

BIBLIOTECA DEPARTAMENTO FÍSICA

SUELI MARIA VIEGAS ~~ALDROVANDI~~

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DOS COMPUTADORES

EM TEORIAS NÃO RELATIVÍSTICAS

SBI-FUSP



305M810T4214



Tese apresentada ao Departamento de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP para a obtenção do título de Mestre em Ciências

SÃO PAULO

1968

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Jorge André Swieca, cuja orientação tornou possível este trabalho.
- Ao Puben, meu marido, pelo incentivo.
- Aos colegas Rozy Nulman, Clélia F. Lauretti e José Fernando Perez, pelas discussões e pelas sugestões na redação.
- À FAPESP, pela concessão da bolsa de Aperfeiçoamento.

ÍNDICE

Cap. I - <u>Introdução</u>	pg. 1
1. Quebra espontânea de simetrias em teorias relati- vísticas.....	pg. 2
2. Quebra espontânea de simetria em teorias não rela- tivísticas.....	pg. 3
Cap. II - <u>Comutadores</u>	pg. 7
1. Apresentação do problema	pg. 7
2. Cálculo dos comutadores em casos limites	pg. 8
3. Cálculo do comutador por teoria de perturbação ...	pg. 13
3.1- Cálculo em 1a. ordem.	pg. 15
3.2- Cálculo em 2a. ordem	pg. 16
4. Discussão	pg. 22
4.1- Em 1a. aproximação	pg. 22
4.2- Em 2a. aproximação	pg. 25
5. Exemplos	pg. 26
5.1- Potencial tipo Yukawa	pg. 26
5.2- Potenciais que caem com determinada potência de $ x $	pg. 27
Conclusões	pg. 31
Apêndice	pg. 33
Referências	pg. 37

I. INTRODUÇÃO.

Sabemos que, se as leis que regem um sistema físico se mantêm quando êste sofre uma transformação, temos uma teoria com certa propriedade de simetria ou invariância.

A idéia de simetria nasceu na geometria e atualmente é usada no sentido dinâmico, ou seja, temos simetrias translacional, rotacional, etc.. Seu estudo nos dá meios de obter as propriedades de um sistema, pois conhecendo-as podemos ter informações sobre as leis dinâmicas do sistema, os tipos de soluções possíveis e as leis de conservação que levam a regras de seleção.

No caso de partículas elementares o conhecimento das simetrias da teoria favorece seu estudo. Sabemos que o próprio estudo das partículas elementares levou a introdução de novas simetrias como, por exemplo, a do SU(3), que é um tipo de simetria interna. Entretanto, essa e outras simetrias são aproximadas, no sentido de que partículas de um mesmo multipletto têm comportamento diferente.

Surge então o problema de descrever as invariâncias da teoria. Assim, uma transformação de simetria corresponderia a passar de um estado ϕ a um ϕ' , conservando a probabilidade. Essa transformação deveria ser então representada por um operador unitário ou anti-unitário (Teorema de Wigner) ⁽¹⁾. Isso seria o caso de uma simetria exata; entretanto, como vimos acima, existem violações de simetria que devem ser levadas em conta.

No caso de uma teoria de campos com violação de simetria, devemos considerar a existência de uma transformação:

$$\psi \longrightarrow \psi_T \quad (1)$$

que conserva as leis de movimento e as regras de comutação mas que não implica na existência de um operador unitário T tal que:

$$\psi_T = T \psi T^{-1}$$

$$T |0\rangle = |0\rangle$$

Isso corresponde à noção de vácuo assimétrico introduzida por Heisenberg (2).

A não existência de T satisfazendo (2) corresponde ao que se chama "quebra espontânea de simetria". Podemos estudá-la em teorias de campos relativísticas e não relativísticas.

1. Quebra Espontânea de Simetrias em Teorias Relativísticas.

Um teorema importante nêsse assunto é o chamado Teorema de Goldstone (3): "Se a lei de conservação local leva a uma quebra espontânea de simetria então a menor massa da teoria deve ser zero." Basicamente a idéia do teorema pode ser vista como (4):

Tomemos a lei de conservação local associada a uma simetria contínua

$$\frac{\partial j^u}{\partial x^u} = 0 \tag{1.1}$$

portanto

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \frac{d}{dt} \int j^0(\underline{x}, t) d^3x = 0 \tag{1.2}$$

daí

$$[P_\mu, Q] = 0 \tag{1.3}$$

Se temos "quebra" de simetria então $Q|0\rangle = |0'\rangle \neq |0\rangle$, e de (1.3) vem:

$$P_\mu Q |0\rangle = P_\mu |0'\rangle = Q P_\mu |0\rangle = Q |0\rangle = |0'\rangle = 0$$

então temos um estado cuja energia tende a zero com o momentum, portanto, de massa zero.

Pode-se mostrar que numa teoria relativística, com corrente conservada, existe uma simetria se a menor massa da teoria não é zero (4). Isso de certa maneira corresponde ao teorema de Goldstone. Na verdade, o que se prova é que se existe um "gap" entre o vácuo e a menor massa, então uma simetria contínua correspondente a (1), leva à existência de um operador unitário que satisfaz (2). Mais

tarde este resultado foi reforçado obtendo-se de maneira mais rigo-
rosa o teorema de Goldstone.

Para provar esse teorema os autores fazem cinco hipóteses, uma
das quais é a de comutatividade local, isto é,

$$\left[\psi(\underline{x}, t), \psi^\dagger(\underline{x}', t') \right] = 0 \quad \text{se } (\underline{x} - \underline{x}')^2 < 0, \quad \text{e} \quad (1.4)$$

constroem um operador $T(\zeta)$ satisfazendo

$$T(\zeta) \psi_f T^{-1}(\zeta) = \psi_{f_\zeta}$$

$$T(\zeta) = e^{i\zeta Q}$$

$$T(\zeta) |0\rangle = |0\rangle$$

onde $\psi_f \rightarrow \psi_{f_\zeta}$ é a transformação correspondente à simetria.

Os operadores de campo ψ são tomados como operadores quase-lo-
cais:

$$\psi = \int f_{i_1 \dots i_n}(\underline{x}_1 \dots \underline{x}_n) \psi_{i_1}(\underline{x}_1) \dots \psi_{i_n}(\underline{x}_n) \bar{d}^4 x_1 \dots \bar{d}^4 x_n$$

sendo f_i funções classe S, isto é, caem a zero mais rapidamente que
qualquer potência de $|\underline{x}|^{-1}$, quando $|\underline{x}| \rightarrow \infty$, bem como todas as suas de-
rivadas.

2. Quebra Espontânea de Simetria em Teorias Não Relativísticas.

Corresponde ao estudo de sistemas de muitos corpos. Um exemplo
de simetria quebrada pode ser visto no caso de um cristal infinito
que não tem o momentum linear exatamente conservado. Apesar de par-
tirmos de uma equação que é invariante por translação, a de Schrö-
dinger, temos o estado fundamental do cristal não invariante por
translações, pois, pode observar momentum ser se alterar, o que a-
contece, por exemplo, no espalhamento elástico de nêutrons pelo
cristal.

As excitações de grande comprimento de onda em um cristal, no
limite em que o momentum $\underline{k} \rightarrow 0$ (que corresponde a uma translação

do cristal), têm energia nula pois $\omega(\underline{k}) \propto |\underline{k}|$. Vemos, então, que existe uma situação semelhante à prevista pelo Teorema de Goldstone.

Para estender os resultados obtidos em teorias relativísticas a sistemas de muitos corpos devemos estudar o comportamento dos comutadores de operadores locais, para tempos diferentes, numa teoria não relativística. Esperamos que nesse caso o alcance do comutador esteja relacionado com o alcance do potencial. Assim, se tivéssemos forças de curto alcance e um "gap" de energia, por extensão do teorema citado no item anterior, não haveriam, associadas a leis de conservação local, simetrias espontaneamente quebradas.

Entretanto, como já foi mostrado⁽⁵⁾, há uma incompatibilidade entre forças de curto alcance e "gap" de energia, que pode ser interpretada como devido à quebra espontânea da invariança de Galileu, no caso de existir uma relação direta entre o alcance do potencial e o comportamento do comutador.

A verificação da incompatibilidade entre forças de curto alcance e "gap" de energia, usando transformações de Galileu, pode ser vista da seguinte maneira:

Sejam ρ e \underline{j} , respectivamente, a densidade de matéria e a corrente de matéria, $|0\rangle$ o estado fundamental do sistema e G_e o gerador das transformações de Galileu dado por

$$G_e = \int \underline{x}_0 \rho(\underline{x}, 0) f(\underline{x}) d^3x \quad (2.1)$$

onde $f(\underline{x})$ é uma função de "smearing".

Sabemos que dada uma corrente \underline{j} por uma transformação de Galileu teremos

$$\underline{j} \rightarrow \underline{j} + \underline{v}\rho$$

e portanto:

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \langle 0 | [G_e, j_k(0)] | 0 \rangle \propto \langle 0 | \rho(0) | 0 \rangle \delta_{ek} \neq 0 \quad (2.2)$$

e que corresponde à quebra espontânea da invariança de Galileu.

Por outro lado, veremos que

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \langle 0 | \frac{\partial G_e}{\partial t}, j_k(g) | 0 \rangle = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{com } j_k(g) = \int d^3x g(\underline{x}) j_k(\underline{x})$$

desde que se admita forças de curto alcance e que o comportamento do comutador dos campos esteja relacionado com o alcance do potencial, e a lei de conservação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \underline{j} = 0 \quad (2.4)$$

De fato, temos de (2.1) e (2.4):

$$\frac{\partial G_e}{\partial t} = \int d^3x x_e \frac{\partial \rho}{\partial t} f(\underline{x}) = - \sum_m \int d^3x x_e \frac{\partial j_m}{\partial x_m} f(\underline{x}) \quad (2.5)$$

Fazendo integração por partes e lembrando que $f(\underline{x}) \rightarrow 0$ muito rapidamente para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$, obtemos de (2.5):

$$\frac{\partial G_e}{\partial t} = + \int d^3x (\delta_{em} j_m(\underline{x}, 0) f(\underline{x}) + x_e \frac{\partial f}{\partial x_m} j_m(\underline{x}, 0)) \quad (2.6)$$

Substituindo-se (2.6) no primeiro membro de (2.3) vem

$$\begin{aligned} \lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \langle 0 | \left[\frac{\partial G_e}{\partial t}, j_k(g) \right] | 0 \rangle &= \int_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} d^3x f(\underline{x}) \langle 0 | [j_e(\underline{x}, 0), j_k(g)] | 0 \rangle + \\ &+ \int_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} d^3x x_e \frac{\partial f}{\partial x_m} \langle 0 | [j_m(\underline{x}, 0), j_k(g)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que o 2º termo de (2.7) se anula pois

(a) $\frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$ para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$

(b) $[j_m(\underline{x}, 0), j_k(g)] \rightarrow 0$ pela hipótese de forças de curto alcance e a relação com o comutador. Quanto ao 1º termo temos:

$$\frac{\partial G_e}{\partial t} = P_e \quad (P_e : \text{momentum linear}) \quad (2.8)$$

portanto de (2.6) e (2.8)

$$\int d^3x j_e(\underline{x}, 0) f(\underline{x}) = P_e \quad (2.9)$$

e substituindo no 1º termo de (2.7) vem

$$\int_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} d^3x f(\underline{x}) \langle 0 | [j_e(\underline{x}, 0), j_k(g)] | 0 \rangle = \langle 0 | [P_e, j_k(g)] | 0 \rangle = 0$$

pois $P_e |0\rangle = 0^{(*)}$.

Portanto (2.3) é válido.

Admitindo-se, então, que haja um "gap" de energia demonstra-se (4) que (2.3) implica em

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \langle 0 | [G_e, j_k(0)] | 0 \rangle = 0 \quad (2.10)$$

Portanto (2.2) e (2.10) são incompatíveis e como a invariância de Galileu é espontaneamente quebrada, concluímos que a incompatibilidade vem de admitirmos ao mesmo tempo forças de curto alcance e "gap" de energia.

Vemos que também para essa demonstração é importante sabermos o comportamento dos comutadores no caso não relativístico.

