UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

*Cosmologia Inflacionária em Modelos de Branas
Tipo RS-I.*

Michele Ferraz Figueiró

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla – IF/USP

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla – IF/USP

Prof. Dr. Josif Frenkel – IF/USP

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld – IFT/UNESP

São Paulo
2005

Resumo

A cosmologia inflacionária descreve uma fase durante a qual o nosso universo passou por expansão acelerada em um curto período de tempo a escalas de altas energias. A inflação soluciona os problemas deixados pelo modelo cosmológico da Grande Explosão, tais como os problemas de planura e do horizonte. Nesta fase, o nosso universo era governado por um potencial $V(\phi)$ gerado por um campo escalar inflaton, $\phi(t)$. Este potencial deve obedecer às condições de rolagem lenta dadas por $\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$, onde ϵ e η são os parâmetros de rolagem lenta.

A cosmologia de branas inspira-se na teoria de cordas descrevendo modelos cosmológicos com dimensões extras. Sua grande ascensão aconteceu com a publicação de dois trabalhos de Randall e Sundrum na década de 90. Estes dois modelos consideram um espaço-tempo AdS_5 no qual está inserido uma hipersuperfície 3-dimensional chamada de 3-brana (nosso universo). As partículas e forças do modelo padrão estão confinadas nesta 3-brana enquanto o gráviton pode viajar por todo o espaço-tempo. O modelo RS-I considera duas 3-branas que delimitam a dimensão extra enquanto o modelo RS-II considera uma única 3-brana e o tamanho da dimensão extra é infinito.

O objetivo deste trabalho é unir estas duas cosmologias de modo que possamos estudar inflação em modelos de branas. Escolhemos a cosmologia de branas do tipo RS-I para exemplificarmos três potenciais candidatos a gerarem inflação em nosso universo. Para a aceitação de um modelo inflacionário representado por $V(\phi)$, devemos calcular o índice espectral $n(k)$ e sua derivada em relação ao número de onda k , $dn(k)/dlnk$, deste potencial, e comparar estes resultados teóricos com os dados experimentais do WMAP. É isto que faremos com estes três potenciais.

Abstract

An inflationary cosmology describes a phase in which our Universe goes through accelerated expansion in a short time period at high energy scales. Inflation solves problems left by the Standard Big Bang cosmological model such as problems of flatness and horizon. In this phase, our Universe is ruled by a potential $V(\phi)$ generated by an inflaton scalar field $\phi(t)$. This potential generated must obey conditions of slow roll given by $\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$ where ϵ and η are the parameters of slow roll.

A brane cosmology was inspired by a string theory describing cosmological models with extra dimensions. An interest to it highly arose with a publication of two papers by Randall and Sundrum in the 90s. These two models consider a space-time AdS_5 in which the hypersurface with three spacial dimensions is inserted. This hypersurface (our Universe) is called a 3-brane. Particles and forces of the standard model are inserted in this 3-brane whereas the graviton can move through all space-time. In the RS-I model one considers two three-branes which delimit an extra dimension whereas in the RS-II model one considers a unique 3-brane and the size of the extra dimension is infinite.

The aim of this work is to unify these two cosmologies in a way which would allow studying inflation in brane models. We choose a cosmology in RS-I branes to exemplify three candidate potentials to generate inflation in our Universe. In order to accept an inflationary model represented by $V(\phi)$, we should calculate the spectral index $n(k)$ and its derivative with respect to wave number k , $dn(k)/d\ln k$, for this potential, and compare these theoretical results with the available experimental data of WMAP. These studies will be carried out for the three potentials above mentioned.

Para

os meus queridos pais, Luisabete e José Antônio. Sem o apoio deles, eu não teria atingido tal conquista. Aos meus queridos amigos Alan, Arlene, Bertha, Diego, Jéferson, Patrícia, Rodrigo, Thiago, Julia e Michel.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador Elcio Abdalla.

Gostaria também de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro que possibilitou a realização desta pesquisa.

Devo destacar que esta dissertação é dedicada a muitas pessoas do departamento de física-matemática, pois sem a ajuda destas, eu não teria concluído tal etapa tão importante para meu crescimento profissional. Dentre elas destacam-se: Albert Petrov, José Cleriston, Fábio Cabral, Karlúcio, Marcelo Pires, Arturo, Flávio, Alan, Patrícia, Jéferson, Rodrigo, Carlos Molina, Davi, Ronaldo Carlotto, Rafael e Tiago. Também devo destacar a ajuda dos funcionários Amélia, Bete, Simone, João, Sibeles. Em especial devo agradecer aos meus dois colegas de grupo e amigos Bertha Cuadros-Melgar, Adenauer Casali. Saibam que os seus conhecimentos foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

Agradecimentos aos meus amigos Arlene, Thiago, Diego, Kleto, Sabrina, Julia e Michel. Vocês são muito importantes para mim.

Finalmente, muito obrigada aos meus queridos pais José Antônio e Luisabete e principalmente ao meu bom Deus. Estes dois anos de mestrado foram muito importantes tanto pessoal quanto profissionalmente para mim.

Sumário

1	Introdução	7
2	Cosmologia Inflacionária	11
2.1	Motivação	11
2.2	Cosmologia da Grande Explosão	12
2.3	Os problemas da cosmologia de Grande Explosão	14
2.3.1	Problema de Planura	14
2.3.2	Problema do Horizonte	14
2.3.3	A origem de estruturas de largas escalas	15
2.4	Cosmologia Inflacionária: solução dos problemas da cosmologia da Grande Explosão	16
2.4.1	Problema de Planura	16
2.4.2	Problema do Horizonte	16
2.4.3	A origem da estrutura de larga escala	17
2.5	Inflação de Rolagem Lenta	18
2.5.1	Mecanismo de produção de inflação	19
2.5.2	Perturbações escalares produzidas durante a inflação	22
2.5.3	Parâmetros de rolagem lenta	28
2.6	O potencial do campo escalar	30
2.6.1	Supersimetria e Supergravidade	30
2.6.2	Lagrangiana	31
2.6.3	Simetria quebrada espontaneamente e valores esperados no vácuo (vevs)	34
2.6.4	A restauração de uma simetria interna quebrada espontaneamente	35
2.6.5	Potencial a nível de árvore	36
2.6.6	Inflação com um potencial a nível de árvore	36
2.6.7	Susi global renormalizável	37

2.6.8	Forma de V em supergravidade	37
2.7	Modelos Inflacionários	38
2.8	Modelos Inflacionários - Parte I: modelos de campo simples	39
2.8.1	Potencial Monomial- Inflação Caótica	40
2.8.2	Inflação Natural	41
2.8.3	Potencial quadrático invertido	42
2.8.4	Potenciais cúbicos ou de ordem maior	43
2.8.5	Outro tipo de modelo de campo simples	44
2.9	Modelos Inflacionários - Parte II: modelos híbridos	45
2.9.1	Inflação Híbrida com um potencial quadrático	45
3	Cosmologia de Branas	47
3.1	Motivação	47
3.2	Modelo ADD	48
3.3	Modelos de Randall e Sundrum	50
3.3.1	Modelo RS-I	50
3.3.2	Modelo RS-II	55
3.4	Equações de Junção	55
3.5	Equações de Friedmann: Modelos DGP	58
3.5.1	Modelo DGP com $\Lambda_{5D} \neq 0$	59
3.5.2	Modelo DGP com $\Lambda_{5D} = 0$	63
4	Inflação em Branas	68
4.1	Motivação	68
4.2	Cosmologia Inflacionária em modelos de Branas do tipo RS-I	68
4.2.1	Rolagem lenta e o fim da inflação	71
4.3	Cosmologia Inflacionária em modelos de Branas do tipo RS-II	96
4.4	Existem correções de ordem ρ^2 na Cosmologia RS-I?	104
5	Conclusão	109

Capítulo 1

Introdução

A teoria da Grande Explosão considera um universo homogêneo e isotrópico que originou-se de um estado muito quente. Neste modelo, a densidade de energia que preencheu o nosso universo era dominada por partículas relativísticas, *era da radiação*, ou por partículas não-relativísticas, *era da matéria*. Estas fases correspondem a uma expansão desacelerada, isto é, a derivada segunda do fator de escala do universo é negativa, $\ddot{a} < 0$. Durante a era da radiação, $a \propto t^{1/2}$ e $\rho \propto a^{-4}$ enquanto na era da matéria, $a \propto t^{2/3}$ e $\rho \propto a^{-3}$, onde ρ representa a densidade de energia. Porém o modelo da Grande Explosão não consegue explicar vários problemas tais como o valor do parâmetro de densidade Ω hoje é da ordem de 1, *problema de planura*, e como regiões não-conectadas causalmente possuem mesma temperatura, *problema do horizonte*. Deste modo, antes da Grande Explosão, se faz necessária uma fase durante a qual o nosso universo apresenta uma expansão acelerada em um curto período de tempo, ou seja, a derivada segunda do seu fator de escala é positiva, $\ddot{a} > 0$. A esta fase dá-se o nome de *inflação*.

Durante a fase inflacionária, o nosso universo era preenchido por um potencial $V(\phi)$ gerado por um campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$ chamado de *inflaton*. As expressões da densidade de energia e pressão são dadas por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.1)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) , \quad (1.2)$$

e a equação de Friedmann, supondo-se um universo plano, é

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right] . \quad (1.3)$$

onde M_{PL} é a massa reduzida de Planck dada por $M_{PL} \equiv (8\pi G)^{-1/2}$.

A equação que governa a dinâmica deste inflaton é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} . \quad (1.4)$$

Dentre os vários modelos de inflação, destaca-se o do tipo rolagem lenta. Sua principal característica é o uso da *aproximação de rolagem lenta* dada por

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (1.5)$$

ou seja, o potencial deve ser muito maior que a energia cinética, de modo que ele seja aproximadamente constante.

Portanto, as equações (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\rho_\phi \simeq V(\phi) , \quad (1.6)$$

$$p_\phi \simeq -V(\phi) , \quad (1.7)$$

$$H^2 \simeq \frac{1}{3M_{PL}^2}V(\phi) , \quad (1.8)$$

e

$$3H\dot{\phi} \simeq -\frac{dV}{d\phi} . \quad (1.9)$$

Durante tal processo, o potencial do inflaton deve obedecer às condições de rolagem lenta. Elas estabelecem que $\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$, onde ϵ e η são os chamados *parâmetros de rolagem lenta* do potencial dados por

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{PL}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (1.10)$$

e

$$\eta(\phi) = M_{PL}^2 \frac{V''}{V} . \quad (1.11)$$

A partir deste parâmetros, podemos calcular grandezas inflacionárias tais como o índice espectral $n(k)$ e sua derivada em relação ao número de onda k dados, respectivamente, como

$$n(k) - 1 = -6\epsilon + 2\eta \quad (1.12)$$

e

$$\frac{dn}{d\ln k} = -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 + 2\zeta , \quad (1.13)$$

onde

$$\zeta = M_{PL}^4 \frac{V'(\phi)V'''(\phi)}{V^2(\phi)} . \quad (1.14)$$

Estas grandezas são muito importantes, pois seus resultados obtidos teoricamente podem ser comparados com dados experimentais do WMAP. Deste modo esta comparação é necessária para aceitação do modelo inflacionário. Consideremos que a inflação termina quando $\epsilon(\phi_f) = 1$ ou $\eta(\phi_f) = 1$, onde ϕ_f representa o ponto final do inflaton.

Um dos grandes objetivos dos físicos de partículas é obter a Grande Unificação das quatros interações existentes da natureza. O uso de dimensões extras talvez seja a melhor solução para este problema. A teoria de cordas utiliza-se destas dimensões adicionais. De acordo com o modelo ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali), a grande diferença de energia entre a escala eletrofraca e a gravidade, o *problema da hierarquia*, pode ser resolvido se considerarmos como fundamental a massa de Planck $(4+d)$ -dimensional (d é o número de dimensões extras) e como efetiva a massa de Planck 4-dimensional, de modo que,

$$M_{PL}^2 = M_{4+d}^{d+2} R^d , \quad (1.15)$$

onde R é o raio de compactificação.

A *cosmologia de branas* não é uma teoria baseada em teoria de cordas. Ela apenas se inspira nesta teoria, mais precisamente na compactificação de Horava-Witten. O avanço do *Mundo Branas* deu-se através da publicação de dois trabalhos de Randall e Sundrum em meados da década de 90. Nestes modelos considera-se um espaço-tempo 5-dimensional no qual está inserida uma hipersuperfície 3-dimensional espacialmente chamada *3-brana*. As partículas e forças do Modelo Padrão encontram-se confinadas nesta 3-brana enquanto que a gravidade pode viajar por todo o espaço-tempo.

Utilizando este formalismo, Randall e Sundrum propuseram solucionar o problema de hierarquia construindo dois modelos, RS-I e RS-II nos quais nosso *Mundo Brana* está inserido em um espaço-tempo anti-de-Sitter 5-dimensional (AdS_5). A este cenário, considera-se, portanto, uma única dimensão extra compacta com coordenada y e cuja métrica AdS_5 é não-fatorável, pois a métrica 4-dimensional é multiplicada por um fator de “*deformação*” $a(y)$,

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2 , \quad (1.16)$$

onde $a(y) = e^{\pm 2kb|y|}$ é uma função que varia rapidamente em relação a dimensão extra e b é o raio de compactificação da dimensão extra.

Nestes modelos, a coordenada $y \in [-1, 1]$, onde y e $-y$ idênticos, pois esta dimensão extra admite *simetria de orbifold*, com pontos fixados em $y = 0$ e $y = 1$. A geometria

4-dimensional (na brana) é de Minkowski, portanto, $\Lambda_{4D} = 0$. A escala k em $a(y)$ é determinada pela constante cosmológica 5-dimensional Λ_{5D} e pela massa de Planck 5-dimensional M_{5D} ,

$$k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M_{5D}^3}}. \quad (1.17)$$

Podemos reescrever k como função da tensão da brana λ como,

$$k = \frac{1}{12M_{5D}^3}\lambda. \quad (1.18)$$

Da equação (1.17), notamos que, necessariamente para este cenário, a constante Λ_{5D} deve ser negativa ($\Lambda_{5D} < 0$).

Em $y = 0$, há uma brana de tensão negativa $\lambda_{vis} = -12M_{5D}^3k$ (brana de Tev) onde as massas das partículas são suprimidas pelo fator de deformação $e^{kb|y|}$. Em $y = 1$, há uma brana de tensão positiva $\lambda_{esc} = 12M_{5D}^3k$ (brana de Planck), sobre a qual as massas das partículas são naturalmente da ordem da massa de Planck 4-dimensional, M_{PL} . O modelo RS-I constitui o espaço-tempo descrito acima e o modelo RS-II considera uma brana de Planck levada ao infinito, de modo que há uma única 3-brana inserida no espaço-tempo AdS_5 .

Nosso objetivo nesta dissertação será unir estas duas cosmologias a partir do estudo de modelos inflacionários no cenário de branas. Para isto, escolheremos a cosmologia de branas tipo RS-I. Nosso propósito será exemplificar três potenciais candidatos a gerarem inflação no nosso universo, aqui representado pela brana visível. Deste modo, calcularemos os parâmetros de rolagem lenta de cada um destes potenciais e compararemos o resultado do índice espectral $n(k)$, equação (1.12), obtido teoricamente por nós com o obtido observacionalmente pelo WMAP. A aceitação de um dado modelo inflacionário depende desta comparação.

Capítulo 2

Cosmologia Inflacionária

2.1 Motivação

Em 1915, Einstein introduziu a Relatividade Geral que descreve a estrutura do espaço-tempo e a evolução do universo em termos das leis da Física.

Em 1922, Friedmann encontrou soluções cosmológicas das equações de campo de Einstein. Em 1929, Hubble descobriu a expansão do universo pela observação do desvio para o vermelho (z) de galáxias, como descrevia a teoria de Einstein.

Em 1946, Gamov e seus colaboradores descobriram que o universo originou-se de um estado muito quente e denso da teoria de nucleossíntese e que era preenchido por uma radiação de corpo negro. Depois desta época, caracterizada pelo desacoplamento da matéria com a radiação, os fótons existentes viajaram, praticamente sem interagir, apenas sofrendo os efeitos da expansão, até nos atingirem.

Em 1965, Penzias e Wilson detectaram a radiação cósmica de fundo (RCF), prevista teoricamente por Gamow *et al.*, como uma temperatura de corpo negro de $2,73K$.

Estas fortes evidências observacionais nos fazem acreditar que o nosso universo originou-se de um estado muito quente e denso chamado de *modelo da Grande Explosão*. Na cosmologia da Grande Explosão, o universo era dominado primeiramente por radiação e depois por matéria [1, 2].

Neste cenário, nosso universo apresenta uma expansão desacelerada onde a derivada segunda do fator de escala é negativa. No entanto, esta desaceleração não resolve os problemas cosmológicos, tais como o *problema de planura* e o *problema do horizonte*. Deste modo, é necessário considerar uma fase na qual o universo apresenta uma expansão acelerada muito rápida em um curto período de tempo. Esta fase é chamada de *inflação* e foi inicialmente proposta, em 1981, por Guth [3].

Neste capítulo, pretendemos explicar a fase inflacionária primordial do nosso universo. Apresentaremos a motivação para se estudar tal fase, os mecanismos utilizados para a produção da inflação e os diferentes modelos inflacionários utilizados na cosmologia padrão.

2.2 Cosmologia da Grande Explosão

A teoria que prevê que o nosso universo originou-se de um estado muito quente e denso é chamado de *Cosmologia da Grande Explosão*, [4]. Este modelo descreve um universo homogêneo e isotrópico sobre largas escalas, cuja métrica é dada pela forma de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k'r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.1)$$

Nesta métrica, $a(t)$ é o *fator de escala*, que mede raio do universo, onde t é o tempo cósmico. A constante k' é a *curvatura espacial*, onde valores positivo, zero ou negativo correspondem a um universo *fechado*, *plano* ou *aberto*, respectivamente.

A evolução do universo é dada pelo tipo de matéria que o compõe. A equação de estado entre a *densidade de energia* $\rho(t)$ e a *pressão* $p(t)$ é

$$p = \omega\rho. \quad (2.2)$$

Para conhecer a dinâmica da evolução do universo, é necessário resolver as equações de Einstein em Relatividade Geral

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda_{4D}g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde $R_{\mu\nu}$, R , $T_{\mu\nu}$, e G são o tensor de Ricci, escalar de Ricci, o tensor energia momento e a constante gravitacional 4-dimensional, respectivamente. Λ_{4D} é uma constante cosmológica originalmente introduzida por Einstein.

Para a métrica de fundo (2.1), as soluções das equações de Einstein, (2.3), são

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2}\rho + \frac{\Lambda_{4D}}{3} - \frac{k'}{a^2} \quad (2.4)$$

e

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.5)$$

onde um ponto indica a derivada em t , e $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. As equações (2.4) e (2.5) são chamadas de *equação de Friedmann* e *equação de conservação de energia*,

respectivamente. Dadas suas combinações, sendo $\Lambda_{4D} = 0$, encontramos a equação de aceleração de Einstein

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{PL}^2}(\rho + 3p) . \quad (2.6)$$

Assim, a equação de Friedmann (2.4) pode ser reescrita como

$$\Omega - 1 = \frac{k'}{a^2 H^2} , \quad (2.7)$$

onde definimos o *parâmetro de densidade* como

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} , \quad (2.8)$$

sendo $\rho_c = 3M_{PL}^2 H^2$ a *densidade crítica*.

As soluções para as relações (2.4) e (2.5) são, respectivamente,

$$\rho \approx a^{-3(1+\omega)} \quad (2.9)$$

e

$$a(t) \approx t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} . \quad (2.10)$$

Na cosmologia padrão da Grande Explosão, o universo é dominado pela *era radiação* ou pela *era da matéria*. Usando (2.2),

$$p = \rho/3, \quad \text{era da radiação} , \quad (2.11)$$

$$p = 0, \quad \text{era da matéria} . \quad (2.12)$$

e das soluções (2.9) e (2.10) temos que

$$a \propto t^{1/2}, \quad \rho \propto a^{-4}, \quad \text{era da radiação} \quad (2.13)$$

$$a \propto t^{2/3}, \quad \rho \propto a^{-3}, \quad \text{era da matéria} . \quad (2.14)$$

Estas fases correspondem à expansão desacelerada do universo. Portanto, a derivada segunda do fator de escala é negativa, $\ddot{a} < 0$. No entanto, esta expansão desacelerada não consegue explicar os problemas cosmológicos, tais como o **problema de planura** e o **problema do horizonte**, existentes na cosmologia da Grande Explosão.

A solução para estes problemas é considerar que o nosso universo apresentou uma rápida expansão acelerada em um curto período de tempo ($10^{-38} s$). A este período deu-se o nome de *inflação* [5].

Portanto, a cosmologia inflacionária tenta resolver os problemas da cosmologia da Grande Explosão.

2.3 Os problemas da cosmologia de Grande Explosão

2.3.1 Problema de Planura

Para um universo com curvatura $k' = 0$ e densidade de energia $\rho = \rho_c$, considera-se que a sua geometria espacial seja plana (espaço euclidiano). Da equação (2.7), se Ω se aproxima de 1, o termo ρ dominará a equação de Friedmann e o universo será aproximadamente plano [6]. Caso contrário, o termo de curvatura k' será dominante. No entanto, $\Omega = 1$ é um ponto instável na evolução do universo.

Na era da radiação, $\rho \propto a^{-4}$, e na era da matéria, $\rho \propto a^{-3}$, deste modo o termo em ρ na equação de Friedmann, cai mais rapidamente do que o termo k'/a^2 à medida que o universo se expande. Assim, na cosmologia de Grande Explosão, o termo de curvatura domina e o parâmetro Ω desvia-se de 1. Este comportamento é ilustrado na figura (2.1).

No entanto, os dados observacionais revelam que o valor de Ω hoje é da ordem de 1, de modo que no passado, este valor está ainda muito mais próximo da unidade. Este é o *problema de planura*.

Figura 2.1: Na cosmologia de grande explosão, $\Omega(a)$ evolui de 1 à medida que o universo se expande.

2.3.2 Problema do Horizonte

Consideremos algum sistema físico em um dado estado a um tempo inicial t_i . O estado deste sistema, para um tempo posterior, é afetado pelo estado em t_i (as condições iniciais) e pela sua evolução. Para algum tempo finito posterior a t_i , há limites causais que uma escala pode ser afetada devido a esta evolução. No entanto, há sempre escalas que não são afetadas pela expansão, e sobre as quais o estado do sistema posterior é um reflexo das

condições iniciais. Esta mesma idéia pode se aplicar a cosmologia da Grande Explosão, porém, com alguma diferença.

A cosmologia de Grande Explosão começa com uma singularidade inicial onde o fator de escala vale $a = 0$ e a densidade de energia $\rho = \infty$ para um tempo finito no passado. Utilizando esta singularidade, encontramos vários problemas nas soluções cosmológicas das equações que regem o nosso universo. No modelo de grande explosão, o universo origina-se desta singularidade inicial porém com condições iniciais que devem ser escolhidas. Em uma situação de laboratório, o tempo inicial do estado de um dado sistema pode ser escolhido arbitrariamente. Na grande explosão, o tempo inicial deve ser definido absolutamente.

O *horizonte causal* do universo cresce com o tempo. O raio causal é a região com a qual estamos em contato causal (pela observação de pontos distantes observados no universo). Objetos que vemos em direções opostas estão separados por dois raios causais, de modo que não tenhamos nenhum contato causal entre eles. Podemos calcular o número de regiões causais que preenchiam o nosso universo observável em outras épocas. Na época da grande unificação, havia 10^8 regiões desconectadas causalmente em um volume que envolvia a parte do universo que atualmente possamos observar. Este é o *problema do horizonte*, da cosmologia da Grande Explosão (figura 2.2).

Figura 2.2: A região do universo que observamos hoje foi composta de muitas regiões desconectadas causalmente, no passado.

2.3.3 A origem de estruturas de largas escalas

Os dados do satélite COBE mostram que existem anisotropias na superfície de último espalhamento, cujas amplitudes são pequenas. Estas flutuações propagam-se de modo

que é impossível gerar estruturas de largas escalas entre a Grande Explosão e o tempo do último espalhamento na cosmologia padrão. Este problema é quase equivalente ao problema do horizonte.

A cosmologia padrão não consegue explicar a origem de estrutura de larga escala.

2.4 Cosmologia Inflacionária: solução dos problemas da cosmologia da Grande Explosão

Os problemas na cosmologia da Grande Explosão surgem do fato de que nosso universo apresenta uma contínua expansão desacelerada. Assumindo, porém, a existência de um estágio, no universo primordial, que apresente uma expansão acelerada, temos que [5]

$$\ddot{a} > 0 . \quad (2.15)$$

Usando (2.6), isto corresponde à condição

$$\rho + 3p < 0 . \quad (2.16)$$

Da condição (2.15), temos que $\dot{a}(= aH)$ cresce durante a inflação. Assim o raio de Hubble, definido como $(aH)^{-1}$, diminui na fase inflacionária. Se assumirmos tal característica, poderemos solucionar os problemas de planura e do horizonte.

2.4.1 Problema de Planura

O problema de planura ocorre devido à tendência do termo em k em dominar o termo em ρ na equação de Friedmann (2.4). Durante a **fase inflacionária**, consideramos que a densidade de energia ρ é aproximadamente **constante**, de modo que o termo em k' possa ser desprezado. Assim, $\Omega = 1$. Este processo é ilustrado na figura (2.3).

2.4.2 Problema do Horizonte

Um período de inflação muda a estrutura de causalidade do universo. Durante a inflação, cada região conectada causalmente se expande exponencialmente. Uma suficiente quantidade de inflação (dada pelo número de dobras $N_e(\phi)$, que será definido posteriormente) permite que o todo o universo observado venha de uma região que estava causalmente conectada antes da inflação, como mostra a figura (2.4).

Se faz necessário o universo se expandir por um fator de e^{70} , aproximadamente, para resolver o problema de planura e o problema do horizonte [6, 8].

Figura 2.3: Durante a fase inflacionária, Ω comporta-se como um atrator.

Figura 2.4: Durante a inflação, o volume do horizonte se expande exponencialmente. Hoje, a região observada pode ocupar uma pequena fração de um volume causal.

2.4.3 A origem da estrutura de larga escala

O fato de que o valor do raio de Hubble H^{-1} diminui durante a inflação possibilita o surgimento das perturbações de densidade sobre largas escalas. Desde que as escalas destas perturbações são dadas pelas escalas de Hubble no período de inflação primordial, a física causal gera pequenas flutuações quânticas.

Depois que uma escala é empurrada para fora do raio de Hubble (cruza o horizonte), $k/aH < 1$, durante a inflação, as perturbações podem ser descritas classicamente. Quando a inflação termina, a evolução do universo se dá pela cosmologia da grande explosão, de modo que o valor do raio de Hubble aumenta. Então, as escalas de perturbações são empurradas para dentro do raio de Hubble novamente (entra no horizonte), $k/aH > 1$, depois do efeito da causalidade.

As pequenas perturbações produzidas durante a inflação aparecem como estruturas de larga escala depois de reentrarem no horizonte. Deste modo, a fase inflacionária explica um mecanismo causal em gerar as perturbações de densidade observadas nas anisotropias da RCF.

2.5 Inflação de Rolagem Lenta

Em 1981, a fase inflacionária do universo foi proposta por Guth [3] para resolver os problemas que a cosmologia da grande explosão não consegue explicar. Esta fase é conhecida como **inflação velha** e corresponde a uma fase de Sitter do universo. Uma versão revisada foi proposta por Linde [9], e Albrecht e Steinhardt [10], conhecida como **inflação nova**, que corresponde a uma *inflação de rolagem lenta*.

Durante tal fase, o fator de escala $a(t)$ do universo expande-se aceleradamente em um curto período de tempo. Deste modo, a condição necessária para que aconteça inflação é

$$\boxed{\text{INFLAÇÃO} \iff \ddot{a} > 0}$$

Durante este período, o parâmetro de Hubble H é aproximadamente constante e o fator de escala $a(t)$ do universo evolui quase-exponencialmente,

$$\dot{a} = aH(t) ,$$

$$a(t) = a_0 \exp \left(\int_{t_0}^t dt' H(t') \right) ,$$

$$a(t) = a_0 \exp(H(t - t_0)) . \quad (2.17)$$

Há uma condição equivalente à inflação com base em uma interpretação mais física,

$$\boxed{\text{INFLAÇÃO} \iff \frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0}$$

sendo $1/aH$ o **raio de Hubble comóvel**.

