UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Perturbação de Spin Zero no Espaço-Tempo de Kerr-Randall-Sundrum

Jeferson de Oliveira¹

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IF-USP)

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IF-USP)

Prof. Dr. Frank Michael Forger (IME-USP)

São Paulo

2006

¹jeferson@fma.if.usp.br

RESUMO

Esta dissertação visa realizar um estudo acerca dos modelos de mundo brana no contexto proposto por Randall e Sundrum. O trabalho focaliza as perturbações de spin-0 no espaço-tempo de Kerr tomado como um mundo brana 4-dimensional.

Para isso apresentamos os principais aspectos da Relatividade Geral de Einstein, bem como perturbações em métricas que descrevem buracos negros. Fizemos uma revisão dos modelos de Randall-Sundrum, suas motivações e tentativas de descrever buracos negros na brana. Por fim a perturbação escalar da corda negra em rotação (Kerr-Randall-Sundrum) e o fenômeno de super-radiação são analisados.

ABSTRACT

This dissertation aims at studying the braneworld models in the context proposed by Randall and Sundrum. The focus is on the spin-0 perturbations in the Kerr space-time as a 4-dimensional braneworld.

The work deals the main aspects of Einstein General Relativity as well as perturbations of black holes metrics. We also review the Randall-Sundrum models and their motivations and attempts to describe braneworld black holes. In the end the Kerr-Randall-Sundrum black string scalar perturbation and superradiance are obtained.

Aos meus amores Sirlei, Ariana e João.

AGRADECIMENTOS

Foram inúmeras as pessoas que contribuíram, seja de forma consciente ou não, para que eu pudesse terminar este trabalho.

Ao meu orientador Prof. Elcio Abdalla, agradeço pelas conversas esclarecedoras e pela orientação ao longo desses dois últimos anos.

À minha grande amiga Michele, pela ajuda inicial quando em São Paulo cheguei.

Ao *povo* do departamento de Física Matemática: Marcelo, Júlia, à minha inestimável amiga Arlene pelas nossas extasiadas conversas, Karlúcio, Carlos Molina e Roman Kono-
plya pelas boas discussões de trabalho. Agradeço em especial todos os que passaram pela sala 319 nesses dois últimos anos, Flávio Henrique, Carlos Eduardo Pellicer, Rodrigo Dal Bosco Fontana e Alan Pavan, que sem a amizade e paciência nos dias de mau humor, que não foram poucos, o caminho para a conclusão deste trabalho teria sido muito mais difícil. Às meninas da secretaria do departamento: Amélia, Simone e Bety, que sem a ajuda, o trabalho na física matemática não seria tão bom. Aos Professores: Josif Frenkel, Raul Abramo e Coracci Pereira Malta, que contribuíram para minha formação durante minha passagem pelo Instituto de Física.

Agradecimentos especiais aos amigos do Crusp: Michela, João Basso, sobretudo aqueles que passaram pelo 210C: Admar Mendes e Leandro Ibiapina.

Finalmente, dedico este trabalho àquelas pessoas que nunca desistiram de mim, nas situações mais críticas, onde parecia que nada parecia dar certo: aos meus pais João, Sirlei, minha irmã Ariana e meus tios Mathias e Cloé o meu sincero muito obrigado.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	10
2	Relatividade Geral e Buracos Negros	12
2.1	O papel da gravidade	12
2.2	Variedade Espaço-Temporal e Equações de Einstein	14
2.3	Buracos Negros	32
2.4	Propriedades gerais dos buracos negros	34
2.5	A solução de Schwarzschild	38
2.6	A solução de Kerr	43
2.7	Perturbações de Buracos Negros	47
2.8	Modos Quasi-Normais(MQN)	55
2.9	O espalhamento super-radiante	61
3	Será o nosso Universo uma brana?	63
3.1	Motivações para os modelos de mundo brana	63
3.2	Solução de Randall-Sundrum	68
3.3	Geração da hierarquia	72
3.4	Formalismo Shiromizu-Maeda-Sasaki	77
3.5	Campos escalares no Bulk	88
3.6	É possível modelar buracos negros no mundo brana?	90
4	Espaço-tempo de Kerr-Randall-Sundrum	93

<i>SUMÁRIO</i>	7
4.1 Buracos Negros em rotação no mundo brana	93
4.2 Perturbação escalar em Kerr-RS	95
5 Conclusão	105

Lista de Figuras

2.1	Espaço-tempo de Minkowski compactificado.	37
2.2	Diagrama de Penrose-Carter do espaço-tempo de Minkowski.	38
2.3	Extensão de Kruskal da geometria de Schwarzschild.	43
2.4	Diagrama de Penrose-Carter da solução de Kruskal-Szekeres.	44
2.5	Estrutura conforme da métrica de Kerr ao longo do eixo de simetria para $a < m$	48
2.6	Potencial escalar efetivo com ponto máximo $r = 3M$ para $r_* = 0$	52
2.7	Perfil da evolução temporal de uma perturbação inicial da métrica de Schwarzschild em escala	

Lista de Tabelas

2.1	Primeiras frequências quasi-normais do buraco negro de Schwarzschild. . . .	60
4.1	Primeiros dez modos massivos Q_n	101

Capítulo 1

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein é a teoria física mais bem sucedida em explicar a estrutura do nosso Universo em larga escala. Em síntese, ela relaciona o conteúdo de energia dos campos com a configuração da curvatura do espaço-tempo onde são definidos esses campos. A equação que rege essa dinâmica é a equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

sendo o conteúdo de energia representado pelo no lado direito da equação e o espaço-tempo correspondente no lado esquerdo. A descrição do Universo em larga escala é apenas uma das consequências dessas equações. Temos ainda, o desvio de raios de luz em regiões com campo gravitacional, a previsão da existência de ondas gravitacionais e de buracos negros. Neste texto, abordaremos as idéias fundamentais da Relatividade Geral e as soluções tipo buraco negro.

O tema central desta dissertação são os modelos de mundo brana propostos por Randall e Sundrum. Estes modelos são considerados como um teste para idéias fenomenológicas da teoria de supercordas, sobretudo a conjectura da teoria M, que considera as diversas teorias de cordas como diferentes limites de uma única teoria, batizada de teoria M. No trabalhos de Randall e Sundrum [30] [31], o intuito foi de resolver o problema da hierarquia entre a escala eletrofraca e a gravitacional. Para isso, consideraram o nosso Universo como uma hipersuperfície 4-dimensional, chamada de 3-brana, mergulhada num espaço-

tempo Anti-De Sitter 5-dimensional (AdS_5), chamado de bulk. A métrica considerada é não fatorável e depende da coordenada da dimensão extra y por uma função que varia rapidamente. Tal métrica é dada por

$$ds^2 = e^{\pm 2\kappa|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (1.2)$$

sendo $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski.

A escala $\kappa = 1/l$, onde l é a escala de curvatura do bulk, é determinada pela constante cosmológica 5-dimensional e pela massa de Planck 5-dimensional M_5 ,

$$\kappa = \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6}}, \quad (1.3)$$

onde observamos que, necessariamente para este cenário, a constante cosmológica 5-dimensional deve ser negativa.

Outro ponto desta dissertação, apresentado no último capítulo, é a análise das perturbações de campos não massivos de spin zero na métrica (1.2), com $\eta_{\mu\nu}$ substituída pela métrica de Kerr. Este sistema descreve uma corda negra 5-dimensional que intercepta a 3-brana no espaço-tempo de Kerr 4-dimensional. Mostraremos que estas perturbações tornam este cenário instável.

Capítulo 2

Relatividade Geral e Buracos Negros

Neste capítulo apresentaremos um resumo dos principais pontos da teoria física que melhor descreve a gravidade, que é a Relatividade Geral de Einstein. Pretendemos estudar as principais características dessa teoria, bem como as principais soluções tipo buraco negro previstas.

2.1 O papel da gravidade

Até o presente momento, podemos descrever todos os sistemas físicos através de quatro interações fundamentais. São elas, em ordem de magnitude, a força nuclear forte, a força nuclear fraca, a força eletromagnética e a gravidade. A unificação da interação eletromagnética e da força nuclear fraca foi operada pela teoria de Salam-Weinberg. A unificação das interações restantes, num cenário coerente, talvez possa ser realizada pela teoria de supercordas, num futuro não muito distante. Quanto à magnitude das interações, a força gravitacional é de longe a mais fraca, tanto que a razão entre a interação gravitacional e a força elétrica entre dois elétrons é da ordem de 10^{-40} . Apesar disso, tal interação é dominante sobre as outras no regime de larga escala espacial e é a força que afeta todas as partículas da mesma forma. Esta universalidade da interação gravitacional foi pela primeira vez estudada por Galileo, que descobriu que quaisquer dois corpos em queda

livre têm a mesma velocidade. Esta descoberta levou Einstein a formular o princípio da equivalência, que é a base da Relatividade Geral. Existem duas formulações de tal princípio, a forma fraca apenas identifica a massa inercial com a massa gravitacional para partículas teste. Este princípio é verificado experimentalmente com grande precisão. A versão mais restritiva deste princípio, segundo Weinberg [1], diz que em qualquer ponto do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher localmente um sistema de coordenadas que pode ser chamado de inercial, tal que se considerarmos uma região suficientemente pequena em torno dos pontos em questão, as leis da natureza terão a mesma forma que as observadas em um sistema de coordenadas cartesiano em repouso na ausência de gravitação.

Também é experimentalmente verificado que raios de luz são defletidos por campos gravitacionais, sendo que nenhum sinal pode viajar com velocidade maior que a velocidade de luz no vácuo, então a gravidade determina a estrutura causal do espaço-tempo. A interação gravitacional determina que eventos do espaço-tempo podem ser causalmente relacionados. Estas propriedades da gravidade criam situações de grande interesse, como quando houver uma grande quantidade de matéria numa pequena região. O primeiro estudo acerca de tal situação, no contexto da gravitação newtoniana, foi realizado por Laplace, cujo trabalho traduzido se encontra na referência [2]. Neste trabalho Laplace mostra que para um corpo com um raio 250 vezes maior que o do Sol com a mesma densidade, o campo gravitacional produzido seria tão forte que a velocidade de escape na superfície desse corpo seria maior que a velocidade da luz. Portanto esta ficaria aprisionada na superfície do corpo. Tal sistema foi batizado de buraco negro por John A. Wheeler na década de 1960, mas no contexto da Relatividade Geral. Discutiremos os buracos negros na próxima seção.

É importante, antes de prosseguirmos, definirmos alguns conceitos da geometria diferencial, que serão de grande valia na formulação das quantidades físicas segundo a visão da Relatividade Geral, já que esta abdica do conceito de força gravitacional, substituindo-a por uma configuração da curvatura do espaço-tempo. Seguiremos basicamente os textos

clássicos sobre este tema [2] [3] [4].

2.2 Variedade Espaço-Temporal e Equações de Einstein

Uma variedade $\mathcal{M}$ corresponde à idéia intuitiva que temos da continuidade do espaço-tempo. Esta continuidade é bem estabelecida, segundo experimentos de espalhamento de píons, até distâncias da ordem de $10^{-15}cm$. Apenas a noção de variedade não é suficiente para descrever o conjunto de todos os eventos que forma o espaço-tempo, ela será um dos ingredientes fundamentais do modelo. A outra quantidade fundamental é o objeto matemático que usamos para medir distâncias entre pontos de $\mathcal{M}$, o tensor de ordem 2 não degenerado simétrico chamado de tensor métrico $\mathbf{g}$. Então ao par $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ chamamos de espaço-tempo.

Formalmente, uma variedade é um espaço que possui a propriedade de não distinguir sistemas de coordenadas, permitir a definição da diferenciação e localmente ser similar ao espaço euclidiano. Esta variedade deve ser do tipo Hausdorff, isto é, satisfazer o axioma da separação de Hausdorff: se p, q são dois pontos distintos quaisquer em $\mathcal{M}$, então existem dois abertos disjuntos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ em $\mathcal{M}$, tal que $p \in \mathcal{U}$, $q \in \mathcal{V}$. Além disso, $\mathcal{M}$ deve ser orientável, o que significa que existe apenas um parâmetro de tempo. Deve ser paracompacta, o que implica que a intersecção de dois abertos da variedade tenha tamanho finito.

Dadas estas características, podemos construir de maneira natural campos de funções, campos vetoriais e campos tensoriais. Uma função f em $\mathcal{M}$ é definida como um mapa de $\mathcal{M}$ para a reta real $\mathbb{R}$. Campos tensoriais são equivalentes a um tensor definido em cada ponto da variedade. Uma forma de obter estas quantidades é partir do conceito de vetor em cada ponto de $\mathcal{M}$.

Dado o parâmetro t , podemos definir uma curva diferenciável $\lambda(t)$ como um mapa de um intervalo pertencente a reta real $\mathbb{R}$ em $\mathcal{M}$. Identificamos o mapa que leva uma

função f da curva $\lambda(t_0)$ no número $(\partial f / \partial t)_\lambda|_{t_0}$ ao objeto chamado vetor contravariante.

De forma explícita,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\lambda(t)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(\lambda(t + \epsilon)) - f(\lambda(t))] \quad , \quad (2.1)$$

é a derivada direcional. Esta expressão representa a derivada da função f na direção da curva $\lambda(t)$ em relação ao parâmetro t . Podemos mostrar que o conjunto dos vetores contravariantes formam um espaço vetorial no ponto p de $\mathcal{M}$ chamado de espaço tangente, denotado por T_p . Para realizar isto, consideremos um sistema de coordenadas locais no aberto que define a vizinhança do ponto p de $\mathcal{M}$, dado pelo conjunto $(x^1, \dots, x^n)$, então

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\lambda(t)} = \frac{d}{dt} x^i(\lambda(t))|_{t_0} \frac{\partial f}{\partial x^i}|_{\lambda(t_0)} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad .$$

Podemos tomar como base para escrever qualquer vetor deste espaço tangente as derivadas em relação as coordenadas locais no ponto p . Então T_p representa um espaço vetorial n -dimensional. Um vetor $V \in T_p$ pode ser tomado como uma flecha apontando na direção da curva $\lambda(t)$.

Usando o espaço tangente T_p podemos construir o espaço cotangente ou dual T_p^* onde podemos definir os vetores covariantes. Tais vetores são funções lineares reais dos vetores de T_p , chamadas de 1-formas, denotadas por $\mathbf{w}$. Se $\mathbf{X}$ é um vetor em p , o número em que $\mathbf{w}$ mapeia $\mathbf{X}$ é escrito como $\langle \mathbf{w}, \mathbf{X} \rangle$, cuja linearidade de $\mathbf{w}$ implica em, sendo α e β números reais,

$$\langle \mathbf{w}, \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{w}, \mathbf{X} \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \mathbf{Y} \rangle \quad . \quad (2.2)$$

Dada uma base e_i em p , podemos definir um conjunto de n 1-formas e^i , desde que e^i mapeie qualquer vetor $\mathbf{X}$ no número X^i , que é a i -ésima componente do vetor $\mathbf{X}$ em relação a base e_i . Se escolhermos então

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i \quad , \quad (2.3)$$

e se definirmos a combinação linear de 1-formas pela regra

$$\langle \alpha \omega + \beta \eta, \mathbf{X} \rangle = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \beta \langle \eta, \mathbf{X} \rangle \quad , \quad (2.4)$$

teremos o conjunto e^i como a base das 1-formas, isto é, qualquer 1-forma ω em p pode ser expressa como

$$\omega = \langle \omega, e_i \rangle e^i \quad .$$

Do conjunto de todas as 1-formas definidas no ponto p de $\mathcal{M}$, formamos o espaço vetorial n -dimensional chamado de espaço cotangente T_p^* ou também chamado de espaço dual a T_p . A base e_a das 1-formas é a base dual a base e^b dos vetores contravariantes. Usando estas construções podemos definir o diferencial df de uma função f como 1-forma, que para qualquer vetor $\mathbf{X}$, obedece à relação

$$\langle df, \mathbf{X} \rangle = Xf \quad .$$

Se usarmos um sistema de coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$ da mesma forma que o fizemos definindo derivada direcional, o conjunto de diferenciais $(dx^1, \dots, dx^n)$ no ponto p forma uma base de 1-formas, dual a base $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ dos vetores em p , sendo

$$\langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad ,$$

como relação direta, obtemos a diferencial df , em termos da base, como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad .$$

Partindo do espaço vetorial T_p dos vetores contravariantes em p e do seu espaço dual definido pelo espaço T_p^* das 1-formas ou vetores covariantes também em p , podemos formar o produto cartesiano Π_r^s de r espaços T_p^* com s espaços tangentes T_p como

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_p^* \times T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{r \text{ termos}} \times \underbrace{T_p \times T_p \times \dots \times T_p}_{s \text{ termos}} \quad . \quad (2.5)$$

O produto cartesiano pode ser colocado como um conjunto ordenado de vetores contravariantes e covariantes $(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s)$.

Definimos como tensor do tipo (r, s) em um ponto p de $\mathcal{M}$, a função de Π_r^s que é linear em cada um dos seus argumentos. O número que o tensor $\mathbf{T}$ do tipo (r, s) mapeia o elemento $(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s)$ de Π_r^s é $T(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s)$.

Da linearidade de $\mathbf{T}$, para todo $\alpha, \beta \in R^1$ e todo $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p$, temos

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_s) &= \alpha T(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{X}, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_s) \\ &+ \beta T(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_s). \end{aligned}$$

A operação chamada de produto tensorial $\otimes$ definida como

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes \dots \otimes T_p}_{r \text{ termos}} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_{s \text{ termos}},$$

forma uma álgebra cujos elementos são todos espaços tensoriais definidos em um ponto $p \in \mathbf{M}$.

Outras operações algébricas podem ser construídas de forma natural, tal como a adição de tensores ($\mathbf{T} + \mathbf{T}'$)

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} + \mathbf{T}')(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) &= T(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \\ &+ T'(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \quad , \quad (2.6) \end{aligned}$$

a multiplicação de tensores por um escalar $\alpha \in R^1$

$$(\alpha T)(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \quad . \quad (2.7)$$

Com as operações (2.6) e (2.7), o produto tensorial $T_s^r(p)$ forma um espaço vetorial de dimensão n^{r+s} sobre a reta real R^1 .

Se $\{e_a\}$, $\{e^a\}$ são bases de T_p e T_p^* , respectivamente, então os produtos

$$\{e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_s}\} \quad ,$$

formam uma base para o espaço do produto tensorial $T_s^r(p)$. Então qualquer tensor $\mathbf{T} \in T_s^r(p)$ pode ser expresso em termos dessa base como

$$\mathbf{T} = T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_s} \quad ,$$

onde $\{T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}\}$ são as componentes de $\mathbf{T}$ com respeito as bases $\{e_a\}$, $\{e^a\}$.

Outra importante operação algébrica usando tensores, é a contração de índices. Esta operação é independente da base usada. Dado um tensor $\mathbf{T}$ do tipo (r, s) com componentes

$\{T_{ef\dots g}^{ab\dots d}\}$, a contação no primeiro índice contravariante e no primeiro índice covariante é definida como o tensor $B_1^1(\mathbf{T})$ do tipo $(r-1, s-1)$, cujas componentes com relação as bases $\{e_a\}$, $\{e^a\}$, são $T_{af\dots g}^{ab\dots d}$, então

$$B_1^1(\mathbf{T}) = T_{af\dots g}^{ab\dots d} e_b \otimes \dots \otimes e_d \otimes e^f \otimes \dots \otimes e^g \quad .$$

Denotamos a parte simétrica das componentes do tensor $\mathbf{T}$ por

$$T^{(ab)} = \frac{1}{2!} \{T^{ab} + T^{ba}\} \quad ,$$

e a parte anti-simétrica

$$T^{[ab]} = \frac{1}{2!} \{T^{ab} - T^{ba}\} \quad . \quad (2.8)$$

Um subconjunto do espaço tensorial, é aquele formado pelos tensores do tipo $(0, q)$, totalmente antisimétricos nas posições do índice q (com $q \leq n$). Estes tensores são chamados de q -formas. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são p - e q -formas respectivamente, podemos construir, a partir destes, a $(p+q)$ -forma $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, onde $\wedge$ representa a contraparte anti-simétrica do produto tensorial $\otimes$. O tensor $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ é do tipo $(0, p+q)$ com componentes dadas por

$$(A \wedge B)_{a\dots bc\dots f} = A_{[a\dots b} B_{c\dots f]} \quad .$$

Esta expressão implica que

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (-1)^{pq} A_{[a\dots b} B_{c\dots f]} \quad . \quad (2.9)$$

O conjunto de todas p - e q -formas munidas da operação (2.9) constituem uma álgebra de Grassmann para as formas.

Até aqui definimos as mais importantes operações algébricas dos espaços tensoriais. Para que possamos usar tais objetos para construir quantidades dinâmicas precisamos estudar operadores diferenciais na variedade. Neste trabalho não pretendemos esgotar este assunto, para mais detalhes ver [5]. Estudaremos, três operadores de particular interesse, dois deles, a derivada exterior e a derivada de Lie, só necessitam para serem definidos da própria variedade $\mathcal{M}$. O terceiro operador, a derivada covariante, precisa de uma estrutura adicional que é a conexão ∇ de $\mathcal{M}$.

O operador d que determina a operação chamada de derivada exterior, mapeia as r -formas de maneira linear em $(r + 1)$ - formas. Se operarmos com d na r -forma

$$\mathbf{A} = A_{ab\dots d} dx^a \wedge dx^b \wedge \dots \wedge dx^d,$$

obtemos

$$d\mathbf{A} = dA_{ab\dots d} \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge \dots \wedge dx^d,$$

que é uma $(r + 1)$ -forma independente do sistema de coordenadas $\{x^a\}$ usado. Da definição do produto $\wedge$, temos que

$$d(d\mathbf{A}) = 0, \quad (2.10)$$

para toda r -forma $\mathbf{A}$.

O segundo tipo de diferenciação que é definido naturalmente da estrutura da variedade é a derivada de Lie. Antes de passar a esta operação, devemos definir o parênteses de Lie.

Dados dois vetores, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, seu parênteses de Lie, $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, é definido pela ação deste numa 0-forma da seguinte maneira

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f).$$

Sendo f e g 0-formas, α e β números reais, o parênteses de Lie de dois vetores do espaço tangente aplicado numa combinação das 0-formas, tem como resultado também vetores deste espaço, isto é,

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\alpha f + \beta g) = \alpha[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + \beta[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g, \quad (2.11)$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) = g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g \quad (2.12)$$

A relação (2.11) estabelece o parênteses de Lie como um operador linear, e a relação (2.12) como uma operação de diferenciação. Podemos expressar esta operação em forma de componentes, já que o parênteses de Lie de vetores no espaço tangente também é um vetor no espaço tangente. Aplicando no sistema de coordenadas local $\{x^a\}$, obtemos

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]x^a = X^b Y^a_{,b} - Y^b X^a_{,b}.$$

Consideremos o parênteses de Lie $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ como uma operação de diferenciação, chamada de derivada de Lie do vetor $\mathbf{Y}$ na direção de $\mathbf{X}$, denotada por

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = -\mathfrak{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}. \quad (2.13)$$

A derivada de Lie $\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ de um tensor $\mathbf{T}$ do tipo (r, s) em relação a $\mathbf{X}$ é um tensor também do tipo (r, s) . Esta diferenciação, além de preservar o tipo dos tensores, também preserva a contração e obedece à regra de Leibniz do cálculo

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{S}) \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T} \quad (2.14)$$

As componentes da derivada de Lie das 1-formas ω pode ser obtida contraindo a relação (2.14), obtendo

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}} \langle \omega, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\omega, \mathbf{Y} \rangle + \langle \omega, \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \rangle. \quad (2.15)$$

Escolhendo $\mathbf{Y}$ com a base vetorial $e_a = \partial/\partial x^a$, temos em forma de componentes,

$$(\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\omega)_a = \left(\frac{\partial \omega_a}{\partial x^b} X^b \right) + \omega_b \left(\frac{\partial X^b}{\partial x^a} \right),$$

já que

$$(\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\partial/\partial x^a)^b = -\frac{\partial X^b}{\partial x^a}.$$

Seguindo a mesma receita, podemos obter as componentes da derivada de Lie de qualquer tensor $\mathbf{T}$ do tipo (r, s) usando a regra de Leibniz em

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T} \otimes e^a \otimes \cdots \otimes e^d \otimes e_e \otimes \cdots \otimes e_g),$$

e então contraindo em todas posições, encontramos

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})^{ab\cdots d}_{ef\cdots g} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} T^{ab\cdots d}_{ef\cdots g} \right) X^i - T^{ib\cdots d}_{ef\cdots g} \frac{\partial X^a}{\partial x^i} - \cdots \\ &+ T^{ab\cdots d}_{if\cdots g} \frac{\partial X^i}{\partial x^e} + \cdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

A derivada de Lie comuta com o operador d da derivada exterior, isto é

$$d(\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\omega) = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}(d\omega) \quad .$$

Podemos interpretar a derivada de Lie $\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}|_p$ de um tensor $\mathbf{T}$ do tipo (r, s) no ponto p de $\mathcal{M}$ não apenas como a derivada de $\mathbf{T}$ na direção do campo vetorial $\mathbf{X}$ no ponto p , mas também como a derivada direcional ao longo da *vizinhança* do ponto p .

Os dois operadores diferenciais que definimos pela estrutura da variedade, a derivada exterior e a derivada de Lie, são limitados para servirem de generalização para o conceito de derivada parcial. O operador d age apenas sobre formas, enquanto que derivadas parciais ordinárias são derivadas direcionais que dependem apenas da direção no ponto em questão, diferentemente da derivada de Lie, que também depende da vizinhança do ponto considerado.

A generalização da derivada parcial ordinária é obtida pela adição de uma nova estrutura em $\mathcal{M}$, chamada de conexão e denotada por ∇ . Esta estrutura nos permite definir a operação de derivação covariante.

