UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

**Comportamento crítico do processo de contato
aperiódico: Simulações e Grupo de
Renormalização.**

Maicon Saul Faria

Tese de doutoramento
apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Doutor em
Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Sílvio Roberto de Azevedo Salinas

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Sílvio Roberto de Azevedo Salinas (IFUSP)
Prof. Dr. André Pinho Vieira (IFUSP)
Prof. Dr. Mário José de Oliveira (IFUSP)
Prof. Dr. José Abel Hoyos Neto (IFSC)
Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade (UFBA)

São Paulo
2010

Abstract

We use an operator formalism and the renormalization-group technique of Dasgupta, Ma and Hu to analyze the effects of a nonhomogeneous distribution of parameters on the critical behavior of simple stochastic model system. The contact process in one dimension is perhaps the simplest model to display a phase transition to an absorbing stationary state. We use the Fibonacci, period-doubling and period-tripling sequences for introducing aperiodic inhomogeneities in the one dimensional contact process and in a quantum Ising chain. Using strong-disorder renormalization-group procedures, we establish some relations between properties of renormalized operator and of thermodynamic or mean quantities. We were able to test a well-known criterion of relevance of geometric fluctuations, to obtain a number of critical exponents, and to point out features of slow-dynamics and log-periodic oscillations. The period-tripling sequence leads to the critical exponents $\beta = \ln(7/9)/\ln(4/9)$, $\delta = \ln(9/7)/\ln 4$, $\nu_{\perp} = \ln 3/\ln(3/2)$ and $\nu_{\parallel} = \ln 2/\ln(3/2)$. We then used Monte Carlo techniques to check renormalization-group results. The numerical simulations indicate the validity of the Harris-Luck criterion of relevance of the geometric fluctuations, and generally support the universal character of the critical behavior of these aperiodic systems.

Resumo

Utilizamos um formalismo de operadores e a técnica de grupo de renormalização de Dasgupta, Ma e Hu para analisar o efeito de distribuições inhomogêneas dos parâmetros sobre o comportamento crítico de um modelo estocástico simples. O processo de contato em uma dimensão constitui talvez o modelo mais simples que apresenta uma transição de fase para um estado absorvente. Nós usamos as sequências de Fibonacci, duplicação de período e triplicação de período para introduzir inhomogeneidades aperiódicas no processo de contato unidimensional e em uma cadeia quântica de spin. Usando procedimento de grupo de renormalização de desordem forte, estabelecemos algumas relações entre propriedades dos operadores renormalizados e grandezas termodinâmicas ou médias. Fomos capazes de testar o critério de relevância de flutuações geométricas de Harris-Luck, de obter vários expoentes críticos, e de observar aspectos característicos de dinâmica lenta e oscilações log-periódicas. A sequência de triplicação de período nos leva aos expoentes $\beta = \ln(7/9)/\ln(4/9)$, $\delta = \ln(9/7)/\ln 4$, $\nu_{\perp} = \ln 3/\ln(3/2)$ e $\nu_{\parallel} = \ln 2/\ln(3/2)$. Usamos técnicas de Monte Carlo para confirmar os resultados de grupo de renormalização. As simulações numéricas indicam a validade do critério de relevância de Harris-Luck, e corroboram o caráter universal do comportamento crítico desses sistemas aperiódicos.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O processo de contato	2
1.2	Grupo de renormalização de Dasgupta, Ma, Hu	7
1.2.1	Formalismo de operadores	10
1.3	Métodos perturbativos	12
1.3.1	GRDF para o modelo de Ising com campo transversal	13
1.3.2	GRDF para o processo de contato	20
1.4	Aperiodicidade	23
1.4.1	Sequências aperiódicas	24
1.5	Matriz de Substituição	25
2	Método GRDF aplicado a sequências aperiódicas	29
2.1	GRDF para sequências irrelevantes e marginais	30
2.1.1	Sequência de Fibonacci	30
2.1.2	Duplicação de Período	38
2.2	GRDF para sequências Relevantes	44
2.2.1	Sequência de Triplicação de Período	45
2.2.2	Leis de escalas no ponto fixo de desordem forte	51
3	Simulações	58
3.1	Comparações com resultados estabelecidos para o processo de contato uniforme	59
3.2	Comportamento crítico - Triplicação de Período	62
3.2.1	Comportamento dinâmico	62
3.2.2	Estado estacionário	65
4	Conclusões	73

