

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Estudo quantitativo de tensões em amostras fotoelásticas por meio de Holografia Digital

Sidney Leal da Silva

Orientador: Prof. Dr. Mikiya Muramatsu

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física  
para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mikiya Muramatsu (IFUSP)  
Prof. Dr. Adriano Mesquita Alencar (IFUSP)  
Prof. Dr. Elisabeth Mateus Yoshimura (IFUSP)  
Prof. Dr. Niklaus Ursus Wetter (IPEN)  
Prof. Dr. Marcos Roberto da Rocha Gesualdi (UFABC)

São Paulo - SP  
2016

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Silva, Sidney Leal da

Estudo quantitativo de tensões em amostras fotoelásticas por meio de holografia digital. São Paulo, 2016.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Geral.

Orientador: Prof. Dr. Mikiya Muramatsu

Área de Concentração: Física Óptica

Unitermos: 1. Holografia digital; 2. Polarização; 3. Elasticidade; 4. Óptica física.

USP/IF/SBI-078/2016

*À minha adorável esposa Sheila e à minha encantadora filha Luana,  
amores da minha vida, que foram pacientes, compreensivas e  
estiveram sempre ao meu lado, mesmo nos momentos mais difíceis.*

# Agradecimentos

A Deus por alimentar e fortalecer minha alma para enfrentar as dificuldades que a vida proporciona e por permitir que eu contemple toda a riqueza que a natureza nos oferece gratuitamente.

À minha esposa Sheila e minha filha Luana, maiores riquezas da minha vida, com amor. À minha esposa, Professora Dra. Sheila Ruiz, pelo auxílio na revisão ortográfica.

Aos meus papais, Manoel (*in memory*) e Ruth, pelos ensinamentos, carinho, atenção, amor e pela fé depositada em mim. Aos meus preciosos irmãos, Sidclay e Arlei, com carinho. Aos meus vizinhos quase centenários, Nestor e Genilda, que sempre oraram por mim, como anjos na proteção de seu mais velho neto. A todos da minha família que, presente ou não, lembrou de mim, transmitindo muita energia para as batalhas da vida. Aos meus amigos que acreditam e apostam nas possibilidades existentes em mim.

Ao meu honorável orientador e amigo Professor Dr. Mikiya Muramatsu que com sua imensa sabedoria e paixão pelo que faz, ajudou-me na busca da consciência do aprender, tornando-me mais humilde, mais determinado e mais crente na possibilidade desse sonho real. Ao amigo Dr. Diogo Soga que me tirou sempre da zona de conforto para que eu não caísse na tentação de achar que tudo estava tranquilo sem buscar as validações necessárias e consistentes. À amiga Dra. Isis Vasconcelos, pelas discussões que me fizeram refletir e aprender. Aos demais colegas e Professores do grupo, ou que passaram por ele, que de alguma forma me ajudaram na caminhada, em especial à Professora Dra. Ligia Ferreira.

Aos funcionários e colaboradores do Departamento de Física Geral, que sempre se prontificaram a ajudar com atenção, paciência e carinho.

À Fatec de Itaquera, em especial à Prof. Dra. Anna Cristina, por permitir e valorizar minha formação, sempre ao meu lado nos momentos cruciais. Aos Professores que me ajudaram a compreender melhor o universo da tecnologia, em especial ao Prof. Me. Carlos Narducci. Aos meus alunos de iniciação científica, sempre dedicados, sempre dispostos a novos desafios e sempre me inspirando no caminho do crescimento.

A todos os demais, muitíssimo obrigado!

*A vida é como andar de bicicleta. Para manter o equilíbrio, é preciso se manter em movimento.*

Albert Einstein

## Resumo

A Holografia Digital (HD) é uma ferramenta acessível, rápida e eficiente para análise de efeitos mecânicos em materiais fotoelásticos. Esses materiais apresentam a propriedade da dupla refração, ou birrefringência, quando submetidos a esforços externos e, como consequência, os efeitos dos estados de polarização da luz transmitidos através de sua estrutura podem ser utilizados na análise das distribuições de tensões. As técnicas holográficas tradicionais não possibilitam o armazenamento das fases da onda de luz e, portanto, dificultam a análise quantitativa do campo de tensões e deformações nesses materiais. A Holografia Digital permite contornar essa dificuldade por meio de processos que utilizam diretamente as fases da onda de luz armazenadas. A partir de um interferômetro com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas é possível obter hologramas simultâneos que, ao serem subtraídos durante um processo de reconstrução holográfica digital por método da transformada de Fresnel, fornecem diretamente as diferenças de fases. Dessa forma, a HD mostra ser uma alternativa na análise de problemas em diversas áreas, pois possibilita, através de uma única captura, obter informações sobre as propriedades ópticas e mecânicas dos sistemas de interesse. O objetivo desse trabalho foi, além do desenvolvimento instrumental, criar um método para obtenção das distribuições de tensões que surgem nos materiais fotoelásticos e validá-lo por comparação, tanto com um modelo teórico a partir de fundamentos do método de Elementos Finitos associado à Fotoelasticidade quanto com um método experimental de Fotoelasticidade RGB. Com os procedimentos do método proposto, determinou-se as distribuições de tensões em uma amostra fotoelástica acoplada a uma peça metálica para observar a aplicabilidade do método. Essas etapas levaram a resultados que apontam a possibilidade de se utilizar técnicas e métodos holográficos digitais no estudo das propriedades de materiais fotoelásticos.

Palavras-chave: Holografia Digital; transformada de Fresnel; polarização da luz; interferometria.

# Abstract

The Digital Holographic (DH) is an handy, fast and efficient tool to obtain the stresses distributions in Photoelastic materials. These materials present the double refraction phenomenon also named temporary birefringence when subjected to external forces, therefore, the effects in polarization state of the light transmitted through the structure can be used to analyze the stress distribution. Traditional holographic techniques do not allow the storage phase of the light wave difculting the analyze these of the distributions. Digital Holographic allows to overcome these difficulties by processes that obtain directly of the storage phase of light. The holographic apparatus applied to generate the holograms registered the interference between two orthogonally polarized reference waves and an object wave transmitted through the samples. The resulting phase maps were reconstructed numerically by the Fresnel transform method. Thereby, the DH is an alternative for the study of problems in several fields, because it allows, through a single capture, to obtain information about the optical and mechanical properties of the systems of interest. The objective of this work was, besides instrumental development, create a method in Digital Holography to obtain the stresses distributions in Photoelastic materials and validate it by comparisions between the theoretical Finite Element Method associated with Photoelasticity with the experimental method of Photoelasticity RGB. The procedures of the proposed method were used for determine stresses distributions in a Photoelastic sample with a metal part coupled in your superior base to verified its aplicability. Together, these results demonstrate the possibility of using digital holographic techniques and methods for studying mechanical properties of the Photoelastic materials.

**Keywords:** Digital Holography; Fresnel transform method; polarization; interferometry.

## Lista de figuras

Figura 2.1 -	Esquema geral do registro holográfico (holograma): gravação da interferência entre as ondas objeto e referência em um meio de registro (chapa holográfica, cristal fotorrefrativo, câmera digital etc). .....	28
Figura 2.2 -	Ondas planas objeto e referência, separadas por ângulo $\theta$ , interferem no plano do holograma $(\xi, \eta)$ . .....	28
Figura 2.3 -	Esquema geral da reconstrução holográfica (intensidade e fase): produção da imagem virtual a partir da difração entre a onda de referência, com as mesmas características da onda de referência do registro, e o holograma. ....	29
Figura 2.4 -	Esquema das ordens de difração: ordem zero (não produz imagem); demais ordens: imagem real (invertida com pouca intensidade) e imagem virtual (observada com boa qualidade). ....	30
Figura 2.5 -	Geometria da reconstrução holográfica digital. $(h', v')$ representa o plano objeto; $(\xi, \eta)$ representa o plano do holograma (sensor da câmera digital) e $(h, v)$ representa o plano da imagem. Cada pixel do plano $(\xi, \eta)$ é levado ao plano $(h, v)$ na reconstrução digital. ....	31
Figura 2.6 -	Imagem do padrão estático de <i>speckle</i> de uma gota de corretivo líquido iluminada por uma onda de laser de He-Ne. ....	33
Figura 2.7 -	Esquema da criação do arquivo THSP. Cada linha de pixels dos arquivos separados do vídeo são transportados ordenadamente para uma coluna no arquivo THSP. ....	33
Figura 2.8 -	Imagem THSP de 256 linhas verticais que apresenta a história temporal de um vídeo de <i>speckle</i> dinâmico com 256 quadros registrados por uma câmera digital. ....	34
Figura 2.9 -	Esquema das componentes da força $\Delta \vec{F}$ atuando em uma superfície de área A. ....	35
Figura 2.10 -	Fração da deformação (contração lateral) de uma barra tracionada longitudinalmente. ....	36
Figura 2.11 -	Forças axiais uniformes em seções transversais com áreas A em duas direções de uma chapa. ....	37
Figura 2.12 -	Forças tangenciais uniformes em seções transversais com áreas A em duas direções de um trecho de uma chapa. ....	38
Figura 2.13 -	Estado plano de tensão: paralelepípedo de pequena espessura ( $e$ ), sob a ação de forças externas ( $F$ ) paralelas e uniformes gerando tensões normais ( $\sigma$ ) e de cisalhamento ( $\tau$ ), num elemento infinitesimal de volume no interior do paralelepípedo. Essas tensões, ao longo do material, atuam somente num plano paralelo ao conjunto de forças. Figura modificada da referência [49]. ....	39
Figura 2.14 -	Esquema geral da birrefringência. Onda linearmente polarizada incide no material e se divide em onda-o, ordinária e onda-e, extraordinária, com índices de refração distintos, ao passar pelo plano que contém o eixo óptico do material devidamente crivado. As ondas ordinária e extraordinária emergentes possuem estados de polarizações ortogonais entre si. ...	40
Figura 2.15 -	Foto do efeito da birrefringência para um objeto, ponto escuro, sob um cristal de calcita, iluminado com uma fonte de luz. Duas imagens são geradas com um campo escuro na intersecção entre elas. ....	41



Figura 2.16 -	Fotografia do efeito da birrefringência temporária. À esquerda o material fotoelástico sem esforço externo não apresenta o efeito. À direita, sob esforço externo, o estado de polarização é alterado, produzindo franjas coloridas, quando a observação é feita num polariscópio com luz branca incidente. ....	42
Figura 2.17 -	Esquema dos índices de refração nas direções h e v em um elemento infinitesimal de um material temporariamente birrefringente. Sem esforço externo os índices de refração são iguais, $n_0$ , nas duas direções. Quando há esforço externo, a diferença de tensão promove uma diferença de índice de refração nas duas direções, caracterizando a birrefringência temporária do material. ....	43
Figura 2.18 -	Geometria de eixos na incidência no plano do holograma. Duas ondas de referências com polarizações lineares ortogonais, uma em relação à outra, interferindo com uma onda objeto polarizada linearmente a 45°. Dois hologramas simultâneos são gravados em um meio de registro. ....	46
Figura 2.19 -	Separação da onda original em objeto e referência iniciais, por um divisor de feixes com relação de intensidade 70% reflexão e 30% transmissão. ....	48
Figura 2.20 -	Separação da onda objeto inicial em objeto e referência 2, por um divisor de feixes com relação de intensidade 50% reflexão e 50% transmissão. ....	49
Figura 2.21 -	Ondas de referências 1 e 2 passando pelos polarizadores P0° e P90°, respectivamente, com ajustes de intensidade pelas lâminas de meia onda, $\lambda/2$ , e chegando em DF3 que possui relação de intensidade 30% reflexão e 70% transmissão. ....	50
Figura 2.22 -	Onda objeto ajustada para o estado de polarização linear a 45° ao passar pelo polarizador P45°. ....	51
Figura 2.23 -	Curva teórica das diferenças de fases entre as componentes vertical e horizontal para lâmina de quarto de onda. Curva construída a partir da expressão (2.52), obtida pelo formalismo de Jones. ....	53
Figura 2.24 -	Modelo teórico para as diferenças de tensões do estado plano, $(\sigma_v - \sigma_h)$ , no interior de um paralelepípedo de material fotoelástico sob esforços externos verticais na base superior. ....	53
Figura 3.1 -	Borracha líquida de silicone azul a ser misturada com catalizador para formar as bases que receberam as soluções de resina epóxi para confecções das amostras fotoelásticas. ....	59
Figura 3.2 -	Base de papel cartão especial envolvido com fita adesiva contendo o silicone líquido, durante a cura, com o modelo de acrílico inserido para formar a cavidade que recebeu a solução de resina epóxi líquida com endurecedor. ....	59
Figura 3.3 -	Amostras fotoelásticas com dimensões distintas do lote I, menos flexíveis do que as amostras do lote II. As amostras 1 e 2 foram utilizadas para determinações dos parâmetros fotoelásticos e holográficos. As amostras 3 e 4 foram utilizadas para determinações das distribuições das diferenças de tensões. ....	61
Figura 3.4 -	Foto do dispositivo de carga: 1. base de cargas; 2. haste móvel principal; 3. base de contato; 4. haste guia fixa; 5. amostra fotoelástica. ....	62
Figura 3.5 -	Esquema do protótipo para coleta de dados na determinação dos parâmetros holográficos e fotoelásticos. Amostra apoiada por cavaletes e sob esforços equidistantes do segmento $\overline{AB}$ . ...	63
Figura 3.6 -	Esquema do protótipo para a coleta de dados na determinação das distribuições das diferenças de tensões tanto na Fotoelasticidade quanto na Holografia. ....	63

- Figura 3.7 - Esquema da configuração experimental de *speckle* por transmissão. Luz laser de comprimento de onda 632,8 nm com os ruídos minimizados, por um filtro espacial, é convertida em onda plana com intensidade constante, por uma lente, e atravessa uma amostra fotoelástica 1 e 2 de ambos os lotes, capturando o padrão de interferência estático ou dinâmico, que foi registrado durante um certo tempo numa câmera digital. .... 64
- Figura 3.8 - Esquema da configuração experimental do ensaio mecânico. Amostra fotoelástica submetida aos esforços segundo o esquema da Figura 3.5, sem os apoios inferiores. Uma lanterna possibilitou um melhor contraste da imagem registrada em uma câmera fotográfica. .... 66
- Figura 3.9 - Esquema de paralelepípedo com as dimensões  $L \times H \times e$  e para cálculos das distribuições teóricas de diferenças de tensões no trecho 1-2. Esforço vertical uniformemente distribuído na base superior de área  $A$ . .... 67
- Figura 3.10 - Fotografia do polariscópio elíptico de campo claro por transmissão. 1: laser; 2: polarizador linear; 3/4: lâmina de quarto de onda,  $\lambda/4$ ; 5: analisador (polarizador linear); 6: câmera digital. .... 69
- Figura 3.11 - Esquema do polariscópio elíptico de campo claro por transmissão. Fonte de luz com intensidade reduzida encontra um polarizador e uma lâmina de quarto de onda,  $\lambda/4$ , antes de interagir com a amostra. Em seguida, passa por outra lâmina de quarto de onda e por outro polarizador, denominado analisador. Entre as lâminas de onda, um dispositivo de carga permite aplicar esforço externo na amostra, alterando o estado de polarização. O resultado para o observador, câmera, é um padrão de franjas isocromáticas. .... 69
- Figura 3.12 - Esquema da região retangular de linhas de pixels entre franjas escuras na imagem fotoelástica. .... 72
- Figura 3.13 - Esquema da configuração holográfica com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas para registro simultâneo de dois hologramas. Onda de referência horizontal (ORH) com estado de polarização a  $0^\circ$ . Onda de referência vertical (ORV) com estado de polarização a  $90^\circ$ . A onda objeto (OO) que chega na amostra possui estado de polarização a  $45^\circ$ . .... 73
- Figura 3.14 - Fotografia da configuração holográfica com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas para registro simultâneo de dois hologramas: 1. Laser; 2. Espelho plano 1; 3. Íris 1; 4. Filtro espacial; 5. Lente; 6. Íris 2; 7. Espelho plano 2; 8. Divisor de feixes 1; 9. Divisor de feixes 2; 10. Espelho plano 3; 11. Lâmina de quarto de onda 1; 12. Lâmina de quarto de onda 2; 13. Polarizador  $90^\circ$ ; 14. Polarizador  $0^\circ$ ; 15. Espelho plano 4; 16. Polarizador  $45^\circ$ ; 17. Divisor de feixes 3; 18. Dispositivo de carga; 19. Divisor de feixes 4; 20. câmera digital. .... 75
- Figura 3.15 - Posicionamento e orientação da lâmina de atraso para calibração da configuração holográfica. Conjunto orientado com passos de  $5^\circ$  entre 0 e  $360^\circ$ . Cada passo produziu um holograma total formado por dois hologramas com estados de polarizações ortogonais entre si, separáveis durante a reconstrução digital. A lâmina de vidro simples serviu como suporte para a lâmina de atraso. .... 76
- Figura 3.16 - Esquema para referência angular da lâmina de atraso: eixo óptico inicial da lâmina de atraso (vermelho) a  $0^\circ$  em relação ao eixo  $h'$ . O eixo óptico do polarizador está fixo a  $45^\circ$  em relação ao eixo  $h'$  e, portanto, a  $45^\circ$  em relação ao eixo óptico inicial da lâmina de atraso. .... 77
- Figura 3.17 - Posicionamento da amostra fotoelástica na configuração holográfica. A amostra proporciona uma alteração no estado de polarização da onda objeto ao receber esforço externo por um dispositivo de carga. (a) visão lateral da configuração; (b) visão frontal da configuração para as amostras de parâmetros 1 e 2; (c) visão frontal da configuração para as amostras de determinação das distribuições de diferenças de tensões. .... 77

Figura 3.18 -	Esquema da região retangular de pixels entre franjas escuras no mapa desmodulado de fases.	78
Figura 4.1 -	Imagens THSP de 256 linhas no processo de compressão sobre a amostra 1 do lote II, sob os esforços de 150g, 650 g e 1150 g. Nota-se maior um aumento da atividade com o aumento do esforço. ....	83
Figura 4.2 -	Gráfico da correlação THSP em relação ao tempo para uma amostra sob tensão (carga em massa: 1150g) e livre de tensão (vermelho). ....	83
Figura 4.3 -	Gráficos dos valores experimentais de tensão <i>versus</i> deformação linear vertical para compressão e descompressão da amostra fotoelástica 1 do lote I. As linhas tracejadas são guias para observação da distribuição dos pontos experimentais. ....	85
Figura 4.4 -	Gráficos dos valores experimentais de deformação horizontal <i>versus</i> deformação vertical para compressão e descompressão da amostra fotoelástica 1 do lote I. As linhas tracejadas são guias para observação da distribuição dos pontos experimentais. ....	85
Figura 4.5 -	Duas franjas escuras teóricas das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, a partir do campo de deslocamentos da Expressão (B.6). Deslocamentos obtidos pelo método analítico de elementos finitos bidimensionais. ....	86
Figura 4.6 -	Gráficos das distribuições teóricas de tensões do estado plano ao longo de linhas verticais entre franjas escuras com as dimensões das amostras 3 e 4 dos lotes I (esquerda) e II (direita). Curvas obtidas pelo método analítico de elementos finitos associado à fotoelasticidade. ....	87
Figura 4.7 -	Trechos selecionados das imagens obtidas no polariscópio elíptico a partir do esforço externo ( $1,250 \pm 0,001$ )kg, sobre as amostras 1 e 2, do lote I, para obtenções das tabelas fotoelásticas de referência. As franjas foram ordenadas de 0 a 3 em cada amostra. ....	89
Figura 4.8 -	Relação entre ordenação de franjas e pixel para determinação dos números não inteiros das franjas das amostras 1, esquerda, e 2, direita, do lote I. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos pontos experimentais. ....	90
Figura 4.9 -	Trechos (retângulos) para determinações das distribuições de diferenças de tensões do estado plano nas imagens obtidas a partir das amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lote I. Imagens obtidas a partir de um polariscópio elíptico de campo claro, segundo o esquema na Figura 3.11. Esforço externo de 600g. ....	91
Figura 4.10 -	Gráficos experimentais das diferenças de tensões do estado plano <i>versus</i> pixels nas amostras fotoelásticas 3 (esquerda) e 4 (direita) dos lotes I e II nos trechos verticais médios entre franjas escuras. ....	91
Figura 4.11 -	Hogramas completos contendo as polarizações vertical e horizontal da região de referência e da lâmina de quarto de onda com orientações: 0°, 45°, 90° e 135°. Região $\lambda/4$ corresponde à lâmina de atraso. Intensidades: 0 (região mais escura) a 255 (região mais clara). ....	93
Figura 4.12 -	Reconstruções de fase das componentes vertical e horizontal a partir dos hologramas da lâmina de quarto de onda com as orientações 0°, 45°, 90° e 135°. A região assinalada com $\lambda/4$ corresponde à lâmina de atraso. Valores de fase: $-2\pi$ (mais escuro) a $2\pi$ (mais claro). ....	93
Figura 4.13 -	Distribuição de valores experimentais das diferenças entre as fases médias vertical e horizontal versus orientação da lâmina de quarto de onda entre 0 e 360°, com passos de 5°. ...	94
Figura 4.14 -	Hogramas totais das amostras fotoelásticas 1 dos lotes I e II, submetidas aos esforços elásticos externos crescentes da Tabela 4.3 durante o processo de compressão. Os valores de intensidade variam entre 0 (região mais escura) e 255 (região mais clara). ....	95

Figura 4.15 -	Mapas de fases das componentes vertical e horizontal das amostras fotoelásticas 1 dos lotes I e II submetidas aos esforços elásticos externos 150g e 600g, durante o ensaio de compressão. Os retângulos entre franjas escuras representam as regiões selecionadas para determinações das médias de fases. ....	96
Figura 4.16 -	Tensão externa <i>versus</i> deformação vertical para os processos de compressão e descompressão na amostra fotoelástica 1 do lote I, submetida aos esforços externos da Tabela 4.3. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais. ....	97
Figura 4.17 -	Deformação holográfica relativa horizontal ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ ) <i>versus</i> deformação holográfica relativa vertical ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ ) para os processos de compressão e descompressão na amostra fotoelástica 1 do lote I, submetida aos esforços externos da Tabela 4.3. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais. ....	98
Figura 4.18 -	Hogramas totais das amostras fotoelásticas 3 dos lotes I e II submetidas ao esforço elástico externo 600 g. Os valores de intensidade variam de 0 (mais escuro) a 255 (mais claro). ....	99
Figura 4.19 -	Mapas de diferenças entre as fases vertical e horizontal das amostras fotoelásticas 3 dos lotes I e II, submetidas ao esforço elástico externo 600 g. Os retângulos entre franjas escuras representam as regiões selecionadas para determinações das distribuições médias de diferenças de fases. ....	100
Figura 4.20 -	Diferenças de tensões médias ( $ \sigma_v - \sigma_h $ ) <i>versus</i> pixels das regiões entre franjas escuras, dos mapas de fase desmodulados das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, sob esforços de 600g. ....	101
Figura 5.1 -	Amostras fotoelásticas para a aplicação. À esquerda, uma amostra fotoelástica livre de peça metálica para determinação dos parâmetros holográficos. À direita, um parafuso metálico acoplado em um paralelepípedo de resina fotoelástica para determinação da distribuição das diferenças de tensões do estado plano em uma linha média vertical entre duas franjas escuras. ....	102
Figura 5.2 -	Dois hologramas totais da amostra fotoelástica livre submetida aos esforços elásticos externos 150g e 600g durante o ensaio de compressão. Os valores de intensidade variam entre 0 (região mais escura) e 255 (região mais clara). ....	104
Figura 5.3 -	Mapas de fases das componentes vertical e horizontal da amostra livre submetida aos esforços elásticos externos 150g e 600g, durante o ensaio de compressão. Os retângulos representam as regiões selecionadas para determinação das fases médias entre franjas escuras. ....	105
Figura 5.4 -	Tensão externa <i>versus</i> deformação holográfica vertical para os ensaios de compressão e descompressão na amostra livre submetida aos esforços externos da Tabela 5.2. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais. ....	106
Figura 5.5 -	Deformação holográfica relativa horizontal ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ ) <i>versus</i> deformação holográfica relativa vertical ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ ) para os processos de compressão e descompressão na amostra livre submetida aos esforços externos da Tabela 5.2. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais. ....	106
Figura 5.6 -	Hogramas totais da amostra de aplicação submetida aos esforços elásticos externos de 150g, 300g e 600 g. Os valores de intensidade variam de 0 (mais escuro) a 255 (mais claro). ....	107
Figura 5.7 -	Mapas das diferenças entre as fases verticais e horizontais da amostra de aplicação submetida aos esforços elásticos externos de 150g, 300g e 600 g. Os retângulos representam os trechos selecionados para determinação das diferenças médias de fases entre franjas	

	escuras. ....	108
Figura 5.8 -	Diferenças de tensões <i>versus</i> pixels das linhas verticais médias entre ordens de franjas escuras a partir dos mapas de fases desmodulados da amostra de aplicação sob esforços externos de 150g, 300g e 600g. ....	109
Figura 6.1 -	Duplo padrão de interferências (hogramas com polarizações vertical e horizontal) gerado pelo sistema holográfico com duas ondas de referências polarizadas ortogonalmente, devidamente calibrado. A região à direita da linha escura é a lâmina de quarto de onda, $\lambda/4$ , e a região à esquerda o espaço livre. ....	110
Figura 6.2 -	Mapas de fase das componentes horizontal e vertical para a lâmina de quarto de onda com as orientações $0^\circ$ , $45^\circ$ , $90^\circ$ e $135^\circ$ . Intensidades: (a) máxima para fase vertical e mínima para fase horizontal em ângulo de 0 graus; (b) iguais para fases vertical e horizontal em ângulo de 45 graus; (c) mínima para fase vertical e máxima para fase horizontal em ângulo de 90 graus; e (d) iguais para fases vertical e horizontal em ângulo de 135 graus. Valores de fase: $-2\pi$ (mais escuro) a $2\pi$ (mais claro). ....	111
Figura 6.3 -	Comparação gráfica entre valores experimentais (círculos azuis) e curva teórica (linha contínua preta) das diferenças de fases <i>versus</i> orientação da lâmina de quarto de onda, entre 0 e 360 graus. ....	111
Figura 6.4 -	Comparação entre valores experimentais (triângulos) e curva teórica (linha contínua) das diferenças de fases <i>versus</i> orientação da lâmina de quarto de onda, entre 0 e $180^\circ$ . Figura modificada da Literatura [22]. ....	112
Figura 6.5 -	Comparação entre as curvas: teóricas (linhas pretas contínuas), experimentais por fotoelasticidade (losangos lilás) e experimentais por holografia (pontos pretos), em função de cada pixel crescente ao longo das linhas verticais médias entre duas franjas escuras dos mapas de diferenças de fases das amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lotes I e II, sob a ação do esforço externo de 600g. ....	115
Figura 6.6 -	Comparação entre valores experimentais (linha escura) e curva teórica (linha clara) das diferenças de tensões do estado plano de uma amostra fotoelástica com geometria circular e alta rigidez. Figura modificada da Literatura [58]. ....	117
Figura 6.7 -	Comparação entre valores experimentais obtidos com o método holográfico aplicado a uma amostra com peça de metal acoplada a um paralelepípedo de resina epóxi submetida aos esforços: 150g (pontos escuros), 300g (pontos azuis) e 600g (pontos laranja). ....	118
Figura 6.8 -	Regiões selecionadas dos mapas de fases reconstruídos a partir dos hologramas gerados com a técnica holográfica com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas. As figuras mostram a diminuição da distância entre as franjas escuras a medida que os esforços aumentam. ....	119
Figura B.1 -	Esquema de uma viga de altura muito pequena, comprimento L e espessura e, apoiada em seus dois extremos e sob a ação de um esforço $\vec{F}$ em uma pequena área A no centro da base superior. ....	136
Figura B.2 -	Perfil do campo de deslocamentos de uma viga de altura muito pequena, comprimento L e espessura e, apoiada em seus dois extremos e sob a ação de um esforço $\vec{F}$ em uma pequena área A no centro da base superior. Gráfico obtido a partir da expressão (B.6). ....	138
Figura B.3 -	Curva analítica da diferença de tensão versus deslocamento vertical entre duas franjas escuras, a partir da expressão (B.14). ....	140

## Lista de tabelas

Tabela 4.1 -	Parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas do lote I. ....	81
Tabela 4.2 -	Parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas do lote II. ....	81
Tabela 4.3 -	Esforços externos aplicados nas amostras fotoelásticas 1 e 2 dos lotes I e II. ....	82
Tabela 4.4 -	Esforços externos aplicados nas amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lotes I e II. ....	82
Tabela 4.5 -	Tempos de compressão e descompressão das amostras 1 e 2 do lote I. ....	84
Tabela 4.6 -	Tempos de compressão e descompressão das amostras 1 e 2 do lote II. ....	84
Tabela 4.7 -	Módulos de elasticidades para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	85
Tabela 4.8 -	Coefficientes de Poisson para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	86
Tabela 4.9 -	Valores de franjas das amostras 3 e 4 dos lotes I e II. ....	88
Tabela 4.10 -	Dispersões fotoelásticas das amostras dos lotes I e II. ....	88
Tabela 4.11 -	Módulos de elasticidades para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	97
Tabela 4.12 -	Coefficiente $\alpha$ para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	97
Tabela 4.13 -	Coefficientes de Poisson para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	98
Tabela 4.14 -	Valores de franjas holográficas das amostras dos lotes I e II. ....	99
Tabela 4.15 -	Dispersões holográficas das amostras dos lotes I e II. ....	99
Tabela 5.1 -	Parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas para a aplicação. ....	103
Tabela 5.2 -	Esforços externos aplicados sobre a amostra fotoelástica livre. ....	103
Tabela 5.3 -	Esforços externos aplicados sobre a amostra de aplicação. ....	103
Tabela 5.4 -	Módulo de elasticidade holográfico e coeficiente de Poisson para a amostra livre. ....	107
Tabela 6.1 -	Módulos de elasticidade holográficos e mecânicos das amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	113
Tabela 6.2 -	Relações entre $\mathcal{E}$ e $E$ das amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	113
Tabela 6.3 -	Coefficientes de Poisson holográficos e mecânicos das amostras 1 e 2 dos lotes I e II. ....	114
Tabela 6.4 -	Valores de franjas holográficos e fotoelásticos das amostras 3 e 4 dos lotes I e II. ....	114
Tabela 6.5 -	Dispersões holográficas e fotoelásticas das amostras 3 e 4 dos lotes I e II. ....	115
Tabela 6.6 -	Diferenças percentuais entre distribuições experimentais <i>versus</i> teóricas. ....	116
Tabela 6.7 -	Diferenças percentuais entre distribuições holográficas <i>versus</i> fotoelásticas. ....	117

# Lista de siglas

LASER	<i>Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation</i>
THSP	<i>Temporary History Speckle Pattern</i>
RGB	<i>Red, Green, Blue</i>
SQ	SILAEX <sup>®</sup> QUÍMICA
TFR	Tabela Fotoelástica de Referência
DCC	<i>Dynamic Contrast Control</i>
HQ	<i>High Quality</i>
CMOS	<i>Complementary Metal Oxide Semiconductor</i>
USB	<i>Universal Serial Bus</i>
DF	Divisor de Feixes
P0°	Polarizador com estado de polarização linear a 0°
P45°	Polarizador com estado de polarização linear a 45°
P90°	Polarizador com estado de polarização linear a 90°
ORH	Onda de Referência Horizontal
ORV	Onda de Referência Vertical
OO	Onda Objeto
FE	Filtro Espacial
L1	Lente
I1	Íris
OR	Onda de Referência
E	Espelho
DOI	Digital Object Identifier

## Lista de símbolos

$\theta$	ângulo
$\xi, \eta$	eixos ortogonais do plano do holograma
$\vec{\psi}$	vetor função de onda
$h', v'$	eixos ortogonais do plano das ondas objeto e referência
$\vec{A}$	vetor amplitude da onda
$\phi$	fase da onda
$\Delta\phi$	diferença entre fases
$h, v$	eixos ortogonais do plano de reconstrução
$I$	intensidade da onda
$\lambda$	comprimento de onda
$k$	número de onda
$r$	distância entre pontos do holograma e da imagem reconstruída
$\mathcal{F}(k_\xi, k_\eta)$	transformada de Fourier da função $f(\xi, \eta)$
$\gamma(\delta t)$	função de autocorrelação temporal em THSP
$\mu(t_0, t)$	coeficiente de correlação temporal em THSP
$\vec{p}$	vetor tensão
$\vec{F}$	vetor força
$A$	área da superfície $S$
$\sigma$	tensão normal ou axial devido à força normal $F_n$
$\tau$	tensão de cisalhamento ou tangencial devido à força tangencial $F_t$
$E$	módulo de elasticidade ou Young
$\epsilon$	deformação elástica
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\mathcal{G}$	módulo de elasticidade em cisalhamento
$\gamma$	distorção de cisalhamento
$e$	espessura da amostra
$[D]$	matriz de elasticidade
$n$	índice de refração
$\Delta r$	diferença de caminho óptico
$\lambda/4$	lâmina retardadora de quarto de onda
$\lambda/2$	lâmina retardadora de meia onda
$C(\lambda)$	dispersão de birrefringência ou fotoelástica
$c$	velocidade da luz
$N$	retardação relativa
$Q$	quantidade de franjas
$f_\sigma$	valor de franjas
$\Delta E$	erro de comparação entre valores RGB
$\Delta\xi$	dimensão horizontal do pixel na câmera digital
$\Delta\eta$	dimensão vertical do pixel na câmera digital
$d$	espaçamento entre duas franjas
$\theta_{\text{Máx}}$	ângulo máximo entre as ondas que interferem
$M(\delta)$	matriz de Jones para o elemento de rotação
$M$	matriz de Jones para o elemento retardador
$R(\delta)$	matriz Jacobiana
$\mathcal{E}$	módulo de elasticidade holográfico
$\mathcal{E}_H$	deformação holográfica relativa
$a$	constante adimensional de relação entre $\mathcal{E}$ e $E$
$\mathcal{H}(\lambda)$	dispersão holográfica
$\aleph$	retardação holográfica relativa
$\mathcal{f}$	valor holográfico de franjas



$\Delta h$	dimensão horizontal do pixel no campo reconstruído
$\Delta v$	dimensão vertical do pixel no campo reconstruído
$N \times M$	dimensão discreta do holograma
$\delta \pi$	energia virtual total
$\delta U$	energia virtual potencial
$\delta W$	energia virtual potencial das forças externas
$u(h)$	campo de deformações de uma viga apoiada em dois extremos
$v(h)$	campo de deslocamentos de uma viga apoiada em dois extremos

# Sumário

1	Introdução .....	20
1.1	Holografia: uma alternativa no estudo das tensões .....	20
1.2	Tensões e deformações: relevantes em aplicações tecnológicas .....	22
1.3	Fotoelasticidade: técnicas e métodos consolidados .....	23
1.4	Holografia <i>versus</i> Fotoelasticidade .....	23
1.5	Objetivo da pesquisa .....	23
1.6	Estrutura e organização do trabalho .....	25
2	Fundamentos teóricos .....	27
2.1	Técnicas e métodos auxiliares .....	27
2.1.1	Holografia convencional .....	27
2.1.2	Holografia digital .....	31
2.1.3	<i>Speckle</i> .....	32
2.1.4	Elasticidade mecânica .....	35
2.1.5	Fotoelasticidade .....	40
2.1.6	Lei óptica da tensão .....	43
2.2	Técnica e método holográficos .....	46
2.2.1	Duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas .....	46
2.2.2	Funções de onda objeto e referências .....	48
2.2.3	Teoria do método holográfico .....	53
2.2.3.1	Modelo .....	53
2.2.3.2	Analogia holográfia com a lei de Hooke .....	54
2.2.3.3	Analogia holográfica com a lei óptica da tensão .....	55
3	Materiais, técnicas e métodos .....	58
3.1	Amostras fotoelásticas .....	58
3.1.1	Formas de silicone .....	58
3.1.2	Resina epóxi .....	60
3.1.3	Amostras .....	60
3.2	Técnicas e métodos auxiliares .....	62
3.2.1	Esforços externos sobre as amostras fotoelásticas .....	62
3.2.2	<i>Speckle</i> por transmissão e correlação THSP .....	64
3.2.3	Ensaio mecânico de tensões nas amostras fotoelásticas .....	66

	18
3.2.3.1 Registros das imagens .....	66
3.2.3.2 Módulos de elasticidades (E) e coeficientes de Poisson ( $\nu$ ) .....	67
3.2.4 Distribuições teóricas de diferenças de tensões .....	67
3.2.5 Técnica e método fotoelásticos .....	68
3.2.5.1 Registros das imagens .....	68
3.2.5.2 Tabelas fotoelásticas de referências (TFR) .....	70
3.2.5.3 Parâmetros fotoelásticos e distribuições de diferenças de tensões .....	71
3.3 Técnica e método holográficos .....	72
3.3.1 Configuração holográfica .....	73
3.3.2 Diferenças angulares entre as ondas objeto e referências .....	75
3.3.3 Calibração da configuração holográfica .....	75
3.3.4 Hogramas das amostras fotoelásticas .....	77
3.3.5 Procedimentos do método holográfico .....	78
3.3.4.1 Parâmetros holográficos .....	78
3.3.4.2 Distribuições holográficas de tensões .....	80
4 Análise de dados e resultados .....	81
4.1 Parâmetros geométricos das amostras e esforços externos .....	81
4.2 Tempos médios de compressão e descompressão .....	83
4.3 Ensaio mecânico de tensões .....	84
4.3.1 Registro das imagens .....	84
4.3.2 Módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson mecânicos .....	84
4.4 Distribuições teóricas de tensões .....	86
4.5 Fotoelasticidade .....	88
4.5.1 Valores de franjas e dispersões fotoelásticas .....	88
4.5.2 Tabelas fotoelásticas de referência .....	89
4.5.3 Distribuições fotoelásticas das diferenças de tensões .....	90
4.6 Holografia .....	92
4.6.1 Diferenças angulares entre as ondas objeto e referências .....	92
4.6.2 Calibração do sistema holográfico .....	92
4.6.2.1 Hogramas da lâmina de atraso .....	92
4.6.2.2 Mapas de fase .....	93
4.6.2.3 Diferenças de fases <i>versus</i> orientações da lâmina de atraso .....	94
4.6.3 Parâmetros holográficos .....	94
4.6.3.1 Hogramas .....	94

	19
4.6.3.2 Mapas de fase .....	95
4.6.3.3 Módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson holográficos .....	96
4.6.3.4 Valores de franjas e dispersões holográficas .....	98
4.6.4 Distribuições holográficas de tensões .....	99
4.6.4.1 Hogramas .....	99
4.6.4.2 Mapas e diferenças de fases .....	100
4.6.4.3 Distribuições das diferenças de tensões .....	100
5 Aplicação do método holográfico .....	102
5.1 Amostras .....	102
5.2 Parâmetros geométricos das amostras e esforços externos .....	102
5.3 Parâmetros holográficos .....	104
5.3.1 Hogramas .....	104
5.3.2 Mapas de fase .....	104
5.3.3 Módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson holográficos .....	105
5.4 Distribuições holográficas de tensões .....	107
5.4.1 Hogramas .....	107
5.4.2 Mapas e diferenças de fases .....	108
5.4.3 Distribuições de tensões .....	108
6 Discussões .....	110
6.1 Calibração da configuração holográfica .....	110
6.2 Parâmetros holográficos, mecânicos e fotoelásticos .....	112
6.3 Distribuições de tensões .....	115
6.4 Aplicação do método proposto .....	118
7 Conclusões e perspectivas .....	120
Referências bibliográficas .....	125
Apêndices .....	130
A.1 Aproximações para a reconstrução digital de Fresnel .....	130
A.2 Discretização da Transformada de Fresnel bidimensional .....	131
A.3 Programa de reconstrução holográfica digital .....	132
B.1 Campo de deslocamentos de uma viga .....	136
B.2 Diferenças de tensões associadas aos campos de deslocamentos .....	139
C.1 Programas para ajuste de funções .....	141

# 1 Introdução

A utilização de materiais fotoelásticos tornou-se uma alternativa interessante para o estudo das distribuições de tensões e deformações em estruturas sólidas. Esses materiais têm a propriedade da dupla refração, ou birrefringência, quando submetidos a esforços externos [1]. Pesquisadores interessados em técnicas que não danificam o material de estudo enxergam boas perspectivas na junção da óptica com materiais fotoelásticos. Nessa direção, a Fotoelasticidade, ramo da óptica que investiga a distribuição das tensões e deformações nos materiais fotoelásticos com o auxílio de luz polarizada, apresenta técnicas e métodos amplamente explorados com trabalhos de grande aceitação nos universos científico e tecnológico [2-6].

Pesquisadores do campo da odontologia têm demonstrado um grande interesse por este tipo de estudo. Com o propósito de investigar as tensões e deformações em amostras fotoelásticas, utilizam as técnicas e métodos da Fotoelasticidade. Como exemplo, implantes com próteses são inseridos em amostras de materiais fotoelásticos para observar as tensões e deformações provocadas no material, que simula o maxilar. A transparência desses materiais permite visualizar franjas que estão associadas à distribuição das tensões e deformações. No entanto, a maioria dos estudos realizados são qualitativos, muitas vezes devido às dificuldades na obtenção de valores ópticos diretos e utilização de métodos fotoelásticos que levam a resultados estatísticos complicados [7-9].

Por essa razão, é necessário investir em novas técnicas e métodos que promovam melhorias na análise qualitativa e maior facilidade na análise quantitativa. Uma alternativa que este trabalho propõe é estudar as distribuições de tensões por meio de um ramo da óptica que permite gravar e reconstruir as intensidades e fases da luz que passa através das amostras fotoelásticas. Esse ramo é referido como Holografia [10].

## 1.1 Holografia: alternativa no estudo das tensões

Na Holografia, uma onda luminosa original é dividida em duas: objeto e referência. A onda objeto, após capturar informações de um objeto de estudo por transmissão ou reflexão, encontra-se com a onda de referência para formar um padrão de interferências denominado holograma.

A reconstrução ocorre quando a mesma onda de referência ilumina o holograma e, por difração, produz a imagem que contém as mesmas informações de intensidade e fase armazenadas [1].

A Holografia tem se destacado por proporcionar uma grande precisão na coleta dos dados com suas técnicas que possibilitam incorporar métodos facilmente adaptáveis a diversas áreas de conhecimento como física, no estudo dos efeitos da polarização em ondas luminosas; engenharia mecânica e de materiais, no estudo das propriedades de materiais; odontologia, no estudo de tensões e deformações em mandíbulas etc. A maior vantagem é a possibilidade de se obter resultados quantitativos através dos valores de intensidade e fase, permitindo conclusões mais reveladoras e confiáveis. [11]

A Holografia foi proposta pelo físico húngaro Dennis Gabor (1900-1979) que em 1948 publicou o primeiro trabalho sobre o tema [12]. Sua ideia inicial foi melhorar a qualidade da imagem em um microscópio eletrônico, quando descobriu que uma segunda onda de referência, ao interferir com a onda objeto, produzia essa melhoria. No início da década de 1960 os trabalhos com Holografia atingiram um interesse maior devido à invenção do LASER, *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, teorizado por Arthur Schawlow (1921-1999) e construído por Theodore H. Maiman (1927-2007) [13-14].

O laser é um sistema fundamentado na mecânica quântica que dá origem a uma onda luminosa com propriedades interessantes devido à interação da radiação eletromagnética com os átomos. Dentre as aplicações, podem-se destacar cirurgias de retina, fusão de nêutrons, estimulação no crescimento de sementes, guia para construção de instrumentos de medida etc. O laser ainda é, atualmente, uma tecnologia aguardando novas aplicações e não se espera que essa dinâmica seja interrompida a curto prazo.

A luz coerente produzida pelo laser, associada ao ajuste de uma técnica holográfica denominada *técnica de registro fora do eixo*, desenvolvida por Emmett Leith e Juris Upatnieks em 1962, proporcionou um aumento na qualidade das imagens holográficas e motivou ainda mais os pesquisadores da época [15]. Com isso, a Holografia encontrou uma importância relevante no universo científico levando Dennis Gabor ao prêmio Nobel de física em 1971.

Com o avanço da computação, a Holografia ficou muito mais acessível e rápida na obtenção dos resultados quantitativos. A reconstrução holográfica tornou-se digital e sua principal vantagem é que as fases da onda de luz armazenadas podem ser calculadas diretamente através de processos numéricos, o que possibilita determinar suas alterações associadas ao campo de tensões e deformações pelas subtrações dos mapas de fase das ondas reconstruídas.

A Holografia Digital foi introduzida no início da década de 1970 por Yaroslavski et al [16-17]. Atualmente existem técnicas que utilizam câmeras digitais para o registro dos hologramas e métodos computacionais para as reconstruções de intensidades e fases. Há diversos métodos para reconstruir digitalmente hologramas, dentre os quais se destacam: método da convolução e o método de Fresnel [18-19]. Algumas técnicas holográficas utilizam polarizadores para produzir hologramas com direções de polarizações específicas [20-21]. Essas técnicas auxiliam na investigação de tensões e deformações no interior de materiais fotoelásticos.

## 1.2 Tensões e deformações: relevantes em aplicações tecnológicas

No universo tecnológico, os esforços mecânicos sobre corpos materiais estão entre os principais causadores de falhas em componentes de máquinas e estruturas sólidas. Tais esforços promovem dois tipos de tensões e deformações no interior dos objetos: elásticas ou residuais. As tensões e deformações elásticas estão relacionadas às solicitações, forças, temperaturas etc., de fontes externas sobre um corpo e desaparecem quando esses esforços são retirados. As tensões e deformações residuais ou plásticas, por outro lado, mantêm-se no corpo após a aplicação dos esforços, mesmo quando esses são retirados [22].

Medir e estudar tensões e deformações, bem como a forma com que elas agem em componentes diversos, tornaram-se extremamente importantes e, por isso, muitas técnicas e métodos foram e são produzidos com essa finalidade.

No entanto, grande parte das técnicas de medição são destrutivas, inutilizando o componente em teste. Portanto, qualquer meio de medir tensões e deformações mantendo o sistema ou componente mecânico em funcionamento, sem destruí-lo, promove um ganho significativo em termos de tempo e recursos.

Em decorrência dos avanços na área da informática, os métodos teóricos de análise evoluíram significativamente nas últimas décadas e passaram a ser frequentemente utilizados, dentre os quais se destacam os métodos da teoria de Elementos Finitos [23-24]. Porém, em projetos em que a segurança é um fator determinante, como na construção de aviões pela engenharia aeronáutica, ou quando a complexidade da peça dificulta a aplicação dos métodos computacionais, é necessário que os resultados da análise das tensões e deformações teóricas sejam comparados a resultados experimentais. Nesse contexto surgiu a Fotoelasticidade [25].

### 1.3 Fotoelasticidade: técnicas e métodos consolidados

O fenômeno da dupla refração temporária foi primeiramente descrito por Erasmus Bartholinus [26-28] e foi relacionado com o estado de deformação no início do século XIX por David Brewster, que apresentou um relatório sugerindo a possibilidade da determinação experimental de tensões a partir de modelos estruturais transparentes [29]. O uso da Fotoelasticidade teve um grande avanço no século XX, a partir dos trabalhos de Coker e Filon na Inglaterra [30], de Frocht e Guernsey nos Estados Unidos [31] e Föppl e Mönch na Alemanha [32].

Na década de 1970, a incorporação do processamento digital de imagens na interpretação dos resultados em Fotoelasticidade resultou na criação de processos de automação que permitiram analisar toda a extensão da peça modelada. A partir da década de 1980 surgiram métodos como Fotoelasticidade de meia franja e deslocamento de fase, para determinar as diferenças de tensões do estado plano com a análise de imagens de franjas obtidas por técnicas que utilizam instrumentos ópticos formados com combinações de polarizadores e lâminas de onda, denominados polariscópios.

Na década de 1990, surgiram trabalhos que reuniram duas ou mais técnicas de Fotoelasticidade em uma mesma configuração experimental, as denominadas técnicas mistas, facilitando o aparecimento de novos métodos de análise. O artigo *Digital photoelasticity – A comprehensive review* analisa os trabalhos realizados nos últimos anos [33].

