

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

O movimento quântico em potencial de um oscilador invertido

Edmilson dos Santos Macedo

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Dimitri Maximovitch Gitman

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Dimitri Maximovitch Gitman (IF-USP)

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IF-USP)

Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves (UEL)

São Paulo
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Macedo, Edmilson dos Santos

O movimento quântico em potencial de um oscilador invertido– São Paulo, 2013.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Dimitri Maximovitch Guitman

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Ciências Exatas; 2.Física; 3. Mecânica Quântica; 4. Sistema Quântico.

USP/IF/SBI-056/2013

Resumo

Esta dissertação descreve o movimento quântico de uma partícula numa barreira de potencial parabólica, condicionalmente este sistema é chamado de oscilador invertido. Determinamos estados quânticos semiclassicos como família de estados coerentes generalizados (ECG), sendo construídos através da adaptação do trabalho de Malkin e Man'ko, determinando-se um operador que seja integral do movimento, parametrizado por algumas constantes e reconhecido como operador de aniquilação, cujos auto-estados tem características dos estados comprimidos. Discutimos suas propriedades e observamos que é possível comparar ECG do oscilador invertido com ECG da partícula livre e oscilador harmônico obtidos na literatura. Também é feito um estudo do movimento puramente quântico (tunelamento) nas barreiras de potenciais do oscilador invertido e oscilador invertido truncado, por meio das soluções estacionárias exatas e aproximadas (JWKB), comparando os resultados obtidos em cada situação.

Abstract

This dissertation describes the motion of a particle in a quantum potential barrier parabolic, this system is conditionally called inverted oscillator. Determined quantum states semi-classics like family generalized coherent states (GCS), being constructed by adapting work Malkin's and Man'ko, determining an operator who is integral of the motion, parameterized for some constants and recognized as annihilation operator, whose eigenstates have characteristics of squeezed states. We discuss its properties and note that it is possible to compare the GCS of inverted oscillator with GCS the particle free and harmonic oscillator obtained in the literature. Also made a study of the movement purely quantum (tunneling) in the barriers potential inverted oscillator and truncated inverted oscillator by means of exact and approximate stationary solutions (JWKB), comparing the results obtained in each situation.

.

Agradecimentos

De início, quero agradecer ao meu orientador Professor Dr. Dmitri M. Gitman, pelo apoio, habilidade e competência, cuja orientação foi um grande aprendizado e serviu de motivação para obter entendimento dos assuntos abordados

Aos meus familiares, em especial minha mãe Antonia e minhas avós Maria.

Aos meu irmão Dailton e minha irmã Marília.

À Rita pelo Amor.

A todos professores que já tive, pois, de uma forma ou de outra contribuíram na minha formação.

A Alberto pela amizade e discussões técnicas.

Aos amigos Marcelo, Caio, Evandro, Renan, Neuza, Inaê, Paulo e aos inúmeros amigos no IFUSP e outros institutos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro

A dúvida é o princípio da sabedoria.

Aristóteles

À Enzo, meu filho.

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Oscilador Invertido	12
1.2	Oscilador invertido truncado	14
2	Estados Coerentes Generalizados	17
2.1	Aspecto Geral	17
2.2	ECG do oscilador invertido	20
2.2.1	Propriedades dos ECG	25
2.2.1.1	Relação de Completeza e Sobreposição	25
2.2.1.2	Relação de incerteza	26
2.3	ECG da partícula livre	28
2.4	ECG do oscilador harmônico	31
2.4.1	Casos limites	34
2.4.1.1	Caso da partícula livre	34
2.4.1.2	O caso dos estados coerentes de Schrödinger/Glauber	35
2.4.1.3	O caso do oscilador invertido	35
3	Tunelamento	36
3.1	Teoria geral	36
3.2	Tunelamento para o oscilador invertido	40
3.3	Tunelamento para o oscilador invertido truncado	41
3.3.1	Estados estacionários do OI truncado	41
3.3.2	Coefficiente de transmissão exato	44
3.4	Tunelamento utilizando Estados Semi-clássicos (JWKB)	48
3.4.1	Aspecto geral	48
3.4.2	Oscilador invertido truncado	50
4	Considerações Finais	54
A	Apêndice	56

Lista de Figuras

Fig 1.: Trajetórias $x(t)$ clássicas do oscilador invertido	13
Fig 2.: Trajetórias $p(t)$ clássicas do oscilador invertido	13
Fig 3.:Potencial parabólico invertido análise qualitativa.....	14
Fig 4.: Potencial parabólico invertido truncado e suas trajetórias.....	15
Fig 5.: Representação de uma barreira de potencial arbitrária.....	37
Fig 6.: Representação do potencial parabólico truncado.....	42
Fig 7.: Coeficiente de transmissão das funções exatas para diferentes valores de largura da barreira.....	46
Fig 8.: Coeficiente de transmissão das funções exatas para diferentes valores de energia.....	47
Fig 9.: Coeficiente de transmissão das funções JWKB para diferentes valores de largura da barreira.....	52
Fig 10.: Coeficiente de transmissão das funções JWKB para diferentes valores de energia.....	53

Capítulo 1

Introdução

O oscilador invertido (OI) ou potencial parabólico invertido, que se caracteriza por um potencial atuando como barreira, sendo um dos sistemas quadráticos que possui solução explícita da equação Schrödinger. Condicionalmente, chamamos o potencial parabólico invertido de OI devido à relação com oscilador harmônico na mudança de sinal de uma certa constante no potencial, apesar do fato dele não apresentar qualquer tipo de movimento oscilatório, outros autores chamam de oscilador repulsivo [1]. Este potencial separa trajetórias clássicas que se movem com energia acima ou abaixo da barreira sendo transmitidas e refletidas para esquerda ou para direita. Por atuar como barreira, tem importantes aplicações na mecânica quântica, entre elas, tem-se: aspectos de tunelamento através da função de Wigner no espaço de fase [2], modelos em processos químicos instáveis [3], forças agindo nas moléculas de amônia [4], em maser [5], espalhamento reativo [6], evolução cosmológica [7], fissão nuclear [8]. De fato, uma das principais aplicações do potencial parabólico invertido é o tunelamento, e o primeiro a tratar este caso foi Kemble [10], que ao utilizar estados semiclássicos determinou o coeficiente de transmissão, o qual posteriormente foi tratado por Hill [8] em modelo de fissão nuclear. Outra importante aplicação, é o fenômeno de produção de partículas num campo elétrico uniforme, no qual o problema é reduzido a equação de Schrödinger unidimensional do potencial OI [11]

Outro sistema físico muito importante é o OI truncado, que se caracteriza como uma barreira de potencial de largura finita composta por três regiões: livre-OI-livre e possui diversas aplicações [12], principalmente, na área de semicondutores. O primeiro a discutir essa barreira de potencial foi Bell [13], pois estudou o fenômeno de tunelamento, resolvendo o problema exato somente quando a energia (E) da partícula incidente é igual a altura (V_0) da barreira de potencial, nestas condições, determinou o coeficiente de transmissão, entretanto, não apresentou solução exata para outro nível de energia. Tendo, assim, diversos trabalhos nos quais usa aproximação semiclássica JWKB [12, 14].

A mecânica quântica promete uma correspondência com a física clássica, estados físicos que conseguem em muitos casos fazer esta conexão são os ditos estados coerentes (EC), por exemplo, a solução estacionária da equação de Schrödinger para um elétron em um campo magnético uniforme, estados de Landau [15], é muito útil para descrever diversos processos físicos desse sistema, entretanto, esses estados não reproduzem os estados livres no limite de campo nulo, porém quando constrói-se EC, os valores médios de algumas grandezas físicas têm a correspondência, com boa aproximação, a dinâmica clássica [16]. Historicamente o primeiro a construir os EC foi Erwin Schrödinger em 1926 [17]. Schrödinger considerou funções de ondas do oscilador harmônico que não se dispersassem durante sua propagação (assemelhando-se assim a uma partícula clássica) e mantinham mínima relação de incerteza $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$, dito de estado canônico do oscilador harmônico simples (cujo espectro é discreto), observando as propriedades semi-clássicas desses estados, o que surpreendeu

muita gente na época. Posteriormente, esses estados foram identificados por Klauder, Glauber e Sudarshan [18] no início dos anos de 1960. Glauber, ao estudar o campo de radiação eletromagnética, estabeleceu a relação entre as propriedades desse campo com até então conhecidos estados do oscilador harmônico simples da mecânica quântica, o qual chamou de estados coerentes: e deu origem a ótica quântica. Esses estados assumem um importante lugar na mecânica quântica moderna, devido à grande variedade de aplicação: na descrição semiclássica do sistema físico; ao mesmo tempo, na quantização de modelos clássicos. Eles são observados no laboratório e intensamente utilizados em experimentos de ótica quântica [19], sendo ferramenta de trabalho em física da matéria condensada. Em física atômica, por exemplo, um EC de uma amostra de N átomos de 2 níveis também pode ser gerado no laboratório por meio da interação com um laser ressonante [20], esses estados também são usados em cavidades e fenômenos como decoerência [21].

Infelizmente, uma definição universal de EC ou esquema geral de suas construções para sistemas físicos arbitrários não é dada. Devido a Glauber, Malkin, Man'ko e Dodonov [27, 22, 24] existe um esquema bem estabelecido para construção de EC para sistemas de hamiltonianas quadráticas com *spectro discreto*, e Perelomov (veja [28]) estabeleceu conexão entre sistemas físicos e grupos de simetria de Lie.

Algumas generalizações da descrição de Glauber são desenvolvidas por Klauder e Gazeau, (veja [29]). Construções de EC sempre tentam manter propriedades básicas já bem conhecidas de EC de um sistema simples (oscilador harmônico, por exemplo). Em particular, os ECs formam um conjunto completo, tem relação de mínima incerteza para algumas quantidades físicas (por exemplo coordenadas e momento) em um dado instante de tempo, e a média de algumas quantidades físicas, calculadas com respeito aos ECs dependentes do tempo, tem que se mover ao longo da trajetória clássica. É também desejável que ECs dependentes do tempo mantenham sua forma sob evolução temporal, de tal maneira que esta evolução afete apenas seus parâmetros. Nos trabalhos [30, 31, 32, 33, 34] mostram-se possíveis caminhos para construir EC para sistema de *spectro contínuo*.

Existem tentativas de construir EC para o OI, sistema de espectro contínuo; Barton [9] define esses estados pela ação do operador deslocamento nos auto-estados de energia (não normalizados), entretanto, não demonstra propriedades fundamentais dos ECs. Posteriormente, Klauder e coautores [56] estudam os mesmos estados de Barton e resolvem o problema da normalização, escolhendo uma classe de estados regularizados, porém, não determinam a dispersão da posição e momento, sendo esse processo de regularização não-trivial. Recentemente, o trabalho de Gitman e coautores [34] propõe uma abordagem na construção de EC para sistemas de espectro contínuo, baseado na formulação quântica bem definida, neste caso, a quantização canônica, em analogia a construção de Glauber, estabelece uma base discreta do tipo oscilador harmônico, constrói um operador de aniquilação que seja integral do movimento cujos auto-estados são definidos como estados coerentes generalizados (ECG) e, de maneira pioneira, aplicam este método em dois sistemas físicos: potencial linear ($V(x) = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$) e partícula livre. Dessa forma, mostraram todas as propriedades básicas dos estados coerentes: são normalizados; seguem trajetória clássica; formam estados supercompletos; e não-ortogonais. As dispersões da posição e momento foram calculadas explicitamente. Neste trabalho, construiremos ECG para o OI, utilizando esse método.

Sob os diferentes assuntos discutidos acima, esta dissertação de mestrado têm como objetivo apresentar e discutir os sistemas físicos OI e OI truncado. Primeiro pretendemos mostrar na secção 1.1 a descrição do movimento clássico de uma partícula no OI e na secção 1.2 no OI truncado. Partindo para a descrição quântica, faremos na secção 2.1 a apresentação do formalismo geral do método para obter ECG proposto em [34], em seguida, vamos utilizá-lo na secção 2.2 para construir os ECG do OI, nesta mesma secção definiremos uma variável especial útil para estabelecer conexão entre os ECG da partícula livre (secção 2.3) e oscilador harmônico (secção 2.4). No capítulo 3, faremos

uma discussão sobre o movimento (tunelamento) puramente quântico na barreira do OI (secção 3.2), depois investigaremos o tunelamento do sistema OI truncado via solução exata, para qualquer nível de energia, diferentemente de Bell (secção 3.3) e aproximada (secção 3.4), fazendo comparações entre os resultados obtidos. No capítulo 4, apresentaremos as conclusões e os comentários finais.

1.1 Oscilador Invertido

Consideraremos o movimento clássico de uma partícula em 1-dimensão no potencial do oscilador invertido, governado pela hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{kx^2}{2} + V_0, \quad k > 0 \text{ e } V_0 > 0. \quad (1.1)$$

Onde m é a massa da partícula. Este potencial parabólico implica em movimento não ligado e energia com espectro contínuo. O potencial $V(x)$ tem valor máximo V_0 em $x = 0$, é repulsivo porque a força $F(x) = kx$ afasta a partícula da origem. As equações de Hamilton para este sistema são

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

o que naturalmente reproduz a segunda lei de Newton

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{m}x. \quad (1.2)$$

Cuja solução geral tem a forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cosh[\omega_0(t - t_0)] + \frac{p_0}{m\omega_0} \sinh[\omega_0(t - t_0)], \\ p(t) &= mx_0\omega_0 \sinh[\omega_0(t - t_0)] + p_0 \cosh[\omega_0(t - t_0)], \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde x_0 e p_0 são dados iniciais do espaço de fase no tempo $t = t_0$. Lembramos que a Eq.(1.1) é reduzida a hamiltoniana da partícula livre quando ω_0 vai para zero, assim como, as trajetórias Eq.(1.3) no $\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} x(t) = x_0 + p_0(t - t_0)$. A energia E é conservada (constante do movimento), os dados iniciais $x_0 = x(t_0)$ e $p_0 = p(t_0)$ estão relacionados por

$$p_0 = \pm \left\{ 2m \left[(E - V_0) + kx_0^2/2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (1.4)$$

quando $x_0 < 0$ e $p_0 > 0$ descreve o movimento da partícula do lado esquerdo para o lado direito da barreira, quando $x_0 > 0$ e $p_0 < 0$ descreve a situação oposta. Sem perda de generalidade, estudaremos o primeiro caso, isto é $x_0 < 0$ e $p_0 > 0$.

Com respeito ao sinal de $(E - V_0)$, podemos dividir a trajetória e momento dados em (1.3) nos três tipos, que são apresentados nas figuras 1 e 2.

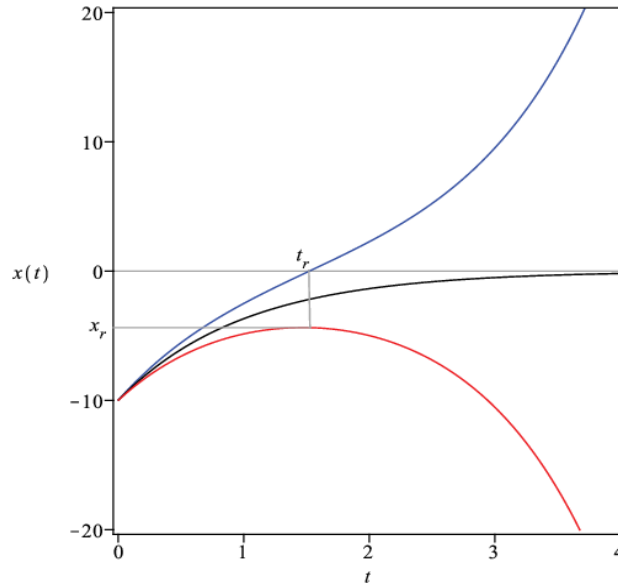


Fig. 1: Três tipos de trajetórias $x(t)$ com respeito ao valor de p_0 , assumimos $t_0 = 0$, $x_0 = -10$ e $\frac{p_0}{m\omega_0} = 11$ (linha azul), $\frac{p_0}{m\omega_0} = 10$ (linha preta), $p_0 = 9$ (linha vermelha).

e

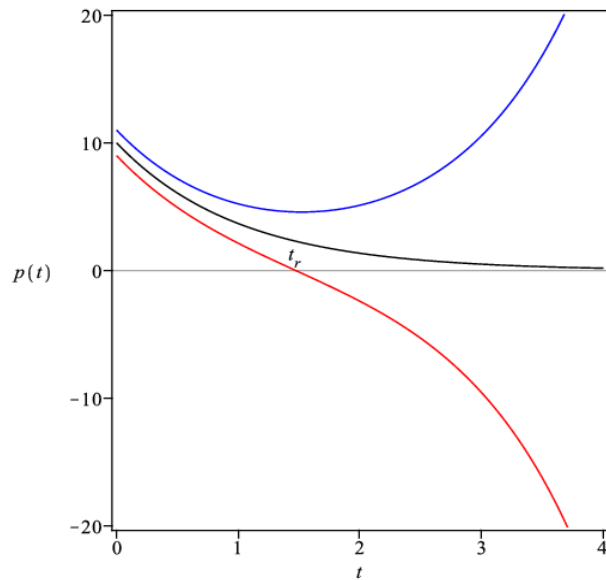


Fig. 2: Três tipos de $p(t)$ com respeito ao valor de p_0 com $t_0 = 0$, $x_0 = -10$ e $\frac{p_0}{m\omega_0} = 11$ (linha azul), $\frac{p_0}{m\omega_0} = 10$ (linha preta), $\frac{p_0}{m\omega_0} = 9$ (linha vermelha).

A trajetória em azul descreve o movimento acima do topo da barreira, pois $(E - V_0) > 0$. Já a trajetória preta - é quando $(E - V_0) = 0$ - descreve a aproximação assintótica ao topo da barreira e, depois de um longo tempo, $(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t))$ a partícula é "presa" no topo. O último caso (trajetória em vermelho), isto é $(E - V_0) < 0$, descreve a partícula movendo-se para barreira e depois é refletida no ponto de retorno

$$x_r = - \left[\frac{2}{m\omega_0^2} (V_0 - E) \right]^{1/2}, \quad t_r = \frac{1}{\omega_0} \arg \tanh \left(-\frac{p_0}{x_0\omega_0 m} \right) + t_0. \quad (1.5)$$

Os três tipos de trajetórias $x(t)$ apresentadas acima, serão ilustradas qualitativamente, abaixo:

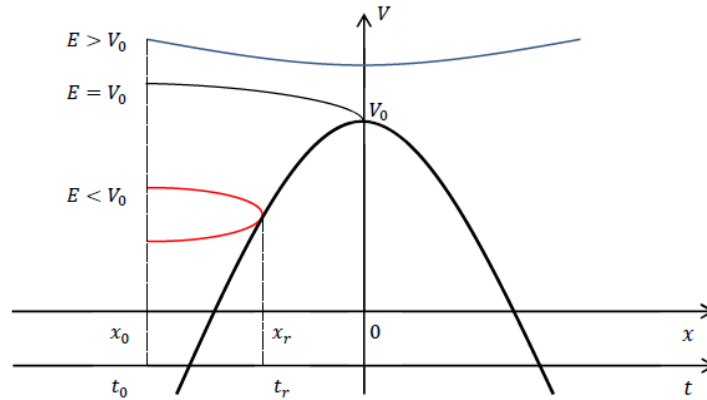


Fig. 3: Esquema mostrando os três tipos de trajetórias da partícula no potencial parabólico invertido: o movimento acima da barreira $E > V_0$ (linha azul), o movimento no topo da barreira $E = V_0$ (linha preta), e o movimento na barreira $E < V_0$ (linha vermelha).

Na figura 3, a curva em azul, a partícula tem energia cinética diminuída quando se aproxima do topo da barreira, devido à ação do potencial, quando se afasta, a força age a favor do deslocamento. Para a curva preta $E = V_0$ nesta situação a partícula descreve assintoticamente um movimento que ao longo do tempo é presa no topo, permanecendo numa posição de equilíbrio instável. Na curva vermelha, tem-se a partícula incidindo na barreira no ponto de retorno x_r e logo após retornando. Nesta figura, enfatizamos que o eixo temporal é tido de maneira a indicar uma relação na ocorrência dos eventos.

1.2 Oscilador invertido truncado

Consideraremos agora, o movimento clássico de uma partícula em 1-dimensão na barreira de potencial parabólica invertida truncada nos pontos $x = \mp a$, cuja distância entre esses pontos é definida como largura da barreira, a hamiltoniana tem a forma

$$H_T = \frac{1}{2}p^2 + V_T(x),$$

sendo o domínio deste potencial dado abaixo

$$V_T(x) = \begin{cases} V(x), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $V(x)$ é igual a Eq. (1.1) e devido a continuidade do potencial nos pontos de truncamento, temos $2V_0 = ka^2$. O movimento clássico da partícula no potencial truncado $V_T(x)$ é dividido em três regiões ilustradas na figura 4.

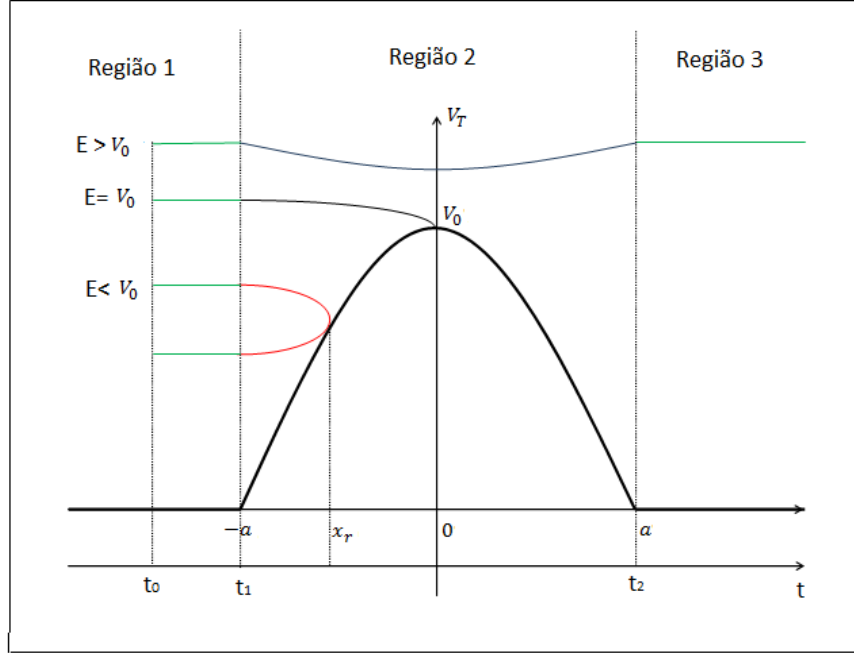


Fig. 4: Esquema mostrando os três tipos de movimento da partícula no oscilador invertido truncado dividido em três regiões.

