Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Análise em Componentes Principais do Fluxo em Colisões de Íons Pesados Relativísticos

Pedro Augusto Pereira de Queiroz Rocha Ishida

Orientadora: Profa. Dra. Frédérique Grassi

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Profa. Dra. Frédérique Marie-Brigitte Sylvie Grassi – Orientadora (IFUSP)
Profa. Dra. Tereza Cristina da Rocha Mendes (IFSC/USP)
Prof. Dr. Gabriel Silveira Denicol (IF/UFF)

São Paulo
2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ishida, Pedro Augusto Pereira de Queiroz Rocha

Análise em componentes principais do fluxo em colisões de íons pesados relativísticos. São Paulo, 2019.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática

Orientador: Profa. Dra. Frédérique Grassi
Área de Concentração: Física Nuclear.

Unitermos: 1. Colisões de íons pesados relativísticos; 2. Física nuclear; 3. Hidrodinâmica.

USP/IF/SBI-020/2019

University of São Paulo
Physics Institute

Principal Component Analysis for Flow in Relativistic Heavy Ion Collisions

Pedro Augusto Pereira de Queiroz Rocha Ishida

Supervisor: Prof. Dr. Frédérique Grassi

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science.

Prof. Dr. Frédérique Marie-Brigitte Sylvie Grassi – Supervisor (IFUSP)

Prof. Dr. Tereza Cristina da Rocha Mendes (IFSC/USP)

Prof. Dr. Gabriel Silveira Denicol (IF/UFF)

São Paulo
2019

Para M.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Maria Helena e Mauro, por terem sempre valorizado o saber, por terem sempre me apoiado, por terem sempre me dado educação e por terem sempre respondido minhas perguntas quando eu ainda não sabia respondê-las. Aos meus irmãos, Vitor e Arthur, por terem me aturado durante todas as suas vidas.

Agradeço à Frédérique Grassi por ter me dado essa segunda chance, por estar sempre presente para me orientar e por ensinar, não só sobre física, mas também a ter “boa coragem”.

Agradeço ao Leonardo Barbosa por ter sido um grande colega, por ter passado por tudo o que passei, e um pouco mais, e manter o bom humor sempre.

Agradeço ao Fernando Gardim pela paciência e pela ajuda com este trabalho, viajando a toda hora para poder estar lá. Ao Jean-Yves Ollitrault por seu tempo e por ter esclarecido várias dúvidas. Ao Matthew Luzum pelas aulas e pela ajuda. À Jacquelyn Noronha-Hostler pela ajuda, inclusive em programação. À Meera Vieira Machado por ceder os dados que tornaram esse trabalho possível.

Agradeço ao Marcelo Gameiro Munhoz por ter me iniciado na vida de um cientista, de um físico, por ter acreditado em mim.

Agradeço ao Julio Cezar Ribeiro Jorge, grande amigo e mentor.

Agradeço ao Luiz Henrique Silva e ao Vitor Martins de Oliveira pela amizade e pelas conversas, sobre física e tudo o mais. A todos os colegas aos quais não faço justiça ao não citar seus nomes, são muitos, mas lembrarei sempre de todos.

Agradeço à Luisa Brack Aguilar pela inspiração e exemplo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. PROEX – 0487.

Resumo

O Plasma de Quarks e Glúons é um novo estado da matéria criado brevemente em colisões nucleares de alta energia no RHIC (acelerador localizado no *Brookhaven National Laboratory*) e no LHC (acelerador do CERN, na Suíça). Para pesquisar suas propriedades e estado inicial, várias análises e métodos são usados. Neste mestrado, foi pesquisada a recém proposta Análise em Componentes Principais para multiplicidade e fluxo anisotrópico. É discutida sua sensibilidade ao tamanho das inomogeneidades no estado inicial bem como (de maneira indireta) ao tipo de condições iniciais e energia da colisão. Foi feita também uma comparação com dados experimentais recém obtidos pela colaboração CMS do LHC. O resultado talvez mais promissor é a diferença qualitativa entre dados de flutuações de multiplicidade e resultados de simulações hidrodinâmicas com certas condições iniciais.

Palavras-chaves: Plasma de Quarks e Glúons; Colisões de Íons Pesados a Alta Energia; Hidrodinâmica Relativística; Análise em Componentes Principais;

Abstract

The Quark Gluon Plasma is a new state of matter created briefly in high energy nuclear collisions at RHIC (accelerator located at Brookhaven National Laboratory) and at LHC (accelerator at CERN, Switzerland). To research its properties and initial state, many analysis and methods are used. In this master, the recently proposed Principal Component Analysis was studied for multiplicity and anisotropic flow. Its sensitivity to the size of inhomogeneities in the initial state as well as (indirectly) to the kind of initial conditions and collision energy is discussed. Also, a comparison was done with experimental data recently obtained by the CMS collaboration from LHC. Maybe, the most promising result is the qualitative difference between data from multiplicity fluctuations and results from hydrodynamic simulations with different initial conditions.

Keywords: Quark Gluon Plasma; High Energy Heavy Ion Collisions; Relativistic Hydrodynamics; Principal Component Analysis;

Lista de Figuras

1.1	Espalhamento de hádrons na teoria Gribov-Regge	14
1.2	Espalhamento de nucleons no modelo NeXus	14
1.3	Esquema de uma colisão não central	15
2.1	Exemplo de PCA bidimensional	26
3.1	Autovalores de PCA para NexSPheRIO 3+1	32
3.2	PCA com diferentes bins	33
3.3	Comparação de PCA e fluxo anisotrópico	34
3.4	r_n de PCA para NexSPheRIO 3+1	34
3.5	r_n de PCA para NexSPheRIO 3+1	34
3.6	Condição inicial NeXus suavizada	35
3.7	PCA para NexSPheRIO 2+1 para diferentes suavizações	36
3.8	r_2 para NeXus, Trento e MC-KLN	37
3.9	r_3 para NeXus, Trento e MC-KLN	38
3.10	r_4 para NeXus, Trento e MC-KLN	39
3.11	r_n para NeXus Pb+Pb a 2,76 TeV e Au+Au a 200 GeV	40
3.12	r_n de PCA para NexSPheRIO 3+1 e CMS	41
3.13	PCA para NexSPheRIO 3+1 e CMS	43
3.14	Previsões de PCA para NexSPheRIO 3+1	44

Sumário

1	Colisões de Íons Pesados Relativísticos	13
1.1	Condições Iniciais	13
1.1.1	Distribuição da Densidade Inicial de Energia	13
1.1.2	Centralidade	15
1.2	Hidrodinâmica Relativística Ideal	15
1.3	Equação de Estado	17
1.4	Desacoplamento	19
1.5	Fluxo Anisotrópico	20
1.6	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> (SPH)	21
2	Análise de Componentes Principais (PCA)	23
2.1	PCA em Colisões de Íons Pesados	27
2.2	Quebra de Fatoração	28
3	Resultados	31
3.1	Testes do Método PCA	31
3.2	Sensibilidade a Granularidade	35
3.3	Quebra de Fatoração	36
3.4	PCA para Hidrodinâmica Ideal no LHC	42
4	Conclusão	45
A	Aproximação PCA para Coeficiente de Quebra de Fatoração	47
B	Plano de Simetria para os Coeficientes de Fluxo Anisotrópico	49

Capítulo 1

Colisões de Íons Pesados Relativísticos

Desde a descoberta do elétron com o experimento do tubo de raios catódicos de J. J. Thomson [1], passando pela descoberta do Ω^- no *Brookhaven National Laboratory* [2], até os experimentos no *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) e no *Large Hadron Collider* (LHC), acelerar partículas tem sido o principal método de investigação dos constituintes elementares da matéria.

Os experimentos de colisões tem trazido novas descobertas e desafios para a física. Especificamente, os experimentos no RHIC e no LHC obtiveram resultados importantes para a Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*), aumentando a precisão e completando o modelo padrão. Além da famosa descoberta do bóson de Higgs no LHC [3], o RHIC anunciou em 2005 [4, 5, 6, 7] a descoberta do Plasma de Quarks e Glúons (QGP, do inglês *Quark Gluon Plasma*).

A existência deste novo estado da matéria hadrônica, o QGP, foi proposta por J. C. Collins e M. J. Perry [8], e por N. Cabibbo e G. Parisi [9]. Neste estado, os quarks e glúons não mais estariam confinados, formando hádrons ou mésons, mas se tornariam graus de liberdade de um sistema termalizado. No entanto, as medidas feitas do QGP formado no RHIC e no LHC indicam um estado fluido, em contradição, por assim dizer, a ideia usual de plasma como um gás não interagente.

A descrição de uma colisão é extremamente complexa. Ela é dividida em etapas, cada qual com vários modelos teóricos que em geral não podem ser resolvidos analiticamente. Estas etapas serão descritas a seguir.