Dentre os métodos atuais, um dos destaques é o de fotoelasticidade RGB, no qual a avaliação do padrão de franjas é realizada através das suas cores em uma imagem obtida por um polariscópio [34-35].



Nos estudos científicos e tecnológicos, a Fotoelasticidade tem a finalidade de determinar as distribuições de tensões e deformações em sistemas estruturais, permitindo análises qualitativas ou quantitativas a partir da observação de efeitos ópticos em polariscópios, que são instrumentos de fácil montagem e utilização. Suas técnicas e métodos são amplamente utilizados por empresas nos dias de hoje para verificação da confiabilidade dos métodos da teoria de Elementos Finitos.

## 1.4 Holografia *versus* Fotoelasticidade

Mesmo com todas as vantagens da Fotoelasticidade, as informações ópticas como índices de refração, diferenças de fase etc., não são medidas diretamente, fazendo com que os diversos métodos associados a ela possuam procedimentos que levam a resultados estatísticos indiretos e comparativos.

Embora as técnicas holográficas tenham avançado bastante nos últimos anos, os diversos trabalhos investiram muito pouco na análise quantitativa de tensões e deformações por Holografia. No entanto, sua dinâmica permite que os resultados sejam mais precisos, pois se fundamentam em propriedades ópticas como intensidade, fase, índice de refração etc., que são fornecidas direta ou quase diretamente, havendo com isso grande perspectiva no tratamento mais quantitativo do problema em questão.

## 1.5 Objetivos da pesquisa

O objetivo geral desse trabalho é criar um método em holografia digital para estudar tensões em materiais fotoelásticos. Para tanto, será feita a análise das fases reconstruídas numericamente com algoritmo fundamentado no método de Fresnel a partir de hologramas gerados pela técnica de interferometria com duas ondas de referências polarizadas ortogonalmente.

Para que o objetivo geral seja atingido serão necessárias as seguintes etapas de trabalho:

(i) Utilizar o método de correlação THSP (*Temporary History Speckle Pattern*), para determinação dos tempos de estabilizações das compressões e descompressões nas amostras fotoelásticas sob diversos esforços externos. Obter as imagens de dados para essa análise por meio da técnica de *speckle* por transmissão.

(ii) Efetuar ensaios de compressão e descompressão mecânicos com diversos esforços externos sobre as amostras fotoelásticas para obtenção dos parâmetros mecânicos: módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson. Calcular os parâmetros mecânicos pelo método dos mínimos quadrados. Utilizar métodos da teoria de Elementos Finitos associado à fotoelasticidade RGB e os parâmetros mecânicos e geométricos das amostras fotoelásticas para obter as distribuições teóricas de diferenças de tensões elásticas. Obter imagens de franjas com a técnica de Fotoelasticidade por transmissão com polariscópio elíptico de campo claro para determinar as distribuições de diferenças de tensões elásticas experimentais com o método de fotoelasticidade RGB.

(iii) Efetuar ensaios de compressão e descompressão com diversos esforços externos sobre as amostras fotoelásticas para obtenção dos parâmetros holográficos: módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson. Para a produção dos hologramas, utilizar a técnica de interferometria com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas, após a calibração da configuração. Para a reconstrução digital das fases, confeccionar um programa computacional, fundamentado no método de Fresnel. Calcular os parâmetros holográficos pelo método dos mínimos quadrados. Aplicar um determinado esforço externo sobre as amostras para obtenção dos hologramas. A partir dos hologramas, reconstruir os mapas de fases. Com os mapas de fases, determinar as diferenças de fase na região selecionada para estudo. Com os valores de diferenças de fase e os parâmetros holográficos, construir as distribuições de diferenças de tensões elásticas experimentais holográficas.

(iv) Validar os resultados obtidos pelo método holográfico proposto nesse trabalho pelas comparações com resultados obtidos pelos métodos teórico e fotoelasticidade RGB e verificar sua aplicabilidade em uma amostra específica de aplicação.

## 1.6 Estrutura e organização do trabalho

O Capítulo 1 apresenta a motivação, a importância, o estado da arte e os objetivos deste trabalho.

O Capítulo 2 apresenta, em seu primeiro tópico, uma revisão dos fundamentos teóricos necessários para a compreensão das técnicas e métodos utilizados no desenvolvimento desse trabalho: Holografia Convencional e Digital, *speckle*, Elasticidade Mecânica e Fotoelasticidade. Essas técnicas e métodos foram denominados auxiliares. O

segundo tópico apresenta a construção da teoria que envolve a técnica holográfica utilizada e o método holográfico proposto.

O Capítulo 3 mostra, em seu primeiro tópico, o processo de confecção das amostras fotoelásticas. No segundo tópico, apresenta as configurações das técnicas e os procedimentos dos métodos auxiliares e, no terceiro tópico, a configuração da técnica holográfica e os procedimentos do método holográfico proposto.

O Capítulo 4, em seu primeiro tópico, apresenta a análise de dados e os resultados obtidos com a utilização dos métodos auxiliares: tempos de compressão e descompressão; parâmetros mecânicos; distribuições de diferenças de tensões teóricas e experimentais por Fotoelasticidade. Em seu segundo tópico, apresenta a análise de dados e os resultados obtidos a partir do método holográfico proposto: calibração da configuração holográfica, parâmetros holográficos e distribuição de diferenças de tensões experimentais por holografia.

O Capítulo 5 mostra a utilização do método holográfico proposto para efetuar a análise de dados e obtenção dos resultados de uma aplicação, cujo protótipo foi constituído de um parafuso metálico inserido em um paralelepípedo de resina fotoelástica transparente.

O Capítulo 6 apresenta as discussões sobre as comparações entre os três métodos utilizados: holográfico, fotoelástico RGB e analítico por Elementos Finitos, para buscar a validação do método holográfico proposto e apontar sua aplicabilidade. A finalização do trabalho, no Capítulo 7, ocorre com a apresentação das conclusões e perspectivas.

Os Apêndices apresentam alguns detalhes sobre a reconstrução digital de Fresnel com o código do programa de reconstrução, alguns detalhes sobre o método analítico de Elementos Finitos e os programas para ajustes de funções.

## 2 Fundamentos teóricos

Este capítulo apresenta os principais aspectos teóricos que formam os fundamentos para o desenvolvimento do presente trabalho. O primeiro tópico faz uma revisão bibliográfica com os elementos relevantes que envolvem as técnicas e métodos auxiliares. O destaque especial está no segundo tópico, que trata da teoria construída sobre a técnica utilizada, holografia com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas, e a teoria do método proposto.

### 2.1 Técnicas e métodos auxiliares

As técnicas e métodos auxiliares foram aqueles que deram suporte ao método proposto ou pela sua fundamentação, ou permitindo sua validação por meio das comparações entre os resultados obtidos. Os principais fundamentos teóricos que as envolvem são: Holografia Convencional, Holografia Digital, *Speckle*, Elasticidade Mecânica, Elementos Finitos e Fotoelasticidade.

#### 2.1.1 Holografia convencional

Holografia é um ramo da óptica que permite registrar e reconstruir as intensidades e as fases de ondas luminosas. O registro do padrão de interferências das ondas objeto e referência, que percorrem o mesmo caminho óptico e são originadas de uma única onda coerente, é realizado em um meio sensível à intensidade luminosa. A reconstrução da amplitude e da fase é feita a partir da difração entre a onda de referência e o registro holográfico [36].

No processo de registro holográfico, uma onda de luz com feixes de mesma direção, frequências iguais e que mantém a mesma relação de fases entre si, é dividida em duas: objeto e referência. A onda objeto é direcionada à amostra que se quer investigar e segue, após reflexão ou transmissão, ao meio de gravação que também é iluminado simultaneamente pela onda de referência. O meio de gravação é qualquer material sensível à intensidade luminosa como, por exemplo, uma placa holográfica, um cristal fotorrefrativo, um sensor de uma câmera digital etc. [1][36-37].

A Figura 2.1 apresenta um esquema simplificado do registro holográfico que mostra uma onda objeto refletindo na amostra e encontrando-se com a onda de referência para formar o padrão de interferências denominado holograma.

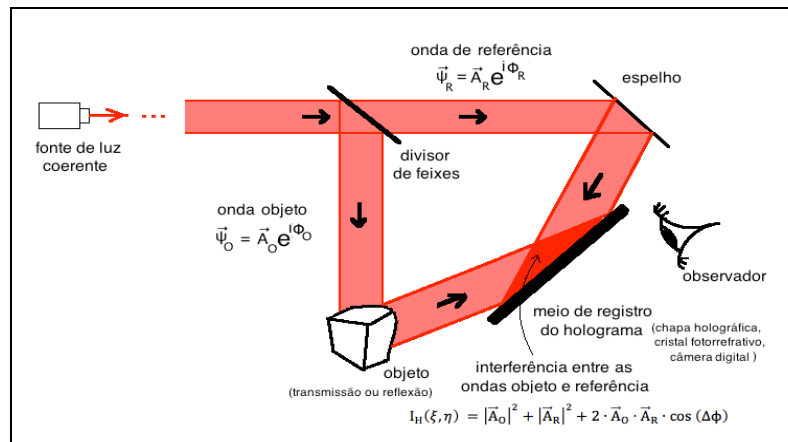


Figura 2.1 - Esquema geral do registro holográfico (holograma): gravação da interferência entre as ondas objeto e referência em um meio de registro (chapa holográfica, cristal fotorrefrativo, câmera digital etc).

Os caminhos ópticos das ondas objeto e referência devem ser iguais, garantindo uma relação de fase constante entre as ondas, para que o resultado da gravação na superfície do meio de registro seja realmente um padrão de interferências que armazena todas as informações de intensidade e fase da onda objeto.

A diferença de fase entre as ondas é convertida em variação da intensidade de luz que sensibiliza ponto a ponto o material de registro. Após a geração, o meio armazena um complexo padrão de interferências entre os feixes objeto e referência. A Figura 2.2 mostra um esquema com duas ondas planas separadas por um ângulo  $\theta$  encontrando-se no plano do holograma,  $(\xi, \eta)$ , para gerar o holograma.

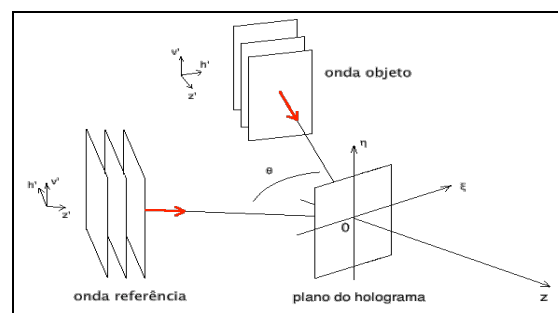


Figura 2.2 - Ondas planas objeto e referência, separadas por ângulo  $\theta$ , interferem no plano do holograma  $(\xi, \eta)$ .

As ondas objeto,  $(\vec{\psi}_O)$ , e referência,  $(\vec{\psi}_R)$ , no plano  $h'v'$ , na notação de Euler [38], podem ser escritas, respectivamente, como

$$\vec{\Psi}_O(h', v') = \mathcal{R}e\{\vec{A}_O \cdot e^{i\phi_O}\} \equiv \vec{A}_O \cdot e^{i\phi_O} \quad (2.1a)$$

$$\vec{\Psi}_R(h', v') = \mathcal{R}e\{\vec{A}_R \cdot e^{i\phi_R}\} \equiv \vec{A}_R \cdot e^{i\phi_R} \quad (2.1b)$$

$\vec{A}_O$  é a amplitude da onda objeto,  $\vec{A}_R$  é a amplitude da onda referência,  $\phi_O$  é o ângulo de fase da onda objeto e  $\phi_R$  é o ângulo de fase da onda referência.

A sobreposição dessas ondas, ao se encontrarem no plano do holograma,  $(\xi, \eta)$ , é

$$\vec{\Psi}_H(\xi, \eta) = \vec{\Psi}_O(h', v') + \vec{\Psi}_R(h', v') \quad (2.2)$$

cuja intensidade é

$$I_H(\xi, \eta) = |\vec{\Psi}_H(\xi, \eta)|^2 \cdot \vec{\Psi}_H(\xi, \eta) = |\vec{A}_O|^2 + |\vec{A}_R|^2 + 2 \cdot \vec{A}_O \cdot \vec{A}_R \cdot \cos(\Delta\phi) \quad (2.3)$$

O termo cruzado  $\vec{A}_O \cdot \vec{A}_R$  contém uma modulação pelo cosseno da diferença de fase,  $\Delta\phi = \phi_R - \phi_O$ , entre as ondas. A Expressão (2.3) representa o padrão de interferências, também denominado intensidade do holograma, impresso no meio de registro.

No processo de reconstrução holográfica, o holograma gravado no meio de registro é iluminado com uma onda de referência que possui as mesmas características do processo de gravação. O resultado da difração da onda de referência com o holograma, para um observador posicionado atrás do meio de registro, é a visualização de imagem virtual tridimensional no mesmo local onde se encontrava o objeto utilizado para a geração do holograma. A Figura 2.3 apresenta um esquema simplificado dessa ideia.

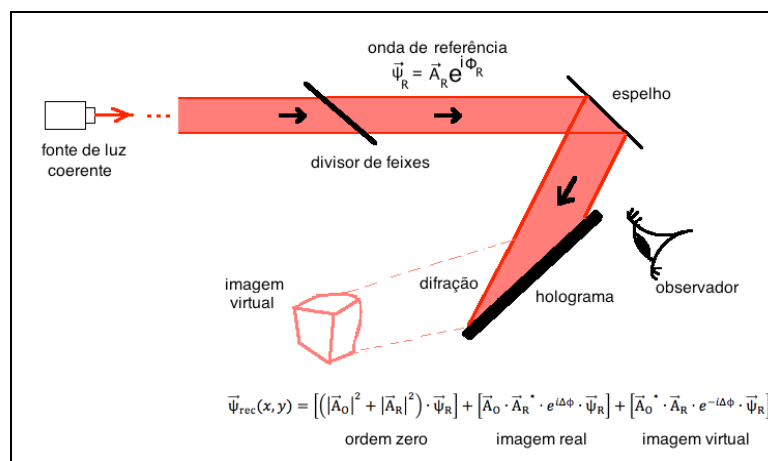


Figura 2.3 - Esquema geral da reconstrução holográfica (intensidade e fase): produção da imagem virtual a partir da difração entre a onda de referência, com as mesmas características da onda de referência do registro, e o holograma.

A onda reconstruída,  $\vec{\Psi}_{\text{rec}}(h, v)$ , é uma função da distribuição da intensidade do holograma,  $I_H(\xi, \eta)$  e da onda incidente,  $\vec{\Psi}_R(h', v')$ , tal que

$$\vec{\Psi}_{\text{rec}}(h, v) = I_H(\xi, \eta) \cdot \vec{\Psi}_R(h', v') \quad (2.4)$$

$h$  e  $v$  são as coordenadas do plano de reconstrução. Assim, utilizando a Expressão (2.3), a onda reconstruída é

$$\vec{\Psi}_{\text{rec}}(h, v) = \left[ (|\vec{A}_O|^2 + |\vec{A}_R|^2) \cdot \vec{\Psi}_R \right] + \left[ \vec{A}_O \cdot \vec{A}_R^* \cdot e^{i\Delta\phi} \cdot \vec{\Psi}_R \right] + \left[ \vec{A}_O^* \cdot \vec{A}_R \cdot e^{-i\Delta\phi} \cdot \vec{\Psi}_R \right] \quad (2.5)$$

que fornece um resultado complexo, com uma parte real e uma parte imaginária. O primeiro termo representa a ordem zero da difração, que não reproduz imagem por não possuir o termo cruzado de intensidade da interferência entre a onda objeto e referência. O segundo termo produz a imagem real, invertida e com pouca intensidade. O terceiro termo produz a imagem virtual observada, localizada na mesma posição onde se encontrava o objeto. Os dois últimos termos posicionam-se opostamente nas demais ordens da difração. Essas observações estão esquematizadas na Figura 2.4.

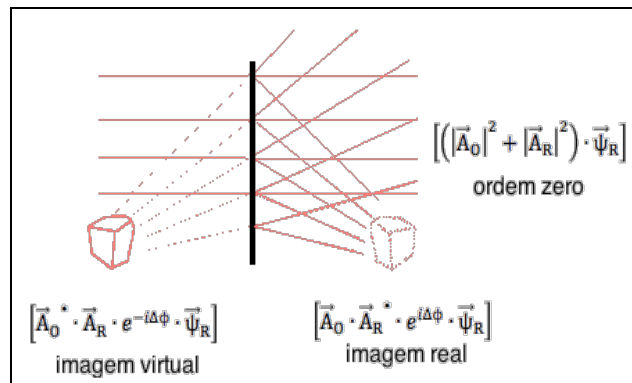


Figura 2.4 - Esquema das ordens de difração: ordem zero (não produz imagem); demais ordens: imagem real (invertida com pouca intensidade) e imagem virtual (observada com boa qualidade).

Pela teoria dos números complexos [38], a intensidade e a fase da imagem reconstruída são, respectivamente,

$$I_{\text{rec}} = |\vec{\Psi}_{\text{rec}}(x, y)|^2 \quad (2.6)$$

$$\phi_{\text{rec}} = \text{arctg} \left\{ \frac{\Im[\vec{\Psi}_{\text{rec}}(x, y)]}{\Re[\vec{\Psi}_{\text{rec}}(x, y)]} \right\} \quad (2.7)$$

## 2.1.2 Holografia Digital

Holografia Digital é um método de reconstrução numérica de intensidades e fases a partir de um holograma. Tal reconstrução é realizada por meio de cálculos fundamentados na integral de difração de Huygens-Fresnel a partir de hologramas registrados em uma câmera digital [39-42].

Pela teoria de difração de Huygens-Fresnel, o cálculo do campo imagem  $\vec{\Psi}_{\text{rec}}(h, v)$  difratado na holografia digital pode ser realizado pela expressão

$$\vec{\Psi}_{\text{rec}}(h, v) = \frac{1}{i\lambda} \iint I_H(\xi, \eta) \cdot \vec{\Psi}_R(\xi, \eta) \cdot \frac{\exp[ikr(\xi, \eta, h, v)]}{r(\xi, \eta, h, v)} \cdot \cos\theta d\xi d\eta \quad (2.8)$$

$I_H(\xi, \eta)$  é a intensidade do holograma,  $\vec{\Psi}_R(\xi, \eta)$  é a função da onda de referência,  $\lambda$  é o comprimento de onda da fonte de luz da técnica de registro,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda,  $r = \sqrt{(h - \xi)^2 + (v - \eta)^2 + z^2}$  a distância entre pontos do holograma e a imagem, e  $z$  a distância entre os planos do holograma,  $(\xi, \eta)$ , e da imagem digital,  $(h, v)$ , na direção de propagação,  $\hat{k}$ , como mostra o esquema da Figura 2.5.

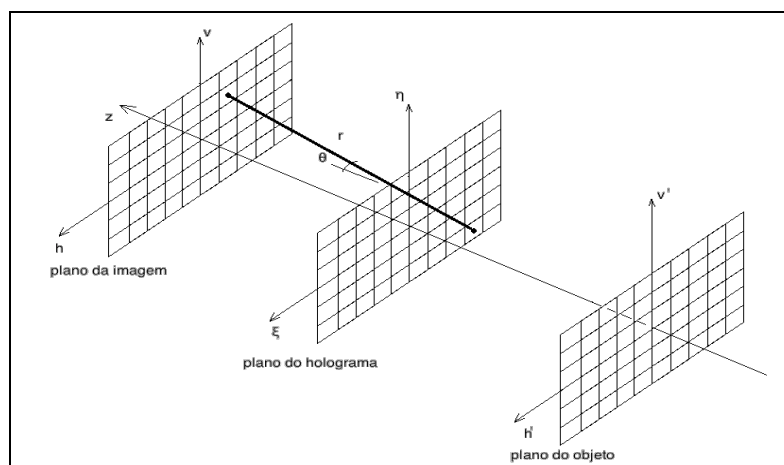


Figura 2.5 - Geometria da reconstrução holográfica digital.  $(h', v')$  representa o plano objeto;  $(\xi, \eta)$  representa o plano do holograma (sensor da câmera digital) e  $(h, v)$  representa o plano da imagem. Cada pixel do plano  $(\xi, \eta)$  é levado ao plano  $(h, v)$  na reconstrução digital.

Pela geometria da imagem,  $\cos(\theta) = \frac{z}{r}$ . Nesse caso, a Expressão (2.8) pode ser reescrita como,

$$\vec{\Psi}_{\text{rec}}(h, v) = \frac{z}{i\lambda} \iint I_H(\xi, \eta) \cdot \vec{\Psi}_R(\xi, \eta) \cdot \frac{\exp\left(ik\sqrt{(h-\xi)^2 + (v-\eta)^2 + z^2}\right)}{[(h-\xi)^2 + (v-\eta)^2 + z^2]} d\xi d\eta \quad (2.9)$$



denominada integral de difração de Huygens-Fresnel. Discretizando a Expressão (2.9) obtêm-se as reconstruções digitais ou pelo método de convolução ou pelo método de Fresnel [18-19].

Nesse trabalho optou-se por utilizar a discretização pelo método de Fresnel por ser mais simples do que a discretização por convolução, embora ambos apresentem o mesmo resultado final. A maior facilidade do método de Fresnel está associada à utilização da transformada de Fourier que aparece uma única vez na discretização, implicando significativa redução do tempo de processamento. Além disso, o resultado obtido é dado no domínio de frequências, facilitando o trabalho em questão cujas informações foram obtidas nesse domínio. No método de convolução o resultado é obtido no domínio espacial.

Reescrevendo a distância  $r$  entre um ponto do plano do holograma,  $(\xi, \eta)$  e um ponto do plano de reconstrução da imagem,  $(h, v)$ , mostrada no esquema da Figura 2.5, tem-se

$$r = z \cdot f(\alpha) \quad (2.10)$$

$$\text{com } \alpha \equiv \left(\frac{h-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{v-\eta}{z}\right)^2 \text{ e } f(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha}.$$

Expandindo  $f(\alpha)$  por série de Taylor [43-44] em torno de  $\alpha_0 = 0$  e efetuando algumas aproximações, cujos detalhes são apresentados no Apêndice A.1, a Expressão (2.9) torna-se,

$$\psi_{\text{rec}}(h, v) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \cdot e^{\frac{ik}{2z}(h^2+v^2)} \cdot \mathcal{F}(k_\xi, k_\eta) \quad (2.11)$$

$\mathcal{F}(k_\xi, k_\eta)$  é a transformada de Fourier da função  $f(\xi, \eta)$  [43-44]. A Expressão (2.11) é a aproximação de Fresnel e sua discretização produz a reconstrução holográfica digital bidimensional, também denominada transformada de Fresnel bidimensional. Detalhes da discretização são apresentados no Apêndice A.2.

### 2.1.3 *Speckle*

*Speckle* é um ramo da óptica que avalia o comportamento estático ou dinâmico do fenômeno de interferência em superfícies iluminadas por uma onda de luz coerente ao longo do tempo [45].

A Figura 2.6 mostra uma foto em tons de cinza da interferência formada durante a iluminação de uma gota de corretivo líquido, *liquid paper*, por um laser de Hélio-Neônio. A ilustração mostra o resultado de um ruído no processo de formação da imagem, que é similar a um conjunto de grãos claros e escuros criando um efeito granulado, comumente conhecido como *speckle*.

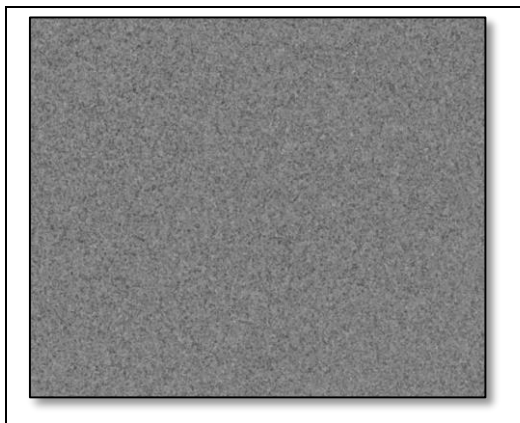


Figura 2.6 - Imagem do padrão instantâneo de *speckle* de uma gota de corretivo líquido iluminada por uma onda de luz laser de He-Ne.

Dentre as diversas formas para análise de *speckle* dinâmico, destaca-se o método *Time History Speckle Pattern*, THSP, ou História Temporal do Padrão de *Speckle*, que consiste em registrar computacionalmente a evolução do tempo de um padrão de intensidades em uma imagem bidimensional, através da coleta de linhas de pixel de cada imagem, em instantes sucessivos, e organizá-las lado a lado em uma imagem intermediária [46]. A Figura 2.7 esquematiza esse procedimento.

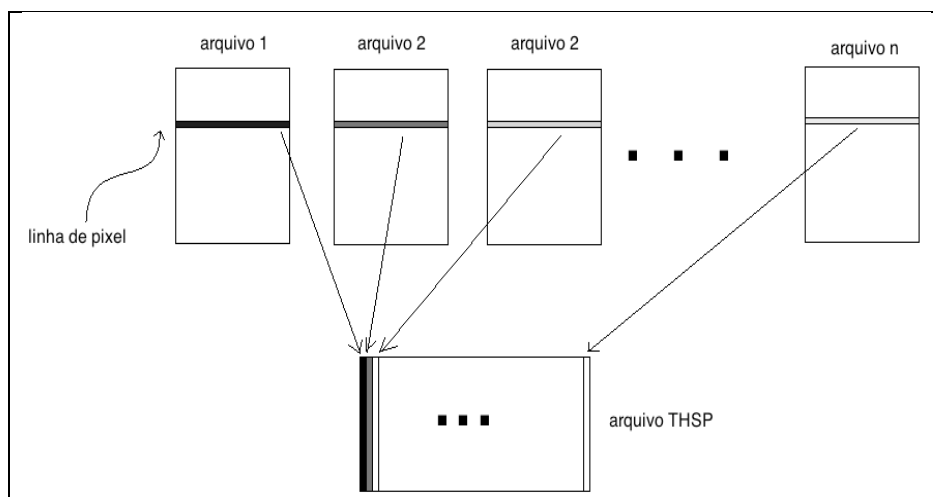


Figura 2.7 - Esquema da criação do arquivo THSP. Cada linha de pixels dos arquivos separados do vídeo são transportados ordenadamente para uma coluna no arquivo THSP.

A Figura 2.8 apresenta uma imagem THSP de 256 linhas verticais em tons de cinza, processada de um video com 256 quadros registrados por uma câmara digital.

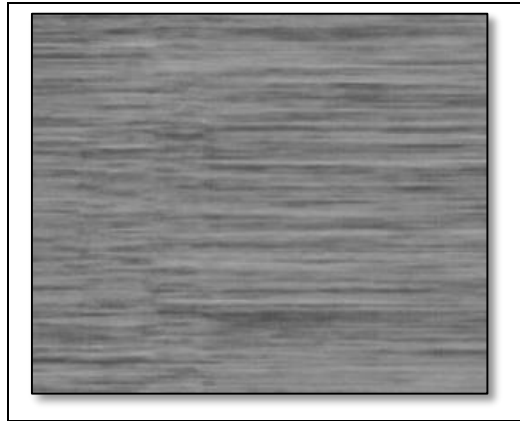


Figura 2.8 - Imagem THSP de 256 linhas verticais que apresenta a história temporal de um video de *speckle* dinâmico com 256 quadros registrados por uma câmara digital.

A análise de correlação é uma maneira de comparar intensidades em pontos ou instantes distintos de uma imagem THSP com o objetivo de avaliar a evolução do *speckle* no espaço ou no tempo [47]. O grau de similaridade de uma função temporal  $f(t)$  com ela mesma em outro instante arbitrário,  $t + \delta t$ , pode ser analisado pela função de autocorrelação  $\gamma(\delta t)$ , por transformada de Fourier [43-44], tal que

$$\gamma(\delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \delta t) f^*(t) dt \quad (2.12)$$

No entanto, o que um arquivo THSP fornece é um conjunto de intensidades,  $I(t)$ , espacialmente distribuídas em instantes sucessivos. Então, é conveniente definir a função de autocorrelação em termos de valores de intensidade.

Assim, por estatística temporal de segunda ordem, que fornece informações acerca da distribuição de velocidades dos espalhadores móveis e estáticos [47-48], a função  $\gamma(\delta t)$ , normalizada, pode ser reescrita como

$$\gamma(\delta t) = \frac{\langle I(t) \cdot I(t + \delta t) \rangle_{xy}}{\langle I(t) \rangle_{xy}^2} \quad (2.13)$$

Na prática, um coeficiente de correlação,  $\mu(t_0, t)$ , que corresponde a uma medida do grau de semelhança entre o padrão *speckle* consigo mesmo em um instante ou região diferente, é definido como [47-48]

$$\mu(t_0, t) = \frac{\sum_{i=1}^N [I(t_{0,i}) - \langle I(t_{0,i}) \rangle] [I(t,i) - \langle I(t,i) \rangle]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N [I(t_{0,i}) - \langle I(t_{0,i}) \rangle]^2 \sum_{i=1}^N [I(t,i) - \langle I(t,i) \rangle]^2}} \quad (2.14)$$

N corresponde ao total de valores de intensidades e t aos instantes de amostragem. Um baixo nível de atividade tende a apresentar poucas variações no padrão espalhado ao longo do tempo, ou variações mais lentas, e níveis mais ativos apresentam grandes variações de intensidades no *speckle* resultante, o que implica na queda mais acentuada do coeficiente de correlação, que funciona, então, como um indicador de atividade da amostra.

## 2.1.4 Elasticidade mecânica

Elasticidade mecânica é o ramo da física que estuda as tensões e deformações de corpos materiais submetidos a esforços externos [49].

Tensão,  $\vec{\rho}$ , é uma grandeza vetorial definida como a razão entre a força  $\Delta\vec{F}$  e a superfície  $\Delta S$  de aplicação [49-52].

$$\vec{\rho} \equiv \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} \quad (2.15)$$

A Figura 2.9 apresenta um esquema das componentes da força  $\Delta\vec{F}$ .

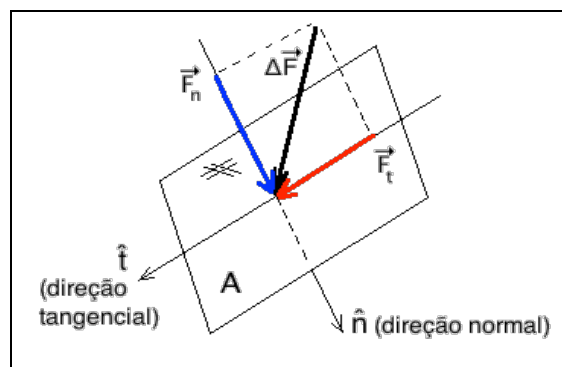


Figura 2.9 - Esquema das componentes da força  $\Delta\vec{F}$  atuando em uma superfície de área A.

Considerando a abordagem em módulo, sem perda em generalidade, as tensões axial ou normal,  $\sigma$ , e cisalhante ou tangencial,  $\tau$ , atuantes em uma área A, são definidas como

$$\sigma \equiv \frac{F_n}{A} \quad (2.16a)$$

$$\tau \equiv \frac{F_t}{A} \quad (2.16b)$$

$F_n$  é o módulo da força resultante das forças axiais ou normais distribuídas uniformemente na seção de área  $A$ .  $F_t$  é o módulo da força resultante das forças de cisalhamento ou tangenciais, distribuídas uniformemente na seção de área  $A$ . A dimensão da tensão é a dimensão de força por comprimento ao quadrado. No sistema internacional de unidades, a tensão é medida em  $\frac{N}{m^2} \equiv \text{Pa}$  (pascal).

Em 1676, Robert Hooke formulou que a tensão normal,  $\sigma$ , aplicada sobre um material linear é proporcional à sua deformação,  $\mathcal{E}$ , a menos de uma constante de proporcionalidade, denominada módulo de elasticidade do material,  $E$ , ou módulo de Young. Thomas Young foi quem explicou essa formulação em 1807. A expressão, denominada Lei de Hooke, é escrita da seguinte forma,

$$\sigma = E \cdot \mathcal{E} \quad (2.17)$$

A deformação linear,  $\mathcal{E}$ , está relacionada ao comprimento original da barra e é definida por

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.18)$$

$\Delta l$  representa a variação de comprimento  $l$  da barra.  $\mathcal{E}$ , adimensional, é uma grandeza escalar já que tanto  $\vec{\Delta l} = \Delta l \hat{h}$  quanto  $\vec{l} = l \hat{h}$  estão orientados na mesma direção.

No esquema da Figura 2.10, uma barra tracionada deforma-se longitudinalmente, mas ao mesmo tempo apresenta uma contração lateral, que é uma fração da deformação longitudinal.

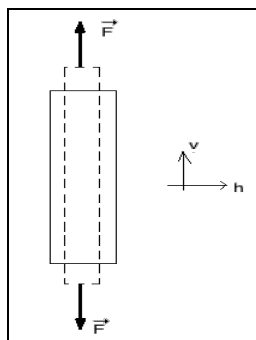


Figura 2.10 - Fração da deformação (contração lateral) de uma barra tracionada longitudinalmente.

Essa fração constante é denominada coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) e é dada por

$$\nu = -\frac{\epsilon_h}{\epsilon_v} \Rightarrow \epsilon_h = -\nu \cdot \epsilon_v = -\nu \cdot \frac{\sigma}{E} \quad (2.19)$$

O sinal (-) ajusta a expressão, já que geralmente as tensões positivas produzem deformações negativas e vice-versa.

Analogamente, para uma chapa de comprimento  $l$ , altura  $a$ , espessura  $e$ , sob a ação de forças axiais,  $F_{in}$ , distribuídas uniformemente em suas seções transversais retangulares, de áreas  $A_h = e \cdot a$  e  $A_v = e \cdot l$ , em ambas as extremidades para cada direção, como mostra o esquema da Figura 2.11, a Lei de Hooke fica,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_h \\ \epsilon_v \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$\sigma_h$  e  $\sigma_v$  são as tensões normais nas direções  $h$  e  $v$ .  $\epsilon_h$  e  $\epsilon_v$  são as deformações nas direções  $h$  e  $v$ , respectivamente.

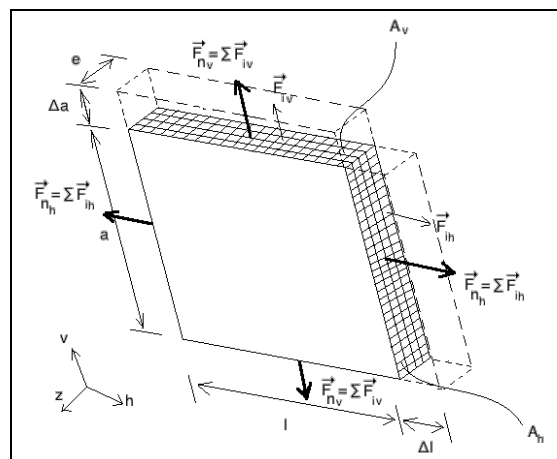


Figura 2.11 - Forças axiais uniformes em seções transversais com áreas  $A$  em duas direções de uma chapa.

Em uma chapa, há a ação tanto da tensão normal,  $\sigma_h$ , quanto da tensão normal,  $\sigma_v$ . Portanto, além da deformação longitudinal em  $h$  e  $v$ , também há uma contração lateral nas duas direções. Então, deve-se descontar cada respectiva contração, da deformação em cada direção, utilizando o coeficiente de Poisson, tal que

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_h \\ \epsilon_v \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_h - \nu \cdot \sigma_v \\ \sigma_v - \nu \cdot \sigma_h \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

O esquema da Figura 2.12 apresenta um trecho da chapa de comprimento  $l$ , altura  $h$ , em equilíbrio, sob a ação de forças tangenciais,  $F_{it}$ , distribuídas uniformemente em suas seções transversais retangulares, de áreas  $A_h = e \cdot a$  e  $A_v = e \cdot l$ , em ambas as extremidades para cada direção.

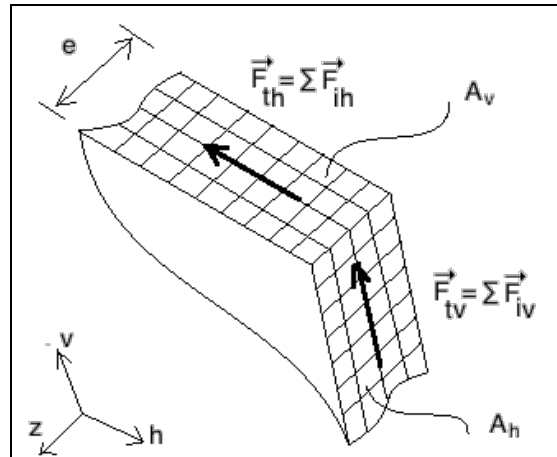


Figura 2.12 - Forças tangenciais uniformes em seções transversais com áreas  $A$  em duas direções de um trecho de uma chapa.

A tensão de cisalhamento,  $\tau$ , em cada direção, é definida como

$$\begin{Bmatrix} \tau_h \\ \tau_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_{th}}{A_v} \\ \frac{F_{tv}}{A_h} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

supostas uniformes,  $\tau_h = \tau_v = \tau_{hv}$ , essas tensões produzem distorções,  $\gamma_{hv}$ , no material, tais que

$$\tau_{hv} = \mathcal{G} \cdot \gamma_{hv} \quad (2.23)$$

$\mathcal{G} = \frac{E}{2(1+\nu)}$  é denominado módulo de elasticidade em cisalhamento ou módulo de rigidez.

Um estado plano de tensões, ou estado de tensões bidimensionais é caracterizado por tensões normais ( $\sigma$ ) e de cisalhamento ( $\tau$ ), somente na direção paralela ao conjunto de forças externas ( $F$ ), distribuídas uniformemente ao longo do comprimento ( $l$ ) do material, como mostra o esquema da Figura 2.13. Não há tensões, portanto, na direção perpendicular ao conjunto de forças externas.

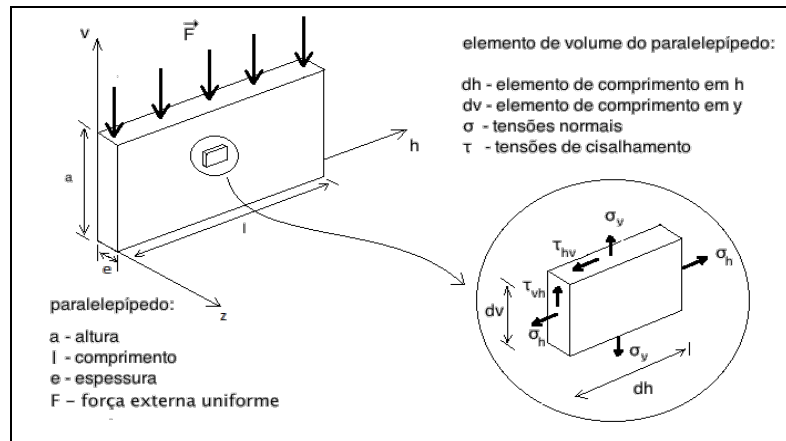


Figura 2.13 - Estado plano de Tensão: paralelepípedo de pequena espessura (e), sob a ação de forças externas (F) paralelas e uniformes, gerando tensões, normais ( $\sigma$ ) e de cisalhamento ( $\tau$ ), num elemento infinitesimal de volume no interior do paralelepípedo. Essas tensões, ao longo do material, atuam somente num plano paralelo ao conjunto de forças. Figura modificada da referência [49].

Com as Expressões (2.21) e (2.23) obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \\ \tau_{hv} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_h \\ \epsilon_v \\ \gamma_{hv} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\sigma_{(h,v)}\} = [D] \{\epsilon_{(h,v)}\} \quad (2.24)$$

A Matriz (2.24) estabelece a relação entre os diversos componentes de tensões e deformações para qualquer ponto de uma chapa com pequena espessura e sob estado plano de tensões. O termo  $\{\sigma_{(h,v)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \\ \tau_{hv} \end{Bmatrix}$  representa a matriz das tensões em um ponto da chapa, o

termo  $[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$  representa a matriz de elasticidade, ou matriz do material, e o

termo  $\{\epsilon_{(h,v)}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_h \\ \epsilon_v \\ \gamma_{hv} \end{Bmatrix}$  representa a matriz das deformações em um ponto da chapa.

Elementos Finitos é uma teoria que envolve métodos numéricos para cálculo aproximado da resposta aos deslocamentos, deformações e tensões de uma estrutura sólida. Esse é um caminho alternativo aos métodos analíticos clássicos que apresentam soluções exatas, porém limitadas a alguns casos e que fogem da maioria das aplicações práticas encontradas no dia-a-dia [49 e 52].



## 2.1.5 Fotoelasticidade

Fotoelasticidade é um ramo da óptica composto de técnicas e métodos que permitem investigar as tensões internas em materiais temporariamente birrefringentes por meio de imagens de franjas ópticas observadas em um instrumento denominado polariscópio, que é fundamentalmente constituído de uma fonte de luz policromática ou monocromática e um objeto de estudo posicionado entre lâminas de atraso e polarizadores com estados de polarizações ortogonais ou paralelos entre si [53].

Alguns cristais transparentes, por exemplo a calcita,  $\text{CaCO}_3$ , possuem intrinsecamente a propriedade da dupla refração e, por isso, são denominados anisotrópicos. Esse fenômeno é denominado birrefringência e é ilustrado em um esquema geral pela Figura 2.14.

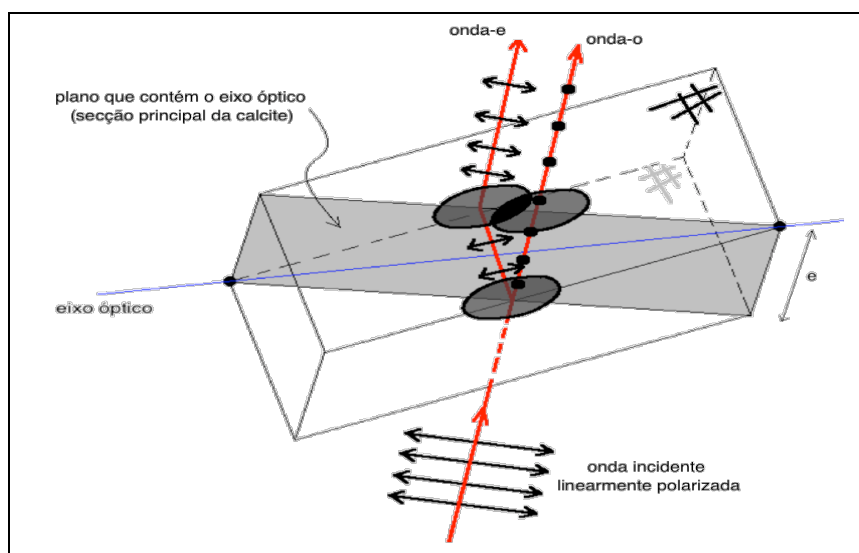


Figura 2.14 - Esquema geral da birrefringência. Onda linearmente polarizada incide no material e se divide em onda-o, ordinária e onda-e, extraordinária, com índices de refração distintos, ao passar pelo plano que contém o eixo óptico do material devidamente crivado. As ondas ordinária e extraordinária emergentes possuem estados de polarizações ortogonais entre si.

Na Figura 2.14, uma onda com estado de polarização linear incide em um material cristalino transparente, birrefringente, e em um objeto localizado na interface do material. No interior do cristal, ao passar pelo plano que contém o eixo óptico do material devidamente crivado, a onda inicial é dividida em duas novas ondas: onda-o, ordinária, e onda-e, extraordinária. Ambas as ondas possuem índices de refração diferentes,  $n_o$  e  $n_e$ , respectivamente.

Ao emergirem de uma espessura,  $e$ , do material, o resultado é a visualização de duas imagens do único objeto de estudo. As ondas ordinária e extraordinária possuem estados de polarizações ortogonais, pois a intersecção entre as imagens apresenta um campo escuro, típico de quando se efetua o cruzamento ortogonal entre dois polarizadores lineares [1].

A diferença de fase,  $\Delta\phi$ , entre as ondas ordinária e extraordinária está associada à diferença de caminho óptico,  $\Delta r$ , entre essas ondas, tal que

$$\Delta\phi = k \cdot \Delta r \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot e \cdot |n_o - n_e| \quad (2.25)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda e  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz incidente [1].

Então, a diferença de índice de refração produzida pelo material faz com que as ondas tenham uma diferença de fase que resulta em uma duplicação da imagem para o observador. Esse efeito é mostrado na fotografia da Figura 2.15, onde um cristal de calcita é posicionado sobre um objeto, ponto escuro, e iluminado com uma fonte de luz.

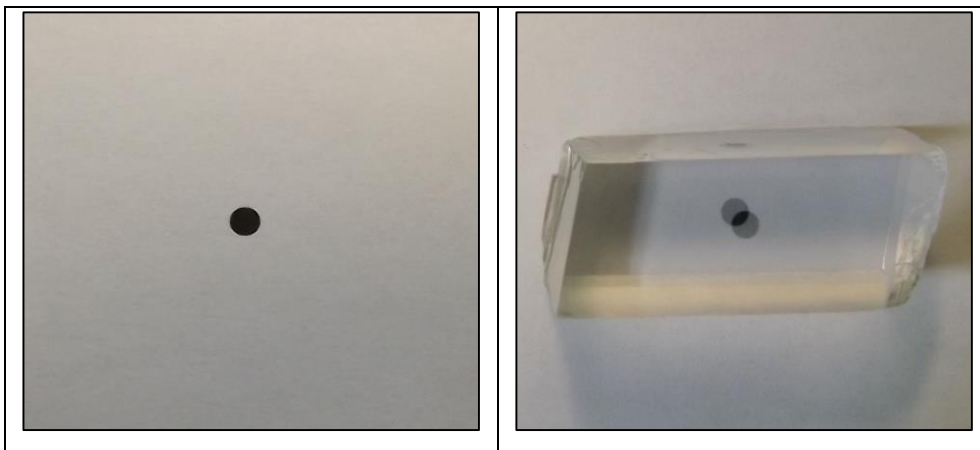


Figura 2.15 - Fotografia do efeito da birrefringência para um objeto, ponto escuro, sob um cristal de calcita, iluminado com uma fonte de luz. Duas imagens são geradas com um campo escuro na intersecção entre elas.

Alguns materiais não cristalinos transparentes apresentam refração única quando estão livres de esforços externos, por isso são denominados isotrópicos. Na presença de esforços externos, no entanto, eles passam a ter dupla refração tornando-se anisotrópicos. Esse fenômeno, denominado birrefringência temporária, está associado à elasticidade mecânica do material e, portanto, à capacidade de alteração de seu arranjo molecular, fato não possível em materiais cristalinos devido à sua estrutura mais rígida [54].

A observação do fenômeno da birrefringência temporária em meios transparentes se dá pelas técnicas de Fotoelasticidade que utilizam polariscópios fundamentados nas propriedades da luz polarizada em sua operação. Há dois principais tipos de polariscópio, o linear e o elíptico. O polariscópio com polarização linear, possibilita que sejam visualizadas simultaneamente as franjas associadas às tensões, denominadas isocromáticas com a aparência colorida, e as franjas associadas às deformações, denominadas isoclínicas com a aparência preta. Os polariscópios elíptico e circular com o uso de lâminas de atraso de  $\lambda/4$ , permitem somente a visualização das franjas isocromáticas, por campo claro quando os polarizadores são paralelos ou por campo escuro quando os polarizadores são ortogonais. As lâminas de atraso convertem luz linearmente polarizada em luz elipticamente ou circularmente polarizadas e vice-versa, eliminando praticamente as franjas isoclínicas, já que essas ocorrem em regiões onde as diferenças de deformações, devido à birrefringência, são iguais quando os índices de refração são paralelos às direções dos eixos de polarizações do polariscópio [55].

As fotografias da Figura 2.16 mostram à esquerda um material fotoelástico, sem a ação de um esforço externo e, à direita, o mesmo material submetido a um esforço externo, observado em um polariscópio linear com incidência de luz policromática. O resultado é o aparecimento de franjas isocromáticas e isoclínicas devido à mudança do estado de polarização pelas tensões e deformações no interior do material.

