos fixos (em vermelho), nas proximidades de $\Omega = -0.23$ (figura 2.8(B)), o segundo ponto fixo estável aparece via uma bifurcação sela-nó, junto com sua bacia de atração, também definida pelos dois pontos fixos instáveis. Para $\Omega = 0.0$ (figura 2.8(C)), temos a coexistência dos dois pontos fixos e para $\Omega = 0.4$ (figura 2.8(D)), o ponto fixo original desapareceu, ficando somente o ponto fixo que aparece por volta de $\Omega = -0.23$ (verde).

Os sistemas apresentados possuem, pela simetria das funções construídas, bacias de atração sempre do mesmo tamanho. Porém, em sistemas mais complexos que não tenham a mesma simetria podem ter (e, em geral, tem) bacias de atração de tamanhos diferentes.

Figura 2.8 – Quatro exemplo de mapas de retorno $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ para a equação 2.18, com $\epsilon = 0.9$, em vermelho e verde temos os dois pontos fixos estáveis e suas respectivas bacias de atração, mostradas como faixas coloridas. (A) para $\Omega = -0.4$, existe somente o ponto fixo estável vermelho; (B) para $\Omega = -0.23$ o ponto fixo verde aparece; (C) para $\Omega = 0$, os dois pontos fixos estáveis coexistem; e (D) em $\Omega = 0.4$ o ponto fixo vermelho sofreu uma bifurcação sela-nó e desapareceu, sobrando somente o ponto fixo estável verde.

2.3 Mecânica de Fluidos

Esta parte tem o objetivo de reproduzir alguns resultados de mecânica de fluidos conhecidos que foram usados na elaboração do modelo para a dinâmica de formação de bolhas apresentado na seção 4.1.3. O ponto de partida de todos estes resultados será a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, que pode ser escrita como:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}. \quad (2.19)$$

2.3.1 Equação para o fluido passando por um cano

Considerando que um fluido esteja escoando por um cano cilíndrico de raio R e comprimento $L \gg R$, e tenhamos um escoamento laminar, pela simetria do sistema, temos, em coordenadas cilíndricas, $v_\phi = v_r = 0$ e $v_z = v_z(r, z, t)$. Logo, a equação de Navier-Stokes fica

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \quad (2.20)$$

Caso estacionário

Se o fluxo for estacionário, temos $v_z = v_z(r)$, pois não pode ocorrer acumulação (ou extração) de fluido de nenhum ponto do cano, portanto, a equação fica:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (2.21)$$

Resolvendo a equação diferencial e chamando $\frac{\partial p}{\partial z} = -P_z$:

$$v_z = A + B \ln r - \frac{P_z}{4\mu} r^2. \quad (2.22)$$

Aplicando as condições de contorno $v_z(R) = 0$ (fluido em contato com a parede está parado) e $v_z'(0) = 0$ (a derivada espacial da velocidade é contínua no centro do cano), temos:

$$v_z = \frac{P_z}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (2.23)$$

Com o perfil de velocidades, podemos escrever a velocidade v_z como função da vazão $Q = \int v_z dS$:

$$v_z = \frac{2Q}{\pi R^4} (R^2 - r^2). \quad (2.24)$$

Caso não estacionário

Supondo que o perfil radial do campo de velocidades se mantenha igual ao campo estacionário⁴, podemos escrever a velocidade v_z como:

$$v_z(r, z, t) = \frac{2Q(z, t)}{\pi R^4} (R^2 - r^2). \quad (2.25)$$

Substituindo esta relação na equação 2.20:

$$\rho \left\{ \frac{2(R^2 - r^2)}{\pi R^4} \frac{\partial Q}{\partial t} + \left[\frac{2(R^2 - r^2)}{\pi R^4} \right]^2 Q \frac{\partial Q}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{8\mu Q}{\pi R^4} + \mu \frac{2(R^2 - r^2)}{\pi R^4} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}. \quad (2.26)$$

Integrando a equação por toda a seção transversal:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2}{3\pi R^2} \frac{\partial}{\partial z} (Q^2) + \frac{\pi R^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{8\nu}{R^2} Q - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0. \quad (2.27)$$

Considerando o fluido incompressível (portanto $Q(z, t) = Q(t)$) e integrando entre as extremidades do cano, isto é, de $z = 0$ até $z = L$:

$$L \frac{dQ}{dt} + \frac{8\nu L}{R^2} Q + \frac{\pi R^2}{\rho} [p(L, t) - p(0, t)] = 0. \quad (2.28)$$

2.3.2 Escoamento irrotacional

Quando o fluido tem um fluxo irrotacional, isto é, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$, podemos inserir o potencial ϕ tal que

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi. \quad (2.29)$$

Caso o fluido também seja incompressível, temos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Logo a equação cinemática do fluido é dada por:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.30)$$

Neste caso, a dinâmica e a cinemática do fluido são desacopladas, ou seja, podemos encontrar o campo de velocidades somente com as condições de contorno, sem precisar resolver a equação de Navier-Stokes. Entretanto é necessário usá-la para encontrar as pressões no campo de velocidades. Reescrevendo a equação 2.19:

⁴esta hipótese é bastante usada em engenharia hidráulica na análise de transientes de pressão[DGS79].

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right) = -\vec{\nabla} p - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \rho \vec{g}. \quad (2.31)$$

Usando a equação 2.29:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{p}{\rho} - \vec{g} \cdot \vec{x} \right) = 0. \quad (2.32)$$

Integrando a equação sobre uma linha de fluxo obtêm-se a equação de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{p}{\rho} - \vec{g} \cdot \vec{x} = c(t), \quad (2.33)$$

onde $c(t)$ é uma função que depende somente do tempo.

Fonte em um fluido infinito

Supondo que exista uma fonte isotrópica de fluido na origem. É necessário resolver a equação:

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (2.34)$$

para $r > 0$. Como o problema possui simetria esférica, o potencial ϕ só depende de r e t , portanto $\phi(r, \theta, \varphi) = \phi(r)$. Logo, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0. \quad (2.35)$$

A solução desta equação diferencial é:

$$\phi = -\frac{A}{r} + B. \quad (2.36)$$

Portanto a velocidade é dada por:

$$\vec{v} = \frac{A}{r^2} \hat{r}. \quad (2.37)$$

Considerando que a fonte tem uma vazão Q , podemos calcular a constante A integrando a equação da velocidade para uma superfície esférica de raio r_0 , pois $Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{S}$:

$$Q = \frac{A}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi A. \quad (2.38)$$

Logo, a equação da velocidade, em função da vazão Q é:

$$\vec{v} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}. \quad (2.39)$$

Usando a equação de Bernoulli (equação 2.33) para encontrar a pressão, considerando que a pressão a uma distância muito grande da fonte é dada pela pressão hidrostática $p = p_\infty + \rho \vec{g} \cdot \vec{x}$, usando a diferença de pressão $P = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x} - p_\infty$ e considerando que a vazão Q varia com o tempo:

$$-\frac{1}{4\pi r} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4} + \frac{P(r)}{\rho} = 0 + 0 + \frac{p_\infty}{\rho}. \quad (2.40)$$

Rearranjando os termos:

$$P(r) = p_\infty + \frac{\rho}{4\pi r} \frac{dQ}{dt} - \frac{\rho Q^2}{32\pi^2 r^4}. \quad (2.41)$$

Bolha parada em um fluido infinito

Para uma bolha parada com raio a , que varia no tempo, em um fluido infinito, o campo de velocidades do fluido é o mesmo que para uma fonte pontual para $r > a$ com $Q = \frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}$. Logo, usando a equação 2.41, a pressão do fluido nas proximidades da superfície da bolha é dada por:

$$P(a) = P_\infty + \rho a \frac{d^2 a}{dt^2} + 2\rho \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{\rho}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2. \quad (2.42)$$

A pressão interna da bolha p_b é dada pela relação (obtida pelas condições de contorno na interface⁵):

$$P_b = P(a) - 2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=a} + 2\frac{\gamma}{a}, \quad (2.43)$$

onde γ é a tensão superficial do fluido e μ é a viscosidade dinâmica dele. O termo $2\frac{\gamma}{a}$ é proveniente da tensão superficial e $-2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=a}$ do atrito viscoso devido ao movimento da interface. Como $v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$:

$$P(a) = P_b - \frac{4\mu}{a} \frac{da}{dt} - 2\frac{\gamma}{a}. \quad (2.44)$$

Substituindo esta equação na equação 2.42:

$$\frac{4\mu}{a} \frac{da}{dt} + \rho a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3\rho}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = P_b - P_\infty - 2\frac{\gamma}{a}. \quad (2.45)$$

Que pode ser reescrita como:

$$a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu}{a} \frac{da}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(P_b - P_\infty - 2\frac{\gamma}{a} \right), \quad (2.46)$$

onde ν é a viscosidade cinemática do fluido.

⁵Para o desenvolvimento das condições de contorno em interfaces, ver [Poz97].

Capítulo 3

Arranjo Experimental

3.1 Arranjos experimentais

3.1.1 Um bico borbulhador

O esquema do aparato experimental é mostrado na figura 3.1. O aparato consiste de um tubo de acrílico transparente, de 10 cm de diâmetro, em cuja base está localizado um bico pelo qual injetamos ar, com isso, bolhas são formadas no fluido utilizado. Este fluido é uma solução de água e glicerina, que tem como vantagens a transparência e a possibilidade de uma ampla variação da sua viscosidade, de 1 até 2000 cP, alterando a relação água/glicerina.

Medimos o tempo entre bolhas, T_n , com um sistema de detecção da passagem das bolhas por um feixe de laser focalizado em um fotodiodo [SGP94]. Quando uma bolha atravessa o caminho do laser, o feixe é espalhado pela bolha, fazendo com que o fotodiodo deixe de ser iluminado pelo laser, o que faz com que o fotodiodo pare de conduzir. Detectamos esta alternância entre os estados iluminado e não iluminado observando a tensão em um resistor em série com o fotodiodo.

A vazão de ar é controlada com um sistema que consiste de um fluxímetro de massa, de uma válvula solenoide e de um controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID). A vazão é medida pelo fluxímetro e transformada em um sinal de 4-20 mA, que chega na entrada do controlador PID. Com esta entrada, o controlador altera sua saída, ligada à válvula solenoide (por meio de um circuito amplificador de corrente, pois a saída do controlador é de baixa

Figura 3.1 – Diagrama esquemático do arranjo experimental de um bico borbulhador, com os novos sistemas de aquisição.

potência), tal que o valor lido pelo fluxímetro fique igual ao valor de referência (setpoint) programado no PID. Com este sistema podemos obter diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a vazão de ar que pode ser variada linearmente com o PID no modo de rampa do valor de referência.

3.1.2 Reforma do arranjo experimental

Para que fosse possível implementar eficientemente as novas técnicas de aquisição, tanto da estrutura que sustentava o tubo, para facilitar a instalação do arranjo de dois bicos, quanto das peças do tubo borbulhador e sistema de injeção de ar, para permitir o uso dos microfones e facilitar a troca de peças desgastadas e mudanças no arranjo experimental (como o uso das agulhas).

Para tanto, foi aproveitada a estrutura metálica preparada para acomodar o sistema de dois bicos. Esta foi reformada para comportar dois tubos, compartilhando o mesmo sistema de injeção de solução viscosa. Os filtros de ar que ficam entre o reservatório e o sistema de injeção de ar foram fixados na estrutura metálica, permitindo um controle da pressão que chega ao sistema de injeção. O auto-falante foi preso à parede acima dos tubos por meio de um

sistema que permite que ele seja movido de um tubo para outro. Uma foto do sistema pode ser vista na figura 3.2.

Figura 3.2 – Foto da nova disposição do arranjo experimental.

Com o intuito de evitar perturbações mecânicas no arranjo experimental, todo o sistema eletrônico de controle (os controladores PID, o sistema gerador de som e as fontes) foi desacoplado fisicamente do arranjo, ficando em uma estante simples construída para esta finalidade. A estante pode ser vista a direita na figura 3.2. O sistema de aquisição, juntamente com o computador fica em uma mesa ao lado da estante, para aumentar a distância entre o arranjo e a interface do usuário, mas ainda assim próximo ao sistema de controle.

Com relação ao sistema de aquisição em si, a estrutura de suporte do bico borbulhador foi refeita, pois a antiga estava danificada, causando um ruído intermitente nos tempos entre-bolhas. Os cabos e conexões entre o controlador PID e o sistema de controle de fluxo (válvula solenoide e fluxímetro) foram trocados para facilitar o manuseio e minimizar maus contatos. O circuito do fotodiodo também foi refeito e duplicado, tanto para permitir o uso de dois

lasers para o arranjo de dois bicos quanto para aumentar sua confiabilidade.

A medição dos tempos entre bolhas também foi modificada. No sistema antigo, os tempos entre bolhas eram medidos usando uma placa construída especialmente para este fim, que possuía um cristal com frequência de oscilação de 1 MHz. Esta placa contava quantos ciclos de oscilação do cristal ocorriam entre duas transições sucessivas na tensão proveniente do fotodiodo devido à passagem das bolhas. A placa se conectava ao computador por meio de um slot ISA, pelo qual ela enviava ao sistema os tempos entre bolhas. Os valores da vazão para cada bolha eram estimados por meio de interpolação linear (considerando que a vazão inicial era o valor de referência inicial e a vazão final o valor de referência final).

Este sistema, apesar de bastante eficiente e confiável na detecção dos tempos entre-bolhas, impossibilita qualquer tipo de tomada de dados simultânea. Ele também exige que os computadores de aquisição de dados tenham slots ISA, um padrão que, atualmente, está presente em placas-mães para aplicações industriais somente.

Na Figura 3.3, é apresentado um desenho esquemático com todas as ligações entre os sistemas de aquisição de dados, controle de fluxo e perturbação sonora. Os sistemas de aquisição de dados e de controle de fluxo (mais especificamente a leitura do fluxo) são discutidos com detalhes na seção 3.2, e as comunicações via serial e GPIB são discutidos na seção 3.3.

3.1.3 Dois bicos borbulhadores

A estrutura do arranjo experimental de dois bicos foi feita de modo que o maior número possível de peças tivesse as mesmas dimensões (ou compatíveis) com as presentes no arranjo de um só bico. Por isso, foi criado um sistema de peças intercambiáveis que facilita o uso de novos bicos equivalentes aos usados no arranjo de bico solitário, além de permitir o uso dos bicos já existentes. A base foi feita tal que a distância entre bicos fosse de 4.5 cm, que é um valor tal que os bicos não ficassem muito próximos nem das paredes nem um do outro. Ao construirmos uma nova base, escolhemos as posições dos canais de entrada e saída da solução para que o sistema de injeção e coleta do líquido estivessem em uma posição mais adequada ao suporte existente, para facilitar o manuseio e a instalação dos sistemas de laser-fotodiodo para os dois bicos

Figura 3.3 – Fluxograma do novo sistema de aquisição de dados, as setas indicam em que direção a informação flui. As conexões verdes indicam ligações genéricas, que podem representar uma comunicação essencialmente bidirecional (como no caso computador-ADCs) ou uma ligação física sem fluxo de informação (como a ligação válvula-fluxímetro). No arranjo experimental de 2 bicos, os componentes dentro do retângulo vermelho são dobrados, isto é, existem 2 sistemas de controle de fluxo independentes (ligados a porta serial e aos ADCs), dois pares laser/fotodiodo e microfones nas duas mangueiras que levam o ar do sistema de controle de fluxo para os bicos borbulhadores.

borbulhadores.

Feita a montagem do sistema com dois bicos injetores dentro do mesmo

tubo, tornou-se possível estudar o acoplamento entre as dinâmicas dos borbulhamentos em cada bico, medindo as ondas de pressão em cada mangueira conectora, as vazões em cada um dos bicos e os tempos entre-bolhas em ambos os bicos com o dois pares de laser/fotodiodo. Um diagrama do aparato experimental é mostrado na figura 3.4. O arranjo esquemático com todas as ligações do sistema é o mesmo do de um bico (figura 3.3), porém com os componentes (e respectivas ligações) dentro do retângulo vermelho duplicados.

Figura 3.4 – Diagrama do aparato número 2, tubo com dois bicos para entrada de ar ilustrando o sistema de aquisição de dados.

3.2 Novos sistemas de aquisição

3.2.1 Tempo entre bolhas

O sistema antigo, que consistia de uma placa de aquisição desenvolvido no laboratório que contava o tempo entre duas transições do sinal elétrico vindo do circuito do fotodiodo, foi substituída por uma placa de aquisição de dados. A placa usada é uma PCI-6143 da National Instruments, que possui 8 conversores analógico-digitais (ADCs) com resolução de 16 bits com taxa de aquisição de até 250 kS/s/ch (ou seja, uma resolução temporal de $4\mu s$) e amostragem simultânea nas entradas. O novo sistema de aquisição é essencialmente diferente do antigo, pois o antigo é uma placa personalizada, criada especificamente para o tipo de medição feita no experimento, enquanto o novo sistema é

uma placa de aquisição genérica. Portanto, foi necessário produzir o programa de aquisição de dados (vide a descrição do algoritmo no final desta seção), que foi criado usando Matlab, devido as facilidades deste programa e a excelente compatibilidade deste com as placas da National Instruments.

A diminuição na resolução temporal (de $1\mu s$ para $4\mu s$) ainda que significativa, não acarreta prejuízos para os resultados dos experimentos, pois a dispersão dos tempos entre bolhas no período 1 tem um desvio padrão próximo a $100\mu s$, ou seja, é 25 vezes maior que a resolução temporal do sistema de aquisição, e, portanto, não afeta na análise da dinâmica do sistema.

Este sistema também permite que se obtenha, a partir da saída do fluxímetro (que vai para o PID controlar o fluxo de ar), o fluxo em tempo real, usando um segundo canal do sistema de aquisição, o que nos dá maior confiança do valor deste parâmetro de controle, que, no sistema antigo, era ou lido do PID, no caso de medições com fluxo de ar fixo, ou interpolado, quando o experimento era executado no modo rampa. O novo sistema de aquisição também permite a aquisição de tempos entre bolhas de outro bico (assim como seu fluxo), além dos microfones presentes no arranjo experimental.

Algoritmo do sistema de aquisição

Como o novo sistema mede tensões em intervalos de tempo bem definidos, ao invés de intervalos de tempo entre transições de tensão, foi necessária a criação de um algoritmo que permitisse encontrar as transições de tensão sem sobrecarregar a memória (pois a coleta de apenas um canal por 15 minutos ocupa mais de 1 GB de memória).

Para resolver este problema de uso excessivo de memória, aproveitamos o fato do processador ficar ocioso durante a tomada de dados, fazendo com que ele fizesse a busca das transições das tensões (que equivalem ou a entrada da bolha na frente do laser ou a sua saída). Para isso, se espera ter certo número de dados N de dados (tipicamente 100 mil). Quando o sistema de aquisição atinge este número, o algoritmo faz com que o processamento destes N dados comece, buscando em que instantes ocorrem as transições e, portanto, as passagens das bolhas. Terminada a busca, preserva-se o último dado da série (para não perder transições que eventualmente ocorram exatamente entre duas 'coletas'), armazena os instantes de entrada ou saída das bolhas e o processador espera

novamente o sistema de aquisição coletar mais N dados.

Dada a eficiência do Matlab em manipular vetores e matrizes, a carga no processador devido ao processamento em tempo real dos dados é mínima, pois a carga total durante uma aquisição com dois pares fotodiodos/fluxímetros (isto é, usando o arranjo de 2 bicos borbulhadores) é menor que 5% em um Core 2 Duo E7300, para a escolha de $N = 100$ mil.

3.2.2 Medindo o fluxo de ar

Ao mesmo tempo que o sinal vindo do circuito do fotodiodo é coletado e processado, usamos outro canal da placa de aquisição para medir o fluxo de ar, a partir da saída do fluxímetro, usando um circuito simples para converter a corrente em tensão, tirando a média das medições para cada conjunto N de dados (no caso $N=100$ mil). A velocidade de variação do fluxo de ar nas tomadas em modo rampa é, no máximo, 320 mL/min/h ou 0.089 mL/min/s, o que gera uma variação, devido ao modo rampa, de 0.036 ml/min entre o início e o fim dessas medições. Dado que a resolução do controlador PID é de 0.1 ml/min e o desvio padrão para uma tomada com vazão fixa é de $\sigma_Q = 0.2$ ml/min, a incerteza na medição do fluxo de ar é cerca de uma ordem de grandeza maior que a variação devido a rampa. Logo, o valor da vazão obtido para uma medição no modo rampa pode ser considerado constante dentro deste intervalo.

3.2.3 Microfones

Para medir as oscilações da pressão na mangueira de ar, compramos microfones de eletreto WM-64C da Panasonic. Escolhemos este modelo em especial devido à sua curva de resposta, que é constante para todo intervalo de frequências de interesse, o que garante uma maior confiabilidade nos sinais obtidos. A figura 3.5, apresenta a curva de resposta destes microfones, presente na ficha técnica (datasheet) deste componente, obtida no site da própria Panasonic¹.

Os microfones são conectados a uma fonte de tensão e um filtro passa-alta com frequência de corte da ordem de 1Hz (usado para tirar a tensão constante

¹http://industrial.panasonic.com/www-ctlg/ctlg/eABA5000_WW.html (visitado em 21/11/2012)

Figura 3.5 – Curva de resposta do microfone usado para a medição das oscilações de pressão na mangueira.

proveniente da fonte de tensão). Estes sinais então são medidos pelos ADCs da placa de aquisição. Como a taxa de aquisição usada é muito maior que a frequência de resposta do microfone, grande parte dos dados refletem apenas o ruído do sistema. Para evitar encher a memória com dados desnecessários e reduzir o ruído, tiramos a média de 10 em 10 dados, e guardamos este valor, gerando uma taxa de aquisição efetiva de 25 kS/s para cada microfone. Foram feitos testes com os microfones no arranjo experimental 1 (com a mangueira de 250 cm), colocando um deles nas proximidades do bico e o outro nas proximidades da válvula solenoide, o resultado pode ser visto na figura 3.6. Os sinais são bastante semelhantes, porém o sinal afastado possui um atraso em relação ao microfone próximo, pois as perturbações originadas do borbulhamento levam um tempo para chegarem no microfone mais distante, e oscila menos, pois está mais afastado do bico, que é origem de oscilações sonoras.

No experimento de dois bicos borbulhadores, o comprimento da mangueira não foi um parâmetro estudado e este foi mantido mínimo (11 cm). Portanto, cada bico contou com apenas um microfone, para analisar as ondas de pressão. Os microfones tiveram um papel central no estudo sobre sincronização entre os dois bicos pois, quando comparado com fotodiodos, pequenas diferenças nas posições dos microfones nas duas mangueiras inserem erros sistemáticos menores nas estimativas das fases que pequenas diferenças nas alturas dos sistemas laser-fotodiodo.

Figura 3.6 – Pressão medida pelos microfones no arranjo experimental 1, em um regime de período 4. O microfone próximo ao bico está em azul e o próximo à válvula solenoide em vermelho.

3.2.4 Câmera de alta velocidade

A nova disposição do arranjo experimental facilitou o uso da câmera de alta velocidade, que pode capturar até 500 quadros por segundo com resolução máxima (1280x1024) e até 16000 quadros por segundo com resoluções menores. Para capturarmos as imagens de maneira síncrona com as aquisições feitas pelos ADCs, criamos um gatilho (trigger) externo que definia o início da aquisição dos dois sistemas (câmera e ADCs). Os dois sistemas possuem métodos de aquisição com início definido por uma transição lógica em uma entrada específica para este fim. Para gerar a transição responsável pelo gatilho, usamos uma das saídas digitais da própria placa de aquisição (que possui 8 portas digitais que podem funcionar tanto como entradas quanto saídas digitais).

Para chegarmos a um compromisso entre a taxa de aquisição, o tempo entre bolhas, o campo da imagem e a iluminação necessária para obter um contraste satisfatório na imagem, escolhemos uma taxa de 2000 quadros por segundo para o arranjo de um bico borbulhador. A resolução e campo foram escolhidos

tal que era possível somente ver as proximidades do bico borbulhador. Um exemplo de imagem obtida com a câmera pode ser vista na figura 3.7.

Figura 3.7 – Imagem obtida com a câmera de alta velocidade a esquerda, e com a borda definida detectada pelo programa em branco, na imagem da esquerda.

Para tratar as imagens provenientes da câmera, foi criado um algoritmo em Matlab, que identifica as sombras geradas pela fronteira entre a bolha e o líquido e, com isso, calcula o volume da bolha enquanto ela ainda está presa ao bico. Para não somar o volume de uma bolha que acaba de se desprender com o volume residual dentro do bico, este algoritmo considera que, quando existe uma descontinuidade da região escura, a parte superior não pertence mais a bolha presa ao bico. Na figura 3.7, além de um exemplo de imagem detectada pela câmera (lado esquerdo), apresentamos a borda detectada pelo programa em branco (lado direito).

Com a borda definida, podemos medir e calcular os parâmetros geométricos da bolha em formação, como por exemplo, sua altura h_{max} e largura D_{max} máximas e seu volume. O volume foi calculado a partir da largura da bolha em função da altura $D(h)$, supondo que a seção transversal da bolha é um círculo e usando uma interpolação linear para $D(h)$ entre dois valores de h sucessivos, isto é:

$$V_n = \frac{1}{12} \pi (h_{n+1} - h_n) (D_n^2 + D_{n+1}^2 + D_n \cdot D_{n+1}), \quad (3.1)$$

onde o volume total $V = \sum V_n$, h_n é a altura do n -ésimo ponto e D_n a largura (e, conseqüentemente, o diâmetro da seção transversal) nesta altura. O volume $V = 0$ foi definido tal que a interface ocupa todo o bico, isto é, não há líquido

dentro do bico e não a ar fora dele (ou existe ar fora na mesma quantidade que líquido dentro). Um importante cuidado necessário no cálculo destes parâmetros é levar em conta que a geometria do tubo borbulhador deforma a imagem na direção da largura D quando este está com a solução de água com glicerina. Esta distorção vem do tubo ser cilíndrico, o que faz com que ele funcione como uma lente de aumento para tudo que está dentro dele. Este efeito foi corrigido inserindo um simples fator multiplicativo (da ordem de 0.7) nas medidas de largura obtidas pela câmera. Podemos aplicar esta simples correção linear pois as dimensões das bolhas são muito menores que o raio de curvatura do tubo (por volta de $1/50$, no pior dos casos).

Figura 3.8 – Volume da bolha em função do tempo, sendo que o volume 0 é quando o interior da seringa está completamente cheio de ar. Neste caso, não é possível ver a interface quando ela está dentro do bico, pois este experimento foi feito usando o bico metálico.

Ao aplicarmos o algoritmo de detecção e de cálculo de volume para todas as imagens coletadas pela câmera de alta velocidade, obtivemos as séries temporais do volume (além da de altura da bolha), como a presente na figura 3.8, que mostra o volume da bolha em formação para uma série temporal do experimento de adição de período ($r_0 = 0.2$ mm, comprimento da agulha $h = 20$ mm, comprimento da mangueira $L = 30$ cm e vazão $Q = 39$ ml/min). Neste caso, o menor volume detectado é $V = 0$ pois a agulha metálica impossibilita que vejamos dentro dela.

3.3 Sistemas de Comunicação

3.3.1 Comunicação com o gerador de sinais

Como o novo sistema de aquisição de dados usa um computador moderno e Matlab, foi necessário o desenvolvimento do método e do algoritmo de comunicação entre o novo computador com o gerador de funções arbitrárias da Tektronix modelo AFG320 que controla as perturbações sonoras aplicadas ao sistema por meio de um amplificador de áudio e auto-falante. Este gerador foi usado tanto como um parâmetro nos sistemas similares ao mapa do círculo em [Tuf00, TS01, PCT09] quanto como gerador de ruído para detecção de multi-estabilidade em [CPT04].

Para a comunicação, usamos a entrada GPIB (IEEE-488.1) do gerador de funções, e foi comprado um conversor GPIB-USB-HS da National Instruments. O gerador de funções se comunica via GPIB por meio do protocolo SCPI (Standard Commands for Programmable Instruments - IEEE-488.2) e desenvolvemos os algoritmos em Matlab para permitir esta comunicação.

Protocolo SCPI

Os comando SCPI são cadeias de caracteres ASCII, podendo ser instruções ou perguntas. Um exemplo de instrução é `OUTPut1:STATe ON`, que faz com que o gerador de funções ligue a saída 1 e a pergunta `OUTPut1:STATe?` pede o status desta saída (se está ligada ou desligada).

O gerador de sinais não faz distinção de letras maiúsculas ou minúsculas, permitindo inclusive contrações dos nomes dos comandos. Aqui estamos usando a notação padrão na qual as letras minúsculas estão indicando os caracteres opcionais.

Para transmitir os valores dos parâmetros, basta escrever os valores acompanhados da unidade desejada. Por exemplo, se queremos mudar a voltagem da saída 1 para 100 mV, basta enviar o comando `VOLT 100MV`, que é a forma mais concisa de escrever o comando `SOURce1:VOLTage:AMPLitude 100MV` (o `M` indica para o gerador de funções que o valor deve ser multiplicado por 10^{-3} , no caso de amplitudes, ou 10^6 , no caso de frequências). Quando a identificação da saída é omitida, o gerador altera (ou responde) o parâmetro da saída

1. Logo, caso queiramos mudar a frequência da saída 2, a forma concisa seria SOUR2:FREQ 1MHz.

3.3.2 Comunicação com os controladores PID

Os controladores PID existentes foram substituídos por versões similares que possuem uma saída com padrão RS485 serial que conversa por meio do protocolo MODBUS. Para implementar a comunicação com um computador que, em geral, não conta com conectores que seguem o padrão RS485, foi usado um adaptador RS485 para RS232 (que é o padrão usado pela porta serial do computador). O protocolo MODBUS permite vários controladores conectados na porta serial do computador, cada um com um endereço diferente.

A comunicação com o PID permite não só variar o valor de referência, como também configurar o modo rampa e definir seu início via porta serial, o que permite realizar séries de medições automatizadas, além de permitir a varredura automatizada do espaço de parâmetros formado pelas vazões dos dois bicos (no caso do sistema de dois bicos borbulhadores) tanto usando o modo rampa, quanto fazendo medições de pares (Q_1 , Q_2) em uma rede quadrada (como foi feito na seção 4.3.3). Este sistema tem como vantagens: uma redução drástica no tempo necessário para fazer aquisições de dados seguindo rotinas complexas, o que diminui os efeitos causados por variações ambientais; e evita eventuais perturbações causadas pela presença de um operador do sistema, pois é possível fazer tomadas de dados de várias horas sem a necessidade da presença de alguém na sala do arranjo experimental.