Esta condição também pode ser dada em função da densidade de energia e pressão que governam tal expansão. Da equação (2.6), temos que

$$\boxed{\text{INFLAÇÃO} \iff \ddot{a} > 0 \iff \rho + 3p < 0}$$

Supondo-se que $\rho > 0$, para que a relação acima seja satisfeita, o conteúdo de matéria que preenche o universo, durante a inflação, deve ter pressão negativa, cuja equação de estado é dada por $p \simeq -\rho$. Esta pressão negativa produz **uma forma repulsiva de gravidade**.

Na física de campos escalares, podemos construir estados de pressão negativa desde que o tensor de energia momento $T^{\mu\nu}$ de um campo escalar $\phi(t, x^i)$ seja dado por [11]

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + V(\phi) \right], \quad (2.18)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do campo escalar ϕ .

A densidade de energia ρ e a pressão p são dadas, respectivamente, por

$$\rho = T^{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla_i \phi)^2 + V(\phi) \quad (2.19)$$

e

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T_{ii} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{6} (\nabla_i \phi)^2 - V(\phi). \quad (2.20)$$

A fase inflacionária se utiliza de tal mecanismo, considerando um campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$ que por sua vez gera a um potencial escalar $V(\phi)$, responsável pela expansão acelerada do universo. Portanto, a dinâmica da inflação é dada por um campo escalar.

2.5.1 Mecanismo de produção de inflação

Os campos escalares $\phi(t, r)$ são muito importantes na teoria de física de partículas. A ação de tais campos pode governar a evolução da fase inflacionária. Há muitos graus de liberdade que determinam a razão da expansão durante este período. No entanto, com apenas um grau de liberdade, a evolução da cosmologia inflacionária pode ser modelada pela ação de um campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$, o *inflaton*. Este campo evolui sob a influência de um potencial escalar $V(\phi)$ (energia de vácuo). Se a densidade de energia do universo é dominada pela energia potencial do inflaton, então $\rho + 3p$ será negativo.

Sendo o universo homogêneo e isotrópico, a fase inflacionária congela as flutuações do inflaton, de modo que ele se torna uma quantidade clássica. Isto acontece somente se as grandezas cosmológicas saem do horizonte¹. Usando as equações (2.19) e (2.20), a densidade de energia e a pressão do inflaton $\phi(t)$, respectivamente, são

¹Diz-se que uma escala cosmológica sae do horizonte quando $k/aH < 1$, onde k é o número de onda.

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.21)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) , \quad (2.22)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do inflaton.

Substituindo (2.21) e (2.22) em (2.4) e (2.5), obtemos

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (2.23)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 , \quad (2.24)$$

onde esta última é a *equação de Klein-Gordon* que governa a evolução do inflaton ϕ , [5, 12].

Durante a inflação, a relação (2.16) impõe que $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, indicando que o potencial do inflaton $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética. Portanto, para que a fase inflacionária aconteça, o potencial do inflaton deve ser aproximadamente plano.

Definindo as *aproximações de rolagem lenta* como [5]

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (2.25)$$

e

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} . \quad (2.26)$$

e utilizando-as, podemos reescrever as equações (2.23) e (2.24), como [5]

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_{PL}^2} V(\phi) \quad (2.27)$$

e

$$3H\dot{\phi} \approx V'(\phi) . \quad (2.28)$$

Temos também que [5]

$$\rho_\phi \sim V(\phi) \quad (2.29)$$

e

$$p_\phi \sim -V(\phi) , \quad (2.30)$$

Supõe-se que campo inflaton ϕ esteja em uma região do potencial que satisfaça às *condições de rolagem lenta* [5] acima, dadas equivalentemente por

$$\epsilon \ll 1, \quad (2.31)$$

$$|\eta| \ll 1 \quad (2.32)$$

onde ϵ e η são os *parâmetros de rolagem lenta* dados, respectivamente, por [5]

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} M_{PL}^2 \left(\frac{V(\phi)'}{V(\phi)} \right)^2,$$

$$\eta \equiv M_{PL}^2 \frac{V(\phi)''}{V(\phi)}.$$

A dedução destes dois parâmetros será demonstrada na seção (1.4).

O *número de dobras* $N(t)$ representa a quantidade de inflação que normalmente ocorre. Ele está quantificado pela razão do fator de escala $a(t)$, de um tempo final t_f a um tempo inicial t_i ,

$$N(t) = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_f} H(t') dt'. \quad (2.33)$$

Se no final do processo inflacionário, quando não pudermos considerar as aproximações de rolagem lenta, o valor do fator de escala for a_f , então, durante o processo podemos expressar

$$a(\phi) = a_f \exp(-N_e(\phi)), \quad (2.34)$$

onde $N_e(\phi)$ conta de *número de dobras* em termos de ϕ a partir do fim do processo.

Deste modo, durante a inflação de rolagem lenta

$$N_e(\phi) = \int_{t_f}^t H(t') dt' = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{3H^2}{V'(\phi)} d\phi, \quad (2.35)$$

$$N(\phi) \approx \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{M_{PL}^2 V'(\phi)} d\phi, \quad (2.36)$$

onde o valor do ponto final do inflaton, ϕ_f , é definido como $\epsilon(\phi_f) = 1$, pois, neste instante, a inflação termina (as condições de rolagem lenta são violadas).

Para resolver os problemas de planura e o problema do horizonte, o número de dobras é de aproximadamente 70, $N_e(\phi) \approx 70$ [5].

2.5.2 Perturbações escalares produzidas durante a inflação

O universo no qual vivemos é aproximadamente (ou talvez exatamente) plano espacialmente e, em largas-escalas, é **homogêneo** e **isotrópico**. Estas características são atribuídas a ele devido à fase inflacionária. No entanto, a pequenas escalas, o universo é **inhomogêneo**. A inhomogeneidade na distribuição de galáxias, aglomerados e outros objetos luminosos é resultado das pequenas perturbações primordiais produzidas na densidade de campo durante a inflação. Elas também produzem a anisotropia observada na temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF). O estudo destas perturbações primordiais nos proporcionam conhecer melhor a dinâmica da inflação [2].

Atualmente, nosso universo passa por um período de expansão acelerada. Os modelos mais aceitos admitem que esta expansão também é gerada por um campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$. Assim, a energia escura, que compõe 70% da matéria atual no universo, seria representada por um potencial deste campo.

Existem duas diferenças básicas entre a fase atual e a fase inflacionária primordial do nosso universo. Na primeira, trabalhamos com baixas energias e a ainda não sabemos se esta expansão acelerada será finita ou não. Na inflação, trabalhamos com altas energias e a expansão acelerada ocorreu em um curto período de tempo.

Muitos modelos inflacionários são propostos com a finalidade de aprendermos alguma coisa sobre a dinâmica inflacionária. Este estudo nos proporciona conhecer melhor a origem, a formação e estrutura do universo. Além do mais, estamos trabalhando com as leis da física em escalas de energia muito altas, que não podemos produzir em laboratórios terrestres.

Nesta seção, estudaremos as perturbações escalares geradas da inflação.

Consideremos o elemento de linha dado por

$$ds^2 = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j = a(\tau)^2 (d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (2.37)$$

onde $\tau \equiv \int a^{-1} dt$ é o tempo conforme. A métrica de fundo escolhida é a de Friedmann-Robertson-Walker.

A forma mais geral do elemento de linha que descreve perturbações escalares da métrica é dada por [2, 13]

$$ds^2 = a(\tau)^2 \{ (1 + 2A) d\tau^2 - 2B_{,i} dx^i d\tau - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j \}, \quad (2.38)$$

onde as quantidades A , ψ , B e E são funções das coordenadas espaço-tempo. Denotamos a derivada covariante de uma função f com respeito à coordenada i por $f_{,i}$. Em um

universo espacialmente plano, essas derivadas covariantes transformam-se em derivadas parciais ordinárias.

As quatro variáveis de perturbação da métrica, A , ψ , B e E , não estão inteiramente livres. Algumas delas são escolhidas afim de fixar o sistema de coordenadas antes que analisemos as perturbações. A escolha do sistema de coordenadas é frequentemente chamada de **escolha de calibre**. É importante escolher uma condição de calibre apropriada tal que ela permita uma análise matemática simplificada e uma interpretação física mais fácil.

Partindo de combinações das quatro variáveis de perturbação, podemos construir variáveis invariantes de calibre. As mais simples combinações lineares invariantes de calibre, construídas a partir das variáveis da métrica, são dadas pelos potenciais Φ e Ψ [2, 13]

$$\Phi = A + (1/a) [(B - E')a]', \quad \Psi = \psi(a'/a)(B - E'), \quad (2.39)$$

onde a linha é a derivada em relação ao tempo conforme τ , $a' \equiv da/d\tau$ e $E' \equiv dE/d\tau$.

A condição de calibre mais usada é a do calibre longitudinal. Este calibre é definido pelas condições $B = E = 0$. Usando este calibre na métrica (2.38), temos

$$ds^2 = a(\tau)^2 [(1 + 2\Phi)d\tau^2 - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j] . \quad (2.40)$$

Derivemos agora a forma geral das equações que descrevem pequenas perturbações cosmológicas. As equações de Einstein (considerando $\Lambda_{4D} = 0$) relacionam o tensor energia-momento T^μ_ν com as propriedades geométrica do espaço-tempo,

$$G^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu, \quad G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}g^\mu_\nu R . \quad (2.41)$$

As componentes do tensor de Einstein para a métrica de fundo (2.37), descrevendo um universo homogêneo e isotrópico em expansão, são [2, 13]

$$^{(0)}G^0_0 = 3a^{-2}(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}) , \quad (2.42)$$

$$^{(0)}G^0_i = 0 , \quad (2.43)$$

$$^{(0)}G^i_j = a^{-2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{H})\delta^i_j , \quad (2.44)$$

onde $\mathcal{H} \equiv a'/a$. A forma de $^{(0)}G^\mu_\nu$ usando o tempo físico t é obtida através da mudança de variável $t = t(\tau)$ sobre as componentes do tensor para o tempo conforme τ .

As equações de Einstein para a métrica de fundo (2.37) são

$$^{(0)}G^\mu_\nu = 8\pi G^{(0)}T^\mu_\nu , \quad (2.45)$$

onde ${}^{(0)}T^\mu_\nu$ é o tensor energia-momento de fundo. Para satisfazer as componentes (2.42), (2.43) e (2.44), ${}^{(0)}T^\mu_\nu$ deve satisfazer as seguintes propriedades de simetria

$${}^{(0)}T^i_0 = {}^{(0)}T^0_i = 0, \quad {}^{(0)}T^i_j \propto \delta^i_j. \quad (2.46)$$

Considerando pequenas perturbações sobre a métrica de fundo, temos que o tensor de Einstein pode ser dado como

$$G^\mu_\nu = {}^{(0)}G^\mu_\nu + \delta G^\mu_\nu + \dots, \quad (2.47)$$

e o tensor de energia momento pode ser escrito como

$$T^\mu_\nu = {}^{(0)}T^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu. \quad (2.48)$$

As equações de Einstein linearizadas, considerando pequenas perturbações sobre a métrica de fundo, são

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi G \delta T^\mu_\nu, \quad (2.49)$$

onde δ representa os termos lineares de flutuações na métrica e na matéria.

As componentes perturbadas do tensor de Einstein evoluem no calibre longitudinal como [2, 13]

$$\delta G^0_0 = 2a^{-2} [-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi], \quad (2.50)$$

$$\delta G^0_i = 2a^{-2}(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i}, \quad (2.51)$$

$$\delta G^i_j = -2a^{-2} \left\{ \left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta^i_j - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{,kj} \right\}, \quad (2.52)$$

onde $D \equiv \Phi - \Psi$.

Sendo o universo preenchido por um campo escalar minimamente acoplado, $\phi(x, t)$, o tensor energia-momento é dado por

$$T^\mu_\nu = -(\nabla\phi)^2 + \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] \delta^\mu_\nu. \quad (2.53)$$

O campo escalar $\phi(x, t)$ pode ser decomposto em duas partes. A primeira corresponde ao campo de fundo e a segunda ao campo perturbado,

$$\phi(x, \tau) = \phi_0(\tau) + \delta\phi(x, \tau). \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.53), usando primeiramente a métrica não-perturbada (2.37), obtemos as componentes não-perturbadas do tensor energia momento [2, 13]

$${}^{(0)}T_0^0 = \frac{1}{2a^2}\phi_0'^2 + V(\phi_0), \quad {}^{(0)}T_i^0 = 0, \quad {}^{(0)}T_j^i = \left[-\frac{1}{2a^2}\phi_0'^2 + V(\phi_0) \right] \delta_j^i, \quad (2.55)$$

e usando a métrica perturbada (2.40), as componentes perturbadas do tensor energia momento são [2, 13]

$$\delta T_0^0 = a^{-2} \left[-\phi_0'^2 \Phi + \phi_0' \delta \phi' + V'(\phi) a^2 \delta \phi \right], \quad (2.56)$$

$$\delta T_i^0 = a^{-2} \phi_0' \delta \phi_{,i}, \quad (2.57)$$

$$\delta T_j^i = a^{-2} \left[\phi_0'^2 \Phi - \phi_0' \delta \phi' + V'(\phi) a^2 \delta \phi \right] \delta_j^i. \quad (2.58)$$

A componente (2.58) obedece à relação $\delta T_j^i \sim \delta_j^i$. Portanto, se usarmos a parte $i \neq j$ da equação (2.49), teremos que $D = \Phi = \Psi$.

As equações de Einstein perturbadas podem ser escritas como

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') + \nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \delta T_0^0, \quad (2.59)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Phi')_{,i} = 4\pi G a^2 \delta T_i^0, \quad (2.60)$$

$$\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta_j^i + \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{,kj} = -4\pi G a^2 \delta T_j^i. \quad (2.61)$$

Efetueemos a derivada na equação (2.27) em relação tempo físico t . Usando a equação (2.28), obtemos uma relação para a parte não perturbada,

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}l^2 \dot{\phi}_0^2 \quad (2.62)$$

onde $l^2 = 8\pi G/3$.

Em função do tempo conforme τ , temos que

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{3}{2}l^2 \phi_0'^2. \quad (2.63)$$

Reescrevendo as equações (2.59), (2.60) e (2.61), temos, respectivamente,

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\Phi = \frac{3}{2}l^2 (\phi_0' \delta \phi' + V'(\phi) a^2 \delta \phi), \quad (2.64)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = \frac{3}{2}l^2 \phi_0' \delta \phi, \quad (2.65)$$

$$\Phi'' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + 3\mathcal{H}\Phi' = \frac{3}{2}l^2 (\phi_0' \delta \phi' - V'(\phi) a^2 \delta \phi). \quad (2.66)$$

Combinando as equações (2.64) e (2.66), obtemos a equação de campo escalar invariante de calibre [2, 13]

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi + V''(\phi)a^2\delta\phi = 4\phi_0'\Phi' - 2V'(\phi)a^2\Phi. \quad (2.67)$$

A equação de Klein-Gordon para a parte não-perturbada ϕ_0 é

$$\phi_0'' + 2\mathcal{H}\phi_0' + V_{,\phi}(\phi_0)a^2 = 0. \quad (2.68)$$

Subtraindo (2.64) e (2.66), usando as equações (2.63) e (2.65) para expressar $\delta\phi$ em termos de Φ' e Φ , e ainda utilizando a equação (2.68), obtemos uma equação diferencial parcial de segunda ordem para Φ [2, 13],

$$\Phi'' - \nabla^2\Phi + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Phi' + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Phi = 0, \quad (2.69)$$

ou

$$\Phi'' - \nabla^2\Phi + 2\left(\frac{a}{\phi_0'}\right)' \left(\frac{a}{\phi_0'}\right)^{-1}\Phi' + 2\phi_0'\left(\frac{\mathcal{H}}{\phi_0'}\right)'\Phi = 0, \quad (2.70)$$

onde introduzimos uma nova variável, u , dada por

$$u = \frac{a}{\phi_0}\Phi. \quad (2.71)$$

Deste modo, podemos reduzir a equação (2.70) à equação,

$$u'' - \nabla^2u - \frac{z''}{z}u = 0, \quad (2.72)$$

onde $z = \mathcal{H}/(a\phi_0)$.

As soluções da equação (2.72) podem ser facilmente encontradas em limites assintóticos. Fazendo transformações de Fourier, a função u_k , com um número de onda k , satisfaz [2]

$$u_k'' + (k^2 - z''/z)u_k = 0. \quad (2.73)$$

Em um limite de grandes comprimentos de onda², $k^2 \ll z''/z$ encontra-se uma solução analítica para a equação (2.73), para Φ e $\delta\phi$ [2]

$$u = z \left(c_1 + c_2 \int \frac{d\tau}{z^2} \right), \quad (2.74)$$

$$\Phi = 2c_2 \left(\frac{1}{a} \int a dt \right)' = 2c_2 \left(1 - \frac{H}{a} \int a dt \right), \quad (2.75)$$

²O comprimento de onda comóvel λ está relacionado com o número de onda k pela relação $\lambda = 2\pi/k$.

$$\delta\phi = 2c_2 \frac{\dot{\phi}_0}{a} \int a dt , \quad (2.76)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração.

De acordo com Bardeen [14], no limite de grandes comprimentos de onda, a solução (2.75) indica que há uma quantidade conservada invariante de calibre chamada de *perturbação da curvatura comóvel* $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \Phi - \frac{H^2}{H} \left(\Phi + \frac{\dot{\Phi}}{H} \right) = 2c_2 . \quad (2.77)$$

Durante a **fase inflacionária**, as perturbações com o número de onda k são empurradas para fora do raio de Hubble (sai do horizonte), $k < aH$, pela expansão acelerada do universo. Deste modo, estamos interessados nas regiões de grandes comprimentos de onda, k^{-1} , ou seja, para $k^2 \ll z''/z$, cujas soluções analíticas são dadas pelas equações (2.75) e (2.76). Quando a inflação termina, a escala de perturbação re-entra no raio de Hubble (entra no horizonte) induzindo a formação de galáxias e aglomerados. A inflação naturalmente explica a origem de estruturas de largas escalas.

As equações (2.75) e (2.76) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \Phi = \left(a^{-1} \int a dt \right)' &= 2c_2 \left(a^{-1} \int H^{-1} da \right)' = 2c_2 \left(H^{-1} - \int (H^{-1})' a dt \right)' \\ &= -2c_2 \frac{\dot{H}}{H^2} , \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\delta\phi = 2c_2 \dot{\phi}_0 a^{-1} \int a dt = 2c_2 \frac{\dot{H}}{H^2} . \quad (2.79)$$

Das equações (2.77) e (2.79), a expressão para a perturbação de curvatura comóvel $\mathcal{R}$ é [2]

$$\mathcal{R} = \frac{H\delta\phi}{\dot{\phi}_0} . \quad (2.80)$$

O espectro de perturbação de curvatura comóvel (ou amplitude de perturbação escalar) $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{4}{25} \langle |\mathcal{R}|^2 \rangle , \quad (2.81)$$

Usando (2.80),

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{4}{25} \frac{H^2 \langle (\delta\phi)^2 \rangle}{\dot{\phi}_0^2} . \quad (2.82)$$

Usando ainda o resultado de Bunch e Davies [15], que estabelece que o espectro de flutuações quânticas de um campo escalar sem massa minimamente acoplado à gravidade em um espaço de Sitter, temos que

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle = \frac{H^2}{4\pi^2} . \quad (2.83)$$

Substituindo este resultado em (2.82), temos o resultado

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{25\pi^2} \frac{H^4}{\dot{\phi}^2} . \quad (2.84)$$

Usando (2.27) e (2.28) temos ainda

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{9}{25\pi^2} \frac{H^6}{V'(\phi)^2} \quad (2.85)$$

ou

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{75\pi^2 M_{PL}^6} \right) \frac{V^3(\phi)}{(V'(\phi))^2} . \quad (2.86)$$

A variação de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é definida em termos do índice espectral $n(k)$ como

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \equiv n(k) - 1 . \quad (2.87)$$

Na inflação de rolagem lenta, este espectro varia lentamente, de modo que $n \approx 1$. Em alguns modelos de inflação, $n(k)$ é praticamente constante sobre escalas cosmológicas,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{n-1} . \quad (2.88)$$

2.5.3 Parâmetros de rolagem lenta

Este texto basea-se na subseção (6.2.1) da dissertação de Adenauer G. Casali [48].

Existem vários tipos de modelos de inflação obtidos a partir de um dado potencial $V(\phi)$. Para uma maior aceitação deste ou daquele modelo, é necessário calcular os parâmetros de rolagem lenta que possibilitam comparar a teoria com os dados observacionais. Com os parâmetros ϵ e η , podemos obter um resultado para o índice espectral $n(k)$, grandeza, que de acordo com dados observacionais do WMAP, se aproxima de 1.

Contando a partir do fim da inflação, quando $a = a_f$, como as amplitudes são calculadas ao cruzar o horizonte, $k = aH$,

$$k(\phi) = a_f \exp(-N(\phi)) H(\phi) . \quad (2.89)$$

Usando (2.35),

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln k(\phi)}{d\phi} &= -N'(\phi) + \frac{H'(\phi)}{H(\phi)} = -\frac{1}{M_{PL}^2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} + \frac{1}{2} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \\
&= \frac{V(\phi)}{M_{PL}^2 V'(\phi)} \left\{ \frac{M_{PL}^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 - 1 \right\} \\
&= \frac{V(\phi)}{M_{PL}^2 V'(\phi)} \{\epsilon - 1\}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

onde definimos o primeiro parâmetro de rolagem lenta ϵ [5],

$$\epsilon = \frac{M_{PL}^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2. \tag{2.91}$$

Durante a inflação, $\epsilon \ll 1$.

Consideremos agora,

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \frac{d\phi}{d \ln k} \frac{d \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi},$$

onde

$$\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \frac{d \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} = \frac{3V'(\phi)}{V(\phi)} - \frac{2V''(\phi)}{V'(\phi)}. \tag{2.92}$$

Deste modo temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} &= \left\{ \frac{3V'(\phi)}{V(\phi)} - \frac{2V''(\phi)}{V'(\phi)} \right\} M_{PL}^2 \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{1}{\epsilon - 1} \\
&= 3M_{PL}^2 \frac{V'^2(\phi)}{V^2(\phi)} \frac{1}{\{\epsilon - 1\}} - 2M_{PL}^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \frac{1}{\{\epsilon - 1\}},
\end{aligned} \tag{2.93}$$

onde definimos o segundo termo de rolagem lenta η [5],

$$\eta = M_{PL}^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}. \tag{2.94}$$

Durante a inflação, $\epsilon \ll 1$ e $\eta \ll 1$.

Considerando apenas termos lineares nos parâmetros,

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \approx -6\epsilon + 2\eta. \tag{2.95}$$

Da relação (2.87),

$$n(k) - 1 \approx -6\epsilon + 2\eta. \tag{2.96}$$

Durante a inflação, as amplitudes são calculadas ao cruzar o horizonte, $k = aH$. Sendo H aproximadamente constante,

$$d \ln k = H dt .$$

Como $dt \approx -(3H/V'(\phi))d\phi$, encontramos que

$$\frac{d}{d \ln k} = -M_{PL}^2 \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d}{d\phi} . \quad (2.97)$$

A variação do índice espectral $n(k)$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d \ln k} &= -6 \frac{d\epsilon}{d \ln k} + 2 \frac{d\eta}{d \ln k} \\ &= -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 + 2\zeta , \end{aligned} \quad (2.98)$$

onde

$$\frac{d\epsilon}{d \ln k} = -M_{PL}^2 \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d\epsilon}{d\phi} = 2\epsilon\eta - 4\epsilon^2 ,$$

$$\frac{d\eta}{d \ln k} = -M_{PL}^2 \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d\eta}{d\phi} = -2\epsilon\eta + \zeta$$

e

$$\zeta = M_{PL}^4 \frac{V'(\phi)V'''(\phi)}{V^2(\phi)} . \quad (2.99)$$

Assim, apresentamos os parâmetros de rolagem lenta que serão úteis para o estudo dos modelos inflacionários.

2.6 O potencial do campo escalar

Todos os modelos de inflação são resultantes de um dado potencial V que é uma função dos campos escalares. No contexto da inflação, a escala de energia relevante é a do campo inflaton.

2.6.1 Supersimetria e Supergravidade

A forma do potencial de um dado campo escalar é descrita por uma *teoria de partículas*, tal como a do *Modelo Padrão* ou a de uma extensão supersimétrica deste. Esta é a teoria

mais relevante durante a inflação, pois ela pede campos escalares fundamentais. Sem *supersimetria* (*susi*), os efeitos quânticos produzem massas da ordem da massa de Planck M_{PL} a cada um dos campos escalares fundamentais. Isto em geral pede um ajuste fino, mas com a *susi*, o cancelamento é automático.

A supersimetria é uma extensão da invariância de Lorentz. Ela supõe que cada partícula fermiônica tem seu “superpar” bosônico e vice-versa. Em particular, cada partícula do Modelo Padrão tem um superpar desconhecido. Há *squarks* e *sleptons* com *spin* 0. *Higgsinos* com *spin* 1/2, e *gauginos* com *spin* 1/2. Uma *susi* local (supersimetria local) é chamada de *supergravidade*, pois ela está diretamente associada à gravidade, o *gráviton* (*spin* 2) acompanhado pelo *gravitino* (*spin* 3/2) [16].

Na teoria supersimétrica, todos os campos escalares são complexos. Estes potenciais podem ser tratados como reais se considerarmos a parte real ou imaginária dos campos complexos, onde o inflaton representará uma destas partes, assumindo que ele tem uma única componente.

Uma teoria de campo é especificada por sua lagrangiana $\mathcal{L}$, tal que a ação é $S = \int d^4x \mathcal{L}$. Ela tem dimensão de (*energia*)⁴, e é uma função dos campos e suas derivadas com respeito ao espaço-tempo. Em uma dada teoria, a lagrangiana contém parâmetros que definem as massas das partículas e suas interações. Em uma *teoria renormalizável*, o número de parâmetros é finito, tal como na teoria do modelo padrão, e ela pode ser considerada como uma aproximação para uma *teoria não-renormalizável*. Esta teoria contém um número infinito de parâmetros e pode ser substituída por uma teoria renormalizável quando M_{PL} é dita infinita. As teorias supersimétricas podem ser renormalizáveis ou não-renormalizáveis. A supergravidade é uma teoria não-renormalizável.

2.6.2 Lagrangiana

Os campos podem ser classificados de acordo com o *spin* das partículas correspondentes. Na teoria do Modelo Padrão, os campos podem ter *spin* 0 (*partícula de Higgs*), *spin* 1/2 (*quarks e leptons*) e *spin* 1 (*partículas mediadoras de interação*). Há também o *gráviton* com *spin* 2, e de acordo com a supergravidade, o *gravitino* com *spin* 3/2.

Os campos de *spin* 0 são chamados de *campos escalares*, sendo estes os campos necessários para os modelos inflacionários. Durante a inflação, somente campos escalares existem no universo. A um nível clássico, a evolução destes campos é determinada pela parte da Lagrangiana $\mathcal{L}$ que contém somente campos escalares. Sendo somente um campo escalar (real) relevante, temos que a lagrangiana em um espaço-tempo plano é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) . \quad (2.100)$$

Nesta expressão, $V(\phi)$ é o potencial. O primeiro termo é chamado de **termo de energia cinética**, e ∂_μ representa a derivada espaço-tempo $\partial/\partial x^\mu$. A equação de movimento que governa a dinâmica deste campo é

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + V'(\phi) = 0 , \quad (2.101)$$

onde a linha corresponde à derivada em ϕ .

Para um campo homogêneo espacialmente,

$$\ddot{\phi} + V'(\phi) = 0 . \quad (2.102)$$

A condição de um espaço-tempo plano corresponde à Relatividade Especial. Em um universo que se expande, precisamos da Relatividade Geral que descreve espaços-tempos curvos. Seu efeito, no caso de um universo homogêneo, sobre a equação de campo (2.102) é introduzir um termo extra $-3H\dot{\phi}$ ao lado esquerdo desta equação,

$$\ddot{\phi} + V'(\phi) - 3H\dot{\phi} = 0 . \quad (2.103)$$

Este termo é análogo ao termo de atrito para o movimento da partícula.