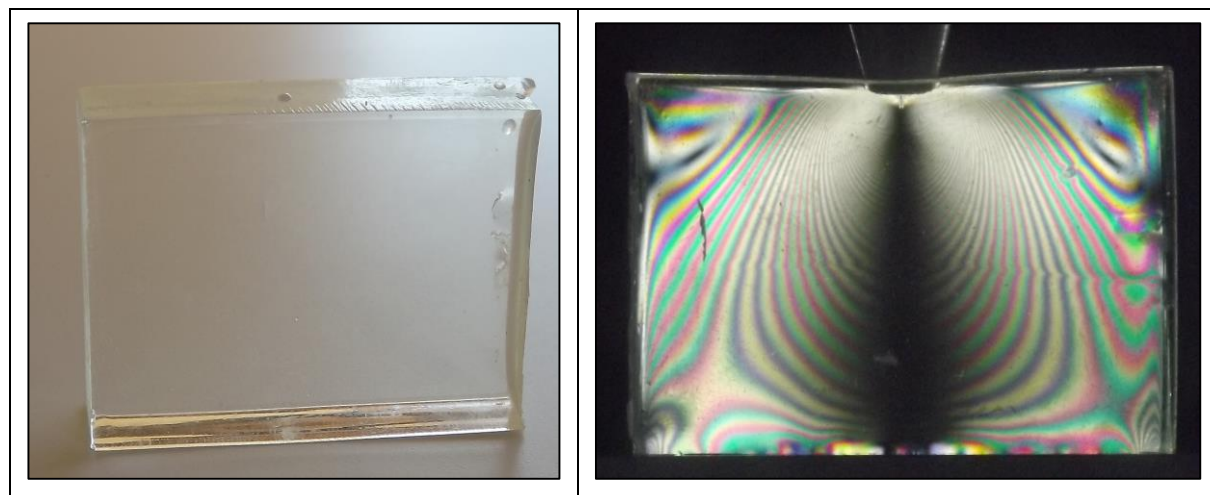


Figura 2.16 - Fotografia do efeito da birrefringência temporária. À esquerda o material fotoelástico sem esforço externo não apresenta o efeito. À direita, sob esforço externo, o estado de polarização é alterado, produzindo franjas coloridas (isocromáticas) e escuras (isoclínicas), quando a observação é feita num polariscópio linear com luz branca incidente.

## 2.1.6 Lei óptica da tensão

Para um material fotoelástico que exhibe o efeito da birrefringência temporária sob ação de esforço externo, a lei óptica da tensão relaciona as alterações no índice de refração com o seu estado plano de tensões [56-57]. Essas alterações são linearmente proporcionais ao esforço mecânico externo sobre o material e, conseqüentemente, esses índices de refração estão associados às tensões e deformações em seu interior. As equações da Expressão (2.26) apresentam essa ideia, em módulo, no sistema internacional de unidades.

$$\begin{bmatrix} (n_h - n_0) \\ (n_v - n_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_h & \sigma_v \\ \sigma_v & \sigma_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_h \\ c_v \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

com  $n_h$  e  $n_v$  representando os índices de refração do material, nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Na condição do esforço externo, esses índices de refração estão associados às tensões principais e são denominados índices de refração principais.  $n_0$  representa o índice de refração do material sem esforço.  $c_h$  e  $c_v$  são constantes denominadas coeficientes ópticos de tensões. Essas são as relações fundamentais entre as tensões e os efeitos ópticos, conhecidas como lei óptica das tensões. A Figura 2.17 apresenta um esquema desses índices de refração em um elemento infinitesimal do material.

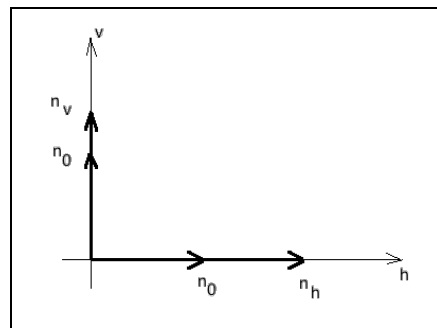


Figura 2.17 - Esquema dos índices de refração nas direções h e v em um elemento infinitesimal de um material fotoelástico. Sem esforço externo os índices de refração,  $n_0$ , são iguais nas duas direções. Quando há esforço externo, a diferença de tensão promove uma diferença de índice de refração nas duas direções, caracterizando a birrefringência temporária do material.

Na prática, ao observar a birrefringência de materiais fotoelásticos em um polariscópio com luz policromática, o resultado é um conjunto de franjas coloridas e escuras no plano paralelo à direção do esforço externo aplicado.

Subtraindo as duas equações da Expressão (2.26), tem-se

$$n_v - n_h = C \cdot (\sigma_v - \sigma_h) \quad (2.27)$$

$C \equiv c_v - c_h$  é denominado coeficiente de tensão óptico relativo. Em casos específicos, esse coeficiente é considerado uma constante do material independente do comprimento de onda,  $\lambda$ , mas, em casos gerais,  $C$  depende do comprimento de onda e  $C = C(\lambda)$  é denominado dispersão de birrefringência ou dispersão fotoelástica.

Se  $c$  é a velocidade da luz,  $\lambda$  o comprimento de onda da luz no vácuo,  $v_i$  é a velocidade e  $n_i$  o índice de refração no meio, então

$$\lambda_i = \lambda \cdot \frac{v_i}{c} = \frac{\lambda}{n_i} \quad (2.28)$$

Para duas ondas que interferem num dado instante de tempo, a diferença de fase,  $\Delta\phi$ , é dada por

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \Delta k \cdot \Delta r &= \left( \frac{2\pi}{\lambda_2} - \frac{2\pi}{\lambda_1} \right) \cdot (r_2 - r_1) = 2\pi \left( \frac{n_2}{\lambda} - \frac{n_1}{\lambda} \right) \cdot (r_2 - r_1) \Rightarrow \\ \Delta\phi &= \frac{2\pi \cdot (r_2 - r_1)}{\lambda} \cdot (n_2 - n_1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é a diferença entre os números de onda e  $\Delta r$  a diferença de caminhos ópticos entre as ondas. No caso da birrefringência ao longo dos eixos h e v, a Expressão (2.29) torna-se

$$\Delta\phi = \frac{2\pi e}{\lambda} \cdot (n_v - n_h) \quad (2.30)$$

onde  $e$  é a espessura do material. Assim, associando as Expressões (2.27) e (2.30), obtém-se

$$(\sigma_v - \sigma_h) = \frac{f_\sigma \cdot N}{e} \quad (2.31)$$

$(\sigma_v - \sigma_h)$  é denominado diferença de tensão do estado plano.  $f_\sigma$  o valor de franjas do material e  $N$  a retardação óptica relativa, tais que

$$f_\sigma \equiv \frac{\lambda}{c} \quad (2.32a)$$

$$N \equiv \frac{\Delta\phi}{2\pi} \quad (2.32b)$$

Em uma imagem colorida, dependendo da carga sobre o material, nota-se que uma sequência de cores se repete ao longo do mesmo. Isso está associado diretamente à mudança no estado de polarização devido a aplicação de esforço externo e, por isso, o efeito é observado quando a amostra é colocada entre dois polarizadores com estados de polarizações ortogonais entre si, num instrumento denominado polariscópio. Cada material, com seu determinado coeficiente de tensão óptico relativo,  $C$ , se comporta de maneira diferenciada quando iluminados por raios de luz de comprimentos de ondas,  $\lambda$ , diferentes. A relação entre esse comprimento de onda e o coeficiente de tensão óptico relativo do material é denominada valor de franja,  $f_{\sigma}$ , e é uma propriedade específica do material.

A partir da Expressão (2.31), a diferença entre as tensões do estado plano pode ser calculada se o valor de franja do material,  $f_{\sigma}$ , for determinado através dos parâmetros do material e se as retardações relativas,  $N$ , forem encontradas por algum dos métodos estabelecidos em Fotoelasticidade. Um desses métodos, denominado fotoelasticidade RGB, possibilita encontrar os valores de  $N$  a partir de uma tabela fotoelástica de referência [35][36][58]. Essa tabela associa as retardações relativas com as intensidades  $R$ ,  $G$ , e  $B$  para compará-las aos valores  $R_i$ ,  $G_i$  e  $B_i$ , do ponto medido em uma imagem de franjas obtida através de um polariscópio. Esse procedimento introduz um erro ( $\Delta E$ ) de comparação que pode ser determinado através da seguinte expressão [57-58]

$$\Delta E = \sqrt{(R_i - R)^2 + (G_i - G)^2 + (B_i - B)^2} \quad (2.33)$$

A posição da tabela fotoelástica de referência que confere o menor erro corresponde à cor do ponto lido e está associada à retardação relativa,  $N$ , dessa posição.

O valor de franjas,  $f_{\sigma}$ , é uma propriedade do material e indica sua maior ou menor rigidez. Dessa forma, quando se aplica uma tensão externa ao material, a deformação é regulada pela matriz de rigidez da Expressão (2.24). Desconsiderando os deslocamentos angulares, a matriz de rigidez pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_h \\ \epsilon_v \end{Bmatrix} \Rightarrow (\sigma_v - \sigma_h) = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_v - \epsilon_h) \quad (2.34)$$

Comparando as Expressões (2.31) e (2.34), o valor de franjas pode ser calculado a partir das propriedades do material, tal que

$$f_{\sigma} = \frac{e \cdot E}{1 + \nu} \quad (2.35)$$

com  $N = (\epsilon_v - \epsilon_h)$ .

## 2.2 Técnica e método holográficos

Esta seção mostra a teoria que envolve a produção de dois hologramas simultâneos com polarizações ortogonais e as deduções das funções de ondas objeto e referências a partir do interferômetro com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas, pela formulação de Jones [59]. O destaque desse capítulo está na apresentação da teoria do Método Holográfico proposto nesse trabalho que está fundamentado nas teorias de Elasticidade Mecânica e Fotoelasticidade.

### 2.2.1 Duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas

Esta ideia busca a conciliação entre os recursos da Holografia convencional e da Polarização da luz [60] e promove novas possibilidades no estudo das tensões e deformações em materiais [20-21]. A técnica registra dois hologramas simultâneos no plano  $(\xi, \eta)$ , devido as interferências entre uma onda objeto,  $\vec{\Psi}_{OBJ}$ , e duas ondas de referência,  $\vec{\Psi}_{REF_h}$  e  $\vec{\Psi}_{REF_v}$ , como mostra o esquema da Figura 2.18.

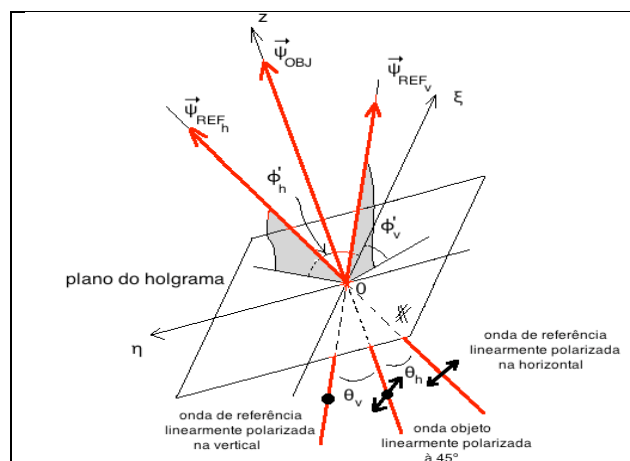


Figura 2.18 - Geometria de eixos na incidência no plano do holograma. Duas ondas de referências com polarizações lineares ortogonais, uma em relação à outra, interferindo com uma onda objeto polarizada linearmente a 45°. Dois hologramas simultâneos são gravados em um meio de registro.

Nesse caso, a onda  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_h}$  tem estado linear de polarização horizontal e a onda  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_v}$  tem estado linear de polarização vertical. Os hologramas são registrados por ondas propagando-se em três direções diferentes: a onda objeto,  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ}}$ , ao longo do eixo 0z com incidência normal no plano do holograma, e as ondas de referência,  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_h}$  e  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_v}$ , propagando-se em direções simétricas, considerando  $\theta_h \simeq \theta_v$ . Considera-se, também, simetria das fases no holograma,  $\phi'_h \simeq \phi'_v$ , no plano  $(\xi, \eta)$ .

Como os estados de polarizações das ondas  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_h}$  e  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_v}$  são ortogonais, elas não interferem entre si, idealmente. O holograma é, então,

$$\vec{\Psi}_H(\xi, \eta) = \vec{\Psi}_{\text{OBJ}} + \vec{\Psi}_{\text{REF}_h} + \vec{\Psi}_{\text{REF}_v} \quad (2.36)$$

e sua intensidade, tal que

$$I_H(\xi, \eta) = |\vec{\Psi}_H(\xi, \eta)|^2 \quad (2.37)$$

A onda reconstruída,  $\vec{\Psi}_{\text{Rec}}(h, v)$ , é o resultado da difração da distribuição de intensidade do holograma,  $I_H(\xi, \eta)$  e das ondas incidentes,  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_h}(h', v')$  e  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_v}(h', v')$ ,

$$\vec{\Psi}_{\text{Rec}}(h, v) = I_H(\xi, \eta) \cdot [\vec{\Psi}_{\text{REF}_h}(h', v') + \vec{\Psi}_{\text{REF}_v}(h', v')] \quad (2.38)$$

com intensidade,

$$I_{\text{Rec}}(h, v) = I_{\text{ordem zero}} + I_{\text{REF}_h(\text{real})} + I_{\text{REF}_v(\text{real})} + I_{\text{REF}_h(\text{virtual})} + I_{\text{REF}_v(\text{virtual})} \quad (2.39)$$

e fase,

$$\phi_{\text{Rec}}(h, v) = \text{arctg} \left\{ \frac{\Im[\vec{\Psi}_{\text{Rec}}(h, v)]}{\Re[\vec{\Psi}_{\text{Rec}}(h, v)]} \right\} \quad (2.40)$$

O primeiro termo da Expressão (2.39) representa a ordem zero da difração. Os dois próximos termos representam as duas imagens reais correspondentes aos estados de polarizações horizontal e vertical, respectivamente. Os dois últimos termos representam as imagens virtuais para os mesmos estados de polarizações.



Se o registro desses hologramas é realizado no sensor de uma câmera digital, ela deve estar afastada do plano de interferência para que haja uma diferença angular  $\theta_h$ , entre a onda  $\vec{\Psi}_{REF_h}$  e  $\vec{\Psi}_{OBJ}$ , e  $\theta_v$ , entre  $\vec{\Psi}_{REF_v}$  e  $\vec{\Psi}_{OBJ}$ , como é mostrado na Figura 2.18. Essa diferença angular é importante, pois permite identificar as ordens da difração devido a simulação das ondas de referências com os hologramas, durante a reconstrução digital [61].

Como os elementos visuais que se pretende registrar são franjas de interferência, então o tamanho do pixel no sensor da câmera digital deve ser compatível com o espaçamento entre franjas. Pelo teorema da amostragem, são necessários ao menos dois pixels do sensor para cada período da variação espacial na distribuição de intensidade do holograma [62-63]. Assim, se a dimensão de cada pixel é representada por  $\Delta\xi$ , então

$$2\Delta\xi < d = \frac{\lambda}{2\text{sen}(\theta/2)} \quad (2.41)$$

$d$  é o espaçamento entre duas franjas no holograma que se forma sobre o sensor da câmera digital. Esse espaçamento depende do comprimento de onda,  $\lambda$ , da luz e do ângulo entre as ondas que interferem.

Sendo assim, a partir da Expressão (2.41), tem-se

$$2\Delta\xi < \frac{\lambda}{2\text{sen}(\frac{\theta}{2})} \Rightarrow \theta_{M\acute{a}x} < 2 \cdot \arcsen\left(\frac{\lambda}{4\Delta\xi}\right) \quad (2.42)$$

## 2.2.2 Funções de onda objeto e referências

A Figura 2.19 esquematiza a chegada da onda plana original,  $\vec{\Psi}_{ORI}(x',y')$ , no primeiro divisor de feixes, DF1, da configuração holográfica utilizada neste trabalho.

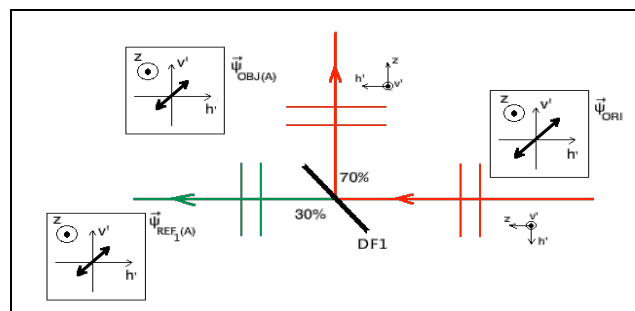


Figura 2.19 - Separação da onda original em objeto e referência iniciais, por um divisor de feixes com relação de intensidade 70% reflexão e 30% transmissão.

$\vec{\Psi}_{\text{ORI}}(x', y')$  já está com estado linear de polarização e tem a forma

$$\vec{\Psi}_{\text{ORI}} = \begin{bmatrix} A_{0h} e^{i\phi_{0h}} \\ A_{0v} e^{i\phi_{0v}} \end{bmatrix} e^{i\phi_0} \quad (2.43)$$

$A_{0h}$  e  $A_{0v}$  são os módulos das amplitudes no eixo  $x'$ , horizontal, e  $y'$ , vertical.  $\phi_{0h}$  e  $\phi_{0v}$  são as fases da onda nas direções horizontal e vertical, respectivamente.  $\phi_0$  representa a diferença de fase entre as ondas horizontal e vertical. Ao passar por DF1 (70:30),  $\vec{\Psi}_{\text{ORI}}$  é dividida em onda objeto inicial,  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ(A)}}$ , e onda de referência inicial do braço 1,  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_1(A)}$ . Supondo que DF1 não atue como polarizador, tem-se

$$\vec{\Psi}_{\text{OBJ(A)}} = \begin{bmatrix} A_{0h} e^{i\phi_h} \\ A_{0v} e^{i\phi_v} \end{bmatrix} \quad (2.44a)$$

$$\vec{\Psi}_{\text{REF}_1(A)} = \begin{bmatrix} A_{0h} e^{i\phi_{1h}} \\ A_{0v} e^{i\phi_{1v}} \end{bmatrix} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} \quad (2.44b)$$

com fatores de normalização  $\left(\frac{7}{10} e^{i\phi_0}\right)$  para a onda  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ(A)}}$  e  $\left(\frac{3}{10} e^{i\phi_0}\right)$  para a onda  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_1(A)}$ . O termo  $e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})}$  representa a diferença de caminho óptico entre  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_1(A)}$  e  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ(A)}}$ .  $\phi_h$  e  $\phi_v$  são, respectivamente, as fases horizontal e vertical para a onda  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ(A)}}$ .  $\phi_{1h}$  e  $\phi_{1v}$  são, respectivamente, as fases horizontal e vertical para a onda  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_1(A)}$ .

O segundo divisor de feixes DF2 (50:50) separa a onda objeto vinda de DF1 em nova onda objeto com amplitude reduzida,  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ(B)}}$ , e onda de referência inicial do braço 2,  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_2(A)}$ , como mostra o esquema da Figura 2.20.

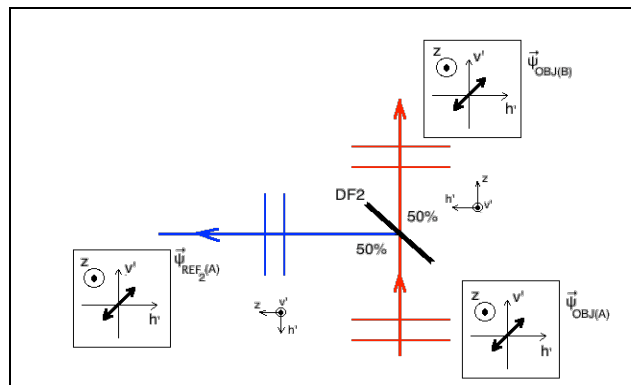


Figura 2.20 - Separação da onda objeto inicial em objeto e referência 2, por um divisor de feixes com relação de intensidade 50% reflexão e 50% transmissão.

Supondo que DF2 não atue como polarizador, tem-se

$$\vec{\Psi}_{\text{OBJ(B)}} = \begin{bmatrix} A_{0h}e^{i\phi_h} \\ A_{0v}e^{i\phi_v} \end{bmatrix} \quad (2.45a)$$

$$\vec{\Psi}_{\text{REF}_2(A)} = \begin{bmatrix} A_{0h}e^{i\phi_{2h}} \\ A_{0v}e^{i\phi_{2v}} \end{bmatrix} e^{i(\vec{k}_2\vec{r})} \quad (2.45b)$$

com fator de normalização  $\left(\frac{7}{20}e^{i\phi_0}\right)$ , tanto para a onda  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ(B)}}$  quanto para a onda  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_2(A)}$ . O termo  $e^{i(\vec{k}_2\vec{r})}$  representa a diferença de caminho óptico entre  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_2(A)}$  e  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ(B)}}$ .

As ondas de referências  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_1(A)}$  e  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_2(A)}$  passam pelos polarizadores lineares  $P0^\circ$ , horizontal, e  $P90^\circ$ , vertical, respectivamente, de tal forma que somente a componente de polarização horizontal da onda  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_1(A)}$  e a componente de polarização vertical da onda  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_2(A)}$  seguem caminho passando pelo divisor DF3 (30:70), que as direciona ao encontro com a onda objeto, como mostra o esquema da Figura 2.21.

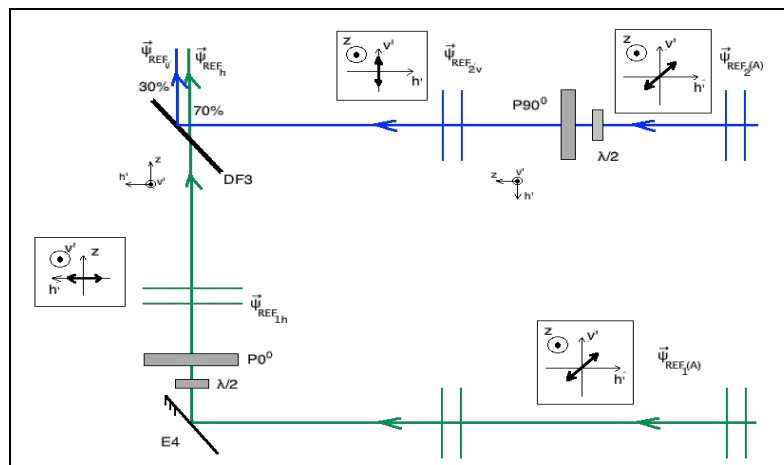


Figura 2.21 - Ondas de referências 1 e 2 passando pelos polarizadores  $P0^\circ$  e  $P90^\circ$ , respectivamente, com ajustes de intensidade pelas lâminas de meia onda,  $\lambda/2$ , e chegando em DF3 que possui relação de intensidade 30% reflexão e 70% transmissão.

As expressões para as ondas de referências resultantes, após DF3, são:

$$\vec{\Psi}_{\text{REF}_h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46a)$$

$$\vec{\Psi}_{\text{REF}_v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.46b)$$

com fator de normalização  $\sqrt{2} \cdot A_{\text{REF}} \left[ e^{i\phi_{1h}} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right]$ , para a onda de referência horizontal,  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_h}$ , e  $\sqrt{2} \cdot A_{\text{REF}} \left[ e^{i\phi_{2v}} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right]$ , para a onda de referência vertical,  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_v} \cdot A_{\text{REF}} = \frac{21}{100} A_{0h} = \frac{21}{200} A_{0v}$  e, então,  $A_{0v} = 2A_{0h}$ . As lâminas de meia onda,  $\lambda/2$ , que efetuam um giro de  $\pi$  no estado de polarização, são utilizadas para auxiliar no ajuste das intensidades das ondas de referências, no sentido de garantir que as ondas  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_h}$  e  $\vec{\Psi}_{\text{REF}_v}$  tenham o mesmo valor.

A onda objeto,  $\vec{\Psi}_{\text{OBJ}(B)}$ , depois de passar pelo divisor DF2, segue caminho e é modificada ao encontrar um polarizador linear a  $45^\circ$ . A Figura 2.22 esquematiza essa mudança.

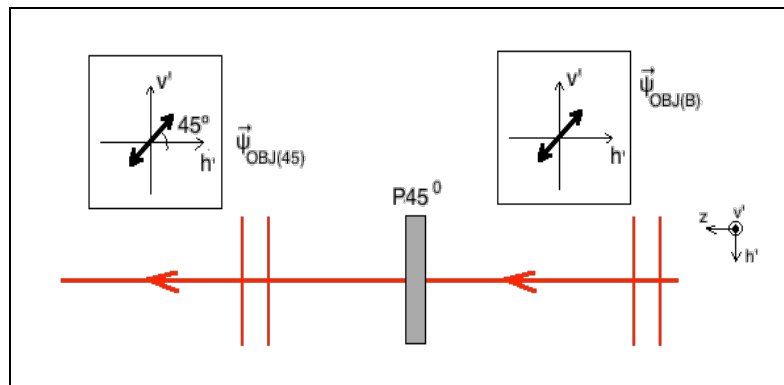


Figura 2.22 - Onda objeto ajustada para o estado de polarização linear a  $45^\circ$  ao passar pelo polarizador  $P45^\circ$ .

A onda objeto é agora representada como

$$\vec{\Psi}_{\text{OBJ}(45)} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_h} \\ e^{i\phi_v} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

com fator de normalização ( $A_{\text{OBJ}} e^{i\phi_0}$ ), sendo  $A_{\text{OBJ}} = \frac{7}{20} b A_0$ .  $b$  é um fator de ajuste de intensidade por um filtro adequado para a configuração, devido às mudanças no estado de polarização, proporcionadas pela amostra posicionada após  $P45$ .

Na calibração do sistema holográfico utilizou-se uma lâmina de quarto de onda,  $\lambda/4$ , girando em ângulos  $\delta$ . Nesse caso, o vetor de Jones da onda objeto que passa pela lâmina é

$$\vec{\Psi}_{\text{OBJ}} = M(\delta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$M(\delta) = R(\delta)MR(-\delta)$  é a matriz de Jones para o elemento de rotação,  $M = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & -ie^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}$  é a matriz de Jones para o retardador de fase  $\lambda/4$  e  $R(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_{\text{OBJ}} &= M(\delta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \vec{\Psi}_{\text{OBJ}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} \cos^2(\delta) + e^{-i\frac{\pi}{2}} \sin^2(\delta) + \sqrt{2} i \sin(\delta) \cos(\delta) \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \cos^2(\delta) + e^{i\frac{\pi}{2}} \sin^2(\delta) + \sqrt{2} i \sin(\delta) \cos(\delta) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \vec{\Psi}_{\text{OBJ}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + i[\sin(2\delta) + \cos(2\delta)] \\ 1 + i[\sin(2\delta) - \cos(2\delta)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Mas, da Expressão (2.47), considerando que  $A_{\text{OBJ}_h} = A_{\text{OBJ}_v} = A_{\text{OBJ}}$ , tem-se

$$\vec{\Psi}_{\text{OBJ}} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_h} \\ e^{i\phi_v} \end{bmatrix} = e^{i\phi_h} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{e^{i\phi_v}}{e^{i\phi_h}} \end{bmatrix} = e^{i\phi_h} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i(\phi_v - \phi_h)} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\Psi}_{\text{OBJ}} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\Delta\phi} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

com fator de normalização ( $A_{\text{OBJ}} e^{i\phi_h} e^{i\phi_0}$ ).

Com as Expressões (2.49) e (2.50) obtém-se a função teórica para a diferença de fase reconstruída em relação à orientação  $\delta$  da lâmina de quarto de onda, tal que

$$\begin{aligned} 1 \cdot e^{i\Delta\phi} &= \frac{1}{2} \{1 + i[\sin(2\delta) + \cos(2\delta)]\} \cdot \frac{1}{2} \{1 + i[\sin(2\delta) - \cos(2\delta)]\} \Rightarrow \\ \cos(\Delta\phi) + i\sin(\Delta\phi) &= \frac{1}{2} [\cos^2(2\delta) + i\sin(2\delta)] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Então, utilizando a Expressão (2.51), a diferença de fase,  $\Delta\phi$ , entre as componentes vertical e horizontal das imagens reconstruídas em função da orientação,  $\delta$ , da lâmina de quarto de onda é

$$\Delta\phi = \text{arctg} \left\{ \frac{\Im[e^{i\Delta\phi}]}{\Re[e^{i\Delta\phi}]} \right\} \Rightarrow \Delta\phi = \text{arctg} \left[ \frac{\sin(2\delta)}{\cos^2(2\delta)} \right] \quad (2.52)$$

cuja curva é mostrada na Figura 2.23.

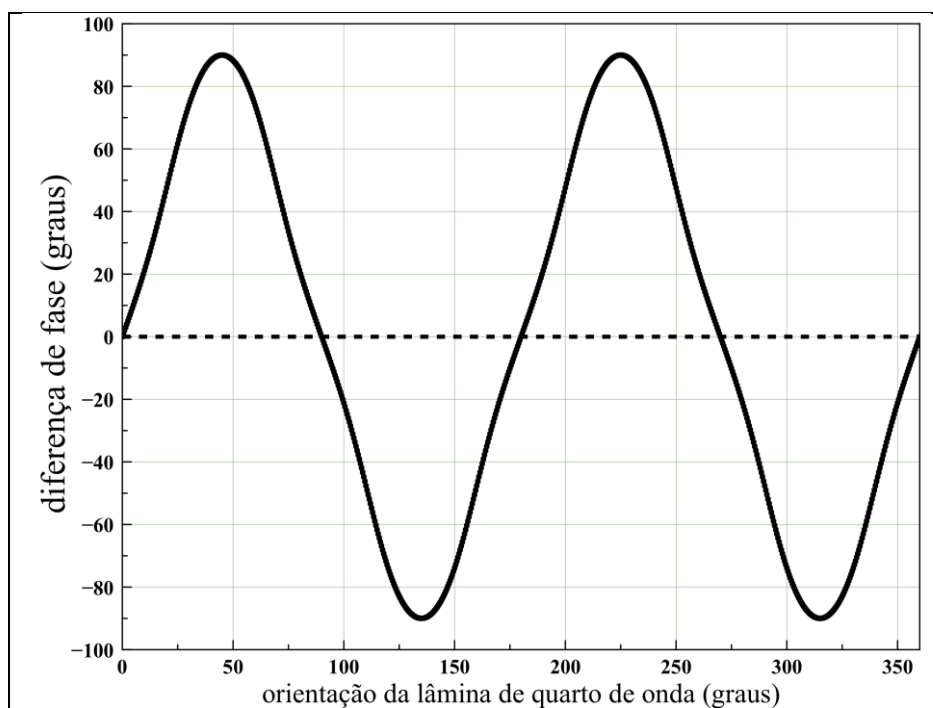


Figura 2.23 - Curva teórica das diferenças de fases entre as componentes vertical e horizontal para lâmina de quarto de onda. Curva construída a partir da expressão (2.52), obtida pelo formalismo de Jones.

## 2.2.3 Teoria do método holográfico

### 2.2.3.1 Modelo

O esquema apresentado na Figura 2.24 é um paralelepípedo de um material fotoelástico sob esforço vertical externo uniforme em sua base superior.

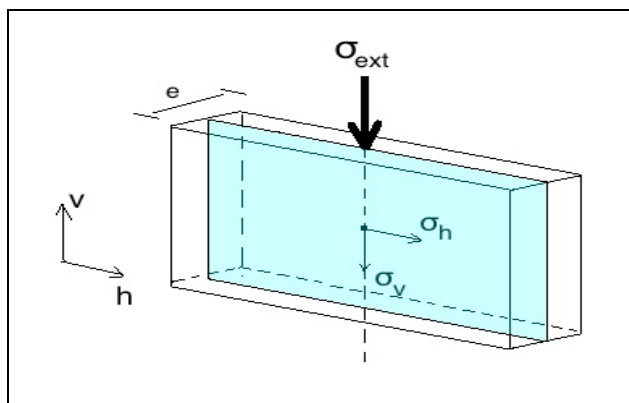


Figura 2.24 - Esquema das diferenças de tensões do estado plano,  $(\sigma_v - \sigma_h)$ , no interior de um paralelepípedo de material fotoelástico sob esforços externos verticais na base superior.

Nesse esquema, as tensões geradas no interior do material aparecem no plano hv paralelo à direção do esforço aplicado, segundo a teoria de Elasticidade Mecânica.

As diferenças das tensões internas,  $(\sigma_v - \sigma_h)$ , são denominadas diferenças de tensões do estado plano e estão associadas às diferenças dos índices de refrações,  $(n_v - n_h)$  que surgem nas direções horizontal, h, e vertical, v, segundo a Lei óptica da tensão.

Para facilitar o trabalho matemático, desconsiderou-se os deslocamentos angulares para que não apareçam as tensões de cisalhamento, já que as regiões de estudo neste trabalho, ao longo dos mapas de fase obtidos numericamente pelo método de Fresnel, foram linhas médias paralelas à força externa aplicada sobre a amostra fotoelástica.

### 2.2.3.2 Analogia holográfica com a lei de Hooke

De acordo com teoria de Elasticidade Mecânica para o regime elástico, a lei de Hooke convencional, mostrada na Expressão (2.17), estabelece a relação entre a tensão externa,  $\sigma_{ext}$ , e a deformação,  $\mathcal{E}$ , na direção do esforço sobre a amostra, segundo o esquema da Figura 2.24. Aplicando diversos esforços externos sobre a amostra e associando esse esforços às suas respectivas deformações, determina-se o módulo de elasticidade, E, por método gráfico. A relação entre a deformação na direção perpendicular ao esforço,  $\mathcal{E}_h$ , e a deformação na direção do esforço,  $\mathcal{E}_v$ , produz, também por método gráfico, o coeficiente de Poisson,  $\nu$ .

Experimentalmente, na Holografia de polarização com duas ondas de referência, após determinar digitalmente os mapas de fase, observou-se que também é possível estabelecer a relação entre os esforços externos e uma grandeza diretamente associada às deformações. Essa grandeza,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ , pode ser determinada com as diferenças relativas das fases desmoduladas a partir de vários esforços externos consecutivos sobre a amostra. Por método dos mínimos quadrados [48], determinou-se o módulo de elasticidade,  $\mathfrak{C}$ , por meio da holografia, a partir da função que se ajusta aos pontos experimentais. Desta forma, por analogia à Lei de Hooke convencional, a lei de Hooke associada à Holografia é expressa como

$$\sigma_{ext} = \mathfrak{C} \cdot \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \quad (2.53)$$

Durante a análise experimental, escolheu-se um polinômio do terceiro grau para efetuar o ajuste por método dos mínimos quadrados. Os resultados levaram à função linear da Expressão 2.53, já que os parâmetros associados aos demais graus 0, 2 e 3, da variável independente, mostraram-se muito pequenos, menores que 0,2%, em comparação ao grau 1.

Com as relações a seguir

$$\mathcal{E} = a \cdot E \quad (2.54a)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}} = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{E} \quad (2.54b)$$

a Expressão (2.53) é levada à lei de Hooke convencional da Expressão (2.17).  $a$  é uma constante adimensional que estabelece a relação entre os módulos de elasticidade holográfico e mecânico e é uma propriedade intrínseca do material.

Também por analogia à teoria de Elasticidade Mecânica, a relação entre as deformações obtidas na Holografia, a partir dos mapas de fases horizontal,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ , e vertical,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , é tal que

$$\nu = -\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}}{\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}} \quad (2.55)$$

Utilizando a Expressão (2.54b) na expressão (2.55), nota-se que o coeficiente de Poisson é o mesmo na Elasticidade Mecânica e na Holografia.

### 2.2.3.3 Analogia holográfica com a lei óptica da tensão

De acordo com a teoria de Fotoelasticidade, a lei óptica da tensão estabelece a relação linear das diferenças de índices de refração,  $(n_v - n_h)_{\text{fotoelasticidade}}$ , entre as direções perpendicular e paralela ao esforço externo, com as diferenças de tensões do estado plano,  $(\sigma_v - \sigma_h)_{\text{fotoelasticidade}}$ , das mesmas direções. O regulador dessa relação é denominado dispersão fotoelástica,  $C(\lambda)$ .



Em Holografia, as diferenças de índices de refração,  $(n_v - n_h)_{\text{holografia}}$ , e as diferenças de tensões do estado plano,  $(\sigma_v - \sigma_h)_{\text{holografia}}$ , foram reguladas por um coeficiente de dispersão óptica,  $\mathcal{H}(\lambda)$ , que é propriedade do material e está associado ao comprimento de onda aplicado. Sua dimensão é de  $[\text{tensão}]^{-1}$ ,  $\frac{\text{m}^2}{\text{N}} = \frac{1}{\text{Pa}}$ , no sistema internacional de unidades.

Experimentalmente, em Fotoelasticidade, as diferenças de tensões do estado plano,  $(\sigma_v - \sigma_h)_{\text{fotoelasticidade}}$ , são determinadas a partir do valor de franja,  $f_\sigma$ , espessura do material,  $e$ , e retardações ópticas relativas,  $N$ , em cada pixel da imagem obtida através de um polariscópio.

Para obtenção da expressão experimental de determinação das diferenças de tensões do estado plano na holografia,  $(\sigma_v - \sigma_h)_{\text{holografia}}$ , segundo o modelo da Figura 2.24, buscou-se analogia com a Expressão (2.31) da Fotoelasticidade.

Assim, utilizando as Expressões (2.24), (2.54a) e (2.54b), tem-se

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \end{Bmatrix} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_h \\ \mathcal{E}_v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \end{Bmatrix} = \frac{\mathfrak{E}}{a \cdot (1-\nu^2)} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \cdot \mathcal{E}_{\mathcal{H}_h} \\ a \cdot \mathcal{E}_{\mathcal{H}_v} \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ (\sigma_v - \sigma_h)_{\text{holografia}} &= \frac{\mathfrak{E}}{(1+\nu)} \cdot (\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v} - \mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}) \equiv \frac{\mathfrak{E}}{(1+\nu)} \cdot \mathfrak{N} \end{aligned} \quad (2.56)$$

com

$$\mathfrak{N} \equiv \frac{(\phi_v - \phi_h)_{\text{holografia}}}{2\pi} = (\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v} - \mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}) \quad (2.57)$$

$\mathfrak{N}$  é a retardação óptica relativa obtida na Holografia e está diretamente associada às diferenças de fases.

Então, para um dado comprimento de onda,  $\lambda$ , por meio do método holográfico proposto nesse trabalho, as diferenças de tensões do estado plano,  $(\sigma_v - \sigma_h)_{\text{holografia}}$ , podem ser determinadas, para o modelo proposto, diretamente dos parâmetros holográfico-mecânicos,  $\mathfrak{E}$  e  $\nu$ , e das diferenças entre as fases, vertical e horizontal,  $(\phi_v - \phi_h)_{\text{holografia}}$ , obtidas dos mapas de fases reconstruídos numericamente pelo método de Fresnel.

Para efeito de comparação entre a Holografia e a Fotoelasticidade, define-se uma grandeza associada às características físicas do material, o valor de franjas obtido na Holografia,  $f$ , tal que

$$f \equiv \frac{e \cdot \mathcal{E}}{a \cdot (1 + \nu)} \quad (2.58)$$

Definindo também a dispersão óptica,  $\mathcal{H}(\lambda)$ , em função do valor de franjas,  $f$ , tem-se

$$\mathcal{H} \equiv \frac{\lambda}{f} \quad (2.59)$$

Então,

$$\mathcal{H}(\lambda) = \frac{\lambda}{f} = \frac{a \cdot (1 + \nu)}{e \cdot \mathcal{E}} \cdot \lambda \quad (2.60)$$

Utilizando a Expressão (2.54a) na comparação entre as Expressões (2.58) e (2.35), a relação entre os valores de franjas obtidos na Holografia e na Fotoelasticidade fica

$$f = f_{\sigma} \quad (2.61)$$

e, finalmente, utilizando a Expressão (2.61) na comparação entre as Expressões (2.59) e (2.32a) pode-se encontrar a relação entre as dispersões ópticas, como segue

$$\mathcal{H} = \mathcal{C} \quad (2.62)$$

Para um dado comprimento de onda,  $\lambda$ , as diferenças de tensões e as diferenças de índices de refração do estado plano são iguais tanto na Fotoelasticidade quanto na Holografia. Logo, se a fonte de luz, o material e as tensões externas são as mesmas em Fotoelasticidade e Holografia, a expressão holográfica para a lei óptica da tensão é a mesma da Fotoelasticidade, tal que

$$(\sigma_v - \sigma_h)_{\text{holografia}} = \frac{1}{\mathcal{H}} \cdot (n_v - n_h)_{\text{holografia}} \quad (2.63)$$

## 3 Materiais, Técnicas e Métodos

Este capítulo apresenta o processo de preparação das amostras fotoelásticas, as descrições das técnicas e os procedimentos dos métodos: auxiliares e holográfico proposto neste trabalho. Para determinação dos tempos de compressão e descompressão foi utilizada a técnica de *speckle* por transmissão com o método de correlação por THSP. Os parâmetros mecânicos, módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson, foram obtidos com método dos mínimos quadrados, a partir dos dados coletados com uma técnica de ensaio mecânico de tensões. As distribuições das diferenças de tensões do estado plano foram obtidas: teoricamente pelo método analítico de elementos finitos associado à fotoelasticidade, utilizando os parâmetros mecânicos, e experimentalmente com o método de fotoelasticidade RGB, utilizando os dados fornecidos pela técnica de fotoelasticidade por transmissão com um polariscópio elíptico de campo claro. O registro dos hologramas foi realizado com a técnica holográfica que utiliza duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas. A partir dos hologramas das amostras 1 e 2 dos lotes I e II, e utilizando um programa computacional com algoritmo fundamentado no método de Fresnel, foram obtidas as imagens de fases para determinar os parâmetros holográficos. Então, com esses parâmetros, os mapas das diferenças de fase das amostras 3 e 4 de ambos os lotes, foram calculadas as distribuições de tensões do estado plano nas regiões selecionadas.

### 3.1 Amostras fotoelásticas

A preparação das amostras fotoelásticas envolveu duas etapas: confecções das fôrmas de silicone, a partir da cura de uma solução líquida de silicone e catalizador, e das amostras fotoelásticas, a partir da cura, nos moldes de silicone, de uma solução líquida de resina epóxi e endurecedor.

#### 3.1.1 Formas de silicone

As formas utilizadas na confecção das amostras fotoelásticas foram feitas com borracha de silicone azul, BS ADESIVO AZUL PS, um elastômero bi-componente, vulcanizável à temperatura ambiente e que, após a adição de um catalisador, resulta em um produto elástico e resistente.

A Figura 3.1 mostra a borracha de silicone, ainda na forma líquida, antes de ser misturada ao catalisador.



Figura 3.1 - Borracha líquida de silicone azul a ser misturada com catalisador para formar as bases que receberam as soluções de resina epóxi para confecções das amostras fotoelásticas.

A proporção entre catalisador e borracha líquida, sugerida pelo fabricante, foi de aproximadamente 12 gotas de catalisador em cada 10 ml de borracha. O tempo de secagem, variou entre 2 e 3 horas para uma quantidade média de 20 ml da solução de borracha líquida e catalisador.

As soluções líquidas foram curadas em recipientes construídos com papel cartão especial e envolvidos por fita adesiva, para evitar vazamentos, como mostra a Figura 3.2. Para obtenção do formato das amostras, foram utilizados modelos de paralelepípedos de acrílico.



Figura 3.2 - Base de papel cartão especial envolvido com fita adesiva contendo o silicone líquido, durante a cura, com o modelo de acrílico inserido para formar a cavidade que recebeu a solução de resina.

Após a cura, o molde foi retirado do cartão e esperou-se, mais ou menos, 6 horas para retirada do modelo de acrílico, no sentido de garantir que não houvesse aderência entre o molde de silicone e a resina, durante a retirada do molde de acrílico e na produção das amostras fotoelásticas.

### 3.1.2 Resina epóxi

Resinas são compostos orgânicos derivados do petróleo que passam da fase líquida para a sólida através de um processo químico denominado polimerização. Após a polimerização, sob tensão externa, apresentam excelente adesão a grande quantidade de franjas fotoelásticas e, por esse motivo, são denominadas resinas fotoelásticas.

A resina utilizada nesse trabalho é um sistema epoxídico que, ao reagir com um endurecedor, forma um termofixo flexível. Por ser um material 100% de sólidos, mantém sua flexibilidade por um período indeterminado. Dentre suas vantagens, não apresenta superfície oleosa, *blushing*, mesmo quando usada à temperatura ambiente, sendo ou não em película, possui boa flexibilidade, adesividade e tenacidade, qualificando-a para uso científico e tecnológico [9]. O endurecedor é um líquido límpido incolor à base de poliamina modificada que promove a melhor adesão com boa resistência térmica, química e mecânica com baixa exotermia, possuindo boa solubilização na resina com proporções não críticas, permitindo cura homogênea com boa velocidade e propriedades finais bastante controláveis.

### 3.1.3 Amostras

As amostras fotoelásticas foram confeccionadas com resina epóxi. A proporção entre a resina líquida e o endurecedor, sugerida pelo fabricante, foi aproximadamente de 2 para 1. Uma maior ou menor quantidade de endurecedor produziu uma amostra menos ou mais flexível, respectivamente.

Após a mistura, o líquido foi vertido, dentro dos moldes, com cuidado e uniformidade para não introduzir bolhas de ar durante o preenchimento na fôrma de silicone. O tempo de cura variou entre 4 e 6 horas.

Foram confeccionados, com os mesmos moldes de silicone, dois lotes de amostras da mesma substância com concentrações distintas: lote I com amostras menos flexíveis e lote II com amostras mais flexíveis. Cada lote possuiu 4 amostras de diferentes dimensões. As amostras 1 e 2, em ambos os lotes, foram utilizadas para as determinações dos parâmetros holográficos e fotoelásticos. As amostras 3 e 4, em ambos os lotes, foram utilizadas para as determinações das distribuições de tensões birrefringentes tanto na fotoelasticidade quanto na holografia.

A Figura 3.3 apresenta as amostras do lote I.

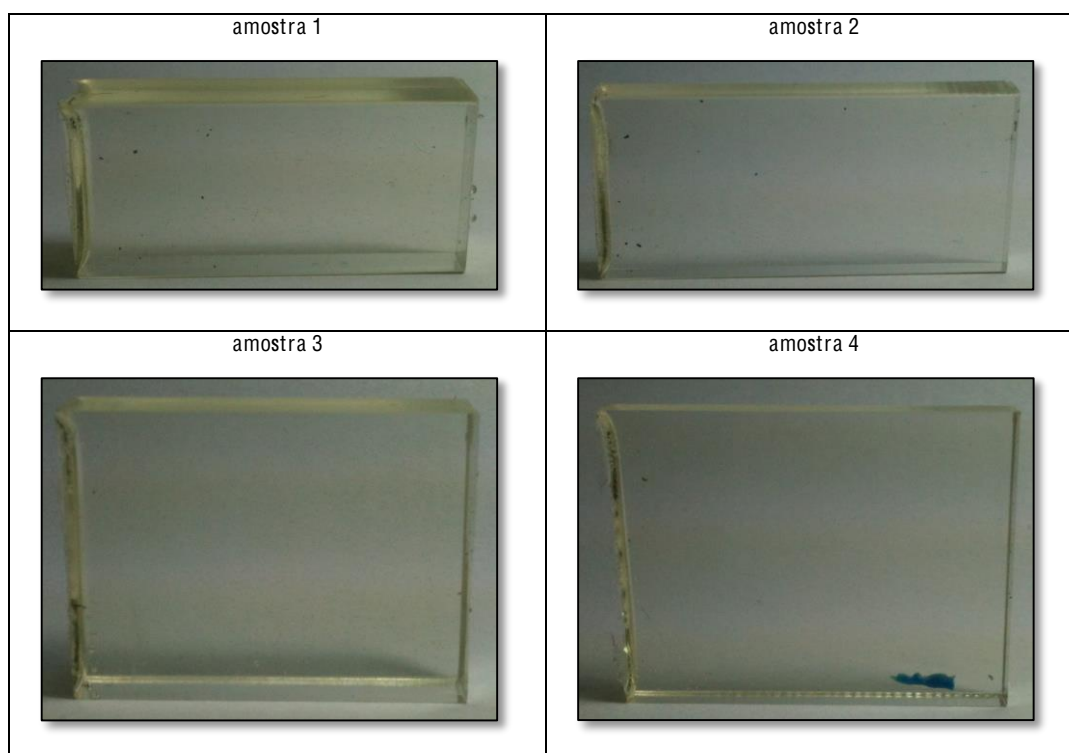


Figura 3.3 - Amostras fotoelásticas com dimensões distintas do lote I, menos flexíveis do que as amostras do lote II. As amostras 1 e 2 foram utilizadas para determinações dos parâmetros fotoelásticos e holográficos. As amostras 3 e 4 foram utilizadas para determinações das distribuições das diferenças de tensões.