Além da sua importância no problema de quebra espontânea de simetrias, o estudo do comportamento dos comutadores no caso não relativístico pode ser útil na extensão a teorias não relativísticas (com forças de curto alcance) de resultados da teoria relativística que dependem da comutatividade local.

(*) $P_e |0\rangle = 0$ corresponde à invariância de Galileu do estado fundamental do sistema e que pode ser demonstrada, usando técnicas semelhantes, se fizermos as hipóteses de forças de curto alcance e "gap" de energia.

II. COMUTADORES.

1. Apresentação do problema.

Pelo capítulo precedente vemos que será importante analisar o comportamento dos comutadores de campo, para tempos diferentes, em teorias não relativísticas para o estudo de quebra espontânea de simetrias em sistemas de muitos corpos.

Em teorias relativísticas temos ⁽⁶⁾:

$$\left[\psi(\underline{x}, t), \psi^+(\underline{x}', t') \right]_{\pm} = 0 \quad \text{para } (x-x')^2 < 0 \quad (1.1)$$

onde $\underline{x} = (ct, \underline{x})$,

isto é, entre pontos separados por um intervalo tipo espaço não há propagação de nenhum efeito.

No caso não relativístico o equivalente à condição de intervalo tipo espaço é

$$|\underline{x} - \underline{x}'| \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

e, portanto, (1.1) deverá ser substituído por:

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \left[\psi(\underline{x}, t), \psi^+(0, 0) \right]_{\pm} |\underline{x}|^n = 0 \quad (1.3)$$

quando os potenciais forem de alcance suficientemente curto.

Portanto, procuramos estudar o comportamento de $\left[\psi(\underline{x}, t), \psi^+(0) \right]$

Tal estudo é baseado nas relações de comutação canônicas e nas equações de movimento. Estas só têm solução exata nos casos limites de acoplamento forte e fraco, verificando-se que o decréscimo dêsse comutador, para tempos diferentes e grande separação espacial, está relacionado com o decréscimo do potencial entre as partículas ⁽⁷⁾.

Nosso propósito foi calcular $\left[\psi(\underline{x}, t), \psi^+(0, 0) \right]$ para o caso intermediário, usando teoria de perturbações até a segunda ordem. Verificamos que (1.3) é satisfeita para potenciais de curto alcance, pois o comportamento dêsse comutador no infinito é essencialmente controlado pelo alcance do potencial.

2. Cálculo dos comutadores em casos limites.

Consideramos a hamiltoniana (7)

$$H = H_0 + V \quad (2.1)$$

onde

$$a) H_0 = \frac{1}{2m} \int \underline{\nabla} \psi_0^+(\underline{x}') \underline{\nabla} \psi_0(\underline{x}') d^3x' \quad (2.2)$$

$$b) V = \frac{1}{2} \int \psi_0^+(\underline{x}', t') \psi_0^+(\underline{y}', t') \psi_0(\underline{x}', t') \psi_0(\underline{y}', t') V(\underline{x}' - \underline{y}') d^3x' d^3y' \quad (2.3)$$

c) ψ_0 e ψ_0^+ : sistema de operadores criação e destruição satisfazendo as relações de comutação canônicas:

$$[\psi_0(\underline{x}, t), \psi_0^+(\underline{x}', t')] = G_0(\underline{x} - \underline{x}', t - t') \quad (2.4)$$

$$[\psi_0(\underline{x}, t), \psi_0^+(\underline{x}', t)] = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \quad (2.5)$$

$$[\psi_0(\underline{x}, t), \psi_0(\underline{x}', t')] = [\psi_0^+(\underline{x}, t), \psi_0^+(\underline{x}', t')] = 0 \quad (2.6)$$

d) $V(\underline{x}' - \underline{y}')$: potencial entre as partículas.

Os casos limites correspondem a:

$$2.1) V = 0$$

$$2.2) H_0 = 0, \text{ isto é, } m \rightarrow \infty$$

Para o caso 2.1) a solução corresponde à solução livre e para que o comutador vá a zero mais rápido que qualquer potência de $|\underline{x}|^1$ devemos fazer um "smearing" na solução livre, isto é, consideramos um campo "quase-localizado" para não termos componentes de momentum muito altas, assim:

$$\psi_f(\underline{x}, t) = \int f(\underline{x}') \psi_0(\underline{x}' + \underline{x}, t) d^3x \quad (2.7a)$$

$$\psi_g^+(0, 0) = \int g(\underline{x}) \psi_0^+(\underline{x}, 0) d^3x \quad (2.7b)$$

onde $f(\underline{x})$ e $g(\underline{x})$ são funções classe S.

Então

$$C(\underline{x}, t) = [\psi_f(\underline{x}, t), \psi_g^+(0)] = \int d^3x' d^3x'' f(\underline{x}') g(\underline{x}'').$$

$$\psi_f(\underline{x} + \underline{x}', t), \psi_g^+(\underline{x}'', 0) =$$

$$= \int d^3x' d^3x'' f(\underline{x}') g(\underline{x}'') G_0(\underline{x} + \underline{x}' - \underline{x}'', t)$$

Usando transformada de Fourier:

$$\left. \begin{aligned} f(\underline{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \underline{x}'} \tilde{f}(\mathbf{p}_1) d^3p_1 \\ g(\underline{x}'') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \underline{x}''} \tilde{g}(\mathbf{p}_2) d^3p_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.8a)$$

e (8):

$$G_0(\underline{x} + \underline{x}' - \underline{x}'', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}_3 \cdot (\underline{x} + \underline{x}' - \underline{x}'') - \frac{i\mathbf{p}_3^2}{2m} t} d^3p_3 \quad (2.8b)$$

e sabendo-se que

$$\int e^{i\mathbf{p} \cdot \underline{x}} d^3x = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}) \quad (2.9)$$

vem

$$C(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 \tilde{f}(\mathbf{p}_1) \tilde{g}(\mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \cdot$$

$$\cdot e^{i\mathbf{p}_3 \cdot \underline{x}} e^{-i\mathbf{p}_3^2 t/2m}$$

Integrando em d^3p_1 e d^3p_2 vem:

$$C(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \tilde{f}(-\mathbf{p}) \tilde{g}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} e^{i\mathbf{p} \cdot \underline{x}} \quad (2.10)$$

ou

$$C(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \tilde{C}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p} \cdot \underline{x}} \quad \text{onça}$$

$$\tilde{C}(\mathbf{p}, t) = \tilde{f}(-\mathbf{p}) \tilde{g}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m}.$$

Para que (1.3) seja válido é necessário que $C(\underline{x}, t) \rightarrow 0$ mais rápido que $1/x^n$, onde x^n indica $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ com $n_1+n_2+n_3 = n$. Tal fato pode ser verificado usando-se alguns teoremas sôbre Transformada de Fourier, (9):

Seja $f(x) \in L_1$, isto é $\int |f(x)| dx = ||f||$ existe então

$$\tilde{f}(p) = \int f(x) e^{-ip \cdot x} dx \quad \text{e} \quad |\tilde{f}(p)| \leq ||f||$$

T.1- Se $x^n f(x) \in L_1$, então $\tilde{f}(p)$ é n vêzes derivável.

T.2- Se $f(x)$ é n vêzes derivável e se $f(x)$ e suas derivadas $\in L_1$, então $\tilde{f}(p) \rightarrow 0$ para $p \rightarrow \infty$ mais rápido que $1/p^n$.

Portanto devemos mostrar que: a) $\tilde{C}(p, t)$ é n vêzes derivável; b) $\tilde{C}(p, t), \dots, \tilde{C}^{(n)}(p, t) \in L$. Assim, $C(\underline{x}, t) \rightarrow 0$ mais rápido que $1/x^n$

De fato $\tilde{C}(p, t)$ pois $\tilde{f}(-p)$ e $\tilde{g}(p)$ são n vêzes derivável (por T.1) o mesmo acontecendo com a exponencial. Por outro lado (b) também se verifica pois $\tilde{f}(-p)$ e $\tilde{g}(p)$ sendo funções classe S, tôdas as suas derivadas também o são, e caem mais rápido que qualquer potência de p^i no infinito, dando conta dos têrmos em que aparece um polinômio em p devido às derivadas da exponencial.

Portanto, para o caso 2.1) vale

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^n [\psi_0(x, t), \psi(0, 0)] = 0$$

Para 2.2) temos solução exata baseando-se no fato que $H(t) = H(0)$, pois nêsse caso

$$H(t) = V = \frac{1}{2} \int \psi_0^+(\underline{x}', t') \psi_0^+(\underline{y}', t') \psi_0(\underline{x}', t') \psi_0(\underline{y}', t') \cdot v(\underline{x}' - \underline{y}') d^3 x' d^3 y' \quad (2.11)$$

e, como $\rho = \psi_0^+(\underline{x}', t') \psi_0(\underline{x}', t')$ temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{j} = 0 \quad \text{com} \quad \underline{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^+ \underline{\nabla} \psi - \underline{\nabla} \psi^+ \psi)$$

mas, nêsse caso $m \rightarrow \infty$, portanto $\underline{j} = 0$.

portanto $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ então $\rho(\underline{x}, 0) = \rho(\underline{x}, t)$ (2.12)

Então

$$i\hbar \dot{\psi}_0(\underline{x}, t) = [\psi_0(\underline{x}, t), H] = [\psi_0(\underline{x}, t), V]$$

portanto

$$i\hbar \dot{\psi}_0(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \int d^3x' d^3y' V(\underline{x}' - \underline{y}') [\psi_0(\underline{x}, t), \psi_0^+(\underline{x}', t') \psi_0^+(\underline{y}', t')].$$

$$\cdot \psi_0(\underline{x}, t') \psi_0(\underline{y}, t')$$

Usando (2.4) e (2.12) vem:

$$i\hbar \dot{\psi}(\underline{x}, t) = \int d^3y' V(\underline{x} - \underline{y}') \psi^+(\underline{y}', 0) \psi(\underline{y}, 0) \psi(\underline{x}, t)$$

portanto

$$\psi(\underline{x}, t) = T(\underline{x}, t) \psi(\underline{x}, 0) \tag{2.13}$$

onde

$$T(\underline{x}, t) = \exp \left(- \frac{it}{\hbar} \int d^3y V(\underline{x} - \underline{y}) \psi^+(\underline{y}, 0) \psi(\underline{y}, 0) \right) \tag{2.14}$$

Usando (2.13) vem:

$$[\psi_0(\underline{x}, t), \psi_0^+(0, 0)] = [T(\underline{x}, t) \psi_0(\underline{x}, 0), \psi_0^+(0, 0)] =$$

$$= T(\underline{x}, t) \delta^3(\underline{x}) + [T(\underline{x}, t), \psi_0^+(0, 0)] \psi_0(\underline{x}, 0) \tag{2.15}$$

Devemos calcular $A = [T(\underline{x}, t), \psi_0^+(0)]$:

$$A = T(\underline{x}, t) \psi_0^+(0) - \psi_0^+(0) T(\underline{x}, t) =$$

$$= T(\underline{x}, t) \left(\psi_0^+(0) - T^{-1}(\underline{x}, t) \psi_0^+(0) T(\underline{x}, t) \right) \tag{2.16}$$

Seja $B(t) = T^{-1}(\underline{x}, t) \psi_0^+(0) T(\underline{x}, t)$, vem

$$\frac{dB(t)}{dt} = it T^{-1}(\underline{x}, t) \left[\int V(\underline{x}, \underline{y}) \psi^+(\underline{y}, 0) \psi(\underline{y}, 0) d^3y, \psi_0^+(0) \right] T(\underline{x}, t)$$

Portanto, $B(t)$ é calculado a partir da equação diferencial:

$$\frac{dB(t)}{dt} = it V(\underline{x}) B(t)$$

com a condição: $B(t) = \psi_0^+(0)$ para $t = 0$, pois B deve ser nulo no instante inicial.