Um campo não-interagente (partícula livre) tem o potencial $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ onde m é massa da partícula correspondente. As equações de campo possuem uma solução $\phi = 0$, independente do tempo e homogêneo espacialmente. Esta solução representa o vácuo (ponto de mínimo de ϕ). As ondas planas, que correspondem a oscilações em torno do estado de vácuo, representam partículas livres das espécies de ϕ , com massa m . Em uma teoria renormalizável, há somente termos elevados a terceira e quarta potência de $V(\phi)$ (o termo cúbico é desprezado pela simetria Z_2), de modo que

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 , \quad (2.104)$$

onde $\lambda \leq 1$, caso contrário, a interação seria tão forte que ϕ não corresponderia a uma partícula física.

De forma geral, o potencial do campo escalar com um número infinito de termos pode ser escrito como

$$V(\phi) = V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda_3 M_{PL}\phi^3 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \sum_{d=5}^{\infty} \lambda_d M_{PL}^{4-d} \phi^d . \quad (2.105)$$

Considerando dois campos escalares ϕ e ψ , a densidade lagrangiana mais simples é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - V(\phi, \psi) . \quad (2.106)$$

onde as equações de campos são

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + \partial V(\phi, \psi) / \partial \phi = 0 , \quad (2.107)$$

$$\ddot{\psi} - \nabla^2 \psi + \partial V(\phi, \psi) / \partial \psi = 0 . \quad (2.108)$$

O potencial, como uma função de todos os campos, é dado por uma série de potência. Considerando a origem como o vácuo do espaço de campo ($\phi = 0$), temos que as séries de potência de um único campo têm a forma (2.105), de modo que os outros campos são fixados na origem.

Sendo o campo complexo ϕ definido pela combinação de dois campos reais ϕ_1 e ϕ_2 ,

$$\phi = (1/\sqrt{2})(\phi_1 + i\phi_2) . \quad (2.109)$$

O termo de energia cinética correspondente a (2.106) é

$$\mathcal{L}_{cin} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi , \quad (2.110)$$

onde ϕ^* representa o campo complexo do campo escalar ϕ .

O uso de um campo complexo é necessário somente se o potencial depende exclusivamente de $|\phi|$. Então, a equação (2.104) é substituída por

$$V(\phi) = V_0 + m^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4} \lambda |\phi|^4 . \quad (2.111)$$

Para campos reais ϕ_n , o termo cinético é dado por

$$\mathcal{L}_{cin} = \sum_{m,n} = H_{mn} \partial_\mu \phi_m \partial^\mu \phi_n , \quad (2.112)$$

onde H_{mn} é uma função arbitrária dos campos. Em uma teoria supersimétrica, todos os campos são complexos e a forma geral para o termo cinético é

$$\mathcal{L}_{cin} = \sum_{m,n} = K_{mn*} \partial_\mu \phi_m \partial^\mu \phi_n^* , \quad (2.113)$$

onde $K_{mn*} \equiv \partial^2 K / \partial \phi_m \partial \phi_n^*$ e K é o *potencial de Kähler* [16].

Neste caso, a expressão canônica (2.106) é recuperada somente se $K_{mn*} = \delta_{mn}$. Considerando mais de um campo escalar, não é possível recuperar esta expressão. Deste modo, o espaço dos campos é dito curvo. Um termo cinético não-canônico modifica as equações de campo. Na inflação de rolagem lenta, devemos assumir a normalização canônica deste termo.

2.6.3 Simetria quebrada espontaneamente e valores esperados no vácuo (vevs)

O valor de mínimo do potencial representa um possível estado de vácuo, onde os valores dos campos escalares, que correspondem a este ponto de mínimo, são independentes do tempo. Para um simples exemplo, considere o potencial (2.111) com o sinal do termo de massa trocado,

$$V(\phi) = V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (2.114)$$

Este potencial possui a mesma simetria Z_2 como o original, correspondente a invariância sobre $\phi \rightarrow -\phi$. De acordo com a figura (2.5), o mínimo do campo na origem é deslocado para os mínimos $\phi = \pm(m/\sqrt{\lambda})$.

Figura 2.5: A linha cheia ilustra esquematicamente a equação (2.114). A linha pontilhada mostra o mesmo potencial com o sinal de m^2 trocado em relação ao primeiro potencial.

Escolhendo um novo campo $\tilde{\phi} = \phi - (m/\sqrt{\lambda})$ e um apropriado valor a V_0 , temos que V próximo de seu valor de mínimo vale

$$V = \frac{1}{2}\tilde{m}^2\tilde{\phi}^2 + A\tilde{\phi}^3 + B\tilde{\phi}^4, \quad (2.115)$$

onde $\tilde{m} = \sqrt{2m}$.

Os mínimos do campo escalar ($\phi = \pm(m/\sqrt{\lambda})$) representam os possíveis valores esperados de vácuo (vevs) deste campo. Cada um deles indica um possível vácuo da teoria, o valor de mínimo do potencial, em torno do qual as pequenas oscilações correspondem (depois da quantização) a partículas. Estas oscilações são consideradas como um campo “quase-livre”, caso os termos quadráticos e cúbicos na equação (2.115) sejam pequenos. A simetria original Z_2 não está evidente nesta teoria de campo “quase-livre”, portanto, ela é *quebrada espontaneamente*. O vev de um campo é denotado por braquetes, tal que para este exemplo, temos $\langle\phi\rangle = \pm m/\sqrt{\lambda}$.

O campo que quebra espontaneamente a simetria, que denotamos por ϕ , não precisa ser um dos campos elementares que aparecem na lagrangiana. Ele pode ser um produto destes campos, chamado de *condensado*. Estes campos possuem spins inteiros. Portanto, se todos os escalares que quebram a simetria são *condensados*, não há a necessidade de campos escalares elementares.

2.6.4 A restauração de uma simetria interna quebrada espontaneamente

No universo primordial, os campos escalares são substituídos por seus valores esperados de vácuo (vevs). Em particular, um campo com vev diferente de zero, que corresponde a uma simetria quebrada espontaneamente, pode ter um valor igual a zero no universo primordial. Então a simetria é restaurada neste período. Isto pode acontecer durante a inflação e também durante a cosmologia de grande explosão.

Um simples exemplo é o do potencial abaixo que depende dos campos reais ϕ e ψ

$$V = V_0 - \frac{1}{2}m_\psi^2\psi^2 + \frac{1}{4}\lambda\psi^4 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2 \quad (2.116)$$

$$= \frac{1}{4}\lambda(M^2 - \psi^2)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2, \quad (2.117)$$

onde os parâmetros m_ψ e V_0 são relacionados por

$$m_\psi^2 = \lambda M^2 \quad (2.118)$$

e

$$V_0 = \frac{1}{4}\lambda M^4 = \frac{1}{4}M^2 m_\psi^2. \quad (2.119)$$

O mínimo de V , correspondendo ao vácuo, está em $\phi = 0$ e $\psi = M$. O último campo tem vev diferente de zero de modo que a simetria $\psi \rightarrow -\psi$ é quebrada espontaneamente.

Consideremos que, no universo primordial, ϕ^2 tem um valor diferente de zero, maior do que seu valor crítico $\phi_c^2 = m_\psi^2/\lambda'$. O mínimo de ψ é $\psi = 0$ e a simetria é restaurada.

Neste exemplo, o campo ϕ representa o *inflaton*. Então, a simetria $\psi \rightarrow -\psi$ é recuperada até que ϕ seja menor que ϕ_c , depois que ela é quebrada espontaneamente. Se V_0 domina, a inflação cessa, sendo este um exemplo de inflação híbrida.

2.6.5 Potencial a nível de árvore

Utilizando o contexto de supergravidade, consideremos um dado potencial como uma função do campo inflaton real ϕ , durante a fase inflacionária. Na maioria dos modelos, todos os outros campos são fixados na origem, e alguma simetria proíbe os termos ímpares no potencial. Então o potencial do inflaton é da forma

$$V(\phi) = V_0 \pm \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \lambda M_{PL}^{-2}\phi^6 + \dots \quad (2.120)$$

onde o sinal **positivo** no segundo termo corresponde à *inflação híbrida* e o negativo a uma *inflação de campo simples*.

Os termos de ordem mais baixa da equação (2.120), os quais não envolvem M_{PL} , são chamados de **renormalizáveis**. Os termos de ordem mais alta, que desaparecem no limite $M_{PL} \rightarrow \infty$, são chamados de **não-renormalizáveis**.

2.6.6 Inflação com um potencial a nível de árvore

Dada uma inflação gerada por um *potencial a nível de árvore*, na qual as condições de rolagem lenta $|\eta| \ll 1$ e $\epsilon \ll 1$ são válidas. Durante a inflação, os termos não-renormalizáveis são desprezados, de modo que não há termos ímpares,

$$V(\phi) \simeq V_0 \pm \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (2.121)$$

Aplicando a condição $|\eta| \ll 1$ a cada um dos termos deste potencial, temos

$$\lambda \frac{M_{PL}^2 \phi^2}{V_0} \ll 1 \quad (2.122)$$

e

$$\frac{M_{PL}^2 m^2}{V_0} \ll 1 \quad (2.123)$$

Em uma teoria supersimétrica globalmente com somente termos renormalizáveis, há campos em cujas direções o *potencial a nível de árvore* é aproximadamente plano enquanto os outros campos estão fixos na origem. Tais campos são chamados de *direções planas*

(em um espaço de campo). Em uma susi global, para os modelos de inflação, escolhemos o inflaton como uma *direção plana*.

2.6.7 Susi global renormalizável

Em uma teoria supersimétrica globalmente sem termos renormalizáveis, o potencial é da forma $V = V_F + V_D$, onde os termos são chamados, respectivamente, *termos F* e *termos D*.

O *termo D* anula-se durante a inflação exceto em alguns modelos especiais. O *termo F* é da forma

$$V_F = \sum_i |W_i|^2 . \quad (2.124)$$

O superpotencial W é uma função holomórfica dos campos complexos ϕ_i , e o subscrito i indica $\partial/\partial\phi_i$. Na construção de um modelo supersimétrico de inflação, o inflaton corresponde a um campo de direção plana, de modo que seu potencial a nível de árvore é aproximadamente plano no limite da susi global renormalizável.

2.6.8 Forma de V em supergravidade

Para especificar V em supergravidade, necessitamos de um superpotencial W , e também de um potencial adicional conhecido como *potencial de Kähler K*, como visto na sub-seção (1.6.2). Este último campo é uma função não-holomórfica dos campos complexos ϕ_n e de seus complexos conjugados ϕ_n^* . A função de Kähler dada pela equação (2.113) especifica os termos cinéticos da lagrangiana do campo escalar.

O potencial V novamente consiste de um *termo D* e de um *termo F*, no entanto, ignorando o último temos

$$V = e^{K/M_{PL}^2} \tilde{V} , \quad (2.125)$$

onde

$$\tilde{V} = (W_n + M_{PL}^{-2} W K_n) K^{nm*} (W_{m*}^* + M_{PL}^{-2} W^* K_{m*}) - 3M_{PL}^{-2} |W|^2 . \quad (2.126)$$

A matriz K^{nm*} é o inverso de K_{n*m} . A susi global corresponde ao limite de $M_{PL} \rightarrow \infty$.

Perto da origem do espaço de campos, escolhemos os campos a serem normalizados canonicamente, correspondendo a

$$K = \sum_n |\phi_n|^2 + \dots, \quad (2.127)$$

onde

$$K_{n^*m} = \delta_{nm} + \dots. \quad (2.128)$$

2.7 Modelos Inflacionários

Na construção de modelos inflacionários, é necessário encontrar um mecanismo pelo qual o universo dominado pelo potencial do inflaton (energia de vácuo), possa fazer a transição do universo inflacionário para um universo dominado pela era da radiação. Um modelo de inflação simplesmente dá a forma do potencial efetivo $V(\phi)$ que será responsável por esta transição de fases.

Na construção de modelos inflacionários, é necessário encontrar um mecanismo pelo qual o universo, dominado pelo potencial do inflaton (energia de vácuo), possa fazer a transição do universo inflacionário para um universo dominado pela era da radiação. Um modelo de inflação simplesmente dá a forma do potencial efetivo $V(\phi)$ que será responsável por esta transição de fases.

É útil distinguir duas classes de modelos inflacionários [2]: *tipo-I* e *tipo-II*.

Os *modelos inflacionários do tipo-I* são aqueles caracterizados por um simples campo escalar, o inflaton, que rola lentamente sobre a influência do potencial de inflaton $V(\phi)$. Este tipo de modelo apresenta três sub-classes. Os *modelos tipo-Ia* são os modelos de “campo grande”, onde o campo inflaton parte de um valor grande e evolui em direção ao seu ponto de mínimo. Exemplos destes modelos são os de *inflação caótica* e *inflação de lei de potência*. Os *modelos tipo-Ib* são modelos de “campo pequeno”, onde o campo inflaton começa pequeno e evolui para seu ponto de mínimo, de modo que este ponto final é maior que o inicial. Exemplos destes modelos são os de *inflação nova* e *inflação natural*. Finalmente, os *modelos de inflação híbrida* são classificados como *modelos tipo-Ic*. A inflação híbrida é determinada pela transição de primeira ordem ou pela ação de um segundo campo escalar. Para os modelos tipo-Ia ou tipo-Ib, a energia de vácuo é aproximadamente zero no fim da inflação. Há também uma diferença peculiar para os modelos das duas primeiras sub-classes: a segunda derivada do potencial do inflaton é positiva, $V'' > 0$, em tipo-Ia e é negativa, $V'' < 0$, em tipo-Ib. As diferentes subclasses para o modelo tipo-I são exemplificadas na figura (2.6).

Os *modelos inflacionários do tipo-II* são os modelos de Jordan-Brans-Dicke [17] caracterizados pelo campo inflaton e pelo campo escalar JBD, em homenagem aos seus

Figura 2.6: Esta figura exemplifica diferentes tipos de potenciais de inflaton. Nos três exemplos, o inflaton é deslocado de seu valor de mínimo e evolui em direção a este ponto sobre a influência do potencial $V(\phi)$.

criadores. Para maiores referências, indicamos as seguintes leituras [18] e [19].

2.8 Modelos Inflacionários - Parte I: modelos de campo simples

Os *modelos de campo simples* correspondem aos tipo-I e tipo-II, de acordo com a classificação acima. Nestes modelos, a inflação é gerada por um simples campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$ chamado de *inflaton*. Este campo produz um potencial $V(\phi)$, que de acordo com equação (2.27), representa a densidade de energia que preenche o universo durante esta fase. O campo inflaton rola lentamente, sob influência de seu potencial, partindo de um valor inicial ϕ_i em direção a seu valor de mínimo ϕ_f . O valor de mínimo do potencial do inflaton corresponde ao valor esperado no vácuo dado por $V(\phi_f)$. No caso do inflaton, seu valor de mínimo pode ser maior (modelo tipo-Ia) ou menor (modelo tipo-Ib) que o seu valor inicial. O valor de mínimo do potencial é sempre menor do que durante a inflação. A inflação termina quando se atinge este ponto de mínimo, devido à violação das **condições de rolagem lenta**. O universo deixa de ser dominado pela energia de vácuo e passa a ser dominada pela **era da radiação** e posteriormente pela **era da matéria** (cosmologia padrão de grande explosão).

Na maioria destes modelos, o valor do parâmetro de rolagem lenta, ϵ , é muito pequeno, de tal modo que possamos desprezá-lo. Deste modo, a equação (2.96) pode ser dada por

$$n \approx 1 + 2\eta . \quad (2.129)$$

Quando a fase inflacionária termina, as condições de rolagem lenta são violadas. Deste modo, o valor de mínimo do inflaton ϕ_f é dado por $\epsilon(\phi_f) \approx 1$ ou por $\eta(\phi_f) \approx 1$. O número de dobras necessário para que a inflação ocorra é de aproximadamente $N_e > 50$ [7]. Usando a equação (2.36) e os valores de N_e e ϕ_f podemos obter uma expressão ao campo inflaton ϕ .

2.8.1 Potencial Monomial- Inflação Caótica

O cenário inflacionário mais simples e de maior sucesso é conhecido hoje como *inflação caótica*. Neste modelo, supomos que o universo seja governado por um campo inflaton $\phi(t)$, minimamente acoplado à gravidade. Este campo gera um potencial $V(\phi)$ muito simples, dado por

$$V(\phi) = 1/2m^2\phi^2 . \quad (2.130)$$

Uma forma alternativa é defini-lo como

$$V = \lambda M_{ML}^{4-\alpha} \phi^\alpha , \quad (2.131)$$

onde α representa um número inteiro positivo e λ , uma grandeza adimensional.

Os parâmetros de rolagem lenta são

$$\epsilon = \frac{\alpha^2}{2} \frac{M_{PL}^2}{\phi^2} \quad (2.132)$$

e

$$\eta = \alpha(\alpha - 1) \frac{M_{PL}^2}{\phi^2} . \quad (2.133)$$

Neste caso, o declive do potencial inflaton é muito pequeno durante a era inflacionária e, portanto, o inflaton é aproximadamente constante, figura (2.7).

O campo escalar inicia-se deslocado de seu mínimo, dando início ao processo de expansão exponencial. A necessidade de $N_e(\phi) \approx 60$ fornece um campo inflaton $\phi \approx 10M_{PL}$. A densidade de perturbação produz uma massa ao inflaton muito pequena, $m \approx 5 \cdot 10^{-5} M_{PL}$.

Figura 2.7: Comportamento do potencial do modelo de inflação caótica. Este modelo pertence à classe dos modelos de “campo grande”, tipo-I.

A inflação termina quando as condições de rolagem lenta são violadas, tal que $\phi_f \simeq \alpha M_{PL}$. Para este tipo de potencial, o índice espectral $n(k)$ é dado por

$$n(k) \approx 1 + 2\eta = 1 - \frac{(\alpha + 2)}{2N}. \quad (2.134)$$

2.8.2 Inflação Natural

O potencial que produz esta inflação é

$$V(\phi) = m^4 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right], \quad (2.135)$$

onde as constantes m e f representam duas escalas de massa.

Consideremos o caso onde a inflação está localizada na região, $0 < \phi < \pi f$, e a inflação predomina enquanto o inflaton rolar lentamente em direção ao mínimo do potencial em $\phi_f = \pi f$.

Os parâmetros de rolagem lenta são

$$\epsilon = \frac{M_{PL}^2}{16\pi f^2} \left[\frac{\sin(\phi/f)}{1 + \cos(\phi/f)} \right]^2, \quad \eta = -\frac{M_{PL}^2}{8\pi f^2} \frac{\cos(\phi/f)}{1 + \cos(\phi/f)}. \quad (2.136)$$

Estes parâmetros ϵ e η dependem apenas de f , mas não de m . A inflação inicia quando o ponto inicial do inflaton for $\phi_i \approx 0$. A era da radiação se inicia no instante em que o inflaton começa a oscilar ao redor de seu ponto de mínimo $\phi_f = \pi f$. Este processo é ilustrado em (2.8).

Figura 2.8: Comportamento do potencial do modelo de inflação natural. Este modelo pertence à classe dos modelos de “campo pequeno”, tipo-II.

2.8.3 Potencial quadrático invertido

O potencial quadrático invertido obedece a seguinte lei,

$$V = V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots, \quad (2.137)$$

onde os pontos indicam o efeito das potências maiores.

O parâmetro ϵ deste potencial é

$$\epsilon = \frac{1}{2}M_{PL}^2 \frac{m^4\phi^2}{(V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots)^2}. \quad (2.138)$$

Sendo o potencial responsável pela inflação aproximadamente constante temos que

$$\epsilon \approx \frac{1}{2}M_{PL}^2 \frac{m^4\phi^2}{V_0^2}. \quad (2.139)$$

O mesmo acontece com o parâmetro η

$$\eta = -M_{PL}^2 \frac{m^2}{(V_0 - \frac{1}{2}M^2\phi^2)} \approx -M_{PL}^2 \frac{m^2}{V_0}. \quad (2.140)$$

Deste modo, sendo ϵ dado por uma potência quadrática em $V(\phi)$, podemos desprezá-lo. O índice espectral $n(k)$ é

$$n \approx 1 + 2\eta \approx 1 - 2M_{PL}^2 \frac{m^2}{V_0}. \quad (2.141)$$

Tabela 2.1: Expressões analíticas para o índice espectral $n(k)$ e a sua variação $dn/d\ln k$ para vários potenciais.

comentários	$V(\phi)/V_0$	$\frac{1}{2}(n-1)$	$\frac{1}{2}\frac{dn}{d\ln k}$
termo de massa	$1 \pm \frac{1}{2}c\frac{\phi^2}{M_{PL}^2}$	$\pm c$	0
susy quebrada suavemente	$1 \pm \frac{1}{2}c\frac{\phi^2}{M_{PL}^2}\ln\frac{\phi}{Q}$	$\pm c + \sigma e^{\pm cN}$	$\mp c\sigma e^{\pm cN}$
susy quebrada espontaneamente	$1 + c\ln\frac{\phi}{Q}$	$-\frac{1}{2N}$	$-\frac{1}{2}\frac{1}{N^2}$
$p > 2$ ou $-\infty < p < 1$	$1 - c\phi^p$	$-\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\frac{1}{N}$	$-\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\frac{1}{N^2}$
vários modelos	$1 - e^{-q\phi}$	$-\frac{1}{N}$	$-\frac{1}{N^2}$
p um inteiro ≤ -1 ou ≥ 3	$1 + c\phi^p$	$\frac{p-1}{p-2}\frac{1}{N_{max}-N}$	$-\left(\frac{p-2}{p-1}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

O valor mínimo deste campo equivale a

$$\phi_{min} \approx \frac{V_0^{1/2}}{m} \approx M_{PL} \left(\frac{2}{1-n} \right)^{1/2}. \quad (2.142)$$

Neste caso, temos que $\phi_f \sim \phi_{min}$.

2.8.4 Potenciais cúbicos ou de ordem maior

O potencial do inflaton é dado por

$$V(\phi) \approx V_0(1 - \mu\phi^p + \dots) \quad (2.143)$$

com $p \geq 3$.

Os parâmetros de rolagem lenta são

$$\epsilon = \frac{1}{2}M_{PL}^2 \frac{p^2\mu^2V_0^2\phi^{2(p-1)}}{V_0^2(1 - \mu\phi^p + \dots)^2} \approx \frac{1}{2}M_{PL}^2 p^2 \mu^2 \phi^{2(p-1)} \quad (2.144)$$

e

$$\eta = -M_{PL}^2 \frac{p\mu(p-1)V_0\phi^{(p-2)}}{V_0(1 - \mu\phi^p + \dots)} \approx -M_{PL}^2 p\mu\phi^{(p-2)}. \quad (2.145)$$

Para este potencial, sendo $\epsilon < \eta$, o número de e-folds $N(\phi)$ é,

$$\phi^{p-2} = (N\mu p M_{PL}^2 (p-2))^{-1}. \quad (2.146)$$

Substituindo esta igualdade em (2.145),

$$\eta = -\frac{1}{N} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) . \quad (2.147)$$

Portanto, o índice espectral $n(k)$ é

$$n \approx 1 - \frac{2}{N} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) . \quad (2.148)$$

2.8.5 Outro tipo de modelo de campo simples

Outra forma para o potencial pode ser dado por

$$V(\phi) \simeq V_0 \left[1 - \exp \left(-q \frac{\phi}{M_{PL}} \right) \right] , \quad (2.149)$$

com q da ordem de 1.

A inflação termina quando $\phi_f \sim M_{PL}$.

Os parâmetros de rolagem lenta são

$$\epsilon = \frac{1}{2} q^2 \frac{\exp \left(\frac{-2q\phi}{M_{PL}} \right)}{\left[1 - \exp \left(\frac{-q\phi}{M_{PL}} \right) \right]^2} \approx \frac{1}{2} M_{PL}^2 \exp \left(\frac{-2q\phi}{M_{PL}} \right) \quad (2.150)$$

e

$$\eta = -q^2 \frac{\exp \left(\frac{-q\phi}{M_{PL}} \right)}{\left[1 - \exp \left(\frac{-q\phi}{M_{PL}} \right) \right]} \approx -q^2 \exp \left(\frac{-q\phi}{M_{PL}} \right) . \quad (2.151)$$

A expressão para ϕ vale

$$\phi \simeq \frac{M_{PL}}{q} \ln(Nq^2) . \quad (2.152)$$

Deste modo, podemos calcular o índice espectral $n(k)$ como

$$n \simeq 1 - \frac{2}{N} . \quad (2.153)$$

Um resumo completo para todos os diferentes tipos de potenciais do inflaton é apresentado nas tabelas (2.8.3) e (2.8.5) [5].

Na tabela (2.8.3), estão exemplificados diferentes formas para os potenciais do inflaton $V(\phi)$, com suas respectivas equações do índice espectral $n(k)$ e de sua variação $dn/d\ln k$.

Na tabela (2.8.5), encontramos os valores do índice espectral $n(k)$ e de sua variação $dn/d\ln k$ para os potenciais da forma $V_0(1 - c\phi^p)$.

Tabela 2.2: Valores do índice espectral $n(k)$ e de sua variação $dn/d\ln k$ obtidos para potenciais da forma $V_0(1 - c\phi^n)$, onde $(1 - n) = 2(p - 1)/(p - 2)N^{-1}$ e $dn/d\ln k = -2(p - 1)/(p - 2)N^{-2}$.

p	$1 - n$		$-10^3 dn/d\ln k$	
	N=50	N=20	N=50	N=20
$p \rightarrow 0$	0,02	0,05	0,4	2,6
$p \rightarrow -2$	0,03	0,075	0,6	3,8
$p \rightarrow \pm \infty$	0,10	0,05	0,8	5,0
$p \rightarrow 4$	0,06	0,15	1,2	5,4
$p \rightarrow 3$	0,08	0,20	1,6	10,0

2.9 Modelos Inflacionários - Parte II: modelos híbridos

Nos *modelos híbridos*, o campo inflaton de rolagem $\phi(t)$ não é responsável pela densidade de energia. Neste modelo, há um outro campo Ψ que é uma função do inflaton ϕ . Esta interação de $\Psi(\phi)$ com ϕ é responsável em manter o primeiro campo fixo até que o inflaton atinja seu valor crítico ϕ_c . Quando isto aconteça, $\Psi(\phi)$ atinge seu valor de mínimo e a inflação termina. O potencial $V(\phi, \Psi(\phi))$ é dominado pelo campo Ψ e esta contribuição é praticamente constante, pois Ψ mantém-se fixo até que ϕ atinja ϕ_c .

O fim da inflação corresponde à fase de transição de primeira ordem, onde o campo tunela através de uma barreira de potencial, ou à fase de transição de segunda ordem, onde não há barreira.

2.9.1 Inflação Híbrida com um potencial quadrático

O potencial para o modelo de inflação híbrida de segunda ordem é

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda(\Psi^2 - M^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2 \quad (2.154)$$

que pode ser escrito como

$$V = V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_\Psi^2\Psi^2 + \frac{1}{4}\lambda\Psi^4 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2, \quad (2.155)$$

onde $V_0 = m_\Psi^2 M^2/4$ e $m_\Psi^2 = \lambda M^2$.

Este potencial é ilustrado na figura (2.9).

Figura 2.9: Potencial do inflaton híbrido (2.154).

O campo Ψ é fixado na origem se $\phi^2 > \phi_c^2$, onde

$$\phi_c^2 = \frac{m_\Psi^2}{\lambda'} = \frac{\lambda}{\lambda'}. \quad (2.156)$$

Neste regime, a inflação de rolagem lenta é governada pelo potencial quadrático,

$$V = V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.157)$$

Supomos que o primeiro termo é dominante, pois em uma situação oposta teríamos o modelo de campo simples com um potencial monomial.