## 3.2 Técnicas e métodos auxiliares

### 3.2.1 Esforços externos sobre as amostras fotoelásticas

O sistema de aplicação de esforços externos sobre as amostras fotoelásticas, mostrado isoladamente na Figura 3.4, foi idealizado, projetado e construído pelo grupo de pesquisa e representou um dos importantes elementos da configuração experimental, onde foi possível efetuar as mudanças mecânicas que produziram as alterações nas tensões externas.

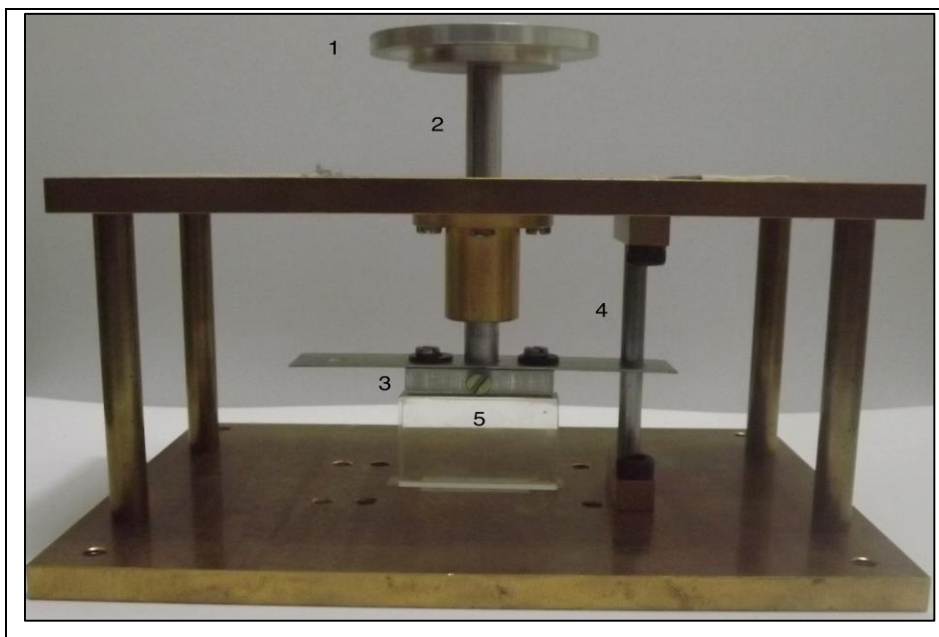


Figura 3.4 - Foto do dispositivo de carga: 1. base de cargas; 2. haste móvel principal; 3. base de contato; 4. haste guia fixa; 5. amostra fotoelástica.

No dispositivo, uma base de cargas, 1, recebeu as massas que geraram as forças transmitidas para a amostra, 5, através da base de contato, 3. A ligação entre a base de cargas e a base de contato se dá por uma haste principal móvel, 2, que está fixa entre as peças 1 e 3. O conjunto se move para cima ou para baixo, com pouco atrito, o que possibilitou grande eficiência e praticidade durante as medições.

Uma haste guia fixa, 4, possibilitou que a base de contato deslizasse sem sair da direção. A massa do conjunto 1-2-3 foi considerada na soma das massas sobre a carga, durante os cálculos. Um diferencial do sistema de cargas foi o seu tamanho reduzido que proporcionou melhor acomodação na mesa óptica unindo as configurações fotoelástica e holográfica.

Para determinar os parâmetros fotoelásticos e holográficos foram utilizadas as amostras 1 e 2 de ambos os lotes, com cargas aplicadas segundo o esquema da Figura 3.5. Com isso, foi possível estabelecer uma condição de variação linear das franjas observadas ao longo da direção vertical central das amostras, trecho AB, já que as franjas observadas a partir desse modelo são praticamente paralelas [64].

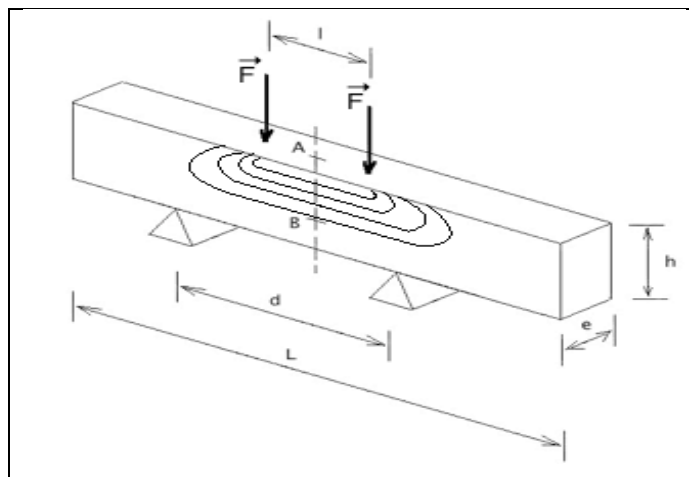


Figura 3.5 - Esquema do protótipo para coleta de dados na determinação dos parâmetros holográficos e fotoelásticos. Amostra apoiada por cavaletes e sob dois esforços equidistantes do segmento  $\overline{AB}$ .

Para determinar os parâmetros mecânicos, módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson, retirou-se os apoios inferiores para produzir com mais eficiência os ensaios de compressão e descompressão.

Para a determinação das distribuições das diferenças de tensões nas amostras fotoelásticas 3 e 4 de ambos os lotes, tanto na Fotoelasticidade quanto na Holografia, o protótipo escolhido utilizou uma força central, segundo o esquema da Figura 3.6.

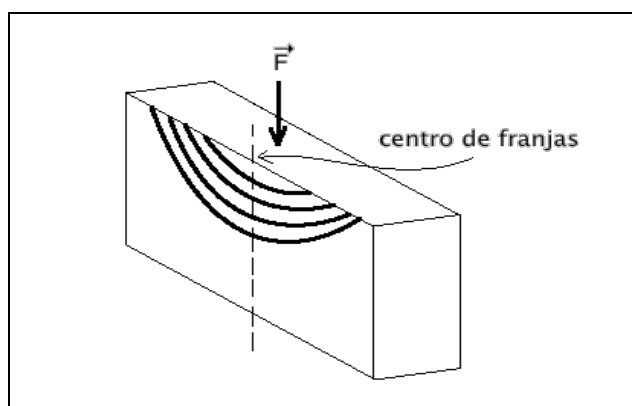


Figura 3.6 - Esquema do protótipo para a coleta de dados na determinação das distribuições das diferenças de tensões tanto na Fotoelasticidade quanto na Holografia.

As incertezas dos parâmetros diretos respeitaram as incertezas dos instrumentos de medidas utilizados e dos parâmetros indiretos foram calculadas pela expressão geral de propagação de erros para uma função de várias variáveis. As incertezas para os cálculos estatísticos respeitaram os fundamentos da teoria de erros, segundo a distribuição gaussiana de erros, considerando que o conjunto de medidas possui essa distribuição [65].



### 3.2.2 *Speckle* por transmissão e correlação THSP

A configuração experimental para registro das intensidades de *speckle* por transmissão está esquematizada na Figura 3.7.

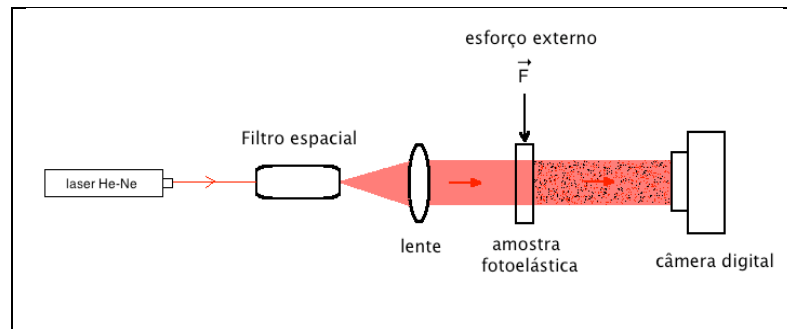


Figura 3.7 - Esquema da configuração experimental de *speckle* por transmissão. Luz laser de comprimento de onda 632,8 nm com os ruídos minimizados, por um filtro espacial, é convertida em onda plana com intensidade constante, por uma lente, e atravessa uma amostra fotoelástica 1 e 2 de ambos os lotes, capturando o padrão de interferência estático ou dinâmico, que foi registrado durante um certo tempo numa câmera digital.

A fonte de luz foi de um laser de hélio-neônio, modelo 1135P, com comprimento de onda  $\lambda = 632,8$  nm, faixa do vermelho, potência  $2 \cdot 10^{-2}$  W. Nesse laser, embora a relação de fases seja uniforme, a intensidade não é, pois sua frente de ondas tem a forma gaussiana. Para alterar essa condição, utilizou-se um filtro espacial, FE, contendo uma objetiva de aumento de 10x e um pinhole com diâmetro 0,25 mm. O FE deixou passar apenas a ordem zero da onda gaussiana, transformando-a em uma onda esférica divergente. Em seguida, uma lente, com distância focal 15 mm, concluiu o trabalho de deixar a onda com intensidade uniforme, além de torná-la plana com feixes paralelos, o que facilitou o trabalho matemático. Após a lente, a onda passou pela amostra fotoelástica produzindo o padrão de *speckle* capturado pela câmera digital, modelo DCC1240C-HQ color, sensor CMOS, com interface USB2.0, 480 Mbits/s, cabo de transmissão USB 2.0-A mini USB 5 pin 1.5m, área total 1280 x 1024 pixels, tamanho de pixel (*Square*) 5,3  $\mu\text{m}$  e geração de frames numa taxa de 25,8 fps.

Os vídeos, registrados pela câmera, foram utilizados como dados para as determinações dos tempos desejados. As amostras utilizadas para essa finalidade foram: 1 e 2 de ambos os lotes. O processo de captura de dados, em cada amostra fotoelástica, foi realizado da seguinte forma:

- (i) registrou-se vídeos com n quadros da amostra sob esforço externo;
- (ii) registrou-se vídeos com n quadros a partir da retirada do esforço externo.

Ao aplicar esforços sobre as amostras, o tempo de espera, até a estabilização dos movimentos internos da amostra, foi denominado tempo de compressão e, ao retirar o esforço da amostra, o tempo de espera foi denominado tempo de descompressão.

A história temporal do padrão de *speckle*, THSP, por correlação, foi utilizada para a determinação dos tempos de compressão e descompressão das amostras fotoelásticas. Esse processo foi automatizado por programas computacionais confeccionados na plataforma MATLAB e seguiram as seguintes etapas:

- (i) separou-se o vídeo em quadros, que foram armazenados em arquivos de imagens;
- (ii) criou-se o arquivo de imagem THSP, a partir dos quadros separados no item anterior, recortando uma linha da mesma posição horizontal de cada imagem e concatenando cada linha em posições verticais consecutivas de uma única imagem;
- (iii) determinou-se os coeficientes de correlações  $\mu(t_0, t)$ , pela Expressão (2.14), utilizando a relação entre as intensidades médias das colunas de pixels do arquivo de imagem THSP. O tempo associado a cada coeficiente de correlação está relacionado à duração de cada coluna de pixels. Assim, por exemplo, se cada coluna tem a duração de  $t$  segundos, então, cada  $\mu_i$  terá  $t_i = i * t$  segundos, com  $i \in [1, n]$ ;
- (iv) Com as relações  $\mu$  *versus*  $t$ , construiu-se gráficos tanto para a compressão quanto para a descompressão. Através de um ajuste de curva, pelo método dos mínimos quadrados, encontrou-se as funções  $\mu_c(t)$ , para a compressão, e  $\mu_d(t)$ , para a descompressão. Com essas funções, encontrou-se os tempos de compressão e descompressão para cada amostra fotoelástica no limite quando  $\mu(t)$  tende a  $\mu_0$  obtido com a amostra livre de carga;
- (v) Calculou-se as médias dos tempos de todas as amostras do mesmo lote.

Esses resultados serviram como tempos mínimos de espera entre medidas durante o processo de captura de dados para cálculos dos demais parâmetros auxiliares, dos parâmetros holográficos e das distribuições de diferenças de tensões do estado plano nas amostras fotoelásticas, tanto na fotoelasticidade quanto na holografia.

### 3.2.3 Ensaio mecânico de tensões nas amostras fotoelásticas

O ensaio mecânico de tensões verticais nas amostras fotoelásticas 1 e 2 dos lotes I e II forneceu dados para os cálculos dos parâmetros mecânicos e seus resultados serviram de comparação com os parâmetros holográficos similares, além de auxiliar nos cálculos das distribuições de diferenças de tensões do estado plano, tanto teóricas quanto experimentais de Fotoelasticidade.

#### 3.2.3.1 Registros das imagens

Para o registro das imagens no ensaio mecânico foi utilizado o esquema apresentado na Figura 3.5 sem os apoios inferiores. A Figura 3.8 apresenta o esquema da configuração experimental.

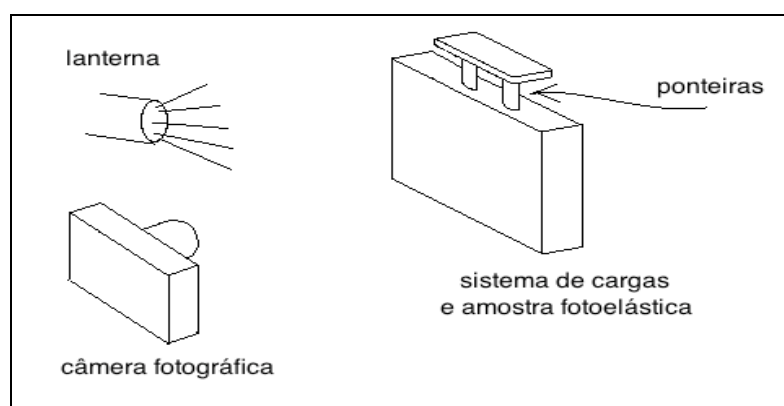


Figura 3.8 - Esquema da configuração experimental do ensaio mecânico. Amostra fotoelástica submetida aos esforços segundo o esquema da Figura 3.5, sem os apoios inferiores. Uma lanterna possibilitou um melhor contraste da imagem registrada em uma câmera fotográfica.

Segundo o esquema da Figura 3.8, uma câmera fotográfica registrou imagens dos esforços externos aplicados às amostras fotoelásticas por meio do dispositivo de cargas da Figura 3.4. Uma lanterna com luz branca foi utilizada para melhorar o contraste da imagem observada. A câmera fotográfica utilizada foi a mesma descrita na Seção 3.2.2.

Em cada amostra fotoelástica foi aplicada uma sequência de  $n$  esforços externos verticais crescentes para levantamento dos dados de compressão e decrescentes para levantamento dos dados de descompressão. Após a estabilização de cada esforço, foram efetuados os registros das imagens. Foi também armazenada uma imagem de referência, sem esforço sobre a amostra.

### 3.2.3.2 Módulos de elasticidade (E) e coeficientes de Poisson ( $\nu$ )

Com as imagens obtidas e auxílio de um programa computacional, desenvolvido na plataforma MATLAB, foram lidas as alturas e larguras, em pixels, das amostras de todas as imagens para os N esforços realizados.

As deformações, tanto verticais,  $\epsilon_V$ , quanto horizontais,  $\epsilon_H$ , foram calculadas pelas diferenças relativas entre as alturas/larguras de duas imagens consecutivas, utilizando a altura/largura de referência. Utilizando os valores das relações entre as tensões externas verticais,  $\sigma_V$ , *versus*  $\epsilon_V$  e  $\epsilon_H$  *versus*  $\epsilon_V$ , foram efetuados os ajustes a partir do polinômio de terceiro grau para verificar se a melhor função era linear, como prevê a lei de Hooke. Após a verificação, os valores dos parâmetros que acompanharam as variáveis independentes de grau 1 forneceram os módulos de elasticidades para as relações  $\sigma_V \times \epsilon_V$  e os coeficientes de Poisson para as relações  $\epsilon_H \times \epsilon_V$ , nos dois processos: compressão e descompressão. A média entre os resultados encontrados nos dois processos produziu o resultado final desses parâmetros mecânicos para todas as amostras 1 e 2 de ambos os lotes.

Os ajustes e os testes de confiabilidades foram realizados por programas confeccionados na plataforma MATLAB, fundamentados no método dos mínimos quadrados [48][65][72]. Mais detalhes sobre esses ajustes são apresentados no Apêndice C.1.

### 3.2.4 Distribuições teóricas de diferenças de tensões

O esquema de um paralelepípedo com espessura  $e$ , submetido a um esforço vertical aplicado uniformemente na área A, apresentado na Figura 3.9, mostra a região selecionada para os cálculos das distribuições teóricas de diferenças de tensões do estado plano.

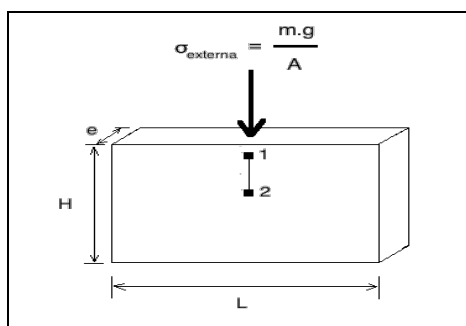


Figura 3.9 - Esquema de paralelepípedo com as dimensões L x H x e para cálculos das distribuições teóricas de diferenças de tensões no trecho 1-2. Esforço vertical uniformemente distribuído na base superior de área A.

Com as expressões analíticas apresentadas no Apêndice B, foram determinadas as distribuições de diferenças de tensões para o modelo da Figura 3.9. Os procedimentos para os cálculos foram:

- (i) Com os deslocamentos obtidos através do cálculo analítico do campo de deslocamentos, Expressão (B.6), produziu-se os desenhos teóricos das franjas. As distâncias médias em pixels entre franjas foram identificadas a partir das imagens de franjas reais obtidas na fotoelasticidade;
- (ii) Com os parâmetros elásticos  $E$  e  $\nu$ , alimentou-se a matriz de rigidez da Expressão (2.24), modificada para não incluir os deslocamentos angulares;
- (iii) Determinou-se as deformações entre os pontos 1 e 2 segundo a ideia analítica apresentada na Expressão (B.5);
- (iv) Com a matriz de rigidez modificada e as deformações médias, calculou-se as diferenças de tensões ao longo da linha entre os pontos 1 e 2 do esquema da Figura 3.9, utilizando Expressão (B.14);
- (v) Relacionando as diferenças de tensões calculadas com os pixels de uma linha entre os trechos 1 e 2 do modelo da Figura 3.9, construiu-se as curvas teóricas das distribuições de diferenças de tensões para as amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

As distribuições das diferenças de tensões *versus* posições verticais em uma linha, entre os pontos 1 e 2 do esquema, foram expressas graficamente. Esses resultados foram utilizados como guias para as discussões e conclusões nas comparações com os resultados obtidos na Fotoelasticidade e na Holografia.

## 3.2.5 Técnica e método fotoelásticos

### 3.2.5.1 Registros das imagens

Montou-se um polariscópio elíptico de campo claro por transmissão, já que o interesse foi a obtenção das franjas isocromáticas que estão associadas às diferenças de tensões entre as direções vertical e horizontal. A Figura 3.10 apresenta a fotografia dessa configuração e seu esquema é mostrado na Figura 3.11.

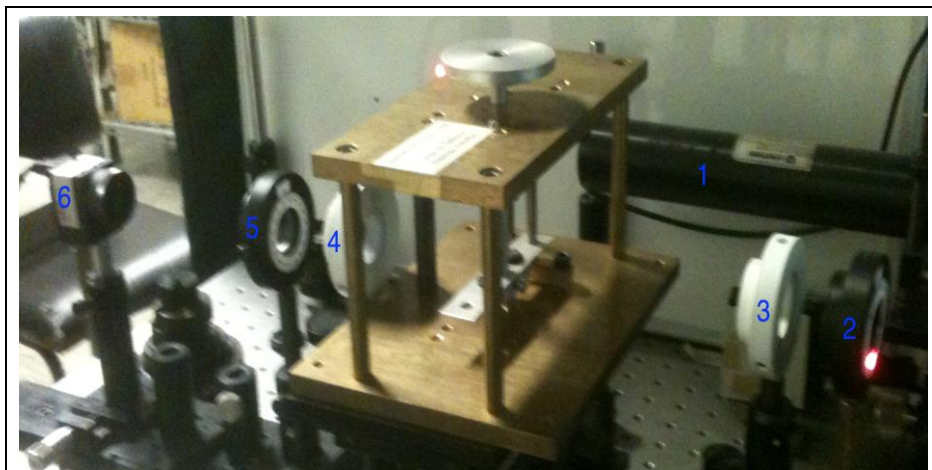


Figura 3.10 – Fotografia do polariscópio elíptico de campo claro por transmissão. 1: laser; 2: polarizador linear; 3/4: lâmina de quarto de onda,  $\lambda/4$ ; 5: analisador (polarizador linear); 6: câmera digital.

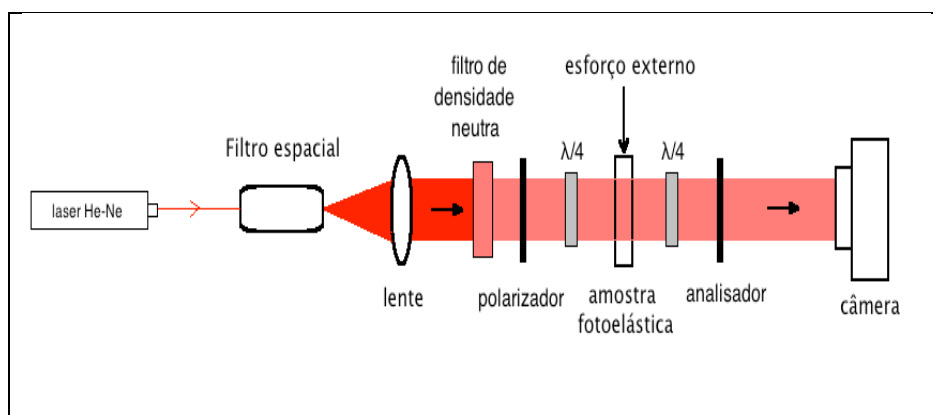


Figura 3.11 - Esquema do polariscópio elíptico de campo claro por transmissão. Fonte de luz com intensidade reduzida encontra um polarizador e uma lâmina de quarto de onda,  $\lambda/4$ , antes de interagir com a amostra. Em seguida, passa por outra lâmina de quarto de onda e por outro polarizador, denominado analisador. Entre as lâminas de onda, um dispositivo de carga permite aplicar esforço externo na amostra, alterando o estado de polarização. O resultado para o observador, câmera, é um padrão de franjas isocromáticas.

A fonte de luz foi de um laser de hélio-neônio com comprimento de onda  $\lambda = 632,8$  nm, faixa do vermelho, potência 20 mW. Um filtro espacial permitiu expandir o feixe, além de eliminar os ruídos ópticos e, em seguida, uma lente fez com que a luz seguisse como uma onda plana de intensidade uniforme.

Após a lente, a luz linearmente polarizada passou por um filtro de densidade neutra para reduzir a intensidade e produzir um melhor contraste. Em seguida, um primeiro polarizador, com estado de polarização linear, permitiu a passagem, somente, de uma componente da onda original.

Ao passar pela lâmina de quarto de onda,  $\lambda/4$ , a luz tornou-se elípticamente polarizada e seguiu ao encontro da amostra, que ao receber esforço externo, alterou o estado de polarização.

Na sequência, outra lâmina de quarto de onda auxiliou na eliminação das franjas isoclínicas, permitindo que um segundo polarizador, denominado analisador, com o mesmo estado de polarização do primeiro, deixasse passar somente as franjas isocromáticas, cuja imagem foi registrada por uma câmera digital. A fonte de luz e câmera fotográfica foram as mesmas descritas na Seção 3.2.2.

A coleta de dados foi realizada da seguinte forma:

- (i) Posicionou-se a amostra fotoelástica no centro do dispositivo de cargas e colocou-se a massa desejada sobre a base de cargas;
- (ii) Esperou-se o tempo de compressão e registrou-se a imagem das franjas. Entre uma medida e outra esperou-se o tempo de descompressão da amostra fotoelástica;
- (iii) Os registros foram armazenados em arquivos, para análise.

Esses registros foram realizados com as amostras 1 e 2, dos lotes I e II, para determinações das tabelas fotoelásticas de referências e com as amostras 3 e 4, de ambos os lotes, para determinações das distribuições de tensões fotoelásticas experimentais.

### 3.2.5.2 Tabelas fotoelásticas de referência (TFR)

Com um polariscópio, segundo a configuração esquematizada na Figura 3.11 e aplicando uma determinada carga em cada amostra fotoelástica 1 e 2 de ambos os lotes, segundo o esquema da Figura 3.5, foram registradas as franjas isocromáticas em arquivos de imagens. A carga aplicada teve um valor alto para que fosse possível o aparecimento de ao menos 3 franjas. Esse número de franjas produz uma boa TFR e abrange todos os valores possíveis de retardações relativas,  $N$ .

A partir de cada imagem foram processadas duas imagens com o trecho AB selecionado: uma em tons de cinza e outra preservando os valores RGB originalmente registrados para o comprimento de onda utilizado na coleta dos dados.

Ao longo de uma linha vertical central envolvendo uma quantidade  $Q$  de franjas escuras das imagens em tons de cinza, coletou-se ordenadamente as intensidades,  $I$ , em cada pixel,  $px$ , e construiu-se um gráfico  $I \times px$ . O primeiro ponto de mínimo, no gráfico, foi identificado como franja de número zero. O primeiro ponto de máximo como franja  $1/2$ , e assim, sucessivamente até a franja escura  $Q$ . Convencionou-se a franja zero com pixel 0 e, a partir daí, localizou-se os valores de pixel para as demais franjas inteiras e semi-inteiras. Para agilizar essa tarefa, foi confeccionado um programa na plataforma MATLAB.

Utilizando os valores das relações entre (quantidade de franja -  $Q$ ) *versus* (pixels), foram efetuados os ajustes a partir do polinômio de terceiro grau para verificar se a melhor função era linear. A melhor função encontrada forneceu as franjas não inteiras pixel a pixel no trecho selecionado. Os ajustes e os testes de confiabilidades foram realizados por programas confeccionados na plataforma MATLAB, fundamentados no método dos mínimos quadrados [48][65][72]. Mais detalhes sobre esses ajustes são apresentados no Apêndice C.1.

Com as imagens coloridas, estabeleceu-se a relação entre as franjas intermediárias e as intensidades RGB para cada pixel a partir do 0 padronizado anteriormente, dando origem à tabela fotoelástica de referência, TFR. Essa tabela foi utilizada para identificar as franjas em cada pixel das imagens obtidas das amostras fotoelásticas 3 e 4 de ambos os lotes, sob esforços externos, para o cálculo das distribuições das diferenças de tensões fotoelásticas experimentais.

### 3.2.5.3 Parâmetros fotoelásticos e distribuições de diferenças de tensões

No cálculo das distribuições das diferenças de tensões em cada pixel das amostras fotoelásticas 3 e 4 de ambos os lotes, sob esforços segundo o esquema da Figura 3.6, utilizou-se a TFR e as Expressões (2.31), (2.33) e (2.35). As medidas das diferenças de tensões, em cada amostra, foram realizadas ao longo de linhas médias verticais entre duas franjas escuras.

O esquema da Figura 3.12 mostra a região selecionada para o cálculo da média de distribuição. Em cada imagem foi selecionado um retângulo entre franjas escuras.



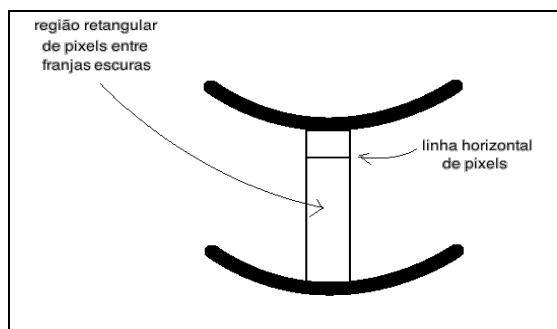


Figura 3.12 - Esquema da região retangular de linhas de pixels entre franjas escuras na imagem fotoelástica.

Em cada linha  $j$  horizontal do retângulo ilustrado na Figura 3.12, cada valor  $Q_i$  foi encontrado comparando as intensidades RGB dos pontos da linha com todas as intensidades RGB da TFR. O menor valor de erro, a partir da Expressão (2.33), forneceu o número de franja intermediária para o determinado pixel  $i$ . Calculou-se, então, a média  $\langle Q_j \rangle$  desses valores. O procedimento foi repetido em todo o trecho vertical para cada linha  $j$  entre as duas franjas escuras. Os valores das retardações relativas  $N_j$  foram obtidos pelas normalizações  $N_j = \langle Q_j \rangle / Q$ .  $Q$  é número total de franjas do trecho selecionado para a construção da tabela de referência. Para concluir o cálculo da diferença de tensão em cada pixel  $j$  foi necessário determinar a rigidez,  $\frac{f_\sigma}{e}$ , de cada amostra utilizando a Expressão (2.35) e os valores médios dos parâmetros mecânicos: módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

Finalmente, com esses valores e a Expressão (2.31), foram calculadas as distribuições das diferenças de tensões médias dos trechos selecionadas, entre franjas escuras. Os resultados finais, foram organizados em gráficos das distribuições das diferenças de tensões *versus* pixel vertical e serviram de comparação com as distribuições de diferenças de tensões encontradas na Holografia.

### 3.3 Técnica e método holográficos

O sistema holográfico para obtenção dos dados foi composto pela configuração de duas ondas de referência ortogonalmente polarizadas que, após interagirem com a onda objeto, produziram por interferência dois hologramas simultâneos armazenados em uma única imagem: um holograma com polarização vertical e outro com polarização horizontal. A partir desses hologramas foram reconstruídos digitalmente os mapas de fases vertical e horizontal, necessários para determinações dos parâmetros holográfico e das distribuições de tensões.

### 3.3.1 Configuração holográfica

A Figura 3.13 apresenta o esquema da configuração do interferômetro com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas, que tem como fundamento o interferômetro por divisão de amplitude de Mach-Zehnder [66-68], modificado adequadamente para comportar a configuração desejada. Com esta configuração foi possível obter dois hologramas separáveis com estados de polarizações ortogonais em única imagem de um holograma total, para estudo da distribuição da diferença de tensões nas regiões selecionadas de amostras fotoelásticas.

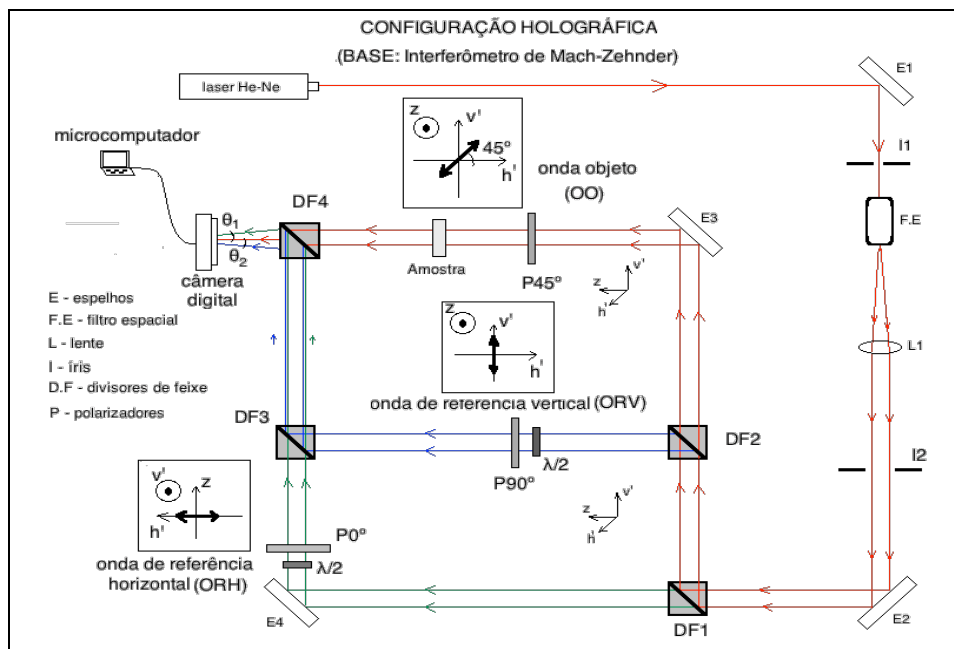


Figura 3.13 - Configuração holográfica com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas para registro simultâneo de dois hologramas. Onda de referência horizontal (ORH) com estado de polarização a  $0^\circ$ . Onda de referência vertical (ORV) com estado de polarização a  $90^\circ$ . A onda objeto (OO) que chega na amostra possui estado de polarização a  $45^\circ$ .

A fonte de luz utilizada foi de um luz laser de hélio-neônio com comprimento de onda  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ , faixa do vermelho, e potência média 20 mW. Para produzir um bom holograma a onda de luz original foi transformada em uma onda com intensidade e relação de fases uniformes. Nesse laser, embora a relação de fases seja constante, a intensidade não é, pois sua frente de ondas tem a forma gaussiana. Para isso, utilizou-se um filtro espacial, FE, contendo uma objetiva de aumento de 10x e um pinhole com diâmetro  $250 \mu\text{m}$ .

O FE deixou passar apenas a ordem zero da onda gaussiana, transformando-a em uma onda esférica divergente. A seguir uma lente, L1, com distância focal 15 cm, concluiu o

trabalho de deixar a onda com intensidade constante, além de torná-la plana com feixes paralelos que facilitou o trabalho matemático. Uma íris, I2, foi utilizada na sequência para selecionar o diâmetro desejado da onda, 15 mm, associado à região de observação da amostra.

Em seguida, um primeiro divisor de feixes, DF1, com relação de divisão 70(reflexão):30(transmissão), separou a onda em duas: objeto, OO, refletida, e referência horizontal, ORH. No caminho da OO, um segundo divisor de feixes, DF2, com relação de divisão 50:50, separou a OO em duas ondas: objeto, a mesma OO com menos intensidade, transmitida, e referência vertical, ORV, refletida. Um terceiro divisor de feixes, DF3, com relação de divisão 30(reflexão):70(transmissão), direcionou a ORV, refletida, e a ORH, transmitida, a um quarto divisor de feixes, DF4, com relação de divisão 50:50. O caminho óptico de ORH e OO foi mantido igual. O mesmo ocorreu com ORV e OO.

Os polarizadores, P0° e P90°, localizados, respectivamente, nos caminhos das ORV e ORH, selecionaram as componentes denominadas horizontal e vertical, para produzirem, em DF4, dois hologramas com estados de polarizações ortogonais entre si, ao interferirem com a OO. As lâminas de meia onda,  $\lambda/2$ , antes dos polarizadores P0° e P90°, foram utilizadas para auxiliar nos ajustes das intensidades das ondas de referências. O polarizador, P45°, no caminho da OO, permitiu que ambos os estados de polarizações, parte vertical e parte horizontal, fossem selecionados da região escolhida da amostra ao atingirem o DF4.

O registro dos hologramas simultâneos foi realizado no sensor da câmera digital que está afastada do plano de interferência no DF4, permitindo uma diferença angular  $\theta_1$ , entre ORH e OO, e  $\theta_2$ , entre ORV e OO. Em um microcomputador, foram armazenados os hologramas, utilizados posteriormente para a reconstrução digital.

Os espelhos, E1, E2, E3, E4 e as íris, I1 e I2, direcionaram as ondas aos caminhos desejados e, também, auxiliaram na precisão de suas alturas, garantindo que elas estivessem iguais à altura inicial, 15 cm, em relação ao plano da mesa óptica.

A fotografia da configuração esquematizada é mostrada na Figura 3.14.

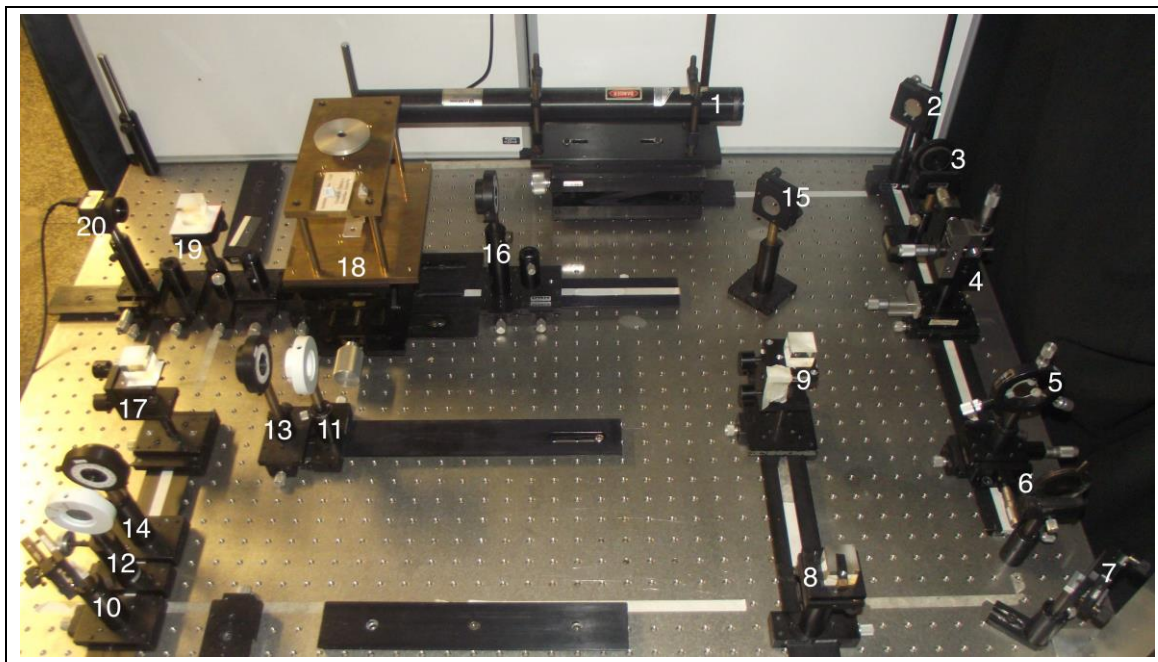


Figura 3.14 - Configuração holográfica com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas para registro simultâneo de dois hologramas: 1. Laser; 2. Espelho plano 1; 3. Íris 1; 4. Filtro espacial; 5. Lente; 6. Íris 2; 7. Espelho plano 2; 8. Divisor de feixes 1; 9. Divisor de feixes 2; 10. Espelho plano 3; 11. Lâmina de quarto de onda 1; 12. Lâmina de quarto de onda 2; 13. Polarizador 90°; 14. Polarizador 0°; 15. Espelho plano 4; 16. Polarizador 45°; 17. Divisor de feixes 3; 18. Dispositivo de carga; 19. Divisor de feixes 4; 20. câmera digital.

### 3.3.2 Diferenças angulares entre as ondas objeto e referências

Como ilustrado na Figura 3.13, há diferenças angulares  $\theta_1$ , entre OR1 e OO, e  $\theta_2$ , entre OR2 e OO. O ajuste dessas diferenças foi realizado com o cálculo do ângulo máximo,  $\theta_{\text{Máx}}$ , limitado pelo tamanho do pixel do sensor da câmera digital, para um dado comprimento de onda, segundo a Expressão (2.42).

### 3.3.3 Calibração da configuração holográfica

O método de calibração utilizado envolveu a construção de uma curva das diferenças de fases médias entre os mapas de fases vertical e horizontal reconstruídos em função da orientação angular de uma lâmina de atraso. A comparação entre o resultado experimental e teórico decidiu sobre a confiabilidade da configuração.

A Figura 3.15 mostra um esquema de posicionamento e orientação da lâmina de atraso para obtenção dos hologramas. Nesse esquema, a onda objeto atravessa parcialmente a lâmina de atraso, para um melhor contraste na comparação com os hologramas de referência, formados com a onda objeto sem a lâmina.

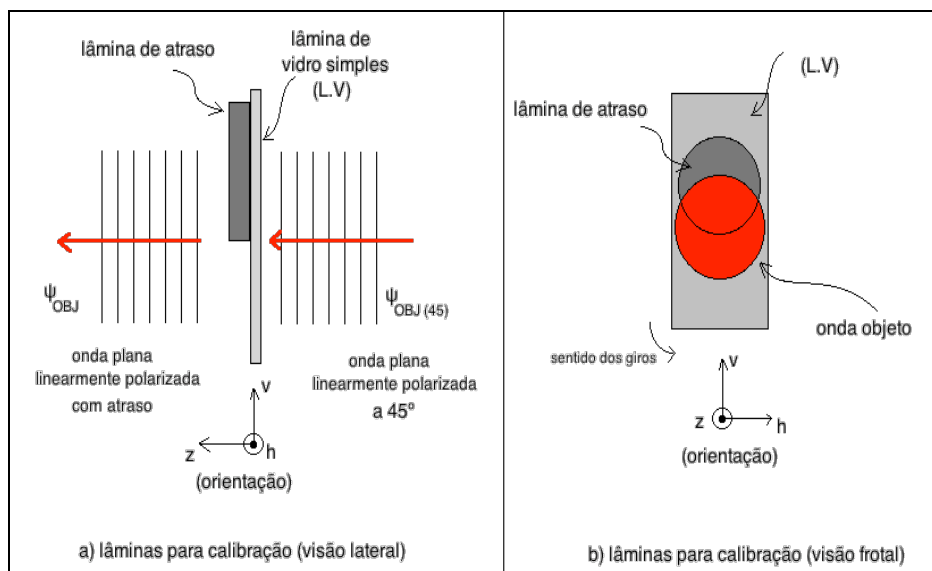


Figura 3.15 - Posicionamento e orientação da lâmina de atraso para calibração da configuração holográfica. Conjunto orientado com passos de  $5^\circ$  entre  $0$  e  $360^\circ$ . Cada passo produziu um holograma total formado por dois hologramas com estados de polarizações ortogonais entre si, separáveis durante a reconstrução digital. A lâmina de vidro simples serviu como suporte para a lâmina de atraso.

A lâmina de atraso utilizada foi a de quarto de onda,  $\lambda/4$ , que introduz uma diferença de fase relativa de  $\frac{\pi}{2}$  rad entre as ondas ordinária e extraordinária, devido à birrefringência natural produzida pelo material que a forma, a calcita. A lâmina de atraso foi orientada com passos de  $5^\circ$  entre os ângulos  $0$  e  $360^\circ$  no sentido horário, por praticidade da configuração. Em cada passo, registrou-se um holograma total. Todos os hologramas foram armazenados em arquivos para análise numérica por um programa computacional de reconstrução de intensidades e fases, com algoritmo fundamentado no método de Fresnel, produzido na plataforma MATLAB. O Apêndice A mostra alguns detalhes desse programa.

Durante a reconstrução numérica, a partir dos hologramas totais, determinou-se os mapas de fases em cada componente vertical e horizontal, após subtração dos respectivos mapas de fases de referências. Esse procedimento auxiliou na diminuição dos ruídos produzidos pelo sistema holográfico. Os mapas de fases resultantes foram obtidos pela subtração entre os mapas de fases de cada componente.

É importante destacar que o ângulo inicial,  $0^\circ$ , do eixo óptico da lâmina de atraso coincidiu com o eixo  $h'$ , horizontal em relação à mesa óptica. O ângulo do polarizador da onda objeto estava a  $45^\circ$ , em relação ao mesmo eixo  $h'$  e, portanto, a  $45^\circ$  em relação ao eixo óptico da lâmina de atraso, segundo o esquema da Figura 3.16.

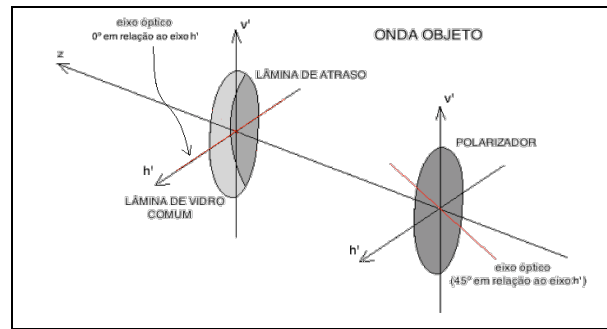


Figura 3.16 - Esquema para referência angular da lâmina de atraso: eixo óptico inicial da lâmina de atraso (vermelho) a  $0^\circ$  em relação ao eixo  $h'$ . O eixo óptico do polarizador está fixo a  $45^\circ$  em relação ao eixo  $h'$  e, portanto, a  $45^\circ$  em relação ao eixo óptico inicial da lâmina de atraso.

Com os mapas de fases resultantes efetuou-se o cálculo dos valores médios das diferenças de fase. Esses valores foram tabelados em relação à orientação da lâmina de quarto de onda para construção do espectro de valores experimentais que foi comparado à curva teórica da Expressão (2.52), graficamente apresentada na Figura 2.23, considerando a defasagem de  $\pi/4$ .

### 3.3.4 Hologramas das amostras fotoelásticas

Para produzir os hologramas totais das amostras fotoelásticas utilizou-se a técnica de holografia com duas ondas de referências polarizadas ortogonalmente, com a configuração devidamente calibrada, como descrito na Subseção 3.3.3.

As amostras fotoelásticas foram posicionadas no dispositivo de cargas mostrado na Figura 3.4 para que as cargas fossem aplicadas. A Figura 3.17 esquematiza esse posicionamento.

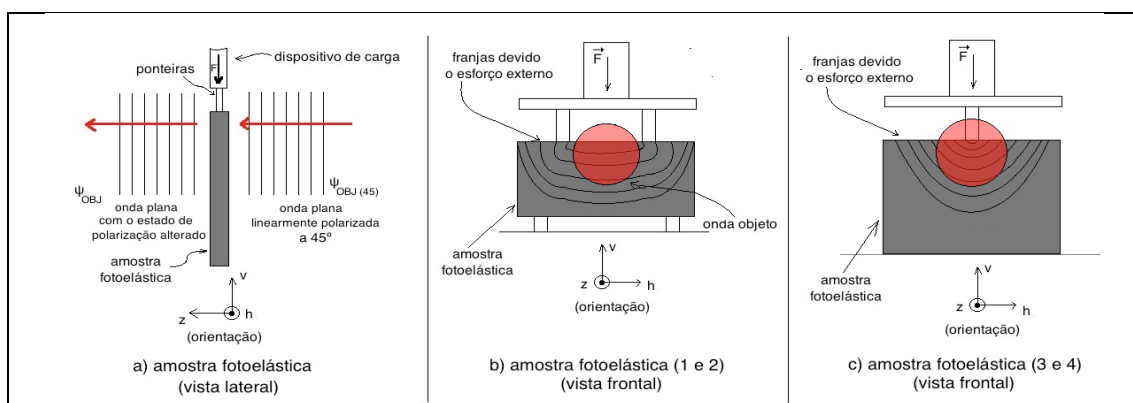


Figura 3.17 - Posicionamento da amostra fotoelástica na configuração holográfica. A amostra proporciona uma alteração no estado de polarização da onda objeto ao receber esforço externo por um dispositivo de carga. (a) visão lateral da configuração; (b) visão frontal da configuração para as amostras de parâmetros 1 e 2; (c) visão frontal da configuração para as amostras de determinação das distribuições de diferenças de tensões.

Dado um determinado esforço externo, após esperar o tempo de compressão ou decompressão, registrou-se o holograma total que foi armazenado em arquivo para posterior reconstrução numérica. Foram registrados, também, os hologramas de referências do espaço livre. O procedimento foi repetido em cada esforço externo aplicado para cada amostra 1 e 2, Figura 3.17b, e 3 e 4, Figura 3.17c, dos lotes I e II.

