Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Teorias de calibre no formalismo de 1ª Ordem

Rogério Tadeu da Rocha Camargo Filho

Orientador: Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (Universidade de São Paulo)

Prof. Dr. Adriano Antonio Natale (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Alysson Fabio Ferrari (UFABC)

São Paulo

2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Camargo Filho, Rogerio Tadeu da Rocha

Teorias de calibre no formalismo de 1ª ordem. São Paulo, 2019.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Experimental.

Orientador: Prof. Dr. Fernandeu Tadeu Caldeira Brandt

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos.

Unitermos: 1. Teorias de calibre; 2. Yang-Mills; 3. Formalismo de 1ª. Ordem; 4. Regularização dimensional; 5. Computação simbólica.

USP/IF/SBI-037/2019

University of São Paulo
Physics Institute

First order formalism in gauge theories

Rogério Tadeu da Rocha Camargo Filho

Supervisor: Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the re-
quirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (University of São Paulo)

Prof. Dr. Adriano Antonio Natale (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Alysson Fabio Ferrari (UFABC)

São Paulo

2019

*Aos meus amados pais, Rogerio e Valéria,
por sempre estarem comigo em todos os momentos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força e sabedoria que me concedeu durante todos esses anos. Pelas suas infindas misericórdias e por sua graça maravilhosa.

Agradeço aos meus pais, Rogerio e Valéria, por sempre me incentivarem nos momentos de desânimo.

Agradeço à minha irmã, Aline, pela companhia e carinho.

Agradeço ao meu orientador, Fernando, por todos os conselhos preciosos, pela paciência e ajuda inestimável nesse período.

*“Gatsby believed in the green light,
the orgastic future that year by year recedes before us.
It eluded us then, but that’s no matter—tomorrow we will run faster,
stretch out our arms farther. . . . And one fine morning—
So we beat on, boats against the current,
borne back ceaselessly into the past.”*
(F. Scott Fitzgerald, "The Great Gatsby")

Resumo

O principal objetivo do presente trabalho é expor o procedimento de quantização de teorias de Yang-Mills, através do método de Faddeev-Popov, no formalismo de 1ª Ordem, e investigar num primeiro momento sua equivalência (clássica e quântica) ao formalismo usual (2ª Ordem) e algumas de suas aplicações, principalmente no cálculo de correções quânticas. Para isso, ideias gerais a respeito do processo de quantização via formalismo de Faddeev-Popov foram expostas, e posteriormente utilizadas no processo de quantização de teorias de Yang-Mills no formalismo de 1ª Ordem. Apresenta-se também as ideias gerais relativas ao método de regularização dimensional utilizado no cálculo de correções quânticas à nível de um laço para a teoria de Yang-Mills no formalismo de 1ª ordem, utilizando-se, para isso, computação simbólica. Foi demonstrado que via formalismo de 1ª Ordem, a estrutura ultravioleta encontrada no propagador do bóson de gauge é consistente com a renormalizabilidade da teoria. Embora tenhamos diferenças quanto a estrutura das interações neste novo formalismo, a estrutura das divergências ultravioletas continua a mesma do formalismo usual.

Palavras-Chave: "Teorias de calibre"; "Yang-Mills"; "Formalismo de 1ª Ordem"; "Regularização dimensional"; "Computação Simbólica".

Abstract

The main objective of the present work is to expose the quantization procedure of Yang-Mills theories in first order formalism, by Faddeev Popov's method. We want to investigate the classical and quantum equivalence between first and second order formalism, and look and analyze the differences in practical calculations of quantum corrections. Therefore, the general ideas about quantization by Faddeev-Popov's method was exposed, and used later in first order theory. It is also presented in this work, the main ideas concerning to dimensional regularization used in quantum corrections calculations at one-loop order for Yang-Mills theories, using for that, symbolic computation. It has been shown that upon using the first order formalism, the ultraviolet structure found in gauge boson propagator is also consistent to the theory's renormalizability. Although we have differences concerning to interactions structures in this new formalism, the ultraviolet structures from usual formalism is also found in it.

Keywords: "Gauge theories"; "Yang-Mills"; "First order formalism"; "Dimensional Regularization"; "Symbolic Computation".

Sumário

1	Introdução	3
2	Teorias de <i>gauge</i> (Formalismo de 2^a Ordem)	6
2.1	Transformações de <i>gauge</i>	6
2.1.1	Transformações Globais e Transformações Locais	6
2.1.2	Teorias Abelianas e Teorias Não-Abelianas	7
2.2	Teoria de Yang-Mills	7
2.2.1	Quantização	11
2.2.2	Formalismo de Faddeev-Popov	13
2.2.3	Propagadores da Teoria de Yang-Mills	17
2.2.4	Regras de Feynman para os Vértices	22
3	Teorias de <i>gauge</i> (Formalismo de 1^a Ordem)	29
3.1	Introdução	29
3.2	Ação de Yang-Mills no Formalismo de 1 ^a Ordem	29
3.2.1	Invariância de Gauge	30
3.2.2	Quantização	31
3.2.3	Formalismo de Faddeev-Popov	32
3.2.4	Propagadores da Teoria de Yang-Mills	33
3.2.5	Regras de Feynman para os Vértices	38
3.3	Equivalência dos Formalismos em nível quântico	39
4	Correções Quânticas via Formalismo de 1^a Ordem	42
4.1	Regularização Dimensional	42
4.1.1	Fundamentos da Regularização Dimensional	42
4.1.2	Integral Básica	43
4.1.3	Variantes da Integral Básica	45

4.1.4	Integrais Básicas no Espaço de Minkowski	46
4.2	Auto-Energia do campo A	47
4.2.1	Diagrama (I)	47
4.2.2	Diagrama (II)	48
4.2.3	Diagrama (III)	48
4.2.4	Auto-energia	49
4.3	Auto-Energia do campo auxiliar F	49
4.4	Auto-Energia do termo misto	51
4.4.1	Transição AF	51
4.4.2	Transição FA	53
4.5	Cálculo do propagador do bóson de <i>gauge</i>	54
4.5.1	Resultados	56
5	Conclusões	57
A	Funcionais Geradores	59
A.1	Introdução	59
A.2	Funcionais Geradores $Z[J]$ e $W[J]$	59
A.3	Ação Efetiva $\Gamma[\langle\phi\rangle_J]$	60
A.4	Propagador de Feynman da Teoria	61
A.5	Funcional Gerador de uma Teoria com campos em interação	64
A.6	$\Gamma[\langle\phi\rangle_J]$ como um Funcional Gerador	66
A.6.1	Função de Green 1PI de 3-pontos	69
A.7	Vértices da teoria	71
B	Cálculos via <i>FeynCalc</i>	73

Notações e Convenções

Num *Espaço de Minkowski*, definimos dois tipos distintos de vetores:

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x})$$

$$x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$, c representa a velocidade da luz e $\mathbf{x}$ representa o vetor tridimensional euclidiano usual. Esses vetores são conhecidos como vetores contravariantes e covariantes, respectivamente.

Esses vetores estão correlacionados através do tensor métrico da variedade, da forma:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

Onde estamos utilizando a convenção de Bjorken-Drell:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O tensor métrico contravariante e o tensor métrico covariante são inversas entre si, desde que satisfazem a relação:

$$\eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} = \eta^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$$

Esses tensores também são simétricos de modo que:

$$\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$$

De igual modo, dados dois quadrivetores arbitrários:

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$$

$$B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$$

podemos definir o produto escalar invariante entre estes como:

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

Também utilizamos a seguinte definição para o cogradiante e contragradiente:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$
$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

Ao longo deste texto, exceto nos casos devidamente explicitados, utilizamos as unidades naturais $\hbar = c = 1$, onde $\hbar = h/2\pi$, sendo h a constante de Planck.

Capítulo 1

Introdução

Um dos princípios fundamentais adotado na descrição das interações da natureza, em termos da Teoria Quântica de Campos, é o de *invariância local sob transformações de calibre*. Essa invariância surge naturalmente na teoria clássica do *eletromagnetismo* e também na *gravitação* [1, 2]. Ao nível microscópico o mesmo princípio se manifesta na teoria unificada das *interações eletrofracas* e na *cromodinâmica quântica*, teoria que descreve as interações fortes. Na verdade, pode-se dizer que o princípio de invariância local, identificado no eletromagnetismo de Maxwell e na gravitação de Einstein, foi generalizado, possibilitando a descoberta dos detalhes dinâmicos de outras interações fundamentais. A primeira formulação detalhada de uma tal generalização foi feita por Yang e Mills em 1954, em uma tentativa de se descrever as interações fortes entre prótons e nêutrons, considerados na época como partículas elementares [3]. De uma maneira geral, estas teorias de campos são denominadas *teorias de calibre* (ou teorias de “gauge”, que será o modo como nos referiremos a essas teorias no presente trabalho).

A quantização covariante de Teoria de Yang-Mills pode ser realizada utilizando-se um procedimento onde graus de liberdade não físicos são cancelados pela contribuição de certos campos fantasmas, os quais são introduzidos via formalismo de Faddeev-Popov [4, 5, 6, 7, 8]. O resultado deste procedimento leva aos bem conhecidos diagramas de Feynman para teorias não-abelianas, envolvendo vértices cúbicos e quárticos de auto-interação dos campos de gauge A_μ^a ($a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$; N é o número de graus de liberdade internos fermiônicos), e também interações com os fantasmas de Faddeev-Popov. Um procedimento análogo pode ser feito no caso da gravitação, embora nesse caso a renormalizabilidade da teoria não se verifique (veja [9] e referências lá citadas).

O desenvolvimento perturbativo de teorias de gauge pode ser feito de maneira mais

simples utilizando-se o chamado *formalismo de primeira ordem* [10, 11]. No caso da teoria de Yang-Mills, isso pode ser realizado tratando o campo de gauge A_μ^a e o campo $F_{\mu\nu}^a$ como campos independentes. A ação clássica nesse formalismo, dada por

$$\mathcal{L}_{YM}^{(1)} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (1.1)$$

é claramente equivalente ao formalismo usual, denominado *formalismo de segunda ordem*. De fato, usando a equação de Euler-Lagrange para o campo $F_{\mu\nu}^a$, obtemos imediatamente $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$. De igual modo, é imediato o fato de que substituindo esta última igualdade em 1.1, obtém-se a lagrangeana usual de 2ª ordem. Esse exemplo simples ilustra alguns aspectos importantes do formalismo de primeira ordem. Em primeiro lugar, vemos que na Eq. (1.1) não existe o vértice de interação quártica do tipo $AAAA$. Por outro lado, temos agora um propagador misto, gerado pelo bilinear FA , bem como um propagador para o campo F , gerado pelo termo quadrático FF . Ao introduzirmos a fixação de gauge, teremos também um termo quadrático para o campo A_μ^a e também o vértice e o propagador usual para os fantasmas de Faddeev-Popov. No caso da gravitação, verifica-se uma simplificação muito mais significativa. Enquanto no formalismo usual, de segunda ordem, temos infinitos vértices, gerados pela expansão da ação de Einstein-Hilbert em potências do campo $h_{\mu\nu}$, ($h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$), o número de vértices no formalismo de primeira ordem se reduz a no máximo vértices tri-lineares [12].

A equivalência entre os dois formalismos foi verificada recentemente ao nível clássico e quântico, para a teoria de Yang-Mills, e ao nível clássico no caso da gravitação. Também foram derivadas as regras de Feynman tanto para a teoria de Yang-Mills, quanto para a gravitação. A correção em ordem de um laço para o tensor de energia-momento térmico também foi calculada, verificando-se que o formalismo de primeira ordem para a gravitação fornece o resultado esperado [13].

Mais recentemente, foi possível realizar transformações nos campos do formalismo de primeira ordem de modo a obter apenas termos quadráticos simples, envolvendo o mesmo tipo de campos (não mistos), mantendo a simplificação no que se refere aos vértices (no máximo vértices tri-lineares, mesmo na gravitação) [12]. Também verificou-se a equivalência clássica e quântica tanto para Yang-Mills quanto para a gravitação, com a condição de que diagramas de Feynman do tipo “tadpole” possam ser desconsiderados, como é o caso quando utilizamos regularização dimensional [14, 15]. Uma verificação explícita da

equivalência entre os formalismos de primeira e segunda ordem, também foi feita no caso da gravitação, calculando-se a auto-energia do gráviton em ordem de um loop, em um gauge geral.

Tendo em vista as vantagens desse formalismo, no presente trabalho é abordado o desenvolvimento do formalismo de 1ª ordem para a teoria de Yang-Mills, desde sua quatização até o cálculo de correções quânticas para o propagador do bóson de gauge da teoria. Para isso, dedica-se uma considerável parte do texto ao desenvolvimento das ferramentas necessárias, bem como a apresentação do formalismo usual de 2ª ordem, a fim de destacar todo o potencial do formalismo de 1ª ordem, tema do presente trabalho.

Este trabalho divide-se em 3 partes principais: no capítulo 2 o leitor pode encontrar o desenvolvimento usual da teoria de Yang-Mills sem férmions; no capítulo 3, os fundamentos desta mesma teoria no formalismo de 1ª ordem é desenvolvido para, finalmente, no capítulo 4, serem desenvolvidos os cálculos de auto-energias dos campos à nível de 1-loop. Nos apêndices podem ser encontrados o desenvolvimento teórico de teorias de campos escalares, assim como o algoritmo utilizado nos cálculos do capítulo 4.

Capítulo 2

Teorias de *gauge* (Formalismo de 2ª Ordem)

2.1 Transformações de *gauge*

Existem teorias físicas cujos campos admitem diferentes configurações, produzindo mesmo assim observáveis idênticos. Nessas teorias, existe uma certa liberdade quanto a qual configuração de campo escolher, denominada **liberdade de calibre** (ou *gauge*, que será o modo como nos referiremos a esta palavra no presente trabalho). E portanto, podemos escolher, dentre as diversas, uma configuração específica dos campos da teoria (denominada **fixação de *gauge***).

A transformação de uma descrição desses campos para outra é denominada **transformação de *gauge***, e essa invariância da teoria que permite essas transformações, é denominada **invariância de *gauge***. Devemos ressaltar o fato de que essa invariância **não** é uma simetria, mas que essa invariância se demonstra através de transformações específicas aplicadas à esses campos, transformações pertencentes à grupos, os chamados grupos de simetria da teoria.

2.1.1 Transformações Globais e Transformações Locais

Um campo é transformado através da ação de um operador que, aplicado sobre o campo, o leva a um novo campo, ou seja, suponhamos um campo escalar real $\psi(x)$, e definimos a seguinte transformação:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x). \quad (2.1)$$

Sendo assim, o operador $U(x)$ que realiza essa transformação pode ou não depender da posição. Quando as transformações dependem da posição, são denominadas **transformações locais**, e quando não dependem, são denominadas **transformações globais**.

2.1.2 Teorias Abelianas e Teorias Não-Abelianas

Uma transformação é dita **abeliana** quando duas transformações, aplicadas uma após a outra, conduzem à mesma configuração de campo, independentemente da ordem na qual são aplicadas. Quando isso não ocorre, ela é dita **não-abeliana**.

Um exemplo simples de teoria invariante por transformações abelianas é a QED, invariante por transformações $U(1)$, enquanto um exemplo de teoria invariante por transformações não-abelianas é a teoria de Yang-Mills que, no caso, é invariante por transformações $SU(N)$.

2.2 Teoria de Yang-Mills

Consideremos um campo fermiônico $\psi(x)$ com massa m que pertence à representação N -dimensional fundamental de um *grupo de Lie* G . O campo $\psi(x)$ possui N componentes: $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Focaremos em nosso trabalho neste tipo de grupo pois estes contém elementos arbitrariamente próximos à identidade, de modo que um elemento geral pode ser atingido mediante ações sucessivas desses elementos infinitesimais. Desta maneira, qualquer elemento U do grupo pode ser escrito como:

$$U(\theta) = e^{-i\theta(x)} = e^{-i\theta^a(x)T^a} = \mathbb{1} - i\theta^a(x)T^a + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (2.2)$$

onde T^a , $a = 1, 2, \dots, n$, são os geradores do grupo e θ^a são os parâmetros da transformação que podem depender de x .

A *álgebra de Lie* associada a esse grupo G é gerada por esses mesmos geradores T^a que são objetos da relação de comutação:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (2.3)$$

onde uma soma sobre os índices repetidos devem ser entendida, de modo usual, e f^{abc} representa a *constante de estrutura do grupo*.

A transformação no campo $\psi(x)$ e em suas componentes podem ser escritas como:

$$\psi' = U(x)\psi(x), \quad \psi'_i(x) = U_{ij}(x)\psi_j(x), \quad (2.4)$$

onde o apóstrofo se refere ao objeto após uma transformação $U(\theta)$.

A lagrangeana para o campo fermiônico livre é dada por[16, sec. 2.1.2]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i(x), \quad (2.5)$$

Essa lagrangeana é invariante sob transformações de gauge globais (2.2) (com θ^a , $\forall a$, independentes de x), onde consideramos para isso, que as transformações são unitárias, ou seja: $U^\dagger U = \mathbb{1}$ ($\rightarrow U^\dagger = U^{-1}$), e portanto, os geradores do grupo são *hermitianos*. No entanto, sob transformações de gauge locais a mesma não permanece invariante.

Sendo assim, motivados pelo caso Abelian da *QED*, a fim de cancelar o termo que resta quando aplica-se uma transformação local na lagrangeana acima, é conveniente introduzir a seguinte forma para a derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a, \quad (2.6)$$

onde A_μ^a são os campos de gauge e g é a constante que representa a intensidade do acoplamento entre ψ e A_μ^a .

As componentes da derivada covariante são dadas por:

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - igT_{ij}^a A_\mu^a, \quad (2.7)$$

onde os geradores T_{ij}^a estão na representação fundamental (assim como o campo fermiônico).

Desse modo então, substituímos a lagrangeana anterior por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_i(x) \left(i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij} \right) \psi_j(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

A fim de que essa lagrangeana seja invariante sob transformações locais, devemos ter:

$$(D_\mu \psi)' = U (D_\mu \psi). \quad (2.9)$$

Portanto, utilizando 2.4 e 2.6:

$$\begin{aligned} [(\partial_\mu - igT^a A'_\mu{}^a) U(x)\psi] &= U(x) (\partial_\mu \psi - igT^a A_\mu^a \psi) \\ [igT^a A'_\mu{}^a U(x)] \psi &= [\partial_\mu U(x) + igU(x)T^a A_\mu^a] \psi \\ \Rightarrow T^a A'_\mu{}^a &= U(x) \left[T^a A_\mu^a - \frac{i}{g} U^{-1}(x) \partial_\mu U(x) \right] U^{-1}(x) \\ \Rightarrow T^a A'_\mu{}^a &= U(x) T^a A_\mu^a U^{-1}(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x) \\ \Rightarrow T^a A'_\mu{}^a &= U(x) T^a A_\mu^a U^{-1}(x) + \frac{i}{g} U(x) (\partial_\mu U^{-1}(x)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Desse modo então, o termo $\bar{\psi} D_\mu \psi$ é invariante sob transformações não-abelianas locais, e portanto, a lagrangeana (2.8) é também invariante.

Considerando variações infinitesimais ($\theta^a \ll 1, \forall a$) em (2.2), ignorando termos quadráticos ou de ordens superiores, e utilizando o fato de que a inversa das transformações são dadas pelas suas adjuntas ($U^\dagger = U^{-1}$), podemos dizer que a expressão (2.10) é dada por:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= U(x) A_\mu(x) U^\dagger(x) + \frac{i}{g} U(x) \left(\partial_\mu U^\dagger(x) \right) \\ A'_\mu &= (\mathbb{1} - i\theta(x)) A_\mu(x) (\mathbb{1} + i\theta(x)) + \frac{i}{g} (\mathbb{1} - i\theta(x)) \left(\partial_\mu (\mathbb{1} + i\theta(x)) \right) \\ A'_\mu &= A_\mu(x) + iA_\mu(x)\theta(x) - i\theta(x)A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta(x) \\ A'_\mu &= A_\mu(x) + i[A_\mu(x), \theta(x)] - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta(x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde por simplicidade, adotamos: $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a$, e $\theta(x) = \theta^a(x) T^a$, ambos objetos $N \times N$ na álgebra de Lie gerada pelo grupo.

Explicitando novamente os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 A'^a_\mu(x)T^a &= A^a_\mu(x)T^a + i[A^b_\mu(x)T^b, \theta^c(x)T^c] - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)T^a \\
 A'^a_\mu(x)T^a &= A^a_\mu(x)T^a + iA^b_\mu(x)\theta^c(x)\underbrace{[T^b, T^c]}_{if^{abc}T^a} - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)T^a \\
 A'^a_\mu(x)T^a &= A^a_\mu(x)T^a - f^{abc}A^b_\mu(x)\theta^c(x)T^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)T^a,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

e portanto, o campo A^a_μ se transforma como:

$$\begin{aligned}
 A'^a_\mu(x) - A^a_\mu(x) &= -f^{abc}A^b_\mu(x)\theta^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) \\
 \delta A^a_\mu &= -\frac{1}{g}\underbrace{\left(\partial_\mu\delta^{ac} + gf^{abc}A^b_\mu(x)\right)}_{D^{ac}_\mu}\theta^c(x) \\
 \boxed{\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}D^{ac}_\mu\theta^c(x) = -f^{abc}A^b_\mu(x)\theta^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)},
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde D^{ac}_μ representa a derivada covariante na representação adjunta.

Embora tenhamos determinado um modo pelo qual a lagrangeana (2.8) seja invariante por transformações não-abelianas locais, foi necessário a introdução dos campos de gauge A^a_μ , portanto, a fim de que a teoria seja completa, é necessário anexar um termo puramente cinético para estes campos à lagrangeana.

Inspirados pelo caso abeliano da *QED* então calculamos o comutador das derivadas covariantes:

$$[D_\mu, D_\nu] = -igT^a F_{\mu\nu}^a; \quad F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \tag{2.14}$$

O tensor $F_{\mu\nu}^a$ é identificado como a intensidade dos campos A^a_μ . Entretanto, diferentemente do caso abeliano, esse comutador não é um invariante de gauge. Sendo assim, se observarmos mais cuidadosamente na variação do tensor $F_{\mu\nu}^a$ temos:

$$\begin{aligned}
 \delta F_{\mu\nu}^a &= \delta(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c) \\
 &= \delta(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + \delta(gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

O primeiro e o segundo termo do lado direito da equação são dados por:

$$\begin{aligned} \rightarrow \delta (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) &= f^{abc} \theta^b (\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c) + f^{abc} [(\partial_\mu \theta^b) A_\nu^c - (\partial_\nu \theta^b) A_\mu^c] \\ \rightarrow \delta (g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) &= f^{abc} (g f^{ckl} A_\mu^k A_\nu^l \theta^b - A_\mu^b \partial_\nu \theta^c - A_\nu^c \partial_\mu \theta^b). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sendo assim, obtemos:

$$\boxed{\delta F_{\mu\nu}^a = f^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^c}. \quad (2.17)$$

Notemos que na representação adjunta do grupo de transformação: $(T^a)_{kl} = -i f^{akl}$. Portanto, o tensor $F_{\mu\nu}^a$ se transforma precisamente na representação adjunta.

Desde que o seguinte termo é um invariante de gauge:

$$\begin{aligned} \delta (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) &= 2 F_{\mu\nu}^a \delta F^{a\mu\nu} \\ &= 2 f^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^a F^{c\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

podemos construir o termo cinético para os campos de gauge (para fornecermos a dinâmica destes) e finalmente construirmos a lagrangeana invariante por transformações de *gauge* não-abelianas:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi(x). \quad (2.19)$$

Esta é a famosa langrangeana de *Yang-Mills*. Neste trabalho, consideraremos a lagrangeana de Yang-Mills sem férmions, portanto, daqui em diante utilizaremos como "lagrangeana de Yang-Mills" (no formalismo de 2ª ordem) a seguinte expressão:

$$\boxed{\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}}. \quad (2.20)$$

2.2.1 Quantização

Procedendo de maneira análoga à quantização da teoria escalar, nós escrevemos o funcional gerador $Z[J]$:

$$Z[J_\mu^a] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a) + J_\mu^a A^{a\mu}]}, \quad (2.21)$$

onde a medida de integração é dada por: $\mathcal{D}A_\mu^a = \prod_x \prod_{a,\mu} dA_\mu^a(x)$.

Gostariamos então de definir o propagador do campo livre, para isso analisamos o funcional gerador na ausência de interações, ou seja, quando $g = 0$. Então, definindo a Lagrangeana de Yang-Mills como:

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.22)$$

podemos escrever o funcional gerador na ausência de interações ($g = 0$) como:

$$Z_0[J_\mu^a] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{livre}(A_\mu^a) + J_\mu^a A^{a\mu}]}, \quad (2.23)$$

de tal modo que tenhamos:

$$Z_0[J_\mu^a] = \mathcal{N}' e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_\mu^a(x) D^{ab\mu\nu}(x-y) J_\nu^b(y)}. \quad (2.24)$$

Fazendo algumas integrações por partes, a ação livre pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} S_{livre} &= \int d^4x \mathcal{L}_{livre} = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left[-A_\nu^a \partial_\mu \partial^\mu A^{a\nu} + A_\mu^a \partial_\nu \partial^\mu A^{a\nu} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left[-\eta^{\mu\nu} A_\nu^a \partial^2 A_\mu^a + A_\mu^a \partial^\nu \partial^\mu A_\nu^a \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a \delta^{ab} \left[-\partial^2 \eta^{\mu\nu} + \partial^\nu \partial^\mu \right] A_\nu^b. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Assim como em (A.17), temos que:

$$K^{ab,\mu\nu} = \delta^{ab} \left[-\partial^2 \eta^{\mu\nu} + \partial^\nu \partial^\mu \right] \rightarrow D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = -(K^{ab,\mu\nu})^{-1}. \quad (2.26)$$

Entretanto, o operador K **não** possui inversa, e portanto, não podemos expandir perturbativamente o funcional gerador $Z[J]$ em g .

O operador K possui autovalores nulos e portanto determinante nulo. Porém, podemos explorar a liberdade de *gauge* da teoria para tentar remover os modos nulos do operador da Lagrangeana livre.

2.2.2 Formalismo de Faddeev-Popov

Para um campo A_μ^a fixo, todos os campos $A_\mu^{(\theta)a}$ obtidos por transformações do tipo (2.13) formam uma órbita no espaço de transformações do grupo em questão¹. Existe, entretanto, uma ambiguidade nos campos integrados na integral funcional em $Z[J]$, uma vez que a medida não diferencia campos que são conectados por essas transformações de *gauge*, e a integração gera então termos redundantes, pois a ação é invariante a essas transformações.