As trajetórias descritas no potencial invertido truncado também são "não ligadas", podendo mover para $\mp\infty$ e tem a forma:

$$x(t) = \begin{cases} x_0^{(1)} + p_0^{(1)}(t - t_0), & x < -a \\ x_0^{(2)} \cosh[\omega_0(t - t_1)] + \frac{p_0^{(2)}}{m\omega_0} \sinh[\omega_0(t - t_1)], & |x| \leq a \\ x_0^{(3)} + p_0^{(3)}(t - t_2), & x > a \end{cases} \quad (1.7)$$

e

$$p(t) = \begin{cases} p_0^{(1)}, & x < -a \\ m\omega_0 x_0^{(2)} \sinh[\omega_0(t - t_1)] + p_0^{(2)} \cosh[\omega_0(t - t_1)], & |x| \leq a \\ p_0^{(3)}, & x > a \end{cases} \quad (1.8)$$

onde as regiões são denotadas pelo símbolo (i) , $i = 1, 2, 3$. As condições iniciais $x_0^{(i)}$ e $p_0^{(i)}$ são especificadas no tempo t_i , com a correspondente energia. As trajetórias Eq. (1.7) e suas derivadas

Eq.(1.8) devem ser funções contínuas, isto é, $x(t)$ são iguais umas às outras nos pontos de truncamento $x = \mp a$ e nos tempos $t = t_1, t_2$, resultando em

$$x_0^{(2)} = -a, \quad t_1 = -\frac{a + x_0^{(1)}}{\sqrt{2mE_1}} + t_0, \quad x_0^{(3)} = a, \quad t_2 = \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{\sqrt{2mE_2} + a\omega_0}{\sqrt{2mE_2} - a\omega_0} \right) + t_1.$$

A energia total E_i em cada região $i(i = 1, 2, 3)$ é conservada. O momento inicial $p_0^{(1)} > 0$ descreve o movimento da partícula da esquerda para a direita, assim, em cada região temos $p_0^{(1)} = \sqrt{2mE_1}$ quando $x < -a$, $p_0^{(2)} = [2m((E_2 - V_0) + ka^2/2)]^{1/2} = \sqrt{2mE_2}$ para $|x| \leq a$, e $p_0^{(3)} = \sqrt{2mE_3}$ quando $x > a$.

Aqui, podemos distinguir também três tipos de trajetórias semelhantes ao que fizemos para potencial não truncado, que, neste caso, depende do sinal de $E_2 - V_0$. Por exemplo, quando $E_2 = V_0$ encontramos $p_0^{(2)} = \omega_0 m a$ e

$$x(t) = \begin{cases} x_0^{(1)} + \sqrt{2mE_1}(t - t_0), & x < -a \\ -a \exp[-\omega_0(t - t_1)], & -a \leq x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

para $E_2 > V_0$ encontramos

$$x(t) = \begin{cases} x_0^{(1)} + \sqrt{2mE_1}(t - t_0), & x < -a \\ -a \cosh[\omega_0(t - t_1)] + \frac{\sqrt{2mE_1}}{m\omega_0} \sinh[\omega_0(t - t_1)], & -a \leq x \leq a \\ a + \sqrt{2mE_1}(t - t_2), & x > a \end{cases} \quad (1.10)$$

finalmente na situação em que $E_2 < V_0$, devemos levar em conta o ponto de retorno x_r . Por definição este ponto representa a situação quando $p(t_r) = 0$, nisto temos:

$$x_r = -\sqrt{\frac{2}{m\omega_0^2}(V_0 - E_2)}, \quad t_r = \frac{1}{\omega_0} \arg \tanh \left(\frac{1}{a} \frac{\sqrt{2mE_2}}{\omega_0 m} \right) - \frac{a + x_0^{(1)}}{\sqrt{2mE_2}} + t_0, \quad (1.11)$$

portanto a trajetória nesta condição é:

$$x(t) = \begin{cases} x_0^{(1)} + \sqrt{2mE_1}(t - t_0), & x < -a \\ -a \cosh[\omega_0(t - t_1)] + \frac{\sqrt{2mE_1}}{m\omega_0} \sinh[\omega_0(t - t_1)], & -a \leq x \leq x_r \\ 0, & x > x_r \end{cases} \quad (1.12)$$

na situação clássica a partícula não atravessa a barreira quando atinge o ponto de retorno, isso será discutido mais a frente na situação quântica.

Capítulo 2

Estados Coerentes Generalizados

Neste capítulo, utilizaremos o método adaptado (veja [34]) de Malkin-Man'ko para sistema de espectro contínuo, em particular para o OI e partícula livre. Faremos também uma análise dos ECG do oscilador harmônico que se baseia no limite desses casos, cuja abordagem começa com uma formulação quântica bem definida (quantização canônica) do sistema físico, na qual a construção dos estados coerentes segue essa formulação.

2.1 Aspecto Geral

Considere a equação de Schrödinger unidimensional (na coordenada x e t)

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x), \quad (2.1)$$

onde $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, e $V(x)$ é o potencial que corresponde ao espectro discreto ou contínuo. Faremos uma mudança de variável na Eq.(2.1), tomar uma constante arbitrária l que tem dimensão de comprimento e introduzir as coordenadas q e τ adimensionais

$$x = lq, \quad \tau = \frac{\hbar}{ml^2}t, \quad (2.2)$$

substituindo Eq.(2.2) na Eq.(2.1)

$$i\partial_\tau\Psi = \hat{H}\Psi(q,\tau), \quad \hat{H} = -\frac{\partial_q^2}{2} + U(q), \quad U(q) = \frac{ml^2}{\hbar^2}V(lq) \quad (2.3)$$

Após esta alteração em Eq.(2.1), a função $\Psi(x,t) = \Psi(q,\tau)$ pode ser escrita como

$$\hat{S}\Psi(q,\tau) = 0, \quad \hat{S} = i\partial_\tau - \hat{H} \quad (2.4)$$

Vamos agora introduzir um operador $\hat{A}(\tau)$ que seja integral do movimento

$$\left[\hat{S}, \hat{A}(\tau)\right] = 0, \quad (2.5)$$

Para qualquer potencial quadrático $U(q)$ o operador $\hat{A}(\tau)$ pode ser escrito por uma transformação linear canônica com os operadores de criação (\hat{a}) e aniquilação (\hat{a}^\dagger), isto é,

$$\hat{A}(\tau) = f(\tau) \hat{a} + g(\tau) \hat{a}^\dagger + \varphi(\tau), \quad (2.6)$$

cujos adjunto é igual a

$$\hat{A}^\dagger(\tau) = f^*(\tau) \hat{a}^\dagger + g^*(\tau) \hat{a} + \varphi^*(\tau), \quad (2.7)$$

em que $f(\tau)$, $g(\tau)$ e $\varphi(\tau)$ são funções complexas dependentes de τ e soluções do sistema de equações diferenciais geradas pela substituição do operador $\hat{A}(\tau)$ em Eq.(2.5), cujos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger são definidos por

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{q + \partial_q}{\sqrt{2}}, & \hat{a}^\dagger &= \frac{q - \partial_q}{\sqrt{2}}, \\ q &= \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, & \partial_q &= \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

obedecem uma formulação quântica bem definida (quântização canônica) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. As propriedades abaixo são úteis para nossa consideração:

$$\begin{aligned} [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] &= [\hat{a} \hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -\hat{a}, & [\hat{a}^n, \hat{a}^\dagger] &= n \hat{a}^{n-1}, \\ [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= [\hat{a} \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, & [(\hat{a}^\dagger)^n, \hat{a}] &= -n (\hat{a}^\dagger)^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Seguindo as Eqs.(2.6,2.7)

$$[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau)] = |f(\tau)|^2 - |g(\tau)|^2 \equiv \Delta \quad (2.10)$$

Para $\Delta = 0$ o operador $\hat{A}(\tau)$ pode ser considerado auto-adjunto.

Para $\Delta > 0$, sem perda de generalidade, podemos restringir $\Delta = 1$, que corresponde a multiplicação de $\hat{A}(\tau)$ por um número complexo. E neste caso, em qualquer instante de tempo τ , os operadores $\hat{A}^\dagger(\tau)$ e $\hat{A}(\tau)$ são operadores de criação e aniquilação, respectivamente, isto é,

$$[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau)] = 1, \quad \forall \tau. \quad (2.11)$$

Para $\Delta < 0$, tem-se que tratar $\hat{B} = \hat{A}^\dagger$ como um operador aniquilação e voltamos ao caso anterior quando $\Delta > 0$.

Estamos interessado em construir estados coerentes gerais (ECG) por meio da condição $\Delta = 1$ e que são dados como auto-estados do operador $\hat{A}(\tau)$

$$\hat{A}(\tau) \Psi_z(q, \tau) = z \Psi(q, \tau), \quad (2.12)$$

onde z é o auto-valor $\in \mathbb{C}$. Seguindo a Eq.(2.8) escrevemos o operador $\hat{A}(\tau)$ na forma

$$\hat{A}(\tau) = [f(\tau) + g(\tau)] \frac{q}{\sqrt{2}} + [f(\tau) - g(\tau)] \frac{\partial_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau). \quad (2.13)$$

Substituindo a Eq.(2.13) na Eq.(2.12) temos:

$$d_q \Psi_z(q, \tau) = \left(-\frac{f(\tau) + g(\tau)}{f(\tau) - g(\tau)} q + \frac{\sqrt{2}[z - \varphi(\tau)]}{f(\tau) - g(\tau)} \right) \Psi_z(q, \tau), \quad (2.14)$$

cuja solução geral

$$\Psi_z(q, \tau) = \exp \left\{ -\frac{f(\tau) + g(\tau) q^2}{f(\tau) - g(\tau) 2} + \frac{\sqrt{2} [z - \varphi(\tau)]}{f(\tau) - g(\tau)} q + i\phi(\tau) \right\} \quad (2.15)$$

onde $\phi(\tau)$ é o fator de fase que deve ser determinado pela exigência que o estado $\Psi_z(q, \tau)$ obedece a equação de Schrödinger. O fato do operador $\hat{A}(\tau)$ comutar com o operador de Schrödinger \hat{S} , torna $\Psi_z(q, \tau)$ auto-estado de \hat{S} tal que

$$\hat{S}\Psi_z(q, \tau) = \lambda\Psi_z(q, \tau),$$

como os estados coerentes devem obedecer a equação de Schrödinger, para isso escolhemos somente o caso em que $\lambda = 0$.

O auto-valor (z) do operador $\hat{A}(\tau)$

$$\hat{A}(\tau) = (f(\tau) + g(\tau)) \frac{q}{\sqrt{2}} + i(f(\tau) - g(\tau))(-i\partial_q) + \varphi(\tau)$$

é igual a

$$z = \langle \hat{A}(\tau) \rangle = \frac{f(\tau) + g(\tau)}{\sqrt{2}} \langle q \rangle + i \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\sqrt{2}} \langle p \rangle + \varphi(\tau), \quad (2.16)$$

cujos valores médios dos operadores momento ($-i\partial_q$) e posição são iguais a

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \frac{(f^* - g^*)(z - \varphi) + (f - g)(z^* - \varphi^*)}{\sqrt{2}}, \\ \langle p \rangle &= i \frac{(f + g)(z^* - \varphi^*) - (f^* + g^*)(z - \varphi)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

substituindo a Eq.(2.16) na Eq.(2.15), temos

$$\Psi_z(q, \tau) = \exp \left\{ -\frac{f(\tau) + g(\tau) q^2}{f(\tau) - g(\tau) 2} + \frac{[f(\tau) + g(\tau)]}{f(\tau) - g(\tau)} \langle q \rangle q + i \langle p \rangle q + i\phi(\tau) \right\} \quad (2.17)$$

completando o quadrado, temos

$$\begin{aligned} \Psi_z(q, \tau) &= \exp \left\{ -\frac{f(\tau) + g(\tau)}{2[f(\tau) - g(\tau)]} (q^2 - 2\langle q \rangle q) + i \langle p \rangle q + i\phi(\tau) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{f(\tau) + g(\tau)}{2[f(\tau) - g(\tau)]} (q - \langle q \rangle)^2 + \frac{f(\tau) + g(\tau)}{2[f(\tau) - g(\tau)]} \langle q \rangle^2 + i \langle p \rangle q + i\phi(\tau) \right\} \end{aligned}$$

o termo $\frac{f(\tau) + g(\tau)}{2[f(\tau) - g(\tau)]} \langle q \rangle^2$ depende somente do tempo, onde pode ser *absorvido* pela fase $\phi(\tau)$, de forma genérica, podemos escrever o estado Eq.(2.15)

$$\Psi_z(q, \tau) = \exp \left\{ -\frac{f(\tau) + g(\tau)}{2(f(\tau) - g(\tau))} (q - \langle q \rangle)^2 + i \langle p \rangle q + i\phi(\tau) \right\}. \quad (2.18)$$

Nas próximas secções vamos construir ECG para o OI, partícula livre e oscilador harmônico bem como demonstrar suas propriedades.

2.2 ECG do oscilador invertido

O OI não apresenta estado fundamental e o hamiltoniano possui espectro contínuo, logo a idéia de construção dos EC proposta por Glauber não pode ser implementada, já que não existe o estado de vácuo, mas o método descrito da secção anterior pode ser implementado.

O movimento quântico do OI

$$V(x) = -\frac{m\omega_0^2}{2}x^2 + V_0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}},$$

é descrito pela equação Schrödinger Eq.(2.3)

$$i\partial_\tau\Psi = \hat{H}\Psi(q, \tau), \quad \hat{H} = -\frac{\partial_q^2}{2} - \frac{\omega^2 q^2}{2} + U_0, \quad (2.19)$$

onde as variáveis ω e U_0 são definidas por

$$\omega^2 \equiv \frac{l^4 m^2 \omega_0^2}{\hbar^2}, \quad U_0 = \frac{ml^2}{\hbar^2} V_0, \quad (2.20)$$

enfatizamos que a variável ω será importante para estabelecer uma conexão entre diferentes sistemas físicos.

Podemos escrever a Eq.(2.19) da seguinte maneira

$$\hat{S}\Psi(q, \tau) = 0, \quad \hat{S} = i\partial_\tau - \hat{H}. \quad (2.21)$$

Sendo escrita em termos desses operadores, o hamiltoniano Eq.(2.19) toma a segunda forma canônica para a combinação quadrática dos operadores aniquilação e criação:

$$\hat{H} = -(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2}) \frac{(1 + \omega^2)}{4} + (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \frac{(1 - \omega^2)}{4} + U_0, \quad (2.22)$$

em que usamos as relações

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{2} &= +\frac{\hat{a}^2}{4} + \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{4} + \frac{\hat{a} \hat{a}^\dagger}{4} + \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{4}, \\ -\frac{\partial_q^2}{2} &= -\frac{\hat{a}^2}{4} + \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{4} + \frac{\hat{a} \hat{a}^\dagger}{4} - \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{4}. \end{aligned}$$

O hamiltoniano Eq.(2.22) não pode ser reduzido a primeira forma canônica para combinação quadrática dos operadores aniquilação e criação, que é a forma como o oscilador harmônico, por qualquer transformação canônica, indica que o espectro de \hat{H} é contínuo e ilimitado, (veja [45]).

Entretanto, podemos construir uma base discreta do tipo oscilador harmônico e um espaço de Fock correspondente, útil para nossas considerações. Para este fim, primeiro, construímos o operador

$$\hat{A}(\tau) = f(\tau) \hat{a} + g(\tau) \hat{a}^\dagger + \varphi(\tau), \quad (2.23)$$

no qual $f(\tau)$, $g(\tau)$ e $\varphi(\tau)$ são algumas funções de τ , sendo os operadores $\hat{A}(\tau)$ e $\hat{A}^\dagger(\tau)$ integrais do movimento da Eq.(2.5). Pode-se ver que substituindo Eq.(2.22) na Eq.(2.5)

$$\begin{aligned} i\dot{f}(\tau) \hat{a} + i\dot{g}(\tau) \hat{a}^\dagger + i\dot{\varphi}(\tau) - f(\tau) \left[-(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2}) \frac{(1 + \omega^2)}{4} + (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \frac{(1 - \omega^2)}{4}, \hat{a} \right] \\ - g(\tau) \left[-(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2}) \frac{(1 + \omega^2)}{4} + (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \frac{(1 - \omega^2)}{4}, \hat{a}^\dagger \right] = 0, \end{aligned}$$

onde $\dot{\chi} \equiv \partial_\tau \chi$, utilizando as relações Eqs.(2.9)

$$\begin{aligned} & i\dot{f}(\tau)\hat{a} + i\dot{g}(\tau)\hat{a}^\dagger + i\dot{\varphi}(\tau) - f(\tau)\frac{(1+\omega^2)}{2}\hat{a}^\dagger + f(\tau)\frac{(1-\omega^2)}{2}\hat{a} \\ & + g(\tau)\frac{(1+\omega^2)}{2}\hat{a} - g(\tau)\frac{(1-\omega^2)}{2}\hat{a}^\dagger = 0, \end{aligned}$$

é satisfeita se as funções $f(\tau)$, $g(\tau)$ e $\varphi(\tau)$ são soluções do seguinte conjunto de equações:

$$i\dot{f} + \frac{1-\omega^2}{2}f + \frac{1+\omega^2}{2}g = 0, \quad i\dot{g} - \frac{1+\omega^2}{2}f - \frac{1-\omega^2}{2}g = 0, \quad i\dot{\varphi} = 0. \quad (2.24)$$

A solução geral desse conjunto de equações é

$$\begin{aligned} f(\tau) &= c_1 \cosh(\omega\tau) + \frac{i}{\omega} \left(\frac{1-\omega^2}{2}c_1 + \frac{1+\omega^2}{2}c_2 \right) \sinh(\omega\tau), \\ g(\tau) &= c_2 \cosh(\omega\tau) - \frac{i}{\omega} \left(\frac{1+\omega^2}{2}c_1 + \frac{1-\omega^2}{2}c_2 \right) \sinh(\omega\tau), \\ \varphi(\tau) &= c_3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde $c_j, j = 1, 2$ e 3 são constantes complexas. Sem perda de generalidade, podemos assumir $c_3 = 0$.

Decorre das Eqs.(2.23) e (2.25) que

$$\left[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau) \right] = \Delta = |f(\tau)|^2 - |g(\tau)|^2 = |c_1|^2 - |c_2|^2. \quad (2.26)$$

Dessa maneira temos família de operadores $\hat{A}(\tau) = \hat{A}(\tau, c_1, c_2)$ é parametrizado pelos números complexos c_1 e c_2 que são restritos pela condição $|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1$.

Usando a Eq.(2.23), podemos expressar os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger via os operadores \hat{A} e \hat{A}^\dagger ,

$$\begin{aligned} \hat{a} &= f^* \hat{A} - g \hat{A}^\dagger, \\ \hat{a}^\dagger &= f \hat{A}^\dagger - g^* \hat{A}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

escrevemos os operadores \hat{q} e $\hat{p} = -i\partial_q$ em termos dos operadores \hat{A} e \hat{A}^\dagger ,

$$\hat{q} = \frac{(f-g)\hat{A}^\dagger + (f+g)\hat{A}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{(f^*+g^*)\hat{A} - (f+g)\hat{A}^\dagger}{\sqrt{2}i}. \quad (2.28)$$

Os ECG podem ser construídos como autofunções do operador $\hat{A}(\tau)$ que, ao mesmo tempo, obedece a equação de Schrödinger Eq.(2.21).