Protocolo MODBUS

O protocolo de comunicação MODBUS usado pelos controladores é a versão RTU, no qual os dados são transmitidos em sua forma binária. Estes dados são transmitidos como bytes de 8 bits com 1 bit para indicar início e 1 bit para indicar fim, além de 1 bit opcional de verificação de paridade (que não foi usado). A ordem dos bytes é do tipo *Big-Endian* (o algarismo mais significativo é enviado primeiro). O fim da mensagem é definido por um intervalo de silêncio maior que 3 caracteres. Segue abaixo um exemplo (em hexadecimal):

01 06 00 02 04 B0 2B 7E

- o primeiro byte indica o endereço do aparelho que vai receber a instrução, no exemplo 01.
- o segundo byte indica o tipo de pedido a ser feito. O byte 06 indica que o controlador deve modificar um determinado registrador.
- os bytes seguintes são referentes a mensagem propriamente dita. No exemplo, 00 02 dizem o número do registrador que deve ser mudado (2, que é o valor do setpoint), e 04 B0 é o valor para o qual deve ser mudado (1200 ou, no caso, 120.0 ml/min).
- os dois últimos bytes (2B 7E) são para verificar a consistência da mensagem, por meio de um CRC16 (Cyclic Redundancy Check de 16 bits). Ele consiste no resto da divisão da mensagem por um número pré-definido. Detalhes deste algoritmo podem ser vistos no manual do controlador².

Neste exemplo, o controlador simplesmente responde uma cópia da mensagem enviada. No caso do uso da opção leitura (de 01 a 04), o controlador mandaria na mensagem o endereço do registrador pedido junto com o valor gravado nele.

²Este manual está disponível no site <http://www.west-cs.com/assets/Manuals/N6400-Full-Manual-English.pdf>, a parte que descreve o protocolo MODBUS é a seção 4 do volume 1.

Capítulo 4

Resultados Experimentais e Discussões

4.1 Adição de Períodos

Usando o novo arranjo, reproduzimos as condições presentes nos estudos anteriores [PTS04, CPT04], isto é, o uso de uma agulha metálica, altura de solução de 7.5 cm em relação ao topo da agulha, grandes comprimentos da mangueira que liga a válvula solenoide ao bico borbulhador e solução de glicerina composta de 1 parte de água para 3 partes de glicerina (densidade de $1,21 \text{ g/cm}^3$ e viscosidade cinemática da ordem de 35 cS^1). A figura 4.1 contém diagramas de bifurcações com a seringa de comprimento 33 mm e raio interno $r_0 = 0.5 \text{ mm}$, para vários comprimentos de mangueira. Estes parâmetros do bico são os mesmos estudados nos artigos [PTS04, CPT04].

Foram usadas também agulhas de raios internos $r_0 = 0.2 \text{ mm}$ e $r_0 = 1.1 \text{ mm}$, e comprimentos de $h = 20 \text{ mm}$ e $h = 29 \text{ mm}$. Os diagramas com o raio interno menor ($r_0 = 0.2 \text{ mm}$) apresentam adição de período, mas em uma região diferente da original ($r_0 = 0.5 \text{ mm}$), como pode ser visto na figura 4.2. Já o diagrama do bico de raio $r_0 = 1.1 \text{ mm}$, figura 4.3, não apresenta adição, possuindo somente período 1, similar ao experimento das línguas de Arnold sem a perturbação sonora, estudado no artigo [PCT09]. Na mesma figura, é possível notar que um bico de mesmo raio que do experimento original mas de menor comprimento também apresenta adição de períodos.

¹29,4(9)cS a 24,1°C e 35,9(11) cS a 21,2°C, medidas usando um viscosímetro de copo Ford

Figura 4.1 – Diagramas de bifurcação para as mangueiras de 18 cm, 50 cm, 88 cm, 140 cm, 180 cm, 212 cm, 250 cm e 302 cm, com o bico metálico de mesmas dimensões do bico usado para fazer os diagramas de bifurcações experimentais presentes nos artigos [PTS04, CPT04]. Os diagramas em vermelho foram obtidos usando o modo rampa variando o fluxo de ar de modo crescente e os diagramas azuis de modo decrescente.

Com os diagramas de bifurcação, foi possível identificar os intervalos de vazão e comprimento de mangueira de cada periodicidade e então, dentro de cada um desses intervalos, foram feitas filmagens e medidas com o microfone

Figura 4.2 – Diagramas de bifurcação experimentais dos bicos de raio $r_0 = 0,2$ mm, para $L = 30, 88$ e 180 cm e $h = 20$ e 29 mm.

(com ambos os sistemas de aquisição sincronizados, com ajuda de um gatilho externo). Os programas desenvolvidos foram usados para obter o volume da bolha, assim como a variação da pressão (em relação ao seu valor médio) em 3 situações diferentes, que podem ser vistas na figura 4.4. Com isso, foi possível caracterizar 2 momentos que o sistema pode estar:

1. Nucleação: O ar está dentro do bico e temos a pressão crescendo.
2. Borbulhamento: Temos bolhas se formando no bico e a pressão, em geral,

Figura 4.3 – Diagramas de bifurcação dos bicos metálicos de raios $r_0 = 0,5 \text{ mm}$ e $r_0 = 1,1 \text{ mm}$.

diminui.

A presença de duas fases é conhecida, com a fase de nucleação estudada por [RBD09a, RBD09b] e citada por [KJ05]. Entretanto, os sistemas desses artigos tem um regime no qual após uma bolha se soltar, o sistema sempre vai para o regime 2, ao contrário do que acontece com o sistema aqui estudado, no qual após uma bolha se soltar, outra pode começar a se formar imediatamente, sem necessariamente entrar na nucleação. É interessante notar, inclusive, que a adição de período ocorre exatamente por isso, pois, ao passarmos de período 2 para o 3, por exemplo, temos que entre 2 nucleações sucessivas, o número de bolhas formadas passa de 2 para 3.

Isso explica porque um dos tempos entre bolhas é sempre consideravelmente maior que todos os outros. Este tempo se refere a primeira bolha que sai durante o borbulhamento, pois entre a saída da bolha anterior e a sua existe, além do tempo de crescimento, uma nucleação.

Ao final das bolhas de adição de período, o sistema volta para período 1, entretanto a dinâmica é qualitativamente diferente do período 1 antes da bolha de bifurcações com adições de período. No caso de vazão baixa, o sistema possui os dois momentos (nucleação e borbulhamento), como pode ser visto na figura 4.4(A-a), enquanto para alta vazão, o sistema permanecesse o tempo todo em borbulhamento (porém, neste caso, a pressão no momento em que uma bolha se destaca é a mesma que em seu início de formação), como pode ser visto na figura 4.4(B-b).

Figura 4.4 – Séries temporais (A-C) e espaços de fases $p \times V_b$ (a-c) experimentais para $r_0 = 0.2$ mm, $h = 20$ mm, $L = 30$ cm, e três valores diferentes de Q : 10 ml/min, mostrando um período 1 com nucleação (A-a); 50 ml/min, mostrando um período 1 sem nucleação; e 39 ml/min, mostrando um período 4 com nucleação.

4.1.1 Pressão de equilíbrio da bolha

A descrição física do fenômeno da adição de períodos em bolhas exige, como primeiro passo, a descoberta de quais grandezas físicas são responsáveis por definir se o remanescente da bolha após o destacamento entrará para uma nucleação ou continuará crescendo. Uma das modelagens mais simples que podem ser feitas é olhar para este remanescente de maneira estática, isto é, considerando que ele está parado e fazer um balanço das pressões que agem nesta interface ar-líquido. E verificar sob quais condições a pressão externa é

maior (provocando uma nucleação) ou menor (fazendo uma nova bolha) do que a interna.

Para este fim, pode ser feito um modelo simples para a bolha no bico, supondo uma bolha esférica fora do bico e com um menisco formando uma casca esférica dentro do bico com um ângulo constante, estando o topo da interface ar-líquido a uma altura z do topo do bico. Neste modelo a mangueira é considerada como sendo um reservatório de volume V_0 fixo a uma mesma pressão p que o ar dentro da bolha. Também se supõe que a altura da coluna líquida é $H \gg z$, logo se admite que o sistema está sob uma pressão hidrostática $p_{hid} = p_{atm} + \rho_\ell g H$ na altura do bico. Com este modelo é possível obter a *pressão de equilíbrio*, isto é, para qual pressão o sistema permanece em equilíbrio para uma determinada altura de bolha, assim como o *número de partículas de equilíbrio*, que diz quanto de gás está presente no reservatório e na bolha quando o sistema está no equilíbrio. Se o sistema estiver acima desta pressão, a bolha terá a tendência de crescer e se estiver abaixo, de diminuir.

Figura 4.5 – Pressão de equilíbrio p_e para os três raios internos usados, onde $p_e = 0$ significa que o sistema está na pressão hidrostática na altura do bico metálico. As pressões altas são os máximos dessas curvas, aqui representados como pontos da respectiva cor.

Pode-se ver os gráficos da pressão de equilíbrio p_e como função da altura da bolha z para os três diferentes raios de bico na figura 4.5. Os valores mostrados representam as pressões subtraídas da pressão hidrostática na altura do bico. O ponto marcado na curva representa a pressão para $z = r_0$, que está praticamente no topo da barreira de pressão pois o raio de curvatura da inter-

face é mínimo neste ponto e, portanto, o efeito da tensão superficial é máximo. Uma estimativa para a pressão que o sistema sai da nucleação (pressão alta) é este topo da pressão de equilíbrio. A bolha só pode se formar quando a pressão do sistema é superior ao valor da pressão de equilíbrio neste máximo.

Se logo após o destacamento da bolha, o remanescente de ar no bico tiver altura maior que r_0 , teremos dois possíveis destinos: a pressão deste remanescente poderá ser maior que a pressão de equilíbrio p_e e o remanescente crescerá e formará uma nova bolha ou a pressão poderá ser menor e o remanescente entrará dentro do bico. Uma maneira mais eficiente de perceber estes possíveis destinos é olhando o *número de partículas de equilíbrio* n_e em função da altura z . Usar n_e é mais adequado pois, durante a formação de uma bolha, o número de partículas do sistema cresce de maneira constante dada pela vazão de entrada e diminui quando a bolha é liberada de uma quantidade Δn que corresponde às partículas presentes dentro da bolha destacada. Os gráficos dos n_e por z para os três raios dos bicos usados são apresentados na figura 4.6, os números de partículas estão subtraídos do número de partículas de equilíbrio.

Na figura 4.6, é mostrada em vermelho uma estimativa do número mínimo de partículas para que uma nova bolha comece a crescer sem nucleação, condição na qual a pressão do sistema está na *pressão baixa*. Esta estimativa nada mais é que o número de partículas (ou a pressão) de equilíbrio para a altura do remanescente que fica após o destacamento da bolha, estimada como $z_{baixa} = 1.5r_0$ nas figuras, que é aproximadamente o valor das alturas usadas no modelo para simular $r_0 = 0.2$ mm e $r_0 = 0.5$ mm. Logo, a figura 4.6 mostra de maneira clara a existência de um número de partículas mínimo que, caso o sistema tenha após a saída de uma bolha, uma nova bolha crescerá sem nucleação. A figura também mostra que a pressão de saída da nucleação p_{alto} é tal que $n_{alto} > n_{baixa}$, o que permite o cenário de adição de períodos, pois para existir tal cenário é necessário que se tenha momentos de carga, ou seja, acumulação de ar, e de descarga, isto é, bolhas saindo. Caso $n_{alto} < n_{baixa}$, o borbulhamento é tal que não existe nucleação; e se a entrada de ar for menor temos sempre uma nucleação depois da bolha sair.

Porém para verificar os regimes de fluxo de ar necessários para chegar a adição de períodos é importante comparar a variação do número de partículas causado pelo destacamento de uma bolha. Com este objetivo, para efeito

Figura 4.6 – Número de partículas de equilíbrio para os três raios internos de agulha usados no experimento. Nos gráficos, uma estimativa do número de partículas que separam do sistema entrar ou não na nucleação em vermelho, após o destacamento da bolha e o tamanho barra azul é uma estimativa do número de partículas que abandonam o sistema quando uma bolha é solta.

de estimativa, foi feito um modelo simples de destacamento. Neste modelo, a bolha se destaca quando $F_{empuxo} \geq F_{superficial}$. Apesar de ser um modelo de destacamento bastante simplificado, a estimativa dada para a altura de destacamento é da mesma ordem de grandeza da altura das bolhas experimentais. Podemos ver isto olhando para a figura 3.8, pois a altura que a bolha se destaca é da ordem de 3.4 mm (um volume de 20 mm³), enquanto neste modelo é da ordem de 2.4 mm (volume de 7 mm³).

Como entre dois destacamentos o número de partículas cresce a uma taxa dada pelo fluxo de ar medido pelos fluxímetros, foi colocada a estimativa da queda do número de partículas Δn na figura 4.6, na forma de uma barra azul. É possível notar que, para $r_0 = 0.2$ mm (figura 4.6(A)), a queda do número de partículas é ínfima em comparação à diferença $n_{alto} - n_{baixo}$, portanto, será necessário soltar mais de uma bolha para que o sistema fique com número de partículas abaixo de n_{baixo} . Desta forma, mesmo para fluxos muito pequenos, o bico de raio $r_0 = 0.2$ mm apresenta adição de períodos quando usamos a mangueira de $L = 180$ cm.

Um resultado interessante que pode ser tirado da figura 4.6(C) é que, para grandes raios, a bolha pode diminuir de volume *antes* de se destacar, pois a quantidade de partículas para atingir o equilíbrio cresce rapidamente, ficando maior que a barreira da pressão de equilíbrio, o que permite que a bolha, por inércia, oscile ao redor do número de partículas de equilíbrio. A figura 4.7 mostra este efeito no sistema experimental. Nela, temos o volume da bolha acima da seringa sem a agulha metálica ($r_0 = 1.1$ mm) com vazão $Q = 50$ ml/min em função do tempo e é possível ver essa oscilação entre 1.11s e 1.13s, por exemplo.

4.1.2 Modelo mapa

Como uma primeira aproximação, podemos modelar este sistema considerando somente a existência das duas pressões, que definem a transição entre dois regimes:

1. A pressão p_{alto} , na qual o sistema sai da nucleação e entra em fase de borbulhamento, consistindo de uma certa pressão mínima para que a bolha consiga sair do bico.

Figura 4.7 – Gráfico do volume da bolha de ar presa ao bico em função do tempo, obtido experimentalmente para o bico sem agulha metálica e vazão $Q = 50\text{ml/min}$.

2. A pressão p_{baixo} , na qual o sistema sai do borbulhamento e entra na nucleação, consistindo de uma pressão mínima que o sistema precisa ter para que continue na fase de borbulhamento, imediatamente após a saída de uma bolha.

Usando esta hipótese, modelamos o borbulhamento por meio de um mapa, supondo que o sistema sofre somente transformações isotérmicas, chegando na relação:

$$\frac{dp}{dt}V + p\frac{dV}{dt} = \frac{dn}{dt}RT \quad (4.1)$$

Onde p , V , n e T são, respectivamente, a pressão, o volume, o número de mols e a temperatura no sistema de ar (da válvula até a bolha presa no bico). Considerando o fluxo de partículas constante, podemos adotar $\alpha = \frac{dn}{dt}RT$. Durante a nucleação temos que $\frac{dV}{dt} \approx 0$ e o volume $V \approx V_0$, onde V_0 é o volume do sistema entre a válvula e o bico (pois o volume total do bico é muito menor que o volume do resto do sistema). Dessa forma, a expressão para a pressão durante a nucleação fica:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\alpha}{V} \quad (4.2)$$

Como a nucleação termina sempre que uma determinada pressão p_{alto} é atingida, o tempo de nucleação t_{nuc} é dado por:

$$t_{nuc} = \frac{p - p_{alto}}{\alpha} V_0. \quad (4.3)$$

E no borbulhamento, temos a expressão:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{V} \left(\alpha - p \frac{dV}{dt} \right). \quad (4.4)$$

Como as variações tanto na pressão quanto no volume devido ao borbulhamento são muito pequenas (nunca maiores que 0.5%), podemos assumir na expressão 4.4 que $p \approx p_0$ e $V \approx V_0$. Deste modo, podemos integrar entre o início da formação da bolha e a saída da mesma, obtendo:

$$p_{n+1} - p_n = \frac{\alpha}{V_0} t_{n+1} - \frac{p_0}{V_0} V_n, \quad (4.5)$$

onde T_{n+1} é o tempo entre o início e o fim de formação dessa bolha, p_{n+1} é a pressão quando ela se solta, p_n é a pressão quando ela começa a se formar e V_n é o volume da bolha ao se soltar. Para calcular os t_n da equação 4.5, usamos o mesmo modelo do artigo [PCT09], onde $t_n = cQ^{-\frac{2}{5}}$ e $V_n = bQ^{\frac{3}{5}}$. No caso do artigo, o Q é a própria vazão, enquanto neste sistema, o Q vem da equação de Hagen-Poiseuille, pois temos a agulha servindo como um canal estreito e longo. Portanto, $t_n = kp_d^{-\frac{2}{5}}$ e $v_n = \beta p_d^{\frac{3}{5}}$, onde p_d é a diferença entre a pressão antes do bico e a da bolha. Imediatamente depois do destacamento, como a velocidade da interface é aproximadamente zero (como pode ser visto na figura 4.4), $p_d \approx 0$ e podemos fazer a comparação das pressões p_n do reservatório com as pressões dos gatilhos p_{alto} e p_{baixo} , que são essencialmente propriedades da interface ar-líquido.

Por questão de simplicidade, podemos fazer uma mudança de coordenadas para que todas as pressões p fiquem em termos de $p_{alto} - p_{baixo}$:

$$(p)_{novo} = \frac{p - p_{baixo}}{p_{alto} - p_{baixo}}, \quad (4.6)$$

portanto, p_n se transforma na diferença de pressão entre imediatamente após a saída de n-ésima bolha e p_{baixa} dividida pelo tamanho do intervalo $[p_{alto}, p_{baixo}]$. Assim, temos um critério fácil para saber se a haverá ou não nucleação. Se $p_n < 0$, a pressão está mais baixa que o gatilho e, portanto, o sistema entra na

nucleação. Se $p_n > 0$, o sistema continua no borbulhamento. E também temos que o sistema sai da nucleação com pressão igual a unidade.

Supondo que as quedas de pressão p_d devido à resistência da agulha podem ser escritas como $p_d = p_n + \Delta p$. Admitindo que a pressão na interface ar-líquido siga de maneira próxima a pressão de equilíbrio, o Δp pode ser aproximado pela pressão de equilíbrio média durante o crescimento da bolha. Podemos escrever um mapa unidimensional para as pressões imediatamente após a saída das bolhas:

$$p_{n+1} = \begin{cases} p_n + \frac{\alpha k}{V_0(p_n + \Delta p)^{0.4}} - \frac{P_0}{V_0} \beta (p_n + \Delta p)^{0.6}, & \text{se } p_n > 0 \\ 1 + \frac{\alpha k}{V_0(1 + \Delta p)^{0.4}} - \frac{P_0}{V_0} \beta (1 + \Delta p)^{0.6}, & \text{se } p_n < 0 \end{cases}. \quad (4.7)$$

E o tempo entre bolhas é dado por:

$$t_{n+1} = \begin{cases} \frac{k}{(p_n + \Delta p)^{0.4}}, & \text{se } p_n > 0 \\ \frac{1 - p_n}{\alpha} V_0 + \frac{k}{(1 + \Delta p)^{0.4}}, & \text{se } p_n < 0 \end{cases}. \quad (4.8)$$

Assumindo valores adequados para os parâmetros ajustáveis, reproduzem parte da dinâmica do sistema, como pode ser visto na figura 4.8, na qual foram colocados os parâmetros do sistema para o comprimento de mangueira de 250 cm, sendo alguns deles estimados com ajuda dos dados experimentais: ($\alpha = 6.17 \times 10^{-6} Q$, $p_0 = 370$, $V_0 = 1.88 \times 10^{-5} + 1.32 \times 10^{-5} L$, $\Delta p = 0.630$, $k = 8.59 \times 10^{-8}$, $\beta = 2.17 \times 10^{-2}$). O diagrama de bifurcações experimental com parâmetros correspondentes aos usados na simulação pode ser visto na figura 4.1(G).

4.1.3 Modelo Dinâmico

O modelo na forma de mapa, apesar de reproduzir de maneira razoável os diagramas de bifurcação experimentais, possui vários parâmetros ajustados dos dados experimentais e utiliza muitas hipóteses arbitrárias a respeito da dinâmica de crescimento da bolha. Para diminuir a quantidade de hipóteses e parâmetros ajustados, ou pelo menos clarificar a origem destes em termos de princípios físicos, decidimos modelar diretamente a dinâmica de crescimento destas bolhas. A modelagem da dinâmica também permite que o modelo seja

Figura 4.8 – Diagrama de bifurcações do tempo entre bolhas para o modelo proposto, com os parâmetros do arranjo experimental com comprimento de mangueira de 250 cm. Podemos ver que o modelo reproduz satisfatoriamente a adição de períodos observada no diagrama experimental (figura 4.1(G)).

aprofundado com a adição de efeitos de outros fenômenos não originalmente contemplados nesta modelagem.

Como ponto de partida para a criação do modelo foram feitas as seguintes hipóteses:

- Todas as bolhas tem a mesma forma
- A mangueira contribui somente como um reservatório de ar

As duas hipóteses são assumidas para simplificar o problema e permitir que o sistema de equações final seja composto apenas por equações diferenciais ordinárias.

Como consequência direta da primeira hipótese, a bolha só precisa de uma variável para ser completamente caracterizada, que, por conveniência, será sua altura z . A condição de destacamento da bolha será descrita por uma equação de equilíbrio e, logo após o destacamento, temos um remanescente de bolha com uma altura $z = z_r$ (e $\dot{z} = 0$).

A segunda hipótese nos permite caracterizar o sistema hidráulico anterior ao bico somente com a variável pressão p , assumindo que seu volume V_0 é constante (dado pelo volume da mangueira e um volume fixo que corresponde

ao resto do sistema após o sistema de controle de fluxo) assim como sua temperatura T . Um desenho esquemático do sistema pode ser visto na figura 4.9.

Figura 4.9 – Desenho esquemático dos componentes do modelo, mostrando o reservatório com pressão p e volume V_0 e a bolha com volume V_b e pressão p_b

O modelo usa uma variável adimensional para a altura dada por $\xi = \frac{z}{r_0}$, onde r_0 é o raio interno do bico.

Reservatório

Considerando que o ar entra no reservatório pela válvula a uma taxa Q (em mols por unidade de tempo) e sai do mesmo para a bolha a uma taxa $\dot{V}_b$, onde V_b é o volume da bolha e que o reservatório está a uma temperatura constante T :

$$\dot{p}V_0 = RT\dot{N} = RT \left(Q - \frac{1}{RT} p_b \dot{V}_b \right), \quad (4.9)$$

onde V_0 é o volume do reservatório. Aproximando a pressão da bolha p_b para a pressão do reservatório p ,

$$\dot{p} = \frac{1}{V_0} (RTQ - p\dot{V}_b). \quad (4.10)$$

Forma da Bolha

A forma da bolha foi considerada sempre como uma calota esférica, portanto podendo ser modelada usando uma única variável z , que é o ponto mais alto da interface líquido/ar. A escolha de uma calota esférica se deu pois o número de Eötvös, ou número de ligação (“bond number”)², $E_o = \rho_\ell g r_0^2 / \Gamma$ é,

²considerando ρ_ℓ é a densidade do líquido, g a aceleração da gravidade, r_0 é o raio interno da agulha e Γ a tensão superficial entre líquido e ar.

no pior dos casos, 0.2 (para $r_0 = 1.1$ mm). Isto indica que as forças de tensão superficial são, em geral, dominantes em relação as forças gravitacionais. Portanto, podemos supor que a forma é determinada pela tensão superficial e a bolha é praticamente esférica.

A origem $z = 0$ desta variável é o ponto mais alto do bico. Logo, valores negativos de z indicam que a interface está dentro do bico metálico. Dentro do bico, a interface faz um ângulo θ_0 (ver figura 4.10) com a parede do bico, logo, enquanto $z < z_0 = r_0(\sec \theta_0 - \tan \theta_0)$ a interface encosta a parede interna do bico.

Figura 4.10 – Desenho esquemático do bico e da interface ar-líquido, mostrando a altura z do topo da interface em várias situações, além da altura z_0 devido a curvatura natural da interface.

Quando $z > z_0$, a interface encosta no topo do bico (considerando que o raio interno e externo do bico são aproximadamente iguais). Para todo $z > z_0$, temos somente uma calota esférica possível, cujo raio R é dado por:

$$R = R(z) = \frac{r_0^2 + z^2}{2z}. \quad (4.11)$$

Podemos escrever o raio em função da variável adimensional $\xi = \frac{z}{r_0}$:

$$R(\xi) = r_0 \frac{1 + \xi^2}{2\xi}. \quad (4.12)$$

O volume da bolha acima do bico V_b , definido como o volume de ar da interface acima do topo do bico menos o volume de líquido dentro do bico, é dado por:

$$V_b(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} r_0^3 (\xi + \frac{1}{3} \xi^3), & \xi > \xi_0 \\ \pi r_0^3 (\xi - \xi_0) + \frac{\pi}{2} r_0^3 (\xi_0 + \frac{1}{3} \xi_0^3), & \xi \leq \xi_0 \end{cases}, \quad (4.13)$$

onde $\xi_0 = z_0/r_0$. A derivada temporal do volume da bolha $\dot{V}_b$ é dada por:

$$\dot{V}_b = \begin{cases} \frac{\pi}{2} r_0^3 (1 + \xi^2) \dot{\xi}, & \xi > \xi_0 \\ \pi r_0^3 \dot{\xi}, & \xi \leq \xi_0 \end{cases}, \quad (4.14)$$

e a segunda derivada $\ddot{V}_b$ é dada por:

$$\ddot{V}_b = \begin{cases} \frac{\pi}{2} r_0^3 [(1 + \xi^2) \ddot{\xi} + \xi \dot{\xi}^2], & \xi > \xi_0 \\ \pi r_0^3 \ddot{\xi}, & \xi \leq \xi_0 \end{cases}. \quad (4.15)$$

Dinâmica no interior do bico

Para modelar a dinâmica no interior da agulha metálica, usamos a equação 2.28, que supõe que os perfis de velocidade dentro do cano são estacionários. Podemos justificar o uso da aproximação do perfil de velocidades por dois motivos: o primeiro, é que para os dois raios menores, o parâmetro de não-estacionariedade (“unsteadiness parameter” [Poz97]), $\beta = r_0^2/(\nu_a \langle t_n \rangle)$, é menor que 1, o que quer dizer que o perfil do escoamento é próximo do estacionário; o segundo é pragmático, pois, caso não considerássemos o perfil estacionário, seria necessário resolver, juntamente com o sistema de equações diferenciais ordinárias, uma equação diferencial parcial para determinar o perfil de velocidades e, consequentemente, a queda de pressão dentro da agulha. Isto implicaria um aumento da complexidade do modelo e do custo computacional para resolvê-lo, o que inviabilizaria a construção de diagramas de bifurcação, por exemplo.

Sabendo que a vazão pelo bico causa a variação do volume da bolha, devemos substituir $Q = \dot{V}_b$ na equação 2.28:

$$(p - p_b) = \frac{\rho_a \ell}{\pi r_0^2} \ddot{V}_b + \frac{8\mu_a \ell}{\pi r_0^4} \dot{V}_b, \quad (4.16)$$

onde p_b é a pressão do ar nas proximidades da interface líquido/ar e $\ell = \min(h, h + \xi - \xi_0)$, no qual h é o comprimento da agulha metálica.

Dinâmica fora do bico

Para modelar a dinâmica fora do bico, separamos em dois casos:

- Quando a interface está no topo do bico:

Aproximamos a interface no topo do bico para uma bolha de ar parada em um líquido incompressível infinito, com a mesma área superficial. Escolhemos aproximar a interface por meio da área superficial pois se aproximarmos por uma fração de bolha com o mesmo raio, a equação diferencial apresentaria uma singularidade para $r = r_0$. Neste ponto a derivada do raio da bolha muda de sinal, enquanto a área superficial não apresenta este problema, pois cresce monotonicamente com z . Reescrevendo a equação 2.46 em termos da área superficial $S = 4\pi r^2$:

$$\frac{1}{8\pi}\ddot{S} + \frac{1}{32\pi S}\dot{S}^2 + \frac{2\nu}{S}\dot{S} = \frac{1}{\rho}(p_b - p_e), \quad (4.17)$$

onde p_e é a pressão de equilíbrio:

$$p_e = p_{atm} + p_{hid} + \frac{2\Gamma}{r}. \quad (4.18)$$

Supondo que a bolha no topo do bico seja equivalente a uma bolha parada num líquido infinito com a mesma área superficial, podemos escrever a área superficial da bolha em função da variável ξ :

$$S = \pi r_0^2(\xi^2 + 1). \quad (4.19)$$

Logo as derivadas temporais da área superficial são dadas por:

$$\dot{S} = 2\pi r_0^2 \xi \dot{\xi}, \quad (4.20)$$

$$\ddot{S} = 2\pi r_0^2 (\dot{\xi}^2 + \xi \ddot{\xi}). \quad (4.21)$$

Substituindo estes resultados na equação 4.17:

$$\frac{\rho_\ell r_0^2}{4} \xi \ddot{\xi} + \frac{\rho_\ell r_0^2}{8} \frac{3\xi^2 + 2}{\xi^2 + 1} \dot{\xi}^2 + \frac{4\mu_\ell \xi}{\xi^2 + 1} \dot{\xi} = p_b - p_e \quad (4.22)$$

onde ρ_ℓ é a densidade do líquido e μ_ℓ é a viscosidade dinâmica do líquido.