1.1 Condições Iniciais

1.1.1 Distribuição da Densidade Inicial de Energia

Como todo problema em física, além das equações que regem o sistema, é preciso as condições iniciais do mesmo. No caso das colisões de íons pesados, não há meios diretos de medir o estado inicial da colisão.

Também não se pode calcular o estado inicial a partir de princípios fundamentais. Há colisões com grande troca de momento, chamadas *hard*, que podem ser tratadas com QCD perturbativa e colisões com pequena troca de momento, chamadas *soft*, que não tem tratamento simples em QCD. Assim, são usados modelos fenomenológicos, tais como NeXus [10] usado neste trabalho.

Na teoria efetiva de Gribov-Regge, a interação entre hádrons se dá pela troca de pômerons, como mostra a figura 1.1. As seções de choque dependem de alguns parâmetros que são determinados experimentalmente.

Figura 1.1: Interação de hádrons (linhas horizontais) pela troca de pômerons (linhas grossas verticais) na teoria de Gribov-Regge. (Retirado de [10])

No modelo NeXus, os pômerons são trocados entre quarks, como mostra a figura 1.2.

Figura 1.2: Interação de nucleons (linhas horizontais grossas), através dos quarks que o constituem (linhas finas), trocando pômerons (linhas grossas verticais) no modelo NeXus. (Retirado de [10])

Dadas as interações entre os nucleons, a distribuição inicial de energia irá mudar a cada colisão, não só através do parâmetro de impacto, mas também através das inhomogeneidades resultantes da distribuição dos nucleons e dos quarks que os constituem. A densidade de número bariônico líquido também muda, porém é uma quantidade muito pequena nas energias do RHIC (particularmente para energia de 200 GeV por par de nucleons) e LHC. Estas flutuações não providas da geometria global podem ser medidas indiretamente e ajudar na compreensão da física do estado inicial das colisões.

1.1.2 Centralidade

É costumeiro classificar as colisões pelo que é chamado de centralidade. Como o parâmetro de impacto não pode ser medido, as colisões são classificadas experimentalmente através do número de partículas produzidas, por exemplo. É esperado que uma colisão com parâmetro de impacto nulo, chamada colisão central, produza mais partículas. Conforme o parâmetro de impacto aumenta, as colisões de nucleons, também chamadas de colisões binárias, diminuem e menos partículas são produzidas. A figura 1.3 mostra um esquema simples de uma colisão não central.

Figura 1.3: Esquema de uma colisão não central. O parâmetro de impacto faz com que parte do núcleo não contribua para as colisões binárias e a geometria inicial do sistema seja anisotrópica no plano transversal. (Retirado de [11])

No caso de simulações, é mais eficiente classificar a colisão pelo número de participantes, o número de nucleons que sofreram colisões binárias.

Para definir as classes de centralidade, dado um número de eventos N_{ev} , os $\frac{N_{ev}}{10}$ eventos que possuírem mais participantes serão os 10% mais centrais, ou eventos com centralidade de 0-10%. Os $\frac{N_{ev}}{10}$ eventos seguintes com mais participantes serão eventos com centralidade de 10-20%, e assim em diante.

A classificação de centralidade permite limitar a variação da geometria global do sistema. Dado um conjunto de colisões com número fixo de participantes, o parâmetro de impacto deve ser, em média, o mesmo, portanto a forma global do estado inicial deve ser, em média, a mesma.

1.2 Hidrodinâmica Relativística Ideal

Nos estágios iniciais da colisão, um grande número de partículas é criado formando um sistema de muitos corpos que pode ser tratado termodinamicamente. Porém, para um tratamento termodinâmico, é preciso de um sistema em equilíbrio. Um sistema mais realista, criado da colisão de párons distribuídos de maneira inhomogênea nos núcleos,

difficilmente se encontraria em equilíbrio termodinâmico. Uma melhor aproximação se dá ao admitirmos equilíbrio termodinâmico local, ou seja, as quantidades termodinâmicas variam lentamente e a vizinhança de um ponto qualquer do sistema pode ser tomada como em equilíbrio termodinâmico. Esta vizinhança teria um tamanho arbitrário, que ainda obedeceria a aproximação termodinâmica, mas seria maior do que o livre caminho médio dos pártons.

Temos assim um fluido relativístico [12, 13], devido a alta energia, e sua dinâmica é descrita pela lei de conservação de grandezas que o descrevem, como pressão (P), densidade de energia (ϵ) e densidade de carga ou densidade bariônica (n).

Pressão e densidade de energia são representados pelo tensor de energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

onde u^μ é a quadrivelocidade do fluido em um referencial inercial arbitrário:

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, \vec{v}) \quad (1.2)$$

e $g^{\mu\nu}$ a métrica plana de Minkowski:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

$T^{\mu\nu}$ satisfaz a lei de conservação (adotaremos a notação de Einstein, onde índices repetidos são somados):

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

Para as densidades de carga existe uma lei de conservação para suas respectivas correntes:

$$\partial_\mu (n u^\mu) = 0. \quad (1.5)$$

Note que adotaremos o sistema de unidades naturais $c = \hbar = k_B = 1$.

A análise detalhada dos resultados experimentais indica que o QGP deve ter uma pequena viscosidade de cisalhamento e pode ter viscosidade volumétrica. Uma revisão sobre o formalismo da hidrodinâmica relativística viscosa pode ser vista por exemplo em [14, 15].

1.3 Equação de Estado

As equações de conservação são insuficientes para resolver a hidrodinâmica, existe uma variável a mais para o sistema de equações. É necessário uma equação de estado para relacionar as grandezas termodinâmicas e assim tornar o sistema solúvel.

Para a fase hadrônica, que é alcançada após a expansão e resfriamento do QGP, o sistema é descrito, aproximadamente, por um gás ideal [16, 17, 18]. A densidade bariônica, a densidade de energia e a pressão são dados por [19]:

$$n_{\text{HG}} = \sum_i g_i \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} f_i(k) , \quad (1.6)$$

$$\epsilon_{\text{HG}} = \sum_i g_i \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} E_i(k) f_i(k) , \quad (1.7)$$

$$P_{\text{HG}} = \sum_i \frac{g_i}{3} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} k \frac{\partial E_i(k)}{\partial k} f_i(k) \quad (1.8)$$

$$= \sum_i \frac{g_i}{3} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} \frac{k^4}{E_i(k)} f_i(k) , \quad (1.9)$$

onde f_i é a distribuição de Fermi-Dirac ou Bose-Einstein:

$$f_i(k) = \frac{1}{e^{\beta(E_i(k) - \mu_i)} + \theta_i} , \quad (1.10)$$

k é o momento, $\theta_i = \pm 1$ (− para bósons e + para férmions) e E_i é a energia relativística:

$$E_i(k) = \sqrt{k^2 + m_i^2} , \quad (1.11)$$

o índice i corresponde às diferentes ressonâncias hadrônicas, g_i é o fator de degenerescência, $\beta = T^{-1}$ é o inverso da temperatura e μ_i é o potencial químico bariônico, que pode ser positivo ou negativo para bárions e antibárions.

Na fase de QGP, para densidades bariônicas não elevadas, pode-se usar resultados obtidos com simulações de QCD na rede. Para densidades bariônicas elevadas, outra possibilidade é usar o *MIT Bag Model*, no qual existe uma pressão do vácuo $\mathcal{B}$ que mantém os quarks em uma “sacola” que representa o hádron. Para este modelo a densidade bariônica,

a densidade de energia e a pressão são dados por [19]:

$$n_{\text{QGP}} = \sum_j \frac{g_j}{3} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} f_j(k) , \quad (1.12)$$

$$\epsilon_{\text{QGP}} = \sum_j g_j \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} E_j(k) f_j(k) + \mathcal{B} , \quad (1.13)$$

$$P_{\text{QGP}} = \sum_j \frac{g_j}{3} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} k \frac{\partial E_j(k)}{\partial k} f_j(k) - \mathcal{B} \quad (1.14)$$

$$= \sum_j \frac{g_j}{3} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} \frac{k^4}{E_j(k)} f_j(k) - \mathcal{B} , \quad (1.15)$$

onde o índice j corresponde aos diferentes (anti)quarks e glúons do sistema. Os glúons possuem número bariônico nulo e, portanto, não contribuem para a densidade bariônica. O fator $\frac{1}{3}$ na densidade bariônica decorre do número bariônico dos quarks.

Quando a pressão P_{HG} do gás de hádrons é maior do que a pressão P_{QGP} do QGP, o sistema está na fase hadrônica. No caso contrário será a fase de QGP. Quando as duas pressões são iguais, tem-se uma curva de transição de fase de primeira ordem, onde $\epsilon(T)$ é descontínua.