A conexão ∇ no ponto p de $\mathcal{M}$ é uma receita que associa cada vetor $\mathbf{X}$ em p a um operador diferencial $\nabla_{\mathbf{X}}$. Este operador mapeia todo vetor $\mathbf{Y}$ no tensor $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, isto é, para quaisquer funções f, g e vetores $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ temos

$$\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \quad . \quad (2.17)$$

apresenta a propriedade de linearidade

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\alpha\mathbf{Y} + \beta\mathbf{Z}) = \alpha\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \beta\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} \quad ,$$

e

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = X(f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \quad .$$

Destas propriedades definimos $\nabla\mathbf{Y}$ como a derivada covariante de $\mathbf{Y}$, como um tensor do tipo $(1, 1)$, que quando contraído com $\mathbf{X}$ produz o vetor $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$. De (2.17) temos

$$\nabla(f\mathbf{Y}) = df \otimes \mathbf{Y} + f\nabla\mathbf{Y}. \quad (2.18)$$

As componentes de $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ são obtidas se escolhemos como base as bases duais e_a e e^a , logo

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}(Y^a e_a) = (\mathbf{X}Y^a) e_a + Y^a \nabla_{\mathbf{X}}e_a \quad , \quad (2.19)$$

Se escolhermos a base e_a como um tensor do tipo $(1, 0)$, a expressão acima pode ser escrita na forma

$$\nabla_{\mathbf{X}} e_a = \omega_a^b(\mathbf{X}) e_b \quad , \quad (2.20)$$

sendo ω_a^b 1-formas. Com isso (2.19) fica como

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = (\mathbf{X}Y^a) e_a + Y^a \omega_a^b(\mathbf{X}) e_b \quad , \quad (2.21)$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} &= (\mathbf{X}Y^a) e_a + Y^a X^c \nabla_{e_c} e_a \\ &= (\mathbf{X}Y^a) e_a + Y^a X^c \omega_{ac}^b e_b \quad , \end{aligned} \quad (2.22)$$

sendo $\omega_a^b e_c = \omega_{ac}^b$ os coeficientes de e^c quando expandimos a 1-forma ω_b^c na base $\{e^c\}$.

Então temos que a conexão ∇ no ponto p de $\mathcal{M}$ é determinada por estes coeficientes ω_{ab}^c .

Reescrevendo (2.21) como

$$\nabla_X \mathbf{Y} = [\mathbf{X}Y^a + \omega_c^a(\mathbf{X})Y^c] e_a \quad ,$$

concluimos que

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})^a = \mathbf{X}Y^a + \omega_c^a(\mathbf{X})Y^c \quad .$$

Tomando novamente a base local $(\partial/\partial x^c)$, denotando ω_{ab}^c por Γ_{ab}^c e o sinal de ponto-e-vírgula como a operação de derivada covariante, temos a forma padrão desta operação

$$Y^a_{;c} = Y^a_{,c} + Y^b \Gamma_{bc}^a \quad . \quad (2.23)$$

Generalizando para qualquer tensor $\mathbf{X}$ do tipo (r, s) , temos

$$\begin{aligned} X^{ab\dots d}_{ef\dots g;h} &= X^{ab\dots d}_{ef\dots g,h} + \Gamma_{hj}^a X^{jb\dots d}_{ef\dots g} + \dots \\ &- \Gamma_{he}^j X^{ab\dots}_{jf\dots g} - \dots \quad . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dada a conexão ∇ , para quaisquer vetores $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, podemos definir um tensor $\mathbf{T}$ do tipo $(1, 2)$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad ,$$

chamado de *torção*, cuja expressão na base coordenada é

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \quad .$$

Em nosso estudo apenas usaremos conexões livres de torção, isto é, $\mathbf{T} = 0$, o que implica na simetria das componentes da conexão em relação aos índices covariantes, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Uma conexão é livre de torção se e apenas se $f_{;ij} = f_{;ji}$ para todas funções f .

Neste cenário de torção zero, podemos relacionar a derivada covariante com a derivada de Lie e como a derivada exterior de um tensor $\mathbf{T}$ do tipo (r, s) . Estas relações, com respeito a base coordenada são, respectivamente

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})^{ab\dots d}_{ef\dots g} &= T^{ab\dots d}_{ef\dots g;h}X^h - T^{jb\dots d}_{ef\dots g}X^a_{;j} \\ &- \dots + T^{AB\dots d}_{if\dots g}X^j_{;e} + \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$(dA)_{a\dots cd} = (-1)^p A_{[a\dots c;d]} \quad . \quad (2.26)$$

Uma aplicação da derivada covariante é a obtenção das expressões para o *transporte paralelo* de um tensor $\mathbf{X}$ e da equação para as *curvas geodésicas*, que são as equações de movimento de uma partícula em queda livre no espaço-tempo determinado pela variedade $\mathcal{M}$.

Seja o tensor $\mathbf{X}$ definido ao longo da curva $\lambda(t)$ de $\mathcal{M}$, então podemos definir a derivada covariante de $\mathbf{X}$ ao longo desta curva $\lambda(t)$, como $\nabla_{\partial/\partial t}\bar{X}$, sendo $\bar{X}$ a extensão de $\mathbf{X}$ nos abertos dos pontos que formam a curva $\lambda(t)$, isto é na vizinhança de $\lambda(t)$. Um caso particular ocorre quando consideramos tal derivada covariante independente desta extensão $\bar{X}$, denotamos esta operação por $DX^a/\partial t$, que é um tensor definido em toda curva $\lambda(t)$. Em termos das componentes, se $\mathbf{Y}$ é um vetor definido em T_p ao longo de $\lambda(t)$, temos

$$DX^a/\partial t = \frac{\partial X^a}{\partial t} + \Gamma^a_{bc}X^c \frac{dx^b}{dt} \quad .$$

Escolhendo como coordenadas para $\lambda(t)$ o conjunto $\{x^a(t)\}$ e $\mathbf{X} = dx^a/dt$ temos

$$DX^a/\partial t = \frac{\partial X^a}{\partial t} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} \quad . \quad (2.27)$$

Diz-se que um tensor $\mathbf{X}$ foi transportado paralelamente ao longo de $\lambda(t)$ se

$$D\mathbf{X}/\partial t = 0 \quad .$$

Se a curva $\lambda(t)$ começa no ponto p e termina no ponto q , e se a conexão ∇ é pelo menos diferenciável uma vez, então pela teoria das equações diferenciais deve-se obter um único tensor no ponto q através do transporte paralelo de qualquer dado tensor em p ao longo da curva $\lambda(t)$. O transporte paralelo é um mapa linear que leva os elementos de $T_s^r(p)$ em $T_s^r(q)$ preservando o produto tensorial e a operação de contração.

Uma curva λ de $\mathcal{M}$ é uma curva geodésica, se o resultado do transporte paralelo de um vetor tangente a ela for um múltiplo deste mesmo vetor. Sendo $dx^j(\lambda(t))/dt$ um vetor tangente a $\lambda(t)$, então seu transporte paralelo, segundo a condição geodésica, fica

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{lk}^j \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \phi(t) \frac{dx^j}{dt} \quad , \quad (2.28)$$

sendo $\phi(t)$ uma função bem definida de t . Em vez de t , se usarmos o parâmetro

$$s = \int^t dt'' \exp \left[\int^{t''} dt' \phi(t') \right] \quad ,$$

a equação (2.28) fica

$$\frac{d^2 x^j}{ds^2} + \Gamma_{lk}^j \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad , \quad (2.29)$$

sendo s chamado de parâmetro afim. A única liberdade na escolha de s é sua origem e sua escala.

Ao tensor que mede a não comutatividade dos operadores da segunda derivada covariante (aplicação da derivada covariante duas vezes), chamamos de *tensor de Riemann* ou *tensor de curvatura*. Se consideramos um dado ponto p da curva fechada γ como o ponto inicial do transporte paralelo do vetor $\mathbf{X}_p$, então o resultado disto será o vetor $\mathbf{X}'_p$, que em geral é diferente de $\mathbf{X}_p$, além disso, se considerarmos outra curva fechada γ' passando por p e realizarmos a mesma operação, o vetor obtido $\mathbf{X}''_p$ será diferente de $\mathbf{X}_p$ e $\mathbf{X}'_p$. Esta não integrabilidade do transporte paralelo é a manifestação da não comutatividade

da segunda derivada covariante. Dada um a conexão ∇ , os vetores $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, definimos o tensor de Riemann como

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{Z}} \quad . \quad (2.30)$$

O tensor $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$ é linear em relação a $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, ou seja, depende apenas do valor destes vetores no ponto p formando um tensor do tipo $(3, 1)$. Reescrevendo (2.30) em componentes, obtemos

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd}X^cY^dZ^b &= (Z^a{}_{;d}Y^d)_{;c}X^c - (Z^a{}_{;d}X^d)_{;c}Y^c \\ &- Z^a{}_{;d}(Y^a{}_{;d}X^c - X^d{}_{;c}Y^c) \\ &= (Z^a{}_{;dc} - Z^a{}_{;cd})X^cY^d \quad . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Já que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são vetores arbitrários, podemos expressar a não comutatividade da segunda derivada covariante como

$$R^a{}_{bcd}Z^b = Z^a{}_{;dc} - Z^a{}_{;cd} \quad .$$

Com relação às bases duais $\{e_a\}$, $\{e^a\}$, as componentes do tensor de Riemann são

$$R^a{}_{bcd} = \langle e^a, \mathbf{R}(e_c, e_d)e_b \rangle \quad .$$

Escolhendo as bases como bases coordenadas, obtemos a expressão para o tensor de Riemann em termos das componentes coordenadas da conexão ∇

$$R^a{}_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a{}_{db}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a{}_{cb}}{\partial x^d} + \Gamma^a{}_{cf}\Gamma^f{}_{db} - \Gamma^a{}_{df}\Gamma^f{}_{cb} \quad . \quad (2.32)$$

Destas expressões seguem as propriedades de simetria do tensor de Riemann

$$R^a{}_{b(cd)} = 0,$$

$$R^a{}_{[bcd]} = 0 \quad .$$

Além disto, a derivada covariante primeira satisfaz as chamadas *identidades de Bianchi*,

$$R^a{}_{b[cd;e]} = 0 \quad .$$

O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são obtidos por contrações do tensor de Riemann. Esses são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} R_{ab} &= g^{cd} R_{acbd} \quad , \\ R &= g^{ab} R_{ab} \quad . \end{aligned}$$

O transporte paralelo de um vetor em uma curva fechada arbitrária é localmente integrável apenas se $R^a_{bcd} = 0$ para todos os pontos da variedade $\mathcal{M}$. Neste caso, dizemos que a conexão é plana.

Para construirmos consistentemente o espaço-tempo lorentziano, que é o objeto de estudo da Relatividade Geral, precisamos de mais um objeto geométrico, o tensor simétrico não singular do tipo $(0, 2)$ chamado de *tensor métrico* ou simplesmente *métrica* e denotado por $\mathbf{g}$. As componentes g_{ab} da métrica $\mathbf{g}$ são dados simplesmente pelo produto escalar dos elementos da base vetorial $\{e_a\}$. Se usarmos a base coordenada $\{\partial/\partial x^a\}$ teremos

$$\mathbf{g} = g_{ab} dx^a \otimes dx^b \quad . \quad (2.33)$$

Os comprimentos definidos pela métrica estão em T_p e estão relacionados com os comprimentos obtidos pela estrutura de $\mathcal{M}$. Considerando dois pontos p e q da curva $\gamma(t)$ na qual o vetor tangente $\partial/\partial t$ é tal que $g(\partial/\partial t, \partial/\partial t)$ tem o mesmo sinal em todos os pontos de $\gamma(t)$, o comprimento do caminho entre esses dois pontos é dado pela quantidade

$$L = \int_q^p \sqrt{(|g(\partial/\partial t, \partial/\partial t)|)} dt \quad . \quad (2.34)$$

Como é usual, podemos expressar (2.33) e (2.34) como um deslocamento infinitesimal

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad ,$$

obtido pela mudança infinitesimal $x^i \rightarrow x^i + dx^i$. Se para todo vetor $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p$ tivermos $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ em p , então a métrica é dita não degenerada em p . Em termos das componentes de $\mathbf{g}$, isto quer dizer que a matriz (g_{ab}) é não singular. Trataremos sempre de métricas que não são degeneradas, isto é, definiremos de maneira única o tensor simétrico

do tipo $(2, 0)$ cujas componentes g^{ab} em relação as bases duais $\{e_a\}$ e $\{e^a\}$ são dadas pela relação

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a \quad , \quad (2.35)$$

ou seja, a matriz (g^{ab}) é a matriz inversa de (g_{ab}) . Se admitirmos sempre isso, g^{ab} e g_{ab} definem um isomorfismo entre qualquer tensor covariante e qualquer tensor contravariante, de maneira mais simples, g^{ab} e g_{ab} são usadas para levantar e abaixar índices das quantidades geométricas definidas na mesma base. Se T_{ab} são as componentes do tensor $\mathbf{T}$ do tipo $(0, 2)$, então podemos associar a elas unicamente as componentes tensoriais $T^a_b = g^{ac}T_{cb}$, $T^b_a = g^{bc}T_{ac}$, $T^{ab} = g^{ac}g^{bd}T_{cd}$.

O número de autovalores positivos da matriz (g_{ab}) é chamado de *assinatura* da métrica. Apenas se a métrica $\mathbf{g}$ for não degenerada e contínua, o que tomaremos como verdade, a assinatura será constante em toda variedade $\mathcal{M}$. Por uma certa escolha da base vetorial $\{e_a\}$, as componentes da métrica em qualquer ponto p podem ser colocadas na forma

$$g_{ab} = \text{diag}(\underbrace{+1, +1, \dots, +1}_{\frac{1}{2}(n+s)\text{ termos}}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\frac{1}{2}(n-s)\text{ termos}}) \quad ,$$

na qual a assinatura de $\mathbf{g}$ e o número de dimensões de $\mathcal{M}$ são dados por s e n respectivamente.

Uma métrica é chamada de *positiva definida* se o número de dimensões da variedade for igual à assinatura de $\mathbf{g}$, ou seja,

$$g_{ab} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_{n \text{ termos}}) \quad .$$

A métrica positiva definida é propriamente o objeto que dá a *disposição* dos eventos no espaço, no sentido topológico da expressão.

A métrica cuja assinatura é $(n - 2)$ é chamada de *métrica lorentziana*, cuja forma, por uma certa escolha da base vetorial, é

$$g_{ab} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_{(n-1)\text{ termos}}, -1) \quad .$$

Se tomarmos um espaço-tempo dado por $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, sendo $\mathbf{g}$ é uma métrica lorentziana, então vetores em p podem ser classificados como tipo tempo, tipo luz, ou do tipo espaço, se $g(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ é negativo, nulo ou positivo, respectivamente. Os vetores tipo luz formam um cone duplo em T_p que separa os vetores do tipo espaço dos do tipo tempo.

Introduzimos separadamente em $\mathcal{M}$ o tensor métrico e a conexão. Apesar disso, é possível obtermos a conexão a partir de uma dada métrica, já que existe uma única conexão livre de torção em $\mathcal{M}$ dada pela condição de que a derivada covariante da métrica seja zero. Aplicando isto, obtemos as relações de Christoffel, que associam as componentes coordenadas de ∇ com as de $\mathbf{g}$, ou seja,

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{da} [g_{cd,b} + g_{bd,c} - g_{cb,d}] \quad .$$

Usando as propriedades de simetria do tensor de Riemann, e se o número de dimensões for $n = 3$, o tensor de Ricci determina completamente a curvatura de $\mathcal{M}$, mas se $n > 3$ aparecem outros termos de curvatura, aos quais o tensor de Ricci não descreve. Usamos o tensor de Weyl C_{abcd} para descrever estes termos adicionais. As componentes do tensor de Weyl, são relacionadas com o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura por

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{2}{n-2} [g_{a[d} R_{c]b} + g_{b[c} R_{d]a}] + \frac{2}{(n-1)(n-2)} g_{a[c} g_{d]b} R \quad ,$$

e como consequência das simetrias de R_{abcd} ,

$$C^a_{bad} = 0 \quad .$$

Até aqui construímos o espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e os objetos geométricos de interesse, tal como as componentes da curvatura representadas pelo tensor de Riemann, e a condição para o espaço-tempo ser plano, que descreve a relatividade restrita.

A resposta dada pela geometria do espaço-tempo à presença de um campo externo é modificar sua curvatura de acordo com a densidade de energia armazenada no campo. Tal situação dinâmica é descrita pelas equações de Einstein, que é um dos postulados fundamentais da Relatividade Geral. Podemos obter estas equações, supondo uma ação

física que seja uma função escalar das componentes da métrica e suas derivadas. Neste caso, g_{ab} são as únicas variáveis dinâmicas do sistema. Outra exigência para esta ação é que no limite não-relativístico, a teoria produzida recaia na teoria de Newton da gravitação. Para isso acontecer, na ação devem aparecer apenas derivadas até segunda ordem no tensor métrico de forma linear.

A ação mais simples que obedece a estas exigências é a ação de Einstein-Hilbert, dada em unidades relativísticas ($c = G = \hbar = 1$) por

$$S_g = -\frac{1}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad , \quad (2.36)$$

sendo R o escalar de curvatura e g o determinante da métrica. Aplicando o princípio de mínima ação $\delta S_g = 0$, sendo a variação em relação as quantidades dinâmicas consideradas, que neste caso é o tensor métrico. Então a variação de (2.36) tem como resultado

$$\begin{aligned} \delta S_g &= -\frac{1}{16\pi} \int \delta (g^{ab} R_{ab} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \left(R_{ab} \sqrt{-g} \delta g^{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} \sqrt{-g} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g^{ab} R_{ab} g_{cd} \delta g^{cd} \sqrt{-g} \right) . \end{aligned}$$

A variação δR_{ab} será feita na relação das componentes do tensor de Ricci com as da conexão ∇ na base coordenada, que é obtida através da contação de (2.32). Tal variação fica

$$\delta R_{ab} = (\delta \Gamma^c_{ab})_{;c} - (\delta \Gamma^c_{ac})_{;b} + \delta \Gamma^d_{ab} \Gamma^c_{dc} - \Gamma^d_{ab} \delta \Gamma^c_{dc} - \delta \Gamma^d_{ac} \Gamma^c_{db} - \Gamma^d_{ac} \delta \Gamma^c_{db} \quad . \quad (2.37)$$

A variação das componentes da conexão dá como resultado

$$\delta \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left((\delta g_{db})_{;c} + (\delta g_{dc})_{;b} - (\delta g_{bc})_{;d} \right) \quad .$$

Substituindo este resultado em (2.37) chegamos à identidade de Palatini

$$\delta R_{ab} = (\delta \Gamma^c_{ab})_{;c} - (\delta \Gamma^c_{ac})_{;b} \quad . \quad (2.38)$$

A identidade de Palatini após a integração não dá nenhuma contribuição a δS_g , entã a variação da ação assume a forma

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right] \delta g^{ab} \quad . \quad (2.39)$$

Definindo $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ como tensor de Einstein, e aplicando $\delta S_g = 0$ para qualquer δg^{ab} , obtemos as equações de Einstein para o espaço-tempo no vácuo

$$G_{ab} = 0 \quad .$$

Esta equação não só tem como solução a geometria para o espaço-tempo exterior à distribuições de energia e matéria, mas também nos informa que a geometria no caso de ausência quaisquer distribuições de matéria não é apenas a solução de Minkowski. Isto é a manifestação da não-linearidade da interação gravitacional. O próprio campo gravitacional, pelo seu conteúdo de energia, produz mais curvatura, o que se convêm chamar de retroação. Estas soluções descrevem campos gravitacionais auto-sustentáveis.

Agora, se ao invés de termos apenas S_g , adicionarmos a esta, a ação S_m , que representa outros campos (campo escalar, eletromagnético, fermiônico, etc.) presentes na geometria, teremos

$$S = S_g + S_m \quad .$$

Aplicando o princípio de mínima ação $\delta S = 0$, obtemos as equações de Einstein para qualquer espaço-tempo, que tomaremos como o postulado 1 da teoria.

Postulado 1 : *Equações de Einstein*

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.40)$$

sendo T_{ab} o tensor energia-momento. Neste objeto está representado o conteúdo de energia de uma certa região do espaço-tempo. Dado isto, em princípio resolvendo (2.40), teremos as componentes do tensor de Einstein, ou seja, teremos o perfil da curvatura espaço-temporal gerada por T_{ab} .

As equações de Einstein são dez equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem acopladas das componentes do tensor métrico. Pelas identidades de Bianchi $G_{ab;b} = 0$ e tendo a divergência $T_{ab;b}$ nula, o número de equações se torna seis.

Uma implicação das equações de Einstein é o aparecimento de contribuições não-locais de distribuições de energia na definição local de curvatura. Pela equação (2.36), temos que o tensor de Riemann é dado localmente pela composição do tensor de Weyl mais o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Se considerarmos uma situação de vácuo, por (2.40) $R_{ab} = 0$, então a curvatura terá apenas a contribuição do tensor de Weyl. Esta contribuição será não nula desde que haja uma distribuição não homogênea de energia no espaço-tempo. Tomemos o divergente de C^{ab}_{cd}

$$\begin{aligned} C^{ab}_{cd;b} &= \frac{1}{2} \left[\left(R^a_c - \frac{1}{6} R \delta^a_c \right)_{;d} - \left(R^a_d - \frac{1}{6} R \delta^a_d \right)_{;c} \right] \\ &= 8\pi \left[T^a_{c;d} - T^a_{d;c} + \frac{1}{3} (\delta^a_d T_{,c} - \delta^a_c T_{,d}) \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

sendo T o traço do tensor energia-momento. Desta equação, observamos que as fontes do tensor de Weyl são os gradientes do tensor energia-momento. Tal equação pode ser interpretada como análoga as equações de Maxwell, tomado T como fonte.

Como foi dito as equações de Einstein são apenas um dos postulados fundamentais da Relatividade Geral. Existem outros dois, cujos expedientes são sobre a causalidade local do espaço-tempo e a conservação local do tensor energia-momento.

Postulado 2 *Causalidade local*

As equações que governam a dinâmica dos campos de matéria no espaço-tempo, devem ser tais que, se $\mathcal{U}$ for a vizinhança que contém os pontos p e q , então um sinal pode ser enviado em $\mathcal{U}$ entre os pontos p e q se e apenas se for possível ligar estes pontos por uma curva totalmente em $\mathcal{U}$, cujo vetor tangente é sempre diferente de zero, do tipo-tempo ou do tipo luz, isto é, devemos ter uma curva ligando estes pontos que não seja do tipo-espaço. Se $\{x^a\}$ forma um conjunto de coordenadas em $\mathcal{U}$ sobre o ponto p , então pontos que podem ser ligados a p através de curvas não tipo-espaço, são aqueles cujas

coordenadas satisfazem

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \leq 0 \quad , \quad (2.42)$$

isto é, que estejam dentro do cone duplo em T_p formado pelos vetores tipo-luz no ponto p . Empiricamente, a causalidade local é observada pelo fato de que nenhum sinal se deslocando mais rápido que a luz, que viaja em geodésicas tipo-luz, ter sido observado. Estas relações de causalidade podem ser usadas para determinar a estrutura topológica de $\mathcal{M}$.

Postulado 3 *Conservação local da energia e momento*

As equações da dinâmica dos campos de matéria são tais que existe um tensor simétrico chamado tensor energia-momento, que depende dos campos, de suas derivadas covariantes e métrica, e que obedeça as propriedades:

(i) T_{ab} se anula num aberto $\mathcal{U}$ se e apenas se os campos de matéria também se anularem. Isto expressa o fato de que todos campos têm energia e portanto são afetados gravitacionalmente

(ii) T_{ab} obedece à equação

$$T^{ab};b = 0 \quad .$$

Estes três postulados, em síntese, formam a base da Teoria da Relatividade Geral.

2.3 Buracos Negros

Buracos negros são uma das mais interessantes previsões da Relatividade Geral. Estes objetos produzem no espaço-tempo uma curvatura extrema, de tal modo que nem sinais luminosos, uma vez dentro do horizonte de eventos do buraco negro, podem escapar. A prova da existência de buracos negros e a análise de suas propriedades, são de grande interesse não só para a astrofísica, que especula que grandes emissões de raios-X nos centros galáticos sejam devido a presença de buracos negros supermassivos, mas também para

testar nossa noção de espaço-tempo em regiões cujo campo gravitacional é tão intenso. Um buraco negro pode ser formado quando um corpo de massa M contrai seu tamanho num raio menor que o *raio gravitacional* $2GM/c^2$. A velocidade de escape nesta situação é igual a velocidade da luz, isto é, nenhum campo ou partícula pode escapar do buraco negro. Esta conclusão vem de maneira natural da relatividade geral, pois a interação gravitacional tem a característica de ser universal, já que a carga gravitacional, ou massa, tem valor proporcional a energia total do sistema. Apesar das equações de Einstein, que descrevem os buracos negros, serem não lineares, buracos negros logo após sua formação se tornam estacionários e os únicos parâmetros que os descrevem são sua carga, massa e momento angular, que são seus únicos *cabelos*, segundo o *teorema no hair*. A superfície do buraco negro é chamada de horizonte de eventos. Esta é uma superfície tipo-luz, que determina, juntamente com a singularidade espaço-temporal além dessa superfície, uma estrutura causal não trivial no espaço-tempo.

Possíveis aspectos observacionais de buracos negros podem ser obtidos pelo estudo do movimento de partículas e propagação de campos em espaços-tempos de buracos negros estacionários. Este problema é predominantemente matemático e envolve a integração das equações da geodésica, e a obtenção da solução da equação de onda nesses espaços.

A constatação teórica de que buracos negros irradiam, contrariando a definição clássica dada pela relatividade geral desses objetos, foi feita por Hawking [6]. Este resultado é devido à instabilidade do vácuo gerada pela curvatura do buraco negro, que se torna fonte de radiação quântica. A propriedade mais interessante dessa radiação é que o seu espectro é precisamente térmico.

A colisão de um buraco negro com uma estrela de nêutrons ou a coalescência de um par de buracos negros num sistema binário, forma uma fonte de radiação gravitacional de grande intensidade, que poderiam ser medidos por experimentos de interferometria de ondas gravitacionais. Para que se efetue tal medição, deve-se saber com detalhes o campo gravitacional do buraco negro durante a colisão. Tal solução é possível através de simulações numéricas dessas colisões.