Então,

$$B(t) = e^{it \int V(\underline{x})} \psi_0^+(0) \quad (2.17)$$

que substituindo em (2.16), vem

$$A = T(\underline{x}, t) (1 - e^{it \int V(\underline{x})}) \psi_0^+(0) \quad (2.18)$$

De (2.15) e (2.18):

$$\begin{aligned} [\psi_0(\underline{x}, t), \psi_0^+(0, 0)] &= T(\underline{x}, t) \delta^3(\underline{x}) + (1 - e^{it \int V(\underline{x})}) \\ &\quad \cdot T(\underline{x}, t) \psi_0^+(0, 0) \psi_0(\underline{x}, 0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$, a 1.ª parcela de (2.19) não contribui e, sendo o potencial de curto alcance, o comutador vai a zero com o potencial.

Como no caso anterior, que corresponde ao termo de energia cinética, o comutador vai a zero mais rápido que qualquer potência de $|\underline{x}|^{-4}$, podemos esperar que o comportamento do comutador seja controlado pelo alcance do potencial. Tal fato será verificado a seguir, usando teoria de perturbações.

Pelo ítem 2.1) vemos que a função $G_0(\underline{x}-\underline{x}', t-t')$ oscila muito para $|\underline{x}-\underline{x}'| \rightarrow \infty$, mas tende a zero muito rapidamente desde que se considerem campos quasi-locais. Portanto, nêsse caso, $G_0(\underline{x}-\underline{x}', t-t')$ é de curto alcance. Essa propriedade é importante nos cálculos feitos a seguir.

3. Cálculo do comutador por teoria de perturbação.

Consideremos

$$H = H_C + H_I \quad (3.1)$$

onde $H_I = V$ de (2.3), e vamos expressar os operadores de campo em termos das soluções livres, para as quais conhecemos os comutadores.

Sabemos que

$$\psi_H(\underline{x}, t) = e^{iHt} \psi_0(\underline{x}, 0) e^{-iHt} \quad (3.2)$$

que pode ser escrito como

$$H(\underline{x}, t) = e^{iH_C t} U(t) \psi_0(\underline{x}, 0) U^{-1}(t) e^{-iH_0 t} \quad (3.3)$$

isto é, separamos e^{iHt} em dois fatores $e^{iH_0 t}$ e $U(t)$ que dependem respectivamente de H_0 e H_I :

$$e^{iHt} = e^{iH_0 t} U(t) \quad (3.4)$$

A seguir determinamos $U(t)$, derivando (3.4) em relação a t e chegando a:

$$\frac{dU(t)}{dt} = i H_I(-t) U(t) \quad (3.5)$$

A solução de (3.5) é obtida⁽¹⁰⁾ transformando-a numa equação integral:

$$U(t) = U(0) + i \int_0^t dt' H_I(-t') U(t') \quad (3.6)$$

que é resolvida pelo método iterativo.

Nesse caso, obtemos

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t dt_1 \dots dt_n T \{H_I(-t_1) \dots H_I(-t_n)\} \quad (3.7)$$

onde $T\{\dots\}$ indica o produto ordenado no tempo.

Podemos então escrever:

$$U(t) = T \exp \left[i \int_0^t H(-t') dt' \right] \quad (3.8)$$

como solução de (3.5).

Portanto, substituindo-se (3.8) em (3.3) vem:

$$\psi_H(\underline{x}, t) = e^{iH_0 t} \left(T \exp \left[i \int_0^t H_I(-t') dt' \right] \right) \psi_0(\underline{x}, 0) \left(T \exp \left[i \int_0^t H_I(-t') dt' \right] \right)^{-1} e^{-iH_0 t}$$

A seguir, considerando H_I como uma perturbação, desenvolvemos (3.8) até segunda ordem:

$$U(t) = 1 + i \int_0^t H_I(-t') dt' - \frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' T(H(-t') H(-t''))$$

obtendo-se:

$$U(t) = 1 + i \int_0^t H_I(-t') dt' - \int_0^t dt' \int_0^t dt'' H(-t') H(-t'') \theta(t' - t'') + \dots$$

(3.9)

$$U^{-1}(t) = 1 - i \int_0^t H_I(-t') dt' - \int_0^t dt' \int_0^t H(-t'') H(-t') \theta(t' - t'') dt''$$

De (3.3) e (3.9), lembrando que:

$$e^{iH_0 t} \psi_0(\underline{x}, 0) e^{-iH_0 t} = \psi_c(\underline{x}, t)$$

$$e^{iH_0 t} \int_0^t H_I(-t') dt' e^{-iH_0 t} = \int_0^t H(t') dt'$$

vem, considerando até 2a. ordem:

$$\psi_H(\underline{x}, t) = \psi_c(\underline{x}, t) + \psi^{(1)}(\underline{x}, t) + \psi^{(2)}(\underline{x}, t) \tag{3.10}$$

onde

$$\psi^{(1)}(\underline{x}, t) = i \left[\int_0^t H_I(t') dt', \psi_0(\underline{x}, t) \right] \tag{3.10a}$$

$$\psi^{(2)}(\underline{x}, t) = \psi_a^{(2)}(\underline{x}, t) + \psi_b^{(2)}(\underline{x}, t) + \psi_c^{(2)}(\underline{x}, t)$$

com

$$\psi_a^{(2)}(\underline{x}, t) = -\psi_0(\underline{x}, t) \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' E_I(t'') E_I(t') e^{(t''-t')}$$

$$\psi_b^{(2)}(\underline{x}, t) = - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' E_I(t') E_I(t'') e^{(t''-t')} \tag{3.10b}$$

$$\psi_c^{(2)}(\underline{x}, t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' E_I(t') \psi_c(\underline{x}, t) E_I(t'')$$

Devemos agora calcular $C(\underline{x}, t) = [\psi_F(\underline{x}, t), \psi^+(0, 0)]$ até segunda ordem; evidentemente, em ordem zero, isto é, com $E_I = 0$, temos $\psi_F(\underline{x}, t) = \psi_0(\underline{x}, t)$ que corresponde ao caso 2.1).

3.1- Cálculo em 1a. ordem.

Temos

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(\underline{x}, t) &= \left[i \int_0^t E_I(t') dt', \psi_0(\underline{x}, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t dt' \int d^3x' \int d^3y' V(\underline{x}'-\underline{y}') \left[\psi_0^+(\underline{x}', t') \psi_0^+(\underline{y}', t'), \psi(\underline{x}, t) \right] \\ &\quad \cdot \psi_0(\underline{x}', t') \psi_0(\underline{y}', t') \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(\underline{x}, t) &= -i \int_0^t dt' \int d^3x' \int d^3y' V(\underline{x}'-\underline{y}') G_0(\underline{x}-\underline{x}', t-t') \psi_0^+(\underline{y}', t') \\ &\quad \cdot \psi_0(\underline{x}', t') \psi_0(\underline{y}', t') \end{aligned} \tag{3.11}$$

Então

$$C^{(1)}(\underline{x}, t) = [\psi^{(1)}(\underline{x}, t), \psi^+(0, 0)] \tag{3.12}$$

ou seja, de (3.11):

$$\begin{aligned} C^{(1)}(\underline{x}, t) &= -i \int_0^t dt' \int d^3x' \int d^3y' V(\underline{x}', \underline{y}') G_0(\underline{x}-\underline{x}', t-t') \psi_0^+(\underline{y}', t') \\ &\quad \cdot [\psi_0(\underline{x}', t') \psi_0(\underline{y}', t'), \psi_0^+(0, 0)] \end{aligned}$$

e usando (2.4) e (2.6) vem

$$\begin{aligned} C^{(1)}(\underline{x}, t) &= -i \int_0^t dt' \int d^3x' \int d^3y' V(\underline{x}'-\underline{y}') G_0(\underline{x}-\underline{x}', t-t') \\ &\quad \cdot \{ G_0(\underline{x}', t') \psi_0^+(\underline{y}', t') \psi_0(\underline{y}', t') + \\ &\quad + G_0(\underline{y}', t') \psi_0^+(\underline{y}', t') \psi_0(\underline{x}', t') \} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para uma primeira discussão consideramos (vide Apêndice)

$$\langle \phi_1 | \psi_0^+(\underline{y}', t') \psi_0(\underline{y}', t') | \phi_2 \rangle = \rho_1 \text{ (constante)}$$

$$\langle \phi_1 | \psi_0^+(\underline{y}', t') \psi_0(\underline{x}', t') | \phi_2 \rangle = \rho_2 \text{ (constante)}$$

portanto

$$C^{(1)}(\underline{x}, t) = -i \rho_1 \int_0^t dt' \int d^3x' d^3y' V(\underline{x}' - \underline{y}') G_0(\underline{x} - \underline{x}', t - t') G_0(\underline{x}', t') + \\ - i \rho_2 \int_0^t dt' \int d^3x' d^3y' V(\underline{x}', \underline{y}') G_0(\underline{x} - \underline{x}', t - t') G_0(\underline{y}', t')$$

isto é,

$$C^{(1)}(\underline{x}, t) = C_{\rho_1}^{(1)}(\underline{x}, t) + C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \quad (3.15)$$

Usando Transformada de Fourier, vem:

$$C_{\rho_1}^{(1)}(\underline{x}, t) = \frac{-i \rho_1}{(2\pi)^9} \int_0^t dt' \int d^3x' d^3y' d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 \tilde{V}(\underline{p}_1) e^{i \underline{p}_1 \cdot (\underline{x}' - \underline{y}')} \\ \cdot e^{i \underline{p}_2 \cdot (\underline{x} - \underline{x}')} e^{i \underline{p}_3 \cdot \underline{x}'} e^{-\frac{i}{2r} p_2^2 (t - t')} e^{-\frac{i}{2m} p_3^2 t'} \quad (3.16)$$

$$C_{\rho_1}^{(1)}(\underline{x}, t) = -\frac{i \rho_1}{(2\pi)^3} \int_0^t dt' \int d^3p \tilde{V}(0) e^{-\frac{i p^2}{2r} t} e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}}$$

portanto

$$C_{\rho_1}^{(1)}(\underline{x}, t) = -\frac{i \rho_1 t}{(2\pi)^3} C_0(\underline{x}, t) \tilde{V}(0) \quad (3.16a)$$

De modo análogo

$$C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) = -\frac{i \rho_2 t}{(2\pi)^3} \int d^3p \tilde{V}(\underline{p}) e^{-\frac{i p^2}{2m} t} e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}} \quad (3.17)$$

Vamos calcular em segunda ordem e a discussão será feita no próximo ítem.

3.2- Cálculo em 2a. ordem.

Procuraremos, primeiramente expressar $\psi^{(2)}(\underline{y}, t)$ como um comutador. Para isso modificamos $\psi_C^{(2)}(\underline{x}, t)$ como se segue:

$$\psi_c^{(2)}(\underline{x}, t) = \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' H_I(t') \psi_0(\underline{x}, t) H_I(t'') + \int_0^t dt'' \int_{t''}^t dt' H_I(t') \cdot \psi_0(\underline{x}, t) H_I(t'')$$

portanto

$$\psi_c^{(2)}(\underline{x}, t) = \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \{ H_I(t') \psi_0(\underline{x}, t) H_I(t'') + H_I(t'') \psi_0(\underline{x}, t) H_I(t') \} \cdot \theta(t''-t') \quad (3.18)$$

Dai, de (3.10) e (3.18) vem

$$\psi^{(2)}(\underline{x}, t) = \int_0^t dt' dt'' \{ -\psi_0(\underline{x}, t) H_I(t'') H_I(t') - H_I(t') H_I(t'') \psi_0(\underline{x}, t) + H_I(t') \psi_0(\underline{x}, t) H_I(t'') H_I(t'') \psi_0(\underline{x}, t) H_I(t') \} \theta(t''-t')$$

portanto

$$\psi^{(2)}(\underline{x}, t) = \int_0^t dt' dt'' [H_I(t'), [\psi_0(\underline{x}, t), H_I(t'')]] \theta(t''-t') \quad (3.19)$$