A ideia então é extrairmos do integrando esses campos redundantes a fim de que a integração atue somente nos campos que não estão conectados por transformações desse tipo. Para isso, Faddeev e Popov formalizaram o procedimento que iremos deprever em [7].

O procedimento consiste em selecionar um representante de cada órbita no espaço de transformações, pois uma vez que temos um único campo pertencente a uma determinada órbita, podemos então, mediante transformações de *gauge*, determinar todos os outros conectados a esse.

Então, seguimos com a seguinte restrição através da escolha de uma hipersuperfície que intersecciona cada órbita em um único ponto, através de funções F^a e w^a tais que:

$$F^a[A_\mu^a] = w^a, \quad (2.27)$$

que é satisfeita por algum $A_\mu^{(\theta)a}$,

$$F^a[A_\mu^{(\theta)a}] = w^a. \quad (2.28)$$

Essas hipersuperfícies escolhidas são denominadas **condições de fixação de *gauge***. Vale a pena ressaltar o fato de que os índices " a " na expressão anterior, ainda que repetidos, não implicam em uma soma implícita. Os índices aparecem repetidos pelo fato de que as funções F^a dependem do campo A_μ^a , e portanto carregam o mesmo índice.

A escolha dessa hipersuperfície é possível, uma vez que impomos que a eq. (2.27) possui uma única solução θ^a para um dado A_μ^a . Vale ressaltar que no presente trabalho não estamos preocupados com possíveis ambiguidades (ambiguidade de Gribov), quanto à impossibilidade de escolher a seção de um fibrado, i.e. escolher esse conjunto que contenha

¹Utilizaremos daqui pra frente: $A_\mu'^a = A_\mu^{(\theta)a}$, a fim de enfatizar a dependência da transformação no conjunto de parâmetros θ^a .

um e apenas um representante de cada órbita de gauge (i.e. as órbitas no espaço das transformações do grupo).

Definimos então a quantidade:

$$\Delta_{FP}[A_\mu^a] \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^{(\theta)a}] - w^a] = 1, \quad (2.29)$$

onde a integração é realizada sobre o elemento $U(\theta)$ do grupo de Lie. A medida invariante sobre o espaço de grupo pode ser escrita explicitamente como:

$$\mathcal{D}U = \prod_b \mathcal{D}\theta^b = \prod_b \prod_x d\theta^b(x). \quad (2.30)$$

Nessas equações, o termo $\delta[F^a[A_\mu^{(\theta)a}] - w^a]$ representa o funcional delta de Dirac, que consiste no produto de funções delta de Dirac em cada ponto do espaço ²:

$$\delta[F^a[A_\mu^{(\theta)a}] - w^a] = \prod_{a,y} \delta(F^a[A_\mu^{(\theta)a}(y)] - w^a). \quad (2.31)$$

Notemos que Δ_{FP} é um invariante por transformações de *gauge*, uma vez que de acordo com (2.29):

$$\Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^{(\theta)a}] = \int \left[\prod_b \mathcal{D}\theta'^b \right] \delta[F^a[A_\mu^{(\theta')a}] - w^a]. \quad (2.32)$$

Então, fazendo $\theta\theta' = \theta''$:

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^{(\theta)a}] &= \int \left[\prod_b \mathcal{D}\theta'^b \right] \delta[F^a[A_\mu^{(\theta')a}] - w^a] \\ &= \int \left[\prod_b \mathcal{D}\theta''^b \right] \delta[F^a[A_\mu^{(\theta'')a}] - w^a] \\ &= \int \left[\prod_b \mathcal{D}\theta^b \right] \delta[F^a[A_\mu^{(\theta)a}] - w^a] \\ &= \Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^a]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Na passagem da segunda para a terceira linha usamos o fato de que para grupos compactos o elemento de volume no espaço de transformações define uma medida invariante

²Um funcional delta de Dirac satisfaz a seguinte identidade: $\int \mathcal{D}f \delta[f(w)] = 1$. Fazendo uma mudança de variável também temos: $\int \mathcal{D}w \det\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right) \delta[f(w)]$

[17]:

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}U'. \quad (2.34)$$

Com isso podemos então voltar a equação (2.21) na ausência de fontes, e inserir a unidade definida em (2.29):

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a)} \times \underbrace{\Delta_{FP}[A_\mu^a] \int \left[\prod_b \mathcal{D}\theta^b \right] \delta[F^a[A_\mu^{(\theta)a}] - w^a]}_1. \quad (2.35)$$

Notando que toda a expressão acima, exceto o argumento da função delta, é invariante por transformações de *gauge*³, podemos substituir $A_\mu^{(\theta)a}$ por A_μ^a no argumento da função delta:

$$\begin{aligned} Z[0] &= \mathcal{N} \left(\underbrace{\int \left[\prod_b \mathcal{D}\theta^b \right]}_{\mathcal{N}'} \right) \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_{FP}[A_\mu^a] \delta[F^a[A_\mu^a] - w^a] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a)} \\ &= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_{FP}[A_\mu^a] \delta[F^a[A_\mu^a] - w^a] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde o volume (potencialmente infinito) das transformações de *gauge* foi absorvido na constante $\mathcal{N}'$, uma vez que este pode ser fatorado pela não dependência do integrando em θ^a , $\forall a$.

A fim de explicitarmos o termo Δ_{FP} , notemos que resolvendo a integral funcional (2.29) diretamente, obtemos [16]:

$$\begin{aligned} 1 &= \Delta_{FP}[A_\mu^a] \int \prod_b \mathcal{D}\theta^b \delta[F^a[A_\mu^{(\theta)a}] - w^a] \\ &= \frac{\Delta_{FP}[A_\mu^a]}{\det(K_{FP})}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde o elemento de matriz de K_{FP} é dado por:

$$(K_{FP}(x, y))^{ab} = \frac{\delta \left(F^a[A_\mu^{(\theta)a}(x)] \right)}{\delta \theta^b(y)}. \quad (2.38)$$

³A medida $\mathcal{D}A_\mu^a$ também é invariante por transformações de *gauge*, cf. [16].

A quantidade:

$$\Delta_{FP}[A_\mu^a] = \det(K_{FP}), \quad (2.39)$$

é denominada **determinante de Faddeev-Popov**.

Portanto, podemos escrever o funcional gerador, utilizando a forma explícita de $\Delta_{FP}[A_\mu^a]$, como:

$$Z[0] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A_\mu^a \det(K_{FP}) \delta[F^a[A_\mu^a] - w^a] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a)}. \quad (2.40)$$

Notemos que a integral independe de $w^a(x)$, que é arbitrária, portanto podemos multiplicar a integral funcional por uma constante (compensando na constante de normalização $\mathcal{N}$), e integrar sobre w^a . Então:

$$\begin{aligned} Z[0] &= \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}w^a \int \mathcal{D}A_\mu^a \left(e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x [w^a(x)]^2} \right) \det(K_{FP}) \delta[F^a[A_\mu^a] - w^a] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a)} \\ &= \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}A_\mu^a \det(K_{FP}) e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x [F^a[A_\mu^a]]^2} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a)}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde a integral em w^a foi realizada utilizando o delta de Dirac funcional. Finalmente (simplesmente denotando a constante de normalização como $\mathcal{N}$):

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \det(K_{FP}) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a) + \mathcal{L}_{FG}}, \quad (2.42)$$

onde o termo $\mathcal{L}_{FG}$ é denominado Lagrangeana de fixação de gauge, dado por:

$$\mathcal{L}_{FG} = -\frac{1}{2\xi} \left[F^a[A_\mu^a] \right]^2, \quad (2.43)$$

e ξ é conhecido como **parâmetro de fixação de gauge**.

Com esse truque então, eliminamos o funcional delta do integrando adicionando um termo na função exponencial. Esse procedimento produz um propagador bem definido para os bósons de gauge da teoria. Isso ficará mais evidente adiante, quando escolhermos explicitamente uma condição de fixação de *gauge*.

Como sabemos[18, Sec. 9.5, Vol. 1], um determinante pode ser escrito como uma integral funcional sobre dois campos de Grassmann independentes:

$$\Delta_{FP} = \det(K_{FP}) = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{iS_{ghost}[c, \bar{c}]}, \quad (2.44)$$

onde:

$$S_{ghost}[c, \bar{c}] = \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{c}^a(x_1) \cdot K_{FP}^{ab}(x_1, x_2) \cdot c^b(x_2). \quad (2.45)$$

Portanto, finalmente chegamos à forma final do funcional gerador Z na ausência de fontes:

$$\boxed{Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i[S_{YM} + S_{FG} + S_{ghost}]} } . \quad (2.46)$$

Os campos c e $\bar{c}$ são denominados *campos fantasmas de Faddeev-Popov*, ou *ghosts de Faddeev-Popov*. Esses campos não representam campos físicos e suas formas funcionais serão explicitadas mais adiante.

2.2.3 Propagadores da Teoria de Yang-Mills

A fim determinarmos os propagadores e vértices da teoria, devemos escolher uma condição de fixação de gauge. Algumas das mais utilizadas são:

- gauge de Coulomb $\rightarrow F^a[A_\mu^a] = \partial^i A_i^a$;
- gauge de Lorenz (gauge covariante) $\rightarrow F^a[A_\mu^a] = \partial^\mu A_\mu^a$;
- gauge Axial $\rightarrow F^a[A_\mu^a] = n^\mu A_\mu^a$, onde n^μ define uma direção fixa no espaço-tempo;
- gauge temporal $\rightarrow F^a[A_\mu^a] = m^\mu A_\mu^a$, onde $m^\mu = (1, \vec{0})$.

Utilizando o **gauge de Lorenz**, podemos então escrever a ação dos fantasmas de Faddeev-Popov como:

$$\begin{aligned} S_{ghost}[c, \bar{c}] &= \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{c}^a(x_1) \cdot \left(\frac{\delta F^a[A_\mu^{(\theta)a}]}{\delta \theta^b(x_2)} \right) \cdot c^b(x_2) \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{c}^a(x_1) \cdot \left(\frac{\delta \partial^{\mu; x_1} A_\mu^{(\theta)a}(x_1)}{\delta \theta^b(x_2)} \right) \cdot c^b(x_2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como assumimos que o grupo de simetria da teoria é um grupo de Lie, i.e., um grupo continuamente gerado por transformações infinitesimais, podemos então assumir as transformações de *gauge* como sendo infinitesimais por ora. A fim de realizarmos os cálculos, podemos derivar a expressão (2.13) com respeito a θ^b , de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \left[A_\mu^{(\theta)a}(x) \right]}{\delta \theta^b(y)} &= \frac{\delta}{\delta \theta^b(y)} \left(A_\mu^a(x) - \frac{1}{g} D_\mu^{ac}(x) \theta^c(x) \right) \\ &= -\frac{1}{g} D_\mu^{ac}(x) \delta^{bc} \delta(x-y) \\ &= -\frac{1}{g} D_\mu^{ab}(x) \delta(x-y). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Agora então fazemos, utilizando o resultado anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \partial^{\mu;x} A_\mu^{(\theta)a}(x)}{\delta \theta^b(y)} &= \int d^4 z \frac{\delta \partial^{\mu;x} A_\mu^{(\theta)a}(x)}{\delta A_\nu^{(\theta)d}(z)} \frac{\delta \delta A_\nu^{(\theta)d}(z)}{\delta \theta^b(y)} \\ &= \int d^4 z \frac{\delta \partial^{\mu;x} A_\mu^{(\theta)a}(x)}{\delta A_\nu^{(\theta)d}(z)} \left[-\frac{1}{g} D_\nu^{db}(z) \delta(z-y) \right] \\ &= -\frac{1}{g} \partial^{\mu;x} \left(\frac{\delta A_\mu^{(\theta)a}(x)}{\delta A_\nu^{(\theta)d}(y)} \right) D_\nu^{db}(y) \\ &= -\frac{1}{g} \partial^{\mu;x} \left(g_\nu^\mu \delta^{ad} \delta(x-y) \right) D_\nu^{db}(y) \\ &= -\frac{1}{g} \partial^{\nu;x} \delta(x-y) D_\nu^{ab}(y). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Então, voltando à ação dos fantasmas de Faddeev-Popov (2.47), utilizando a propriedade das funções delta de Dirac e integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} S_{ghost}[c, \bar{c}] &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 \bar{c}^a(x_1) \left(-\frac{1}{g} \partial^{\nu;x_1} \delta(x_1 - x_2) D_\nu^{ab}(x_2) \right) c^b(x_2) \\ &= -\int d^4 x_1 \bar{c}^a(x_1) \left(\frac{1}{g} \partial^{\nu;x_1} D_\nu^{ab}(x_1) \right) c^b(x_1) \\ &= \frac{1}{g} \int d^4 x \partial_\nu (\bar{c}^a(x)) D^{ab;\nu}(x) c^b(x). \end{aligned} \quad (2.50)$$

O termo $1/g$ é um fator irrelevante que pode ser absorvido na normalização dos campos c e $\bar{c}$ (cf. [19, sec. 16.2] e [16, p. 50]). Podemos então escrever:

$$S_{ghost}[c, \bar{c}] = \int d^4x \partial_\nu (\bar{c}^a(x)) D^{ab;\nu}(x) c^b(x). \quad (2.51)$$

Com essa decisão da condição de *gauge*, utilizando (2.20), (2.43) e (2.51), podemos então escrever o funcional gerador na ausência de fontes como:

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} [\partial_\mu A^{a\mu}]^2 + \partial_\nu (\bar{c}^a(x)) D^{ab;\nu}(x) c^b(x) \right]}. \quad (2.52)$$

Incluindo novamente termos de fontes (arbitrárias) para esses campos, então temos:

$$Z[J_\mu^a, \bar{\eta}^a, \eta^a] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} [\partial_\mu A^{a\mu}]^2 + \partial_\nu (\bar{c}^a(x)) D^{ab;\nu}(x) c^b(x) + J_\mu^a A^{a\mu} + \bar{\eta}^a c^a + \eta^a \bar{c}^a \right]}, \quad (2.53)$$

onde J_μ^a , η^a e $\bar{\eta}^a$, são os termos que representam as fontes, sendo estes dois últimos variáveis de Grassmann.

Propagador para o campo de *gauge*

Podemos reescrever o termo de fixação de *gauge* como:

$$\begin{aligned} S_{FG} &= - \int d^4x \frac{1}{2\xi} [\partial_\mu A^{a\mu}]^2 = - \int d^4x \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^{a\mu} \partial_\nu A^{a\nu} \\ &= \int d^4x \frac{1}{2\xi} A^{a\mu} \partial_\mu \partial_\nu A^{a\nu} = \int d^4x \frac{1}{2\xi} A^{a\mu} \delta^{ab} \partial_\mu \partial_\nu A^{b\nu}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Agora considerando o funcional gerador na ausência de interações ($g = 0$) (como em 2.25), temos um termo extra na ação livre para o campo de *gauge* advindo da fixação de *gauge*:

$$\begin{aligned} S_{livre} &= -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a \delta^{ab} \left[-\partial^2 \eta^{\mu\nu} + \partial^\nu \partial^\mu \right] A_\nu^b + \int d^4x \frac{1}{2\xi} A_\mu^a \delta^{ab} \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^b \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^{a\mu}(x) \underbrace{\left[\delta^{ab} \left[-\partial^2 \eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial^\mu \right] \delta(x-y) \right]}_{\mathcal{M}(x-y)} A^{b\nu}(y). \end{aligned} \quad (2.55)$$

No espaço de momentos, temos:

$$\tilde{\mathcal{M}}(k) = \delta^{ab} \left[k^2 \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\nu k^\mu \right]. \quad (2.56)$$

Através da relação

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x-y) &= \delta^{ab} \left[-\partial^2 \eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial^\mu \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta^{ab} \left[k^2 \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\nu k^\mu \right] e^{-ik \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

chegamos a:

$$\tilde{\mathcal{M}}(k) = \delta^{ab} \left[k^2 \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\nu k^\mu \right], \quad (2.58)$$

de onde obtemos:

$$\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(k) = \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]. \quad (2.59)$$

Notemos que, diferentemente de quando não tínhamos fixado condições de gauge para a teoria, esse operador possui inversa.

Então, dado que (A.17): $D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = -\mathcal{M}^{-1}$, temos:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) &= \delta^{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \\ \tilde{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) &= \frac{-\delta^{ab}}{k^2} \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Portanto, a regra de Feynman no espaço de momentos para esse propagador é:

$$\mathbf{a}, \mu \text{ } \overbrace{\text{-----}}^{\mathbf{k}} \text{ } \mathbf{b}, \nu = i \tilde{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{-i \delta^{ab}}{k^2} \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (2.61)$$

Propagador para os fantasmas de Faddeev-Popov

Na ausência de interações ($g = 0$), a derivada covariante se torna:

$$D^{ab;\nu} = \partial^\nu \delta^{ab} + g f^{apb} A^{p\nu} \rightarrow D^{ab;\nu} = \partial^\nu \delta^{ab}. \quad (2.62)$$

Podemos reescrever a ação livre dos fantasmas de Faddeev-Popov como:

$$\begin{aligned} S_{livre} &= \int d^4x \partial_\nu (\bar{c}^a(x)) D^{ab;\nu}(x) c^b(x) = \int d^4x \partial_\nu \bar{c}^a(x) \partial^\nu \delta^{ab} c^b(x) \\ &= \int d^4x \partial_\nu (\bar{c}^a(x)) \partial^\nu \delta^{ab} c^b(x) \\ &= \int d^4x \partial_\nu [\bar{c}^a(x) \partial^\nu \delta^{ab} c^b(x)] - \int d^4x \bar{c}^a(x) \partial_\nu \partial^\nu \delta^{ab} c^b(x) \\ &= - \int d^4x \bar{c}^a(x) (\partial^2 \delta^{ab}) c^b(x). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Assim como em (A.17), nesse caso, temos que:

$$K^{ab} = \partial^2 \delta^{ab} \rightarrow D^{ab}(x-y) = -(K^{ab})^{-1}. \quad (2.64)$$

Para esse caso, é evidente que para que a seguinte expressão seja verdade:

$$\begin{aligned} -K^{ab} \cdot D^{ab}(x-y) &= \delta(x-y) \\ -\partial^2 \delta^{ab} \cdot D^{ab}(x-y) &= \delta(x-y), \end{aligned} \quad (2.65)$$

devemos ter:

$$\begin{aligned} D^{ab}(x-y) &= \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \\ \tilde{D}^{ab}(k) &= \frac{\delta^{ab}}{k^2}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Portanto, a regra de Feynman no espaço de momentos para esse propagador é:

$$\text{a} \xrightarrow{\text{k}} \text{b} = i \tilde{D}^{ab}(k) = \frac{i \delta^{ab}}{k^2}. \quad (2.67)$$

2.2.4 Regras de Feynman para os Vértices

Estamos interessados em calcular as regras de Feynman para os vértices da teoria. Na teoria de Yang-Mills no formalismo de 2ª Ordem existem vários tipos de vértices de interação: um vértice cúbico e um vértice quártico de glúons provenientes do termo quadrático em $F_{\mu\nu}^a$, além do vértice cúbico de dois campos fantasmas e um glúon.

Iremos determinar as Regras de Feynman no espaço de momentos para todos esses vértices, pois tendo os propagadores e as regras para os vértices estamos aptos para realizarmos cálculos de espalhamento e correções quânticas envolvendo esses campos.

Vértice Cúbico Bosônico

Podemos escrever primeiramente o termo de interação cúbica que aparece na ação vindo do termo cinético $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ como:

$$\begin{aligned} iS_A^{(3)} &= -\frac{i}{4} \int d^4x \left[(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} + g f^{ade} A_\mu^d A_\nu^e (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \right] \\ &= -ig f^{abc} \int d^4x (\partial^\mu A^{a\nu}) A_\mu^b A_\nu^c. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Onde usou-se apenas a mudança de variáveis mudas e a anti-simetria da constante de estrutura f^{abc} .

Indo para o espaço de momento ⁴ temos:

$$\begin{aligned} iS_A^{(3)} &= -ig f^{abc} \int d^4x (\partial^\mu A^{a\nu}) A_\mu^b A_\nu^c \\ &= -ig f^{abc} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ip^\mu) e^{-ip \cdot x} \tilde{A}^{a\nu}(p) e^{-ik \cdot x} \tilde{A}_\mu^b(k) e^{-iq \cdot x} \tilde{A}_\nu^c(q) \\ &= \frac{-g f^{abc} \eta^{\nu\rho} (2\pi)^4}{[(2\pi)^4]^3} \int d^4p \int d^4k \int d^4q p^\mu \delta(p+k+q) \tilde{A}_\rho^a(p) \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{A}_\nu^c(q). \end{aligned} \quad (2.69)$$

A fim de simplificar a notação, iremos utilizar a notação compacta, colocando em uma

⁴Estamos utilizando a seguinte definição para as transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{A}_\mu^a(p) \\ \tilde{A}_\mu^a(p) &= \int d^4x e^{+ip \cdot x} A_\mu^a(x). \end{aligned}$$

única notação o índice de Lorentz, o índice de cor e o momento do campo (nessa notação, para índices repetidos temos uma soma sobre os argumentos discretos desse índice e uma integral sobre os argumentos contínuos). Utilizando essa notação, podemos definir os rótulos i, j e k , respectivamente como: $i = (a_1, \lambda_1, p_1)$, $j = (a_2, \lambda_2, p_2)$ e $k = (a_3, \lambda_3, p_3)$ (considerando os momentos entrando no vértice). Dessa maneira, podemos reescrever a expressão anterior como,

$$\begin{aligned} iS_A^{(3)} &= \frac{-gf^{abc}\eta^{\nu\rho}(2\pi)^4}{[(2\pi)^4]^3} \int d^4p \int d^4k \int d^4q p^\mu \delta(p+k+q) \tilde{A}_\rho^a(p) \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{A}_\nu^c(q) \\ &= \frac{-gf^{a_1a_2a_3}\eta^{\lambda_3\lambda_1}(2\pi)^4}{[(2\pi)^4]^3} \int d^4p_1 \int d^4p_2 \int d^4p_3 p_1^\mu \delta(p_1+p_2+p_3) \tilde{A}_{\lambda_1}^{a_1}(p_1) \tilde{A}_{\lambda_2}^{a_2}(p_2) \tilde{A}_{\lambda_3}^{a_3}(p_3). \end{aligned} \quad (2.70)$$

e finalmente, utilizando a notação compacta ijk , como definidos anteriormente:

$$V_{ijk} = -\frac{(2\pi)^4}{[(2\pi)^4]^3} \delta(p_1+p_2+p_3) gf^{a_1a_2a_3} p_1^\mu \eta^{\lambda_3\lambda_1} \Rightarrow iS_A^{(3)} = V_{ijk} \tilde{A}_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k.$$

Então, utilizando a equação (A.57), e definindo o seguinte conjunto de índices compactos: $l = (a, \rho, -p)$, $m = (b, \mu, -k)$ e $n = (c, \nu, -q)$, temos que:

$$\begin{aligned} &= [(2\pi)^4]^3 \frac{\delta^3 iS_A^{(3)}}{\delta \tilde{A}_\rho^a(-p) \delta \tilde{A}_\mu^b(-k) \delta \tilde{A}_\nu^c(-q)} = [(2\pi)^4]^3 \frac{\delta^3 iS_A^{(3)}}{\delta \tilde{A}_l \delta \tilde{A}_m \delta \tilde{A}_n} \\ &= [(2\pi)^4]^3 \left(V_{lmn} + \text{perm.} \right) \\ &= [(2\pi)^4]^3 \left(V_{lmn} + V_{lnm} + V_{nml} + V_{nlm} + V_{mnl} + V_{mln} \right) \\ &= -[(2\pi)^4]^3 \frac{(2\pi)^4}{[(2\pi)^4]^3} g \delta(-p-k-q) \left(f^{abc}(-p^\mu) \eta^{\nu\rho} + f^{acb}(-p^\nu) \eta^{\mu\rho} \right. \\ &\quad \left. + f^{cba}(-q^\mu) \eta^{\rho\nu} + f^{cab}(-q^\rho) \eta^{\mu\nu} + f^{bca}(-k^\nu) \eta^{\rho\mu} + f^{bac}(-k^\rho) \eta^{\nu\mu} \right) \\ &= (2\pi)^4 g f^{abc} \delta(p+k+q) \left[(p-q)^\mu \eta^{\rho\nu} + (k-p)^\nu \eta^{\mu\rho} + (q-k)^\rho \eta^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Finalmente:

$$= (2\pi)^4 g f^{abc} \delta(p + k + q) \left[(p - q)^\mu \eta^{\rho\nu} + (k - p)^\nu \eta^{\mu\rho} + (q - k)^\rho \eta^{\mu\nu} \right].$$

(2.72)

Vértice Quártico Bosônico

Podemos escrever o termo de interação quártica que aparece na ação vindo do termo cinético $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ como:

$$\begin{aligned} iS_A^{(4)} &= -\frac{i}{4} \int d^4x \left[(g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) (g f^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu}) \right] \\ &= -\frac{ig^2 f^{abc} f^{ade}}{4} \int d^4x A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Indo para o espaço de momento:

$$\begin{aligned} iS_A^{(4)} &= -\frac{ig^2 f^{abc} f^{ade}}{4} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{-ip_1 \cdot x} \tilde{A}_\mu^b(p_1) \\ &\quad \times e^{-ip_2 \cdot x} \tilde{A}_\nu^c(p_2) e^{-ip_3 \cdot x} \tilde{A}^{d\mu}(p_3) e^{-ip_4 \cdot x} \tilde{A}^{e\nu}(p_4). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} iS_A^{(4)} &= -\frac{ig^2 f^{abc} f^{ade}}{4} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{-i(p_1+p_2+p_3+p_4) \cdot x} \\ &\quad \times \tilde{A}_\mu^b(p_1) \tilde{A}_\nu^c(p_2) \tilde{A}^{d\mu}(p_3) \tilde{A}^{e\nu}(p_4) \\ &= -\frac{ig^2 f^{abc} f^{ade} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} (2\pi)^4}{4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ &\quad \times \tilde{A}_\mu^b(p_1) \tilde{A}_\nu^c(p_2) \tilde{A}_\gamma^d(p_3) \tilde{A}_\sigma^e(p_4). \end{aligned} \quad (2.75)$$