Buracos negros funcionam como laboratórios teóricos para testar idéias sobre como seria a teoria unificada das quatro interações fundamentais. A teoria de supercordas, que parece ser a mais promissora teoria para a unificação, explica a gravidade como uma coleção de estados da excitação de uma corda fundamental fechada. Esta teoria recupera a Relatividade Geral no limite de campo fraco.

As equações de Einstein 4-dimensionais sem constante cosmológica, possuem quatro famílias de soluções exatas que descrevem buracos negros. A solução de Schwarzschild descreve um buraco negro esfericamente simétrico de massa M . A solução de Reissner-Nordström, generaliza a solução de Schwarzschild para o caso em que além da massa, o buraco negro contém carga elétrica Q . O buraco negro de Kerr é a solução que descreve um buraco negro de massa M e momento angular total J . A solução tipo buraco negro mais geral é a solução de Kerr-Newman, que depende dos três parâmetros do teorema no hair, massa M , carga elétrica Q e momento angular J .

2.4 Propriedades gerais dos buracos negros

O nosso objetivo nesta seção é apresentar de forma geral propriedades inerentes a todas as soluções das equações de Einstein que descrevem buracos negros sem constante cosmológica. Para que possamos definir um buraco negro em termos do par $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, precisamos de conceitos acerca da estrutura causal de $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, tais como orientabilidade no tempo, curvas causais, condições de causalidade e o diagrama de Penrose-Carter.

Um espaço-tempo é tido como *temporalmente orientado* se em todos seus pontos pudermos separar continuamente os vetores não tipo-espaço em duas classes distintas: os direcionados ao futuro (vetor futuro) e os direcionados ao passado (vetor passado), do contrário teremos espaços-tempo não temporalmente orientados. Estas situações não permitem o aparecimento de singularidades, seja em buracos negros seja no universo primordial, logo não é razoável trabalhar com tais cenários, além de que, há a termodinâmica local que nos garante a existência de apenas um parâmetro de tempo.

Seja então um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ temporalmente orientável, com dois conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{U}$. O *futuro cronológico* $I^+(\mathcal{S}, \mathcal{U})$ de $\mathcal{S}$ relativo ao conjunto $\mathcal{U}$ pode ser definido como o conjunto de todos os pontos em $\mathcal{U}$ que podem ser alcançados por pontos em $\mathcal{S}$ através de curvas futuras tipo-tempo (o vetor tangente é do tipo futuro). Da mesma forma, podemos definir o *passado cronológico* $I^-(\mathcal{S}, \mathcal{U})$ de $\mathcal{S}$ relativo a $\mathcal{U}$.

O *futuro causal* $J^+(\mathcal{S}, \mathcal{U})$ de $\mathcal{S}$ relativo a $\mathcal{U}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathcal{U}$ que podem relacionar-se causalmente com pontos em $\mathcal{S}$. De maneira mais rigorosa, definimos o futuro causal como a união do conjunto formado pela intersecção $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ e o conjunto formado por todos os pontos de $\mathcal{U}$ que podem alcançados de $\mathcal{S}$ por curvas futuras tipo-tempo ou tipo-luz.

As condições de caualidade se referem a exigência de que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ não possua curvas fechada tipo-tempo. A existência de tais estruturas criaria diversos paradoxos, como, por exemplo, se um foguete viajasse numa curva desse tipo ele poderia chegar antes de sua partida. Mais precisamente, damos o nome de *condição cronológica* a esta hipótese. Uma das proposições de Hawking acerca disso, nos informa que variedades que satisfaçam à condição cronológica não devem ser compactas, pois se forem compactas, o conjunto de pontos que violam a condição cronológica é não vazio. A prova disso está em [2].

A idéia principal do *diagrama de Penrose-Carter* é estudar a estrutura causal dos pontos no infinito de $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ iniciando com a métrica não física $\bar{g}_{ab}$, que se relaciona com a métrica física g_{ab} por uma transformação conforme, isto é,

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \quad ,$$

sendo Ω o fator conforme. Uma escolha apropriada deste fator conforme, nos possibilita “trazer” os pontos no infinito para uma posição finita, e então estudar sua estrutura causal. Para trazer estes pontos do infinito usamos transformações de coordenadas que envolvam funções do tipo $\tan^{-1}(x)$, que mapeiem intervalos infinitos $[-\infty, +\infty]$ em intervalos finitos, tais como $[-\pi/2, +\pi/2]$.

A receita básica consiste em escrever a métrica usando coordenadas nulas ($v = t + r, w = t - r$), após isso, realizar a transformação $(v, w) \rightarrow (p = \tan^{-1} v, q = \tan^{-1} w)$ e

então identificar o fator conforme e extrair a métrica física, que representa a estrutura dos pontos no infinito. As informações da estrutura causal da métrica física colocadas em um diagrama $t \times x$ produz o diagrama de Penrose-Carter, que é o diagrama do espaço-tempo conformalmente compactificado.

Este processo aplicado na métrica de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad ,$$

produz o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sec^2(p) \sec^2(q) [4dpdq - \sin^2(p-q) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad ,$$

sendo o fator conforme dado por

$$\Omega = \frac{1}{4} \sec^2(p) \sec^2(q) \quad ,$$

e a métrica conforme $\bar{g}_{ab}$ por

$$d\bar{s}^2 = dt'^2 - dr'^2 - \sin^2 r' (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad ,$$

no qual $t' = p + q$ e $r' = p - q$, com domínios $-\pi < t' + r' < \pi$, $-\pi < t' - r' < \pi$ com a condição $r' \leq 0$. O elemento de linha conforme expressa a geometria dos pontos do infinito numa região finita. No caso do espaço-tempo de Minkowski, obtemos o universo estático de Einstein como métrica conforme, cuja topologia é cilíndrica. Esta representação do espaço-tempo de Minkowski como uma região finita do universo estático de Einstein, é chamada de compactificação conforme, que pode ser representada no diagrama (2.1) retirado de [2].

A fronteira dessa região representa a estrutura conforme do infinito para o espaço-tempo de Minkowski. Em termos das coordenadas p e q , esta fronteira consiste nas superfícies nulas $p = \pi/2$ denotada por $\mathcal{T}^+$ e $q = -\pi/2$ chamada $\mathcal{T}^-$, além dos pontos $(p = \pi/2, q = \pi/2)$, $(p = \pi/2, q = -\pi/2)$ e $(p = -\pi/2, q = -\pi/2)$ denotados respectivamente por i^+ , i^0 e i^- .

Figura 2.1: Espaço-tempo de Minkowski compactificado.

As geodésicas tipo-tempo têm origem no ponto i^- e terminam em i^+ . Da mesma forma, geodésicas tipo-luz se originam na superfície $\mathcal{T}^-$ e terminam em $\mathcal{T}^+$, enquanto que as geodésicas tipo-espaço iniciam e terminam em i^0 . A representação das curvas geodésicas nestes diagramas também aplica-se às curvas não geodésicas.

Os pontos i^+ e i^- representam o infinito futuro tipo-tempo e infinito passado tipo-tempo, $\mathcal{T}^+$ e $\mathcal{T}^-$ representam o infinito futuro tipo-luz e infinito passado tipo-luz.

O *diagrama de Penrose-Carter* é o diagrama $t \times r$ de um espaço-tempo conformalmente compactificado. Para o espaço-tempo de Minkowski o diagrama de Penrose-Carter está na figura (2.2) onde temos as curvas r constante, que correspondem as histórias de esferas bidimensionais com raio constante, e as fatias tipo-tempo correspondente a t constante. Geodésicas radiais nulas são representadas por retas p constante e q constante fazendo ângulos de 45° e -45° respectivamente.

Tendo a prescrição do diagrama de Penrose-Carter, passamos então à análise das

Figura 2.2: Diagrama de Penrose-Carter do espaço-tempo de Minkowski.

soluções tipo buraco negro de Schwarzschild e Kerr.

2.5 A solução de Schwarzschild

A solução das equações de Einstein que descreve um espaço-tempo vazio na vizinhança de um corpo massivo esfericamente simétrico, é a solução de Schwarzschild. Esta solução é uma boa aproximação para estudarmos o Sistema Solar, bem como qualquer sistema gravitacional que não exiba consideráveis desvios da simetria esférica. Esta solução é dada pela métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.43)$$

para $r > 2m$, sendo m uma constante de integração advinda da resolução das equações de Einstein. O valor desta constante é determinado quando consideramos o limite newtoniano da Relatividade Geral. Sendo Φ o potencial gravitacional newtoniano, então neste limite,

em unidades não-relativísticas,

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2G_4 M}{c^2 r} \quad ,$$

no qual c é a velocidade da luz, G_4 a constante da gravitação 4-dimensional e M a massa que dá origem ao potencial gravitacional Φ . Comparando (2.44) com a solução de Schwarzschild, determinamos a constante de integração m como

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad .$$

Vemos que a solução de Schwarzschild pode ser interpretada como a descrição para o campo gravitacional de uma partícula de massa m situada na origem. Esta solução é estática, no sentido de que $\partial/\partial t$ é um campo vetorial de Killing. As componentes da métrica são funções que não dependem do tempo, e não apresentam termos de rotação, pois não há termos mistos como $dt dr$. A simetria esférica de (2.43) aparece no fato de que g_{00} e g_{01} dependerem apenas da coordenada radial e não das coordenadas angulares θ e ϕ . Pode-se mostrar, conforme teorema de Birkhoff, que qualquer solução das equações de Einstein para sistemas esfericamente simétricos é localmente isométrica à solução de Schwarzschild, ou seja, este teorema garante que esta solução é única.

Em geral a métrica (2.43) descreve a geometria externa de uma estrela de raio r_0 , isto é, para $r > r_0$. A métrica para $r < r_0$ depende do tensor energia-momento T_{ab} no interior estelar. No caso de um completo colapso gravitacional, quando toda massa do corpo colapsa no ponto $r = 0$, consideramos a solução de Schwarzschild como descrição para todos valores de r . Tal solução apresenta singularidades nos pontos $r = 0$ e $r = 2m$, ou seja, no caso do colapso gravitacional, a métrica de Schwarzschild, descreve dois domínios da variedade $\mathcal{M}$, $0 < r < 2m$ ou $2m < r < \infty$.

Tomando $\mathcal{M}$ com domínio $2m < r < \infty$, é necessário determinar se $\mathcal{M}$ é extensível, isto é, descobrir se existe uma variedade $\mathcal{M}'$ com uma métrica $\mathbf{g}'$ formando o espaço-tempo $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ tal que $\mathcal{M}$ é um subespaço de $\mathcal{M}'$ e que $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$ em $\mathcal{M}$. Neste domínio isto é possível, já que o escalar de curvatura em $r = 2m$ é uma função contínua, o que indica que a singularidade em $r = 2m$ é apenas uma patologia do sistema de coordenadas escolhido,

ou seja, deve existir um outro conjunto de coordenadas que mapeie este domínio de $\mathcal{M}$ numa imagem sem singularidades. Para efetuar a extensão maximal de $\mathcal{M}$, devemos ter todas curvas geodésicas extendidas em ambas as direções com relação ao parâmetro afim, ou devem ter terminações em uma singularidade verdadeira, ou seja, uma singularidade que não pode ser removida por nenhuma mudança de coordenadas.

Se tomarmos agora, $\mathcal{M}$ com domínio $0 < r < 2m$ e calcularmos o escalar de curvatura, obtido das componentes do tensor de Riemman,

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48m^2}{r^6} \quad , \quad (2.44)$$

concluiremos que para $r \rightarrow 0$, $R^{abcd}R_{abcd} \rightarrow \infty$, o que indica a existência de uma singularidade real em $r = 0$, tornando impossível a extensão de $\mathcal{M}$ além de $r = 0$. O máximo que podemos fazer é estender $\mathcal{M}$ além de $r = 2m$ até $r = \infty$ através do procedimento de Kruskal-Szekeres. Este procedimento consiste em reescrever (2.43) em termos das coordenadas nulas avançadas e retardadas (v, w) . Descreveremos $\mathcal{M}$ com o sistema de coordenadas (v, w, θ, ϕ) .

Usando a condição pra uma curva geodésica ser uma geodésica tipo-luz ou nula

$$g_{ab}X^aX^b = 0 \quad ,$$

as geodésicas radiais nulas do espaço-tempo descrito por (2.43) são dadas por

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}\right)^2 \quad ,$$

definindo a coordenada tartaruga r_* de Wheeler, neste caso, como

$$r_* \equiv \int \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad . \quad (2.45)$$

Então, as geodésicas radiais nulas ficam

$$\begin{aligned} t &= r_* + \text{const} \quad , \\ t &= -r_* + \text{const} \quad . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Definimos as coordenadas nulas (v, w) por

$$\begin{aligned} v &= t - r_* \quad , \\ w &= t + r_* \quad , \end{aligned} \tag{2.47}$$

que consequentemente leva à definição de r em termos implícitos de v e w , já que $r_* = (w - v)/2$.

Usando estas definições, a solução (2.43) pode ser escrita como

$$ds^2 = -\frac{2me^{-r/2m}}{r}e^{(w-v)/4m}dvdw + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{2.48}$$

implicando em que a singularidade $r \rightarrow 2m$ corresponde a $v \rightarrow \infty$ e $w \rightarrow -\infty$.

Definindo novas coordenadas V e W como

$$\begin{aligned} V &= -e^{-v/4m} \quad , \\ W &= e^{w/4m} \quad , \end{aligned} \tag{2.49}$$

a métrica (2.48) fica

$$ds^2 = -\frac{32m^3e^{-r/2m}}{r}dVdW + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad . \tag{2.50}$$

Nesta forma, observamos que não há singularidade em $r = 2m$, que corresponde a $V = W = 0$. Para obtemos a forma de Kruskal-Szekeres da métrica de Schwarzschild fazemos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} T &= \frac{(V + W)}{2} \quad , \\ X &= \frac{(W - V)}{2} \quad , \end{aligned} \tag{2.51}$$

em (2.50), obtendo assim

$$ds^2 = \frac{32m^3e^{-r/2m}}{r}(-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{2.52}$$

A transformação de coordenadas entre as coordenadas iniciais (t, r) e (T, X) é dada por

$$\begin{aligned} X^2 - T^2 &= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)e^{r/2m} \quad , \\ t &= 4m \tanh^{-1}\left(\frac{T}{X}\right) \quad . \end{aligned} \tag{2.53}$$

A condição de que $r > 0$ especifica os valores permitidos para as coordenadas (T, X) . Estes valores são os que obedecem a relação $X^2 - T^2 > -1$. Esta estrutura da extensão de Kruskal-Szekeres da geometria de Schwarzschild é dada pelo diagrama (2.3), chamado de diagrama de Kruskal-Szekeres. Em tal diagrama, as geodésicas radiais nulas são retas que fazem ângulos de 45° com os eixos coordenados. Vemos também que a singularidade verdadeira em $r = 0$ corresponde aos valores $X^2 = \pm\sqrt{(T^2 - 1)}$ e que não há singularidade quando $r = 2m$. A região I é correspondente a solução original de Schwarzschild em $r > 2m$, que representa o campo gravitacional externo ao corpo colapsante. Esta região apresenta um comportamento assintoticamente plano, da mesma maneira que a região I' . Um fóton que parte da região I pode ir para o infinito espacial ou atravessar a fronteira $X = T$ entrando na região II , mas não ir para região I' , o que mostra que as regiões I e I' são causalmente desconectadas. Não há possibilidade de um observador numa geodésica radial nula na região II , escapar da singularidade em $X = \sqrt{(T^2 - 1)}$, essa região é chamada de *buraco negro* e a região II' , que possui as mesmas propriedades que II quando invertemos o tempo desta, de *buraco branco*.

Para obtermos o diagrama de Penrose-Carter para a extensão de Kruskal-Szekeres da geometria de Schwarzschild se definirmos novas coordenadas nulas por

$$\begin{aligned} v' &= \tan^{-1} \left(\frac{V}{\sqrt{2m}} \right) \quad , \\ w' &= \tan^{-1} \left(\frac{W}{\sqrt{2m}} \right) \quad , \end{aligned} \tag{2.54}$$

com domínios $-\pi/2 < v' < \pi/2$, $-\pi/2 < w' < \pi/2$ e $-\pi < v' + w' < \pi$. Este diagrama é dado na figura (2.4).

Observamos neste diagrama que cada uma das regiões assintoticamente planas I e I' possuem infinito futuro, infinito passado e infinito tipo-luz, e que diferentemente do espaço-tempo de Minkowski, a métrica conforme é contínua mas não diferenciável em i^0 .

Na extensão de Kruskal-Szekeres da métrica de Schwarzschild, a superfície nula $r = 2m$ é uma superfície onde cada ponto representa uma esfera bidimensional de área $16\pi m^2$. Se observarmos a métrica (2.12), vemos que g_{00} é sempre maior que zero quando tomamos

Figura 2.3: Extensão de Kruskal da geometria de Schwarzschild.

$r > 2m$, mas muda de sinal quando atravessamos o horizonte de eventos $r = 2m$, isto é, $g_{00} < 0$ quando $r < 2m$. Isto implica que as coordenadas t e r invertem seus papéis, tornando o espaço-tempo para $r < 2m$ não estático. O horizonte de eventos torna-se o limite estático da solução de Schwarzschild.

2.6 A solução de Kerr

Em Relatividade Geral, o campo gravitacional de um objeto em rotação e estacionário é descrito pelo espaço-tempo de Kerr [7]. Nas chamadas coordenadas de Boyer-Lindquist, esta solução é dada pela métrica

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4amr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\theta \\
 & + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad , \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Figura 2.4: Diagrama de Penrose-Carter da solução de Kruskal-Szekeres.

sendo $\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2$. A quantidade m representa a massa gravitacional do corpo girante, e sendo J o seu momento angular total, então $a = J/m$ representa o momento angular por unidade de massa. Os coeficientes da métrica de Kerr são independentes de t e ϕ , o que implica que esta solução é estacionária e axialmente simétrica, que são as únicas simetrias contínuas desta solução. Por simetria axial entendemos que se existe um eixo definido (neste caso o eixo z em coordenadas cartesianas, ou $\theta = 0$), tal que a solução é invariante por rotações em torno deste eixo, então a solução é axialmente simétrica. Existem duas simetrias discretas para este espaço-tempo, a reflexão em t e ϕ , que não ocorrem separadamente mas em conjunto, isto é, esta solução admite apenas a inversão simultânea

$$t \rightarrow -t, \quad \phi \rightarrow -\phi \quad .$$

Este tipo de simetria representa o fato do espaço-tempo de Kerr ser a solução para um corpo em rotação, já que se invertemos o spin e tomarmos o tempo negativo é equivalente a direção positiva do tempo com spin positivo.

Temos ainda a segunda simetria discreta

$$t \rightarrow -t, \quad a \rightarrow -a \quad ,$$

que sugere que a especifica a direção do spin do corpo girante. A solução (2.55) é assintoticamente plana, isto é, para $r \rightarrow \infty$, obtemos a métrica de Minkowski. Quando tomamos $a = 0$, não só os termos relacionados a rotação vão a zero, mas a métrica se reduz a solução de Schwarzschild.

A solução de Kerr admite uma singularidade espaço-temporal em forma de anel. Esta singularidade não removível aparece quando $\Sigma = 0$, a partir do cálculo da quantidade $R_{abcd}R^{abcd}$. Então se

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad ,$$

devemos ter $r = \cos \theta = 0$, que determina uma singularidade com estrutura de um anel de raio a no plano equatorial $z = 0$, já que em coordenadas cartesianas $z = r \cos \theta$. O espaço-tempo de Kerr admite duas superfícies S_+ e S_- onde o desvio para o vermelho é infinito, tais superfícies representam limites estacionários, como no caso de Schwarzschild, são superfícies onde as coordenadas tipo-tempo trocam de papel com as coordenadas tipo-espaço. Ainda admite duas superfícies nulas, que definem dois horizontes de eventos.

As superfícies com desvio para o vermelho infinito são obtidas quando g_{00} é nulo. Disto obtemos os limites estacionários

$$r_{S_{\pm}} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad . \quad (2.56)$$

No limite de Schwarzschild $a \rightarrow 0$, a superfície S_+ se reduz ao horizonte de eventos $r = 2m$ e S_- a $r = 0$. Estas superfícies definidas por (2.56) são axialmente simétricas, com S_+ possuindo um raio $r = 2m$ no equador, e assumindo $a^2 < m^2$, um raio $m + \sqrt{m^2 - a^2}$ nos pólos. A superfície S_- está completamente contida por S_+ . A existência dessas superfícies

indica a existência de superfícies nulas que definem horizontes de eventos. Para encontrar tais horizontes, devemos procurar por superfícies $r = \text{constante}$ onde a componente g^{11} se anule. Então se

$$g^{11} = -\frac{\Delta}{\Sigma^2} = -\frac{r^2 - 2mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad ,$$

para que ele se anule, devemos ter

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0,$$

o que implica em dois horizontes de eventos, sempre com $a^2 < m^2$

$$r = r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}.$$

A métrica de Kerr apresenta dois horizontes de eventos e duas superfícies com desvio para o vermelho infinito. Esta configuração define três regiões em que esta métrica é regular. A região I cujo domínio é $r_+ < r < +\infty$, a região II compreendida no intervalo $r_- < r < r_+$ e a região III definida por $0 < r < r_-$. No limite $a = 0$ os horizontes de eventos se reduzem a $r = 2m$ e $r = 0$. De fato, na solução de Schwarzschild o horizonte de eventos e a superfície de infinito desvio para o vermelho coincidem. A região entre o limite estacionário S_+ e o horizonte de eventos $r = r_+$ é chamada de *ergosfera*.

Destas considerações, vemos que para $a < m$ a solução de Kerr descreve um buraco negro com parâmetro de rotação diferente de zero. No caso em que $a > m$, não há a formação do buraco negro, já que não há o aparecimento de um horizonte de eventos mas apenas a formação de uma singularidade em $r = 0$, que é visível a todos observadores externos. Tal singularidade, pela ausência de um horizonte de eventos, é chamada de *singularidade nua*. Segundo o *hipótese da censura cósmica*, tais objetos não devem existir na natureza, mas tal hipótese nunca foi provada de maneira geral. Por outro lado, no caso de buracos negros em rotação, não parece haver nenhum mecanismo dinâmico que faça com que uma estrela com $a < m$ vá para um estado em que $a > m$.

A extensão maximal da métrica de Kerr ($a < m$) é obtida utilizando-se as coordenadas

de Eddington-Finkelstein avançadas e retardadas

$$\begin{aligned} du_{\pm} &= dt \pm \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \\ d\phi_{\pm} &= d\phi \pm \frac{a}{\Delta} dr. \end{aligned}$$

Na figura (2.5) temos a estrutura conforme ao longo do eixo de simetria. As regiões I determinadas pelo intervalo $r_+ < r < +\infty$ são estacionárias e assintoticamente planas. As regiões II $r_- < r < r_+$ não são estacionárias e apresentam superfícies aprisionadas fechadas. As regiões III $-\infty < r < r_-$ contêm a singularidade em forma de anel do tipo-tempo, que pode ser evitada. Esta região contém curvas fechadas tipo-tempo. Tais curvas violam o princípio da causalidade, não sendo fisicamente consideradas. Não há violação da causalidade nas regiões I e II.

Segundo Penrose [8], é possível realizar uma espécie de extração de energia de um buraco negro que possui uma ergosfera. Dada uma partícula se movendo numa trajetória geodésica a partir do infinito, com energia $E_0 \equiv -p_0^a K_a > 0$ ao longo desta trajetória, com $p_0^a = mv_0^a$ sendo o momento da partícula, v_0^a são as componentes da quadri-velocidade da partícula e K_a são as componentes do vetor de Killing. Então suponhamos que tal partícula se divida em dois fragmentos com momentos p_1^a e p_2^a , onde $p_0^a = p_1^a$. Sendo K_a um vetor do tipo-espaco é possível escolher p_1^a um vetor tipo-tempo futuro direcionado, tal que $E_1 \equiv -p_1^a K_a < 0$. Então $E_2 \equiv -p_2^a K_a$ será maior que E_0 . Isto indica que o segundo fragmento de energia E_2 pode escapar para o infinito onde terá mais energia que a partícula original. Esta quantidade de energia excedente foi extraída do buraco negro.

2.7 Perturbações de Buracos Negros

O estudo das perturbações em soluções tipo buraco negro em Relatividade Geral é um ramo de pesquisa que nos permite a análise de inúmeros temas, tais como a radiação gerada por pequenos corpos caindo no buraco negro, o perfil de ondas gravitacionais muito tempo após a formação do buraco, espalhamento e absorção de ondas por buracos negros, a estabilidade das soluções tipo buraco negro e vários outros temas.

Figura 2.5: Estrutura conforme da métrica de Kerr ao longo do eixo de simetria para $a < m$.

Esta seção é devotada ao estudo de perturbações lineares em torno da solução de Schwarzschild e Kerr, sobretudo as perturbações escalares. Os campos físicos considerados como perturbações são tomados como fracos, isto é, o efeito de seu tensor energia-momento na métrica de fundo do buraco negro pode ser desprezado. Em síntese, serão consideradas apenas perturbações lineares dessas soluções.

Os primeiros estudos teóricos acerca desse tema derivam do trabalho de Regge Wheeler da década de 50 [9]. Eles se propuseram a estudar a estabilidade da singularidade de Schwarzschild frente a pequenos desvios de sua simetria esférica. Para a obtenção das equações lineares que governam estas pequenas perturbações na simetria esférica, foi necessário estudar a equação de Einstein linearizada sobre o espaço-tempo descrito por tal métrica. Esta equação é obtida escrevendo a métrica perturbada $\bar{g}_{\mu\nu}$ como a soma de dois termos: um representando a métrica não perturbada de fundo, ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$, e outro

representando a perturbação dado por $h_{\mu\nu}$. Disto então, podemos escrever [10]

$$\bar{g}_{\mu\nu} = {}^{(\circ)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad (2.57)$$

onde consideramos $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Usando (2.57) nas equações de Einstein obtemos as equações que governam $h_{\mu\nu}$ em primeira ordem.