- Quando a interface está dentro do bico:

Supondo que o fluido, logo após sair do bico se espalha uniformemente por um hemisfério, este precisa cruzar a semi-esfera de raio r_0 centrada no topo do bico de área $2\pi r_0^2$. Dado que a vazão atravessa o bico é $Q = \pi r_0^3 \dot{\xi}$, a velocidade do líquido pelo hemisfério é dada por $v_{hem} = \frac{1}{2} \dot{\xi}$. Resolvendo este sistema de maneira análoga a feita em 2.3.2, mas desta vez para metade do espaço (o fluido se espalha por um ângulo sólido de 2π ao invés de 4π), obtemos:

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho r_0^2 \ddot{\xi} - \frac{r_0^2}{8} \rho \dot{\xi}^2 \quad (4.23)$$

Condição de destacamento

Para definir o momento de destacamento, foi usada uma equação de equilíbrio de forças, simplificada de vários modelos de crescimento de bolhas existentes na literatura, como, por exemplo, em [ZS01]. A equação de forças é dada por:

$$F_{empuxo} \leq F_\Gamma + F_{res} , \quad (4.24)$$

onde F_{empuxo} é a força de empuxo, F_Γ é a força de resistência da tensão superficial e F_{res} é a força de resistência viscosa do líquido. Quando essa desigualdade é violada, a bolha se desprende. A força proveniente da tensão superficial é dada pelo valor máximo ($F_\Gamma = 2\pi r_0 \Gamma$) e a força de resistência viscosa pela lei de Stokes ($F_{res} = 6\pi \mu_\ell r v$, com r sendo o raio da esfera e v sua velocidade). Escrevendo explicitamente a desigualdade (substituindo também $v = \dot{z}$, r usando a equação 4.12 e V_b usando a equação 4.13):

$$\rho_\ell g \frac{\pi}{2} \left(r_0^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \leq 2\pi r_0 \Gamma + 6\pi \mu_\ell \dot{z} \frac{r_0^2 + z^2}{2z} . \quad (4.25)$$

Vale notar que esta equação só faz sentido para $z \geq r_0$. Após o destacamento consideramos que o reservatório mantém sua pressão e que a altura do topo da interface z se torna $z_r = r_0 \xi_r$, ficando a interface parada (isto é, $\dot{z} = 0$)

Equações Diferenciais

- Para $\xi \leq 0$:

A diferença de pressão entre o reservatório e as proximidades da interface ar/líquido é dada por:

$$p = p_b + \frac{\rho_a(h + \xi - \xi_0)}{\pi r_0^2} \dot{V}_b + \frac{8\mu_a(h + \xi - \xi_0)}{\pi r_0^4} \dot{V}_b. \quad (4.26)$$

Usando as relações 4.14, 4.15 e considerando que a pressão no líquido imediatamente acima da interface é dada por $p_l = p_b - \frac{2\Gamma}{r(\xi_0)}$:

$$p = p_l + \frac{2\Gamma}{r(\xi_0)} + \rho_a(H + \xi - \xi_0)r_0\ddot{\xi} + \frac{8\mu_a(h + \xi - \xi_0)}{r_0}\dot{\xi}. \quad (4.27)$$

Aplicando novamente a relação da equação 4.16, mas desta vez entre o topo de interface e o fim do bico (chamando de p_t a pressão no topo do bico):

$$\begin{aligned} p - \frac{2\Gamma}{r(\xi_0)} &= p_t + [\rho_\ell|\xi - \xi_0| + \rho_a(h + \xi - \xi_0)]r_0\ddot{\xi} \\ &+ \frac{8}{r_0}[\mu_a(h + \xi - \xi_0) + \mu_\ell|\xi - \xi_0|]\dot{\xi}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Como a pressão no topo do bico p_t se relaciona com a pressão no infinito (pressão longe do bico mas a mesma altura) p_∞ pela relação da equação 4.23, substituindo $p_e = p_\infty + \frac{2\Gamma}{r(\xi_0)}$:

$$\begin{aligned} p - p_e &= [\rho_\ell|\xi - \xi_0| + \frac{\rho_\ell r_0}{2} + \rho_a(h + \xi - \xi_0)]r_0\ddot{\xi} \\ &+ \frac{8}{r_0}[\mu_a(h + \xi - \xi_0) + \mu_\ell|\xi - \xi_0|]\dot{\xi} - \frac{r_0^2}{8}\rho\dot{\xi}^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

- Para $\xi \geq \xi_0$:

Fazendo substituições análogas as feitas nas equações 4.26 e 4.27, a diferença de pressão entre o reservatório e o topo do líquido é dada por:

$$p = p_b + \frac{\rho_a h}{2}r_0[(1 + \xi^2)\ddot{\xi} + \xi\dot{\xi}^2] + \frac{4\mu_a h}{r_0}(1 + \xi^2)\dot{\xi}. \quad (4.30)$$

Substituindo a pressão nas proximidades da superfície da bolha p_b e usando a relação na equação 4.22:

$$\begin{aligned}
p - p_e = & \left[\frac{\rho_\ell r_0^2}{4} \xi + \frac{\rho_a h r_0}{2} (1 + \xi^2) \right] \ddot{\xi} + \left[\frac{\rho_\ell r_0^2}{8} \frac{3\xi^2 + 2}{\xi^2 + 1} + \frac{\rho_a h r_0}{2} \xi \right] \dot{\xi}^2 \\
& + \left[\frac{4\mu_\ell \xi}{\xi^2 + 1} + \frac{4\mu_a h}{r_0} (1 + \xi^2) \right] \dot{\xi}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

onde p_e é a pressão de equilíbrio (equação 4.18)

- Para a região intermediária $0 < \xi < \xi_0$, foi feita uma interpolação linear entre os outros dois regimes. Esta interpolação se fez necessária para evitar possíveis problemas oriundos da descontinuidade do fluxo.

Escrevendo as equações diferenciais explicitamente:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{1}{V_0} (RTQ - p\dot{V}_b) \\
\ddot{\xi} &= \frac{1}{A(\xi)} [(p - p_e) - B(\xi)\dot{\xi} - C(\xi)\dot{\xi}^2], \tag{4.32}
\end{aligned}$$

onde $\dot{V}_b$ é dado pela equação 4.14 e os coeficientes são:

$$A(\xi) = \begin{cases} \frac{r_0^2}{4} [\rho_\ell \xi + 2\rho_a h(\xi^2 + 1)], & \xi \geq \xi_0 \\ r_0^2 [\rho_\ell (\frac{1}{2} - \xi + \xi_0) + \rho_a (h + \xi - \xi_0)], & \xi \leq 0 \\ A(0) + \frac{A(\xi_0) - A(0)}{\xi_0} \xi, & 0 < \xi < \xi_0 \end{cases} \tag{4.33}$$

$$B(\xi) = \begin{cases} 4[\mu_\ell \frac{\xi}{\xi^2 + 1} + \mu_a h(\xi^2 + 1)], & \xi \geq \xi_0 \\ 8[-\mu_\ell (\xi - \xi_0) + \mu_a (h + \xi - \xi_0)], & \xi \leq 0 \\ B(0) + \frac{B(\xi_0) - B(0)}{\xi_0} \xi, & 0 < \xi < \xi_0 \end{cases} \tag{4.34}$$

$$C(\xi) = \begin{cases} r_0^2 [\frac{\rho_\ell}{8} \frac{3\xi^2 + 2}{\xi^2 + 1} + \rho_a h \xi], & \xi \geq \xi_0 \\ -\frac{\rho_\ell}{8} r_0^2, & \xi \leq 0 \\ C(0) + \frac{C(\xi_0) - C(0)}{\xi_0} \xi, & 0 < \xi < \xi_0 \end{cases} \tag{4.35}$$

Discussões detalhadas sobre as influências dos parâmetros no modelo foram feitas no artigo [PCS12], presente no apêndice A.

Simulações

O sistema de equações foi integrado usando Runge-Kutta de ordem 4 e 5 de passo variável (par Dormand-Prince [DP80]), com a detecção do instante que a desigualdade 4.25 é desobedecida (condição de destacamento) para a interrupção da integração. Após a interrupção, as condições são reajustadas de $(p, \zeta, \dot{\zeta})$ para $(p, \zeta_r, 0)$ (para fazer os diagramas e bifurcação, os instantes destes eventos também são gravados). Feita a mudança no estado do sistema, a integração é reiniciada.

Para fazer a simulação foram usados os valores medidos ou tabelados das grandezas físicas, apresentados no artigo [PCS12] e reproduzidos na tabela 4.1. Dos parâmetros usados nas simulações, apenas as alturas ζ_0 e ζ_r foram ajustadas.

Raios das agulhas	r_0	$0.2, 0.5, 1.1 \times 10^{-3} \text{ m}$
Comprimento das mangueiras	L	$0.30, 0.88, 1.80 \text{ m}$
Comprimento das agulhas	h	$2.0, 2.9 \times 10^{-2} \text{ m}$
Seção transversal da mangueira	A	$1.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
Volume adicional	V_{ad}	$1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$
Volume do reservatório	V_0	$V_{ad} + A \cdot L$
Densidade do ar	ρ_a	1.22 kg/m^3
Viscosidade cinemática do ar	ν_a	$1.52 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosidade dinâmica do ar	μ_a	$1.86 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Densidade do líquido	ρ_ℓ	1210 kg/m^3
Viscosidade cinemática do líquido	ν_ℓ	$3.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosidade dinâmica do líquido	μ_ℓ	$3.6 \times 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Tensão superficial da interface líquido-ar	Γ	$6.7 \times 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{m}$
Aceleração gravitacional	g	9.78 m/s^2
Pressão atmosférica	p_{atm}	92400 Pa
Profundidade do bico borbulhador	H	7.5 cm
Altura do bico	H_b	$\sim 5 \text{ cm}$
Temperatura	T	293 K

Tabela 4.1 – Parâmetros físicos e geométricos do experimento, com suas respectivas notações.

Para todas as simulações, o valor de ζ_0 foi fixado em 0.3. Este parâmetro tem pouca influência na evolução do sistema, e sua origem está relacionada com o aparecimento de uma singularidade em $z = 0$ na dinâmica de crescimento (pois $r \rightarrow \infty$ nesta altura). O parâmetro ζ_r foi ajustado para reproduzir os resultados experimentais da melhor maneira possível, mantendo as restrições que $\zeta_r \sim 1$. Ele assumiu valores diferentes para cada raio usado: $\zeta_r = 1.4$ para $r_0 = 0.2\text{mm}$, $\zeta_r = 1.9$ para $r_0 = 0.5\text{mm}$, $\zeta_r = 0.5$ para $r_0 = 1.1\text{mm}$.

Com estes valores dos parâmetros das equações diferenciais, foram feitas as simulações dos diagramas de bifurcação para os mesmos raios internos e comprimentos de mangueira obtidos experimentalmente.

Na figura 4.11, são mostrados os diagramas de bifurcação simulados para o bico com $r_0 = 0.2\text{ mm}$ equivalentes aos diagramas experimentais da figura 4.2. Os diagramas simulados reproduzem as cascatas de adição de período. A mudança da altura da agulha afeta o diagrama experimental e diagrama simulado do mesmo modo, isto é, o diagrama é deslocado como um todo para vazões menores. O papel do tamanho da mangueira também é reproduzido pela simulação, pois as vazões para as quais as adições de período acontecem são reduzidas, mas o valor da vazão crítica Q_c , na qual temos o aparecimento do período 1 sem nucleação, é mantido constante, o que implica em um aumento do tamanho das janelas de maior período.

Os diagramas de bifurcação simulados para os dois raios maiores correspondentes aos experimentais presentes na figura 4.3, estão na figura 4.12. Estes diagramas reproduzem o desaparecimento das cascatas de adição de período (e deslocamento para maiores valores de Q) com o aumento do raio interno.

Com o aumento do raio interno, parte das hipóteses feitas para construir o modelo, como, por exemplo, a hipótese das bolhas serem esféricas e a aplicação de transientes de pressão usando o perfil estacionário de Hagen-Poiseuille, começam a se tornar menos plausíveis. Isso faz com que as simulações comecem a apresentar diferenças de comportamento, como no caso de $r_0 = 0.5\text{mm}$ (figura 4.12(a)), que na simulação não apresenta período 3. Porém muitos dos comportamentos ainda são reproduzidos, como a cascata de duplicação de períodos que aparece quando reduzimos o valor de Q a partir do Q_c . Para o bico de $r_0 = 1.1\text{mm}$, foi necessário colocar o valor de ζ_r muito mais baixo que para os outros raios para que tivéssemos somente período 1 para pequenas vazões.

Figura 4.11 – Diagramas de bifurcação simulados dos bicos com agulhas de raio $r_0 = 0.2$ mm.

Todavia, o valor usado é fisicamente plausível. É interessante comentar que as bifurcações que aparecem para estas pequenas vazões, quando ξ_r assume valores maiores que o usado, não estão relacionadas com a cascata de adição de períodos.

Também foram feitas simulações dos espaços de fases, apresentadas na figura 4.13. que podem ser comparadas com os espaços experimentais, presentes na figura 4.4. Os valores das vazões simuladas foram escolhidos para reproduzir o comportamento experimental, o que fez com que, neste caso, o

Figura 4.12 – Diagramas de bifurcação simulados para as agulhas de raios $r_0 = 0.5\text{mm}$ e $r_0 = 1.1\text{mm}$.

valor do Q simulado fosse um pouco menor que o usado experimentalmente. Apesar disso, os atratores simulados são bastante similares aos experimentais, com a maior diferença sendo que a primeira bolha para o atrator de período 4 (figura 4.4(c)) é muito maior que as seguintes. Isto provavelmente se deve ao efeito da circulação provocada pela saída da bolha anterior que acelera o destacamento da bolha em formação. Logo, a bolha que se forma imediatamente depois de uma nucleação cresce mais devagar, pois a bolha anterior já está distante e não afeta seu crescimento. Esta hipótese também explica o volume menor da segunda bolha depois da nucleação, quando comparada com a terceira e a quarta.

Tirando a segunda bolha, a simulação (figura 4.13(c)), reproduz a tendência de quanto maior o número da bolha, ou seja, quão mais distante da última nucleação ela está, menor seu volume, apesar dessa reprodução ser em menor grau que o equivalente experimental. Esta diferença talvez possa ser reduzida com uma melhora na condição de destacamento ou com a inserção de uma dinâmica de destacamento diferente.

Mapa de Poincaré

Como, após o destacamento de uma bolha, o sistema simulado vai necessariamente para um ponto do espaço de fases sobre uma reta com ξ e $\dot{\xi}$ fixos (respectivamente, ξ_r e 0), qualquer órbita após o primeiro destacamento e, conseqüentemente, todos os atratores estão limitados a uma superfície dentro

Figura 4.13 – Séries temporais (A-C) e espaços de fases p , V_b (a-c) simulados usando os mesmos parâmetros dos espaços presentes na figura 4.4, isto é, $r_0 = 0.2$ mm, $h = 20$ mm, $L = 30$ cm e três diferentes valores da vazão Q : (A-a) Período 1 com nucleação, $Q = 10$ ml/min; (B-b) período 1 sem nucleação, $Q = 40$ ml/min; (c) período 4 com nucleação, $Q = 30$ ml/min.

do espaço e parâmetros tridimensional. Portanto, ao fazermos uma seção de Poincaré deste fluxo, obtemos um mapa unidimensional.

Por conveniência, fizemos a seção de Poincaré na própria reta de reinício das simulações, pois precisamos interromper a simulação para reiniciarmos as condições iniciais. A partir da escolha de condições iniciais sobre esta reta, conseguimos construir o mapa de retorno da variável p , relacionando os p_{n+1} com seus antecessores imediatos p_n .

No artigo [PCS12], presente no apêndice A, discutimos a forma do mapa

de primeiro retorno, separando-o em 3 regiões: um patamar que p_{n+1} é praticamente constante com relação a p_n ; uma região que p_{n+1} varia rapidamente, parecendo muitas vezes descontínuo em relação a p_n ; e uma região em que p_{n+1} cresce de forma aproximadamente linear com relação a p_n , com coeficiente angular ligeiramente menor que 1.

Tanto a existência do patamar quanto o fato da região intermediária ter um tamanho pequeno aparecem porque a dinâmica do sistema pode ser separada em duas, cada uma com um tempo característico: uma dinâmica rápida, em $\zeta, \dot{\zeta}$, e uma dinâmica lenta, em p (um cenário análogo a um neurônio “burrster”). Esta dinâmica lenta leva a dinâmica rápida para dois estágios: um no qual o sistema rápido está parado, que é a nucleação, e outro no qual o sistema rápido está soltando bolhas continuamente, que é o borbulhamento. O tamanho desta região intermediária, na qual não está claro que temos uma nucleação ou borbulhamento, depende da relação entre as duas velocidades. Uma discussão mais detalhada sobre como os parâmetros físicos do sistema afetam estas velocidades, assim como o sistema como um todo, é feita no artigo [PCS12], na seção III.D, a partir da discussão de um modelo simplificado.

No artigo, também mostramos 3 mapas de retorno e seus respectivos atratores (figura 10 do mesmo), construídos apenas variando a vazão entre eles. Um modo interessante de verificar o efeito da variação da vazão nos mapas de retorno consiste em superpor os três mapas. Apresentamos esta superposição na figura 4.14. Olhando para a figura, podemos ver que o aumento da vazão têm três efeitos:

1. O mais pronunciável é o crescimento dos valores de p_{n+1} para um mesmo p_n : para valores de p_n no patamar ou na região linear. Por exemplo, podemos ver que a diferença entre as curvas vermelha ($Q=25$ ml/min) e verde ($Q=22$ ml/min) da figura 4.14 é de cerca de 3 Pa, e entre a verde e a azul ($Q=10$ ml/min) é de cerca de 14 Pa.
2. Podemos ver também que o valor de p_n no qual a região intermediária começa (ou seja, a região de rápida variação do p_{n+1}) diminui conforme aumentamos o valor de Q . É possível verificar isso na figura 4.14 comparando a parte vertical dos três mapas, principalmente o de menor vazão (azul) com os de maior vazão (verde e vermelho).

Figura 4.14 – Mapas de retorno das pressões simuladas, para $r_0 = 0.2$ mm, $h = 29$ mm, $L = 180$ cm, $z_0 = 0.3r_0$ e $z_\ell = 1.4r_0$, para 3 vazões diferentes: $Q = 10$ ml/min (azul), $Q = 22$ ml/min (verde) e $Q = 25$ ml/min (vermelho). Estes mapas mostram a evolução do sistema de uma condição de período baixo, $Q = 10$ ml/min tem período 3, para um período alto, $Q = 22$ ml/min tem período 12, e finalmente para um período 1 sem nucleação ($Q = 25$ ml/min).

3. A forma da região intermediária também é mudada. Ela vai se tornando mais suave nos arredores do mínimo de p_{n+1} conforme aumentamos a vazão.

Como a pressão p_n no instante de saída da bolha determina totalmente a órbita para uma certa combinação de parâmetros de controle, o tempo que esta bolha leva para se formar e se destacar, que é o tempo entre bolhas T_n , é uma função da pressão p_n . Na figura 4.15, mostramos o gráfico dos T_n em função de p_n , para os três mapas de retorno apresentados na figura 4.14. Podemos ver que o tempo entre bolhas pode ser separado em 3 partes: a primeira é a parte com nucleação, onde o tempo entre bolhas decresce linearmente com a pressão inicial; a segunda é uma parte de transição, onde o tempo entre bolhas varia rapidamente; e a terceira parte é a do borbulhamento contínuo, no qual os tempos entre bolhas variam lentamente. Podemos ver pela figura

que os tempos entre bolhas na parte de borbulhamento contínuo praticamente não são afetados pela vazão, enquanto os tempos durante a nucleação variam muito.

Figura 4.15 – Tempos de formação das bolhas T_n como função da pressão inicial p_n para o sistema simulado. Os parâmetros dos três gráficos são idênticos aos usados na figura 4.14.

Os gráficos da figura 4.14 também nos permitem concluir que o tempo entre bolhas T_n , apesar de não ser uma das variáveis dinâmicas de nosso modelo, pode ser considerado uma variável dinâmica adequada (pelo menos para essa combinação de parâmetros), pois, como existe uma bijeção entre T_n e p_n , podemos escrever $T_{n+1} = f(T_n)$.

4.2 Um bico com perturbação sonora

Uma outra aplicação possível deste modelo é a de simular a dinâmica de borbulhamento quando o sistema é sujeito a uma perturbação sonora, que foi estudado experimentalmente em [TS01, Tuf00, Pia07, PCT09] e modelado com maiores detalhes em [PCT09]. A geometria do bico borbulhador usado nesses sistemas é diferente da que motivou o modelo e, portanto, não satisfaz parte das hipóteses usadas para deduzi-lo. Porém, usamos os parâmetros geométricos do bico em questão ($r_0 = 1.1$ mm e $L = 10$ mm) com $\xi_r = 0.5$, como no bico metálico mais largo. Para simular a perturbação sonora, colocamos um

novo termo na pressão de equilíbrio, relativo a esta perturbação:

$$p_{eq}^{som} = p_{eq} + A \cos(2\pi f_{som} t), \quad (4.36)$$

onde f_{som} é a frequência da perturbação sonora e A sua amplitude. A figura 4.16 mostra um diagrama de bifurcação experimental, com $f_{som} = 139\text{Hz}$, e um diagrama simulado, com $A = 10\text{Pa}$.

A simulação reproduz satisfatoriamente o diagrama de bifurcação experimental, a menos dos valores das vazões em que ocorrem as bifurcações. Para compensar este problema, foram usados intervalos de fluxos de ar na simulação tais que os tempos médios entre bolhas $\langle T_n \rangle$ simulados fossem iguais aos experimentais. Podemos ver isso ao olhar para as duas regiões com travamento de frequência (por volta de 50 ms e 43 ms), que correspondem a 7 e 6 vezes o período da onda sonora, e também aos períodos 2 que aparecem no meio das regiões não periódicas.

Durante a revisita de um bico sem agulha com perturbação sonora, que foi feita para testar o tubo borbulhador reformado e os novos sistemas de aquisição, descobrimos um fenômeno não documentado para este sistema: ele possui biestabilidade para pequenos fluxos de ar e grandes volumes sonoros. Uma consequência desta biestabilidade pode ser vista na figura 4.17(A), que apresenta dois diagramas de bifurcação experimentais com $f_{som} = 130\text{Hz}$, um feito com aumentando o fluxo de ar (vermelho) e outro diminuindo (azul). Ao analisarmos estes dois diagramas, podemos ver a presença de histerese característica de sistemas com multiestabilidade.

Este novo fenômeno se mostrou um interessante teste para o modelo dinâmico, e o resultado pode ser visto na figura 4.17(B). Nesta figura, temos dois diagramas de bifurcação simulados, com $A = 27\text{Pa}$ e f_{som} igual ao experimental. Os diagramas seguem a mesma definição de cor que os diagramas experimentais presentes na figura 4.17(A), isto é, vermelho fluxo crescente e azul decrescente. Nesta simulação podemos ver claramente a mesma histerese presente no sistema experimental. Portanto, podemos concluir que o modelo desenvolvido para simular as adições de período reproduz fielmente a dinâmica de sincronização entre o bico sem agulha e a perturbação sonora, a menos dos valores exatos do parâmetro Q em que estas sincronizações ocorrem. É interessante notar que a biestabilidade ocorre no mapa do círculo de Arnold

Figura 4.16 – Diagramas de bifurcação experimental (A) e simulado (B) para borbulhamento do bico sem agulha metálica com perturbação sonora $f_{som}=139\text{Hz}$ e amplitude da perturbação simulada de $A = 10\text{Pa}$.

(equação 2.16) para $\epsilon > 1$ (como pode ser visto em [PG82]), que foi usado para modelar o sistema com perturbação sonora em [PCT09].

4.3 Interação entre Bolhas

4.3.1 Bicos Solitários

A primeira verificação feita no novo sistema foi se a dinâmica do borbulhamento nos bicos desse sistema possuía, quando os bicos borbulhavam sozinhos, o mesmo comportamento do borbulhamento do sistema de um bico

Figura 4.17 – Diagramas de bifurcação experimental (A) e simulado (B) com histerese, mostrando biestabilidade para o borbulhamento sem agulha metálica com perturbação sonora de frequência $f_{som} = 130\text{Hz}$ e $A = 27\text{Pa}$. Os diagramas em vermelho foram feitos com o fluxo de ar Q crescente e os azuis com o fluxo decrescente.

borbulhador. Esta verificação se fez necessária pois os bicos não estão mais centralizados no tubo. Como teste, foram usadas as seringas sem agulhas metálicas, o que significa que os borbulhamentos deveriam estar em um regime com período 1 para todo o intervalo de vazões usado. Este teste também serviu para verificar se os tempos entre bolhas eram semelhantes para uma mesma vazão, isto é, se as geometrias das seringas poderiam ser consideradas iguais.

Para tal experimento, um dos bicos foi lacrado e a vazão do outro bico foi variada lentamente e com os tempos entre bolhas foi feito um diagrama de bifurcações. Os diagramas, feitos para cada um dos bicos, podem ser vistos na

figura 4.18. A partir desta figura, notamos que o borbulhamento com somente um bico tem um regime de período 1 para todo o intervalo estudado e os tempos entre bolhas são praticamente iguais, excetuando para vazões muito baixas.

Figura 4.18 – Diagramas de bifurcação para os bicos borbulhando solitários dentro do tubo borbulhador, com o bico 1 em preto e o bico 2 vermelho

Com estes dados dos bicos solitários, podemos verificar como os tempos entre bolhas e, conseqüentemente, as taxas de borbulhamento variam com a vazão. Termos este resultado é interessante pois as frequências naturais de oscilação ω_0 (ou os períodos T_0) são parâmetros importantes no contexto de sincronização de osciladores acoplados, como temos os fluxos de ar Q como parâmetros de controle, é de vital interesse que saibamos como as frequências naturais de oscilação dependem do parâmetro de controle.

Com os dados dos tempos entre bolhas T_n em função de Q , fizemos um ajuste do tipo $T_n = a \times Q^b$, como o feito em [TS02, PCT09], pois a geometria dos bicos borbulhadores e as vazões usadas no experimento de dois bicos são similares as usadas nos bicos borbulhadores estudado nestes artigos. Entretanto, para os valores de $Q < 40$ ml/min, o ajuste usando uma lei de potência desvia bastante dos dados. Como para estes valores temos discrepâncias grandes inclusive nos valores dos T_n dos dois bicos, decidimos usar no ajuste somente os pontos tais que $Q \geq 40$ ml/min. O resultado deste ajuste para o bico 1 foi $T_n(Q) = 0.41 \times Q^{-0.48}$, para T_n em segundos e Q em ml/min, enquanto

para o bico 2 foi $T_n(Q) = 0.44 \times Q^{-0.51}$.

4.3.2 Diagramas de Bifurcação

Para fazer os diagramas de bifurcação com os dois bicos borbulhando, medimos os tempos entre bolhas dos dois bicos variando lentamente a vazão do segundo bico Q_2 e mantendo constante a vazão do primeiro Q_1 . Com estes tempos entre bolhas, fizemos os diagramas de bifurcação, como os que podem ser vistos na figura 4.19, para $Q_1 = 60\text{ml/min}$ (A) e $Q_1 = 120\text{ml/min}$ (B), com a altura da coluna líquida, acima do bico, de $H = 100\text{mm}$.

Figura 4.19 – Diagramas de bifurcação dos dois bicos para altura da solução acima dos bicos constante em $H = 100\text{mm}$ e a vazão do bico 1 constante em (A) $Q_1 = 60\text{ml/min}$ e (B) $Q_1 = 120\text{ml/min}$.

Observando os diagramas, a janela de período 1 é facilmente identificável nas proximidades de $Q_1 = Q_2$. Além disso, o tamanho desta janela periódica é maior quanto maior o valor de Q_1 , pois na figura 4.19(A), temos a janela no intervalo [50, 65] ml/min enquanto na figura 4.19(B), a janela está no intervalo [85, 140] ml/min, sendo a janela para $Q_1 = 120$ ml/min mais que 3 vezes maior que para $Q_1 = 60$ ml/min. Podemos ver também janelas periódicas de maior período, como por exemplo no gráfico da figura 4.19(A), para Q_1 entre 130 e 140 ml/min, o borbulhamento no bico 1 está em período 2 e no bico 2 em período 3 e, além disso, os valores médios destes borbulhamentos ($\langle T_n^{(1)} \rangle = 60$ ms e $\langle T_n^{(2)} \rangle = 40$ ms) sugere que temos um travamento de frequência 2:3 dos borbulhamentos nos dois bicos. As outras janela periódicas repetem este padrão, como, por exemplo, na figura 4.19(B), em $Q_2 = 60$ ml/min, temos período 3 no bico 2 e período 4 no bico 1, com uma relação de frequências de 3:4.

Os tamanhos das bandas não periódicas nos dois diagramas da figura 4.19 também mostram um comportamento interessante. Para descrever este comportamento, definimos a dispersão dos tempos entre bolhas para um determinado valor dos parâmetros como sendo

$$\delta T = \max(T) - \min(T). \quad (4.37)$$

Esta dispersão, no gráfico da figura 4.19(A), para $Q_2 = 41$ ml/min, é de 8 ms para o borbulhamento do bico 1 e 14 ms para o borbulhamento do bico 2. Mas para $Q_2 = 90$ ml/min, a situação se inverte, no bico 1 temos $\delta T = 14$ ms e no bico 2 $\delta T = 7$ ms, logo, podemos inferir que quando aumentamos a vazão de um dos bicos, a dispersão δT diminui neste bico e aumenta no outro bico. Este fenômeno é um pouco mais difícil de ser notado no gráfico da figura 4.19(B), pois para praticamente metade do intervalo do parâmetro Q_2 (de 85 até 140 ml/min) temos período 1 no borbulhamento dos dois bicos.

Durante as medidas preliminares, pudemos perceber que a variação da altura da solução acima dos bicos altera, de forma considerável, os diagramas de bifurcação. Um exemplo de diagramas com as mesmas vazões, mas com diferentes altura podem ser vistos na figura 4.20. Podemos ver que as janelas de período 1 aparecem na mesma região de vazão (por volta de $Q_2 = 105$ ml/min) mas não possuem o mesmo tamanho, pois para $H = 30$ mm o intervalo de vazão é da ordem de 5 ml/min enquanto para $H = 120$ mm, o intervalo é da

ordem de 35 ml/min. Outro fenômeno que é possível de observar é que dentro destas janelas, o tempo entre bolhas $T_n^{(1)} = T_n^{(2)}$ apresenta instabilidades e mudanças repentinas, como o presente na figura 4.20(A). Este fenômeno é analisado e discutido de maneira mais detalhada na seção 4.3.6.

Figura 4.20 – Diagramas de bifurcação dos dois bicos para a vazão do bico 2 constante $Q_2 = 105$ ml/min e alturas do líquido acima do bico de (A) $H = 120$ mm; e (B) $H = 30$ mm.