A fim de simplificar a notação, novamente iremos utilizar a notação compacta. Utilizando essa notação, podemos definir os rótulos i, j, k e g , respectivamente como: $i = (e_1, \lambda_1, q_1)$, $j = (e_2, \lambda_2, q_2)$, $k = (e_3, \lambda_3, q_3)$ e $g = (e_4, \lambda_4, q_4)$ (considerando os momentos

entrando no vértice). Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
 iS_A^{(4)} &= -\frac{ig^2 f^{abc} f^{ade} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} (2\pi)^4}{4} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
 &\quad \times \tilde{A}_\mu^b(p_1) \tilde{A}_\nu^c(p_2) \tilde{A}_\gamma^d(p_3) \tilde{A}_\sigma^e(p_4) \\
 &= -\frac{ig^2 f^{ae_1 e_2} f^{ae_3 e_4} \eta^{\lambda_1 \lambda_3} \eta^{\lambda_2 \lambda_4} (2\pi)^4}{4} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_4}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \tilde{A}_{\lambda_1}^{e_1}(q_1) \tilde{A}_{\lambda_2}^{e_2}(q_2) \tilde{A}_{\lambda_3}^{e_3}(q_3) \tilde{A}_{\lambda_4}^{e_4}(q_4),
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

e utilizando a notação compacta $ijklg$, como definidos anteriormente:

$$V_{ijklg} = -\frac{(2\pi)^4}{4[(2\pi)^4]^4} \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) i g^2 f^{ae_1 e_2} f^{ae_3 e_4} \eta^{\lambda_1 \lambda_3} \eta^{\lambda_2 \lambda_4} \Rightarrow iS_A^{(4)} = V_{ijklg} \tilde{A}_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k \tilde{A}_g.$$

Então, utilizando a equação (A.57), e definindo o seguinte conjunto de índices compactos: $l = (b, \mu, -p_1)$, $m = (c, \nu, -p_2)$, $n = (d, \gamma, -p_3)$ e $o = (e, \sigma, -p_4)$, temos que:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} e, \sigma \\ \diagup \\ \diagdown \\ d, \gamma \end{array} \begin{array}{c} b, \mu \\ \diagdown \\ \diagup \\ c, \nu \end{array} &= [(2\pi)^4]^4 \frac{\delta^4 iS_A^{(4)}}{\delta \tilde{A}_\mu^b(-p_1) \delta \tilde{A}_\nu^c(-p_2) \delta \tilde{A}_\gamma^d(-p_3) \delta \tilde{A}_\sigma^e(-p_4)} = [(2\pi)^4]^4 \frac{\delta^4 iS_A^{(4)}}{\delta \tilde{A}_l \delta \tilde{A}_m \delta \tilde{A}_n \delta \tilde{A}_o} \\
 &= [(2\pi)^4]^4 (V_{lmno} + \text{perm.}) \\
 &= [(2\pi)^4]^4 (V_{lmno} + V_{lmon} + V_{lonm} + V_{lomn} \\
 &\quad + V_{lnom} + V_{lnmo} + V_{mlno} + V_{mlon} \\
 &\quad + V_{mnol} + V_{mnlo} + V_{moln} + V_{monl} \\
 &\quad + V_{nlmo} + V_{nlom} + V_{nmlo} + V_{nmol} \\
 &\quad + V_{nolm} + V_{noml} + V_{olmn} + V_{olnm} \\
 &\quad + V_{onml} + V_{onlm} + V_{omln} + V_{omnl}).
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

A fim de realizarmos essa conta mais facilmente, é interessante percebermos que a quantidade V_{lmno} possui a seguinte propriedade:

- $V_{lmno} = \Omega f^{abc} f^{ade} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} = V_{mlon};$
- $V_{lmon} = \Omega f^{abc} f^{aed} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\gamma} = V_{mlno};$
- $V_{lomn} = \Omega f^{abe} f^{acd} \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\gamma} = V_{mnlo};$
- $V_{lonm} = \Omega f^{abe} f^{adc} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\sigma\nu} = V_{nmlo};$
- $V_{lnmo} = \Omega f^{abd} f^{ace} \eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma} = V_{omnl};$
- $V_{lnom} = \Omega f^{abd} f^{aec} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\gamma\nu} = V_{omln};$
- $V_{moln} = \Omega f^{ace} f^{abd} \eta^{\nu\mu} \eta^{\sigma\gamma} = V_{nlom};$
- $V_{monl} = \Omega f^{ace} f^{adb} \eta^{\nu\gamma} \eta^{\sigma\mu} = V_{nlmo};$
- $V_{mnol} = \Omega f^{acd} f^{aeb} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\gamma\mu} = V_{olmn};$
- $V_{nolm} = \Omega f^{ade} f^{abc} \eta^{\gamma\mu} \eta^{\sigma\nu} = V_{onml};$
- $V_{noml} = \Omega f^{ade} f^{acb} \eta^{\gamma\nu} \eta^{\sigma\mu} = V_{onlm};$
- $V_{nmol} = \Omega f^{adc} f^{aeb} \eta^{\gamma\sigma} \eta^{\nu\mu} = V_{olnm};$

onde $\Omega = -\frac{(2\pi)^4}{4[(2\pi)^4]^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) i g^2$. Então:

$$= [(2\pi)^4]^4 \left(2V_{lmno} + 2V_{lmon} + 2V_{lomn} + 2V_{lonm} + 2V_{lnmo} + 2V_{lnom} + \right. \\ \left. 2V_{moln} + 2V_{monl} + 2V_{mnol} + 2V_{nolm} + 2V_{noml} + 2V_{nmol} \right). \quad (2.78)$$

Porém, percebe-se que essa quantidade é invariante por troca de índices aos pares, logo:

- $V_{lmno} = V_{nolm};$
- $V_{lmon} = V_{noml};$
- $V_{lomn} = V_{nmol};$
- $V_{lonm} = V_{moln};$
- $V_{lnmo} = V_{mnol};$
- $V_{lnom} = V_{monl};$

Então:

$$= [(2\pi)^4]^4 \left(4V_{lmno} + 4V_{lmon} + 4V_{lomn} + 4V_{lonm} + 4V_{lnmo} + 4V_{lnom} \right) \\ = -[(2\pi)^4]^4 \frac{(2\pi)^4}{[(2\pi)^4]^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) i g^2 \left[f^{abc} f^{ade} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} + f^{abc} f^{aed} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\gamma} \right. \\ \left. + f^{abe} f^{acd} \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\gamma} + f^{abe} f^{adc} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\sigma\nu} + f^{abd} f^{ace} \eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma} + f^{abd} f^{aec} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\gamma\nu} \right] \\ = -(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) i g^2 \left[f^{abc} f^{ade} (\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\gamma}) \right. \\ \left. + f^{abe} f^{acd} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\mu\gamma} \eta^{\sigma\nu}) + f^{abd} f^{ace} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\gamma\nu}) \right]. \quad (2.79)$$

Finalmente:

$$= -ig^2(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \left[f^{abc} f^{ade} (\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\gamma}) \right. \\ \left. + f^{abe} f^{acd} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\mu\gamma} \eta^{\sigma\nu}) + f^{abd} f^{ace} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\gamma\nu}) \right]$$

(2.80)

Vértice Cúbico $A - c - \bar{c}$

Podemos escrever o termo de interação cúbica entre o glúon e os ghosts como:

$$iS_{A-c-c}^3 = igf^{abc} \int d^4x \partial_\mu (\bar{c}^a) A^{c\mu} c^c. \quad (2.81)$$

Indo para o espaço de momentos:

$$\begin{aligned} iS_{A-c-c}^3 &= igf^{abc} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ip_\mu) \tilde{c}^a(p) e^{-ip \cdot x} \tilde{A}^{b\mu}(k) e^{-ik \cdot x} \tilde{c}^c(q) e^{-iq \cdot x} \\ &= gf^{abc} (2\pi)^4 \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \delta(p + k + q) p^\mu \tilde{c}^a(p) \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{c}^c(q). \end{aligned} \quad (2.82)$$

A fim de simplificar a notação, novamente iremos utilizar a notação compacta. Utilizando essa notação, podemos definir os rótulos i, j e k , respectivamente como: $i = (a_1, q_1)$, $j = (a_2, \lambda, q_2)$ e $k = (a_3, q_3)$ (lembrando que os fantasmas não possuem índice de Lorentz). Dessa maneira, podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\begin{aligned}
 iS_{A-c-c}^3 &= g f^{abc} (2\pi)^4 \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \delta(p+k+q) p^\mu \tilde{c}^a(p) \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{c}^c(q) \\
 &= g f^{a_1 a_2 a_3} (2\pi)^4 \int d^4x \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \delta(q_1+q_2+q_3) q_1^\lambda \tilde{c}_1^a(q_1) \tilde{A}_\lambda^{a_2}(q_2) \tilde{c}_3^a(q_3).
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

Utilizando a notação compacta ijk :

$$V_{ijk} = \frac{(2\pi)^4}{[(2\pi)^4]^3} \delta(q_1+q_2+q_3) g f^{a_1 a_2 a_3} q_1^\lambda \Rightarrow iS_{A-c-c}^{(3)} = V_{ijk} \tilde{c}_i \tilde{A}_j \tilde{c}_k.$$

Então, utilizando a equação (A.57), e definindo o seguinte conjunto de índices compactos: $l = (a, -p)$, $m = (b, \mu, -k)$ e $n = (c, -q)$, temos que (considerando os momentos entrando no vértice):

$$\begin{aligned}
 &= [(2\pi)^4]^4 \frac{\delta^3 iS_{A-c-c}^{(3)}}{\delta \tilde{c}^a(-p) \delta \tilde{A}_\nu^b(-k) \delta \tilde{c}^c(-q)} = [(2\pi)^4]^4 \frac{\delta^3 iS_{A-c-c}^{(3)}}{\delta \tilde{c}_l \delta \tilde{A}_m \delta \tilde{c}_n} \\
 &= [(2\pi)^4]^4 (V_{lmn}) \\
 &= -g f^{abc} p^\mu (2\pi)^4 \delta(p+k+q).
 \end{aligned}$$

(2.84)

Como os fantasmas são campos escalares complexos, os seus propagadores carregam uma *seta de fluxo de partículas*, sendo assim, finalmente:

$$= -g f^{abc} p^\mu (2\pi)^4 \delta(p+k+q) .$$

Capítulo 3

Teorias de *gauge* (Formalismo de 1ª Ordem)

3.1 Introdução

Como vemos em [13] e [12], os formalismos de 1ª e 2ª Ordem são classicamente equivalentes, e uma vantagem imediata daquele é que os vértices de interação se tornam mais simples, independentes de momento externo. Entretanto, o custo seria a adição de mais um campo à teoria.

Enquanto a equivalência clássica é clara entre os formalismos para o caso de teorias como Yang-Mills, para que possamos explorar as vantagens desse formalismo é necessário que o formalismo de 1ª ordem também seja equivalente no nível quântico para essas teorias. É isso que procuramos provar ao longo do presente capítulo, especificamente para o caso de Yang-Mills.

3.2 Ação de Yang-Mills no Formalismo de 1ª Ordem

A Lagrangeana de Yang-Mills no formalismo de 2ª Ordem é expressa como:

$$\mathcal{L}_{YM}^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2, \quad (3.1)$$

porém, se consideramos os campos $F_{\mu\nu}^a$ e $A_{\mu\nu}^a$ como independentes um do outro, e escrevermos uma Lagrangeana como esta:

$$\mathcal{L}_{YM}^{(1)} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Verificamos que essa Lagrangeana é classicamente equivalente a Lagrangeana de Yang-Mills no formalismo tradicional de 2ª Ordem. Para verificar esse fato, basta aplicarmos a equação de Euler-Lagrange para o campo $F_{\mu\nu}^a$ em (3.2), e então obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho F_{\mu\nu}^a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^a} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho F_{\mu\nu}^a)} &= 0 \quad \bigwedge \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^a} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a &= 0 \\ \boxed{F_{\mu\nu}^a = (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu})}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

E assim, portanto, a (3.1) é recuperada.

Essa Lagrangeana, considerando os dois campos como independentes, é denominada **Lagrangeana de Yang-Mills no formalismo de 1ª Ordem**.

Nesse formalismo, consideramos os campos A_μ^a como os campos de gauge usuais do formalismo de 2ª ordem, e o campos $F_{\mu\nu}^a$ como **campos auxiliares** da teoria. A razão para crermos que os campos A_μ^a são equivalentes aos encontrados no formalismo de 2ª ordem ficará mais clara adiante.

3.2.1 Invariância de Gauge

Similarmente ao formalismo usual (capítulo anterior), a ação (3.2) é invariante por transformações de gauge, de acordo com as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^a &= f^{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^c \\ \delta A_\mu^a &= -\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + f^{abc}\theta^b A_\mu^c, \end{aligned} \quad (3.4)$$

considerando transformações infinitesimais do tipo¹:

¹Vale destacar que em alguns textos, considera-se: $U(x) = e^{i\theta(x)} = e^{i\theta^a(x)T^a} = \mathbb{1} + i\theta^a(x)T^a$. Isso pode levar a diferenças de sinal quanto às transformações que mantêm a ação invariante.

$$U(x) = e^{-i\theta(x)} = e^{-i\theta^a(x)T^a} = \mathbb{1} - i\theta^a(x)T^a. \quad (3.5)$$

3.2.2 Quantização

Queremos quantizar essa teoria, para isso, escrevemos o Funcional Gerador Z como:

$$Z[J_\mu^a, J_{\mu\nu}^a] = \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}^{(1)} + J_\mu^a \cdot A^\mu + J_{\mu\nu}^a \cdot F^{\mu\nu}}, \quad (3.6)$$

onde $\mathcal{D}A_\mu^a = \prod_x \prod_{a,\mu} dA_\mu^a(x)$ e $\mathcal{D}F = \prod_x \prod_{a,\mu,\nu} dF_{\mu\nu}^a(x)$.

Gostariamos então de definir o propagador dos campos livres, para isso analisamos o funcional gerador na ausência de interações, ou seja, quando $g = 0$. Então, manipulando os termos através de integrações por partes e utilizando a propriedade de antisimetria do tensor $F_{\mu\nu}^a$ temos:

$$\begin{aligned} S_{\text{livre}} &= \int d^4x \mathcal{L}_{\text{livre}} \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial^\mu A^{a\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial^\nu A^{a\mu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left[F_{\mu\nu}^a \partial^\mu A^{a\nu} - F_{\mu\nu}^a \partial^\nu A^{a\mu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left[\frac{1}{2} [F_{\mu\nu}^a \partial^\mu A^{a\nu} - A^{a\nu} \partial^\mu F_{\mu\nu}^a] - \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}^a \partial^\nu A^{a\mu} - A^{a\mu} \partial^\nu F_{\mu\nu}^a] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \left[\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{a\nu\mu}) \right] \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left[\frac{1}{2} [F_{\mu\nu}^a \partial^\mu \eta^{\rho\nu} \delta^{ab} A_\rho^b - F_{\mu\nu}^a \partial^\nu \eta^{\rho\mu} \delta^{ab} A_\rho^b] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [A_\alpha^a \partial^\sigma \eta^{\alpha\beta} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b - A_\alpha^a \partial^\beta \eta^{\alpha\sigma} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} [F_{\mu\nu}^a \eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\nu} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b - F_{\mu\nu}^a \eta^{\sigma\nu} \eta^{\beta\mu} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b] \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Devido a existência de termos mistos nos termos que são bilineares nos campos, podemos introduzir o seguinte dubleto:

$$\Psi_{\rho\sigma\beta}^a(x) = \begin{pmatrix} A_\rho^a(x) \\ F_{\sigma\beta}^a(x) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

de modo que podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 S_{livre} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \Psi^{\mathbf{T}^a}_{\alpha\mu\nu}(x) \delta^{ab} M \Psi^b_{\rho\sigma\beta}(x) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left(A^a_\alpha(x), F^a_{\mu\nu}(x) \right) \delta^{ab} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\partial^\sigma \eta^{\alpha\beta} - \partial^\beta \eta^{\alpha\sigma}) \\ \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta^{\rho\nu} - \partial^\nu \eta^{\rho\mu}) & -\frac{1}{4}(\eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\sigma\nu} \eta^{\beta\mu}) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} A^b_\rho(x) \\ F^b_{\sigma\beta}(x) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

entretanto, a matriz M não possui inversa, pois os termos da diagonal secundária não possuem inversa (ver 3.18). Sendo assim, não é possível determinar um propagador bem definido para os campos da teoria. É necessário, assim como no formalismo de 2ª ordem, determinar condições de fixação de gauge a fim de eliminar redundâncias na integral de trajetória.

3.2.3 Formalismo de Faddeev-Popov

Como vimos no capítulo 2, o procedimento de quantização da teoria de Yang-Mills no formalismo de 1ª Ordem será inteiramente equivalente, entretanto, vale destacar que embora tenhamos redundâncias na integral de trajetória para os dois campos, A^a_μ e $F^a_{\mu\nu}$, basta fixarmos o gauge **somente** para o campo A^a_μ para que possamos expressar propagadores bem-definidos[13]. Dessa maneira, o funcional gerador da teoria se torna:

$$Z[J^a_\mu, J^a_{\mu\nu}] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}F^a_{\mu\nu} \Delta_{FP}(A^a_\mu) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}^{(1)} + \mathcal{L}_{FG} + J^a_\mu \cdot A^{a\mu} + J^a_{\mu\nu} \cdot F^{a\mu\nu}}. \tag{3.10}$$

Portanto, assim como no caso do formalismo de 2ª ordem, escolhendo o **gauge de Lorenz**, obtemos o determinante de Faddeev-Popov expresso como uma integral de trajetória sobre campos fantasmas, além do termo de fixação de gauge referido acima, cujas Lagrangeanas são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{FG} &= -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A^a_\mu)^2 \\
 \mathcal{L}_{ghosts} &= -\bar{c}^a \partial_\nu D^{ab;\nu} c^b.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dessa maneira a o funcional gerador pode ser escrito como:

$$Z[J_\mu^a, J_{\mu\nu}^a, \bar{\eta}^a, \eta^a] = \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}_{YM}^{(1)} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghosts} + J_\mu^a A^{a\mu} + J_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\eta}^a c^a + \eta^a \bar{c}^a}, \quad (3.12)$$

onde as variáveis do funcional Z são fontes dos campos integrados.

3.2.4 Propagadores da Teoria de Yang-Mills

Novamente, estamos interessados nos termos bilineares nos campos, por isso:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= L_{YM}^{(1)} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghosts} \\ &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \bar{c}^a \partial_\nu D^{ab;\nu} c^b \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial^\mu A^{a\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial^\nu A^{a\mu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial^\alpha A_\alpha^a \partial^\rho A_\rho^a}_{\mathcal{L}_{livre}[A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a]} \\ &\quad - \underbrace{\frac{g f^{abc}}{2} F_{\mu\nu}^a A^{b\mu} A^{c\nu} + g f^{apb} \partial_\nu (\bar{c}^a) A_\mu^p c^b}_{\mathcal{L}_{int}} - \underbrace{\bar{c}^a \delta^{ab} \partial^2 c^b}_{\mathcal{L}_{livre}[\bar{c}, c]}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

No momento estamos interessados nos propagadores para os campos A e F , então nos ateremos à integral nestes. Podemos escrever a ação associada a Lagrangeana livre desses campos como (utilizando o resultado obtido em (3.7)):

$$\begin{aligned} S_{livre} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \, F_{\mu\nu}^a \partial^\mu A^{a\nu} - F_{\mu\nu}^a \partial^\nu A^{a\mu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{\xi} A_\alpha^a \partial^\alpha \partial^\rho A_\rho^a \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \, \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}^a \partial^\mu \eta^{\rho\nu} \delta^{ab} A_\rho^b - F_{\mu\nu}^a \partial^\nu \eta^{\rho\mu} \delta^{ab} A_\rho^b] \\ &\quad - \frac{1}{2} [A_\alpha^a \partial^\sigma \eta^{\alpha\beta} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b - A_\alpha^a \partial^\beta \eta^{\alpha\sigma} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b] \\ &\quad - \frac{1}{4} [F_{\mu\nu}^a \eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\nu} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b - F_{\mu\nu}^a \eta^{\sigma\nu} \eta^{\beta\mu} \delta^{ab} F_{\sigma\beta}^b] \\ &\quad - \frac{1}{\xi} A_\alpha^a \partial^\alpha \partial^\rho \delta^{ab} A_\rho^b. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Novamente, devido a existência de termos mistos nos termos que são bilineares nos campos, podemos introduzir o dubleto definido anteriormente, de modo que podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{livre}} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \Psi^{\mathbf{T}^a}_{\alpha\mu\nu}(x) \delta^{ab} M \Psi^b_{\rho\sigma\beta}(x) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Psi^{\mathbf{T}^a}_{\alpha\mu\nu}(x) \underbrace{[\delta^{ab} M \delta(x-y)]}_{\mathcal{M}(x-y)} \Psi^b_{\rho\sigma\beta}(y) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left(A^a_\alpha(x), F^a_{\mu\nu}(x) \right) \delta^{ab} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi} \partial^\alpha \partial^\rho & -\frac{1}{2} (\partial^\sigma \eta^{\alpha\beta} - \partial^\beta \eta^{\alpha\sigma}) \\ \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta^{\rho\nu} - \partial^\nu \eta^{\rho\mu}) & -\frac{1}{4} (\eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\sigma\nu} \eta^{\beta\mu}) \end{pmatrix}}_M \delta(x-y) \begin{pmatrix} A^b_\rho(y) \\ F^b_{\sigma\beta}(y) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Como veremos adiante, a fim de obtermos os propagadores para os campos A e F , devemos inverter a matriz $\mathcal{M}$. Para isso, convém explicitarmos a quantidade $\tilde{\mathcal{M}}(k)$, e para isso, vejamos que [18, Sec. 9.4, Vol. 1]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{M}}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \\
 \delta^{ab} M \delta(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{M}}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \\
 \delta^{ab} M \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{M}}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \\
 \delta^{ab} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi} \partial^\alpha \partial^\rho & -\frac{1}{2} (\partial^\sigma \eta^{\alpha\beta} - \partial^\beta \eta^{\alpha\sigma}) \\ \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta^{\rho\nu} - \partial^\nu \eta^{\rho\mu}) & -\frac{1}{4} (\eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\sigma\nu} \eta^{\beta\mu}) \end{pmatrix} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{M}}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \\
 \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} k^\alpha k^\rho & \frac{i}{2} (k^\sigma \eta^{\alpha\beta} - k^\beta \eta^{\alpha\sigma}) \\ -\frac{i}{2} (k^\mu \eta^{\rho\nu} - k^\nu \eta^{\rho\mu}) & -\frac{1}{4} (\eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\sigma\nu} \eta^{\beta\mu}) \end{pmatrix} e^{-ik \cdot (x-y)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{M}}(k) e^{-ik \cdot (x-y)}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto, no espaço de momentos:

$$\tilde{\mathcal{M}}(k) = \delta^{ab} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} k^\alpha k^\rho & \frac{i}{2} (k^\sigma \eta^{\alpha\beta} - k^\beta \eta^{\alpha\sigma}) \\ -\frac{i}{2} (k^\mu \eta^{\rho\nu} - k^\nu \eta^{\rho\mu}) & -\frac{1}{4} (\eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\sigma\nu} \eta^{\beta\mu}) \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Utilizando a seguinte fórmula de inversão de matrizes em blocos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

onde:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}. \quad (3.19)$$

Então obtemos (cf. [13]):

$$\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(k) = \delta^{ab} \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} \left(\eta_{\alpha\rho} - \frac{(1-\xi)}{k^2} k_\alpha k_\rho \right) & \frac{i}{k^2} (k_\sigma \eta_{\beta\alpha} - k_\beta \eta_{\sigma\alpha}) \\ -\frac{i}{k^2} (k_\mu \eta_{\nu\rho} - k_\nu \eta_{\mu\rho}) & -2 \left(I_{\mu\nu,\sigma\beta} - \frac{1}{k^2} L_{\mu\nu,\sigma\beta} \right) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu,\sigma\beta} &= \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\sigma}) \\ L_{\mu\nu,\sigma\beta}(k) &= \frac{1}{2} (k_\mu k_\sigma \eta_{\nu\beta} + k_\nu k_\beta \eta_{\mu\sigma} - k_\mu k_\beta \eta_{\nu\sigma} - k_\nu k_\sigma \eta_{\mu\beta}), \end{aligned}$$

portanto, podemos então definir o propagador do dubleto como (utilizando A.17):

$$\tilde{\mathbb{D}}(k) = -\mathcal{M}^{-1}(k). \quad (3.21)$$

Agora, considerando a teoria sem interações ($g = 0$), podemos escrever o funcional gerador como:

$$\begin{aligned} Z_0[J_\mu^a, J_{\mu\nu}^a, \bar{\eta}^a, \eta^a] &= \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}_{livre}[A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a] + \mathcal{L}_{livre}[c, \bar{c}] + J_\mu^a A^{\mu a} + J_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\eta}^a c^a + \eta^a \bar{c}^a} \\ Z_0[J_\mu^a, J_{\mu\nu}^a, \bar{\eta}^a, \eta^a] &= \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left[-i \int d^4x \, d^4y \, \bar{c}^a(x) \underbrace{\delta(x-y) K^{ab}(x-y)}_{\mathcal{K}^{ab}} c^b(y) + \int d^4x \, \bar{\eta}^a c^a + \eta^a \bar{c}^a \right] \\ &\quad \times \left(\int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a \, e^{\int d^4x \, d^4y \, -\frac{i}{2} \Psi_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{T}^a}(x) \mathcal{M}(x-y) \Psi_{\rho\sigma\beta}^{\mathbf{b}}(y) + \int d^4x \, i \mathcal{J}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{T}^a}(x) \Psi^{a;\alpha\mu\nu}(x)} \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde $K^{ab} = \delta^{ab} \partial^2$, η e $\bar{\eta}$ representam as fontes dos campos fantasmas, e o termo $\mathcal{J}$ representa o vetor-fonte que interage com o bilinear Ψ :

$$\mathcal{J}_{\alpha\mu\nu}^a(x) = \begin{pmatrix} J_\alpha^a(x) \\ J_{\mu\nu}^a(x) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Dessa maneira, efetuando as integrais gaussianas, ignorando os termos dependentes dos determinantes de K e $\mathcal{M}$, agrupando-os no fator de normalização do funcional gerador, temos:

$$Z_0[J_\mu^a, J_{\mu\nu}^a, \bar{\eta}^a, \eta^a] = \mathcal{N} e^{-i \int d^4x \, d^4y \, \bar{\eta}^a(x) (\mathcal{K}^{ab})^{-1} \eta^b(y)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \, d^4y \, \mathcal{J}_{\alpha\mu\nu}^a(x) \mathcal{M}^{-1}(x-y) \mathcal{J}_{\rho\sigma\beta}^b(y)}. \quad (3.24)$$