As componentes $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\kappa}$ da conexão métrica perturbada são dadas por, considerando no máximo termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$,

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\kappa} = {}^{(\circ)}\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \quad , \quad (2.58)$$

sendo

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2} {}^{(\circ)}g^{\kappa\alpha} [h_{\alpha\nu;\mu} + h_{\alpha\mu;\nu} - h_{\mu\nu;\alpha}] \quad . \quad (2.59)$$

Com isto, podemos escrever as componentes do tensor de Ricci perturbado como

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\alpha;\nu}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha} \quad . \quad (2.60)$$

No vácuo, as equações de perturbação reduzem-se a

$$\delta R_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.61)$$

que representam dez equações diferenciais parciais das componentes lineares de $h_{\mu\nu}$. Como é mostrado em [10], este conjunto de equações pode ser reduzido, se fizermos a separação de variáveis

$$h_{\mu\nu} = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \sum_{n=1}^{10} C_{LM}^n(t, r) (Y_{LM}^n)_{\mu\nu}(\theta, \phi) \quad , \quad (2.62)$$

sendo $C_{LM}^n(t, r)$ os coeficientes da expansão e $(Y_{LM}^n)_{\mu\nu}(\theta, \phi)$ os harmônicos esféricos tensoriais. Seguindo isto, foi possível mostrar que as perturbações se dividem em duas classes de paridade, para cada valor de L . São denominadas perturbações polares, as que se transformam com $(-1)^L$, perturbações axiais as que se transformam como $(-1)^{L+1}$. Se considerarmos como campos perturbativos fracos o campo escalar o campo eletromagnético

e o campo gravitacional nessa prescrição, obtemos uma equação diferencial tipo barreira de potencial [3][11][9][10], dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x, t) + V(x)\Psi(x, t) = 0 \quad , \quad (2.63)$$

sendo $\Psi(x, t)$ o campo perturbativo, $x \equiv r + 2M \ln(r/2M - 1)$ a coordenada tartaruga e $V(x)$ o potencial efetivo dado por

$$V(x) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2M\sigma}{r^3} \right] \quad , \quad (2.64)$$

no qual σ assume os valores $+1$, 0 e -3 , correspondendo, respectivamente, a perturbação por campo escalar, eletromagnético e gravitacional. Temos então que as perturbações lineares na métrica de Schwarzschild são descritas por uma equação de onda unidimensional com um potencial real.

Apesar da equação (2.64) sintetizar as perturbações lineares da solução de Schwarzschild, vamos verificar com mais detalhes a perturbação gerada por um campo escalar definido na vizinhança de um buraco negro esfericamente simétrico, e em seguida estudaremos a perturbação pelo mesmo campo num buraco negro de Kerr.

Um campo escalar sem massa Φ tem sua evolução determinada pela equação de Klein-Gordon,

$$\square\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi \right] \quad , \quad (2.65)$$

sendo g o determinate da métrica $g_{\mu\nu}$, cujas componentes seguem da solução de Schwarzschild (2.43). Usando o fato da solução ser esfericamente simétrica podemos realizar a seguinte separação de variáveis em Φ

$$\Phi_{Lm} = \frac{\Psi_L(r, t)}{r} Y_{Lm}(\theta, \phi) \quad . \quad (2.66)$$

Com isso obtemos duas equações diferenciais,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{Lm} = L(L+1) \sin^2 \theta Y_{Lm} \quad , \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(r, t) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, t) \right] \\ = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \Psi(r, t) \quad . \end{aligned} \quad (2.68)$$

A primeira equação tem como solução os harmônicos esféricos Y_{Lm} . A equação radial-temporal (2.68) pode ser simplificada através da coordenada tartaruga (2.45) que implica na relação

$$\frac{\partial}{\partial r_*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad (2.69)$$

que usada em (2.68) dá como resultado

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_L(r) \right] \Psi_L(r, t) = 0 \quad . \quad (2.70)$$

Se considerarmos uma dependência temporal harmônica, tal como $\Psi_L(r, t) = \hat{\Psi}_L(r, t)e^{-i\omega t}$, reduzimos (2.70) em uma equação diferencial ordinária

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - V_L(r) \right] \hat{\Psi}_L(r) = 0, \quad (2.71)$$

cujo potencial efetivo é dado por

$$V_L(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (2.72)$$

Este potencial corresponde a uma barreira de potencial, cujo máximo é $r = 3M$ (figura(2.6)). Com isso podemos tratar vários dos problemas de perturbações de buracos negros com métodos da espalhamento da mecânica quântica.

Podemos verificar que quando $r_* \rightarrow \infty$, que corresponde ao infinito espacial, e quando $r_* \rightarrow -\infty$, correspondendo ao horizonte de eventos, o potencial efetivo (2.72) vai a zero, ou seja

$$V_L(r_* \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0,$$

então o comportamento assintótico das soluções de (2.71) é da forma

$$\hat{\Psi}_L(r, \omega) \sim e^{\pm i\omega r}, \quad (2.73)$$

tanto no horizonte de eventos($r_* \rightarrow -\infty$), quanto no infinito($r_* \rightarrow +\infty$).

Dado este perfil assintótico das soluções (2.73), podemos construir soluções para a equação de onda a partir das condições de contorno. Uma classe de soluções de particular interesse é aquela que satisfaz as condições de contorno chamadas de *causais*. Ela

Figura 2.6: Potencial escalar efetivo com ponto máximo $r = 3M$ para $r_* = 0$

corresponde a situação em que não haja ondas emergindo do horizonte de eventos do buraco negro, isto é

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_L^{in}(r_* \rightarrow -\infty) &\sim e^{-i\omega r_*}, \\ \hat{\Psi}_L^{in}(r_* \rightarrow +\infty) &\sim A_{out}(\omega)e^{i\omega r_*} + A_{in}(\omega)e^{-i\omega r_*},\end{aligned}\quad (2.74)$$

supondo que ω seja um número real e positivo. Como em [12] chamaremos esta classe de solução de modos *in*, e seu complexo conjugado de modos *out*. Da teoria das equações diferenciais [13], sabemos que duas soluções linearmente independentes de (2.71) têm o wronskiano constante em r_* . Calculando o wronskiano dos modos *in* e *out* no horizonte de eventos e no infinito, temos que

$$|A_{in}|^2 = |A_{out}|^2 + 1, \quad (2.75)$$

de maneira similar

$$|T|^2 + |R|^2 = 1, \quad (2.76)$$

sendo $T = 1/A_{in}$ e $R = A_{out}/A_{in}$, os coeficientes de transmissão de reflexão respectivamente. Então parte da onda incidente é absorvida pelo buraco negro e outra parte refletida

de volta ao infinito.

Um segundo par de soluções básicas, os modos *up* e modos *down*, podem ser definidos de maneira análoga. Os modos *up* correspondem a ondas puramente emergentes no infinito, que são dados pelas seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_L^{up}(r_* \rightarrow -\infty) &\sim B_{out}(\omega)e^{i\omega r_*} + B_{in}(\omega)e^{-i\omega r_*} \\ \hat{\Psi}_L^{up}(r_* \rightarrow +\infty) &\sim e^{+i\omega r_*}.\end{aligned}\tag{2.77}$$

O modo *down* é o complexo conjugado do modo *up*. Usando novamente o fato do wronskiano referente a estas soluções ser constante, temos que

$$B_{out}(\omega) = A_{in}(\omega),\tag{2.78}$$

$$B_{in} = -\bar{A}_{out}(\omega) = -A_{out}(-\omega),\tag{2.79}$$

com a barra denotando a operação de conjugação complexa. Quaisquer duas soluções mencionadas(*in*, *out*, *up*, *down*) podem ser escolhidas como soluções básicas de um dado problema.

Podemos estudar as perturbações lineares na solução de Kerr da mesma forma que foi feito para o caso esfericamente simétrico, mas o caso com rotação se apresenta mais intrincado devido a simetria axial da solução. A evolução de campos escalares nesta geometria foi estudada por Brill [14]. Por algum tempo acreditou-se que não seria possível separar a equação de onda nessa geometria a não ser para campos de spin zero. Mas no trabalho [15], Teukolsky mostrou, usando o formalismo de Newman-Penrose [3], que as perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais de um buraco negro de Kerr podem ser descritas por uma única equação, chamada de equação mestra de Teukolsky, que no caso de ausência de fontes é dada por

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta\right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \sin^2 \theta\right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\&- \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \sin^{-1} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \\&+ \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \Psi = 0,\end{aligned}\tag{2.80}$$

na qual s assume os valores $0, \pm 1, \pm 2$, correspondendo respectivamente a perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais.

Usando o *Ansatz* de Teukolsky

$$\Psi_{Lm} = R_{Lm}(r, \omega) S_{Lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad , \quad (2.81)$$

a equação (2.80) pode ser separada em duas equações diferenciais acopladas

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right] R = 0, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left[a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta \right] S \\ - \left[\frac{2 \cos \theta m s}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + E - s^2 \right] S = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.83)$$

em que

$$K \equiv (r^2 + a^2)\omega - am, \lambda \equiv E - s(s+1) + (a\omega)^2 - 2am\omega \quad ,$$

e $E = E(a, \omega)$ é a constante de separação. Pelo fato dessas equações serem acopladas não podemos resolvê-las diretamente, pois as funções R e S dependem da frequência ω . A equação (2.83) forma um problema de Sturm-Liouville para cada $(a\omega)^2$ complexo e m inteiro positivo, cujas auto-funções são os harmônicos esferoidais $S_{L|m|}(\theta\phi)$ com autovalores $E(L, |m|, \omega)$. Estas autofunções formam um conjunto completo no caso de ω ser real [16].

Usando a seguinte transformação [12]

$$\chi = \Delta^{s/2} \sqrt{r^2 + a^2} R \quad , \quad (2.84)$$

na equação radial (2.82), esta pode ser reescrita como

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + V(r_*; \omega, s, \lambda) \right] \chi = 0 \quad , \quad (2.85)$$

em que a coordenada tartaruga neste caso é dada por

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{d}{dr} \quad , \quad (2.86)$$

e o potencial efetivo é

$$V(r_*; \omega, s, \lambda) = \frac{K^2 - 2is(r - M)K + \Delta(4ir\omega s - \lambda)}{(r^2 + a^2)^2} - G^2 - \frac{dG}{dr_*} \quad , \quad (2.87)$$

onde

$$G = \frac{s(r - M)}{r^2 + a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2} \quad .$$

O problema das perturbações em torno da solução de Kerr se reduz, da mesma forma que no caso sem rotação, a um problema de penetração de uma barreira de potencial.

O comportamento assintótico do potencial (2.87) leva ao comportamento

$$\begin{aligned} \chi(r \rightarrow r_+) &\sim \Delta^{\pm s/2} e^{\pm \bar{\omega} r_*} \quad , \\ \chi(r \rightarrow +\infty) &\sim r^{\pm s} e^{\mp \bar{\omega} r_*} \quad . \end{aligned} \quad (2.88)$$

Para R temos

$$R(r \rightarrow r_+) \sim \left\{ \begin{array}{c} e^{i\bar{\omega} r_*} \\ \Delta^{-s} e^{-i\bar{\omega} r_*} \end{array} \right\} \quad , \quad (2.89)$$

$$R(r \rightarrow +\infty) \sim \left\{ \begin{array}{c} \frac{e^{+i\omega r_*}}{r^{-(2s+1)}} \\ \frac{e^{-i\omega r_*}}{r} \end{array} \right\} \quad , \quad (2.90)$$

sendo $\bar{\omega}$ definido como $\bar{\omega} = \omega - M\Omega_H$, com Ω_H representando a velocidade angular do buraco negro.

Nesta seção apresentamos as principais idéias sobre perturbações em buracos negros em especial para os buracos negros de Schwarzschild e Kerr. Na próxima seção definiremos modos quase-normais de um buraco negro, e o detalhamento da evolução de campos na métrica de Kerr.

2.8 Modos Quasi-Normais(MQN)

Segundo Chandrasekhar [3], a descrição da evolução de uma pequena perturbação inicial de um buraco negro pode, em princípio, ser determinada pela expressão dessa perturbação

em termos de uma superposição de modos normais de vibração. No estágio final, entretanto, espera-se que esta perturbação inicial decaia de maneira que expresse as principais características do buraco negro perturbado, independentemente da natureza da perturbação inicial. Espera-se, então, que os estágios finais da perturbação, o buraco negro oscile com frequências e taxas de amortecimento características unicamente dele próprio [12]. Disto, definimos MQN como soluções das equações de perturbação cujas frequências sejam complexas, que descrevam ondas que apenas imergem no horizonte de eventos e ondas puramente emergindo no infinito.

As condições de contorno para que se obtenha os MQN são

$$\Psi(r_* \rightarrow \pm\infty) \sim e^{\pm i\omega r_*} \quad , \quad (2.91)$$

cujas frequências são números complexos

$$\omega = Re(\omega) + Im(\omega). \quad (2.92)$$

A questão da estabilidade das soluções tipo buraco negro define o sinal da parte imaginária das frequências (2.92). A perturbação inicial deve cair de maneira amortecida, dada a definição de MQN, com o tempo, isto é, quando $t \rightarrow \infty$ devemos ter $e^{-i\omega t} = e^{-iRe(\omega)t} e^{Im(\omega)t} \rightarrow 0$, que será possível apenas se $Im(\omega) < 0$.

Os modos ou frequências quasi-normais, são as frequências ω determinadas pelas soluções de uma equação do tipo (2.63)(2.85) juntamente com as condições de contorno (2.91). Devemos considerar apenas ondas puramente emergentes no infinito e puramente imergentes no horizonte de eventos, em métricas que sejam assintoticamente planas ou assintoticamente de-Sitter, uma vez que é esta estrutura assintótica que determina estas condições. Segundo [17], devido a semelhança entre MQN e ressonâncias de espalhamento, estes modos podem ser identificados como pólos de uma apropriada função de Green.

Dada uma equação de onda do tipo (2.63) com potenciais $V \geq 0$, podemos usar a transformação de Laplace para representar as soluções que tenham frequências quasi-normais [18]. A transformação de Laplace $\bar{\Psi}(s, r_*)$, com $s > 0$ e real, da solução $\Psi(t, r_*)$ é

dada pelo operador

$$\mathcal{L}[\Psi(t, r_*), s] = \bar{\Psi}(s, r_*) = \int_0^\infty e^{-st} \Psi(t, r_*) \, dt, \quad (2.93)$$

aplicando este operador em (2.63) obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$s^2 \bar{\Psi} - \bar{\Psi}'' + V \bar{\Psi} = s \bar{\Psi}(0, r_*) + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Psi}(0, r_*) \quad (2.94)$$

A parte inhomogênea dessa equação é determinada pelas condições de contorno, denotaremos esta parte por

$$h(s, r_*) = s \bar{\Psi}(0, r_*) + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Psi}(0, r_*) \quad (2.95)$$

Podemos apresentar a solução formal da equação (2.94) através do método das funções de Green [13], que consiste em representar a solução $\bar{\Psi}$ em termos da função de Green $\hat{G}(r_*, r'_*; s)$ e do termo inhomogêneo (2.95), tal como

$$\bar{\Psi} = \int \hat{G}(r_*, r'_*; s) h(s, r'_*) dr'_* \quad (2.96)$$

Todas funções de Green podem ser construídas a partir de duas soluções linearmente independentes da equação (2.94) quando (2.95) for zero. Sejam essas duas soluções $f_-(s, r_*)$ e $f_+(s, r_*)$, então a função de Green correspondente será

$$\hat{G}(r_*, r'_*; s) = \frac{1}{W(s)} \begin{cases} f_-(s, r'_*) f_+(s, r_*) & r'_* < r_* \\ f_-(s, r_*) f_+(s, r'_*) & r'_* > r_* \end{cases}, \quad (2.97)$$

sendo $W(s)$ o wronskiano, que nesse caso é dado por

$$W(s) = f_-(s, r_*) \frac{\partial}{\partial r_*} f_+(s, r_*) - f_+(s, r_*) \frac{\partial}{\partial r_*} f_-(s, r_*) \quad (2.98)$$

O comportamento assintótico dos potenciais $V(r_*)$ são utilizados na seleção das funções $f_-(s, r_*)$, $f_+(s, r_*)$.

Da representação em termos das funções de Green da transformada de Laplace de $\Psi(t, r_*)$, podemos obter, usando a fórmula de inversão complexa de Bromwich, formalmente $\Psi(t, r_*)$ como

$$\Psi(t, r_*) = \frac{1}{2\pi i} \int \bar{\Psi}(t, r_*) e^{st} ds \quad (2.99)$$

Tomamos a continuação analítica dessa integral em s , cuja integração é feita ao longo da reta $s = j$ do plano complexo. O número j é real e escolhido de modo que a reta $s = j$ fique à direita de todas singularidades de $\bar{\Psi}(t, r_*)$, e completada com um semi-círculo C de raio R . Usando o teorema dos resíduos neste contorno, temos que

$$\oint \bar{\Psi}(t, r_*) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{s_i} \text{Res}(s_i) = -\Psi_{QN} \quad , \quad (2.100)$$

sendo $\text{Res}(s_i)$ o resíduo correspondente ao pólo s_i . Temos ainda que

$$\oint \bar{\Psi}(t, r_*) e^{st} ds = \Psi + \Psi_C + \Psi_t \quad , \quad (2.101)$$

ou seja, de maneira geral a onda pode ser escrita como a soma de três termos

$$\Psi = \Psi_{QN} + \Psi_C + \Psi_{cont} \quad , \quad (2.102)$$

sendo o primeiro termo a contribuição quasi-normal da representação da onda. Por (2.100), vemos que esta contribuição provém dos pólos na função $\bar{\Psi}$, que são originados pelos zeros do Wronskiano. Além disso, temos o termo Ψ_{cont} referente a integração pelo contorno usado para escapar da singularidade de ramificação, e o termo Ψ_C oriundo da integração pelo arco C .

A condição para que o Wronskiano se anule é que as funções $f_-(s, r_*)$ e $f_+(s, r_*)$ sejam linearmente dependentes, isto é,

$$f_+(s, r_*) = q(s_i) f_-(s, r_*) \quad , \quad (2.103)$$

sendo $q(s_i)$ uma constante que depende do modo quasi-normal.

Na seção anterior mencionamos que quaisquer duas das classes de soluções *in*, *out*, *up*, *down*, podem ser escolhidas como soluções básicas de um problema envolvendo perturbações no buraco negro de Schwarzschild. Para a caracterização de MQN, os modos *in* (2.74) e modos *up* (2.77) são os tipos adequados. O Wronskiano construído a partir desses modos é

$$W_{[in, up]} = \hat{\Psi}_L^{in}(r_*) \frac{d}{dr_*} \hat{\Psi}_L^{up}(r_*) - \hat{\Psi}_L^{up}(r_*) \frac{d}{dr_*} \hat{\Psi}_L^{in}(r_*) = 2i\omega A_{in}(\omega) = 2i\omega B_{out}(\omega). \quad (2.104)$$

Para grandes valores de r o potencial (2.72) decai fracamente. Como consequência, o decaimento de uma perturbação inicial não terá o comportamento de uma exponencial decrescente. No decaimento de um campo escalar massivo no espaço-tempo de Schwarzschild, observa-se que para grandes valores de r , o campo decai como uma lei de potência do tipo [19],

$$\Psi(r, t) \sim t^{-(2L+P+1)} \quad , \quad (2.105)$$

sendo $P = 1$, se o campo for estático inicialmente e $P = 2$ se não. A figura (2.7) mostra a evolução temporal de uma perturbação inicial em um buraco negro de Schwarzschild.

Figura 2.7: Perfil da evolução temporal de uma perturbação inicial da métrica de Schwarzschild em escala logarítmica no quadro maior e linear no menor.

Uma das primeiras técnicas para a resolução do problema de encontrar os MQN, é o método WKB proposto por Schutz e Will [20]. Este método é baseado no procedimento padrão WKB usado para o estudo de espalhamentos em potenciais barreira. Eles

mostraram que as frequências complexas podem ser estimadas a partir da relação

$$[M\omega_n]^2 = V_L(r = r_{max}) - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[-2 \frac{d^2}{dr_*^2} V_L(r = r_{max}) \right]^{1/2}, \quad (2.106)$$

sendo r_{max} o máximo da barreira de potencial. O modo quasi-normal fundamental $n = 0$, $L = 1$ é $M\omega \approx (0.37 - 0.09)$. Se considerarmos um buraco negro esfericamente simétrico, cuja massa seja $M = 10M_\odot$, este modo fundamental corresponde a uma frequência de 1.2kHz, com um tempo de amortecimento de 0.55ms. Na tabela (2.1) tem-se as primeiras quatro frequências quasi-normais. Observamos nesta tabela que a parte imaginária das

n	L=2	L=3	L=4
0	0.37367 - 0.8896i	0.59944 -0.09270i	0.80918 - 0.9416i
1	0.34671 - 0.27391i	0.58264 -0.28130i	0.79663 - 0.28443i
2	0.30105 - 0.47828i	0.55168 - 0.47909i	0.77271 - 0.47991i
3	0.25150 - 0.70514i	0.51196 - 0.69034i	0.73984 - 0.68392i

Tabela 2.1: Primeiras frequências quasi-normais do buraco negro de Schwarzschild.

frequências aumenta muito rapidamente, o que indica que modos com n grande não contribuem de maneira significativa para o sinal gravitacional. A parte real se torna constante para modos cada vez maiores. O perfil assintótico das frequências quasi-normais foi obtido por Nollert [21] dado pela expressão

$$M\omega_n \approx 0.0437 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{2n+1}} + \dots - i \left[-\frac{1}{8}(2n+1) + \frac{\gamma_1}{\sqrt{2n+1}} \dots \right], \quad (2.107)$$

com γ_1 assumindo os valores 0.343, 0.7545 e 2.81, para $L = 2, 3$ e 6 , respectivamente, em que $n \rightarrow +\infty$. Para grande valores de L , a distribuição das frequências quasi-normais é dada por [22]

$$3\sqrt{3}M\omega_n \approx L + \frac{1}{2} - i \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.108)$$

No caso de buracos negros em rotação, para cada valor de multipolo L existem $2L + 1$ modos distintos, que se aproximam dos valores obtidos para a métrica de Schwarzschild

quando $a \rightarrow 0$. Estes modos correspondem a diferentes valores de m , onde $-L \leq m \leq L$. O trabalho pioneiro no cálculo dessas frequências para o caso com rotação é o de Detweiler [23]. Um dos seus principais resultados é que para $a \rightarrow M$ e $L = m$, a parte imaginária dos MQN fica praticamente constante e a parte real cresce monotonicamente. Para $L = -m$ a parte imaginária tende a zero e a parte real para $-m/2$. Isto sugere que um grande número de modos quasi-normais possuem um amortecimento que aumenta vagarosamente quando $a \rightarrow M$. Segundo [24], estes modos devem coalescer num único modo sem amortecimento para $a = M$. Quando parâmetro de rotação é igual a massa temos o buraco negro de Kerr extremo, e é possível mostrar que existe uma sequência infinita de frequências ressonantes com mesmo limite, neste caso.

2.9 O espalhamento super-radiante

Seja o espalhamento de uma onda numa barreira de potencial gerada por um buraco negro, em geral espera-se que parte da onda incidente penetre na barreira de potencial e seja absorvida pelo buraco negro e outra seja espalhada para o infinito. Como consequência, teremos a amplitude da onda espalhada menor ou igual que a amplitude da onda incidente. Considerando o caso de buracos negros em rotação isto não é necessariamente verdade. Uma onda incidente num buraco negro de Kerr pode ter sua amplitude amplificada num experimento de espalhamento no potencial desse buraco negro [25] [26]. Esta energia adicional, que aparece na amplitude espalhada no infinito é devido a absorção da energia de rotação do buraco negro.

Consideremos então, o espalhamento de um campo escalar pelo potencial (2.87). O comportamento assintótico para tal campo, neste caso, é dado por

$$\begin{aligned}\chi^{in}(r_* \rightarrow r_+) &\sim e^{-i\bar{\omega}r_*} \ , \\ \chi^{in}(r_* \rightarrow +\infty) &\sim A_{out}e^{i\omega r_*} + A_{in}e^{-i\omega r_*} \ .\end{aligned}\tag{2.109}$$

Usando o complexo conjugado de χ^{in} , que chamaremos de χ^{out} , podemos calcular o Wronskiano, sendo χ^{in} e χ^{out} as soluções escolhidas para (2.86). Então, usando a condição de

que o Wronskiano seja constante, temos que

$$\left(1 - \frac{m\Omega_H}{\omega}\right) |T|^2 = 1 - |R|^2 \quad , \quad (2.110)$$

os coeficientes de transmissão T e reflexão R serão discutido mais adiante no capítulo 4, onde estudaremos este fenômeno para o caso em que tenhamos uma dimensão extra. Desta equação fica claro que teremos o fenômeno de amplificação da onda espalhada (super-radiância $R > 1$) quando

$$\omega < m\Omega_H = \frac{ma}{2Mr_+} \quad , \quad (2.111)$$

apenas para valores positivo de m .

Podemos observar esta extração de energia do buraco negro através das condições de contorno (2.89). Se $\bar{\omega}$ se torna negativo, a solução com o termo $e^{-i\bar{\omega}r_*}$ será vista por um observador no infinito como uma onda emergente do horizonte de eventos. De acordo com [25], o máximo de amplificação da onda incidente é de 0.3% para uma onda escalar, 4.4% para o campo eletromagnético e 138% para ondas gravitacionais. Voltaremos ao assunto sobre a super-radiância no capítulo 4.

Capítulo 3

Será o nosso Universo uma brana?

3.1 Motivações para os modelos de mundo brana

A teoria de supercordas apresenta-se até o momento com grandes possibilidades de realizar a unificação das quatro interações fundamentais numa única descrição coerente. Uma de suas características mais surpreendentes é a necessidade do aparecimento de dimensões espaciais extras além das três usuais. Esta idéia já havia sido utilizada na década de 1920 por Kaluza e Klein, no contexto da unificação da gravitação, cuja descrição é dada pela Relatividade Geral, com Eletromagnetismo de Maxwell numa única teoria através do uso de uma dimensão espacial extra compactificada.