Usando as expressões de $H_I(t')$ e $H_I(t'')$ dadas por (2.3) e as relações (2.4), (2.5), (2.6), podemos desenvolver o comutador (3.19) lembrando que $V(\underline{x}'-\underline{y}') = V(|\underline{x}'-\underline{y}'|)$,

$$[\psi_0(\underline{x}, t), H_I(t'')] = 2 \int d^3 \underline{x}'' d^3 \underline{y}'' V(\underline{x}''-\underline{y}'') G_0(\underline{x}-\underline{x}'', t-t'') \psi^+(\underline{y}'', t'') \cdot \psi(\underline{x}'', t'') \psi(\underline{y}'', t'')$$

e

$$[H_I(t'), [\psi_0(\underline{x}, t), H_I(t'')]] = 2 \int d^3 \underline{x}'' d^3 \underline{y}'' d^3 \underline{x}' d^3 \underline{y}' V(\underline{x}'-\underline{y}') V(\underline{x}''-\underline{y}'') \cdot G_0(\underline{x}-\underline{x}'', t-t'') [\psi^+(\underline{x}', t') \psi^+(\underline{y}', t') \psi(\underline{x}', t') \psi(\underline{y}', t'), \psi^+(\underline{y}'', t'') \cdot \psi(\underline{x}'', t'') \psi(\underline{y}'', t'')]$$

que desenvolvendo, nos leva a

$$\psi^{(2)}(\underline{x}, t) = 2 \int_0^t dt' dt'' \theta(t''-t') \int d^3 \underline{x}' d^3 \underline{y}' d^3 \underline{x}'' d^3 \underline{y}'' V(\underline{x}'-\underline{y}') V(\underline{x}''-\underline{y}'') \cdot G_0(\underline{x}-\underline{x}'', t-t'') (K + L + M + N + P) \quad (3.20)$$

onde, usando a notação simplificada

$$\psi_0(x') = \psi_0(\underline{x}', t')$$

$$G_0(x'-y'') = G_0(\underline{x}'-y'', t'-t'')$$

temos:

$$\left. \begin{aligned} K &= 2 G_0(x'-y'') \psi_0^+(x') \psi_0^+(y') \psi_0(y') \psi_0(x'') \psi_0(y'') \\ L &= - G_0(x''-y') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(x') \psi_0(y'') \psi_0(x') \psi_0(y') \\ M &= - G_0(y''-y') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(x') \psi_0(x'') \psi_0(x') \psi_0(y') \\ N &= - G_0(x''-x') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(y') \psi_0(x') \psi_0(y') \\ P &= - G_0(y''-x') \psi_0^+(y'') \psi_0(x'') \psi_0^+(y') \psi_0(x') \psi_0(y') \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Uma vez determinado $\psi^{(2)}(\underline{x}, t)$ passamos ao cálculo de:

$$\begin{aligned} C^{(2)}(\underline{x}, t) &= [\psi^{(2)}(\underline{x}, t), \psi_0^+(0, 0)] = 2 \int_0^t dt' dt'' d^3x' d^3y' d^3x'' d^3y'' \cdot \\ &\cdot V(\underline{x}''-\underline{y}'') G_0(x-x'') \{ [K, \psi_0^+(0)] + [L, \psi_0^+(0)] + [M, \psi_0^+(0)] + [N, \psi_0^+(0)] + \\ &+ [P, \psi_0^+(0)] \} \theta(t''-t') \end{aligned} \quad (3.22)$$

Temos (3.22) constando dos quinze termos seguintes:

$$2 \int_0^t dt' dt'' d^3x' d^3y' d^3x'' d^3y'' \theta(t''-t') V(\underline{x}'-\underline{y}') V(\underline{x}''-\underline{y}'') G_0(x-x'') \quad x$$

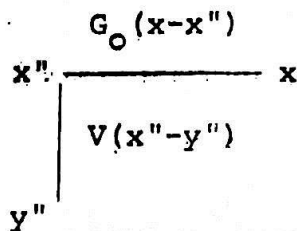
$$\left\{ \begin{aligned} &2G_0(x'-y'') G_0(x'') \psi_0^+(x') \psi_0^+(y') \psi_0(y') \psi_0(y'') & (a) \\ &2G_0(x'-y'') G_0(y'') \psi_0^+(x') \psi_0^+(y') \psi_0(y') \psi_0(x'') & (b) \\ &2G_0(x'-y'') G_0(y') \psi_0^+(x') \psi_0^+(y') \psi_0(x'') \psi_0(y'') & (c) \\ &-G_0(x''-y') G_0(x') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(x') \psi_0(y') \psi_0(y'') & (d) \\ &-G_0(x''-y') G_0(y'') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(x') \psi_0(y') \psi_0(x') & (e) \\ &-G_0(x''-y') G_0(y') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(x') \psi_0(x') \psi_0(y'') & (f) \\ &-G_0(y''-y') G_0(x'') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(x') \psi_0(y') \psi_0(x') & (g) \\ &-G_0(y''-y') G_0(x') \psi_0^+(y'') \psi_0^+(x') \psi_0(y') \psi_0(x'') & (h) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -G_0(y''-y')G_0(y')\psi_0^+(y'')\psi_0^+(x')\psi_0(x'')\psi_0(x') & (i) \\
 & -G_0(x''-x')G_0(y'')\psi_0^+(y'')\psi_0^+(y')\psi_0(x')\psi_0(y') & (j) \\
 & -G_0(x''-x')G_0(x')\psi_0^+(y'')\psi_0(y'')\psi_0^+(y')\psi_0(y') & (k) \\
 & -G_0(x''-x')G_0(y')\psi_0^+(y'')\psi_0(y'')\psi_0^+(y')\psi_0(x') & (l) \\
 & -G_0(y''-x')G_0(x'')\psi_0^+(y'')\psi_0^+(y')\psi_0(x')\psi_0(y') & (m) \\
 & -G_0(y''-x')G_0(x')\psi_0^+(y'')\psi_0(x'')\psi_0^+(y')\psi_0(y') & (n) \\
 & -G_0(y''-x')G_0(y')\psi_0^+(y'')\psi_0(x'')\psi_0^+(y')\psi_0(x') & (o)
 \end{aligned}$$

(3.23)

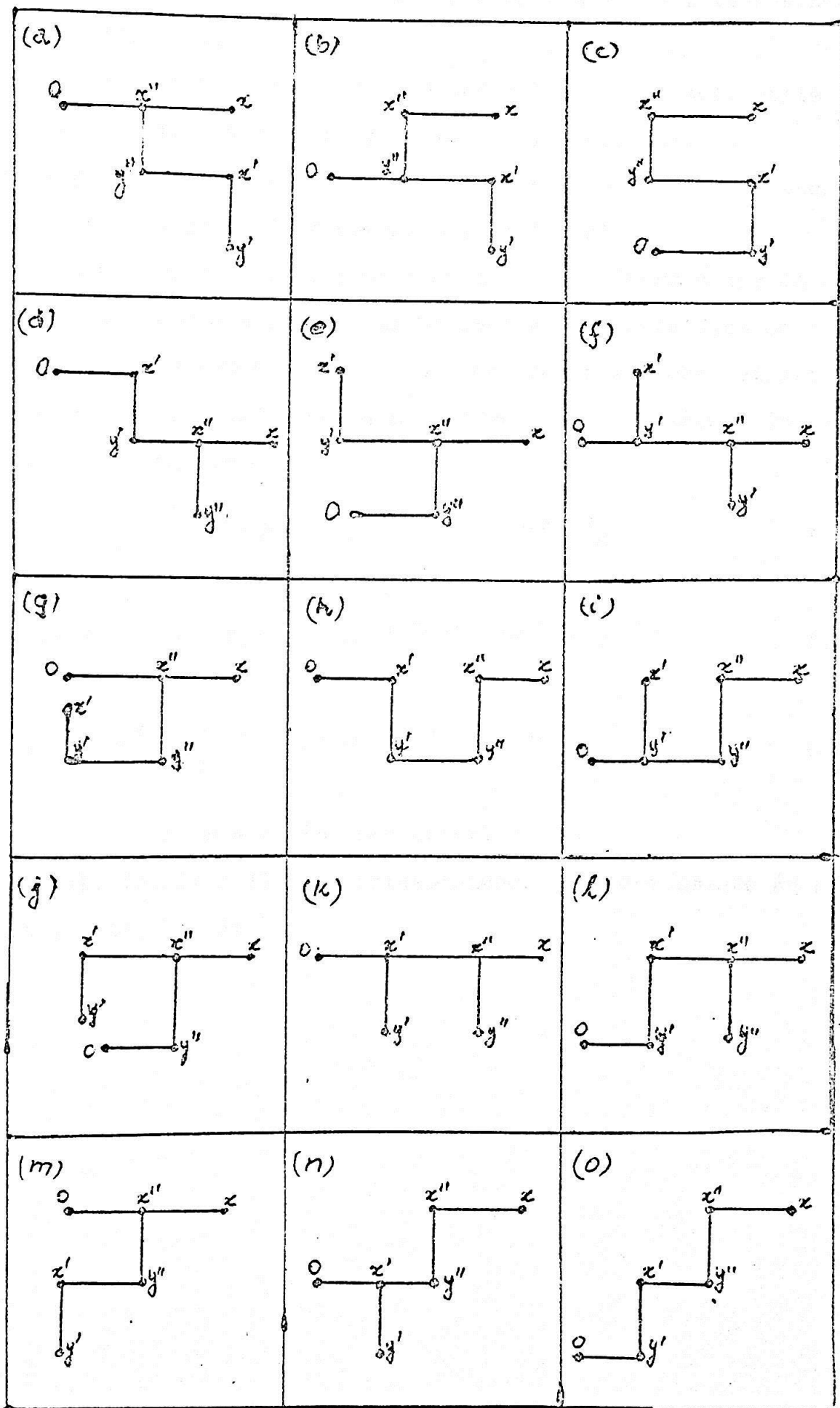
Como foi visto no ítem 2.a) o propagador é uma função de curto alcance, tratando-se de campos quase-locais, e admitindo-se que o potencial também o seja, podemos ilustrar gráficamente, (vide página seguinte), o fato de estarem próximos a \underline{x} os pontos \underline{x}' , \underline{x}'' , \underline{y}' e \underline{y}'' . Aquêles por sua vez estarão relacionados com a origem por funções de curto alcance (potencial e propagador); daí é de se esperar que $c^{(2)}(\underline{x}, t) \rightarrow 0$ para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$.

Nêsse gráfico colocamos na horizontal pontos ligados por funções G_0 e na vertical aquêles ligados pelo potencial como se segue:



Se considerarmos, como no caso da 1.a. aproximação, os elementos da matriz de produtos de ψ 's como constantes (Apêndice), poderemos nos restringir ao estudo do comportamento dos nove primeiros termos de (3.23). Os outros termos são semelhantes, bastando trocar $\underline{x}' \longleftrightarrow \underline{y}'$, o que é possível uma vez que o potencial só depende da distância entre os pontos.

Analisando a estrutura dos gráficos correspondentes aos termos de (a) a (i) podemos ver que pertencem a três classes quanto à maneira de \underline{x} estar relacionado com a origem:



- 1) \underline{x} ligado à origem só por propagadores (só por linhas horizontais): (a), (f), (g).

- 2) \underline{x} ligado à origem por propagadores e um dos potenciais (linhas horizontais e uma vertical): (b), (d), (e), (i).

- 3) \underline{x} ligado à origem por propagadores e pelos dois potenciais (linhas horizontais e duas verticais): (c), (h).

O estudo de $C^{(2)}(\underline{x}, t)$ fica reduzido a um número menor de termos, ou seja, nos dos três tipos básicos acima classificados:

De fato, passando para o espaço dos momenta, como foi feito na 1ª aproximação, verificamos que os nove primeiros termos de (3.23) são de um dos seguintes tipos:

$$C_a^{(2)}(\underline{x}, t) = \frac{at^2}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\underline{0}) \tilde{V}(\underline{0}) e^{-ip^2 t/2m} e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}} d^3 p \quad (3.24)$$

$$C_b^{(2)}(\underline{x}, t) = \frac{bt^2}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\underline{0}) \tilde{V}(\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m} e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}} d^3 p \quad (3.25)$$

$$C_c^{(2)}(\underline{x}, t) = \frac{ct^2}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\underline{p}) \tilde{V}(\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m} e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}} d^3 p \quad (3.26)$$

(a, b e c são constantes)

com (3.24), (3.25) e (3.26) correspondendo respectivamente às classificações 1), 2), 3).