Lista de Figuras

- 1.1 Representação do operador $H_0 + H_1$ que corresponde aos primeiros vizinhos da ligação forte dada por Ω . A linha espessa indica o acoplamento Ω , as linhas finas representam as ligações fracas (J_{i-1} e J_{i+1}) que compõem o termo perturbativo H_1 7
- 1.2 A linha representa a ligação efetiva $\tilde{J}$. Os sítios i e $i+1$ mostrados na figura 1 foram dizimados e os novos sítios i e $i+1$ são o resultado da reindexação dos sítios $i-1$ e $i+2$ 8
- 1.3 Cadeia com 5 sítios, onde a linha espessa corresponde às ligações fortes Ω e as linhas finas indicam interações J_{i-2} , $J_{i+1} < \Omega$ 13
- 1.4 Cadeia com 4 sítios, onde a linha forte corresponde à ligação forte J_B e as linhas finas indicam interações fracas J_A 14
- 1.5 Cadeia com 3 sítios, onde as linhas finas indicam interações J_{i-1} , $J_{i+1} < \Omega$ e o círculo vazio representa um par de sítios que compartilham a mesma projeção de spin na direção x, na presença do campo transversal efetivo $\tilde{h}$ 16
- 1.6 Cadeia com $n+3$ sítios, onde a linha espessa corresponde às ligações fortes J_B , as linhas finas indicam interações J_A e as linhas pontilhadas correspondem às n ligações J_B 18
- 1.7 Cadeia com $n+3$ sítios, onde as linhas finas indicam interações J_A e o círculo vazio representa $n+1$ sítios que compartilham a mesma projeção de spin na direção x, sob ação do campo transversal efetivo $\tilde{h} = \frac{h^{n+1}}{J_B^n}$ 19
- 1.8 Cadeia com $n+2$ sítios, onde $h_B > J > h_A$. A linha cheia corresponde às ligações J , os círculos vazios representam sítios sujeitos a campos transversos de magnitude h_A , os círculos cheios h_B e a linha tracejada representa $n-2$ sítios sujeitos a h_B 19
- 1.9 Cadeia com $n+2$ sítios, onde a linha tracejada contém os sítios com a projeção na direção z fixa. A interação entre os sítios representados por círculos vazios é dada por $\tilde{J}$ 20

1.10	Nesta figura mostramos a substituição dos sítios ligados pela taxa de infecção forte λ_B por um sítio efetivo sujeito a uma taxa de cura efetiva $\tilde{\mu}$. Os autovalores do termo do Hamiltoniano associados a este único sítio são 0 e $\tilde{\mu}$	21
1.11	Erro relativo entre os menores valores do operador de evolução de uma estrutura com duas ligações fortes e da respectiva estrutura renormalizada, a exemplo da renormalização mostrada nas figuras 1.6 e 1.7, com taxa de cura efetiva $\tilde{\mu} = 2^2 \frac{\mu^3}{\lambda_B^2}$	22
1.12	Erro relativo entre os menores valores do operador de evolução de uma estrutura com duas ligações fortes e da respectiva estrutura renormalizada, a exemplo da renormalização mostrada nas figuras 1.6 e 1.7, com taxa de cura efetiva $\tilde{\mu} = 2^4 \frac{\mu^5}{\lambda_B^4}$	23
2.1	Três primeiros processos de renormalização aplicados à sequência de Fibonacci. As linhas cheias representam ligações λ_B , linhas tracejadas correspondem a λ_A e pontilhadas a $\tilde{\lambda}$. Os círculos cheios representam o parâmetro microscópico μ e os vazios $\tilde{\mu}$. O processo de renormalização de (a) para (b) consiste na substituição das estruturas do tipo “ $\mu\lambda_B\mu$ ” por “ $\tilde{\mu}$ ”; na renormalização de (b) para (c) substituímos “ $\lambda_A\mu\lambda_A$ ” por “ $\tilde{\lambda}$ ”. A sequência renormalizada representada em (c) também é modulada pela sequência de Fibonacci.	33
2.2	Quatro processos de renormalização da sequência de duplicação de período. As figuras (a), (b) e (c) representam as duas primeiras renormalizações. No processo de renormalização indicado por (a) e (b), substituímos estruturas do tipo “ $\mu\lambda_B\mu$ ” por “ $\tilde{\mu}$ ”. Nos processos (b) e (c), substituímos “ $\mu\lambda_A\mu\lambda_A\mu$ ” por “ $\tilde{\lambda}$ ”. Em (d) temos a representação da sequência resultante; os símbolos foram substituídos pela notação inicial seguindo o critério de magnitude e o tamanho das ligações foi reescalado. Em (e) e (f) são mostrados outros dois processos de renormalização; ao término destes, temos a rede (f) com a mesma modulação da apresentada em (d). Os parâmetros λ_B, λ_A e $\tilde{\lambda}$ são representados, respectivamente, pelas linha cheias, tracejadas e pontilhadas; μ é representado por círculos cheios e $\tilde{\mu}$ por vazios.	41