Existem verdadeiramente, cinco teorias de supercordas livres de anomalias: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, $SO(32)$ e heterótica $E_8 \times E_8$. O fato é que todas elas para serem quânticamente consistentes, necessitam em geral dez dimensões espaciais. É nesse contexto que Horava e Witten conjecturaram, usando o fato das dualidades entre as diferentes teorias de supercordas, que as cinco teorias livres de anomalias mais a supergravidade em onze dimensões são de fato diferentes aspectos de uma única teoria, denominada teoria M [28]. Esta teoria seria verdadeiramente a prescrição única para todas as interações fundamentais. É nesse contexto que surgem os modelos que pretendem encontrar algumas propriedades não perturbativas da conjectura de Horava-Witten, tais como os modelos de

mundo brana.

Nessa busca por uma descrição não perturbativa da teoria M descobriu-se que outros objetos de dimensão maior que a das cordas, que aparecem devido as condições de contorno das equações de movimento na folha mundo, chamados de p -branas, no qual p se refere a dimensionalidade da brana, realizam papel fundamental na teoria. Considerando o regime de baixo acoplamento na interação entre cordas, as p -branas não aparecem na teoria perturbativa, sendo, portanto, um aspecto exato da descrição. De particular importância dentre as p -branas, estão as D -branas, que são as estruturas onde as cordas abertas se prendem. Falando de maneira simples, cordas abertas, que descrevem o setor não gravitacional da teoria, tem suas pontas presas nas branas, enquanto que as cordas fechadas, que descrevem o setor gravitacional, podem mover-se livremente em todas dimensões. A esse conjunto de dimensões a que as cordas fechadas tem acesso chamamos de *bulk*. Classicamente, este cenário é realizado através da localização da matéria e campos radiativos na brana, enquanto as ondas gravitacionais podem se propagar em todo bulk.

Na conjectura de Horava-Witten, os campos de calibre do modelo padrão são confinados em duas $(1 + 9)$ -branas localizadas nos pontos fixos de um orbifold S_1/Z_2 .¹ As 6 dimensões extras nas branas são compactificadas num raio muito pequeno, próximo da escala de Planck, para que este cenário esteja em acordo com os experimentos.

Podemos tomar esta descrição de Horava-Witten como uma teoria efetiva em 5 dimensões, onde consideramos os campos de calibre definidos apenas nas $(3 + 1)$ -branas, ou simplesmente 3-branas, localizadas nos pontos fixos de um orbifold num bulk 5-dimensional. Esta dimensão espacial adicional pode ser maior que a escala de Planck, o que torna o estudo desses modelos bastante atraente, pois se espera na próxima geração de aceleradores de partículas tal como o LHC (*Large Hadron Collider*), chegar até a faixa de energia onde se podem encontrar indícios de dimensões espaciais extras previstas por estes modelos de mundo brana.

¹Espaço obtido pela identificação $x \rightarrow -x$ com pontos fixos, isto é, tal como na reta real o número zero é identificado com ele mesmo portanto é um ponto fixo do orbifold.

Considerar a descrição de Horava-Witten, com uma teoria efetiva em 5–dimensões é o ponto de partida para o modelo de Randall-Sundrum de duas 3–branas definidas num bulk 5–dimensional [30] (RS1). Quando fazemos o raio do orbifold tender ao infinito, obtemos o modelo de Randall-Sundrum com uma única 3–brana num bulk 5–dimensional (RS2), cuja dimensão extra é infinita. Mas estas não são as únicas tentativas de aplicar as idéias advindas da conjectura da teoria M. Antes da tentativa de Randall-Sundrum, Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD) [32] tiveram a idéia de diminuir a escala de Planck $M_p \equiv M_4$ através do volume da dimensão espacial extra compacta, considerando que a gravidade se “espalhe” por este volume. Então a escala da Planck em quatro dimensões não seria verdadeiramente a escala fundamental, mas apenas uma escala efetiva.

Para compreender as idéias do modelo ADD consideremos a ação gravitacional de Einstein-Hilbert em $(4 + d)$ -dimensões [34],

$$S_g = \frac{1}{16\pi G_{4+d}} \int d^4x d^d y \sqrt{-g_{4+d}} [R_{4+d} - 2\Lambda_{4+d}] \quad , \quad (3.1)$$

na qual G_{4+d} é a constante da gravitação universal, g_{4+d} o determinante da métrica, Λ_{4+d} a constante cosmológica e R_{4+d} o escalar de Ricci, todas quantidades escritas em $(4 + d)$ dimensões. E o sistema de coordenadas que cobre esta variedade $(4 + d)$ –dimensional é $X^A = (x^\mu, \dots, y^d)$, sendo as letras gregas os índices 4–dimensionais tais como μ e as letras latinas minúsculas representam o sistema de coordenadas das dimensões extras como d e as latinas maiúsculas representam índices que percorrem todas as dimensões, tal convenção deverá ser usada ao longo de todo este texto, além do sistema de unidade geométrico no qual $c = \hbar = 1$.

Aplicando o princípio de mínima ação em (3.1), obtemos as equações de campo de Einstein,

$$G_{AB}^{4+d} \equiv R_{AB}^{4+d} g_{AB}^{4+d} - \frac{1}{2} g_{AB}^{4+d} R^{4+d} = -\Lambda_{4+d} g_{AB}^{4+d} + \kappa_{4+d}^2 T_{AB}^{4+d} \quad , \quad (3.2)$$

sendo T_{AB}^{4+d} o tensor energia momento, e κ_{4+d}^2 a constante de acoplamento da interação gravitacional, cuja relação com a constante da gravitação universal e a massa de Planck

M_{4+d}^{2+d} em $4 + d$ dimensões é

$$\kappa_{4+d}^2 = 8\pi G_{4+d} = \frac{8\pi}{M_{4+d}^{2+d}} . \quad (3.3)$$

No limite de campo fraco a equação (3.2) se reduz à equação de Poisson $(4+d)$ -dimensional, cuja solução é o potencial gravitacional

$$V_{4+d} = \frac{\kappa_{4+d}^2}{r^{1+d}} , \quad (3.4)$$

sendo r a coordenada radial em $(1 + d)$ dimensões. Nesta expressão fica claro que se não tivermos nenhuma dimensão espacial extra obteremos o potencial gravitacional usual, mas do contrário a lei da gravitação universal deve levar correções. Podemos entender isso da seguinte forma: se a escala de comprimento das dimensões extras for L , então para distâncias onde $r < L$, isto é para distâncias onde possamos medir estas dimensões extras, o potencial gravitacional deve ser corrigido e assumir a forma $V = r^{-(1+d)}$, mas se observarmos a região onde $r \gg L$, então estas dimensões adicionais não poderão contribuir para o potencial gravitacional, logo para este caso o potencial gravitacional é simplesmente $V = r^{-1}$.

Uma outra possibilidade é considerarmos $r = L$ nas d dimensões extras, assim modificando o potencial gravitacional para

$$V = \frac{\kappa_{4+d}^2 L^{-d}}{r} = \frac{8\pi}{L^d M_{4+d}^{2+d} r} , \quad (3.5)$$

ou seja

$$M_4^2 = M_{4+d}^{2+d} L^d , \quad (3.6)$$

a escala de Planck 4-dimensional se torna uma constante de acoplamento efetiva, descrevendo a gravidade apenas em regiões muito maiores que a escala das dimensões extras.

Este tipo de hipótese de um universo com dimensões espaciais extras seria impossibilitado de se medir dentro da precisão atual dos experimentos, mas pode sugerir uma solução para o problema da hierarquia, que se refere à grande diferença entre a escala de acoplamento da força eletrofraca M_{ew} e a escala de acoplamento da gravitação M_4 ,

já que se usarmos M_{4+d} como constante de acoplamento fundamental, e fazendo-a da ordem da escala eletrofraca $10^3 GeV$ e $M_4 = 10^{19} GeV$ podemos inferir sobre a escala de comprimento L^d das dimensões extras

$$L = \frac{(M_4)^{\frac{2}{d}}}{M_{4+d}^{1+\frac{2}{d}}} = 10^{\frac{32}{d}} (TeV)^{-1} \quad , \quad (3.7)$$

mas como $1cm = 10^{17}(TeV)^{-1}$, então

$$L = 10^{\frac{32}{d}-17} cm \quad . \quad (3.8)$$

Nesta expressão se tivermos $d = 1$, implica na violação da gravitação de Newton em distâncias da ordem do Sistema Solar, mas se considerarmos duas dimensões espaciais extras,

$$L = 10^{-1} mm. \quad (3.9)$$

Os experimentos atuais que procuram desvios na lei da gravitação universal em escalas submilimétricas, permitem violações na região abaixo de (3.9). Então se considerarmos a escala de Planck como uma constante de acoplamento efetiva obteremos uma solução para o problema da hierarquia.

No modelo ADD, como visto pela expressão (3.8), devemos ter mais que uma dimensão espacial extra para que tenhamos compatibilidade entre a teoria e os experimentos, além disso estas dimensões extras são planas. Ao contrário, nos modelos de Randall-Sundrum , as dimensões extras são curvadas ou *warped* com o bulk sendo uma porção de um espaço-tempo anti-De Sitter 5-dimensional(AdS_5). Como na conjectura de Horava-Witten, as branas de Randall-Sundrum possuem simetria Z_2 (simetria de espelho), e possuem um termo escalar chamado de tensão que desempenha o papel de conter a influência da constante cosmológica negativa do bulk na brana. Nos modelos RS, as três dimensões espaciais constatadas experimentalmente são protegidas das dimensões extras no regime baixas de energias, não pelo fato destas serem compactificadas, mas sim por estas serem curvadas, ou seja em RS podemos ter dimensões extras grandes.

Os modelos RS são modelos fenomenológicos que refletem no mínimo algumas características possíveis da conjectura da teoria M. No modelo RS com duas branas (RS2) é possível o desenvolvimento de idéias acerca do princípio holográfico, que aparecem na conjectura da teoria M. Falando de maneira não formal, a holografia sugere que a dinâmica da gravitação num espaço-tempo de d —dimensões pode ser determinado pelo conhecimento dos campos definidos na fronteira $d - 1$ deste espaço-tempo. A correspondência ADS/CFT é um exemplo da holografia, no qual temos a dinâmica clássica da gravitação em um espaço-tempo AdS_d equivalente a dinâmica quântica da teoria de campos conforme na fronteira $d - 1$. O modelo RS2 com um bulk AdS_5 satisfaz esta correspondência no regime perturbativo de baixa ordem [35].

3.2 Solução de Randall-Sundrum

O primeiro modelo RS [30] foi proposto com o intuito de resolver o problema da hierarquia entre as constantes de acoplamento da interação eletrofraca e da gravitacional por meio de uma única dimensão espacial extra compacta entre duas branas, cuja localização destas se dá nos pontos fixos do orbifold S_1/Z_2 .

Façamos agora neste modelo de duas branas (RS2) a dimensão extra compacta com domínio $-\pi r_c < y < \pi r_c$, sendo r_c o raio de compactificação. A nossa brana (nosso universo) está localizada em $y = \pi r_c$ a segunda brana, a qual não temos acesso, em $y = 0$.

Consideraremos as letras gregas representando os índices das quantidades 4—dimensionais ($\mu, \nu = 0...3$) e as letras latinas maiúsculas os índices 5—dimensionais ($M, N = 0...4$). Dadas estas condições supõe-se a seguinte ação para este modelo, no qual o bulk não possui matéria,

$$S = \int d^4x \int dy \sqrt{-g_5} [-2\Lambda + R_5] M_5^3 + \int d^4x \sqrt{-g_4^{vis}} [L_{vis} - \lambda_{vis}] + \int d^4x \sqrt{-g_4^{esc}} [L_{esc} - \lambda_{esc}], \quad (3.10)$$

na qual as quantidades 5—dimensionais são a constante cosmológica Λ , a escala de Planck

fundamental, o escalar de Ricci R_5 , o determinate da métrica g_5 , e as quantidades 4-dimensionais λ_{vis} , λ_{esc} , as tensões na brana visível e escondida respectivamente. Além disso, L_{vis} e L_{esc} representam a lagrangiana da matéria presente em cada brana.

As branas são hipersuperfícies singulares segundo o formalismo de Israel [36]. Do ponto de vista 5-dimensional, as lagrangeanas da matéria confinada em cada brana podem ser expressas com funções delta de Dirac. Logo podemos escrever

$$\begin{aligned} L_{vis} - \lambda_{vis} &= \sqrt{-g_4^{vis}} \lambda_{vis} \delta(y - \pi) \quad , \\ L_{esc} - \lambda_{esc} &= \sqrt{-g_4^{esc}} \lambda_{esc} \delta(y) \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Desta forma, variando a ação (3.10) obteremos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x dy \delta(\sqrt{-g_5}) [-2\Lambda + R_5] M_5^3 + \sqrt{-g_5} M_5^3 [\delta(R_5)] \\ &+ \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g_4^{esc}}) \lambda_{esc} \delta(y) \right] + \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g_4^{vis}}) \lambda_{vis} \delta(y - \pi r_c) \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g_5} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g_5} g^{MN} \delta g_{MN} \quad , \\ \delta\sqrt{-g_4^{vis}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g_4^{vis}} g_{vis}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}^{vis} \quad , \\ \delta\sqrt{-g_4^{esc}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g_4^{esc}} g_{esc}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}^{esc} \quad , \\ \delta R &= -R^{MN} \delta g_{MN} \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Na última identidade usamos a equação de Palatini para anular δR_{MN} . Substituindo (3.13) em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x dy \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g_5} g^{MN} \delta g_{MN} M_5^3 [R_5 - 2\Lambda] + \sqrt{-g_5} M_5^3 [-R^{MN} \delta g_{MN}] \right] \\ &+ \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g_4^{vis}} g_{vis}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}^{vis} \lambda_{vis} \delta(y - \pi r_c) \right] \\ &+ \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g_4^{esc}} g_{esc}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}^{esc} \lambda_{esc} \delta(y) \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Usando a seguinte relação entre a métrica 5-dimensional e a métrica induzida em

cada brana,

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu}^{vis} &= \delta g_{MN} \delta_\mu^M \delta_\nu^N, \\ \delta g_{\mu\nu}^{esc} &= \delta g_{MN} \delta_\mu^M \delta_\nu^N,\end{aligned}\tag{3.15}$$

e aplicando o princípio de mínima ação $\delta S = 0$, obtemos as equações de campo

$$\begin{aligned}\sqrt{-g_5} \left[R^{MN} - \frac{1}{2} g^{MN} R_5 \right] &= -\frac{1}{2M_5^3} \left[\sqrt{-g_5} \Lambda M_5^3 g^{MN} + \sqrt{-g_4^{vis}} g_{vis}^{\mu\nu} \delta_\mu^M \delta_\nu^N \lambda_{vis} \delta(y - \pi r_c) \right] \\ &- \frac{1}{2M_5^3} \sqrt{-g_4^{esc}} g_{esc}^{\mu\nu} \delta_\mu^M \delta_\nu^N \lambda_{esc} \delta(y) \quad .\end{aligned}\tag{3.16}$$

O *Ansatz* de Randall e Sundrum para resolver estas equações de campo é um elemento de linha não fatorável 5-dimensional, onde é introduzindo o chamado fator de *warp* que multiplica o termo 4-dimensional,

$$ds^2 = e^{2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \tag{3.17}$$

no qual $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski em 4 dimensões, note que tomamos o raio de compactificação r_c igual a 1. Então segundo esta proposta podemos calcular as equações de campo e encontrar as propriedades da função $\sigma(y)$.

As únicas componentes não nulas da conexão para a métrica (3.17), com $i, j = 1, 2, 3$ (neste caso índices repetidos não devem ser somados), são

$$\begin{aligned}\Gamma_{0y}^0 &= \Gamma_{y0}^0 = \Gamma_{0y}^i = \Gamma_{iy}^i = \Gamma_{iy}^i = \frac{d\sigma(y)}{dy}, \\ \Gamma_{00}^y &= -\Gamma_{ii}^y = e^{2\sigma(y)} \frac{d\sigma(y)}{dy}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Usando estes resultados, é possível encontrar as componentes não nulas do tensor de Ricci,

$$\begin{aligned}R_{yy} &= -\frac{\partial}{\partial y} (\Gamma_{y0}^0 + 3\Gamma_{yi}^i) - (\Gamma_{0y}^0 \Gamma_{0y}^0 + 3\Gamma_{yi}^i \Gamma_{yi}^i) \\ &= -4 \left(\frac{d^2}{dy^2} \sigma(y) + \left(\frac{d}{dy} \sigma(y) \right)^2 \right),\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$R_{ii} = \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{ii}^y + 2\Gamma_{ii}^y \Gamma_{0y}^0 = -e^{2\sigma(y)} \left(\frac{d^2}{dy^2} \sigma(y) + 4 \left(\frac{d}{dy} \sigma(y) \right)^2 \right), \tag{3.20}$$

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{00}^y + 2\Gamma_{00}^y \Gamma_{y0}^0 = e^{2\sigma(y)} \left(\frac{d^2}{dy^2} \sigma(y) + 4 \left(\frac{d}{dy} \sigma(y) \right)^2 \right). \tag{3.21}$$

O escalar de curvatura 5-dimensional será

$$R = -8 \frac{d^2}{dy^2} \sigma(y) - 20 \left(\frac{d}{dy} \sigma(y) \right)^2 . \quad (3.22)$$

Substituindo os resultados (3.19-3.22) nas equações de campo (3.16), obtemos duas equações independentes, sendo G_{MN} o tensor de Einstein 5-dimensional,

$$G_{yy} = -\Lambda g_{yy} \Rightarrow 6 \left(\frac{d}{dy} \sigma(y) \right)^2 = -\Lambda , \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} G_{00} &= -G_{ii} = - \left[3 \frac{d^2}{dy^2} \sigma(y) + 6 \left(\frac{d}{dy} \sigma(y) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2M_5^3} (2M_5^3 \Lambda + \delta(y - \pi) \lambda_{vis} + \delta(y) \lambda_{esc}) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

A equação (3.23) pode ser integrada diretamente. Considerando a simetria de orbifold, temos

$$\frac{d}{dy} \sigma(y) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} \Rightarrow \sigma(y) = \pm |y| \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} . \quad (3.25)$$

Substituindo o resultado de (3.23) em (3.24),

$$\frac{d^2}{dy^2} \sigma(y) = -\frac{1}{6M_5^3} [\lambda_{vis} \delta(y - \pi) + \lambda_{esc} \delta(y)] . \quad (3.26)$$

Derivando a equação (3.25) duas vezes,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \sigma(y) &= \pm \frac{d}{dy} |y| \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} = \pm [\Theta(y) - \Theta(y - \pi)] \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} , \\ \frac{d^2}{dy^2} \sigma(y) &= \pm 2 [\delta(y) - \delta(y - \pi)] \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Comparando (3.27) com (3.26), chegamos a conclusão que a proposta de Randall-Sundrum será solução das equações de campo se tivermos

$$-\lambda_{vis} = \lambda_{esc} = \pm 12 M_5^3 \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} , \quad (3.28)$$

definindo,

$$\kappa = \frac{1}{l} = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} , \quad (3.29)$$

onde l é a escala de curvatura do bulk. Portanto temos, para (3.28)

$$-\lambda_{vis} = \lambda_{esc} = \pm 12 M_5^3 \kappa . \quad (3.30)$$

Note que é imprescindível que o bulk seja AdS para que haja um *fine tuning* entre os termos de tensão das branas e a constante cosmológica no bulk. Então a solução de Randall-Sundrum será

$$ds^2 = e^{\pm 2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad . \quad (3.31)$$

3.3 Geração da hierarquia

Após termos certeza de que a proposta de Randall-Sundrum é uma solução 5-dimensional das equações de Einstein no vácuo, devemos estudar como o termo exponencial gera a hierarquia entre a escala de Planck efetiva M_4 e a escala de Planck fundamental M_5 . Para isto, consideremos flutuações gravitacionais sem massa em torno da solução (3.31),

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad (3.32)$$

no qual $\hat{g}_{\mu\nu}$ é a métrica 4-dimensional perturbada e $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ representa a pequena perturbação na métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Estamos interessados em perturbações de modo zero, ou seja, os grávitons *físicos* advindos da decomposição de Kaluza-Klein de $\hat{g}_{\mu\nu}$, isto implica que o modo zero deve ser independente de y . Tomando apenas o termo da ação (3.10) que representa a curvatura

$$S = \int d^4x \int dy \sqrt{e^{\pm 8|y|\kappa} [-\hat{g}]} M_5^3 e^{\pm 2\kappa|y|} \hat{R} \quad , \quad (3.33)$$

na qual $\hat{g}$ e $\hat{R}$ são quantidades escritas com (3.32). Então integrando em y temos a ação efetiva em 4 dimensões,

$$S_4 = \pm \int d^4x M_5^3 \sqrt{-\hat{g}} \hat{R} \frac{1}{\kappa} [e^{\pm 2\kappa\pi r_c} - 1] \quad , \quad (3.34)$$

disto podemos indentificar a massa de Planck efetiva M_4 como

$$M_4^2 = \pm \frac{M_5^3}{\kappa} [e^{\pm 2\kappa\pi r_c} - 1] \quad . \quad (3.35)$$

Se tomarmos o sinal negativo na equação acima, vemos que a relação entre as duas escalas de massa depende fracamente do raio de compactificação no limite de κr_c grande,

possibilitando a geração de hierarquia exponencial entre essas duas quantidades apesar do pequeno efeito da exponencial na determinação da escala de Planck. Dado que $g_{\mu\nu}^{vis} = e^{-2\pi\kappa r_c} g_{MN} \hat{\delta}_\nu^M \delta_\nu^N$, é possível mostrar que qualquer massa m_0 medida por um observador na brana visível corresponde a uma massa física $m = e^{-2\pi\kappa r_c} m_0$ na teoria fundamental em mais dimensões apenas com uma única dimensão extra, contrastando com o modelo ADD, que necessita de pelo menos duas dimensões espaciais extras. Esse cenário é chamado modelo de Randall-Sundrum de duas branas, onde a brana em que vivemos possui tensão negativa, o que leva a uma interação gravitacional repulsiva, o que não nos parece razoável. Podemos superar esta dificuldade abandonando a dimensão extra compacta fazendo $r_c \rightarrow \infty$ e escolhendo o sinal positivo para a tensão na brana visível (3.30). Isto foi feito por Randall e Sundrum no trabalho seguinte [31], mostrando que a escala de Planck continua finita apesar de não haver nenhuma compactificação na dimensão extra. Uma consequência disto é a existência de um estado ligado do gráviton sem massa 4-dimensional localizado na brana visível, fazendo com que recobremos a lei da gravitação $1/r^2$ observada em escalas de baixas energias.

Vamos considerar, com o propósito de mostrar a localização deste modo zero na brana, a solução (3.31) perturbada com o sinal negativo [37]

$$ds^2 = [e^{-2\pi\kappa r_c} \eta_{\mu\nu} + h^{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad , \quad (3.36)$$

sendo $h_{\mu\nu} = f(x^\mu, y)$ e $\hat{g}^{\mu\nu} = [e^{-2\pi\kappa r_c} \eta_{\mu\nu} + h^{\mu\nu}]$.