Além do tamanho da janela periódica de período 1, podemos ver que as dispersões δT , para um mesmo valor da vazão Q_1 , são bastante diferentes nos dois gráficos da figura 4.20. Para $Q_1 = 120$ ml/min, por exemplo, $\delta T \approx 9$ ms para $H = 120$ mm e $\delta T \approx 1.5$ ms para $H = 30$ mm. Também podemos ver que o valor de δT depende dos valores das duas vazões, pois, para $Q_1 = 60$ ml/min e $H = 120$ mm, $\delta T^{(1)}$ vale por volta de 12 ms enquanto $\delta T^{(2)}$ vale por volta de 6 ms. Já para $Q_1 = 165$ ml/min, $\delta T^{(1)} \approx 5$ ms e $\delta T^{(2)} \approx$

11 ms. Este resultado reforça a ideia de que a dispersão dos tempos entre bolhas $\delta T^{(i)}$ aumenta com o aumento da vazão do outro bico (pois $\delta T^{(2)}(Q_1 = 60) < \delta T^{(2)}(Q_1 = 165)$) e diminui com o aumento da vazão do próprio bico (pois $\delta T^{(1)}(Q_1 = 60) > \delta T^{(1)}(Q_1 = 165)$). O aumento desta dispersão dos tempos entre bolhas junto com o aumento da coluna líquida, sugere que a interação entre os borbulhamentos dos dois bicos aumenta com a altura, pois no caso sem interação (ou também com travamento 1:1) temos que $\delta T < 0.2$ ms.

Também podemos ver nos diagramas da figura 4.20 que as janelas periódicas com travamento de frequência desapareceram (ou pelo menos diminuíram muito) para o diagrama de altura da coluna líquida acima dos bicos $H = 30$ mm (figura 4.20(B)). Com efeito, somente é possível identificar com clareza o travamento de frequências 1:1; e conseguimos identificar uma região periódica para $Q_1 = 58$ ml/min, que, pela razão das taxas de borbulhamento médias, identificamos como sendo um travamento de frequência 3:4. Logo, como os travamentos de frequência também somem com alturas de solução menores, nossa hipótese que a interação aumenta com a altura da solução é reforçada. Na seção 4.3.5, esta dependência é estudada com mais detalhes.

4.3.3 Análise da Periodicidade

Para estudar melhor as regiões periódicas encontradas nos diagramas de bifurcação, coletamos os tempos entre bolhas e os sinais dos microfones por 20s para 1681 diferentes combinações de Q_1, Q_2 mantendo a altura da solução constante, com $H = 90$ mm. Estas combinações foram obtidas criando uma rede quadrada com $Q_{max} = 180$ ml/min, $Q_{min} = 60$ ml/min e passo de $\Delta Q = 3$ ml/min. A figura 4.21, mostra alguns dos atratores encontrados.

Para agilizar a determinação da periodicidade deste grande número de atratores, fizemos inicialmente uma determinação automática dos períodos dos atratores. O método automático consiste de dois passos:

1. Verificar o desvio-padrão dos tempos entre bolhas T_n , e, caso o desvio-padrão for menor que $\sigma_{max} = 150\mu s$, consideramos que o atrator está em período 1. O valor de σ_{max} , consiste no maior desvio-padrão que um atrator pode ter para ainda ser considerado de período 1 e está relacionado com a intensidade de ruído que o experimento está submetido;

Figura 4.21 – Exemplos de atratores experimentais obtidos, todos usando $H = 90\text{mm}$: o borbulhamento no bico 1 está em período 4 (A) enquanto no bico 2 está em período 3 (a), para $Q_1 = 140.8\text{ml/min}$ e $Q_2 = 76.0\text{ml/min}$; Período 14 no bico 1 e 15 no bico 2, para $Q_1 = 86.9\text{ml/min}$ e $Q_2 = 104.0\text{ml/min}$; e atratores não periódicos no borbulhamento dos dois bicos, para $Q_1 = 131.8\text{ml/min}$ e $Q_2 = 188.0\text{ml/min}$.

2. Calcular a autocorrelação (normalizada) $R(k)$ das séries de tempos entre bolhas T_n , até um valor máximo de atraso k (neste caso, $k = 10$):

$$R(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \frac{(T_i - \bar{T}) \cdot (T_{i+k} - \bar{T})}{\sigma_T^2} \quad (4.38)$$

onde N é o número total de dados, $\bar{T}$ é o valor médio da série dos T_n e σ_T^2 é a variância. A autocorrelação é usada porque uma órbita periódica de período k , na ausência de ruído, tem $R(k) = 1$, pois $T_{n+k} = T_n$. Os valores da autocorrelação calculados são comparados com um valor de corte previamente definido ($R_{max} = 0.9$). Com isso a periodicidade é definida como o menor k que satisfaz a condição $R(k) \geq R_{max}$. Dois exemplos de autocorrelação são apresentados na figura 4.22, um para o caso periódico (em preto) quanto não periódico (em verde).

Figura 4.22 – Exemplo de funções de autocorrelação $R(k)$ para as séries experimentais dos atratores apresentados na figura 4.21. Em preto temos a autocorrelação para o atrator periódico de período 4 (atrator da figura 4.21(A)) e em verde para um atrator não periódico (atrator da figura 4.21(C)).

Após o método automático ser aplicado, os mapas de primeiro retorno de todos os atratores foram verificados, juntamente com os valores de periodicidade atribuídos pelo sistema automático. Esta verificação permitiu reclassificar atratores não-periódicos identificados como período 1 e atratores de período maior que k_{max} (como o da figura 4.21(B-b)), entre outras correções.

Com os resultados da verificação de periodicidade, foi possível criar espaços de parâmetros de periodicidade dos atratores, que podem ser vistos na figura 4.23. Nota-se, primeiramente, que os dois gráficos são praticamente iguais a menos das cores das faixas periódicas, isto é, sempre quando um dos dos borbulhamentos está em um regime periódico, o outro também está. A

única diferença é que eles estão em períodos diferentes, em geral seguindo a relação das frequências de borbulhamento, isto é, quando a razão das frequências é $4/3$, um deles está em período 4 e o outro 3. A única situação em que eles estão no mesmo período é a região próxima a diagonal $Q_1 = Q_2$ na qual o borbulhamento nos dois bicos têm a mesma frequência.

Outra característica do sistema que os gráficos da figura 4.23 mostram é a simetria do sistema em relação Q_1 e Q_2 , isto é, se, por exemplo, transpormos o gráfico da figura 4.23(A), fazendo o eixo x virar Q_2 e o y , Q_1 , obtemos um gráfico bastante semelhante ao gráfico da figura 4.23. Esta simetria indica que os dois bicos possuem geometrias suficientemente próximas para podermos considerá-los, em primeira aproximação, iguais.

4.3.4 Análise da sincronização dos borbulhamentos

Tanto os diagramas de bifurcação quanto os resultados de periodicidade indicam que o sistema de dois bicos tem travamentos de frequência e sincronizações de fase, tanto usuais quanto de ordem superior (sincronizações tipo $n : m$).

Para fazermos a análise da sincronização, usamos os sinais dos microfones. Um exemplo de sinal de microfone pode ser visto na figura 4.24. Os sinais dos microfones tem um comportamento mais complexo que o do tempo entre bolhas sugere, pois o sinal do microfone possui picos de sinal para cada bolha emitida. Este comportamento é reflexo da oscilação de volume que a bolha sofre um pouco antes de ser liberada, como apresentado na seção 4.1.1. Este comportamento nos fez escolher por definir a fase por meio de um mapa de Poincaré, usando o maior pico de sinal do microfone como $\theta = 2\pi k$. Para definir as fases intermediárias, foi feita uma interpolação linear, isto é, com os $\theta(t_k) = \theta_k = 2\pi k$, calculamos os valores da fase nos instantes diferentes dos t_k por meio da fórmula:

$$\theta(t) = 2\pi k + \frac{2\pi}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k), \text{ para } t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (4.39)$$

Neste ponto é importante comentar que escolhemos fazer um mapa a partir dos microfones, ao invés de usar os tempos entre bolhas vindos dos fotodiodos, pois a acurácia da fase estimada a partir dos sinais dos fotodiodos depende

Figura 4.23 – Espaços de parâmetros (Q_1, Q_2) experimentais de periodicidade P dos bicos 1 (A) e 2 (B) para $H = 90\text{mm}$. As cores dos gráficos indicam as periodicidades encontradas para os respectivos valores dos parâmetros Q_1, Q_2 e 8+ significa que o período encontrado foi 8 ou maior.

Figura 4.24 – Nos gráficos (A) e (B) são apresentados exemplos dos sinais dos microfones em azul, para o bico 1 (A) e 2 (B), em vermelho as posições dos picos identificados, com seus respectivos índices e em verde o valor da fase de cada borbulhamento, estimada usando a equação 4.39. Os valores de parâmetros usados foram $Q_1 = 62.9$ ml/min, $Q_2 = 178.7$ ml/min e $H = 90$ mm. Nos gráficos (C) e (D) são apresentadas duas diferenças de fase generalizadas: $\phi_{3:2}$ (C) e $\phi_{4:3}$ (D), calculadas a partir das fases obtidas nos gráficos (A) e (B). Para os parâmetros usados, temos uma sincronização de fase 3:2, logo a fase generalizada correspondente a sincronização, isto é, $\phi_{3:2}$, se mantém aproximadamente constante (C), enquanto para outra combinação de n, m a diferença de fase generalizada (neste caso, $\phi_{4:3}$) diverge linearmente (D).

se os dois lasers foram colocados a uma mesma altura. Por exemplo, um erro de 1 mm no alinhamento dos lasers gera uma diferença de $\Delta t = 4$ ms nas determinações do instante que a bolha sai³, enquanto uma diferença de comprimento de mangueira de 250 cm gera um $\delta t = 15$ ms (estimado usando a figura 3.6), isto é, cerca de 0.06 ms por centímetro. Portanto, nas escalas dos erros que se pode cometer ao colocar os laser-fotodiodos (milímetro) ou os microfones (centímetro), as estimativas das fases pelo microfone tem uma acurácia 60 vezes maior.

Com as fases $\theta_{1,2}(t)$ definidas, calculamos as diferenças de fase generaliza-

³Estimativa feita usando a Lei de Stokes, para $r = 1,8$ mm (obtido usando o volume $V = 25$ mm³, como na figura 4.4) e outros parâmetros tirados da tabela 4.1

das $\phi_{n:m}$ para todos os pares $n, m \leq 10$. Dois exemplos de diferenças de fase generalizadas, tanto para um par n, m que o sistema está sincronizado, quanto para outro no qual não está, são apresentados na figura 4.24(C-D). Com os valores das diferenças de fase definidas, foi necessário definir o valor de corte K , tal que para valores menores que K consideramos o sistema sincronizado e para valores maiores não sincronizado.

No caso de $n = m = 1$, a escolha mais natural é $K = 2\pi$, pois se a diferença de fase se tornar maior que 2π , o borbulhamento em um dos bicos emitiu uma bolha a mais que o outro e, portanto, não deve estar sincronizado. Com esta conclusão é fácil ver que a escolha de K tenha que ser $K = K(n, m)$ para termos um critério coerente. Pois, por definição, todo sistema sincronizado em $n : m$, está sincronizado também em $\alpha n : \alpha m$, com $\alpha = 1, 2, 3, \dots$. E se o critério fosse $K = 2\pi$ sempre, uma diferença de fase de $\phi = \pi + \epsilon$ indicaria que o sistema estaria sincronizado em $1 : 1$, mas não estaria para $\alpha : \alpha$, com $\alpha > 1$.

Tendo isto em conta, o critério que utilizamos foi que a diferença de fase generalizada $\phi_{n:m}$ não pode ficar maior que o valor de uma volta inteira do oscilador mais lento, para garantir que um caso sincronizado não fosse descartado pela diferença de fase. Logo, o valor da constante K escolhido foi, para uma sincronização $n : m$, $K_{n,m} = 2\pi \max(n, m)$.

Com este valor da constante fomos capazes de estimar a precisão com que as sincronizações foram detectadas. Para isso, estimamos a maior diferença nas frequências dos dois borbulhamentos tal que o algoritmo não fosse capaz de detectar. Como o tempo para verificar este crescimento da diferença de fase é limitado ao tempo de coleta dos dados, que foi, tipicamente, de $T_{\text{col}} = 20$ s, o maior valor que a diferença nas frequências pode assumir é $\Delta f = T_{\text{col}}^{-1} = 0.05$ Hz. Porém, esta diferença de frequências se refere ao período do sistema como um todo, isto é, para uma sincronização $n : m$, o período do sistema é

$$\tau^{n,m} = n \langle T^{(1)} \rangle = m \langle T^{(2)} \rangle, \quad (4.40)$$

com $\langle T^{(1)} \rangle$ e $\langle T^{(2)} \rangle$ sendo os tempos entre bolhas médios no bico 1 e no bico 2, respectivamente. Como o período do sistema sincronizado cresce conforme os valores de n, m crescem, aqui se impõe uma limitação nos valores de n, m que fazem sentido procurar por sincronização. Como o tempos entre bolhas nos experimentos são entre 40 e 80 ms, a escolha de $n, m \leq 10$, implica, no

pior dos casos (isto é, $n = 10$ ou $m = 10$ e $\langle T \rangle = 80$ ms) uma precisão na determinação da sincronização de $\Delta f \cdot \tau^{n,m} = 4\%$ e, no melhor dos casos, de 0.2% , para $n = m = 1$ e $\langle T \rangle = 40$ ms.

Espaço de parâmetros de sincronização

Com os valores das diferenças de fase determinadas, o modo da sincronização é, obviamente, o menor par n, m que satisfaz a desigualdade, caso ela seja satisfeita por algum par n, m . Dado o grande número de sincronizações, a representação dos espaços de parâmetros da sincronização indicando exatamente $n : m$, ou seja, levando em consideração a ordem em que os dois números aparecem (isto é, diferenciar $2 : 3$ e $3 : 2$), implicaria no uso de cores muito próximas, o que dificultaria a identificação das sincronizações nas figuras.

Para resolver esta dificuldade de representar o maior número de sincronizações minimizando as chances de gerar confusões, decidimos representar as sincronizações $n : m$ e $m : n$ usando a mesma cor. Como o tempo médio entre bolha decresce com o aumento da vazão, sempre podemos recuperar a ordem dos n, m olhando para Q_1 e Q_2 : o borbulhamento de maior fluxo de ar corresponde ao maior número, pois, uma vazão maior implica tempos entre bolhas menores, o que faz com que este borbulhamento solte mais bolhas que o outro borbulhamento em um ciclo do sistema todo.

Na figura 4.25, podemos ver um espaço de parâmetros (Q_1, Q_2) experimental de sincronização. Este espaço foi construído com os sinais de microfones coletados simultaneamente aos tempos entre bolhas que usamos para construir os espaços de parâmetros de periodicidade (figura 4.23).

Ao compararmos os espaços de parâmetros de periodicidade (figura 4.23) e o espaço de parâmetros de sincronização correspondente (figura 4.25), a suspeita de que nas regiões de comportamento periódico o sistema está também sincronizado é confirmada, pois as regiões de período $P_1 = m$ no bico 1 e período $P_2 = n$ no bico 2, correspondem a sincronizações de fase de ordem $n : m$. Por exemplo, a região de período 1 nos dois bicos (proximidades da diagonal $Q_1 = Q_2$) corresponde a uma sincronização 1:1. Portanto, o espaço de sincronizações apresenta uma simetria com relação à diagonal $Q_1 = Q_2$, assim como a simetria apontada nos espaços de periodicidade. Uma vanta-

Figura 4.25 – Espaço de parâmetros (Q_1, Q_2) experimental de sincronização dos borbulhamentos para $H = 90$ mm.

gem do espaço de sincronizações construído desta maneira é que a simetria que este sistema possui fica bem clara, pois podemos ver a ordem (e os valores) de aparecimento das faixas de sincronização de maior ordem ao redor da diagonal. Ou seja, quando nos afastamos da diagonal, em qualquer sentido, primeiro encontramos uma faixa de sincronização 7:8, e depois 6:7, 5:6, 4:5, 3:4, 5:7 e 2:3. A ordem do aparecimento destas faixas de sincronização é tal que as razões n/m são decrescentes: 1, 0.875, 0.857, 0.833, 0.800, 0.750, 0.714, 0.667. Este efeito ocorre pois ao nos afastarmos da diagonal, a razão entre as frequências de borbulhamento naturais $r = \omega_0^{(1)} / \omega_0^{(2)}$ ⁴ ficam mais distantes e uma sincronização $n : m$ somente ocorrem quando a razão r fica próxima o suficiente de n/m .

Aqui aparece outro problema para a identificação de faixas com valores muito grandes de n, m , pois o tamanho destas faixas, para uma mesma intensidade da interação, diminui conforme os valores de n, m aumentam, da mesma

⁴Isto é, a frequência que cada borbulhamento teria se o outro bico não estivesse presente

forma que as línguas de Arnold no mapa do círculo, como apresentado na figura 2.6(C).

Mapa de Poincaré da diferença de fase

Para estudar de maneira mais detalhada a sincronização e a interação entre os dois bicos para uma determinada combinação de parâmetros de controle, é necessário que tenhamos mapas que levem em conta o estado do sistema como um todo, e não apenas de um dos borbulhamentos em particular. Portanto, os tempos entre bolhas, apesar de bastante úteis na determinação da periodicidade, são insuficientes para o estudo da sincronização, pois, após um pequeno número de iterações, as duas sequências dos T_k estão temporalmente desacopladas.

Este desacoplamento se dá pela própria essência do observável tempo entre bolhas. Como ele é um intervalo de tempo, caso os valores médios dos tempos entre bolhas em cada um dos bicos sejam muito diferentes, $T_k^{(1)}$ e $T_k^{(2)}$ ocorrem em momentos não só distintos, mas provavelmente distantes. Por exemplo, caso a taxa média de borbulhamento no bico 1 seja 20 bolhas/s e no bico 2 25 bolhas/s, a centésima bolha do bico 1 sai em $t=5$ s enquanto no bico 2, sai em $t=4$ s. Entre os instantes da centésima bolha do bico 1 e do bico 2, o bico 2 solta 25 bolhas, portanto, não podemos dizer que o par $T_k^{(1)}, T_k^{(2)}$ representa o estado do sistema em algum momento.

Por isso, as fases calculadas para detectar as sincronizações de fase são mais adequadas para construir mapas para representar a sincronização para uma determinada combinação dos parâmetros de controle. Com as fases $\theta_{1,2}(t)$ dos regimes de borbulhamento definidas, fizemos uma seção de Poincaré da mesma forma como explicado na seção 2.2.3, isto é, verificamos a fase $\theta_1(t_k)$ sempre que $\theta_2(t_k) = 2\pi k$. É importante notar que a fase $\theta_1(k)$ nestes casos é exatamente a diferença de fase $\phi(t_k)$, tomando mod(2π). Em face desta coincidência de definições, vamos adotar como nome para o parâmetro do mapa de Poincaré da fase, a diferença de fase ϕ , mesmo que, neste caso, esta diferença está sempre sendo representada no intervalo $0 \leq \phi < 2\pi$.

A figura 4.26, mostra os mapas de primeiro retorno das diferenças de fase para os mesmos parâmetros dos atratores da figura 4.21. Os mapas das diferenças de fase foram construídos usando os sinais dos microfones obtidos

simultanêamente aos tempos entre bolhas dos atratores. Na figura 4.26(A), referente aos atratores na figura 4.21(A-a), podemos ver 3 pontos, pois em um ciclo completo do sistema, o borbulhamento do bico 2 solta 3 bolhas, isto é, passa 3 vezes pela seção $\theta_2 = 2\pi k$, obtemos 3 valores diferentes de θ_1 . Para a figura 4.26(B), podemos ver os 15 pontos, estes menos definidos, assim como nos próprios atratores, apresentados na figura 4.21(B-b). Já a figura 4.26(C), apresenta o caso não periódico (figura 4.21(C-c)), podemos ver que ele preenche uma curva característica de um mapa no círculo (ver, por exemplo, a figura 2.8). Na figura 4.26(D), mostramos um caso especial: trata-se de um período 1, pois neste caso, o valor de ϕ é a diferença de fase na qual a sincronização ocorre.

4.3.5 Dependência da altura

Percebemos, durante as medidas preliminares, que a altura da solução em relação ao topo dos bicos afetava qualitativamente os diagramas de bifurcação, um exemplo deste efeito foi apresentado na seção 4.3.2, mais especificamente, na figura 4.20.

Para estudar com mais detalhes como a altura da solução afeta a sincronização dos dois bicos, coletamos os tempos entre bolhas e os sinais dos microfones por 20s para 5112 diferentes combinações de (Q_1, Q_2, H) : 71 valores de Q_1 , de 40 até 180 ml/min, com passo de 2 ml/min, 12 valores de H , de 20 até 130 mm, com passo de 10 mm e 6 valores de Q_2 : 64, 84, 105, 126, 147 e 167 ml/min. A escolha de poucos valores de Q_2 , foi para permitir a realização do experimento, pois o tempo total de coleta foi de 28 horas e 24 minutos (considerando o tempo de estabilização entre duas tomadas sucessivas, este número aumenta para cerca de 50 horas), o que exigiu vários dias de coleta (distribuídos em 2 semanas), logo, um número maior de Q_2 aumentaria consideravelmente o tempo para tomar os dados e também o tamanho dos dados em disco (cerca de 26 GB). Também contribuiu para que usássemos um menor número de Q_2 é o fato de que a dinâmica de borbulhamento nos dois bicos é bastante semelhante, conclusão que pode ser tirada do espaço de sincronizações da figura 4.25.

Neste longo prazo de coleta, fenômenos sistemáticos (como a degradação da solução, por exemplo) de médio prazo tornam-se visíveis nos dados. Para permitir que estes fenômenos ficassem claros no sistema, o experimento foi

Figura 4.26 – Mapas de Poincaré experimentais das diferenças de fase ϕ : (A-C) correspondentes aos atratores apresentados na figura 4.21; e (D) um exemplo de atrator em sincronização 1:1 (e $P_1 = P_2 = 1$) para $Q_1 = 120$ ml/min e $Q_2 = 132$ ml/min.

feito tomando primeiro as alturas múltiplas de 20 mm e depois as não múltiplas. Um olhar cuidadoso, permite verificar estes efeitos de médio prazo, principalmente nos espaços de parâmetros (Q_1, H) feitos usando os menores valores de Q_2 .

Com os dados destes 5112 atratores, fizemos, para cada um deles, a análise de sincronização descrita na seção 4.3.4. A representação dos espaços de parâmetros para as sincronizações, dado que agora temos três parâmetros, foi feita através de 6 espaços de parâmetros bidimensionais (Q_1, H) , um para cada valor de Q_2 (outro motivos para usarmos poucos valores de Q_2), estes espaços são apresentados nas figuras 4.27 e 4.28.

Figura 4.27 – Espaços de parâmetros (Q_1, H) experimentais de sincronização dos borbulhamentos para: (A) $Q_2 = 64$ ml/min; (B) $Q_2 = 84$ ml/min, (C) $Q_2 = 105$ ml/min.

Figura 4.28 – Espaços de parâmetros (Q_1, H) experimentais de sincronização dos borbulhamentos para: (A) $Q_2 = 126$ ml/min; (B) $Q_2 = 147$ ml/min, (C) $Q_2 = 167$ ml/min.

O espaço para $Q_2 = 64$ ml/min, apresentado na figura 4.27(A), possui várias regiões de sincronização similares a línguas de Arnold, sendo que as principais são a sincronização 1:1, ao redor de $Q_1 = 64$ ml/min, 2:3, ao redor de $Q_1 = 170$ ml/min, 3:4, ao redor de $Q_1 = 125$ ml/min. Todas as regiões de sincronização aumentam de tamanho (em termos do parâmetro Q_1) conforme aumentamos o valor de H até 100 mm. A partir deste valor, as regiões de sincronização, com exceção da 1:1 e 2:3, parecem desaparecer ou diminuir de tamanho.

Este mesmo fenômeno acontece para $Q_2 = 84$ ml/min (figura 4.27(B)), mas desta vez, somente a sincronização de fase 1:1 continua a aumentar de tamanho sempre. Este espaço apresenta 2 sincronizações como 3:4, uma a esquerda (sincronização 4:3), e uma a direita (sincronização 3:4).

A partir de $Q_2 = 105$ ml/min (figura 4.27(C)), a região de sincronização 1:1 chega, para os maiores valores de H , até o limite superior de Q_1 estudado e nele a assimetria com relação às vazões começa a ficar clara, pois podemos ver claramente que as regiões de sincronização 1:1 crescem mais rapidamente para valores de Q_1 maiores que para menores, conforme aumentamos o valor de H . Para $H = 130$ mm, por exemplo, a janela vai de $Q_1 = 75$ até (pelo menos) $Q_1 = 180$ ml/min. Isto significa que, se compararmos com $H = 20$ mm, no qual a janela existe somente nos arredores de $Q_1 = 105$ ml/min, a janela cresceu $\Delta Q = 30$ ml/min à esquerda e $\Delta Q = 75$ ml/min à direita.

Esta assimetria está relacionada com a variação da frequência do borbulhamento não-perturbado ω_0 em função da vazão Q . Ela é facilmente compreendida ao olharmos para um mapa do círculo (equação 2.15 e figura 2.6), pois variar Q , em primeira aproximação, varia a constante Ω do mapa, mantendo a perturbação ϵ constante. Portanto se $\omega_0(Q)$ não variar linearmente, o sistema apresentará línguas assimétricas ao olharmos um espaço de parâmetros com Q . Aliada a isto está a constatação, feita na seção 4.3.2, de que a dispersão dos tempos entre bolhas δT aumenta conforme aumentamos a vazão do outro bico, que sugere que a função da interação (ou pelo menos a constante ϵ) depende das vazões Q de uma forma não trivial, isto é, elas não contribuem somente para as frequências naturais ω_0 .

Os espaços de parâmetros da figura 4.28, isto é, para $Q_2 = 126, 147$ e 167 ml/min, apresentam o aparecimento da sincronização 2:3 à esquerda da

sincronização 1:1, que mantém o comportamento percebido no espaço de parâmetros da figura 4.28(A): seu tamanho, com relação a Q_1 , continua crescente para os maiores H s.

Analisando os diagramas das figuras 4.27 e 4.28 juntos, podemos ver que as línguas de sincronização 1:1 aparecem, para $H = 20$ mm, sempre muito próximas de $Q_1 = Q_2$, com um tamanho pequeno no parâmetro Q_1 . Conforme aumentamos a altura da coluna líquida H , este tamanho também cresce. As línguas de ordem superior, como da sincronização 2:3, também possuem este comportamento, o que sugere que a interação entre os borbulhamentos cresce conforme aumentamos a altura H . Estes resultados foram publicados em [PCS13], que pode ser visto no apêndice A

Outra evidência de que a altura altera a intensidade da interação entre as dinâmicas de borbulhamento pode ser obtida analisando os mapas de Poincaré. Para isso, olhamos os diagramas das figuras 4.27 e 4.28 e escolhemos um par Q_1, Q_2 tal que o sistema não fosse periódico para o máximo de alturas possíveis e fizemos os mapas para as várias alturas. A figura 4.29 mostra mapas de primeiro retorno para $Q_1 = 90$ ml/min e $Q_2 = 64$ ml/min. Nela podemos ver claramente a evolução dos mapas conforme aumentamos a altura da solução, indo de um caso praticamente sem interação, para $H = 20$ mm (figura 4.29(A)), até casos nos quais a dinâmica de fase deixa de fornecer uma descrição satisfatória do sistema, como para $H = 100$ (figura 4.29(E)) e 120 mm (figura 4.29(F)). Nestes casos, não podemos utilizar somente as fases na descrição da dinâmica do sistema pois não podemos mais dizer que $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$, já que o mapa de primeiro retorno, nos dois casos, apresenta uma dobra entre $\phi = 0$ e 1.5, que pode ser claramente vista na figura 4.29(F) ($H = 120$ mm).

Um método para obtermos uma estimativa de como a intensidade da interação varia com a altura pode ser construído a partir da equação 2.14. Usando a variação da fase $\Delta\phi_n = \phi_{n+1} - \phi_n$, podemos escrever a equação 2.14 na forma:

$$\Delta\phi_n = \phi_{n+1} - \phi_n = \Omega + G(\phi_n), \quad (4.41)$$

portanto, a função $\Delta\phi(\phi_n)$ é uma função que oscila ao redor de um valor constante Ω . A amplitude desta oscilação está associada à forma da função G , que é o efeito da interação entre os dois osciladores na dinâmica de fases de ambos, e este efeito deve, em geral, ser maior quanto mais intensa é a interação entre

Figura 4.29 – Mapas de Poincaré experimentais das diferenças de fase ϕ , para $Q_1 = 90$ ml/min e $Q_2 = 64$ ml/min, mostrando o aumento da interação conforme a altura da coluna líquida aumenta de $H = 20$ mm (A) até $H = 120$ mm (F).

os dois. Portanto, medir a amplitude de oscilação da função $\Delta\phi$ pode nos dar uma estimativa da intensidade do acoplamento dos borbulhamentos. Logo,

definimos a amplitude A :

$$A = \max(\Delta\phi_n) - \min(\Delta\phi_n). \quad (4.42)$$

Figura 4.30 – Estimativa da intensidade da interação, a partir da medição da amplitude A da variação da diferença de fase $\Delta\phi_n$, para os mesmos atratores apresentados na figura 4.29. Podemos ver que a amplitude cresce quase linearmente com a altura H .

Na figura 4.30, apresentamos as amplitudes A em função da altura H , para os gráficos da figura 4.29. Podemos ver claramente que esta amplitude cresce conforme aumentamos a coluna líquida e que este crescimento é aproximadamente linear, com um coeficiente angular de $0.0147(10)$ ms/mm. Mais curioso é que este ajuste linear tem um coeficiente linear de $-0.22(7)$ ms, o que quer dizer que a interação deve cair para zero para uma altura H pequena, aproximadamente 15 mm.

4.3.6 Período 1

O diagrama de bifurcação na figura 4.20, apresenta uma crise dentro da janela periódica de período (por volta de $Q_1 = 115$ ml/min). Esta crise dentro do período 1 aparece sistematicamente nos diagramas de bifurcação experimentais e para verificar a origem da mesma, fizemos um estudo detalhado da dinâmica dos borbulhamentos nos arredores da janela periódica de período 1.

Varremos para $Q_2 = 105$ ml/min e $H = 70$ mm, de $Q_1 = 88$ ml/min até 122 ml/min, com passo de 1 ml/min. Esta varredura foi feita tanto aumen-

tando a vazão quanto diminuindo a mesma. Na figura 4.31, apresentamos os diagramas de bifurcação, tanto para a diferença de fase ϕ_n quanto para os tempos entre bolhas $T_n^{(k)}$, $k = 1, 2$. Uma importante conclusão que podemos tirar destes gráficos é que, no período 1, os borbulhamentos estão sincronizados em oposição de fase.