Primeiro, vamos considerar o autovetor $|z, \tau\rangle$ do operador aniquilação $\hat{A}(\tau)$ com correspondente autovalor z ,

$$\hat{A}(\tau) |z, \tau\rangle = z |z, \tau\rangle. \quad (2.29)$$

Substituindo os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger que estão na expressão Eq.(2.23) na representação das coordenadas Eq.(2.8), obtemos uma equação diferencial de primeira ordem (2.14), na qual tem a seguinte solução

$$\Psi_z^{c_1 c_2}(q, \tau) = |z, \tau\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{f+g}{f-g} (q - \langle q \rangle)^2 + i \langle p \rangle q + i\phi(\tau) \right], \quad (2.30)$$

Na verdade, temos uma família de estados $|z, \tau\rangle$ parametrizados pelos números complexos c_1 e c_2 para os quais $|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1$, sendo que os valores médios de \hat{q} e \hat{p} são iguais as trajetórias clássicas

$$\begin{aligned}\langle \hat{q} \rangle &\equiv \langle z, \tau | \hat{q} | z, \tau \rangle = \frac{(f - g) z^* + (f + g) z}{\sqrt{2}} = q_0 \cosh(\omega\tau) + \frac{p_0}{\omega} \sinh(\omega\tau), \\ \langle \hat{p} \rangle &\equiv \langle z, \tau | \hat{p} | z, \tau \rangle = \frac{(f^* + g^*) z - (f + g) z^*}{\sqrt{2}i} = \omega q_0 \sinh(\omega\tau) + p_0 \cosh(\omega\tau),\end{aligned}\quad (2.31)$$

as constantes reais q_0 e p_0 em Eq.(2.31) tem a forma

$$\begin{aligned}q_0 &= \langle q \rangle |_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(c_1 - c_2) z^* + (c_1^* - c_2^*) z], \\ p_0 &= \langle p \rangle |_{\tau=0} = \frac{i}{\sqrt{2}} [(c_1 + c_2) z^* - (c_1^* + c_2^*) z].\end{aligned}$$

Dado as constantes c_1 e c_2 , os dados iniciais q_0 e p_0 são unicamente determinadas pelo autovalor z . Por outro lado, para um dado conjunto c_1 e c_2 temos uma relação de correspondência um-a-um com o número complexo z e dados iniciais q_0 e p_0

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} [(c_1 + c_2) q_0 + i(c_1 - c_2) p_0].$$

A função fator de fase $\phi(\tau)$ deve ser determinada tal que os estados Eq.(2.30) satisfaçam a equação de Schrödinger Eq.(2.21). Vamos substituir a Eq.(2.30) na Eq.(2.21), a derivação do lado esquerdo fornece

$$i\partial_\tau |z, \tau\rangle = \left[-\frac{i}{2} \frac{\dot{f} + \dot{g}}{f - g} (q - \langle q \rangle)^2 + \frac{i}{2} \frac{(f + g)(\dot{f} - \dot{g})}{(f - g)^2} (q - \langle q \rangle)^2 + i \frac{f + g}{f - g} (q - \langle q \rangle) \langle \dot{q} \rangle - \langle \dot{p} \rangle q - \dot{\phi}(\tau) \right] |z, \tau\rangle \quad (2.32)$$

e a ação do hamiltoniano em $|z, \tau\rangle$

$$\left(-\frac{\partial_q^2}{2} - \frac{\omega^2 q^2}{2} + U_0 \right) |z, \tau\rangle = \left[\frac{f + g}{2(f - g)} - \frac{1}{2} \left(-\frac{f + g}{f - g} (q - \langle q \rangle) + i \langle p \rangle \right)^2 - \frac{\omega^2 q^2}{2} + U_0 \right] |z, \tau\rangle, \quad (2.33)$$

usando as relações que decorrem diretamente da Eq.(2.24)

$$\begin{aligned}\dot{f} + \dot{g} &= -i\omega^2 (f - g), \\ \dot{f} - \dot{g} &= i(f + g)\end{aligned}$$

e a equação do movimento

$$\langle \dot{p} \rangle = \omega^2 \langle q \rangle$$

igualando as Eqs.(2.32 e 2.33)

$$\dot{\phi}(\tau) = i \frac{\dot{f} - \dot{g}}{2(f - g)} - \frac{1}{2} \omega^2 \langle q \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle p \rangle^2 - U_0,$$

cuja integração direta fornece

$$\phi(\tau) = \frac{i}{2} \ln(f - g) - \frac{1}{2} \langle q \rangle \langle p \rangle - U_0 \tau + C. \quad (2.34)$$

Então determinamos C com a condição de normalização

$$\langle z, \tau | z, \tau \rangle = 1 \Rightarrow C = \frac{i}{4} \ln \pi. \quad (2.35)$$

Na qual, utilizamos a seguinte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_z^{c_1 c_2}(q, \tau)|^2 dq = 1.$$

e, além disso,

$$-\frac{1}{2} \frac{f+g}{f-g} (q - \langle q \rangle)^2 - \frac{1}{2} \frac{f^* + g^*}{f^* - g^*} (q - \langle q \rangle)^2 = -\frac{(q - \langle q \rangle)^2}{|f - g|^2}.$$

Portanto, encontramos, na representação das coordenadas, os estados $|z, \tau\rangle$,

$$\begin{aligned} |z, \tau\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(f-g)}\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{f+g}{f-g} (q - \langle q \rangle)^2 + i \frac{\langle p \rangle}{2} (2q - \langle q \rangle) + iU_0\tau \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(f-g)}\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{f+g}{f-g} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{f+g} \right)^2 + \frac{f^* + g^*}{f+g} \frac{z^2}{2} + iU_0\tau - \frac{|z|^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Podemos definir como ECG do OI. De maneira que lidamos com uma família de estados parametrizados por dois números complexos c_1 e c_2 tal que obedecem a condição $|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1$.

Construiremos os estados Eq.(2.36) de outra maneira, tecnicamente definimos um estado de vácuo $|0, \tau\rangle$ que seja normalizado e aniquilado pelo operador $\hat{A}(\tau)$

$$\hat{A}(\tau) |0, \tau\rangle = 0,$$

cuja solução corresponde a expressão Eq.(2.36) em $z = 0$:

$$|0, \tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{(f-g)}\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{f+g}{f-g} q^2 + iU_0\tau \right]. \quad (2.37)$$

O estado acima satisfaz a equação de Schrödinger, isto é, $\hat{S}|0, \tau\rangle = 0$.

Então, usando o operador $\hat{A}^\dagger(\tau)$, criamos um sistema discreto $|n, \tau\rangle$, tal que

$$|n, \tau\rangle = \frac{[\hat{A}^\dagger(\tau)]^n}{\sqrt{n!}} |0, \tau\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

Este sistema é completo para qualquer instante fixo de τ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n, \tau\rangle \langle n, \tau| = 1, \quad (2.39)$$

e cada número do sistema também obedece a equação de Schrödinger

$$\hat{S}|n, \tau\rangle = \frac{[\hat{A}^\dagger(\tau)]^n}{\sqrt{n!}} \hat{S}|0, \tau\rangle = 0.$$

Dessa maneira, podemos construir os ECG, por meio da ação do operador deslocamento $\hat{D}(z)$ no estado de vácuo

$$\hat{D}(z) = \exp \left[z \hat{A}^\dagger(\tau) - z^* \hat{A}(\tau) \right], \quad (2.40)$$

usando a relação de Baker-Hausdorff para dois operadores quaisquer \hat{E} e \hat{P}

$$\exp(\hat{E} + \hat{P}) = \exp(\hat{E}) \exp(\hat{P}) \exp\left(-\frac{1}{2} [\hat{E}, \hat{P}]\right), \quad [\hat{E}, [\hat{E}, \hat{P}]] = [\hat{P}, [\hat{E}, \hat{P}]] = 0,$$

temos

$$\hat{D}(z) |0, \tau\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z \hat{A}^\dagger(\tau)]^n}{n!} |0, \tau\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n, \tau\rangle. \quad (2.41)$$

O operador deslocamento é um operador unitário e integral do movimento devido a Eq.(2.5), $[\hat{S}, \hat{A}(\tau)] = 0$, de modo que os auto-estados de $\hat{A}(\tau)$ e $\hat{D}(z)$ formam um conjunto em comum. Mostraremos essa correspondência pela ação do operador $\hat{A}^\dagger(\tau)$ no estado de vácuo Eq.(2.41):

$$\begin{aligned} \hat{A}^\dagger(\tau) |0, \tau\rangle &= \frac{(f^* - g^*)}{|f - g| \sqrt{2}} \left(\frac{2q}{|f - g|} \right) |0, \tau\rangle, \\ (\hat{A}^\dagger)^2(\tau) |0, \tau\rangle &= \frac{(f^* - g^*)^2}{|f - g|^2 (\sqrt{2})^2} \left(\frac{4q^2}{|f - g|^2} - 2 \right) |0, \tau\rangle, \\ (\hat{A}^\dagger)^3(\tau) |0, \tau\rangle &= \frac{(f^* - g^*)^3}{|(f - g)|^3 (\sqrt{2})^3} \left[\frac{8q^3}{|f - g|^3} - 12 \frac{q}{|f - g|} \right] |0, \tau\rangle, \\ &\vdots \\ \frac{(\hat{A}^\dagger)^n(\tau)}{\sqrt{n!}} \Psi_0(\tau, x) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\sqrt{\frac{(f^* - g^*)}{2(f - g)}} \right]^n H_n \left(\frac{q}{|f - g|} \right) |0, \tau\rangle, \end{aligned}$$

cujos resultados do estado é igual a

$$\hat{D}(z) |0, \tau\rangle = \exp[-|z|^2/2] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\sqrt{\frac{(f^* - g^*)}{2(f - g)}} \right]^n H_n \left(\frac{q}{|f - g|} \right) |0, \tau\rangle,$$

a função geratriz dos polinômios de Hermite é definida como [35]

$$g(s, u) \equiv \exp(-s^2 + 2su) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(u),$$

disso, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{D}(z) |0, \tau\rangle &= \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n, \tau\rangle \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)}{\sqrt{(f - g)} \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{f + g}{f - g} q^2 + iU_0 \tau\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{f^* - g^*}{f - g}} \frac{z}{\sqrt{2}} \right)^n \frac{1}{n!} H_n \left(\frac{q}{|f - g|} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(f - g)} \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{f + g}{f - g} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{f + g} \right)^2 + \frac{f^* + g^*}{f + g} \frac{z^2}{2} + iU_0 \tau - \frac{|z|^2}{2} \right] \quad (2.42) \end{aligned}$$

a forma de Eq.(2.42) coincide com Eq.(2.36)

$$|z, \tau\rangle = \hat{D}(z) |0, \tau\rangle. \quad (2.43)$$

2.2.1 Propriedades dos ECG

2.2.1.1 Relação de Completeza e Sobreposição

A construção de ECG $|z, \tau\rangle$ em qualquer τ fixo obedece a usual relação de completeza no espaço de Hilbert de funções que dependem de q ,

$$\int \int \frac{dz^2}{\pi} [\Psi_z^{c_1, c_2}(q', \tau)]^* [\Psi_z^{c_1, c_2}(q, \tau)] = \delta(q - q'), \quad dz^2 = d[\text{Re}(z)] d[\text{Im}(z)], \quad \forall \tau. \quad (2.44)$$

onde definimos o estado Eq.(2.42) $\Psi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(\tau, q)$, sendo

$$\psi_n(\tau, q) = \frac{1}{\sqrt{(f-g)} \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{f+g}{f-g} q^2 + iU_0 \tau\right) \left(\sqrt{\frac{f^* - g^*}{f-g}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\frac{q}{|f-g|}\right)$$

cujos produto interno é dado por

$$(\Omega, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^*(\tau, q) \Phi(\tau, q) dq$$

as funções $\psi_n(\tau, q)$ formam um sistema completo, com normalização e seguinte relação de completeza

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{n,m}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(\tau, q) \psi_n(\tau, q') = \delta(q - q'), \quad (2.45)$$

em que $\delta(q - q')$ é a função delta de Dirac.

A integração sobre a área do plano complexo é efetuada usando a representação polar de z , isto é, $z = |z|e^{-i\varphi}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz^2}{\pi} [\Psi_z^{c_1, c_2}(q, \tau)]^* \Psi_z^{c_1, c_2}(q', \tau) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\psi_n^*(\tau, q) \psi_m(\tau, q')}{\sqrt{n! m!}} \int \frac{dz^2}{\pi} e^{-|z|^2} z^{*n} z^m, \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\psi_n^*(\tau, q) \psi_m(\tau, q')}{\sqrt{n! m!}} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-m)\varphi} \int_0^{\infty} \frac{d|z|^2}{2\pi} e^{-|z|^2} |z|^{n+m}, \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\psi_n^*(\tau, q) \psi_m(\tau, q')}{\pi \sqrt{n! m!}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n+m} r dr \int_0^{2\pi} e^{(n-m)i\varphi} d\varphi, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(\tau, q) \psi_n(\tau, q') = \delta(q - q'), \end{aligned} \quad (2.46)$$

sendo que usamos o fato de

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2n+1} dr = n!/2, \quad \int_0^{2\pi} e^{(n-m)i\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{nm}$$

A superposição de dois estados ECG com diferentes z é

$$\langle z', \tau | z, \tau \rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2 - |z'|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^* z')^n}{n!} \langle n, \tau | n, \tau \rangle = \exp\left(\frac{|z' - z|^2}{2}\right). \quad (2.47)$$

2.2.1.2 Relação de incerteza

O princípio de incerteza foi introduzido por Heisenberg [36], no qual estabeleceu ser impossível medir com precisão simultânea infinita a coordenada (x) e o momento (p), postulando uma relação aproximada $\Delta x \Delta p \sim \hbar$, onde \hbar é a constante de Planck. Esta relação para operadores \hat{x} e \hat{p} em forma de desigualdade foi provada rigorosamente por Kennard [37],

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

onde Δx e Δp são as dispersões da posição e momento, que são definidas por

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle (\hat{\Delta}x)^2 \rangle} = \sqrt{\langle (\hat{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle}, \\ \Delta p &= \sqrt{\langle (\hat{\Delta}p)^2 \rangle} = \sqrt{\langle (\hat{p} - \langle p \rangle)^2 \rangle}. \end{aligned}$$

Robertson [39] estendeu esta desigualdade para um par arbitrário de operadores auto-adjuntos \hat{F} e \hat{V} ,

$$\Delta F \Delta V \geq \frac{1}{2} \left| \langle \hat{F} \hat{V} - \hat{V} \hat{F} \rangle \right|. \quad (2.48)$$

Este princípio impõe limitações fundamentais na precisão da medida. Nas últimas décadas, tem dado atenção usar a técnica dos estados comprimidos [43]. O conceito de estados comprimidos surgiu a partir da observação de que a desigualdade de Heisenberg para os observáveis \hat{q} e \hat{p} pode ser mantida, se as dispersões de um dos dois observáveis são reduzidas à custa do outro. O critério proposto por [44] diz que um estado $|\Psi\rangle$ é comprimido se $\langle (\hat{\Delta}F)^2 \rangle$ ou $\langle (\hat{\Delta}V)^2 \rangle$ é menor que $|\langle [\hat{F}, \hat{V}] \rangle|/2$.

Schrödinger [40] e Robertson [46] provaram uma desigualdade mais ampla, generalizando a relação de incerteza para dois observáveis:

$$\langle (\hat{\Delta}F)^2 \rangle \langle (\hat{\Delta}V)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{F}, \hat{V}] \rangle \right|^2 + \langle (\hat{\Delta}F \hat{\Delta}V) \rangle^2, \quad (2.49)$$

onde $\langle (\hat{\Delta}F \hat{\Delta}V) \rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \hat{\Delta}F \hat{\Delta}V + \hat{\Delta}V \hat{\Delta}F \rangle$ é a covariância (correlação) dos operadores \hat{F} e \hat{V} .

Vamos calcular a dispersão dos operadores posição e momento no estado $|z, \tau\rangle$. Para este fim, usamos a relação entre os operadores \hat{q} e $\hat{p} = -i\partial_q$, e operadores criação e aniquilação $\hat{A}^\dagger(\tau)$ e $\hat{A}(\tau)$,

como segue na forma Eq.(2.28). As dispersões dos operadores posição $\hat{\Delta}q = \hat{q} - \langle q \rangle$ e momento $\hat{\Delta}p = \hat{p} - \langle p \rangle$ são iguais a

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(f+g) (\hat{A}^\dagger - z^*) + (f^* + g^*) (\hat{A} - z) \right], & \langle \hat{\Delta}q \rangle &= 0, \\ \hat{\Delta}p &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(f+g) (\hat{A}^\dagger - z^*) - (f^* + g^*) (\hat{A} - z) \right], & \langle \hat{\Delta}p \rangle &= 0,\end{aligned}$$

cujas variâncias

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\equiv \left\langle (\hat{\Delta}q)^2 \right\rangle = \frac{|f-g|^2}{2}, & \sigma_2 &\equiv \left\langle (\hat{\Delta}p)^2 \right\rangle = \frac{|f+g|^2}{2}, \\ \sigma_3 &\equiv \frac{1}{2} \left\langle \hat{\Delta}q \hat{\Delta}p + \hat{\Delta}p \hat{\Delta}q \right\rangle = \frac{i}{2} (gf^* - g^*f).\end{aligned}\tag{2.50}$$

e, em geral, não atingem o valor mínimo. É importante notar que as dispersões Eqs.(2.50) dependem dos parâmetros c_1 e c_2 , que são restritos a $|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1$. Sendo esta condição satisfeita, podemos escolher

$$c_1 = e^{i\chi} \cosh \alpha, \quad c_2 = e^{-i\chi} \sinh \alpha,\tag{2.51}$$

onde α e χ são constantes reais. Em termos disso, obtemos a variância do operador posição

$$\begin{aligned}2\sigma_1 &= (\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha) \left(\cosh^2 (\omega\tau) + \frac{\sinh^2 (\omega\tau)}{\omega^2} \right) \\ &+ \left(\frac{\sinh^2 (\omega\tau)}{\omega^2} - \cosh^2 (\omega\tau) \right) \cos (2\chi) \sinh 2\alpha \\ &+ \frac{\sin (2\chi) \sinh 2\alpha \sinh (2\omega\tau)}{\omega},\end{aligned}\tag{2.52}$$

do operador momento

$$\begin{aligned}2\sigma_2 &= (\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha) (\cosh^2 (\omega\tau) + \omega^2 \sinh^2 (\omega\tau)) \\ &+ (\cosh^2 (\omega\tau) - \omega^2 \sinh^2 (\omega\tau)) \cos (2\chi) \sinh 2\alpha \\ &+ \omega \sin (2\chi) \sinh 2\alpha \sinh (2\omega\tau)\end{aligned}\tag{2.53}$$

e

$$\begin{aligned}2\sigma_3 &= \sin (2\chi) \sinh 2\alpha \left[\cosh^2 (\omega\tau) + \sinh^2 (\omega\tau) \right] \\ &+ \left[(1 + \omega^2) (\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha) + (1 - \omega^2) \right] \frac{\cos (2\chi) \sinh 2\alpha \sinh (2\omega\tau)}{2\omega}.\end{aligned}\tag{2.54}$$

Olhando as Eqs.(2.52,2.53,2.54) para qualquer $c_{1,2}$ (α e χ) a variância aumenta exponencialmente com tempo. Entretanto, em todas as construções dos ECG a relação de incerteza de Schrödinger–Robertson é minimizada,

$$\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3^2 = \frac{1}{4},\tag{2.55}$$

de tal forma que lidamos com uma classe de estados comprimidos. Porém, a relação de incerteza de Heisenberg não é mínima e o produto $\sigma_1 \sigma_2$ depende do tempo.

2.3 ECG da partícula livre

A equação de Schrödinger da partícula livre é dada por

$$i\partial_\tau\Psi(q, \tau) = \hat{H}\Psi(q, \tau), \quad \hat{H} = -\frac{1}{2}\partial_q^2. \quad (2.56)$$

O hamiltoniano Eq.(2.56) pode ser escrito em termos dos operadores aniquilação e criação por meio da Eq.(2.8):

$$\hat{H} = \frac{1}{4}(-\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^{\dagger 2}). \quad (2.57)$$

Devemos construir um operador $\hat{A}(\tau)$

$$\hat{A}(\tau) = u(\tau)\hat{a} + v(\tau)\hat{a}^\dagger + \kappa(\tau), \quad (2.58)$$

onde $u(\tau)$, $v(\tau)$ e $\kappa(\tau)$ são algumas funções de τ , sabemos que os operadores $\hat{A}(\tau)$ e $\hat{A}^\dagger(\tau)$ são integrais do movimento da Eq.(2.5). Então, pode-se ver que a Eq.(2.5) é satisfeita se as funções $u(\tau)$, $v(\tau)$ e $\kappa(\tau)$ são soluções do seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} i\dot{u} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v &= 0, \\ i\dot{v} - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v &= 0, \\ \dot{\kappa} &= 0, \end{aligned}$$

cuja solução geral do sistema acima é

$$\begin{aligned} u(\tau) &= d_1 + (d_1 + d_2)\frac{i\tau}{2}, \\ v(\tau) &= d_2 - (d_1 + d_2)\frac{i\tau}{2}, \\ \kappa(\tau) &= d_3, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde $d_j, j = 1, 2$ e 3 são constantes complexas. Sem perda de generalidade, podemos assumir $d_3 = 0$.

Decorre das Eqs.(2.59,2.58) que

$$\left[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau) \right] = \Delta = |u(\tau)|^2 - |v(\tau)|^2 = |d_1|^2 - |d_2|^2. \quad (2.60)$$

Para $\Delta > 0$, sem perda de generalidade, podemos definir $\Delta = 1$, que corresponde a multiplicação de $\hat{A}(\tau)$ por um número complexo. E, neste caso, em qualquer instante de tempo τ , os operadores $\hat{A}^\dagger(\tau)$ e $\hat{A}(\tau)$ são de criação e aniquilação.

Para nosso propósito, consideraremos o caso $\Delta = 1$, que implica na Eq.(2.60). Aqui a família de operadores $\hat{A}(\tau) = \hat{A}(\tau, d_1, d_2)$ é parametrizada pelos números complexos d_1 e d_2 que são restritos pela condição $|d_1|^2 - |d_2|^2 = 1$.

Usando a Eq.(2.23), podemos expressar os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger via os operadores \hat{A} e \hat{A}^\dagger ,

$$\hat{a} = u^*\hat{A} - v\hat{A}^\dagger, \quad (2.61)$$

$$\hat{a}^\dagger = u\hat{A}^\dagger - v^*\hat{A} \quad (2.62)$$

e por meio da Eq.(2.8) temos os operadores \hat{q} e \hat{p} em termos dos operadores \hat{A} e \hat{A}^\dagger ,

$$\hat{q} = \frac{(u-v)\hat{A}^\dagger + (u^* - v^*)\hat{A}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{(u^* + v^*)\hat{A} - (u+v)\hat{A}^\dagger}{i\sqrt{2}}. \quad (2.63)$$

Da mesma forma, ECG da partícula livre podem ser construídos como autofunções do operador $\hat{A}(\tau)$ que, ao mesmo tempo, obedecem a equação de Schrödinger Eq.2.56). Primeiro, consideraremos o autovetor $|z, \tau\rangle$ do operador aniquilação $\hat{A}(\tau)$ com correspondente autovalor z ,

$$\hat{A}(\tau) |z, \tau\rangle = z |z, \tau\rangle. \quad (2.64)$$

Como sabemos, a solução geral é a Eq.(2.15):

$$\begin{aligned} |z, \tau\rangle &= \exp \left\{ -\frac{u+v}{u-v} \frac{q^2}{2} + \frac{\sqrt{2}z}{u-v} q + i\phi(\tau) \right\} \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{u+v}{u-v} (q - \langle q \rangle)^2 + i \langle p \rangle q + i\phi(\tau) \right], \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde os valores médios de \hat{q} e \hat{p} são iguais as trajetórias clássica Eqs.(1.7,1.8)

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &\equiv \langle z, \tau | \hat{q} | z, \tau \rangle = \frac{(u-v)z^* + (u^* - v^*)z}{\sqrt{2}} = q_0 + \frac{p_0}{m}\tau, \\ \langle p \rangle &\equiv \langle z, \tau | \hat{p} | z, \tau \rangle = \frac{(u^* + v^*)z - (u+v)z^*}{i\sqrt{2}} = p_0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

sendo

$$\begin{aligned} q_0 &= \langle q \rangle|_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(d_1 - d_2)z^* + (d_1^* - d_2^*)z], \\ p_0 &= \langle p \rangle|_{\tau=0} = \frac{i}{\sqrt{2}}[(d_1 + d_2)z^* - (d_1^* + d_2^*)z]. \end{aligned}$$

Para um dado conjunto d_1 e d_2 , temos uma relação de correspondência um-a-um com o número complexo z e dados iniciais q_0 e p_0 ,

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} [(d_1 + d_2)q_0 + i(d_1 - d_2)p_0].$$

A função fator de fase $\phi(\tau)$ deve ser determinada tal que os estados normalizados Eq.(2.65) satisfaçam a equação de Schrödinger Eq.(2.56), na qual obtemos a

$$\phi(\tau) = \frac{i}{2} \ln(u-v) - \frac{1}{2} \langle p \rangle \langle q \rangle + C.$$

Assim, determinamos C com a condição de normalização

$$\langle z, \tau | z, \tau \rangle = 1 \Rightarrow C = \frac{i}{4} \ln \pi.$$

Portanto, encontramos, em representação das coordenadas, os estados $|z, \tau\rangle$

$$\begin{aligned} |z, \tau\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(u-v)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{u+v}{u-v} (q - \langle q \rangle)^2 + \frac{i}{2} \langle p \rangle (2q - \langle q \rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(u-v)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{u+v}{u-v} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{u+v} \right)^2 + \frac{u^* + v^*}{u+v} \frac{z^2}{2} - \frac{|z|^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

que representam família de ECG parametrizados pelas constantes d_1 e d_2 , sob a restrição de $|d_1|^2 - |d_2|^2 = 1$. Esses estados podem ser interpretados como pacotes de onda gaussianos que se deslocam ao longo da trajetória clássica Eq.(2.66).