Calculemos então todas as quantidades necessárias para a construção das equações de campo para a perturbação $h_{\mu\nu}$. Os termos não nulos da conexão são

$$\begin{aligned} \Gamma_{y\nu}^\mu &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \hat{g}_{\nu\kappa} \quad , \\ \Gamma_{\nu\alpha}^y &= -\frac{1}{2} \hat{g}^{yy} \frac{\partial}{\partial y} \hat{g}_{\nu\alpha} \quad , \end{aligned} \quad (3.37)$$

e as componentes do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}^{(4)}$ denota a parte puramente 4-dimensional)

$$\begin{aligned} R_{\nu\alpha} &= R_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{\nu\alpha}^y + \Gamma_{\nu\alpha}^y \Gamma_{y\mu}^\mu - \Gamma_{y\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^y - \Gamma_{\nu\mu}^y \Gamma_{y\alpha}^\mu \quad , \\ R_{yy} &= - \left[\frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{\mu y}^\mu + \Gamma_{y\mu}^\beta \Gamma_{y\beta}^\mu \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando o calibre de Randall-Sundrum

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^{\mu\nu} = h^\mu_\mu = 0 \quad ,$$

temos explicitamente

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\alpha}^y &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha}] = \kappa \frac{d}{dy} |y| e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\alpha} - \frac{\partial}{\partial y} h_{\nu\alpha} \quad , \\ \Gamma_{\nu y}^\mu &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [h_{\nu\kappa} + e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\kappa}] [\eta^{\mu\kappa} - e^{2\kappa|y|} h^{\mu\kappa}] \frac{e^{2\kappa|y|}}{2} \\ &= \kappa \frac{d}{dy} |y| e^{2\kappa|y|} \eta_{\nu\kappa} h^{\mu\kappa} - \kappa \frac{d}{dy} |y| \delta_\nu^\mu + \eta^{\mu\kappa} \frac{\partial}{\partial y} h_{\kappa\nu} \quad . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Tomando a derivada primeira em relação a y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{\nu\alpha}^y &= - \left[2\kappa^2 \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_{\nu\alpha} - \kappa e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\alpha} \frac{d^2}{dy^2} |y| \right] \quad , \\ \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{y\nu}^\mu &= 2\kappa e^{2\kappa|y|} \frac{d}{dy} |y| \frac{\partial}{\partial y} h_\nu^\mu + \frac{1}{2} e^{2\kappa|y|} \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_\nu^\mu + \kappa e^{2\kappa|y|} h_\nu^\mu \frac{d^2}{dy^2} |y| - \kappa \delta_\nu^\mu \frac{d^2}{dy^2} |y| \\ &\quad + 2\kappa^2 e^{2\kappa|y|} h_\nu^\mu \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Além disso, com

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu y}^\beta \Gamma_{y\beta}^\mu &= 4\kappa^2 \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 \quad , \\ \Gamma_{\nu\kappa}^y \Gamma_{\mu y}^\mu &= -4\kappa^2 e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\kappa} \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 + 2\kappa \frac{\partial}{\partial y} h_{\nu\kappa} \frac{d}{dy} |y| \quad , \\ \Gamma_{\nu y}^y \Gamma_{\beta\kappa}^y &= \kappa^2 [h_{\nu\kappa} - e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\kappa}] \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 + \kappa \frac{\partial}{\partial y} h_{\nu\kappa} \frac{d}{dy} |y| \quad , \end{aligned} \quad (3.41)$$

é possível calcular explicitamente (3.38)

$$\begin{aligned} R_{yy} &= -4\kappa \left[\kappa \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 - \frac{d^2}{dy^2} |y| \right] \quad , \\ R_{\nu\alpha} &= r R_{\nu\alpha}^{(4)} + \kappa e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\alpha} \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 + \kappa \frac{\partial}{\partial y} h_{\nu\alpha} \frac{d}{dy} |y| + \kappa^2 h_{\nu\alpha} \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 \quad , \end{aligned} \quad (3.42)$$

o escalar de curvatura

$$R = \hat{g}^{\nu\alpha} R_{\nu\alpha} = \hat{g}^{\nu\alpha} R_{\nu\alpha}^{(4)} - 16\kappa^2 \left(\frac{d}{dy} |y| \right)^2 + 4\kappa \frac{d^2}{dy^2} |y| \quad . \quad (3.43)$$

Usando as identidades

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dy}|y|\right)^2 &= 1 \quad , \\ \frac{d^2}{dy^2}|y| &= 2\delta(y) \quad ,\end{aligned}$$

podemos reescrever o tensor de Einstein como

$$G_{\nu\alpha} = G_{\nu\alpha}^{(4)} + 8\kappa^2 h_{\nu\alpha} + 6\kappa^2 e^{-2\kappa|y|} \eta_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_{\nu\alpha} - 8\kappa h_{\nu\alpha} \delta(y) - 6\kappa \eta_{\nu\alpha} e^{-2\kappa|y|} \delta(y) \quad . \quad (3.44)$$

Igualando este resultado a (3.28) na brana, temos

$$G_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_{\mu\nu} - 2\kappa h_{\mu\nu} + 2\kappa^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

e no calibre de Randall-Sundrum

$$G_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{1}{2} e^{2\kappa|y|} \frac{\partial^2}{\partial x^c \partial x_c} h_{\mu\nu} \quad .$$

Disto obtemos as equações de campo para as perturbações $h_{\mu\nu}(x^\mu, y)$

$$\left[\frac{1}{2} e^{2\kappa|y|} \frac{\partial^2}{\partial x^c \partial x_c} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\kappa^2 - 2\kappa\delta(y) \right] h_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (3.45)$$

Para obtermos os modos de $h_{\mu\nu}$ devemos utilizar a decomposição de Kaluza-Klein para estas flutuações 5-dimensionais, que correspondem a um número infinito de modos do campo $h_{\mu\nu}(x^\mu)$ vistos por um observador confinado na brana, que correspondem aos modos de Fourier dos campos em 5 dimensões $h_{\mu\nu}(x^\mu, y)$. Isto só é possível se a dimensão extra for periódica e compactada com raio $2\pi r_c$, o que é o caso do modelo de Randall-Sundrum com duas branas, mas não do modelo com dimensão extra infinita. Para este último em vez de uma série de Fourier obtemos uma transformada de Fourier e em vez de um espectro discretizado infinito para os modos $h_{\mu\nu}(x^\mu)$ teremos um espectro contínuo. As perturbações gravitacionais em modelos de mundo brana foram estudadas de forma pormenorizada em [33]. Para verificar se o modo zero das flutuações está confinado na brana, para que a lei da gravitação de Newton seja recobrada, fazemos a seguinte separação de variáveis

$$h_{\mu\nu}(x^\mu, y) = e^{imx} \Omega_{\mu\nu}(y),$$

substituindo na equação de campo (3.45), obtemos

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4\kappa\delta(y) + m^2 e^{2\kappa|y|} - 4\kappa^2 \right] \Omega_{\mu\nu}(y) = 0, \quad (3.46)$$

Para o modo zero, isto é, para $m = 0$, a solução é

$$\Omega^0 = e^{-2\kappa|y|}, \quad (3.47)$$

que é algo que procurávamos para conseguir o confinamento deste modo, já que o alcance do gráviton de modo zero, segundo esta solução é $1/2\kappa = l/2$, onde l é a escala de curvatura do bulk, e mede a penetração dos grávitons na dimensão extra. Esta escala é tipicamente pequena, possibilitando o confinamento do modo zero. A solução geral para a equação de campo (3.46) é uma combinação linear de funções de Bessel do primeiro tipo $J_n(x)$ de segundo tipo $Y_n(x)$,

$$\Omega_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}J_2(my) + B_{\mu\nu}Y_2(my), \quad (3.48)$$

na qual $A_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno. No modelo de Randall-Sundrum com dimesão extra infinita, as condições de contorno levam ao espectro contínuo dos modos de Kaluza-Klein, enquanto no modelo de duas branas com dimensão extra compacta leva a discretização desses modos.

Acerca das idéias dos modelos de Randall-Sundrum, podemos dizer que sempre podemos identificar uma dessas hipersuperfícies como o nosso universo e outra como uma contraparte *escondida*. No primeiro desses cenários, a nossa brana possui tensão negativa e é possível gerar completamente a hierarquia com apenas uma dimensão extra compactificada com um raio $r_c \leq 0.1mm$, enquanto que no segundo cenário fazemos a brana escondida tender ao infinito, possibilitando o aparecimento de uma dimensão extra infinita, que não gera completamente a hierarquia mas apresenta o modo zero de Kaluza-Klein completamente localizado na brana física com tensão positiva.

3.4 Formalismo Shiromizu-Maeda-Sasaki

Esta seção se baseia no trabalho de Shiromizu, Maeda e Sasaki [38] acerca de uma apresentação covariante para as quantidades físicas descritas nos modelos de mundo brana. A idéia fundamental é projetar todas as quantidades geométricas 5-dimensionais em 4 dimensões usando a equação de Gauss e a equação de Codazzi.

Primeiramente, seguindo o trabalho de W. Israel [36], buscaremos as relações de Gauss e Codazzi. Para isso consideremos o bulk como sendo uma variedade M com métrica g_{MN} de assinatura $(+ - - - - \dots)$ em D dimensões, uma hipersuperfície V $(D - 1)$ dimensional, que será identificado como uma brana, com métrica $q_{\mu\nu}$ também de assinatura $(+ - - - - \dots)$, imersa em M .

Consideremos uma curva $\lambda \in M$ parametrizada por t , e um campo vetorial $\mathbf{A}$ definido nessa curva, então sua derivada absoluta nessa curva será

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right)^M \equiv \frac{\partial}{\partial t} A^M + A^N \Gamma_{NP}^M \frac{d}{dt} x^P \quad . \quad (3.49)$$

Sendo $\mathbf{n}$ o vetor normal a hipersuperfície V ,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon(\mathbf{n}) \quad , \quad (3.50)$$

onde $\varepsilon(\mathbf{n}) = +1$ quando $\mathbf{n}$ for do tipo espaço (V tipo tempo) e $\varepsilon(\mathbf{n}) = -1$ para $\mathbf{n}$ do tipo tempo (V tipo espaço).

Utilizando a base de vetores $\mathbf{e}_{(\alpha)}$ do espaço tangente $T(V)$ de V podemos escrever o deslocamento infinitesimal em V como

$$ds = \mathbf{e}_{(\alpha)} d\xi^\alpha \quad , \quad (3.51)$$

sendo $\{\xi^\alpha\}$ o sistema de coordenadas da hipersuperfície.

A derivada covariante de um campo vetorial A^α não pertencente a $T(V)$, intrínseca a V , é

$$A_{\alpha;\beta} = \mathbf{e}_{(\alpha)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} A^\delta \Gamma_{\delta,\alpha\beta} \quad , \quad (3.52)$$

sendo

$$\Gamma_{\delta, \alpha\beta} = \mathbf{e}_{(\delta)} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathbf{e}_{(\alpha)} \quad . \quad (3.53)$$

Assim, a derivada covariante intrínseca e o tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ associado, não dependem do bulk onde V está mergulhada. Estas quantidades são invariantes frente a mudança de M que preserva a métrica $q_{\mu\nu}$ de V .

As propriedades geométricas não intrínsecas aparecem quando perguntamos como V se apresenta para um observador em M . Este tipo de quantidades são medidas através da variação do vetor unitário (3.50) em relação ao sistema de coordenadas $\{\xi^\alpha\}$, ou seja devemos calcular

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{n} = K_\alpha^\beta \mathbf{e}_{(\beta)} \quad , \quad (3.54)$$

no qual $K_{\alpha\beta}$ é definido como a *curvatura extrínseca* de V com relação a M . Multiplicando ambos lados desta equação por $\mathbf{e}_{(\lambda)}$

$$K_\beta^\alpha \mathbf{e}_{(\alpha)} \mathbf{e}_{(\lambda)} = \mathbf{e}_{(\lambda)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathbf{n} \quad , \quad (3.55)$$

e usando o fato de que $q_{\alpha\lambda} = \mathbf{e}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{e}_{(\lambda)}$, temos

$$K_{\beta\lambda} = \mathbf{e}_{(\lambda)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathbf{n} \quad , \quad (3.56)$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{(\beta)}) = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{(\beta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_{(\beta)} \quad , \quad (3.57)$$

pois $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_{(\beta)}$, logo

$$K_{\alpha\beta} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_{(\beta)} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathbf{e}_{(\alpha)} = K_{\beta\alpha} \quad . \quad (3.58)$$

Podemos obter a equação de Gauss-Weingarten usando este resultado. Para isso multipliquemos toda equação por $\mathbf{n}$, e usando (3.50)

$$-\varepsilon(\mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{n} K_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.59)$$

multiplicando ambos lados por $\varepsilon(\mathbf{n})$ obtemos

$$-\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_{(\beta)} = \varepsilon(\mathbf{n}) K_{\alpha\beta} \mathbf{n} \quad , \quad (3.60)$$

usando o resultado

$$-\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_{(\beta)} = \mathbf{e}_{(\delta)} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta, \quad (3.61)$$

chegamos a equação de Gauss-Weingarten

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathbf{e}_\alpha = -\varepsilon(\mathbf{n}) K_{\alpha\beta} \mathbf{n} + \mathbf{e}_\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\delta. \quad (3.62)$$

Para encontrarmos as equações de Gauss e Codazzi, começamos operando com $\partial/\partial \xi^\alpha$ em (3.62) usando (3.54) e (3.58),

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon^\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathbf{e}_{(\alpha)} \right) = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} K_\gamma^\delta \mathbf{e}_{(\delta)} + \mathbf{e}_{(\delta)} \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta K_{\delta\gamma} \mathbf{n} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\delta \mathbf{e}_\delta. \quad (3.63)$$

Se considerarmos o campo vetorial não tangente $\mathbf{A}(u, v)$ definido em uma superfície $x^M = x^M(u, v) \in M$, podemos calcular a relação de comutação de Ricci, que define o tensor de curvatura $R_{QNP}^M A^Q$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right) \mathbf{A} \right]^M = \left[\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right] \mathbf{A}^M = R_{QNP}^M A^Q \frac{\partial x^N}{\partial u} \frac{\partial x^P}{\partial v}, \quad (3.64)$$

que pode ser calculada usando (3.62) e (3.63) com $\varepsilon(\mathbf{n}) = -\mathbf{1}$. Assim,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^\gamma}, \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \right] \mathbf{e}_{(\alpha)} &= \mathbf{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} K_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} K_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta K_{\gamma\delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta K_{\delta\beta} \right) + \\ &\mathbf{e}_{(\delta)} \left(K_{\alpha\beta} K_\gamma^\delta - K_{\alpha\delta} K_\beta^\delta + \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta - \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\delta \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Podemos agora representar explicitamente o tensor de curvatura extrínseco R_{NQP}^M em função das quantidades intrínsecas a V , então usando (3.64),

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi^\gamma}, \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \right] e_{(\alpha)}^M = R_{QLR}^M e_{(\alpha)}^Q e_{(\gamma)}^L e_{(\beta)}^R, \quad (3.66)$$

comparando este resultado com (3.65) chegamos a equação de Gauss, que corresponde a parte não normal

$$R_{MQLR} e_{(\delta)}^M e_{(\alpha)}^Q e_{(\gamma)}^L e_{(\beta)}^R = K_{\alpha\beta} K_{\delta\gamma} - K_{\alpha\gamma} K_{\delta\beta} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \Gamma_{\delta\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \Gamma_{\delta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\delta\lambda\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\delta\lambda\beta} \right),$$

ora, o termo entre parênteses nada mais é do que o tensor de curvatura da hipersuperfície V , $R_{\delta\alpha\gamma\beta}$, logo a equação de Gauss pode ser escrita como

$$R_{MQLR} e_{(\delta)}^M e_{(\alpha)}^Q e_{(\gamma)}^L e_{(\beta)}^R = K_{\alpha\beta} K_{\delta\gamma} - K_{\alpha\gamma} K_{\delta\beta} + R_{\delta\alpha\gamma\beta}. \quad (3.67)$$

Da parte normal, obtemos a equação de Codazzi

$$R_{MQLR}n^M e_{(\alpha)}^Q e_{(\gamma)}^L e_{(\beta)}^R = K_{\alpha\gamma;\beta} - K_{\alpha\beta;\gamma} \quad . \quad (3.68)$$

A métrica $q_{\alpha\beta}$ induzida na hipersuperfície é relacionada com a métrica g_{MN} de M por,

$$q_{\alpha\beta} = g_{MN} e_{(\alpha)}^M e_{(\beta)}^N - n_M n_N \quad , \quad (3.69)$$

e usando as relações

$$\begin{aligned} e_{\delta}^M &= e^M e_{\delta} = q_{\delta}^M \quad , \\ e_{\alpha}^Q &= e^Q e_{\alpha} = q_{\alpha}^Q \quad , \end{aligned}$$

podemos reescrever as equações de Gauss e Codazzi, respectivamente, como

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = R_{NPQ}^M q_M^{\alpha} q_{\beta}^N q_{\gamma}^P q_{\delta}^Q + K_{\gamma}^{\alpha} K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\gamma} \quad , \quad (3.70)$$

$$K_{\alpha;\beta}^{\beta} - K_{;\alpha} = R_{PQ} n^Q q_{\alpha}^P \quad , \quad (3.71)$$

sendo $K = K_{\alpha}^{\alpha}$ o traço da curvatura extrínseca.

Vamos fazer um estudo das quantidades geométricas envolvidas o mais geral possível sem nos atermos, por enquanto, a modelos de universo tipo brana. Não faremos distinção entre os índices da hipersuperfície ($V, q_{\mu\nu}$) e os do bulk (M, g_{AB}) tomando ambos representados por letras gregas.

Da expressão (3.70) segue que

$$\begin{aligned} q_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - n_{\mu} n_{\nu} \quad , \\ q^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - n^{\mu} n^{\nu} \quad , \\ q_{\nu}^{\mu} &= \delta_{\nu}^{\mu} - n^{\mu} n_{\nu} \quad , \end{aligned} \quad (3.72)$$

além disso

$$\begin{aligned} n_{\mu} n^{\mu} &= 1 \quad , \\ q_{\mu\nu} n^{\mu} &= 0 \quad , \\ g_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (3.73)$$

Desta forma reescrevemos as equações de Gauss e Codazzi, respectivamente, como

$${}^{(4)}R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = {}^{(5)}R_{\nu\rho\delta}^{\mu} q_{\mu}^{\alpha} q_{\beta}^{\nu} q_{\gamma}^{\rho} q_{\delta}^{\sigma} + K_{\gamma}^{\alpha} K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} - K_{\beta\gamma} \quad , \quad (3.74)$$

$$K_{\mu;\nu}^{\nu} - K_{;\mu} = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^{\sigma} q_{\mu}^{\rho} \quad . \quad (3.75)$$

Precisamos das equações de Einstein para relacionar estas quantidades geométricas com as fontes de energia-momento, mas para fazer isso necessitamos do tensor de Ricci, que aparece quando contraímos α e γ na equação de Gauss usando q_{α}^{γ}

$${}^{(4)}R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} q_{\alpha}^{\gamma} = {}^{(5)}R_{\nu\rho\delta}^{\mu} q_{\alpha}^{\gamma} q_{\mu}^{\alpha} q_{\beta}^{\nu} q_{\gamma}^{\rho} q_{\delta}^{\sigma} + K_{\gamma}^{\alpha} K_{\beta\delta} q_{\alpha}^{\gamma} - q_{\alpha}^{\gamma} K_{\delta}^{\alpha} - K_{\beta\gamma} \quad ,$$

mas

$$K = q_{\alpha}^{\gamma} K_{\gamma}^{\alpha} \quad ,$$

$$q_{\mu}^{\alpha} = q^{\alpha\lambda} q_{\lambda\mu} \quad ,$$

então, usando as identidades (3.70) temos

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{\beta\delta} &= {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} q_{\alpha}^{\gamma} q^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\mu} - n_{\lambda} n_{\nu}) q_{\beta}^{\nu} q_{\gamma}^{\rho} q_{\delta}^{\sigma} + K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\alpha} \\ &= {}^{(5)}R_{\lambda\nu\rho\sigma} q^{\gamma\lambda} q_{\beta}^{\nu} q_{\gamma}^{\rho} q_{\delta}^{\sigma} - {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} q_{\alpha}^{\gamma} q^{\alpha\lambda} n_{\lambda} n_{\mu} q_{\beta}^{\nu} q_{\gamma}^{\rho} q_{\delta}^{\sigma} + K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\alpha} \quad , \end{aligned}$$

usando novamente (3.70)

$$\begin{aligned} &= {}^{(5)}R_{\lambda\nu\rho\sigma} (g^{\gamma\lambda} - n^{\gamma} n^{\lambda}) (\delta_{\gamma}^{\rho} - n^{\rho} n_{\gamma}) q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} + K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\alpha} \quad , \quad (3.76) \\ &= {}^{(5)}R_{\lambda\nu\rho\sigma} g^{\lambda\rho} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} - {}^{(5)}R_{\lambda\nu\rho\sigma} g^{\gamma\lambda} n^{\rho} n_{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} + {}^{(5)}R_{\lambda\nu\rho\sigma} n^{\sigma} n^{\lambda} n^{\rho} n_{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} \\ &\quad - {}^{(5)}R_{\lambda\nu\rho\sigma} n^{\sigma} n^{\lambda} \delta_{\gamma}^{\rho} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} + K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\alpha} \quad , \end{aligned}$$

finalmente,

$${}^{(4)}R_{\beta\delta} = {}^{(5)}R_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} - {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\gamma} n^{\rho} n_{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} + K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\alpha} \quad . \quad (3.77)$$

Calculando o escalar de Ricci 4-dimensional ${}^{(4)}R = q^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{\beta\delta} q^{\beta\delta} &= {}^{(5)}R_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} q^{\beta\delta} - {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\gamma} n^{\rho} n_{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} q^{\beta\delta} + q^{\beta\delta} K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\alpha} q^{\beta\delta} \quad , \\ {}^{(4)}R &= {}^{(5)}R_{\nu\sigma} q^{\nu\sigma} - {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\gamma} n^{\rho} n_{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} q^{\beta\delta} - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} + K^2. \quad (3.78) \end{aligned}$$

Usando (3.77) e (3.78) podemos construir o tensor de Einstein 4-dimensional ${}^{(4)}G_{\beta\delta}$

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\beta\delta} &= {}^{(4)}R_{\beta\delta} - \frac{1}{2}q_{\beta\delta}{}^{(4)}R, \\ &= {}^{(5)}R_{\nu\sigma}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} - {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\gamma}n^{\rho}n_{\gamma}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} + KK_{\beta\sigma} - K_{\delta}^{\alpha}K_{\beta\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2}q_{\beta\delta} \left[{}^{(5)}R_{\tau\theta}q^{\tau\theta} - {}^{(5)}R_{\tau\rho\theta}^{\gamma}q^{\beta\delta}n_{\gamma}n^{\rho}q_{\beta}^{\tau}q_{\delta}^{\theta} - K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} \right] , \end{aligned}$$

definindo

$$\tilde{E}_{\beta\delta} \equiv {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\gamma}n^{\rho}n_{\gamma}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} , \quad (3.79)$$

então

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\beta\delta} &= \left[{}^{(5)}R_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}q_{\nu\sigma}{}^{(5)}R_{\tau\theta} \left(g^{\tau\theta} - n^{\tau}n^{\theta} \right) \right] q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} - \tilde{E}_{\beta\delta} \\ &\quad + KK_{\alpha\beta} - K_{\delta}^{\alpha}K_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}q_{\beta\delta} \left(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2}{}^{(5)}R_{\tau\rho\theta}^{\gamma}n_{\gamma}n^{\rho}q_{\beta}^{\tau}q_{\delta}^{\theta}q^{\beta\delta}q_{\beta\delta} \quad (3.80) \end{aligned}$$

Utilizando as relações (3.73), obtemos a seguinte relação

$$\frac{1}{2}{}^{(5)}R_{\tau\theta}g_{\nu\sigma}n^{\tau}n^{\sigma}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} = \frac{1}{2}{}^{(5)}R_{\tau\theta}q_{\beta\delta}n^{\tau}n^{\theta} ,$$

que substituída na equação (3.80) dá como resultado

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\beta\delta} &= {}^{(5)}G_{\nu\sigma}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} - \tilde{E}_{\beta\delta} + KK_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha}K_{\beta\delta} - \frac{1}{2}q_{\beta\delta} \left(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}q_{\beta\delta} \left[\left(g^{\tau\theta} - n^{\tau}n^{\theta} \right) {}^{(5)}R_{\lambda\tau\rho\theta}n^{\lambda}n^{\rho} + R_{\tau\theta}n^{\tau}n^{\theta} \right] . \end{aligned}$$

Se usarmos a simetria do tensor de Riemman

$$\begin{aligned} {}^{(5)}R_{\lambda\tau\rho\theta} &= -{}^{(5)}R_{\lambda\theta\rho\tau} = -{}^{(5)}R_{\theta\rho\tau\lambda} = {}^{(5)}R_{\theta\rho\lambda\tau} \\ g^{\lambda\rho}n^{\tau}n^{\theta}{}^{(5)}R_{\lambda\tau\rho\theta} &= g^{\tau\theta}n^{\lambda}n^{\rho}{}^{(5)}R_{\lambda\tau\rho\theta} , \end{aligned}$$

então

$${}^{(5)}R_{\lambda\tau\rho\theta}n^{\lambda}n^{\theta}n^{\tau}n^{\rho} = 0 , \quad (3.81)$$

Estas relações nos permitem escrever o tensor de Einstein como

$${}^{(4)}G_{\beta\delta} = {}^{(5)}G_{\nu\sigma}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} - \tilde{E}_{\beta\delta} + KK_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha}K_{\beta\alpha} \quad (3.82)$$

$$- \frac{1}{2}q_{\beta\delta} \left(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} \right) + q_{\alpha\beta}{}^{(5)}R_{\tau\theta}n^{\tau}n^{\theta} , \quad (3.83)$$

com

$$\tilde{E}_{\beta\delta} = {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\gamma} n^{\rho} n_{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} \quad . \quad (3.84)$$

Esta última expressão pode ser escrita em função do tensor de Weyl 5-dimensional se usarmos a decomposição do tensor de Riemann no tensor de Ricci, escalar de Ricci e tensor de Weyl, tal como em [1]

$$\begin{aligned} {}^{(5)}R_{\gamma\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{D-2} [g_{\gamma\rho} {}^{(5)}R_{\nu\sigma} - g_{\gamma\sigma} {}^{(5)}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} {}^{(5)}R_{\gamma\sigma} + g_{\nu\sigma} {}^{(5)}R_{\gamma\rho}] \\ &\quad - \frac{{}^{(5)}R}{(D-1)(D-2)} [g_{\gamma\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\gamma\sigma} g_{\nu\rho}] + {}^{(5)}C_{\gamma\nu\rho\sigma} \quad , \end{aligned}$$

no qual D é o número total de dimensões, em nosso caso consideraremos $D = 5$. Deste modo podemos reescrever(3.84),

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\beta\delta} &= \frac{1}{3} [g_{\gamma\rho} {}^{(5)}R_{\nu\sigma} - g_{\gamma\sigma} {}^{(5)}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} {}^{(5)}R_{\gamma\sigma} + g_{\nu\sigma} {}^{(5)}R_{\gamma\rho}] n^{\rho} n^{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{12} [g_{\gamma\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\gamma\sigma} g_{\nu\rho}] {}^{(5)}R n^{\rho} n^{\sigma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} + {}^{(5)}C_{\gamma\nu\rho\sigma} n^{\rho} n^{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} \quad , \\ &= \frac{1}{3} [{}^{(5)}R_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} + g_{\nu\sigma} n^{\rho} n^{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} {}^{(5)}R_{\gamma\rho}] \\ &\quad - \frac{1}{12} g_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} {}^{(5)}R + {}^{(5)}C_{\gamma\nu\rho\sigma} n^{\rho} n^{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} \quad . \end{aligned}$$

Consideremos agora a equação de Einstein 5-dimensional

$${}^{(5)}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} {}^{(5)}R = \kappa_5^2 T_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.85)$$

de onde segue o escalar de Ricci a partir da contração dos índices α e β

$${}^{(5)}R = -\frac{2}{3} \kappa_5^2 T_{\alpha}^{\alpha} \quad . \quad (3.86)$$

Assim sendo, obtemos

$${}^{(5)}R_{\nu\sigma} = \frac{\kappa_5^2}{3} [3T_{\nu\sigma} - \kappa_5^2 g_{\nu\sigma} T_{\alpha}^{\alpha}] \quad . \quad (3.87)$$

Definindo

$$E_{\beta\delta} \equiv {}^{(5)}C_{\gamma\nu\rho\sigma} n^{\rho} n^{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} \quad . \quad (3.88)$$

Substituindo os resultados (3.86)-(3.88) na expressão para $\tilde{E}_{\beta\delta}$ chegamos a

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\beta\delta} &= {}^{(5)}C_{\gamma\nu\rho\sigma} n^{\rho} n^{\gamma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} + \frac{\kappa_5^2}{3} T_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\nu} q_{\delta}^{\sigma} \\ &\quad - \frac{\kappa_5^2}{6} q_{\beta\delta} T_{\alpha}^{\alpha} + \frac{\kappa_5^2}{3} T_{\gamma\rho} n^{\rho} n^{\gamma} q_{\beta\delta} \quad . \end{aligned} \quad (3.89)$$

Depois disto, a equação de Einstein (3.80) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} {}^{(5)}G_{\beta\delta} &= \frac{2}{3}\kappa_5^2 \left[T_{\nu\sigma} q_\beta^\nu q_\delta^\sigma + \left(T_{\gamma\rho} n^\gamma n^\rho - \frac{1}{4} T_\alpha^\alpha \right) \right] \\ &+ K K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} q_{\beta\delta} (K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) - E_{\beta\delta} \quad . \end{aligned} \quad (3.90)$$

Este é um dos resultados que procurávamos, o outro vem da equação de Codazzi (3.71)

$$\begin{aligned} D_\alpha K_\nu^\alpha - D_\mu K &= \frac{K_5^2}{3} (3T_{\nu\rho} - T_\alpha^\alpha g_{\nu\rho}) n^\nu n^\rho \\ &= \kappa_5^2 T_{\nu\rho} n^\nu q_\mu^\rho - \frac{\kappa_5^2}{3} T_\alpha^\alpha g_{\nu\rho} n^\nu q_\mu^\rho \quad , \end{aligned}$$

mas como $g_{\nu\rho} n^\nu q_\mu^\rho = 0$, teremos

$$D_\alpha K_\mu^\alpha - D_\mu K = \kappa_5^2 T_{\nu\rho} n^\nu q_\mu^\rho \quad . \quad (3.91)$$

Os resultados (3.90) e (3.91) foram obtidos de forma geral, levando em conta apenas as equações de Gauss, Codazzi e Einstein. Para usarmos estas relações obtidas no estudo de modelos de mundo brana devemos escrever o tensor energia momento 5-dimensional na forma

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda_5 g_{\mu\nu} + \delta(y) [\tau_{\mu\nu} - \lambda q_{\mu\nu}] \quad . \quad (3.92)$$

O primeiro termo é a contribuição ao tensor energia-momento da constante cosmológica do bulk, o segundo termo é todo confinado na brana, formado pela energia de vácuo ou tensão da brana λ e pelo tensor energia momento $\tau_{\mu\nu}$ da matéria e campos confinados. Esta contribuição da brana pode ser totalmente determinada se soubermos quais são os campos e partículas presentes na brana. Disto temos que $\tau_{\mu\nu} n^\nu = 0$, pois não pode haver fluxo na direção y de partículas e campos que são confinados.