4. Discussão.

Como no caso de campo livre devemos trabalhar com operadores quase-locais, daí considerarmos:

$$\psi_H(\underline{x}, t) = \int d^3x f(\underline{\bar{x}}) \dot{\psi}_H(\underline{x} + \underline{\bar{x}}, t)$$

o que corresponde à substituição de $G_0(\underline{x}, t)$ por $\int G_0(\underline{x} + \underline{\bar{x}}, t) \cdot f(\underline{\bar{x}}) d^3\bar{x}$ nas expressões de $C^{(1)}(\underline{x}, t)$ e $C^{(2)}(\underline{x}, t)$.

Ao passarmos para o espaço dos momenta a única alteração em $C^{(1)}(\underline{x}, t)$ e $C^{(2)}(\underline{x}, t)$ é o aparecimento de $\tilde{f}(-p)$ nas expressões dadas por (3.16), (3.17), (3.24), (3.25) e (3.26), como pode ser verificado facilmente.

Sendo o potencial $V(\underline{x}' - \underline{y}') = V(r)$ de curto alcance podemos admitir que

$$x^n V(r) \in L_1 \tag{4.1}$$

$$\text{onde } x^n = x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} \text{ com } n_1 + n_2 + n_3 = n \tag{4.2}$$

Nêsse caso, pelos teoremas citados em 2.a), existem, e são limitadas as funções, $\frac{\partial^l}{\partial p^l} \tilde{V}(p)$ (para $l \leq n$), onde

$$\frac{\partial^l}{\partial p^l} \tilde{V}(p) = \frac{\partial^{l_1}}{\partial p_x^{l_1}} \frac{\partial^{l_2}}{\partial p_y^{l_2}} \frac{\partial^{l_3}}{\partial p_z^{l_3}} \tilde{V}(p) \text{ com } l_1 + l_2 + l_3 = l$$

4.1) Em 1a. aproximação.

De (3.16) e (4.1) temos

$$C_{\rho_1}^{(1)}(\underline{x}, t) = - \frac{i \rho_1 t}{(2\pi)^3} \tilde{V}(0) \int \tilde{f}(-p) e^{-ip^2 t/2m} e^{ip \cdot \underline{x}} d^3p \tag{4.4}$$

que é semelhante a (2.10) e, portanto, como já foi visto $x^n C_{\rho_1}^{(1)}(\underline{x}, t)$ tende para 0 para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$, mais rápido que qualquer potência.

Entretanto, uma observação deve ser feita a respeito dêsse termo, pois depende de $\tilde{V}(0)$. Tal observação será válida também para (3.24) e (3.25) da segunda aproximação, pois também contém o fator

Sabemos que:

$$\tilde{V}(0) = \int V(r) d^3x$$

então, para que a discussão acima citada seja válida $V(r)$ deve ser integrável. Para tanto, $V(r)$ deve ser suficientemente regular na origem e cair mais rápido que $1/r^{3+\epsilon}$ para $r \rightarrow \infty$. Evidentemente essa condição é satisfeita se considerarmos potenciais do tipo (4.1) com $n = 1$. Caso isso não se verificasse esses termos poderiam ser compensados se na hamiltoniana de interação (2.3) adicionarmos mais um termo:

$$- \int \rho V(\underline{x}' - \underline{y}') \psi^\dagger(\underline{y}') \psi(\underline{y}') d^3y' \quad (4.5)$$

(onde ρ é a densidade média), que nos espaços dos momenta é dado por:

$$-\rho \tilde{V}(0) N$$

(N : operador número de partículas)

Os cálculos feitos sem (4.5) são válidos uma vez que tal termo só introduz uma fase na solução de $\psi_H(\underline{x}, t)$, pois é incorporado na hamiltoniana livre. $|C(\underline{x}, t)|$ será independente dessa fase.

O significado físico de (4.5) pode ser visto se considerarmos um sistema de elétrons que se movem num "background" de carga positiva (corresponderia aos núcleos dos átomos) com mesma densidade média. Nesse caso, (4.5) representa a interação entre prótons e elétrons que deve ser subtraída da interação entre os elétrons para que num ponto qualquer a energia seja finita⁽³⁾.

A seguir vem o termo:

$$C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) = - \frac{i \rho_2 t}{(2\pi)^3} \int d^3p \tilde{V}(\underline{p}) \tilde{f}(-\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m} e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}}$$

e portanto

$$x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) = - \frac{i \rho_2 t}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\partial^n}{\partial p^n} (\tilde{V}(\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m} \tilde{f}(-\underline{p}) e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}}) \quad (4.6)$$

Verifica-se facilmente que se o potencial satisfaz (4.1),

$$x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \rightarrow 0 \text{ para } |\underline{x}| \rightarrow \infty \quad (4.7a)$$

Na realidade vamos verificar que:

$$x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \in L_2 \quad (4.7b)$$

Essa condição é mais forte que (4.7a) mas ainda não temos o mesmo comportamento, no infinito, para $C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t)$ e $V(r)$, pois de (4.1) temos

$$V(r) \sim 1/x^{n+3+\epsilon}$$

e de (4.7b):

$$C(\underline{x}, t) \sim 1/x^{n+3/2+\epsilon}$$

Para $C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t)$ ter o mesmo alcance do potencial devíamos mostrar que $x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \in L_1$, o que seria possível se houvesse a recíproca do teorema de Lebesgue e essa é uma questão matemática em aberto.

Provemos, então, (4.7b):

Sabemos que para funções $g(\underline{x}) \in L_2$ temos⁽⁹⁾:

$$\int |g(\underline{x})|^2 d^3x = \int |\tilde{g}(\underline{p})|^2 d^3p$$

portanto de (4.6) vem:

$$\int \left| x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \right|^2 d^3x = \int \left| \frac{\partial^n}{\partial p^n} (\tilde{V}(\underline{p}) \tilde{f}(-\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m}) \right|^2 d^3p$$

portanto

$$\int \left| x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \right|^2 d^3x = \sum_{k, k'=0}^n \left(\frac{\partial^k}{\partial p^k} \tilde{V}(\underline{p}) \frac{\partial^{k'}}{\partial p^{k'}} \tilde{V}(\underline{p}) \frac{\partial^{n-k}}{\partial p^{n-k}} (\tilde{f}(\underline{p})) \cdot \frac{\partial^{n-k'}}{\partial p^{n-k'}} (\tilde{f}(\underline{p})) \right)$$

onde $\tilde{f}(\underline{p}) = \tilde{f}(-\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m}$

e, usando o fato de $\frac{\partial^k}{\partial p^k} V(\underline{p})$ serem limitadas:

$$\int \left| x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \right|^2 d^3x \leq \sum_{k, k'}^n \max(\frac{\partial^k}{\partial p^k} \tilde{V}(\underline{p})) \max(\frac{\partial^{k'}}{\partial p^{k'}} \tilde{V}(\underline{p})) \cdot I \quad (4.8)$$

onde

$$I = \int d^3p \frac{\partial^{n-k}}{\partial p^{n-k}} (\tilde{h}(\underline{p})) \frac{\partial^{n-k'}}{\partial p^{n-k'}} (\tilde{h}(\underline{p})) \quad (4.9)$$

é integrável pois $\tilde{h}(-p)$ e suas derivadas são funções classe S.

Portanto $x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \in L_2$, por $\int \left| x^n C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) \right|^2 d^3x$ ser sempre menor que uma soma finita de parcelas finitas.

4.2- Em 2a. aproximação.

Para (3.24) e (3.25) as discussões se reduzem às feitas no ítem anterior, uma vez que êsses termos são semelhantes a (4.4) e (4.6). Resta, então, discutir

$$C_c^{(2)}(\underline{x}, t) = \frac{ct^2}{(2\pi)^3} \int \tilde{v}(\underline{p}) \tilde{v}(\underline{p}) \tilde{h}(\underline{p}) e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}} d^3p \quad (4.10)$$

o que é feito de maneira análoga à discussão de (4.6), verificando-se que $x^n C_c^{(2)}(\underline{x}, t) \in L_2$:

$$\int \left| x^n C_c^{(2)}(\underline{x}, t) \right|^2 d^3x \leq \sum_{k, k'}^n \sum_{e, e'}^{k, k'} \max(\frac{\partial^k}{\partial p^k} V(\underline{p})) \max(\frac{\partial^{k'}}{\partial p^{k'}} V(\underline{p})) \cdot \max(\frac{\partial^{k-e}}{\partial p^{k-e}} V(\underline{p})) \max(\frac{\partial^{k'-e'}}{\partial p^{k'-e'}} V(\underline{p})) \cdot I \quad (4.11)$$

onde I é dado por (4.9).

Concluimos de (4.8) e (4.11) que, pelo menos até 2a. ordem, $C(\underline{x}, t) \rightarrow 0$ com o potencial, para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$, mas não exatamente como o potencial.



5. Exemplos.

Tomando alguns tipos de potencial procuraremos mostrar que $C(\underline{x}, t)$, até segunda aproximação, tem o mesmo alcance do potencial. Consideraremos apenas as expressões (4.5) e (4.10) - as demais expressões se reduzem a essas.

5.1 - Potencial tipo Yukawa.

$$V(r) = \frac{e^{-ar}}{r} \quad e \quad \tilde{V}(\underline{p}) = \tilde{V}(p) = \frac{1}{p^2 + a^2} \quad (5.1)$$

Portanto, $V(r)$ cai mais rápido que qualquer potência de $1/|\underline{x}|$ para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$.

Temos:

$$C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t) = \frac{At}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{p^2 + a^2} \tilde{f}(-\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m} e^{i\underline{p} \cdot \underline{x}} d^3 p \quad (5.2)$$

O alcance de $C_{\rho_2}^{(1)}(\underline{x}, t)$ está relacionado com

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} \left(\frac{1}{p^2 + a^2} \tilde{f}(-\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m} \right) \quad (5.3)$$

que existe, pois tôdas as funções são diferenciáveis qualquer que seja n . Portanto, (5.2) irá a zero mais rápido que qualquer potência de $1/|\underline{x}|$ se (5.3) é L_1 , qualquer que seja n .

Para verificar podemos tomar a derivada, com relação a uma componente, do potencial apenas. Os fatores $\tilde{f}(-\underline{p})$ e $e^{-ip^2 t/2m}$ são infinitamente deriváveis e, embora a exponencial contribua com um polinômio em p , $\tilde{f}(-\underline{p})$ e suas derivadas controlam o comportamento desse polinômio no infinito. Então:

$$\frac{\partial^n}{\partial p_x^n} \left(\frac{1}{p^2 + a^2} \right) = \frac{P_n(p_x)}{(p_x^2 + d^2)^{n+1}} \quad \forall n$$

onde $d^2 = p_y^2 + p_z^2 + a^2$, e P_n : polinômio de grau n .

Portanto, usando (4.3), temos

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} \left(\frac{1}{p^2+a^2} \right) = \frac{P_n(p)}{(p^2+a^2)^{n+1}} \quad (5.4)$$

e na expressão de $x^n C_{p_0}^{(1)}(\underline{x}, t)$ aparecem termos do tipo

$$\int \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left(\frac{1}{p^2+a^2} \right) \frac{\partial^{n-k}}{\partial p^{n-k}} (\tilde{f}(-\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m}) d^3 p =$$

$$= \int \frac{P_k(p)}{(p^2+a^2)^{k+1}} \frac{\partial^{n-k}}{\partial p^{n-k}} (\tilde{f}(-\underline{p}) e^{-ip^2 t/2m}) d^3 p$$

que são de módulo integrável $\forall n$.

Da mesma forma, para

$$C_c^{(2)}(\underline{x}, t) = \frac{ct^2}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{(p^2+a^2)^2} \tilde{f}(-p) e^{-ip^2 t/2m} e^{ip \cdot \underline{x}} d^3 p$$

chega-se a um resultado semelhante ao anterior!

Aparecem agora, as funções

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} \left(\frac{1}{(p^2+a^2)^2} \right) = \frac{P_n(p)}{(p^2+a^2)^{n+2}}$$

que também são de módulo integrável $\forall n$.

Portanto $C(\underline{x}, t) \rightarrow 0$, para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$, mais rápido que qualquer potência de $1/|\underline{x}|$, ou seja, tem exatamente o mesmo comportamento que o potencial (5.1).