Como as simulações de QCD na rede indicam um *crossover* para baixo potencial bariônico, foi sugerido alterar a pressão da seguinte maneira [20]:

$$(P - P_{\text{QGP}})(P - P_{\text{HG}}) = \delta(\mu) \quad (1.16)$$

com

$$\delta(\mu) = \delta_0 e^{-\left(\frac{\mu}{\mu_c}\right)^2} . \quad (1.17)$$

Desta forma quando $\mu \gg \mu_c$, $\delta \approx 0$ e as soluções da equação são P_{QGP} e P_{HG} . Caso contrário será uma combinação das duas pressões:

$$P = \frac{P_{\text{QGP}} + P_{\text{HG}}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(P_{\text{QGP}} - P_{\text{HG}})^2 + 4\delta} . \quad (1.18)$$

As outras quantidades termodinâmicas, densidade de energia e densidade bariônica,

podem ser derivadas a partir da pressão [16, 17, 18].

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{\partial P(T, \mu)}{\partial \mu} \right)_T \\ &= \lambda n_{\text{HG}} + (1 - \lambda) n_{\text{QGP}} - \frac{2 \frac{\mu}{\mu_c} \delta}{\sqrt{(P_{\text{QGP}} - P_{\text{HG}})^2 + 4\delta}}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= - \left(\frac{\partial (\beta P(T, \mu))}{\partial \beta} \right)_F \\ &= \lambda \epsilon_{\text{HG}} + (1 - \lambda) \epsilon_{\text{QGP}} - \frac{2 \left(1 + \frac{\mu}{\mu_c^2} \right) \delta}{\sqrt{(P_{\text{QGP}} - P_{\text{HG}})^2 + 4\delta}}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde $F = e^{\beta\mu}$ é a fugacidade e λ é dado por:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P_{\text{QGP}} - P_{\text{HG}}}{\sqrt{(P_{\text{QGP}} - P_{\text{HG}})^2 + 4\delta}} \right). \quad (1.21)$$

Outras maneiras de incorporar o ponto crítico foram desenvolvidas mais recentemente. Por exemplo, a partir de QCD na rede [21] ou usando a correspondência AdS/CFT [22].

1.4 Desacoplamento

A expansão hidrodinâmica termina quando os hádrons não mais interagem e tornam-se livres, se desacoplam. Este é o chamado *freeze-out*. Se este *freeze-out* for repentino, por exemplo, se as partículas param de interagir quando o fluido atinge uma certa temperatura, podemos usar a fórmula de Cooper-Frye [23, 24]:

$$E \frac{dN}{d^3k} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_{\Sigma} f(x, k) k^\mu d\sigma_\mu \quad (1.22)$$

onde E é a energia total, N é o número de partículas, x é um ponto do espaço-tempo, $d\sigma_\mu$ é o quadrivetor normal a um elemento da hiper-superfície de *freeze-out* Σ e $f(x, k)$ é a distribuição de momentos no espaço-tempo:

$$f(x, k) = \frac{1}{e^{\beta(x)(k^\mu u_\mu(x) - \mu(x))} \pm 1}. \quad (1.23)$$

Tentativas para melhorar o desacoplamento tem sido feitas, por exemplo, incluindo dois *freeze-outs*, um “químico”, quando as abundâncias são congeladas, e outro “térmico”, quando os espectros são congelados [25]. Outra possibilidade é passar da descrição hidrodinâmica para um modelo microscópico de transporte numa certa região, em geral quando os hádrons se formam [26].

1.5 Fluxo Anisotrópico

Após o desacoplamento e decaimento, a distribuição de momento das partículas carregadas é medida. Devido a simetria da colisão é conveniente usar um sistema de coordenadas hiperbólico para o espaço dos momentos. Tomando o eixo z na direção do momento dos núcleos:

$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (1.24)$$

é o momento transversal,

$$\phi = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \quad (1.25)$$

é o ângulo azimutal,

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right) \quad (1.26)$$

é a rapidez e

$$\eta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|\vec{p}| + p_z}{|\vec{p}| - p_z}\right) \quad (1.27)$$

é a pseudo-rapidez.

Com isso, a distribuição em ϕ pode ser expandida em uma série de Fourier:

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos n(\phi - \Psi_n) \right), \quad (1.28)$$

v_n é o coeficiente do fluxo e Ψ_n o plano de simetria, ou plano de ordem.

Através da relação de ortogonalidade, pode-se obter os coeficientes a partir da distribuição de partículas:

$$v_n = \frac{\int d\phi \frac{d^3 N}{p_T dp_T dy d\phi} \cos n(\phi - \Psi_n)}{\int d\phi \frac{d^3 N}{p_T dp_T dy d\phi}}. \quad (1.29)$$

Está implícita a dependência de v_n e Ψ_n em p_T e y .

É comum usar a notação complexa:

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{V}_n(p_T, y) e^{-in\phi}, \quad (1.30)$$

com

$$\tilde{V}_n(p_T, y) = v_n e^{in\Psi_n}. \quad (1.31)$$

Na prática, a distribuição não é contínua, pois existe um número finito de partículas. Além disso, elas são divididas em intervalos, bins, de p_T e η . Assim, pode-se definir o vetor de fluxo:

$$\tilde{V}_n = \frac{\sum_j e^{in\phi_j}}{\sum_j 1} \quad (1.32)$$

onde a soma é feita em todas as partículas pertencentes ao bin de p_T e η .

A existência do coeficiente v_2 , que resulta em um formato elíptico e por isso recebe o nome de fluxo elíptico, é um forte indicativo do comportamento hidrodinâmico do QGP. A geometria inicial da colisão, que tem uma forma elipsoidal para colisões menos centrais, gera diferenças de pressão e transfere esta anisotropia para o espaço dos momentos. Assim, o fluxo anisotrópico é uma medida essencial em colisões de íons pesados. Além disso, as inhomogeneidades iniciais geram coeficientes de fluxo. Experimentalmente, são medidos v_n para os vários n , e até mesmo v_2 para colisões com parâmetro de impacto próximo de zero, onde não há efeito de geometria.

A conexão entre (1.30) e (1.28) é esclarecida no apêndice B.

1.6 *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH)

SPH é um método numérico para resolver equações hidrodinâmicas criado por Gingold e Monaghan [27] e independentemente por Lucy [28]. Originalmente foi criado para problemas em astrofísica e mais tarde foi aplicado para colisões de íons pesados por Aguiar, Kodama, Osada e Hama [29]. Este método é usado para resolver as equações de hidrodinâmica nos códigos NexSPheRIO e v-USPhydro usados nas simulações deste mestrado. Consiste em discretizar o fluido em partículas e suavizá-lo.

Seja $a^*(\vec{r}, t)$ a densidade de uma grandeza extensiva A no referencial do laboratório, tem-se:

$$a^*(\vec{r}, t) = \int a^*(\vec{r}', t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3x . \quad (1.33)$$

O primeiro passo é substituir a função delta de Dirac por uma função compacta de integral unitária cujo limite é a delta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}'; h) = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.34)$$

onde h se relaciona com a largura da função.

O segundo passo é discretizar a integral:

$$a^*(\vec{r}, t) \approx \sum_i a^*(\vec{r}_i, t) W(\vec{r} - \vec{r}_i; h) \Delta V . \quad (1.35)$$

Define-se então a grandeza extensiva carregada pela i ésima partícula:

$$\nu_i \equiv a^*(\vec{r}_i, t) \Delta V . \quad (1.36)$$

É conveniente escolher uma grandeza conservada, que independa do tempo. No caso do QGP sem viscosidade, pode-se adotar a densidade de entropia s . Assim, ν_i será a entropia carregada por cada partícula de fluido.

Outra grandeza O pode ser medida a partir da quantidade carregada por cada partí-

cula, dada por:

$$O_i = \nu_i \left(\frac{o}{s} \right)_i^* . \quad (1.37)$$

O índice i se refere ao valor das densidades na posição x_i .

A densidade $o^*(\vec{r}, t)$ é dada, então, por:

$$o^*(\vec{r}, t) = \sum_i \nu_i \left(\frac{o}{s} \right)_i^* W(\vec{r} - \vec{r}_i; h) . \quad (1.38)$$

As equações da hidrodinâmica relativística podem ser obtidas através do princípio variacional para a ação:

$$I = - \int d^4x \epsilon , \quad (1.39)$$

que na aproximação SPH, usando a equação (1.37), se torna:

$$I_{\text{SPH}} = - \int dt \sum_i \left(\frac{E}{\gamma} \right)_i , \quad (1.40)$$

resultando em [29] (ver também os detalhes do cálculo em [16, 17, 18]):

$$\frac{d}{dt} \left[\nu_i \left(\frac{P + \epsilon}{s} \right)_i \gamma_i \vec{v}_i \right] = - \sum_j \nu_i \nu_j \left[\frac{1}{\gamma_i^2} \left(\frac{P}{s^2} \right)_i + \frac{1}{\gamma_j^2} \left(\frac{P}{s^2} \right)_j \right] \nabla_i W(\vec{r}_i - \vec{r}_j; h) . \quad (1.41)$$

Esta é a equação numérica correspondente a equação (1.4). Ela deve ser resolvida (junto com a equação $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_i$)¹ com métodos usuais de integração de equações diferenciais ordinárias, como Runge-Kutta, para obter a evolução do fluido.