Há uma forma muito útil de relacionar a curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ ao tensor energia-momento da brana. Tal forma foi obtida por W.Israel [36] e é conhecida como condições de junção de Israel. Derivaremos a seguir tais vínculos.

Seja então uma hipersuperfície $(V, q_{\mu\nu})$ que divide a variedade $(M, g_{\mu\nu})$ em dois subespaços com extremidades M^+ e M^- . Suponhamos que V seja uma camada superficial,

então a curvatura extrínseca medida em uma das extremidades deve ser diferente da medida no outro, isto é,

$$K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^- = \gamma_{\mu\nu} \quad , \quad (3.93)$$

sendo em geral $\gamma_{\mu\nu}$ é um tensor não nulo, que segundo a idéia de Israel é devido a existência de uma distribuição de energia finita sobre a hipersuperfície V . Esta descontinuidade na curvatura extrínseca pode então em princípio ser expressa em função deste tensor energia momento definido em $(V, q_{\mu\nu})$. Usaremos o chamado sistema de coordenadas normais definidas pelo conjunto $x^\mu = \{x^\alpha, y\}$, onde y representa a distância geodésica de um ponto em V até um ponto em M . Seja então uma quantidade finita $y = \epsilon$ que é a localização da extremidade V^- e V^+ localizada em $y = 0$. Com isso o vetor normal a V pode ser expresso por

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \delta_\alpha^y \\ K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^- &= K_{\mu\nu}^\pm = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} g_{\mu\nu} \right]^\pm . \end{aligned} \quad (3.94)$$

Da equação de Codazzi (3.71), temos

$$R_{yQLR} e_{(\alpha)}^Q e_{(\gamma)}^L e_{(\beta)}^R = K_{\alpha\gamma;\beta} - K_{\alpha\beta;\gamma} \quad ,$$

tomando a componente normal desta relação,

$$R_{yQyR} e_{(\alpha)}^Q e_{(\beta)}^R = \frac{\partial}{\partial y} K_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.95)$$

Tomando o traço do tensor de Riemann na equação de Gauss (3.67) temos

$$R_{QMR}^M e_{(\alpha)}^Q e_{(\beta)}^R = K_{\alpha\beta} K_M^M - K_\beta^M K_{\alpha M} + R_{\alpha M \beta}^M \quad . \quad (3.96)$$

Dos resultados (3.95) e (3.96) chegamos a

$$R_{QR} e_{(\alpha)}^Q e_{(\beta)}^R = -\frac{\partial}{\partial y} K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} K_M^M - K_\beta^M K_{\alpha M} + R_{\alpha M \beta}^M \equiv -\frac{\partial}{\partial y} K_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.97)$$

Mas da equação de Einstein

$$R_{QR} = \kappa_5^2 \left(T_{QR} - \frac{1}{3} g_{QR} T_M^M \right) \quad ,$$

vemos que ela pode ser integrada usando (3.97) no intervalo $[0, \epsilon]$

$$\int_0^\epsilon R_{QR} e_{(\alpha)}^Q e_{(\beta)}^R dy = \gamma_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} \epsilon \quad ,$$

tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\kappa_5^2 \int_0^\epsilon \left(T_{QR} - \frac{1}{3} g_{QR} T_M^M \right) e_{(\alpha)}^Q e_{(\beta)}^R \right] = \gamma_{\alpha\beta} \quad .$$

Definindo o tensor energia momento da hipersuperfície V por

$$S_{\alpha\beta} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^\epsilon T_{QR} e_{(\alpha)}^Q e_{(\beta)}^R \right] \quad ,$$

podemos relacionar a descontinuidade $\gamma_{\alpha\beta}$ da curvatura extrínseca com o conteúdo de energia da brana tal como

$$\gamma_{\alpha\beta} = \kappa_5^2 \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} q_{\alpha\beta} S_\rho^\rho \right] \quad , \quad (3.98)$$

que são as equações de junção de Israel. A prescrição consiste em considerar o tensor métrico contínuo ao longo da brana, mas com derivadas descontínuas. Essa descontinuidade na derivada indica a existência de uma distribuição de energia na hipersuperfície. Então se integrarmos esta parte descontínua nas equações de Gauss e Codazzi termos explicitamente a relação, da mesma forma que em (3.98), que identifica a descontinuidade na curvatura da brana com seu conteúdo de energia.

Usando a simetria espelho Z_2 podemos calcular tanto a curvatura extrínseca em V^+ como em V^- , portanto podemos omitir tais índices. Substituindo as equações de junção (3.98) em (3.90) com

$$S_{\mu\nu} = -\lambda q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \quad ,$$

chegamos nas equações para a interação gravitacional na brana

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} &= \frac{\kappa_5^2}{2} \left(\Lambda + \frac{\kappa_5^2}{6} \lambda^2 \right) q_{\mu\nu} + 8\pi G_4 \tau_{\mu\nu} \\ &+ \frac{\kappa_5^4}{4} \left(\frac{1}{3} \tau \tau_{\mu\nu} + \frac{1}{4} q_{\mu\nu} \tau^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} - \tau_{\mu\alpha} \tau_\nu^\alpha - \frac{1}{6} q_{\mu\nu} \tau^2 \right) - E_{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (3.99)$$

com

$$E_{\mu\nu} = {}^{(5)}C_{\beta\rho\sigma}^\alpha n_\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\rho \quad .$$

Observemos que as equações de Einstein usuais são obtidas se fizermos $\kappa_5 \rightarrow 0$ mantendo G_4 constante, e que o lado esquerdo da equação (3.99) contém termos quadráticos do tensor energia momento dos campos e matéria na brana. Estes termos são de grande importância na época em que o universo era jovem, onde as energias envolvidas eram da ordem da escala de Planck e, portanto, seus efeitos não podem ser desprezados. Além disso, temos ainda o termo $E_{\mu\nu}$, que é a parte *elétrica* do tensor de Weyl. Este termo carrega a informação sobre o campo gravitacional fora da brana. Pode-se mostrar que este termo é nulo quando o bulk é um espaço-tempo puramente AdS. Em geral, para os outros tipos de bulk a parte elétrica do tensor de Weyl será diferente de zero. Segundo [38], podemos relacionar tal quantidade com o conteúdo de matéria confinado na brana.

Tomando a equação de Codazzi (3.91) e a expressão (3.98), chegaremos a equação de conservação para a matéria na brana

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K \propto D_\nu \tau_\mu^\nu = 0 \quad ,$$

além disso, das identidades de Bianchi,

$$D^{\mu(4)} G_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

implicam na relação entre $E_{\mu\nu}$ e $\tau_{\mu\nu}$

$$D^\mu E_{\mu\nu} = \frac{\kappa_5^4}{4} \left[\tau^{\alpha\beta} (D_\nu \tau_{\alpha\beta} - D_\beta \tau_{\nu\alpha}) + \frac{1}{3} D^\mu \tau (\tau_{\mu\nu} - q_{\mu\nu} \tau) \right] \quad .$$

O termo $E_{\mu\nu}$ não é possível de ser determinado sem conhecermos em detalhes a geometria do bulk espaço-temporal, mas sua divergência é conhecida a partir da configuração de matéria da brana. Para um observador confinado, este termo aparece como um efeito *não-local* ou *fantasma*, já que não pode ser determinado pelas informações puramente 4-dimensionais. Esta expressão mostra qualitativamente como as variações 4-dimensionais no conteúdo de matéria e energia confinados podem ser fontes para os modos de Kaluza-Klein.

A equação para o campo gravitacional induzido (3.99) apresenta duas importantes modificações das equações de Einstein 4-dimensionais padrão. Estas correções surgem

a partir dos efeitos da dimensão extra. A primeira delas é o aparecimento de correções no regime de altas energias, representado pelo segundo termo do lado direito de (3.99) que é proporcional a termos quadráticos no tensor energia-momento da matéria e campos confinados. Tal termo é desprezível se a tensão da brana ou energia de vácuo λ for muito maior que a densidade de energia ρ contida na brana, mas domina o regime em que $\lambda \ll \rho$. O segundo fator modificador é a projeção do tensor de Weyl na brana representado por $E_{\mu\nu}$. Este fator carrega os efeitos dos grávitons 5-dimensionais. Por construção, $E_{\mu\nu}$ não tem traço e possui 9 componentes independentes que são reduzidas a 5 devido a equação (3.100).

3.5 Campos escalares no Bulk

Pode-se mostrar que a solução (3.48) não se aplica apenas ao setor gravitacional. No trabalho [39], os autores mostraram que se obtém a mesma equação diferencial para a parte do campo escalar que é função da dimensão extra. A proposta é estender a decomposição de Kaluza-Klein para os campos no bulk não gravitacionais. Consideremos a ação para um campo escalar no bulk, cuja dimensão extra é compactificada com os pontos fixos de orbifold sendo a posição das branas ,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \sqrt{-g_5} g^{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x^A} \Phi \frac{\partial}{\partial x^B} \Phi - m^2 \Phi^2 \right] , \quad (3.100)$$

onde m é da ordem de M_5 . Explicitamente

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \sqrt{-g_5} \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi + g^{yy} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi - m^2 \Phi \right] , \quad (3.101)$$

substituindo a solução de Randall-Sundrum (3.31), com

$$\sqrt{-g_5} = e^{-4\sigma(y)}$$

temos

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int_{\pi}^{\pi} dy r_c \left[e^{-2\sigma(y)} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi - \frac{1}{r_c^2} e^{-4\sigma(y)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi - m^2 e^{-4\sigma(y)} \Phi^2 \right] , \quad (3.102)$$

mas

$$\begin{aligned} e^{-4\sigma(y)}\Phi\frac{\partial}{\partial y}\Phi &= \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-4\sigma(y)}\Phi\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right] - \Phi\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-4\sigma(y)}\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right] \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-4\sigma(y)}\frac{\partial}{\partial y}\Phi\frac{\partial}{\partial y}\Phi dy &= \left[e^{-4\sigma(y)}\Phi\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-4\sigma(y)}\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right] dy, \end{aligned} \quad (3.103)$$

e usando as condições de Israel

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right]_{y=\pi} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right]_{y=-\pi},$$

temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-4\sigma(y)}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right] dy = - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left[e^{-4\sigma(y)}\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right] dy,$$

então podemos reescrever a ação (3.102) como

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} r_c dy \left[e^{-2\sigma(y)} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi - \frac{1}{r_c^2} \Phi \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-4\sigma(y)} \frac{\partial}{\partial y} \Phi \right] - m^2 e^{-4\sigma(y)} \Phi^2 \right]. \quad (3.104)$$

Para realizarmos a decomposição de Kaluza-Klein escrevemos $\Phi(x^\mu, y)$ como a seguinte soma de modos

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_n \psi_n(x^\mu) \frac{\phi_n(y)}{\sqrt{r_c}}, \quad (3.105)$$

e substituindo na ação (3.104) temos considerando $\phi_n(y)$ com a normalização

$$\int_{-\pi}^{\pi} dy e^{-2\sigma(y)} \phi_n \phi_m = \delta_{nm}, \quad (3.106)$$

a equação de movimento para $\phi_n(y)$

$$-\frac{\phi_n}{r_c^2} \frac{d}{dy} \left[e^{-4\sigma(y)} \frac{d\phi_n}{dy} \right] + m^2 e^{-4\sigma(y)} \phi_n^2 = m_n^2 e^{-2\sigma(y)} \phi_n^2, \quad (3.107)$$

disto (3.104) pode ser escrita na forma

$$S = \frac{1}{2} \sum_n \int d^4x \left[\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_n \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi_n - m_n^2 \phi_n^2 \right]. \quad (3.108)$$

Observamos nesta última expressão que da mesma forma como ocorre compactificação de Kaluza-Klein, o campo escalar $\Phi(x^\mu, y)$ se apresenta para um observador 4-dimensional

como um campo que apresenta uma parte totalmente 4-dimensional mais um termo totalmente dependente da dimensão extra compactificada. A magnitude desse termo é dada por uma torre infinita de modos representados pelas *massas* m_n^2 . Este resultado está em pleno acordo com o obtido por Randall-Sundrum para o setor perturbativo gravitacional. Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} z_n &\equiv \frac{m_n}{\kappa} e^{\sigma(y)} \quad , \\ f_n &= e^{-2\sigma(y)} \phi_n \quad , \end{aligned}$$

em (3.107) chegamos a seguinte equação diferencial

$$z_n^2 \frac{d^2}{dz_n^2} f_n + z_n \frac{d}{dz_n} f_n + f_n \left[z_n^2 - \left(4 + \frac{m^2}{\kappa^2} \right) \right] = 0 \quad , \quad (3.109)$$

cujas soluções são as funções de Bessel de ordem $\nu = \sqrt{4 + m^2/\kappa^2}$,

$$\phi_n(y) = e^{2\sigma(y)} \left[A_{nv} J_\nu \left(\frac{m_n}{\kappa} e^{2\sigma(y)} \right) + B_{nv} Y_\nu \left(\frac{m_n}{\kappa} e^{2\sigma(y)} \right) \right] \quad , \quad (3.110)$$

da mesma forma que encontrada por Randall-Sundrum. Então podemos concluir que da mesma forma que no setor perturbativo gravitacional, o setor perturbativo escalar gera a mesma equação diferencial que governa a parte proveniente da dimensão extra compacta do campo escalar no bulk. Mostraremos no último capítulo que a equação (3.109) também é obtida no caso em que consideramos a métrica induzida na brana sendo o espaço-tempo de Schwarzschild ou Kerr.

3.6 É possível modelar buracos negros no mundo brana?

O fato de o campo gravitacional ter acesso as dimensões extras, traz problemas referentes ao confinamento da matéria na brana e consequentemente ao aparecimento de condições favoráveis a formação de objetos compactos, que eventualmente levariam a um colapso gravitacional e a formação de buracos negros. Além disso, há o aparecimento de fenômenos não locais, vistos por um observador confinado, referente ao termo $E_{\mu\nu}$. Ainda há a

dificuldade de implementar a continuidade da métrica induzida e da curvatura extrínseca através da brana.

Sendo a região exterior a uma estrela ou buraco negro, uma região de vácuo, então as seguintes equações são satisfeitas

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -E_{\mu\nu}, \\ R^\mu_\mu &= E^\mu_\nu = 0 \quad , \\ D^\mu E_{\mu\nu} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.111}$$

Como o termo de Weyl $E_{\mu\nu}$ carrega correções em altas energias aos modos de Kaluza-Klein, o processo de colapso gravitacional será em geral diferente do processo tratado em Relatividade Geral 4-dimensional.

O candidato a buraco negro no mundo brana proposto por Chamblin, Hawking e Reall [40] é o mais *natural*. O termo de Weyl é nulo nessa construção, que consiste em assumir que a métrica induzida na brana é a métrica de Schwarzschild, a qual se expande no bulk, através de um empilhamento de métricas induzidas através do bulk extra dimensional. Denotando a métrica induzida por $\hat{g}_{\mu\nu}$, temos que a métrica 5-dimensional é dada por

$$^{(5)}ds^2 = e^{-2\kappa|y|} \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad , \tag{3.112}$$

sendo

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\kappa|y|} g_{\mu\nu} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \tag{3.113}$$

De fato, se a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ for solução das equações de Einstein 4-dimensionais, isto é, se tivermos $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$, a equação (3.113) será solução da equação $^{(5)}G_{AB} = -\Lambda_5 ^{(5)}g_{AB}$. Um observador no bulk verá uma singularidade em forma de linha perpendicular a brana para todos valores de y . Cada superfície $y = \text{constante}$ consiste no espaço-tempo de Schwarzschild 4-dimensional. Esta solução é conhecida como *corda negra de Schwarzschild*, e como foi mostrado em [40] não está localizada na brana $y = 0$. Como dissemos, o termo de Weyl nesta solução é nulo, o que leva a violação das correções em

altas energias. O quadrado do tensor de curvatura para esse caso é

$${}^{(5)}R_{ABCD}{}^{(5)}R^{ABCD} = 40\kappa^2 + \frac{48G^2M^2}{r^6}e^{4|y|\kappa} \quad , \quad (3.114)$$

que diverge no horizonte AdS $z = 1/\kappa e^{y\kappa} = \infty$.

A corda negra ainda sofre da chamada *instabilidade de Gregory-Laflame* [41], que torna o sistema instável para distâncias próximas do horizonte AdS, sendo estável apenas em regiões próximas a brana. No trabalho [40], os autores conjecturaram que o horizonte de eventos da corda negra deve se fechar, formando algo chamado de *cigarro negro*, que não sofre instabilidades, sendo, segundo a conjectura, a única solução estável em 5 dimensões que descreve o ponto final de um colapso gravitacional na brana. O fato é que essa solução não é localizada na brana e, portanto, falha na descrição de buracos negros realistas na brana.

Já que a solução mais óbvia falha, o próximo passo dado na busca da descrição desses objetos é considerar soluções em que $E_{\mu\nu}$ seja não nulo, isto foi feito em [42], mas nesse caso só há o conhecimento da métrica induzida, não foi encontrada uma métrica que descreva este objeto no bulk. Não há soluções tipo buraco negro localizados na brana. Sem essa característica, não podemos modelar buracos negros astrofísicos.

Há um caso especial [43] em que foi possível encontrar uma solução de buraco negro localizada. Tal solução é encontrada considerando uma 2-brana imersa num bulk 4-dimensional.

Pelo fato do termo de Weyl carregar a assinatura da dimensão extra, é de se esperar que no estado final do processo realista de colapso gravitacional na brana, apareça esta assinatura. Se isto acontecer, o buraco negro formado deve ter um *cabelo extra*, contrastando com o teorema do não-cabelo da Relatividade Geral em 4 dimensões.

O que podemos concluir sobre a modelagem de buracos negros no mudo brana é que o assunto ainda está em aberto. Há muitos problemas referentes à estabilidade das soluções e localização, bem como um bom entendimento do processo de colapso gravitacional.

Capítulo 4

Espaço-tempo de Kerr-Randall-Sundrum

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados encontrados no estudo da evolução de uma perturbação escalar no espaço-tempo de Kerr-Randall-Sundrum, que consiste em considerar, de forma análoga a [40], a métrica induzida na 3-brana como a solução de Kerr, imersa num bulk 5-dimensional.

4.1 Buracos Negros em rotação no mundo brana

A extensão das soluções de Schwarzschild e Kerr da Relatividade Geral 4-dimensional para n dimensões foi realizada no trabalho de Meyers *et al* [44]. Para o caso de Kerr, a métrica, considerando apenas um parâmetro de rotação, é dada por

$$\begin{aligned} ds_{n-Kerr}^2 = & - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\ & + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ & + \Sigma d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 + a^2 - \mu r^{1-n}$ e $d\Omega_n^2$ a métrica da esfera unitária n -dimensional. A métrica (4.1) descreve um buraco negro assintoticamente plano, no

vácuo com massa e momento angular proporcionais a μ e μa , respectivamente, e supondo-se $\mu, a > 0$.

O horizonte de eventos é localizado em $r = r_H$. Se $n = 1$, o horizonte de eventos existe apenas para $a < (\mu)^{\frac{1}{2}}$, com área que se reduz a zero no limite do buraco negro de Kerr extremo, isto é, para o limite $a \rightarrow (\mu)^{\frac{1}{2}}$. No caso $n \geq 2$, a condição para o horizonte de eventos $\Delta = 0$ possui apenas uma raiz exata para um valor arbitrário $a > 0$. Não há buraco negro de Kerr extremo para $n \geq 2$.

Sengupta [45] utilizou a generalização (4.1) como um mundo brana de $(n+1)$ dimensões no contexto de RS, considerando esta métrica como uma corda negra com rotação não nula que intercepta a brana de $(n-1)$ dimensões numa métrica que representa uma buraco negro em rotação.

Em [46] foi considerado, de maneira análoga ao método de [40], a métrica (4.1) com $n = 1$ sendo a métrica que representa a intersecção de uma brana com uma corda negra em rotação 5-dimensional num bulk de RS. A intersecção descreve o buraco negro de Kerr 4-dimensional. A métrica para esta corda negra em rotação é dada por

$$ds_{5-Kerr}^2 = \frac{l^2}{z^2} \left\{ - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + dz^2 \right\}, \quad (4.2)$$

com $z = l e^{y\kappa}$ e $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$. Introduzindo a coordenada $\omega = z - z_0$, a brana estará localizada em $\omega = 0$, com

$$ds_{5-Kerr}^2 = \frac{l^2}{(|\omega| + z_0)^2} \left\{ - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + d\omega^2 \right\}. \quad (4.3)$$

O quadrado do tensor de Riemann para esta métrica é dado por [46]

$$R_{ABCD} R^{ABCD} = 40\kappa^4 + \frac{48M^2 z^4 \kappa^4}{\Sigma^6} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) (r^2 - 14a^2 r^2 \cos \theta + a^4 \cos^4 \theta) \quad (4.4)$$

Desta equação podemos observar que para $r = 0$ e $\theta = \pi/2$ obtemos a singularidade em forma de anel característica da solução de Kerr. Da mesma forma que na tentativa

de modelar buracos negros em branas através da métrica de Schwarzschild, produz uma corda negra que é instável nas proximidades do horizonte AdS e sofre da instabilidade de Gregory-Laflamme [40], neste caso com rotação ocorre o mesmo, sendo este sistema instável a distância próximas do horizonte AdS.

4.2 Perturbação escalar em Kerr-RS

Apesar da métrica (4.3) ser uma solução instável próxima ao horizonte AdS, procuraremos nesta seção estudar a evolução de um campo escalar neste espaço-tempo. O campo escalar será considerado como um campo de teste, no sentido de que através do estudo de sua evolução poderemos inferir, talvez, sobre algumas propriedades dessa geometria (4.3), que passaremos a chamar de Kerr-Randall-Sundrum (Kerr-RS).