5.2- Potenciais que caem com determinada potência de $|\underline{x}|$:

$$V(r) = \frac{1}{(r^2+a^2)^2} \quad (5.5)$$

Portanto

$$\tilde{V}(p) = -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{e^{-ap}}{p} \right) = \frac{1}{2a} e^{-ap} \quad (5.6)$$

Podemos discutir o comportamento de $C_{v_1}^{(1)}(\underline{x}, t)$ e $C_c^{(2)}(\underline{x}, t)$ por um outro processo: usando coordenadas esféricas e supondo que a função de "smearing" seja esféricamente simétrica.

Para o potencial aparecerá:

$$\frac{1}{(r^2+a^2)^2} = \frac{1}{(2\pi)^3 2a} \int e^{-ap} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \cos \theta p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi$$

$$V(r) = \frac{1}{2a(2\pi)^2} \int e^{-ap} p \frac{\sin pr}{r} dp = \frac{1}{2a(2\pi)^2} \int g(p) \frac{\sin pr}{r} dp \quad (5.7)$$

onde $g(p) = e^{-ap} p$.

Sabemos que o potencial se comporta como $1/r^4$ para $r \rightarrow \infty$, então:

$$r^4 V(r) \rightarrow \text{constante} \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty \quad (5.8)$$

De fato

$$\frac{r^4}{(r^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a(2\pi)^2} \int_0^\infty g(p) \frac{d^3}{dp^3} \cos pr dp$$

E fazendo integração por partes temos

$$\frac{r^4}{(r^2+a^2)^2} = \frac{1}{(2a(2\pi)^2)} \left[g(p) r^2 \cos pr \Big|_0^\infty - \frac{dg}{dp} r \sin pr \Big|_0^\infty + \frac{d^2 g}{dp^2} \cos pr \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d^3 g}{dp^3} \cos pr dp \right] \quad (5.9)$$

As duas primeiras funções se anulam no infinito. Na origem ou são anuladas pelo $\sin pr$ ou por $g(p)$.

Por outro lado:

$$\frac{d^2}{dp^2} g(p) \cos pr \Big|_0^\infty = \text{constante}$$

e
$$\int_0^{\infty} \frac{d^3 g}{dp^3} \cos pr \rightarrow 0 \text{ para } r \rightarrow \infty \text{ pois } \frac{d^3 g}{dp^3} \in L_1$$

Para $C_{\rho_1}^{(1)}(\underline{x}, t)$ e $C_c^{(2)}(\underline{x}, t)$ temos expressões semelhantes a (5) sendo que $g(p)$ vai corresponder respectivamente a:

$$g_1(p) = e^{-ap} p \tilde{f}(p) e^{-ip^2 t/2m}$$

$$g_2(p) = e^{-2ap} p \tilde{f}(p) e^{-ip^2 t/2m}$$

Portanto, para ambos temos:

$$r^4 C^{(i)}(\underline{x}, t) - \frac{d^2}{dp^2} g_i \cos pr \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{d^3}{dp^3} g_i \cos pr dp \quad (i = 1, 2)$$

e também

$$\frac{d^2}{dp^2} g_i \cos pr \Big|_0^{\infty} = \text{constante}$$

e
$$\int_0^{\infty} \frac{d^3}{dp^3} g_i \cos pr dp \rightarrow 0 \text{ para } r \rightarrow \infty$$

Podemos verificar que $r^5 C^{(i)}(\underline{x}, t)$ diverge. Ao efetuarmos a integração por partes aparece uma parcela:

$$\frac{d^2 g_i(p)}{dp^2} r \cos pr \Big|_0^{\infty} \quad (i = 1, 2)$$

proporcional a r , e, portanto, divergente para $r \rightarrow \infty$.

Então, $C(\underline{x}, t)$ tem exatamente o mesmo comportamento do potencial no infinito.

Procurando generalizar o potencial tomamos

$$V(r) = \frac{1}{(a^2 + r^2)^n} \quad (5.1)$$

e, nesse caso,

$$\tilde{V}(p) = P_{n-2}(p) e^{-ap}$$

$V(r)$ tem expressão análoga a (5.7) com

$$g(p) = P_{n-2}(p) e^{-ap} \quad (5.11)$$

De modo análogo tomamos $r^{2n} V(r)$ e fazendo integração por partes temos:

(a) as parcelas com derivadas de $g(p)$ de ordem ímpar se anulam sempre.

Anulam-se no infinito devido ao fator e^{-ap} e na origem por conterem o fator $\text{sen} pr$.

(b) as parcelas com derivadas de $g(p)$ de ordem m par se anulam até

$$m = \begin{cases} n-2 & \text{se } n \text{ é par} \\ n-1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Anulam-se no infinito devido ao fator e^{-ap} e na origem por conterem o fator r , proveniente da derivada de $\text{cos} pr$.

(c) restarão as parcelas:

$$\left(\frac{d^{m+2} g(p)}{dp^{m+2}} \right) \text{cos} pr \int_0^{\infty} \text{que é uma constante}$$

e

$$\int_0^{\infty} \frac{d^{2n-1} g(p)}{dp^{2n-1}} \text{cos} pr \, dp, \text{ que tende a zero para } r \rightarrow \infty, \text{ pois}$$

$$\frac{d^{2n-1} g(p)}{dp^{2n-1}} \in L_1$$

Voltando às expressões $C^{(i)}(\underline{x}, t)$, as novas funções $g_i(p)$ também têm o mesmo comportamento de $g(p)$ dada por (5.11).

Portanto, ao calcularmos $r^{2n} C^{(i)}(\underline{x}, t)$ as condições (a), (b)

(c) são satisfeitas e teremos:

$$r^{2n} C^{(i)}(\underline{x}, t) \rightarrow \text{constante para } r \rightarrow \infty$$

E, novamente, vemos que $C(\underline{x}, t)$ tem o alcance do potencial considerado.

Verificamos que (1.3) é válido para forças de curto alcance, embora não tenha sido possível demonstrar, no caso geral, que $C(\underline{x}, t)$ tem exatamente o comportamento do potencial, tal fato foi exemplificado considerando-se tipos específicos de potencial.

Assim, esperamos que vários resultados obtidos para teorias relativísticas, que dependem da comutatividade local, possam ser estendidos a sistemas não relativísticos de muitos corpos, sujeitos a potenciais de curto alcance.

Como foi visto na introdução, uma dessas aplicações é a obtenção de informações sobre o espectro de excitações da teoria de muitos corpos, através da generalização do Teorema de Goldstone, a sistemas não relativísticos com forças de curto alcance.

O cálculo desenvolvido no cap. II foi feito apenas para comutadores, mas os resultados obtidos devem ser válidos também para anti-comutadores, possibilitando a extensão de resultados relativísticos para sistemas não relativísticos de férmions.

Parece-nos possível obter um resultado mais satisfatório para (1.3), isto é, independente de teoria de perturbações, desde que se consiga escrever o termo genérico $\psi^{(n)}(\underline{x}, t)$ e ter uma idéia do comportamento dos termos de $C^{(n)}(\underline{x}, t)$. Isso é bastante razoável pois podemos esperar que, usando funções $\Theta(t)$ convenientes, $\psi^{(n)}(\underline{x}, t)$ possa ser escrito como:

$$\psi^{(n)}(\underline{x}, t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \left[H_I(t_1), [H_I(t_2), [\dots, [\psi_0(\underline{x}, t), H_I(t_n)]]] \dots \right] G$$

(G : produto de funções $\Theta(t)$ convenientes)

e, portanto, os termos de $C^{(n)}(\underline{x}, t)$ possam ser estudados a partir de gráficos, como foi feito em segunda ordem.

Para isso devemos ter regras para a construção e estudo de tais gráficos e que parecem ser as seguintes:

a) Temos $2n+2$ pontos, dos quais um é a origem e o outro o ponto \underline{x} .

Os $2n$ pontos aparecem porque em cada H_I temos dois pontos. Então, em

$\psi^{(n)}(\underline{x}, t)$ temos $2n+1$ pontos ($2n$ dos nH_I e o ponto \underline{x}) e em $C(\underline{x}, t)$ aparecem

$2n+2$, pois além dos anteriores inclui-se a origem.

b) Os $2n+2$ pontos estão ligados entre si por n funções potencial e $n+1$ propagadores.

Temos n potenciais e n propagadores provenientes da expressão de $\psi^{(n)}(\underline{x}, t)$ e mais um propagador vindo de $[\psi^{(n)}(\underline{x}, t), \psi^+(0)]$.

c) A origem e o ponto \underline{x} ligam-se aos demais apenas por propagadores.

A origem vem de $\psi^+(0)$ em $C(\underline{x}, t)$ e o ponto \underline{x} vem de $\psi_0(\underline{x}, t)$ em $\psi^{(n)}(\underline{x}, t)$; portanto, nada têm a ver com o potencial.

d) Teremos (n+1) tipos de gráficos , classificados de acôrdo com a maneira de \underline{x} estar ligado à origem: só por propagadores, por propagadores e uma função potencial, por propagadores e duas funções potencial, e assim por diante, até \underline{x} e a origem ligados por propagadores e n funções potencial.

De acôrdo com o que vimos na segunda aproximação , no espaço dos momenta teremos (n+1) têrmos do tipo $V^m(0)V^{n-m}(p)$, com $m= 0,1,2, \dots, n$. E desde que se estude o comportamento daquêle correspondente a $m = 0$ teremos informação sôbre os demais.

Dêsse modo conseguiremos saber como $C^{(n)}(\underline{x},t)$ se comporta para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$ e poderemos chegar à verificação de (1.3), independente de teoria de perturbações. Uma aproximação continua a ser feita, ou seja, a de considerar os elementos de matriz de um produto de operadores de campo como sendo constantes. [Apêndice]

000000000

APÊNDICE

No cap. II desenvolvemos os cálculos considerando sempre os elementos de matriz de um produto de operadores de campo como sendo constantes; aqui procuraremos justificar essa escolha.

Na primeira aproximação aparecem dois termos, cada um dos quais dependendo, respectivamente, de:

$$\langle \emptyset_1 | \psi^+(\underline{y}, t') \psi(\underline{y}', t') | \emptyset_2 \rangle \quad (A.1)$$

$$\langle \emptyset_1 | \psi^+(\underline{y}', t') \psi(\underline{x}', t') | \emptyset_2 \rangle \quad (A.2)$$

Pelas expressões (3.14), podemos ver que os pontos \underline{x}' e \underline{y}' estão próximos a \underline{x} (ligados por funções de curto alcance) e, portanto se $|\underline{x}| \rightarrow \infty$ o mesmo acontece com $|\underline{x}'|$ e $|\underline{y}'|$.

(A.1) corresponde a calcularmos o elemento de matriz entre os estados \emptyset_1 e \emptyset_2 transladados de \underline{y}' . No limite $|\underline{y}'| \rightarrow \infty$, (A.1) será equivalente ao valor esperado no vácuo (estado fundamental do sistema) do operador densidade, sendo constante. Intuitivamente isso é bastante razoável: ao considerarmos o operador densidade no infinito estamos "isolando-o" de qualquer interação que pudesse alterá-lo, isto é, criar ou destruir partículas.

Usando a desigualdade de Schwartz, podemos verificar que (A.2) é no máximo uma constante para $|\underline{x}'|$ e $|\underline{y}'|$ tendendo ao infinito:

$$\begin{aligned} \langle \emptyset_1 | \psi^+(\underline{y}') \psi(\underline{x}') | \emptyset_2 \rangle &= \langle \psi(\underline{y}') \emptyset_1 | \psi(\underline{x}') \emptyset_2 \rangle \\ &\leq \langle \emptyset_1 | \psi^+(\underline{y}') \psi(\underline{y}') | \emptyset_1 \rangle \langle \emptyset_2 | \psi^+(\underline{x}') \psi(\underline{x}') | \emptyset_2 \rangle \end{aligned}$$

portanto

$$\langle \emptyset_1 | \psi^+(\underline{y}') \psi(\underline{x}') | \emptyset_2 \rangle \leq \alpha \quad \text{constante}$$

$$|\underline{x}'| \rightarrow \infty$$

$$|\underline{y}'| \rightarrow \infty$$

Concluimos que o comportamento de $\mathcal{C}^{(1)}(\underline{x}, t)$ é controlado pelas expressões assintóticas dos elementos de matriz considerados. Essas são constantes ou podem ser superadas por constantes.