O índice espectral do potencial é

$$n(k) \approx 1 + 2\eta \approx 1 + 2M_{PL}^2 \frac{m^2}{V_0}. \quad (2.158)$$

Estes são alguns exemplos de modelos inflacionários. Como sabemos, a era inflacionária é governada por um potencial escalar $V(\phi)$, no caso de modelos de campos simples. Para a aceitação de um modelo inflacionário, devemos calcular o índice espectral, $n(k)$, e a sua derivada em relação ao número de onda k , $dn(k)/d\ln k$, e comparar estes resultados com os obtidos experimentalmente pelo WMAP. Para calcular $n(k)$ e $dn(k)/d\ln k$, precisamos apenas do potencial $V(\phi)$. Deste modo, é isto que exemplificamos nos modelos de inflação tipo rolagem lenta e híbrida.

Capítulo 3

Cosmologia de Branas

3.1 Motivação

Existe um grande interesse da comunidade atual de física de partículas e campos em estudar teorias de campo com dimensões extras. Neste contexto, as partículas do modelo padrão da física de altas energias vivem sobre uma hipersuperfície chamada de *3-brana* que está inserida em um espaço-tempo $(4 + d)$ -dimensional chamado *bulk*, onde d é o número de dimensões extras. Os campos gravitacionais vivem sobre todo o espaço-tempo.

Estes modelos se originam dos conceitos de *teoria de cordas*. De acordo com esta teoria, as partículas fundamentais da natureza consistem não em objetos pontuais mas em pequenas cordas de tamanho $l = \sqrt{\alpha}$, onde α é uma constante de acoplamento desta teoria. Um dos aspectos fundamentais da teoria de cordas é a necessidade das dimensões espaciais extras.

O modelo sugerido por Horava e Witten [19, 20], algumas vezes chamado de *Teoria M*, descreve uma teoria efetiva em baixas energias correspondente ao limite de acoplamento forte da teoria da corda heterótica $E_8 \times E_8$. Neste cenário, temos um espaço-tempo de 11 dimensões, onde a dimensão 11 está compactificada por meio de uma *simetria de orbifold* Z_2 . Dois pontos fixos desta simetria definem duas bordas espaço-temporais em 10-dimensões, ou 9-branas. Desta configuração podemos distinguir três tipos de dimensões espaciais: a *dimensão de orbifold*, *3 dimensões espaciais não compactas* que correspondem às 3 coordenadas espaciais ordinárias e, finalmente, *6 dimensões adicionais*, que podem ser compactificadas na forma usual de *Kaluza-Klein*, isto é, em um raio do tamanho do comprimento de Planck ($\approx 10^{-33}\text{cm}$).

Neste contexto, vários problemas surgem na tentativa de se obter teorias unificadas. Um deles é a grande hierarquia entre a escala eletrofraca ($\approx 1\text{TeV}$) e a escala de Planck

($10^{19} GeV$). Uma possível solução foi proposta por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) [21].

Modelos baseados em teoria de cordas tais como o de Horava e Witten, fornecem a motivação para muitos dos modelos em cosmologias de branas.

Neste capítulo, pretendemos explorar os conceitos de cosmologia de branas, objetivando uma discussão não muito extensiva do tema. Apesar desta área de pesquisa ter apenas alguns anos de existência, a simplicidade que a torna passível de investigação por físicos iniciantes foi responsável pela rápida proliferação de um grande número de trabalhos, impossibilitando que venhamos a cobrir todas as faces desta configuração.

3.2 Modelo ADD

Este texto basea-se na seção (1.2) da dissertação de Adenauer G. Casali [48].

O modelo ADD [21] descreve um espaço-tempo $(4 + d)$ -dimensional com d dimensões extras compactas¹ com topologia de toros e um tamanho comum R .

Se o nosso universo possui fundamentalmente $(4 + d)$ dimensões, como a gravitação é a própria dinâmica do espaço-tempo, os campos gravitacionais devem estar livres para se propagarem em todas as direções. Usando a lei de Gauss em $(4 + d)$ -dimensões, o potencial em torno de uma massa pontual m é

$$V(r) = \frac{G_{4+d}m}{r^{1+d}}. \quad (3.1)$$

Em nosso universo, onde o potencial gravitacional tem a forma $1/r$, temos $d = 0$.

Sendo r a distância entre a massa pontual m e o ponto em que medimos o potencial $V(r)$, e R a largura das dimensões extras, sobre escalas de $r < R$, o potencial $(4 + d)$ -dimensional é [22]

$$V \sim r^{-(1+d)}, \quad (3.2)$$

como na equação (3.1). Sobre escalas de $r > R$, onde as dimensões extras não contribuem para as variações do potencial, V comporta-se como um potencial 4-dimensional,

$$V(r) = \frac{G_{4+d}m}{R^d r}. \quad (3.3)$$

A escala de gravitação do nosso universo G_4 pode ser escrita em função da escala fundamental $(4 + d)$ -dimensional, G_{4+d} , e do raio de compactificação R ,

$$G_4 = \frac{G_{4+d}}{R^d}, \quad (3.4)$$

¹Uma dimensão compacta significa limitada por condições de contorno que a tornam finita.

ou, em termos da massa de Planck,

$$M_{PL}^2 = M_{4+d}^{d+2} R^d . \quad (3.5)$$

onde a constante de acoplamento gravitacional $(4+d)$ -dimensional, κ_{4+d}^2 , vale

$$\kappa_{4+d}^2 = G_{4+d} = \frac{1}{M_{4+d}^{2+d}} . \quad (3.6)$$

De acordo com a equação (3.5), a escala de Planck usual torna-se uma constante de acoplamento efetiva que descreve a gravidade sobre escalas muito maiores do que as das dimensões extras. Assim, a hipótese de um universo com dimensões extras não só é imperceptível para nossos instrumentos no grau de precisão atual, como pode sugerir uma solução para o problema da hierarquia ao estabelecer como escala fundamental M_{d+4} e não M_{PL} .

Se fizermos M_{4+d} da ordem da escala eletrofraca ($10^3 GeV$) e $M_{PL} = 10^{19} GeV$, como em unidades relativísticas $1cm \approx 10^{17}/TeV$,

$$M_{PL}^2 = M_{4+d}^{d+2} R^d ,$$

portanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{M_{PL}^{2/d}}{M_{4+d}^{1+2/d}} \\ &= 10^{(32/d-17)} cm . \end{aligned} \quad (3.7)$$

É interessante notar que esta construção exclui a possibilidade de uma única dimensão extra ($d = 1$), pois implicará em violações na gravitação em distâncias da ordem do tamanho solar,

$$R = 10^{15} cm . \quad (3.8)$$

Entretanto, com $d = 2$,

$$R \approx 1mm . \quad (3.9)$$

Deste modo, para os modelos ADD, o número de dimensões extras deve ser $d \geq 2$.

Os experimentos realizados até então revelam que a escala de distância não deve ultrapassar 0, 1mm para não entrar em conflito com a lei de inverso quadrado da gravitação [23].

No modelo ADD, como os campos do modelo padrão estão confinados na 3-brana, podemos considerar dimensões extras grandes, em oposição às dimensões submilimétricas de Kaluza-Klein. A massa de Planck fundamental M_{4+d} , da ordem da escala eletrofraca, pode explicar a grande massa de Planck 4-dimensional M_{PL} que observamos, sempre que o volume nas dimensões extras R^d seja muito grande.

3.3 Modelos de Randall e Sundrum

A cosmologia de branas não é derivada da teoria de cordas. Ela apenas se inspira nesta teoria, mais precisamente na compactificação de Horava-Witten.

Nela, em lugar de considerarmos diretamente uma estrutura de espaço-tempo $R^{10} \times S^1/Z_2$, podemos questionar sobre os efeitos de um modelo $R^4 \times S^1/Z_2$. Neste contexto, o nosso universo é representado por uma hipersuperfície com (3+1)-dimensões de espaço-tempo, 3-brana, inserida em um espaço-tempo 5-dimensional. Somente a gravidade está livre para viajar ao longo da dimensão extra no que se conhece como estrutura de cosmologia de branas.

O avanço da cosmologia de branas deve-se a publicação de dois trabalhos de Lisa Randall e Raman Sundrum na década de noventa [24, 25].

Randall e Sundrum propõem dois modelos precursores ao introduzir um fator assimétrico na métrica de Minkowski em 5-dimensões, isto é, a métrica é não fatorável. Isto se deve ao fato de que a métrica 4-dimensional minkowskiana é multiplicada por um *fator de deformação*. Este fator é dado por uma função exponencial que depende da dimensão extra. Deste modo, a massa efetiva M_{PL} não é determinada pelo tamanho da dimensão extra e sim pelo fator de deformação. A massa de Planck fundamental M_{4+n} da ordem da escala eletrofraca pode explicar a grande massa de Planck 4-dimensional M_{PL} que observamos, sempre que o fator exponencial for pequeno.

Existem dois modelos de Randall e Sundrum. O modelo RS-I [24] considera uma dimensão extra compacta enquanto que o modelo RS-II [25] considera um espaço-tempo 5-dimensional não-compacto, sem violar a gravitação para energias inferiores aos limites experimentalmente conhecidos.

3.3.1 Modelo RS-I

Este texto baseia-se na subseção (1.2.1) da dissertação de Adenauer G. Casali [48].

O modelo inicial de Randall e Sundrum visa solucionar o problema da hierarquia

com apenas uma dimensão extra, consistindo em um espaço-tempo AdS_5^2 , com a quinta dimensão compacta entre as duas 3-branas, [24]. Fazemos $-\pi r_c < y < \pi r_c$ a coordenada da dimensão extra e r_c o raio de compactificação com a brana visível (nosso universo) localizado em $y = 0$ e uma segunda brana escondida em $y = \pi r_c$, tal que a dimensão é compacta. Exige-se ainda periodicidade em y e simetria Z_2 , $\phi \rightarrow -\phi$, em torno de ambas as branas.

A ação clássica da gravidade que descreve o cenário RS-I é dada por

$$S = S_{5D} + S_{vis} + S_{esc} , \quad (3.10)$$

$$S_{5D} = \int d^4x dy \sqrt{|G|} \{-\Lambda_{5D} + 2M_{5D}^3 R\} , \quad (3.11)$$

$$S_{esc} = \int d^4x dy \sqrt{|g_{esc}|} \{\mathcal{L}_{esc} - 2\lambda_{esc}\} \delta(y - \pi r_c) , \quad (3.12)$$

$$S_{vis} = \int d^4x dy \sqrt{|g_{vis}|} \{\mathcal{L}_{vis} - 2\lambda_{vis}\} \delta(y) . \quad (3.13)$$

onde λ_{vis} e λ_{esc} correspondem à tensão das branas visível e escondida, respectivamente e M_{5D} define a escala fundamental em 5 dimensões. A lagrangiana das 3-branas é dada por $\mathcal{L}$. As métricas que aparecem no segundo e terceiro termos referem-se às métricas nas 3-branas,

$$g_{vis}^{ab} = G^{\mu\nu}(y=0) \delta_\mu^a \delta_\nu^b \quad (3.14)$$

$$g_{esc}^{ab} = G^{\mu\nu}(y=\pi r_c) \delta_\mu^a \delta_\nu^b \quad (3.15)$$

para $\mu, \nu = 0...4$ e $a, b = 0...3$.

Variando (3.10) temos

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x dy \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{|G|} [-\Lambda_{5D} + 2M_{5D}^3 R] \right. \\ & + \sqrt{|G|} 2M_{5D}^3 [-R^{\mu\nu} \delta G_{\mu\nu} + G^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \\ & - \sqrt{|g_{vis}|} g_{vis}^{ab} \delta g_{ab}^{vis} \lambda_{vis} \delta(y) \\ & \left. - \sqrt{|g_{esc}|} g_{esc}^{ab} \delta g_{ab}^{esc} \lambda_{esc} \delta(y - \pi r_c) \right\} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como nas fronteiras

$$\delta g_{ab}^{esc} = \delta G_{\mu\nu} \delta_a^\mu \delta_b^\nu , \quad (3.17)$$

²No espaço-tempo AdS_5 , a constante cosmológica 5-dimensional é negativa, $\Lambda_{5D} < 0$.

desprezando o termo envolvendo $\delta R_{\mu\nu}$, obtemos as equações de campo,

$$\begin{aligned} \sqrt{|G|} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} G^{\mu\nu} R \right] &= -\frac{1}{4M_{5D}^3} \left[\sqrt{|G|} G^{\mu\nu} \Lambda_{5D} + 2\sqrt{|g_{esc}|} g_{esc}^{ab} \delta_a^\mu \delta_b^\nu \lambda_{esc} \delta(y - \pi r_c) \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{|g_{vis}|} g_{vis}^{ab} \delta_a^\mu \delta_b^\nu \lambda_{vis} \delta(y) \right] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Randall e Sundrum sugerem uma métrica não-fatorável do tipo

$$ds^2 = e^{2\sigma(y)} \eta_{ab} dx^a dx^b + dy^2 . \quad (3.19)$$

As únicas componentes não-nulas da conexão para esta métrica são

$$\Gamma_{0y}^0 = \Gamma_{y0}^0 = \Gamma_{iy}^i = \Gamma_{yi}^i = \sigma' \quad (3.20)$$

e

$$\Gamma_{00}^y = -\Gamma_{ii}^y = \sigma' e^{2\sigma} . \quad (3.21)$$

As componentes não-nulas do tensor de Ricci são

$$R_{00} = \partial_y \Gamma_{00}^y + 2\Gamma_{00}^y \Gamma_{y0}^0 = e^{2\sigma} (\sigma'' + 4\sigma'^2) , \quad (3.22)$$

$$R_{ii} = \partial_y \Gamma_{ii}^y + 2\Gamma_{ii}^y \Gamma_{y0}^0 = -e^{2\sigma} (\sigma'' + 4\sigma'^2) , \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

e

$$R_{yy} = -\partial_y (\Gamma_{y0}^0 + 3\Gamma_{yi}^i) - (\Gamma_{y0}^0 \Gamma_{y0}^0 + 3\Gamma_{yi}^i \Gamma_{yi}^i) = -4(\sigma'' + \sigma'^2) . \quad (3.25)$$

O escalar de Ricci é

$$\begin{aligned} R &= -e^{-2\sigma} R_{00} + 3e^{-2\sigma} R_{ii} + R_{yy} \\ &= (\sigma'' + 4\sigma'^2) + 3(\sigma'' + 4\sigma'^2) + 4(\sigma'' + \sigma'^2) \\ &= -(8\sigma'' + 20\sigma'^2) . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aplicando estes resultados na equação de Einstein (3.18), obtemos que a componente (y, y) do tensor de Einstein é

$$R_{yy} - \frac{1}{2} G_{yy} R = \frac{1}{4M_{5D}^3} G_{yy} \Lambda_{5D} ,$$

$$4(\sigma'' + \sigma'^2) - \frac{1}{2}(8\sigma'' + 20\sigma'^2) = -\frac{1}{4M_{5D}^3} \Lambda_{5D} ,$$

$$6\sigma'^2 = -\frac{1}{4M_{5D}^3}\Lambda_{5D} , \quad (3.27)$$

enquanto a componente $(0, 0)$ é

$$\begin{aligned} \sqrt{|G|}(R_{00} - \frac{1}{2}G_{00}R) &= -\frac{1}{4M_{5D}^3} \left([\sqrt{|G|}G_{00}\Lambda_{5D} + 2\sqrt{|g_{esc}|}g_{esc}\lambda_{esc}\delta(y - \pi r_c) \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{|g_{vis}|}g_{vis}\lambda_{vis}\delta(y) \right) \\ (-3\sigma'' - 6\sigma'^2) &= -\frac{1}{4M_{5D}^3}[\Lambda_{5D} + 2\lambda_{vis}\delta(y) + 2\lambda_{esc}\delta(y - \pi r_c)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

(a equação resultante das componentes espaciais da 3-brana é idêntica à parte temporal).

Substituindo o resultado (3.27) em (3.28), temos

$$3\sigma'' = \frac{\lambda_{vis}\delta(\phi)}{2M_{5D}^3} + \frac{\lambda_{esc}\delta(\phi - \pi r_c)}{2M_{5D}^3} . \quad (3.29)$$

De acordo com a simetria de orbifold $y \rightarrow -y$, a solução da equação (3.27) é

$$\sigma = \pm|y|\sqrt{-\frac{\Lambda_{5D}}{24M_{5D}^3}} . \quad (3.30)$$

Neste caso, temos que $\Lambda_{5D} < 0$, portanto, este cenário representa um espaço-tempo AdS_5 , como suposto inicialmente.

A periodicidade da coordenada y indica que

$$\sigma'' = \pm 2\sqrt{-\frac{\Lambda_{5D}}{24M_{5D}^3}}[\delta(y) - \delta(y - \pi r_c)] . \quad (3.31)$$

Comparando com (3.29), concluímos que, para que a métrica (3.19) seja solução da equação de Einstein, devemos ter

$$\lambda_{vis} = -\lambda_{esc} = \mp 12M_{5D}^3 k \quad (3.32)$$

sendo

$$k = \frac{1}{l} = \sqrt{-\frac{\Lambda_{5D}}{24M_{5D}^3}} \quad (3.33)$$

ou

$$\Lambda_{5D} = -24M_{5D}^3 k^2 , \quad (3.34)$$

onde obtemos um ajuste fino entre a tensão da brana e a constante cosmológica $5D$.

A métrica (3.19) também pode ser reescrita como

$$ds^2 = e^{\pm 2k|y|}\eta_{ab}dx^a dx^b + dy^2 . \quad (3.35)$$

O sinal positivo na métrica (3.35) corresponde ao primeiro modelo de Randall e Sundrum (RS-I ou compacto), onde a brana escondida possui tensão positiva enquanto a brana visível (nosso universo) possui tensão negativa.

Vejamos agora como o termo exponencial na métrica gera a hierarquia. Consideremos flutuações gravitacionais sem massa ao redor da métrica (3.35) da forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} , \quad (3.36)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ representa flutuações tensoriais sobre o espaço de Minkowski, isto é, ele é o gráviton físico da teoria efetiva $4 - D$.

Substituindo as flutuações na ação original S_{5D} , (3.10), temos que o termo de curvatura da ação pode ser escrito como

$$S = \int d^4x dy 2\sqrt{e^{8k|y|}|\bar{g}|} M_{5D}^3 R . \quad (3.37)$$

Denotando por $\bar{R}$ o escalar de Ricci quadri-dimensional construído com a métrica $\bar{g}$,

$$g_{vis}^{ab} = e^{-2k|y|}\bar{g}^{ab}\delta(y) , g_{esc}^{ab} = e^{-2k|y|}\bar{g}^{ab}\delta(y - \pi r_c) \quad (3.38)$$

e

$$R = g^{ab}R_{ab} + \dots = e^{-2k|y|}\bar{g}^{ab}R_{ab} + \dots = e^{-2k|y|}\bar{R} + \dots \quad (3.39)$$

Logo, a ação efetiva em quatro dimensões é

$$S_{eff} = \int d^4x \int dy \sqrt{\bar{g}} 2M^3 e^{2k|y|} \bar{R} . \quad (3.40)$$

Integrando em y , obtemos a ação em $4D$, da qual podemos derivar a relação

$$M_{PL}^2 = M_{5D}^3 \int_0^{r_c\pi} dy e^{2k|y|} = \frac{M_{5D}^3}{k} (e^{2kr_c\pi} - 1) . \quad (3.41)$$

Portanto, a relação entre as escalas depende exponencialmente do raio de compactificação, possibilitando geração de hierarquia completa mesmo com uma única dimensão extra, ao contrário do modelo ADD.

No entanto, a tensão negativa da brana visível λ_{vis} gera uma gravidade efetiva repulsiva, o que não está de acordo com a realidade física. Isto acontece porque a constante de Newton 4-dimensional, G_{4D} , depende do sinal de λ ,

$$G_{4D} = \frac{1}{M_{PL}^2} = \frac{\lambda}{6M_{5D}^6} , \quad (3.42)$$

onde

$$M_{PL} = \sqrt{6} \left(\frac{M_{5D}^3}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad (3.43)$$

(a equação (3.43) é deduzida na seção (3.5.1)). Este resultado motiva a postulação do modelo a seguir.

3.3.2 Modelo RS-II

Este texto basea-se na subseção (2.1.1) da tese de Bertha M. C. Melgar [49].

Neste modelo [25], a segunda brana da ação (3.10) é removida, de modo que o nosso universo é representado pela 3-brana visível de tensão λ positiva. Isto se deve ao fato que uma brana visível de tensão negativa gera uma gravidade efetiva repulsiva, o que não corresponde à realidade física.

O tamanho da dimensão extra é infinito e a coordenada desta dimensão é indicada por y , onde $y = r_c \phi$. A condição de periodicidade não é necessária, somente o uso da simetria $y \leftrightarrow -y$.

Assim, no caso de uma simples brana, a solução para a métrica é

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 . \quad (3.44)$$

onde $0 \leq y \leq \pi$.

Neste modelo, a dimensão y não é compacta (se aplicarmos o limite $r_c \rightarrow \infty$ na métrica do espaço-tempo $5D$, removeremos a brana escondida), mas mesmo assim temos uma escala de Planck finita e perfeitamente definida. Uma consequência do modelo RS-II é a existência de um estado ligado do gráviton ordinário 4-dimensional sem massa, com função de onda na dimensão extra centrada na 3-brana e cuja forma é determinada pela tensão da brana e a constante cosmológica Λ_{5D} . Assim, o fato de que o gráviton não massivo não viaja pela dimensão extra, garante o sucesso da lei de força tipo $1/r^2$ de Newton.

3.4 Equações de Junção

Para se ter uma geometria bem definida, a métrica deve ser contínua através da brana localizada em $y = 0$; porém, suas derivadas com respeito a y podem ser descontínuas na posição da brana, gerando uma função delta de Dirac nas derivadas segundas da métrica com respeito a y . Estes termos contendo a função delta devem ser relacionados com as componentes do tensor de energia-momento da brana para satisfazer às equações de Einstein. Para uma dada função a , temos [26]

$$a'' = \hat{a}'' + [a']\delta(y) , \quad (3.45)$$

onde $\hat{a}''$ representa a segunda derivada padrão, e $[a']$ é o salto na primeira derivada através de $y = 0$, definida por

$$[a'] = a'(0^+) - a'(0^-) . \quad (3.46)$$

O propósito desta seção é realizar uma análise geométrica de uma 3-brana que vive em um espaço-tempo $5 - D$. Utilizaremos as equações de Gauss-Codacci que decompõem as equações de Einstein em uma parte tangencial à superfície a ser considerada, uma parte normal a ela e uma parte com termos cruzados.

Considere um campo vetorial unitário n^A normal à 3-brana. Este campo vetorial é um vetor tipo-espaço, pois [26]

$$g_{AB}n^An^B = 1 . \quad (3.47)$$

A métrica induzida sobre a brana será definida como

$$h_{AB} = g_{AB} - n_An_B . \quad (3.48)$$

Uma quantidade importante é o *tensor de curvatura extrínica* K_{AB} que é definido como

$$K_{AB} = h_A^C \nabla_C n_B , \quad (3.49)$$

que pode ser interpretado como uma curvatura da brana no espaço-tempo $5D$.

O tensor de Einstein $5D$, $\tilde{G}_{AB}$, pode ser decomposto nas seguintes projeções, [26]

$$\tilde{G}_{AB}n^An^B = \frac{1}{2}{}^{(4)}R + \frac{1}{2}(K^2 - K_{AB}K^{AB}) , \quad (3.50)$$

$$n^A\tilde{G}_{AB}h_C^B = D_A K_C^A - D_C K , \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{AB}h_C^A h_D^B &= {}^{(4)}G_{CD} - K K_{CD} - n^E \nabla_E K_{CD} + D_C a_D - 2n_{(C} K_{D)E} a^E \\ &- a_C a_D + \left(\frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{2}K_{AB}K^{AB} + n^A \nabla_A K - \nabla_B a^B \right) h_{CD} , \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $a^B = n^C \nabla_C n^B$ é campo vetorial de aceleração, D_A é a derivada covariante associada com a métrica induzida h_{AB} , $K = g^{AB}K_{AB}$ é o traço do tensor de curvatura extrínica. As equações acima são as chamadas equações de Gauss-Codacci. Consideramos a métrica dada por

$$dS^2 = -n^2(\tau, y)d\tau^2 + a^2(\tau, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(\tau, y)dy^2 , \quad (3.53)$$

onde γ_{ij} é a métrica $3D$ simétrica maximalmente ($k' = -1, 0, 1$ parametrizará a curvatura espacial).

As componentes do tensor de Einstein $\tilde{G}_{00}$ e $\tilde{G}_{55}$ ³ desta métrica são, respectivamente [28]

$$\tilde{G}_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k' \frac{n^2}{a^2} \right\} , \quad (3.54)$$

³As demais componentes não nulas serão calculadas na próxima seção.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} = & \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\ & + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} - \frac{\ddot{b}}{b} \right) \right\} - k' \gamma_{ij} , \end{aligned} \quad (3.55)$$

e

$$\tilde{G}_{55} = \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k' \frac{b^2}{a^2} \right\} , \quad (3.56)$$

onde a representa o fator de escala e k' é a constante de curvatura.

Consideramos o tensor de energia-momento T_{AB} da brana dado por

$$T^A_B|_{\text{brana}} = S^A_B \frac{\delta(y)}{b} . \quad (3.57)$$

Assume-se que a métrica seja contínua, de modo que somente as derivadas segundas da métrica com respeito à coordenada y pode conter uma distribuição de Dirac, enquanto que a curvatura extrínseca pode conter uma função de Heavyside.

Das equações (3.50) e (3.52) temos que somente o termo $n^E \nabla_E K^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu n^A \nabla_A K = \partial_y (K^\mu_\nu - K \delta^\mu_\nu) / b$ contém segundas derivadas com respeito à y . Isto implica na equação

$$[K^\mu_\nu - K \delta^\mu_\nu] = -\kappa^2 S^\mu_\nu , \quad (3.58)$$

onde os colchetes indicam a descontinuidade entre os dois lados da brana como definido em (3.46).

As equações (3.58) são conhecidas como *condições de junção de Israel*, [27]. Elas também podem ser reescritas como

$$[K_{\mu\nu}] = -\kappa^2 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} S g_{\mu\nu} \right) , \quad (3.59)$$

onde $S \equiv S_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ é o traço de $S_{\mu\nu}$.

Se supusermos a simetria Z_2 , $y \rightarrow -y$, para a métrica então os limites direito e esquerdo do tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ são necessariamente opostos,

$$[K_{\mu\nu}] = 2K_{\mu\nu}^+ = 2K_{\mu\nu}^- . \quad (3.60)$$

Deste modo, a equação (3.59) indica que a curvatura extrínseca da brana é completamente determinada por seu conteúdo de matéria.

Concluindo, temos que as *condições de junção* descrevem o salto através da brana, do tensor de curvatura extrínseca com as fontes de funções delta sobre o lado direito das equações de Einstein.

3.5 Equações de Friedmann: Modelos DGP

O estudo da cosmologia realizado com dimensões extras tem apresentado muitos avanços. Historicamente, as pesquisas sobre a possibilidade de uso destas dimensões começaram com as teorias do tipo Kaluza-Klein. Estes estudos foram retomados com o advento das teorias da física de altas energias, tais como as teorias de supergravidade, de cordas e de supercordas, onde a existência de dimensões extras se faz necessária. No entanto, como estas dimensões não puderam ser detectadas experimentalmente, elas foram consideradas muito pequenas, da ordem da distância de Planck, $d_p \simeq 10^{-33} \text{cm}$.

Em todos os modelos de dimensões extras devemos recuperar a gravidade 4-dimensional. Em uma primeira aproximação, assumimos que as dimensões transversas à brana são compactas. Com o uso das dimensões tipo Kaluza-Klein, recuperamos a gravidade $4D$ sobre escalas que são maiores do que o tamanho das dimensões extras. Este cenário é conhecido como *modelo ADD*, [21].

Outra maneira de recuperarmos a gravidade $4D$ é inserir uma 3-brana com tensão λ positiva em um espaço-tempo AdS_5 , no qual o raio do espaço AdS , R , representa a escala de comprimento entre os regimes $4D$ e $5D$, $M_{PL}^2 = \pi R M_{5D}^3$. Neste caso, a dimensão extra tem um tamanho finito. Este cenário corresponde ao modelo RS-I, [24].