Então, juntamente com o propagador do dubleto definido há pouco, e utilizando a mesma definição do propagador usual para os fantasmas, pois o propagador para os fantasmas de Faddeev-Popov é exatamente igual ao encontrado na teoria de Yang-Mills no formalismo de 2ª ordem (2.67), podemos então escrevê-los como:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(x-y) &= -\mathcal{M}^{-1}(x-y) \\ D^{ab}(x-y) &= -(\mathcal{K}^{ab})^{-1}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

de modo que obtemos:

$$Z_0[J_\mu^a, J_{\mu\nu}^a, \bar{\eta}^a, \eta^a] = \mathcal{N} e^{-i \int d^4x \, d^4y \, \bar{\eta}^a(x) D^{ab} \eta^b(y)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \, d^4y \, \mathcal{J}_{\alpha\mu\nu}^a(x) \mathbb{D}(x-y) \mathcal{J}_{\rho\sigma\beta}^b(y)}. \quad (3.26)$$

É importante notarmos que como $\mathbb{D}(x-y)$ é o propagador do dubleto composto pelos campos A e F , podemos determinar especificamente os propagadores para esses campos apenas observando atentamente os elementos dessa matriz, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{T}^a}(x)\mathbb{D}(x-y)\mathcal{J}_{\rho\sigma\beta}^b(y) &= \left(J_{\alpha}^a(x), J_{\mu\nu}^a(x) \right) \begin{pmatrix} \mathbb{D}(x-y)_{11} & \mathbb{D}(x-y)_{12} \\ \mathbb{D}(x-y)_{21} & \mathbb{D}(x-y)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\rho}^b(y) \\ J_{\sigma\beta}^b(y) \end{pmatrix} \\
 &= J_{\alpha}^a(x) \underbrace{\mathbb{D}(x-y)_{11}}_{\propto \langle A_{\alpha}^a(x) A_{\rho}^b(y) \rangle} J_{\rho}^b(y) + J_{\alpha}^a(x) \underbrace{\mathbb{D}(x-y)_{12}}_{\propto \langle A_{\alpha}^a(x) F_{\sigma\beta}^b(y) \rangle} J_{\sigma\beta}^b(y) \\
 &\quad + J_{\mu\nu}^a(x) \underbrace{\mathbb{D}(x-y)_{21}}_{\propto \langle F_{\mu\nu}^a(x) A_{\rho}^b(y) \rangle} J_{\rho}^b(y) + J_{\mu\nu}^a(x) \underbrace{\mathbb{D}(x-y)_{22}}_{\propto \langle F_{\mu\nu}^a(x) F_{\sigma\beta}^b(y) \rangle} J_{\sigma\beta}^b(y).
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Desse modo então, conseguimos determinar os propagadores para os campos. Representaremos as partículas associadas ao campo A como molas, as associadas ao campo F como linhas contínuas, e as associadas aos fantasmas de Faddeev-Popov como linhas tracejadas. Estes diagramas, no espaço de momentos, utilizando 3.20, 3.21 e 3.25 são dados por:

$\mathbf{a}, \alpha \text{ --- } \text{mola} \text{ --- } \mathbf{b}, \rho$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{b}, \rho$	$= i\tilde{\mathbb{D}}_{11;\alpha\rho}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(\eta_{\alpha\rho} - \frac{(1-\xi)}{k^2} k_{\alpha} k_{\rho} \right) \delta^{ab}$
$\mathbf{a}, \mu\nu \text{ --- } \text{linha cont.} \text{ --- } \mathbf{b}, \sigma\beta$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{b}, \sigma\beta$	$= i\tilde{\mathbb{D}}_{22;\mu\nu,\sigma\beta}(k) = 2i \left(I_{\mu\nu,\sigma\beta} - \frac{1}{k^2} L_{\mu\nu,\sigma\beta} \right) \delta^{ab}$
$\mathbf{b}, \rho \text{ --- } \text{mola} \text{ --- } \mathbf{a}, \mu\nu$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{a}, \mu\nu$	$= i\tilde{\mathbb{D}}_{21;\rho,\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} (k_{\mu} \eta_{\nu\rho} - k_{\nu} \eta_{\mu\rho}) \delta^{ab}$
$\mathbf{b}, \sigma\beta \text{ --- } \text{linha cont.} \text{ --- } \mathbf{a}, \alpha$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{a}, \alpha$	$= i\tilde{\mathbb{D}}_{12;\sigma\beta,\alpha}(k) = \frac{1}{k^2} (k_{\sigma} \eta_{\beta\alpha} - k_{\beta} \eta_{\sigma\alpha}) \delta^{ab}$
$\mathbf{a} \text{ --- } \text{linha traç.} \text{ --- } \mathbf{b}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{b}$	$= i\tilde{D}^{ab}(k) = \frac{i\delta^{ab}}{k^2}$

em concordância com [10].

É interessante notarmos que ao contrário do formalismo de 2ª Ordem, agora existem propagadores mistos, envolvendo o campo A e o campo auxiliar F .

3.2.5 Regras de Feynman para os Vértices

No formalismo de 1ª ordem, existem apenas dois vértices: um vértice cúbico envolvendo os campos A e F , e outro vértice cúbico envolvendo o campo A e os ghosts.

Vértice Cúbico $A - F - F$

O vértice cúbico é originado do termo:

$$iS_{A-F-F}^{(3)} = -\frac{i}{2} \int d^4x \, g f^{abc} F_{\mu\nu}^a A^{b\mu} A^{c\nu} = -\frac{ig f^{abc} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\rho}}{2} \int d^4x \, F_{\mu\nu}^a A_\alpha^b A_\rho^c, \quad (3.28)$$

e no espaço de momentos:

$$iS_{A-F-F}^{(3)} = -\frac{ig f^{abc} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\rho} (2\pi)^4}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3) \tilde{F}_{\mu\nu}^a(p) \tilde{A}_\alpha^b(k) \tilde{A}_\rho^c(q). \quad (3.29)$$

A fim de simplificar a notação, novamente iremos utilizar a notação compacta. Utilizando essa notação, podemos definir os rótulos i, j e k , respectivamente como: $i = (a_1, \sigma, \beta, p_1)$, $j = (a_2, \lambda_2, p_2)$ e $k = (a_3, \lambda_3, p_3)$ (considerando os momentos entrando no vértice). Dessa maneira, podemos reescrever a expressão anterior em termos dessas variáveis (a fim de poupar as atuais variáveis da expressão para a expressão final) como:

$$iS_{A-F-F}^{(3)} = -\frac{ig f^{a_1 a_2 a_3} \eta^{\sigma\lambda_2} \eta^{\beta\lambda_3} (2\pi)^4}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + p_2 + p_3) \tilde{F}_{\mu\nu}^{a_1}(p_1) \tilde{A}_{\lambda_2}^{a_2}(p_2) \tilde{A}_{\lambda_3}^{a_3}(p_3). \quad (3.30)$$

Utilizando a notação compacta ijk , como definidos anteriormente, podemos escrever:

$$V_{ijk} = -\frac{(2\pi)^4}{2[(2\pi)^4]^3} \delta(p_1 + p_2 + p_3) ig f^{a_1 a_2 a_3} \eta^{\sigma\lambda_2} \eta^{\beta\lambda_3} \Rightarrow iS_A^{(3)} = V_{ijk} \tilde{F}_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k.$$

Então, utilizando a equação A.57, e definindo o seguinte conjunto de índices compactos: $l = (a, \mu, \nu, p)$, $m = (b, \alpha, k)$ e $n = (c, \rho, q)$, temos que:

$$\begin{aligned}
 &= [(2\pi)^4]^3 \frac{\delta^3 i S_A^{(3)}}{\delta \tilde{F}_{\mu\nu}^a(p) \delta \tilde{A}_\alpha^b(k) \delta \tilde{A}_\rho^c(q)} = [(2\pi)^4]^3 \frac{\delta^3 i S_A^{(3)}}{\delta \tilde{F}_l \delta \tilde{A}_m \delta \tilde{A}_n} \\
 &= [(2\pi)^4]^3 (V_{lmn} + V_{lnm}) \\
 &= -(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) i g (f^{abc} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\rho} + f^{acb} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\alpha}) \\
 &= -(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) \frac{ig}{2} f^{abc} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\alpha}),
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

e finalmente:

$$= -(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) \frac{ig}{2} f^{abc} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\alpha}) .$$

Vértice Cúbico $A - c - \bar{c}$

Esse vértice é inteiramente equivalente ao vértice cúbico $A - c - \bar{c}$ do formalismo de 2ª Ordem, dado por eq. 3.2.5:

$$= -g f^{abc} p^\mu (2\pi)^4 \delta(p + k + q) .$$

3.3 Equivalência dos Formalismos em nível quântico

A equivalência dos formalismos no nível clássico foi demonstrada no início do capítulo. Entretanto, a equivalência no nível quântico pode ser demonstrada caso as integrais de trajetória sejam equivalentes entre si, nos dois formalismos [13]. Para isso, denominamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff}^{(1)} &= \mathcal{L}_{YM}^{(1)} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghost} \rightarrow S_{eff}^{(1)} = \int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{(1)} \\ \mathcal{L}_{eff}^{(2)} &= \mathcal{L}_{YM}^{(2)} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghost} \rightarrow S_{eff}^{(2)} = \int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{(2)}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Analisando as integrais de trajetória na ausência de fontes, temos que esta, no formalismo de 2ª ordem é dada por (2.46):

$$Z^{(2)}[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{YM}^{(2)} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghost}]}. \tag{3.33}$$

Podemos então inserir nessa integral a constante:

$$\int \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a e^{i \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right)}, \tag{3.34}$$

de modo que, utilizando (2.20):

$$\begin{aligned}Z^{(2)}[0] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \left(\int \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a e^{i \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right)} \right) \\ &\quad \times e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghost} \right]}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c), \tag{3.36}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}Z^{(2)}[0] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a \\ &\quad \times e^{i \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) \right) + \frac{1}{4} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu})^2} \\ &\quad \times e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghost} \right]} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a \\ &\quad \times e^{i \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) \right) + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghost}} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}F_{\mu\nu}^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}^{(1)} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{ghost}}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Utilizando a eq. (3.12), temos então:

$$\boxed{Z^{(2)}[0] = Z^{(1)}[0]} . \quad (3.38)$$

Portanto, para o caso particular na ausência de fontes, vemos que ambos os formalismos produzem a mesma integral de trajetória e portanto descrevem a mesma teoria. Entretanto, a demonstração dessa equivalência na presença de fontes para os campos se demonstrou um pouco mais delicada do ponto de vista técnico, e até então, não foi realizada na bibliografia relacionada ao assunto conhecida. Porém, podemos nos aprofundar mais no estudo da equivalência de ambos os formalismos no nível quântico calculando explicitamente algumas correções quânticas através do formalismo introduzido no presente capítulo e compará-las com os resultados já conhecidos do formalismo de 2ª ordem. Isso será feito no próximo capítulo.

Capítulo 4

Correções Quânticas via Formalismo de 1ª Ordem

4.1 Regularização Dimensional

Durante os cálculos de correções quânticas, amplitudes de espalhamento ou mesmo auto-energias, é comum que apareçam integrais no espaço de momento que sejam divergentes. Dessa maneira, com o auxílio dos procedimentos de regularização, essas integrais podem ser bem definidas. No presente capítulo será usada especificamente a técnica da Regularização Dimensional para lidar com essas divergências.

A Regularização Dimensional se mostra muito vantajosa nessa tarefa pois [20]:

- Preserva todas as simetrias da teoria, em particular a simetria por transformações de *gauge*.
- Permite uma fácil identificação das divergências.
- Além das divergências no ultravioleta, regulariza ao mesmo tempo as divergências no infravermelho em teorias contendo campos não-massivos.

4.1.1 Fundamentos da Regularização Dimensional

A ideia por trás desse método de regularização é conceitualmente simples, uma vez que consiste em calcular a integral permitindo que a dimensão d nessas integrais seja um número complexo qualquer, para o qual a convergência é garantida. Porém, para isso, é

necessário que as integrais originais calculadas em uma dimensão d , um número inteiro, sejam continuadas analiticamente para um número complexo d .

O conceito de uma dimensão contínua foi introduzido por Wilson e Fisher [21], que calcularam quantidades físicas em uma dimensão $d = 4 - \epsilon$ com $\text{Re } \epsilon > 0$, e então expandiram os resultados em potências do desvio ϵ de $d = 4$. Esse conceito logo foi incorporado à Teoria Quântica de Campos [22], e posteriormente utilizado no procedimento de regularização dimensional [14, 15].

Essa continuação analítica para uma dimensão de não-inteiros será baseada na extração do fatorial de um inteiro para os números reais através da função Gama.

4.1.2 Integral Básica

Um exemplo típico que usaremos como fundamento para todos os casos que se seguem será:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta)^n}, \quad (4.1)$$

onde o índice E subscrito se refere ao caráter euclidiano da variável.

Podemos escrever essa integral como:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta)^n} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty dp_E \frac{p_E^{d-1}}{(p_E^2 + \Delta)^n}, \quad (4.2)$$

onde o primeiro fator na eq. (4.2) é proporcional a área de uma esfera unitária em d dimensões. Para calculá-lo podemos então utilizar o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) \right)^d = \int d^d \mathbf{x} \exp \left(- \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) = \int d^d \mathbf{x} \exp(-\mathbf{x}^2) \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx \, x^{d-1} \exp(-x^2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$.

Fazendo: $d\mathbf{x} = \frac{1}{2} x^{-1} d(x^2)$, podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} \exp(-x^2) \\
 &= \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(d/2).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Portanto:

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \tag{4.5}$$

Agora, portanto, resta-se apenas calcular o segundo fator na eq. (4.2):

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dp_E \frac{p_E^{d-1}}{(p_E^2 + \Delta)^n} &= \int_0^\infty dp_E \frac{(p_E^2)^{\frac{d-1}{2}}}{(p_E^2 + \Delta)^n} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(p_E^2) \frac{(p_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(p_E^2 + \Delta)^n},
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

e utilizando a substituição $x = \frac{\Delta}{(p_E^2 + \Delta)}$, obtemos as seguintes correspondências:

- $p_E^2 = \frac{\Delta(1-x)}{x}$;
- $d(p_E^2) = -\frac{\Delta}{x^2} dx$.

Então, obtemos:

$$\int_0^\infty dp_E \frac{p_E^{d-1}}{(p_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{n-\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}. \tag{4.7}$$

Finalmente, utilizando a definição da função beta:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \equiv B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{4.8}$$

obtemos:

$$\int_0^\infty dp_E \frac{p_E^{d-1}}{(p_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}. \tag{4.9}$$

Reunindo então estes resultados na expressão (4.2):

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta)^n} &= \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty dp_E \frac{p_E^{d-1}}{(p_E^2 + \Delta)^n} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2}}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.1.3 Variantes da Integral Básica

Numerador quadrático

Uma possível variação que se encontra em muitos cálculos de auto-energia é a que se segue:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + \Delta)^n}, \tag{4.11}$$

onde o índice E subscrito se refere ao caráter euclidiano da variável.

Podemos reescrever essa integral como:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + \Delta)^n} &= \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^2 + \Delta - \Delta}{(p_E^2 + \Delta)^n} \\
 &= \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta)^{n-1}} - \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{\Delta}{(p_E^2 + \Delta)^n}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Utilizando a eq. (4.10), e o fato de que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, obtém-se:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \tag{4.13}$$

Numerador com dois quadrimomentos

Uma outra possível variação que se encontra em muitos cálculos de autoenergia é a que se segue:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^\mu p_E^\nu}{(p_E^2 + \Delta)^n}. \tag{4.14}$$

Esse caso é resolvido simplesmente notando que a única estrutura resultante possível deve ser da forma:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^\mu p_E^\nu}{(p_E^2 + \Delta)^n} = A \delta^{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

Isso se deve ao fato de que a integral se anula por simetria a menos que $\mu = \nu$. A invariância rotacional requer que o resultado seja proporcional à $\delta^{\mu\nu}$. Então, contraindo ambos os lados com $\delta_{\mu\nu}$, temos:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^\mu p_E^\nu}{(p_E^2 + \Delta)^n} = \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{\frac{\delta^{\mu\nu}}{d} p_E^2}{(p_E^2 + \Delta)^n}. \quad (4.16)$$

Então, aplicando a eq. (4.13), obtemos imediatamente:

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^\mu p_E^\nu}{(p_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \quad (4.17)$$

Portanto, para o caso euclidiano temos as seguintes fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \\ \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \\ \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^\mu p_E^\nu}{(p_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \end{aligned}}. \quad (4.18)$$

4.1.4 Integrais Básicas no Espaço de Minkowski

As mesmas fórmulas expostas anteriormente podem ser generalizadas para o espaço de Minkowski simplesmente efetuando-se uma rotação de Wick "inversa", de forma que:

$$p^0 = ip_E^0 \quad \bigwedge \quad p^2 = -p_E^2. \quad (4.19)$$

Fazendo-se isso, e também a substituição $\delta^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$, obtém-se diretamente:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - \Delta)^n} &= \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{(p^2 - \Delta)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - \Delta)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \end{aligned}}. \quad (4.20)$$

Estas últimas são as expressões comumente encontradas em cálculos de auto-energia e correções quânticas.

4.2 Auto-Energia do campo A

Temos que numa primeira aproximação à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$), na determinação do propagador, juntamente do propagador livre, temos as seguintes contribuições:

Nos resta então calcular os diagramas mediante regularização dimensional e assim determinarmos a auto-energia à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$) do boson de *gauge*. Faremos todos os cálculos dentro de um parâmetro de fixação de *gauge* geral ξ .

Para os cálculos que se seguem, foi-se utilizado procedimentos de computação simbólica, através do programa *Wolfram Mathematica* e a biblioteca *Feyncalc* [23]. O código utilizado está disponível no apêndice deste texto.

4.2.1 Diagrama (I)

Primeiramente, omitindo os termos de conservação de momento, utilizando as regras de Feynman obtidas no capítulo anterior, podemos determinar o diagrama (I), dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (I)} &= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{dac} (p+q)^\mu f^{cbd} p^\nu \\
 &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} g^2 C_2(G) \delta^{ab} (p+q)^\mu p^\nu,
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

onde $C_2(G)$ é o operador quadrático de Casimir, e G é o grupo de simetria. Definido como: $f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab}$. Tal constante aparecerá frequentemente nos cálculos a seguir.

Introduzindo os parâmetros de Feynman e utilizando as fórmulas (4.20) obtém-se:

$$\text{Diagram (I)} = - \frac{i g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{4 d \pi^{\frac{d-3}{2}}} \frac{\csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-q^2)^{\frac{d-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \left((d-2) q^\mu q^\nu + q^2 \eta^{\mu\nu} \right). \tag{4.22}$$

4.2.2 Diagrama (II)

O diagrama (II) é dado por:

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{ig}{2} f^{cda} (\eta^{\sigma\alpha} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\alpha}) \right] \\
 &\times \left[2i \left(I_{\sigma\beta, \gamma\delta} - \frac{1}{(k+q)^2} L_{\sigma\beta, \gamma\delta} \right) \delta^{ce} \right] \\
 &\times \left[-\frac{i}{k^2} \left(\eta_{\alpha\omega} - \frac{(1-\xi)}{k^2} k_\alpha k_\omega \right) \delta^{fd} \right] \\
 &\times \left[-\frac{ig}{2} f^{ebf} (\eta^{\gamma\nu} \eta^{\delta\omega} - \eta^{\gamma\omega} \eta^{\delta\nu}) \right].
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Introduzindo os parâmetros de Feynman e utilizando as fórmulas (4.20) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{ig^2(d-2)C_2(G)\delta^{ab} \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-q^2)^{\frac{d-4}{2}}}{4d\pi^{\frac{d-3}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \\
 &\times (q^2(d(-\xi) + d + \xi - 2)\eta^{\mu\nu} + ((d-1)\xi + 1)q^\mu q^\nu)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

4.2.3 Diagrama (III)

O diagrama (III) é dado por:

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{ig}{2} f^{cda} (\eta^{\sigma\alpha} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\sigma\mu} \eta^{\beta\alpha}) \right] \\
 &\times \left[\frac{1}{(k+q)^2} \left((k+q)_\sigma \eta_{\beta\omega} - (k+q)_\beta \eta_{\sigma\omega} \right) \delta^{ce} \right] \left[-\frac{1}{k^2} \left(k_\gamma \eta_{\delta\alpha} - k_\delta \eta_{\gamma\alpha} \right) \delta^{fd} \right] \\
 &\times \left[-\frac{ig}{2} f^{feb} (\eta^{\gamma\omega} \eta^{\delta\nu} - \eta^{\gamma\nu} \eta^{\delta\omega}) \right].
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Introduzindo os parâmetros de Feynman e utilizando as fórmulas (4.20) obtém-se:

$$= \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2^{2d-1} \pi^{\frac{d-3}{2}}} \frac{\csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-q^2)^{\frac{d-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} ((d-2)q^\mu q^\nu + q^2 \eta^{\mu\nu}) .$$

(4.26)

4.2.4 Auto-energia

Com os diagramas (I), (II) e (III) em mãos, podemos calcular a auto-energia do propagador do campo A.

Somando os diagramas, pode-se dizer que a auto-energia, na ordem de um laço, é dada por:

$\Pi_1^{ab;\mu\nu}(q) =$

(4.27)

$$= \frac{ig^2(d-2)C_2(G)(d(\xi-1)-\xi+3)\delta^{ab}}{4^d \pi^{\frac{d-3}{2}}} \frac{\csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-q^2)^{\frac{d-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) .$$

Fazendo $d = 4 - 2\epsilon$ e expandindo em ϵ , podemos expressar a parte divergente da auto-energia como:

$$\Pi_1^{ab;\mu\nu}(q) = \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} (-1 + 3\xi) (q^\mu q^\nu - q^2 \eta^{\mu\nu})}{96\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{Termos Finitos} .$$

(4.28)

4.3 Auto-Energia do campo auxiliar F

Temos que numa primeira aproximação à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$), na determinação do propagador do campo auxiliar F , juntamente do propagador livre, temos as seguintes contribuições:

Nos resta então calcular os diagramas mediante regularização dimensional e assim determinarmos a auto-energia à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$) do quanta do campo auxiliar F . Faremos todos os cálculos dentro de um parâmetro de fixação de *gauge* geral ξ .

Primeiramente, omitindo os termos de conservação de momento, utilizando as regras de Feynman obtidas no capítulo anterior, podemos determinar o diagrama (IV), dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (IV)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{ig}{2} f^{acd} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\gamma} - \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\alpha}) \right] \\
 &\times \left[-\frac{i}{(k+q)^2} \left(\eta_{\alpha\delta} - \frac{(1-\xi)}{(k+q)^2} (k+q)_\alpha (k+q)_\delta \right) \delta^{ce} \right] \\
 &\times \left[-\frac{i}{k^2} \left(\eta_{\omega\gamma} - \frac{(1-\xi)}{k^2} k_\omega k_\gamma \right) \delta^{fd} \right] \\
 &\times \left[-\frac{ig}{2} f^{bfe} (\eta^{\sigma\omega} \eta^{\beta\delta} - \eta^{\sigma\delta} \eta^{\beta\omega}) \right],
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

onde o fator $1/2$ é o fator de simetria do diagrama.

Introduzindo os parâmetros de Feynman e utilizando as fórmulas (4.20) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (IV)} &= -\frac{ig^2 C_2(G) (\xi+1) \delta^{ab} \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-q^2)^{\frac{d-6}{2}}}{2^{2(d+1)} \pi^{\frac{d-3}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \\
 &\times \left[(d-4)(\xi-1) (q^\nu (q^\beta \eta^{\mu\sigma} - q^\sigma \eta^{\mu\beta}) + q^\mu (q^\sigma \eta^{\nu\beta} - q^\beta \eta^{\nu\sigma})) \right. \\
 &\quad \left. + 4q^2 (\eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\beta}) \right].
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Com o diagramas (IV) em mãos, podemos calcular a auto-energia do propagador do campo auxiliar F .

Podemos dizer que na ordem de um laço, a auto-energia é dada simplesmente por esse diagrama que acabamos de calcular, uma vez que nessa ordem, é o único diagrama relevante:

$$\Pi_1^{ab;\mu\nu,\sigma\beta}(q) = \text{Diagram (IV)} . \quad (4.31)$$

(IV)

Fazendo $d = 4 - 2\epsilon$ e expandindo em ϵ , podemos expressar a parte divergente da auto-energia como:

$$\Pi_1^{ab;\mu\nu,\sigma\beta}(q) = -\frac{ig^2 C_2(G)(1 + \xi)\delta^{ab} (\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\beta})}{128\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{Termos Finitos} . \quad (4.32)$$

4.4 Auto-Energia do termo misto

4.4.1 Transição AF

Temos que numa primeira aproximação à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$), na determinação do propagador misto AF , juntamente do propagador livre, temos as seguintes contribuições:

Nos resta então calcular os diagramas mediante regularização dimensional e assim determinarmos a auto-energia à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$) do quanta transportado mediante o propagador misto.

Primeiramente, omitindo os termos de conservação de momento, utilizando as regras de Feynman obtidas no capítulo anterior, podemos determinar o diagrama (V), dado por:

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{ig}{2} f^{dac} (\eta^{\omega\mu} \eta^{\gamma\alpha} - \eta^{\omega\alpha} \eta^{\gamma\mu}) \right]$$

$$\times \left[-\frac{i}{k^2} \left(\eta_{\delta\alpha} - \frac{(1-\xi)}{k^2} k_\delta k_\alpha \right) \delta^{ec} \right]$$

$$\times \left[\frac{i}{(k+q)^2} ((k+q)_\omega \eta_{\gamma\zeta} - (k+q)_\gamma \eta_{\omega\zeta}) \delta^{df} \right]$$

$$\times \left[-\frac{ig}{2} f^{bfe} (\eta^{\sigma\zeta} \eta^{\beta\delta} - \eta^{\sigma\delta} \eta^{\beta\zeta}) \right].$$
(4.33)

Introduzindo os parâmetros de Feynman e utilizando as fórmulas (4.20) obtém-se:

$$= -\frac{g^2 C_2(G) (d(\xi - 1) - 3\xi + 1) \delta^{ab} \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-q^2)^{\frac{d-4}{2}}}{4^d \pi^{\frac{d-3}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}$$

$$\times (q^\beta \eta^{\sigma\mu} - q^\sigma \eta^{\beta\mu}).$$
(4.34)

Com o diagramas (V) em mãos, podemos calcular a auto-energia do propagador misto AF.