### 3.3.5 Procedimentos do método holográfico

#### 3.3.5.1 Parâmetros holográficos

Com a configuração holográfica devidamente calibrada, o protótipo de esforços segundo o esquema da Figura 3.17b e as amostras fotoelásticas 1 e 2, dos lotes I e II, sob diversos esforços externos, crescentes para o processo de compressão e, decrescentes, para o processo de decompressão, foram obtidos os hologramas totais utilizados para determinações dos parâmetros holográficos.

A partir desses hologramas, utilizando o programa de reconstrução numérica de intensidades e fases, obteve-se todos os mapas de fases verticais e horizontais, já subtraídos dos respectivos mapas de referências. Esses mapas resultantes desmodulados foram utilizados para determinações dos parâmetros módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, nas regiões selecionadas.

A região selecionada, em cada mapa de fase, para o cálculo dos parâmetros holográficos foi um retângulo estreito entre duas franjas escuras como mostra o esquema da Figura 3.18.

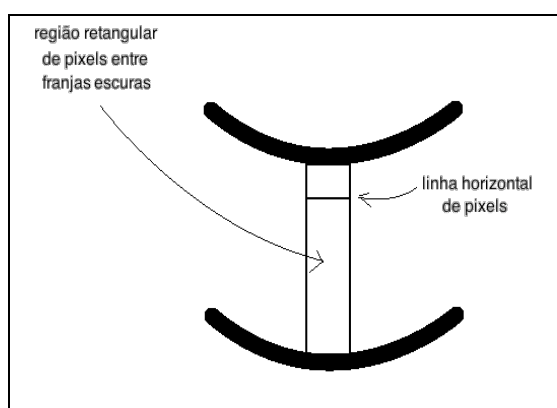


Figura 3.18 - Esquema da região retangular de pixels entre franjas escuras no mapa desmodulado de fases.

Em cada pixel  $i$  de uma linha  $j$  horizontal do retângulo ilustrado, nos mapas de fases verticais, capturou-se os valores das fases absolutas,  $|(\phi_v)_i|$ . Calculou-se, então, a média e as incertezas estatísticas das fases verticais,  $\langle |(\phi_v)| \rangle$ , entre todas as linhas  $j$  entre as franjas escuras e suas incertezas estatísticas para todos os esforços externos. Esses valores foram utilizados para o cálculo das deformações relativas verticais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , dadas pelas razões entre as diferenças das médias de fases consecutivas pelas médias de fase do mapa de fase de referência, a partir do holograma da amostra sem esforço externo.

Com os valores das relações entre as tensões externas verticais,  $\sigma_{\text{externa}}$ , *VERSUS*  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , foram efetuados os ajustes a partir de um polinômio de terceiro grau para verificar se a melhor função era realmente linear. Após a verificação, os valores dos parâmetros que acompanham as variáveis independentes de grau 1 forneceram os módulos de elasticidades,  $\mathcal{E}$ , nos dois processos: compressão e descompressão. A média entre os resultados dos dois processos forneceu o resultado final desse parâmetro holográfico para cada amostra 1 e 2 de ambos os lotes. Os valores médios de  $\mathcal{E}$  e os valores médios dos módulos de elasticidades mecânicos,  $E$ , foram comparados através da Expressão (2.54a) para obtenção das constantes adimensionais  $a$ .

De modo semelhante, os valores médios de fases obtidos dos mapas de fases horizontais foram utilizados para os cálculos das deformações relativas horizontais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ .

Com a relação  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$  *VERSUS*  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , foram efetuados os ajustes a partir de um polinômio de terceiro grau para verificar se a melhor função era realmente linear. Após a verificação, os valores dos parâmetros que acompanham as variáveis independentes de grau 1 forneceram os coeficientes de Poisson,  $\nu$ , nos dois processos: compressão e descompressão. A média entre os resultados dos dois processos forneceu o resultado final desse parâmetro para cada amostra 1 e 2 de ambos os lotes.

Os ajustes e os testes de confiabilidades foram realizados por programas confeccionados na plataforma MATLAB, fundamentados no método dos mínimos quadrados [48][65][72]. Mais detalhes sobre esses ajustes são apresentados no Apêndice C.1.



Para efetuar os cálculos dos valores holográficos de franjas para as amostras 3 e 4 dos lotes I e II, utilizou-se os parâmetros holográficos  $\mathfrak{C}$  e  $\nu$ , as espessuras das amostras 3 e 4 e a Expressão (2.58).  $f$  foi praticamente o mesmo para as amostras 1 e 3, em cada lote, já que suas espessuras eram aproximadamente iguais. O mesmo ocorreu com as amostras 2 e 4.

Nas determinações das dispersões ópticas,  $\mathcal{H}$ , das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, foram utilizados: os resultados obtidos dos valores de franjas,  $f$ , o comprimento de onda,  $\lambda$ , da fonte de luz laser, o fator  $a$  calculado a partir da comparação entre os módulos de elasticidades obtidos na Holografia e na Elasticidade Mecânica e a Expressão (2.59).  $\mathcal{H}$  foi praticamente igual para as amostras 1 e 3, em cada lote, já que  $f$  também foi igual. O mesmo ocorreu com as amostras 2 e 4. Com os valores das dispersões ópticas, na Holografia e na Fotoelasticidade foram calculadas as relações  $(\mathcal{H}/C)$  das amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

### 3.3.5.2 Distribuições holográficas de tensões

Para um determinado esforço sobre uma amostra fotoelástica, obteve-se o holograma total. Esse holograma foi utilizado para as reconstruções separáveis dos mapas de fases vertical e horizontal. A subtração entre esses mapas forneceu o respectivo mapa das diferenças de fases para cada amostras 3 e 4 dos lotes I e II. Em cada um dos mapas desmodulados foi selecionado um retângulo entre franjas escuras, segundo o esquema da Figura 3.18.

Em cada pixel  $i$  de uma linha  $j$  horizontal do retângulo ilustrado foram capturados os valores das diferenças de fases absolutas,  $|(\phi_v - \phi_h)_i|$ . Calculou-se, então, a média das diferenças de fases,  $\langle |(\phi_v - \phi_h)_j| \rangle$ . O procedimento foi repetido em todo o trecho vertical para cada linha  $j$  entre as duas franjas escuras. Esses valores foram armazenados para a determinação das distribuições de tensões. Com os valores médios dos módulos das diferenças de fase, foram calculadas as retardações relativas médias,  $\langle \mathfrak{N}_j \rangle$ , pela Expressão (2.57). Esses resultados, associados aos parâmetros  $\mathfrak{C}$  e  $\nu$  pela Expressão (2.56), permitiram encontrar os valores médios absolutos das diferenças de tensões,  $\langle |(\sigma_v - \sigma_h)_{j\text{-holográfica}}| \rangle$ . As relações gráficas  $\langle |(\sigma_v - \sigma_h)_{\text{holográfica}}| \rangle$  *versus* pixels do trecho selecionado, possibilitaram as construções dos gráficos das distribuições de diferenças de tensões do estado plano para as amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lotes I e II.

## 4 Análise de dados e resultados

O presente capítulo apresenta os resultados da análise a partir dos dados obtidos pelas técnicas auxiliares e holográfica: *speckle* por transmissão, ensaio mecânico tensões, fotoelasticidade por transmissão com polariscópio elíptico de campo claro e interferômetro com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas. Para efetuar as análises foram utilizados os métodos: correlação THSP, mínimos quadrados, elementos finitos, fotoelasticidade RGB e método holográfico proposto por este trabalho. Os resultados obtidos pelos métodos auxiliares ajudaram na obtenção de alguns parâmetros importantes, além de fornecer a base para a comparação com os resultados do método holográfico. Seguindo os procedimentos apresentados no Capítulo 3, a sequência de trabalho foi: determinação dos tempos de compressão e descompressão; cálculo dos módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson mecânicos; obtenção das distribuições teóricas, por Elementos Finitos, e experimentais, por Fotoelasticidade, das diferenças de tensões do estado plano; calibração da configuração fotoelástica; cálculo dos módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson pelo método holográfico; obtenção das distribuições experimentais por Holografia.

### 4.1 Parâmetros geométricos das amostras e esforços externos

As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os valores dos parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas do lote I, menos flexíveis, e do lote II, mais flexíveis, respectivamente. Os resultados finais foram obtidos a partir das médias e desvios de 10 medidas utilizando um paquímetro digital com precisão de 0,01 mm.

Tabela 4.1 - Parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas do lote I.

parâmetros	valores (cm)			
	amostra 1	amostra 2	amostra 3	amostra 4
$l_h$ (comprimento horizontal)	$(3,959 \pm 0,002)$	$(4,353 \pm 0,003)$	$(4,205 \pm 0,003)$	$(4,105 \pm 0,003)$
$l_v$ (comprimento vertical)	$(2,030 \pm 0,001)$	$(2,026 \pm 0,001)$	$(3,026 \pm 0,002)$	$(3,034 \pm 0,002)$
e (espessura)	$(1,025 \pm 0,001)$	$(5,02 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,031 \pm 0,001)$	$(4,84 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$

Tabela 4.2 - Parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas do lote II.

parâmetros	valores (cm)			
	amostra 1	amostra 2	amostra 3	amostra 4
$l_h$ (comprimento horizontal)	$(5,627 \pm 0,004)$	$(5,231 \pm 0,004)$	$(4,951 \pm 0,003)$	$(4,733 \pm 0,003)$
$l_v$ (comprimento vertical)	$(2,058 \pm 0,001)$	$(2,084 \pm 0,001)$	$(3,025 \pm 0,002)$	$(3,038 \pm 0,002)$
e (espessura)	$(1,034 \pm 0,001)$	$(4,90 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,051 \pm 0,001)$	$(5,00 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$

Para as determinações dos módulos de elasticidades e dos coeficientes de Poisson, as amostras 1 e 2 de ambos os lotes foram submetidas a uma sequência de esforços totais estáticos e homogêneos, na direção vertical segundo o esquema da Figura 3.5, com as intensidades apresentadas na Tabela 4.3. Embora as forças aplicadas tenham sido iguais, as tensões diferem devido as diferentes áreas de aplicações, em função das diferentes espessuras das amostras.

Tabela 4.3 - Esforços externos aplicados nas amostras fotoelásticas 1 e 2 dos lotes I e II.

tensão externa vertical (MPa)	
amostra 1 (lotes I e II)	amostra 2 (lotes I e II)
$(3,77 \pm 0,07) \cdot 10^{-1}$	$(0,70 \pm 0,13) \cdot 10^{-1}$
$(5,02 \pm 0,09) \cdot 10^{-1}$	$0,93 \pm 0,02$
$(6,28 \pm 0,11) \cdot 10^{-1}$	$1,17 \pm 0,02$
$(7,53 \pm 0,14) \cdot 10^{-1}$	$1,40 \pm 0,03$
$(8,79 \pm 0,16) \cdot 10^{-1}$	$1,63 \pm 0,03$
$1,00 \pm 0,02$	$1,87 \pm 0,03$
$1,13 \pm 0,02$	$2,10 \pm 0,04$
$1,26 \pm 0,02$	$2,33 \pm 0,04$
$1,38 \pm 0,03$	$2,56 \pm 0,04$
$1,51 \pm 0,03$	$2,80 \pm 0,05$

As massas utilizadas incluíram a massa do conjunto base de cargas, haste principal móvel e base de contato com a amostra, de valor  $m = (1,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg, mostrados na Figura 3.4. Os valores das forças foram calculados pelos produtos entre as massas e a aceleração da gravidade local de São Paulo, latitude média  $23^\circ$  e altitude média aproximadamente 760 m do nível do mar,  $g = (9,79 \pm 0,01) \text{ m/s}^2$  [69].

Todas as amostras 3 e 4, de ambos os lotes, foram submetidas ao esforço em massa de  $(6,00 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg, que equivale à força de  $(5,87 \pm 0,01) \text{ N}$ , com as tensões apresentadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Esforços externos aplicados nas amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lotes I e II.

tensão externa vertical (MPa)	
amostra 3 (lotes I e II)	amostra 4 (lotes I e II)
$(5,45 \pm 0,04) \cdot 10^{-1}$	$1,03 \pm 0,02$

## 4.2 Tempos médios de compressão e descompressão

Durante a captura dos dados por uma câmera digital na técnica de *speckle* por transmissão, foram criados arquivos de vídeo com 8 bits, na escala de cinza, com 256 quadros em uma taxa de coleta de 17,28 quadros por segundo. Esses arquivos armazenaram os padrões dinâmicos de *speckle* para as amostras fotoelásticas 1 e 2, de ambos os lotes, submetidas às cargas em massas de  $(1,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg,  $(6,00 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg e  $(1,150 \pm 0,001)$ kg, segundo o esquema da Figura 3.5. Cada vídeo gerou um THSP com 256 colunas. O tempo total de cada arquivo THSP foi de 14,81 s, com  $5,78 \cdot 10^{-2}$ s por coluna. A Figura 4.1 mostra as imagens THSP para os esforços em massas de 150g, 600g e 1150g sobre a amostra 1 do lote II, no processo de compressão.

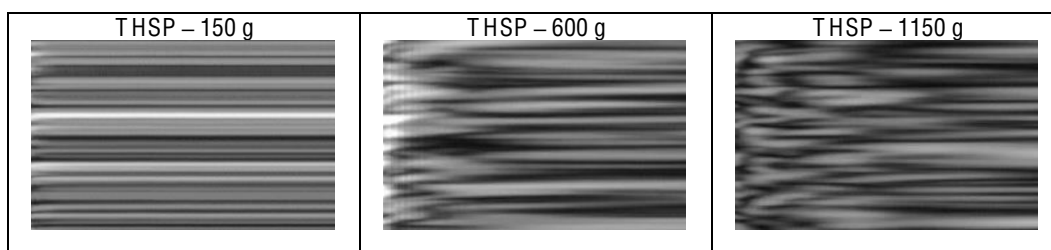


Figura 4.1 – Imagens THSP de 256 linhas no processo de compressão sobre a amostra 1 do lote II, sob os esforços de 150g, 600 g e 1150 g. Nota-se um maior aumento da atividade com o aumento do esforço.

Após efetuar a correlação de intensidades entre as colunas de cada arquivo THSP, a partir da Expressão (2.14), foram construídos os gráficos que relacionam os valores dos coeficientes de correlação com os tempos dessas colunas. A Figura 4.2 apresenta um exemplo dessa relação gráfica.

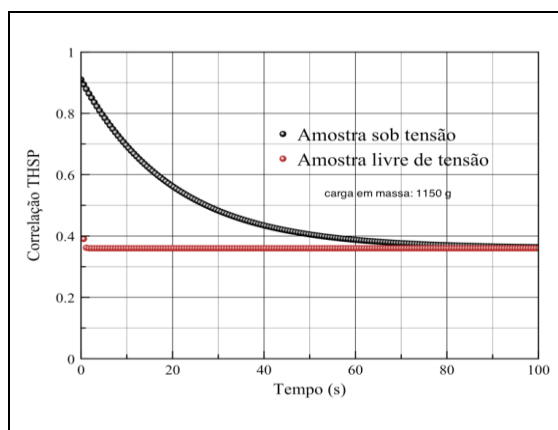


Figura 4.2 – Gráfico da correlação THSP em relação ao tempo para uma amostra sob tensão (carga em massa: 1150g) e livre de tensão (vermelho).

Através da análise desses gráficos, por método dos mínimos quadrados, foram determinados os tempos de compressão e descompressão para as amostras fotoelásticas 1 e 2, de ambos os lotes. As Tabelas 4.5 e 4.6 apresentam esses tempos em cada esforço externo aplicado.

Tabela 4.5 - Tempos de compressão e descompressão das amostras 1 e 2 do lote I.

carga (g)	amostra 1		amostra 2	
	compressão (s)	descompressão (s)	compressão (s)	descompressão (s)
150	21	27	54	60
600	36	43	68	77
1150	40	47	70	81
Média	$32 \pm 6$	$39 \pm 6$	$64 \pm 5$	$73 \pm 7$

Tabela 4.6 - Tempos de compressão e descompressão das amostras 1 e 2 do lote II.

carga (g)	amostra 1		amostra 2	
	compressão (s)	descompressão (s)	compressão (s)	descompressão (s)
150	39	41	88	94
600	52	56	103	111
1150	58	60	115	118
Média	$50 \pm 6$	$52 \pm 6$	$102 \pm 3$	$108 \pm 7$

Os valores médios encontrados foram utilizados como tempos de espera entre uma medida e outra durante as capturas dos dados no ensaio mecânico, em fotoelasticidade e em holografia.

## 4.3 Ensaio mecânico de tensões

### 4.3.1 Registro das imagens

Com as amostras 1 e 2, de ambos os lotes, foram realizados todos os esforços externos apresentados na Tabela 4.3, para os processos de compressão e descompressão, respeitando os tempos das Tabelas 4.5 e 4.6. Cada esforço gerou imagens em 8 bits armazenadas em arquivos. Também foram capturadas as imagens das amostras sem esforços externos, que serviram de referências para as medidas de deformações.

### 4.3.2 Módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson mecânicos

A Figura 4.3 apresenta os gráficos experimentais das tensões externas *versus* deformações lineares verticais, a partir dos dados obtidos nos ensaios de compressão e descompressão sobre a amostra fotoelástica 1 do lote I.

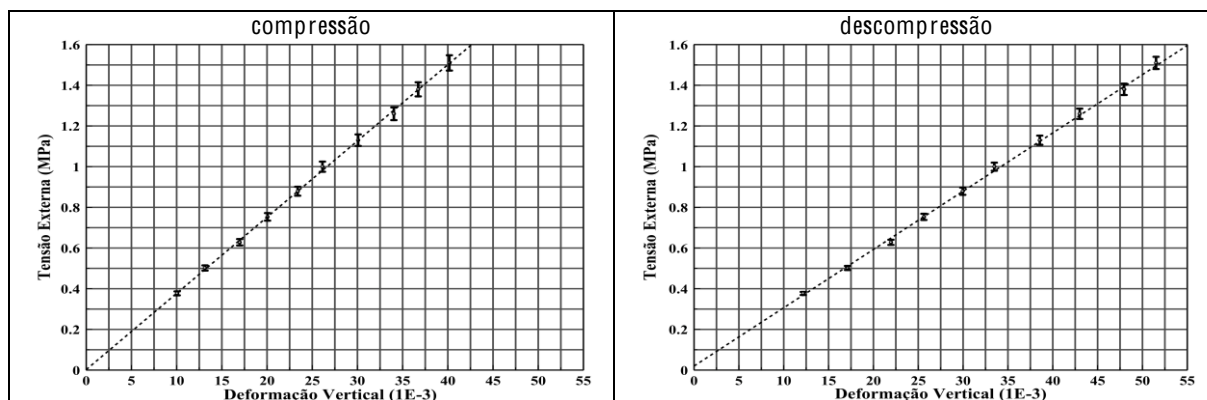


Figura 4.3 - Gráficos dos valores experimentais de tensão *versus* deformação linear vertical para compressão e descompressão da amostra fotoelástica 1 do lote I. As linhas tracejadas são guias para observação da distribuição dos pontos experimentais.

Utilizando o método dos mínimos quadrados obteve-se os ajustes das funções para a compressão e a descompressão. Os valores dos módulos de elasticidade,  $E$ , foram obtidos a partir dessas funções e os valores finais,  $\langle E \rangle$ , resultaram da média entre os valores de compressão e descompressão. A Tabela 4.7 apresenta os resultados obtidos para todas as amostras 1 e 2 de ambos os lotes.

Tabela 4.7 - Módulos de elasticidades para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

amostra	$\langle E \rangle$ ( $10^{-2}$ GPa)	
	Lote I	Lote II
1	$3,31 \pm 0,10$	$2,79 \pm 0,07$
2	$3,38 \pm 0,13$	$2,93 \pm 0,09$

A Figura 4.4 apresenta os gráficos experimentais das deformações lineares horizontais *versus* deformações lineares verticais, a partir dos dados obtidos nos ensaios de compressão e descompressão sobre a amostra fotoelástica 1 do lote I.

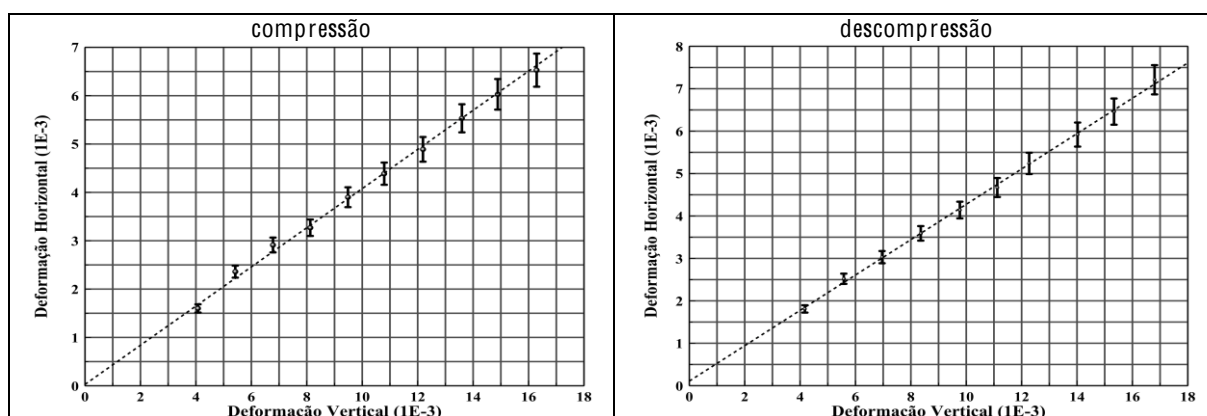


Figura 4.4 - Gráficos dos valores experimentais de deformação horizontal *versus* deformação vertical para compressão e descompressão da amostra fotoelástica 1 do lote I. As linhas tracejadas são guias para observação da distribuição dos pontos experimentais.

Utilizando o método dos mínimos quadrados obteve-se os ajustes das funções para a compressão e a descompressão. Os valores dos coeficientes de elasticidade,  $\nu$ , foram obtidos a partir dessas funções e os valores finais,  $\langle \nu \rangle$ , resultaram da média entre os valores de compressão e descompressão. A Tabela 4.8 apresenta os resultados encontrados.

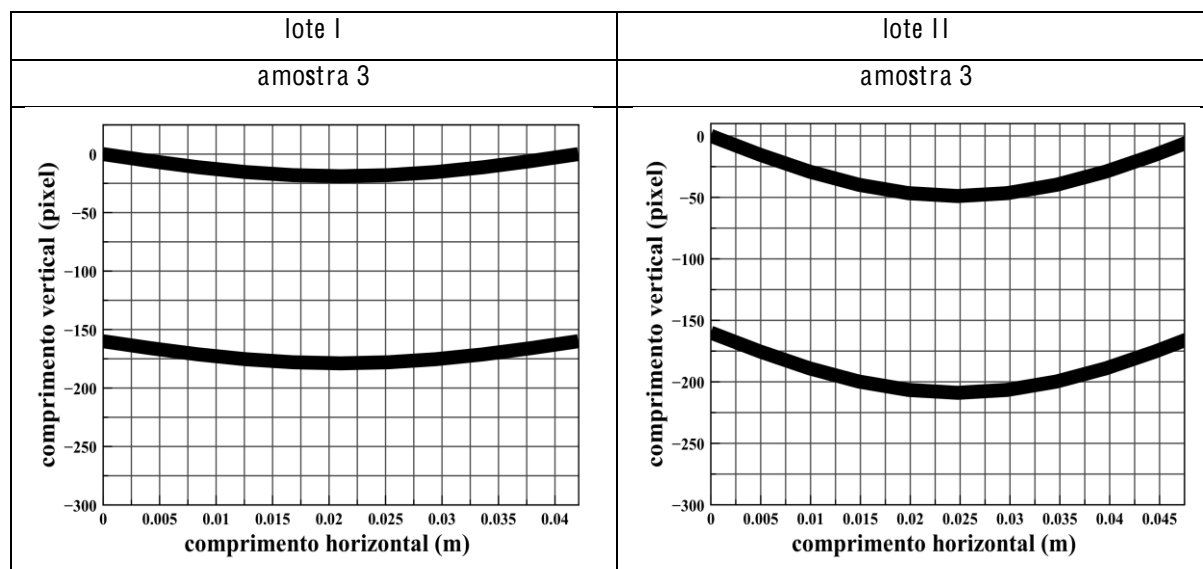
Tabela 4.8 - Coeficientes de Poisson para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

amostra	$\langle \nu \rangle$ ( $10^{-1}$ )	
	Lote I	Lote II
1	$3,891 \pm 0,073$	$3,922 \pm 0,087$
2	$3,754 \pm 0,061$	$3,876 \pm 0,068$

Os resultados das Tabelas 4.7 e 4.8 foram utilizados para determinações das distribuições teóricas de tensões, nos cálculos dos valores de franjas em Fotoelasticidade e nas comparações com os parâmetros obtidos em Holografia.

#### 4.4 Distribuições teóricas de tensões

O campo de deslocamentos da Expressão (B.6) do Apêndice B, associado ao modelo da Figura 3.9 e aos parâmetros geométricos e mecânicos das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, produziram os desenhos teóricos das franjas no plano que contém a direção do esforço sobre as amostras, como mostrados na Figura 4.5.



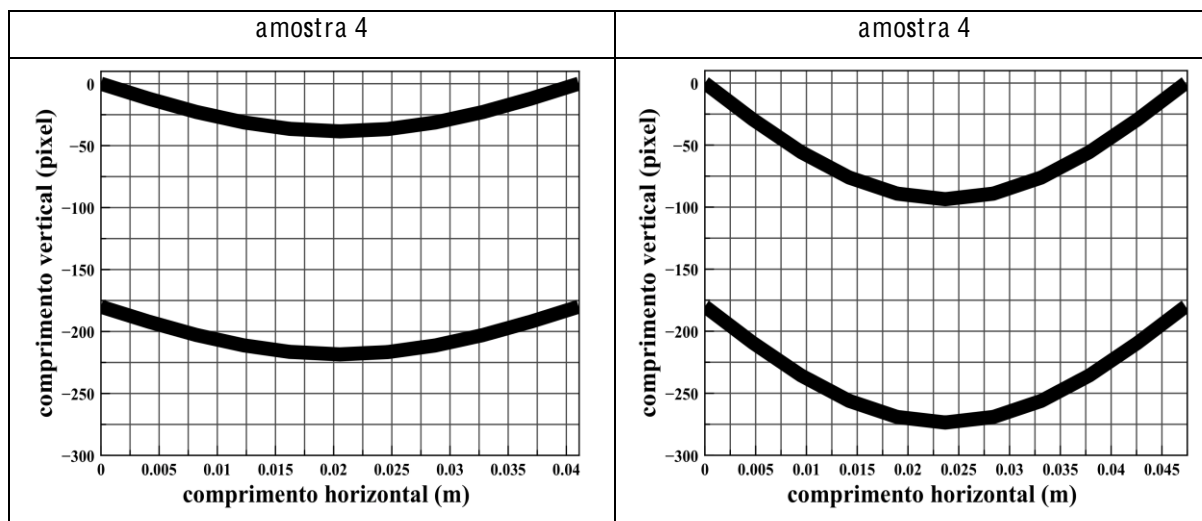
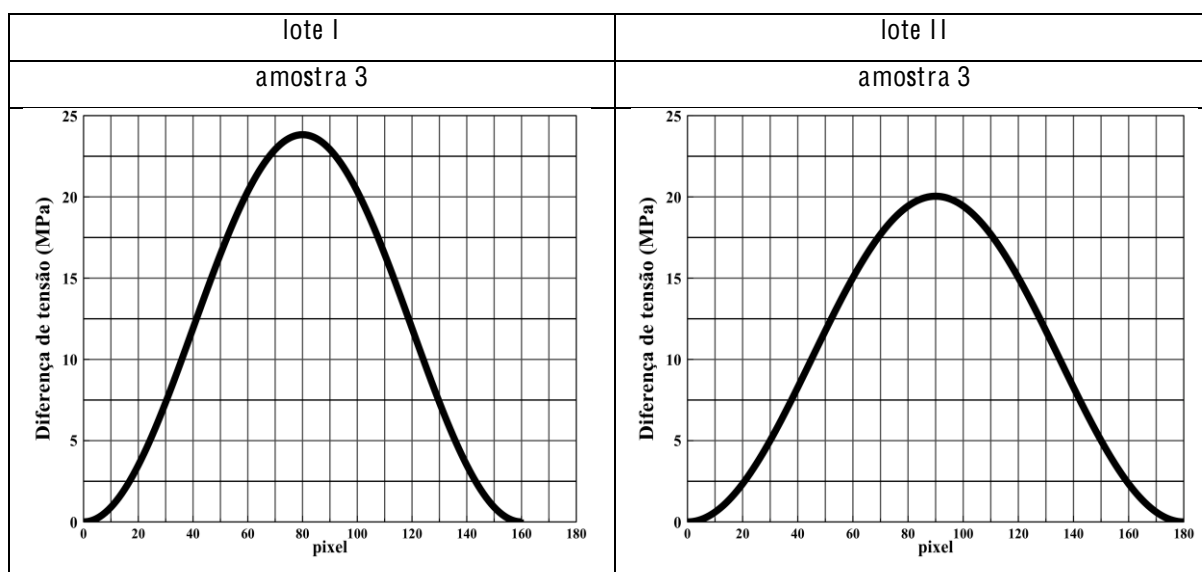


Figura 4.5 - Duas franjas escuras teóricas das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, a partir do campo de deslocamentos da Expressão (B.6). Deslocamentos obtidos pelo método analítico de elementos finitos bidimensionais.

Com a Expressão (B.14) associada à Expressão (B.5) do Apêndice B e os dados das Tabelas 4.1, 4.2, 4.4, 4.7 e 4.8, foram determinadas as distribuições das diferenças de tensões do estado plano ao longo de uma linha vertical de pixels entre franjas escuras, para o modelo da Figura 3.9, das amostras fotoelásticas 3 e 4 de ambos os lotes. A Figura 4.6 apresenta esses resultados.





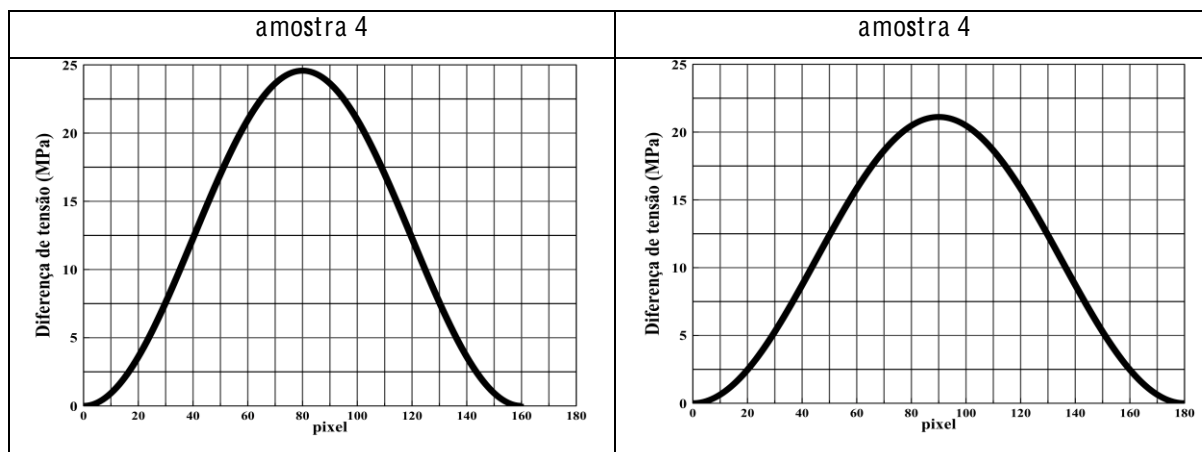


Figura 4.6 - Gráficos das distribuições teóricas de tensões do estado plano ao longo de linhas verticais entre franjas escuras com as dimensões das amostras 3 e 4 dos lotes I (esquerda) e II (direita). Curvas obtidas pelo método analítico de elementos finitos associado à fotoelasticidade.

Todos esses resultados foram utilizados na comparação com os resultados obtidos pelos métodos de fotoelasticidade RGB e holográfico.

## 4.5 Fotoelasticidade

### 4.5.1 Valores de franjas ( $f_{\sigma}$ ) e dispersões fotoelásticas (C)

Para as determinações dos valores de franjas das amostras 3 e 4 de ambos os lotes, foram utilizados os resultados médios dos módulos de elasticidade da Tabela 4.7, dos coeficientes de Poisson da Tabela 4.8 e a Expressão (2.35). A Tabela 4.9 agrupa todos os resultados.

Tabela 4.9 - Valores de franjas das amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

amostras	$f_{\sigma}$ ( $10^5$ N/m)	
	lote I	lote II
3	$2,576 \pm 0,087$	$2,106 \pm 0,071$
4	$1,189 \pm 0,050$	$1,056 \pm 0,037$

Nas determinações das dispersões fotoelásticas, C, das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, foram utilizados os valores de franjas da Tabela 4.9, o comprimento de onda  $\lambda = 632,8$  nm e a definição de valor de franja fotoelástica,  $f_{\sigma} \equiv \frac{\lambda}{C}$ . Resultados apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 - Dispersões fotoelásticas das amostras dos lotes I e II.

amostras	C ( $10^{-12}$ m <sup>2</sup> /N)	
	lote I	lote II
3	$2,58 \pm 0,09$	$3,00 \pm 0,10$
4	$5,32 \pm 0,22$	$5,99 \pm 0,21$

## 4.5.2 Tabelas fotoelásticas de referência

A Figura 4.7 mostra as franjas selecionadas das imagens, em tons de cinza e coloridas, das amostras fotoelásticas 1 e 2 do lote I, submetidas ao esforço externo em massa de  $(1,250 \pm 0,001)$  kg, em um polariscópio elíptico de campo claro, como o esquematizado na Figura 4.6.

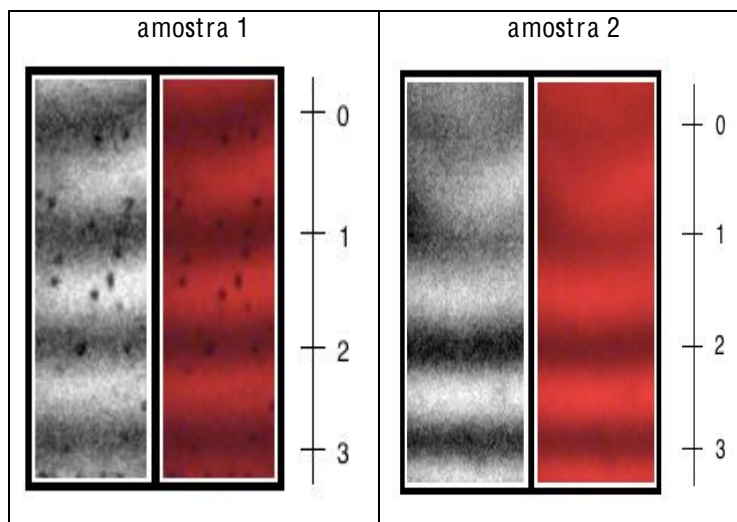


Figura 4.7 - Trechos selecionados das imagens obtidas no polariscópio elíptico de campo claro a partir do esforço externo em massa de  $(1,250 \pm 0,001)$ kg, sobre as amostras 1 e 2, do lote I, para obtenções das tabelas fotoelásticas de referência. As franjas foram ordenadas de 0 a 3 em cada amostra.

As localizações dos números inteiros e semi-inteiros de franjas foram determinados por método gráfico, que relacionou as intensidades da imagem em preto e branco *versus* pixels, ao longo de uma linha vertical no centro de cada figura. Os pontos de mínimo e máximo das curvas ajustadas aos pontos experimentais, por método dos mínimos quadrados, identificaram as posições, em pixel, dos números das franjas [0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3]. Procedimento análogo foi realizado com as amostras fotoelásticas 1 e 2 do lote II, com o mesmo esforço.

O método dos mínimos quadrados possibilitou encontrar a função para determinações dos números intermediários das franjas. A Figura 4.8 apresenta as relações gráficas para os valores obtidos com as amostras 1 e 2 do lote I.

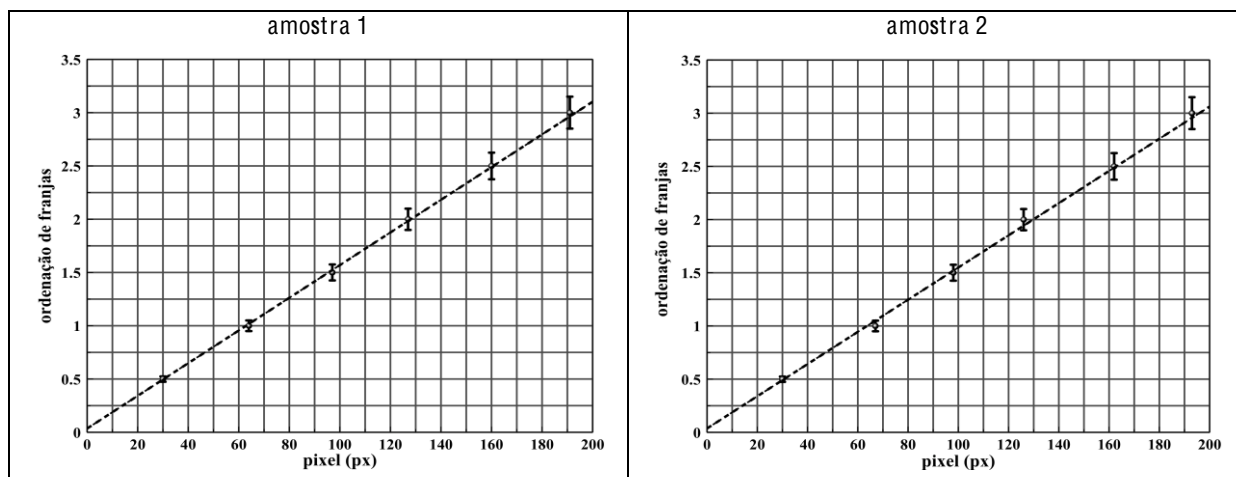


Figura 4.8 - Relação entre ordenação de franjas e pixel para determinação dos números não inteiros das franjas das amostras 1, esquerda, e 2, direita, do lote I. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos pontos experimentais.

Utilizando o método dos mínimos quadrados obteve-se os melhores ajustes das funções para a amostra 1 e amostra 2 do lote I. Com essas funções encontrou-se os valores intermediários dos números das franjas dessas amostras do lote I. Analogamente, encontrou-se os números intermediários de franjas para as amostras 1 e 2, do lote II. Após efetuar o levantamento dos valores intermediários dos números das franjas, convencionou-se pixel 0 à franja escura 0. Em seguida, para todas as amostras 1 e 2 de ambos os lotes, uma linha vertical de pixels foi selecionada na imagem colorida, na mesma localização da respectiva linha selecionada na imagem em preto e branco.

A partir da posição do pixel 0, foram coletados os valores das intensidades R, *red*, G, *green* e B, *blue*, relacionando-os com os números das franjas intermediárias. Após a normalização, os resultados foram armazenados em arquivos e serviram como tabela de referência para determinações das retardações relativas,  $N_j$ , em cada pixel  $j$  da região selecionada das imagens de franjas obtidas com as amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

### 4.5.3 Distribuições fotoelásticas das diferenças de tensões

Os trechos selecionados para determinações das distribuições de diferenças de tensões foram retângulos entre as franjas escuras das imagens das amostras 3 e 4 de ambos os lotes I e II. As imagens foram obtidas em um polariscópio elíptico de campo claro mostrado na Figura 3.10.

Todas as amostras foram submetidas ao mesmo esforço externo em massa de 600g, segundo o esquema da Figura 3.6. A Figura 4.9 apresenta as imagens selecionadas das amostras 3 e 4 do lote I. As linhas brancas identificam aproximadamente os trechos estudados.

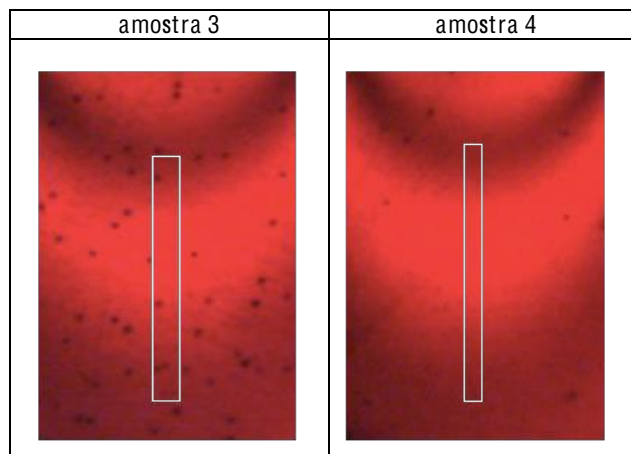
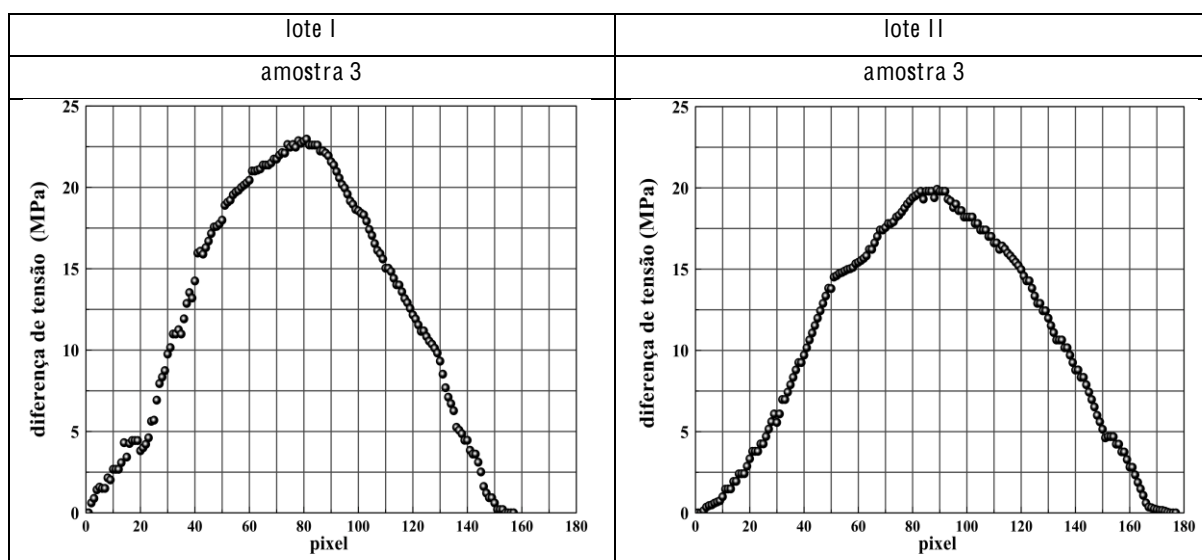


Figura 4.9 - Trechos (retângulos) para determinações das distribuições de diferenças de tensões do estado plano nas imagens obtidas a partir das amostras fotoelásticas 3 e 4 do lote I. Imagens obtidas a partir de um polariscópio elíptico de campo claro, segundo o esquema na Figura 3.11. Esforço externo em massa de 600g.

A partir das imagens fotoelásticas, determinou-se as retardações relativas médias,  $N_j$ . Com os valores das Tabelas 4.7 e 4.8, encontrou-se a rigidez,  $\frac{f_\sigma}{e}$ , de cada amostra e com a Expressão (2.35) calculou-se as distribuições das diferenças de tensões para as amostras 3 e 4 dos lotes I e II. Os resultados finais, foram organizados em gráficos das distribuições das diferenças de tensões *versus* pixel vertical. A Figura 4.10 apresenta esses resultados.



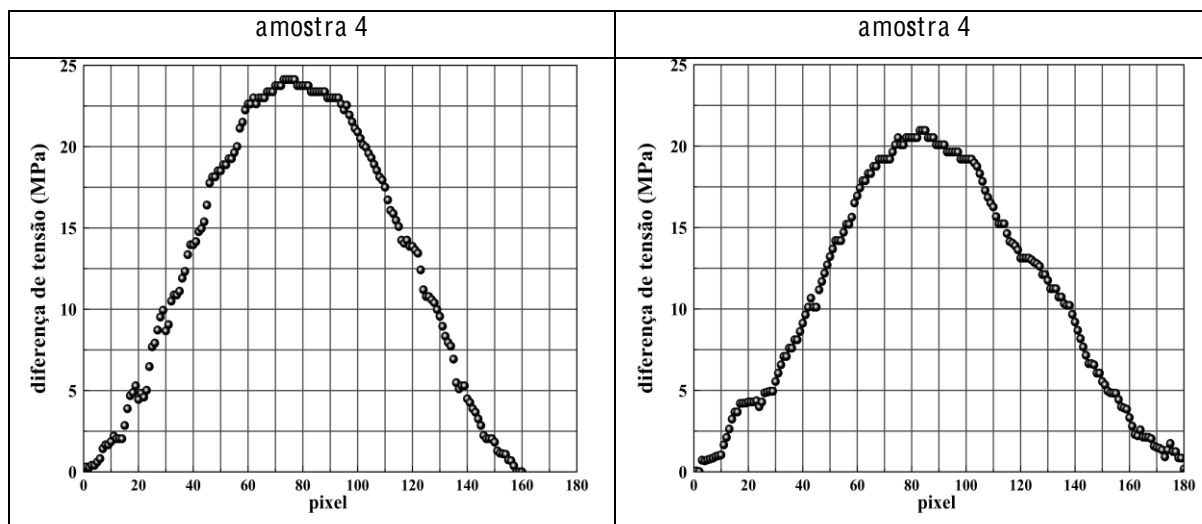


Figura 4.10 - Gráficos experimentais das diferenças de tensões do estado plano *versus* pixels nas amostras fotoelásticas 3 (esquerda) e 4 (direita) dos lotes I e II nos trechos verticais médios entre franjas escuras.

Esses resultados foram utilizados para comparação com os resultados obtidos pelo método holográfico.

## 4.6 Holografia

### 4.6.1 Diferenças angulares entre as ondas objeto e referências

Como o comprimento de onda da fonte de luz foi  $\lambda = 632,8$  nm e a dimensão do pixel do sensor da câmera digital foi  $\Delta\xi = 5,3$   $\mu\text{m}$ , então, utilizando a Expressão (2.42),  $\theta_{\text{Máx}} \cong 6,0 \cdot 10^{-2}$  rad ( $3,4^\circ$ ).

Esse foi o ângulo limite de ajuste entre o local, divisor de feixes, em que as ondas se encontraram e o sensor da câmera digital. O valor escolhido para  $\theta_1 = \theta_2$  foi  $3,0^\circ$ .

### 4.6.2 Calibração da configuração holográfica

#### 4.6.2.1 Hologramas da lâmina de atraso

Para cada ângulo de orientação da lâmina de quarto de onda foi gerado um holograma total contendo dois hologramas com estados de polarizações ortogonais entre si. Os intervalos de orientação da lâmina de quarto de onda foram de 0 a  $360^\circ$  com passos de 5 em  $5^\circ$ . As imagens da Figura 4.11 mostram alguns desses hologramas totais.

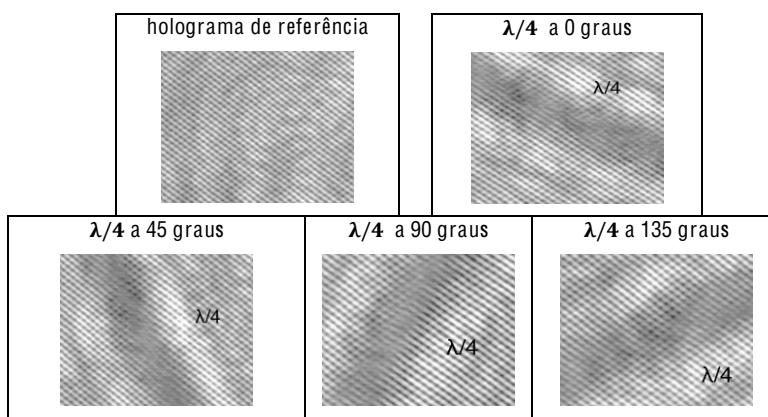


Figura 4.11 - Hologramas completos contendo as polarizações vertical e horizontal da região de referência e da lâmina de quarto de onda com orientações:  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ . Região  $\lambda/4$  corresponde à lâmina de atraso. Intensidade: 0 (região mais escura) a 255 (região mais clara).