Randall e Sundrum consideram um espaço-tempo AdS_5 que contém uma hipersuperfície 3-dimensional espacialmente chamada 3-brana, na qual a matéria está confinada, enquanto a gravidade pode viajar por todo o espaço-tempo. Neste cenário, a dimensão extra pode ser grande. No modelo RS-I, a quinta dimensão é limitada pelas condições de contorno dadas pelas duas 3-branas fixadas em $y = 0$ e $y = \pi r_c$. No modelo RS-I, considera-se o tamanho da quinta dimensão infinito já que neste cenário há uma única 3-brana. Em ambos os modelos, o raio do espaço AdS , R , representa a escala de comprimento entre os regimes $4D$ e $5D$, $M_{PL}^2 = \pi R M_{5D}^3$.

Neste capítulo, estudaremos os modelos propostos por Dvali, Gabadadze e Porrati (DGP), [28, 29]. O primeiro modelo DGP assemelha-se ao modelo RS-II, [25]. Nele, considera-se uma 3-brana com tensão positiva inserida em um espaço-tempo $5D$ com constante cosmológica (Λ_{5D}), cujo tamanho da quinta dimensão é infinito. O objetivo deste modelo é mostrar que as equações de Friedmann da brana, considerando o modelo RS-II, apresentam correções da ordem ρ^2 comparadas com a cosmologia padrão. No segundo modelo DGP acrescenta-se à ação da brana um termo de Einstein-Hilbert dado pela curvatura intrínseca da brana (escalar de Ricci $4D$). Neste modelo, $\Lambda_{5D} = 0$ e as equações de Friedmann também apresentam termos adicionais da ordem $\rho^{1/2}$.

Inicialmente, começaremos com o primeiro modelo DGP, onde a evolução cosmológica

da brana é obtida para qualquer equação de estado $p = \omega\rho$ que descreva a matéria sobre a brana, sem a dependência da métrica sobre a dimensão extra. Em seguida, apresentaremos o segundo modelo.

3.5.1 Modelo DGP com $\Lambda_{5D} \neq 0$

Consideremos uma 3-brana inserida em um espaço-tempo 5-dimensional dado pelo modelo RS-II. A ação total deste sistema é [28]

$$S_{(5D)} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^5X \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int d^5X \sqrt{-g} \mathcal{L}_m . \quad (3.61)$$

Esta é a ação de Einstein-Hilbert em 5-dimensões para uma métrica 5-dimensional $\tilde{g}_{AB}$ com escalar de Ricci $\tilde{R}$. A métrica induzida⁴ $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B \tilde{g}_{AB} , \quad (3.62)$$

onde $X^A(x^\mu)$ representa a coordenada de um evento sobre a brana indicado por x^μ .

O segundo termo em (3.61) corresponde ao conteúdo de matéria. Consideraremos que não há matéria no espaço-tempo $5-D$, deste modo, a contribuição relevante será somente da matéria localizada na brana. Assim,

$$\int d^4x \sqrt{-g} (\lambda + l_m) \quad (3.63)$$

onde l_m representa a densidade lagrangiana dos campos de matéria que vivem sobre a brana, e λ é a tensão da brana. A quantidade κ^2 é dada por

$$\kappa^2 = 8\pi G_5 = M_{5D}^{-3} . \quad (3.64)$$

O propósito desta seção é derivar as equações de Friedmann para a métrica da brana. Consideremos métricas do espaço-tempo $5-D$ da forma

$$dS^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2, \quad (3.65)$$

onde y é a coordenada da quinta dimensão que assumimos ser compacta. O intervalo escolhido é $-1/2 \leq y \leq 1/2$. Inspirado na compactificação da teoria de Horava-Witten, utilizaremos a simetria Z_2 , $y \leftrightarrow -y$. Deste modo, o intervalo relevante é $0 \leq y \leq 1/2$.

⁴Nossa notação será: letras latinas maiúsculas $A, B, \dots$ denotam índices 5-dimensionais (0,1,2,3,4); letras gregas minúsculas $\mu, \nu, \dots$ denotam índices 4-dimensionais sobre a brana (0,1,2,3) enquanto as letras latinas minúsculas $i, j, \dots$ denotam as 3 dimensões espaciais ordinárias (1,2,3).

Há duas 3-branas que representam as condições de contorno que delimitam o espaço-tempo, respectivamente, em $y = 0$ e $y = 1/2$. Focalizaremos, porém, nossa atenção, sobre a hipersuperfície definida em $y = 0$, que representará nosso universo. Já que estamos interessados em soluções cosmológicas, admiteremos a métrica $5D$ da forma

$$dS^2 = -n^2(\tau, y)d\tau^2 + a^2(\tau, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(\tau, y)dy^2, \quad (3.66)$$

onde γ_{ij} é a métrica $3 - D$ simétrica maximalmente ($k' = -1, 0, 1$ parametrizará a curvatura espacial).

As equações de Einstein $5 - D$ dimensional são

$$G_{AB} \equiv \tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{AB}\tilde{R} \equiv \kappa^2\tilde{T}_{AB}, \quad (3.67)$$

onde $\tilde{R}_{AB}$ é o tensor de Ricci $5 - D$ e $\tilde{R} \equiv \tilde{g}^{AB}\tilde{R}_{AB}$ é a curvatura escalar $5 - D$. O tensor de energia-momento $\tilde{T}_{AB}$ pode ser decomposto em duas partes,

$$\tilde{T}_B^A = T_B^A|_{5D} + T_B^A|_{\text{brana}}. \quad (3.68)$$

O primeiro termo de (3.68) é o tensor de energia-momento no espaço-tempo $5D$ correspondente à constante cosmológica Λ_{5D} ,

$$\tilde{T}_B^A|_{5D} = \text{diag}(-\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}). \quad (3.69)$$

O segundo termo de (3.68) é o conteúdo de matéria na brana ($y = 0$),

$$T_B^A|_{\text{brana}} = \frac{\delta(y)}{b} \text{diag}(-\rho, p, p, p, 0), \quad (3.70)$$

onde a densidade de energia ρ e a pressão p são independentes da posição para termos uma cosmologia homogênea e isotrópica na brana.

As componentes não-nulas do tensor de Einstein são [28]

$$\tilde{G}_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k' \frac{n^2}{a^2} \right\}, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} = & \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\ & + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} - \frac{\ddot{b}}{b} \right) \right\} - k' \gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\tilde{G}_{05} = 3 \left(\frac{n'}{n} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{a'}{a} \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \quad (3.73)$$

$$\tilde{G}_{55} = \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k' \frac{b^2}{a^2} \right\}, \quad (3.74)$$

onde a representa o fator de escala e k' é a constante de curvatura. Nas expressões acima, a linha indica derivada em y e o ponto indica derivada no tempo físico τ .

Neste cenário, a equação de conservação da energia é

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}_0}{a_0} = 0, \quad (3.75)$$

sendo esta a mesma equação de conservação da densidade de energia em cosmologia padrão (a_0 é o valor de a sobre a brana).

Suporemos que não há fluxo de matéria na quinta dimensão, ou seja, $\tilde{T}_{05} = 0$ ou $\tilde{G}_{05} = 0$.

Deste modo, podemos reescrever as componentes $(0, 0)$ e $(5, 5)$ do tensor de Einstein $5D$ como, respectivamente, [28]

$$F' = \frac{2a'a^3}{3} \kappa^2 \tilde{T}^0_0 \quad (3.76)$$

e

$$\dot{F} = \frac{2\dot{a}a^3}{3} \kappa^2 \tilde{T}^5_5, \quad (3.77)$$

onde F é uma função de τ e y definida por

$$F(\tau, y) \equiv \frac{(a'a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - k'a^2. \quad (3.78)$$

Como $\tilde{T}^0_0 = -\Lambda_{5D}$ é independente de y , podemos integrar (3.76) resultando

$$F + \frac{1}{6} k'^2 \Lambda_{5D} a^4 + C = 0 \quad (3.79)$$

onde C é uma constante de integração que não depende de τ (Λ_{5D} é constante no tempo).

Assim, quando a fonte do espaço-tempo $5 - D$ é uma constante cosmológica, algum conjunto de funções a , n e b satisfará à equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{an} \right)^2 = \left(\frac{a'}{ab} \right)^2 - \frac{k'}{a^2} + \frac{1}{6} \kappa^2 \Lambda_{5D} + \frac{C}{a^4} \quad (3.80)$$

que juntamente com $\tilde{G}_{05} = 0$, serão soluções das equações de Einstein localmente no bulk.

Para calcular as equações de Friedmann sobre a brana, devemos levar em conta as condições de junção de Israel, que relacionam os saltos da derivada da métrica, através da brana localizada em $y = 0$, com o seu tensor de energia-momento.

Neste caso, as condições de junção são [28]

$$\frac{[a']}{a_0 b_0} = -\frac{\kappa^2}{3} \rho_b \quad (3.81)$$

e

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = \frac{\kappa^2}{3} (3p_b + 2\rho_b) , \quad (3.82)$$

onde o índice 0 para a, b, n significam que estas funções são calculadas em $y = 0$, isto é, sobre a brana. $[Q] = Q(0^+) - Q(0^-)$ indica o salto da função Q através de $y = 0$.

Considerando a simetria $y \leftrightarrow -y$, a condição de junção (3.81) pode ser usada para calcular a' sobre os dois lados da brana. Neste caso, temos que $[a'] = 2a'(0^+)$.

Deste modo, aplicando a condição de Israel (3.81) na equação (3.80), temos que a equação de Friedmann sobre a brana é dada por [28]

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6} \Lambda_{5D} + \frac{\kappa^4}{36} \rho_b^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k'}{a_0^2} , \quad (3.83)$$

onde o parâmetro de Hubble H é definido por

$$H = \frac{\dot{a}_0}{a_0 n_0} , \quad (3.84)$$

para $n_0 = 1$.

Assumindo que a densidade de energia da brana ρ_b possa ser decomposta em duas partes

$$\rho_b = \lambda + \rho , \quad (3.85)$$

onde ρ é densidade de matéria ordinária, podemos reescrever a equação (3.83) como

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{6M_{5D}^3} \Lambda + \frac{1}{36M_{5D}^6} (\lambda + \rho)^2 + \frac{C}{a^4} - \frac{k'}{a^2} \\ &= \frac{1}{6M_{5D}^3} \Lambda + \frac{1}{36M_{5D}^6} (\lambda)^2 + \frac{1}{18M_{5D}^6} \lambda \rho + \frac{1}{36M_{5D}^6} \rho^2 + \frac{C}{a^4} - \frac{k'}{a^2} . \end{aligned}$$

Comparando com as equações de Friedmann da cosmologia usual, equação (2.4), identificamos a constante cosmológica efetiva na brana Λ_{4D} e a massa de Planck 4-dimensional M_{PL} como

$$\Lambda_{4D} = \frac{1}{2M_{5D}^3} \left(\Lambda_{5D} + \frac{1}{6M_{5D}^3} \lambda^2 \right) \quad (3.86)$$

e

$$M_{PL} = \sqrt{6} \left(\frac{M_{5D}^3}{\sqrt{\lambda}} \right) . \quad (3.87)$$

Portanto,

$$H^2 = \frac{\Lambda_{4D}}{3} + \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho + \frac{1}{6} \frac{1}{M_{PL}^2 \lambda} \rho^2 + \frac{C}{a^4} - \frac{k'}{a^2} . \quad (3.88)$$

Escolhendo um espaço-tempo 5-dimensional espacialmente plano ($k' = 0$), com $\Lambda_{4D} = 0$ e $C = 0$ temos

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho + \frac{1}{6} \frac{1}{M_{PL}^2 \lambda} \rho^2 \quad (3.89)$$

e

$$\Lambda_{5D} = -\frac{1}{6M_{5D}^3} \lambda^2 , \quad (3.90)$$

sendo este último o *ajuste fino* de Randall-Sundrum, [24, 25].

Assim, concluímos que as equações de Friedmann para o modelo RS-II, de acordo com o primeiro modelo DGP, é [31, 32]

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho \left[1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right] . \quad (3.91)$$

3.5.2 Modelo DGP com $\Lambda_{5D} = 0$

Neste caso, consideremos uma 3-brana inserida em um espaço-tempo 5-dimensional com um termo de curvatura intrínseca somado à ação da brana. A ação total deste sistema é [29]

$$S_t = S_{(5D)} + S_{brana} , \quad (3.92)$$

$$S_{(5D)} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^5 X \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int d^5 X \sqrt{-g} \mathcal{L}_m , \quad (3.93)$$

$$S_{brana} = -\frac{1}{2\mu^2} \int d^4 x \sqrt{-g} R . \quad (3.94)$$

O primeiro termo em (3.93) corresponde à ação de Einstein-Hilbert em 5-dimensões para uma métrica 5-dimensional $\tilde{g}_{AB}$ de escalar de Ricci $\tilde{R}$. O termo em (3.94) corresponde à ação de Einstein-Hilbert para a métrica induzida g_{cd} sobre a brana, R sendo sua curvatura escalar. A métrica induzida $g_{\mu\nu}$ é dada pela expressão

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B \tilde{g}_{AB} , \quad (3.95)$$

onde $X^A(x^\mu)$ representa a coordenada de um evento sobre a brana indicado por x^μ .

O segundo termo em (3.93) corresponde ao conteúdo de matéria. Consideraremos que não há matéria no espaço-tempo $5D$, deste modo, a contribuição relevante será somente da matéria localizada na brana. Assim,

$$\int d^4x \sqrt{-g} (\lambda + l_m) \quad (3.96)$$

onde l_m representa a densidade lagrangiana dos campos de matéria que vivem sobre a brana, e λ é a tensão da brana. As quantidades κ^2 e μ^2 são dadas por

$$\kappa^2 = 8\pi G_5 = M_5^{-3} \quad (3.97)$$

e

$$\mu^2 = 8\pi G_4 = M_4^{-2} . \quad (3.98)$$

O propósito desta seção é derivar as equações de Friedmann para a métrica da brana. Consideremos métricas do espaço-tempo $5D$ da forma

$$dS^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2 , \quad (3.99)$$

onde y é a coordenada da quinta dimensão que assumimos ser compacta. O intervalo escolhido é $-1/2 \leq y \leq 1/2$. Inspirado na compactificação da teoria de Horava-Witten, utilizaremos a simetria Z_2 , $y \leftrightarrow -y$. Deste modo, o intervalo relevante é então $0 \leq y \leq 1/2$. Há duas 3-branas que representam as condições de contorno que delimitam o espaço-tempo, respectivamente, em $y = 0$ e $y = 1/2$. Focalizaremos, porém, nossa atenção sobre a hipersuperfície definida em $y = 0$, que representará nosso universo. Como estamos interessados em soluções cosmológicas, admitiremos a métrica $5 - D$ da forma

$$dS^2 = -n^2(\tau, y) d\tau^2 + a^2(\tau, y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(\tau, y) dy^2 , \quad (3.100)$$

onde γ_{ij} é a métrica $3 - D$ simétrica maximalmente ($k' = -1, 0, 1$ parametrizará a curvatura espacial).

As equações de Einstein $5D$ dimensional são

$$G_{AB} \equiv \tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{AB} \tilde{R} \equiv \kappa^2 \tilde{S}_{AB} \quad (3.101)$$

onde $\tilde{R}_{AB}$ é o tensor de Ricci $5D$ e $\tilde{R} \equiv \tilde{g}^{AB} \tilde{R}_{AB}$ é a curvatura escalar. O tensor $\tilde{S}_{AB}$ é a soma do tensor de energia-momento $\tilde{T}_{AB}$ de matéria mais a contribuição dada pela curvatura escalar da brana $\tilde{U}_{AB}$,

$$\tilde{S}^A_B = \tilde{T}^A_B + \tilde{U}^A_B , \quad (3.102)$$

onde o tensor de energia-momento pode ser decomposto em duas partes,

$$\tilde{T}^A_B = T^A_B|_{5D} + T^A_B|_{\text{brana}} . \quad (3.103)$$

O primeiro termo de (3.103) é o tensor de energia-momento da matéria que corresponde à constante cosmológica 5-D, Λ_{5D} ,

$$\tilde{T}^A_B|_{5D} = \text{diag}(-\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}, -\Lambda_{5D}) . \quad (3.104)$$

O segundo termo de (3.103) é o conteúdo de matéria na brana ($y = 0$),

$$T^A_B|_{\text{brana}} = \frac{\delta(y)}{b} \text{diag}(-\rho, p, p, p, 0), \quad (3.105)$$

onde a densidade de energia ρ e a pressão p são independentes da posição na brana para termos uma cosmologia homogênea e isotrópica na brana.

As componentes não-nulas do tensor de Einstein são

$$\tilde{G}_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k' \frac{n^2}{a^2} \right\}, \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} = & \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\ & + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} - \frac{\ddot{b}}{b} \right) \right\} - k' \gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\tilde{G}_{05} = 3 \left(\frac{n'}{n} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{a'}{a} \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \quad (3.108)$$

$$\tilde{G}_{55} = \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k' \frac{b^2}{a^2} \right\}, \quad (3.109)$$

onde a representa o fator de escala e k' é a constante de curvatura.

Nas expressões acima, a linha indica derivada em y e o ponto indica derivada no tempo físico τ . Neste cenário, a equação de conservação é

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}_0}{a_0} = 0, \quad (3.110)$$

semelhante ao primeiro caso.

As componentes não-nulas do tensor $\tilde{U}_{AB}$ são [29]

$$\tilde{U}_{00} = -\frac{3\delta(y)}{\mu^2 b} \left\{ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k' \frac{n^2}{a^2} \right\}, \quad (3.111)$$

$$\tilde{U}_{ij} = -\frac{\delta(y)}{\mu^2 b} \left\{ \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{n}}{n} - 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k' \gamma_{ij} \right\}. \quad (3.112)$$

Suporemos que não há fluxo de matéria na quinta dimensão, $\tilde{T}_{05} = 0$, ou seja, $\tilde{G}_{05} = 0$.

Deste modo, podemos reescrever as componentes $(0, 0)$ e $(5, 5)$ do tensor de Einstein $5 - D$ como, respectivamente,

$$F' = \frac{2a'a^3}{3} \kappa^2 \tilde{T}^0_0 \quad (3.113)$$

e

$$\dot{F} = \frac{2\dot{a}a^3}{3} \kappa^2 \tilde{T}^5_5, \quad (3.114)$$

onde F é uma função de τ e y definida por

$$F(\tau, y) \equiv \frac{(a'a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - k'a^2. \quad (3.115)$$

Como $\tilde{T}^0_0 = -\Lambda_B$ é independente de y , podemos integrar (3.113), no que resulta

$$F + \frac{1}{6} k'^2 \Lambda_{5D} a^4 + C = 0, \quad (3.116)$$

onde C é uma constante de integração que não depende de τ (Λ_{5D} é uma constante no tempo).

Assim, quando a fonte do espaço-tempo $5 - D$ é uma constante cosmológica, algum conjunto de funções a , n e b satisfará à equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{an} \right)^2 = \left(\frac{a'}{ab} \right)^2 - \frac{k'}{a^2} + \frac{1}{6} \kappa^2 \Lambda_{5D} + \frac{C}{a^4} \quad (3.117)$$

que juntamente com $\tilde{G}_{05} = 0$, serão soluções das equações de Einstein localmente no bulk.

Para calcular as equações de Friedmann sobre a brana, devemos levar em conta as condições de junção de Israel, que relacionam os saltos da derivada da métrica, através da brana localizada em $y = 0$, com o seu tensor de energia-momento.

Neste caso, as condições de junção são [29]

$$\frac{[a']}{a_0 b_0} = -\frac{\kappa^2}{3} \rho_b + \frac{\kappa^2}{\mu n_0^2} \left\{ \frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + k' \frac{n_0^2}{a_0^2} \right\}, \quad (3.118)$$

e

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = \frac{\kappa^2}{3} (3p_b + 2\rho_b) + \frac{\kappa^2}{\mu^2 n_0^2} \left\{ -\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} - 2 \frac{\dot{a}_0 \dot{n}_0}{a_0 n_0} + 2 \frac{\ddot{a}_0}{a_0} - k' \frac{n_0^2}{a_0^2} \right\} \quad (3.119)$$

onde o índice 0 para a, b, n significa que estas funções são calculadas em $y = 0$, isto é, sobre a brana. $[Q] = Q(0^+) - Q(0^-)$ indica o salto da função Q através de $y = 0$.

Considerando a simetria $y \leftrightarrow -y$, a condição de junção (3.118) pode ser usada para calcular a' sobre os dois lados da brana. Neste caso, temos que $[a'] = 2a'(0^+)$.

Deste modo, aplicando a condição de Israel (3.118) na equação (3.117), temos que a equação de Friedmann sobre a brana é dada por [29]

$$\epsilon \sqrt{H^2 - \frac{\kappa^2}{6} \Lambda_{5D} - \frac{C}{a_0^4} + \frac{k'}{a_0^2}} = \frac{\kappa^2}{2\mu^2} \left(H^2 + \frac{k'}{a_0^2} \right) - \frac{\kappa^2}{6} \rho_b, \quad (3.120)$$

onde o parâmetro de Hubble H é definido por

$$H = \frac{\dot{a}_0}{a_0 n_0}, \quad (3.121)$$

e $\epsilon = \pm 1$ é o sinal de $[a']$.

Neste modelo, admite-se que $\Lambda_{5D} = 0$, portanto, da equação (3.90), temos que a tensão da brana é $\lambda = 0$. Deste modo, [29, 32]

$$\epsilon \sqrt{H^2 - \frac{C}{a_0^4} + \frac{k'}{a_0^2}} = \frac{\kappa^2}{2\mu^2} \left(H^2 + \frac{k'}{a_0^2} \right) - \frac{\kappa^2}{6} \rho_b. \quad (3.122)$$

Assim, concluímos que as equações de Friedmann da cosmologia de branas também apresentam termos adicionais mesmo que adicionemos o termo de curvatura intrínseca à ação da brana.

Capítulo 4

Inflação em Branas

4.1 Motivação

Como vimos, o “*Mundo Brana*”, tem como propósito tentar resolver o *problema da hierarquia* que há entre as escalas eletrofraca e gravitacional. Solucionando este problema, os físicos de partículas alcançariam a tão sonhada **Grande Unificação**. Portanto, para proporcionar uma maior credibilidade aos modelos de branas, nada melhor do que aplicá-los à cosmologia. É isto que faremos nesse capítulo, onde tentaremos explicar a fase inflacionária primordial do nosso universo utilizando estes modelos. No capítulo anterior, vimos que os modelos que admitem que o nosso universo é uma 3-brana inserida em um espaço-tempo AdS_5 se inspiram nos dois trabalhos pioneiros publicados por Randall e Sundrum, RS-I e RS-II. Nós escolhemos a cosmologia de RS-I, na qual pretendemos estudar a era inflacionária originada da interação brana - anti-brana.

4.2 Cosmologia Inflacionária em modelos de Branas do tipo RS-I

Como explicado no capítulo 1, a fase inflacionária que resolve os problemas deixados pela teoria da Grande Exposão, durante a qual nosso universo apresenta uma expansão acelerada em um curto período de tempo, ou seja, seu fator de escala é dado por uma exponencial, $a(t) \sim e^{Ht}$, onde o parâmetro de Hubble H é constante.

Vimos também que o melhor mecanismo para explicar a inflação de rolagem lenta é através da dinâmica de um campo escalar espacialmente homogêneo chamado inflaton, $\phi(t)$. A inflação se inicia quando este inflaton é deslocado de seu mínimo e termina

quando as condições de rolagem lenta são violadas. Durante tal fase, a densidade de energia $\rho(\phi)$ que preenche o Universo é dada pelo potencial do inflaton, $V(\phi)$, gerado pelo campo inflaton, $\phi(t)$. Este potencial deve ser aproximadamente plano para garantir uma inflação de rolagem lenta prolongada (número de dobras, $N_e > 50$ [7]).

Sendo a fase inflacionária correspondente a energias muito altas, será mais conveniente estudar modelos inflacionários em teorias que descrevem a física a tais energias. A mais fundamental e promissora delas é a **teoria de cordas** que é uma teoria de gravidade quântica. Um considerável progresso se conseguiu em explicar a fase inflacionária do Universo sobre **D-branas** que são estados não-perturbativos da teoria de cordas.

Como vimos no capítulo 2, com o objetivo de encontrar uma solução ao problema de hierarquia, nasce um novo mecanismo que se utiliza de dimensões extras chamado *Cosmologia de Brana*. No *Mundo Brana*, as partículas e forças do modelo padrão, com exceção à gravidade, estão confinadas a uma sub-variedade quadri-dimensional, chamada de *3-brana*, inserida num espaço-tempo $(4 + n)$ -dimensional, chamado de *bulk*, onde n representa o número de dimensões extras.

Utilizando este formalismo, Randall e Sundrum propuseram solucionar o problema de hierarquia construindo dois modelos, RS-I e RS-II, [24] e [25], nos quais nosso *mundo brana* está inserido em um espaço-tempo anti-de-Sitter 5-dimensional (AdS_5). A este cenário, considera-se, portanto, uma única dimensão extra compacta com coordenada y e cuja métrica AdS_5 é não-fatorável, pois a métrica 4-dimensional é multiplicada por um fator de “deformação” $a(y)$,

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2, \quad (4.1)$$

onde $a(y) = e^{\pm 2kb|y|}$ é uma função que varia rapidamente em relação a dimensão extra e b é o raio de compactificação da dimensão extra.

Nestes modelos, a coordenada $y \in [-1, 1]$, sendo y e $-y$ idênticos, pois esta dimensão extra admite *simetria de orbifold*, com pontos fixados em $y = 0$ e $y = 1$. A geometria 4-dimensional (na brana) é de Minkowski, portanto, $\Lambda_{4D} = 0$. A escala k em $a(y)$ é determinada pela constante cosmológica 5-dimensional Λ_{5D} e pela massa de Planck 5-dimensional M_{5D} ,

$$k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M_{5D}^3}} \quad (4.2)$$

e k também está relacionado à tensão da brana λ , sendo

$$k = \frac{1}{12M_{5D}^3}\lambda. \quad (4.3)$$

Da equação (4.2), notamos que, necessariamente para este cenário, a constante Λ_{5D} deve ser negativa ($\Lambda_{5D} < 0$).

Em $y = 0$, há uma brana de tensão negativa $\lambda_{vis} = -12M_{5D}^3 k$ (brana de TeV) onde as massas das partículas são suprimidas pelo fator de deformação $e^{kb|y|}$. Em $y = 1$, há uma brana de tensão positiva $\lambda_{esc} = 12M_{5D}^3 k$ (brana de Planck), sobre a qual as massas das partículas são naturalmente da ordem da massa de Planck 4-dimensional, M_{PL} . O modelo RS-I constitui o espaço-tempo descrito acima e para o modelo RS-II, a brana de Planck é levada ao infinito, de modo que há uma única 3-brana inserida no espaço-tempo AdS_5 .

No caso de cosmologia de branas, podemos obter inflação de um *campo escalar* morando na *brana* ou no *bulk* em um cenário semelhante ao tipo RS-I [24] ou ao tipo RS-II [25]. Porém, nosso estudo se restringirá à cosmologia inflacionária em modelos de brana semelhantes ao tipo RS-I onde o inflaton está inserido numa das branas. Para os modelos semelhantes ao tipo RS-II, comentaremos somente algumas de suas particularidades.

Neste capítulo utilizaremos a base conceitual de **Cosmologia Inflacionária** e **Cosmologia de Brana**, explicados nos dois primeiros capítulos, para exemplificar três possíveis potenciais inflatons [33], [34], [35], gerados da interação entre brana e anti-brana. Portanto, para que estes potenciais gerem inflação, eles primeiramente devem satisfazer à **condição de rolamento lento** e seus índices espectrais devem estar próximos de 1 [7], de acordo com os dados experimentais do WMAP. Esta verificação pode ser perfeitamente realizada apenas com o cálculo dos parâmetros de rolagem lenta, ϵ e η a partir do potencial e de suas derivadas. Assim, podemos calcular tanto a amplitude de perturbação de densidade escalar $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ quanto o índice espectral $n(k)$ de um dado potencial inflaton $V(\phi)$. Além destes cálculos, plotaremos os comportamentos destes potenciais e de seus parâmetros de rolagem lenta em função de ϕ de acordo com [47].