Podemos dizer que na ordem de um laço, a auto-energia é dada simplesmente por esse diagrama que acabamos de calcular, uma vez que nessa ordem, é o único diagrama relevante:

$$\Pi_1^{ab;\mu,\sigma\beta}(q) = \text{Diagram (V)}.$$
(4.35)

Fazendo $d = 4 - 2\epsilon$ e expandindo em ϵ , podemos expressar a parte divergente da

auto-energia como:

$$\Pi_1^{ab;\mu,\sigma\beta}(q) = \frac{g^2 C_2(G)(-3 + \xi)\delta^{ab}(q^\beta \eta^{\sigma\mu} - q^\sigma \eta^{\beta\mu})}{128\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{Termos Finitos} . \quad (4.36)$$

4.4.2 Transição FA

Temos que numa primeira aproximação à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$), na determinação do propagador misto FA , juntamente do propagador livre, temos as seguintes contribuições:

Nos resta então calcular os diagramas mediante regularização dimensional e assim determinarmos a auto-energia à nível de um laço ($\mathcal{O}(g^2)$) do quanta transportado mediante o propagador misto.

Primeiramente, omitindo os termos de conservação de momento, utilizando as regras de Feynman obtidas no capítulo anterior, podemos determinar o diagrama (V), dado por:

$$\begin{aligned} \text{a, } \sigma \beta \xrightarrow{\vec{q}} \text{c, } \alpha \text{ e, } \delta \text{ f, } \omega \gamma \xrightarrow{\vec{q}} \text{b, } \mu &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{ig}{2} f^{acd} (\eta^{\sigma\alpha} \eta^{\beta\zeta} - \eta^{\sigma\zeta} \eta^{\beta\alpha}) \right] \\ &\times \left[-\frac{i}{k^2} \left(\eta_{\delta\alpha} - \frac{(1-\xi)}{k^2} k_\delta k_\alpha \right) \delta^{ec} \right] \\ &\times \left[-\frac{i}{((k+q)^2)} ((k+q)_\omega \eta_{\gamma\zeta} - (k+q)_\gamma \eta_{\omega\zeta}) \delta^{df} \right] \\ &\times \left[-\frac{ig}{2} f^{feb} (\eta^{\omega\delta} \eta^{\gamma\mu} - \eta^{\omega\mu} \eta^{\gamma\delta}) \right] . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Introduzindo os parâmetros de Feynman e utilizando as fórmulas (4.20) obtém-se:

$$= \frac{g^2 C_2(G) (d(\xi - 1) - 3\xi + 1) \delta^{ab} \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-q^2)^{\frac{d-4}{2}}}{4^d \pi^{\frac{d-3}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \times (q^\beta \eta^{\sigma\mu} - q^\sigma \eta^{\beta\mu}). \quad (4.38)$$

Com o diagramas (VI) em mãos, podemos calcular a auto-energia do propagador misto AF.

Podemos dizer que na ordem de um laço, a auto-energia é dada simplesmente por esse diagrama que acabamos de calcular, uma vez que nessa ordem, é o único diagrama relevante:

$$\Pi_1^{ab;\sigma\beta,\mu}(q) = \text{Diagram (VI)}. \quad (4.39)$$

Fazendo $d = 4 - 2\epsilon$ e expandindo em ϵ , podemos expressar a parte divergente da auto-energia como:

$$\boxed{\Pi_1^{ab;\sigma\beta,\mu}(q) = -\frac{g^2 C_2(G) (-3 + \xi) \delta^{ab} (q^\beta \eta^{\sigma\mu} - q^\sigma \eta^{\beta\mu})}{128 \pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{Termos Finitos}}. \quad (4.40)$$

4.5 Cálculo do propagador do bóson de *gauge*

Com o valor das auto-energias em nível de um laço calculados (cf. [24]), pode-se então calcular explicitamente (neste nível de aproximação) o propagador do bóson de *gauge*. As contribuições nessa ordem são dadas por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama com inserção de auto-energia} = \text{Propagador Livre} + \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)} + \text{(IV)} + \text{(V)} + \text{(VI)} \\
 & \hspace{15cm} (4.41)
 \end{aligned}$$

Vale ressaltar que neste caso, os diagramas de (I) a (VI) não representam somente os diagramas com as pernas externas amputadas, como no caso dos diagramas utilizando anteriormente para o cálculo das auto-energias, mas diagramas que contém pernas externas anexadas àqueles.

Sendo assim, utilizando as regras contidas em (3.2.4), o propagador é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama com inserção de auto-energia} = i\tilde{\mathbb{D}}_{11;\mu\nu}(q) + i\tilde{\mathbb{D}}_{11;\mu\alpha}(q) \cdot \underbrace{\Pi_1^{ab;\alpha\beta}(q)}_{\text{Auto-Energia de A}} \cdot i\tilde{\mathbb{D}}_{11;\beta\nu}(q) \\
 & \quad + i\tilde{\mathbb{D}}_{21;\mu,\alpha\delta}(q) \cdot \underbrace{\Pi_1^{ab;\alpha\delta,\sigma\beta}(q)}_{\text{Auto-Energia de F}} \cdot i\tilde{\mathbb{D}}_{12;\sigma\beta,\nu}(q) \\
 & \quad + i\tilde{\mathbb{D}}_{11;\mu,\alpha}(q) \cdot \underbrace{\Pi_1^{ab;\alpha,\sigma\beta}(q)}_{\text{Auto-Energia de AF}} \cdot i\tilde{\mathbb{D}}_{12;\sigma\beta,\nu}(q) \\
 & \quad + i\tilde{\mathbb{D}}_{21;\mu,\sigma\beta}(q) \cdot \underbrace{\Pi_1^{ab;\sigma\beta,\alpha}(q)}_{\text{Auto-Energia de FA}} \cdot i\tilde{\mathbb{D}}_{11;\alpha,\nu}(q) \\
 & \quad + \mathcal{O}(g^3).
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Fazendo $d = 4 - 2\epsilon$ e expandindo em ϵ , podemos expressar a parte divergente do propagador como:

$$\text{Diagrama com inserção de auto-energia} = \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} (3\xi - 13)}{96\pi^2 q^4} \frac{1}{\epsilon} (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) + \text{Termos finitos} \tag{4.43}$$

onde q representa o momento externo, e claramente, o propagador livre não contribui para a parte divergente do propagador.

4.5.1 Resultados

O resultado encontrado para o propagador do bóson de *gauge* (eq. (4.43)) é exatamente igual ao encontrado no formalismo de 2ª ordem para a teoria de Yang-Mills [19, p. 526], ainda que a auto-energia do campo A seja diferente (4.28). Mais ainda, vemos que a estrutura ultravioleta encontrada nas correções calculadas é compatível com a renormalizabilidade da teoria [25].

Embora tenhamos diferenças quanto as estruturas das interações tanto em nível árvore quanto levando em considerações laços e ordens superiores, as estruturas das divergências ultravioletas continuam as mesmas do formalismo de 2ª ordem usual.

Vale ressaltar que as propriedades de renormalizabilidade da teoria podem ser profundamente exploradas num próximo trabalho, investigação essa que requer uma atenção minuciosa quanto às estruturas de divergência não só nos propagadores, mas também em funções de Green de mais pontos.

Capítulo 5

Conclusões

Vimos que o processo de quantização de teorias de Yang-Mills no formalismo de 1ª ordem é realizado de maneira análoga ao procedimento de quantização, através do processo realizado por Faddeev-Popov, do formalismo de 2ª ordem usual. Após a quantização da teoria, chegamos a regras de Feynman mais simples, no que diz respeito a dependência de momento externo e ausência de vértices quárticos, porém contamos com alguns propagadores extras na teoria: os propagadores mistos que envolvem os campos A_μ^a e $F_{\mu\nu}^a$.

Ainda que a demonstração da equivalência formal entre os dois formalismos no nível quântico tenha sido realizada somente no caso particular de ausência de fontes (3.38), o fato de que os propagadores para o bóson de *gauge* são iguais (no nível de um laço) demonstra que ambos os formalismos se encontram intimamente relacionados, e assim podemos inferir que o campo A_μ^a no formalismo de 1ª realiza o mesmo papel do campo de *gauge* no formalismo de 2ª ordem. Entretanto, a natureza do campo auxiliar $F_{\mu\nu}^a$ não é clara num primeiro momento, uma vez que não existe uma entidade correspondente no formalismo de 2ª ordem.

A demonstração formal de que os campos $F_{\mu\nu}^a$ são de fato entidades puramente quânticas não foi realizado, tanto no presente trabalho como em [10]. É justamente devido a esse fato que não há necessidade de renormalização desse campo. Aliado a esse fato, termos de fixação de *gauge* para o mesmo também não são necessários, uma vez que redundâncias neste campo não influenciarão observáveis da teoria. Uma breve investigação a respeito da prova da *não existência* física desses campos se mostrou um tanto quanto delicada, uma vez que, a priori, não existem razões evidentes para que não existam estados físicos contendo partículas criadas pelo campo $F_{\mu\nu}^a$.

Do mesmo modo que a prova do fato dos fantasmas de Faddeev-Popov não serem

campos físicos se baseie no argumento de que esses campos violam as estatísticas de spin e a unitariedade da matriz S [19], pode-se pensar em uma investigação neste sentido para o campo $F_{\mu\nu}^a$. Esse é um tema que também pode ser abordado futuramente.

É também interessante pensar para um próximo trabalho, a proposta de uma investigação mais profunda das propriedades de renormalizabilidade de teorias de *gauge* como a Gravitação, via formalismo de 1^a ordem. Ainda que esta já tenha sido exhaustivamente investigada quanto à sua renormalizabilidade, sempre existem sutilezas técnicas e novas aproximações que podem conduzir a resultados interessantes que nos expliquem com maior clareza as diferenças e equivalências dos formalismos no nível quântico.

Apêndice A

Funcionais Geradores

A.1 Introdução

Nesse capítulo desenvolveremos todas as ferramentas necessárias para explorarmos o problema do Formalismo de 1ª Ordem em teorias de *gauge*. Para isso olharemos um caso mais simplificado, representado por um campo escalar real, pois a extrapolação dos resultados para outras teorias que envolvem mais de um campo, ou mais tipos de campos (fermiônicos ou bosônicos), é inteiramente análoga.

A.2 Funcionais Geradores $Z[J]$ e $W[J]$

Como visto em [18, 26, 2], dado uma densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ que descreve uma teoria escalar real, podemos então definir a amplitude completa do vácuo para o vácuo na presença de correntes J como:

$$Z[J] \equiv \langle 0|0 \rangle_J = \frac{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi] + i \int d^4x \, J \cdot \phi}}{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}}. \quad (\text{A.1})$$

Como $Z[J]$ representa essa transição, é uma escolha razoável então defini-lo desse modo, normalizando $Z[0] = 1$. Notemos que a expressão acima garante isso.

Esse funcional gera as funções de Green da teoria, uma vez que:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0|T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))|0 \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (\text{A.2})$$

Essas funções de Green englobam tanto os diagramas conexos e os não conexos, portanto é interessante definir também o funcional gerador das funções de Green conexas,

$W[J]$, tal que:

$$Z[J] = e^{iW[J]} \rightarrow W[J] = -i \log Z[J]. \quad (\text{A.3})$$

Sendo assim:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0|T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))|0\rangle_c = \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (\text{A.4})$$

onde $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ representam as funções de Green conexas.

Para propósitos futuros é importante introduzir uma nova quantidade: o valor médio do campo na presença de uma fonte. Para isso, basta observarmos que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[-i \log Z[J] \right] = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi] + i \int d^4x \, J \cdot \phi} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi] + i \int d^4x \, J \cdot \phi}} \\ &= \langle 0|\phi|0\rangle_J(x), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

portanto, temos que:

$$\langle\phi\rangle_J \equiv \langle 0|\phi|0\rangle_J(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \quad (\text{A.6})$$

sendo esta última, uma quantidade que representa o valor médio do campo na presença de uma fonte.

Como $\langle\phi\rangle_J$ é uma função de J , assumimos que essa função seja invertível, ou seja:

$$\langle\phi\rangle_J = \text{Função}(J) \leftrightarrow J = \text{Função}^{-1}(\langle\phi\rangle_J), \quad (\text{A.7})$$

e também assumimos que quando $J = 0$ temos $\langle\phi\rangle_J = 0$.

A.3 Ação Efetiva $\Gamma[\langle\phi\rangle_J]$

É possível introduzir um novo funcional dependente de outra variável funcional, tal que seja a transformada de Legendre do funcional $W[J]$, e ainda tenhamos a relação (A.6) satisfeita. Uma escolha interessante seria aquela cuja nova variável funcional seja exata-

mente o valor médio do campo na presença de uma fonte.

Então podemos escrever o funcional gerador $W[J]$ como:

$$W[J] = \Gamma[\langle\phi\rangle_J] + \int d^4x J(x) \cdot \langle\phi\rangle_J(x). \quad (\text{A.8})$$

A partir disso então, podemos escrever:

$$\Gamma[\langle\phi\rangle_J] = W[J] - \int d^4x J(x) \cdot \langle\phi\rangle_J(x), \quad (\text{A.9})$$

onde o funcional $\Gamma[\langle\phi\rangle_J]$ é chamado de **Ação Efetiva** da teoria.

De onde obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\delta\Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(x)} = -J(x) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle\phi\rangle_J(x).$$

É imediato que na ausência de fontes, a Ação Efetiva nos fornece as equações de movimento para os valores médios dos campos da teoria:

$$\frac{\delta\Gamma[\langle\phi\rangle_0]}{\delta\langle\phi\rangle_0(x)} = 0. \quad (\text{A.11})$$

A.4 Propagador de Feynman da Teoria

Suponhamos uma Densidade Lagrangeana que se encontre numa forma quantizável (i.e., o operador quadrático do termo livre é inversível):

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{int.}} = \underbrace{-\frac{1}{2}\phi \cdot K \cdot \phi}_{\mathcal{L}_{\text{livre}}} + \mathcal{L}_{\text{int.}} \quad \bigwedge \quad \exists K^{-1}}.$$

Dessa maneira, inspirando-se na metodologia encontrada em [27], iremos derivar o propagador de Feynman da Teoria. Entretanto, como o mesmo coincide com a função de Green de 2-pontos em uma teoria livre, a menos de uma constante, basta-nos estudar então, o funcional gerador na ausência de interações. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_{\text{livre}}[\phi] + i \int d^4x \, J \cdot \phi} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}_{\text{livre}} + \int d^4x \, J \cdot \phi} \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{i \int d^4x \, -\frac{1}{2} \phi(x) \cdot K \cdot \phi(x) + \int d^4x \, J(x) \phi(x)} \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{i \int d^4x \, d^4y \, -\frac{1}{2} \phi(x) \cdot \underbrace{[K \delta(x-y)]}_{\mathcal{K}(x-y)} \cdot \phi(y) + \int d^4x \, J(x) \phi(x)},
\end{aligned} \tag{A.12}$$

onde: $\mathcal{N} = \frac{1}{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}}$.

Vale ressaltar que usaremos o sub-índice "0" para nos referirmos à teoria livre (ausência de interações).

Utilizando o resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N \, e^{-[\frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c]} = \left(\frac{(2\pi)^N}{\det A} \right)^{1/2} \cdot e^{\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) - c}, \tag{A.13}$$

onde A_{ij} é uma matriz real simétrica inversível, x_i é um vetor ($i, j = 1, \dots, N$) e o símbolo $(\cdot, \cdot)$ denota o produto escalar entre duas quantidades, podemos generalizar o resultado para um contexto funcional fazendo $A = i\mathcal{K}$, $b = -iJ$ e $c = 0$ (nesse contexto, A passa a ser uma matriz contínua, $A_{ij} \rightarrow A(x-y)$), então temos:

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \left[\det \left(\frac{\mathcal{K}}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \cdot e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \, d^4y \, J(x) \mathcal{K}^{-1}(x-y) J(y)}. \tag{A.14}$$

Entretanto, é evidente que utilizando a definição de $\mathcal{N}$ e (A.13), temos que:

$$\mathcal{N} \left[\det \left(\frac{\mathcal{K}}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} = 1. \tag{A.15}$$

Portanto:

$$Z_0[J] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \, d^4y \, J(x) \mathcal{K}^{-1}(x-y) J(y)}. \tag{A.16}$$

Então, identificamos¹ o propagador de Feynman da teoria como:

$$D(x-y) \equiv -\mathcal{K}^{-1}(x-y). \tag{A.17}$$

A inversa de $\mathcal{K}$ é definida como:

¹Algumas pessoas identificam $D(x-y) \equiv -i\mathcal{K}^{-1}(x-y)$.

$$\int d^4z \mathcal{K}(x-z)\mathcal{K}^{-1}(z-y) = \delta(x-y), \quad (\text{A.18})$$

então, utilizando o fato de que: $\mathcal{K}(x-y) = K\delta(x-y)$ e a eq. (A.17), temos:

$$\begin{aligned} \int d^4z K\delta(x-z)\mathcal{K}^{-1}(z-y) &= \delta(x-y) \\ K\mathcal{K}^{-1}(x-y) &= \delta(x-y) \\ -KD(x-y) &= \delta(x-y). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Podemos então escrever o funcional gerador na ausência de interações como:

$$Z_0[J] = e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x)D(x-y)J(y)} , \quad (\text{A.20})$$

concordando com a escolha de normalização $Z[0] = 1$.

No caso da teoria livre, a função de Green de 2-pontos é dada por:

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = - \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = iD(x_1 - x_2). \quad (\text{A.21})$$

Fisicamente, a função de Green de 2-pontos pode ser interpretada em termos da criação, propagação e destruição de uma partícula entre 2-pontos².

Ao longo do texto, nos referiremos ao propagador livre de um campo como sendo simplesmente o fator D , visando a ideia da propagação de uma partícula entre dois pontos. Entretanto, isso é um abuso de linguagem, uma vez que essa ideia é representada pela função de Green de 2-pontos livre, e é dada por iD .

Vale notar que no caso geral, numa teoria com interações, o propagador completo (que leva em conta o propagador livre juntamente com suas correções quânticas), que é a função de Green de 2-pontos, é gerado tanto pelo funcional gerador $Z[J]$ quanto por $W[J]$. Esse fato é observado simplesmente notando que:

²A prova se encontra de maneira bastante clara na seção 6.3 do livro [26]

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} &= \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} (-i \log Z[J]) \\ &= \frac{1}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Tomando $J = 0$, temos:

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0, \quad Z[0] = 1, \quad (\text{A.23})$$

portanto:

$$\left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = -i \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = iG(x_1, x_2). \quad (\text{A.24})$$

Como:

$$\left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = iG_c(x_1, x_2), \quad (\text{A.25})$$

conclui-se que:

$$\boxed{G(x_1, x_2) = G_c(x_1, x_2)}, \quad (\text{A.26})$$

o que era de se esperar, uma vez que o propagador não possui partes desconexas.

A.5 Funcional Gerador de uma Teoria com campos em interação

É interessante determinarmos a expressão análoga à (A.20) para o caso de campos em interação. Entretanto, nesse caso, exige-se uma análise mais atenciosa.

Começemos derivando a equação funcional (A.1):

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \, \phi(x) e^{iS[\phi] + i \int d^4x \, J \cdot \phi}}{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}}, \quad (\text{A.27})$$

que será usada mais adiante.

Definimos então o funcional:

$$\hat{Z}[\phi] = \frac{e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}}. \quad (\text{A.28})$$

Então, pode-se reescrever a expressão (A.1) como:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \hat{Z}[\phi] e^{i \int d^4x J \cdot \phi}. \quad (\text{A.29})$$

Essa última expressão é análoga a transformada de Fourier, numa perspectiva funcional. Desse modo, explicitando a ação como:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(x) (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) - \mathcal{L}_{\text{int.}} \right], \quad (\text{A.30})$$

temos:

$$\begin{aligned} i \frac{\delta \hat{Z}[\phi]}{\delta \phi(x)} &= \frac{i}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left\{ e^{-i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(x) (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) - \mathcal{L}_{\text{int.}} \right]} \right\} \\ &= (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) \hat{Z}[\phi] - \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int.}}}{\delta \phi(x)} \hat{Z}[\phi] \\ &= (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) \hat{Z}[\phi] - \mathcal{L}'_{\text{int.}}(\phi) \hat{Z}[\phi], \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde $\mathcal{L}'_{\text{int.}}$ representa a derivada com relação ao argumento.

Multiplicando a expressão acima por: $e^{i \int d^4x J \cdot \phi}$, e integrando sobre ϕ temos:

$$\int \mathcal{D}\phi i \frac{\delta \hat{Z}[\phi]}{\delta \phi(x)} e^{i \int d^4x J \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \left\{ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) \hat{Z}[\phi] - \mathcal{L}'_{\text{int.}}(\phi) \hat{Z}[\phi] \right\} e^{i \int d^4x J \cdot \phi}. \quad (\text{A.32})$$

Analisando a expressão do lado direito da equação, temos:

$$\begin{aligned} &\frac{\int \mathcal{D}\phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) e^{iS[\phi] + i \int d^4x J \cdot \phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}} - \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{L}'_{\text{int.}}(\phi) e^{iS[\phi] + i \int d^4x J \cdot \phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}} \\ &= (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\text{int.}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) Z[J], \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

onde a expressão (A.27) foi utilizada. Também utilizou-se a seguinte propriedade:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[i \int d^4y J(y) \phi(y) \right] = i \phi(x) \exp \left[i \int d^4y J(y) \phi(y) \right], \quad (\text{A.34})$$

que justifica a substituição $\phi(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}$ na expressão anterior, uma vez que essas derivadas operam em $Z[J]$.

Agora, analisando a expressão do lado esquerdo da equação, temos:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \, i \frac{\delta \hat{Z}[\phi]}{\delta \phi(x)} e^{i \int d^4x \, J \cdot \phi} &= i e^{i \int d^4x \, J \cdot \phi} \hat{Z}[\phi] \Big|_{\phi \rightarrow \infty} \xrightarrow{0} + \int \mathcal{D}\phi \, J(x) \hat{Z}[\phi] e^{i \int d^4x \, J \cdot \phi} \\ &= J(x) Z[J]. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Portanto, igualando as expressões, obtém-se a seguinte equação diferencial funcional:

$$\left((\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\text{int.}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) Z[J] = J(x) Z[J] \right), \quad (\text{A.36})$$

cujas solução³ é dada por:

$$Z[J] = N \exp \left[i \int dx \, \mathcal{L}_{\text{int.}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] Z_0[J], \quad (\text{A.37})$$

onde $Z_0[J]$ representa a teoria livre de interações, e N é um fator de normalização.

A.6 $\Gamma[\langle\phi\rangle_J]$ como um Funcional Gerador

A Ação Efetiva é interessante por ter a propriedade de ser geradora das funções de Green 1PI (*one-particle-irreducible*) da teoria. Isso pode ser visto de maneira imediata no caso da função de 2-pontos. Neste caso, basta notarmos o fato de que:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta \langle\phi\rangle_J(x_1) \delta \langle\phi\rangle_J(x_2)} = \left[\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right]^{-1}. \quad (\text{A.38})$$

A veracidade dessa afirmação é evidente simplesmente notando que:

$$\begin{aligned} \int d^4z \, \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(z)} \cdot \frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta \langle\phi\rangle_J(z) \delta \langle\phi\rangle_J(x_2)} &= \int d^4z \, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \left(\langle\phi\rangle_J(x_1) \right) \cdot \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \langle\phi\rangle_J(x_2)} \left(-J(z) \right) \\ &= \frac{\delta \langle\phi\rangle_J(x_1)}{\delta \langle\phi\rangle_J(x_2)} \\ &= \delta(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

³A derivação dessa solução foge do propósito do presente trabalho, entretanto pode ser encontrada de maneira detalhada na seção 6.4 em [26]

Essa última equação é uma equação matricial funcional, portanto tomando a equação (A.38) com $J = 0$ e $\langle\phi\rangle_J = 0$ temos:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta \langle\phi\rangle_J(x_1) \delta \langle\phi\rangle_J(x_2)} \Big|_{\langle\phi\rangle_J=0} = \left[\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \right]^{-1}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta \langle\phi\rangle_J(x_1) \delta \langle\phi\rangle_J(x_2)} \Big|_{\langle\phi\rangle_J=0} = G^{-1}(x_1 - x_2). \quad (\text{A.40})$$

Portanto, a derivada funcional de segunda ordem da Ação Efetiva nos dá o inverso da função de Green conexa de 2-pontos da teoria:

$$\boxed{\frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta \langle\phi\rangle_J(x_1) \delta \langle\phi\rangle_J(x_2)} \Big|_{\langle\phi\rangle_J=0} = iG^{-1}(x_1 - x_2)} . \quad (\text{A.41})$$

As derivadas funcionais de ordens superiores, também nos dão resultados importantes da teoria. Basicamente a Ação Efetiva de uma teoria gera as Funções de Green *One-Particle-Irreducible*, (ou Funções de Green 1PI), através da relação:

$$\boxed{\frac{i\delta^n \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta \langle\phi\rangle_J(x_1) \dots \delta \langle\phi\rangle_J(x_n)} \Big|_{\langle\phi\rangle_J=0} = G_{1PI}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)} , \quad (\text{A.42})$$

para $n \geq 3$.