¹Na prática, antes de resolvê-las, as equações são transformadas nas coordenadas $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ e $\tanh \eta = \frac{z}{t}$.

Capítulo 2

Análise de Componentes Principais (PCA)

A análise de componentes principais (PCA, do inglês *Principal Component Analysis*) foi criada por Karl Pearson em 1901 [30] e independentemente por Harold Hotelling em 1933 [31]. É um método de redução dimensional, que permite a análise de dados com muitas variáveis [32]. Consiste, basicamente, em achar conjuntos de parâmetros que tendem a ser sempre correlacionados agrupando-os em um único parâmetro a fim de conseguir uma simplificação.

Considerando um conjunto de N medidas com p variáveis, os dados são organizados em uma matriz x_{ji} , com $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, p$, de modo que as linhas são as diferentes variáveis e as colunas as diferentes medidas. Deste modo, x_{ji} é o valor da j ésima observável na i ésima medida.

Para uma medida i , consideremos:

$$f_i = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ji}, \quad (2.1)$$

i.e., são dados pesos às várias observáveis x_{ji} da medida i . Estes pesos são os mesmos para qualquer medida i . Impondo a condição:

$$\sum_{j=1}^p \beta_j^2 = 1 \quad (2.2)$$

procuramos o conjunto de pesos β_j tal que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 \quad (2.3)$$

seja máxima.

Aqui tomamos o conjunto de medidas como tendo média nula, sem perda de generalidade. Basta transladar os dados conforme necessário.

O objetivo deste primeiro passo é encontrar o maior modo de variação nas observáveis.

Note que β_j é um vetor p -dimensional. Adotaremos a notação $\vec{\beta}$ e $\vec{x}_i$ para indicar que são vetores no espaço de p variáveis.

Pode-se proceder construindo outro vetor $\vec{\beta}_2$ ortonormal ao primeiro, que passaremos a chamar de $\vec{\beta}_1$, que maximize a sua respectiva variância. Por construção, a variância de $\vec{\beta}_2$ será igual ou menor do que a de $\vec{\beta}_1$. Podemos fazer isso repetidas vezes até obter p vetores com uma hierarquia de variâncias.

Temos então uma base de vetores $\{\vec{\beta}_\alpha\}$ que maximizam suas respectivas variâncias σ_α^2 , mantendo a ortonormalidade. As variâncias serão dadas por:

$$f_{i\alpha} = \vec{\beta}_\alpha \cdot \vec{x}_i, \quad (2.4)$$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{i\alpha}^2. \quad (2.5)$$

Pela ortonormalidade dos $\vec{\beta}_\alpha$, é fácil ver que:

$$\vec{x}_i = \sum_{\alpha=1}^p f_{i\alpha} \vec{\beta}_\alpha. \quad (2.6)$$

Portanto, $\vec{\beta}_1$, que corresponde a maior variância, será o vetor da base que melhor se aproxima de todas as medidas $\vec{x}_i$.

Para de fato achar os vetores $\vec{\beta}_\alpha$, pode-se reescrever a variância:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{i\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p \beta_{j\alpha} x_{ji} \sum_{l=1}^p \beta_{l\alpha} x_{li} \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \beta_{j\alpha} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji} x_{li} \right) \beta_{l\alpha} \\ &= \vec{\beta}_\alpha^T V \vec{\beta}_\alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A matriz V é a matriz de covariância das medidas. Ela pode ser reescrita usando seus autovalores $\{\lambda_{\alpha'}\}$ e seus autovetores ortonormais $\{\vec{\Psi}_{\alpha'}\}$:

$$V = U D U^T, \quad (2.8)$$

com

$$U = (\vec{\Psi}_1, \dots, \vec{\Psi}_p) , \quad (2.9)$$

a matriz de autovetores¹, e

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} , \quad (2.10)$$

a matriz de autovalores.

Se os autovalores são ordenados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$, basta que $\vec{\beta}_\alpha^T U = (1, 0, \dots, 0)$ para que $\sigma^2 = \lambda_1$, i.e., seja máximo. Em particular, temos $\vec{\beta}_\alpha \cdot \vec{\Psi}_1 = 1$, com $\alpha = 1$, portanto $\vec{\beta}_1 = \vec{\Psi}_1$ é o autovetor correspondente ao maior autovalor. De modo similar, $\vec{\beta}_2$ será o autovetor correspondente ao autovalor λ_2 e assim em diante p vezes.

As componentes principais serão o subconjunto dos autovetores $\vec{\beta}_\alpha$ que melhor aproximam os dados. O PCA é usado, por exemplo, para compressão de imagens e reconhecimento facial.

Como exemplo, consideremos um conjunto de dados de apenas duas variáveis, x e y , que possui a matriz de covariância:

$$\text{cov}(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho \\ \rho & \sigma^2 \end{pmatrix} , \quad (2.11)$$

com σ e ρ reais positivos e $\rho \leq \sigma$.

O polinômio característico correspondente é:

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 - \lambda & \rho \\ \rho & \sigma^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ ((\sigma^2 - \lambda) - \rho)((\sigma^2 - \lambda) + \rho) = 0 , \quad (2.12)$$

portanto os autovalores são:

$$\lambda = \sigma^2 \pm \rho . \quad (2.13)$$

¹Usamos o fato de V ser simétrica, portanto U é ortogonal e $U^{-1} = U^T$.

Da equação para os autovetores:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho \\ \rho & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\sigma^2 \pm \rho) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \sigma^2 x + \rho y = (\sigma^2 \pm \rho)x \\ \rho x + \sigma^2 y = (\sigma^2 \pm \rho)y \end{cases}, \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} y = \pm x \\ x = \pm y \end{cases}. \quad (2.16)$$

O autovetor unitário correspondente ao maior autovalor $\lambda_1 = \sigma^2 + \rho$ é $\vec{\Psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ e o autovetor unitário correspondente ao menor autovalor $\lambda_2 = \sigma^2 - \rho$ é $\vec{\Psi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

Figura 2.1: Dados gerados para a covariância da equação (2.11) com $\sigma = 1$ e $\rho = \frac{4}{5}$, e as componentes principais multiplicadas pela raiz da respectiva variância.

A figura 2.1 mostra os vetores $\sqrt{\lambda}\vec{\Psi}$ e dados gerados a partir de uma distribuição gaussiana multivariada com $\sigma = 1$ e $\rho = \frac{4}{5}$:

$$P(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi|V|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{x}^T V^{-1} \vec{x}\right), \quad (2.17)$$

onde $\vec{x}^T = (x, y)$ e $V = \text{cov}(x, y)$. É possível ver que a direção da primeira componente é a de maior variância e $\sqrt{\lambda}$ faz o papel de desvio padrão dos dados na direção do autovetor.

2.1 PCA em Colisões de Íons Pesados

A análise de componentes principais em colisões de íons pesados foi proposta por Bhalerao, Ollitrault, Pal e Teaney [33].

Na hidrodinâmica a distribuição de pares de partículas é, predominantemente, determinada pela distribuição de partículas, equação (1.30):

$$\frac{dN_{\text{pairs}}}{d^3p_a d^3p_b} \approx \frac{dN}{d^3p_a} \frac{dN}{d^3p_b} . \quad (2.18)$$

É comum expandir a distribuição média de pares em uma série de Fourier:

$$\left\langle \frac{dN_{\text{pairs}}}{d^3p_a d^3p_b} \right\rangle = \sum_n V_{n\Delta}(p_a, p_b) e^{in(\phi_a - \phi_b)} , \quad (2.19)$$

onde a média $\langle \dots \rangle$ é calculada para eventos de uma dada janela de centralidade. De modo que:

$$V_{n\Delta}(p_a, p_b) = \langle V_n(p_a) V_n^*(p_b) \rangle . \quad (2.20)$$

i.e., a matriz de coeficientes de Fourier $V_{n\Delta}$ é igual matriz de covariância dos V_n . O que faz papel de índice das linhas e colunas é o bin de p_T , ou seja, para a matriz x_{ij} as diferentes medidas serão os diferentes eventos e as diferentes variáveis serão os bins de p_T .