Uma dúvida pode surgir: uma dependência local e muito singular dos elementos de matriz afeta ou não o resultado final. Verificamos que não afeta, o que reforça a justificativa de podermos tomar (A.1) e (A.2) como constantes.

De fato, considerando (A.2) como uma função $\delta(\underline{x}' - \underline{y}')$ e efetuando-se os cálculos chegamos a

$$C^{(1)}(\underline{x}, t) \propto V(0) G_0(\underline{x}, t)$$

que tende a zero se fizermos o "smearing".

O fator $V(0)$ poderia criar problemas, por exemplo, no caso do potencial de Yukawa, por não ser regular na origem. Como estamos interessados no comportamento do potencial no infinito, podemos usar o potencial modificado:

$$V(r) = \frac{e^{-ar}}{b+r} \tag{A.4}$$

que é regular na origem e se comporta como o potencial de Yukawa no infinito. Desse maneira contornamos o problema do fator $V(0)$ e os resultados obtidos anteriormente não são alterados.

Uma discussão mais elaborada pode ser encontrada na referência ⁽¹¹⁾ e que justifica a escolha de constantes para os elementos de matriz em primeira e segunda ordens. Uma observação, entretanto deve ser feita: nesses artigos uma das hipóteses feitas para a demonstração dos teoremas é a de que o comutador entre dois observáveis vá a zero para distâncias infinitas; isso, na realidade, mostra que não há inconsistência ao admitirmos os elementos de matriz como constantes.

Neste apêndice cabe ainda uma observação sobre alguns termos de segunda ordem:

Em (k), (l), (n), e (o) de (3.23) os operadores de campo não aparecem na forma de produto normal. Se, antes de tomarmos os elementos de matriz como constantes, colocarmos tais operadores na forma normal aparecem em (3.23) mais dois termos, correspondendo aos comutadores:

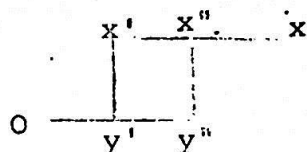
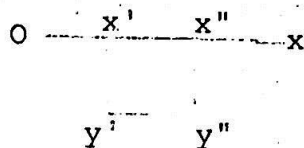
$$\left[\psi_0(y''), \psi_0^+(y') \right] \quad \text{e} \quad \left[\psi_0(x''), \psi_0^+(y') \right]$$

e que são:

$$(k') \propto \iint dt' dt'' d^3x' d^3y' d^3x'' d^3y'' V(\underline{x}' - \underline{y}') V(\underline{x}'' - \underline{y}'') G_0(\underline{x} - \underline{x}'') \cdot G_0(\underline{x}'' - \underline{x}') G_0(\underline{x}') G_0(\underline{y}' - \underline{y}'') \tag{A.5}$$

$$(l') \propto \iint dt' dt'' d^3x' d^3x'' d^3y' d^3y'' V(\underline{x}' - \underline{y}') V(\underline{x}'' - \underline{y}'') G_0(\underline{x} - \underline{x}'') \cdot G_0(\underline{x}'' - \underline{x}') G_0(\underline{y}') G_0(\underline{y}'' - \underline{y}') \tag{A.5}$$

Seus gráficos são respectivamente:



Como dão gráficos com "loop", poderiam causar problemas. Verificamos que isso não acontece.

Passando para o espaço dos momenta :

$$(k') \propto \int dt' dt'' \int d^3 p d^3 p' \tilde{V}(p') \tilde{V}(-p') g(p, p', t', t'') e^{i p \cdot x} \quad (A.6)$$

$$(l') \propto \int dt' dt'' \int d^3 p d^3 p' \tilde{V}(p') \tilde{V}(p-p') g(p, p', t', t'') e^{i p \cdot x} \quad (A.7)$$

onde, $g(p, p', t', t'') = \exp\left(i \frac{t' - t''}{2m} (p'^2 - 2p \cdot p') - i \frac{t p^2}{2m}\right)$

Considerando o potencial:

$$V(r) = \frac{1}{(a^2 + r^2)^2}$$

a integração em p' será do tipo gaussiana. Assim a função de p resultante será essencialmente semelhante à que aparece para os demais termos de (3.23), para esse potencial (cap.II - ítem 5.3). A convergência de (k') e (l') continua, então controlada por $\tilde{V}(p)$ e suas derivadas; ou seja, vai depender do alcance de $V(r)$.

Como tomamos um potencial bem comportado podemos pensar que, no caso de tomar um potencial muito singular e localizado, não pudésemos chegar à mesma conclusão. Entretanto, com

$$V(x' - y') = \delta(x' - y') \quad (A.7)$$

verificamos que (k') e (l') tendem a zero, na parte dependente de x , desde que se considere a função de "smearing" para $\psi^{(2)}(x; t)$.

De fato, com o potencial (A.7) teremos (k') e (l') na forma :

$$(k'') \propto \int dt' dt'' \int d^3 x' d^3 y' G_0(x - x') G_0(x' - x'') G_0(x - x'') G_0(x')$$

que no espaço dos momenta é dado por :

$$(k'') \propto \int dt' dt'' \int d^3 p e^{i p \cdot x - i p^2 t / 2m} \int d^3 p' e^{-i(t'' - t')(p'^2 - p \cdot p') / m}$$

Mas,

$$\int d^3 p' e^{-i(t''-t')(p'^2 - p \cdot p')} = e^{i(t''-t')p^2/4m} \int d^3 p' e^{-i(t''-t')(p-p')^2/m} = e^{i(t''-t')p^2/4m} (\pi m/(t''-t'))^{3/2}$$

Portanto,

$$(k'') \propto \int dt' dt'' \frac{1}{(t''-t')^{3/2}} \int d^3 p e^{-i(2t-t''-t')p^2/4m + i p \cdot \underline{x}} \tag{A.8}$$

Se considerarmos o "smearing", a parte de (A.8) que depende de \underline{x} tende a zero para $|\underline{x}| \rightarrow \infty$.

Aparece em (A.8) uma integral em t'' que é divergente. Essa divergência vem de (A.7) ser um potencial muito singular e localizado. Entretanto, nosso resultado não é afetado, pois estamos estudando a dependência em \underline{x} . Dessa podemos concluir que, mesmo no caso de potencial singular e gráficos com "loop", é suficiente o "smearing" no ponto \underline{x} para eliminar as infinidades de $C(\underline{x}, t)$, na parte que depende de \underline{x} .

Um fato interessante aparece ao passarmos (k') para o limite estático ($m \rightarrow \infty$):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (k') \propto t^2 \int d^3 p \int d^3 p' \tilde{V}(\underline{p}-\underline{p}') \tilde{V}(\underline{p}') e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}} = t^2 \int d^3 p \tilde{R}(\underline{p}) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}} \tag{A.8}$$

onde, $\tilde{R}(\underline{p}) = \tilde{V}(\underline{p}) * \tilde{V}(\underline{p})$

Portanto

$$\tilde{R}(\underline{p}) = \int d^3 \underline{x} V(\underline{x}) V(\underline{x}) e^{-i \underline{p} \cdot \underline{x}} \tag{A.9}$$

De (A.8) e (A.9) segue-se que no limite estático (k') corresponde ao termo de segunda ordem em $V(\underline{x})$ de $C(\underline{x}, t)$ (Cap. II - ítem 2.2):

$$C(\underline{x}, t) = (1 - e^{itV(\underline{x})}) \psi_0^+(0,0) \psi_0(\underline{x},0) + \delta(\underline{x}) T(\underline{x}, t) \tag{A.10}$$

ao desenvolvermos a exponencial em série.

Tanto (1') como os demais termos de (3.23) devem estar, no limite estático, englobados na segunda parcela de (A.10), pois são proporcionais a $\delta(\underline{x})$.

REFERÊNCIAS

- (1) -- E.P. Wigner - "Group Theory and Atomic Spectra"
- (2) - R. Ascoli, W. Heisenberg - Zs.f. Naturf. 12a, 177 (1957)
- (3) - J. Goldstone - Nuovo Cimento 19, 154 (1961)
- (4) - Y. Nambu, G.J. Lasinio - Ph. Rev. 122, 345 (1961)
- (5) - J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg - Ph. Rev. 127, 965 (1962)
- (6) - J.A. Swieca - Tese de Livre Docência
- (7) - J.A. Swieca - Com. Math. Physics 4, 1-7 (1967)
- (8) - S. Gasiorowics - "Elementary Particle Physics" (John Wiley & Sons, Inc., 1966)
- (9) - D. Pines - "Elementary Excitations in Solids" (W.A. Benjamin, Inc., 1966)
- (10) -- V.M. Galitskii, A.B. Migdal - artigo recopiado no "The Many Body Problems" - D. Pines (W.A. Benjamin, Inc., 1963)
- (11) - J. Arzac - "Transformation de Fourier et Théorie des Distributions" (Dunod, 1961)
- (12) - F. Mandl - "Introduction to Quantum Field Theory" (Interscience Publishers 1959)
- (13) - J. Hubbard - artigo recopiado no "The Many Body Problems" - D. Pines
- (14) - H.J. Borchers, R. Haag, B. Schroer - Nuovo Cimento, 24, 148 (1963)
- (15) - D. Kastler - Institut d'Etudes Scientifiques d'Eté de Cargese - Corse (1965)

MEMORIAL DESCRITIVO DA FORMAÇÃO CIENTÍFICA E DAS ATIVIDADES CIENTÍFICAS, DOCENTES E PROFISSIONAIS

DE

OLACIO DIETZSCH

com o qual se apresenta ao concurso para a Livre-Docência na Cadeira de Física Nuclear da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (Março de 1969) .

1. FORMAÇÃO E ATIVIDADES CIENTÍFICAS E DOCENTES

Natural de São Paulo, Estado de São Paulo, onde nasceu a 25 de Fevereiro de 1938 , realizou seus estudos primários e secundários no Colégio Arquidiocesano de São Paulo .

Em 1956 ingressou no Curso de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, onde concluiu, em 1959, o curso de Bacharelado em Física .

Durante este mesmo período (1956-1959) estagiou, como bolsista do Conselho Nacional de Pesquisas, no Laboratório do Acelerador Eletrostático da Universidade de São Paulo, onde iniciou sua formação científica, colaborando em trabalhos de pesquisas em Física Nuclear e de desenvolvimento e manutenção do acelerador .

Em 1960 e 1961, realizou Cursos de Especialização em Física Nuclear, Física do Estado Sólido e Física Teórica . Durante

êste período, continuou a participar, como bolsista do Departamento de Física (Verba Federal), das atividades de pesquisa e de desenvolvimento do Laboratório do Acelerador Eletrostático . Colaborou também, nêstes anos, em aulas teóricas e de exercícios do Curso de Física Nuclear .

Em janeiro e fevereiro de 1960, participou, como bolsista da Organização dos Estados Americanos (OEA), da "Escola de Verão de Física", realizada no Instituto de Física de San Carlos de Bariloche, Argentina . Ai colaborou na instalação e operação de uma fonte de neutrons de alta intensidade e na construção de sistemas de tetores de neutrons .

Em julho de 1961 participou, como bolsista da Universidade de Buenos Aires, da "Escola Latino-Americana de Física" , realizada em Buenos Aires, Argentina .

Em janeiro de 1962, foi nomeado Instrutor da Cadeira de Física Nuclear da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo . Foi a partir de então que iniciou sua ativa participação na orientação de bolsistas do Laboratório do Acelerador Eletrostático, no projeto e construção de equipamentos e no desenvolvimento de técnicas, destinados a estudos de reações nucleares induzidas por partículas carregadas . Continuou, simultâneamente , a dar sua colaboração em atividades didáticas junto à Cadeira de Física Nuclear e, esporàdicamente, junto à Cadeira de Física Geral e Experimental .

Em dezembro de 1965 obteve, com distinção, o título de

Doutor em Ciências pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo .

Nesta mesma época, passou a ser Professor Assistente Doutor da Cadeira de Física Nuclear .

De setembro de 1966 a agosto de 1968 estagiou, na qualidade de Pesquisador Associado, nos laboratórios de Física Nuclear da Universidade de Pittsburgh, Pittsburgh, E. U. A. Aí realizou estudos de espectroscopia nuclear e participou na formação de um grupo de pesquisas em ressonâncias isobáricas . Colaborou também na orientação de estudantes de pós-graduação e orientou, juntamente com outro pesquisador associado, a tese de mestrado de um deles .

De setembro de 1968 até o presente, novamente como Professor Assistente Doutor da FFCL da USP , e a partir de dezembro de 1968 como regente do Curso Noturno da Cadeira de Física Nuclear, vem continuando suas atividades didáticas junto ao Curso de Física Nuclear . Integrado, também, ao grupo de pesquisas do Laboratório do Acelerador Eletrostático, vem orientando estudantes de graduação e de pós-graduação . Está também associado ao grupo de emulsões nucleares do Departamento de Física, participando na análise de dados experimentais que obteve no Laboratório de Física Nuclear da Universidade de Pittsburgh .

Além da sua participação em seminários de estudo e de pesquisa no Departamento de Física de São Paulo, proferiu, a convite, seminários e colóquios sobre suas pesquisas, em várias instituições, entre as quais citamos : Escola de Engenharia de São Carlos ,

Instituto de Física de Bariloche, Universidade de Buenos Aires e Universidade de Pittsburgh .

Possui o título de Bacharel em Física pela Universidade de São Paulo e o de Doutor em Ciências, também pela Universidade de São Paulo . É membro regular da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, da American Association of Physics Teachers e da American Physical Society . É membro fundador da Sociedade Brasileira de Física .

Participou dos seguintes congressos e reuniões científicas :

11a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Salvador, Bahia, de 12 a 18 de julho de 1959 ;
Simpósio de Física, realizado, sob o patrocínio da Academia Brasileira de Ciências, no Rio de Janeiro em agosto de 1963 ; 16a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Ribeirão Preto, São Paulo, de 5 a 11 de Julho de 1964 ;
18a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Blumenau, Santa Catarina, de 10 a 16 de julho de 1966; Conferência Internacional de Física Nuclear realizada em Gatlinburg, Tennessee, de 12 a 17 de setembro de 1966; Reunião da Sociedade Americana de Física realizada em N. York, de 30 de janeiro a 2 de fevereiro de 1967 ; Primeira Reunião Anual da Divisão de Física Nuclear da Sociedade Americana de Física, realizada em Madison, Wisconsin, em outubro de 1967 ; Reunião da Sociedade Americana de Física realizada em Chicago, de 29 de janeiro a 1 de fevereiro

reiro de 1968 .

2. TRABALHOS PUBLICADOS EM REVISTAS CIENTÍFICAS

1. The Lifetime of the 3.85 MeV level in ^{13}C
O. Dietzsch, M. Kuchnir, W. R. Phillips and Oscar Sala
An. Acad. Bras. Ciências, Vol. 31, nº4, p. 523(1959).
2. A Search for an Isomeric State in Mn^{54}
O. Dietzsch, R. A. Douglas and V. Gomes
Nuclear Physics, Vol. 26(1961)113
3. Study of the $\text{O}^{16}(\text{d}, \text{n})\text{F}^{17}$ Reaction
O. Dietzsch, Y. Hama, E. W. Hamburger and F. C. Zawislak
Nuclear Physics, Vol. 27(1961)103
4. Efficiency of a Long Counter as a Function of the Direction
and Locus of Incidence of the Neutron
E. Landim, E. W. Hamburger and O. Dietzsch
Nuclear Instruments and Methods, Vol. 15(1962)300
5. The $^{13}\text{C}(\text{p}, \text{n})^{13}\text{N}$ Reaction Near Threshold
O. Dietzsch
Nuclear Physics, Vol. 85(1966)689
6. The Response of the NE213 Scintillator to Neutron-induced
Proton Recoils .
O. Dietzsch
An. Acad. Bras. Ciências, Vol. 39; Nº 2, p. 221(1967)
7. Analysis of the $^{24}\text{Mg}(\text{d}, \text{n})^{25}\text{Al}$ Reaction from 1.38 to 2.8 MeV
O. Dietzsch, D. Wilmore and P. E. Hodgson
Nuclear Physics, Vol. A106(1968)527
8. Deuteron-induced Reactions on ^{16}O
O. Dietzsch, R. A. Douglas, E. Farrelly Pessoa, V. Gomes
Porto, E. W. Hamburger, T. Polga, O. Sala, S. M. Perez
and P. E. Hodgson
Nuclear Physics, Vol. A114(1968)330 .

3. TESES

Um Estudo Experimental da reação $^{24}\text{Mg}(\text{d}, \text{n})^{25}\text{Al}$
Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e
Letras da Universidade de São Paulo, como parte dos re-

quisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências (1965) .

4. TRABALHOS APRESENTADOS EM REUNIÕES E CONGRESSOS CIENTÍFICOS

1. Radiação Gama resultante da desintegração do Mn^{56}
R. A. Douglas e O. Dietzsch
Apresentado na 11a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Salvador, Bahia, de 12 a 18 de julho de 1959.
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 11, nº3, p. 112(1959).
2. Procura de um Estado Isomérico no Mn^{54}
O. Dietzsch e R. A. Douglas
Apresentado na 11a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Salvador, Bahia, de 12 a 18 de julho de 1959.
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 11, nº 3, p. 112(1959)
3. A Vida Média do Nível de 3.85 MeV do C^{13}
O. Dietzsch, M. Kuchnir, W. R. Phillips e O. Sala
Apresentado na 11a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Salvador, Bahia, de 12 a 18 de julho de 1959.
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 11, nº3, p. 112(1959)
4. Estudo da Reação $O^{16}(d,n)F^{17}$
O. Dietzsch, Y. Hama, E. W. Hamburger e F. C. Zawislak
Apresentado na 13a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Poços de Caldas, Minas Gerais, de 9 a 15 de Julho de 1961.
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 13, nº3, p. 138(1961).
5. Eficiência de um Contador Longo de Neutrons como Função da Direção e do Lugar de Incidência do Neutron.
O. Dietzsch, F. Zawislak, E. Landim e E. W. Hamburger.
Apresentado na 13a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Poços de Caldas, Minas Gerais, de 9 a 15 de Julho de 1961.
Resumo em Ciência e Cultura, vol. 13, nº3, p. 139(1961).
6. $O^{16}(d,n)F^{17}$ Reaction
E. W. Hamburger, O. Dietzsch and F. C. Zawislak
Apresentado na Reunião Anual da Sociedade Americana de Física, realizada em N. York, de 1 a 4 de fevereiro de 1961.

- Resumo em Bulletin of the American Physical Society ,
Series II, Vol. 6, nº1, p. 37(1961) .
7. Circuito Discriminador de pulsos produzidos por gamas e neutron em um Cintilador Orgânico em conjunção com um Espectrômetro de Tempo de Voo .
B. F. Pessoa, O. Dietzsch, R. A. Douglas e O. Sala.
Apresentado na 14a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Curitiba, Paraná, de 8 a 14 de julho de 1962 .
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 14, nº3, p. 145(1962).
8. Reações $O^{16}(d,n)F^{17}(g.s)$ e $O^{16}(d,n)F^{17x}(0.5 \text{ MeV})$
O. Dietzsch, R. A. Douglas, E. W. Hamburger, B. F. Pessoa, e O. Sala
Apresentado na 14a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Curitiba, Paraná, de 8 a 14 de julho de 1962 .
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 14, nº3, p. 145(1962)
9. Absolute Cross-section for the $O^{16}(d,n)F^{17}$ Reaction
O. Sala, R. A. Douglas, E. F. Pessoa, O. Dietzsch e E. W. Hamburger
Apresentado como "post deadline paper" na Reunião Anual da Sociedade Americana de Física, realizada em N. York em janeiro de 1962 .
10. Absolute Cross-sections for the $O^{16}(d,n)F^{17}(g.s)$ and $O^{16}(d,n)F^{17x}(0.5 \text{ MeV})$ Reactions .
O. Sala, R. A. Douglas, O. Dietzsch, E. W. Hamburger and B. F. Pessoa .
Apresentado na Conferência sôbre Interações Diretas e Reações Nucleares, realizada em Padua, Itália, em setembro de 1962 .
Resumo nas Atas da Conferência, editadas por E. Clementel e C. Villi (Gordon and Breach, New York, 1963)p. 563 .
11. The $C^{13}(p,n)N^{13}$ Reaction near Threshold
O. Dietzsch
Apresentado no Simpósio de Física realizado, sob o patrocínio da Academia Brasileira de Ciências, no Rio de Janeiro , em agosto de 1963 .
Resumo em Anais da Academia Brasileira de Ciências , Vol. 35, nº3(1963) .
12. Estudo da Reação $Mg^{24}(d,n)Al^{25}$
O. Dietzsch, A. Pedreira e B. Pomeroy
Apresentado na 16a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Ribeirão Preto, São Paulo, de 5 a 11 de julho de 1964 .

- Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 16, nº2, p. 97(1964)
13. Rendimento Luminoso do Cintilador Líquido Ne213 para Prótons de Recuo .
O. Dietzsch
Apresentado na 18a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Blumenau, Santa Catarina, de 10 a 16 de julho de 1966 .
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 18, nº2, p. 70(1966).
14. As Larguras Reduzidas de "Stripping" na Reação $^{24}\text{Mg}(d, n)^{25}\text{Al}$ e a Estrutura do ^{25}Al
O. Dietzsch
Apresentado na 18a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Blumenau, Santa Catarina, de 10 a 16 de julho de 1966 .
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 18, nº2, p. 77(1966).
15. Um Estudo do Comportamento da Secção de Choque para a Reação $^{24}\text{Mg}(d, n)^{25}\text{Al}$ em Função da Energia de Bombardeio
O. Dietzsch
Apresentado na 18a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Blumenau, Santa Catarina, de 10 a 16 de julho de 1966
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 18, nº2, p. 80(1966)
16. Isobaric Analog Resonances in the Scattering of Protons from Tin
O. Dietzsch, E. W. Hamburger e K. Schechet
Apresentado na Reunião da Sociedade Americana de Física, realizada em Nova York, de 30 de janeiro a 2 de fevereiro de 1967.
Resumo em Bulletin of the American Physical Society , Series II, Vol. 12, nº1, p. 19(1967).
17. Particle-hole States in Nd^{142}
J. L. Foster, O. Dietzsch e K. Schechet
Apresentado na Reunião da Sociedade Americana de Física, realizada em Chicago, de 29 de janeiro a 1 de fevereiro de 1968.
Resumo em Bulletin of the American Physical Society , Series II, Vol. 13, nº1, p. 70(1968)
18. Nd^{142} Levels observed in the $\text{Nd}^{143}(d, t)$ Reaction
O. Dietzsch, J. L. Foster e K. Schechet
Apresentado na Reunião da Sociedade Americana de Física, realizada em Washington de 22 a 25 de Abril de 1968 .
Resumo em Bulletin of the American Physical Society ,

Series II, Vol. 13, nº4, p. 658(1968) .

19. Neutron Particle-hole States in Sm^{144}
D. Spalding, O. Dietzsch, J. L. Foster e W. C. Weitkamp
Apresentado na Reunião da Sociedade Americana de Física -
sica, realizada em Washington de 22 a 25 de abril de
1968 .
Resumo em Bulletin of the American Physical Society ,
Series II, Vol. 13, nº4, p. 659(1968) .
20. Estudo da Reação $^{122}\text{Sn}(d,p)^{123}\text{Sn}$
T. Borello, R. O. Cesar, O. Dietzsch, E. Frota Pessoa ,
E. W. Hamburger e C. Q. Orsini .
Apresentado na 20a. Reunião Anual da Sociedade Brasi -
leira para o Progresso da Ciência, realizada em São
Paulo, de 7 a 13 de Julho de 1968 .
Resumo em Ciência e Cultura, Vol. 20, nº2, p. 121(1968).