Para os modelos de interação entre branas (semelhantes ao tipo RS-I), temos que o inflaton pode ser gerado pelo **ângulo** formado ou pelo **movimento** relativo entre a brana e a anti-brana. Vejamos algumas particularidades desses dois casos: no caso em que o *inflaton é gerado pelo ângulo entre as branas*, obtemos os diferentes modelos de inflação (caótica, slow-roll, híbrida, *D-term*, etc) ao considerarmos suas deformações, ou seja, as diferentes rotações das branas[36]. Nesta construção de branas, as deformações controlam o valor dos parâmetros que aparecem no potencial escalar. Como resultado, podemos obter vários potenciais diferentes da mesma construção de branas que nos conduzirão a diferentes modelos de inflação. Neste caso, o tipo de inflação que ocorre também depende das condições iniciais que fixam os parâmetros de deformação; nos *modelos inflacionários de interação entre um par de branas*, a inflação surge do potencial de interação entre a

brana e a anti-brana localizadas paralelamente entre si e largamente separadas em um espaço AdS_5 . A 3-brana é móvel e experimenta uma pequena força atrativa devido à anti-3-brana fixada em algum ponto da coordenada extra. Este movimento relativo da 3-brana em direção à anti-3-brana gera o campo inflaton, responsável pela inflação. Isto é, a distância entre as branas faz o papel de campo inflaton, que por sua vez, gera o potencial de interação, o **potencial inflaton**. As forças sobre a brana e a anti-brana surgem da seguinte maneira: uma simples brana não experimenta força alguma neste fundo AdS_5 . Porém, adicionando a este cenário, uma anti-brana altamente distante, é suficiente para que o potencial que surge da atração entre ela e a brana seja um potencial de interação relativamente fraco, de modo que possamos interpretá-lo como um potencial que varia lentamente com o inflaton, ou seja, praticamente constante. A inflação termina quando as branas estão muito próximas uma da outra.

Neste presente estudo, nos restringiremos ao modelo em que o campo inflaton é gerado pelo movimento de interação entre um par de branas.

4.2.1 Rolagem lenta e o fim da inflação

Como vimos no capítulo 2, a **Cosmologia de Branas** descreve o nosso universo como uma hipersuperfície com $3 + 1$ dimensões de espaço-tempo, **3-brana**, (na qual a matéria ordinária, com exceção do graviton, está confinada), inserida num espaço de n dimensões extras ($n = 1$, considerando os modelos de Randall e Sundrum, RS-I e RS-II) chamado de **bulk**, no qual a gravidade está livre para viajar.

Algo importante a se destacar é que a Cosmologia de Branas não é derivada da teoria de cordas, de modo que ela apenas se inspira em tal teoria, ou mais precisamente, ela tem se inspirado na compactificação de Horava e Witten [20]. A ação de Horava-Witten representa um limite particular da **teoria M** na qual a supergravidade 11-dimensional está compactificada em dois estagios, [35]: primeiro, as dimensões 6 ... 11 estão compactificadas numa variedade de **Calabi-Yau** à escala de cordas, mas a quinta dimensão está compactificada sobre um segmento de linha, por meio da simetria de *orbifold* Z_2 , cujo comprimento, πR , é muito maior que o inverso da escala de cordas. Depois da compactificação da quinta dimensão, a teoria volta a assemelhar-se à teoria da corda heterótica $E_8 \times E_8$ mas com subgrupos que sobrevivem de cada E_8 (um E_8 para o setor “visível” e outro para o setor “escondido”) sobre duas diferentes “paredes” 4-dimensionais separadas a uma distância πR . Ou seja, dois pontos fixos da simetria de *orbifold* definem duas bordas espaço-temporais em 10 dimensões, ou 9-branas, distantes a πR . As interações de gauge do Modelo Padrão e a matéria carregada estão confinadas a uma ou a outra parede

e portanto a teoria de calibre do Modelo Padrão parece 4-dimensional já a distâncias menores que R . A gravidade, no entanto, detecta a dimensão adicional em R , ou seja, ela pode viajar por todo o espaço-tempo.

O advento da Cosmologia de Branas inicia-se com a publicação de dois trabalhos de Randall e Sundrum, [24] e [25], que propuseram, por simplicidade, que ao invés de estudarmos diretamente uma estrutura de espaço-tempo $R^{10} \times S^1/Z^2$, consideremos um modelo $R^4 \times S^1/Z^2$, no qual o nosso universo é esta 3-brana em um espaço-tempo de uma dimensão extra, onde as partículas e forças do Modelo Padrão estão confinadas a essa 3-brana enquanto o gráviton pode viajar por todo o espaço-tempo 5-Dimensional (bulk).

É com este cenário de branas que pretendemos exemplificar três **potenciais inflatons planos** gerados por uma geometria de compactificação que apresenta um fator de “deformação”. Este fator multiplica a parte quadri-dimensional da métrica tornando-a não-fatorável.

Para o primeiro exemplo, consideremos uma compactificação de teoria de corda sobre uma estrutura de espaço-tempo $AdS_5 \times X_5$ onde X_5 é uma variedade de Einstein 5-dimensional [33]. Essa hipótese surge em teoria de cordas como uma solução da supergravidade 10-dimensional acoplada à 5-forma F_5 .

Assim, o sistema físico pode se reduzir ao espaço-tempo AdS_5 , como no modelo RS-I, no qual estão inseridos um par de branas. A brana visível (anti-brana), que representa nosso universo, está localizada em r_0 e a brana escondida está localizada em r_{max} . Estes pontos, portanto, delimitam o espaço-tempo AdS_5 . Adiciona-se também a este cenário, uma outra 3-brana móvel (brana do bulk), inicialmente localizada em r_1 e obtém-se o potencial atrator da interação entre a brana do bulk e a anti-brana.

Portanto, será interessante considerar esse cenário como um possível modelo para explicar a fase inflacionária do nosso universo, admitindo que este potencial atrator seja um possível candidato ao potencial inflaton. Obteremos todos os parâmetros de rolamento lento a partir deste potencial e compararemos estes resultados com os dados experimentais do WMAP. Sendo este nosso primeiro exemplo, os dados obtidos são meramente uma reprodução dos cálculos feitos em [33].

Este cenário, sem considerar a compactificação de teoria de corda $AdS_5 \times X_5$, é dado pela métrica [33]

$$ds^2 = h^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + h^{\frac{1}{2}}(dr^2 + \frac{r^2}{R^2}\tilde{g}_{ab}dy^a dy^b), \quad (4.4)$$

onde $\tilde{g}_{ab}dy^a dy^b$ é o elemento de linha sobre X_5 e o restante é o elemento de linha do

espaço-tempo AdS_5 . O coeficiente $h(r)$ é dado por

$$h(r) = \frac{R^4}{r^4} . \quad (4.5)$$

O campo de 5-forma F_5 e o potencial de calibre de 4-forma C_4 podem ser obtidos em termos de $h(r)$ como

$$(F_5)_{rtx^1x^2x^3} = \partial_r h^{-1} = \frac{4r^3}{R^4} \quad (4.6)$$

e

$$(C_4)_{tx^1x^2x^3} = \int (F_5)_{rtx^1x^2x^3} dr = \frac{r^4}{R^4} . \quad (4.7)$$

Considerando a compactificação, temos que a solução AdS_5 , em coordenadas de Poincaré, é dada pela métrica

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2}dr^2 , \quad (4.8)$$

onde r representa a dimensão extra e R a escala de comprimento característica da geometria AdS_5 (raio do espaço AdS_5). A expressão de R é dada em termos da carga de 5-forma por

$$R^4 = 4\pi a g_s N \alpha'^2 , \quad (4.9)$$

onde a constante a depende da variedade de Einstein 5-dimensional X_5 .

Este espaço-tempo AdS_5 é limitado à região de $r_0 < r < r_{max}$. A 3-brana móvel estende-se ao longo das direções t, x^1, x^2, x^3 , cuja localização na dimensão extra do espaço-tempo AdS_5 é representada por r_1 .

De acordo com este cenário, exceto pela sub-variedade X_5 , temos que o fundo AdS_5 assemelha-se ao espaço-tempo do modelo de Randall-Sundrum tipo I (RS-I)¹, o que possibilita utilizá-lo como candidato a modelo inflacionário em cosmologia de branas.

Supõe-se que a ação total da 3-brana é descrita pela **ação de Born-Infeld** mais a **ação de Chern-Simons** como

$$S = -T_3 \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{r_1^4}{R^4} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{r_1^4}{R^4} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu r_1 \partial_\nu r_1} + T_3 \int (C_4)_{tx^1x^2x^3} dt dx^1 dx^2 dx^3 , \quad (4.10)$$

¹Duas considerações podem ser feitas para essa afirmação: 1) A métrica “deformada” pelo fator $h(r)$, cuja região de r (pequeno) é o “fundo” de um poço gravitacional. 2) Como um resultado do truncamento da região AdS_5 , a teoria efetiva quadri-dimensional que governa a dinâmica a baixas energias terá uma constante gravitacional finita e incluirá a gravidade 4-dimensional descrita pela ação de Einstein-Hilbert : $S_{grav.} = 1/(16\pi G_N \int d^4x \sqrt{-g} R$. Em RS-I, o truncamento do espaço AdS_5 é obtido ao se considerarem duas condições de contorno representadas por duas branas fixas, convencionalmente chamadas de **brana de Planck** e de **brana do Modelo padrão**, a r_{max} e r_0 , respectivamente.

onde os índices μ, ν denotam as direções paralelas à 3-brana ao longo das coordenadas t, x^1, x^2, x^3 , e $g^{\mu\nu}$ é a métrica ao longo dessas direções.

A tensão da 3-brana, T_3 , é dada por

$$T_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 g_s \alpha'^2} . \quad (4.11)$$

Neste cenário, considera-se que a *anti-D3-brana*, fixada em r_0 tem a mesma tensão da *D3-brana* mas *carga 5-forma oposta*². A anti-D3-brana é semelhante à ação (4.11), exceto pelo **sinal do segundo termo que é negativo**.

Assim, tomando o mundo físico como sendo o AdS_5 , semelhantemente aos modelos RS, considera-se que a 3-brana movimenta-se lentamente em direção à anti-brana em um cenário dado por (4.6) e (4.8). Também o efeito resultante dessa interação brana-anti-brana é considerado. Pode-se dizer que fisicamente acontecerá o seguinte: a anti-3-brana tem uma tensão e uma carga 5-forma e, assim, perturba tanto a métrica, (4.8), quanto o campo 5-forma, (4.6), resultando em uma energia potencial que depende apenas da posição da 3-brana no bulk.

Este cenário se inspira ao **cenário ekpirótico** [37, 38, 39, 40] que usa a interpretação de Horava-Witten da corda heterótica $E_8 \times E_8$, onde há uma décima primeira dimensão separando dois mundos brana (9+1)-dimensionais. Supõe-se que vivamos sobre uma das branas fixas, a **brana visível** (anti-brana), enquanto a outra brana é chamada de **brana escondida**. Há também uma brana adicional (brana do bulk) que pode se mover livremente no bulk, onde a energia potencial provém da atração desta brana do bulk e a anti-brana. Agora mostraremos qual a forma analítica desse potencial atrator.

Com a adição da 3-brana localizada à posição r_1 , resulta-se uma perturbação na métrica (4.4). A função $h(r)$ passa a ser dada como [33]

$$h(r) = \frac{R^4}{r^4} + \delta h(r) , \quad (4.12)$$

onde para $r \ll r_1$ temos

$$\delta h(r) = \frac{R^4}{N} \frac{1}{r_1} , \quad (4.13)$$

onde o coeficiente N surge devido ao fato do sistema proposto suportar N unidades de carga, enquanto que a perturbação considerada ocorre devido a uma simples 3-brana.

Podemos reescrever $h(r)$ como sendo

$$h(r) = R^4 \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{N} \frac{1}{r_1^4} \right) . \quad (4.14)$$

²Este conceito para anti-D3-brana é mais utilizado em teoria de cordas. A cosmologia de branas em um espaço-tempo AdS_5 descreve que a anti-brana tem tensão negativa.

Para determinar o potencial, insere-se este novo cenário à anti-brana, isto é, esse potencial é calculado através da perturbação ocasionada pela adição da 3-brana móvel imersa ao mundo físico AdS_5 , semelhante ao modelo RS-I, e dessa geometria perturbadora se extrai o potencial perturbador, ou seja, a energia resultante da anti-3-brana, que equivale também à energia do par brana - anti-brana.

Supondo-se que $r_1 \gg r_0$, a parte potencial da ação (4.10) é dada basicamente por

$$\begin{aligned} 2T_3(C_4)_{tx^1x^2x^3} &= 2T_3 \frac{r^4}{R^4} = 2T_3 h^{-1}(r) \\ &= 2T_3 R^4 \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{N} \frac{1}{r_1^4} \right)^{-1} = 2T_3 \frac{r_0^4}{R^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{r_0^4}{r_1^4} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Assim, o potencial entre uma brana móvel localizada inicialmente em r_1 e uma anti-brana fixada em r_0 , no limite quando $r_1 \gg r_0$, é dado por

$$V(r) = 2T_3 \frac{r_0^4}{R^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{r_0^4}{r_1^4} \right). \quad (4.16)$$

Deste potencial, o primeiro termo representa uma energia potencial constante associada à anti-brana, portanto, independente da posição da brana. Já o segundo termo depende da localização da 3-brana e o sinal negativo indica a atração mútua entre o par brana - anti-brana. Esse termo varia lentamente com o inverso da quarta potência da localização radial da brana, r_1 . Este potencial atrator é proporcional à tensão T_3 . No limite em que $r_1 \gg r_0$, o primeiro termo deste potencial é muito maior do que o segundo.

A baixas energias, a dinâmica deste sistema pode ser descrita pela ação

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} T_3 g^{\mu\nu} \partial_\mu r_1 \partial_\nu r_1 - 2T_3 \frac{r_0^4}{R^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{r_0^4}{r_1^4} \right) \right), \quad (4.17)$$

onde temos que r_1 , a localização da 3-brana, representa agora um campo escalar na teoria $4 - D$, ou seja, para o modelo inflacionário, esta posição radial da 3-brana faz o papel de campo inflaton gerando o potencial inflaton $V(r)$, (4.16).

A partir deste campo, definem-se dois campos canonicamente normalizados ϕ_0 e ϕ , obtidos de r_0 e r_1 , respectivamente, dados por

$$\phi_0 = \sqrt{T_3} r_0 \quad (4.18)$$

e

$$\phi = \sqrt{T_3} r_1. \quad (4.19)$$

Em termos desta nova coordenada, a ação efetiva e o potencial inflaton, fazendo uso das equações (4.9) e (4.11), podem ser escritos como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G_N} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{4\pi^2 \phi_0^2}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4} \right) \right), \quad (4.20)$$

onde

$$V(\phi) = \frac{4\pi^2 \phi_0^4}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4} \right). \quad (4.21)$$

Admite-se, portanto, que este potencial possa atuar como **potencial inflaton**, responsável pela fase inflacionária, de modo que ele é gerado exclusivamente do movimento relativo entre a 3-brana do bulk, inicialmente localizada em r_1 , em direção à anti-brana, fixada em r_0 . No entanto, para que isto seja verdade, devemos calcular todos os **parâmetros de rolagem lenta** referentes a esse potencial e comparar estes resultados com os experimentais do WMAP.

Como vimos no capítulo 1, os modelos de inflação do tipo rolagem lenta devem satisfazer à **aproximação de rolagem lenta** e à **condição de rolagem lenta**. A primeira condição estabelece que o potencial inflaton deve pertencer a uma região na qual $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, ou seja, a energial potencial deve prevalecer. Já a segunda estabelece que os **parâmetros de rolagem lenta** ϵ e η devem obedecer às relações $\epsilon \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$.

Vejamos o cálculo dos parâmetros de rolagem lenta para esse dado potencial.

Os parâmetros de rolagem lenta são calculados a partir do potencial e de suas respectivas derivadas de acordo com as expressões (1.84) e (1.87).

De acordo com o potencial dado, suas três primeiras derivadas são dadas por

$$V(\phi) = \frac{4\pi^2 \phi_0^4}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4} \right),$$

$$V'(\phi) = \frac{16\pi^2 \phi_0^8}{N^2 \phi^5},$$

$$V''(\phi) = -\frac{80\pi^2 \phi_0^8}{N^2 \phi^6},$$

$$V'''(\phi) = \frac{480\pi^2 \phi_0^8}{N^2 \phi^7}.$$

Os parâmetros de rolagem lenta podem agora ser calculados. O primeiro é dado por

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{M_{PL}^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \\ &= \frac{M_{PL}^2}{2} \frac{\left(\frac{16\pi^2 \phi_0^8}{N^2 \phi^5} \right)^2}{\left(\frac{4\pi^2 \phi_0^4}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4} \right) \right)^2}, \end{aligned}$$

Figura 4.1: Neste gráfico temos o comportamento do potencial do inflaton $V(\phi)$ da equação (4.21) em função de ϕ .

$$\epsilon = \frac{8M_{PL}^2}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^{10}} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)^2. \quad (4.22)$$

O segundo parâmetro é dado por

$$\begin{aligned} \eta &= M_{PL}^2 \frac{V(\phi)''}{V(\phi)} \\ &= M_{PL}^2 \frac{\left(-\frac{80\pi^2}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^6}\right)}{\frac{4\pi^2}{N} \phi_0^4 \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)} , \\ \eta &= -\frac{20M_{PL}^2}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^6} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Podemos também calcular um terceiro parâmetro, ζ , dado pela expressão

$$\begin{aligned} \zeta &= M_{PL}^4 \frac{V'V'''}{V^2} \\ &= M_{PL}^4 \frac{\left(\frac{16\pi^2}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^5}\right) \left(-\frac{480\pi^2}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^7}\right)}{\frac{4\pi^2}{N} \phi_0^4 \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)^2}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\zeta = -\frac{480M_{PL}^4}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^{12}} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)^{-2}. \quad (4.25)$$

Utilizando o limite $r_1 \gg r_0$ ($\phi \gg \phi_0$) temos

$$\epsilon \approx \frac{8M_{PL}^2}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^{10}}, \quad (4.26)$$

$$\eta \approx -\frac{20M_{PL}^2}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^6}, \quad (4.27)$$

$$\zeta \approx -\frac{480M_{PL}^4}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^{12}}. \quad (4.28)$$

Obtidos os parâmetros de rolagem lenta, podemos estabelecer uma relação à qual o campo inflaton ϕ deve satisfazer a partir das condições de rolagem lenta,

$$|\eta| \ll 1, \quad (4.29)$$

$$\phi^6 \gg \frac{20M_{PL}^2}{N} \phi_0^4.$$

O valor ϕ_f indica o fim da inflação, que pode ser obtido da condição

$$\max\{\epsilon(\phi_f), \eta(\phi_f)\} = 1. \quad (4.30)$$

Vejamos o comportamento dos parâmetros de rolagem lenta, ϵ e η , para valores pequenos e grandes do campo inflaton.

Na figura (4.1), verificamos o comportamento do potencial do inflaton (4.21) em função de ϕ , onde o campo inflaton ϕ rola lentamente de um dado ponto inicial ϕ_i a um ponto final ϕ_f .

Da figura (4.2), temos que para valores pequenos de ϕ , as condições de rolagem lenta são violadas, de modo que a inflação cessa. Podemos escrever uma expressão analítica para ϕ_f ,

$$\epsilon(\phi_f) = \frac{8M_{PL}^2}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi_f^{10}} = 1, \quad (4.31)$$

$$\phi_f^5 = \left(\frac{8M_{PL}^2}{N^2}\right)^{1/2} \phi_0^4.$$

De acordo com a figura (4.1), para valores grandes de ϕ , o comportamento do potencial do inflaton é aproximadamente constante. Sabemos que os parâmetros de rolagem lenta dependem apenas deste potencial e de suas derivadas. Assim, temos o comportamento constante destes parâmetros (ϵ e $\eta \approx 0$) para este intervalo de ϕ , figura (4.3).

Figura 4.2: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta η e ϵ do potencial (4.21) para valores pequenos de ϕ .

Obtida a expressão (4.29), podemos reescrever a equação (4.31), como

$$\phi^6 \gg 5\sqrt{2}M_{PL}\phi_f^5 \quad . \quad (4.32)$$

O **número de dobras**, $N_e(\phi)$, é dado por

$$\begin{aligned} N_e(\phi) &= \frac{1}{M_{PL}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \\ &= \frac{1}{M_{PL}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{\frac{4\pi^2}{N}\phi_0^4 \left(1 - \frac{1}{N}\frac{\phi_0^4}{\phi'^4}\right)}{\frac{16\pi^2}{N^2}\frac{\phi_0^8}{\phi'^5}} d\phi' \\ &= \frac{N}{4M_{PL}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{\phi'^5}{\phi_0^4} \left(1 - \frac{1}{N}\frac{\phi_0^4}{\phi'^4}\right) d\phi' . \end{aligned}$$

Usando a aproximação $\phi \gg \phi_0$, substituindo os limites de integração e de acordo com a relação (4.32), temos que o número de “dobras” é dado por

$$N_e(\phi) \approx \frac{N}{24M_{PL}^2} \frac{\phi^6}{\phi_0^4} . \quad (4.33)$$

Obtemos as expressões analíticas dos parâmetros de rolagem lenta, do número de dobras e de algumas aproximações obtidas das condições de rolagem lenta. Agora, podemos

Figura 4.3: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η do potencial (4.21) para valores grandes de ϕ , onde as condições de rolagem lenta são válidas.

calcular os parâmetros que, simultaneamente, dependem explicitamente destes resultados e fornecem uma maior credibilidade aos modelos inflacionários já que são compatíveis com os dados experimentais do WMAP. Estes parâmetros são o índice espectral, $n(k)$ e sua variação em k , $dn(k)/d\ln k$, perturbação de curvatura, $\mathcal{R}$ e a amplitude de perturbação escalar, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$.

Começaremos com o cálculo da perturbação da curvatura $\mathcal{R}$ (1.77),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= \left(\frac{1}{24\pi^2 M_{PL}^4} \frac{V}{\epsilon} \right)^{1/2} \\
 &= \left\{ \frac{1}{24\pi^2 M_{PL}^4} \frac{\frac{4\pi^2}{N} \phi_0^4 \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4} \right)}{\frac{8M_{PL}^2}{N^2} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}} \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \frac{N}{48M_{PL}^6} \frac{\phi^{10}}{\phi_0^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4} \right) \right\}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Utilizando as expressões acima e (1.74), podemos calcular finalmente a amplitude de

perturbação escalar $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, dada por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{N}{300M_{PL}^6} \frac{\phi^{10}}{\phi_0^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4} \right) .$$

Utilizando a aproximação $\phi \gg \phi_0$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx \frac{1}{300M_{PL}^6} \frac{\phi^{10}}{\phi_0^4} . \quad (4.34)$$

ou, em termos de (4.33),

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx \frac{2}{25M_{PL}^4} N_e \phi^4 . \quad (4.35)$$

Efetuamos o cálculo dos parâmetros de rolagem lenta afim de encontrar uma expressão analítica ao índice espectral $n(k)$ cujo valor pode ser comparado com os dados experimentais do WMAP. De acordo com a literatura atual [41], os dados observacionais sugerem que o valor de $n(k)$ de um dado potencial inflaton deve ser próximo de 1 para que o modelo inflacionário obtenha uma maior aceitação. Das expressões (1.90) e (1.91), temos que

$$n(k) - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = -6\epsilon + 2\eta . \quad (4.36)$$

Como estudamos no capítulo 1, na maioria dos modelos de inflação, o parâmetro ϵ é atualmente desprezado, pois $|\eta| \gg \epsilon$. De acordo com [33], o valor numérico deste parâmetro ao potencial é $\epsilon = 1,54 \cdot 10^{-11}$, sendo muito pequeno. Assim, podemos usar

$$n(k) \approx 2\eta + 1 . \quad (4.37)$$

Demonstraremos o cálculo analítico do índice espectral utilizando as duas igualdades acima, (4.36), primeiramente em termos da amplitude de perturbação escalar $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ e depois em termos dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η . Portanto, da primeira igualdade, temos que

$$n(k) - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} .$$

Sendo a amplitude de perturbação escalar, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, dada por (4.34), temos que

$$\begin{aligned} n(k) - 1 &= -M_{PL}^2 \frac{V'}{V} \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \phi} \\ &= -M_{PL}^2 \frac{\frac{16\pi^2 \phi_0^8}{N^2 \phi^5}}{\frac{4\pi^2 \phi_0^4}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right)^4 \right)} \left\{ 10 \frac{d \ln \phi}{d \phi} \right\} \\ &= -\frac{40M_{PL}^2 \phi_0^4}{N \phi^6} \left(1 - \frac{1}{N} \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right)^4 \right) , \end{aligned}$$

$$n(k) - 1 \simeq -M_{PL}^2 \frac{20}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^6} . \quad (4.38)$$

Da equação (4.33) podemos escrever

$$\frac{1}{2}\{n(k) - 1\} \simeq -\frac{5}{6N_e} . \quad (4.39)$$

Da segunda igualdade temos

$$n(k) \approx 1 + 2\eta .$$

Usando o parâmetro η dado por (4.23), temos

$$\begin{aligned} n(k) - 1 &\simeq 1 - \frac{40M_{PL}^2}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^6} , \\ \frac{1}{2}\{n(k) - 1\} &\simeq -\frac{5}{6N_e} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Deste modo, as equações (4.39) e (4.40) são idênticas.

Vamos agora calcular a variação do índice espectral $n(k)$ em relação a k , $dn(k)/d\ln k$.

Da relação (4.37) temos

$$\begin{aligned} \frac{dn(k)}{d\ln k} &= -2M_{PL}^2 \frac{V'}{V} \frac{d\eta}{d\phi} \\ &= 2M_{PL}^2 \left\{ \frac{\frac{16\pi^2}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^5}}{\frac{4\pi^2}{N} \phi_0^4 \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)} \right\} \frac{d}{d\phi} \left\{ -\frac{20M_{PL}^2}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^6} \right\} , \\ \frac{1}{2} \frac{dn(k)}{d\ln k} &= -\frac{480}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^{12}} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)^{-1} , \\ \frac{1}{2} \frac{dn(k)}{d\ln k} &\approx -\frac{480M_{PL}^4}{N^2} \frac{\phi_0^8}{\phi^{12}} , \end{aligned} \quad (4.41)$$

ou em termos do número de dobras N_e ,

$$\frac{1}{2} \frac{dn}{d\ln k} \approx -\frac{5}{6N_e^2} . \quad (4.42)$$

Comparando-se com a tabela (2.1), verificamos que para os potenciais inflatons tipo $V(\phi) = (1 - c\phi^p)$, onde c é uma constante positiva e $p > 2$ ou $-\infty < p < 1$

$$\frac{1}{2}(n - 1) = -\frac{5}{6N_e} \quad (4.43)$$

sendo $p = -4$

$$\frac{1}{2} \frac{dn}{d\ln k} = -\frac{5}{6N_e^2} , \quad (4.44)$$

o que está de acordo com os resultados encontrados em (4.39) ou (4.40) e em (4.42).

O número de dobras necessário para que ocorra a inflação é de $N_e > 50$ [5, 7]. Para este potencial temos que $\eta < 0$ de acordo com a equação (4.27). Os dados experimentais do WMAP para um dado valor de k , $k = 0,002 Mpc^{-1}$, são dados por $n(k = 0,002 > Mpc^{-1}) = 1,20^{0,12}_{-0,11}$ e $dn/dlnk = -0,077^{0,05}_{-0,052}$ [7].

O índice espectral $n(k)$ deste potencial é

$$\begin{aligned} n(k) &\approx 2\eta + 1 \\ &\approx -2 \left(\frac{5}{6\{70\}} \right) + 1 \\ &\approx 0,9762 . \end{aligned} \tag{4.45}$$

Podemos também encontrar um valor numérico a variação de $n(k)$, dado por (4.42),

$$\frac{dn}{dlnk} = -\frac{5}{3N_e^2} = -0,00034 .$$

Semelhante ao estudo realizado com o potencial inflaton de [33], faremos agora com o potencial inflaton de [34]. Desta referência, o aspecto crucial é que, o campo inflaton é um modo de brana no estado fundamental e neste cenário inflacionário, ele se comportará como um modo “entre branas” que descreve uma separação relativa entre as branas dada pela coordenada da dimensão extra. Esta separação é responsável pela fase inflacionária nas três dimensões espaciais usuais, ou seja, em uma das branas. Durante a inflação, quando as branas estão relativamente separadas, o inflaton $\phi(t)$ comporta-se como um campo acoplado fracamente e apresenta características do tipo rolagem lenta. Aproximando-se do fim da inflação, no instante em que as branas estão muito próximas uma da outra, o inflaton acopla-se a outros modos da branas mas permanece acoplado com os modos do bulk. Como exemplo de um potencial inflaton $V(\phi)$ que ilustra tal cenário, tem-se [34],

$$V(\phi) \sim M_{Pf}^4 \xi(\phi/M_{Pf}) (1 - e^{(-|\phi|/m)}) , \tag{4.46}$$

onde m é um parâmetro de massa dependente do modelo, M_{Pf} é a escala de Planck fundamental e $\xi(\phi)$ é uma função suave que varia lentamente em ϕ .