Na prática usamos:

$$V_n(p) = \frac{1}{2\pi\Delta p_T \Delta\eta} \sum_{j=1}^{M(p)} e^{in\phi_j} \quad (2.21)$$

Trabalhamos com partículas carregadas para as quais a massa não é conhecida. $M(p)$ é a multiplicidade ou número de partículas no bin centrado em p ². Além disso, utilizamos dados integrados em η , assim V_n dependerá apenas de p_T .

Também, para evitar dupla contagem:

$$V_{n\Delta}(p_{Ta}, p_{Tb}) = \langle V_n(p_{Ta}) V_n^*(p_{Tb}) \rangle - \frac{\langle V_0(p_{Ta}) \rangle \delta_{p_{Ta}, p_{Tb}}}{2\pi\Delta p_T \Delta\eta} \quad (2.22)$$

É útil introduzir a notação:

$$V_n^{(\alpha)}(p_T) \equiv \sqrt{\lambda_\alpha} \Psi_\alpha(p_T) . \quad (2.23)$$

onde os autovalores são classificados em ordem decrescente, do maior com $\alpha = 1$ até o menor com α igual ao número de bins de p_T , e os Ψ_α são os autovetores ortonormalizados. $V_{n\Delta}$ é simétrica, portanto tem autovalores reais e podemos escolher autovetores reais.

²Neste caso, p denota as coordenadas p_T e η .

Com isto , a equação (2.8) pode ser reescrita:

$$V_{n\Delta}(p_{Ta}, p_{Tb}) = \langle V_n(p_{Ta}) V_n^*(p_{Tb}) \rangle = \sum_{\alpha} V_n^{(\alpha)}(p_{Ta}) V_n^{(\alpha)}(p_{Tb}) . \quad (2.24)$$

os $V_n^{(\alpha)}$ formam uma base para os eventos de uma certa janela fixa de centralidade. O vetor de fluxo $V_n(p_T)$ para um dado evento pode ser escrito como:

$$V_n(p_T) = \sum_{\alpha} \xi_n^{(\alpha)} V_n^{(\alpha)}(p_T) , \quad (2.25)$$

onde os ξ_n^{α} variam para cada evento.

A componente *leading* $V_n^{(1)}(p_T)$ corresponde a flutuações com mais variância, é a componente dominante de $V_{n\Delta}$ e V_n . Com a normalização adequada, espera-se que corresponda ao fluxo anisotrópico usual, i.e., elíptico se $n = 2$, triangular se $n = 3$ e assim em diante. O caso $n = 0$ é menos trivial e será investigado mais adiante, já que a multiplicidade média não é nula e é preciso subtrair a média dos dados. Para fazer a conexão com o fluxo anisotrópico usual, introduzimos:

$$v_n^{(\alpha)}(p_T) \equiv \frac{V_n^{(\alpha)}(p_T)}{\langle V_0(p_T) \rangle} . \quad (2.26)$$

2.2 Quebra de Fatoração

Para entender melhor o que representam as outras componentes é útil usar o coeficiente de quebra de fatoração introduzido em [34]:

$$r_n(p_{Ta}, p_{Tb}) = \frac{V_{n\Delta}(p_{Ta}, p_{Tb})}{\sqrt{V_{n\Delta}(p_{Ta}, p_{Ta}) V_{n\Delta}(p_{Tb}, p_{Tb})}} . \quad (2.27)$$

Pode-se calcular r_n com os vetores de fluxo $\tilde{V}_n$ no lugar de V_n , obtendo:

$$r_n(p_{Ta}, p_{Tb}) = \frac{\langle \tilde{V}_n(p_{Ta}) \tilde{V}_n^*(p_{Tb}) \rangle}{\sqrt{\langle |\tilde{V}_n(p_{Ta})|^2 \rangle \langle |\tilde{V}_n(p_{Tb})|^2 \rangle}} = \frac{\langle v_n(p_{Ta}) v_n(p_{Tb}) e^{in(\Psi_n(p_{Ta}) - \Psi_n(p_{Tb}))} \rangle}{\sqrt{\langle v_n(p_{Ta})^2 \rangle \langle v_n(p_{Tb})^2 \rangle}} . \quad (2.28)$$

Pela simetria entre p_{Ta} e p_{Tb} , só há o termo cosseno, portanto r_n é real.

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o quadrado do numerador será menor do que o quadrado do denominador:

$$\langle v_n(p_{Ta}) v_n(p_{Tb}) \rangle^2 \leq \langle v_n(p_{Ta})^2 \rangle \langle v_n(p_{Tb})^2 \rangle , \quad (2.29)$$

portanto $|r_n| \leq 1$.

Se não houvesse flutuações de condições iniciais, e nem do parâmetro de impacto, o

plano do evento não dependeria de p_T e $v_n(p_T)$ seria constante entre os eventos, assim:

$$r_n(p_{T_a}, p_{T_b})^2 = \frac{(v_n(p_{T_a})v_n(p_{T_b}))^2}{v_n(p_{T_a})^2 v_n(p_{T_b})^2} = 1 . \quad (2.30)$$

A possibilidade de $r_n < 1$ está ligada as flutuações.

Pode-se escrever r_n usando as componente principais, através da equação (2.24):

$$r_n(p_{T_a}, p_{T_b}) = \frac{\sum_{\alpha} V_n^{(\alpha)}(p_{T_a}) V_n^{(\alpha)}(p_{T_b})}{\sqrt{\sum_{\alpha} V_n^{(\alpha)}(p_{T_a})^2 \sum_{\alpha} V_n^{(\alpha)}(p_{T_b})^2}} , \quad (2.31)$$

i.e., r_n incorpora todas as componentes principais, de modo que estudar as componentes uma a uma é mais preciso.

Pode ser feita uma aproximação no caso em que as duas primeiras componentes são dominantes e $V_n^{(1)} \gg V_n^{(2)}$:

$$r_n \approx 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{V_n^{(2)}(p_{T_a})}{V_n^{(1)}(p_{T_a})} - \frac{V_n^{(2)}(p_{T_b})}{V_n^{(1)}(p_{T_b})} \right|^2 . \quad (2.32)$$

Para uma demonstração, veja o apêndice A.

Capítulo 3

Resultados

Para este mestrado foram analisadas simulações feitas no NexSPheRIO, um programa que utiliza condições iniciais NeXus e o método SPH, e no v-USPhydro [35, 36], um programa que utiliza o método SPH com viscosidade e diferentes condições iniciais como Trento [37] e MC-KLN [38]. Os dados foram cedidos por Meera Vieira Machado, Fernando Gardim e Jacquelyn Noronha-Hostler.

Os trabalhos realizados são:

1. Análise em componentes principais como participação no artigo [39], também apresentado oralmente na maior conferência da área de colisões de íons pesados, a Quark Matter 2018 [40].
2. Cálculo de coeficiente de quebra de fatoração para várias condições iniciais e energias como participação em um trabalho a ser publicado [41].
3. Análise em componentes principais em comparação com dados obtidos pelo CMS e que compõe boa parte de outro trabalho a ser submetido em breve e que foi apresentado como pôster na Quark Matter 2018 [42].

Antes da descrição destes trabalhos, seguem alguns testes para chegar os resultados obtidos.

3.1 Testes do Método PCA

Como $V_{n\Delta}$ é uma matriz positiva semi-definida por construção, seus autovalores são positivos. Um primeiro teste é verificar este fato, mostrado na figura 3.1.

Outro teste é verificar que as componentes principais não dependem do tamanho do bin, como mostrado na figura 3.2.

Em seguida, a primeira componente (*leading mode*) e o fluxo anisotrópico usual devem coincidir¹. A comparação é feita na figura 3.3.

¹Há uma pequena diferença na maneira de fazer as médias: $v_n^{(1)}(p_T) = \frac{V_n^{(1)}(p_T)}{\langle V_o(p_T) \rangle}$ e $\sqrt{\langle v_n(p_T)^2 \rangle}$

Figura 3.1: Autovalores para diferentes n do PCA para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV com diferentes centralidades.

Finalmente, um teste global de todas as componentes pode ser feito comparando dois cálculos de r_n . Um calculado exatamente a partir da equação (2.27) e outro com a decomposição de $V_{n\Delta}(p_{T_a}, p_{T_b})$ em $V_n^{(\alpha)}(p_{T_a})V_n^{(\alpha)}(p_{T_b})$, equação (2.24), utilizando apenas os primeiros termos. Esta comparação é mostrada nas figuras 3.4 e 3.5.

É interessante saber quantas componentes principais são necessárias para aproximar r_n . Usar duas componentes com a aproximação da equação (2.32) não funciona tão bem em alguns casos, usar duas componentes sem aproximação mostra melhoras e três componentes dão um bom resultado. Como mostram as figuras 3.4 e 3.5.

Figura 3.2: Componentes de v_n para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV com diferente números de bins de p_T e diferentes centralidades.