Agora consideraremos outro caminho para construir ECG. Aqui, definimos primeiro um estado de vácuo, isto é $|0, \tau\rangle$. A expressão para esse estado tem a forma da Eq. (2.67) quando $z = 0$,

$$|0, \tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(u-v)}} \exp\left(-\frac{u+v}{u-v} \frac{q^2}{2}\right). \quad (2.68)$$

O estado de vácuo satisfaz a equação de Schrödinger, $\hat{S}|0, \tau\rangle = 0$, e é aniquilado pelo operador aniquilação $\hat{A}(\tau)|0, \tau\rangle = 0$.

Então, usando o operador criação $\hat{A}^\dagger(\tau)$, construímos um sistema discreto $|n, \tau\rangle$:

$$|n, \tau\rangle = \frac{[\hat{A}^\dagger(\tau)]^n}{\sqrt{n!}} |0, \tau\rangle. \quad (2.69)$$

Esse sistema é completo para qualquer τ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n, \tau\rangle \langle n, \tau| = 1, \quad (2.70)$$

O estado $|n, \tau\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger para todo n , inclusive o de vácuo ($n = 0$), como o operador $\hat{A}^\dagger(\tau)$ comuta com operador \hat{S} , temos

$$\hat{S}|n, \tau\rangle = \frac{[\hat{A}^\dagger(\tau)]^n}{\sqrt{n!}} \hat{S}|0, \tau\rangle = 0.$$

Podemos construir ECG

$$\hat{D}(z)|0, \tau\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n, \tau\rangle, \quad (2.71)$$

no qual o operador deslocamento $\hat{D}(z)$ tem a forma Eq.(2.40), é um operador unitário e integral do movimento. Usando as propriedades do operador deslocamento, facilmente encontramos os estados Eq.(2.71), que também são estados do operador aniquilação, de maneira análoga ao que fizemos na seção anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{D}(z)|0, \tau\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z\hat{A}^\dagger(\tau)]^n}{n!} |0, \tau\rangle \\ &= \frac{e^{-|z|^2/2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}(u-v)}} \exp\left(-\frac{u+v}{u-v} \frac{q^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{u^*-v^*}{u-v}} \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{n!} H_n\left(\frac{q}{|u-v|}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(u-v)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{u+v}{u-v} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{u+v}\right)^2 + \frac{u^*+v^*}{u+v} \frac{z^2}{2} - \frac{|z|^2}{2}\right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

O resultado da Eq. (2.72) coincide com resultado da Eq. (2.67) tal que

$$|z, \tau\rangle = \hat{D}(z)|0, \tau\rangle. \quad (2.73)$$

ECG da partícula livre também satisfazem a relação de completeza Eq.(2.44) e sobreposição Eq.(2.47). A relação de incerteza generalizada é dada pela relação de Schrödinger–Robertson Eq.(2.51), em que calculamos as dispersões do operador posição e momento

$$\begin{aligned}\Delta q &\equiv \sqrt{\langle \hat{\Delta}q^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle q \rangle^2} = \frac{|u-v|}{\sqrt{2}}, & \langle \hat{\Delta}q \rangle &= 0, \\ \Delta p &\equiv \sqrt{\langle \hat{\Delta}p^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{|u+v|}{\sqrt{2}}, & \langle \hat{\Delta}p \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (2.74)$$

É importante salientar que as dispersões dependem dos parâmetros d_1 e d_2 , os quais obedecem a restrição $|d_1|^2 - |d_2|^2 = 1$. Onde

$$\Delta q \Delta p = \frac{1}{2} |u-v| |u+v|. \quad (2.75)$$

Em geral, esse valor não é mínimo. Mas, na particular situação, quando $v = \delta u$ com δ sendo um parâmetro real, a Eq.(2.75) é minimizada e, com isso, encontramos uma relação entre as constantes d_1 e d_2

$$d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2} i\tau = \delta \left(d_1 + \frac{d_1 + d_2}{2} i\tau \right) \Rightarrow d_1 = -d_2, \quad \delta = -1. \quad (2.76)$$

Esses estados foram similarmente obtidos em [41].

No geral, os estados não são de mínima incerteza

$$\Delta pq = \sqrt{\frac{1}{2} \langle \hat{\Delta} (qp)^2 + \hat{\Delta} (pq)^2 \rangle - \langle \hat{\Delta}q \rangle \langle \hat{\Delta}p \rangle} = \frac{i}{2} (vu^* - v^*u),$$

Desta forma, podemos mostrar que

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 - (\Delta qp)^2 = \frac{1}{4}, \quad (2.77)$$

por conseguinte, concluímos que esses estados também são estados comprimidos. Urge destacar que os estados Eq.(2.67) coincidem com os estados coerentes da partícula livre obtidos por Guerrero [33].

2.4 ECG do oscilador harmônico

No apêndice 2, apresentaremos a construção dos estados coerentes do oscilador harmônico. Nesse momento, construiremos ECG para esse sistema físico.

O hamiltoniano desse sistema é dado por

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x), \quad V(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}, \quad (2.78)$$

escrevendo a equação de Schrödinger nas variáveis q e τ

$$i\partial_\tau \Psi = \hat{H} \Psi(q, \tau), \quad \hat{H} = -\frac{\partial_q^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2}, \quad (2.79)$$

em que ω é a variável especial definida na Eq.(2.20). Na representação dos operadores aniquilação \hat{a} e criação \hat{a}^\dagger , o hamiltoniano Eq.(2.79) torna-se

$$\hat{H} = (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2}) \frac{(\omega^2 - 1)}{4} + (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \frac{(1 + \omega^2)}{4},$$

vamos construir o operador $\hat{A}(\tau)$

$$\hat{A}(\tau) = h(\tau) \hat{a} + w(\tau) \hat{a}^\dagger + y(\tau), \quad (2.80)$$

nas quais $h(\tau)$, $w(\tau)$ e $y(\tau)$ são algumas funções de τ , como sabemos o operador $\hat{A}(\tau)$ deve ser integral do movimento Eq.(2.5), o que leva ao seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} i\dot{h} + \frac{(1 + \omega^2)}{2}h - \frac{(\omega^2 - 1)}{2}w &= 0, \\ i\dot{w} + \frac{(\omega^2 - 1)}{2}h - \frac{(1 + \omega^2)}{2}w &= 0, \\ iy + \frac{b}{2}h - \frac{b}{2}w &= 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

a solução geral desse último conjunto tem a forma

$$\begin{aligned} h(\tau) &= n_1 \cos(\omega\tau) + i [n_1 + n_2 + \omega^2(n_1 - n_2)] \frac{\sin(\omega\tau)}{2\omega}, \\ w(\tau) &= n_2 \cos(\omega\tau) - i [n_1 + n_2 - \omega^2(n_1 - n_2)] \frac{\sin(\omega\tau)}{2\omega}, \\ y(\tau) &= n_3, \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde n_1, n_2 e n_3 são constantes complexas. Sem perda de generalidade, podemos tomar $n_3 = 0$.

Pode-se ver que as funções Eq.(2.82) obedecem as seguinte relações

$$\left(\dot{h} - \dot{w} \right) = i(h + w), \quad \left(\dot{h} + \dot{w} \right) = i\omega^2(h - w). \quad (2.83)$$

Seguindo a Eq.(2.10) e usando $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, temos

$$\left[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau) \right] = |n_1|^2 - |n_2|^2 = \Delta, \quad (2.84)$$

assumimos $\Delta = 1$. Dessa forma, $\hat{A}(n_1, n_2, \tau)$ é o operador aniquilação, parametrizado pelas constantes n_1 e n_2 , restritas a condição $|n_1|^2 - |n_2|^2 = 1$.

O mesmo esquema da secção anterior será utilizado para determinar os autovetores $|z, \tau\rangle$ do operador aniquilação $\hat{A}(\tau)$ com correspondente autovalor z ,

$$\hat{A}(\tau) |z, \tau\rangle = z |z, \tau\rangle.$$

Tais autovetores tem a forma Eq.(2.18)

$$|z, \tau\rangle = \Psi_z^{n_1, n_2}(q, \tau) = \exp \left\{ -\frac{f + g}{2(f - g)} (q - \langle q \rangle)^2 + i \langle p \rangle q + i\phi \right\}, \quad (2.85)$$

os ECG Eq.(2.85) representam familia de estados coerentes parametrizados pelas constantes n_1, n_2 os quais obedecem a equação de Schrödinger Eq.(2.79):

$$i\partial_\tau |z, \tau\rangle = \left[\frac{1}{2}\omega^2 (q - \langle q \rangle)^2 - \frac{1}{2} \frac{(h+w)^2}{(f-g)^2} (q - \langle q \rangle)^2 + i \frac{f+g}{f-g} (q - \langle q \rangle) \langle \dot{q} \rangle + \frac{\omega^2}{2} \langle q \rangle q - \dot{\phi}(\tau) \right] |z, \tau\rangle, \quad (2.86)$$

e

$$\left(-\frac{\partial_q^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) |z, \tau\rangle = \left[\frac{f+g}{2(f-g)} - \frac{1}{2} \left(\frac{f+g}{f-g} \right)^2 (q - \langle q \rangle)^2 + \frac{1}{2} \langle p \rangle^2 + \frac{f+g}{f-g} (q - \langle q \rangle) i \langle p \rangle + \omega^2 \frac{q^2}{2} \right] |z, \tau\rangle, \quad (2.87)$$

pela igualdade das equações Eqs.(2.86,2.87), temos

$$\dot{\phi}(\tau) = i \frac{(\dot{h} - \dot{w})}{2(h-w)} - \frac{1}{2} \langle p \rangle^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \langle q \rangle^2,$$

cuja integração fornece

$$\phi(\tau) = \frac{i}{2} \ln(h-w) - \frac{1}{2} \langle p \rangle \langle q \rangle + C. \quad (2.88)$$

Então, determinamos C com a condição de normalização

$$\langle z, \tau | z, \tau \rangle = 1 \Rightarrow C = \frac{i}{4} \ln \pi.$$

Portanto, encontramos, em representação das coordenadas, os estados $|z, \tau\rangle$,

$$\begin{aligned} |z, \tau\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(h-w)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{h+w}{h-w} (q - \langle q \rangle)^2 + \frac{i}{2} \langle p \rangle (2q - \langle q \rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(h-w)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{h+w}{h-w} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{h+w} \right)^2 + \frac{h^* + w^*}{h+w} \frac{z^2}{2} - \frac{|z|^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

Esses estados podem ser interpretados como *pacotes de onda gaussianos* que se deslocam ao longo da trajetória clássica

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \frac{(h^* - w^*)z + (h-w)z^*}{\sqrt{2}} = q_0 \cos(\omega\tau) + \frac{p_0}{\omega} \sin(\omega\tau), \\ \langle p \rangle &= i \frac{(h+w)z^* - (h^* + w^*)z}{\sqrt{2}} = p_0 \sin(\omega\tau) - q_0 \omega \sin(\omega\tau), \\ q_0 &= \frac{[(n_1^* - n_2^*)z + (n_1 - n_2)z^*]}{\sqrt{2}}, \quad p_0 = \frac{[i(n_1 + n_2)z^* - i(n_1^* + n_2^*)z]}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Lembramos que o mesmo estado Eq.(2.89) pode ser obtido via ação do operador deslocamento no estado de vácuo.

Os estados Eq.(2.89) obedecem à relação de completeza:

$$\int \psi_z^{*n_1, n_2}(q', \tau) \psi_z^{n_1, n_2}(q, \tau) d^2z = \pi \delta(q - q'), \quad d^2z = d \operatorname{Re} z d \operatorname{Im} z. \quad (2.91)$$

Agora, calculemos as dispersões dos operadores posição e momento:

$$\begin{aligned}
\Delta q &\equiv \sqrt{\langle \hat{\Delta}q^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle q \rangle^2} = \frac{|h-w|}{\sqrt{2}}, & \langle \hat{\Delta}q \rangle &= 0, \\
\Delta p &\equiv \sqrt{\langle \hat{\Delta}p^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{|h+w|}{\sqrt{2}}, & \langle \hat{\Delta}p \rangle &= 0, \\
\Delta pq &= \frac{i}{2} (wh^* - w^*h).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Em seguida, obtém-se a partir de Eq.(2.92) a relação de incerteza de Schrödinger–Robertson é minimizada

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 - (\Delta qp)^2 = \frac{1}{4}. \tag{2.93}$$

2.4.1 Casos limites

Observamos que a construção de ECG para os sistemas OI, partícula livre e OH foi estabelecida mediante método proposto no trabalho [34]. Na qual, a estrutura desses estados tem uma forma em comum, de modo que a diferença está nas funções Eqs. (2.25,2.59,2.82) que parametrizam os operadores de aniquilação e no fator de fase. Devido à escolha da variável especial Eq.(2.20), obteremos uma não trivial e importante conexão entre esses sistemas físicos, de modo que os ECG do OH serão escolhidos para encontrar essa relação.

2.4.1.1 Caso da partícula livre

A variável ω depende da variável ω_0 de modo que o limite $\omega_0 \rightarrow 0$, é equivalente ao limite $\omega \rightarrow 0$. De fato, a solução Eq.(2.82) admite isso

$$\Psi_z^{n_1, n_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(h-w)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{h+w}{h-w} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{h+w} \right)^2 + \frac{h^* + w^*}{h+w} \frac{z^2}{2} - \frac{|z|^2}{2} \right].$$

As expressões limites são soluções do problema da partícula livre, em que

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow 0} h(\tau) &= n_1 + i(n_1 + n_2) \frac{\tau}{2} = u(\tau), \\
\lim_{\omega \rightarrow 0} w(\tau) &= n_2 - i(n_1 + n_2) \frac{\tau}{2} = v(\tau),
\end{aligned} \tag{2.94}$$

o que coincide com Eq.(2.67)

$$\Psi_z^{n_1, n_2}(q, \tau) = \Psi_z^{d_1, d_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(u-v)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{u+v}{u-v} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{u+v} \right)^2 + \frac{u^* + v^*}{u+v} \frac{z^2}{2} - \frac{|z|^2}{2} \right]. \tag{2.95}$$

2.4.1.2 O caso dos estados coerentes de Schrödinger/Glauber

Ao definir $\omega^2 = 1$, o que equivale a escolha $l^2 = \hbar/m\omega_0$ na Eq.(2.20), e impondo $c_1 = 1$, e $c_2 = 0$, obtemos a forma da Eq. (2.82), isto é

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \exp(i\tau), \\ w(\tau) &= y(\tau) = 0, \end{aligned} \quad (2.96)$$

Pode-se ver facilmente que os ECG Eq.(2.89) são reduzidos aos importantíssimos estados coerentes do oscilador harmônico

$$\Psi_z(q, t) = \frac{\exp(-i\omega_0 t/2)}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(q - \sqrt{2}z \exp(-i\omega_0 t)\right)^2 + \frac{z^2}{2} \exp(i2\omega_0 t) - \frac{|z|^2}{2}\right], \quad (2.97)$$

(veja o apêndice 2) obtidos primeiro por Schrödinger [17] e em seguida por Glauber [27]. Neste caso, fixamos a transformação de variáveis Eq.(2.2). Nessas novas variáveis não existe a possibilidade de considerar o limite $\omega_0 \rightarrow 0$. Isto explica o porquê dos estados coerentes da partícula livre não foram antes obtidos por Schrödinger.

Além disso, observamos que a relação de mínima incerteza entre os operadores \hat{q} e \hat{p} é satisfeita ($\sigma_3 = 0$)

$$\Delta q \Delta p = \frac{1}{2}.$$

2.4.1.3 O caso do oscilador invertido

Outra importante propriedade da variável Eq.(2.20) e soluções Eq.(2.82) é que elas são bem definidas para todos os valores complexos de ω , em particular quando ω for imaginário puro. Isto nos permite realizar a mudança

$$\omega \rightarrow i\omega, \quad \omega^2 \rightarrow -\omega^2 \quad \cos \omega\tau \rightarrow \cosh \omega\tau, \quad \frac{\sin \omega\tau}{\omega} \rightarrow \frac{\sinh \omega\tau}{\omega}, \quad (2.98)$$

nas equações (2.82) e obtemos soluções para o problema do OI. Neste caso, em vez de (2.82), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow i\omega} h(\tau) &= f(\tau) = c_1 \cosh(\omega\tau) + \frac{i}{\omega} \left(\frac{1 - \omega^2}{2} c_1 + \frac{1 + \omega^2}{2} c_2 \right) \sinh(\omega\tau), \\ \lim_{\omega \rightarrow i\omega} w(\tau) &= g(\tau) = c_2 \cosh(\omega\tau) - \frac{i}{\omega} \left(\frac{1 + \omega^2}{2} c_1 + \frac{1 - \omega^2}{2} c_2 \right) \sinh(\omega\tau), \\ y(\tau) &= \varphi(\tau) = c_3. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Capítulo 3

Tunelamento

O oscilador invertido caracteriza-se como barreira de potencial, historicamente Kemble (1929) [10] foi o primeiro a estudar o tunelamento de partículas nessa barreira, na qual determinou o coeficiente de transmissão utilizando aproximação semi-clássica. Posteriormente, a barreira de potencial do oscilador invertido truncado (descrito classicamente na introdução) foi estudada por Bell [13], o qual determinou o coeficiente de transmissão exato, quando a energia da partícula incidente é igual a altura da barreira desse potencial, entretanto, não determinou o coeficiente de transmissão para outro nível de energia.

Neste capítulo, discutiremos esse fenômeno, puramente quântico nas barreiras de potenciais, seguindo o trabalho de M. Prakash [38] e apresentaremos uma das maneiras de obter o coeficiente de transmissão para barreira OI. Logo após, resolveremos de maneira exata e aproximada (utilizando estados semi-clássicos) o problema de tunelamento do oscilador invertido truncado para qualquer nível de energia (inclusive de Bell) comparando ambas soluções.

3.1 Teoria geral

Tunelamento consiste num fenômeno que a partícula com energia abaixo da barreira de potencial pode penetrá-la e em alguns casos atravessá-la. Portanto, possui diversas aplicações ([47]), sendo que a mais famosa é o decaimento de partículas alfa, descoberto por G. Gamov (1928,[48]), que explica a variação da duração das meias-vidas para desintegração alfa- α . Esse fenômeno é um mecanismo que torna possível grande parte da eletrônica moderna, e trouxe avanços importantíssimos na microscopia.

Na mecânica clássica, para descrever um sistema físico, é suficiente definir as coordenadas do ponto e as componentes do momento. Já para descrever um sistema na mecânica quântica, uma função complexa associada é introduzida - a função de onda. Se as partículas colidem com uma barreira de potencial de uma largura limitada, a mecânica quântica prediz o efeito da penetração de partículas através da barreira de potencial (efeito túnel) por meio da probabilidade de encontrar uma função de onda, mesmo que a energia total dessas partículas seja menor que a altura da barreira, fato este desconhecido pelas leis da física clássica, na qual a barreira de potencial é impenetrável, cujo coeficiente de transmissão é igual a $T(E) = \Theta(E - V_0)$, em que Θ é a função de Heaviside e $V_0 = V(x = 0)$ a altura da barreira. Em vez disso, na mecânica quântica, a probabilidade é diferente de zero [15], quanto mais estreita a barreira e/ou mais próxima estiver a energia (E) do topo, maior a probabilidade de tunelamento.

Para ilustrar o fenômeno qualitativamente, consideremos a figura 5. Nela, a partícula com energia E está submetida a barreira de potencial unidimensional $V(x)$ finita e se aproxima de um valor *constante*, quando $x \rightarrow \mp\infty$. Sem perda de generalidade, podemos considerar que a partícula move-se da esquerda para a direita.

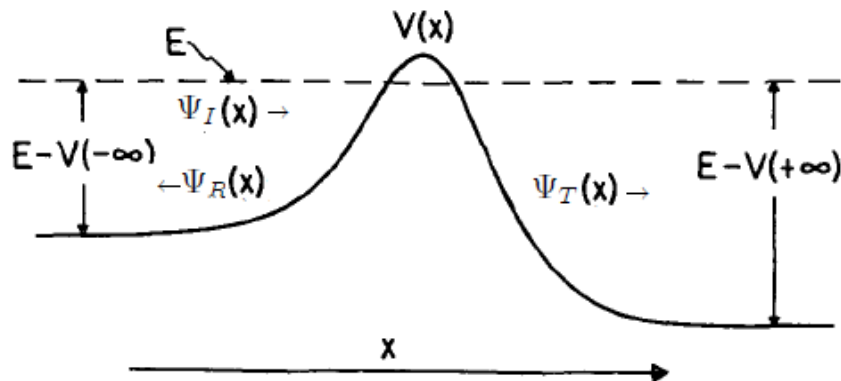


Fig. 5 - Representação da partícula com energia E menor que a barreira de potencial $V(x)$, movendo-se da esquerda para a direita.