De acordo com o nosso modelo, onde trabalhamos com apenas uma dimensão extra, podemos escrever

$$V(\phi) \sim M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) (1 - e^{(-|\phi|/m)}) . \tag{4.47}$$

onde o primeiro termo é devido à gravidade.

Figura 4.4: Comportamento do potencial $V(\phi)$ dado por (4.47) em função de ϕ .

Vejamos o cálculo dos parâmetros de rolagem lenta para este potencial. Sendo $\xi(\phi)$ uma função suave que varia lentamente em ϕ , temos que suas derivadas são

$$V'(\phi) = \frac{M_{5D}^4}{m} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}},$$

$$V''(\phi) = \frac{M_{5D}^4}{m^2} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}},$$

e

$$V'''(\phi) = \frac{M_{5D}^4}{m^3} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}}.$$

Seu primeiro parâmetro de rolagem lenta é

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{M_{PL}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \\ &= \frac{\left\{ \frac{M_{5D}^4}{m} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right\}^2}{\left\{ M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) \left(1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right) \right\}^2}, \\ &= \frac{M_{PL}^2}{2M^2} \frac{e^{-\frac{2|\phi|}{m}}}{\left(1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Sendo o potencial do inflaton $V(\phi)$ uma função plana em ϕ , temos que

$$\epsilon \approx \frac{M_{PL}^2}{2m^2} e^{-\frac{2|\phi|}{m}}. \quad (4.48)$$

Seu segundo parâmetro de rolagem lenta é dado por

$$\begin{aligned} \eta &= M_{PL}^2 \frac{V''}{V} \\ &= M_{PL}^2 \frac{\left\{ -\frac{M_{5D}^4}{m^2} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right\}}{\left\{ M_{5D}^4 \left(1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right) \right\}} \\ &= -\frac{M_{PL}^2}{m^2} \frac{e^{-\frac{|\phi|}{m}}}{\left(1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right)}, \\ \eta &\approx -\frac{M_{PL}^2}{m^2} e^{-\frac{|\phi|}{m}}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

O parâmetro ζ é dado por

$$\begin{aligned} \zeta &= M_{PL}^4 \frac{V'V'''}{V^2} \\ &= M_{PL}^4 \frac{\left(\frac{M_{5D}^4}{m} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right) \left(\frac{M_{5D}^4}{m^3} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right)}{\left(M_{5D}^4 m^3 \xi(\phi/M_{5D}) \left(1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right) \right)^2} \\ &= \frac{M_{PL}^4}{m^4} \frac{e^{-\frac{2|\phi|}{m}}}{\left(1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right)^2}, \\ \zeta &\approx \frac{M_{PL}^4}{m^4} e^{-\frac{2|\phi|}{m}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Na figura (4.4), plotamos o comportamento do potencial inflaton (4.58) em função do inflaton ϕ .

Na figura (4.5) apresentamos o comportamento dos parâmetros de rolagem lenta η e ϵ em função do inflaton. Na figura (4.6) observamos o comportamento destes parâmetros para valores pequenos de ϕ e na figura (4.7), observamos o comportamento destes parâmetros para valores grandes de ϕ .

Da figura (4.5), temos que na região de valores pequenos de ϕ , as condições de rolagem lenta são violadas, de modo que a fase inflacionária termina.

Uma expressão analítica para ϕ_f é

$$\epsilon(\phi_f) = \frac{M_{PL}^2}{2m^2} e^{-\frac{2|\phi_f|}{m}} = 1,$$

Figura 4.5: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η do potencial (4.47) em função de ϕ .

$$\phi_f = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{M_{PL}^2}{2m^2} \right). \quad (4.51)$$

Na região de grandes valores de ϕ , plotada em (4.7), o comportamento dos parâmetros de rolagem lenta é constante, de modo que as condições de rolagem lenta não são violadas. Isto acontece somente na região de valores pequenos de ϕ , como observado em (4.6).

O número de dobras $N_e(\phi)$ é dado por

$$\begin{aligned} N_e(\phi) &= \frac{1}{M_{PL}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V(\phi')}{V'(\phi')} d\phi' \\ &= \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) \left(1 - e^{-\frac{|\phi'|}{m}}\right)}{M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi'|}{m}}} d\phi' \\ &= \frac{m}{M_{PL}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \left(e^{\frac{|\phi'|}{m}} - 1\right) d\phi'. \end{aligned}$$

Usando o resultado de (4.51) temos que

$$N_e(\phi) \approx \frac{m^2}{M_{PL}^2} e^{\frac{|\phi|}{m}}. \quad (4.52)$$

Figura 4.6: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η do potencial (4.47) para valores pequenos de ϕ .

Para esse dado potencial $V(\phi)$, temos que a perturbação da curvatura R é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left(\frac{1}{24\pi^2 M_{PL}^4} \frac{V}{\epsilon} \right)^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{1}{24\pi^2 M_{PL}^4} \frac{M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) (1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}})}{\frac{M_{PL}^2 e^{-2\frac{|\phi|}{m}}}{2m^2}} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.53)$$

A relação entre as escalas de Planck 4D e 5D é [30]

$$M_{4D} = \sqrt{3} 4\pi \frac{M_{5D}^3}{\sqrt{\lambda}} M_{5D}. \quad (4.54)$$

Portanto, a curvatura de perturbação, $\mathcal{R}$, é

$$\mathcal{R} \approx \left\{ \frac{m^2}{12\pi^2 M_{PL}^6} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{\lambda} M_{PL} \right)^{4/3} \xi(\phi/M_{5D}) e^{\frac{2|\phi|}{m}} (1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}}) \right\}^{1/2}, \quad (4.55)$$

e a amplitude de perturbação escalar $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{4}{25} \left\{ \frac{m^2}{12\pi^2 M_{PL}^6} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{\lambda} M_{PL} \right)^{4/3} \xi(\phi/M_{5D}) e^{\frac{2|\phi|}{m}} (1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}}) \right\},$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx \frac{m^2}{75\pi^2 M_{PL}^6} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} M_{PL} \sqrt{\lambda} \right)^{4/3} \xi(\phi/M_{5D}) e^{\frac{2|\phi|}{m}}, \quad (4.56)$$

onde λ representa a tensão da brana.

Utilizando a primeira igualdade de (4.36), o índice espectral $n(k)$ para esse potencial $V(\phi)$ é

$$\begin{aligned} n(k) - 1 &= -\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{V'}{V} M_{PL}^2 \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln \phi}, \\ &= -M_{PL}^2 \left(\frac{M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) \frac{1}{m} e^{-\frac{|\phi|}{m}}}{M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) (1 - e^{-\frac{|\phi|}{m}})} \right) \frac{d}{d\phi} \left(\frac{2|\phi|}{m} \right). \\ n(k) - 1 &\approx -\frac{2}{m^2} \frac{M_{PL}^2}{e^{\frac{|\phi|}{m}}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Reescrevendo a equação acima em termos de N_e temos

$$\frac{1}{2} \{n(k) - 1\} \simeq -\frac{1}{N_e}. \quad (4.58)$$

Deste modo, calculando o índice espectral $n(k)$, temos que

$$n(k) \approx 1 + 2\eta, \quad ,$$

onde o parâmetro η é dado por (4.49).

Portanto, $n(k)$ equivale à

$$\begin{aligned} n(k) - 1 &\simeq 1 - \frac{2M_{PL}^2}{m^2} e^{-\frac{|\phi|}{m}} \\ \frac{1}{2} \{n(k) - 1\} &\simeq -\frac{1}{N_e}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

A variação do índice espectral, $dn(k)/d \ln k$, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dn(k)}{d \ln k} &= -2M_{PL}^2 \frac{V'}{V} \frac{d\eta}{d\phi} \\ &= 2M_{PL}^2 \left\{ \frac{\frac{M_{5D}^4}{m} \xi(\phi/M_{5D}) e^{-\frac{|\phi|}{m}}}{M_{5D}^4 \xi(\phi/M_{5D}) (1 - e^{(-|\phi|/m)})} \right\} \frac{d}{d\phi} \left\{ -\frac{M_{PL}^2}{m^2} e^{-\frac{|\phi|}{m}} \right\} \\ \frac{1}{2} \frac{dn(k)}{d \ln k} &\approx -\frac{2M_{PL}^4}{m^4} e^{-2\frac{|\phi|}{m}}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Em termos do número de e-folds $N_e(\phi)$

$$\frac{1}{2} \frac{dn}{d \ln k} \approx -\frac{1}{N_e^2}. \quad (4.61)$$

Tabela 4.1: Alguns valores de $n(k)$ e $dn/dlnk$ para diferentes N_e .

	$n = (1 - 2/N_e)$	$dn/dlnk = -2/N_e^2$
$N_e = 20$	0,9	-0,005
$N_e = 50$	0,96	-0,0008
$N_e = 60$	0,96666	-0,00054
$N_e = 70$	0,9714	-0,0004

Comparando-se com a tabela (2.1), verificamos que para os potenciais inflatons tipo $V(\phi) = (1 - e^{-q\phi})$, onde q é uma constante positiva,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n-1) &= -\frac{1}{N_e}, \\ \frac{1}{2} \frac{dn}{dlnk} &= -\frac{1}{N_e^2}, \end{aligned}$$

o que está de acordo com os resultados encontrados em (4.58) ou (4.59) e em (4.61).

O número de dobras necessário para que a inflação ocorra é de $N_e > 50$ e o índice espectral $n(k)$. Para um dado valor de $k_0 = 0,002 > Mpc^{-1}$, o valor do índice espectral é de $n(k_0) = 1,20 >_{-0,11}^{0,12}$ e de sua variação é $dn/dlnk = -0,077_{-0,052}^{+0,05}$ [7]. Na tabela (4.2.1) exemplificamos diferentes resultados ao índice espectral $n(k)$ e à sua variação $dn(k)/dlnk$ referente a valores de $N_e(\phi)$ iguais e menores do que 70.

Assumindo $N_e > 50$, $n(k)$ é igual a 0,9714.

Passaremos agora para o estudo do terceiro potencial que foi extraído de [35]. Primeiramente mencionaremos como foi gerado esse potencial de acordo com [35] e depois faremos o mesmo estudo realizado com os dois primeiros potenciais.

Vários modelos inflacionários híbridos construídos com base em conceitos de supersimetria (SUSY) estão apresentando um notável sucesso, pois satisfazem às condições necessárias para explicar a inflação. Enquanto um campo ϕ (o inflaton) rola lentamente em direção ao seu ponto de mínimo, a inflação é governada pela energia de falso vácuo de um segundo campo ψ . Inicialmente, ψ não atinge seu valor de mínimo devido à sua interação com ϕ . Quando o inflaton atinge seu valor crítico ϕ_c , o campo ψ não governa mais a inflação e rola em direção a seu vácuo verdadeiro. Nesse instante a inflação cessa.

Nesses modelos supersimétricos, a energia de vácuo inflacionária é dominada por termos do tipo D ou F.

A este cenário, considera-se um modelo de inflação de termo D, usando-se uma simetria

Figura 4.7: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η do potencial (4.47) para valores grandes de ϕ .

de gauge $U(1)$, para o qual pode-se escrever uma densidade de energia que é invariante de gauge e supersimétrica. Este modelo utiliza-se de um superpotencial $W = \lambda \phi \bar{\psi} \psi$, contendo um campo inflaton ϕ acoplado a dois campos, ψ com cargas ± 1 em relação a uma simetria $U(1)$. Neste caso, o potencial escalar de nível de árvore é

$$V = |\lambda \phi|^2 (|\psi|^2 + |\bar{\psi}|^2) + |\lambda \bar{\psi} \psi|^2 + \frac{g^2}{2} (|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2 + \xi). \quad (4.62)$$

Para grandes valores iniciais de ϕ , os campos $\bar{\psi}$ e ψ adquirem grandes valores de massa, forçando a assumir $\bar{\psi} = \psi = 0$. A energia de vácuo resultante que governa a inflação é $V_0 = g^2 \xi^2 / 2$. Quebrada a supersimetria (SUSY), um potencial para ϕ é gerado a um loop,

$$V(\phi; \mu) = \frac{1}{2} g^2 \xi^2 \left[1 + C \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda \phi|}{\mu} \right) \right], \quad (4.63)$$

onde C indica o número de campos que se acoplam ao inflaton, o fator g é um acoplamento típico desses campos, que no caso do modelo de termo D, é um acoplamento de calibre. Nos modelos de termo F, o fator g é um acoplamento de Yukawa. O parâmetro μ é a escala de momento e $\alpha = g^2 / 4\pi$. Temos que ϕ rola lentamente em seu potencial logarítmico até atingir seu valor crítico, $\phi_c = g\sqrt{\xi}/\lambda$, simultaneamente quando $\bar{\psi}$ cai rapidamente a $\sqrt{\xi}$, a SUSY é restaurada e a inflação se cessa por completo.

Vejamos agora os resultados encontrados para os parâmetros de rolagem lenta. Sendo o potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}g^2\xi^2 \left[1 + C \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right],$$

temos que suas derivadas são dadas por

$$V'(\phi) = \frac{1}{16\pi^2}g^4\xi^2C \frac{1}{|\phi|},$$

$$V''(\phi) = -\frac{1}{16\pi^2}g^4\xi^2C \frac{1}{|\phi|^2},$$

$$V'''(\phi) = \frac{1}{8\pi^2}g^4\xi^2C \frac{1}{|\phi|^3}.$$

Os parâmetros de rolagem lenta ϵ e η para este potencial são

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2}M_{PL}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}M_{PL}^2 \left(\frac{\frac{1}{16\pi^2}g^4\xi^2C \frac{1}{|\phi|}}{\frac{1}{2}g^2\xi^2 \left[1 + \frac{Cg^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]} \right)^2 \\ &= \frac{1}{128\pi^4}g^4 \left(\frac{M_{PL}C}{|\phi|} \right)^2 \left[1 + \frac{Cg^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]^{-2} \\ \epsilon &\approx \frac{1}{128\pi^4}g^4 \left(\frac{M_{PL}C}{|\phi|} \right)^2, \end{aligned} \tag{4.64}$$

e

$$\begin{aligned} \eta &= M_{PL}^2 \left(\frac{V''}{V} \right) \\ &= M_{PL}^2 \left(\frac{-\frac{1}{16}g^4\xi^2C \frac{1}{|\phi|^2}}{\frac{1}{2}g^2\xi^2 \left[1 + \frac{g^2C}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}C \left(\frac{M_{PL}g}{|\phi|} \right)^2 \left[1 + \frac{g^2C}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]^{-1} \\ \eta &\approx -\frac{1}{8\pi^2}C \left(\frac{M_{PL}g}{|\phi|} \right)^2. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Figura 4.8: Comportamento do potencial inflaton $V(\phi)$, equação (4.63), em função de ϕ .

O parâmetro ζ é dado por

$$\begin{aligned}
 \zeta &= M_{PL}^4 \frac{V' V'''}{V^2} \\
 &= M_{PL}^4 \frac{\left(\frac{1}{16\pi^2} \frac{g^4 \xi^2 C}{|\phi|} \right) \left(\frac{1}{8\pi^2} g^4 \xi^2 C \frac{1}{|\phi|^3} \right)}{\left(\frac{1}{2} g^2 \xi^2 \left[1 + \frac{g^2 C}{8\phi^2} \ln \left(\frac{|\lambda \phi|}{\mu} \right) \right] \right)^2} \\
 &= \frac{1}{32\pi^4} C^2 \left(\frac{M_{PL} g}{|\phi|} \right)^4 \left[1 + \frac{g^2 C}{8\phi^2} \ln \left(\frac{|\lambda \phi|}{\mu} \right) \right]^{-2} \\
 \zeta &\approx \frac{1}{32\pi^4} C^2 \left(\frac{M_{PL} g}{|\phi|} \right)^4. \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

Sendo $\alpha = g^2/4\pi$, podemos reescrever estes parâmetros de rolagem lenta como

$$\epsilon \approx \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{M_{PL} C \alpha}{|\phi|} \right)^2, \tag{4.67}$$

$$\eta \approx -\frac{1}{2\pi} C \alpha \left(\frac{M_{PL}}{|\phi|} \right)^2, \tag{4.68}$$

e

$$\zeta \approx \frac{1}{2\pi^2} C^2 \alpha^2 \left(\frac{M_{PL}}{|\phi|} \right)^4. \tag{4.69}$$

Figura 4.9: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η do potencial (4.63) em função de ϕ .

A figura (4.8) mostra o comportamento do potencial $V(\phi)$ em função do inflaton ϕ e na figura (4.9) observamos o comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η em função de ϕ . De acordo com a figura (4.10), o intervalo de pequenos valores de ϕ viola as condições de rolagem lenta. Já para o intervalo de valores grandes de ϕ , o comportamento do potencial é aproximadamente constante. Deste modo, neste intervalo, os parâmetros de rolagem lenta são constantes em ϕ , figura (4.11).

A inflação termina quando

$$n(\phi_f) \approx 1 ,$$

$$\phi_f \approx \sqrt{C\alpha} 2\pi \frac{M_{PL}}{\phi} . \quad (4.70)$$

O número de dobras para este potencial é dado por

$$N_e(\phi) = \frac{1}{M_{PL}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi$$

$$= \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{\frac{1}{2}g^2\xi^2 \left[1 + \frac{Cg^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]}{\frac{1}{16\pi^2}g^4\xi^2 C \frac{1}{|\phi|}} d\phi$$

$$N_e(\phi) \approx \frac{4}{M_{PL}^2 g^2 C} \phi^2 \quad (4.71)$$

ou

$$N_e(\phi) \approx \frac{1}{M_{PL}^2 \alpha C} \phi^2. \quad (4.72)$$

A perturbação de curvatura $\mathcal{R}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left(\frac{1}{24\pi^2 M_{PL}^4} \frac{V}{\epsilon} \right) \\ &= \left(\frac{1}{24\pi^2 M_{PL}^4} \frac{\frac{1}{2} g^2 \xi^2 \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]}{\frac{1}{128\pi^4} g^4 \left(\frac{C M_{PL}}{|\phi|} \right)^2} \right)^{1/2} \\ \mathcal{R} &= \left(\frac{8\pi^2}{3M_{PL}^6 C^2 g^2} |\phi|^2 \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right] \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Portanto, a amplitude de perturbação escalar $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} &= \frac{4}{25} \left(\frac{8\pi^2}{3M_{PL}^6 C^2 g^2} |\phi|^2 \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right] \right) \\ \mathcal{P}_{\mathcal{R}} &= \frac{32}{75} \frac{\pi^2}{3M_{PL}^6 C^2 g^2} |\phi|^2 \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Para o potencial (4.63), o índice espectral $n(k)$ é dado por

$$\begin{aligned} n(k) - 1 &= \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = -\frac{V'}{V} M_{PL}^2 \frac{d \ln}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \\ &= -M_{PL}^2 \frac{\frac{1}{16\pi^2} g^4 \xi^2 C \frac{1}{|\phi|}}{\frac{1}{2} g^2 \xi^2 \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]} \frac{d}{d\phi} \left(2 \ln |\phi| + \ln \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right] \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{C g^2 M_{PL}^2}{|\phi|^2} \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]^{-1} + \left(\frac{g^2 C M_{PL}}{8\pi^2 |\phi|} \right)^2 \left[1 + \frac{C g^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]^{-2} \\ n(k) - 1 &\approx -\frac{1}{4\pi^2} \frac{g^2 C M_{PL}^2}{|\phi|^2}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

ou em termos de α

$$n(k) - 1 \approx -\frac{C \alpha M_{PL}^2}{\pi} \frac{1}{|\phi|^2}. \quad (4.76)$$

Sendo a equação ao número de dobras $N_e(\phi)$ dado por (4.72), temos que

$$\frac{1}{2} \{n(k) - 1\} \simeq -\frac{1}{2N_e}. \quad (4.77)$$

Utilizando-se a relação do índice espectral $n(k)$ em termos de η dado por (4.68) temos

Figura 4.10: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η do potencial (4.63) para valores pequenos de ϕ .

$$\begin{aligned}
 n(k) - 1 &\simeq 2\eta \\
 \frac{1}{2}\{n(k) - 1\} &\simeq -\frac{C\alpha M_{PL}^2}{\pi} \frac{1}{|\phi|^2} \\
 \frac{1}{2}\{n(k) - 1\} &\simeq -\frac{1}{2N_e} .
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Obtido o índice espectral $n(k)$, sua variação em função do número de ondas é

$$\begin{aligned}
 \frac{dn(k)}{d\ln k} &= 2 \frac{d\eta}{d\ln k} \\
 &= -2M_{PL}^2 \frac{V'}{V} \frac{d\eta}{d\phi} \\
 &= -2M_{PL}^2 \frac{\frac{1}{2} \frac{g^4 \xi^2 C}{8\pi^2} \frac{1}{|\phi|}}{\frac{1}{2} g^2 \xi^2 \left[1 + \frac{Cg^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{|\lambda\phi|}{\mu} \right) \right]} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{M_{PL}^2 \alpha C}{2\pi} \frac{1}{\phi^2} \right) \\
 &= -\frac{2M_{PL}^4 \alpha^2 C^2}{2\pi^2} \frac{1}{\phi^4} .
 \end{aligned}$$

Escrevendo a equação acima em termos de $N_e(\phi)$, dado pela equação (4.72), temos

que

$$\frac{1}{2} \frac{dn(k)}{d \ln k} \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{N_e^2}. \quad (4.79)$$

De acordo com a tabela (2.1), aos potenciais inflatons do tipo $V(\phi) = (1 + c \ln \frac{\phi}{Q})$, onde c e Q são constantes positivas, seu índice espectral $n(k)$ e sua variação $dn(k)/d \ln k$ são

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n-1) &= -\frac{1}{2N_e} \\ \frac{1}{2} \frac{dn}{d \ln k} &= -\frac{1}{2N_e^2}, \end{aligned}$$

correspondendo corretamente às expressões (4.77) ou (4.78) e (4.79), respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n-1) &= -\frac{1}{2N_e} \\ \frac{1}{2} \frac{dn}{d \ln k} &= -\frac{1}{2N_e^2}, \end{aligned}$$

correspondendo corretamente às expressões (4.77) ou (4.78) e (4.79), respectivamente.

Assumindo $N_e \approx 70$, utilizada na literatura, obtemos que o valor numérico do índice espectral para esse potencial é

$$n(k) = -\frac{1}{N_e} + 1 \approx 0,986. \quad (4.80)$$

O valor numérico da variação $dn/d \ln k$ é

$$\frac{dn(k)}{d \ln k} = -\frac{1}{N_e^2} \approx -0,000204.$$

De modo que, os valores experimentais obtidos pelo WMAP para um dado valor de k , $k = 0,002 Mpc^{-1}$, são $n(k = 0,002 Mpc^{-1}) = 1,2_{-0,11}^{+0,12}$ e $dn/d \ln k = -0,077_{-0,052}^{+0,05}$ [7].

4.3 Cosmologia Inflacionária em modelos de Branas do tipo RS-II

Como estudado no capítulo 2, a cosmologia de branas obteve maior sucesso quando Randall e Sundrum publicaram seus trabalhos [24] e [25], onde o nosso universo é representado por uma hipersuperfície 3-dimensional espacialmente, chamada de 3-brana, inserida em um espaço-tempo AdS_5 .

Figura 4.11: Comportamento dos parâmetros de rolagem lenta ϵ e η do potencial (4.63) para valores grandes de ϕ .

A aplicação do modelo RS-I à cosmologia inflacionária é o objetivo de nosso estudo, tarefa esta desenvolvida na seção anterior. Nossa proposta foi exemplificar três potenciais, gerados da interação entre um par de branas, como candidatos a potenciais inflaton.

Nesta seção, nos restringiremos a estudar algumas particularidades da aplicação da cosmologia inflacionária para os modelos RS-II. Veremos que os parâmetros de rolagem rápida e as outras grandezas deles derivadas apresentam algumas correções.

No modelo RS-II, considera-se uma 3-brana, com tensão intrínseca positiva λ , inserida em um espaço-tempo $5D$ com constante cosmológica Λ negativa (bulk AdS_5). Os modelos DGP [26, 28, 29], mostram que a equação de Friedmann sobre uma 3-brana, inserida neste cenário, é dada por

$$H^2 = \frac{1}{6M_{5D}^3} \Lambda_{5D} + \frac{1}{36M_{5D}^6} \rho_b^2 + \frac{C}{a^4} - \frac{k'}{a^2} \quad , \quad (4.81)$$

ao invés da forma padrão

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho + \frac{\Lambda_{4D}}{3} - \frac{k'}{a^2} \quad . \quad (4.82)$$

Na equação (4.81), $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble na brana, com fator de escala

$a(t)$, sendo t o tempo cosmológico. M_{5D} é a massa de Planck $5D$, ρ_b é a densidade de energia $4D$ sobre a brana e C é uma constante de integração.

No primeiro modelo DGP [28], para se recuperar as leis da gravitação 4-dimensional, a ação total é dada pela ação de Einstein-Hilbert 5-dimensional S_{5D}

$$S_{5D} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^5X \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int d^5X \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m \quad (4.83)$$

onde a métrica e o escalar de Ricci do bulk são, respectivamente, $\tilde{g}_{AB}$ e $\tilde{R}$. A constante κ é dada por $\kappa^2 = 8\pi G_{5D} = M_{5D}^{-3}$. O segundo termo em (4.83) representa o conteúdo de matéria correspondente à contribuição de matéria localizada na brana e não à do espaço-tempo $5D$. Assim, podemos reescrever este termo como

$$\int d^4x \sqrt{-g} (\lambda + l_m) \quad , \quad (4.84)$$

onde l_m é a lagrangiana de densidade dos campos de matéria que estão na brana e λ é a tensão da brana.

A métrica da brana, ou métrica induzida, g_{cd} é definida pela métrica do bulk g_{AB} como

$$g_{cd} \equiv \partial_c X^A \partial_d X^B \tilde{g}_{AB} \quad , \quad (4.85)$$

onde $X^A(x^c)$ é a coordenada de um evento que depende da coordenada x^c da brana.

Neste cenário, a métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) do espaço-tempo $5D$ é

$$ds^2 = -n^2(t, y) dt^2 + a^2(t, y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(t, y) dy^2 \quad , \quad (4.86)$$

onde γ_{ij} é a métrica 3-dimensional simétrica maximalmente.

As equações de Einstein 5-dimensional são

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{AB} = \kappa^2 \tilde{T}_{AB} \quad , \quad (4.87)$$

onde $\tilde{R}_{AB}$ é o tensor de Ricci 5-dimensional, e $\tilde{T}_{AB}$ é o tensor de energia-momento.

O tensor $\tilde{T}_{AB}$ pode ser decomposto em duas partes

$$\tilde{T}^A{}_{B} = T^A{}_{B}|_{(5D)} + T^A{}_{B}|_{(\text{brana})} \quad . \quad (4.88)$$

O primeiro tensor $T^A{}_{B}|_{(5D)}$ é o tensor de energia-momento no espaço-tempo 5-dimensional dado pela constante cosmológica Λ_{5D} como

$$T^A{}_{B}|_{(5D)} = \text{diag}(-\Lambda, -\Lambda, -\Lambda, -\Lambda, -\Lambda) \quad . \quad (4.89)$$

O segundo termo $T^A{}_B|_{\text{(brana)}}$ é o conteúdo de matéria na brana. Considerando uma geometria homogênea e isotrópica, temos que este termo é dado por

$$T^A{}_B|_{\text{(brana)}} = \frac{\delta(y)}{b} \text{diag}(\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \quad , \quad (4.90)$$

onde ρ_b e p_b são independentes da posição na brana, dependentes apenas do tempo.