A fim de nos convenceremos desse fato, iremos provar a expressão acima para o caso de 3, pois os demais casos são análogos. Porém, antes de efetivamente calcularmos essas Funções, é interessante nos lembrarmos de duas relações importantes que serão utilizadas na obtenção dos próximos resultados. A primeira delas é:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J(x)} &= \int d^4y \frac{\delta\left(\langle\phi\rangle_J(y)\right)}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta\left(\langle\phi\rangle_J(y)\right)} \\
\frac{\delta}{\delta J(x)} &= \int d^4y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \frac{\delta}{\delta\left(\langle\phi\rangle_J(y)\right)} \\
\boxed{\frac{\delta}{\delta J(x)} &= i \int d^4y G(x-y) \frac{\delta}{\delta\left(\langle\phi\rangle_J(y)\right)}}.
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Agora, supondo que M seja uma matriz que possui inversa, a partir da relação básica entre M e sua inversa, chegamos à uma equação matricial importante para o próximo resultado:

$$\begin{aligned}
1 = M \cdot M^{-1} &\Rightarrow 0 = \frac{\partial(M \cdot M^{-1})}{\partial\alpha} \\
\boxed{\frac{\partial M^{-1}}{\partial\alpha} &= -M^{-1} \cdot \frac{\partial M}{\partial\alpha} \cdot M^{-1}}.
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Do ponto de vista funcional temos:

$$\begin{aligned}
\delta(w_1 - w_2) &= \int d^4z M[\beta(w_1), \theta(z)] \cdot M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)] \\
0 &= \frac{\delta}{\delta\alpha(u)} \int d^4z M[\beta(w_1), \theta(z)] \cdot M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)] \\
0 &= \int d^4z \frac{\delta M[\beta(w_1), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} \cdot M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)] + \int d^4z M[\beta(w_1), \theta(z)] \cdot \frac{\delta M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} \\
&\int d^4z M[\beta(w_1), \theta(z)] \cdot \frac{\delta M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} = - \int d^4z \frac{\delta M[\beta(w_1), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} \cdot M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)],
\end{aligned} \tag{A.45}$$

sendo assim, multiplicando a equação por $M^{-1}[\beta(w_1), \theta(v)]$ e integrando em w_1 temos:

$$\begin{aligned} \int d^4z \underbrace{\int d^4w_1 M^{-1}[\beta(w_1), \theta(v)] M[\beta(w_1), \theta(z)]}_{\delta(v-z)} \cdot \frac{\delta M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} &= - \int d^4z \int d^4w_1 \\ &\times M^{-1}[\beta(w_1), \theta(v)] \frac{\delta M[\beta(w_1), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} \\ &\times M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d^4z \delta(v-z) \frac{\delta M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} &= - \int d^4z \int d^4w_1 M^{-1}[\beta(w_1), \theta(v)] \frac{\delta M[\beta(w_1), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} \\ &\cdot M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)] \end{aligned}$$

$$\frac{\delta M^{-1}[\beta(w_2), \theta(v)]}{\delta\alpha(u)} = - \int d^4z \int d^4w_1 M^{-1}[\beta(w_1), \theta(v)] \frac{\delta M[\beta(w_1), \theta(z)]}{\delta\alpha(u)} \cdot M^{-1}[\beta(w_2), \theta(z)]. \quad (\text{A.46})$$

Renomeando as variáveis, temos:

$$\boxed{\frac{\delta M^{-1}[\beta(a), \theta(b)]}{\delta\alpha(c)} = - \int d^4u \int d^4v M^{-1}[\beta(v), \theta(b)] \frac{\delta M[\beta(v), \theta(u)]}{\delta\alpha(c)} \cdot M^{-1}[\beta(a), \theta(u)]}. \quad (\text{A.47})$$

A.6.1 Função de Green 1PI de 3-pontos

Nesse caso, basta notarmos que:

$$\frac{1}{i^2} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} = \int d^4y_1 G(x_1 - y_1) \frac{\delta}{\delta \left(\langle\phi\rangle_J(y_1) \right)} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} \right], \quad (\text{A.48})$$

utilizando a identidade (A.43).

Agora, fazendo o uso da (A.38), podemos dizer que:

$$\frac{1}{i^2} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} = \int d^4 y_1 G(x_1 - y_1) \frac{\delta}{\delta(\langle\phi\rangle_J(y_1))} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(x_2) \delta\langle\phi\rangle_J(x_3)} \right]^{-1}. \quad (\text{A.49})$$

Utilizando a identidade (A.48) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i^2} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} &= - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 G(x_1 - y_1) \left[\frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(x_2) \delta\langle\phi\rangle_J(y_2)} \right]^{-1} \\ &\quad \times \frac{1}{i} \frac{\delta^3 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(y_1) \delta\langle\phi\rangle_J(y_2) \delta\langle\phi\rangle_J(y_3)} \cdot \left[\frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(x_3) \delta\langle\phi\rangle_J(y_3)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Agora tomando $J = 0$ e $\langle\phi\rangle_J = 0$ e decompondo a função de Green de 3-pontos conexa, explicitando as pernas externas, temos:

$$= \frac{1}{i^2} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} \Big|_{J=0}. \quad (\text{A.51})$$

Sendo assim, podemos dizer que:

$$\begin{aligned} &= \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 G(x_1 - y_1) G(x_2 - y_2) G(x_3 - y_3) \\ &\quad \times \left\{ \frac{i \delta^3 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(y_1) \delta\langle\phi\rangle_J(y_2) \delta\langle\phi\rangle_J(y_3)} \Big|_{\langle\phi\rangle_J=0} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Finalmente vemos que a derivada terceira de $i\Gamma$ é simplesmente o diagrama conexo completo que representa a Função de Green de 3-pontos com os propagadores das pernas externas removidos, ou seja: a função 1PI de 3-pontos. Então:

$$\frac{i \delta^2 \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(x_1) \delta\langle\phi\rangle_J(x_2) \delta\langle\phi\rangle_J(x_3)} \Big|_{\langle\phi\rangle_J=0} = G_{\text{1PI}}^{(3)}(x_1, x_2, x_3), \quad (\text{A.53})$$

em concordância com a equação (A.42).

A.7 Vértices da teoria

Sabemos que a Ação efetiva gera as funções de Green 1PI de n pontos da teoria, a partir da relação:

$$\left. \frac{i\delta^n \Gamma[\langle\phi\rangle_J]}{\delta\langle\phi\rangle_J(x_1) \dots \delta\langle\phi\rangle_J(x_n)} \right|_{\langle\phi\rangle_J=0} = G_{1PI}^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{A.54})$$

Porém, no limite clássico $\hbar \rightarrow 0$, a ação efetiva se torna simplesmente a ação clássica (pois todas as correções quânticas desaparecem)[28, pg. 81-85]. No mesmo limite, todos os diagramas 1PI se tornam simplesmente os vértices na ação. Portanto, os únicos diagramas que restam são os diagramas à nível de árvore. Além disso, o valor médio do campo tende ao valor do campo clássico, i.e. $\langle\phi\rangle_J \rightarrow \phi$.

Podemos então, a fim de obtermos as regras para os vértices da teoria, utilizar a última expressão no regime clássico, pois assim obteremos exatamente os diagramas a nível de árvore:

$$\left. \frac{i\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1) \dots \delta\phi(x_n)} \right|_{\phi=0} = G_{\text{Tree-Level}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{A.55})$$

Será importante, obtermos a forma da última expressão no espaço de momento, lembrando que:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{\phi}(p) \\ \tilde{\phi}(p) &= \int d^4 x e^{ip \cdot x} \phi(x), \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{i\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1) \dots \delta\phi(x_n)} &= G_{\text{Tree-Level}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ \int d^4 p_1 \dots d^4 p_n \frac{i\delta^n S[\tilde{\phi}]}{\delta\tilde{\phi}(p_1) \dots \delta\tilde{\phi}(p_n)} \frac{\delta\tilde{\phi}(p_1)}{\delta\phi(x_1)} \dots \frac{\delta\tilde{\phi}(p_n)}{\delta\phi(x_n)} &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times e^{-ip_1 \cdot x_1 - \dots - ip_n \cdot x_n} \tilde{G}_{\text{Tree-Level}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4 p_1 \dots d^4 p_n \frac{i\delta^n S[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(p_1) \dots \delta \tilde{\phi}(p_n)} e^{+ip_1 \cdot x_1 + \dots + ip_n \cdot x_n} &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \\
&\times e^{-ip_1 \cdot x_1 - \dots - ip_n \cdot x_n} \tilde{G}_{\text{Tree-Level}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\
\Rightarrow \frac{i\delta^n S[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(-p_1) \dots \delta \tilde{\phi}(-p_n)} &= \frac{1}{[(2\pi)^4]^n} \tilde{G}_{\text{Tree-Level}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\
\Rightarrow \tilde{G}_{\text{Tree-Level}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= [(2\pi)^4]^n \frac{i\delta^n S[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(-p_1) \dots \delta \tilde{\phi}(-p_n)} . \tag{A.57}
\end{aligned}$$

Apêndice B

Cálculos via *FeynCalc*

Primeiramente, vale mencionar novamente que os cálculos foram realizados através do programa *Wolfram Mathematica* e a biblioteca *FeynCalc* [23].

O código foi estruturado da seguinte maneira:

- Inicialização;
- Redefinição de variáveis;
- Definição das regras de Feynman no formalismo de 1^a ordem;
- Tabela de integrais utilizadas no método de regularização dimensional;
- Listas de Substituição;
- Auto-energia do Bóson de *gauge*;
- Auto-energia do campo auxiliar F;
- Auto-energia dos propagadores Mistos;
- Cálculo do Propagador do Bóson de *gauge* à nível de um laço.

Nas páginas a seguir está exatamente o notebook utilizado para os cálculos do presente trabalho. No que foi possível, tentou-se ao máximo comentar na linha acima, o que cada *input* está realizando. Uma certa familiaridade com a biblioteca é necessária para plena compreensão do código.

Em especial, gostaria de agradecer a ajuda preciosíssima do Prof. Dr. Fernando T. C. Brandt, que em diversos momentos do código, me auxiliou de maneira inestimável, até mesmo compartilhando alguns algoritmos, que foram utilizados com grande prazer.

Initialization

```
In[1]:= << FeynCalc`
```

FeynCalc 9.2.0. For help, use the documentation center, check out the wiki or write to the mailing list.

See also the supplied examples. If you use FeynCalc in your research, please cite

- V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, Comput. Phys. Commun., 207C, 432–444, 2016, arXiv:1601.01167
- R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, Comput. Phys. Commun., 64, 345–359, 1991.

Definitions

```
In[2]:= (** Here we are renaming the native functions of FeynCalc library **)
```

```
In[3]:= dt[m1_, n1_] = MetricTensor[m1, n1, Dimension -> d]
```

```
Out[3]=  $g^{m1\,n1}$ 
```

```
In[4]:= fv[p_, m1_] = FourVector[p, m1]
```

```
Out[4]=  $\overline{p}^{m1}$ 
```

```
In[5]:= sp[p_, q_] = ScalarProduct[p, q]
```

```
Out[5]=  $\overline{p} \cdot \overline{q}$ 
```

```
In[6]:= f[a_, b_, c_] = SUNF[a, b, c]
```

```
Out[6]=  $f^{a\,b\,c}$ 
```

```
In[7]:= dk[a_, b_] = SUNDelta[a, b]
```

```
Out[7]=  $\delta^{a\,b}$ 
```

```
In[8]:= mom[k_] = Momentum[k]
```

```
Out[8]=  $\overline{k}$ 
```

Feynman Rules for YM First Ordem Formalism (FOF)

```
In[9]:= (** Here we are simply defining the feynman rules of the theory,  
this case is 1º order formalism YM **)
```

```
In[10]:= L[mu_, nu_, sig_, bet_] =  
1/2 (fv[k, mu] fv[k, sig] dt[nu, bet] + fv[k, nu] fv[k, bet] dt[mu, sig] -  
fv[k, mu] fv[k, bet] dt[nu, sig] - fv[k, nu] fv[k, sig] dt[mu, bet])
```

```
Out[10]=  $\frac{1}{2} \left( -\overline{k}^{\mu} \overline{k}^{\text{sig}} g^{\text{bet mu}} + \overline{k}^{\mu} \overline{k}^{\text{sig}} g^{\text{bet nu}} + \overline{k}^{\text{bet}} \overline{k}^{\mu} g^{\mu \text{sig}} - \overline{k}^{\text{bet}} \overline{k}^{\mu} g^{\mu \text{sig}} \right)$ 
```

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

$$\text{In[11]:= IL}[\mu_ , \nu_ , \text{sig}_ , \text{bet}_] = 1/2 \left(\text{dt}[\mu, \nu] \text{dt}[\text{sig}, \text{bet}] - \text{dt}[\mu, \text{bet}] \text{dt}[\nu, \text{sig}] \right)$$

$$\text{Out[11]= } \frac{1}{2} \left(g^{\text{bet sig}} g^{\mu \nu} - g^{\text{bet mu}} g^{\nu \text{sig}} \right)$$

$$\text{In[12]:= DAA}[\mathbf{k}_ , \mathbf{a}_ , \mu_ , \nu_ , \mathbf{b}_ , \nu_ , \mathbf{Xi}_] =$$

$$- \left(\mathbf{I} / \text{sp}[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \right) \left(\text{dt}[\mu, \nu] - \left((1 - \mathbf{Xi}) / \text{sp}[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \right) \text{fv}[\mathbf{k}, \mu] \text{fv}[\mathbf{k}, \nu] \right) \text{dk}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

$$\text{Out[12]= } - \frac{i \delta^{ab} \left(g^{\mu \nu} - \frac{(1 - \mathbf{Xi}) \bar{k}^{\mu} \bar{k}^{\nu}}{\bar{k}^2} \right)}{\bar{k}^2}$$

$$\text{In[13]:= DFF}[\mathbf{k}_ , \mathbf{a}_ , \mu_ , \nu_ , \mathbf{b}_ , \text{sig}_ , \text{bet}_] =$$

$$2 \mathbf{I} \left(\text{IL}[\mu, \nu, \text{sig}, \text{bet}] - (1 / \text{sp}[\mathbf{k}, \mathbf{k}]) \text{L}[\mu, \nu, \text{sig}, \text{bet}] \right) \text{dk}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

$$\text{Out[13]= } 2 i \delta^{ab} \left(\frac{1}{2} \left(g^{\text{bet sig}} g^{\mu \nu} - g^{\text{bet mu}} g^{\nu \text{sig}} \right) - \frac{1}{2 \bar{k}^2} \left(-\bar{k}^{\nu} \bar{k}^{\text{sig}} g^{\text{bet mu}} + \bar{k}^{\mu} \bar{k}^{\text{sig}} g^{\text{bet nu}} + \bar{k}^{\text{bet}} \bar{k}^{\nu} g^{\mu \text{sig}} - \bar{k}^{\text{bet}} \bar{k}^{\mu} g^{\nu \text{sig}} \right) \right)$$

$$\text{In[14]:= DAF}[\mathbf{k}_ , \mathbf{a}_ , \mu_ , \mathbf{b}_ , \text{sig}_ , \text{bet}_] =$$

$$- \left(1 / \text{sp}[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \right) \left(\text{fv}[\mathbf{k}, \text{sig}] \text{dt}[\text{bet}, \mu] - \text{fv}[\mathbf{k}, \text{bet}] \text{dt}[\text{sig}, \mu] \right) \text{dk}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

$$\text{Out[14]= } - \frac{\delta^{ab} \left(\bar{k}^{\text{sig}} g^{\text{bet mu}} - \bar{k}^{\text{bet}} g^{\mu \text{sig}} \right)}{\bar{k}^2}$$

$$\text{In[15]:= DFA}[\mathbf{k}_ , \mathbf{a}_ , \text{sig}_ , \text{bet}_ , \mathbf{b}_ , \mu_] =$$

$$\left(1 / \text{sp}[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \right) \left(\text{fv}[\mathbf{k}, \text{sig}] \text{dt}[\text{bet}, \mu] - \text{fv}[\mathbf{k}, \text{bet}] \text{dt}[\text{sig}, \mu] \right) \text{dk}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

$$\text{Out[15]= } \frac{\delta^{ab} \left(\bar{k}^{\text{sig}} g^{\text{bet mu}} - \bar{k}^{\text{bet}} g^{\mu \text{sig}} \right)}{\bar{k}^2}$$

$$\text{In[16]:= Dcc}[\mathbf{k}_ , \mathbf{a}_ , \mathbf{b}_] = \mathbf{I} \text{dk}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] / \text{sp}[\mathbf{k}, \mathbf{k}]$$

$$\text{Out[16]= } \frac{i \delta^{ab}}{\bar{k}^2}$$

$$\text{In[17]:= FAA}[\mathbf{a}_ , \mu_ , \nu_ , \mathbf{b}_ , \text{alp}_ , \mathbf{c}_ , \text{rho}_] =$$

$$- \mathbf{I} \left(g/2 \right) \text{f}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \left(\text{dt}[\mu, \text{alp}] \text{dt}[\nu, \text{rho}] - \text{dt}[\mu, \text{rho}] \text{dt}[\nu, \text{alp}] \right)$$

$$\text{Out[17]= } - \frac{1}{2} i g f^{abc} \left(g^{\text{alp mu}} g^{\nu \text{rho}} - g^{\text{alp nu}} g^{\mu \text{rho}} \right)$$

$$\text{In[18]:= Acc}[\mathbf{k}_ , \mathbf{a}_ , \mathbf{b}_ , \mu_ , \mathbf{c}_] = -g \text{f}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \text{fv}[\mathbf{k}, \mu]$$

$$\text{Out[18]= } -g \bar{k}^{\mu} f^{abc}$$

Useful Definitions

Integrals Table:

$$\text{In[19]:= (** Some usefull list of substitutions for making shifts **)}$$

```

In[20]:= scal1 = {sp[k, kp] -> 1/2 (sp[k, k] - sp[kp, kp] - sp[p, p]),
  sp[k, p] -> 1/2 (-sp[k, k] + sp[kp, kp] - sp[p, p]),
  sp[kp, p] -> 1/2 (-sp[k, k] + sp[kp, kp] + sp[p, p])}

Out[20]= {k.kp -> 1/2 (k^2 - kp^2 - p^2), k.p -> 1/2 (-k^2 + kp^2 - p^2), kp.p -> 1/2 (-k^2 + kp^2 + p^2)}

In[21]:= subs1 = {fv[kp, m1] -> fv[k, m1] + fv[p, m1], fv[kp, m2] -> fv[k, m2] + fv[p, m2],
  fv[kp, n1] -> fv[k, n1] + fv[p, n1], fv[kp, n2] -> fv[k, n2] + fv[p, n2]}

Out[21]= {kp.m1 -> k.m1 + p.m1, kp.m2 -> k.m2 + p.m2, kp.n1 -> k.n1 + p.n1, kp.n2 -> k.n2 + p.n2}

In[22]:= (** Shifts for integrals with three denominators **)

In[23]:= shift3 =
  {sp[k, k] -> sp[k, k] + u^2 sp[p1, p1] + v^2 sp[p2, p2] - 2 u sp[k, p1] - 2 v sp[k, p2] +
    2 u v sp[p1, p2], sp[k, p1] -> sp[k, p1] - u sp[p1, p1] - v sp[p1, p2],
  sp[k, p2] -> sp[k, p2] - u sp[p1, p2] - v sp[p2, p2],
  fv[k, m1] -> fv[k, m1] - u fv[p1, m1] - v fv[p2, m1],
  fv[k, m2] -> fv[k, m2] - u fv[p1, m2] - v fv[p2, m2],
  fv[k, m3] -> fv[k, m3] - u fv[p1, m3] - v fv[p2, m3],
  fv[k, n1] -> fv[k, n1] - u fv[p, n1], fv[k, n2] -> fv[k, n2] - u fv[p, n2]}

Out[23]= {k^2 -> -2 u (k.p1) - 2 v (k.p2) + k^2 + 2 u v (p1.p2) + u^2 p1^2 + v^2 p2^2,
  k.p1 -> k.p1 - v (p1.p2) - u p1^2, k.p2 -> k.p2 - u (p1.p2) - v p2^2, k.m1 -> k.m1 - u p1.m1 - v p2.m1,
  k.m2 -> k.m2 - u p1.m2 - v p2.m2, k.m3 -> k.m3 - u p1.m3 - v p2.m3, k.n1 -> k.n1 - u p1.n1, k.n2 -> k.n2 - u p2.n2}

In[24]:= (** Shifts for integrals with two denominators **)

In[25]:= shift2 = shift3 /. v -> 0 /. p1 -> p

Out[25]= {k^2 -> -2 u (k.p) + k^2 + u^2 p^2, k.p -> k.p - u p^2, k.p2 -> k.p2 - u (p.p2),
  k.m1 -> k.m1 - u p.m1, k.m2 -> k.m2 - u p.m2, k.m3 -> k.m3 - u p.m3, k.n1 -> k.n1 - u p.n1, k.n2 -> k.n2 - u p.n2}

In[26]:= (** Basic scalar integral without (-1) factor **)

In[27]:= Int0[d_, s_, mm_] = I (mm) ^ (d/2 - s) / (4 Pi) ^ (d/2) Gamma[s - d/2] / Gamma[s]

Out[27]= 
$$\frac{i 2^{-d} \pi^{-d/2} \text{mm}^{\frac{d}{2}-s} \Gamma(s - \frac{d}{2})}{\Gamma(s)}$$


In[28]:= (** In the case of two-denominators,
  the mm quantity will be (0<u<1 is the Feynman parameter) **)

In[29]:= Mse = Factor[
  Expand[(sp[k, k] + sp[p, p] + 2 sp[k, p] - sp[k, k]) u + sp[k, k] /. shift2] - sp[k, k]]

Out[29]= -(u - 1) u p^2

In[30]:= (** Basic tensor integral with two k in the
  numerator (before Feynman parameter integration) **)

In[31]:= Int2[d_, s_, mm_, m1_, m2_] =
  dt[m1, m2] / d FullSimplify[(Int0[d, s - 1, mm] - mm Int0[d, s, mm])]

Out[31]= 
$$\frac{1}{\Gamma(s)} i 2^{-d-1} \pi^{-d/2} \text{mm}^{\frac{d}{2}-s+1} \Gamma\left(-\frac{d}{2} + s - 1\right) g^{m1 m2}$$


```

```

In[32]:= (** Feynman parameter integration **)

In[33]:= (** First we recall that **)

In[34]:= (** FullSimplify[
  -(-1)^(a+b) Integrate[u^(b-1) (1-u)^(a-1)/(A+(B-A)u)^(a+b), {u,0,1}] [ [1]]
  Gamma[a+b]/Gamma[a]/Gamma[b] ] **)

In[35]:= (** Let us look at the integrals with zero,
  one and two k in the numerator. After the shift k → k - u p,
  using that A = k^2 and B = (k+p)^2, the denominator becomes ... **)

In[36]:= (** When the integral with one k in the numerator is shifted so that k→
  k - u p. The k part vanishes because the integrand is odd in k,
  and we are left with **)

In[37]:= -(-1)^(a+b) Integrate[u^(b-1) (1-u)^(a-1) u Int0[d, a+b, -Mse], {u, 0, 1}]
  Gamma[a+b]/Gamma[a]/Gamma[b] fv[p, m1]

Out[37]= ConditionalExpression[
  (i 2^-d π^-d/2 (-1)^(a+b+1) p^-m1 Γ(-a + d/2 + 1) Γ(d/2 - b) Γ(a+b - d/2) (-p^2)^1/2 (-2 a-2 b+d)) / (Γ(a) Γ(b) Γ(-a-b+d+1)),
  Re(d-2 a) > -2 ∧ Re(d-2 b) > 0]

In[38]:= Intk2d[p_, m1_, a_, b_, d_] = % [ [1]]

Out[38]= (i 2^-d π^-d/2 (-1)^(a+b+1) p^-m1 Γ(-a + d/2 + 1) Γ(d/2 - b) Γ(a+b - d/2) (-p^2)^1/2 (-2 a-2 b+d)) / (Γ(a) Γ(b) Γ(-a-b+d+1))

In[39]:= (** Next, we have the integral with two k in the numerator **)

In[40]:= (** After the shift we get k k → k k + p p u^2 - (odd terms in k) **)

In[41]:= (-1)^(a+b) Integrate[u^(b-1) (1-u)^(a-1) u^2 Int0[d, a+b, -Mse], {u, 0, 1}]
  fv[p, m1] fv[p, m2]

Out[41]= ConditionalExpression[
  (i 2^-d π^-d/2 (-1)^(a+b) p^-m1 p^-m2 Γ(-a + d/2 + 2) Γ(d/2 - b) Γ(a+b - d/2) (-p^2)^1/2 (-2 a-2 b+d)) / (Γ(a+b) Γ(-a-b+d+2)),
  Re(d-2 a) > -4 ∧ Re(d-2 b) > 0]

In[42]:= (-1)^(a+b-1) Integrate[u^(b-1) (1-u)^(a-1) Int2[d, a+b, -Mse, m1, m2], {u, 0, 1}]

Out[42]= ConditionalExpression[
  (i 2^-d-1 π^-d/2 (-1)^(a+b-1) Γ(-a + d/2 + 1) Γ(-b + d/2 + 1) g^m1 m2 Γ(a+b - d/2 - 1) (-p^2)^(-a-b+d/2+1)) /
  (Γ(a+b) Γ(-a-b+d+2)), Re(d-2 a) > -2 ∧ Re(d-2 b) > -2]

In[43]:= Intkk2d[p_, m1_, m2_, a_, b_, d_] =
  FullSimplify[ (% [ [1]] + % [ [1]] ) Gamma[a+b]/Gamma[a]/Gamma[b] ]

Out[43]= 1 / (Γ(a) Γ(b) Γ(-a-b+d+2)) i 2^-d-2 π^-d/2 (-1)^(a+b) Γ(-a + d/2 + 1) Γ(d/2 - b)
  Γ(a+b - d/2 - 1) (-p^2)^1/2 (d-2(a+b)) ((-2 a+d+2) p^-m1 p^-m2 (2(a+b-1)-d) + p^2 (d-2 b) g^m1 m2)

In[44]:= (** The integral with no k in the numerator is given by **)

```

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

In[45]:= Int02d[p_, a_, b_, d_] = FullSimplify[Contract[Intkk2d[p, m1, m1, a + 1, b, d]]]

$$\text{Out[45]} = \left(i 2^{-d} \pi^{-d/2} (-1)^{a+b} \Gamma\left(\frac{d}{2} - a\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - b\right) \Gamma\left(a + b - \frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{1}{2}(d-2(a+b))} \right) / (\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(-a - b + d))$$

Substitution Lists:

In[46]:= (** Basic integrals for YM theories **)