Classicamente falando, a situação é simples: se $E > V(x)$ em toda parte, então a partícula clássica continua a se mover, indo para direita indefinidamente, sofrendo mudança de velocidade com ação do potencial, se $E < V(x)$ a partícula vem da esquerda para a direita e atinge o ponto de retorno x_r ($E = V(x)$) onde para instantaneamente. Ela é refletida pela barreira, mudando o sinal do momento.

Na situação quântica, acontece algo diferente em ambos os casos: quando $E > V(x)$ existe probabilidade de reflexão e quando $E < V(x)$ dependendo da forma da barreira e energia da partícula a função de onda atravessa, sendo assim, para ocorrer tunelamento, a energia da partícula deve ser menor ou igual a altura da barreira de potencial, então podemos restringir a energia E no intervalo $0 \leq E \leq V_0$, isto é:

$$E = \eta V_0, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Vamos discutir solução estacionária da equação de Schrödinger Eq.(2.3), isto é, solução cuja densidade de probabilidade é independente do tempo - será útil escrever em variáveis adimensionais - assim temos

$$\Psi(q, \tau) = \Psi(q) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\eta m}{2} \right)^{1/2} \tau \right], \quad (3.1)$$

substituindo a Eq.(3.1) na Eq.(2.3) obtemos:

$$d_q^2 \Psi(q) + \beta \left(\eta - \frac{V(q)}{V_0} \right) \Psi(q) = 0, \quad (3.2)$$

em que $\Psi(q)$ é a função de onda da partícula que descreve estados estacionários em todo espaço. Os parâmetros q e β são (para $l = a\beta^{-1/2}$ na Eq.(2.2)

$$q = \beta^{1/2} \frac{x}{a}, \quad \beta = a \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}, \quad (3.3)$$

observe que o parâmetro β é dado em termos da largura ($2a$) e altura (V_0) da barreira.

A solução assintótica da Eq.(3.2) para $q \rightarrow -\infty$ (partícula livre) representa onda plana incidente ($\Psi_I(q, \tau)$) e refletida ($\Psi_R(q, \tau)$), dada pela seguinte combinação linear

$$\Psi(q) = \Psi_I(q) + \Psi_R(q) = A_1 \exp\left(i\alpha_- q/\beta^{1/2}\right) + A_2 \exp\left(-i\alpha_- q/\beta^{1/2}\right), \quad (3.4)$$

onde

$$\alpha_- = \beta \sqrt{[\eta - V(-\infty)/V_0]},$$

e A_1, A_2 são constantes, cujo comprimento de onda é $\lambda_- = \frac{2\pi a}{\alpha_-}$, consideramos que a massa (m) não varia. Similarmente, partículas que atravessam a barreira de potencial tem função de ondas planas que se afastam ($q \rightarrow \infty$) da barreira, isto é,

$$\Psi(q) = \Psi_T(q) = A_3 \exp\left(i\alpha_+ q/\beta^{1/2}\right), \quad (3.5)$$

em que constante A_3 e α_+ são iguais a

$$\alpha_+ = \beta \sqrt{[\eta - V(+\infty)/V_0]},$$

com comprimento de onda $\lambda_+ = \frac{2\pi a}{\alpha_+}$, nessas regiões, podemos observar que o momento ($p_{q_-} = m\beta^{-1/2}\alpha_-$) da partícula incidente pode ser diferente do momento ($p_{q_+} = m\beta^{-1/2}\alpha_+$) da partícula transmitida, desde que $V(-\infty) \neq V(+\infty)$. Para determinar as constantes A_1, A_2 e A_3 , deve-se resolver a equação de Schrödinger em todo espaço e estabelecer condições de contorno na função de onda e sua derivada. Na região onde o potencial não é mais constante, a solução da Eq.(3.2) sob condição de tunelamento ($E < V(q)$) descreve uma função de onda que decai à medida que penetra a barreira, que dependendo da largura existe probabilidade diferente de zero da partícula atravessar.

As funções de onda Eqs.(3.4,3.5) são autofunções do operador momento (\hat{p}) e não descrevem estados fisicamente admissíveis, pois, não são normalizados, mas formam um conjunto completo, essencialmente representam ondas planas que viajam em ambas direções com amplitudes constantes e velocidade de fase igual a metade da velocidade clássica [49]. O significado físico dessas funções são apresentados quando se determina pacotes de ondas resultantes da sobreposição de várias ondas planas de tal maneira que a soma total vai dar uma configuração matemática que é oscilatória, localizada e com velocidade de grupo igual a velocidade clássica, em que esses pacotes só são diferentes de zero numa região finita do espaço. Mostrou-se (p.165,[50]) que a probabilidade de encontrar esses pacotes na região anterior da barreira de potencial é igual ao módulo quadrado das amplitudes das funções de ondas planas, portanto, toda informação sobre o fenômeno de atravessar a barreira está contido nas probabilidades. Com isso, vimos que o coeficiente de transmissão depende da razão dos módulos quadrado das amplitudes, o que justifica o uso das funções Eqs.(3.4,3.5) neste trabalho.

No estudo do tunelamento, interessamo-nos no cálculo da grandeza física chamada coeficiente de transmissão, que depende da forma da barreira de potencial e da energia da partícula, para assim saber se de fato existe uma probabilidade de ocorrer tal fenômeno. Define-se coeficiente de transmissão T da função de onda, como a razão entre a densidade de corrente da função de onda transmitida e a densidade de corrente da onda incidente, ou seja,

$$T = \frac{J_{tra}}{J_{inc}}, \quad (3.6)$$

em que $J(q, \tau)$ é definido por

$$J(q, \tau) = \frac{\hbar}{m} \frac{\beta^{1/2}}{a} \text{Im} [\Psi^*(q, \tau) \partial_q \Psi(q, \tau)], \quad (3.7)$$

a equação da continuidade para a equação de Schrödinger é igual

$$\hbar\beta^{1/2}\partial_\tau\rho(q,\tau) + am\partial_q J(q,\tau) = 0, \quad (3.8)$$

é satisfeita com $\rho(q,\tau)$ sendo

$$\rho(q,\tau) = |\Psi(q,\tau)|^2 = |\Psi(q)|^2, \quad (3.9)$$

definida como uma densidade de probabilidade, constante no tempo, pois a solução da equação de Schrödinger tem a forma

$$\Psi(q,\tau) = \Psi(q) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\eta m}{2}\right)^{1/2}\tau\right], \quad (3.10)$$

na qual a Eq.(3.10) satisfaz a Eq.(3.2) independente do tempo, o que torna as quantidades ρ e J também independentes do tempo. A expressão Eq.(3.8) descreve a lei de conservação, isso implica que $J(q,\tau)$ é independente da posição para estados estacionários. Defini-se também o coeficiente de reflexão como a razão entre a densidade de corrente refletida com a densidade de corrente incidente, na forma

$$R \equiv \frac{J_{refl}}{J_{inc}}, \quad (3.11)$$

cuja soma entre Eq.(3.6) e Eq.(3.11) deve, a priori, obedecer a lei de conservação de probabilidade:

$$R + T = 1. \quad (3.12)$$

Dessa forma, vemos que para calcular o coeficiente de transmissão ou reflexão, devemos conhecer a solução da equação de Schrödinger em todo espaço e relacionar as densidades de corrente da função de onda em cada região. Encontraremos a densidade de corrente das funções Eq.(3.4 e 3.5):

$$J_{-\infty}(q) \equiv \frac{\hbar\beta^{1/2}\alpha_-}{ma} [|A_I|^2 - |A_R|^2], \quad (3.13)$$

$$J_{+\infty}(q) = \frac{\hbar\beta^{1/2}\alpha_+}{ma} |A_T|^2, \quad (3.14)$$

onde a Eq.(3.13) indica a diferença entre a densidade de corrente da onda incidente com a densidade de corrente da onda refletida. A Eq.(3.14) determina a densidade de corrente transmitida, os termos $\alpha_{\mp}\beta^{-1/2}$ representam a velocidade de grupo associada ao pacote de onda na regiões em que $q \rightarrow \mp\infty$. Dessa forma, para encontrar o coeficiente de transmissão, (3.6) precisa-se exclusivamente dos parâmetros α_- , α_+ , A_I e A_T :

$$T(\alpha_-, \alpha_+, A_I, A_T) = \frac{|A_T|^2 \alpha_+}{|A_I|^2 \alpha_-}, \quad (3.15)$$

assim, é dada a representação geral do tunelamento para estados estacionários.

Trabalhos que determinam os estados estacionários do oscilador invertido podem ser encontrados em [9, 1, 51]. Na próxima seção, faremos uma revisão sobre o tunelamento na barreira do OI por meio da solução exata.

3.2 Tunelamento para o oscilador invertido

O potencial correspondente ao OI é dado por

$$V(x) = V_0 - m\omega_0^2 x^2/2,$$

onde V_0 é a altura da barreira.

Por questão de simplicidade nos cálculos seguintes, faremos as substituições

$$\alpha = \frac{V_0 - E}{\omega_0 \hbar}, \quad y = \sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}} x.$$

Cuja equação de Schrödinger pode ser reduzida a seguinte forma:

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \left(\frac{1}{4} y^2 - \alpha \right) \Psi = 0, \quad (3.16)$$

A Eq.(3.16) apresenta solução exata em termos das funções cilíndricas parabólicas de Weber $E(\alpha, y)$ [52]. O comportamento assintótico ($y \gg 1$) de $E(\alpha, y)$ é dado por:

$$E(\alpha, y) \sim \sqrt{\frac{2}{y}} \exp \left[i \left(y^2/4 - \alpha \log y + \phi/2 + \pi/4 \right) \right]. \quad (3.17)$$

Com tal comportamento assintótico, reconhecemos que $E(\alpha, y)$ representa a partícula viajando da esquerda para a direita porque a densidade de corrente $J(y \gg 1, \alpha)$ é positiva. A função de onda Eq.(3.17) não é uma função de onda plana no senso usual, ou seja, ela não apresenta forma $\exp(ikx)$, escolhemos desta maneira $E(\alpha, y)$ função de onda transmitida, as funções $E^*(\alpha, -y)$ e $E(\alpha, -y)$ são respectivamente, incidente e refletida, as quais associamos a região $y < 0$. Então, temos a seguinte solução para Eq.(3.16):

$$\begin{aligned} \Psi_-(y) &= AE^*(\alpha, -y) + BE(\alpha, -y), \quad y < 0, \\ \Psi_+(y) &= CE(\alpha, y), \quad y > 0, \end{aligned}$$

em que A, B e C são constantes.

A densidade de corrente ($J(y)$) pode ser calculada usando a relação do Wroskiano, isto é,

$$W \{ E(\alpha, y), E^*(\alpha, y) \} = -2i,$$

nisso temos a densidade de corrente da função de onda incidente $J_I = |A|^2 \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{m}}$ e transmitida $J_T = |C|^2 \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{m}}$, calculando o coeficiente de transmissão

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2},$$

precisa-se das constantes C e A , as quais são obtidas com a condição de continuidade das funções $\Psi_-(y)$, $\Psi_+(y)$ e suas derivadas $d_y \Psi_-(y)$, $d_y \Psi_+(y)$ no ponto $y = 0$:

$$\begin{aligned} AE^*(\alpha, 0) + BE(\alpha, 0) &= CE(\alpha, 0), \\ AE'^*(\alpha, 0) + BE'(\alpha, 0) &= -CE'(\alpha, 0), \end{aligned}$$

assim, obtemos

$$\frac{C}{A} = \frac{W \{E^*(\alpha, 0), E(\alpha, 0)\}}{2E'(\alpha, 0) E(\alpha, 0)},$$

os valores das funções $E(\alpha, 0)$ e $E'(\alpha, 0)$ são bem definidos [52], expressas da forma

$$E(\alpha, 0) = 2^{-3/4} [\varepsilon^{-1/2} + i\varepsilon^{1/2}] \sqrt{\left| \frac{\Gamma(1/4 + i\alpha/2)}{\Gamma(3/4 + i\alpha/2)} \right|},$$

$$E'(\alpha, 0) = -2^{-1/4} [\varepsilon^{-1/2} - i\varepsilon^{1/2}] \left(\sqrt{\left| \frac{\Gamma(1/4 + i\alpha/2)}{\Gamma(3/4 + i\alpha/2)} \right|} \right)^{-1},$$

ε é dado por

$$\varepsilon = \sqrt{1 + e^{2\pi\alpha}} - e^{\pi\alpha}, \quad 1/\varepsilon = \sqrt{1 + e^{2\pi\alpha}} + e^{\pi\alpha}.$$

O coeficiente de transmissão já pode ser calculado

$$\begin{aligned} T(E) &= \frac{1}{|E'(\alpha, 0) E(\alpha, 0)|^2} = \frac{4}{|[\varepsilon^{-1/2} - i\varepsilon^{1/2}][\varepsilon^{-1/2} + i\varepsilon^{1/2}]|^2} \\ &= \frac{4}{|\varepsilon^{-1} + \varepsilon|^2} = \frac{1}{1 + \exp(2\pi\alpha)} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{2\pi(V_0 - E)}{\omega_0 \hbar}\right)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

O coeficiente de transmissão Eq.(3.18) é devido à solução assintótica, estritamente - é válido para uma parábola que vai a $-\infty$ em ambas direções, esse resultado de tunelamento é utilizado para qualquer nível de energia abaixo do pico da parábola invertida, primeiramente, via método aproximado JWKB, esse coeficiente foi obtido por Kemble (1929), [10]. Dessa maneira, é válido destacar que o problema do tunelamento na barreira do OI a solução exata e semi-clássica coincidem, de maneira que no OI a aproximação JWKB é muito útil.

Quando a diferença de energia é grande ou a barreira de potencial é muito larga, podemos considerar que o fator dominante no tunelamento é

$$T(E) \simeq \exp\left(-\frac{2\pi(V_0 - E)}{\omega_0 \hbar}\right), \quad (3.19)$$

posteriormente, veremos que esse resultado coincide com o resultado Eq.(3.58) por meio da transformação $\beta \rightarrow 2V_0/\hbar\omega_0$.

3.3 Tunelamento para o oscilador invertido truncado

3.3.1 Estados estacionários do OI truncado

A forma geral de um potencial parabólico invertido é dada por

$$V(x) = -\frac{k}{2}x^2 + bx + c, \quad k > 0, b \text{ e } c \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

ese potencial tem a propriedade de ser contínuo nos pontos de truncamento ($x_T = \mp a$)

$$V(a) = V_a, \quad V(-a) = V_{-a} \quad \text{e} \quad V(0) = V_0 \quad (3.21)$$

utilizando as relações da Eq.(3.21) em Eq.(3.20), temos

$$V_T(x) = -\frac{k}{2} \left[x^2 - \frac{(V_a - V_{(-a)})x + 2aV_0}{2V_0 - V(a) - V(-a)} a \right] \Theta(a - |x|) + V_a \Theta(x - a) + \Theta(-x - a) V_{(-a)} \quad (3.22)$$

o potencial Eq.(3.22) representa o caso geral de uma parábola invertida, para $x < -a$ tem-se a região do potencial constante $V_{(-a)}$, quando $x > a$ existe outra região de potencial constante V_a e na região $|x| \leq a$ tem-se o potencial parabólico invertido.

Analisaremos os estados estacionários de uma partícula submetida ao oscilador inverso truncado, representado na Fig. 6 (escolhemos $V(a) = -V_3$ e $V(-a) = 0$), quando $V_3 = 0$ caímos no caso simétrico

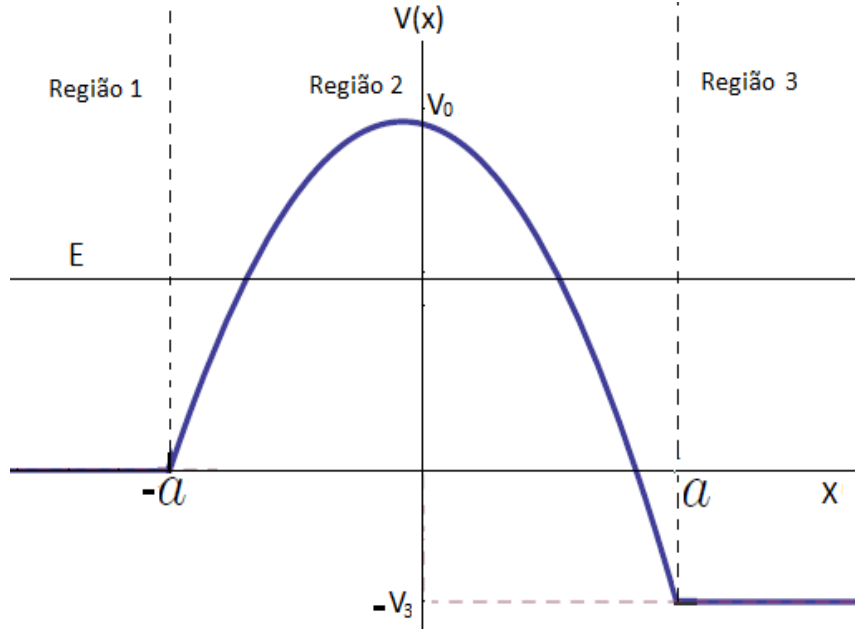


Fig. 6.: Potencial parabólico truncado.

s

na região 2 tem-se o potencial parabólico sendo k uma constante fixa e V_0 é selecionado de modo que potencial seja contínuo nos pontos de truncamento ($x = \mp a$), o que implica diretamente que quando muda a largura, altera a altura, então temos

$$V_T(x) = \left[-\frac{k}{2} (x^2 - a^2) - \frac{V_3}{2} \left(\frac{x}{a} + 1 \right) \right] \Theta(a - |x|) - V_3 \Theta(x - a), \quad (3.23)$$

O hamiltoniano do sistema tem forma

$$H_T = H_L + V_T, \quad (3.24)$$

em que H_L é o hamiltoniano da partícula livre, resolveremos a equação Schrödinger independente do tempo em todo espaço para determinar os estados estacionários (faremos nas variáveis q)

$$d_q^2 \Psi(q) + \beta \left(\eta - \frac{V(q)}{V_0} \right) \Psi(q) = 0,$$

temos como solução geral nas três regiões a seguinte função de onda:

$$\Psi(q) = \Psi_1(q) \Theta(-q - \beta^{1/2}) + \Psi_2(q) \Theta(\beta^{1/2} - |q|) + \Psi_3 \Theta(q - \beta^{1/2}),$$

onde os subíndices 1, 2 e 3 denotam cada região do espaço. Consideremos que a partícula incidente esteja na região 1, vindo de $q \rightarrow -\infty$ em direção a barreira de potencial (movendo-se para a direita), com energia $E < V_0$ e momento $p_{q1} = m\alpha_-\beta^{-1/2}$ cuja solução é uma onda plana incidente ($A_1 \exp(i\alpha_-/\beta^{1/2}q)$) que vem de $-\infty$ com amplitude A_1 e devido à presença da barreira de potencial tem-se a onda refletida ($B_1 \exp(-i\alpha_-/\beta^{1/2}q)$) com amplitude B_1 com mesma energia E e momento com sinal oposto $-p_{q1}$, então a forma geral para $\Psi_1(q)$ é

$$\Psi_1(q) = A_1 \exp(i\alpha_-q/\beta^{1/2}) + B_1 \exp(-i\alpha_-q/\beta^{1/2}), \quad q < -\beta^{1/2}, \quad (3.25)$$

em que $\alpha_- = \beta\eta^{1/2}$. Na região 3 ($q > \beta$), tem-se a partícula transmitida com energia $E = \frac{p_3^2}{2m} - V_3$ e momento $p_{q3} = m\alpha_+\beta^{-1/2}$, em virtude da presença do potencial constante $-V_3$ a partícula possui energia cinética diferente da região 1, é útil impor a condição de contorno do potencial, sendo que na região 3 tem-se a função de onda propagando-se para a direita, então a função de onda transmitida $\Psi_3(q)$ é igual a

$$\Psi_3(q) = A_3 \exp(i\alpha_+q/\beta^{1/2}), \quad q > \beta^{1/2}. \quad (3.26)$$

$$\alpha_+ = \beta\sqrt{[\eta + V_3/V_0]} \quad (3.27)$$

sendo A_3 amplitude de transmissão e $\alpha_+ = \beta\sqrt{[\eta + V_3/V_0]}$.

Na região de truncamento ($|q| < \beta^{1/2}$), a equação de Schrödinger tem a seguinte estrutura:

$$d_q^2 \Psi(q) + \left(q + \frac{\beta^{1/2}V_3}{4V_0}\right)^2 \Psi(q) + \beta \left(\eta - 1 - \frac{V_3^2}{16V_0^2}\right) \Psi(q) = 0,$$

realizando a mudança de variável

$$\varkappa = \left(q + \beta^{1/2}V_3/4V_0\right) \quad (3.28)$$

temos

$$d_\varkappa^2 \Psi(\varkappa) + \varkappa^2 \Psi(\varkappa) + \bar{E} \Psi(\varkappa) = 0, \quad (3.29)$$

onde o parâmetro adimensional \bar{E} é igual a

$$\bar{E} = \beta \left(\eta - 1 - \frac{V_3^2}{16V_0^2}\right), \quad (3.30)$$

expressando (veja [51]) a função de onda $\Psi_2(\varkappa)$ na forma :

$$\Psi_2(\varkappa) = e^{-i\varkappa^2/2} \chi(\varkappa), \quad (3.31)$$

e substituindo em Eq.(3.29), concluímos que a função $\chi(\varkappa)$ obedece a equação diferencial de Kummer [35], dessa maneira, temos como solução geral:

$$\begin{aligned} \Psi_2(q) &= A_2 u_1(q) + B_2 u_2(q) \\ &= A_2 e^{-i(q+\beta^{1/2}V_3/4V_0)^2/2} {}_1F_1 \left[1/4 + i\bar{E}/4; 1/2; i \left(q + \beta^{1/2}V_3/4V_0\right)^2 \right] \\ &\quad + B_2 e^{-i(q+\beta^{1/2}V_3/4V_0)^2/2} \left(q + \beta^{1/2}V_3/4V_0\right) {}_1F_1 \left[3/4 + i\bar{E}/4; 3/2; i \left(q + \beta^{1/2}V_3/4V_0\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

em que ${}_1F_1(\alpha; b, z)$ é a função hipergeométrica confluyente.