Na Figura 4.11 foram selecionadas as orientações  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$  da lâmina de quarto de onda, cujas regiões estão assinaladas como  $\lambda/4$ . A outra região, depois da linha divisória mais escura, corresponde ao espaço livre que foi utilizado como região de referência. Os demais hologramas foram armazenados em arquivos para as reconstruções de fases pelo método de Fresnel.

#### 4.6.2.2 Mapas de fase

As imagens da Figura 4.12 mostram as reconstruções virtuais de fase das componentes vertical e horizontal de polarização já subtraídas das respectivas reconstruções virtuais de referência, obtidas numericamente a partir dos dados da Figura 4.11. Outras orientações apresentam as mesmas características qualitativas de fase das orientações dos ângulos selecionados.

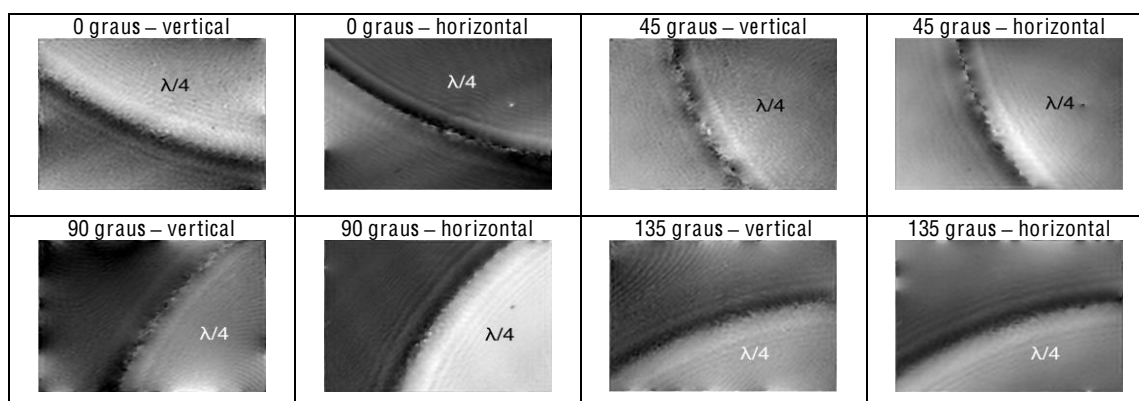


Figura 4.12 - Reconstruções de fase das componentes vertical e horizontal a partir dos hologramas da lâmina de quarto de onda com as orientações  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ . A região assinalada com  $\lambda/4$  corresponde à lâmina de atraso. Valores de fase:  $-2\pi$  (mais escuro) a  $2\pi$  (mais claro).

Todas os demais mapas de fase foram armazenados para a análise gráfica das diferenças entre as fases médias vertical e horizontal em função das orientações da lâmina de quarto de onda.

#### 4.6.2.3 Diferenças de fase *versus* orientações da lâmina de atraso

As diferenças de fases foram obtidas pelas subtrações entre os mapas de fases vertical e horizontal, de todas as orientações angulares da lâmina de atraso no intervalo  $[0, 360^\circ]$ , com passos de 5 em 5°. O gráfico da Figura 4.13 mostra a distribuição dos valores experimentais dessas diferenças médias entre as fases vertical e horizontal em função das orientações da lâmina de atraso.

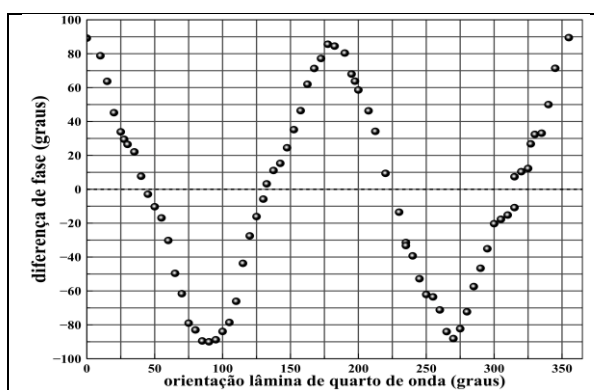


Figura 4.13 – Distribuição de valores experimentais das diferenças entre as fases médias vertical e horizontal versus orientação da lâmina de quarto de onda entre 0 e 360°, com passos de 5°.

O gráfico experimental da Figura 4.13 foi comparado ao gráfico teórico da Figura 2.23, cuja curva foi obtida a partir da Expressão (2.52). Essa comparação decidiu sobre a confiabilidade do sistema holográfico na obtenção dos hologramas.

### 4.6.3 Parâmetros holográficos

#### 4.6.3.1 Hologramas

Com a configuração holográfica devidamente calibrada, os protótipos contendo as amostras fotoelásticas 1 e 2 dos lotes I e II sob esforços externos da Tabela 4.3, segundo o esquema da Figura 3.17b, foram obtidos os hologramas totais utilizados para determinações dos parâmetros holográficos em ambos os processos: compressão e descompressão. Os hologramas de referência foram produzidos com o espaço livre.

A Figura 4.14 apresenta os hologramas totais das amostras fotoelásticas 1 dos lotes I e II, obtidos durante o processo de compressão. A região com pontos claros representa o holograma da amostra. Esses e os demais hologramas das amostras 2 dos lotes I e II foram armazenados em arquivos para as reconstruções digitais pelo método numérico.

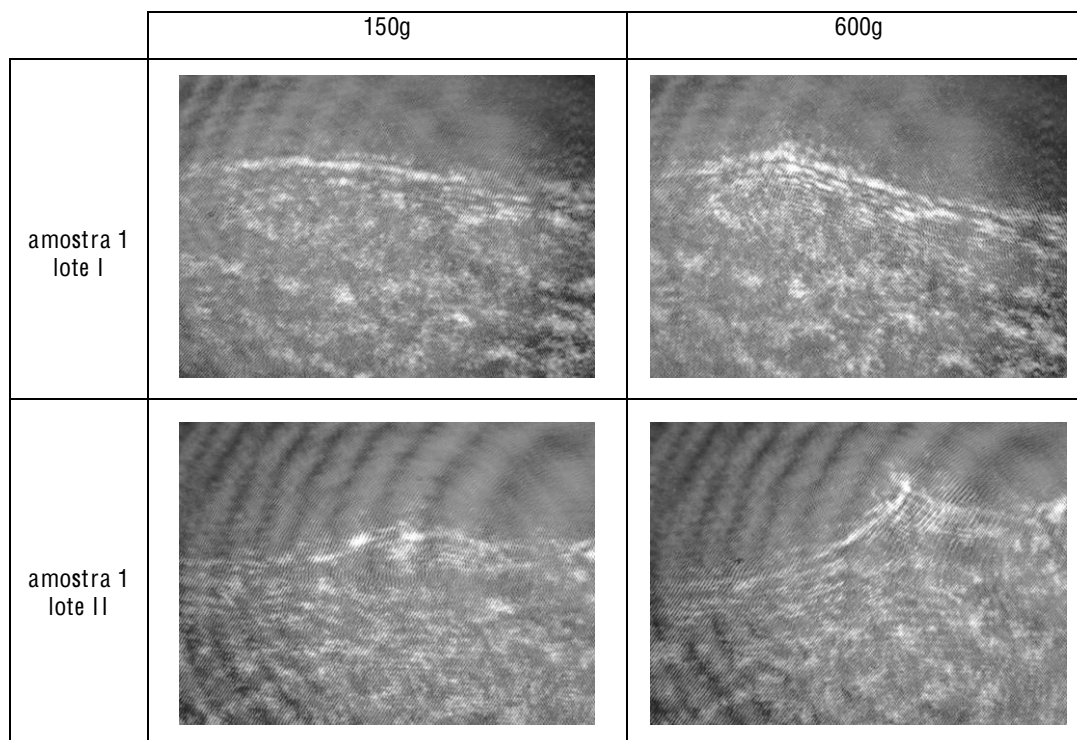


Figura 4.14 - Hologramas totais das amostras fotoelásticas 1 dos lotes I e II, submetidas aos esforços elásticos externos crescentes da Tabela 4.3 durante o processo de compressão. Os valores de intensidade variam entre 0 (região mais escura) e 255 (região mais clara).

#### 4.6.3.2 Mapas de fases

As reconstruções virtuais de fase, vertical e horizontal, foram realizadas por um programa computacional fundamentado no método numérico de Fresnel, a partir dos hologramas totais. Para diminuir os ruídos produzidos pelo sistema, as imagens de fase foram subtraídas das respectivas reconstruções virtuais de fase a partir dos hologramas totais de referências. A Figura 4.15 apresenta os mapas das diferenças de fase entre as componentes vertical e horizontal, obtidas dos hologramas da Figura 4.15. Os mapas de fase apresentados já estão subtraídos dos respectivos mapas das fases de referência. Os retângulos desenhados em cada mapa, representam as regiões selecionadas para os cálculos das médias de fases entre franjas escuras.



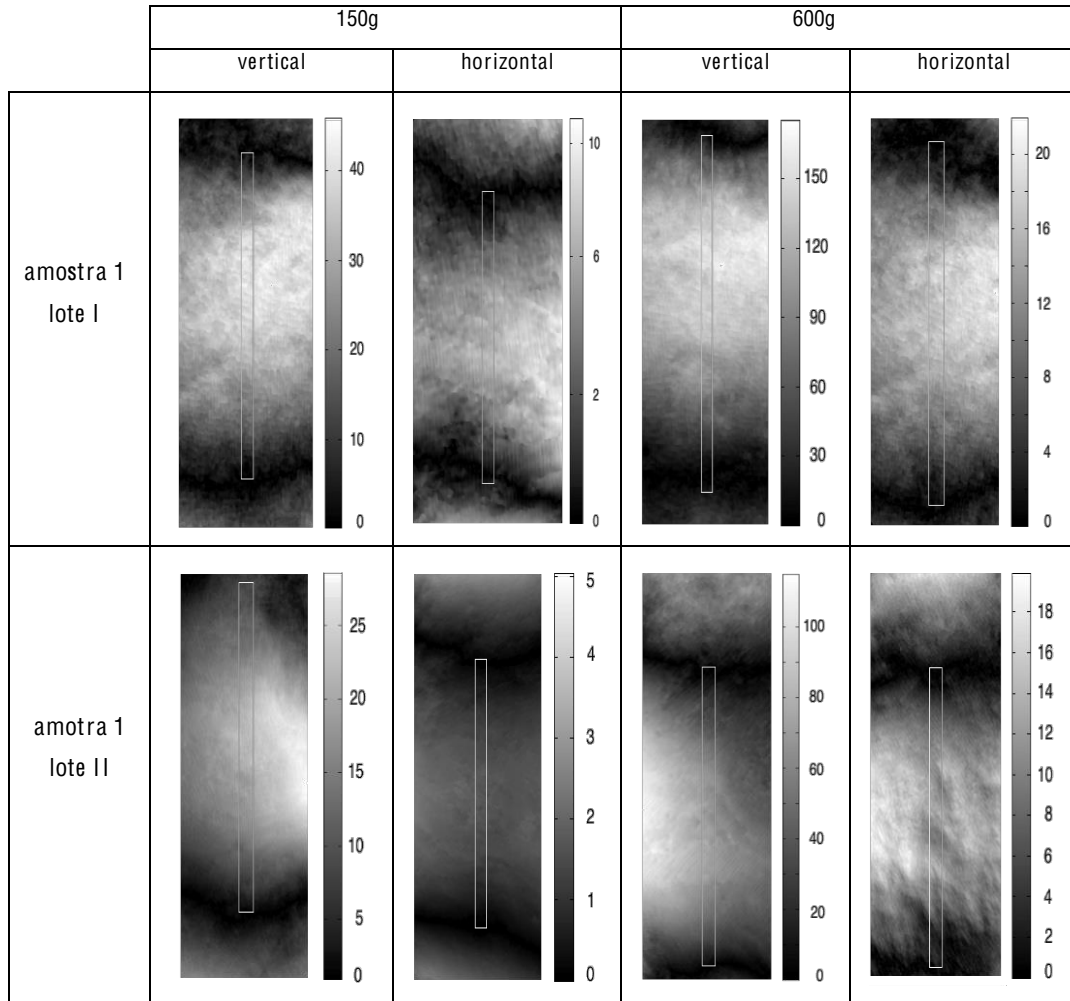


Figura 4.15 - Mapas de fases das componentes vertical e horizontal das amostras fotoelásticas 1 dos lotes I e II submetidas aos esforços elásticos externos 150g e 600g, durante o ensaio de compressão. Os retângulos entre franjas escuras representam as regiões selecionadas para determinações das médias de fases.

Com todos os mapas de fases verticais, incluindo os demais mapas obtidos a partir de todos os hologramas das amostras 1 e 2 dos lotes I e II, foram calculadas as deformações relativas verticais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ . Com todos os mapas de fases horizontais, foram calculadas as deformações relativas horizontais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ .

#### 4.6.3.3 Módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson holográficos

Com as relações entre tensões externas da Tabela 4.3,  $\sigma_{\text{externa}}$ , e os valores das deformações relativas verticais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , foram determinados os módulos de elasticidades das amostras 1 e 2 dos lotes I e II. A Figura 4.16 apresenta os gráficos dessas relações para a amostra 1, do lote I, durante os processos de compressão e descompressão.

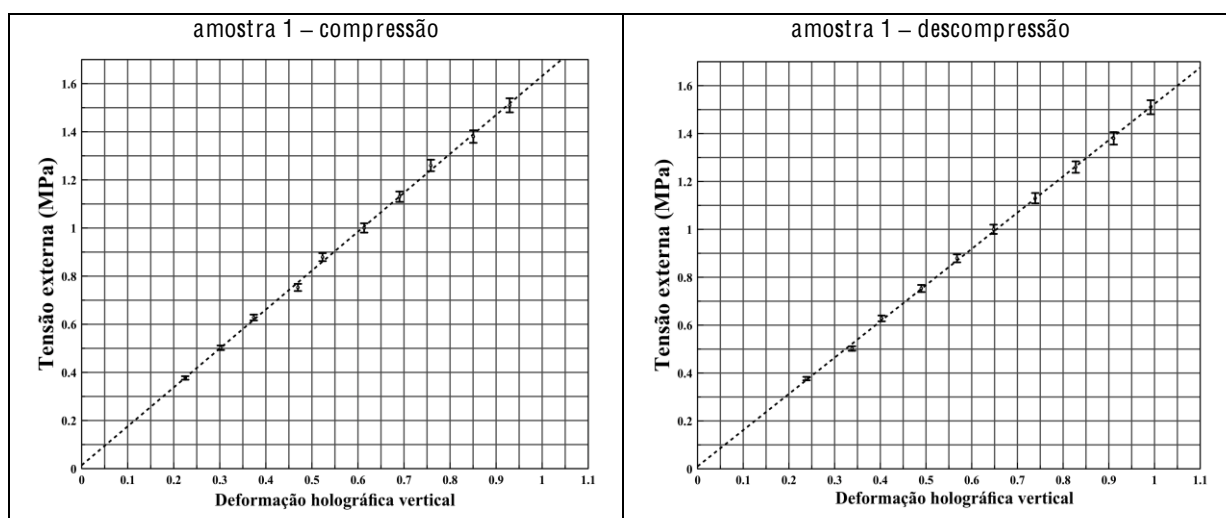


Figura 4.16 - Tensão externa *versus* deformação vertical para os processos de compressão e descompressão na amostra fotoelástica 1 do lote I, submetida aos esforços externos da Tabela 4.3. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais.

Utilizando o método dos mínimos quadrados obteve-se os ajustes das funções para a compressão e a descompressão. Os valores dos módulos de elasticidade,  $\mathcal{E}$ , foram obtidos a partir dessas funções e os valores finais,  $\langle \mathcal{E} \rangle$ , resultaram da média entre os valores de compressão e descompressão. A Tabela 4.11 apresenta todos os resultados médios.

Tabela 4.11 - Módulos de elasticidades para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

amostra	$\langle \mathcal{E} \rangle$ (MPa)	
	lote I	lote II
1	$1,582 \pm 0,021$	$1,312 \pm 0,017$
2	$1,595 \pm 0,024$	$1,328 \pm 0,018$

Com esses valores e os resultados da Tabela 4.7 foi possível determinar, em cada amostra, a constante  $a$  que relaciona os módulos de elasticidades holográficos e mecânicos, segundo a Expressão (2.54a). A Tabela 4.12 apresenta todos esses valores.

Tabela 4.12 - Coeficiente  $a$  para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

amostra	$a$ ( $10^{-2}$ )	
	lote I	lote II
1	$4,78 \pm 0,16$	$4,70 \pm 0,13$
2	$4,72 \pm 0,20$	$4,53 \pm 0,15$

Com as relações entre deformações relativas horizontais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ , e verticais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , foram determinados os coeficientes de Poisson das amostras 1 e 2 dos lotes I e II. das amostras 1 e 2 dos lotes I e II. A Figura 4.17 apresenta os gráficos dessas relações para a amostra 1, do lote I, durante os processos de compressão e descompressão.

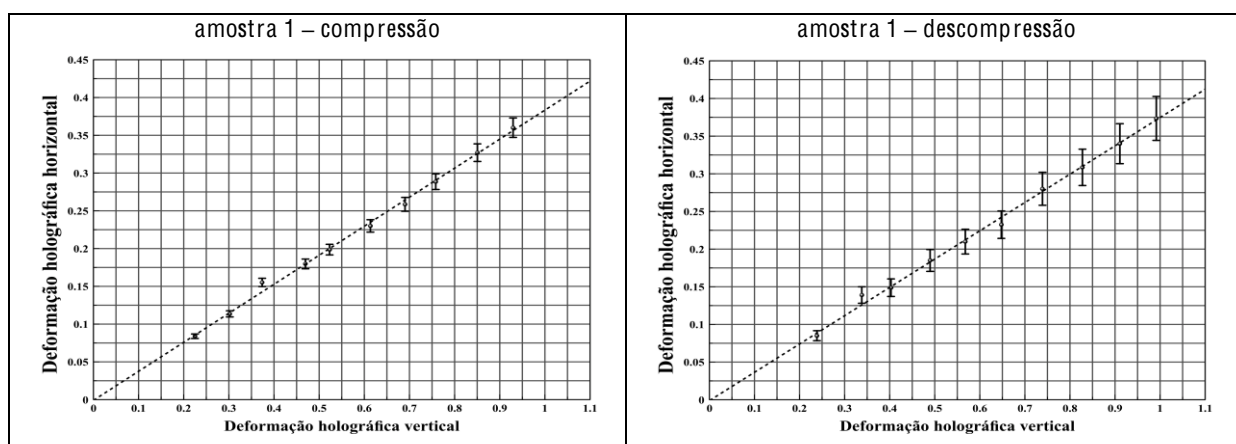


Figura 4.17 - Deformação relativa horizontal ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ ) *versus* deformação holográfica relativa vertical ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ ) para os processos de compressão e descompressão na amostra fotoelástica 1 do lote I, submetida aos esforços externos da Tabela 4.3. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais.

Utilizando o método dos mínimos quadrados obteve-se o ajuste das funções para os valores experimentais de compressão e descompressão. Os valores dos coeficientes de Poisson,  $\nu$ , foram obtidos a partir dessas funções e os valores finais,  $\langle \nu \rangle$ , resultaram da média entre os valores de compressão e descompressão. A Tabela 4.13 apresenta as médias dos valores encontrados.

Tabela 4.13 - Coeficientes de Poisson para as amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

amostra	$\langle \nu \rangle$ ( $10^{-1}$ )	
	lote I	lote II
1	$3,782 \pm 0,017$	$3,797 \pm 0,020$
2	$3,663 \pm 0,014$	$3,672 \pm 0,015$

Os resultados dos módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson foram utilizados para determinação das distribuições das diferenças de tensões do estado plano e, também, dos valores de franjas holográficas das amostras de ambos os lotes.

#### 4.6.3.4 Valores de franjas e dispersões holográficas

O cálculo dos valores de franjas holográficas para as amostras 3 e 4 dos lotes I e II utilizou os parâmetros holográficos  $\mathcal{C}$  e  $\nu$ , das Tabelas 4.11 e 4.13, as espessuras dessas amostras, a partir das Tabelas 4.1 e 4.2, as constantes  $a$ , da Tabela 4.12 e a Expressão (2.58).

Os resultados estão apresentados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 - Valores de franjas holográficas das amostras dos lotes I e II.

amostras	$f$ ( $10^5$ N/m)	
	lote I	lote II
3	$2,466 \pm 0,035$	$2,126 \pm 0,030$
4	$1,197 \pm 0,019$	$1,072 \pm 0,014$

Para o cálculo das dispersões holográficas,  $\mathcal{H}$ , das amostras 3 e 4 dos lotes I e II foram utilizados os valores de franjas holográficas da Tabela 4.14, o comprimento de onda,  $\lambda = 6,328 \cdot 10^{-7}$  m e a Expressão (2.59). Os resultados estão apresentados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 - Dispersões holográficas das amostras dos lotes I e II.

amostras	$\mathcal{H}$ ( $10^{-12}$ m <sup>2</sup> /N)	
	lote I	lote II
3	$2,556 \pm 0,036$	$2,977 \pm 0,042$
4	$5,285 \pm 0,083$	$5,906 \pm 0,084$

#### 4.6.4 Distribuições holográficas de tensões

##### 4.6.4.1 Hogramas

Com a configuração holográfica devidamente calibrada, os protótipos contendo as amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lotes I e II sob o esforço externo de 600g, segundo o esquema da Figura 3.17c, foram obtidos os hogramas totais utilizados para as determinações das diferenças de tensões holográficas. Os hogramas de referência foram produzidos com o espaço livre. A Figura 4.18 apresenta os hogramas obtidos para as amostras fotoelásticas 3 dos lotes I e II. A região mais escura é o holograma do espaço livre.

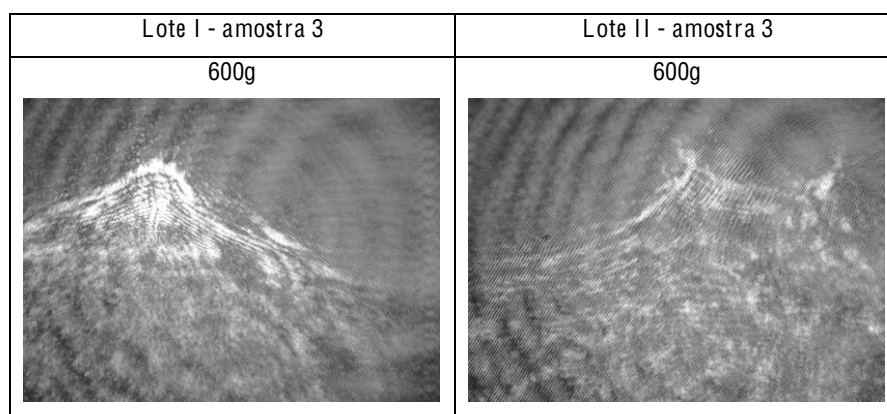


Figura 4.18 - Hogramas totais das amostras fotoelásticas 3 dos lotes I e II submetidas ao esforço elástico externo 600 g. Os valores de intensidade variam de 0 (mais escuro) a 255 (mais claro).

Esses e os demais hogramas das amostras 4 dos lotes I e II foram armazenados em arquivos para as reconstruções digitais.

#### 4.6.4.2 Mapas e diferenças de fases

As reconstruções virtuais de fase, vertical e horizontal, foram realizadas a partir dos hologramas totais obtidos na configuração holográfica. Para diminuir os ruídos produzidos pelo sistema, as imagens de fase foram subtraídas das respectivas reconstruções virtuais de fase a partir dos hologramas de referências.

A Figura 4.19 apresenta os mapas das diferenças entre as fases vertical e horizontal das amostras 3 dos lotes I e II com os trechos, retângulos, selecionados para estudo das distribuições de tensões.

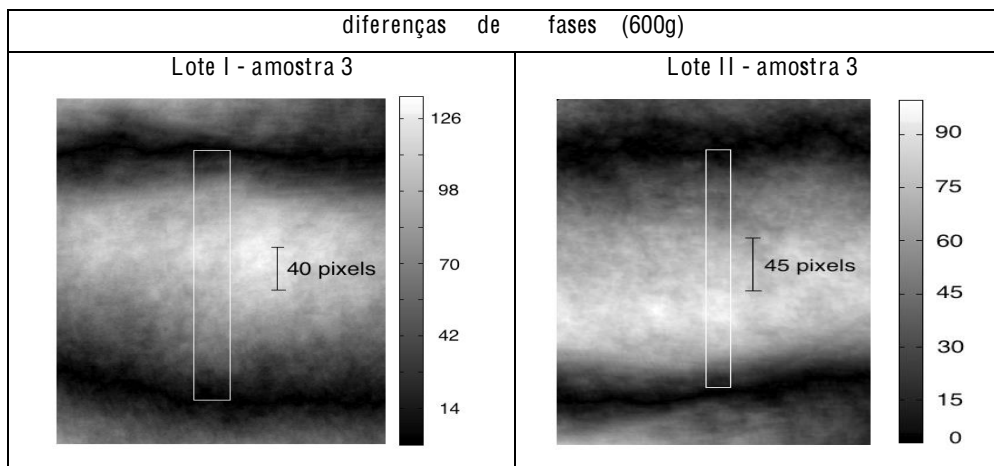


Figura 4.19 - Mapas de diferenças entre as fases vertical e horizontal das amostras fotoelásticas 3 dos lotes I e II, submetidas ao esforço elástico externo em massa de 600 g. Os retângulos entre franjas escuras representam as regiões selecionadas para determinações das distribuições médias de diferenças de fases.

De forma análoga, foram também obtidos os mapas de diferenças de fase para as amostras fotoelásticas 4 dos lotes I e II, submetidas ao esforço externo em massa de 600g. Esses mapas de diferenças de fases foram utilizados nas determinações dos valores absolutos médios das diferenças de fases,  $\langle |(\phi_v - \phi_h)_j| \rangle$ , ao longo das regiões entre franjas escuras ilustradas.

#### 4.6.4.3 Distribuições das diferenças de tensões

Com os valores absolutos das retardações holográficas médias,  $\langle \mathfrak{R}_j \rangle = \langle |(\phi_v - \phi_h)_j| \rangle / 2\pi$ , das regiões selecionadas dos mapas de diferenças de fase das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, os parâmetros holográficos  $\mathfrak{C}$ , da Tabela 4.11,  $\nu$ , da Tabela 4.13, e a Expressão (2.56), calculou-se os valores médios das diferenças de tensões,  $\langle |(\sigma_v - \sigma_h)_j| \rangle$ .

Os gráficos da Figura 4.20 apresentam as distribuições dessas diferenças de tensões em função de cada pixel crescente ao longo das linhas médias verticais entre duas franjas escuras.

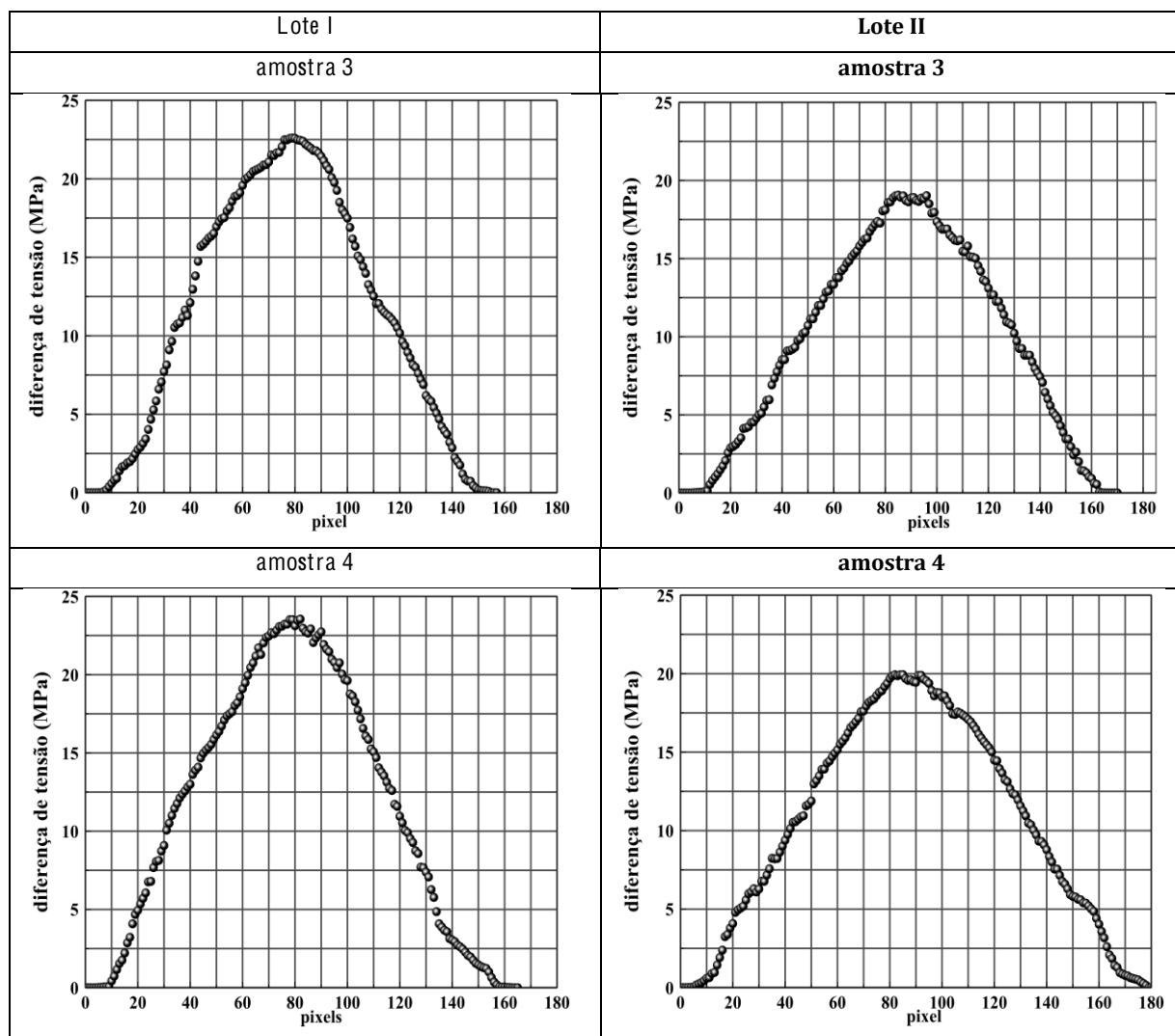


Figura 4.20 - Diferenças de tensões médias  $\langle |\sigma_v - \sigma_h| \rangle$  versus pixels das regiões entre franjas escuras, dos mapas de fase desmodulados das amostras 3 e 4 dos lotes I e II, sob esforços em massa de 600g.

## 5 Aplicação do método holográfico

Este capítulo apresenta uma aplicação do método proposto nesse trabalho, cujo protótipo é um parafuso metálico acoplado a um paralelepípedo de resina fotoelástica transparente. O objetivo foi determinar a distribuição das diferenças de tensões do estado plano em uma linha vertical média passando entre duas franjas escuras para verificar a aplicabilidade do método.

### 5.1 Amostras

A Figura 5.1 apresenta as fotografias das amostras fotoelásticas utilizadas nessa aplicação.

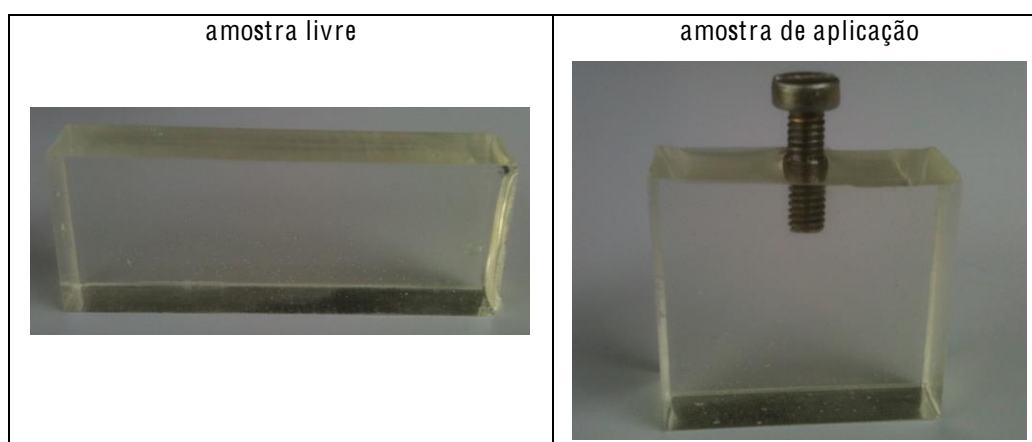


Figura 5.1 - Amostras fotoelásticas para a aplicação. À esquerda, uma amostra fotoelástica livre de peça metálica para determinação dos parâmetros holográficos. À direita, um parafuso metálico acoplado em um paralelepípedo de resina fotoelástica para determinação da distribuição das diferenças de tensões do estado plano em uma linha média vertical entre duas franjas escuras.

As duas amostras foram confeccionadas no mesmo lote e possuem a mesma concentração de resina epóxi. A amostra livre foi utilizada para determinação dos parâmetros holográficos e a amostra acoplada com um parafuso metálico foi utilizada para a determinação da distribuição das diferenças de tensões do estado plano em uma linha média de uma região selecionada entre duas franjas escuras.

### 5.2 Parâmetros geométricos das amostras e esforços externos

A Tabela 5.1 mostra os valores dos parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas apresentadas na Figura 5.1.

Tabela 5.1 - Parâmetros geométricos das amostras fotoelásticas para a aplicação.

parâmetros	(cm)	
	amostra livre	amostra com peça metálica
$l_h$ (comprimento horizontal)	$(5,580 \pm 0,004)$	$(3,018 \pm 0,002)$
$l_v$ (comprimento vertical)	$(2,061 \pm 0,001)$	$(2,609 \pm 0,001)$
$e$ (espessura)	$(1,039 \pm 0,001)$	$(1,049 \pm 0,001)$

Para determinação do módulo de elasticidade,  $\mathcal{E}$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ , a amostra livre foi submetida a uma sequência de esforços totais estáticos e homogêneos, na direção vertical segundo o esquema da Figura 3.5, com magnitudes apresentadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Esforços externos aplicados sobre a amostra fotoelástica livre.

tensão externa vertical (MPa)
amostra livre
$(3,77 \pm 0,07) \cdot 10^{-1}$
$(5,02 \pm 0,09) \cdot 10^{-1}$
$(6,28 \pm 0,11) \cdot 10^{-1}$
$(7,53 \pm 0,14) \cdot 10^{-1}$
$(8,79 \pm 0,16) \cdot 10^{-1}$
$1,00 \pm 0,02$
$1,13 \pm 0,02$
$1,26 \pm 0,02$
$1,38 \pm 0,03$
$1,51 \pm 0,03$

As massas utilizadas incluíram a massa do conjunto base de cargas, haste principal móvel e base de contato com a amostra, de valor  $m = (1,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg, mostrados na Figura 3.4. Os valores das forças foram calculados pelos produtos entre as massas e a aceleração da gravidade local de São Paulo, latitude média  $23^\circ$  e altitude média aproximadamente 760 m do nível do mar,  $g = (9,79 \pm 0,01) \text{ m/s}^2$  [69].

A amostra com peça metálica foi submetida aos esforços em massa de  $(1,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg,  $(3,00 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg e  $(6,00 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$  kg. As magnitudes das tensões são apresentadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Esforços externos aplicados sobre a amostra de aplicação.

tensão externa vertical (MPa)
amostra de aplicação
$(1,39 \pm 0,07) \cdot 10^{-1}$
$(2,78 \pm 0,08) \cdot 10^{-1}$
$(5,56 \pm 0,12) \cdot 10^{-1}$



## 5.3 Parâmetros holográficos

Utilizando a configuração holográfica com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas, devidamente calibrada, e a amostra fotoelástica livre, mostrada na Figura 5.1, submetida aos esforços externos da Tabela 5.2, foram obtidos os hologramas totais. As reconstruções virtuais de fase foram realizadas com um programa computacional cujo algoritmo foi fundamentado no método de Fresnel. Para determinação dos parâmetros holográficos, utilizou-se esses mapas de fases e um método de ajuste de funções por mínimos quadrados.

### 5.3.1 Hogramas

A amostra fotoelástica livre foi submetida à sequência de esforços externos da Tabela 5.2 em dois processos: compressão e descompressão. A Figura 5.2 apresenta dois hologramas totais obtidos durante o ensaio de compressão com a configuração holográfica de duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas, devidamente calibrada.

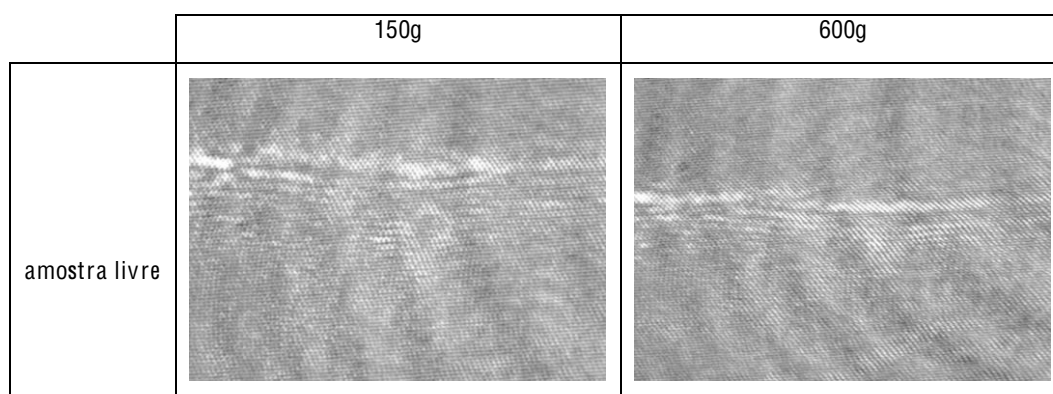


Figura 5.2 - Dois hologramas totais da amostra fotoelástica livre submetida aos esforços elásticos externos 150g e 600g durante o ensaio de compressão. Intensidade: 0 (região mais escura) e 255 (região mais clara).

Os demais hologramas foram armazenados em arquivos para as reconstruções digitais pelo método numérico.

### 5.3.2 Mapas de fase

As reconstruções virtuais de fase, vertical e horizontal, foram realizadas separadamente a partir dos hologramas totais. Para diminuir os ruídos produzidos pelo sistema, as imagens de fase foram subtraídas das respectivas reconstruções virtuais de fase dos hologramas de referências do espaço livre.

A Figura 5.3 apresenta os mapas das diferenças de fase entre as componentes vertical e horizontal, obtidas dos hologramas da Figura 5.2. Os mapas de fase apresentados já estão subtraídos dos respectivos mapas das fases de referência. Os retângulos desenhados em cada mapa representam as regiões selecionadas para os cálculos das médias de fases entre franjas escuras.

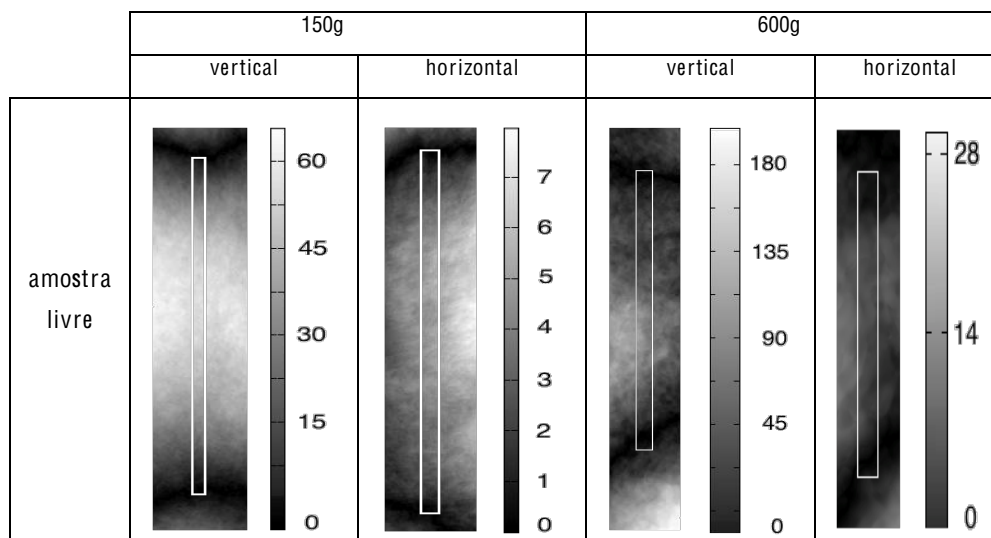


Figura 5.3 - Mapas de fases das componentes vertical e horizontal da amostra livre submetida aos esforços elásticos externos em massas de 150g e 600g, durante o ensaio de compressão. Os retângulos representam as regiões selecionadas para determinação das fases médias entre franjas escuras.

Com todos os mapas de fases verticais, incluindo os demais mapas obtidos de todos os hologramas da amostra livre, foram calculadas as deformações relativas verticais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ . Com todos os mapas de fases horizontais, foram calculadas as deformações relativas horizontais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ .

### 5.3.3 Módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson holográficos

Com as relações entre tensões externas da Tabela 5.2,  $\sigma_{\text{externa}}$ , e os valores das deformações relativas verticais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , foram determinados os módulos de elasticidades da amostra livre.

A Figura 5.4 apresenta os gráficos dessas relações durante os processos de compressão e descompressão.

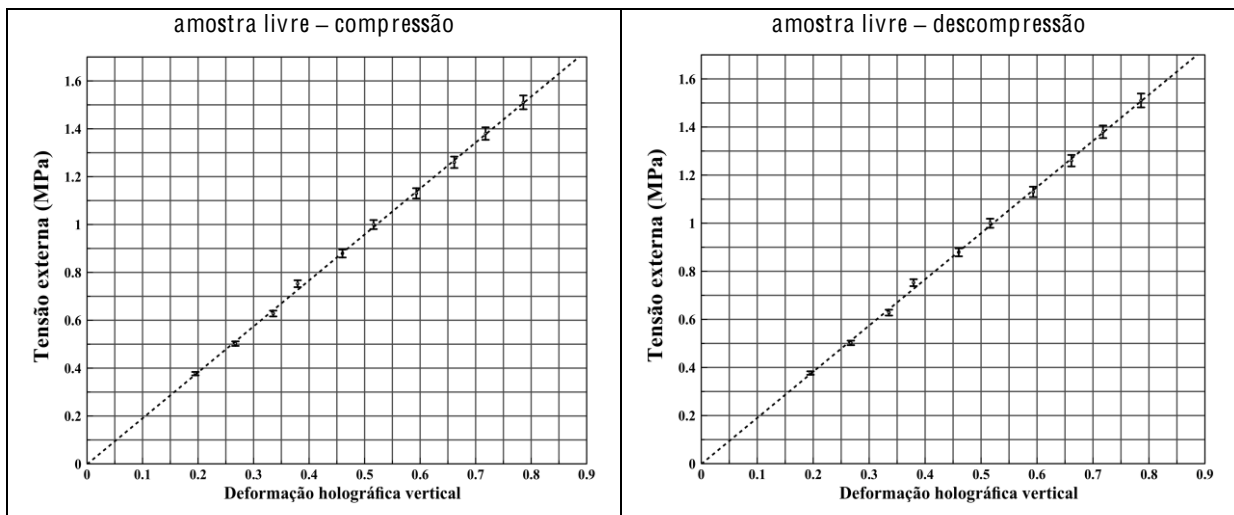


Figura 5.4 - Tensão externa *versus* deformação holográfica vertical para os ensaios de compressão e decompressão na amostra livre submetida aos esforços externos da Tabela 5.2. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais.

Utilizando o método dos mínimos quadrados obteve-se os ajustes das funções para a compressão e a decompressão. Os valores dos módulos de elasticidade,  $\mathcal{E}$ , foram obtidos a partir dessas funções e o valor final,  $\langle \mathcal{E} \rangle$ , resultou da média entre os valores de compressão e decompressão.

Com as relações entre as deformações relativas horizontais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ , e verticais,  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ , foram determinados os coeficientes de Poisson da amostra livre. A Figura 5.5 apresenta os gráficos dessas relações durante os processos de compressão e decompressão.

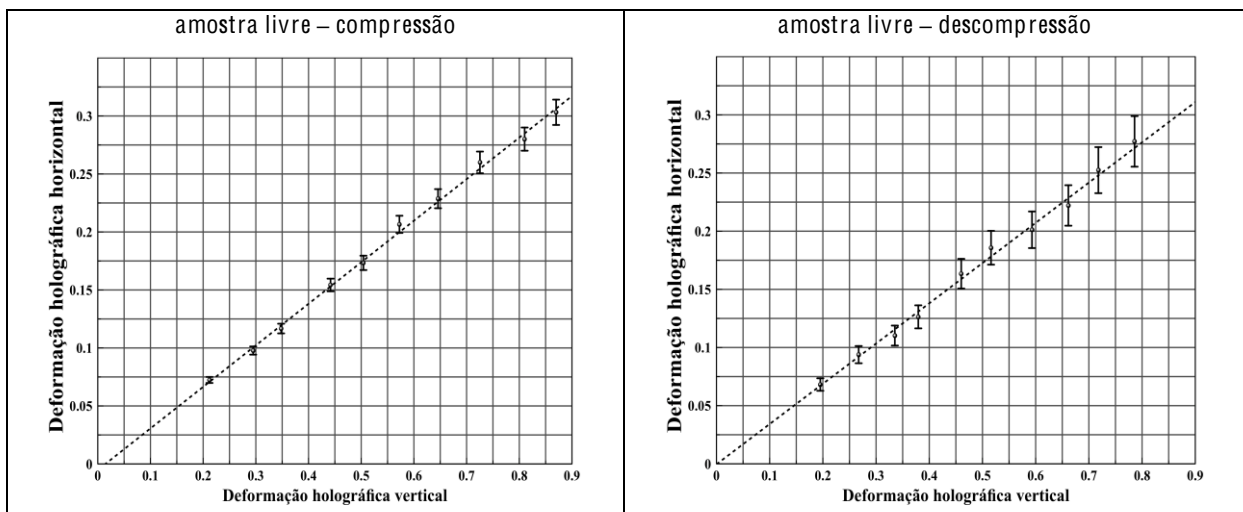


Figura 5.5 - Deformação holográfica relativa horizontal ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_h}$ ) *versus* deformação holográfica relativa vertical ( $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_v}$ ) para os processos de compressão e decompressão na amostra livre submetida aos esforços externos da Tabela 5.2. As linhas tracejadas são guias para observações das distribuições dos valores experimentais.

Utilizando o método dos mínimos quadrados obteve-se os ajustes das funções para a compressão e a descompressão. Os valores dos coeficientes de Poisson,  $\nu$ , foram obtidos a partir dessas funções e os valor final,  $\langle \nu \rangle$ , resultou da média entre os valores de compressão e descompressão.

A Tabela 5.4 apresenta as médias dos valores encontrados para o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson da amostra livre.

Tabela 5.4 - Módulo de elasticidade holográfico e coeficiente de Poisson para a amostra livre.

	$\langle E \rangle$ (MPa)	$\langle \nu \rangle$ ( $10^{-1}$ )
amostra livre	$1,816 \pm 0,035$	$3,511 \pm 0,011$

Esses resultados foram utilizados nas determinações das distribuições das diferenças de tensões.

## 5.4 Distribuições holográficas de tensões

### 5.4.1 Hogramas

Com a configuração holográfica devidamente calibrada foram obtidos os hogramas totais da amostra de aplicação com um parafuso acoplado em um paralelepípedo de resina epóxi, como apresentada na Figura 5.1, sob os esforços externos em massas de 150g, 300g e 600g. Os hogramas de referências foram produzidos com o espaço livre.

A Figura 5.6 apresenta esses hogramas.