Escrevendo (4.2) como

$$ds_{Kerr-RS}^2 = f(z) [ds_{4-Kerr}^2 + dz^2] \quad , \quad (4.5)$$

com $f(z) = l^2/z^2$, e

$$\begin{aligned} ds_{4-Kerr}^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma^2}\right) dt^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 - \frac{4Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta d\phi dt \\ & + \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mr}{\Sigma^2} a^2 \sin^2 \theta \right] d\phi^2 \quad . \end{aligned} \quad (4.6)$$

As componentes contravariantes dessa métrica serão

$$\begin{aligned} g^{00} &= -\frac{1}{f(z)\Sigma^2} [\Delta^{-1}(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta] \quad , \\ g^{03} &= -\frac{1}{f(z)\Sigma^2} \left(\frac{4Mra}{\Delta} \right) , \\ g^{11} &= \frac{\Delta}{f(z)\Sigma^2} \quad , \\ g^{22} &= \frac{1}{f(z)\Sigma^2} \quad , \\ g^{33} &= \frac{1}{f(z)\Sigma^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \quad , \\ g^{44} &= \frac{1}{f(z)} \quad , \end{aligned} \quad (4.8)$$

que no caso $z = l$ se reduzem às componentes do caso padrão [14]. O determinante de (4.6) é dado por

$$\det(g_{AB}) \equiv G = -f^5(z)\Sigma^4 \sin^2 \theta \quad . \quad (4.9)$$

A equação que dá a dinâmica do campo escalar $\Phi(x^\mu, z)$ ($x^\mu = t, r, \theta, \phi$) com massa μ^2 é a equação de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x^A} \left(g^{AB} \sqrt{-G} \frac{\partial \Phi}{\partial x^B} \right) + \mu^2 \Phi = 0 \quad . \quad (4.10)$$

Tal equação, usando os resultados (4.7) e (4.9), assume a seguinte forma expandida

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{f\Sigma^2} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{4Mra}{\Delta f\Sigma^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \phi} + \\ & + \frac{1}{f^{5/2}\Sigma^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(f^{5/2}\Sigma^2 \sin \theta \frac{\Delta}{f\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{f^{5/2}\Sigma^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f^{5/2}\Sigma^2 \sin \theta \frac{\Delta}{f\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{f\Sigma^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{f^{5/2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(f^{3/2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \mu^2 \Phi = 0 \quad . \end{aligned}$$

Analogamente à separação de variáveis usada em [14], podemos escrever o campo Φ em termos dos harmônicos apropriados às condições de simetria

$$\Phi(x^\mu, z) = R(r)S(\theta)Y(z)e^{im\phi}e^{-i\omega t} \quad . \quad (4.11)$$

Substituindo este resultado em (4.11) e em seguida multiplicando os dois lados da equação resultante por $\Phi^{-1}(x^\mu, z)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Sigma^2} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \omega^2 - \frac{4Mra}{\Delta\Sigma^2} (m\omega) + \frac{1}{R(r)\Sigma^2} \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR(r)}{dr} \right) \\ & + \frac{1}{\Sigma^2 \sin \theta S(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{1}{Y(z)f^{3/2}} \frac{d}{dz} \left(f^{3/2} \frac{dY(z)}{dz} \right) \\ & - m^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \frac{1}{\Sigma^2} + \mu^2 f = 0 \quad . \end{aligned}$$

Agora, podemos separar esta equação em duas outras equações: uma dependente somente da coordenada da dimensão extra, a coordenada z , e outra equação dependente das co-

ordenadas x^μ , sendo Q a constante de separação,

$$\frac{1}{\Sigma^2} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \omega^2 - \frac{4Mra}{\Delta \Sigma^2} (m\omega) + \frac{1}{R(r)\Sigma^2} \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR(r)}{dr} \right) \quad (4.12)$$

$$+ \frac{1}{\Sigma^2 \sin \theta S(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) - m^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \frac{1}{\Sigma^2} - Q = 0 \quad ,$$

$$\frac{d}{dz} \left(f^{3/2} \frac{dY(z)}{dz} \right) + QY(z)f^{3/2} + \mu^2 f = 0 \quad . \quad (4.13)$$

Separando a parte radial da parte angular na equação (4.12), obtemos duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \omega^2 - a^2 \omega^2 - \frac{4Mra}{\Delta} m\omega - \frac{(ma)^2}{\Delta} - Qr^2 - P = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{\sin \theta S(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) + a^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + P = 0 \quad , \quad (4.15)$$

sendo P a constante de separação.

No fim do processo de separação de variáveis, obtemos três equações diferenciais ordinárias, com a dependência do campo na coordenada z separada da dependência nas coordenadas x^μ na 3-brana,

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - 4Mram\omega + (ma)^2] - R((a\omega)^2 + Qr^2 + P) = 0 \quad , \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) + S(\theta) \left[(\omega^2 - Q)a^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + P \right] = 0 \quad , \quad (4.17)$$

$$\frac{d}{dz} \left(f^{3/2} \frac{dY(z)}{dz} \right) + QY(z)f^{3/2} + \mu^2 f = 0 \quad . \quad (4.18)$$

A equação radial (4.16) pode ser reescrita utilizando a coordenada tartaruga r_*

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad , \quad (4.19)$$

e a definição

$$\Psi(r) = \sqrt{r^2 + a^2} R(r) \quad , \quad (4.20)$$

na forma

$$\frac{d^2 \Psi(r)}{dr_*^2} + \Psi(r) [\omega^2 - V(r, \omega)] = 0 \quad , \quad (4.21)$$

sendo, para o campo sem massa,

$$V(r, \omega) = \frac{4Mr a(m\omega) - (ma)^2 - \Delta((a\omega)^2 + Qr^2 + P)}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{\Delta(3r^2 - 4Mr + a^2)}{(r^2 + a^2)^3} - \frac{3\Delta^2 r^2}{(r^2 + a^2)^4} . \quad (4.22)$$

A solução da equação angular (4.17) são os harmônicos esferoidais oblatos $S_{Ln}^m(a^2 c_n^2, \cos \theta)$ com $c_n^2 = \omega^2 - Q_n^2$. Estes harmônicos, no caso $a = 0$, se reduzem aos harmônicos esféricos e o autovalor $P \rightarrow P_{Lmn}$ se torna $L(L+1)$.

No caso geral, os autovalores P_{Lmn} são determinados formalmente por uma expansão em potências de (ac_n) [14], tal como

$$P_{lmn} = \sum_i f_{(2i)}^{lm} (ac_n)^{2i} , \quad (4.23)$$

onde os coeficientes da expansão são funções de L e m apenas, os dois primeiros termos são dados por

$$f_0^{lm} = l(l+1) ,$$

$$f_2^{lm} = h(l+1, m) - h(l, m) - 1 ,$$

com

$$h(l, m) = \frac{l(l-m)(l+m)}{2(l-1/2)(l+1/2)} .$$

A dinâmica do campo escalar no bulk é dado pela equação (4.18), que pode ser reescrita na forma

$$\frac{d^2}{dz^2} Y(z) - \frac{3}{z} \frac{d}{dz} Y(z) + Y(z) \left[Q + \frac{k^2}{z^2} \right] = 0 , \quad (4.24)$$

com $k^2 = \mu^2 l^2$.

Esta equação é idêntica à equação de Bessel,

$$\frac{d^2}{dx^2} W(x) + \frac{1}{x} \frac{dW(x)}{dx} + W(x) \left[1 - \frac{m^2}{x^2} \right] = 0 . \quad (4.25)$$

A solução para a equação (4.24) é

$$Y(z) = z^2 [A\mathcal{J}_{\sqrt{4-k^2}}(Qz) + B\mathcal{Y}_{\sqrt{4-k^2}}(Qz)] \quad , \quad (4.26)$$

sendo A e B constantes, e

$\mathcal{J}_{\sqrt{4-k^2}}$ = Função de Bessel do primeiro tipo de ordem $\sqrt{4-k^2}$,

$\mathcal{Y}_{\sqrt{4-k^2}}$ = Função de Bessel do segundo tipo de ordem $\sqrt{4-k^2}$.

Considerando o modelo RS com duas 3-branas, as condições de contorno para o campo $Y(z)$ vem da continuidade da derivada primeira deste campo nos pontos onde se localizam as branas, que, neste caso, se localizam em $z = l(y = 0)$ e $z = le^{d\kappa}(y = d)$, sendo d a distância de separação entre as branas. Então, denotando a derivada em relação a z por Y' , devemos ter [39]

$$Y'(z)|_{z=l} = Y'(z)|_{z=le^{d\kappa}} = 0 \quad . \quad (4.27)$$

Calculando a derivada primeira de $Y(z)$ temos

$$Y'(z) = 2z [A\mathcal{J}_\gamma(Qz) + B\mathcal{Y}_\gamma(Qz)] + z^2 [A\mathcal{J}'_\gamma(Qz) + B\mathcal{Y}'_\gamma(Qz)] \quad , \quad (4.28)$$

com $\gamma = \sqrt{4-k^2}$. Em $z = l$ teremos

$$Y'(z=l) = A [2\mathcal{J}_\gamma(Ql) + l\mathcal{J}'_\gamma(Ql)] + B [2\mathcal{Y}_\gamma(Ql) + l\mathcal{Y}'_\gamma(Ql)] \quad . \quad (4.29)$$

Lançando mão das propriedades

$$xJ'(x) = xJ_{n-1} - nJ_n(x) \quad ,$$

$$xY'(x) = xY_{n-1} - nY_n(x) \quad ,$$

teremos

$$A [2\mathcal{J}_\gamma(Ql) + lQ\mathcal{J}_{\gamma-1}(Ql) - \gamma\mathcal{J}_\gamma(Ql)] + B [2\mathcal{Y}_\gamma(Ql) + lQ\mathcal{Y}_{\gamma-1}(Ql) - \gamma\mathcal{Y}_\gamma(Ql)] = 0 \quad ,$$

$$\frac{A}{B} = - \frac{[(2-\gamma)\mathcal{Y}_\gamma(Ql) + lQ\mathcal{Y}_{\gamma-1}(Ql)]}{[(2-\gamma)\mathcal{J}_\gamma(Ql) + lQ\mathcal{J}_{\gamma-1}(Ql)]} \quad (4.30)$$

Em particular, se $\gamma = 2$, isto é, para o campo escalar não massivo $\mu^2 = 0$, teremos

$$A = -\frac{\mathcal{Y}_1(Ql)}{\mathcal{J}_1(Ql)} \quad , \quad (4.31)$$

então

$$Y(z)_Q = z^2 B \left[-\frac{\mathcal{Y}_1(Ql)}{\mathcal{J}_1(Ql)} \mathcal{J}_2(Qy) + \mathcal{Y}_2(Qy) \right] \quad . \quad (4.32)$$

Para o ponto onde se localiza a segunda brana, temos

$$\begin{aligned} Y'(z = le^{d\kappa}) &= 2le^{d\kappa} [A\mathcal{J}_\gamma(Qle^{d\kappa}) + \mathcal{Y}_\gamma(Qle^{d\kappa})] \\ &+ l^2 e^{2d\kappa} [A\mathcal{J}'_\gamma(Qle^{d\kappa}) + \mathcal{Y}'_\gamma(Qle^{d\kappa})] = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$A [(2 - \gamma)\mathcal{J}_\gamma(Qle^{d\kappa}) + lQe^{d\kappa} \mathcal{J}_{\gamma-1}(Qle^{d\kappa})] + B [(2 - \gamma)\mathcal{Y}_\gamma(Qle^{d\kappa}) + lQe^{d\kappa} \mathcal{Y}_{\gamma-1}(Qle^{d\kappa})] = 0 \quad .$$

Isolando A , teremos

$$A = -B \frac{[(2 - \gamma)\mathcal{Y}_\gamma(Qle^{d\kappa}) + lQe^{d\kappa} \mathcal{Y}_{\gamma-1}(Qle^{d\kappa})]}{[(2 - \gamma)\mathcal{J}_\gamma(Qle^{d\kappa}) + lQe^{d\kappa} \mathcal{J}_{\gamma-1}(Qle^{d\kappa})]} \quad , \quad (4.34)$$

Igualando (4.34) e (4.30) temos,

$$\frac{[(2 - \gamma)\mathcal{Y}_\gamma(Qle^{d\kappa}) + lQe^{d\kappa} \mathcal{Y}_{\gamma-1}(Qle^{d\kappa})]}{[(2 - \gamma)\mathcal{J}_\gamma(Qle^{d\kappa}) + lQe^{d\kappa} \mathcal{J}_{\gamma-1}(Qle^{d\kappa})]} = \frac{[(2 - \gamma)\mathcal{Y}_\gamma(Ql) + lQ\mathcal{Y}_{\gamma-1}(Ql)]}{[(2 - \gamma)\mathcal{J}_\gamma(Ql) + lQ\mathcal{J}_{\gamma-1}(Ql)]} \quad . \quad (4.35)$$

O autovalor Q depende das raízes das funções de Bessel, portanto ele será, no caso do modelo de duas branas, discretizado, ou seja, $Q \rightarrow Q_n$. Fazendo as substituições $\kappa = 1/l$, $Q_n e^{d/l} = x_n/l$ e particularizando para o caso $\gamma = 2$, que representa o campo escalar não massivo, podemos reescrever (4.35) como

$$\mathcal{Y}_1(Q_n)\mathcal{J}_1(x_n) = \mathcal{Y}_1(x_n)\mathcal{J}_1(Q_n l) \quad . \quad (4.36)$$

Esta equação pode ser resolvida numericamente. Como o número de raízes das funções de Bessel é infinito, o número de autovalores Q_n , que chamaremos de modos massivos, pois *emprestam* um caráter de campo massivo ao campo escalar com $\gamma = 2$; também será infinito. Nos limitamos a mostrar os dez primeiros modos Q_n na tabela (4.2). Substituindo

n	Q_n	n	Q_n
1	3.83171	6	19.6159
2	7.01559	7	22.7601
3	10.1735	8	25.9037
4	13.3237	9	29.0468
5	16.4706	10	32.1897

Tabela 4.1: Primeiros dez modos massivos Q_n .

os valores Q_n e P_{Lmn} no potencial efetivo (4.22), teremos o potencial visto por um observador confinado na 3-brana, que a este parecerá como o potencial efetivo de um campo escalar puramente 4-dimensional *com massa*. De fato, a dimensão extra simula um termo de massa para o campo escalar, o que é esperado, devido a massividade dos modos de Kaluza-Klein [34].

Buracos negros em rotação são instáveis a perturbação escalar massiva [23]. O que ocorre é a formação de um sistema altamente explosivo, que foi chamado de buraco negro bomba [47]. Esta instabilidade vem do fato que a massa do campo escalar age como se fosse um espelho, e se somarmos a isso o efeito do espalhamento super-radiante, que ocorre em buracos negros em rotação, teremos a amplitude da perturbação escalar crescendo indefinidamente [48]. Este cenário é o que obtemos no caso de uma perturbação escalar não massiva no espaço-tempo de Kerr-RS. O cálculo das frequências quasi-normais para este caso fica impossibilitada, pois este sistema não nos parece fisicamente aceitável. Apesar disso é interessante calcular os coeficientes de transmissão e reflexão do espalhamento do campo escalar em Kerr-RS. Seguiremos de perto os trabalhos de Starobinski *et al* [25][26].

O perfil assintótico do termo potencial da equação (4.22) é dado por

$$\omega^2 - V \rightarrow \omega^2 - Q_n^2, \quad r_* \rightarrow +\infty, \quad (4.37)$$

$$\omega^2 - V \rightarrow (\omega - m\Omega_H)^2, \quad r_* \rightarrow -\infty, \quad (4.38)$$

sendo

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}, \quad r_+ = M + (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.39)$$

Da equação (4.37), vemos que quando Q_n é maior que ω^2 o potencial efetivo fica com sinal negativo no infinito espacial tornando a perturbação escalar, neste regime, instável. Se nos restringirmos ao caso $Q_n < \omega_{qn}^2$, sendo ω_{qn}^2 a frequência quasi-normal fundamental, as soluções assintóticas da equação de onda (4.22) tem a seguinte forma,

$$\Psi(r_* \rightarrow -\infty) \rightarrow B_{Lm} e^{-i(\omega - m\Omega_H)r_*}, \quad (4.40)$$

$$\Psi(r_* \rightarrow +\infty) \rightarrow e^{-i(\omega^2 - Q_n^2)^{\frac{1}{2}}r_*} + A_{Lm} e^{i(\omega^2 - Q_n^2)^{\frac{1}{2}}r_*}. \quad (4.41)$$

Esta configuração exprime o fato de que consideraremos apenas ondas entrando no horizonte. A onda vem do infinito espacial, parcialmente atravessa a barreira de potencial entrando no horizonte de eventos, o resto é refletido para o infinito.

Da constância do Wronskiano da equação (4.22) com as soluções assintóticas (4.40) e (4.41), temos que

$$1 - |A_{Lm}|^2 - |B_{Lm}|^2 \frac{\omega - m\Omega_H}{\sqrt{\omega^2 - Q_n^2}} = 0. \quad (4.42)$$

Isto mostra, que da mesma forma que no caso da solução de Kerr padrão, $|A_{Lm}| > 1$, ou seja, a amplitude da onda refletida é maior que da onda incidente se tivermos

$$m\Omega_H > \omega, \quad (4.43)$$

que é a condição de espalhamento super-radiante.

Podemos então, partir para o cálculo do coeficiente de reflexão da onda. Vamos supor que $1/\omega \gg M$, isto é, que o comprimento Compton da partícula escalar seja maior que o tamanho típico do buraco negro. Seguindo [25], dividimos o espaço-tempo exterior ao horizonte de eventos em duas regiões, a saber, região próxima, $r - r_+ \ll 1/\omega$, e região distante, $r - r_+ \gg M$. Resolvendo a equação de onda (4.22) nestas duas regiões, e igualando os resultados onde a região distante e a região próxima se interceptam, isto é, na região $M \ll r - r_+ \ll 1/\omega$, encontraremos o coeficiente de reflexão.

Na região próxima, podemos aproximar (4.22) por

$$\Delta \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR(r)}{dr} \right) + [r_+^4 (\omega - m\Omega_H)^2 - L(L+1)\Delta] R(r) = 0 \quad , \quad (4.44)$$

cuja solução geral é dada por [25][48]

$$R = Az^{-i\chi}(1-z)^{L+1}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z) + Bz^{i\chi}(1-z)^{L+1}F(a, b, c, z) \quad (4.45)$$

sendo $F(a, b, c, z)$ e $F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)$ funções hipergeométricas,

$$\chi = (\omega - m\Omega - H) \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \quad , \quad (4.46)$$

e

$$z = \frac{r - r_+}{r - r_-} \quad . \quad (4.47)$$

Segundo Starobinski [25] para grandes valores de r a solução acima tem a seguinte forma assintótica

$$R \sim A\Gamma(1-2i\chi) \left[\frac{(r_+ - r_-)^{-L}\Gamma(2L+1)r^L}{\Gamma(L+1)\Gamma(L+1-2i\chi)} + \frac{(r_+ - r_-)^{L+1}\Gamma(-2L-1)r^{-L-1}}{\Gamma(-L)\Gamma(-L-2i\chi)} \right] \quad (4.48)$$

Na região distante $r - r_+ \gg M$ a equação de onda possui a forma

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + [\omega^2 - Q_n^2 - \frac{L(L+1)}{r^2}] = 0 \quad , \quad (4.49)$$

com solução geral dada pela seguinte combinação de funções de Bessel

$$R \sim r^{-1/2} [a\mathcal{J}_{L+1/2}(\sqrt{\omega^2 - Q_n^2}) + b\mathcal{J}_{-L-1/2}(\sqrt{\omega^2 - Q_n^2})] \quad . \quad (4.50)$$

Para pequenos valores de r esta solução toma forma

$$R \sim a \frac{(\sqrt{\omega^2 - Q_n^2}/2)^{L+1/2} r^L}{\Gamma(L+3/2)} + b \frac{(\sqrt{\omega^2 - Q_n^2}/2)^{-L-1/2} r^{-L-1}}{\Gamma(-L+1/2)} \quad . \quad (4.51)$$

Combinando as soluções da região próxima (4.48) e da região distante (4.51) na região de intersecção $M \ll r - r_+ \gg 1/\omega$, obtemos o coeficiente de reflexão b/a

$$\frac{b}{a} = 2i(\omega^2 - Q_n^2)^{L+1/2} \chi \frac{(1-)^L}{2L+1} \left(\frac{L!}{(2L-1)!} \right)^2 \frac{(r_+ - r_-)^{2L+1}}{(2L)!(2L+1)!} (k^2 + 4\chi^2) \quad . \quad (4.52)$$

Este coeficiente de reflexão difere da fórmula encontrada por Starobinski [25] para o caso da solução de Kerr padrão pelo fator Q_n que aparece no termo $(\omega^2 - Q_n^2)^{L+1/2}$. De fato, isto não é apenas uma frequência recalibrada pelo fato Q_n^2 , pois o termo χ definido por (4.46) contém ω . Esta influência da dimensão extra, representada pelos autovalores Q_n , no espalhamento super-radiante será importante apenas para o regime em que Q_n é da mesma ordem que ω . Estes resultados foram publicados em [49].

Capítulo 5

Conclusão

Vimos que nos modelos de mundo brana propostos por Randall e Sundrum, em particular o modelo com duas 3-branas em um bulk AdS_5 , há a possibilidade da resolução do problema da hierarquia entre a escala gravitacional e eletrofraca. O modelo com uma única brana contém o modo zero de excitação dos grávitons, que é a gravitação de Newton. Podemos considerar estes modelos como *laboratórios* que nos permitem testar várias idéias da conjectura da teoria M, e também questões sobre a forma da Relatividade Geral neste contexto.

A modelagem de buracos negros, como discutido no terceiro capítulo, é um problema em aberto, e não nos parece trivial. O fato da gravidade se *espalhar* pelo bulk, enquanto os outros campos físicos ficam confinados na 3-brana, é um complicador para o estudo do colapso gravitacional de objetos astrofísicos. Além disso, as condições de contorno são complicadas de se implementar neste caso. Também não é claro como deve ser o limite assintótico do bulk, já que próximo ao horizonte AdS ocorrem problemas com a continuidade do horizonte de eventos de um buraco negro [40], além da instabilidade de Gregory-Laflamme [41].

Apesar da solução de corda negra em rotação estudada por Sengupta [45] apresentar as mesmas limitações do cigarro negro de Hawking [40], estudamos a equação de Klein-Gordon neste cenário. Mostramos que perturbações escalares de spin 0 sem massa no

modelo de Kerr-Randall-Sundrum com duas branas simula a perturbação escalar massiva no espaço-tempo de Kerr 4-dimensional. O termo massivo para o campo escalar aparece devido unicamente a dimensão extra, como foi mostrado de maneira geral por Cardoso *et al* [48]. A equação que governa a dinâmica no bulk do campo escalar em Kerr-Randall-Sundrum é a mesma encontrada na decomposição de Kaluza-Klein feita por Randall-Sundrum [30] [31] e a encontrada para campos escalares 5-dimensionais no modelo de Randall-Sundrum com branas de Minkowski [39]. Este termo não massivo torna o espaço-tempo de Kerr-RS instável por perturbações escalares, já que devido ao espalhamento superradiante, a radiação espalhada para o infinito é refletida de volta para o buraco negro pelo termo de massa do campo, gerando assim um buraco negro bomba.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).
- [2] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press (1973).
- [3] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Cambridge University Press (1973).
- [4] P. S. Joshi, *Global aspects in gravitation and cosmology*, Oxford Science Publications (1993).
- [5] D. Lovelock, H. Rund *Tensors, differential forms, and variational principles*, John Wiley & Sons (1975).
- [6] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **33**, 161 (1973).
- [7] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett **11**, 237 (1963).
- [8] R. Penrose, Riv.Nuovo Cim. **1**, 252 (1969).
- [9] T. Regge, J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).
- [10] H. Nollert, Class. Quantum Grav. **16**, R159 (1999).
- [11] F. J. Zerilli, Phys. Rev. **D2**, 2141 (1970).
- [12] V. P. Frolov, I. D. Navikov, *Black Hole Physics*, Kluwer Academic Publishers (1998).

- [13] V. E. Butkov, *Física Matemática*, LTC (1988).
- [14] D. Brill, P. L. Chrzanowski, C. M. Pereira, E. Fackerell, J. Ipser, Phys. Rev. **D8** 1913 (1972).
- [15] S. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. **29** (1988), 1114 (1972).
- [16] E. Siedel, Class. Quant. Grav. **6** 1057 (1989).
- [17] E. W. Leaver, Phys. Rev. **D34**, 384 (1986).
- [18] K. D. Kokkotas, Living. Rev. Rel. **2:2**, (1999).
- [19] R. H. Price, Phys. Rev. **D5**, 2439 (1972).
- [20] B. F. Schutz, C. M. Will, Astrophys. J. **291**, L33 (1985).
- [21] H. Nollert, Phys. Rev. **D47**, 5253 (1993).
- [22] S. Iyer, Phys. Rev. **D35**, 3632 (1987).
- [23] S. L. Detweiler, Phys. Rev. **D22**, 2323 (1980).
- [24] E. W. Leaver, Proc. R. Soc. London, **A402**, 285 (1985).
- [25] A. A. Starobinski, Sov. Phys. JETP, **37**, 28 (1973).
- [26] A. A. Starobinski, S. M. Churilov, Sov. Phys. JETP, **38**, 1 (1974).
- [27] J. Polchinski, *String Theory* volumes I & II, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [28] P. Horava, E. Witten, Nucl. Phys. **B460** 506 (1996).
- [29] A. Lukas, B. A. Ovrut, K.S. Stelle, D.Waldram, Phys. Rev. **D59** 086001 (1999).
- [30] L. Randall, R.Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** 3370 (1999).
- [31] L. Randall, R.Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** 4690 (1999).

- [32] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali , Phys. Lett. **D429**, 263 (1998); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. **D436**, 257 (1998).
- [33] A. G. Casali, E. Abdalla and B. Wang, Phys. Rev. **D70**, 043542 (2004).
- [34] R. Maartens, Living Rev.Rel. **7:7** (2004).
- [35] M. J. Duff, J.T. Liu, Phys. Rev. Lett. **85**, 2052 (2000).
- [36] W. Israel, Nuovo Cim. **B44S10:1** (1966), Erratum-ibid. **B48:463** (1967), Nuovo Cim. B44:1 (1966).
- [37] J. Garriga, T. Tanaka Phys. Rev. Lett. **84**, 2778 (2000).
- [38] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. **D62**, 024012 (2000).
- [39] W. D. Goldberger, M. B. Wise, Phys. Rev. **D60**, 107505 (1999).
- [40] A. Chamblin, S. W. Hawking, H. S. Reall, Phys. Rev. **D61**, 65007 (2000).
- [41] R. Gregory, R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **70**, 2837 (1993).
- [42] N. K. Dadhich, R. Maartens, P. Papandopoulos, V. Rezania, Phys. Rev. Lett. **B487**, 1 (2000).
- [43] R. Emparan, G. T. Horowitz, R. C. Meyers, JHEP **01**, 007 (2000).
- [44] R. C. Meyers, M. J. Perry, Ann. Phys. **172**, 304 (1986).
- [45] G. Sengupta, hep-th/0205087, (2003).
- [46] M. S. Modgil, S. Panda, G. Sengupta, Pramana **3**, 707 (2004).
- [47] M. J. Strafuss, G. Khanna, Phys. Rev. **D71**, 024034 (2005).
- [48] V. Cardoso, O. J. C. Dias, J. P. S. Lemos, S. Yoshida, Phys. Rev. **D70**, 044039 (2004).
- [49] J. Oliveira, C. E. P. Oliveira, Braz. J. Phys. **35**, 1127 (2005).