Figura 4.31 – Diagramas de bifurcações experimentais das diferenças de fase ϕ (acima) e dos tempos entre bolhas $T_n^{(k)}$ (abaixo) em função da vazão Q_1 , para $Q_2 = 105$ ml/min e $H = 70$ mm.

Nos diagramas da figura 4.31, não é possível perceber nenhuma histerese ou multiestabilidade. Mas olhando com atenção nas regiões de Q_1 próximas às bifurcações que criam e destroem as órbitas periódicas de período 1, podemos ver intermitência (principalmente em $Q_1 = 93$ e 116 ml/min), característica de bifurcações tangentes. Para $Q_1 = 116$ ml/min, temos uma evidência de que deve existir, dentro da janela periódica uma segunda órbita periódica, pois temos intermitência para dois valores de ϕ_n e dois valores de T_n .

A figura 4.32, mostra uma das séries temporais de ϕ_n e T_n coletadas para fazer os diagramas de bifurcação, com $Q_1 = 117$ ml/min. Nestas séries, podemos ver claramente a intermitência, ao redor de $\phi = 3.8$ e $T_n = 46.5$ ms.

Figura 4.32 – Séries temporais dos tempos entre bolhas $T_n^{(k)}$ de diferença de fase $\phi_n \bmod 2\pi$, para $Q_1 = 117$ ml/min, $Q_2 = 105$ ml/min e $H = 70$ mm.

Também é possível ver, de modo mais sutil, uma intermitência ao redor de $\phi = 1$ e $T_n = 49.5$ ms.

Um modo interessante de visualizar a intermitência é olhar o mapa dos $\Delta\phi_n$, definidos na equação 4.41, pois quando estamos perto da bifurcação sela-nó, os valores de $\Delta\phi_n$ se aproximam de zero, e ficam iguais a zero após o aparecimento do ponto fixo estável. Como as séries dos ϕ_n são bem descritas (a menos do ruído) por uma mapa do tipo $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$, fizemos gráficos de $\Delta\phi_n$ em função de ϕ_n . Na figura 4.33, mostramos estes gráficos para 3 valores de Q_1 : 117, 119 e 121 ml/min. Nesta figura, é possível ver que conforme nos afastamos da região da bifurcação ($Q_1 \approx 116$ ml/min), a intermitência diminui. Isto pode ser visto de dois modos:

- A densidade de pontos nas regiões próximas de zero ($\phi_n \approx 1$ e $\phi_n \approx 4$) diminui conforme aumentamos a vazão Q_1 e portanto, a densidade de pontos fora destas regiões aumenta.
- O valor dos $\Delta\phi_n$ se afastam de zero, se tornando levemente positivos: isto quer dizer que o sistema passa menos tempo nesta região, pois o

Figura 4.33 – Mapas experimentais da variação da diferença de fase $\Delta\phi_n$, em função da diferença de fase ϕ_n , para 3 valores de diferentes da vazão Q_1 (117, 119 e 121 ml/min).

número de iterações até sair das região com intermitência cresce quanto mais próximo de zero o valor de $\Delta\phi_n$ está.

Os mapas da figura 4.33 também deixam claro que a intermitência para os dois valores de ϕ_n ($\phi_n = 3.8$ e $\phi_n = 1$) se comporta de modo similar, isto é, conforme diminuimos Q_1 , os $\Delta\phi_n$ se aproxima cada vez mais de zero. Portanto, os dois pontos fixos devem existir para um valor adequado de Q_1 , de modo similar com o que foi mostrado na figura 2.8.

Para verificar experimentalmente a presença de mais de um ponto fixo estável, foi necessário mudar completamente a abordagem usada até o momento, pois fazer diagramas de bifurcação acompanhando o atrator não nos permite acessar mais de um (ou dois, no caso de histerese devido a biestabilidade) atrator que existe para uma determinada combinação dos parâmetros de controle.

Para buscar atratores num sistema dinâmico, precisamos conseguir variar as condições iniciais, para, assim, conseguirmos atingir as bacias de atração de cada atrator. Entretanto, num sistema experimental, nunca temos a liberdade de variar as condições iniciais livremente e muitas vezes sequer temos acesso a todas as variáveis dinâmicas. Para fazer este tipo de busca, é possível usar dois tipos de abordagem:

- Fazer uma perturbação intensa e de curta duração (em comparação com os tempos característicos do sistema), de tal modo que ela possa ser en-

carada com uma simples mudança de condição inicial, cuja posição final depende basicamente do estado que o sistema estava antes da perturbação e da intensidade da mesma.

- Inserir a perturbação por um grande intervalo de tempo, fazendo com que o sistema todo tenha sua dinâmica (e atratores possíveis) alterada para, depois, removê-la, voltando à dinâmica original em um estado que não fazia parte do atrator. Aqui, a chave para este método funcionar é que o atrator do sistema perturbado precisa se espalhar o máximo possível pelo espaço de fases.

Para fazer a perturbação do sistema de dois bicos borbulhadores, usamos a última abordagem, usando o gerador de som com a frequência escolhida tal que a intensidade sonora fosse máxima. Com a perturbação definida, fizemos a coleta com os mesmos H e Q_2 usados no diagrama de bifurcação da figura 4.31 ($H = 70$ mm e $Q_2 = 105$ ml/min). Para cada valor de Q_1 , coletamos 15 séries temporais. Entre as coletas de duas séries temporais sucessivas, inserimos a perturbação sonora por um intervalo de tempo aleatório entre 1 e 2 segundos, esperamos 10 segundos e então coletamos as séries temporais por 20 segundos.

Um exemplo de uma série de coletas pode ser visto na figura 4.34, para $Q_1 = 108$ ml/min, na qual estão representados a diferença de fase ϕ_n e os tempos entre bolhas nos dois bicos $T_n^{(k)}$ em função da ordem em que estas séries temporais foram coletadas. Podemos ver neste exemplo que a fase, para esta combinação de parâmetros, possui 3 valores possíveis de ϕ , sendo que um deles em oposição de fase, bem próximo de π , e dois dispostos simetricamente com relação a 0 (ou 2π). Cada um destes valores de ϕ tem um valor de T_n próprio e diferente dos outros. É interessante notar que o T_n para $\phi \approx \pi$ é o menor de todos, o que sugere que a sincronização em oposição de fase acelera o destacamento das bolhas.

Para analisar como as órbitas estáveis evoluem dentro da janela, tomamos séries como a apresentada na figura 4.34 para Q_1 entre 92 e 118 ml/min, com passos de 2 ml/min. Este é um intervalo menor do que da figura 4.31, mas as bifurcações sela-nó que criam e destroem as órbitas de período 1 ainda estão dentro dele. Na figura 4.35, apresentamos os diagramas de bifurcações das diferenças de fases ϕ (acima) e dos tempos entre bolhas T_n (abaixo), para todas

Figura 4.34 – Exemplo de uma série de 15 coletas mantendo todos os parâmetros de controle constantes ($H = 70$ mm, $Q_1 = 108$ ml/min e $Q_2 = 105$ ml/min) e inserindo ruído entre as coletas, para tentar saltar entre os vários atratores periódicos de período 1 presentes no sistema. Os gráficos mostram as diferenças de fase $\phi_n \bmod 2\pi$ (acima) e os tempos entre bolhas $T_n^{(k)}$ (abaixo) como função da ordem em que a série foi tomada.

as séries temporais coletadas usando este método.

Podemos ver nos diagramas de bifurcação da figura 4.35 que as órbitas de período 1 encontradas nas coletas mostradas na figura 4.34 estão presentes em quase toda a janela periódica, sendo que o atrator em oposição de fase aparece somente no meio da região que apresenta período 1, isto é, entre $Q_1 = 100$ e 108 ml/min. O atrator com valores de diferença de fase mais baixa, ($\phi \approx 1$) parece existir também somente para valores maiores de Q_1 , a partir de $Q_1 = 100$ ml/min, porém, para $Q_1 \geq 110$ ml/min, passa a ser o único atrator de período 1 presente. Já o atrator com $\phi_n > 5$ aparece no início da janela periódica ($Q_1 = 98$ ml/min) mas, assim como o atrator em oposição de fase, desaparece para $Q_1 = 110$ ml/min.

Esta análise dos diagramas de bifurcações experimentais é confirmada se olharmos os mapas de primeiro retorno nas proximidades da janela, como os presentes na figura 4.36, para $Q_1 = 94$ e 118 ml/min. Como não podemos ter acesso à função $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$ dentro de um regime periódico, é interes-

Figura 4.35 – Diagramas de bifurcações experimental de ϕ e $T_n^{(k)}$, para $H = 70$ mm e $Q_2 = 105$ ml/min. Estes diagramas foram feitos com a superposição das 15 séries temporais coletadas para cada valor de Q_1 , com a inserção de ruído entre a coleta de cada série.

sante usarmos as regiões não periódica na fronteira das bifurcações (as mesma que apresentam intermitência) para entender como a forma da função $f(\phi_n)$. Um pequeno problema deste uso é que como estamos analisando uma sincronização mútua, a forma da função $G(x)$, do mapa no círculo (equação 2.14) depende de Q_1 e Q_2 , porém, podemos supor que as funções dentro da janela e na vizinhança da mesma devam ser parecidas.

Olhando para os mapas da figura 4.36, um imediatamente acima da diagonal (vermelho) e outro abaixo (azul), é possível concluir duas coisas: que as duas funções são bastante semelhantes, a menos de uma constante, e ambas corroboram a existência de três órbitas periódicas de período 1, pois tanto a curva azul quanto a vermelha possuem 3 regiões que se aproximam da diagonal. Estas regiões, ao aumentarmos (ou diminuirmos) a vazão Q_1 , e consequentemente a frequência natural de oscilação $\omega_0^{(1)}$, são onde ocorrem as bifurcações tangentes que criam os pontos fixos periódicos. A curva vermelha tem o ponto mais próximo da diagonal por volta de $\phi = 1.3$, que corresponde

Figura 4.36 – Mapas de primeiro retorno experimental da diferença de fase ϕ_n , para $H = 70$ mm e $Q_2 = 105$ ml/min. Mostrando em vermelho $Q_1 = 118$ ml/min e em azul $Q_1 = 94$ ml/min. Cada um dos mapas foi feito superpondo os ϕ_n das 15 séries temporais tomadas usadas na figura 4.35.

ao valor de ϕ da órbita periódica que existe principalmente para maiores valores de Q_1 . Já na curva azul, o mais próximo (neste caso por pouco) está por volta de $\phi = 5.0$, exatamente o valor de ϕ do atrator que aparece para os menores valores de Q_1 . As regiões próximas entre $\phi = 2$ e 4 são as mais distantes das três, o que explica porque o ponto fixo em oposição de fase aparece somente no meio do intervalo.

Estes resultados sugerem que, caso fizéssemos um diagrama acompanhando o atrator nas condições do experimento das figuras 4.34, 4.35 e 4.36, veríamos uma crise dentro da janela de período 1, possivelmente saltando de um valor de T_n para outro. Porém não é isso que o diagrama na figura 4.31 apresenta, pois nele vemos somente uma órbita periódica (e a intermitência de uma segunda fora da região estável) dentro de todo o intervalo em que existe período 1. As regiões de estabilidade do período 1 também são diferentes, pois na figura 4.31, o período 1 aparece para valores de Q_1 menores que 95 ml/min, enquanto nos diagramas da figura 4.35 só vemos período 1 para $Q_1 = 98$ ml/min. Outra diferença importante é que a órbita estável que

é acompanhada na janela de período 1 nos diagramas da figura 4.31 é exatamente o atrator em oposição de fase, que é o atrator periódico de período 1 que existe para o menor intervalo de valores de Q_1 nos diagramas da figura 4.35.

Estes resultados indicam que a forma exata da função $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$ depende fortemente de um parâmetro o qual não temos total controle. Este parâmetro pode ser tanto uma propriedade física da solução, como por exemplo a viscosidade, que depende fortemente da temperatura da sala, pois a viscosidade de glicerina pura pode variar ordem de grandeza em um intervalo de 10°C , e também depende da qualidade da solução, pois a solução de água com glicerina é higroscópica, o que altera, a longo prazo, a composição da solução. Entretanto, pelos resultados coletados, o efeito deste parâmetro a qual não temos controle não é sentido no curto prazo, pois tanto os dois diagramas superpostos na figura 4.31 são indistinguíveis. Outra evidência que este efeito não é sensível em curto prazo são os dois mapas de primeiro retorno na figura 4.36, pois cada curva corresponde a 15 realizações distintas do experimento e, apesar disso, são indistinguíveis.

Entretanto, pelo que podemos ver nos gráficos das figura 4.31 e 4.35, podemos concluir que este efeito somente é drástico na determinação do grau de multiestabilidade dentro da janela, pois o tamanho da mesma varia muito mais sutilmente (cerca de 3 ml/min, para uma janela de 20 ml/min de tamanho). Isto explica porque é possível comparar, sem muita dificuldade, diagramas de bifurcação feitos com intervalos de muitos dias e também porque as crises dentro das janelas de período 1 ocorrem de maneira intermitente, isto é, para um mesmo intervalo de parâmetros de controle elas aparecem ou não dependendo da época em que se fez a medição, apesar de aparecerem sistematicamente em diagramas produzidos no mesmo dia.

4.3.7 Interação com agulhas metálicas

Com o intuito de analisar como a presença de dois bicos no mesmo tubo modifica a dinâmica de adição de períodos estudada em 4.1, colocamos duas agulhas de raio interno $r_0 = 0.2$ mm e comprimento $h = 20$ mm nos dois bicos e usamos duas mangueiras de comprimento $L = 18$ cm.

A figura 4.37 mostra os diagramas de bifurcação dos tempos entre bolhas dos dois bicos para um fluxo de ar do bico 2 de $Q_2 = 20$ ml/min e altura da co-

Figura 4.37 – Diagramas de bifurcações experimentais dos tempos entre bolhas $T_n^{(i)}$ nos dois bicos borbulhadores, construído variando lentamente o fluxo de ar no bico número um, de 5 até 50 ml/min, mantendo fixos o fluxo de ar no segundo bico em $Q_2 = 20$ ml/min e a altura da solução acima dos bicos em $H = 70$ mm.

luna líquida acima dos bicos de $H = 70$ mm, variando Q_1 de 5 até 50 ml/min. O diagrama de bifurcação do bico 2 (em preto), mostra uma dinâmica de período 2 para todos os valores do parâmetro de controle Q_1 e, portanto, sua dinâmica não é afetada pela variação da vazão do outro bico. Se considerarmos que para este valor de Q_2 o bico borbulhador teria período 2 caso estivesse solitário, podemos concluir que seu regime de borbulhamento neste caso simplesmente não é afetado pela presença de outro bico.

Como modo de garantir que o comportamento observado nos diagramas não foi devido a uma escolha dos parâmetros inadequada, fizemos um espaço de parâmetros varrendo o espaço (Q_1, Q_2) com a maior altura possível da coluna líquida. Para fazer este espaço de parâmetros foram medidos os tempos entre bolhas e os sinais dos microfones dos dois bicos por 20s para 1681 combinações de pares (Q_1, Q_2) , entre 8 e 48 ml/min com passo de 1 ml/min, com altura $H = 135$ mm. A partir dos tempos entre bolhas, foi feita a análise de periodicidade descrita na seção 4.3.3. Na figura 4.38, apresentamos o resultados da análise periodicidade, usando somente o primeiro passo (autocorrelação). Os espaços de parâmetros apresentam somente listras horizontais (no caso do bico 2) ou verticais (no caso do bico 1) de período 1 (sem nucleação), 2 e 3. Isto indica que os bicos não se sincronizam como no caso sem a agulha metálica e

Figura 4.38 – Espaços de parâmetros experimentais da periodicidade nos dois bicos, para o sistema com agulhas metálicas de comprimento $h = 20$ mm, raio interno $r_0 = 0.2$ mm e comprimento da mangueira de $L = 18$ cm, para uma altura de coluna líquida $H = 135$ mm.

a interação funciona somente com se o sistema tivesse um ruído maior, como detectado.

Para confirmar a suspeita que a interação é fraca o bastante para não influenciar significativamente na dinâmica de adição de períodos e também não

Figura 4.39 – Espaço de parâmetros experimental de sincronizações, para os dois bicos com agulhas metálicas, com os mesmos parâmetros da figura 4.38

gerar nenhuma sincronização, calculamos as diferenças de fase generalizadas e, com elas, construímos um espaço de sincronização com os sinais dos microfones, coletados junto com os tempos entre bolhas. O resultado das sincronizações encontradas pode ser visto na figura 4.39. Nesta figura, podemos ver que não há nenhuma região com sincronização, apenas pontos isolados encontrados, o que indica que estes pontos se tratam de detecções espúrias de sincronização, o que se mostra coerente com os resultados encontrados na figura 4.38.

4.3.8 Simulação

O sucesso do modelo físico em reproduzir a dinâmica do sistema de um bico borbulhador, tanto a adição de períodos quanto sincronização de um bico borbulhador com uma perturbação sonora externa, motivou-nos a usar este modelo para reproduzir os resultados do sistema de dois bicos borbulhadores. Para tal, consideramos que cada bico segue as equações de um bico borbu-

lhador (equação 4.32). A interação entre os dois bicos foi inserida de forma similar ao feito para inserir a perturbação sonora, isto é, através de um termo na pressão de equilíbrio, representando o acoplamento entre as dinâmicas dos dois bicos, na forma:

$$\begin{aligned} (p_e^{(1)})_{nova} &= (p_e^{(1)})_{velha} + \alpha \dot{z}_2 \\ (p_e^{(2)})_{nova} &= (p_e^{(2)})_{velha} + \alpha \dot{z}_1, \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde $(p_e^{(i)})_{velha}$ é a pressão de equilíbrio do modelo original (equação 4.18). Ou seja, o acoplamento é simétrico e proporcional a velocidade de crescimento das bolhas. A escolha pelo acoplamento pela velocidade de crescimento é bastante natural, pois o crescimento da bolha (e a subida das bolhas já ejetadas) induz correntes de convecção forçadas na solução, o que afeta a formação e subida das bolhas. Como o crescimento (e a subida) de uma bolha carrega consigo o fluido para cima, as regiões mais distantes deste bico tem a tendência de ter o fluido se movendo para baixo. Isto sugere que o crescimento de uma bolha deve dificultar o crescimento da outra, por isso temos que este acoplamento aumenta a pressão de equilíbrio, dificultando o crescimento da outra bolha. Este raciocínio é reforçado por resultados experimentais: em [SM98a], os autores perceberam que a velocidade de ascensão de um trem de bolhas diminui quando colocamos um segundo bico borbulhador e diminui ainda mais quando o fluxo de ar neste segundo bico é aumentado.

Para as simulações, usamos como parâmetros do modelo os valores experimentais medidos ou tabelados, presentes na tabela 4.1. Neste experimento usamos o bico sem agulha metálica, de raio interno $r = 1.1$ mm e comprimento $h = 10$ mm, e a mangueira utilizada foi de $L = 18$ cm. A única diferença nos parâmetros da tabela, com relação ao sistema de adição de períodos é que, como cada mangueira passou a ter apenas um microfone, o volume adicional V_{ad} foi reduzido de 15 ml para 10 ml. Com relação a simulação propriamente dita, usamos o mesmo método de integração usado para o sistema com bico metálico (par Dormand-Prince), apenas adaptando o sistema de parada do integrador, pois neste sistema existem duas situações que podem exigir a interrupção da integração, que são as condições de saída em cada um dos bicos.

Diagramas de bifurcação

Com os algoritmos preparados, construímos diagramas de bifurcação com os tempos entre bolhas T_n em cada bico variando lentamente a vazão em um dos bicos, mantendo a outra vazão e o parâmetro de acoplamento α constantes. Na figura 4.40, podemos ver quatro diagramas de bifurcação experimentais, dois deles com o mesmo valor de α e outros dois com o mesmo valor de Q_2 . Os valores de α foram escolhidos tal que as distribuições dos tempos entre bolhas δT em regiões não periódicas dos diagramas fossem da mesma ordem de grandeza das experimentais.

Ao analisarmos os diagramas de bifurcação simulados da figura 4.40, podemos verificar como a variação da vazão Q_2 afeta os diagramas de bifurcação: no diagrama da figura 4.40(A), a janela de período 1 para os dois borbulhamentos existe entre $Q_1 = 50$ ml/min até $Q_1 = 80$ ml/min, isto é, a sincronização 1:1 ocorre ao redor do ponto onde $Q_1 = Q_2$, como era de se esperar. O mesmo ocorre em todos os outros diagramas desta figura. O diagrama da figura 4.40(B), foi feito para o mesmo valor de α que o da figura 4.40(A), porém com $Q_2 = 167$ ml/min, e podemos ver que as regiões de sincronização se movem de acordo com esta mudança. Um efeito mais sutil que pode ser detectado ao compararmos os diagramas em 4.40(A-B) diz respeito às dispersões dos tempos entre bolhas para um par Q_1, Q_2 fixo. Olhando para as regiões não periódicas na região de $Q_1 = 50$ ml/min dos dois gráficos, podemos ver que a dispersão $\delta T_n^{(1)}$ é de 10 ms para $Q_2 = 64$ ml/min enquanto para $Q_2 = 167$ ml/min ela é de 16 ms. Podemos ver este efeito também olhando para os $\delta T_n^{(2)}$ de qualquer um dos diagramas da figura 4.40, pois os valores destas dispersões aumentam conforme aumentamos os valores de Q_1 .

O efeito da variação da intensidade do acoplamento nos diagramas de bifurcação pode ser visto claramente nos diagramas na figura 4.40(C-D). No diagrama da figura 4.40(C), temos uma constante α bem menor que nos outros diagramas, e podemos ver que tanto os tamanhos das janelas periódicas diminuíram quanto as dispersões δT para valores fixos de Q_1 também diminuíram, como era de se esperar. Na figura 4.40(D), temos uma constante de acoplamento α maior ainda, fazendo com que a janela de sincronização 1:1 tenha um tamanho de 60 ml/min (entre 100 e 160 ml/min).

Figura 4.40 – Quatro diagramas de bifurcação simulados, dos $T_n^{(k)}$ em função da vazão Q_1 , que permitem ver o efeito de variar a vazão Q_2 , comparando os diagramas (A) e (B), e o efeito de variar o acoplamento α , comparando os diagramas (C) e (D).

Espaços de parâmetros

Para a construção de espaços de parâmetros que fossem coerentes com os experimentais, foi necessário fazer uma calibração da constante α . Para isso, usamos as dispersões δT em ambos os borbulhamentos para dois valores de Q_1 : 60 e 140 ml/min, para uma altura da coluna líquida de $H = 100$ mm e $Q_2 = 105$ ml/min. Com os valores experimentais dos $\delta T^{(k)}$, buscamos os valores de α nos quais estas dispersões são iguais às experimentais. Depois, tiramos uma média dos quatro (dois pares de δT) valores de α , e obtivemos $\alpha = 22 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ para $H = 100$ mm. Para as outras alturas, consideramos que constante de acoplamento é proporcional a altura H .

Com a calibração da constante α fizemos simulações para podermos construir espaços de parâmetros equivalentes aos das figuras 4.25, 4.27 e 4.28. As simulações foram feitas seguindo um procedimento análogo ao da coleta dos dados experimentais. Fixamos o trio de parâmetros (Q_1, Q_2, α) , simulamos um transiente de 20s e depois coletamos 20s de dados, armazenando momentos de saída das bolhas nos dois bicos. Após a simulação, mudamos o valor dos parâmetros de controle para a próxima simulação. Com os tempos de destacamento das bolhas, calculamos as fases generalizadas e, com elas, as sincronizações para cada uma das combinações de (Q_1, Q_2, α) .

Dois destes espaços de parâmetros simulados podem ser vistos na figura 4.41. Estes espaços de parâmetros foram apresentados em [PCS13] (figura (9) do artigo), que pode ser visto no apêndice A.

Ambos os espaços reproduzem as estruturas de sincronizações de fase identificadas nos espaços de parâmetros experimentais. Isto é, o espaço com o parâmetro de acoplamento α constante, na figura 4.41(A), apresenta as faixas de sincronizações de ordem superior dispostas simetricamente com relação a diagonal, com a sincronização de fase 1:1 sobre e nas proximidades da diagonal, de modo análogo ao espaço experimental, apresentado na figura 4.25. Enquanto na figura 4.41(B), podemos ver nas regiões sincronizadas estruturas semelhantes a línguas de Arnold, que aumentam conforme aumentamos o parâmetro de acoplamento, de modo análogo ao efeito que observamos ao aumentarmos a altura da coluna líquida no sistema experimental, apresentados nas figura 4.27 e 4.28, o espaço simulado é análogo ao experimental apresentado na figura 4.28(B). Entretanto, como discutido no próprio artigo,

Figura 4.41 – Espaços de parâmetros construídos com o uso das vazões Q usadas para a simulação iguais às experimentais. O espaço (A) foi feito mantendo $\alpha = 20 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ e o (B) mantendo $Q_2 = 147 \text{ ml/min}$. Esta figura foi apresentada em [PCS13] (figura 9).

os tamanhos das regiões de sincronização e as distâncias entre elas possuem desvios dos valores experimentais. Isto se deve ao fato de que o intervalo de valores que tempos entre bolhas T_n assume para os mesmos valores de fluxo de ar Q são bastante diferentes entre simulação e experimento, que a constante de acoplamento não necessita ser proporcional à altura.

Novos espaços de parâmetros

As disparidades dos tempos entre bolhas T_n experimental e simulado, para um mesmo Q , geram diferenças entre os espaços de parâmetros experimental e simulado. A fim de corrigir estas diferenças, fizemos uma conversão nos Q simulados, tal que eles refletissem os mesmos T_n apresentados no experimento. Para isso, fizemos primeiro um diagrama de bifurcações sem interação, que pode ser visto na figura 4.42.

Figura 4.42 – Diagrama de bifurcação simulado dos tempos entre bolhas T_n pela vazão Q em azul, para um bico sem interação, mantendo os outros parâmetros da simulação constantes. Em vermelho, temos o ajuste $T_n(Q) = 0.88 \times Q^{-0.54}$ que não se adequa muito bem aos resultados da simulação.

Usando os tempos entre bolhas do diagrama de bifurcações, fizemos um ajuste de lei de potências, análogo ao que fizemos com os diagramas experimentais dos bicos solitários (seção 4.3.1), no qual obtivemos $T_n(Q) = 0.88 \times Q^{-0.54}$. Porém o erro desta relação é considerável no intervalo analisado, então usamos a própria curva do diagrama para fazer a conversão $Q(T_n)$. A partir das equações $T_n(Q)$ obtidas para o sistema experimental (que podem ser vistas na seção 4.3.1), fizemos a conversão de várias vazões tal que Q é a vazão simulada que tem o mesmo tempo entre bolhas T_n que a vazão Q^c experimental. A tabela 4.2 mostra a conversão entre as duas vazões para alguns valores de interesse.

Com a conversão das vazões originais Q para vazões com T_n equivalentes,

Q^c (ml/min)	Q (ml/min)
40	120
64	182
84	226
105	270
126	312
147	352
167	390
180	428

Tabela 4.2 – Alguns valores importantes para a conversão entre a vazão usada nas simulações Q e a vazão corrigida Q^c , que é a vazão que o sistema experimental tem o mesmo tempo entre bolhas T_n que o sistema simulado com vazão Q .

fizemos uma nova calibração de α , desta vez usando as vazões convertidas Q^c . O resultado desta conversão foi $\alpha = 40 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ para $H = 100 \text{ mm}$. Este valor é bastante superior ao achado na calibração antiga pois as vazões envolvidas Q também são muito maiores, e, como pode ser visto nos diagramas da figura 4.40, vazões maiores implicam em δT menores fora das órbitas periódicas.

A partir da calibração, fizemos as simulações para a construção de um espaço de parâmetros de sincronização (Q_1, Q_2) , com $\alpha = 36 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$, seguindo os mesmos procedimentos experimentais descritos na seção 4.3.4. Isto é, foi feito um espaço análogo ao experimental apresentado na figura 4.25 e ao simulado sem a conversão da vazão, presente na figura 4.41(A). Este novo espaço de parâmetros simulado, que pode ser visto na figura 4.43, é praticamente idêntico ao espaço de parâmetros da figura 4.41(A), isto é, o espaço simulado sem conversão dos fluxos de ar.

Fizemos também simulações para construir espaços de parâmetros (Q_1, α) , análogos aos espaços (Q_1, H) experimentais. Nas figuras 4.44 e 4.45, apresentamos os espaços de parâmetros simulados correspondentes aos espaços de parâmetros experimentais das figuras 4.27 e 4.28, respectivamente. Uma comparação com todos os espaços de parâmetros, podemos ver que a região de sincronização 1:1, aparece nas proximidade de $Q_1 = Q_2$, ocupando uma região

Figura 4.43 – Espaço de parâmetros (Q_1, Q_2) simulado de sincronização dos borbulhamentos para $\alpha = 36 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$.

maior, com relação a Q_1 , conforme aumentamos o acoplamento. Este crescimento das janelas de sincronização ocorre também para sincronizações de ordem superior, como pode ser visto claramente em todos os espaços de parâmetros simulados das figuras 4.44 e 4.45 para a sincronização 2:3. Podemos ver este fenômeno tanto na simulação sem converter a vazão (figura 4.41(B)) quanto em todos os diagramas experimentais (figuras 4.27 e 4.28).

Uma comparação importante é a dos espaços apresentados nas figuras 4.28(B), 4.41(B) e 4.45(B), principalmente para verificar se o uso de vazões Q compatíveis com os tempos entre bolhas experimentais T_n fazem os espaços de parâmetros simulados ficarem mais próximos aos experimentais. Com relação aos valores de que Q_1 (ou Q_1^c) que as sincronizações aparecem, não foi possível identificar melhora, pois os valores de Q_1^c nos quais as principais sincronizações (1:1, 1:2, 2:3, 3:4) aparecem são aproximadamente os mesmos em ambas as simulações (figuras 4.41(B) e 4.45(B)). Porém, podemos identificar duas evidências de maior adequação das novas simulações:

Figura 4.44 – Espaços de parâmetros (Q_1, α) de sincronização simulados dos borbulhamentos para: (A) $Q_2^c = 64 \text{ ml/min}$; (B) $Q_2^c = 84 \text{ ml/min}$, (C) $Q_2^c = 105 \text{ ml/min}$.

Figura 4.45 – Espaços de parâmetros (Q_1, α) de sincronização simulados dos borbulhamentos para: (A) $Q_2^c = 126 \text{ ml/min}$; (B) $Q_2^c = 147 \text{ ml/min}$, (C) $Q_2^c = 167 \text{ ml/min}$.