In[47]:= subkk2d[m1_, m2_, a_, b_] =
fv[k, m1] fv[k, m2] / sp[k, k]^a / sp[kp, kp]^b → Intkk2d[p, m1, m2, a, b, d] / s0

$$\text{Out[47]} = \frac{(\bar{k}^2)^{-a} (\bar{k}p^2)^{-b} \bar{k}^{m1} \bar{k}^{m2}}{s0 \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(-a - b + d + 2)} i 2^{-d-2} \pi^{-d/2} (-1)^{a+b} \Gamma\left(-a + \frac{d}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - b\right) \Gamma\left(a + b - \frac{d}{2} - 1\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{1}{2}(d-2(a+b))} ((-2a + d + 2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} (2(a + b - 1) - d) + \bar{p}^2 (d - 2b) g^{m1 m2})$$

In[48]:= subk2d[m1_, a_, b_] = fv[k, m1] / sp[k, k]^a / sp[kp, kp]^b → Intk2d[p, m1, a, b, d] / s0

$$\text{Out[48]} = \frac{(\bar{k}^2)^{-a} (\bar{k}p^2)^{-b} \bar{k}^{m1}}{s0 \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(-a - b + d + 1)} i 2^{-d} \pi^{-d/2} (-1)^{a+b+1} \bar{p}^{m1} \Gamma\left(-a + \frac{d}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - b\right) \Gamma\left(a + b - \frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{1}{2}(-2a-2b+d)}$$

In[49]:= sub02d[a_, b_] = s0 / sp[k, k]^a / sp[kp, kp]^b → Int02d[p, a, b, d]

$$\text{Out[49]} = s0 (\bar{k}^2)^{-a} (\bar{k}p^2)^{-b} \rightarrow \left(i 2^{-d} \pi^{-d/2} (-1)^{a+b} \Gamma\left(\frac{d}{2} - a\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - b\right) \Gamma\left(a + b - \frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{1}{2}(d-2(a+b))} \right) / (\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(-a - b + d))$$

In[50]:= (** The above three integrals,
with two denominators and zero, one or two k in the numerator,
are all we need for the calculation of self-energies in YM theories **)

One Loop Self-Energy

■ Gauge Boson

Diagram (I)

In[51]:= (** Here we are calculating the diagram with a ghost loop **)

In[52]:= -Acc[kp, d, a, m1, c] Dcc[k, c, e] Dcc[kp, d, f] Acc[k, e, b, m2, f]

$$\text{Out[52]} = \frac{g^2 \bar{k}^{m2} \bar{k}p^{m1} f^{e b f} \delta^{c e} \delta^{d f} f^{d a c}}{\bar{k}^2 \bar{k}p^2}$$

In[53]:= Expand[Contract[SUNSSimplify[s0 * %]]]

$$\text{Out[53]} = -\frac{g^2 s0 C_A \bar{k}^{m2} \bar{k}p^{m1} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k}p^2}$$

```

In[54]:= seCC = Expand[% /. scal1 /. subs1]

Out[54]:= 
$$-\frac{g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m_2} \bar{p}^{m_1} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m_1} \bar{k}^{m_2} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2}$$


In[55]:= seCC /. subkk2d[m1, m2, 1, 1] /. subkk2d[m2, m1, 1, 1] /. subkk2d[m1, m2, 1, 2] /.
subkk2d[m2, m1, 1, 2] /. subkk2d[m1, m2, 2, 1] /. subkk2d[m2,
m1, 2, 1] /. subkk2d[m1, m2, 2, 2] /. subkk2d[m2, m1, 2, 2] /.
subk2d[m1, 1, 1] /. subk2d[m2, 1, 1] /. subk2d[m1, 1, 2] /.
subk2d[m2, 1, 2] /. subk2d[m1, 2, 1] /. subk2d[m2, 2, 1] /.
subk2d[m1, 2, 2] /. subk2d[m2, 2, 2] /. sub02d[1, 1] /.
sub02d[1, 2] /. sub02d[2, 1] /. sub02d[
2,
2]

Out[55]:= 
$$\frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d} \pi^{-d/2} g^2 C_A \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b} - \frac{1}{\Gamma(d)}$$


$$i 2^{-d-2} \pi^{-d/2} g^2 C_A \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a b} ((d-2) \bar{p}^2 g^{m_1 m_2} + (2-d) d \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2})$$


In[56]:= seCCfinal = FullSimplify[%]

Out[56]:= 
$$-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} i 4^{-d} \pi^{\frac{3}{2} - \frac{d}{2}} g^2 C_A \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a b} ((d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + \bar{p}^2 g^{m_1 m_2})$$


In[57]:= (** comparison with Peskin's book p.525 **)

In[58]:= I g^2 / (4 Pi) ^ (d/2) dk[a, b] Integrate[
1 / (-Mse) ^ (2 - (d/2)) * (-Gamma[1 - d/2] dt[m1, m2] sp[p, p] ((1/2) u (1 - u)) +
Gamma[2 - d/2] fv[p, m1] fv[p, m2] (u (1 - u))), {u, 0, 1}]

Out[58]:= ConditionalExpression[

$$-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} i 2^{-2} d \pi^{\frac{3}{2} - \frac{d}{2}} g^2 \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a b} ((d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + \bar{p}^2 g^{m_1 m_2}), \bar{p}^2 < 0 \wedge \text{Re}(d) > 0]$$


```

Diagram (2)

```

In[59]:= (** Here we are calculating the diagram with a
loop made by a boson and a auxiliary field propagator **)

In[60]:= FAA[c, sig, bet, d, alp, a, m1] DAA[k, f, ome, d, alp, xi]
DFF[kp, c, sig, bet, e, gam, del] FAA[e, gam, del, b, m2, f, ome]

Out[60]:= 
$$-\frac{1}{2 \bar{k}^2} g^2 f^{e b f} \delta^{c e} \delta^{d f} f^{c d a} (g^{\text{alp sig}} g^{\text{bet m1}} - g^{\text{alp bet}} g^{\text{m1 sig}})$$


$$(g^{\text{del ome}} g^{\text{gam m2}} - g^{\text{del m2}} g^{\text{gam ome}}) \left( g^{\text{alp ome}} - \frac{(1 - \xi) \bar{k}^{\text{alp}} \bar{k}^{\text{ome}}}{\bar{k}^2} \right) \left( \frac{1}{2} (g^{\text{bet sig}} g^{\text{del gam}} - g^{\text{bet gam}} g^{\text{del sig}}) - \right.$$


$$\left. \frac{1}{2 k p^2} (\bar{k} p^{\text{gam}} \bar{k} p^{\text{sig}} g^{\text{bet del}} - \bar{k} p^{\text{del}} \bar{k} p^{\text{sig}} g^{\text{bet gam}} - \bar{k} p^{\text{bet}} \bar{k} p^{\text{gam}} g^{\text{del sig}} + \bar{k} p^{\text{bet}} \bar{k} p^{\text{del}} g^{\text{gam sig}}) \right)$$


```

In[61]:= **Expand[Contract[SUNSimplify[s0 * %]]]**

$$\text{Out[61]} = \frac{g^2 \xi s_0 C_A \delta^{ab} g^{m1 m2} (\bar{k} \cdot \bar{k} p)^2}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} - \frac{g^2 s_0 C_A \delta^{ab} g^{m1 m2} (\bar{k} \cdot \bar{k} p)^2}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} + \frac{d g^2 s_0 C_A \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{d g^2 s_0 C_A \delta^{ab} g^{m1 m2}}{2 \bar{k}^2} +$$

$$\frac{g^2 \xi s_0 C_A \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{g^2 \xi s_0 C_A \bar{k} p^{m2} \bar{k} p^{m1} \delta^{ab} (\bar{k} \cdot \bar{k} p)}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} - \frac{g^2 \xi s_0 C_A \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} (\bar{k} \cdot \bar{k} p)}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} -$$

$$\frac{3 g^2 s_0 C_A \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{g^2 s_0 C_A \bar{k} p^{m2} \bar{k} p^{m1} \delta^{ab} (\bar{k} \cdot \bar{k} p)}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} + \frac{g^2 s_0 C_A \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} (\bar{k} \cdot \bar{k} p)}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} -$$

$$\frac{g^2 \xi s_0 C_A \delta^{ab} g^{m1 m2}}{2 \bar{k}^2} + \frac{g^2 \xi s_0 C_A \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab}}{2 \bar{k}^4} + \frac{2 g^2 s_0 C_A \delta^{ab} g^{m1 m2}}{\bar{k}^2} - \frac{g^2 s_0 C_A \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab}}{2 \bar{k}^4}$$

In[62]:= **seFA = Expand[% /. scal1 /. subs1]**

$$\text{Out[62]} = -\frac{C_A s_0 g^{m1 m2} \bar{p}^4 \delta^{ab} g^2}{4 \bar{k}^4 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi g^{m1 m2} \bar{p}^4 \delta^{ab} g^2}{4 \bar{k}^4 \bar{k} p^2} - \frac{C_A s_0 g^{m1 m2} \bar{k} p^2 \delta^{ab} g^2}{4 \bar{k}^4} + \frac{C_A s_0 \xi g^{m1 m2} \bar{k} p^2 \delta^{ab} g^2}{4 \bar{k}^4} +$$

$$\frac{C_A s_0 g^{m1 m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{C_A s_0 \xi g^{m1 m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{C_A s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^4 \bar{k} p^2} -$$

$$\frac{C_A s_0 \bar{p}^{m1} \bar{k} p^{m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{p}^{m1} \bar{k} p^{m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4 \bar{k} p^2} - \frac{C_A s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{p}^{m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{k} p^{m1} \bar{p}^{m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4 \bar{k} p^2} -$$

$$\frac{C_A s_0 g^{m1 m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4} + \frac{C_A s_0 \xi g^{m1 m2} \bar{p}^2 \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4} + \frac{5 C_A s_0 g^{m1 m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2} - \frac{C_A d s_0 g^{m1 m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2} -$$

$$\frac{C_A s_0 \xi g^{m1 m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2} - \frac{C_A s_0 g^{m1 m2} \delta^{ab} g^2}{4 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi g^{m1 m2} \delta^{ab} g^2}{4 \bar{k} p^2} - \frac{2 C_A s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} +$$

$$\frac{C_A d s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{5 C_A s_0 \bar{p}^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{C_A d s_0 \bar{p}^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{p}^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} -$$

$$\frac{5 C_A s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{C_A d s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{k} p^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{3 C_A s_0 \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} +$$

$$\frac{C_A d s_0 \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{3 C_A s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4} + \frac{3 C_A s_0 \xi \bar{k} p^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4} -$$

$$\frac{C_A s_0 \bar{p}^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{p}^{m1} \bar{k} p^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4} - \frac{C_A s_0 \bar{k} p^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4} + \frac{C_A s_0 \xi \bar{k} p^{m1} \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^2}{2 \bar{k}^4}$$

In[63]:= **seFA /. subkk2d[m1, m2, 2, 2] /. subkk2d[m2, m1, 2, 2] /. subkk2d[m1, m2, 1, 2] /.
subkk2d[m2, m1, 1, 2] /. subkk2d[m1, m2, 2, 1] /. subkk2d[m2,
m1, 2, 1] /. subkk2d[m1, m2, 1, 1] /. subkk2d[m2, m1, 1, 1] /.
subk2d[m1, 2, 2] /. subk2d[m2, 2, 2] /. subk2d[m1, 1, 2] /.
subk2d[m2, 1, 2] /. subk2d[m1, 2, 1] /. subk2d[m2, 2, 1] /.
subk2d[m1, 1, 1] /. subk2d[m2, 1, 1] /. sub02d[2, 2] /.
sub02d[1, 2] /. sub02d[2, 1] /. sub02d[
1,
1]**

$$\begin{aligned}
\text{Out[63]} = & \frac{1}{\Gamma(d-3)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) g^{m_1 m_2} \bar{p}^4 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-3)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) g^{m_1 m_2} \bar{p}^4 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^2 ((4-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^2 ((4-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} 5 i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{1-d} C_A d g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} 3 i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d} C_A d g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m_1 m_2} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m_1 m_2} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d)} \\
& i 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) ((2-d) d \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d)} \\
& i 2^{-d-2} C_A d g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) ((2-d) d \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\
& \frac{C_A g^2 s_0 g^{m_1 m_2} \bar{k} p^2 \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} + \frac{C_A g^2 s_0 \xi g^{m_1 m_2} \bar{k} p^2 \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} - \frac{C_A g^2 s_0 g^{m_1 m_2} \bar{p}^2 \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4} + \\
& \frac{C_A g^2 s_0 \xi g^{m_1 m_2} \bar{p}^2 \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4} + \frac{5 C_A g^2 s_0 g^{m_1 m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^2} - \frac{C_A d g^2 s_0 g^{m_1 m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^2} - \frac{C_A g^2 s_0 \xi g^{m_1 m_2} \delta^{a b}}{\bar{k}^2} - \\
& \frac{C_A g^2 s_0 g^{m_1 m_2} \delta^{a b}}{4 \bar{k} p^2} + \frac{C_A g^2 s_0 \xi g^{m_1 m_2} \delta^{a b}}{4 \bar{k} p^2} - \frac{3 C_A g^2 s_0 \bar{k}^{m_1} \bar{k}^{m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4} + \frac{3 C_A g^2 s_0 \xi \bar{k}^{m_1} \bar{k}^{m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4} - \\
& \frac{C_A g^2 s_0 \bar{p}^{m_1} \bar{k}^{m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4} + \frac{C_A g^2 s_0 \xi \bar{p}^{m_1} \bar{k}^{m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4} - \frac{C_A g^2 s_0 \bar{k}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4} + \frac{C_A g^2 s_0 \xi \bar{k}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{a b}}{2 \bar{k}^4}
\end{aligned}$$

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

In[64]:= % /. s0 -> 0

$$\begin{aligned} \text{Out[64]} = & \frac{1}{\Gamma(d-3)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) g^{m_1 m_2} \bar{p}^4 \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-3)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) g^{m_1 m_2} \bar{p}^4 \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \bar{p}^2 \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \bar{p}^2 \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^2 ((4-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^2 ((4-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\ & \frac{1}{\Gamma(d-1)} 5 i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{1-d} C_A d g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 3 i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & i 2^{-d} C_A d g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & i 2^{-d} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & i 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m_1 m_2} \bar{p}^2 \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & i 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m_1 m_2} \bar{p}^2 \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d)} \\ & i 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) ((2-d) d \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \\ & \frac{1}{\Gamma(d)} i 2^{-d-2} C_A d g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) ((2-d) d \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2} + (d-2) g^{m_1 m_2} \bar{p}^2) \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \end{aligned}$$

In[65]:= seFAfinal = FullSimplify[%]

$$\text{Out[65]} = -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} i 4^{-d} (d-2) \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 C_A \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{ab} (\bar{p}^2 (d(-\xi) + d + \xi - 2) g^{m_1 m_2} + ((d-1)\xi + 1) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{m_2})$$

Diagram (3)

In[66]:= (** Here we are calculating the diagram with a loop made by two mixed propagators **)


```

In[67]:= FAA[c, sig, bet, d, alp, a, m1] DFA[kp, c, sig, bet, e, ome]
DFA[k, f, gam, del, d, alp] FAA[f, gam, del, e, ome, b, m2]

Out[67]= 
$$-\frac{1}{4 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} g^2 f^f e^b \delta^c e \delta^d f f^c d a \left( g^{\text{alp sig}} g^{\text{bet m1}} - g^{\text{alp bet}} g^{\text{m1 sig}} \right) \\ \left( g^{\text{del m2}} g^{\text{gam ome}} - g^{\text{del ome}} g^{\text{gam m2}} \right) \left( \bar{k}^{\text{gam}} g^{\text{alp del}} - \bar{k}^{\text{del}} g^{\text{alp gam}} \right) \left( \bar{k} p^{\text{sig}} g^{\text{bet ome}} - \bar{k} p^{\text{bet}} g^{\text{ome sig}} \right)$$


In[68]:= Expand[Contract[SUNSimplify[s0 * %]]]

Out[68]= 
$$\frac{d g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m2}} \bar{k} p^{\text{m1}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{2 g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m2}} \bar{k} p^{\text{m1}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m1}} \bar{k} p^{\text{m2}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2}$$


In[69]:= seFAAF = Expand[% /. scal1 /. subs1]

Out[69]= 
$$\frac{d g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m2}} \bar{p}^{\text{m1}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{d g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m1}} \bar{k}^{\text{m2}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \\ \frac{2 g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m2}} \bar{p}^{\text{m1}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} + \frac{g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m1}} \bar{p}^{\text{m2}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2} - \frac{g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\text{m1}} \bar{k}^{\text{m2}} \delta^{a b}}{\bar{k}^2 \bar{k} p^2}$$


In[70]:= seFAAF /. subkk2d[m1, m2, 2, 2] /. subkk2d[m2, m1, 2, 2] /. subkk2d[m1, m2, 1, 2] /.
subkk2d[m2, m1, 1, 2] /. subkk2d[m1, m2, 2, 1] /. subkk2d[m2,
m1, 2, 1] /. subkk2d[m1, m2, 1, 1] /. subkk2d[m2, m1, 1, 1] /.
subk2d[m1, 2, 2] /. subk2d[m2, 2, 2] /. subk2d[m1, 1, 2] /.
subk2d[m2, 1, 2] /. subk2d[m1, 2, 1] /. subk2d[m2, 2, 1] /.
subk2d[m1, 1, 1] /. subk2d[m2, 1, 1] /. sub02d[2, 2] /.
sub02d[1, 2] /. sub02d[2, 1] /. sub02d[
1,
1]

Out[70]= 
$$\frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{1-d} \pi^{-d/2} g^2 C_A \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \bar{p}^{\text{m1}} \bar{p}^{\text{m2}} \delta^{a b} - \\ \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d} \pi^{-d/2} g^2 C_A \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \bar{p}^{\text{m1}} \bar{p}^{\text{m2}} \delta^{a b} - \\ \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d} d \pi^{-d/2} g^2 C_A \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \bar{p}^{\text{m1}} \bar{p}^{\text{m2}} \delta^{a b} - \frac{1}{\Gamma(d)} \\ i 2^{-d-2} \pi^{-d/2} g^2 C_A \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a b} ((d-2) \bar{p}^2 g^{\text{m1 m2}} + (2-d) d \bar{p}^{\text{m1}} \bar{p}^{\text{m2}}) + \\ \frac{1}{\Gamma(d)} i 2^{-d-2} d \pi^{-d/2} g^2 C_A \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a b} ((d-2) \bar{p}^2 g^{\text{m1 m2}} + (2-d) d \bar{p}^{\text{m1}} \bar{p}^{\text{m2}})$$


In[71]:= seFAAFfinal = FullSimplify[%]

Out[71]= 
$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} i 2^{1-2d} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 C_A \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a b} ((d-2) \bar{p}^{\text{m1}} \bar{p}^{\text{m2}} + \bar{p}^2 g^{\text{m1 m2}})$$


```

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

Self-Energy Gauge Boson

In[72]:= **seCCfinal + seFAfinal + seFAAFfinal**

$$\begin{aligned} \text{Out[72]} = & -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} i 4^{-d} (d-2) \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 C_A \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{ab} (\bar{p}^2 (d(-\xi) + d + \xi - 2) g^{m1 m2} + ((d-1)\xi + 1) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2}) + \\ & \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} i 2^{1-2d} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 C_A \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{ab} ((d-2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} + \bar{p}^2 g^{m1 m2}) - \\ & \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} i 4^{-d} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 C_A \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{ab} ((d-2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} + \bar{p}^2 g^{m1 m2}) \end{aligned}$$

In[73]:= **Ase = FullSimplify[%]**

$$\text{Out[73]} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} i 4^{-d} (d-2) \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 C_A (d(\xi-1) - \xi + 3) \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{ab} (\bar{p}^2 g^{m1 m2} - \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2})$$

In[74]:= **Normal[Series[Ase /. d -> 4 - 2 eps, {eps, 0, -1}]]**

$$\text{Out[74]} = -((i g^2 (3\xi - 1) C_A \delta^{ab} (\bar{p}^2 \bar{g}^{m1 m2} - \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2}))) / (96 \pi^2 \text{eps}))$$

In[75]:= **Simplify[%]**

$$\text{Out[75]} = \frac{1}{96 \pi^2 \text{eps}} i g^2 (3\xi - 1) C_A \delta^{ab} (\bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} - \bar{p}^2 \bar{g}^{m1 m2})$$

In[76]:= **% * (16 Pi^2 eps)**

$$\text{Out[76]} = \frac{1}{6} i g^2 (3\xi - 1) C_A \delta^{ab} (\bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2} - \bar{p}^2 \bar{g}^{m1 m2})$$

■ Auxiliary Field F

Diagram (IV)

In[77]:= **(** Here we are calculating the diagram with a loop made by two boson propagators **)**

In[78]:= **(1/2) FAA[a, m1, m2, c, alp, d, gam] DAA[kp, c, alp, e, del, xi]
DAA[k, f, ome, d, gam, xi] FAA[b, n1, n2, f, ome, e, del]**

$$\begin{aligned} \text{Out[78]} = & \frac{1}{8 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} g^2 f^{bfe} \delta^{ce} \delta^{df} f^{acd} (g^{alp m1} g^{gam m2} - g^{alp m2} g^{gam m1}) \\ & \left(g^{del n2} g^{n1 ome} - g^{del n1} g^{n2 ome} \right) \left(g^{alp del} - \frac{(1-\xi) \bar{k} p^{alp} \bar{k} p^{del}}{\bar{k} p^2} \right) \left(g^{gam ome} - \frac{(1-\xi) \bar{k}^{gam} \bar{k}^{ome}}{\bar{k}^2} \right) \end{aligned}$$


```

In[81]:= FseAA /. subkk2d[m1, m2, 2, 2] /. subkk2d[m1, n1, 2, 2] /. subkk2d[m1, n2, 2, 2] /.
subkk2d[m2, n1, 2, 2] /. subkk2d[m2, n2, 2,
2] /. subkk2d[n1, n2, 2, 2] /. subkk2d[m1,
m2, 1, 2] /. subkk2d[m1, n1, 1, 2] /. subkk2d[
m1, n2, 1, 2] /. subkk2d[m2, n1, 1, 2] /.
subkk2d[m2, n2, 1, 2] /. subkk2d[n1, n2, 1, 2] /.
subkk2d[m1, m2, 2, 1] /. subkk2d[m1, n1, 2, 1] /.
subkk2d[m1, n2, 2, 1] /. subkk2d[m2, n1, 2, 1] /.
subkk2d[m2, n2, 2, 1] /. subkk2d[n1, n2, 2, 1] /.
subkk2d[m1, m2, 1, 1] /. subkk2d[m1, n1, 1, 1] /.
subkk2d[m1, n2, 1, 1] /. subkk2d[m2, n1, 1, 1] /.
subkk2d[m2, n2, 1, 1] /. subkk2d[n1, n2, 1, 1] /.
subk2d[m1, 2, 2] /. subk2d[m2, 2, 2] /. subk2d[n1, 2, 2] /.
subk2d[n2, 2, 2] /. subk2d[m1, 2, 1] /. subk2d[m2, 2, 1] /.
subk2d[n1, 2, 1] /. subk2d[n2, 2, 1] /. subk2d[m1, 1, 2] /.
subk2d[m2, 1, 2] /. subk2d[n1, 1, 2] /. subk2d[n2, 1, 2] /.
subk2d[m1, 1, 1] /. subk2d[m2, 1, 1] /. subk2d[
n1, 1,
1] /. subk2d[
n2,
1,
1] /. sub02d[
2,
2] /.
sub02d[
1,
2] /.
sub02d[
2,
1] /.
sub02d[
1,
1]

```

$$\begin{aligned}
\text{Out[81]} = & \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \\
& \bar{p}^{m_2} \bar{p}^{n_2} \left((6-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{n_1} + (d-4) g^{m_1 n_1} \bar{p}^2 \right) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-8}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi^2 \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \bar{p}^{m_2} \bar{p}^{n_2} \left((6-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{n_1} + (d-4) g^{m_1 n_1} \bar{p}^2 \right) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-8}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-4} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \bar{p}^{m_2} \\
& \bar{p}^{n_2} \left((6-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{n_1} + (d-4) g^{m_1 n_1} \bar{p}^2 \right) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-8}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \bar{p}^{m_2} \bar{p}^{n_1} \left((6-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{n_2} + (d-4) g^{m_1 n_2} \bar{p}^2 \right) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-8}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi^2 \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \bar{p}^{m_2} \\
& \bar{p}^{n_1} \left((6-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{n_2} + (d-4) g^{m_1 n_2} \bar{p}^2 \right) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-8}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& i 2^{-d-4} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \bar{p}^{m_2} \bar{p}^{n_1} \left((6-d)(d-2) \bar{p}^{m_1} \bar{p}^{n_2} + (d-4) g^{m_1 n_2} \bar{p}^2 \right) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-8}{2}} -
\end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
& i 2^{-d-3} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n1} g^{m2 n2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-3)} \\
& i 2^{-d-3} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n1} g^{m2 n2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m2 n2} ((4-d) d \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n1} + (d-4) g^{m1 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m2 n2} ((4-d) d \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n1} + (d-4) g^{m1 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m2 n2} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n1} + (d-2) g^{m1 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m2 n2} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n1} + (d-2) g^{m1 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m2 n1} ((4-d) d \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n2} + (d-4) g^{m1 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m2 n1} ((4-d) d \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n2} + (d-4) g^{m1 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m2 n1} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n2} + (d-2) g^{m1 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m2 n1} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n2} + (d-2) g^{m1 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m1 n2} ((4-d) d \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n1} + (d-4) g^{m2 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m1 n2} ((4-d) d \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n1} + (d-4) g^{m2 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n2} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n1} + (d-2) g^{m2 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n2} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n1} + (d-2) g^{m2 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m1 n1} ((4-d) d \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n2} + (d-4) g^{m2 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) g^{m1 n1} ((4-d) d \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n2} + (d-4) g^{m2 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n1} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n2} + (d-2) g^{m2 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n1} ((4-d) (d-2) \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n2} + (d-2) g^{m2 n2} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n2} g^{m2 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n1} g^{m2 n2} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}}
\end{aligned}$$

In[82]:= % /. s0 -> 0

$$\begin{aligned}
\text{Out[82]}= & \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \\
& \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n2} ((6-d) (d-2) \bar{p}^{m1} \bar{p}^{n1} + (d-4) g^{m1 n1} \bar{p}^2) \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-8}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)}
\end{aligned}$$

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

[illegible]

[illegible]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n1} ((4-d)(d-2) \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n2} + (d-2) g^{m2 n2} \bar{p}^2) \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-1)} i 2^{-d-5} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n1} ((4-d)(d-2) \bar{p}^{m2} \bar{p}^{n2} + (d-2) g^{m2 n2} \bar{p}^2) \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n2} g^{m2 n1} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} i 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 g^{m1 n1} g^{m2 n2} \delta^{ab} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \end{aligned}$$