Faz-se necessário definir os pontos de truncamento na variável adimensional q , chamamos q_E o ponto para $x = -a$ (esquerda da barreira) e q_D o ponto para $x = a$ (direita da barreira):

$$q_E = -q_D = -\beta^{1/2}. \quad (3.33)$$

Utilizando o fato das funções de onda Eqs.(3.25,3.26,3.32) e suas derivadas serem contínuas nos pontos de truncamento $q = q_E$ e $q = q_D$, temos o sistema de equações:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \exp\left(i\alpha_- q_E / \beta^{1/2}\right) + A_2 \exp\left(-i\alpha_- q_E / \beta^{1/2}\right) &= A_2 u_1(q_E) + B_2 u_2(q_E) \\ i\left(\alpha_- / \beta^{1/2}\right) \left\{ A_1 \exp\left(i\alpha_- q_E / \beta^{1/2}\right) - A_2 \exp\left(-i\alpha_- q_E\right) \right\} &= A_2 u'_1(q_E) + B_2 u'_2(q_E) \\ A_3 \exp\left(i\alpha_+ q_D / \beta^{1/2}\right) &= A_2 u_1(q_D) + B_2 u_2(q_D) \\ i\left(\alpha_+ / \beta^{1/2}\right) A_3 \exp\left(i\alpha_+ q_D / \beta^{1/2}\right) &= A_2 u'_1(q_D) + B_2 u'_2(q_D) \end{aligned} \right\}, \quad (3.34)$$

então, determina-se os estados estacionários do sistema físico Eq.(3.24). Essas soluções serão utilizadas no cálculo do coeficiente de transmissão (tunelamento) na próxima secção.

3.3.2 Coeficiente de transmissão exato

A densidade de corrente Eq.(3.7) associada a cada região é dada por

$$J_1(q) = \frac{\hbar\beta^{1/2}\alpha_-}{am} (|A_1|^2 - |B_1|^2), \quad q < q_E, \quad (3.35)$$

$$J_2(q) = \hbar W_r(u_1, u_2) \operatorname{Im}(A_2^* B_2), \quad q_E \leq q \leq q_D, \quad (3.36)$$

$$J_3(q) = \frac{\hbar\beta^{1/2}\alpha_+}{am} |A_3|^2, \quad q > q_D, \quad (3.37)$$

em que W_r é o wroskiano dado por

$$W_r = [u'_2(q)u_1(q) - u'_1(q)u_2(q)] \quad (3.38)$$

as densidades de corrente J_1, J_2 e J_3 são conservadas na direção q , isto é,

$$J_1 = J_2 = J_3,$$

a Eq.(3.35) expressa a diferença entre a densidade de corrente da função de onda incidente com a função de onda refletida, isto é,

$$J_1 = J_{inc} - J_{ref},$$

observe que o momento tem sinal oposto, indicando a reflexão da função de onda. A Eq.(3.37) expressa a densidade de corrente da função de onda transmitida. Calcula-se o coeficiente de transmissão Eq.(3.15) pela razão entre as constantes A_3 e A_1 :

$$T(\alpha_-, \alpha_+, \eta) = \frac{|A_3|^2 \alpha_+}{|A_1|^2 \alpha_-}, \quad (3.39)$$

como vimos, as constantes são determinadas por meio das condições de contorno Eq.(3.34), em que eliminamos as constantes A_2 e B_2 , e - de acordo com o apêndice 1 - encontramos o seguinte resultado:

$$T(\beta, \eta) = \frac{\alpha_+}{\alpha_-} \left| \frac{2 \exp(-i\alpha_-) \det(\mathbf{M}_q) \exp(-i\alpha_+) i\alpha_+ / \beta^{1/2}}{\gamma(\beta) + \tilde{\gamma}(\beta)} \right|^2, \quad (3.40)$$

$$\gamma(\beta) = \left[u_1(-\beta^{1/2}) + \frac{\beta^{1/2}}{i\alpha_-} u_1'(-\beta^{1/2}) \right] \left[u_2'(\beta^{1/2}) - u_2(\beta^{1/2}) i \frac{\alpha_+}{\beta^{1/2}} \right],$$

$$\tilde{\gamma}(\beta) = \left[u_2(-\beta^{1/2}) + \frac{\beta^{1/2}}{i\alpha_-} u_2'(-\beta^{1/2}) \right] \left[-u_1'(\beta^{1/2}) + i \frac{\alpha_+}{\beta^{1/2}} u_1(\beta^{1/2}) \right],$$

no qual, a matriz \mathbf{M}_q definida por (Eq.(A.5), apêndice 1):

$$\mathbf{M}_q = \begin{pmatrix} u_1(\beta^{1/2}) & u_2(\beta^{1/2}) \\ \frac{u_1'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} & \frac{u_2'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

a expressão Eq.(3.40) representa o coeficiente de transmissão para soluções exatas da equação de Schrödinger e pode ser utilizado para qualquer nível (η) de energia correspondente a altura da barreira de potencial, T depende exclusivamente de α_- , α_+ e $\beta^{1/2}$. Formalmente, o problema de tunelamento está analiticamente resolvido pelo uso das funções de onda e suas derivadas nos pontos de truncamento.

Afim de comparar com resultados da literatura, em que, geralmente, a barreira parabólica truncada é simétrica, vamos considerar $V_3 = 0$, o que implica

$$\alpha_+ = \alpha_-,$$

e as funções de onda $u_1(q)$ e $u_2(q)$ Eq.(3.32) possuem paridade definida

$$u_1(-q) = u_1(q), \quad u_2(-q) = -u_2(q), \quad (3.42)$$

e são reais

$$u_1(q) = u_1^*(q) \quad \text{e} \quad u_2(q) = u_2^*(q), \quad (3.43)$$

além disso, o $\det(\mathbf{M}_q) = \frac{\beta^{1/2}}{i\alpha_+} W_r(u_1, u_2) = \frac{\beta^{1/2}}{i\alpha_+}$, ([51]), usando as Eqs.(3.42 e 3.43) simplificaremos a expressão Eq.(3.40) para

$$T(\beta, \eta) = \frac{\beta\eta}{\left| \left[u_2'(\beta^{1/2}) - i\beta^{1/2}\eta^{1/2}u_2(\beta^{1/2}) \right] \left[i\beta^{1/2}\eta^{1/2}u_1(\beta^{1/2}) - u_1'(\beta^{1/2}) \right] \right|^2}, \quad (3.44)$$

A expressão acima mostra que o tunelamento depende apenas de η e β e do comportamento das funções de onda e suas derivadas nos pontos de truncamento

$$u_1'(q) = -iqu_1(q) + i(1 + i\bar{E})q \exp\left(-i\frac{q^2}{2}\right) {}_1F_1\left(5/4 + i\bar{E}/4; 3/2; iq^2\right),$$

$$u_2'(q) = \frac{1}{3} \exp\left(-i\frac{q^2}{2}\right) \left[(3 - 3iq^2) {}_1F_1\left(3/4 + i\bar{E}/4; 3/2; iq^2\right) \right. \\ \left. - q^2(-3i + \bar{E}) {}_1F_1\left(7/4 + i\bar{E}/4; 5/2; iq^2\right) \right],$$

$$d_q \left[{}_1F_1(a; b; iq^2) \right] = {}_1F_1(1 + a; 1 + b; iq^2) 2iaq/b,$$

como sabemos η corresponde a relação entre a energia (E) da partícula incidente com a altura (V_0) da barreira de potencial e β corresponde diretamente com a largura ($2a$) e altura da barreira, cuja escolha é arbitrária, entretanto, busca-se relacionar uma com a outra, isto é, $V_0 = k\frac{a^2}{2}$.

Observaremos o comportamento de $T(\beta, \eta)$ quando mantemos fixo β e variamos η na figura (Fig 7):

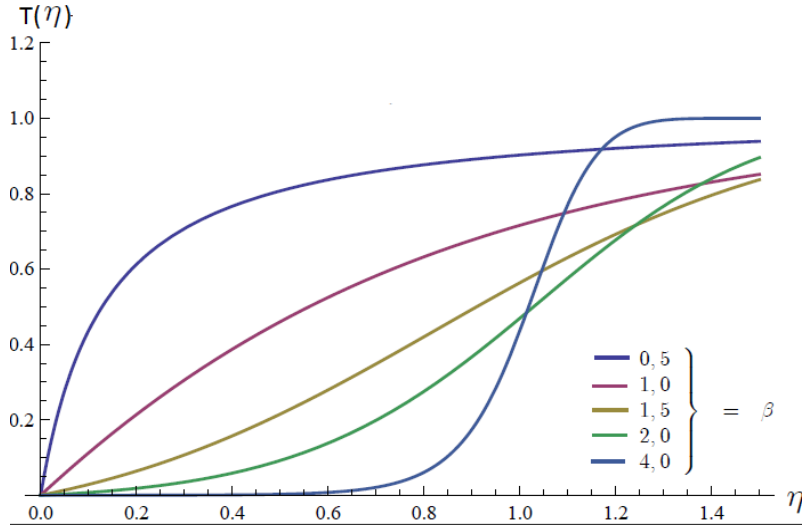


Fig 7.: Coeficiente de transmissão $T(\eta)$ para diferentes valores de β .

A grandeza adimensional $\beta = \left(a^2 \frac{\sqrt{mk}}{\hbar}\right)$ permite (para k fixo) fazer uma correspondência direta com a largura da barreira (veja Eq. 3.3). O gráfico acima mostra que a probabilidade de tunelamento é maior quando β é pequeno, pois, possibilita que a partícula incidente possa atravessar a barreira mesmo com energia bem abaixo de V_0 , da ordem de $\eta \simeq 0,1$, a medida que β aumenta o intervalo de energia possível vai diminuindo, por exemplo, para $\beta = 4$ tem-se tunelamento somente no intervalo $0,6 \lesssim \eta \leq 1$. É interessante observar que existe probabilidade de reflexão da partícula quando $\eta > 1$, algo que não acontece na física clássica.

Analisaremos o que acontece quando mantemos η fixo e variamos β , na figura (Fig.8):

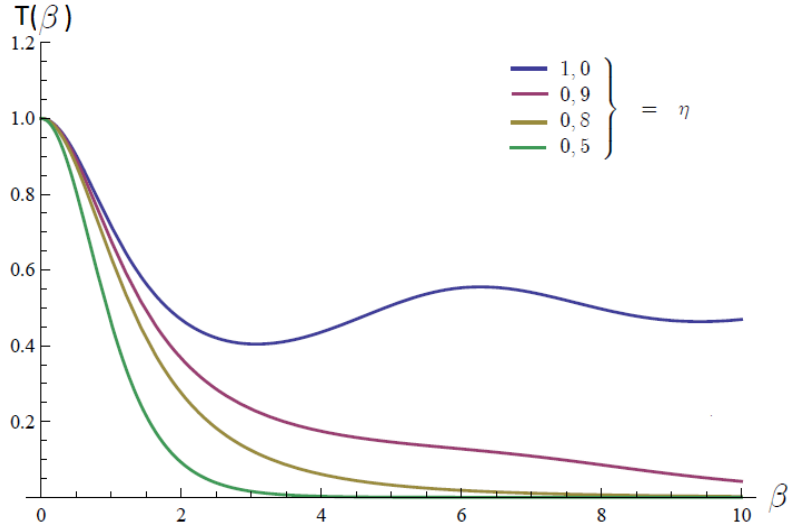


Fig.8.: Coeficiente de transmissão $T(\beta)$ para diferentes valores de η .

Podemos ver que na Fig.8 que a curva azul ($\eta = 1$) é a que melhor representa a probabilidade de tunelar, isto porque a energia da partícula (E) é igual ao topo (V_0), embora $E = V_0$ existam flutuações do coeficiente de transmissão com a variação de β , pois, para β pequeno (< 2) existe probabilidade de transmissão maior que 0,5, a medida que a largura aumenta $T(\beta \gg 1, \eta = 1)$ tende a 1/2. Quando a energia da partícula incidente diminui, em relação à altura da barreira a probabilidade de transmissão também decai, resultado este que está de acordo com as previsões de tunelamento.

É importante destacar que a expressão Eq.(3.44) apresenta tunelamento para qualquer nível de energia, sendo neste caso um resultado geral. Para observar a correspondência do nosso resultado com o trabalho de Bell [13], assumiremos $\eta = 1$ no coeficiente de transmissão Eq.(3.44), no qual determinaremos a expressão analítica de $T(\eta = 1, \beta)$ ao fazer a substituição da função hipergeométrica ${}_1F_1(a; b; q)$ pela função de Bessel de primeira espécie $J_\nu(\zeta)$, ([52]):

$${}_1F_1\left(v + \frac{1}{2}, 2v + 1, \zeta\right) \exp(-\zeta/2) = \frac{J_\nu(-i\zeta/2) \Gamma(v + 1)}{(\zeta/4i)^v},$$

assumindo valores de $v = \mp 1/4$ para as funções de onda $u_1(q)$ e $u_2(q)$ e usando as seguintes propriedades das funções Gama

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + n\right) = \frac{(4n - 3)!}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \text{ e } \Gamma(x) \Gamma(1 - x) = \pi / \sin(\pi x),$$

chegamos a:

$$T(\eta = 1, \beta) = \frac{16 \sin^2(\pi/4)}{\pi^2 \beta^2 \left\{ J_{3/4}^2\left(\frac{1}{2}\beta\right) + J_{-1/4}^2\left(\frac{1}{2}\beta\right) \right\} \left\{ J_{-3/4}^2\left(\frac{1}{2}\beta\right) + J_{1/4}^2\left(\frac{1}{2}\beta\right) \right\}}.$$

Destacamos que obtemos o valor exato nessa barreira de potencial para qualquer nível de energia. Isto será útil para trabalhos futuros em sistemas físicos que sejam modelados por este tipo de barreira,

como exemplo, o trabalho de Hansen [12] que estuda o tunelamento de elétrons em estruturas feitas de metal-isolante-metal, no qual determina curvas de corrente-voltagem através de um resultado aproximado do coeficiente de transmissão.

3.4 Tunelamento utilizando Estados Semi-clássicos (JWKB)

Um método muito útil para encontrar a solução aproximada é a descrição semi-clássica. Aplica-se quando os comprimentos de onda de Broglie das partículas são pequenos em comparação com as características dimensionais L que determinam as condições de um dado problema, comumente chamados de aproximação JWKB, em homenagem a Jeffreys, Wentzel, Kramers e Brillouin [53] por terem sido os primeiros a aplicarem este método em problemas de mecânica quântica, isto porque alguns problemas que apresentam um potencial tal que $E - V(q) = f(q)$ se torna necessário recorrer para esta ferramenta devido à dificuldade de encontrar a solução exata da equação de Schrödinger, exceto alguns casos como do oscilador harmônico/invertido, potencial linear, potencial de Eckart, e outros. Embora o OI permita solução exata Eq.(3.32), descreveremos os estados semiclássicos e determinaremos o coeficiente de transmissão, afim de comparar a relação com a solução exata Eq.(3.40), pois este método é amplamente utilizado na literatura em problemas de tunelamento [15, 55, 47], e - em alguns casos - faremos uma correspondência clássica com algumas grandezas de um sistema físico.

3.4.1 Aspecto geral

Considere uma partícula com energia E movendo-se sob ação de um potencial $V(q)$, num estado estacionário do sistema. Supondo que queremos resolver a equação-unidimensional de Schrödinger independente do tempo

$$d_q^2 \Psi(q) + \beta \left(\eta - \frac{V(q)}{V_0} \right) \Psi(q) = 0, \quad (3.45)$$

a solução (considerando normalizada) assume a forma geral

$$\Psi(q) = e^{(i/\hbar)\varphi(q)}, \quad (3.46)$$

$\varphi(q)$ é a função associada a fase e está relacionada com a *ação* do sistema, substituindo a Eq.(3.46) na equação de Schrödinger Eq.(3.45) para uma partícula, temos

$$[\varphi'(q)]^2 - i\hbar\varphi''(q) = \beta\hbar^2 \left(\eta - \frac{V(q)}{V_0} \right) \quad (3.47)$$

a equação acima é também conhecida como a *equação diferencial de Riccati*, expandindo a fase $\varphi(q)$ em série de \hbar :

$$\varphi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (\hbar/i)^n \varphi_n(q), \quad (3.48)$$

considerando apenas o primeiro termo ($n = 0$) da expansão Eq.(3.48) na equação Eq.(3.47) e assumindo que

$$\left| \frac{\hbar\varphi''(q)}{\varphi'^2(q)} \right| \ll 1, \quad (3.49)$$

tem-se como solução

$$\varphi_0(q) = \pm \hbar \int \sqrt{\beta \left(\eta - \frac{V(q)}{V_0} \right)} dq,$$

onde $m\sqrt{\beta \left(\eta - \frac{V(q)}{V_0} \right)}$ corresponde ao momento clássico $p(q)$. A condição Eq.(3.49) utilizada para determinar $\varphi_0(q)$ é a condição de validade da aproximação JWKB, que relaciona fisicamente a pequena variação do comprimento de onda $\lambda(q) = \frac{m a 2\pi \hbar}{\hbar \beta^{1/2} p(q)}$ de De Broglie, isto é,

$$\left| \frac{m}{\hbar} \frac{d}{dq} \left(\frac{\hbar}{p(q)} \right) \right| \ll 1, \quad (3.50)$$

a expressão acima mostra que a variação do comprimento de onda da partícula deve variar lentamente sob a distância considerada, de forma equivalente, podemos escrever a Eq.(3.50)

$$\frac{m^4 a}{\beta^{1/2} \hbar^2} \frac{|F|}{|p|^3} \ll 1, \quad F = -\frac{dU}{dq} \frac{a}{\beta^{1/2}},$$

um fato importante é que a Eq.(3.49) torna-se inaplicável quando o momento ($p(q)$) for muito pequeno, dessa forma, estabelece-se que o potencial $V(q)$ deve variar de maneira suave e lenta para que o método JWKB seja aplicado.

Explorando o próximo termo ($n = 1$) de Eq.(3.48) na Eq.(3.47), temos a seguinte relação

$$p(q) \varphi_1'(q) + \frac{1}{2} p'(q) = 0, \quad (3.51)$$

integrando, obtém-se

$$\varphi_1(q) = -\frac{1}{2} \ln(p) + const,$$

dessa maneira, a função de onda semi-clássica Eq.(3.46) possui a seguinte forma geral

$$\Psi(q) = \frac{C_1}{\sqrt{p(q)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int p(q') dq'\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p(q)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int p(q') dq'\right), \quad (3.52)$$

que satisfaz a equação de Schrodinger para primeira ordem em \hbar , onde C_1 e C_2 são constantes, o primeiro termo da Eq.(3.52) indica função de onda movendo-se para a direita (+) e o segundo para a esquerda (-). A densidade de probabilidade da função JWKB Eq.(3.52) é

$$|\Psi_{\pm}(q)|^2 \propto \frac{1}{p(q)},$$

cuja expressão mostra que é inversamente proporcional ao momento clássico. Algo semelhante acontece com a distribuição clássica, sendo proporcional à duração do tempo ($d\tau$) que a partícula passa num intervalo dq , ou seja, inversamente proporcional à velocidade $\rho_{clás} \propto \frac{1}{v(q)}$, de certa forma, pode-se afirmar que a probabilidade das funções de onda JWKB de encontrar uma partícula num intervalo q a dq também é proporcional ao inverso da velocidade clássica, $1/v(q) \propto [E - V(q)]^{-1/2}$, discussões dessa natureza com diferentes sistemas físicos são encontradas em [54].

Podemos explorar termos de ordem \hbar^2 (ou para $n = 2$) em Eq.(3.48), o que leva a equação

$$\varphi_0'(q) \varphi_2'(q) + \frac{1}{2} [\varphi_1'(q)]^2 + \frac{1}{2} \varphi_1''(q) = 0,$$

cuja solução de $\varphi_2(q)$ é

$$\varphi_2(q) = \frac{1}{4}mp'/p^2 + \frac{1}{8}m^2 \int (p'^2/p^3) dq,$$

então, para $n = 2$ a função de onda JWKB assume a forma

$$\Psi(q) = \frac{const}{\sqrt{p(q)}} \left\{ 1 - i\hbar \left[\frac{1}{4}mp'/p^2 + \frac{1}{8}m^2 \int (p'^2/p^3) dq \right] \right\} \exp\left(\frac{i}{m} \int p(q') dq'\right),$$

no entanto, o termo $\varphi_2(q)$ é muito pequeno e no geral é desprezado no estudo das funções de onda semi-clássicas, sem perda de generalidade assumiremos $\varphi_n(q) = 0$ para $n \geq 2$ [15].

Em todos os problemas de tunelamento, a quantidade $E - U(q)$ muda de sinal. Quando $E > U(q)$ a solução Eq.(3.52) tem comportamento oscilatório, na situação de $E = U(q)$ a função de onda Eq.(3.52) tem singularidade devido ao momento $p(q) = 0$, e na região classicamente inacessível ($E < U$) tem-se expoentes reais, pois o momento se torna imaginário $p(q) = i|p(q)|$ e a função de onda amortece, desse modo, escrevemos Eq.(3.52) na região classicamente proibida da seguinte forma:

$$\Psi(q) = \frac{C_1}{\sqrt{|p(q)|}} \exp\left(-\frac{1}{m} \int |p(q')| dq'\right) + \frac{C_2}{\sqrt{|p(q)|}} \exp\left(\frac{1}{m} \int |p(q')| dq'\right), \quad \eta < 1, \quad (3.53)$$

à medida que a partícula penetra na barreira, faz sentido apenas considerar o termo decrescente da função de onda, uma vez que diminui a probabilidade de penetração.