1. As sincronizações de ordem superior que estão próximas a sincronização 1:1 na simulação mais nova (figura 4.45(B)) parecem ser deslocadas para longe da sincronização 1:1 conforme aumentamos a constante de acoplamento. Este efeito parece existir no espaço de parâmetros experimental (figura 4.28(B)) mas não aparece na simulação antiga (figuras 4.41(B)).
2. O tamanho da janela de sincronização 1:1 no novo sistema é maior (de 110 até 180 ml/min, para o valor máximo de α apresentado) quando comparado com a simulação antiga (120 até 180 ml/min em condições análogas). Esta janela de sincronização no espaço experimental vai de 100 até 180 ml/min para $H = 130$ mm, o que é mais próximo da nova simulação.

Logo, ao aplicar uma correção na vazão para fazer os tempos entre bolhas T_n se tornarem iguais no sistema não interagente simulado e experimental leva a resultados positivos, porém pequenos.

Mapas de Poincaré da diferença de fase

Uma ferramenta interessante para estudar como o acoplamento usado governa a dinâmica de sincronização do sistema e, com isso, verificar se o acoplamento usado reproduz adequadamente o sistema experimental é a construção de mapas de primeiro retorno da diferença de fase $\phi \bmod 2\pi$, como feito com os dados experimentais nas seções 4.3.4 e 4.3.6. Para o caso das simulações, como explicitado na descrição dos espaços de parâmetros de sincronização, usamos os instantes de destacamento das bolhas, pois estes são os instantes mais simples e naturais para fazermos a seção de Poincaré no sistema simulado.

Na figura 4.46, apresentamos dois mapas de primeiro retorno da diferença de fase ϕ , para combinações de parâmetros diferentes, mas em ambas as figuras o sistema está nas proximidades da região de sincronização 1:1. Apesar da diferença em todos os parâmetros, as duas figuras são bastante semelhantes. A única diferença é a amplitude dos $\Delta\phi_n$, que se deve à diferença entre os parâmetros de acoplamento dos dois casos.

Olhando com atenção para o gráfico da figura 4.46(A), especificamente para a região entre $\phi_n = 5$ e $\phi_n = 6$, podemos ver claramente dois valores de

Figura 4.46 – Dois mapas de primeiro retorno da diferença de fase ϕ , nas proximidades da bifurcação selá-nó que dá origem à sincronização de fase 1:1. Os valores de Q_1 , Q_2 e α nos títulos das figuras estão expressos em ml/min para as vazões e kg/(m²s) para a constante de acoplamento.

ϕ_{n+1} para o mesmo de ϕ_n , fenômeno análogo ao visto no experimento para $H \geq 100$ mm (figura 4.29(E-F)). Comparando com mais detalhes as formas dos mapas de retorno experimentais e simulados, podemos ver que no mapa simulado, ϕ_{n+1} é praticamente linear com relação a ϕ_n entre $\phi_n = 1$ e $\phi_n = 5$, e varia intensamente entre $\phi_n = 5$ e $\phi_n = 1$ (mais precisamente entre $\phi_n = 5$ e $\phi_n = 2\pi$ e entre $\phi_n = 0$ e $\phi_n = 1$). Este comportamento do sistema simulado é diferente do comportamento apresentado pelo sistema experimental, que pode ser visto nas figuras 4.29, 4.26 e 4.36, no qual não existe uma separação clara com uma região na qual os ϕ_{n+1} variam linearmente. Entretanto, é interessante notar que os mapas experimentais apresentam um comportamento mais suave, isto é, mais próximo do linear, nas proximidades de $\phi_n = \pi$. Isto sugere que a forma do acoplamento não é ideal e provavelmente um acoplamento derivado de primeiros princípios ou construído empiricamente deve gerar mapas de Poincaré da diferença de fase ϕ mais próximos aos experimentais. Talvez, esta melhora na forma do acoplamento até possa explicar as origens das mudanças qualitativas que o sistema experimental sofre, como as identificadas ao compararmos os mapas das figuras 4.29 e 4.36.

Capítulo 5

Considerações Finais

Reformamos o arranjo experimental de um bico e criamos um novo sistema de aquisição de dados, no qual as novas técnicas de aquisição, o microfone e a câmera de alta velocidade, foram integradas à tradicionalmente usada neste sistema, o tempo entre bolhas usando um par laser-fotodiodo. Com as filmagens da câmera de alta velocidade conseguimos estimar a evolução temporal do volume e da altura da bolha em formação e relacioná-las com as ondas de pressão no sistema de injeção de ar, medidas com os microfones. Usamos estes novos resultados para aprofundar nossa compreensão da dinâmica de formação de bolhas, principalmente com relação aos parâmetros que nos fornecem a rota de adição de períodos.

A análise das novas variáveis medidas inspirou a criação de um modelo derivado de primeiros princípios que reproduz as cascatas de adição de períodos bem como o efeito de aumentarmos o comprimento da mangueira. Este modelo permitiu que fizéssemos previsões sobre como a rota de adição de períodos depende da geometria do bico borbulhador: ocorrem mais adições de período para raios internos menores e comprimentos maiores das agulhas metálicas presentes nos bicos e as cascatas de adição de período aparecem para valores menores da vazão no bico. Verificamos experimentalmente estas previsões, para tanto confeccionamos novas agulhas metálicas com diferentes raios internos e comprimentos para usarmos no bico borbulhador.

Inserindo uma perturbação periódica na pressão de equilíbrio do modelo desenvolvido, fizemos simulações que reproduzem os diagramas de bifurcação experimentais da formação de bolhas com perturbação sonora. No estudo

deste sistema, descobrimos que o sistema experimental apresenta biestabilidade, algo até então não identificado, apesar de presente nos mapas do círculo de Arnold.

O desenvolvimento do sistema integrado permitiu que estudássemos um novo experimento, o tubo borbulhador com dois bicos injetores com controles de ar independentes. Neste sistema, as dinâmicas de formação de bolhas nos dois bicos estão acopladas pela dinâmica de circulação do fluido no qual ambos bicos estão imersos. Para analisar este sistema, construímos diagramas de bifurcação variando lentamente a vazão em um dos bicos enquanto mantínhamos a outra vazão constante. Construímos também espaços de parâmetros com grande resolução, a partir da coleta e determinação da periodicidade dos atratores dentro de uma rede quadrada de vazões dos dois bicos.

Descobrimos que as dinâmicas nos dois bicos tendem a assumir caráter periódico em conjunto, e, nestes momentos, as dinâmicas de formação de bolhas nos dois bicos ficam sincronizadas. Verificamos a sincronização das dinâmicas por meio da análise da diferença de fase generalizada, e estudamos o aparecimento da sincronização de fase através do mapa de Poincaré da diferença de fase. Para ajudar na compreensão do sistema, adaptamos o modelo de um bico inserindo um acoplamento simples entre dois modelos de bicos e construímos diagramas análogos aos experimentais. A partir de diagramas com várias alturas de coluna líquida, espaços de parâmetros de uma vazão pela altura e simulações, descobrimos que a altura da solução de água e glicerina tem uma papel central na determinação da intensidade do acoplamento das dinâmicas.

Bibliografia

- [AAA09] A. Ajbar, W. Al-Masry, e E. Ali, *Prediction of flow regimes transitions in bubble columns using passive acoustic measurements*, Chemical Engineering and Processing **48**, 101-110, 2009.
- [ASY97] K. T. Alligood, T. D. Sauer, e J. A. Yorke, *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, 1997.
- [AFH94] J. H. Argyris, G. Faust, e M. Haase, *An exploration of chaos*, North-Holland, 1994.
- [Arn80] V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des equations différentielles ordinaires*, MIR, 1980.
- [CGW78] R. Clift, J. R. Grace e M. E. Weber, *Bubbles, Drops and Particles*, Academic, New York, 1978.
- [CPT04] E. Colli, V. S. M. Piassi, A. Tufaile e J. C. Sartorelli, *Bistability in bubble formation*, Physical Review E **70**, 066215, 2004.
- [DP80] J. R. Dormand e P. J. Prince, *A family of embedded Runge-Kutta formulae*, Journal of Computational and Applied Mathematics **6**, 19, 1980.
- [DGS79] J. F. Douglas, J. M. Gasiorek e J. A. Swaffield, *Fluid Mechanics*, Pitman, 1979.
- [GN81] T. Geisel e J. Nierwetberg, *Universal fine-structure of the chaotic region in period-doubling systems*, Physical Review Letters **47**, 975, 1981.
- [GBQ04] P.-G. Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves*, Springer, 2004.

- [Kan82] K. Kaneko, *On the Period-Adding Phenomena at the Frequency Locking in a One-Dimensional Mapping*, Progress of Theoretical Physics **68**, 669, 1982.
- [KJ05] A. A. Kulkarni e J. B. Joshi, Industrial & Engineering Chemical Research **44**, 5873, 2005.
- [Lor63] E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Sciences **20**, 130-141, 1963.
- [May76] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261**, 459, 1976.
- [MK78] K. K. Mishra e M.L. Kapoor, *Kinetics of liquid-gas reactions through bubbles*, Hydrometallurgy **3**, 75, 1978.
- [PG82] R. Perez e L. P. Glass, *Bistability, period doubling bifurcations and chaos in a periodically forced oscillator*, Physics Letters A **90**, 441-443, 1982.
- [PCS12] F. A. C. Pereira, E. Colli e J. C. Sartorelli, *Period adding cascades: experiment and modeling in air bubbling*, Chaos **22**, 013135, 2012.
- [PCS13] F. A. C. Pereira, E. Colli e J. C. Sartorelli, *Synchronization of two bubble trains in a viscous fluid: Experiment and numerical simulation*, Physical Review E **87**, 022917, 2013.
- [PTS04] V. S. M. Piassi, A. Tufaile, e J. C. Sartorelli, *Period-adding bifurcations and chaos in a bubble column*, Chaos **14**, 2, 477-486, 2004.
- [Pia07] V. S. M. Piassi, *Comportamento complexo na formação de bolhas de ar em líquidos*, Tese de Doutorado, IFUSP, 2007.
- [PCT09] V. S. M. Piassi, E. Colli, A. Tufaile e J. C. Sartorelli, *Arnold family in acoustically forced air bubble formation*, Chaos, Solitons and Fractals **41**, 1041-1049, 2009.
- [PRK01] A. Pikovsky, M. Rosenblum, e J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, 2001.
- [Poz97] C. Pozrikidis, *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1997.

- [RDZ01] M. Ruzicka, J. Drahos, J. Zahradnik e N. H. Thomas, *Structure of gas pressure signal at two-orifice bubbling from a common plenum*, Chemical Engineering Science **55**, 421, 2000.
- [RBD09a] M. C. Ruzicka, R. Bunganic, e J. Drahos, *Meniscus dynamics in bubble formation. Part I: Experiment*, Chemical Engineering Research and Design **87**, 1349-1356, 2009.
- [RBD09b] M. C. Ruzicka, R. Bunganic, e J. Drahos, *Meniscus dynamics in bubble formation. Part II: Model*, Chemical Engineering Research and Design **87**, 1357-1365, 2009.
- [SGP94] J. C. Sartorelli, W. M. Gonçalves, e R. D. Pinto, *Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment*, Physical Review E **49**, 3963-3975, 1994.
- [SM98a] P. Snabre e F. Magnifotcham, *I. Formation and rise of a bubble stream in a viscous liquid*, European Physical Journal B **4**, 369-377, 1998.
- [SM98b] P. Snabre e F. Magnifotcham, *II. Recirculation flow induced by a bubble stream rising in a viscous liquid*, European Physical Journal B **4**, 379-386, 1998.
- [TMA03] G. Tanaka, S. Murashige e K. Aihara, *Bifurcation Structures Of Period-Adding Phenomena In An Ocean Internal Wave Model*, International Journal of Bifurcation and Chaos **13**, 3409-3424, 2003.
- [Tuf00] A. Tufaile, *Estudo da formação de bolhas em líquidos viscosos: Uma abordagem usando a Teoria do Caos*, Tese de Doutorado, IFUSP, 2000.
- [TS01] A. Tufaile e J. C. Sartorelli, *The circle map dynamics in air bubble formation*, Physics Letters A **287**, 74-80, 2001.
- [TS02] A. Tufaile e J. C. Sartorelli, *Bubble and spherical air shell formation dynamics*, Physical Review E **66**, 056204, 2002.
- [XT03] S. Xie and R. B. H. Tan, *Bubble formation at multiple orifices—bubbling synchronicity and frequency*, Chemical Engineering Science **58**, 4639, 2003.
- [YLL06] Z. Yang, Q. Lu e L. Li, *The genesis of period-adding bursting without bursting-chaos in the Chay model*, Chaos, Solitons and Fractals **27**, 689-697, 2006.

- [ZS01] L. Zhang e M. Shoji, *Aperiodic bubble formation from a submerged orifice*, Chemical Engineering Science **59**, 5371-5381, 2001.

Apêndice A

Artigos Publicados

Period adding cascades: Experiment and modeling in air bubbling

Felipe Augusto Cardoso Pereira,¹ Eduardo Colli,² and José Carlos Sartorelli¹

¹Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, Brazil

²Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, R. do Matão, 1010, São Paulo 05508-090, Brazil

(Received 27 January 2012; accepted 2 March 2012; published online 23 March 2012)

Period adding cascades have been observed experimentally/numerically in the dynamics of neurons and pancreatic cells, lasers, electric circuits, chemical reactions, oceanic internal waves, and also in air bubbling. We show that the period adding cascades appearing in bubbling from a nozzle submerged in a viscous liquid can be reproduced by a simple model, based on some hydrodynamical principles, dealing with the time evolution of two variables, bubble position and pressure of the air chamber, through a system of differential equations with a rule of detachment based on force balance. The model further reduces to an iterating one-dimensional map giving the pressures at the detachments, where time between bubbles come out as an observable of the dynamics. The model has not only good agreement with experimental data, but is also able to predict the influence of the main parameters involved, like the length of the hose connecting the air supplier with the needle, the needle radius and the needle length. © 2012 American Institute of Physics. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.3695345>]

We have studied the air bubbling from a nozzle submerged in a viscous liquid (water/glycerin solution), and we are presenting experimental and modeling results. Placed near the bottom of a transparent container, the nozzle is a needle syringe connected to an air reservoir through plastic hoses of different lengths. The air flow is setup by a Proportional, Integral, and Derivative (PID) controller. For modeling purposes, we used four different control parameters: the air flow (Q), the hose connection length (L), the needle length (h), and radius (r_0); as well as we measured three types of data: (a) the time (T_n) delay between successive bubbles by detecting the instants when they start to cross a laser beam; (b) the pressure (P) wave with a microphone placed in the hose connection near the bottom nozzle; and (c) the bubbles volume (V) obtained from video images collected with a high speed camera. The main outcomes of the experiment are the bifurcation diagrams of the sequence of time intervals versus the air flow value (T_n vs. Q). Each bifurcation diagram was obtained with a different set of the geometric parameters L , h , and r_0 . Mainly for small needle radius, the bifurcation diagram shows period adding cascades, that is, at each bifurcation point, the period is increased by one, which can be explained by discontinuous one-dimensional iterating maps. We show that these maps arise naturally in a physical model, where the evolution of the pressure in the hose and the position of the bubble are ruled by an ordinary differential equation, with jumps at the detachments. The maps are like Poincaré maps, giving the dependence of the pressure at the bubble detachment with the pressure at the previous detachment. Numerical simulation of the model shows good agreement with the experiment, including the dependence of the bifurcation diagram with the geometric parameters.

I. INTRODUCTION

There is a vast literature about bubble formation and bubble trains, which is partly motivated by industrial applications,¹ but has also a strong appeal as a fundamental problem of physics.² In the last decades, there were hundreds of papers discussing mean properties of bubble formation, for instance volume at the detachment, bubble shape and bubbling frequency, and their dependence on the many parameters involved, like density, viscosity, and other properties of the liquid phase, radius of the orifice, position of the orifice (bottom or top submerged), gas chamber volume, liquid column depth, constant air flow versus constant pressure, and so on (see, for example, Refs. 3–5). A detailed account of these experiments and models is summarized and discussed byulkarni and Joshi,⁶ who point out and try to elucidate many seemingly contradicting results. More recently, detailed studies of the very last moments before the pinch-off of a bubble have been carried on with the improvement of fast camera recording technology.^{7–9} There are many works dealing with the lack of constancy in the sequence of times between bubbles, specially from the statistical and dynamical points of view,^{10–16} where the time series are compared with the ones produced by low dimensional well known dynamical systems or analyzed under the point of view of interactions between the traveling bubbles to take into account the wake effects on the forming bubbles in fluidized bed reactors.^{17–21} Similarly to the Ruzicka *et al.*^{22,23} approach, here we also focus on the low dimensional character of time series in bubble trains by modeling the interplay between the time dependent variables, position of the interface and pressure of the gas chamber, to describe with simple hydrodynamical principles the mechanisms of period adding cascades and complex time series appearing in some parameter settings of air bubbling.

Well known in the dynamical system literature, period doubling is the name given to the bifurcation induced by a

parameter change on a dynamical system when an attracting periodic orbit of period k becomes an unstable equilibrium and, near it, another attracting periodic orbit of period $2k$ appears. A period doubling cascade is a succession of period doubling bifurcations, and periods rise in geometric progression. Period doubling cascades in bifurcation diagrams became well known in the 1970s, with the investigations on the quadratic (or logistic) family of iterating maps $x \rightarrow 4ax(1-x)$, where a is the control parameter. In this example, and also in many others that appeared afterwards, the system starts with a period k , for some parameter, and as the parameter varies it undergoes an infinite sequence of bifurcations, each one multiplying the periodicity by two. This sequence of bifurcations geometrically converges to a certain parameter value, beyond which chaos and periodicity alternates in a non-trivial way.

More recently, another kind of bifurcation cascade has been described: the period adding cascade, in which the periods of the attracting orbits rise in arithmetic progression as the control parameter increases. These cascades have been reported in experimental observations and numerical simulations of theoretical models concerning dynamics of neurons and pancreatic cells,^{24–28} lasers,²⁹ electric circuits,^{30,31} chemical reactions,³² oceanic internal waves,³³ and also bubbling.^{14–16} In many cases, the cascade is suddenly interrupted by a period 1 attractor, and there is no accumulating parameter near which periods go to infinity.

In a broad sense, period adding appears whenever a control parameter is going to create a fixed point in a non-wandering region of the dynamics, like in type-I intermittency,³⁴ where a saddle-node point appears at some parameter value and the number of iterates needed to bypass the locus of creation of the fixed point increases to infinity. It also appears when the non-wandering region gets near a repelling periodic point, like in the quadratic family when a approaches the value 1 from below, where the image of the critical value tends to the repelling fixed point $x=0$. In general, these transitions from one period to the next have intermediate chaotic regimes.^{25,26,35,36} But, there are also other situations, as the Chay model for pancreatic cells²⁵ and bubbling from a nozzle,¹⁵ where, under certain conditions, one sees non-chaotic transitions in the cascade. These period adding cascades with non-chaotic transitions can be understood with one-dimensional maps having a discontinuity and a plateau, the former giving nonlinearity but avoiding high derivatives and the latter introducing small derivatives, in such a way that chaotic behavior becomes impossible.^{14,15,37}

In the case of bubbling, families of one-dimensional maps reproducing the behavior of experimental bifurcation diagrams have been found,¹⁵ showing the dynamical systems interpretation of the phenomena, from the qualitative point of view. But, it is still not clear how it is possible to obtain these one-dimensional maps using simple hydrodynamical arguments. We give an answer here, by showing that the bifurcation diagrams of the bubbling experiment, relative to the parameter control given by the air flow injected in the liquid by a nozzle, can be reproduced by modeling the interplay of only two variables, bubble position and pressure,

which are mutually dependent through a pair of differential equations that are valid until the detachment of each bubble. This model, when reduced to a kind of one-dimensional Poincaré section, gives the one-dimensional maps that we were looking for.

The similarity between the simulations and experiments helps clarify the roles of the main geometric parameters of the experiment. As already reported in Refs. 14 and 15 increasing the length of the hose connecting the air controller with the nozzle makes higher periods appear in the cascades. On the other hand, we observed that increasing the radius of the nozzle has the opposite effect: larger radii do not show period adding cascades and eventually no behavior different from period one stable regimes.

It is well known that under certain conditions, bubbles rise after a waiting stage that we call nucleation, where the interface gas/liquid stays almost static, in general inside the channel connecting the gas chamber and the liquid column. One may say that the period adding phenomenon occurs in the transition, induced by the increasing air flow, between bubble regimes which present nucleation and those which do not. In this transition, there are bursts of bubbles without nucleation, followed by one bubble formed with nucleation. The number of bubbles per burst grows when the air chamber volume (or the hose length) increases, since this causes a smaller pressure drop in the chamber for each detachment (see Ref. 6 and references therein). This number also grows when the needle radius is small: the pressure barrier due to surface tension becomes higher, implying a higher pressure after nucleation and, as a consequence, requiring more bubble releases for lowering the pressure at the point of starting nucleation again.

This is achieved in the dynamical modeling by predicting not only bubble growth but also saying how the time dependent variables of a bubble are passed on to the next bubble at the detachment. This approach does not assume a periodic behavior, opening the possibility of chaotic time series and transient regimes. Even for period 1 regimes, it may show how the properties of the equilibrium solution evolve with the parameters and also why the transient regimes converge to this equilibrium.

Our main experimental data are the bifurcation diagrams of time between bubbles as a function of the air flow, which are obtained with different values of the geometric parameters hose length, needle length, and needle radius. We also fix some values of the air flow and measure the time evolution of pressure inside the hose and bubble position. Then, we develop a model, using differential equations on the relevant variables of the experiment, which will be used to generate numerical simulations which show good agreement with the experiments. Moreover, a reduction of the model to a one-dimensional iterating map will help us to analyze the parameters influence on the bifurcation diagrams.

As we need bifurcation diagrams traced out with thousands of bubbles, we kept the model as simple as possible, in order to make simulations feasible. We avoided numerical integration of partial differential equations, e.g., the Navier–Stokes equation, as well as empirical models with adjustable parameters.

II. EXPERIMENTAL SETTINGS

A diagram of the experimental apparatus is shown in Fig. 1. It consists of an acrylic transparent cylindrical container of 10 cm diameter which is partially filled with a glycerol and water solution (75%–25%). The bubbles are generated by injecting air through a nozzle, which is a hypodermic syringe needle, at the bottom of the solution container. The air flow rate Q is controlled by a proportional solenoid valve driven by a PID controller^{12,13,38} and measured with a flowmeter in ml/min. The time delay T_n between successive bubbles is measured by detecting in a resistor the beginning of the 5 V voltage pulses induced by the scattering of a laser beam (placed a little above the nozzle), focused in a photo-diode which is in series with the resistor. Bifurcation diagrams are constructed by plotting T_n against the air flow Q letting it to vary at rates between 1.5 and 4.0 ml·min⁻², by using the linear ramp mode of the PID set point. These diagrams are obtained for different values of the air supply hose length L , the nozzle inner radius r_0 , and the nozzle length h . Table I shows all geometrical and physical parameters of the experiment, together with their notation.

III. RESULTS

A. Experimental data

Insight of the bubble formation, for fixed air flow, was obtained by observing the pressure wave inside the hose with a microphone placed close to the nozzle. Simultaneously, the images of the bubble profiles were recorded with a high speed camera at 1000 fps with a resolution of 640 × 480 pixels, so that position and volume evolution have been found. In Fig. 2, we give three examples of what happens in regimes of different periodicities, with the variables volume V and pressure

FIG. 1. Schematic drawing of the experimental apparatus. After passing through a proportional solenoid valve, the air is driven by a hose of length L to a nozzle of length h and radius r_0 at the bottom of the cylindrical container, where a laser beam is used to detect the time intervals between bubbles. A flowmeter measures the air flow rate, a microphone inside the hose measures the wave pressure and a high speed camera takes images of the bubbling at 1000 fps.

TABLE I. Geometrical and physical parameters of the experiment, with their notation.

Needle radii	r_0	$0.2, 0.5, 1.1 \times 10^{-3}$ m
Hose lengths	L	0.30, 0.88, 1.80 m
Needle lengths	h	$2.0, 2.9 \times 10^{-2}$ m
Hose cross section area	A	1.4×10^{-5} m ²
Microphone chamber volume	V_M	1.0×10^{-5} m ³
Hose volume	V_0	$V_M + A \cdot L$
Air density	ρ_a	1.22 kg/m ³
Air kinematic viscosity	ν_a	1.52×10^{-5} m ² /s
Air dynamical viscosity	μ_a	1.86×10^{-5} Pa·s
Liquid density	ρ_ℓ	1210 kg/m ³
Liquid kinematic viscosity	ν_ℓ	3.0×10^{-5} m ² /s
Liquid dynamical viscosity	μ_ℓ	3.6×10^{-2} Pa·s
Interface surface tension	Γ	6.7×10^{-2} Pa·m
Gravitational acceleration	g	9.78 m/s ²
Atmospheric pressure	p_{atm}	92400 Pa
Nozzle deepness	H	7.5 cm
Nozzle height	H_b	~5 cm
Temperature	T	293 K

p as a function of time. The volume is measured only above the nozzle and the pressure is the integrated signal of the microphone, in arbitrary units. The graphs of the left column show $V(t)$ and $p(t)$ for short periods of time, corresponding to few bubble cycles of formation and detachment. The graphs of the right column show the corresponding trajectories in the (V, p) plane. In Figs. 2(a-A) and 2(b-B), the period is 1, while in Fig. 2(c-C) the period is 4. Nucleation, the waiting stage where the interface is static (inside the needle or near the needle tip) can be seen in Figs. 2(a-A) and 2(c-C). In Fig. 2(b-B), each bubble starts growing immediately after the detachment of the previous one, with $V(t) \propto t^3$. This is also the case in Fig. 2(c-C) except for the first bubble after nucleation. Fig. 2(c-C) strongly suggests an integrating (during nucleation) and firing (via bursts of bubble releases), analogous to neuron dynamics. The pressure raises until it reaches a threshold p_H , and then the bubbles detach one after the other, until the pressure attain a value smaller than a second threshold p_L , starting nucleation again.

Bifurcation diagrams, on the other hand, show the evolution of times between bubbles and of periodicity as a parameter changes. In this experiment, we used the air flow as this control parameter, since it can be precisely and smoothly changed without stopping bubbling. Figs. 3(a), 3(b), 3(c) show experimental bifurcation diagrams of the time intervals between bubbles (T_n) as a function of the air flow Q , for a needle with inner radius $r_0 = 0.2$ mm, length $h = 20$ mm, and three different values of the hose length L : 30, 88, and 180 cm. They show period adding cascades always ending with a stable period 1 regime at some critical air flow value Q_c . The highest values of T_n correspond to the bubbles which are released after the waiting stage of nucleation.

The changes in L do not affect the value of the critical flow $Q_c \sim 43$ ml/min as well as the values of the smallest T_n 's, near 25 ms, corresponding to the bubbles that grow without nucleation. On the other hand, as L becomes larger, higher periods appear and also the non-continuous curve of

FIG. 2. Three experimental situations with geometrical parameters $r_0 = 0.2$ mm, $h = 20$ mm, $L = 30$ cm, and three different values of the air flow Q : 10 ml/min, showing period 1 with nucleation (a-A), 50 ml/min, showing period 1 without nucleation (b-B), and 39 ml/min, showing period 4 with nucleation (c-C). In the left column, the time evolution of the bubble volume (black continuous line) and the pressure (red dotted line), which is the integrated microphone signal. The left vertical scale is for the volume and the pressure is shown in arbitrary units in the right vertical scale. As the volume cannot be measured inside the nozzle, its graph is flat during nucleation. In the right column, the trajectories in the plane (V, p) , where nucleation appears as a vertical piece of trajectory at $V = 0$.

highest T_n 's become higher. In the diagrams of the right column of Fig. 3, we changed the needle length to $h = 29$ mm, with $r_0 = 0.2$ mm, and L equal to the corresponding diagrams at the left. The smallest times stayed near 25 ms and the critical flow lowered to the value $Q_c \sim 32$ ml/min, remaining unaffected by L .

In Fig. 4, we fixed $L = 180$ cm and $h = 29$ mm, but used needle radii 0.5 and 1.1 mm. For $r_0 = 1.1$ mm, the bifurcation diagram shows only period 1, so that no period adding or any kind of bifurcation appears. The needle radius $r_0 = 0.5$ mm shows a transition scenario, where period adding bifurcations are less clear and appear together with chaotic bands and an inverted doubling bifurcation before period 1. Moreover, this complex dynamical behavior is displaced to a region of higher air flow rates.

Departing from simple hydrodynamical laws, our model will reproduce in good approximation the time evolution of position and pressure inside each cycle shown in Fig. 2, and

also the richness of behavior of the bifurcation diagrams of Figs. 3 and 4, by showing period adding cascades that undergo the same modifications under parameter changes. In particular, the model will show how the geometric parameters affect these cascades.

B. Modeling

We assume that the nozzle has radius r_0 with a wall of negligible thickness, and that the air/liquid interface is a spherical cap, since the Eötvös or Bond number

$$E_o = \frac{\rho_\ell g r_0^2}{\Gamma} \quad (1)$$

is small² (at most 0.2 for $r_0 = 1.1$ mm). The spherical cap is characterized by the position z of its maximum height, with the convention that $z = 0$ at the height of the nozzle tip.

The boundary of the cap is always at the nozzle wall, exactly in the tip for $z \geq z_0$ and inside the nozzle for $z < z_0$. The curvature radius of the spherical cap is assumed to be constant for $z \leq z_0$ (see Fig. 5). The value of z_0 is associated to surface tension properties of the contact between the interface air/liquid and the nozzle wall. We will say that the interface is inside the nozzle if $z < z_0$ and outside otherwise. The curvature radius r of the cap is a function of z given by $r(z) = (r_0^2 + z^2)/2z$ for $z \geq z_0$, and $r = r_0$ for $z < z_0$ and has a minimum for $z = r_0$, with value $r = r_0$.