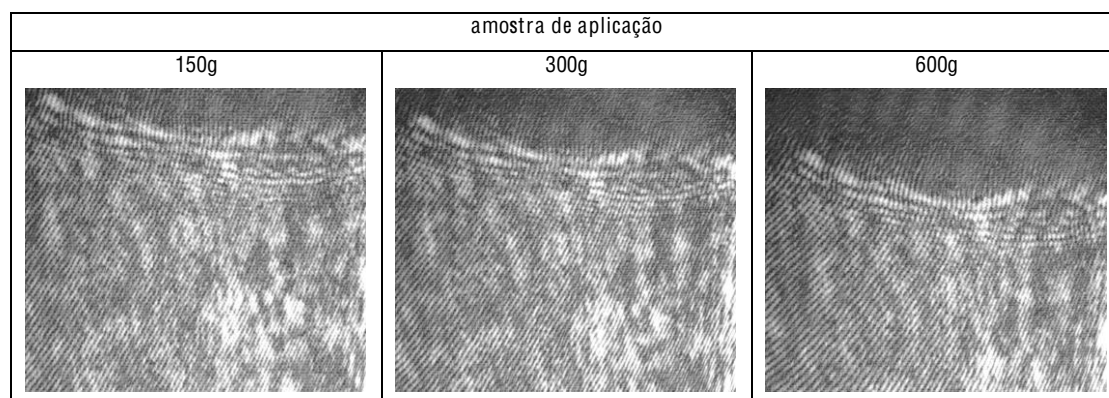


Figura 5.6 - Hogramas totais da amostra de aplicação submetida aos esforços elásticos externos de 150g, 300g e 600 g. Os valores de intensidade variam de 0 (mais escuro) a 255 (mais claro).

### 5.4.2 Mapas e diferenças de fase

As reconstruções virtuais de fase, vertical e horizontal, foram realizadas separadamente a partir dos hologramas totais obtidos na configuração holográfica devidamente calibrada. Para diminuir os ruídos produzidos pelo sistema, as imagens de fase foram subtraídas das respectivas reconstruções virtuais de fase a partir dos hologramas de referências. A Figura 5.7 mostra os mapas das diferenças entre as fases vertical e horizontal da amostra de aplicação nos três esforços aplicados e mostra os trechos (retângulos) selecionados para estudo das distribuições de tensões.

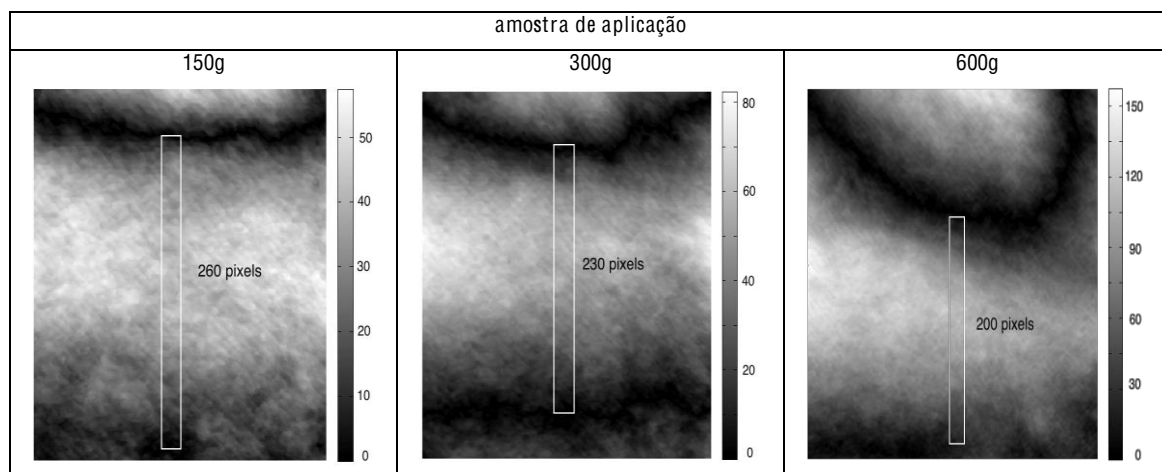


Figura 5.7 - Mapas das diferenças entre as fases verticais e horizontais da amostra de aplicação submetida aos esforços elásticos externos de 150g, 300g e 600 g. Os retângulos representam os trechos selecionados para determinação das diferenças médias de fases entre franjas escuras.

Esses mapas foram utilizados nas determinações dos valores absolutos médios das diferenças de fases,  $\langle |(\phi_v - \phi_h)_j| \rangle$ , ao longo das regiões entre franjas escuras ilustradas. Os resultados foram armazenados em tabelas e utilizados para os cálculos das diferenças de tensões.

### 5.4.3 Distribuições de tensões

Utilizando os mapas de diferenças de fases desmodulados da amostra de aplicação submetida aos esforços externos em massas de 150g, 300g e 600g, foram calculados os valores absolutos das retardações holográficas médias,  $\langle \mathfrak{R}_j \rangle = \langle |(\phi_v - \phi_h)_j| \rangle / 2\pi$ , das regiões selecionadas.

Com esses valores, os parâmetros holográficos  $\mathcal{E}$  e  $\nu$ , da Tabela 5.3, e a Expressão (2.56), calculou-se os módulos das diferenças de tensões médias,  $\langle |(\sigma_v - \sigma_h)_j| \rangle$ .

Os gráficos da Figura 5.8 apresentam as distribuições dessas diferenças de tensões ao longo das linhas verticais médias entre franjas escuras.

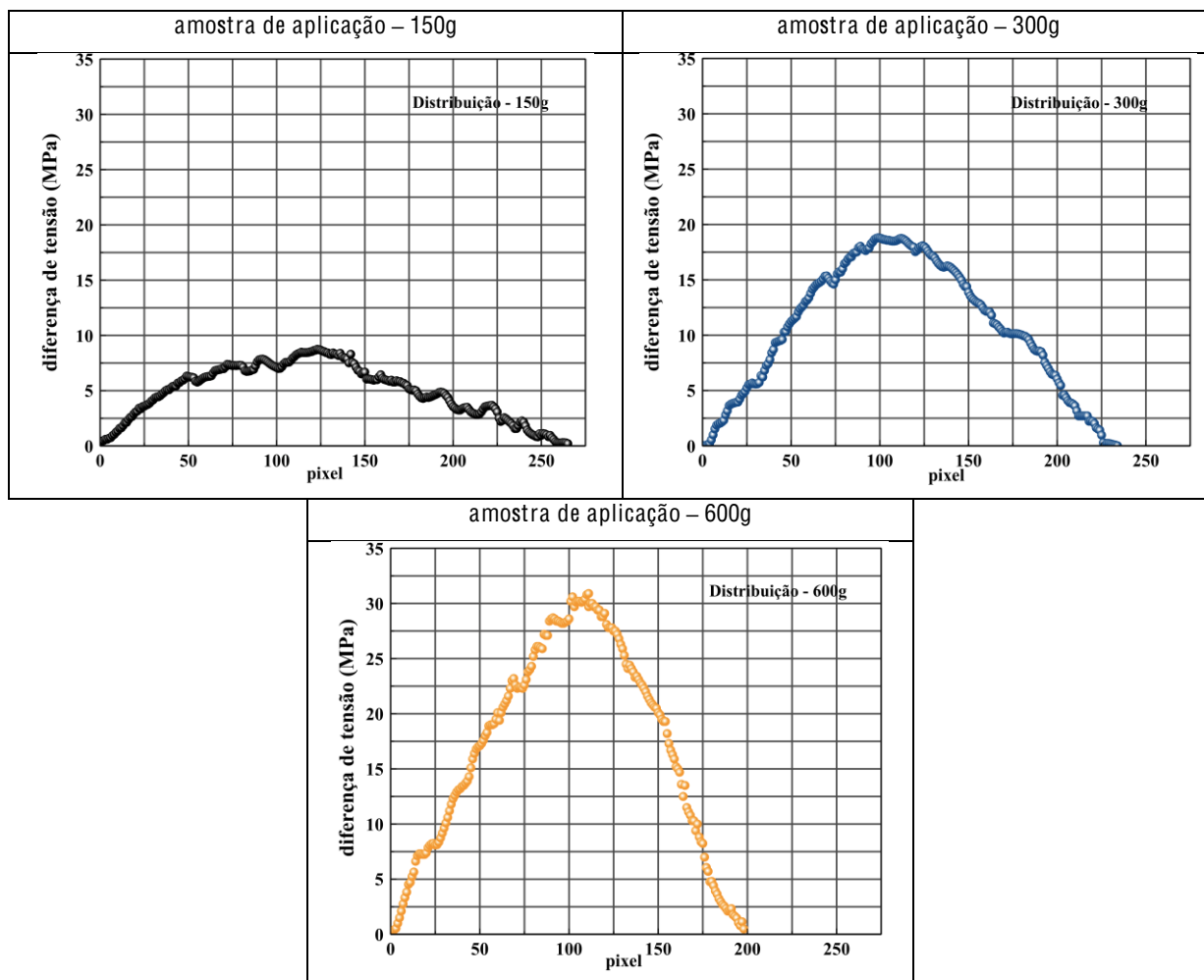


Figura 5.8 - Diferenças de tensões *versus* pixels das linhas verticais médias entre ordens de franjas escuras a partir dos mapas de fases desmodulados da amostra de aplicação sob esforços externos em massas de 150g, 300g e 600g.

## 6 Discussões

Este capítulo apresenta as discussões comparativas sobre os resultados obtidos com o método proposto neste trabalho. Os tópicos dessas discussões são: calibração da configuração holográfica; comparações entre os parâmetros holográficos e fotoelásticos e entre as distribuições de tensões obtidas com os métodos holográfico, fotoelástico e teórico; e o comportamento do método proposto com a aplicação.

### 6.1 Calibração da configuração holográfica

Os valores angulares  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , entre as ondas objeto e referência 1 (horizontal) e as ondas objeto e referência 2 (vertical), respectivamente, foram selecionados em torno de  $\theta \cong 3,0^\circ < \theta_{\text{Máx}} = 3,4^\circ$ . Isso ajudou a garantir um satisfatório duplo padrão de interferências e também uma boa definição das ordens de difração durante a reconstrução digital pelo programa computacional fundamentado no método de Fresnel.

A Figura 6.1 mostra um exemplo do padrão duplo de interferências, que é identificado pelas linhas diagonais cruzadas. Os padrões representam os hologramas com polarizações vertical e horizontal.

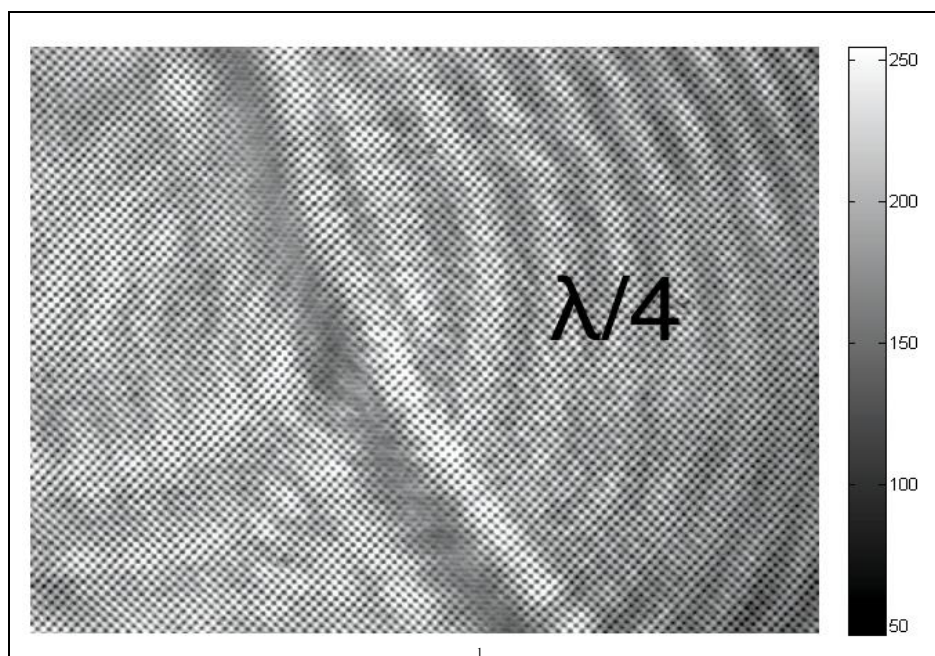


Figura 6.1 - Duplo padrão de interferências (hologramas com polarizações vertical e horizontal) gerado pelo sistema holográfico com duas ondas de referências polarizadas ortogonalmente, devidamente calibrado. A região à direita da linha escura é a lâmina de quarto de onda,  $\lambda/4$ , e a região à esquerda o espaço livre.

Qualitativamente foi possível observar os seguintes efeitos associados à polarização: intensidade máxima para fase vertical e mínima para fase horizontal em ângulo de 0 graus da lâmina de atraso, Figura 6.2(a); intensidades iguais para fases vertical e horizontal em ângulo de 45 graus, Figura 6.2(b); intensidade mínima para fase vertical e máxima para fase horizontal em ângulo de 90 graus, Figura 6.2(c); e intensidades iguais para fases vertical e horizontal, em ângulo de 135 graus, Figura 6.2(d). Esses resultados são previstos pela teoria de polarização da luz [1][22].

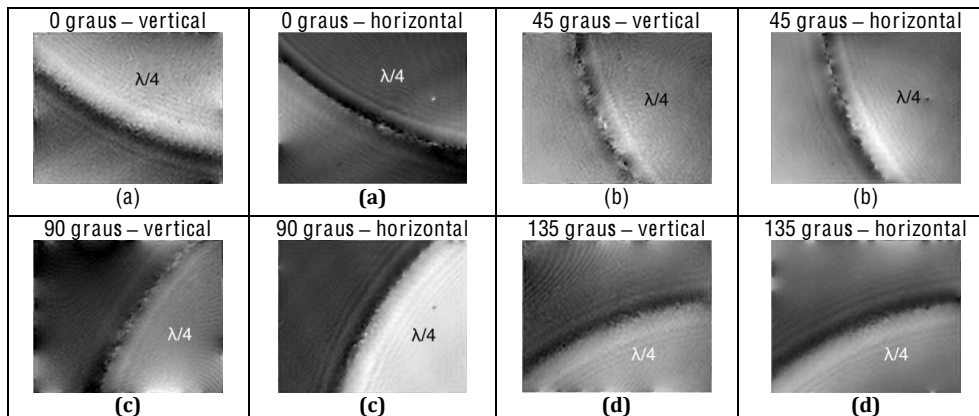


Figura 6.2 - Mapas de fase das componentes horizontal e vertical para a lâmina de quarto de onda com as orientações  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ . Intensidades: (a) máxima para fase vertical e mínima para fase horizontal em ângulo de 0 graus; (b) iguais para fases vertical e horizontal em ângulo de 45 graus; (c) mínima para fase vertical e máxima para fase horizontal em ângulo de 90 graus; e (d) iguais para fases vertical e horizontal em ângulo de 135 graus. Valores de fase:  $-2\pi$  (mais escuro) a  $2\pi$  (mais claro).

A Figura 6.3 apresenta a comparação quantitativa entre a curva teórica, linha contínua construída a partir da Expressão (2.52), levando em consideração a defasagem de  $\pi/4$ , com os valores experimentais (círculos azuis), obtidos a partir dos resultados apresentados na Subseção 4.6.2.3.

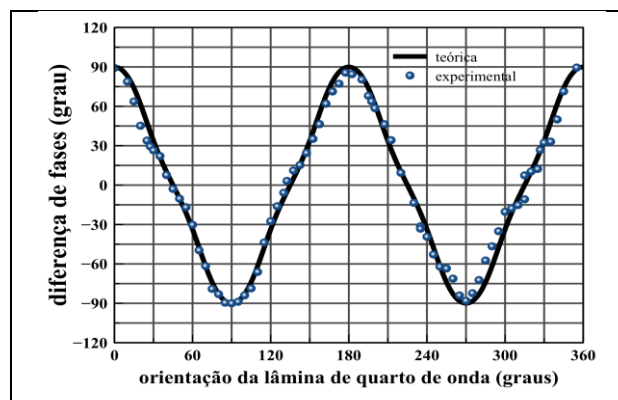


Figura 6.3 - Comparação gráfica entre valores experimentais (círculos azuis) e curva teórica (linha contínua preta) das diferenças de fases *versus* orientação da lâmina de quarto de onda, entre 0 e 360 graus.



Uma possível fonte de erros está no sistema de rotação da lâmina de onda. A precisão da escala analógica de medida angular foi de  $1^\circ$ , provocando uma incerteza de  $\pm 0,5^\circ$ . Associando esse valor ao erro da leitura, realizada visualmente sem lupa, o valor final da incerteza pode ser estimado em  $\pm 1^\circ$ . Outra fonte de erros está no alinhamento dos polarizadores utilizados no sistema, que também provocam incertezas da ordem de  $\pm 1^\circ$ . Os valores experimentais foram corrigidos segundo essas fontes de erro.

A Figura 6.4 apresenta um resultado, extraído da literatura [22], com técnica holográfica muito similar à utilizada nesse trabalho, em que a calibração também é realizada com lâminas de quarto de onda girando entre os ângulos 0 e  $180^\circ$ .

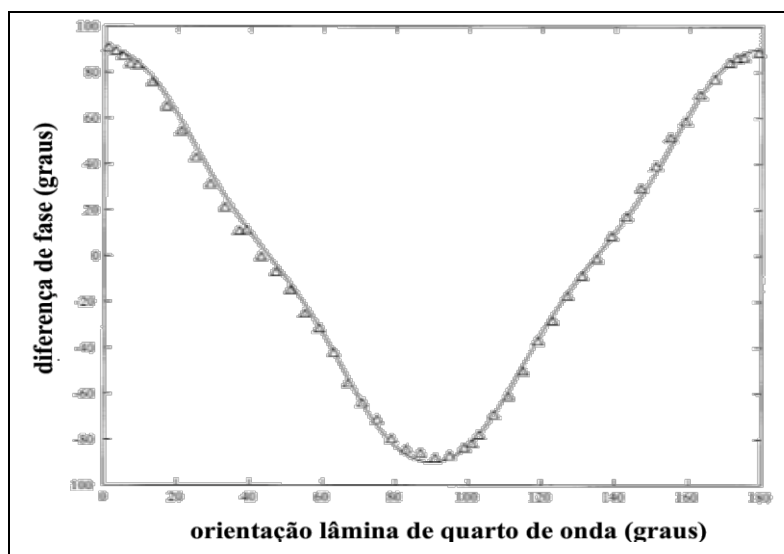


Figura 6.4 - Comparação entre valores experimentais (triângulos) e curva teórica (linha contínua) das diferenças de fases *versus* orientação da lâmina de quarto de onda, entre 0 e  $180^\circ$ . Figura modificada da Literatura [22].

## 6.2 Parâmetros holográficos, mecânicos e fotoelásticos

Nas determinações dos módulos de elasticidade, tanto em Elasticidade Mecânica quanto em Holografia, utilizou-se o método de ajuste de funções por mínimos quadrados. Escolheu-se a função de terceiro grau para o ajuste. Os testes de qui-quadrados forneceram em média confiabilidade entre 75 e 90%.

A verificação para ordens superiores a partir das funções de terceiro grau produziram resultados percentuais abaixo das incertezas. Os parâmetros da variável independente da função de ajuste, elevada à primeira potência, com suas devidas incertezas, produziram os valores dos módulos de elasticidades.

Os demais parâmetros da função de ajuste mostraram seus valores muito pequenos quando comparados com os módulos de elasticidade, em média 0,2%, e por isso foram desprezados. Assim, a função que estabelece a relação entre a tensão aplicada e a deformação do material é de primeiro grau e seu coeficiente angular é o módulo de elasticidade. A Tabela 6.1 reúne os resultados médios dos módulos de elasticidades obtidos por Holografia e por Elasticidade Mecânica.

Tabela 6.1 - Módulos de elasticidade holográficos e mecânicos das amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

	amostra	módulo de elasticidade (MPa)	
		Lote I	Lote II
Holografia	1	$1,582 \pm 0,021$	$1,312 \pm 0,017$
	2	$1,595 \pm 0,024$	$1,328 \pm 0,018$
Elasticidade Mecânica	1	$(3,31 \pm 0,10) \cdot 10$	$(2,79 \pm 0,07) \cdot 10$
	2	$(3,38 \pm 0,13) \cdot 10$	$(2,93 \pm 0,09) \cdot 10$

Tanto na Elasticidade Mecânica quanto na Holografia, separadamente por lote, os valores médios dos módulos de elasticidade mostraram-se muito próximos. No entanto, comparando os resultados obtidos na Elasticidade Mecânica e na Holografia, nota-se que existe um fator que diferencia ambos os módulos de elasticidade. A Tabela 6.2 mostra os resultados obtidos para esse fator, pelas relações entre  $\mathcal{E}$  e E.

Tabela 6.2 - Relações entre  $\mathcal{E}$  e E das amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

amostra	a ( $10^{-2}$ )	
	lote I	lote II
1	$4,78 \pm 0,16$	$4,70 \pm 0,13$
2	$4,72 \pm 0,20$	$4,53 \pm 0,15$

Considerando as incertezas, os valores da Tabela 6.2 são praticamente iguais para todas as amostras 1 e 2 em cada lote. A diferença relativa é aproximadamente 1,67% entre as amostras do lote I e 4,03% entre as amostras do lote II. A diferença relativa entre as amostras 1 de ambos os lotes é aproximadamente 1,26% e entre as amostras 2 de ambos os lotes 3,62%. A diferença média relativa entre todos os resultados é 2,65%. O valor médio da constante a é  $\langle a \rangle = (4,71 \pm 0,32) \cdot 10^{-2}$ .

Nas determinações dos coeficientes de Poisson, tanto em Elasticidade Mecânica quanto em Holografia, utilizou-se também o método de ajuste de funções por mínimos quadrados com uma função geral de terceiro grau. Os testes de qui-quadrados forneceram em média confiabilidade entre 50 e 75%.

A verificação para ordens superiores a partir das funções de terceiro grau produziram também resultados percentuais abaixo das incertezas e os parâmetros da variável independente elevada à primeira potência, com suas devidas incertezas, produziram os valores dos coeficientes de Poisson.

Os demais parâmetros mostraram seus valores muito pequenos quando comparados a esses coeficientes, em média 0,15%, e por isso foram desprezados. Assim, a função que estabelece a relação entre as deformações horizontal e vertical do material é de primeiro grau e seu coeficiente angular é o coeficiente de Poisson.

A Tabela 6.3 reúne os resultados médios dos coeficientes de Poisson obtidos por Holografia e por Elasticidade Mecânica.

Tabela 6.3 - Coeficientes de Poisson holográficos e mecânicos das amostras 1 e 2 dos lotes I e II.

	amostra	Coeficiente de Poisson ( $10^{-1}$ )	
		Lote I	Lote II
Holografia	1	$3,782 \pm 0,017$	$3,797 \pm 0,020$
	2	$3,663 \pm 0,014$	$3,672 \pm 0,015$
Elasticidade Mecânica	1	$3,891 \pm 0,073$	$3,922 \pm 0,087$
	2	$3,754 \pm 0,061$	$3,876 \pm 0,068$

Comparando esses resultados para as amostras fotoelásticas 1 e 2, de ambos os lotes, levando-se em consideração suas incertezas, observa-se que existe uma proximidade entre os valores dos coeficientes de Poisson tanto em Elasticidade Mecânica quanto em Holografia. As diferenças percentuais médias relativas entre os valores são: 2,97% para as amostras do lote I e 3,24% para as amostras do lote II.

A Tabela 6.4 reúne os valores experimentais médios de franjas obtidos pelos métodos de Holografia e Fotoelasticidade para as amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

Tabela 6.4 - Valores de franjas holográficos e fotoelásticos das amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

	amostra	Valor de Franja ( $10^5 \text{ N/m}$ )	
		Lote I	Lote II
Holografia	3	$2,466 \pm 0,035$	$2,126 \pm 0,030$
	4	$1,197 \pm 0,019$	$1,072 \pm 0,014$
Fotoelasticidade	3	$2,576 \pm 0,087$	$2,106 \pm 0,071$
	4	$1,189 \pm 0,050$	$1,056 \pm 0,037$

A diferença relativa média entre os valores experimentais de franjas holográficos,  $f_h$ , e fotoelásticos,  $f_\sigma$ , é 1,23%.

A Tabela 6.5 reúne os resultados das dispersões ópticas obtidas em Holografia e Fotoelasticidade para as amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

Tabela 6.5 - Dispersões holográficas e fotoelásticas das amostras 3 e 4 dos lotes I e II.

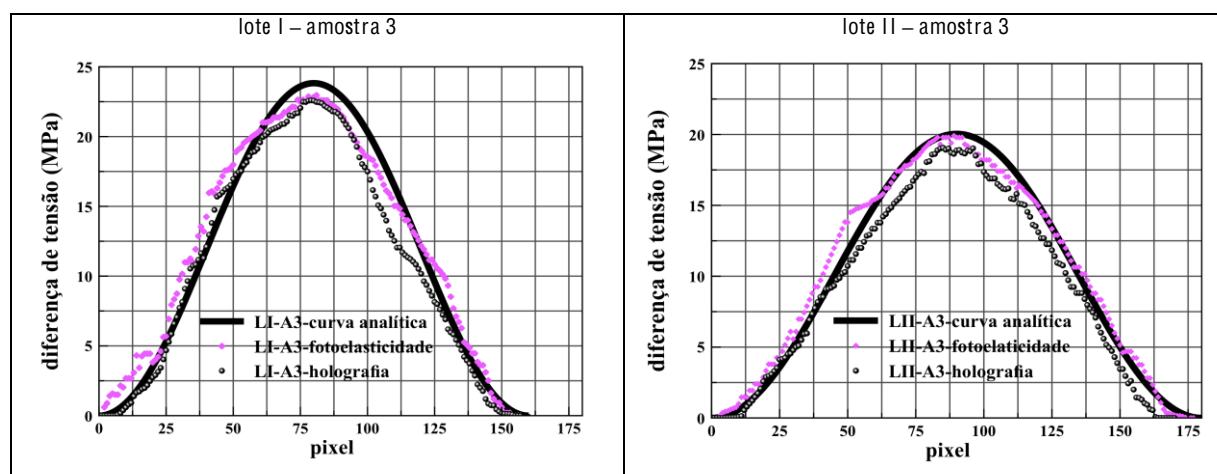
	amostra	dispersões ópticas ( $10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ )	
		Lote I	Lote II
Holografia	3	$2,556 \pm 0,036$	$2,977 \pm 0,042$
	4	$5,285 \pm 0,083$	$5,906 \pm 0,084$
Fotoelasticidade	3	$2,58 \pm 0,09$	$3,00 \pm 0,10$
	4	$5,32 \pm 0,22$	$5,99 \pm 0,21$

As diferenças relativas entre as dispersões holográfica e fotoelástica para o lote I são: 0,93% para a amostra 3 e 0,66% para a amostra 4. Para o lote II são: 0,77% para a amostra 3 e 1,4% para a amostra 4. As diferenças entre as amostras do mesmo lote são devido à dependência da dispersão óptica com o valor de franjas, que depende da espessura da amostra.

### 6.3 Distribuições de tensões

Os gráficos da Figura 6.5 apresentam as comparações entre as distribuições das diferenças de tensões para as amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lotes I e II.

A linha contínua preta representa a curva teórica obtida pelo método analítico de Elementos Finitos associado à Fotoelasticidade. Os losangos (lilás) representam a distribuição experimental obtida pelo método da fotoelasticidade RGB e os pontos experimentais pretos representam a distribuição experimental obtida pelo método holográfico proposto nesse trabalho.



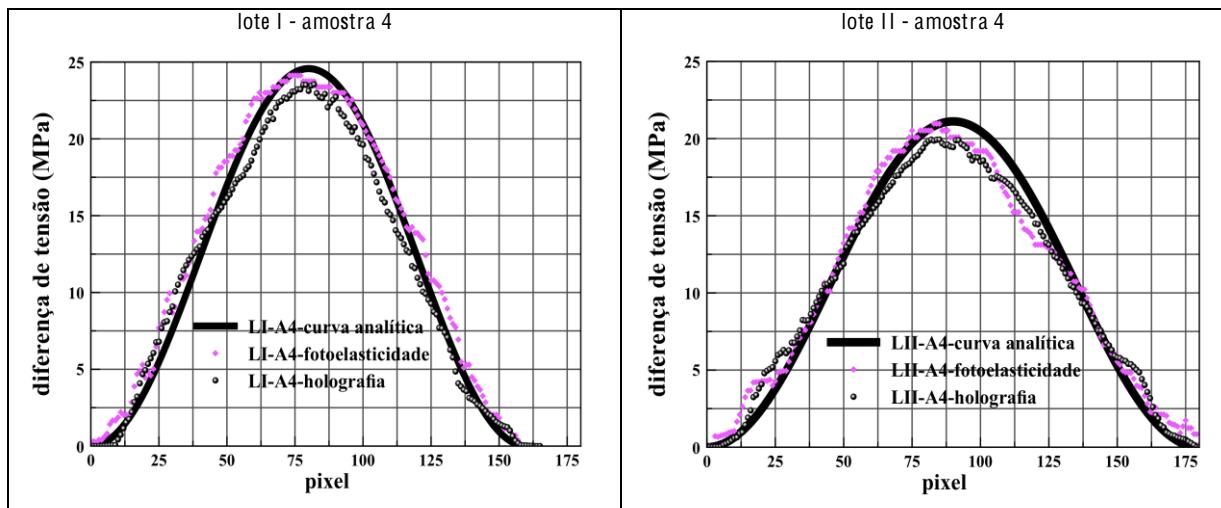


Figura 6.5 - Comparação entre as curvas: teóricas (linhas pretas contínuas), experimentais por fotoelasticidade (losangos lilás) e experimentais por holografia (pontos pretos), em função de cada pixel crescente ao longo das linhas verticais médias entre duas franjas escuras dos mapas de diferenças de fases das amostras fotoelásticas 3 e 4 dos lotes I e II, sob a ação do esforço externo em massa de 600g.

As distribuições de tensões das amostras do lote II apresentam picos menores e mais espalhados em relação às distribuições de tensões das amostras do lote I. As amostras do lote II são menos rígidas e sofrem maior deformação vertical, o que ocasiona em uma diminuição no módulo de elasticidade, já que a tensão externa aplicada é a mesma. As pequenas diferenças entre os coeficientes de Poisson devido as deformações horizontais em relação às verticais não são suficientes para compensar essa perda. Isso resulta em um espalhamento maior das tensões ao longo da linha vertical, provocando uma diminuição do pico nas distribuições.

A Tabela 6.6 apresenta as diferenças percentuais das diferenças de tensões médias entre as distribuições holográficas e fotoelásticas em relação às distribuições teóricas.

Tabela 6.6 - Diferenças percentuais entre distribuições experimentais *versus* teóricas.

	amostra	Holografia	Fotoelasticidade
Lote I	3	6,4%	6,8%
	4	4,1%	12,0%
Lote II	3	8,4%	22,3%
	4	11,4%	14,9%

A média das diferenças relativas percentuais entre as distribuições experimentais em relação às teóricas são: 7,6% para a Holografia e 14,0% para a Fotoelasticidade.

A Tabela 6.7 apresenta as diferenças percentuais das diferenças de tensões médias entre as distribuições holográficas em relação à distribuições fotoelásticas.

Tabela 6.7 - Diferenças percentuais entre distribuições holográficas *versus* fotoelásticas.

	amostra	Holografia
Lote I	3	12,4%
	4	8,2%
Lote II	3	15,1%
	4	4,0%

As médias percentuais entre a Holografia e a Fotoelasticidade por amostra são: 6,1% para a amostra 4 e 13,8% para a amostra 3. Isso indica nessa amostragem uma tendência de proximidade maior entre a Holografia e a Fotoelasticidade quando as amostras têm espessuras menores e possuem rigidez menor, já que nessas condições as franjas são mais acentuadas para esforços externos medianos, no caso 600g em média. É importante destacar que para cargas em massa acima de 1500g, as amostras utilizadas saíram do regime elástico para o regime plástico.

O gráfico da Figura 6.6 mostra uma comparação entre as distribuições analítica e experimental em Fotoelasticidade, extraído da literatura [58], que utilizou uma resina fotoelástica com geometria circular e rigidez levemente maior que as amostras desse trabalho.

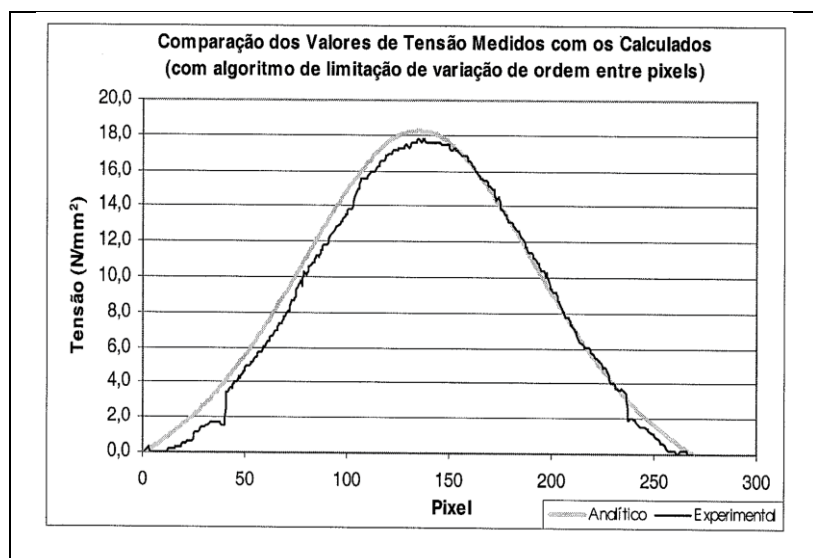


Figura 6.6 - Comparação entre valores experimentais (linha escura) e curva teórica (linha clara) das diferenças de tensões do estado plano de uma amostra fotoelástica com geometria circular e alta rigidez. Figura modificada da Literatura [58].

Na Fotoelasticidade, as intensidades luminosas, resultantes de um padrão de franjas, dependem de características dos componentes da configuração experimental como: transmitância do material, desconsiderando efeitos de polarização; distribuição espectral de radiação da fonte luminosa; fator de conversão do sinal luminoso em sinal elétrico da câmera e efeito de birrefringência temporária.

Na holografia digital, os efeitos listados anteriormente são menos relevantes, pois as subtrações efetuadas durante as reconstruções das fases eliminam grande parte desses possíveis ruídos existentes no sistema e, também, porque as retardações ópticas relativas são obtidas diretamente das diferenças de fases.

## 6.4 Aplicação do método proposto

Os gráficos da Figura 6.7 apresentam as distribuições das diferenças de tensões ao longo de linhas médias verticais entre duas franjas escuras obtidas pelo método holográfico proposto neste trabalho. A amostra fotoelástica utilizada foi a de aplicação submetida a três esforços externos em massas: 150g, 300g e 600g. Os pontos experimentais escuros representam a distribuição com o esforço em massa de 150g. O pontos experimentais azuis representam a distribuição com o esforço em massa de 300g. O pontos experimentais laranjas representam a distribuição com o esforço em massa de 600g.

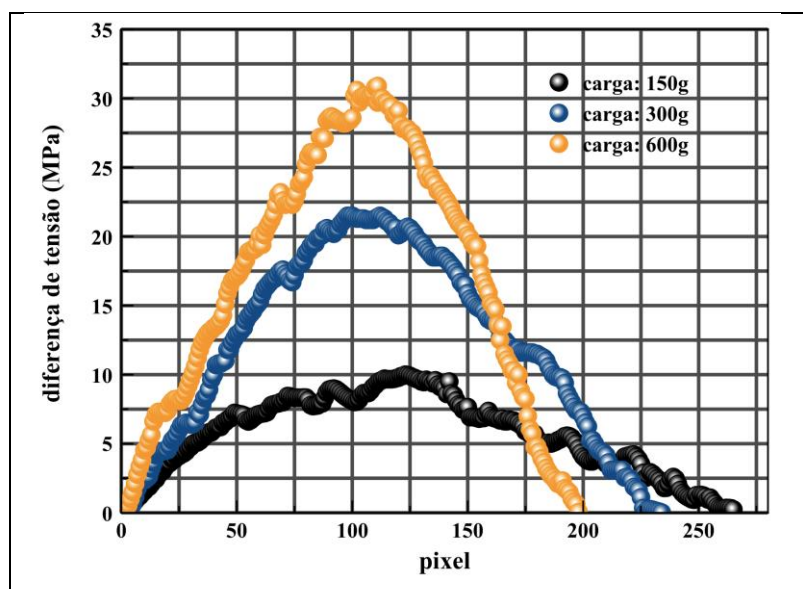


Figura 6.7 - Comparação entre valores experimentais obtidos com o método holográfico aplicado a uma amostra com peça de metal acoplada a um paralelepípedo de resina epóxi submetida aos esforços em massas: 150g (pontos escuros), 300g (pontos azuis) e 600g (pontos laranja).

Na Figura 6.7 nota-se que o pico de diferença de tensões aumenta com o aumento do esforço externo. Os parâmetros holográficos,  $\mathcal{E}$  e  $\nu$ , são os mesmos, já que a amostra utilizada foi a mesma nos três esforços aplicados. Então, a grandeza responsável pelo aumento dos picos é a diferença de fases. Há um aumento nos valores das diferenças de fases entre as franjas escuras, quando o esforço sobre a amostra também aumenta.

Com isso, também há um aumento nas diferenças de tensões, já que essa diferença é proporcional à diferença de fase pela lei óptica da tensão para a holografia, dada pela Expressão (2.62).

Outro fato interessante, observado na Figura 6.7, é que as curvas se estreitam à medida que o esforço externo aumenta. O aumento do esforço externo provoca um aumento das tensões internas, fazendo surgir mais franjas no interior do material, devido à alteração no seu estado de polarização.

Para que haja mais franjas em uma mesma região é necessário que ocorra uma diminuição na distância entre elas. Essa diminuição é observada nos mapas de fases, como mostra a Figura 6.8.

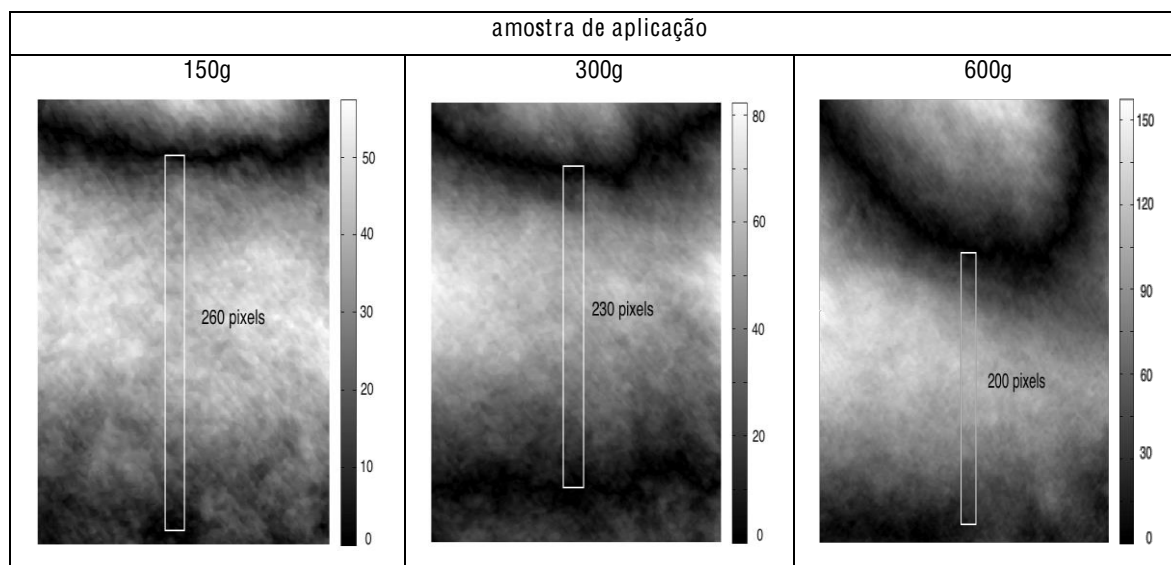


Figura 6.8 - Regiões selecionadas dos mapas de fases reconstruídos a partir dos hologramas gerados com a técnica holográfica com duas ondas de referências ortogonalmente polarizadas. As figuras mostram a diminuição da distância entre as franjas escuras a medida que os esforços aumentam.



## 7 Conclusões e perspectivas

A calibração da configuração holográfica foi fundamental para a verificação de qualidade dos hologramas gerados. As mudanças angulares da lâmina de quarto de onda promoveram os efeitos de polarizações esperados e, apesar das sutis flutuações dos valores experimentais em torno da linha contínua escura na Figura 6.3, existe uma tendência experimental muito forte para a teoria. Esses resultados também concordam com os resultados apresentados na Figura 6.4, extraídos da Literatura [22]. Pode-se, então, afirmar que a configuração holográfica estava confiável e preparada para a realização das medidas com as amostras fotoelásticas.

Os resultados obtidos tanto para os parâmetros mecânicos quanto para os parâmetros holográficos módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, pela análise por método dos mínimos quadrados, confirmaram a lei de Hooke para a Elasticidade Mecânica e também levou, por analogia, a uma lei similar na Holografia, como enunciada na Expressão (2.53). Esses resultados também levaram à conclusão teórica de que os coeficientes de Poisson da Elasticidade Mecânica são iguais aos da Holografia, como mostrou a combinação entre as Expressões (2.54b) e (2.55).

Verificou-se que tanto o módulo de elasticidade quanto o coeficiente de Poisson holográficos, na amostragem do trabalho, são propriedades intrínsecas do material para uma determinada concentração química. Isso possibilitou que os seus respectivos valores pudessem ser utilizados nas amostras 3 e 4 de ambos os lotes para determinações das distribuições de tensões.

Constatou-se, na amostragem desse trabalho, que o fator  $a$  é uma constante do material, já que apresentou valores iguais em todas as relações  $\mathcal{E}/E$ . Isso levou à conclusão teórica das Expressões (2.54a) e (2.54b), que estabelecem, respectivamente, as relações entre os módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson da Holografia e da Elasticidade Mecânica. Os resultados das comparações entre os valores de franjas holográficos,  $f$ , e fotoelásticos,  $f_{\sigma}$ , levaram à conclusão teórica de que  $f$  e  $f_{\sigma}$  são iguais, como enunciado na Expressão (2.61).

As comparações entre os resultados das dispersões ópticas obtidas na Holografia e na Fotoelasticidade mostraram igualdades entre as amostras de mesma espessura de ambos os lotes, o que possibilitou enunciar a lei óptica da tensão para a Holografia através da Expressão (2.62), em analogia à lei óptica da tensão estabelecida pela Fotoelasticidade, confirmando a teoria do método apresentado neste trabalho.

Qualitativamente, os valores experimentais das distribuições de tensões em Holografia tenderam ao mesmo comportamento tanto da curva teórica quanto dos valores experimentais por Fotoelasticidade. Quantitativamente, os resultados das distribuições em Holografia mostraram-se mais precisos do que os resultados de Fotoelasticidade, quando comparados aos resultados teóricos. Os valores apresentados na Tabela 6.6 mostram em todas as amostras uma maior proximidade da distribuição holográfica com a distribuição teórica.

Na comparação dos resultados das distribuições de tensões entre a Holografia e a Fotoelasticidade, os melhores resultados, que mostraram uma aproximação maior entre as distribuições, ocorreram para as amostras com menor espessura e menor rigidez em esforços medianos que não comprometem o regime elástico. Acima de 1500g, nessa amostragem, o regime passa de elástico para plástico e as amostras não puderam mais ser utilizadas para a finalidade deste trabalho, pois apresentaram franjas mesmo sem os esforços externos.

As distribuições de tensões, teóricas e Fotoelásticas, apresentadas na Figura 6.5 mostraram uma boa concordância com a literatura [58] em relação à ordem de grandeza e tessitura, como mostrou a Figura 6.6, o que gerou maior confiabilidade nos resultados para comparação.

Como o método de fotoelasticidade RGB é fundamentado na análise de intensidades das franjas fotoelásticas, a utilização da tabela fotoelástica de referência no cálculo das retardações ópticas relativas se faz importante para ajudar a minimizar ruídos existentes na configuração, mesmo quando a luz é monocromática. No entanto, um inconveniente é que para cada lote de amostra há a necessidade da construção de uma tabela fotoelástica de referência, além do fato de que esta é uma forma bastante indireta de obtenção dos valores. Isso ajuda a explicar os resultados, neste trabalho, menos precisos da Fotoelasticidade em relação à Holografia.

O método holográfico digital apresentado neste trabalho utilizou valores diretos de fases e possibilitou a eliminação de grande parte dos ruídos do sistema pelos cálculos das diferenças de fases, dispensando a utilização de uma tabela de referência. O método também permitiu obter resultados da aplicação em uma amostra fotoelástica com uma peça de metal acoplada. O método mostrou-se rápido, o que permitiu a obtenção de vários resultados com diversos esforços. Esse fato se deu também devido à sua automatização através dos programas computacionais produzidos para a análise dos dados.

Todos esses fatores levam a concluir que o método proposto neste trabalho, com a amostragem utilizada, apresentou uma satisfatória eficiência e aplicabilidade, mas sua principal vantagem está em sua independência, já que necessita somente dos parâmetros holográficos obtidos dos mapas de fases reconstruídos numericamente a partir dos hologramas gerados com o interferômetro com duas ondas de referência ortogonalmente polarizadas.

Com os objetivos específicos cumpridos, o objetivo geral desse trabalho foi atingido para o campo de estudo escolhido e, portanto, pode-se dizer que o método proposto oferece uma alternativa viável no estudo das tensões do estado plano, geradas a partir de esforços externos em materiais fotoelásticos.

Conseqüentemente, foi elaborado um artigo científico que apresenta, para a comunidade científica, as etapas e vantagens do método proposto. A submissão será realizada brevemente na *Optics and Lasers in Engineering Journal* após a finalização da revisão pelo grupo de óptica e sistemas amorfos do IFUSP. Após a conclusão desse primeiro artigo, será encaminhada a confecção de um segundo artigo que trata da aplicação do método com os resultados obtidos no Capítulo 5.

Além disso, o envolvimento deste trabalho com técnicas e métodos de *speckle* e fotoelasticidade auxiliou e auxilia em projetos de iniciação científica da FATEC, Faculdade de Tecnologia, de Itaquera-SP. Dois desses trabalhos de iniciação foram concluídos e publicados em artigos completos na RBFTA, Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada.

O primeiro trabalho utilizou a técnica de Fotoelasticidade por transmissão em polariscópio linear para estudar qualitativamente os efeitos causados por dois corpos de prova, alumínio e cobre, inseridos em amostras fotoelásticas. Sua indexação é: <http://dx.doi.org/10.3895/rbfta.v2n1.2815>. O segundo trabalho utilizou a técnica de speckle por transmissão e o método THSP para estudar os tempos de secagem em algumas amostras líquidas. Sua indexação é: <http://dx.doi.org/10.3895/rbfta.v3n1.3676>.

Há dois outros trabalhos de iniciação científica em andamento, um deles estuda quantitativamente as tensões causadas por corpos de prova, alumínio e cobre, inseridos em amostras fotoelásticas por Fotoelasticidade e está em fase de conclusão; o outro propõe a construção da curva de tensão versus deformação em chapas de aço (1010, 1020 etc.) sob tração por meio de análise de Fourier a partir de imagens de speckle por reflexão. Os resultados, obtidos até o momento com esse último trabalho, foram aceitos e serão apresentados no Congresso Nacional de Ensaios não Destrutivos, ConaEnd-2016, que se realizará em agosto de 2016.

Outras ideias surgiram a partir do trabalho desenvolvido aqui. Uma ideia inicial é construir a distribuição de tensões em uma linha central de franjas para toda a extensão vertical da amostra fotoelástica, incluindo todas as franjas desse trecho, para estudar o comportamento das tensões em franjas distintas. Para isso será necessário expandir as ondas no interferômetro. A mesma proposta pode ser realizada em linhas paralelas à linha central, durante toda a extensão horizontal do material fotoelástico.

Outra ideia interessante é incluir o cálculo das tensões de cisalhamento no método, para estudar também as distribuições oblíquas no material e, com isso, construir um mapa completo das tensões que ocorrem em toda sua extensão de área.