Figura 3.3: Comparação da primeira componente com v_n calculado da maneira usual para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV com diferentes centralidades.

Figura 3.4: r_n exato e com componentes principais para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV com centralidade de 0-5%.

Figura 3.5: r_n exato e com componentes principais para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV com centralidade de 20-30%.

3.2 Sensibilidade a Granularidade

Em [39] e [40], o objetivo é procurar observáveis sensíveis ao tamanho das inhomogeneidades iniciais. Para isto, o tamanho destas inhomogeneidades foi mudado usando o método descrito a seguir.

Dada a densidade de energia ϵ em certos pontos $\vec{r}_i$, uma nova densidade foi obtida através de:

$$\epsilon(\vec{r}, \lambda) = \sum_i \epsilon(\vec{r}_i) W\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}_i|}{\lambda}; \lambda\right), \quad (3.1)$$

com

$$W(\xi, \lambda) = \frac{10}{7\pi\lambda^2} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^3 & \text{if } 0 \leq \xi < 1 \\ \frac{1}{4}(2 - \xi)^3 & \text{if } 1 \leq \xi \leq 2 \\ 0 & \text{if } 2 < \xi \end{cases}. \quad (3.2)$$

O efeito dessa suavização é ilustrado na figura 3.6. Para $\lambda = 0,3$ fm, a densidade de energia é pouco alterada em relação ao caso original. Para $\lambda = 1$ fm, as inhomogeneidades são maiores, mas os picos e vales são mantidos.

Figura 3.6: Condição inicial NeXus (original a esquerda) e com diferentes suavizações (meio: $\lambda = 0,3$ fm, direita: $\lambda = 1$ fm). (Retirado de [39])

A contribuição consistiu em analisar as componentes principais de dados obtidos em 2+1 dimensões com condições iniciais NeXus para colisões Pb+Pb a 2,76 TeV na janela de centralidade 25-30%.

Nas figuras 3.7, a componente *leading* é independente do valor de λ , i.e., do tamanho das inhomogeneidades, como esperado. A componente *leading*, normalizada adequadamente, deve coincidir com o fluxo anisotrópico e vários artigos [43, 44, 45] concluíram que este não depende do tamanho das inhomogeneidades iniciais.

Ainda nas figuras 3.7, a componente *subleading* tem uma pequena dependência em λ . Isto é razoável, pois cálculos do coeficiente de quebra de fatorao [39, 40, 46] indicam pouca dependncia no tamanho das inhomogeneidades. O r_n reproduzido em boa aproximao pelas trs primeiras componentes principais (ver figuras 3.4 e 3.5), como a

primeira não depende de λ , a componente *subleading*, e eventualmente a *sub-subleading* que é menor, devem ter alguma dependência em λ .

(a) 25-30%

(b) 25-30%

(c) 25-30%

Figura 3.7: Componentes de v_n para simulações NexSPheRIO em 2+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV com diferentes larguras de suavização.

3.3 Quebra de Fatoração

Em [41], o objetivo é fazer previsões para o RHIC a 200 GeV de algumas observáveis que foram medidas a energias mais altas no LHC. Para a contribuição desse trabalho foi calculado o coeficiente de quebra de fatoração para várias condições iniciais no RHIC, como mostram as figuras 3.8 a 3.10. Pode-se ver que as previsões dependem das condições iniciais (NeXus, Trento, MC-KLN). Assim, temos a possibilidade de eliminar modelos se r_n for medido no RHIC a 200 GeV.

O efeito da mudança de energia das colisões também foi estudado. Na figura 3.11, r_n é calculado para o LHC a 2,76 TeV e para o RHIC a 200 GeV. Pode-se ver que apesar da grande mudança de energia, a mudança no r_n não é significativa.

Nas figuras 3.12, foi feita uma comparação com dados obtidos pelo CMS [47]. Os resultados são razoáveis para a janela 20-30% e para r_2 na janela 0-5%. O r_3 fica abaixo

dos dados para $p_{T_a} - p_{T_b}$ grande. Outras comparações com dados podem ser encontradas na literatura e, em geral, o mesmo efeito é observado [48, 49].

Figura 3.8: r_2 para simulações em 2+1 dimensões com condições iniciais NeXus, Trento e MC-KLN de colisões Au+Au a 200 GeV para diferentes centralidades.

Figura 3.9: r_3 para simulações em 2+1 dimensões com condições iniciais NeXus, Trento e MC-KLN de colisões Au+Au a 200 GeV para diferentes centralidades.

Figura 3.10: r_4 para simulações em 2+1 dimensões com condições iniciais NeXus, Trento e MC-KLN de colisões Au+Au a 200 GeV para diferentes centralidades.

Figura 3.11: r_n para simulações NexSPheRIO em 2+1 dimensões de colisões Au+Au a 200 GeV e em 3+1 dimensões de colisões Pb+Pb a 2,76 TeV para centralidade de 20-30%.

(a) 0-5%.

(b) 20-30%.

Figura 3.12: r_n das componentes principais para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV e dados do CMS [47] com diferentes centralidades.

3.4 PCA para Hidrodinâmica Ideal no LHC

Em 2017, a primeira análise em componentes principais experimental foi feita pela colaboração CMS [50]. O objetivo de [42] é estudar estes dados. Para isto, foram usados dados de simulações [18] feitas em 3+1 dimensões para as centralidades 0-5% e 20-30%, com $|\eta| < 2,5$ (comparável ao CMS), mas $p_T \geq 0,5$ GeV (para o CMS $p_T \geq 0,3$ GeV). As simulações foram feitas para um fluido ideal com condições iniciais NeXus.

Para $n = 2$ e $n = 3$, nas figuras 3.13, vemos que a componente *leading* fica acima dos dados e o efeito é maior para p_T grande. Isto é esperado, pois o fluxo anisotrópico é sensível a viscosidade e o mesmo acontece para a componente *leading*.

Ainda nas figuras 3.13, para $n = 2$ e $n = 3$, a componente *subleading* está em razoável acordo com os dados para $p_T \leq 2$ GeV. Para $p_T \geq 2$ GeV, efeitos de física *hard* ou o limite de validade hidrodinâmica podem explicar a discrepância dos resultados. O efeito de viscosidade deve ser menor para a componente *subleading* (como mostra a figura 13 em [51]).

Na figura 3.14, previsões para $n = 4$ são mostradas.

Para $n = 0$, originalmente era previsto [33] que a componente *leading* não depende de p_T . Esta previsão foi feita usando o código AMPT [52], que, após gerar condições iniciais, simula interações partônicas, hadronização e interação hadrônica, sem hidrodinâmica. A explicação dada para isto [33] é que a multiplicidade total flutua numa janela de centralidade e isto se reflete da mesma maneira para cada bin de p_T . Por outro lado, nas simulações com NexSPheRIO a componente *leading* cresce com p_T , e este comportamento influencia a componente *subleading*, pois são ortogonais. O mesmo comportamento é também visto na figura 2a obtida com simulações hidrodinâmicas feitas por Aleksas Mazeliauskas e Derek Teaney [53] com condições iniciais Monte Carlo Glauber [54]. Assim, pela primeira vez, vemos uma diferença qualitativa entre dados experimentais e hidrodinâmica.

Para entender o comportamento da componente *leading* na hidrodinâmica, lembremos que:

$$\begin{aligned} V_{0\Delta}(p_{Ta}, p_{Tb}) &= \langle V_0(p_{Ta})V_0(p_{Tb}) \rangle - \langle V_0(p_{Ta}) \rangle \langle V_0(p_{Tb}) \rangle - \frac{\langle V_0(p_{Ta}) \rangle \delta_{p_{Ta}, p_{Tb}}}{2\pi \Delta p_T \Delta \eta} \\ &\approx V_0^{(1)}(p_{Ta}) V_0^{(1)}(p_{Tb}) . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Desse modo:

$$v_0^{(1)}(p_T) = \frac{V_0^{(1)}(p_T)}{\langle V_0(p_T) \rangle} \approx \frac{\sqrt{\langle V_0(p_{Ta})V_0(p_{Tb}) \rangle - \langle V_0(p_{Ta}) \rangle \langle V_0(p_{Tb}) \rangle - \frac{\langle V_0(p_{Ta}) \rangle \delta_{p_{Ta}, p_{Tb}}}{2\pi \Delta p_T \Delta \eta}}}{\langle V_0(p_T) \rangle} \quad (3.4)$$

Na figura 3.13, a quantidade aproximada da equação (3.4), denotada $\frac{\sigma(V_0)}{\langle V_0 \rangle}$, é plotada

e vemos que reproduz razoavelmente $v_0^{(1)}$.