3.4.2 Oscilador invertido truncado

Agora encontraremos soluções JWKB para uma partícula submetida ao potencial do OI truncado Eq.(3.23), move-se da esquerda (embora como sabemos o coeficiente de transmissão independe da direção do movimento da partícula) para a direita com energia E , a função de onda JWKB tem a forma geral dada pela Eq.(3.52), como sabemos as funções JWKB são válidas para pequena variação do comprimento de onda, estabelecido na Eq.(3.50), então:

$$\left| \frac{[qka^2 + V_3\beta^{1/2}/2]}{2V_0 \left[\beta \left(\eta - \frac{k}{2V_0} (q^2a^2\beta^{-1} - a^2) + \frac{V_3}{2V_0} \left(\frac{qa\beta^{-1/2}}{a} + 1 \right) \right) \right]^{3/2}} \right| \ll 1,$$

vemos que para a condição acima ser válida é necessário que $|q|$ seja grande (veja [15]) para qualquer valor de E , o que implica diretamente na expansão do momento $p(q)$:

$$\frac{p(q)}{m} = \left[\left(q + \frac{\beta^{1/2}V_3}{2ka^2} \right) \sqrt{\frac{ka^2}{2V_0}} + \frac{\epsilon ka^2}{(2qka^2 + \beta^{1/2}V_3)} \right],$$

onde definimos o parâmetro ϵ por

$$\epsilon = \left[\frac{\beta V_3}{2V_0} - \frac{ka^2}{2V_0} \left(\frac{\beta^{1/2}V_3}{2ka^2} \right)^2 - \frac{k\beta a^2}{2V_0} + \beta\eta \right] \sqrt{\frac{2V_0}{ka^2}},$$

Cuja integral $\int p(q') dq'$ é aproximadamente igual a

$$\frac{1}{m} \int p(q') dq' = \left[\left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right)^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ka^2}{2V_0}} + \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right) \right] + const, \quad (3.54)$$

vamos aproximar $\frac{1}{\sqrt{p(q)}}$ para

$$\frac{1}{\sqrt{p(q)}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right)^2 \frac{ka^2}{2V_0}}},$$

o que faz a função JWKB ter a seguinte estrutura :

$$\begin{aligned} \Psi_{II}^{JWKB}(q) &= \frac{C_1}{\sqrt{\left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right)^2}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[\left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right)^2 \sqrt{\frac{ka^2}{2V_0}} + \varepsilon \ln \left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{C_2}{\left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right)^2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[\left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right)^2 \sqrt{\frac{ka^2}{2V_0}} + \varepsilon \ln \left(q + \frac{\beta^{1/2} V_3}{2ka^2} \right) \right] \right\} \\ &= C_1 u_1^{JWKB}(q) + C_2 u_2^{JWKB}(q). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Solução JWKB na região $V = 0$

A aproximação de estados JWKB para potencial constante tem autofunções cuja forma é de ondas planas, o momento da partícula é bem definido $m\sqrt{\beta\eta}$,

$$\Psi_I^{WKB}(q) = a_1 \exp \left(i\beta^{1/2} \eta^{1/2} q \right) + b_1 \exp \left(-i\beta^{1/2} \eta^{1/2} q \right), \quad (3.56)$$

onde as constantes a_1 e b_1 independem de q . Como sabemos, na Eq.(3.56) o primeiro termo representa onda incidente e o segundo onda refletida. Da mesma forma, faremos para a região 3 ($V = -V_3$), em que consideramos somente ondas transmitidas, cuja função é

$$\Psi_{III}^{JWKB}(q) = a_3 \exp \left(i\sqrt{\beta \left(\eta + \frac{V_3}{V_0} \right) q} \right),$$

sendo a_3 uma constante. Por último, na região sob ação do potencial invertido ($|q| \leq \beta^{1/2}$) temos a Eq.(3.55). Considerando que as funções de onda JWKB e suas derivadas são contínuas nos pontos

de truncamento ($\pm\beta^{1/2}$.) encontramos o seguinte resultado do coeficiente de transmissão:

$$T_{JWKB} = \left| \frac{2 \left[u_1^{JWKB}(\beta^{1/2}) u_2^{JWKB'}(\beta^{1/2}) - u_2^{JWKB}(\beta^{1/2}) u_1^{JWKB'}(\beta^{1/2}) \right]}{\{\gamma_{JWKB}(\beta) + \tilde{\gamma}_{JWKB}(\beta)\} i \left[\left(\eta + \frac{V_3}{V_0} \right) \beta \right]^{1/2}} \right|^2 \frac{\alpha_+}{\alpha_-},$$

$$\gamma_{JWKB}(\beta) = \left[u_1^{JWKB}(-\beta^{1/2}) + \frac{u_1^{JWKB'}(-\beta^{1/2})}{i\beta^{1/2}\eta^{1/2}} \right] \left[\frac{u_2^{JWKB'}(\beta^{1/2})}{i \left[\beta \left(\eta + \frac{V_3}{V_0} \right) \right]^{1/2}} - u_2^{JWKB}(\beta^{1/2}) \right],$$

$$\tilde{\gamma}_{JWKB}(\beta) = \left[u_2^{JWKB}(-\beta^{1/2}) + \frac{u_2^{JWKB'}(-\beta^{1/2})}{i\beta^{1/2}\eta^{1/2}} \right] \left[-\frac{u_1^{JWKB'}(\beta^{1/2})}{i \left[\beta \left(\eta + \frac{V_3}{V_0} \right) \right]^{1/2}} + u_1^{JWKB}(\beta^{1/2}) \right].$$

Quando a barreira é simétrica, isto é $V_3 = 0$, encontramos

$$T_{JWKB} = \frac{[\beta [4\beta + 2\beta(\eta - 1)]]^2}{\left\{ \left[2\beta^2(\eta + 1) + \frac{1}{4} + \left(\frac{\beta(\eta-1)}{2} \right)^2 \right] \exp\left(-\frac{1}{2}\pi\beta(\eta - 1)\right) - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{\beta(\eta-1)}{2} \right)^2 \right] \exp\left(\frac{1}{2}\pi\beta(\eta - 1)\right) \right\}^2}, \quad (3.57)$$

representaremos o comportamento gráfico de Eq.(3.57) da mesma forma que fizemos para as soluções exatas na secção anterior:

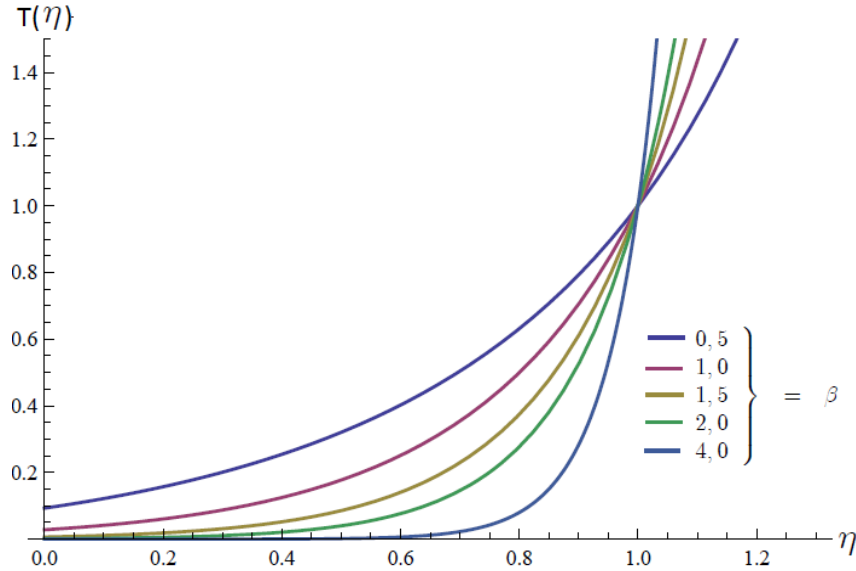


Fig.9.: Gráfico do coeficiente de transmissão em função de E/V_0 para diferentes valores de β .

o gráfico (Fig.9) mostra como o coeficiente de transmissão semiclassical comporta-se quando a energia da partícula incidente se aproxima ou se afasta de V_0 . Observe que na situação $E = V_0$ o coeficiente se aproxima de 1, isso significa que há transmissão total, negligenciando a reflexão da partícula, o que não acontece com valor exato (a menos que $\beta \ll 1$). As curvas que melhor descrevem T^{JWKB} são

aquelas em que β é maior, ou seja, para barreira de potencial larga. Por exemplo, quando $\beta = 4$ o intervalo de tunelamento ($0,6 \lesssim \eta \leq 1$), semelhante ao caso exato da Fig 7., A descrição semiclássica para tunelamento é mais adequada quando a energia da partícula incidente é muito menor que o topo da barreira. Notamos também que o coeficiente de transmissão T^{JWKB} torna-se inaplicável para $\eta > 1$, porque supera a unidade.

Analisaremos a Fig.10 $T(\beta)$ para diferentes valores de energia.

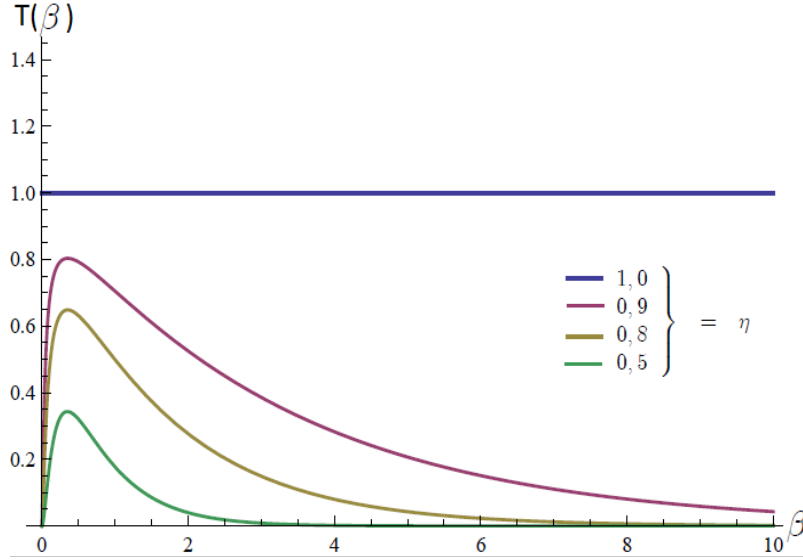


Fig.10.: Gráfico do coeficiente de transmissão semi-clássico em função de β para diferentes valores de η .

De imediato, vemos que - quando a energia da partícula incidente é igual ao topo - o coeficiente de transmissão é igual a 1, quando $\eta < 1$ e $\beta \simeq 0$ o coeficiente se aproxima de zero, mais uma vez está em desacordo com o resultado exato que estabelece $T \simeq 1$, como dissemos, a aproximação semiclássica é útil quando $\beta > 1$ e $\eta < 1$.

Podemos tomar β grande na Eq.(3.57), cujo resultado é

$$T_{JWKB} = \exp(-\pi\beta(\eta - 1)), \quad (3.58)$$

o que está de acordo com a literatura.

O efeito combinado da largura e da altura da barreira de potencial faz a Eq.(3.58) aumentar ou diminuir, contudo, é verdade que, em condições de a largura tornar-se muito grande, o coeficiente T_{JWKB} tende a cair. Sendo assim, podemos fazer uma relação direta com o valor determinado na barreira de potencial infinita Eq.(3.19).

Capítulo 4

Considerações Finais

Nesta dissertação de mestrado, mostramos o perfil clássico e quântico do movimento da partícula submetida ao OI truncado e não truncado. Vimos que classicamente obtendo as soluções da equação do movimento determinamos completamente o sistema físico, cujas trajetórias clássicas são classificadas de acordo com a energia da partícula. No capítulo 2, utilizamos o método [34] de Malkin-Manko adaptado para sistemas de espectro contínuo, cujas propriedades dos ECG são iguais aos estados comprimidos, sendo possível encontrar, dentre outras coisas, as dispersões do operador momento e posição de forma explícita. O princípio da correspondência na mecânica quântica estabelece que alguns estados quânticos podem ter características clássicas. Vimos que os ECG obtidos são reconhecidos como pacotes de onda gaussianos que se movem sob trajetórias clássicas e minimizam a relação de incerteza Schrödinger–Robertson em qualquer tempo, entretanto, as dispersões da posição e momento aumentam com o tempo. Fizemos uma importantíssima conexão entre sistemas físicos diferentes, por meio da variável ω , que mesmo em sistema de espectro discreto (OH) foi possível relacionar com os ECG do OI e partícula livre, e também encontramos os fundamentais ECs de Schrödinger/Glauber. Com esses novos resultados submetemos um artigo [62].

Nos problemas ponderados, nossa construção foi baseada no simples fato de que o espaço de Hilbert é separável de modo que existe uma base discreta do tipo oscilador. Todavia, isso não contradiz o fato de considerarmos sistemas com espectro contínuo. Então, mesmo para sistemas de espectro contínuo, podemos sempre construir um conjunto completo e discreto da solução da equação de Schrödinger e usá-lo por analogia com a construção de Glauber para encontrar a mesma espécie de estados coerentes. De fato, nossa construção está muito próxima daquela que foi utilizada por Dodonov e Man’ko na construção de EC para sistemas quadráticos não estacionários.

Gostaríamos de comparar nossa construção dos ECG com os ECs construídos por Barton no trabalho [9], cujo objetivo principal é dedicado à mecânica quântica do potencial OI. Neste trabalho, Barton define ECs pela ação do operador deslocamento (que não coincide com operador (2.41) nos estados estacionários do hamiltoniano da partícula sob o potencial do OI. Como resultado, tais ECs não são normalizados e existem dificuldades na prova de sua completeza. A construção de Barton é essencialmente melhorada no trabalho de Klauder e coautores [56]. Esses autores construíram ECs pela ação do operador deslocamento em algumas combinações de estados estacionários de quadrado-integrável, cuja escolha dessas combinações desempenha um papel de regularização, em que os estados ECs já são normalizados, forma um sistema de conjunto completo. Esta última abordagem tem infinitas possibilidades para escolher a regularização, no entanto, observamos que o procedimento de determiná-la não é simples para o caso geral. Os ECG do nosso trabalho não coincidem com os resultados de Barton e Klauder.

Foi apresentado no capítulo 3 o movimento puramente quântico, tunelamento, utilizando estados estacionários. Demonstramos a obtenção do coeficiente de transmissão nas barreiras de potencial do OI e OI truncado. No caso do OI, a descrição semiclássica, que inicialmente feita por Kemble [10], coincide com a descrição exata (secção 3.2) para qualquer valor de energia da partícula incidente. No caso do OI truncado, não acontece a mesma coisa, pois o resultado JWKB não coincide com o resultado exato. Obtemos o coeficiente de transmissão por meio das condições de continuidade das funções de onda nos pontos de truncamento, o resultado exato é geral, o qual depende da forma da barreira e da energia da partícula, sendo que não restringe a relação entre a energia da partícula incidente e a altura da barreira, cujo caso particular $\eta = 1$ coincide com resultado de Bell [13]. Entretanto, o coeficiente de transmissão JWKB, traz resultado próximo ao exato somente quando a energia da partícula é bem abaixo da barreira de potencial. Essa diferença entre o OI e OI truncado deve existir porque de um lado temos um sistema quadrático (OI) e do outro temos um sistema não quadrático (OI truncado).

Pretendemos com esses últimos resultados, generalizar a análise do tunelamento, investigando melhor as condições de validade das soluções JWKB com as soluções exatas e por meio da teoria quântica relativística fazer um estudo da produção de partículas tratando a barreira de potencial OI truncado como um campo externo.

Apêndice A

Apêndice

Neste apêndice determinaremos o coeficiente de transmissão de maneira geral para o oscilador invertido truncado e logo após, por meio da construção de Glauber, construiremos estados coerentes do oscilador harmônico.

A1. Coeficiente exato de transmissão

A necessidade de estabelecer condições de continuidade das funções de onda $u_1(q)$, $u_2(q)$ e suas derivadas $d_q u_1(q)$, $d_q u_2(q)$ nos pontos de truncamento $q = \pm\beta^{1/2}$ da barreira de potencial leva ao seguinte sistema de equações (3.34):

$$\left. \begin{aligned} A_1 \exp(-i\alpha_-) + B_1 \exp[i\alpha_-] &= A_2 u_1(-\beta^{1/2}) + B_2 u_2(-\beta^{1/2}) \\ A_1 \exp[-i\alpha_-] - B_1 \exp[i\alpha_-] &= A_2 \frac{u_1'(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} + B_2 \frac{u_2'(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} \\ A_3 \exp(i\alpha_+) &= A_2 u_1(\beta^{1/2}) + B_2 u_2(\beta^{1/2}) \\ A_3 \exp(i\alpha_+) &= A_2 \frac{u_1'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} + B_2 \frac{u_2'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{A.1})$$

cujo objetivo é encontrar a razão entre a_3 e a_1 , por causa do coeficiente de transmissão ser proporcional ao módulo quadrado a isto, $T \sim |a_3|^2 / |a_1|^2$, vamos escrever o sistema acima em forma de matriz

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \exp(-i\alpha_-) & \exp(i\alpha_-) \\ \exp(-i\alpha_-) & -\exp(i\alpha_-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$= \begin{pmatrix} u_1(-\beta^{1/2}) & u_2(-\beta^{1/2}) \\ \frac{u_1'(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} & \frac{u_2'(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

da mesma maneira

$$\begin{pmatrix} \exp(i\alpha_+) & 0 \\ \exp(i\alpha_+) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\beta^{1/2}) & u_2(\beta^{1/2}) \\ \frac{u_1'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} & \frac{u_2'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

chamando

$$\mathbf{M}_q = \begin{pmatrix} u_1(\beta^{1/2}) & u_2(\beta^{1/2}) \\ \frac{u_1'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} & \frac{u_2'(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

cuja inversa é igual a

$$\mathbf{M}_q^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M}_q)} \begin{pmatrix} \frac{u'_2(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} & -u_2(\beta^{1/2}) \\ -\frac{u'_1(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} & u_1(\beta^{1/2}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

em especial $\det(\mathbf{M}_q) = \frac{\beta^{1/2}}{i\alpha_+} W_r [u_1(\beta^{1/2}), u_2(\beta^{1/2})]$, onde W_r é o wroskiano. Agora podemos explicitar os elementos A_2 e B_2 multiplicando Eq.(A.4) por Eq.(A.6):

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_q^{-1} \begin{pmatrix} a_3 \exp(i\alpha_+) \\ a_3 \exp(i\alpha_+) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

substituindo a Eq.(A.7) em Eq.(A.2), temos:

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{a_3 \exp(i\alpha_+)}{\det(\mathbf{M}_q)} \begin{pmatrix} u_1(-\beta^{1/2}) \left[\frac{u'_2(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} - u_2(\beta^{1/2}) \right] + u_2(-\beta^{1/2}) \left[u_1(\beta^{1/2}) - \frac{u'_1(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} \right] \\ \frac{u'_1(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} \left[\frac{u'_2(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} - u_2(\beta^{1/2}) \right] + \frac{u'_2(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} \left[u_1(\beta^{1/2}) - \frac{u'_1(\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_+} \right] \end{pmatrix}$$

podemos fazer a soma direta ($M_1 + M_2$) e obter:

$$\begin{aligned} \frac{A_3}{A_1} &= \frac{2 \exp(-i\alpha_-) \det(\mathbf{M}_q) \exp(-i\alpha_+) i\alpha_+ / \beta^{1/2}}{\gamma(\beta) + \tilde{\gamma}(\beta)}, \\ \gamma(\beta) &\equiv \left[u_1(-\beta^{1/2}) + \frac{u'_1(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} \right] \left[u'_2(\beta^{1/2}) - \frac{i\alpha_+}{\beta^{1/2}} u_2(\beta^{1/2}) \right], \\ \tilde{\gamma}(\beta) &\equiv \left[\frac{u'_2(-\beta^{1/2})\beta^{1/2}}{i\alpha_-} + u_2(-\beta^{1/2}) \right] \left[\frac{i\alpha_+}{\beta^{1/2}} u_1(\beta^{1/2}) - u'_1(\beta^{1/2}) \right], \end{aligned}$$

logo determinamos a expressão para o coeficiente de transmissão:

$$T = \frac{\alpha_+}{\alpha_-} \left| \frac{2 \exp(-i\alpha_-) \det(\mathbf{M}_q) \exp(-i\alpha_+) i\alpha_+ / \beta^{1/2}}{\gamma(\beta) + \tilde{\gamma}(\beta)} \right|^2.$$

A2. Estados coerentes do oscilador harmônico

Vamos construir os EC para o oscilador harmônico unidimensional, de hamiltoniano \hat{H} dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \hat{x}^2, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (\text{A.8})$$

Definindo $\hat{q} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hbar/m\omega_0}}$, temos

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{m\omega_0}{\hbar} \frac{\partial}{\partial q} \right) + \frac{m\omega_0^2}{2} \left(\frac{\hbar}{m\omega_0} q^2 \right) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(q^2 - \frac{\partial}{\partial q} \right).$$

Os operadores criação e aniquilação tem a forma Eq.(2.8)

$$\hat{a} = \frac{q + \partial_q}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{q - \partial_q}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.9})$$

cuja ação na base de Fock é dada por

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (\text{A.10})$$

Calculando a relação de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \psi(q) &= \hat{a}\hat{a}^\dagger\psi(q) - \hat{a}^\dagger\hat{a}\psi(q) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(q + \frac{\partial}{\partial q} \right) (q\psi - \psi') - \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right) (q\psi + \psi') \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[q^2\psi - q\psi' + \frac{\partial}{\partial q} (q\psi) - \psi'' \right] - \left[q^2\psi + q\psi' - \frac{\partial}{\partial q} (q\psi) - \psi'' \right] \right\} \\ &= -q\psi' + \frac{\partial}{\partial q} (q\psi) = -q\psi' + \psi + q\psi' = \psi = \psi(q). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Portanto, esses operadores satisfazem a relação de comutação dos operadores de aniquilação e destruição, i.e.,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

Podemos escrever:

$$q = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \partial_q = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.12})$$

Então, o hamiltoniano Eq.(A.8) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \left[\frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \frac{1}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right] = \frac{\hbar\omega_0}{4} \left[(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right] \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{4} \left[(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}) - (\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}) \right] \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\hbar\omega_0}{2} (2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Define-se operador número

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a},$$

Temos:

$$H = \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.14})$$

Determinaremos os auto-estados do hamiltoniano:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle.$$