In[83]:= **FseAAfinal = FullSimplify[%]**

$$\begin{aligned} \text{Out[83]} = & -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} i 2^{-2(d+1)} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 (\xi + 1) C_A \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} \delta^{ab} \\ & ((d-4)(\xi-1)(\bar{p}^{m2}(\bar{p}^{n2} g^{m1 n1} - \bar{p}^{n1} g^{m1 n2}) + \bar{p}^{m1}(\bar{p}^{n1} g^{m2 n2} - \bar{p}^{n2} g^{m2 n1})) + 4 \bar{p}^2 (g^{m1 n2} g^{m2 n1} - g^{m1 n1} g^{m2 n2})) \end{aligned}$$

In[84]:= **Normal[Series[FseAAfinal /. d -> 4 - 2 eps, {eps, 0, -1}]]**

$$\text{Out[84]} = -((i g^2 (\xi + 1) C_A \delta^{ab} (\bar{g}^{m1 n2} \bar{g}^{m2 n1} - \bar{g}^{m1 n1} \bar{g}^{m2 n2}))/((128 \pi^2 \text{eps})))$$

In[85]:= **Simplify[%]**

$$\text{Out[85]} = -((i g^2 (\xi + 1) C_A \delta^{ab} (\bar{g}^{m1 n2} \bar{g}^{m2 n1} - \bar{g}^{m1 n1} \bar{g}^{m2 n2}))/((128 \pi^2 \text{eps})))$$

In[86]:= **% * (16 Pi^2 eps)**

$$\text{Out[86]} = -\frac{1}{8} i g^2 (\xi + 1) C_A \delta^{ab} (\bar{g}^{m1 n2} \bar{g}^{m2 n1} - \bar{g}^{m1 n1} \bar{g}^{m2 n2})$$

■ Mixed Propagator

AF Transition - Diagram (V)

In[87]:= **FAA[d, ome, gam, a, n1, c, alp] DAA[k, e, del, c, alp, xi]
DFA[kp, d, ome, gam, f, zet] FAA[b, m1, m2, f, zet, e, del]**

$$\begin{aligned} \text{Out[87]} = & \frac{1}{4 \bar{k}^2 \bar{\text{kp}}^2} i g^2 f^{bf e} \delta^{ce} \delta^{df} f^{dac} (g^{\text{alp gam}} g^{n1 \text{ome}} - g^{\text{alp ome}} g^{\text{gam n1}}) \\ & (g^{\text{del m2}} g^{m1 \text{zet}} - g^{\text{del m1}} g^{m2 \text{zet}}) \left(g^{\text{alp del}} - \frac{(1-\xi) \bar{k}^{\text{alp}} \bar{k}^{\text{del}}}{\bar{k}^2} \right) (\bar{\text{kp}}^{\text{ome}} g^{\text{gam zet}} - \bar{\text{kp}}^{\text{gam}} g^{\text{ome zet}}) \end{aligned}$$

In[88]:= **Expand[Contract[SUNSSimplify[s0 * %]]]**

$$\begin{aligned} \text{Out[88]} = & \frac{i g^2 \xi s0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1} (\bar{k} \cdot \bar{\text{kp}})}{2 \bar{k}^4 \bar{\text{kp}}^2} - \frac{i g^2 \xi s0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1} (\bar{k} \cdot \bar{\text{kp}})}{2 \bar{k}^4 \bar{\text{kp}}^2} + \frac{i g^2 s0 C_A \bar{\text{kp}}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{2 \bar{k}^2 \bar{\text{kp}}^2} - \\ & \frac{i g^2 s0 C_A \bar{\text{kp}}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{2 \bar{k}^2 \bar{\text{kp}}^2} - \frac{i g^2 s0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1} (\bar{k} \cdot \bar{\text{kp}})}{2 \bar{k}^4 \bar{\text{kp}}^2} + \frac{i g^2 s0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1} (\bar{k} \cdot \bar{\text{kp}})}{2 \bar{k}^4 \bar{\text{kp}}^2} \end{aligned}$$

In[89]:= **AFse = Expand[% /. scal1 /. subs1]**

$$\begin{aligned} \text{Out[89]} = & -\frac{i g^2 \xi s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{\overline{m2}} \delta^{ab} g^{m1 nl}}{4 \bar{k}^4 \overline{k p^2}} + \frac{i g^2 \xi s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{\overline{m1}} \delta^{ab} g^{m2 nl}}{4 \bar{k}^4 \overline{k p^2}} + \frac{i g^2 s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{\overline{m2}} \delta^{ab} g^{m1 nl}}{4 \bar{k}^4 \overline{k p^2}} - \\ & \frac{i g^2 s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{\overline{m1}} \delta^{ab} g^{m2 nl}}{4 \bar{k}^4 \overline{k p^2}} + \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{p}^{\overline{m2}} \delta^{ab} g^{m1 nl}}{2 \bar{k}^2 \overline{k p^2}} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{p}^{\overline{m1}} \delta^{ab} g^{m2 nl}}{2 \bar{k}^2 \overline{k p^2}} + \\ & \frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m2}} \delta^{ab} g^{m1 nl}}{4 \bar{k}^2 \overline{k p^2}} - \frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m1}} \delta^{ab} g^{m2 nl}}{4 \bar{k}^2 \overline{k p^2}} + \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m2}} \delta^{ab} g^{m1 nl}}{4 \bar{k}^2 \overline{k p^2}} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m1}} \delta^{ab} g^{m2 nl}}{4 \bar{k}^2 \overline{k p^2}} - \\ & \frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m2}} \delta^{ab} g^{m1 nl}}{4 \bar{k}^4} + \frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m1}} \delta^{ab} g^{m2 nl}}{4 \bar{k}^4} + \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m2}} \delta^{ab} g^{m1 nl}}{4 \bar{k}^4} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{\overline{m1}} \delta^{ab} g^{m2 nl}}{4 \bar{k}^4} \end{aligned}$$

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

$\text{In}[90]:= \text{AFse} /. \text{subkk2d}[\text{m1}, \text{m2}, 2, 2] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, \text{n1}, 2, 2] /. \text{subkk2d}[\text{m2}, \text{n1}, 2, 2] /. \\
\text{subkk2d}[\text{m1}, \text{m2}, 1, 2] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, \text{n1}, 1, 2] /. \text{subkk2d}[\text{m2}, \\
\text{n1}, 1, 2] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, \text{m2}, 2, 1] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, \text{n1}, 2, 1] /. \\
\text{subkk2d}[\text{m2}, \text{n1}, 2, 1] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, \text{m2}, 1, 1] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, \text{n1}, 1, 1] /. \text{subkk2d}[\text{m2}, \text{n1}, 1, 1] /. \text{subkk2d}[\text{m2}, 2, 2] /. \text{subkk2d}[\text{n1}, 2, 2] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, 1, 2] /. \\
\text{subkk2d}[\text{m2}, 1, 2] /. \text{subkk2d}[\text{n1}, 1, 2] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, 2, 1] /. \\
\text{subkk2d}[\text{m2}, 2, 1] /. \text{subkk2d}[\text{n1}, 2, 1] /. \text{subkk2d}[\text{m1}, 1, 1] /. \\
\text{subkk2d}[\text{m2}, 1, 1] /. \text{subkk2d}[\text{n1}, 1, 1] /. \text{sub02d}[\\
2, 2] /. \text{sub02d}[\\
1, \\
2] /. \text{sub02d}[\\
2, \\
1] /. \\
\text{sub02d}[\\
1, \\
1]$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[90]= & -\left(\left(2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} \right) / \Gamma(d-2) \right) + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{i C_A g^2 s_0 \bar{k}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} - \\
& \frac{i C_A g^2 s_0 \xi \bar{k}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} - \frac{i C_A g^2 s_0 \bar{k}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} + \frac{i C_A g^2 s_0 \xi \bar{k}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4}
\end{aligned}$$

In[91]:= % /. s0 -> 0

$$\begin{aligned} \text{Out[91]} = & -\left(2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}}\right) / \Gamma(d-2) + \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2 n1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \end{aligned}$$

In[92]:= AFsefinal = FullSimplify[%]

$$\text{Out[92]} = -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} 4^{-d} \pi^{\frac{3-d}{2}} g^2 C_A (d(\xi-1) - 3\xi + 1) \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a b} (\bar{p}^{m2} g^{m1 n1} - \bar{p}^{m1} g^{m2 n1})$$

In[93]:= Normal[Series[AFsefinal /. d -> 4 - 2 eps, {eps, 0, -1}]]

$$\text{Out[93]} = (g^2 (\xi - 3) C_A \delta^{a b} (\bar{p}^{m2} \bar{g}^{m1 n1} - \bar{p}^{m1} \bar{g}^{m2 n1})) / (128 \pi^2 \text{eps})$$

In[94]:= Simplify[%]

$$\text{Out[94]} = (g^2 (\xi - 3) C_A \delta^{a b} (\bar{p}^{m2} \bar{g}^{m1 n1} - \bar{p}^{m1} \bar{g}^{m2 n1})) / (128 \pi^2 \text{eps})$$

In[95]:= % * (16 Pi^2 eps)

$$\text{Out[95]} = \frac{1}{8} g^2 (\xi - 3) C_A \delta^{a b} (\bar{p}^{m2} \bar{g}^{m1 n1} - \bar{p}^{m1} \bar{g}^{m2 n1})$$

FA Transition - Diagram (VI)

In[96]:= FAA[a, m1, m2, c, alp, d, zet] DAA[k, e, del, c, alp, xi]

DAF[kp, d, zet, f, ome, gam] FAA[f, ome, gam, e, del, b, n1]

$$\begin{aligned} \text{Out[96]} = & -\frac{1}{4 \bar{k}^2 \bar{k} p^2} i g^2 f^{f e b} \delta^{c e} \delta^{d f} f^{a c d} (g^{\text{alp m1}} g^{\text{m2 zet}} - g^{\text{alp m2}} g^{\text{m1 zet}}) \\ & (g^{\text{del ome}} g^{\text{gam n1}} - g^{\text{del gam}} g^{\text{n1 ome}}) \left(g^{\text{alp del}} - \frac{(1 - \xi) \bar{k}^{\text{alp}} \bar{k}^{\text{del}}}{\bar{k}^2} \right) (\bar{k} p^{\text{ome}} g^{\text{gam zet}} - \bar{k} p^{\text{gam}} g^{\text{ome zet}}) \end{aligned}$$

In[97]:= **Expand[Contract[SUNSimplify[s0 * %]]]**

$$\text{Out[97]} = -\frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1} (\bar{k} \cdot \bar{k}p)}{2 \bar{k}^4 \bar{k}p^2} + \frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1} (\bar{k} \cdot \bar{k}p)}{2 \bar{k}^4 \bar{k}p^2} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}p^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{2 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} +$$

$$\frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}p^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{2 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} + \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1} (\bar{k} \cdot \bar{k}p)}{2 \bar{k}^4 \bar{k}p^2} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1} (\bar{k} \cdot \bar{k}p)}{2 \bar{k}^4 \bar{k}p^2}$$

In[98]:= **FAse = Expand[% /. scal1 /. subs1]**

$$\text{Out[98]} = \frac{i g^2 \xi s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{4 \bar{k}^4 \bar{k}p^2} - \frac{i g^2 \xi s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{4 \bar{k}^4 \bar{k}p^2} - \frac{i g^2 s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{4 \bar{k}^4 \bar{k}p^2} +$$

$$\frac{i g^2 s_0 \bar{p}^2 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{4 \bar{k}^4 \bar{k}p^2} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{p}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{2 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} + \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{p}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{2 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} -$$

$$\frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{4 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} + \frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{4 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{4 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} + \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{4 \bar{k}^2 \bar{k}p^2} +$$

$$\frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{4 \bar{k}^4} - \frac{i g^2 \xi s_0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{4 \bar{k}^4} - \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m2} \delta^{ab} g^{m1 n1}}{4 \bar{k}^4} + \frac{i g^2 s_0 C_A \bar{k}^{m1} \delta^{ab} g^{m2 n1}}{4 \bar{k}^4}$$

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

```

In[99]:= FASE /. subkk2d[m1, m2, 2, 2] /. subkk2d[m1, n1, 2, 2] /. subkk2d[m2, n1, 2, 2] /.
subkk2d[m1, m2, 1, 2] /. subkk2d[m1, n1, 1, 2] /. subkk2d[m2,
n1, 1, 2] /. subkk2d[m1, m2, 2, 1] /. subkk2d[m1, n1, 2, 1] /.
subkk2d[m2, n1, 2, 1] /. subkk2d[m1, m2, 1, 1] /. subkk2d[
m1, n1, 1, 1] /. subkk2d[m2, n1, 1, 1] /. subk2d[m1, 2, 2] /.
subk2d[m2, 2, 2] /. subk2d[n1, 2, 2] /. subk2d[m1, 1, 2] /.
subk2d[m2, 1, 2] /. subk2d[n1, 1, 2] /. subk2d[m1, 2, 1] /.
subk2d[m2, 2, 1] /. subk2d[n1, 2, 1] /. subk2d[m1, 1, 1] /.
subk2d[m2, 1, 1] /. subk2d[n1, 1, 1] /. sub02d[
2, 2] /. sub02d[
1,
2] /. sub02d[
2,
1] /.
sub02d[
1,
1]

```

$$\begin{aligned}
\text{Out[99]} = & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_2} g^{m_1 n_1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_2} g^{m_1 n_1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\
& \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} g^{m_2 n_1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} g^{m_2 n_1} \bar{p}^2 \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_2} g^{m_1 n_1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_2} g^{m_1 n_1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_2} g^{m_1 n_1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} g^{m_2 n_1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\
& 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m_1} g^{m_2 n_1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\
& 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m_1} g^{m_2 n_1} \delta^{a b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{i C_A g^2 s_0 \bar{k}^{m_2} g^{m_1 n_1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} + \\
& \frac{i C_A g^2 s_0 \xi \bar{k}^{m_2} g^{m_1 n_1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} + \frac{i C_A g^2 s_0 \bar{k}^{m_1} g^{m_2 n_1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4} - \frac{i C_A g^2 s_0 \xi \bar{k}^{m_1} g^{m_2 n_1} \delta^{a b}}{4 \bar{k}^4}
\end{aligned}$$

In[100]:= % /. s0 -> 0

$$\begin{aligned} \text{Out[100]} = & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1\,n1} \bar{p}^2 \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1\,n1} \bar{p}^2 \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2\,n1} \bar{p}^2 \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2\,n1} \bar{p}^2 \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-6}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m2} g^{m1\,n1} \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m2} g^{m1\,n1} \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-2)} \\ & 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m2} g^{m1\,n1} \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m1} g^{m2\,n1} \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{1}{\Gamma(d-1)} \\ & 2^{-d-2} C_A g^2 \pi^{-d/2} \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \bar{p}^{m1} g^{m2\,n1} \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} - \\ & \frac{1}{\Gamma(d-2)} 2^{-d-1} C_A g^2 \pi^{-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \bar{p}^{m1} g^{m2\,n1} \delta^{a\,b} (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \end{aligned}$$

In[101]:= FAsfinal = FullSimplify[%]

$$\text{Out[101]} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} 4^{-d} \pi^{\frac{3}{2} - \frac{d}{2}} g^2 C_A (d(\xi - 1) - 3\xi + 1) \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta^{a\,b} (\bar{p}^{m2} g^{m1\,n1} - \bar{p}^{m1} g^{m2\,n1})$$

In[102]:= Normal[Series[FAsfinal /. d -> 4 - 2 eps, {eps, 0, -1}]]

$$\text{Out[102]} = -((g^2 (\xi - 3) C_A \delta^{a\,b} (\bar{p}^{m2} \bar{g}^{m1\,n1} - \bar{p}^{m1} \bar{g}^{m2\,n1}))) / (128 \pi^2 \text{eps}))$$

In[103]:= Simplify[%]

$$\text{Out[103]} = (g^2 (\xi - 3) C_A \delta^{a\,b} (\bar{p}^{m1} \bar{g}^{m2\,n1} - \bar{p}^{m2} \bar{g}^{m1\,n1})) / (128 \pi^2 \text{eps})$$

In[104]:= % * (16 Pi^2 eps)

$$\text{Out[104]} = \frac{1}{8} g^2 (\xi - 3) C_A \delta^{a\,b} (\bar{p}^{m1} \bar{g}^{m2\,n1} - \bar{p}^{m2} \bar{g}^{m1\,n1})$$

Gauge Boson Propagator

1° Order Formalism Propagator

In[105]:= **SUNSimplify**[Contract [

DAA[p, a1, mu, a2, nu, ξ] + **DAA**[p, a1, mu, a, m1, ξ] **Ase****DAA**[p, b, m2, a2, nu, ξ] +
DAF[p, a1, mu, a, m1, m2] **FseAfinal****DFA**[p, b, n1, n2, a2, nu] +
DAF[p, a1, mu, a, m1, m2] **FAsefinal****DAA**[p, b, n1, a2, nu, ξ] +
DAA[p, a1, mu, a, n1, ξ] **AFsefinal****DFA**[p, b, m1, m2, a2, nu]]]

$$\text{Out[105]} = -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\bar{p}^8} i 2^{-2d} \pi^{-d/2}$$

$$\begin{aligned} & \left(-C_A d^2 g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} - 2 C_A g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} + \right. \\ & 3 C_A d g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} + C_A d^2 g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} + \\ & 6 C_A g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} - 5 C_A d g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} + \\ & 4 C_A g^2 \pi^{3/2} \xi^2 \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} - C_A d g^2 \pi^{3/2} \xi^2 \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} + \\ & 16 C_A g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} - 4 C_A d g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} - \\ & 4 C_A g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} + 5 C_A d g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} (-\bar{p}^2)^{d/2} + \\ & C_A d^2 g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} + 2 C_A g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} - \\ & 3 C_A d g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} - \\ & C_A d^2 g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} - 6 C_A g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} + \\ & 5 C_A d g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} - 4 C_A g^2 \pi^{3/2} \xi^2 \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} + \\ & C_A d g^2 \pi^{3/2} \xi^2 \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} - 16 C_A g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} + \\ & 4 C_A d g^2 \pi^{3/2} \xi \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} + 4 C_A g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} - \\ & 5 C_A d g^2 \pi^{3/2} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^2 (-\bar{p}^2)^{d/2} + 2^{2d} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) g^{\mu\nu} \bar{p}^6 - \\ & 2^{2d} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} \bar{p}^4 + 2^{2d} \pi^{d/2} \xi \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\mu} \bar{p}^4 \delta^{a1 a2} \end{aligned}$$

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

In[106]:= **FullSimplify[%]**

$$\text{Out[106]} = -\frac{1}{2\bar{p}^8} i \delta^{a1 a2} \left(-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} 4^{-d} \pi^{\frac{3-d}{2}} g^2 C_A (d^2 (\xi - 1) (\xi + 7) - d \xi (5 \xi + 26) + 19 d + 4 \xi (\xi + 5) - 16) \right. \\ \left. \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (-\bar{p}^2)^{d/2} (\bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} - \bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu}) + 2 \bar{p}^6 g^{\mu\nu\nu\mu} + 2 (\xi - 1) \bar{p}^4 \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} \right)$$

In[107]:= **Normal[Series[% /. d -> 4 - 2 eps, {eps, 0, -1}]]**

$$\text{Out[107]} = -((i g^2 (12 \xi - 52) C_A \delta^{a1 a2} (\bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} - \bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu})) / (384 \pi^2 \text{eps} \bar{p}^4))$$

In[108]:= **Prop1order = FullSimplify[%]**

$$\text{Out[108]} = (i g^2 (3 \xi - 13) C_A \delta^{a1 a2} (\bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu} - \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu})) / (96 \pi^2 \text{eps} \bar{p}^4)$$

2° Order Formalism Propagator

In[109]:= **(** Compatibility with 2° order formalism - Self-Energy given by Peskin Book p. 526 **)**

In[110]:= **(I (sp[p, p] dt[m1, m2] - fv[p, m1] fv[p, m2]) dk[a, b] ((-g^2 / (4 Pi)^2)) (- (13 / 6 - xi / 2) C Gamma[2 - d / 2]))**

$$\text{Out[110]} = -\frac{1}{16 \pi^2} i C g^2 \left(\frac{\xi}{2} - \frac{13}{6} \right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \delta^{ab} (\bar{p}^2 g^{m1 m2} - \bar{p}^{m1} \bar{p}^{m2})$$

In[111]:= **SUNSimplify[Contract[DAA[p, a1, mu, a2, nu, xi] + DAA[p, a1, mu, a, m1, xi] (I (sp[p, p] dt[m1, m2] - fv[p, m1] fv[p, m2]) dk[a, b] ((-g^2 / (4 Pi)^2)) (- (13 / 6 - xi / 2) C Gamma[2 - d / 2])) DAA[p, b, m2, a2, nu, xi]]]**

$$\text{Out[111]} = \frac{1}{96 \pi^2 \bar{p}^4} i \delta^{a1 a2} \left(-3 C g^2 \xi \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} + 3 C g^2 \xi \bar{p}^2 \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu\nu\mu} + 13 C g^2 \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} - \right. \\ \left. 13 C g^2 \bar{p}^2 \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu\nu\mu} - 96 \pi^2 \bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu} - 96 \pi^2 \xi \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} + 96 \pi^2 \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} \right)$$

In[112]:= **FullSimplify[%]**

$$\text{Out[112]} = -\frac{1}{96 \bar{p}^4} i \delta^{a1 a2} \left(\frac{1}{\pi^2} C g^2 (3 \xi - 13) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) (\bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} - \bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu}) + 96 \bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu} + 96 (\xi - 1) \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} \right)$$

In[113]:= **Normal[Series[% /. d -> 4 - 2 eps, {eps, 0, -1}]]**

$$\text{Out[113]} = -((i C g^2 (3 \xi - 13) \delta^{a1 a2} (\bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} - \bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu})) / (96 \pi^2 \text{eps} \bar{p}^4))$$

In[114]:= **Prop2order = FullSimplify[%]**

$$\text{Out[114]} = (i C g^2 (3 \xi - 13) \delta^{a1 a2} (\bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu} - \bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu})) / (96 \pi^2 \text{eps} \bar{p}^4)$$

Comparison

In[115]:= **FullSimplify[Prop1order - Prop2order]**

$$\text{Out[115]} = (i g^2 (3 \xi - 13) (C - C_A) \delta^{a1 a2} (\bar{p}^{\mu\nu} \bar{p}^{\nu\mu} - \bar{p}^2 g^{\mu\nu\nu\mu})) / (96 \pi^2 \text{eps} \bar{p}^4)$$

In[116]:= **(** Here 'C' is equal to 'C_A', so the result is 0 **)**

Referências Bibliográficas

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schröder, *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. Westview Press, 1995.
- [2] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- [3] C.-N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance,” *Phys. Rev.*, vol. 96, pp. 191–195, 1954.
- [4] I. Khriplovich, “Green’s functions in theories with non-abelian gauge group,” *Sov.J.Nucl.Phys.*, vol. 10, pp. 235–242, 1969.
- [5] R. P. Feynman, “Quantum theory of gravitation,” *Acta Phys. Polon.*, vol. 24, pp. 697–722, 1963.
- [6] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. III. applications of the covariant theory,” *Phys. Rev.*, vol. 162, pp. 1239–1256, 1967.
- [7] L. D. Faddeev and V. N. Popov, “Feynman diagrams for the Yang-Mills field,” *Phys. Lett.*, vol. B25, pp. 29–30, 1967.
- [8] S. Mandelstam, “Feynman rules for electromagnetic and Yang-Mills fields from the gauge independent field theoretic formalism,” *Phys. Rev.*, vol. 175, pp. 1580–1623, 1968.
- [9] G. ’t Hooft, “Perturbative quantum gravity,” pp. 249–269, 2002. Prepared for International School of Subnuclear Physics: 40th Course: From Quarks and Gluons to Quantum Gravity, Erice, Sicily, Italy, 29 Aug - 7 Sep 2002 (this paper can be downloaded from <http://www.phys.uu.nl/~thooft/lectures/erice02.pdf>).

- [10] D. G. C. McKeon, “The first order formalism for Yang-Mills theory,” *Can. J. Phys.*, vol. 72, pp. 601–607, 1994.
- [11] D. McKeon, “Quantization of the first-order two-dimensional Einstein-Hilbert action,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 23, pp. 3037–3042, 2006.
- [12] F. T. Brandt and D. G. C. McKeon, “Radiative Corrections and the Palatini Action,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 10, p. 105037, 2016.
- [13] F. T. Brandt and D. G. C. McKeon, “Perturbative Calculations with the First Order Form of Gauge Theories,” *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 10, p. 105006, 2015.
- [14] G. ’t Hooft and M. J. G. Veltman, “Regularization and renormalization of gauge fields,” *Nucl. Phys.*, vol. B44, pp. 189–213, 1972.
- [15] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, “Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter,” *Nuovo Cim.*, vol. B12, pp. 20–25, 1972.
- [16] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*. Singapore: World Scientific, 1987.
- [17] M. Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems*. Addison-Wesley, 1964.
- [18] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1995.
- [19] M. E. Peskin and D. V. Schröder, *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. Boulder: Westview Press, 1995.
- [20] H. Kleinert and V.-S. Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 Theories*. World Scientific Pub Co Inc, 2001.
- [21] K. G. Wilson and M. E. Fisher, “Critical exponents in 3.99 dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 240–243, Jan 1972.
- [22] K. G. Wilson and J. Kogut, “The renormalization group and the ϵ expansion,” *Physics Reports*, vol. 12, no. 2, pp. 75 – 199, 1974.

- [23] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, “Feyn calc - computer-algebraic calculation of feynman amplitudes,” *Computer Physics Communications*, vol. 64, no. 3, pp. 345 – 359, 1991.
- [24] J. Frenkel and J. C. Taylor, “BRST renormalization of the first order Yang–Mills theory,” *Annals Phys.*, vol. 387, pp. 1–13, 2017.
- [25] F. T. Brandt, J. Frenkel, and D. G. C. McKeon, “Renormalization of a diagonal formulation of first order yang-mills theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 025024, Jul 2018.
- [26] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1994.
- [27] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer, 1996.
- [28] F. T. C. Brandt, *Tópicos sobre campos de gauge a temperatura finita*. 2004.