We define the equilibrium pressure

$$p_e(z) = p_{\text{atm}} + \rho_\ell g(H - z_m) + \frac{2\Gamma}{r(z)} \quad (2)$$

(see Table I for terminology of physical constants) needed to keep the bubble in static equilibrium, as the sum of the atmospheric pressure, the hydrostatic pressure at the medium height z_m of the bubble and the term related to the surface tension, where the latter has a maximum at $z = r_0$. The term $-\rho_\ell g z_m$ could be neglected, since it is small compared with the reference pressure

$$p_0 = p_{\text{atm}} + \rho_\ell g H. \quad (3)$$

The other variable of the model is the pressure p inside the hose, regarded as a reservoir of volume V_0 satisfying the ideal gas law $pV_0 = nRT$ and $\dot{p}V_0 = \dot{n}RT$, where n is the quantity of gas (in moles), assuming an isothermal process, which gives the better result with this simple modeling. Therefore, the mass balance inside the hose gives $\dot{n} = \phi - \frac{p}{RT}\dot{V}$, where ϕ is the air flow in moles per second and $\dot{V}$ is the bubble volume variation. As $\dot{V} = \frac{dV}{dz}\dot{z}$, with $\frac{dV}{dz}$ equal to $\frac{\pi}{2}(r_0^2 + z^2)$ for $z \geq z_0$ and πr_0^2 for $z < z_0$, it follows that

$$\dot{p} = \frac{1}{V_0} \left(RT\phi - p \frac{dV}{dz} \dot{z} \right). \quad (4)$$

Next, we assume that the pressure drop from the reservoir to the interface is much smaller than the pressure itself and this, together with a Mach's number much smaller than

FIG. 3. Experimental bifurcation diagrams T_n vs. Q , where T_n is the sequence of time intervals between bubbles and Q is the air flow rate, for nozzle radius $r_0 = 0.2$ mm, hose lengths $L = 30, 88$, and 180 cm (a-A, b-B, and c-C, respectively) and nozzle heights $h = 20$ mm (left column) and $h = 29$ mm (right column). The diagrams show period adding cascades, with periodicity increasing with the air flow rate, just until the regime collapses to period 1 at some critical value Q_c . This critical value depends on h , but not on L (the figures show $Q_c \sim 43$ ml/min for $h = 20$ mm and $Q_c \sim 32$ ml/min for $h = 29$ mm).

1, allows us to assume that inside the needle, the air density is constant and the pressure drop is only due to the air laminar flow. The number $\beta = \frac{r_0^2}{\nu_a T}$, which is the product of the Reynolds number with the Strouhal number, also called unsteadiness parameter,³⁹ is of the order of unity, so the unsteady Stokes equation should be used.^{40,41} But, we assume a parabolic velocity profile to keep the relative simplicity of the model, as usually done in the pressure transient theory.⁴² The profile average of this equation is given by

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\mu \bar{v}}{2r_0^2} = 0, \quad (5)$$

where $\bar{v}$ is the sectional mean velocity of the fluid. Using $\pi r_0^2 \bar{v} = \dot{V}$ and calling p_B the pressure at the interface, the pressure drop is measured by

$$p - p_B = \frac{8\mu_a h}{\pi r_0^4} \dot{V} + \frac{\rho_a h}{\pi r_0^2} \ddot{V}. \quad (6)$$

If $\ddot{V}$ was zero, Eq. (6) would be the classical Hagen-Poiseuille equation.

On the other hand, the pressure p_B has many contributions: (a) the equilibrium pressure p_e , given by Eq. (2); (b) only in the case that the interface is inside the needle, the pressure drop p_{drop} from the interface to the nozzle tip, which follows by integration of Eq. (5) in the liquid phase:

$$p_{\text{drop}} = \rho_\ell (z_0 - z) \ddot{z} + \frac{8\mu_\ell}{r_0^2} (z_0 - z) \dot{z}; \quad (7)$$

and (c) the added mass effect p_{ad} . The added mass effect is due to the fact that the pressure inside the bubble not only balances the external pressure and the mean curvature of the interface, but it is responsible for the speed and acceleration of the liquid as a whole. We estimated this effect in two different cases:

- (1) Interface outside the needle. We take the classical added mass term $\rho_\ell (R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\nu_\ell}{R}\dot{R})$ of a ball of fixed center and variable radius (which is the generalized Rayleigh equation (see Ref. 34, p. 317), we change the variable to the surface area $S = 4\pi R^2$ and change again to z using $S = \pi(r_0^2 + z^2)$, which is the area of the spherical cap as a function of z , obtaining

$$p_{\text{ad}} = \frac{\rho_\ell}{4} z \ddot{z} + \frac{\rho_\ell}{8} \frac{3z^2 + 2r_0^2}{z^2 + r_0^2} \dot{z}^2 + \frac{4\mu_\ell z}{z^2 + r_0^2} \dot{z}. \quad (8)$$

- (2) Interface inside the needle. We consider that the flow per unit area is given by $\dot{z}$ (the velocity) times πr_0^2 (the area of the cross-section). If this flow crosses a semisphere of radius R_0 , then the mean velocity at the sphere is given by $\frac{\pi r_0^2 \dot{z}}{2\pi R_0^2}$. Supposing a radial flow, this gives the velocity

field $u = \frac{1}{2} \frac{r_0^2 \dot{z}}{r^2} \vec{e}_r$. Integrating the classical Euler equation (i.e., the Navier-Stokes equation without viscosity, because the viscosity term vanishes when the flow is irrotational), this gives

$$p_{\text{ad}} = \frac{1}{4} \rho_\ell \left(r_0 \ddot{z} - \frac{1}{8} \dot{z}^2 \right). \quad (9)$$

All these contributions to p_B depend on z , $\dot{z}$, and $\ddot{z}$, so that Eq. (6) is a second order differential equation for z (discontinuous at $z = z_0$). Together with Eq. (4) and initial conditions $z(0)$, $\dot{z}(0)$, $p(0)$, the solutions $(z(t), p(t))$ can be determined by numerical integration. In the Appendix, we write down the full set of formulas and the integration procedures which were used in the numerical simulations. In particular, to avoid discontinuities in the equations, we do an affine interpolation between $z = 0$ and $z = z_0$.

Equations (4) and (6) are valid until the detachment of the bubble, which is defined as the instant for which the following equation is fulfilled:

$$\rho_\ell g \cdot \frac{\pi}{2} \left(r_0^2 z + \frac{z^3}{3} \right) = 2\pi r_0 \Gamma + 6\pi \mu_\ell \dot{z} r(z), \quad (10)$$

where the left hand side is the buoyancy and the right hand side is the surface tension in the nozzle tip plus the resistive

FIG. 4. Experimental bifurcation diagrams T_n vs. Q as in Fig. 3 for nozzle height $h = 29$ mm and hose length $L = 180$ cm, with needle radii $r_0 = 0.5$ mm (a) and $r_0 = 1.1$ mm (b). Period adding cascades disappear for larger nozzle radii.

force due to the Stokes law. We are ignoring here, for the sake of simplicity, the drag force and the time needed for the formation and destruction of a neck that occurs between the instant where the resultant force points upward and the effective detachment of the bubble. Just after the detachment, the initial conditions are reset to $z = z_\ell$, $\dot{z} = 0$, and p , where z_ℓ is some value which corresponds to the material left behind and p is equal to the same value immediately before the detachment, so that the function $p(t)$ is always continuous (see Fig. 6(a) for an illustration).

In this model, we ignore the wake effects of previously detached bubbles on the forming bubble. These effects should require empirical parameters to quantify the influence of the free bubbles in the pressure and in the momentum of the growing bubble, as done in the case of traveling bubbles above the injection point.²⁰ In this case, it would be necessary to follow the variables of the already released bubbles, increasing dimensionality, or add new empirical parameters in the model. Here, we avoided to introduce these effects so as to maintain the model simple and still preserving the

essence of period adding, with a single tuning parameter (z_ℓ). In a future study, we plan to improve the model taking into account such interactions between bubbles in the fluid.

The graph of $p_e(z)$ in the plane (z, p) is important in determining the direction of the trajectories starting at $\{z = z_\ell, \dot{z} = 0\}$. Equation (4) becomes $\dot{p} = \frac{RT\phi}{V_0}$, in particular, p increases just after the detachment. Moreover, Eq. (6), for $z = z_\ell > z_0$, becomes

$$p - p_e(z_\ell) = \left(\frac{1}{4} \rho_\ell z + \frac{\rho_a(h+z)}{\pi r_0^2} \frac{dV}{dz} \right) \ddot{z}. \quad (11)$$

This shows that the acceleration of bubble's position has the same sign as $p - p_e(z_\ell)$. Altogether, this means that if at the detachment, the pressure p is above $p_e(z_\ell)$, then z increases (or else, bubble grows) immediately after the detachment; otherwise, z decreases while p is increasing, starting nucleation. Therefore, $p_e(z_\ell)$ is the low threshold p_L mentioned in Sec. III A. The high threshold p_H can be taken as the value of the pressure when z attains the value z_ℓ again (see Fig. 6).

The effectiveness of the pressure barrier is related to the ratio between its absolute strength, which is the pressure term due to the surface tension ($\frac{2\Gamma}{r_0}$), and the characteristic pressure variation of each bubble release, which can be defined as $\frac{p_0}{V_0} \cdot \frac{2\pi r_0 \Gamma}{\rho_\ell g}$, where the second factor is the volume of the bubble at the detachment if the resistive term due to Stokes law in Eq. (10) is ignored. The ratio gives

$$\frac{\frac{V_0}{\pi r_0^3}}{\frac{p_0}{\rho_\ell g r_0}}, \quad (12)$$

which can be seen as the ratio between a characteristic adimensional volume and a characteristic adimensional pressure, and is also equal to

$$\frac{\rho_\ell g}{\pi p_0} \cdot \frac{V_0}{r_0^2}, \quad (13)$$

which shows that the effectiveness of the pressure barrier is stronger for higher values of V_0 and smaller values of r_0 .

FIG. 5. Modeling the interface air/liquid with a spherical cap, where z gives the position of the bubble top. The curvature radius is assumed to be constant for $z < z_0$, which defines the system to be inside the nozzle. For $z = r_0$, the curvature radius attains its minimum, meaning that the surface tension is maximum.

FIG. 6. A schematic illustration of the model. (a) The trajectory of each bubble is obtained by integrating Eqs. (4) and (6), with pinch-off instant determined by the detachment rule given by Eq. (10). Just after the detachment, the initial conditions are reset to $z = z_\ell, \dot{z} = 0$, and p is kept unchanged. The successive values of p generate the sequence p_n of pressures at detachments, where p_{n+1} is a function of p_n , given by a map f . The sign of $p_n - p_L$ at the detachment determines whether the n th bubble will immediately grow or nucleation will start, so $p_L = p_e(z_\ell)$ is the low threshold. The values of p_H , which is defined as the high threshold, and p_D , the pressure at the first detachment after nucleation, depend weakly on the value of p_n below p_L . (b) The shape of the graph of f , as further obtained by numerical simulation. If p is in I_{right} , then f is a growing function of p ; if p is in I_{left} , then the graph of f has a plateau, since $f(p) \simeq p_D$; I_{middle} is a very tiny transition region where the map seems to be discontinuous.

In the context of the present modeling, it is natural to ask for the deterministic dependence of the sequence of pressures $p_n = p(t_n)$ at the detachment instants. The dependence is given by the recurrence relation $p_{n+1} = f(p_n)$, where $f(p)$ is the pressure at the first instant $T = T(p)$ such that the detachment condition is fulfilled. In other words, the dynamics is determined by the iteration of f , which gives the pres-

sure at the detachment instants (p_n), and the sequence of time intervals (T_n) is determined by $T_n = T(p_n)$. Therefore, the function $T(p)$ which gives the time needed from the initial condition ($z = z_\ell, \dot{z} = 0, p$) to the final condition given by Eq. (10) is an observable of the dynamics governed by the iteration of the one-dimensional map f . The line of initial conditions in $(z, \dot{z}, p)$ space given by $\{(z, \dot{z}, p); z = z_\ell, \dot{z} = 0\}$ can be regarded as a kind of Poincaré section, in the sense that all trajectories are forced to cross it. In this sense, f will be called the Poincaré map of Eqs. (4), (6), and (10), the former two being the evolution equations and the latter the detachment rule.

The domains of the Poincaré maps can be divided into three regions, as shown in Fig. 6(b): I_{left} , at the left, where f has a plateau with value p_D , where p_D is the pressure at the first detachment after nucleation; I_{right} , at the right, where f has derivative between zero and one, but mostly near 1, with a critical point at the left end, which is the low threshold p_L ; and I_{middle} , a tiny transition region between the plateau and the critical point, where derivative is negative and mostly so high that f seems to have a discontinuity. Therefore, if $p_n < p_L$, most probably p_n belongs to I_{left} (since I_{middle} is tiny) and the system starts nucleation, with $p_{n+1} = f(p_n) \simeq p_D$. In this case, memory is lost since the pressure at the first detachment after nucleation is almost independent of the pressure at the last detachment before nucleation.

C. Numerical simulations

For the numerical simulations, we used the same values of geometric and physical parameters of the experiment. The value of z_0 was set as $0.3r_0$ and the value of z_ℓ was set accordingly to r_0 : $1.4r_0$ for $r_0 = 0.2$ mm, $1.9r_0$ for $r_0 = 0.5$ mm, and $0.5r_0$ for $r_0 = 1.1$ mm.

In Fig. 7, we show the results of the numerical simulation for $r_0 = 0.2$ mm, $h = 20$ mm and $L = 180$ cm, as in Fig. 2. The values of the air flow Q were chosen to give the same dynamical situations as in Fig. 2: period 1 with nucleation, period 1 without nucleation, and period four with nucleation. This example shows that the model reproduces the simultaneous evolution of position and pressure in the same way as it appears in the experimental diagrams of Fig. 2, including the appearance of nucleation and bursts of bubble detachments without nucleation. The volumes at the detachment for these parameters are near 14 mm^3 , a value that is not far from the $15\text{--}18 \text{ mm}^3$ of the experimental bubbles of Fig. 2, except those following nucleation (see Figs. 2(a) and 2(c)), which have volumes near 25 mm^3 .

The dependence of periodicity with the parameters and the values of the times between bubbles were tested by the reproduction of the bifurcation diagrams. Figs. 8 and 9 show a sequence of bifurcation diagrams numerically obtained with the model, using the same parameters as in Figs. 3 and 4.

Fig. 8 shows that the model reproduces not only period adding cascades but also the influence that parameters have on these cascades: (a) periods for air flow values below the critical value are bigger for larger values of L ; (b) the curve of highest T_n 's rise for larger values of L ; (c) the critical air

FIG. 7. Three periodic regimes obtained by model simulation, similar to the experimental graphs of Fig. 2, using the same geometric parameters as the experimental ones: $r_0 = 0.2$ mm, $h = 20$ mm, and $L = 30$ cm, together with the choices $z_0 = 0.3r_0$ and $z_\ell = 1.4r_0$. (a) Period 1 with nucleation, for $Q = 10$ ml/min; (b) period 1 without nucleation, for $Q = 40$ ml/min; (c) period 4 with nucleation, for $Q = 30$ ml/min.

flow value is almost constant for fixed h and different values of L and smaller for higher h ; and (d) the curve of smallest times is nearly at the same value in all diagrams.

With respect to absolute values of times and air flow, the orders of magnitude were preserved in the simulation. The smallest times were near 25 ms, the same value as in the experiment. The curves of highest T_n 's were slightly lower in simulation, which might be related to the unpredicted bigger volume of bubbles after nucleation in the experiment. The air flow values of interruption of cascades were also 25% to 30% smaller in simulation: ~ 32 ml/min for $h = 20$ mm and ~ 23 ml/min for $h = 29$ mm.

Fig. 9 also confirms that period adding cascades disappear for larger needle radii, as observed experimentally in Fig. 4. For $r_0 = 1.1$ mm, there is no behavior other than period 1. Moreover, as in the experiment, $r_0 = 0.5$ mm shows a transition diagram, with chaotic bands and an inverse period doubling bifurcation, with complexity occurring for higher air flow values. As in the case of $r_0 = 0.2$ mm, these air flow values of the simulation (~ 70 to 130 ml/min) were smaller than the values of the experiment (~ 110 to 160 ml/min).

Fig. 10 shows the numerically calculated Poincaré maps as defined in Sec. III B, giving the dependence of the

FIG. 8. The experimental bifurcation diagrams shown in Fig. 3 are well reproduced by numerical simulation of the model with parameters $r_0 = 0.2$ mm, $z_0 = 0.3r_0$, and $z_\ell = 1.4r_0$, as well as the effects of changing parameters L and h .

pressure at a detachment instant as a function of the previous one. There is no way of obtaining these maps in the experiment with stable periodic regimes, since the system exhibits only a small set of pressure values at the detachments. In numerical simulation, however, one can set arbitrary values of p at $z = z_\ell$ and $\dot{z} = 0$ and calculate the pressure $f(p)$ when the detachment rule is fulfilled, so that a graph of f can be drawn. In the right column of Fig. 10, we show three Poincaré maps for $r_0 = 0.2$ mm, $h = 29$ mm and $L = 180$ cm, using air flow values $Q = 10, 22, 25$ ml/min and, in the left column, the corresponding stable periodic trajectories projected in the (z, p) plane, with periods 3, 12, and 1, respectively.

Fig. 10 highlights the effect of increasing the air flow Q , which is moving the graph of f upwards with respect to the diagonal. If Q is low, the graph intersects the diagonal in I_{left} , so there is a fixed point with derivative almost zero (this case is not shown in Fig. 10). This corresponds to a stable period 1 regime with nucleation. On the other hand, if Q is high then the graph may intersect the diagonal in I_{right} (Fig. 10(c)). The intersection is an attracting fixed point and this corresponds to a stable period 1 regime without nucleation.

FIG. 9. The experimental bifurcation diagrams shown in Fig. 4 are also well described by the model with parameters $h = 29$ mm, $L = 180$ cm, $z_0 = 0.3r_0$, and $z_\ell = 1.9r_0$ for $r_0 = 0.5$ mm and $z_\ell = 0.5r_0$, for $r_0 = 1.1$ mm.

The more interesting case happens when the fixed point is in I_{middle} (Figs. 10(a) and 10(b)), where except near its boundary points the derivative is smaller than -1 . In this case, the intersection is a repelling fixed point and trajectories must converge to another attractor. Except for transition parameters, this attractor is the orbit of p_D . Hence, the period of this attractor depends on how many iterates of p_D remain in I_{right} before falling in I_{left} again. And this number is higher as long as the graph over I_{right} is entirely below and very near the diagonal.

Therefore, a period adding cascade appears as Q increases in the range of values such that the fixed point of the Poincaré map is in I_{middle} . Periods become higher as the graph of f over I_{right} approaches the diagonal and the cascade is interrupted when it intersects the diagonal, creating a period 1 stable regime. The periods just before the period 1 interruption are related to how much this piece of graph can get near the diagonal without creating an intersection. The more the slope is near 1, more iterates can be done in this region. Therefore, the maximum periodicity depends on the slope of the graph over I_{right} near the interruption, together with the difference $p_D - p_L$.

The dynamics may become even more complicated when I_{middle} is not so tiny, in such a way that iterates are more likely to fall into the transition interval, where $|f'|$ is high. If the orbits avoid the plateau, this is enough to give expansion along orbits and chaotic attractors become possible, in accordance with previous results.^{10,12–15} This is what happens for $r_0 = 0.5$ mm, for example. For higher r_0 , the transition interval I_{middle} may become so large that the derivative of the Poincaré map stays everywhere smaller than one in absolute value. In this case, the fixed point is always the only attractor, and period 1 regime is the only possible dynamical behavior.

D. Discussion of modeling and simulations

The above discussion shows that the bifurcation diagrams are very sensitive to fine properties of the Poincaré maps, since small parameter changes can drastically change the dynamics. But, one may have a clue of the influence of parameters by inspecting the model after some simplifications. They are: (1) ignore the added mass term p_{ad} and the pressure drop term p_{drop} in bubble pressure p_B , so that $p_B \simeq p_e(z)$; (2) ignore the second order dependence on $V(t)$ in Eq. (6), staying with the Hagen-Poiseuille equation (i.e., only the first term in the right-hand side); (3) use $p \simeq p_0$ in the right side of Eq. (4), as the pressure variations are small with respect to the reference pressure $p_0 = p_{\text{atm}} + \rho_\ell g H$; and (iv) use $h + z \simeq h$ in Eq. (6), as the values of z are much smaller than the needle length. Then, with $V(t)$ instead of $z(t)$ to describe position, the two equations become the first order system of differential equations

$$\begin{cases} \dot{V} &= \frac{\pi r_0^4}{8\mu_a h} (p - p_e(z)) \\ \dot{p} &= \frac{1}{V_0} (RT\phi - p_0 \dot{V}) \end{cases} \quad (14)$$

Equation (14) is not a good model for data reproduction, but simple enough to allow a discussion on how parameters act in Eqs. (4) and (6). Essentially, it says that the growth rate of the bubble volume is proportional to the pressure distance to the equilibrium pressure and that the pressure growth rate is proportional to the difference between air flow and volume growth (multiplied by a reference pressure).

Therefore, the influence of each parameter can be analyzed as follows:

- I. Parameter ϕ (or Q). When the bubble is growing, $\dot{V}$ is positive and, by Eq. (14), $p(t)$ starts to decrease only

FIG. 10. Three situations showing periodic behavior in the numerical simulation, showing how the graph of the Poincaré map determines the period adding cascade, with $r_0 = 0.2$ mm, $h = 29$ mm, $L = 180$ cm, $z_0 = 0.3r_0$, $z_\ell = 1.4r_0$, and $Q = 10, 22, 25$ ml/min, for (a-A), (b-B), and (c-C), respectively. In the left column, the periodic trajectories projected in the (z, p) plane and in the right column, the corresponding Poincaré maps f given the sequence of pressures p_n by iteration of $p_{n+1} = f(p_n)$. As the air flow Q grows, the rightmost part of the graph, having derivative near 1, goes up and rises the period. The periodic orbit must be attracting, since the derivative at the plateau is very near zero. The cascade is interrupted when the fixed point, that was in the region of extremely negative values of the derivative (almost a discontinuity), moves to the region of derivative smaller than one and becomes attracting.

when $\dot{V}$ attains the value $\frac{RT\phi}{p_0}$. Then, pressure reduction will happen only when $\dot{V}$ overcome the flow. In other words, if ϕ is higher, then the pressure starts to decay later, implying a higher pressure at the detachment. This implies that the values of the Poincaré map f rise, that is, the graph of f rises with respect to the diagonal, as shown in Fig. 10. The interruption of the period adding cascade occurs when ϕ is high enough as to make a bubble departing from $p_n \sim p_L$ detach at $p_{n+1} \sim p_L$ without passing by the nucleation stage.

- II. Parameter V_0 (or L). The hose volume V_0 appears in the denominator of $\dot{p}$ in Eq. (14), so that a larger V_0 reduces the absolute value of $\dot{p}$ without changing anything else. This implies more horizontal trajectories in the plane (z, p) , which in turn imply $Df(p)$ nearer 1 for p in I_{right} . As remarked above, derivatives closer to one in I_{right} allow higher periods before the interruption by a stable period 1 regime, as shown in Fig. 3.

A smaller $\dot{p}$ also implies a longer nucleation time, which appear as higher curve of highest times in bifurcation diagrams of longer hoses, as also shown in Fig. 3. On the other hand, V_0 has no direct influence inside the expression $RT\phi - p_0\dot{V}$, so that it does not seriously affect the parameter ϕ (or Q) for which the period adding cascade is interrupted, as shown in the two columns of Figs. 3 and 8.

- III. Parameter r_0 . The main influence of the needle radius r_0 is in the expression of $p_e(z)$. A smaller needle radius changes the shape of the equilibrium pressure by increasing the pressure barrier due to surface tension that makes higher periods appear in period adding cascades (see discussion of Eqs. (12) and (13)).
- IV. Parameter h . If the needle length h increases, with other parameters fixed, this means a reduction of the horizontal velocity of trajectories in the (V, p) plane. This has small effect on the nucleation time, since nucleation is a vertical trajectory in the (V, p) plane. As a consequence, the highest times become approximately unchanged. Moreover, substituting $\dot{V}$ inside the equation of $\dot{p}$, we see that $\dot{p}$ needs a bigger value of $p - p_e(z)$ to become negative, which has the effect of retarding pressure loss in bubble formation. But, this in turn means higher pressures at the detachments, or else, a higher Poincaré map, which implies, in particular, a smaller critical air flow value, as can be seen in the comparison of both columns of Fig. 3.
- V. Parameter z_ℓ . The parameter z_ℓ enters in our numerical simulation as an adjustable parameter. We used values of z_ℓ around r_0 (see Figs. 8 and 9), which is confirmed by photographs of fast cameras in the literature.⁷⁻⁹ As the volume left behind just after the pinch-off may depend on many factors (needle radius, fluid properties, flow, instantaneous pressure, fluid circulation near the nozzle etc.) not fully described in the literature for our experimental setting and heuristic values could not be observed, by the limitations of the fast image recording apparatus, we tried to adjust it accordingly to r_0 to avoid strange behaviors. If $z_\ell > r_0$, the line $z = z_\ell$ intersects the graph of the equilibrium pressure p_e in its decreasing region. As p_L is the value of p_e at $z = z_\ell$, for small r_0 , a small change of z_ℓ may cause a big change in p_L , which is the critical point of f . Hence, larger values of z_ℓ move the critical point to the left, so that the graph over I_{right} approaches the diagonal, anticipating cascades. Moreover, the difference $p_D - p_L$ becomes bigger and the size of I_{middle} becomes smaller, favoring period adding cascades with higher periods. This parameter also changes the nucleation times. Therefore, a challenge for precise modeling of bubble trains resides into well knowing how the material left behind after the pinch-off depends on all usual parameters of the bubbling experiment.
- VI. Parameter z_0 . The other adjustable parameter, z_0 , related to the shape of the interface, was set at $z_0 = 0.3r_0$. Small changes around this value did not strongly influence the bifurcation diagrams although

z_0 near zero should be avoided, since terms like $\ddot{z}$ appearing in Eqs. (6)–(8) become singular when $\ddot{z}$ has to be isolated in the equations.

IV. CONCLUSIONS

We have shown that complexity of bubbling from a nozzle at low air flow rates is due to the nonlinear interplay between pressure in the hose conducting air to the nozzle and the position and velocity of the interface air/liquid, in which the curvature of this interface plays an important role into enhancing the difference between two thresholds related to an integrating-and-firing mechanism similar to neuron dynamics. This interplay was modeled with a pair of differential equations involving bubble position and pressure, with a detachment rule based on force balance.

Many aspects of the experimental behavior have been reproduced by this model, among them the following features:

- Two types of period 1 behavior were observed, one in which every bubble is formed after a nucleation process and the other without nucleation. For periodicity above 1, the first bubble always has the nucleation process and is followed by bubbles formed without nucleation.
- For the smallest needle radius, period adding cascades were observed for three different lengths of the hose connection and for each of two different needle lengths. Longer is the hose, bigger is the bubbling periodicity; and the critical air flow value of return to period 1 is affected by the needle length but does not change with the hose length.
- For a higher value of the needle radius, irregular behavior appears interspersed with periodic behavior in the bifurcation diagram; and for an even bigger radius, the cascade is destroyed and a period 1 behavior prevails in a wide range of the air flow rate.

Moreover, the model can be reduced to the dynamics of one-dimensional Poincaré maps, in accordance to previous works giving *ad hoc* comparisons of experimental data and one-dimensional phenomena. With this kind of analysis, one sees how the graphs of Poincaré maps are sensitive to the geometric parameters in a non-trivial way, so that even not finding the exact values of bifurcation parameters and time intervals between bubbles, it is still noticeable that such a simple hydrodynamical model can give a good reproduction of the present experimental outcome.

ACKNOWLEDGMENTS

Acknowledgments to the Brazilian agencies FAPESP and CNPq and to Professor Clodoaldo G. Ragazzo for useful discussions.

APPENDIX: MODEL EQUATIONS

The model equations can be summarized as

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{1}{V_0}(RT\phi - p\dot{V}), \\ \ddot{\xi} &= \frac{1}{A(\xi)}[(p - p_e) - B(\xi)\dot{\xi} - C(\xi)\dot{\xi}^2],\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

where $\xi = \frac{z}{r_0}$, $\xi_0 = \frac{z_0}{r_0}$, p_e is defined by Eq. (2) and

$$\begin{aligned}A(\xi) &= \begin{cases} \frac{r_0^2}{4}[\rho_\ell \xi + 2\rho_a \lambda(\xi^2 + 1)], & \xi \geq \xi_0 \\ r_0^2 \left[\rho_\ell \left(\frac{1}{2} - \xi + \xi_0 \right) + \rho_a(\lambda + \xi - \xi_0) \right], & \xi \leq 0 \end{cases}, \\ B(\xi) &= \begin{cases} 4 \left[\mu_\ell \frac{\xi}{\xi^2 + 1} + \mu_a \lambda(\xi^2 + 1) \right], & \xi \geq \xi_0, \\ 8[-\mu_\ell(\xi - \xi_0) + \mu_a(\lambda + \xi - \xi_0)], & \xi \leq 0 \end{cases},\end{aligned}$$

and

$$C(\xi) = \begin{cases} r_0^2 \left[\frac{\rho_\ell}{8} \frac{3\xi^2 + 2}{\xi^2 + 1} + \rho_a \lambda \xi \right], & \xi \geq \xi_0 \\ -\frac{\rho_\ell}{8} r_0^2, & \xi \leq 0 \end{cases},$$

where $\lambda = \frac{h}{r_0}$. For $0 < \xi < \xi_0$, a linear interpolation between $A(0)$, $B(0)$, $C(0)$ and $A(\xi_0)$, $B(\xi_0)$, $C(\xi_0)$, respectively, has been done to avoid integration problems due to a discontinuity in the vector field.⁴³ The differential Eqs. (A1) were integrated using the Dormand–Prince method.⁴⁴ After each successful integration step, Eq. (10) was evaluated, and when a zero crossing was detected, the integration was halted and the system was reset to $z = z_\ell$ and $\dot{z} = 0$ (keeping p constant). The bifurcation diagrams were done by increasing the air flow at each simulated second.

¹D. Lohse, *Physics Today* **56**, 36 (2003).

²R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber, *Bubbles, Drops and Particles*, (Academic, New York, 1978).

³A. K. Khurana and R. Kumar, *Chem. Eng. Sci.* **24**, 1711 (1969).

⁴R. B. H. Tan and I. J. Harris, *Chem. Eng. Sci.* **41**, 3175 (1986).

⁵P. M. Wilkinson and L. L. van Dierendonck, *Chem. Eng. Sci.* **49**, 1429 (1994).

⁶A. A. Kulkarni and J. B. Joshi, *Ind. Eng. Chem. Res.* **44**, 5873 (2005).

⁷R. Bolaños-Jiménez, A. Sevilla, C. Martínez-Bazán, and J. M. Gordillo, *Phys. Fluids* **20**, 112104 (2008).

⁸S. T. Thoroddsen, T. G. Etoh, and K. Takehara, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 257 (2008).

⁹S. T. Thoroddsen, T. G. Etoh, and K. Takehara, *Phys. Fluids* **19**, 042101 (2007).