No artigo [42], foi desenvolvido um modelo simples para entender a origem das variações de $V_0(p_T)$ evento-por-evento, e, inclusive, calcular os autovalores e autovetores de $V_{0\Delta}$. Basicamente, não só o número de partículas, mas também o momento médio $\langle p_T \rangle$ varia de colisão para colisão e isto se reflete em cada bin de maneira diferente. Assim, se o comportamento experimental de $v_0^{(1)}(p_T)$ for confirmado, podemos concluir que modelos como NeXus provocam flutuações de $\langle p_T \rangle$ incompatíveis com os dados.

Figura 3.13: Componentes de v_n para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV e dados do CMS [50].

Figura 3.14: Componentes de v_4 para simulações NexSPheRIO em 3+1 dimensões de Pb+Pb a 2,76 TeV.

Capítulo 4

Conclusão

A descoberta do QGP data de 2005 e o papel das inomogeneidades nas condições iniciais virou consenso a partir de 2010 (em particular, devido as medidas dos coeficientes de fluxo v_n). Hoje, muito esforço é feito para extrair propriedades do plasma e a forma exata de suas condições iniciais. Para isto novos métodos de análise são propostos e o método de análise em componentes principais [33] é um dos mais recentes e promissores.

Neste trabalho de mestrado foi estudada a formulação do método PCA em análise de dados e para o caso particular das colisões nucleares de alta energia (capítulo 2). Também foi estudado seu uso em vários problemas de colisões nucleares de alta energia, inclusive testes a se fazer (capítulo 3).

O primeiro problema estudado [39, 40] foi a dependência das componentes principais no tamanho das inomogeneidades. A componente *leading* exibe pouca dependência, o que não surpreende, já que esta corresponde ao fluxo anisotrópico, o qual não depende das inomogeneidades [43, 44, 45]. A componente *subleading* exibe alguma dependência. Este resultado é novo e consistente com o fato de o coeficiente de quebra de fatoraçoão, que é descrito com boa aproximação pelas duas ou três componentes principais de maior autovalor, ter uma pequena dependência no tamanho das inomogeneidades [39, 40, 46].

O segundo problema estudado [41] foi a previsão do coeficiente de quebra de fatoraçoão. Este foi medido no LHC [47]. Argumentamos que seria útil medi-lo no RHIC para a energia mais elevada pois:

1. Ele sofre pouca mudança entre a energia do LHC, $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV, e a energia do RHIC, $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Então, deve valer aproximadamente para energias do *Beam Energy Scan*, que inicia este ano.
2. Ele é muito sensível às condições iniciais. Assim, o coeficiente de quebra de fatoraçoão oferece uma possibilidade de distinguir entre modelos de condições iniciais. A fortiori, uma análise em componentes principais, que é uma análise mais fina, seria ainda mais útil. Planejamos fazer previsões.

O terceiro e último estudo foi o cálculo de PCA para o LHC e a comparação com os dados recém obtidos pelo CMS [50]. Para o fluxo anisotrópico ($n = 2, 3$), a componente principal fica acima dos dados. Foi usada hidrodinâmica ideal e é esperado que com viscosidade estas componentes principais diminuam como é o caso para o fluxo anisotrópico. A componente *subleading* está em melhor acordo. Para esta o efeito da viscosidade deve ser menor [51]. Foram feitas simulações com hidrodinâmica viscosa em 2+1 dimensões, com o código v-USPhydro, para condições iniciais NeXus, de modo que poderá ser feita uma verificação do papel da viscosidade mais precisamente.

O resultado mais desafiador nesse estudo diz respeito a $n = 0$. A componente principal $v_0^{(1)}(p_T)$, nas simulações hidrodinâmicas com NexSPheRIO bem como nas de Mazeliauskas e Teaney [53] crescem com p_T . Os dados do CMS [50] e resultados obtidos com AMPT [33] (que não possui fluxo coletivo como na hidrodinâmica) indicam pouca dependência de $v_0^{(1)}$ em p_T . Isto é esperado se as flutuações em multiplicidade do evento se refletem em todos os bins de p_T da mesma maneira. Se os dados do CMS para $n = 0$ forem confirmados, pode ser possível eliminar modelos de condições iniciais tais como o NeXus.

Apêndice A

Aproximação PCA para Coeficiente de Quebra de Fatoração

Para mostrar a aproximação da equação (2.32), basta usar a equação (2.24) com apenas as duas primeiras componentes, pois, supostamente, são as mais importantes. Assim, temos:

$$V_{n\Delta}(p_a, p_b) \approx V_n^{(1)}(p_a)V_n^{*(1)}(p_b) + V_n^{(2)}(p_a)V_n^{(2)}(p_b) . \quad (\text{A.1})$$

Para simplificar a notação, adotaremos $V_n^{(\alpha)}(p_{T_a}) \equiv V_{n_a}^{(\alpha)}$.

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{V_{n\Delta}(p_a, p_b)}{\sqrt{V_{n\Delta}(p_a, p_a)V_{n\Delta}(p_b, p_b)}} \\ &\approx \frac{V_{n_a}^{(1)}V_{n_b}^{(1)} + V_{n_a}^{(2)}V_{n_b}^{(2)}}{\sqrt{\left(V_{n_a}^{(1)}V_{n_a}^{(1)} + V_{n_a}^{(2)}V_{n_a}^{(2)}\right)\left(V_{n_b}^{(1)}V_{n_b}^{(1)} + V_{n_b}^{(2)}V_{n_b}^{(2)}\right)}} \\ &\approx \sqrt{\frac{\left(V_{n_a}^{(1)}V_{n_b}^{(1)} + V_{n_a}^{(2)}V_{n_b}^{(2)}\right)^2}{\left(V_{n_a}^{(1)2} + V_{n_a}^{(2)2}\right)\left(V_{n_b}^{(1)2} + V_{n_b}^{(2)2}\right)}} \\ &\approx \sqrt{\frac{V_{n_a}^{(1)2}V_{n_b}^{(1)2} + 2V_{n_a}^{(1)}V_{n_b}^{(1)}V_{n_a}^{(2)}V_{n_b}^{(2)} + V_{n_a}^{(2)2}V_{n_b}^{(2)2}}{V_{n_a}^{(1)2}V_{n_b}^{(1)2} + V_{n_a}^{(1)2}V_{n_b}^{(2)2} + V_{n_a}^{(2)2}V_{n_b}^{(1)2} + V_{n_a}^{(2)2}V_{n_b}^{(2)2}}} , \end{aligned}$$

completando quadrados:

$$\begin{aligned}
r_n &\approx \sqrt{\frac{V_{n_a}^{(1)2} V_{n_b}^{(1)2} + 2V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(1)} V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(2)} + V_{n_a}^{(2)2} V_{n_b}^{(2)2}}{V_{n_a}^{(1)2} V_{n_b}^{(1)2} + \left(V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(1)} - V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(2)}\right)^2 + 2V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(2)} V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(1)} + V_{n_a}^{(2)2} V_{n_b}^{(2)2}}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{\frac{V_{n_a}^{(1)2} V_{n_b}^{(1)2} + 2V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(1)} V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(2)} + V_{n_a}^{(2)2} V_{n_b}^{(2)2} + \left(V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(1)} - V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(2)}\right)^2}{V_{n_a}^{(1)2} V_{n_b}^{(1)2} + 2V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(1)} V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(2)} + V_{n_a}^{(2)2} V_{n_b}^{(2)2}}}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(1)} - V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(2)}\right)^2}{\left(V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(1)} + V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(2)}\right)^2}}} . \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Assumindo que $V_n^{(1)} \gg V_n^{(2)}$, temos:

$$V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(1)} + V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(2)} \approx V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(1)} , \tag{A.3}$$

então:

$$\begin{aligned}
r_n &\approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{n_a}^{(2)} V_{n_b}^{(1)} - V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(2)}}{V_{n_a}^{(1)} V_{n_b}^{(1)}}\right)^2}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{n_a}^{(2)}}{V_{n_a}^{(1)}} - \frac{V_{n_b}^{(2)}}{V_{n_b}^{(1)}}\right)^2}} . \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Usando a série de Taylor em primeira ordem:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x , \tag{A.5}$$

temos:

$$r_n \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_n^{(2)}(p_{T_a})}{V_n^{(1)}(p_{T_a})} - \frac{V_n^{(2)}(p_{T_b})}{V_n^{(1)}(p_{T_b})} \right)^2 .$$

Apêndice B

Plano de Simetria para os Coeficientes de Fluxo Anisotrópico

Para entender melhor o papel do plano de simetria nos coeficientes de fluxo anisotrópico, basta reescrever a série de Fourier da equação (1.30):

$$\begin{aligned} E \frac{d^3 N}{dp^3} &= \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{V}_n(p_T, y) e^{-in\phi} \\ &= \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \left[1 + \sum_{n>0} \tilde{V}_n(p_T, \eta) e^{-in\phi} + \sum_{n>0} \tilde{V}_{-n}(p_T, \eta) e^{in\phi} \right], \end{aligned}$$

da equação (1.32) temos $\tilde{V}_{-n} = \tilde{V}_n^*$:

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \left[1 + \sum_{n>0} \tilde{V}_n(p_T, \eta) e^{-in\phi} + \sum_{n>0} \tilde{V}_n^*(p_T, \eta) e^{in\phi} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Escrevendo $\tilde{V}_n$ em termos de seu módulo e sua fase:

$$\begin{aligned} E \frac{d^3 N}{dp^3} &= \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \left[1 + \sum_{n>0} v_n(p_T, \eta) e^{in\Psi_n(p_T, \eta)} e^{-in\phi} + \sum_{n>0} v_n(p_T, \eta) e^{-in\Psi_n(p_T, \eta)} e^{in\phi} \right] \\ &= \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \left[1 + \sum_{n>0} v_n(p_T, \eta) \left(e^{-in(\phi - \Psi_n(p_T, \eta))} + e^{in(\phi - \Psi_n(p_T, \eta))} \right) \right] \\ &= \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} \left[1 + 2 \sum_{n>0} v_n(p_T, \eta) \cos n(\phi - \Psi_n(p_T, \eta)) \right]. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

O plano de simetria dos coeficientes aparece como uma fase. As flutuações das condições iniciais e do parâmetro de impacto tornam essa fase aleatória, por isso $\tilde{V}_n$ será um número complexo (ou vetor) distribuído aleatoriamente em torno da origem e $\langle \tilde{V}_n(p_T, \eta) \rangle = 0$ (na hidrodinâmica).

Referências Bibliográficas

- [1] J. J. Thomson, *Philosophical Magazine* 44 (1897), 293.
- [2] V. E. Barnes et al., *Phys. Rev. Lett.* 12 (1964), 204.
- [3] ATLAS Collaboration, *Phys. Lett. B* 716 (2012), 1-29.
- [4] BRAHMS, *Nucl. Phys. A* 757 (2005), 1-27.
- [5] PHOBOS, *Nucl. Phys. A* 757 (2005), 28-101.
- [6] STAR, *Nucl. Phys. A* 757 (2005), 102-183.
- [7] PHENIX, *Nucl. Phys. A* 757 (2005), 184-283.
- [8] J. C. Collins and M. J. Perry, *Phys. Rev. Lett.* 34 (1975), 1353.
- [9] N. Cabibbo and G. Parisi, *Phys. Lett. B* 59 (1975), 67.
- [10] H. J. Drescher, M. Hladik, S. Ostapchenko, T. Pierog, K. Werner, *Phys. Rep.* 350 (2001), 93-289.
- [11] R. Snellings, *New J. Phys.* 13 (2011), 055008, arXiv:1102.3010
- [12] L. Landau and E. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics V. 6: Fluid Mechanics* (Pergamon Press) Third Edition.
- [13] Jean-Yves Ollitrault, *Eur. J. Phys.* 29 (2008), 275, arXiv:0708.2433.
- [14] D. Teaney, *Quark Gluon Plasma* 4, arXiv:0905.2433.
- [15] S. Jeon and U. Heinz, *Quark Gluon Plasma* 5, arXiv:1503.03931.
- [16] R. P. G. Andrade, *Tese de Doutorado: Sobre a evolução hidrodinâmica da matéria nuclear criada em colisões de íons pesados relativísticos - um estudo com condições iniciais flutuantes*, Instituto de Física da Universidade de São Paulo.
- [17] D. M. Dudek, *Tese de Doutorado: Efeitos da equação de estado em hidrodinâmica relativística através de alguns observáveis*, Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista.
- [18] M. V. Machado, *Dissertação de Mestrado: Hidrodinâmica Evento-por-evento para o LHC*, Instituto de Física da Universidade de São Paulo.
- [19] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*, New York, USA: Springer (1997).

- [20] Y. Hama, R. P. G. Andrade, F. Grassi, O. Socolowsky Jr., T. Kodama, B. Tavares, S. S. Padula, Nucl. Phys. A 774 (2006), 169-178.
- [21] Parotto et al., arXiv:1805.05249.
- [22] Critelli et al., Phys. Rev. D 96 (2017), 096026, arXiv:1706.00455.
- [23] F. Cooper and G. Frye, Phys. Rev. D. 10 (1974), 186.
- [24] J.-P. Blaizot and J.-Y. Ollitrault, Quark Gluon Plasma 1.
- [25] J. Sollfrank and U. Heinz, Quark Gluon Plasma 2.
- [26] P. Huovinen, Quark Gluon Plasma 3.
- [27] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, Mon. Not. R. Astro. Soc. 181 (1977), 375.
- [28] L. B. Lucy, Astrophys. J. 82 (1977), 1013.
- [29] C. E. Aguiar, T. Kodama, T. Osada and Y. Hama, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27 (2001), 75.
- [30] K. Pearson, Philosophical Magazine 2 (1901), 559-572.
- [31] H. Hotelling, Journal of Educational Psychology 24(6) (1933), 417-441.
- [32] J. Ramsay and B. W. Silverman, *Functional Data Analysis*, New York, USA: Springer (2005), Second Edition. Ch. 8, App. A.5.
- [33] R. S. Bhalerao, J.-Y. Ollitrault, S. Pal, D. Teaney, Phys. Rev. Lett. 114 (2015), 152301, arXiv:1410.7739.
- [34] F. G. Gardim, F. Grassi, M. Luzum and J.-Y. Ollitrault, Phys. Rev. C 87 (2013), 031901 (R), arXiv:1211.0989.
- [35] J. Noronha-Hostler, G. S. Denicol, J. Noronha, R. P. G. Andrade and F. Grassi, Phys. Rev. C 88 (2013), 044916, arXiv:1305.1981.
- [36] J. Noronha-Hostler, J. Noronha and F. Grassi, Phys. Rev. C 90 (2014), 034907.
- [37] J. S. Moreland, J. E. Bernhard and S. A. Bass, Phys. Rev. C 92 (2015), 011901, arXiv:1412.4708.
- [38] H.-J. Drescher and Y. Nara, Phys. Rev. C 75 (2007), 034905, arXiv:nucl-th/0611017.
- [39] F. G. Gardim, F. Grassi, P. Ishida, M. Luzum, P. S. Magalhães and J. Noronha-Hostler, Phys. Rev. C 97 (2018), 064919, arXiv:1712.03912.
- [40] F. G. Gardim, F. Grassi, P. Ishida, M. Luzum, P. S. Magalhães and J. Noronha-Hostler, Nucl. Phys. A 982 (2019), 419-422, Conference Proceedings, arXiv:1807.05213
- [41] L. Barbosa, F. G. Gardim, F. Grassi, P. Ishida, M. Luzum, M. V. Machado and J. Noronha-Hostler, em progresso.

- [42] F. Gardim, F. Grassi, P. Ishida, M. Luzum and J.-Y. Ollitrault, a ser submetido.
- [43] H. Petersen, C. Coleman-Smith, S. A. Bass and R. Wolpert, J. Phys. G 38 (2011), 045102, arXiv:1012.4629.
- [44] M. R. Haque, V. Roy and A. K. Chaudhuri, Phys. Rev. C 86 (2012), 037901, arXiv:1204.2986.
- [45] J. Noronha-Hostler, J. Noronha and M. Gyulassy, Phys. Rev. C 93 (2016), 024909, arXiv:1508.02455.
- [46] I. Kozlov, M. Luzum, G. Denicol, S. Jeon and C. Gale, arXiv:1405.3976.
- [47] V. Khachatryan et al. (CMS Collaboration), Phys. Rev. C 92 (2015), 034911, arXiv:1503.01692.
- [48] W. Zhao, H.-J. Xu and H. Song, Eur. Phys. J. C 77 (2017), 645, arXiv:1703.10792.
- [49] S. McDonald, C. Shen, F. Fillion-Gourdeau, S. Jeon and C. Gale, Phys. Rev. C 95 (2017), 064913, arXiv:1609.02958.
- [50] A. M. Sirunyan et al. (CMS Collaboration), Phys. Rev. C 96 (2017), 064902, arXiv:1708.07113.
- [51] A. Mazeliauskas and D. Teaney, Phys. Rev. C 91 (2015), 044902, arXiv:1501.03138.
- [52] Z.-W. Lin, C. M. Ko, B.-A. Li, B. Zhang and S. Pal, Phys. Rev. C 72 (2005), 064901, arXiv:nucl-th/0411110.
- [53] A. Mazeliauskas and D. Teaney, Phys. Rev. C 93 (2016), 024913, arXiv:1509.07492.
- [54] B. Alver, M. Baker, C. Loizides and P. Steinberg, “The PHOBOS Glauber Monte Carlo” (2008), arXiv:0805.4411.