A equação de Friedmann sobre a brana é dada por (4.81). Supondo-se que a densidade de energia da brana ρ_b possa ser decomposta em duas partes

$$\rho_b = \lambda + \rho \quad , \quad (4.91)$$

onde ρ é densidade de matéria ordinária em cosmologia, podemos reescrever a equação (4.81) como

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{6M_{5D}^3} \Lambda + \frac{1}{36M_{5D}^6} (\lambda + \rho)^2 + \frac{C}{a^4} - \frac{k'}{a^2} \\ &= \frac{1}{6M_{5D}^3} \Lambda + \frac{1}{36M_{5D}^6} (\lambda)^2 + \frac{1}{18M_{5D}^6} \lambda \rho + \frac{1}{36M_{5D}^6} \rho^2 + \frac{C}{a^4} - \frac{k'}{a^2} \quad . \end{aligned}$$

Comparando com as equações de Friedmann da cosmologia usual, equação (4.82), identificamos a constante cosmológica efetiva na brana Λ_{4D} e a massa de Planck 4-dimensional M_{PL} como

$$\Lambda_{4D} = \frac{1}{2M_{5D}^3} \left(\Lambda + \frac{1}{6M_{5D}^3} \lambda^2 \right) \quad (4.92)$$

e

$$M_{PL} = \sqrt{6} \left(\frac{M_{5D}^3}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad . \quad (4.93)$$

Portanto,

$$H^2 = \frac{\Lambda_{(4D)}}{3} + \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho + \frac{1}{6} \frac{1}{M_{PL}^2 \lambda} \rho^2 + \frac{C}{a^4} - \frac{k'}{a^2} \quad . \quad (4.94)$$

Escolhendo um espaço-tempo 5-dimensional espacialmente plano ($k' = 0$), com $\Lambda_{4D} = 0$ (brana de Minkowski) e $C = 0$ temos

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho + \frac{1}{6} \frac{1}{M_{PL}^2 \lambda} \rho^2 \quad (4.95)$$

e

$$\Lambda = -\frac{1}{6M_{5D}^3} \lambda^2, \quad (4.96)$$

sendo este último o *ajuste fino* de Randall-Sundrum.

Assim, a equação de Friedmann para o modelo RS-II é

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho \left[1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right] \quad . \quad (4.97)$$

Para os modelos RS-II, podemos obter inflação de um inflaton morando na 3-brana. Consideremos, portanto, um campo escalar homogêneo minimamente acoplado à gravitação restrito à brana. A evolução deste campo é governada pela equação usual

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = V'(\phi) \quad .$$

Se a densidade de energia do campo escalar domina qualquer outra forma de matéria, desconsiderando o termo de curvatura, a equação de Friedmann (4.81) pode ser escrita como

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \rho_\phi \left[1 + \frac{\rho_\phi}{2\lambda} \right] = \frac{1}{3M_{PL}^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \left[1 + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \right] ,$$

onde identificamos

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad .$$

A diferença com relação à inflação padrão está, portanto, na presença do termo quadrático na equação de Friedmann.

De acordo com a aproximação de rolagem lenta, $1/2 \dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, temos

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi) \quad (4.98)$$

e

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_{PL}^2} V(\phi) \left[1 + \frac{V(\phi)}{2\lambda} \right] \quad . \quad (4.99)$$

Com um potencial aproximadamente plano, H^2 é aproximadamente constante e o fator de escala cresce exponencialmente. Se no fim do processo inflacionário (quando não mais

pudermos tomar o limite de rolagem lenta) o valor do fator de escala for a_f , então, durante o processo podemos expressar

$$a(\phi) = a_f \exp(-N(\phi)) ,$$

onde N conta o número de e-folds a partir do fim do processo

$$N(\phi) = \int_{t_f}^t H dt' = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{H}{\dot{\phi}} \approx \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{3H^2}{V'(\phi)} d\phi , \quad (4.100)$$

ou seja,

$$N(\phi) \approx \frac{1}{M_{PL}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} \left(1 + \frac{V(\phi)}{2\lambda} \right) d\phi . \quad (4.101)$$

A amplitude de perturbação escalar $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, ou espectro de perturbação de curvatura, é definida como em (2.81),

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{4}{25} \langle |\mathcal{R}|^2 \rangle = \frac{4}{25} \frac{H^2 \langle (\delta\phi)^2 \rangle}{\dot{\phi}^2} . \quad (4.102)$$

Usando o resultado de Bunch e Davies [15] que estabelece o espectro de flutuações quânticas de um campo escalar sem massa minimamente acoplado à gravidade em um espaço de Sitter como sendo

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle = \frac{H^2}{4\pi^2} .$$

Substituindo este resultado em (4.102), temos o resultado

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{25\pi^2} \frac{H^4}{\dot{\phi}^2} .$$

Usando as equações (4.98) e (4.99) temos ainda

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{9}{25\pi^2} \frac{H^6}{V'(\phi)^2} , \quad (4.103)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{75\pi M_{PL}^6} \right) \frac{V^3(\phi)}{(V'(\phi))^2} \left[1 + \frac{V(\phi)}{2\lambda} \right]^3 .$$

A variação de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é definida em termos do índice espectral $n(k)$ como

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \equiv n(k) - 1 . \quad (4.104)$$

Contando a partir do fim da inflação, quando $a = a_f$, como as amplitudes são calculadas ao cruzar o horizonte, $k = aH$,

$$k(\phi) = a(\phi)H(\phi) = a_f \exp(-N(\phi))H(\phi) .$$

Usando (4.100), [48]

$$\begin{aligned} \frac{d \ln k(\phi)}{d\phi} &= -N'(\phi) + \frac{H'(\phi)}{H(\phi)} = -\frac{3H^2}{V'(\phi)} + \frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \\ &= -\frac{1}{M_{PL}^2} \frac{V}{V'} \left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right) + \frac{1}{2} \frac{V'}{V} \frac{(1 + V/\lambda)}{(1 + V/(2\lambda))} \\ &= -\frac{1}{M_{PL}^2} \frac{V}{V'} \frac{(2\lambda + V)}{2\lambda} \left[1 - M_{PL}^2 \frac{V'^2}{V^2} \frac{2\lambda(\lambda + V)}{(2\lambda + V)^2}\right] \\ &= \frac{1}{M_{PL}^2} \frac{V}{V'} \left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right) (\epsilon - 1) , \end{aligned} \quad (4.105)$$

onde definimos o parâmetro ϵ por

$$\epsilon = M_{PL}^2 \frac{V'^2}{V^2} \frac{2\lambda(\lambda + V)}{(2\lambda + V)^2} . \quad (4.106)$$

Este parâmetro é a generalização do primeiro parâmetro de rolagem lenta para a cosmologia de branas. Durante a inflação, $\epsilon \ll 1$.

Assim, como

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \frac{d\phi}{d \ln k} \frac{d \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} ,$$

onde

$$\frac{d \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} = \frac{1}{75\pi M_{PL}^6} \left\{ \left[\frac{3V^2}{V'} - \frac{2V^3 V''}{V'^3} \right] \left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right)^3 + \frac{3V^3}{2\lambda V'} \left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right)^2 \right\}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \frac{d \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} &= \left\{ \left[\frac{3V^2}{V'} - \frac{2V^3 V''}{V'^3} \right] \frac{V'^2}{V^3} + \frac{3V'}{2\lambda} \left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right)^{-1} \right\} \\ &= \frac{3V'}{V} - \frac{2V''}{V'} + \frac{3V'}{2\lambda + V} , \end{aligned}$$

temos o resultado

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} &= \left(\frac{3V'}{V} - \frac{2V''}{V'} + \frac{3V'}{2\lambda + V} M_{PL}^2 \frac{V'}{V} \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \frac{1}{\epsilon - 1} \right) \\
&= \left(\frac{3V'}{V} \frac{(2\lambda + 2V)}{(2\lambda + V)} - \frac{2V''}{V'} \right) M_{PL}^2 \frac{V'}{V} \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \frac{1}{\epsilon - 1} \\
&= 6M_{PL}^2 \frac{V'^2}{V^2} \frac{(2\lambda)(\lambda + V)}{(2\lambda + V)^2} \frac{1}{\epsilon - 1} - 2M_{PL}^2 \frac{V''}{V} \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \frac{1}{\epsilon - 1} .
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Definimos a generalização do segundo parâmetro de rolagem lenta como

$$\eta \equiv M_{PL}^2 \frac{V''}{V} \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + V} \right) . \tag{4.108}$$

Considerando apenas termos lineares nos parâmetros encontra-se

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \approx -6\epsilon + 2\eta . \tag{4.109}$$

Portanto, da relação (4.104),

$$n(k) - 1 \approx -6\epsilon + 2\eta .$$

Durante a inflação, as amplitudes são calculadas ao cruzar o horizonte, $k = aH$. Sendo H aproximadamente constante, temos que

$$d \ln k = H dt .$$

Como $dt \approx -(3H/V'(\phi))d\phi$, encontramos que

$$\frac{d}{d \ln k} = -M_{PL}^2 \left[1 + \frac{V}{2\lambda} \right]^{-1} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d}{d\phi} . \tag{4.110}$$

A variação do índice espectral $n(k)$

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{d \ln k} &= -6 \frac{d\epsilon}{d \ln k} + 2 \frac{d\eta}{d \ln k} \\
&= -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 + 2\zeta ,
\end{aligned} \tag{4.111}$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{d\epsilon}{d \ln k} &= -M_{PL}^2 \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d\epsilon}{d\phi} = 2\epsilon\eta - 4\epsilon^2 , \\
\frac{d\eta}{d \ln k} &= -M_{PL}^2 \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d\eta}{d\phi} = -2\epsilon\eta + \zeta ,
\end{aligned}$$

e

$$\zeta = M_{PL}^4 \frac{V'V'''}{V^2} \left[\frac{2\lambda}{2\lambda + V} \right] . \tag{4.112}$$

4.4 Existem correções de ordem ρ^2 na Cosmologia RS-I?

Na seção anterior, vimos que para o modelo RS-II, a equação de Friedmann apresenta correções de ordem ρ^2 . Estas correções, por sua vez, geram termos adicionais aos parâmetros da cosmologia inflacionária padrão.

Quando estudamos a aplicação da fase inflacionária na cosmologia de RS-I, vimos que os parâmetros de rolagem lenta eram os mesmos usados na cosmologia inflacionária padrão. Há alguma explicação plausível para isto? Esta é a pergunta que tentaremos responder nesta seção.

O modelo de RS-I [24] visa solucionar o problema de hierarquia com apenas uma dimensão extra. Este modelo consiste em um universo com a quinta dimensão compacta entre duas 3-branas, onde ϕ é a coordenada da dimensão extra. Exige-se periodicidade em ϕ e simetria de *orbifold* Z_2 ($\phi \leftrightarrow \phi$), de modo que $0 \leq \phi \leq \pi$. O tamanho deste intervalo é πr_c , onde r_c é o raio de compactificação. Uma primeira brana “escondida” (brana de Planck) está localizada em $\phi = 0$ e o nosso universo representado pela brana “visível” (brana de TeV) está localizada em $\phi = \pi$.

A ação clássica que descreve este cenário é dada por

$$\begin{aligned}
 S &= S_{gravidade} + S_{vis} + S_{esc} \\
 S_{gravidade} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} \{-\Lambda + 2M^3 R\} \\
 S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \{\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}\} \\
 S_{esc} &= \int d^4x \sqrt{-g_{esc}} \{\mathcal{L}_{esc} - V_{esc}\} .
 \end{aligned} \tag{4.113}$$

Variando a ação (4.113), temos que as equações de Einstein $5D$ são

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-G} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R \right) &= -\frac{1}{4M^3} [\Lambda \sqrt{-G} G_{MN} + V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) \\
 &+ V_{esc} \sqrt{-g_{esc}} g_{\mu\nu}^{esc} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi)] .
 \end{aligned} \tag{4.114}$$

Randall e Sundrum então sugerem uma métrica $5D$ não fatorável do tipo

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 , \tag{4.115}$$

onde r_c é o raio de compactificação.

Deste modo, as equações de Einstein (4.114) podem ser reduzidas a [24]

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M_{5D}^3} \quad (4.116)$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{esc}}{4M_{5D}^3 r_c} \delta(\phi) + \frac{V_{vis}}{4M_{(5D)}^3 r_c} \delta(\phi - \pi) \quad . \quad (4.117)$$

Integrando a equação (4.116), desprezando a constante arbitrária e considerando a simetria de *orbifold* $\phi \leftrightarrow -\phi$,

$$\sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_{(5D)}^3}} \quad , \quad (4.118)$$

sendo $\Lambda < 0$ (o que comprova a necessidade de escolher um espaço-tempo AdS_5).

Derivando esta equação duas vezes (considerando a periodicidade em ϕ),

$$\sigma'' = 2r_c \sqrt{\frac{-\Lambda_{5D}}{24M_{5D}^3}} [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)] \quad .$$

Comparando com (4.117), concluímos que, para que a métrica (4.115) seja solução da equação de Einstein, devemos ter

$$V_{esc} = -V_{vis} = 24M_{(5D)}^3 k \quad , \quad (4.119)$$

$$\Lambda_{5D} = -24M_{(5D)}^3 k^2 \quad , \quad (4.120)$$

sendo

$$k = \frac{1}{l} = \sqrt{\frac{-\Lambda_{5D}}{24M_{5D}^3}} \quad . \quad (4.121)$$

Portanto, a solução final para a métrica do bulk é

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (4.122)$$

Quando a dimensão extra é compactificada pela presença de uma segunda brana (brana de TeV), é necessário estabilizar o tamanho desta dimensão. Este é um dos maiores problemas da cosmologia de RS-I. A estabilização do tamanho da dimensão extra se faz necessária e suficiente para que se recupere a cosmologia padrão sobre o nosso universo (brana de TeV). O parâmetro de distância, $l = |(24M_{5D}^3)/\Lambda_{5D}|^{1/2}$, não deve ultrapassar $0.1mm$ para também não entrar em conflito com a lei de inverso quadrado da gravitação. Esta é a motivação de se considerar um campo escalar não-massivo, *radion*.

O modelo mais atrativo é o proposto por Goldberger e Wise (GW) [45] que gera uma energia potencial ao *radion*. Em um espaço-tempo 5-dimensional, a gravidade acopla-se ao campo escalar de GW, Φ (radion), e à matéria sobre as branas de Planck e TeV (localizadas em $y = 0$ e $y = 1$, respectivamente).

A ação que descreve este sistema é, [45],

$$\begin{aligned} S = & \int d^5x \sqrt{g} = \left(-\frac{M_{(5D)}^3}{2} R - \Lambda + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \right) \\ & + \int d^4x \sqrt{g} (\mathcal{L}_{m,0} - V_0(\Phi))|_{y=0} + \int d^4x \sqrt{g} (\mathcal{L}_{m,1} - V_1(\Phi))|_{y=1} \end{aligned} \quad (4.123)$$

A constante cosmológica negativa necessária para a solução é parametrizada como $\Lambda_{5D} = -24k^2/\kappa'^2$ e $V(\Phi)$ é o potencial gerado pelo radion Φ . A lagrangiana $\mathcal{L}_{m,0}$ é dada pela densidade de matéria ρ_* sobre a brana de Planck

$$\mathcal{L}_{m,0} \sim \rho_* \quad (4.124)$$

e a lagrangiana $\mathcal{L}_{m,1}$ é dada pela densidade de matéria ρ sobre a brana de TeV

$$\mathcal{L}_{m,1} \sim \rho \quad . \quad (4.125)$$

A tensão intrínseca é o valor do potencial escalar da brana $V_i(\Phi(y_i))$, sendo $i = 0, 1$.

Goldberger e Wise propuseram a métrica 5D

$$\begin{aligned} ds^2 &= n^2(t, y) dt^2 - a^2(t, y) \sum_i dx_i^2 - b^2(t, y) dy^2 \\ &\equiv e^{-2N(t, y)} dt^2 - a_0(t)^2 e^{-2A(t, y)} \sum_i dx_i^2 - b^2(t, y) dy^2 \end{aligned} \quad (4.126)$$

onde aplica-se uma expansão perturbativa nas densidades de energia ρ , ρ_* das branas para uma solução estática ($\rho = \rho_* = 0$). Não estaremos interessados aqui em uma análise cuidadosa de tal perturbação, mas apenas nas soluções cosmológicas do cenário RS-I, usando este mecanismo de GW para estabilizar o tamanho da dimensão extra. Para maiores detalhes, citamos [44], [45] e [46].

A equação de Friedmann que governa a dinâmica da brana de Planck, em $y = 0$, e da

brana de TeV, em $y = 1$, respectivamente, é dada por [44]

$$H^2|_{y=0} = \frac{8\pi G}{3} \left(\bar{\rho} + \rho_* + \frac{2\pi G}{3m_r^2\Omega^2} (9(1-3\omega)(1+\omega_*)\rho_*^2\Omega^4 - (1-3\omega)(7+3\omega)\bar{\rho}^2 + 2\Omega^2\bar{\rho}\rho_*[2(1-3\omega)(2+3\omega) - 3(1-3\omega_*)(1+\omega)]) \right) \quad (4.127)$$

e

$$H^2|_{y=1} = \frac{8\pi G}{3} \left(\bar{\rho} + \rho_* + \frac{2\pi G}{3m_r^2\Omega^2} (9(1-3\omega)(1+\omega)\bar{\rho}^2 + 4(1-3\omega_*)(4+3\omega_*)\Omega^2\rho_*^2 + 4(1-3\omega)(4+3\omega)\bar{\rho}\rho_*) \right) \quad (4.128)$$

onde m_r^2 é a massa do radion³ e $\Omega \equiv e^{A_0(1)}$ é o valor do fator de deformação na brana de TeV, que resolve o problema de hierarquia no cenário RS.

Nosso interesse se restringe à era inflacionária, onde a equação de estado é $\omega = -1$ ou $\omega_* = -1$, dependendo de onde está o inflaton, sobre a brana de TeV ou sobre a brana de Planck, respectivamente. Por exemplo, se supusermos que o inflaton está sobre a brana de TeV, então, teremos $\omega_* = -1$ e $\rho_* = 0$. Da equação (4.128), temos [44]

$$H^2|_{y=1} = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} \quad .$$

Portanto, não há correções da ordem de $\bar{\rho}^2$ na equação de Friedmann em $y = 1$, ao contrário, da cosmologia de RS-II (uma simples brana). Um estudo análogo pode ser realizado ao inflaton localizado sobre a brana de Planck, onde $\bar{\rho} = 0$. Substituindo este valor na equação (4.127), temos que a equação de Friedmann em $y = 0$ é [44]

$$H^2|_{y=0} = \frac{8\pi G}{3} \rho_* \quad .$$

Neste caso, também na há correção quadrática em H^2 .

Considere agora um observador sobre a brana oposta, brana de TeV ($y = 1$). Neste caso, ele enxerga correções em H^2 sobre sua brana devido ao inflaton da brana de Planck ($y = 0$). Com $\bar{\rho} = 0$ mas $\rho_* \neq 0$, da equação (4.128), temos [44]

$$H^2|_{y=1} = \frac{8\pi G}{3} \rho_* \left(1 + \frac{32\pi G}{3m_r^2} \rho_* \right) \quad . \quad (4.129)$$

³A fim de facilitar o cálculo, admite-se que a massa do radion seja muito pequena. Porém, é possível obter um resultado para m_r dado por [31], $m_r^2 \cong \frac{4}{3}\kappa^2 v_0^2 \epsilon^2 k^2 \Omega^{2+2\epsilon}$

Portanto, é impossível obter correções da ordem de ρ^2 para a equação de Friedmann durante à inflação sobre uma dada brana, a menos que a inflação seja sobre a brana oposta.

Capítulo 5

Conclusão

Como vimos, a fase inflacionária primordial do nosso universo se faz necessária para explicar os problemas deixados pela teoria da Grande Explosão. Já a cosmologia de branas tenta resolver o problema da hierarquia entre as escalas eletrofraca e gravitacional através do uso de dimensões extras.

Ao unirmos estas duas cosmologias, estamos considerando uma nova maneira de descrever nosso universo 4-dimensional, durante sua fase inflacionária, em um espaço-tempo de dimensões maiores. Estes modelos de branas adquiriram um maior número de adeptos à medida em que eles começaram a explicar toda a cosmologia padrão que descreve o nosso universo. Portanto, o estudo dos 3 potenciais de inflaton (4.21), (4.48) e (4.64), desenvolvido nesta dissertação, nos proporcionou uma melhor aceitação destes modelos, pois estes exemplos são satisfatoriamente aceitos para gerarem inflação em nosso universo, representado pela 3-brana, de acordo com o modelo RS-I.

Na inflação do tipo rolagem lenta, o inflaton está inicialmente deslocado de seu ponto de mínimo até um dado valor inicial, de modo que o universo se expanda por um fator de e^N .

Os índices espectrais $n(k)$ encontrados para os potenciais (4.21), (4.48) e (4.64), respectivamente, são 0,9762, 0,9714 e 0,986.

A vantagem de gerar inflação em modelos de branas tipo RS-I é que os parâmetros cosmológicos calculados são os mesmos da cosmologia padrão, como vimos na seção (4.4) do capítulo *inflação em branas*. Se considerarmos inflação em modelos do tipo RS-II, uma das soluções das equações de Friedmann apresentará uma correção da ordem ρ^2 .

Referências Bibliográficas

- [1] S. Tsujikawa, *Introductory Review of Cosmic Inflation*, [hep-ph/0304257].
- [2] E. W. Kolb, *Dynamics of the Inflationary Era*, [hep-ph/9910311].
- [3] A. H. Guth, *The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D 23, 347 (1981).
- [4] E. W. Kolb e M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City, California (1990); T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1993); P. J. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1993); P. Coles e F. Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley, Chichester, UK (1995).
- [5] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [6] A. Albrecht, *Cosmic Inflation*, [astro-ph/0007247].
- [7] C. L. Bennett et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results*, Astrophysics J. Suppl. 148: 1 (2003); H. V. Peiris et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Implications for Inflation*, Astrophysics J. Suppl. 148: 213 (2003).
- [8] A. Riotto, *Inflationary and the theory of cosmological perturbations*, [hep-ph/0210162].
- [9] A. Linde, *A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, Phys. Lett. 108B: 389-393 (1982).

- [10] A. Albrecht e P. Steinhardt, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. 48: 1220-1223 (1982).
- [11] A. H. Guth, *Inflation*, [astro-ph/0404546].
- [12] J.E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copelan, T. Barreiro, M. Abney, *Reconstructing the inflaton potential - an overview*, Reviews of Modern Physics 69:2 (1997).
- [13] V. Mukhanov, H. Feldman and R. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Physics Reports 215: 203-333 (1992).
- [14] J. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D22: 1882-1905 (1980).
- [15] T. Bunch e P. Davies, *Quantum Field Theory in de Sitter Space: Renormalization by point splitting*, Proc. Roy. Soc. London A360:117-134 (1978).
- [16] D. H. Lyth, A. Riotto, *Particle Physics Models of Inflation and the Cosmological Density Perturbation*, Physics Reports 314:1-146 (1999).
- [17] P. Jordan, *The present state of Dirac's cosmological hypothesis*, Z. Phys. 157:112-121 (1959); C. Brans e R. H. Dicke, *Mach's Principle e a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. 124:925-935 (1961); R.H.Dicke, *Mach's Principle e invariance under transformation of units*, Phys. Rev. 125:2163-2167 (1962).
- [18] Y. M. Cho, *Reinterpretation of Jordan-Brans-Dicke theory and Kaluza-Klein Cosmology*, Phys. Rev. Lett. 68:3133-3136 (1992).
- [19] Y. Z. Zhang, *Inflation in Generalized Brans-Dicke Theory*, Chinese Journal of Physics 31:63-66 (1992).
- [20] P. Horava e E. Witten, *Heterotic and Type I string dynamics from eleven-dimensions*, Nucl. Phys. B460: 506-524 (1996); P. Horava e E. Witten, *Eleven-Dimensional Supergravity on a manifold with boundary*, Nucl. Phys. B475:94-114 (1996).
- [21] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos e G. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Letter B429:263 (1998).
- [22] R. Maartens, *Brane-World Gravity*, Living Rev. 7:7 (2004).

- [23] C.D. Hoyle, U. Schmidt, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, D. J. Kapner e H. E. Swanson, *Submillimeter tests of the gravitational inverse square law: a search for 'large' extra dimensions*, Phys. Rev. Lett 86:1418-1421 (2001); V. M. Mostepanenko, M. Novello, *Constraints on nonnewtonian gravity from the casimir force measurements between two crossed cylinders*, Phys. Rev. D63:115003 (2001); G. C. Long, H. Chang e J. Price, *Experimental status of gravitational strength forces in the subcentimeter regime*, Nucl. Phys. B539:23-34 (1999).
- [24] L. Randall e R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. 83:3370 (1999).
- [25] L. Randall e R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. 83:4690 (1999).
- [26] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois, *Non-conventional cosmology from a brane-universe*, Nucl. Phys. B565:269-287 (2000).
- [27] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Novo Cimento B44:1 (1966).
- [28] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, D. Langlois, *Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant*, Phys. Lett. B477:285-291 (2000).
- [29] C. Deffayet, *Cosmology on a Brane in Minkowski Bulk*, Phys. Lett. B502:199-208 (2001).
- [30] R. Maartens, D. Wands, B. A. Bassett e I. P. C. Heard, *Chaotic inflation on the brane*, Phys. Rev. D62:041301 (2000).
- [31] J. E. Lidsey, *Inflation e Braneworlds*, Lect. Notes Phys. 646:357-379 (2004).
- [32] H. Zhang e R.G. Cai, *Inflation on Dvali-Gabadadze-Porrati Brane*, JCAP 0408:017 (2004).
- [33] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. McAllister, S. P. Trivedi, *Towards Inflation in String Theory*, JCAP 0310:013 (2003).
- [34] G. Dvali, S.-H. Henry Tye, *Brane Inflation*, Physics Letters B 450: 72-82 (1999).
- [35] C. Kolda, D. H. Lyth, *D-term Inflation and M-theory*, [hep-ph/9812234].

- [36] E. Halyo, *Models of Inflation on D-Branes*, [hep-th/0307223]. Yun-Son Piao et. al., *Brane Inflation from Rotation of D4-Brane*, Mod. Phys. Lett. A18: 2109-2116 (2003).
- [37] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, N. Turok, *The Ekpyrotic Universe: Colling Branes and the origin of the Hot Big Bang*, Phys. Rev. D 64 , 123522 (2001).
- [38] R. Kallosh, L. Kofman, A. D. Linde, *BPS branes in Cosmology*, Phys. Rev. D 64, 123523 (2001).
- [39] J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt , N. Turok, *From Big Crunch to Big Bang*, Phys. Rev. D 65 , 086007 (2002).
- [40] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt , N. Turok, *Density Perturbations in the ekpyrotic scenario*, Phys. Rev. D 66 , 046005 (2002).
- [41] P. de Bernardis et al., *Multiple Peaks in the Angular Power Spectrum of the Cosmic Microwave Background: significance and consequences for Cosmology*, Astrophys. J. 564:559-566 (2002).
- [42] C. L. Bennett et al., *First Year Wilkinson Microwavw Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
- [43] J. M. D. N. Spergel et al., *First Year Wilkinson Microwavw Anisotropy Probe (WMAP) observations: implications for Inflation*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 213 (2003).
- [44] J. M. Cline e J. Vinet, *Order ρ^2 Corrections to Randall-Sundrum I Cosmology*, JHEP 042, 0202 (2002).
- [45] W. D. Goldberger e M. B. Wise, *Modulus Stabilization with Bulk Fields*, Phys. Rev. Lett. 83, 4922 (1999).
- [46] J. M. Cline e H. Firouzjahi, *5-dimensional warped cosmological solutions with radius stabilization by a bulk scalar*, Phys. Lett. B **495**, 271 (2000) [hep-ph/0008185].
- [47] B. Wang, C.Y. Lin e E. Abdalla, *WMAP constraint on the P-term inflationary model*, Phys. Rev. D69:063507 (2004).
- [48] A. G. Casali, *Cosmologia na Borda de um Espaço-Tempo Anti-De Sitter*, Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências (2003).

- [49] B.M.C. Melgar, *Atalhos Gravitacionais em Cosmologia de Branas*, Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutorado em Ciências (2003).