Substituindo a Eq.(A.14):

$$\hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle.$$

De acordo com Eqs.(A.10), encontramos o espectro:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.15})$$

Vamos agora encontrar os EC do oscilador harmônico, isto é, os auto-estados $\langle q|z\rangle$ do operador de aniquilação, em termos do parâmetro q , $\psi_z(q) = \langle q|z\rangle$:

$$\hat{a}\langle q|z\rangle = z\langle q|z\rangle.$$

Utilizando a Eq.(A.9):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(q\langle q|z\rangle + \frac{\partial}{\partial q}\langle q|z\rangle \right) = z\langle q|z\rangle.$$

Obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial q}\langle q|z\rangle = \left(\sqrt{2}z - q \right) \langle q|z\rangle.$$

Cuja solução é dada por :

$$\langle q|z\rangle = N \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \sqrt{2}z \right)^2 \right].$$

Normalizando o estado:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \left\{ N^* \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \sqrt{2}z^* \right)^2 \right] \right\} \left\{ N \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \sqrt{2}z \right)^2 \right] \right\} \\ &= |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp \left[\left(-q^2 + \sqrt{2}q(z + z^*) - z^2 - z^{*2} \right) \right] \\ &= |N|^2 \sqrt{\pi} \exp \left[\frac{(z + z^*)^2}{2} - z^2 - z^{*2} \right] = |N|^2 \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(z - z^*)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Obtemos o coeficiente de normalização:

$$N = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[\frac{(z - z^*)^2}{4} \right] \quad (\text{A.16})$$

Então, o estado coerente é igual a:

$$\langle q|z\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \sqrt{2}z \right)^2 + \frac{(z - z^*)^2}{4} \right] \quad (\text{A.17})$$

Vamos agora escrever os operadores \hat{x} e $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ em termos dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger).\end{aligned}\tag{A.18}$$

Encontramos :

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega_0} \right), \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega_0} \right).\end{aligned}\tag{A.19}$$

Dado um estado coerente $|z\rangle$ do oscilador harmônico, isto é, $\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$, vamos encontrar seus valores médios da posição e momento, $\langle z|\hat{x}|z\rangle$ e $\langle z|\hat{p}|z\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle z|\hat{x}|z\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\langle z|\hat{a}|z\rangle + \langle z|\hat{a}^\dagger|z\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\langle z|z|z\rangle + \langle z|z^*|z\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (z + z^*) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} \operatorname{Re}(z),\end{aligned}\tag{A.20}$$

e

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \langle z|\hat{p}|z\rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} (\langle z|\hat{a}|z\rangle - \langle z|\hat{a}^\dagger|z\rangle) \\ &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} (\langle z|z|z\rangle - \langle z|z^*|z\rangle) \\ &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} (z - z^*) \\ &= \sqrt{2m\hbar\omega_0} \operatorname{Im}(z).\end{aligned}\tag{A.21}$$

Obtemos o parâmetro complexo z em função dos valores médios da posição e momento:

$$z = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(\langle x \rangle + i\frac{\langle p \rangle}{m\omega_0} \right).\tag{A.22}$$

Vamos agora encontrar a evolução temporal de um EC. Impondo como condição inicial um estado coerente $|z\rangle$. Então, um estado quântico num instante t qualquer é dado por:

$$|z, t\rangle = \exp \left\{ -i\frac{\hat{H}}{\hbar} t \right\} |z\rangle.\tag{A.23}$$

Usando o Hamiltoniano definido na eq. (A.14), temos:

$$|z, t\rangle = \exp\{-i\omega_0 t \hat{n}\} |z\rangle e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t}.$$

Vamos usar a definição de Glauber de um EC ([27]), expandindo o vetor $|z\rangle$ na base de estados estacionários:

$$|z, t\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \exp\{-i\omega_0 t \hat{n}\} |n\rangle e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t}.$$

Façamos a expansão em séries desta exponencial, aplicando o operador no elemento da base, usando o fato que $\hat{n}^m |n\rangle = n^m |n\rangle$:

$$\exp\{-i\omega_0 t \hat{n}\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{-i\omega_0 t \hat{n}\}^m}{m!} |n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{-i\omega_0 t n\}^m}{m!} |n\rangle = \exp\{-i\omega_0 t n\} |n\rangle.$$

Portanto,

$$|z, t\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \exp\{-i\omega_0 t n\} |n\rangle e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t}.$$

Reorganizando os termos:

$$|z, t\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ze^{-i\omega_0 t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t}.$$

Segundo a definição de EC de Glauber:

$$|z, t\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t} |ze^{-i\omega_0 t}\rangle. \quad (\text{A.24})$$

Isso significa que a evolução temporal de um EC o preserva, enquanto o parâmetro complexo z , por sua vez, evolui unicamente mudando sua fase, mantendo seu módulo. Calculemos agora os valores esperados da posição e do momento desse sistema.

Para a posição,

$$\begin{aligned} \langle z, t | \hat{x} | z, t \rangle &= \langle z^* e^{i\omega_0 t} | e^{\frac{i}{2}\omega_0 t} \hat{x} e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t} | ze^{-i\omega_0 t} \rangle \\ &= \langle z^* e^{i\omega_0 t} | \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | ze^{-i\omega_0 t} \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\langle z^* e^{i\omega_0 t} | \hat{a} | ze^{-i\omega_0 t} \rangle + \langle z^* e^{i\omega_0 t} | \hat{a}^\dagger | ze^{-i\omega_0 t} \rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (ze^{-i\omega_0 t} + z^* e^{i\omega_0 t}) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} \operatorname{Re}(ze^{-i\omega_0 t}) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} [\operatorname{Re}(z) \cos(\omega_0 t) + \operatorname{Im}(z) \sin(\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Mas, da Eq.(A.20):

$$\langle z, t | \hat{x} | z, t \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} \left[\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \langle x_0 \rangle \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_0}} \langle p_0 \rangle \sin(\omega_0 t) \right].$$

Enfim, obtemos o valor médio da posição em um instante t qualquer:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle \cos(\omega_0 t) + \frac{\langle p_0 \rangle}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (\text{A.25})$$

Para o momento,

$$\begin{aligned} \langle z, t | \hat{p} | z, t \rangle &= \langle z^* e^{i\omega_0 t} | e^{\frac{i}{2}\omega_0 t} \hat{p} e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t} | z e^{-i\omega_0 t} \rangle \\ &= \langle z^* e^{i\omega_0 t} | -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | z e^{-i\omega_0 t} \rangle \\ &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} (\langle z^* e^{i\omega_0 t} | \hat{a} | z e^{-i\omega_0 t} \rangle - \langle z^* e^{i\omega_0 t} | \hat{a}^\dagger | z e^{-i\omega_0 t} \rangle) \\ &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} (z e^{-i\omega_0 t} - z^* e^{i\omega_0 t}) \\ &= \sqrt{2m\hbar\omega_0} \text{Im}(z e^{-i\omega_0 t}) = \sqrt{2m\hbar\omega_0} [\text{Im}(z) \cos(\omega_0 t) - \text{Re}(z) \sin(\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Mas, da Eq.(A.18)

$$\langle z, t | \hat{p} | z, t \rangle = \sqrt{2m\hbar\omega_0} \left[\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}} \langle p_0 \rangle \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \langle x_0 \rangle \sin(\omega_0 t) \right].$$

Enfim, obtemos o valor médio da posição em um instante t qualquer:

$$\langle p(t) \rangle = \langle p_0 \rangle \cos(\omega_0 t) + m\omega_0 \langle x_0 \rangle \sin(\omega_0 t). \quad (\text{A.26})$$

Observe que as Eqs.(A.25) e (A.26) seguem as equações de trajetória clássica.

Referências Bibliográficas

- [1] WOLF, K. B. **El oscilador repulsivo**, Revista Mexicana de Física, Vol. 56 (1). 2010. p.83-93.
- [2] BALAZS, N. L; VOROS, A. **Wigner's function and tunneling** Ann. Phys. (NY), Vol. 199. 1990. p.123–140.
- [3] KIRSTEN, M.H.J.W. **Introduction to Quantum Mechanics**. World Scientific, Singapur. 2006.
- [4] PAPADOPOULOS, G. J. **Wavepacket mode analysis in quantum mechanics**, Physics Letters 111A, nº 3, 1985.
- [5] MURRAY, S; SCULLY, M.D; LAMB W. E. **Laser Physics** (Reading, MA: Addison-Wesley), 1974.
- [6] SALBI, N. A; KOURI, D. I; BAER, M; POLLAK, E. **A study of the quantal time delay matrix in collinear reactive scattering**. E. J. Chem. Phys. 82 4500. 1985.
- [7] FELDER, G; FROLOV, A; KOFMAN, L; LINDE, A. **Cosmology with negative potentials**. Phys. Rev. D Vol. 66. 2002.
- [8] HILL, D. L; WHELLER, J.A. **Nuclear Constitution and the Interpretation of Fission Phenomena**. Phys. Rev. 89, 1953. p. 1102–1145.
- [9] BARTON, G. **Quantum Mechanics of the Inverted Oscillator Potential**. Ann. Phys. Vol.166 .1986. p.322-363.
- [10] KEMBLE, E. C. **A Contribution to the Theory of the B.W. K. Method** Phys. Rev. 48 , 1935. p.549-561.
- [11] SRINIVASAN, K; PADMANABHAN, T. **Facets of tunneling: Particle production in external fields**. arXiv:gr-qc/9807064v1. 1998.
- [12] HANSEN, K; BRANDBYGE, M. **Current-voltage relation for thin tunnel barriers: Parabolic barrier model**. Journal of applied physics, Vol. 95, 2004; KIMEU, J; MAI, R; MAJUMDAR, K. **Application of the variational R-matrix method to one-dimensional quantum tunneling**. arXiv:quant-ph/0407249v1, 2008; BASRAN, J; PATEL, S; SUTCLIFFE, M. J; SCRUTTON, N. S. **Importance of Barrier Shape in Enzyme-catalyzed Reactions**. Vol. 276, nº. 9, Issue of March 2, 2001.p. 6234–6242.
- [13] BELL, R. P. **Exact and Approximate Expressions for the Permeability of Potential Barriers to Light Particles**, Royal Society Vol. 158, nº 893. 1937. p. 128-136.

- [14] ROY, L.R.J; QUICKERT, K.A. **Permeability of one-dimensional potential barriers.** J. Chem. Soc. Faraday Trans., Vol. 66. 1970, p. 2997.
- [15] LANDAU, L; LIFCHITZ, E. **Física Teórica: Mecânica Quântica**, Vol. I. Moscou: Editora Mir, 1985.
- [16] VARRÓ, S. **Coherent states of an electron in a homogeneous constant magnetic field and the zero magnetic field limit.** J. Phys. A: Math. Gen. 17. 1984. p. 1631-1638.
- [17] SCHRÖDINGER, E. **The constant crossover of micro-to macro mechanics.** Naturwissenschaften. Vol.14 .1926. p. 664–666.
- [18] KLAUDER, J. R; SUDARSHAN, E.C. **Fundamentals of Quantum Optics**, Benjamin, 1968; KLAUDER, I.R; SKAGERSTAM, B.S. **Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics**, World Scientific, Singapore, 1985; BEREZIN, F. A, **General concept of quantization**, Comm. Math. Phys., Vol. 40, 153. 1975; ZHANG, W. M; FENG, D. H; GILMORE, R. **Coherent states: Theory and some applications.** Rev. Mod. Phys. Vol. 62. 1990; KLAUDER, J. R. **The Current State of Coherent States**, arXiv:quant-ph/0110108. 2001; MOSTAFAZADEH, M; ZAMANO, F. **Quantum mechanics of Klein–Gordon fields I: Hilbert Space, localized states, and chiral symmetry.** Ann. Phys. Vol. 321. 2006; VOORDAS, A. **Analytic representations in quantum mechanics** .J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 39. 2006; GAZEAU, J. P. **Coherent States in Quantum Optics**, Berlin: Wiley-VCH. 2009; ALI. S. T; ANTOINE, J. P; BAGARELLO F; GAZEAU, J.P. **Special issue on coherent states: mathematical and physical aspects** *J. Phys. A*, 2012.
- [19] SCULLY, M. O; ZUBAIRY, M.S. **Quantum optics.** Cambridge University Press, 1997.
- [20] GERRY, C. C; GROBE, R. **Cavity-QED state reduction method to produce atomic Schrodinger-cat states.** *Phys. Rev. A* 57, 2247, 1998; GLAUBER, R. J. **Photon Correlations.** *Phys. Rev. Lett.* Vol.10. 1963; GLAUBER, R. J. **The Quantum Theory of Optical Coherence.** *Phys. Rev.* **130** 2529. 1963; KLAUDER, J.R; SUDARSHAN E.C. **Fundamentals of Quantum Optics**, Benjamin. 1968.
- [21] HUTTNER, B; IMOTO, N; GISIN, N; MOR, T. **Quantum cryptography with coherent states.** *Phys. Rev. A* Vol.51.1995; RALPH, T. C; MUNRO, W. J; MILBURN, G. J. **Quantum computation based on linear optics.** Proceedings of SPIE 4917. 2002. quant-ph/0110115; RALPH, T. C, GILCHRIST, A; MILBURN, G. J; MUNRO, W. J; GLANCY, S. **Quantum computation with optical coherent states.** *Phys. Rev. A* Vol. 68. 2003; NIELSEN, M; CHUANG, I. **Quantum Computation and Quantum Information**, Cambridge University Press, Cambridge, England. 2000.
- [22] MALKIN, I.A; MAN’KO, V.I. *Zh. Eksp.Teor. Fiz.* Vol.55 1014. 1968. [*Soviet Phys. JETP* **28** (1969) 527]; **Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems**, Nauka, Moscow, 1979.
- [23] MALKIN, I.A; MAN’KO, V.I. *Zh. Eksp.Teor. Fiz.* Vol.55. 1968; FELDMAN, A; A.N. Kahn, *Phys. Rev. B*, Vol.1.1970; KOWALSKI, K; REMBIELINKI, **Coherent states of a charged particle in a uniform magnetic field**, *J. J. Phys. A: Math. Gen.* Vol. 38 .2005; BERMUDEZ, A; DELGADO, M.A.M; SOLANO, E. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 99. 2007; BAGROV, V.G; GITMAN, D.M; BUCHBINDER, I.L; **Coherent states of relativistic particles.** *Sov. Phys. Journ.* Vol.

18. 1975; BRAGOV, V.G; BUCHBINDER, I.L; GITMAN, D.M; LAVROV, P.M. **Coherent states of an electron in a quantized electromagnetic wave.** Theor. Mat. Fiz. Vol. 33. 1977. p. 419-426.
- [24] DODOMOV, V. V; MAN'KO, I. **Invariants and correlated states of nonstationary quantum systems, in: Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems.** Proceedings of Lebedev Physics Institute, vol. 183, p. 71-181, Nauka, Moscow. 1987 [em russo]; English translation published by Nova Science, Commack, New York, 1989, p. 103-261.
- [25] I.A.Malkin, V.I.Man'ko, **Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems**, Nauka, Moscow.1979; I.A.Malkin, V.I.Man'ko.Soviet Phys. JETP Vol. 28. 1969.
- [26] PERELOMOV, A.M. **Generalized Coherent States and Their Applications.** Springer-Verlag. 1986.
- [27] GLAUBER, R.J. **Photon Correlations.** Phys. Rev. Lett., Vol.10. 1963.
- [28] PERELOMOV, A. M. **Coherent states for arbitrary Lie groups.** *Commun. Math. Phys.* Vol. 26 .1972. p. 222-236; PERELOMOV, A. M. **Generalized Coherent States and Their Applications.** Springer-Verlag, New York, Berlin .1986.
- [29] ALI, S.T; ANTOINE,J.P; GAZEAU, J.P. **Coherent States, Wavelets and Their Generalizations**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg. 2000; GAZEAU, J.P. **Coherent States in Quantum Optics** .Berlin: Wiley-VCH. 2009; GAZEAU. J.P; KLAUDER, J. **Coherent States for Systems with Discrete and Continuous Spectrum**, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 32. 1999. p. 123-132.
- [30] GAZEAU,J.P; KLAUDER, J. **Coherent States for Systems with Discrete and Continuous Spectrum.** *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 32 .1999. p. 123-132.
- [31] GELOUN, J. B; KLAUDER, J. R. **Ladder operators and coherent states for continuous spectra.** *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol. 42, 375209 .2009; GELOUN. J. B; HNYBIDA, J; KLAUDER, J. R. **Coherent states for continuous spectrum operators with non-normalizable fiducial states**, *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol. 45. 2012.
- [32] HONGO. M. **Coherent states associated with the continuous spectrum of noncompact groups**, *J. Math. Phys.*, Vol. 18, 1977. p. 2081-2085.
- [33] GUERRERO, J; RUIZ, L.F.F; ALDAYA, V; COSSIO, F. **Harmonic states for the free particle.** *J. Phys. A*, Vol. 44. 2011.
- [34] BAGROV, V.G; GAZEAU, J. P; GITMAN, D; LEVINE, A. **Coherent states and related quantizations for unbounded motions.** *Journ. Phys. A*, Vol. 45. 2012.
- [35] GRADSHTEYN I.S; RYZHIK I.M, **Table of Integrals, Series, and Products**, Seventh Edition.Elsevier Inc. 2007.
- [36] HEISENBERG. W. **Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik and Mechanik**, *Z. für Phys.* Vol. 43, 1927. p. 172-198.
- [37] KENNARD, E. H. **Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen.** *Z. für Phys.* Vol. 44, 1927. p. 326-352.

- [38] PRAKASH, M. **Transmission through an inverted biharmonic oscillator potential.** J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 9. No. 11. 1976.
- [39] ROBERTSON, H. P. **The uncertainty principle.** Phys. Rev. Vol. 34. 1929. p.163–164 .
- [40] SCHRÖDINGER, E. **Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip,** Sitzungsberichte Preus. Acad. Wiss., Phys.Math. Klasse, Vol. 19, Berlin (1930.) p.296-303.
- [41] HARTLEY, J. G; RAY, J. R. **Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator.** Phys. Rev. D Vol. 25. 1982. p.382.
- [42] TRIFONOV, D.A. **Generalized uncertainty relations and coherent and squeezed.** Opt. Soc. Am. A, Vol. 17 .2000. p. 2486.
- [43] CAVES,C. M. **Quantum-mechanical noise in an interferometer.** Phys. Rev. D Vol.23.1981. p.1693-1708; CAVES,C. M. **Defense of the standard quantum limit for freemass position.** Phys. Rev. Lett. Vol. 54. 1985. p.2465-2468; YUEN, H. **Two-photon coherent states of the radiation eld,** Phys. Rev. A Vol.13. 1976. p. 2226-2243.
- [44] WODKIEWICZ, K; EBERLY, J. **Coherent states, squeezed fluctuations and the SU(2) and SU(1,1) groups in quantum optics applications.** J. Opt. Soc. Am. B2. 1985. p. 458-466 . TRIFONOV, D. A. **Generalized intelligent states and squeezing.** J. Math. Phys. 35.1994. p.2297-2308; TRIFONOV, D.A. **Generalized intelligent states and SU(1,1) and SU(2) squeezing.** arXiv:quant-ph/0001028. 2000.
- [45] BAGROV, V.G; GITMAN, D.M. **Exact Solutions of Relativistic Wave Equations.** Kluwer Acad. Publisher, Dordrecht Boston London. 1990. p. 1–321.
- [46] ROBERTSON, H. P. **A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation,** Phys. Rev. Vol. 35, 1930. p.667.
- [47] MOHSEN, R. **Quantum Theory of Tunneling.** World Scientific. 2003.
- [48] GAMOW, G. **Zur Quantentheorie des Atomkernes.** Quantum Theory of Atomic Nuclei Z. Phys. Vol. 51. 1928.
- [49] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics.** Editora Prentice-Hall do Brasil, Ltda, Rio de Janeiro. 1995.
- [50] FADDEEV, L. D; YAKUBOVSKII, O.A. **Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students.** American Mathematical Society. 2000.
- [51] GITMAN, D.M; TYUTIN, I.V; VORONOV, B.L. **Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics. General theory and applications to Schrödinger and Dirac equations with singular potentials.** Birkhauser, Boston . 2012.
- [52] ABRAMOWITZ, M; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions.** 7^a ed. , New York: Dover. 1970.

- [53] JEFFREYS, H. **On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order.** Proc. London Math. Soc. s2-23, 428. 1925; WENTZEL, G. Z. **Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik.** Phys. Vol. 38. 1926; KRAMERS, H. A. Z. **Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung.** Phys. Vol. 33, 828 1926; BRILLOUIN, L. **La mécanique ondulatoire de Schrodinger; une méthode générale de résolution par approximations sucessives.** Comptes Rendus. 183, 24 1926.
- [54] ROBINETT, R. W. **Quantum and classical probability distributions for position and momentum.** American Journal of Physics. Vol. 63, Issue 9. 1995.
- [55] FROMAN, N; FROMAN, P.O. **JWKB Approximation, Contributions to the Theory.** North-Holland Publishing Company, Amsterdam. 1965.
- [56] GELOUN, J. B; HNYBIDA, J; KLAUDER, J. **Coherent states for continuous spectrum operators with non-normalizable fiducial states,** J. Phys. A: Math. Theor. Vol. 45. 2012.
- [57] ERDELYI A. **Higher Transcendental Functions.** Vol. 2. Staff of the Bateman Manuscript Project. Unites States:Office of Naval Research.1981.
- [58] BAGROV, V.G; GITMAN, D.M. **Exact Solutions of Relativistic Wave Equations.** Kluwer, Dordrecht. 1990.
- [59] MOSHEN, R. **Quantum Theory of Tunneling.** World Scientific. 2003.
- [60] KLEBER, M. **Exact solutions for time-dependent phenomena in quantum mechanics.** Physics Reports. 1994. p.236-331.
- [61] BERRY, M. V; MOUNT, K. E. **Semiclassical approximations in wave mechanics.** Reports on Progress in Physics, Vol.35. 1972.
- [62] BAGROV, V.G; GITMAN, D. M; MACEDO, E. S; PEREIRA, A. S. **Coherent states of inverse oscillator and related problems.** Journ.Phys. A. 2013. (submetido em 25 de Março de 2013).