É possível, também, criar um método similar para construção dos mapas de deformações que ocorrem nesses materiais fotoelásticos. Com isso, juntando as informações de tensões e deformações, construir mapas de tensões e deformações para diversas concentrações e geometrias distintas, com o intuito de efetuar uma caracterização rigorosa desse tipo de amostra fotoelástica e estabelecer tabelas de parâmetros holográficos comparáveis aos parâmetros mecânicos, obtidos por processos destrutivos já existentes na literatura.

Na área de Física Teórica, uma possibilidade é buscar uma teoria geral que amplie matematicamente os resultados obtidos neste trabalho e que envolva toda a extensão do modelo e todas as tensões e deformações associadas aos esforços externos.

Na área de Computação, criar simuladores que possibilitem prever resultados para as tensões e deformações nos materiais fotoelásticos por hologramas criados numericamente. Isso ajudaria a melhorar a qualidade dos experimentos com Holografia e também com Fotoelasticidade.

No campo das aplicações, esse método vem como outra alternativa para investigar tensões em corpos de prova inseridos nos materiais fotoelásticos. A área engenharia mecânica e de materiais têm um grande interesse em novas técnicas e métodos não destrutivos para investigar as propriedades de materiais. Adaptar o método proposto para a técnica de Holografia por reflexão com duas referências polarizadas ortogonalmente parece uma técnica interessante para esse fim. A Fotoelasticidade por reflexão é bastante utilizada nesse tipo de estudo e a Holografia pode surgir como alternativa nesse sentido.

Na área de odontologia, esse método poderá ser para investigar as tensões que surgem em mandíbulas devido aos esforços causados por próteses sob implantes, além de possibilitar uma análise quantitativa mais rápida e fácil, que certamente atrairá os pesquisadores dessa área.

Espera-se que este trabalho seja uma das fontes inspiradoras de diversos outros que se realizarem daqui para frente. Com a consciência de que há muito a se fazer e aprender, busco energia, juventude e disposição para levar essa proposta adiante, aprendendo sempre, reconhecendo erros sempre, acertando inconsistências sempre, mas, principalmente, estabelecendo uma relação fácil, cordial, comprometida, sincera e responsável com outros pesquisadores apaixonados por esse universo fantástico da Física, na produção de mais frutos para a nossa sociedade.

## Referências Bibliográficas

- [1] HETCH, E. Óptica. Segunda Edição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002. 790 p.
- [2] KALE, S.; RAMESH, K. Advancing front scanning approach for three-fringe photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 51, n. 5, p. 592-599, 2013. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2012.12.013.
- [3] SWAIN, D. et al. Novel calibration and color adaptation schemes in three-fringe RGB photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 66, p. 320-329, 2015. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2014.10.007.
- [4] ZHANG, Y. et al. Branch cutting algorithm for unwrapping photoelastic phase map with isotropic point. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 50, n. 5, p. 619-631, 2012. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2011.10.013.
- [5] KHALEGHIAN, S.; EMAMI, A.; SOLTANI, N. Image Processing Code for Sharpening Photoelastic Fringe Patterns and Its Usage in Determination of Stress Intensity Factors in a Sample Contact Problem. arXiv preprint arXiv:1501.02245, 2015.
- [6] LIU, L. et al. Simultaneous measurement of small birefringence magnitude and direction in real time. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 53, p. 19-24, 2013. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2013.08.008.
- [7] LEE, J. et al. Effect of implant number and distribution on load transfer in implant-supported partial fixed dental prostheses for the anterior maxilla: A photoelastic stress analysis study. *The Journal of prosthetic dentistry*, v. 115, n. 2, p. 161-169, 2016. DOI: 10.1016/j.prosdent.2015.08.021.
- [8] PIGOZZO, M.N.; LAGANÁ, D.C.; NOTIROME, P.Y. Avaliação das tensões às estruturas de suporte, por meio do método fotoelástico, decorrentes das forças aplicadas sobre overdentures retidas em implantes com sistema de encaixe barra-clipe. *Revista de odontologia da Universidade Cidade de São Paulo*, 22(2), p. 122-133, Mai-Ago 2010.
- [9] TAKESHITA, E. K. Avaliação in vitro da transmissão de carga oclusal em próteses sobre implantes em função da inclinação de implantes através de análise fotoelástica. 2011. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [10] HUIGNARD, J.P.; LOISEAUX, B. Holography. *Encyclopedia of Condensed Matter Physics*, p. 332-341, October 2015.
- [11] OLIVEIRA, G. N. et al. Digital Fourier Transform Holography applied to investigate mechanical deformation in polymers. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 50, n. 12, p. 1798-1803, 2012. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2012.06.016.
- [12] GABOR, D. A new microscope principle. *Nature*, V. 161, N. 4098, p. 777-778, may 1948.
- [13] YOUNG, M.; FORNARIS, Y. T. Óptica e lasers. Edusp, 1998.
- [14] FERREIRA, M. Óptica e Fotônica. Primeira Edição. Lisboa: Lidel-Edições Técnicas, 2003. 438 p.

- [15] LEITH, E. N.; UPATNIEKS, J. Reconstructed wavefronts and communication theory. *JOSA*, v. 52, n. 10, p. 1123-1130, 1962. DOI: 10.1364/JOSA.52.001123.
- [16] KRONROD, M. A.; YAROSLAVSKI, L. P.; MERZLYAKOV, N. S. Computer synthesis of transparency holograms. *Sov. Phys.-Tech. Phys.* 17 329-32.1972.
- [17] KRONROD, M. A.; YAROSLAVSKI, L. P.; MERZLYAKOV, N. S. Reconstruction of holograms with a computer. *Sov. Phys.-Tech. Phys.* 17 333-4.1972.
- [18] TAIETTI, M. S. Z. Métodos recursivos para o cálculo da integral de convolução. 2002. Dissertação de mestrado. UFRGS. URI: hdl.handle/10183/1587.
- [19] BARBOSA, V. C.; BREITSCHAFT, A. M. S.; MENDONÇA, J. P. R. F.; MOREIRA, L. M.; MORAES, P. C. G. Uma visualização do princípio de Huygens-Fresnel na obtenção de um padrão de difração. *Rev. Bras. Ensino Fis.* v. 34 n. 3. Outubro 2012. DOI: 10.1590/S1806-11172012000300001.
- [20] YOKOTA, M.; TERUI, Y.; YAMAGUCHI, I. Polarization analysis with digital holography by use of polarization modulation for single reference beam. *Optical Engineering*, v. 46, n. 5, p. 055801-055801-7, 2007. DOI: 10.11117/1.2740601.
- [21] COLOMB, T. et al. Polarization imaging by use of digital holography. *Applied optics*, v. 41, n. 1, p. 27-37, 2002. DOI: 10.1364/AO.4100027.
- [22] HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais. Sétima Edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. 630 p.
- [23] SORIANO, H. L. Elementos Finitos. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2009. 432 p.
- [24] CHEN, T. Y.; HUANG, P. S.; CHUANG, S. F. Modeling dental composite shrinkage by digital image correlation and finite element methods. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 61, p. 23-30, 2014. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2014.04.006.
- [25] FREIRE, J. L. F. Introdução à Fotoelasticidade. Rio de Janeiro: PUC/RJ, Departamento de Engenharia Mecânica, 1987.
- [26] MOURA, B. A. Isaac Newton e a dupla refração da luz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 36, n. 4, p. 4602, 2014. DOI: 10.1590/S1806-11172014000400021.
- [27] LOHNE, J. A. Nova Experimenta Crystalli Islandici Disdiacastici1. *Centaurus*, v. 21, n. 2, p. 106-148, 1977. DOI: 10.1111/J.1600-0498.1977.TB00350.x.
- [28] MAGIE, W. F. et al. Source book in physics. 1963.
- [29] BREWSTER, D. On the laws which regulate the polarisation of light by reflexion from transparent bodies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 105, p. 125-159, 1815.
- [30] COKER, E. G.; FILON, L. N. G. A Treatise on Photo-Elasticity. 2<sup>nd</sup> ed., revised by H. T. Jessop, Cambridge, University Press, London 1957.
- [31] FROCHT, M. M.; GUERNSEY JR, R. A special investigation to develop a general method for three-dimensional photoelastic stress analysis. *NACA Annual Report 39-VOL-2*, p. 963-979. January 1953.

- [32] FöpPL, L.; MönCH, E. *Praktische Spannungsoptik*, III. Adage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1972.
- [33] RAMESH, K.; KASIMAYAN, T.; SIMON, B. N. Digital photoelasticity—A comprehensive review. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, v. 46, n. 4, p. 245-266, 2011. DOI: 10.1177/0309324711401501.
- [34] AJOVALASIT, A.; PETRUCCI, G.; SCAFIDI, M. Review of RGB photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 68, p. 58-73, 2015. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2014.12.008.
- [35] FREIRE, J. L. F., LAVRADOR, M. B., SOARES, A. C. C. Medição automática de franjas isocromáticas usando a fotoelasticidade RGB. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. São Paulo, 1999.
- [36] SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. *Fundamentals of Photonics*. Second Edition. Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2007. 1177 p.
- [37] DE OLIVEIRA, G. C. A. Estudo de esforços mastigatórios utilizando técnica de interferometria holográfica. 2007. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [38] CHURCHILL, R.V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. Tradução da 1. Edição por Tadao Yoshioka. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1975. 276 p.
- [39] GUENTHER, R. D. *Modern Optics*. First Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1990. 696 p.
- [40] SCHNARS, U.; JÜPTNER, W. P. Digital recording and numerical reconstruction of holograms. *Measurement science and technology*, v. 13, n. 9, p. R85, 2002. DOI: 10.1088/0957-0233/13/9/201.
- [41] GOODMAN, J. W. *Introduction to Fourier Optics*. Second Edition. New York. McGraw-Hill Companies, Inc. 1996. 490 p.
- [42] FANTIN, A. V. Holografia digital complexa utilizando um interferômetro shearing. 2003. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- [43] BUTKOV, E. *Física Matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. 1. Ed. São Paulo: Editora Guanabara, 1988. 725 p.
- [44] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Física Matemática – Métodos matemáticos para Engenharia e Física*. Tradução da 6. Edição por Arlete Simille Marques. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2005. 900 p.
- [45] DA SILVA, E. R.; MURAMATSU, M. O fenômeno do speckle como introdução à metrologia óptica no laboratório didático. *Rev. Brasileira de Ensino de Física (São Paulo)*, v. 29, p. 283-286, 2007.
- [46] DA SILVA, E. R. Estudo das Propriedades do Biospeckle e suas Aplicações. 2007. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [47] COSTA, R. M. Técnicas estatísticas aplicadas em imagens do speckle dinâmico. 2009. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia de Sistemas, Universidade Federal de Lavras – MG.



- [48] VANIN, V. R.; GOUFFON, P.; HELENE, O. A. M. Tópicos Avançados em Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental. 2ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1991. 116 p.
- [49] FILHO, A. A. Elementos Finitos, A Base da Tecnologia CAE. Primeira Edição. São Paulo: Editora Érica, 2000. 295 p.
- [50] RYCHLEWSKI, J. On Hooke's law. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 48, n. 3, p. 303-314, 1984. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90137-0.
- [51] NUR, A.; BYERLEE, J. D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. *Journal of Geophysical Research*, v. 76, n. 26, p. 6414-6419, 1971. DOI: 10.1029/JB076I026P06414.
- [52] SORIANO, H. L. Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas. Primeira Edição. São Paulo: Editora Edusp, 2003. 580 p.
- [53] FOMES, J. F. S. Análise Experimental de Tensões por Fotoelasticidade. Primeira Edição. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1984. 200 p.
- [54] CARLIN, N. et al. Birrefringência em placas de onda e atividade óptica de uma solução de açúcar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 3, p. 349-355, 2005.
- [55] SOARES, W. A. Determinação de parâmetros da mecânica de fratura a partir de imagens fotoelásticas, usando processamento digital. 1997. Tese de Doutorado. Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo.
- [56] KUSKE, A.; ROBERTSON, G. Photoelastic Stress Analysis. New York: John Wiley and Sons, 1974.
- [57] JUNIOR, A. F. G. F. Desenvolvimento de um sistema para análise automática do padrão de franjas fotoelásticas. 2003. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [58] SOUZA, F. L.; SOUZA, G. A. A.; ARAÚJO, C. A. Determinação Automatizada de Parâmetros Fotoelásticos. 15º Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – POS-MEC. Universidade Federal de Uberlândia. 2005.
- [59] COLOMB, T. et al. Jones vector imaging by use of digital holography: simulation and experimentation. *Optics Communications*, v. 231, n. 1, p. 137-147, 2004. DOI: 10.1016/j.optcom.2003.12.004.
- [60] DEMOS, S. G.; ALFANO, R. R. Optical polarization imaging. *Applied Optics*, v. 36, n. 1, p. 150-155, 1997. DOI: 10.1364/AO.36.00150.
- [61] NAYDENOVA, I. (Ed.). *Advanced Holography: Metrology and Imaging*. InTech, 2011.
- [62] CARCOLÉ, E.; CAMPOS, J.; BOSCH, S. Diffraction theory of Fresnel lenses encoded in low-resolution devices. *Applied optics*, v. 33, n. 2, p. 162-174, 1994. DOI: 10.1364/AO.33.000162.
- [63] JACQUOT, M.; SANDOZ, P.; TRIBILLON, G. High resolution digital holography. *Optics communications*, v. 190, n. 1, p. 87-94, 2001. DOI: 10.1016/S0030-4018(01)01046-X.

- [64] QUINAN, M. A. D. Uma metodologia para determinação do fator de intensidade de tensões causado por tensões térmicas utilizando a fotoelasticidade. 2005. Tese de Doutorado. Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo.
- [65] VUOLO, J. H. Fundamentos da Teoria de Erros. Primeira Edição. São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda. 1992. 225 p.
- [66] WANG, Q. et al. Study of all-optical XOR using Mach-Zehnder interferometer and differential scheme. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 40, n. 6, p. 703-710, 2004. DOI: 10.1109/JQE.2004.828261.
- [67] ZETIE, K. P.; ADAMS, S. F.; TOCKNELL, R. M. How does a Mach-Zehnder interferometer work? *Teaching Physics. Physics Education*, V. 35, Number: 1, July 1999. DOI: 10.11088/0031-9120/35/1/308.
- [68] RICCI, T. F.; OSTERMANN, F.; PRADO, S. D. O tratamento clássico do interferômetro de Mach-Zehnder: uma releitura mais moderna do experimento da fenda dupla na introdução da física quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 79-88, 2007.
- [69] LOPES, W. Variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 25, n. 3, p. 561-568, 2008. ISSN-e 2175-7941.
- [70] MORAIS, V.; VIEIRA, C. MATLAB, Curso Completo. Primeira Edição. Lisboa, Portugal. FCA Editora de Informática Lda. 2012. 664 p.
- [71] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. Second Edition. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. 672 p.
- [72] MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de probabilidade e estatística*. Sétima edição. São Paulo: Edusp, 215. 428 p.

# Apêndices

## A.1 Aproximações para a reconstrução digital de Fresnel

Considerando  $r = z \cdot f(\alpha)$ , com  $\alpha \equiv \left(\frac{h-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{v-\eta}{z}\right)^2$  e  $f(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha}$ , a integral de difração de Huygens-Fresnel, Expressão (2.9), fica

$$\vec{\Psi}_{\text{rec}}(h, v) = \frac{z}{iz\lambda} \iint I_H(\xi, \eta) \cdot \vec{\Psi}_R(\xi, \eta) \cdot \frac{\exp[ikzf(\alpha)]}{f(\alpha)} d\xi d\eta \quad (\text{A.1})$$

Expandindo  $f(\alpha)$  em série de Taylor [43-44], em torno de  $\alpha_0 = 0$ , tem-se

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(\alpha)}{n!} \Big|_{\alpha=\alpha_0=0} \cdot (\alpha - \alpha_0) \Rightarrow$$

$$f(\alpha) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left[ \left(\frac{h-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{v-\eta}{z}\right)^2 \right] - \frac{1}{8} \cdot \left[ \left(\frac{h-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{v-\eta}{z}\right)^2 \right]^2 + \dots \quad (\text{A.2})$$

Na holografia digital, os termos  $(h - \xi)$  e  $(v - \eta)$  são muito pequenos, da ordem de  $10^{-6}\text{m}$ , então seus valores quadráticos são menores ainda. Logo,  $\left[ \left(\frac{h-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{v-\eta}{z}\right)^2 \right]^2 \rightarrow 0$  e a Expressão (A.2) pode ser bem aproximada para

$$f(\alpha) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left[ \left(\frac{h-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{v-\eta}{z}\right)^2 \right] \quad (\text{A.3})$$

Considerando  $z^2 \gg (h - \xi)^2 + (v - \eta)^2$ , o termo  $r^2 = [(h - \xi)^2 + (v - \eta)^2 + z^2]$  do denominador do integrando da Expressão (A.1) pode ser aproximado através da Expressão (A.3), para  $f^2 \approx 1$ , já que os termos quadráticos de  $(h - \xi)$  e  $(v - \eta)$  são muito pequenos. No entanto, o termo  $f$  que aparece como argumento da função exponencial na mesma Expressão (A.1) não pode receber a mesma aproximação, pois qualquer pequena variação em  $(h - \xi)$  e  $(v - \eta)$  causará uma diferença significativa na exponencial, além do fato de  $f$  estar multiplicando número de onda  $k$ , da ordem de  $10^7 \text{ m}^{-1}$ .

Nesse caso, mantém-se a aproximação total da Expressão (A.3) e a Expressão (A.1) pode ser reescrita, em módulo, como

$$\begin{aligned}\psi_{\text{rec}}(h, v) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint I_H(\xi, \eta) \cdot \psi_R(\xi, \eta) \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(h - \xi)^2 + (v - \eta)^2]\right\} d\xi d\eta \Rightarrow \\ \psi_{\text{rec}}(h, v) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \cdot e^{\frac{ik}{2z}(h^2+v^2)} \iint f(\xi, \eta) \cdot e^{i(k_\xi \xi + k_\eta \eta)} d\xi d\eta \quad (\text{A.4})\end{aligned}$$

com  $f(\xi, \eta) \equiv I_H(\xi, \eta) \cdot \psi_R(\xi, \eta) \cdot e^{\frac{\pi i}{z\lambda}(\xi^2 + \eta^2)}$ ,  $k_\xi \equiv -\frac{k \cdot h}{z}$  e  $k_\eta \equiv -\frac{k \cdot v}{z}$ . O termo  $e^{\frac{\pi i}{z\lambda}(\xi^2 + \eta^2)}$ , denominado *chirp function*, é uma aproximação quadrática da função de onda esférica.

Seja uma função  $f = f(\xi, \eta)$ , tal que

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \mathcal{F}(k_\xi, k_\eta) \cdot e^{-i(k_\xi \xi + k_\eta \eta)} dk_\xi dk_\eta \quad (\text{A.5})$$

Então, sua transformada de Fourier [37-38],  $\mathcal{F}(k_\xi, k_\eta)$ , é

$$\mathcal{F}(k_\xi, k_\eta) = \iint f(\xi, \eta) \cdot e^{i(k_\xi \xi + k_\eta \eta)} d\xi d\eta \quad (\text{A.6})$$

Logo, utilizando essa definição de transformada de Fourier, a Expressão (A.4) pode ser reescrita como

$$\psi_{\text{rec}}(h, v) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \cdot e^{\frac{ik}{2z}(h^2+v^2)} \cdot \mathcal{F}(k_\xi, k_\eta) \quad (\text{A.7})$$

que é a aproximação de Fresnel para reconstrução holográfica digital bidimensional, também denominada transformada de Fresnel bidimensional.

## A.2 Discretização da transformada de Fresnel Bidimensional

A discretização do campo difratado  $\psi_{\text{rec}}(h, v)$ , a partir da Expressão (A.7), produz o resultado digital do holograma capturado pela câmera digital no domínio de frequência. Para isso, cada pixel da câmera de tamanho  $\Delta\xi \times \Delta\eta$  estará associado a cada  $N \times M$  valor discreto do holograma.

Dessa forma, as dimensões do pixel no campo reconstruído são:  $\Delta h = \frac{z\lambda}{N\Delta\xi}$  e  $\Delta v = \frac{z\lambda}{M\Delta\eta}$ . Então,  $h = n \cdot \Delta h = n \cdot \frac{z\lambda}{N\Delta\xi}$  e  $v = m \cdot \Delta v = m \cdot \frac{z\lambda}{M\Delta\eta}$ . Com isso, o número e o tamanho dos pixels da câmera definem a discretização, tal que

$$\psi_{nm} = \frac{e^{ikz} \cdot e^{\frac{ikz\lambda}{2} \left( \frac{n^2}{N^2 \Delta\xi^2} + \frac{m^2}{M^2 \Delta\eta^2} \right)}}{iz\lambda} \cdot \mathcal{F}[\Delta k_\xi, \Delta k_\eta] \quad (\text{A.8})$$

com  $\mathcal{F}[\Delta k_\xi, \Delta k_\eta] = \mathcal{F} \left[ I_H(\xi, \eta) \cdot \psi_R(\xi, \eta) \cdot e^{\frac{\pi i}{z\lambda} [(n \cdot \Delta\xi)^2 + (m \cdot \Delta\eta)^2]} \right]$ , que é a transformada de Fourier do campo discretizado.  $\Delta k_\xi = -\frac{k \cdot \Delta h}{z} = -\frac{k\lambda}{N\Delta\xi}$  e  $\Delta k_\eta = -\frac{k \cdot \Delta v}{z} = -\frac{k\lambda}{M\Delta\eta}$ .

O campo reconstruído pela transformada de Fresnel discretizada é complexo. Portanto, pela teoria de números complexos, as intensidades e as fases são determinadas, respectivamente, por

$$I_{\text{rec}} = \psi_{nm} \cdot \psi_{nm}^* \quad (\text{A.9})$$

$$\phi_{\text{rec}} = \arctg \left\{ \frac{\Im[\psi_{nm}]}{\Re[\psi_{nm}]} \right\} \quad (\text{A.10})$$

### A.3 Programa de reconstrução holográfica digital

O programa a seguir foi confeccionado na plataforma MATLAB [70] e efetua a reconstrução digital de intensidades e fases a partir do método de Fresnel.

```

%%
%
%
%          PROGRAMA DE RECONSTRUÇÃO HOLOGRÁFICA DIGITAL
%          MÉTODO DE FRESNEL
%
%
%          DESCRIÇÃO GERAL
%
%          A partir dos arquivos do holograma principal total (componente vertical + horizontal), do holograma
%          de referência (componente vertical + horizontal), o comprimento de onda da fonte de luz, a dimensão
%          dos pixels da câmera digital e da distância z do plano do holograma ao sensor da câmera, espessura da
%          amostra calcula as amplitudes e fases, constrói os mapas de intensidades e fases.
%%
%
%          AUTOR: Sidney Leal da Silva
%
%
%          PARÂMETROS HOLOGRÁFICOS
%%
%
% PASSO 1: captura e conversão dos parâmetros diretos
%
fLambda = 'comprimento de onda (m)';

```

```

fWpix = 'largura do pixel da câmera digital (m):';
fHpix = 'altura do pixel da câmera digital (m):';
fZ = 'distância entre o plano do holograma e o plano de reconstrução (m):';
fT = 'espessura do material (m):';
fIM = 'intensidade média na área no sensor da câmera digital:';
fTotal = { fLambda, fWpix, fHpix, fZ, fE, fIM }; % constrói vetor dos campos de entrada de dados
ITitle = 'parâmetros diretos da holografia'; % título da caixa de entrada
vSug = {'6.328E-7', '5.3E-6', '5.3E-6', '0.40', '1.019E-2', '1.08E-2'}; % parâmetros sugeridos
iData = inputdlg(fTotal, ITitle, 1, vSug); % caixa de diálogo
dbLambda = str2double(iData(1)); % comprimento de onda
dbWpix = str2double(iData(2)); % largura do pixel
dbHpix = str2double(iData(3)); % altura do pixel
dbZ = str2double(iData(4)); % distância z
dbT = str2double(iData(5)); % espessura da amostra
% não permite que z seja menor ou igual a zero, para não causar indefinição no cálculo
if dbZ <= 0
    dbZ = 1E-6;
end
%
%
% PASSO 2: cálculo dos parâmetros indiretos
%
dbK = (2*pi)/dbLambda; % número de onda
dbLambdaMZ = dbLambda*dbZ; % produto entre comprimento de onda e distância z
dbLambdaDZ = dbLambda/dbZ; % quociente entre comprimento de onda e distância z
dbIM = str2double(iData(6)); % intensidade média
%%
%
% HOLOGRAMAS E PARÂMETROS DA IMAGEM
%
%
% PASSO 1: chamadas da função openHol() para leituras dos arquivos imagens que contém os hologramas
%
imgHol = imread(openHol('holograma')); % lê e armazena imagem do holograma total
imgHol = adapthisteq(imgHol); % ajusta intensidade
imgHolRef = imread(AbreHolog('holograma')); % lê e armazena imagem do holograma de referência
imgHolRef = adapthisteq(imgHolRef); % ajusta intensidade
%
%
% PASSO 2: captura altura e largura dos hologramas (principal e referência)
%
[hM, wN] = size(imgHol); % altura e largura iguais em ambas as imagens
%%
%
% SELEÇÃO DA REGIÃO DE INTERESSE DO HOLOGRAMA
%
%
% PASSO 1: converte matrizes dos hologramas para double
%
imgHol = im2double(imgHol);
imgHolRef = im2double(imgHolRef);
%
%
% PASSO 2: efetua filtragem por transformada de Fourier e centraliza hologramas
%
tfHolog = fftshift(fft2(fftshift(imgHol)));
tfHologRef = fftshift(fft2(fftshift(imgHolRef)));

```

```

%
%
% PASSO 3: seleção das regiões de interesse dos hologramas no espaço de frequências
%
[~, regioao] = imcrop(log(abs(tfholog)),[]);
close
%
%
% PASSO 4: arredondamentos dos valores das regiões selecionadas
%
for a = 1 : 4
    regioao(a) = round(regiao(a));
end
regSelec = tfHolog(regiao(2):regiao(2)+regiao(4),regiao(1):regiao(1)+regiao(3));
regSelecRef = tfHologRef(regiao(2):regiao(2)+regiao(4),regiao(1):regiao(1)+regiao(3));
%%
%
%     MATRIZ DE PROPAGAÇÃO DO PLANO DO HOLOGRAMA PARA O PLANO DA IMAGEM
%%
%
% PASSO 1: captura os dimensões das matrizes que representam as imagens selecionadas
%
[hMSelec,wNSelec] = size(tfSelec); % para ambos os hologramas
%
%
% PASSO 2: centraliza as imagens selecionadas
%
wNHor = (wN - wNSelec)/2;
hMVert = (hM - hMSelec)/2;
%
%
% PASSO 3: define e calcula matrizes de intensidades complexas das imagens selecionadas
%
matSelec = zeros(hM +2* hMVert, wN +2* wNHor);
matSelecRef = zeros(hM +2* hMVert, wN +2* wNHor);
matSelec(1+ hMVert: hMVert + hMVert,1+ wNHor: wN + wNHor) = tfSelec(1: hMVert,1: wN);
matSelecRef(1+ hMVert: hMVert + hMVert,1+ wNHor: wN + wNHor) = tfSelecRef(1: hMVert,1: wN);
%%
%
%     CÁLCULO DAS MATRIZES CHIRP FUNCTION E COEFICIENTE
%%
%
% PASSO 1: cálculo do coeficiente da matriz chirp function
%
[N, M] = size(matSelec);
i = sqrt(-1); % define número imaginário
coefCF = i*pi/dbLambdaMZ;
%
%
% PASSO 2: define e calcula matriz matCF - Chirp Function e
%
matCF = zeros(N, M);
coefCOEF = i*dbK*dbZ; % coeficiente
matCOEF = zeros(N, M); % define matriz dos coeficientes
% fatores quadráticos
fquadx = dbWpix ^2;
fquady = dbHpix ^2;
% alimenta matrizes chirp function e coeficientes

```





```

subplot(2,2,1); imshow(imgHol,[]);title(titHolog); colorbar;
subplot(2,2,2); imshow(imgHolRef,[]);title(titHologRef); colorbar;
subplot(2,2,3); imshow(imgFinalInt,[]);title(titInt); colorbar;
subplot(2,2,4); imshow(imgFinalFase,[]);title(tituloFase); colorbar;
subplot(1,2,1); imshow(imgFinalInt,[]);title(titInt);% colorbar;
subplot(1,2,2); imshow(imgFinalFase,[]);title(titFase);% colorbar;
%%%
%
% CONSTRÓI OS MAPAS DE FASES DESMODULADOS
%%%
% utiliza a função volkovt para efetuar a desmodulação: (v. gamma 2) by Tiago Ramos 04 Dec 2015
% livre no Math Works - ttp://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/54317-volkovt--gamma2—
unwrapFase = abs(volkovt(imgFinalFase));
% apresenta resultado
titMapaFase = 'mapa de fase desmodulado: ';
imshow(imgHol,[ ]); title(titMapaFase); colorbar;
%%%
%
% FUNÇÃO openHol( )
%%%
function [name, path] = openHol (title)
[name, path] = uigetfile( ...
    {'*.bmp; *.tif; *.jpg; *.png', 'Image Files (*.bmp, *.tif, *.jpg, *.pcx, *.png)';
    'Bitmap-files (*.bmp)'; ...
    '*.tif', 'TIF-file (*.tif)'; ...
    '*.jpg', 'JPG-file (*.jpg)'; ...
    '*.png', 'PNG-file (*.png)'; ...
    '*.pcx', 'PCX-file (*.pcx)'; ...
    '*.*', 'All Files (*.*)'}, ...
    title, '');
if name == 0
    name = []; path = [];
    return
end
%
% FIM

```

## B.1 Campo de deslocamentos de uma viga

A Figura B1 apresenta um esquema de uma viga de altura muito pequena, comprimento  $L$  e espessura  $e$ , apoiada nos dois extremos  $[0, L]$ , sob um esforço  $\vec{F}$  em uma pequena área  $A$  no centro da base superior.

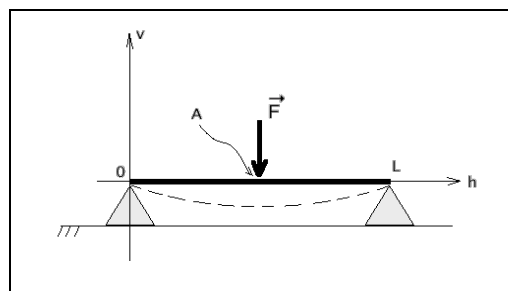


Figura B.1 - Esquema de uma viga de altura muito pequena, comprimento  $L$  e espessura  $e$ , apoiada em seus dois extremos e sob a ação de um esforço  $\vec{F}$  em uma pequena área  $A$  no centro da base superior.

Pelo método do cálculo variacional [71], a energia virtual total do sistema pode ser expressa como,

$$\delta\pi = \delta U - \delta W = 0 \quad (\text{B.1})$$

com a notação  $\pi = U - W$ , sendo  $\pi$  a energia potencial total,  $U = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2u}{dh^2}\right)^2 dh$ , a energia de deformação e  $W = -\sigma \cdot u(h)$  o potencial das forças externas, para o sistema da Figura B.1.  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia e  $\sigma$  é a tensão externa aplicada no centro da viga. Então,

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2u}{dh^2}\right)^2 dh + \sigma \cdot u(h) \quad (\text{B.2})$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange [63] na Expressão (B.2), tem-se

$$\frac{\partial\pi}{\partial u} - \frac{d}{dh} \left(\frac{\partial\pi}{\partial u'}\right) + \frac{d^2}{dh^2} \left(\frac{\partial\pi}{\partial u''}\right) = 0 \Rightarrow \sigma + \frac{d^2}{dh^2} \left(E \cdot I \cdot \frac{d^2u}{dh^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^4u}{dh^4} + \frac{\sigma}{E \cdot I} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Integrando a Expressão (B.3), obtem-se

$$\frac{d^3u}{dh^3} = -\frac{\sigma}{E \cdot I} \cdot h + C1 \quad (\text{B.4a}) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{dh^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{E \cdot I} \cdot h^2 + C1 \cdot h + C2 \quad (\text{B.4b}) \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dh} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sigma}{E \cdot I} \cdot h^3 + \frac{1}{2} \cdot C1 \cdot h^2 + C2 \cdot h + C3 \quad (\text{B.4c}) \Rightarrow$$

$$u = -\frac{1}{24} \cdot \frac{\sigma}{E \cdot I} \cdot h^4 + \frac{1}{6} \cdot C1 \cdot h^3 + \frac{1}{2} \cdot C2 \cdot h^2 + C3 \cdot h + C4 \quad (\text{B.4d})$$

As condições de contorno  $u(0) = \left(\frac{d^2u}{dh^2}\right)_{h=0} = 0$  implicam em  $C2 = C4 = 0$ , pelas expressões (B.4d) e (B.4.b), respectivamente. A condição  $\left(\frac{d^2u}{dh^2}\right)_{h=L} = 0 \Rightarrow C1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{E \cdot I} \cdot L$ . Finalmente, a condição  $u(L) = 0 \Rightarrow C3 = -\frac{1}{24} \cdot \frac{\sigma}{E \cdot I} \cdot L^3$ . Portanto a expressão analítica para o campo de deformações é

$$u(h) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{\sigma}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h^4 - L \cdot h^3 + \frac{1}{2} \cdot L^3 \cdot h\right) \quad (\text{B.5})$$

O campo de deslocamentos, para um comprimento vertical da viga igual a  $v_0$ , tal que  $v(h) = u(h) \cdot v_0$ , é

$$v(h) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{\sigma \cdot v_0}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h^4 - L \cdot h^3 + \frac{1}{2} \cdot L^3 \cdot h\right) \quad (\text{B.6})$$

Particularmente em  $h = L/2$ , a Expressão (B.6) torna-se

$$v(L/2) = -\frac{5}{384} \cdot \frac{\sigma \cdot L^4}{E \cdot I} \cdot v_0 \quad (\text{B.7})$$

e quando  $h = L/4$  ou  $h = 3L/4$ ,

$$v(L/4) = -\frac{57}{6144} \cdot \frac{\sigma \cdot L^4}{E \cdot I} \cdot v_0 \quad (\text{B.8})$$

A curva gerada pela Expressão (B.6) é mostrada na Figura B.2.

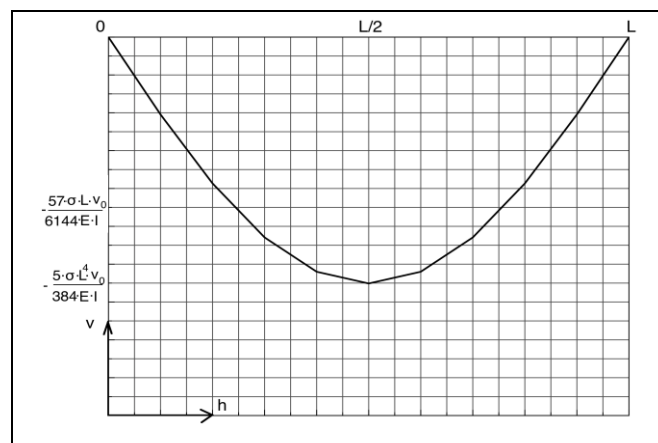


Figura B.2 - Perfil do campo de deslocamentos de uma viga de altura muito pequena, comprimento  $L$  e espessura  $e$ , apoiada em seus dois extremos e sob a ação de um esforço  $\vec{F}$  em uma pequena área  $A$  no centro da base superior. Gráfico obtido a partir da expressão (B.6).

Se cada curva da Figura B.2 representar uma franja escura que passa pelos pontos 1 e 2 do modelo da Figura 3.9, distanciados por  $\Delta v$ , então pode-se esquematizar as franjas escuras no plano do modelo, devido às diferenças de tensões que surgem nesse plano quando se aplica um esforço externo em sua superfície superior.

## B.2 Diferenças de tensões associadas aos campos de deslocamentos

O estado plano de tensões foi definido no Capítulo 2, em um determinado domínio de espessura  $\theta$ , pelas condições

$$\sigma_z = \tau_{hz} = \tau_{vz} = 0 \text{ com } \sigma_h \neq 0, \sigma_v \neq 0 \text{ e } \tau_{hv} \neq 0 \quad (\text{B.9})$$

Com essas considerações, a lei de Hooke pôde ser escrita como

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (\text{B.10})$$

Para o cálculo das tensões  $\{\sigma\}$ , determina-se as deformações,  $\{\varepsilon\}$ , e a matriz de rigidez,  $[E]$ , a partir do campo de deslocamentos  $\{v\}$ , por solução analítica ou por solução aproximada em função de valores nodais [49][52].

Pela definição do módulo da deformação,

$$\varepsilon = \frac{v(h) - v_R(h)}{v_0} = u(h) - u_R(h) \quad (\text{B.11})$$

$v_R$  é a posição de referência.

Considerando  $v_R(h) = 0$ , a média de deformações entre as franjas que passam no ponto 1 e 2 do modelo da Figura 3.9 pode ser obtida como

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{u_1(h) + u_2(h)}{2} \quad (\text{B.12})$$

Na região central com  $h = L/2$ , considerando que não haja deslocamentos angulares, tal que  $[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}$  e utilizando a Expressão (B.12), a Expressão (B.10) fica

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma_h \rangle \\ \langle \sigma_v \rangle \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle \varepsilon_h \rangle \\ \langle \varepsilon_v \rangle \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \langle \varepsilon_v \rangle \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \langle \sigma_h \rangle \\ \langle \sigma_v \rangle \end{Bmatrix} &= -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{u_{1\nu}(h) + u_{2\nu}(h)}{2} \end{Bmatrix} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{u_{12}(h)}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \langle \sigma_v \rangle - \langle \sigma_h \rangle &= -\frac{E}{(1+\nu)} \cdot \frac{u_{12}(h)}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Nos resultados de fotoelasticidade com luz monocromática, verificou-se que as intensidades entre franjas escuras são crescentes do início da primeira franja escura até o centro e decrescentes do centro até a próxima franja escura. Isso também ocorre para todas as franjas seguintes, apontando uma distribuição é periódica.

O método de fotoelasticidade RGB associa essas intensidades às diferenças de tensões no estado plano. Em analogia a essa ideia, porém associando o termo periódico à deformação que é função do deslocamento, a Expressão (B.12), em módulo, fica

$$|\langle \sigma_v \rangle - \langle \sigma_h \rangle|_j = D_\sigma \cdot \text{sen}^2(u_j) \quad (\text{B.14})$$

com  $D_\sigma = \frac{E}{(1+\nu)}$  e  $\text{sen}^2(u_j)$  o termo periódico com  $u_j \in \frac{\pi}{\Delta v} \cdot [v_1, v_N]$ .

A curva gerada pela Expressão (B.14) é mostrada na Figura B.3.

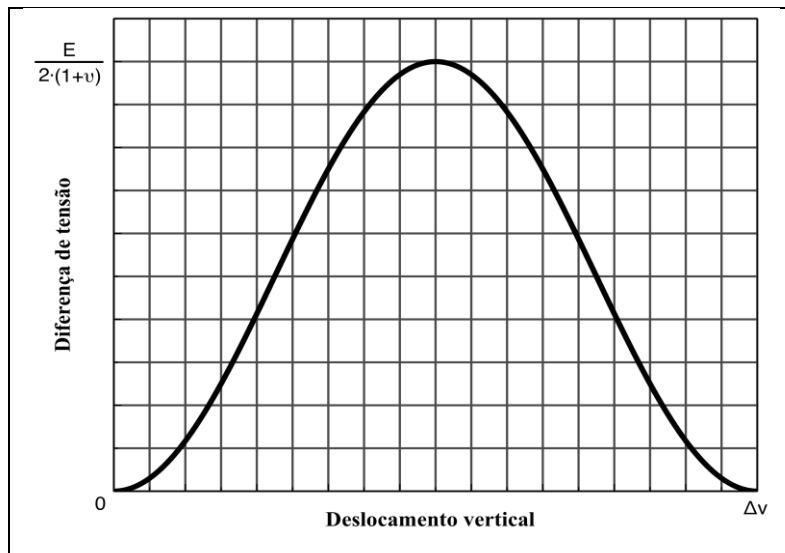


Figura B.3 - Curva analítica da diferença de tensão versus deslocamento vertical entre duas franjas escuras, a partir da expressão (B.14).



```

for i = 1 : n
    inc = vetInc(i,1)^2;
    ind = vetDataInd(i,1);
    dep = vetDataDep(i,1);
    ind2 = ind^2;
    m11 = m11 + ind2/inc; % elemento m11
    m12 = m12 + ind/inc; % elemento m12
    m21 = m12; % elemento m21
    m22 = m22 + 1/inc; % elemento m22
    b1 = b1 + dep*ind/inc; % elemento b1
    b2 = b2 + dep/inc; % elemento b2
end
matM(1,1) = m11; matM(1,2) = m12; matM(2,1) = m21; matM(2,2) = m22;
vetB(1,1) = b1; vetB(2,1) = b2;
%%
%
%  CALCULA MATRIZ INVERSA DE M E DETERMINA AS VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS
%%
matInvM = inv(matM); % calcula matriz inversa de M
% variâncias (incertezas dos parâmetros)
vetIncPar(1,1) = sqrt(matInvM(1,1)); vetIncPar(2,1) = sqrt(matInvM(2,2));
% covariâncias
vetCovPar(1,1) = matInvM(1,2); vetCovPar(2,1) = matInvM(2,1);
case 2 % função quadrática
for i = 1 : n
    inc = vetInc(i,1)^2;
    ind = vetDataInd(i,1);
    dep = vetDataDep(i,1);
    ind2 = ind^2; ind3 = ind^3; ind4 = ind^4;
    m11 = m11 + ind4/inc; % elemento m11
    m12 = m12 + ind3/inc; % elemento m12
    m13 = m13 + ind2/inc; % elemento m13
    m21 = m12; % elemento m21
    m22 = m13; % elemento m22
    m23 = m23 + ind/inc; % elemento m23
    m31 = m13; % elemento m31
    m32 = m23; % elemento m32
    m33 = m33 + 1/inc; % elemento m33
    b1 = b1 + dep*ind2/inc; % elemento b1
    b2 = b2 + dep*ind/inc; % elemento b2
    b3 = b3 + dep/inc; % elemento b3
end
matM(1,1) = m11; matM(1,2) = m12; matM(1,3) = m13; matM(2,1) = m21; matM(2,2) = m22;
matM(2,3) = m23; matM(3,1) = m31; matM(3,2) = m32; matM(3,3) = m33;
vetB(1,1) = b1; vetB(2,1) = b2; vetB(3,1) = b3;
%%
%
%  CALCULA MATRIZ INVERSA DE M E DETERMINA AS VARIÂNCIAS E COVARIÂNCIAS
%%
matInvM = inv(matM); % calcula matriz inversa de M
% variâncias (incertezas dos parâmetros)
vetIncPar(1,1) = sqrt(matInvM(1,1)); vetIncPar(2,1) = sqrt(matInvM(2,2));
vetIncPar(3,1) = sqrt(matInvM(3,3));
% covariâncias
vetCovPar(1,1) = matInvM(1,2); vetCovPar(1,2) = matInvM(1,3); vetCovPar(2,1) = matInvM(2,1);
vetCovPar(2,2) = matInvM(2,3); vetCovPar(3,1) = matInvM(3,1); vetCovPar(3,2) = matInvM(3,2);
case 3

```





O segundo programa efetua o teste das contribuições de ordens superiores a partir de um polinômio de terceiro grau [48]. O teste é realizado até a terceira ordem por série de Taylor.

```

%%
%
%
%           PROGRAMA PARA TESTE DAS ORDENS
%           SUPERIORES COM POLINÔMIO DE TERCEIRO GRAU
%
%-----
%           DESCRIÇÃO GERAL
%
%           A partir dos parâmetros ajustados da função de terceiro grau efetua as contribuições até terceira
%           ordem por série de Taylor.
%%
%
%           AUTOR: Sidney Leal da Silva
%
%-----
% parâmetros da função original
p1 = matPar(1,1); p2 = matPar(2,1); p3 = matPar(3,1); p4 = matPar(4,1);
% Calcula série de Taylor até terceira ordem para o valor 1
x = 4.8; % o valor 4.8 é um exemplo
vetF(1,1) = (p1)*x^3; % ordem zero
vetF(2,1) = (p2)*x^2; % ordem um
vetF(3,1) = p3*x; % ordem dois
vetF(4,1) = p4; % ordem três
% soma das contribuições
m = vetF(1,1) + vetF(2,1) + vetF(3,1) + vetF(4,1);
y = abs((m/x)-p3)*100;
% Calcula série de Taylor até terceira ordem
x = 11; % o valor 11 é um exemplo
vetF1(1,1) = (p1)*x^3; % ordem zero
vetF1(2,1) = (p2)*x^2; % ordem um
vetF1(3,1) = p3*x; % ordem dois
vetF1(4,1) = p4; % ordem três
% resultado das contribuições
n = vetF1(1,1) + vetF1(2,1) + vetF1(3,1) + vetF1(4,1);
y1 = abs((n/x)-p3)*100;
matY(1,1) = y;
matY(2,1) = y1;
%
%           FIM
%
%%

```

O terceiro programa efetua o teste de qui-quadrado [48][65][72] para verificação da confiabilidade do ajuste.

```

%%
%
%
%           PROGRAMA PARA TESTE DE QUI-QUADRADO
%
%-----
%           DESCRIÇÃO GERAL
%
%           A partir da função ajustada e das incertezas totais efetua o teste de qui-quadrado para verificação

```

```

% da confiabilidade da função ajustada.
%%%
%
%
%
%
%
%
%
%
%
% captura e conversão dos parâmetros de entrada
numDados = 'Quantidade de dados:';
numPar = 'Quantidade de par,metros:';
campos = {numDados,numPar};
titulo = 'Cálculo de qui-quadrado';
valorSug = {'10','4'};
dados = inputdlg(campos, titulo,1,valorSug);
n = str2double(dados(1)); p = str2double(dados(2));
% calcula graus de liberdade
v = n - p;
% inicia parâmetros internos
num = 0;
arg = 0;
qui2 = 0;
eta = zeros(10,1);
cp = zeros(10,1); % contador de probabilidade
sp = 0;
% parâmetros das funções
p0 = 'par,metro independente:';
p1 = 'par,metro x:';
p2 = 'par,metro x^2:';
p3 = 'par,metro x^3:';
% seleciona polinômio até terceiro grau
switch p
  case 2,
    % captura valores dos parâmetros
    p0 = matPar(2,1); p1 = matPar(1,1);
    for i = 1 : n
      num = vetDataDep(i,1) - p1*vetDataInd(i,1) - p0; % função linear
      if vetInc(i,1) == 0
        arg = 0;
      else
        arg = num/vetInc(i,1);
      end
      qui2 = qui2 + arg^2;
      eta(i,1) = num;
      if abs(num) < vetInc(i,1)
        cp(i,1) = 1;
        sp = sp + 1;
      else
        cp(i,1) = 0;
      end
    end
  case 3,
    p0 = matPar(3,1); p1 = matPar(2,1); p2 = matPar(1,1);
    for i = 1 : n
      num = vetDataDep(i,1) - p2*vetDataInd(i,1)^2 - p1*vetDataInd(i,1) - p0; % função quadrática
      if vetInc(i,1) == 0
        arg = 0;
      else
        arg = num/vetInc(i,1);

```

```

    end
    qui2 = qui2 + arg^2;
    eta(i,1) = num;
    if abs(num) < vetInc(i,1)
        cp(i,1) = 1;
    else
        cp(i,1) = 0;
    end
end
case 4,
p0 = matPar(4,1); p1 = matPar(3,1); p2 = matPar(2,1); p3 = matPar(1,1);
for i = 1 : n
    % função cúbica
    num = vetDataDep(i,1)-p3*vetDataInd(i,1)^3-p2*vetDataInd(i,1)^2-p1*vetDataInd(i,1) - p0;
    if vetInc(i,1) == 0
        arg = 0;
    else
        arg = num/vetInc(i,1);
    end
    qui2 = qui2 + arg^2;
    eta(i,1) = num;
    if abs(num) < vetInc(i,1)
        cp(i,1) = 1;
    else
        cp(i,1) = 0;
    end
end
otherwise,
    clc; exit;
end
% calcula qui-quadrado
matQui2(1,1) = qui2;
% calcula qui-quadrado reduzido
matQui2(2,1) = qui2/v;
% _____ FIM _____
%% _____

```