¹⁰L. J. Mittoni, M. P. Schwarz, and R. La Nauze, *Phys. Fluids* **7**, 891 (1995).

¹¹P. Snabre and F. Magnifotcham, *Eur. Phys. J. B* **4**, 369 (1998).

¹²A. Tufaile and J. C. Sartorelli, *Phys. Lett. A* **275**, 209 (2000).

¹³A. Tufaile and J. C. Sartorelli, *Phys. Lett. A* **287**, 74 (2001).

¹⁴V. S. Piassi, A. Tufaile, and J. C. Sartorelli, *Chaos* **14**, 477 (2004).

¹⁵E. Colli, V. S. M. Piassi, A. Tufaile, and J. C. Sartorelli, *Phys. Rev. E* **70**, 066215 (2004).

¹⁶G. Liger-Belair, A. Tufaile, B. Robillard, P. Jeandet, and J. C. Sartorelli, *Phys. Rev. E* **72**, 037204 (2005).

¹⁷C. S. Daw and J. S. Halow, *AIChE Symp. Ser.* **289**, 61 (1992).

¹⁸K. Nguyen, C. S. Daw, P. Chakka, M. Cheng, D. D. Bruns, C. E. A. Finney, and M. B. Kennel, *Chem. Eng. J.* **65**, 191 (1996).

¹⁹S. Kaart, J. C. Schouten, and C. M. Bleek, *Catal. Today* **48**, 185 (1999).

²⁰S. Pannala, C. S. Daw, and J. S. Halow, *Chaos* **14**, 487 (2004).

²¹P. Blomgren, A. Palacios, B. Zhu, C. S. Daw, C. Finney, J. Halow, and S. Pannala, *Chaos* **17**, 013120 (2007).

- ²²M. C. Ruzicka, R. Bunganic, and J. Drahos, *Chem. Eng. Res. Des.* **87**, 1349 (2009).
- ²³M. C. Ruzicka, R. Bunganic, and J. Drahos, *Chem. Eng. Res. Des.* **87**, 1357 (2009).
- ²⁴Z. Yang, Q. Lu, and L. Li, *Chaos, Solitons Fractals* **27**, 689 (2006).
- ²⁵Y. S. Fan and T. R. Chay, *Biol. Cybern.* **71**, 417 (1994).
- ²⁶S. Coombes and A. H. Osbaldestin, *Phys. Rev. E* **62**, 4057 (2000).
- ²⁷M. Juan, L. Yu-Ye, W. Chun-Ling, Y. Ming-Hao, G. Hua-Guang, Q. Shi-Xian, and R. Wei, *Chin. Phys. B* **19**, 080513 (2010).
- ²⁸P. Channell, I. Fuwape, A. Neiman, and A. Shilnikov, *J. Comput. Neurosci.* **27**, 527 (2009).
- ²⁹C. Bonatto and J. A. C. Gallas, *Phys. Rev. E* **75**, 055204R (2007).
- ³⁰T. L. Carroll, *Chaos* **15**, 033104 (2005).
- ³¹A. N. Pisarchik and R. Jaimes-Reátegui, *J. Phys.* **23**, 122 (2005).
- ³²F. Aicardi and A. L. Kawczynski, *Complex Syst.* **4**, 1 (1990).
- ³³G. Tanaka, S. Murashige, and K. Aihara, *Int. J. Bifurcation Chaos* **13**, 3409 (2003).
- ³⁴J. Argyris, G. Faust, and M. Haase, *An Exploration of Chaos* (Elsevier, Amsterdam, 1994).
- ³⁵G. Innocenti, A. Morelli, R. Genesio, and A. Torcini, *Chaos* **17**, 043128 (2007).
- ³⁶P. C. Rech, *Int. J. Nonlinear Sci.* **10**, 179 (2010).
- ³⁷Y. Do and Y. C. Lay, *Chaos* **18**, 043107 (2008).
- ³⁸J. C. Sartorelli, W. M. Gonçalves, and R. D. Pinto, *Phys. Rev. E* **49**, 3963 (1994).
- ³⁹C. Pozrikidis, *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics* (Oxford University Press, New York, 1997).
- ⁴⁰H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 6th ed. (McGraw-Hill, New York, 1968).
- ⁴¹D. Das and J. H. Arakeri, *J. Appl. Mech.* **67**, 274 (2010).
- ⁴²J. F. Douglas, J. M. Gasiorek, and J. A. Swaffield, *Fluid Mechanics* (Pitman, London, 1979).
- ⁴³M. R. Jeffrey, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 254103 (2011).
- ⁴⁴J. R. Dormand and P. J. Prince, *J. Comput. Appl. Math.* **6**, 19 (1980).

Synchronization of two bubble trains in a viscous fluid: Experiment and numerical simulation

Felipe Augusto Cardoso Pereira,¹ Eduardo Colli,² and José Carlos Sartorelli¹

¹*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, Brazil*

²*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão, 1010, 05508-090 São Paulo, Brazil*

(Received 1 November 2012; published 28 February 2013)

We investigate the interactions of two trains of bubbles, ejected by nozzles immersed in a viscous fluid, due only to the solution's circulation. The air fluxes (Q_1, Q_2) are controlled independently, and we constructed parameter spaces of the periodicity of the attractors. We have observed complex behavior and many modes of phase synchronization that depend on these airflows as well as on the height (H) of the solution above the tops of the nozzles. Such synchronizations are shown in details in the parameter space (Q_1, Q_2) and also in the (Q_1, H) space. We also observed that the coupling strength between the two trains of bubbles increases when the solution height increases. The experimental results were reasonably explained by numerical simulations of a model combining a simple bubble growth model for each bubble train and a coupling term between them, which was assumed symmetrical and proportional to the growth velocities.

DOI: [10.1103/PhysRevE.87.022917](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.022917)

PACS number(s): 05.45.Xt, 05.45.Pq, 47.55.db

I. INTRODUCTION

Synchronization may appear in any nonlinear system composed of a group of coupled oscillators or by a self-sustained oscillator that is subject to an external force [1]. It has been observed in biological processes [2], such as ecological systems [3], postural control [4] and the cardiorespiratory system in humans [5], coupled neurons [6,7], and neuron networks [8]. Synchronization of coupled chaotic systems has been seen as a way to improve secure communications, complementing software encryption [9,10].

The frequency-locking synchronization of the bubbling of a single nozzle with a periodic external force (a sinusoidal sound wave) was studied in Refs. [11–13] and synchronized regions were identified. For most of the synchronization regions found, the bubbling frequency was a submultiple of the sound frequency, since the parameter windows are usually wider than in higher-order synchronizations. Some experiments showed synchronizations with four different submultiples, with sound frequencies four to ten times the frequency of the bubbling. Chaos arising for strong enough external forces was also studied. As the gas-liquid reactors usually have multiple orifices or nozzles many studies on synchronization in air bubbling has been done in systems with two or more orifices in the same plenum [14–16]. It was shown that the synchronization depends on the distance between the orifices [15] and two synchronized modes were found, one for the low-airflow regime and another for higher airflow, with nonperiodic behavior (intermittence) in between them [16]. These systems have behavior that is difficult to predict since the bubbling orifices are coupled both by the common air reservoir and by the fluid above. In Ref. [17], Snabre and Magnifotcham studied the effect of adding an independent bubble stream next to a previously ongoing one. They showed that the rising velocity of the ongoing bubble stream is reduced as the airflow of the added nozzle increases, and that the bubble streams attract each other, causing a small deviation of the bubble paths from the vertical.

We present experimental results of phase synchronization of two bubbling streams, generated in two nozzles with independent airflow controls, interacting only via the solution's

circulation. In this particular setup, the bubble train generated in each nozzle has a period-1 regime, in the whole air flux range, when each one is bubbling alone. The experiments have the airflows Q_1 and Q_2 of both nozzles and the fluid height H above the nozzle tops as control parameters. The airflow establishes the natural bubbling frequency, and we also show that the fluid height above the nozzles increases the size of the periodic (synchronized) regions in the parameter space (Q_1, Q_2). For each nozzle we used a simple model for bubble formation, developed by us and described in Ref. [18]. In the present case of the interaction of bubbles formed in each nozzle, we insert a symmetric coupling between them that is proportional to the growth velocities of the bubbles. This model reproduces the experimental parameter spaces, with the coupling strength playing the same role as the solution height in the experiment.

II. EXPERIMENTAL APPARATUS

A diagram of the experimental apparatus is shown in Fig. 1. It consists of an acrylic transparent cylindrical container of 10 cm diameter which is partially filled with a glycerol and water solution (75%–25%). The bubbles are generated by injecting air through two symmetrically placed nozzles at the bottom of the solution container. Each nozzle is the tip of a hypodermic syringe, without needle, with a channel of length 10 mm and internal radius 1.1 mm. The bubbles appear at the nozzles 4.5 cm above the bottom of the cylinder and 4.5 cm away from each other. Each nozzle is connected to an independent air injection system, with its airflow rate Q controlled by a proportional solenoid valve driven by a proportional-integral-derivative (PID) controller [11,12,19] and measured with a mass flow meter in ml/min. These geometrical parameters of the individual nozzles are similar to the ones used in Ref. [13], where the bubbling regime is such that the time between bubbles is constant.

In each nozzle, the time delay T_i between successive bubbles was obtained by detecting in a resistor the beginning of the 5 V voltage pulses induced by the scattering of a laser beam (placed a little above the nozzle), focused in a photodiode which is in series with the resistor. The bubbling frequency is

FIG. 1. (Color online) Schematic drawing of the experimental apparatus. (a) Enlargement of the cylindrical container showing the relevant parameters: The distance between the nozzles D , the solution height H above the nozzle tops, the airflows Q_1 and Q_2 to both nozzles, and the height z of the bubble on the nozzle. (b) Overview of the experimental setup, showing the air reservoir and the two air injection systems, with the independent airflow controllers. The microphones are used to detect the pressure wave and the laser beams are used to detect the time interval between bubbles, T_i .

defined as $f^{(k)} = \langle T_i^{(k)} \rangle^{-1}$, where $k = 1, 2$. The pressure waves created by the bubbling inside each hose were detected with microphones [18], whose signals are proportional to $-\dot{p}$. All data were collected by a data acquisition system composed of eight analog-to-digital converters (ADCs) of 16 bits at 250 000 samples/s measuring the signals simultaneously, allowing comparison of the signals from both nozzles.

Bifurcation diagrams are constructed by plotting the T_i from each nozzle in different colors (gray scale) against the air flow Q_1 , allowing it to vary at the rate of 4.0 ml min^{-2} , by using the linear ramp mode of the PID set point. These diagrams are obtained for different values of the airflow of the second nozzle Q_2 , as well as the solution height H above the nozzle tops. We also constructed parameter spaces showing the periodicities and synchronizations with colors (gray scale) with different textures. The bubble formation regimes from each nozzle were analyzed by determining the periodicity from the time series $T_i^{(k)}$ and the synchronization of the two regimes from the microphone signals. Two kinds of parameter space were drawn: (Q_1, Q_2) , for fixed values of H , and (Q_1, H) , for fixed values of Q_2 .

III. RESULTS AND DISCUSSION

A. Experimental results

1. Bifurcation diagrams

Letting the air flow (Q_1 or Q_2) vary in the $[40, 180] \text{ ml/min}$ interval, the bubbling in each isolated nozzle occurs at fixed time intervals or at the same bubbling frequencies, which characterize the period-1 behavior. However, when both nozzles are bubbling together complex behaviors appear, with regions of higher periodicity and nonperiodicity, depending on both airflows (Q_1 and Q_2) as well as on the solution height (H) above the nozzles. In Fig. 2 is shown a bubbling example for $H = 80 \text{ mm}$. In both nozzles we have periodic behaviors at different airflows $Q_1 = 160 \text{ ml/min}$ (left nozzle) and $Q_2 = 60 \text{ ml/min}$ (right nozzle). The bubbling frequencies

FIG. 2. A snapshot of a bubbling example of frequency locking 2:3 (see the movie in the Supplemental Material [20]), for $H = 80 \text{ mm}$, $Q_1 = 160 \text{ ml/min}$, and $Q_2 = 60 \text{ ml/min}$. In nozzle 1 there are three different values of the time intervals between successive bubbles while in nozzle 2 only two values are observed.

are $f_1 \approx 27.5 \text{ bubbles/s}$ and $f_2 \approx 18.3 \text{ bubbles/s}$, whose ratio $f^{(2)}/f^{(1)} \approx 0.66$ indicates a 2:3 frequency locking of bubbles of different sizes.

In Fig. 3, we show bifurcation diagrams $T_i^{(1)}$ vs Q_1 and $T_i^{(2)}$ vs Q_1 obtained by slowly increasing the airflow Q_1 of the first nozzle at a rate of 4 ml min^{-2} while keeping the second nozzle airflow constant at $Q_2 = 105 \text{ ml/min}$. The diagrams presented in Fig. 3(a) for $H = 120 \text{ mm}$ have large windows of period 1 in the range $[85, 118] \text{ ml/min}$ which is a 1:1 frequency locking, since only one value of the time intervals between successive bubbles was observed in both nozzles. Other periodic windows can be seen, such as for Q_1 in the range $[40, 48] \text{ ml/min}$. In this case, the bubbling in nozzle 1, shown in magenta (light gray), presents two distinct values of $T_i^{(1)}$, so it is a period-2 behavior, while the bubbling in nozzle 2, shown in black, presents three distinct values of $T_i^{(2)}$, so it is a period-3 regime. Therefore, for these parameters, we have a 2:3 frequency locking. The same conclusion can be reached by calculating the ratio of bubbling frequencies $f^{(1)}/f^{(2)} = \langle T^{(2)} \rangle / \langle T^{(1)} \rangle \cong 0.67$ [see Eq. (4)]. For Q_1 around 170 ml/min , the ratio of bubbling frequencies $f^{(1)}/f^{(2)} \cong 1.2$ indicates a 6:5 frequency locking.

In the case of Fig. 3(b) for $H = 30 \text{ mm}$, only the frequency-locking window 1:1 is clearly seen in the range $[100, 110] \text{ ml/min}$ with the same time intervals between successive bubbles in both nozzles. Other windows are more difficult to detect, since the width of the time interval $\delta T = \max(T) - \min(T)$ is too small, approximately 1.5 ms , while the periodicities P were determined by counting the number

FIG. 3. (Color online) Experimental bifurcation diagrams obtained by slowly changing the airflow, at the rate of 4 ml/min^2 , of the first nozzle Q_1 and for $Q_2 = 105 \text{ ml/min}$, in (a) for the solution height above the nozzles $H = 120 \text{ mm}$, and in (b) for $H = 30 \text{ mm}$. In both cases, the data from the first nozzle are in magenta (light gray) and from the second one in black.

of distinct values T_i using the threshold $\sigma_T \approx 0.15 \text{ ms}$, which is very near the fluctuations due to noise. However, we were still able to find, in the range $Q_1 = [55, 58] \text{ ml/min}$, the ratio $f^{(1)}/f^{(2)} \cong 1.34$, showing a 4:3 frequency locking.

2. Parameter spaces

These results show that there are many periodic behaviors that depend on the three control parameters Q_1 , Q_2 , and H . For some values of H we constructed parameter spaces and looked for the periodicities by counting the number of different values of the time series $T_i^{(k)}$ in each nozzle, taking into account the precision threshold $\sigma_T \approx 0.15 \text{ ms}$. The data were obtained in a set of 41×41 different pairs of (Q_1, Q_2) , with both airflows in the interval $[60, 180] \text{ ml/min}$, with steps of 3 ml/min . For every pair we checked the bubbling behavior by attractor reconstruction by observing the first-return maps $T_{i+1}^{(k)}$ vs $T_i^{(k)}$, for $k = 1, 2$. Figure 4 shows the parameter space (Q_1, Q_2) for $H = 90 \text{ mm}$, with colors (gray scale with different textures) used to indicate the period of each bubble train. The parameter spaces from both nozzles have a periodic window of period 1 around the diagonal $Q_1 = Q_2$, with higher periods appearing in stripes on the upper left and lower right of the diagonal, mainly periods 2, 3, and 4. It can be noted that one space is the mirrored version of the other (in regard to the diagonal) and periodic windows appear together in both spaces, i.e.,

FIG. 4. (Color online) Experimental parameter spaces of the attractor periodicity for the solution height $H = 90 \text{ mm}$, for (a) nozzle 1 and (b) nozzle 2. The colored regions (gray scale with different textures) show the periodicity P detected, where $8+$ represents parameters where the period was 8 or higher. The parameter regions with no periodicity detected are in white.

the parameter region in which there is a periodic window in Fig. 4(a) has a corresponding periodic window in Fig. 4(b).

In the set of 41×41 pairs of (Q_1, Q_2) we also used microphones to simultaneously measure the pressure wave in each nozzle, obtaining data more appropriate for detecting synchronization. For this purpose, we first defined a phase function for each nozzle k , $k = 1, 2$: after obtaining, by the use of a Poincaré map, the instants t_{N_i} of the maximum of the microphone signal, where N_i is the enumeration of these maxima in the series of nozzle k , we defined $\theta_k(t_{N_i}) = 2\pi N_i$ and, for t between t_{N_i} and $t_{N_{i+1}}$,

$$\theta_k(t) = 2\pi N_i + 2\pi \frac{t - t_{N_i}}{t_{N_{i+1}} - t_{N_i}}. \quad (1)$$

This is similar to what was done with spikes of the cardiac signal in Ref. [5] (see Fig. 5 for an illustration).

FIG. 5. (Color online) For $Q_1 = 62.9$ ml/min (a) and $Q_2 = 178.7$ ml/min (b), the blue (black) lines are samples of the normalized signals of the microphones, the vertical lines in red (light gray and thin) are the positions of the maxima used to define a phase for each signal, and the green (the oblique straight gray) line (right scale) the phases θ_1 and θ_2 calculated using Eq. (1). (c) The generalized phase difference $\phi_{3,2} = 3\theta_1 - 2\theta_2$ showing that there is a 3:2 synchronization.

Then we used the generalized phase difference [1]

$$\phi_{n,m}(t) = n\theta_1(t) - m\theta_2(t), \quad (2)$$

and we calculated $\phi_{n,m}$ for all combinations of (n,m) with $n, m \leq 10$. We looked for the smallest (n,m) such that the absolute value of the phase difference was bounded, i.e.,

$$|\phi_{n,m}| \leq K. \quad (3)$$

The choice of the smallest (n,m) is because when the pair (n,m) satisfies this condition in a system, the pair $(2n, 2m)$ will also satisfy it. When $\phi_{n,m}$ is bounded, the system is in an $n:m$ phase-locking synchronization. We have chosen the value for the constant K such that, in a synchronous case, the phase difference $|\phi_{n,m}|$ was smaller than one period of the slower bubbling: $K = 2\pi \max(n, m)$.

FIG. 6. (Color online) Experimental parameter space (Q_1, Q_2) of the synchronized regions $n:m$ for $H = 90$ mm. This parameter space was built by applying the condition of synchronization given by Eq. (3) to the calculated phase difference Eq. (2). The modes $n:m$ and $m:n$ were painted with the same color (gray scale with the same texture), so the painted regions actually show $\min(n, m) : \max(n, m)$. As the system is symmetric, it is possible to find the right order by looking at the relation between the airflows Q_1 and Q_2 . The white regions are the ones with no synchronization found.

It is important to point out that when a system of two oscillators is in an $n:m$ phase synchronization, the mean periods of the oscillators satisfy the relation

$$m\langle T^{(1)} \rangle = n\langle T^{(2)} \rangle, \quad (4)$$

i.e., their frequencies are also locked.

By calculating the generalized phase difference from the microphone time series we made the parameter space for the synchronization that is presented in Fig. 6. To make the space parameters simpler the synchronization space was built by painting the same colors (gray scale with the same texture) for $n:m$ and $m:n$; otherwise we would have to use twice as many colors to portray the same number of synchronizations. It is important to notice that the decision to give $n:m$ and $m:n$ the same color (gray scale) does not imply a loss of information in the parameter space, as we can recover the order ($n:m$ or $m:n$) by looking at the airflows Q_1 and Q_2 .

The regions of the parameter space in Fig. 6 that have synchronization $n:m$ appear in the parameter spaces of Fig. 4 with periodicity $P_2 = n$ for the bubbling in nozzle 2 and $P_1 = m$ in nozzle 1. For example, the synchronization space shows a 1:1 phase synchronization around the diagonal $Q_1 = Q_2$, where the period-1 window appears on the periodicity space, and the high-order synchronization windows appear symmetrically with respect to the diagonal with the nozzles presenting periods n and m (or m and n). So the parameter spaces in Figs. 4 and 6 confirm that when the system synchronizes in an $n:m$ regime, the periodicity P_k of the bubbling regimes is n for one nozzle and m for the other.

The effect of the solution height H on the bubbling dynamics can be better visualized in the parameter space (Q_1, H) of phase synchronization. In Fig. 7, we show an example of the (Q_1, H) space, constructed keeping $Q_2 = 147$ ml/min. This parameter space was constructed by acquiring the data

FIG. 7. (Color online) Experimental parameter space (Q_1, H) showing the synchronized regions for $Q_2 = 147$ ml/min. The painted regions show the synchronization detected and the white regions are the ones with no synchronization found.

for combinations of (Q_1, H) , keeping the same Q_2 for all measurements, the airflow Q_1 going from 40 to 180 ml/min in steps of 2 ml/min between two consecutive Q_1 , and the solution height going from 20 to 130 mm in steps of 10 mm. This made 852 different combinations of (Q_1, H) . The 1:1 and 2:3 synchronization modes can be easily recognized in the parameter space (Q_1, H) in Fig. 7. The width of both modes increases as the solution height increases; the 1:1 synchronization window width ranges from 18 ml/min at $H = 40$ mm to 80 ml/min at $H = 130$ mm. The structure of the synchronized regions resembles Arnold tongues, and the parameter space (Q_1, H) in Fig. 7 is similar to the parameter space (Ω, ϵ) of the circle map (see Ref. [13] for Arnold tongues in a bubbling system), where Ω is the ratio of the two oscillator frequencies and ϵ is the strength of the coupling between them. Therefore, we conclude that the interaction between the two bubble trains is stronger when we increase the solution height.

B. Simulation results

To describe the experimental data, we used a model of single-bubble formation developed in Ref. [18]:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{V_0} [RTQ - p\dot{V}(z)] \\ \ddot{z} &= \frac{1}{A(z)} \{ [p - p_e(z)] - B(z)\dot{z} - C(z)\dot{z}^2 \}, \end{aligned} \quad (5)$$

where p is the pressure inside the reservoir just behind the nozzle, z is the height of the top of the air/solution interface, with $z = 0$ being the top of the nozzle, $p_e(z)$ is the equilibrium pressure, which is the sum of the hydrostatic pressure and the surface tension in the air/solution interface, R, T , and V_0 are constants and $V(z), A(z), B(z), C(z)$ are functions related to the regime of the flow and the geometry of the system; see the Appendix of Ref. [18]. The instants of bubble detachment are given by an equilibrium formula that relates the forces in the bubble: when the upward force (buoyancy) is equal to the downward forces (surface tension and viscous drag). We used the experimental values of the geometrical parameters

FIG. 8. (Color online) Simulated bifurcation diagrams T_i vs Q_1 . The data related to nozzle 1 are shown in magenta (light gray) and for nozzle 2 in black. The airflow of the second nozzle was 105 ml/min, and the coupling constant $\alpha = 26$ kg/m²s. The system behavior should be compared with the experimental diagram in Fig. 3(a).

so that an isolated nozzle presents period-1 behavior as in the experiment. As the fluid circulation dynamics has a low Reynolds number, to emulate the interaction between the bubble trains, we added a simple coupling proportional to the velocities of bubble formation in the equilibrium pressure p_e terms:

$$\begin{aligned} (p_e^{(1)})_{\text{new}} &= (p_e^{(1)})_{\text{old}} + \alpha \dot{z}_2, \\ (p_e^{(2)})_{\text{new}} &= (p_e^{(2)})_{\text{old}} + \alpha \dot{z}_1, \end{aligned} \quad (6)$$

where α is the strength of the coupling. The bubbles drag the nearby liquid when they go upward, and the liquid goes downward far from them. This velocity profile suggests that the growth of each bubble is inhibited by the bubble of the other nozzle, so the coupling parameters are positive in Eq. (6).

As the coupling was not directly deduced from the properties of the circulating flow, we need to calibrate the value of α . For that, we calculated the distribution $\delta T^{(k)} = \max(T^{(k)}) - \min(T^{(k)})$ as a function of α , Q_1 , and Q_2 from numerical integration of the model, and then we compared simulation and experimental data in the nonperiodic regions at the borders of the diagrams ($Q_1 = 40$ and 180 ml/min) for $Q_2 = 100$ ml/min. This calibration gave $\alpha = 22$ kg/m²s for $H = 100$ mm.

The bifurcation diagrams for the two nozzles with $\alpha = 26$ kg/m²s are shown in Fig. 8. This value was obtained by using the calibration of the constant α for $H = 100$ mm and $\alpha = 0$ for $H = 0$ and doing a linear extrapolation for $H = 120$ mm. The simulated diagram is similar to the experimental one shown in Fig. 3(a). It also shows the 1:1 synchronization window near $Q_1 = Q_2$ and the 2:3 window near $Q_1 = 45$ ml/min.

To detect the synchronization in the simulated system, we made Poincaré maps using the time of detachment. This moment is the most convenient one, as the numerical integration must be halted to reset the initial conditions of the nozzle that the bubble just left.

We have created the synchronization parameter space (Q_1, Q_2) for a constant coupling strength $\alpha = 20$ kg/m²s, shown in Fig. 9(a). This value of the coupling α was obtained from the calibration between the numerical simulation and the experimental parameter value used in Fig. 6; and the parameter

FIG. 9. (Color online) Simulated parameter spaces of the synchronized regions: (a) (Q_1, Q_2) with $\alpha = 20 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$ and (b) (Q_1, α) with $Q_2 = 147 \text{ ml/min}$. The parameters used in these two spaces are analogous to the experimental ones shown in Figs. 6 and 7. The criteria for determining the synchronization in the simulated data were the same as used to analyze the experimental data.

space (Q_1, α) for a constant $Q_2 = 147 \text{ ml/min}$ is shown in Fig. 9(b).

The parameter space (Q_1, Q_2) , shows the same pattern as the experimental one: we have the 1:1 synchronization around the diagonal $Q_1 = Q_2$, and the higher-order synchronizations appearing symmetrically above and below the diagonal. The

simulated parameter space (Q_1, α) presents the same Arnold tongue profile with the widths of the tongues growing as the coupling strength increases, in a similar way as in the experimental parameter space (Q_1, H) . The simulated parameter space presents a small difference from the experimental ones: the width growth of the 1:1 synchronization with solution height H in the experimental parameter space is not linear like the coupling strength α in the simulated parameter space, but there is no reason to expect that the function $\alpha(H)$ would be linear. For example, if the coupling were proportional to the boundary layer of the bubbling stream, we would have $\alpha \propto \sqrt{H}$, as the size of the boundary layer is proportional to the square root of the length of the bubble stream [21].

IV. CONCLUSIONS

We observed that two bubble trains, generated in nozzles with independent airflow control systems, present complex behavior. We constructed bifurcation diagrams of the times between successive bubbles $T_i^{(k)}$ vs Q_1 by varying the airflow of nozzle 1 while keeping the other constant. These diagrams presented many regions in which the dynamics of both bubblings became simultaneously periodic. We constructed two kinds of parameter space (Q_1, Q_2) : (a) the periodicity parameter space, using the times between bubbles to identify the periodicities, and (b) the phase synchronization parameter space, using the microphone signals to estimate the phase difference of each pressure wave inside the hose connections. Comparing these two parameter spaces, we found that the system synchronizes in $n:m$ phase synchronization, with bubbling periodicities $P_2 = n$ and $P_1 = m$ that depend on the airflows Q_1 and Q_2 . In the parameter space (Q_1, H) , we observed that the width ΔQ_1 of each synchronization mode is a crescent-shaped function of the height H as in Arnold tongues. The simulations were performed with a single-nozzle model for each bubbling stream and insertion of a simple symmetrical coupling between the two bubblings, proportional to the bubble growth velocities, was enough to describe the main features of the experimental observations.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank the São Paulo State Agency FAPESP and the Federal Brazilian Agency CNPq for financial support.

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [2] L. Glass, *Nature (London)* **410**, 277 (2001).
- [3] B. Blasius, A. Huppert, and L. Stone, *Nature (London)* **399**, 354 (1999).
- [4] M. Rosenblum, G. Kuuz, and B. Pompe, in *Nonlinear Analysis of Physiological Data*, edited by H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress (Springer, Berlin, 1998), pp. 283–306.
- [5] C. Schäfer, M. G. Rosenblum, H. H. Abel, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **60**, 857 (1999).
- [6] D. Terman, N. Kopell, and A. Bose, *Physica D* **117**, 241 (1998).
- [7] A. Bose, N. Kopell, and D. Terman, *Physica D* **140**, 69 (2000).
- [8] C. C. Chow, *Physica D* **118**, 343 (1998).
- [9] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 65 (1993).
- [10] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. Garcia-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and A. Shore, *Nature (London)* **438**, 343 (2005).
- [11] A. Tufaile and J. C. Sartorelli, *Phys. Lett. A* **275**, 209 (2000).
- [12] A. Tufaile and J. C. Sartorelli, *Phys. Lett. A* **287**, 74 (2001).

- [13] V. S. M. Piassi, E. Colli, A. Tufaile, and J. C. Sartorelli, *Chaos Solitons Fractals* **41**, 1041 (2009).
- [14] A. A. Kulkarni and J. B. Joshi, *Ind. Eng. Chem. Res.* **44**, 5873 (2005).
- [15] S. Xie and R. B. H. Tan, *Chem. Eng. Sci.* **58**, 4639 (2003).
- [16] M. Ruzicka, J. Drahos, J. Zahradník, and N. H. Thomas, *Chem. Eng. Sci.* **55**, 421 (2000).
- [17] P. Snabre and F. Magnifotcham, *Eur. Phys. J. B* **4**, 369 (1998).
- [18] F. A. C. Pereira, E. Colli, and J. C. Sartorelli, *Chaos* **22**, 013135 (2012).
- [19] J. C. Sartorelli, W. M. Gonçalves, and R. D. Pinto, *Phys. Rev. E* **49**, 3963 (1994).
- [20] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.87.022917> for a movie of bubbling at 2:3 synchronization. The movie was taped at 500 frames/s and shown at 25 frames/s.
- [21] P. Snabre and F. Magnifotcham, *Eur. Phys. J. B* **4**, 379 (1998).