2.3	Três primeiros processos de renormalização aplicados à sequência TP. As linha cheias representam ligações λ_B , linhas tracejadas correspondem a λ_A e pontilhadas a $\tilde{\lambda}$. Os círculos cheios representam o parâmetro microscópico μ e os vazios $\tilde{\mu}$. O processo de renormalização de (a) para (b) consiste na substituição das estruturas formadas por duas ligações do tipo λ_B por $\tilde{\mu}$; na renormalização de (b) para (c) substituímos seis sítios sob a ação da taxa de cura μ por $\tilde{\lambda}$. A sequência renormalizada representada em (c) é modulada pela sequência definida pela regra de substituição (2.77). Os tamanhos das ligações mostrados em (c) foram reduzidos a uma unidade.	46
3.2	$\rho^{-1/\delta}$ em função do tempo. O expoente da dependência temporal de ρ é definido na literatura por $\delta = 0.159$. Os dados foram obtidos para uma rede com 6561 sítios, $\mu = 1$ e λ homogêneo. . .	60
3.1	Densidade de sítios infectados em função do tempo em uma rede com 6561 sítios: a taxa de infecção λ é constante ao longo da rede e a taxa de cura foi fixada $\mu = 1$. A linha sólida liga ponto a ponto cada dado da simulação. Alguns pontos apresentam os erros estatísticos do valor médio da densidade de sítios infectados (barras horizontais) e do tempo (barras verticais). Na escala apresentada, o erro no tempo parece uma única barra vertical. .	61
3.3	Logaritmo da densidade estacionária de sítios infectados em função do logaritmo da distância ao ponto crítico $\lambda^* - \lambda_A$. Os círculos representam os dados obtidos da simulação para o processo de contato homogêneo em uma rede de 6561 sítios, $\mu = 1$. A linha cheia é resultado de um ajuste não linear usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt.	61
3.4	Evolução temporal da densidade de sítios infectados do processo de contato, com taxa de infecção modulada pela sequência de triplicação de período. A razão entre os dois valores de taxa de infecção $r = \lambda_A/\lambda_B$ é fixada, $r = 0.5$ e taxa de cura de todos os sítios é dada por $\mu = 1$. Os dados foram obtidos em redes com 177147 (3^{11}) sítios. As linhas cheias ligam os pontos da simulação e cada ponto é obtido tomando a média sobre 56 realizações da dinâmica. Alguns pontos são acompanhados por barras de erro verticais, erro estatístico de ρ , e horizontais, erro estatístico no tempo.	63

3.5	Logaritmo da densidade de sítios infectados em função do tempo para o processo de contato modulado pela sequência de triplicação de período em uma rede com 177147 sítios, $r = 0.5$. Os símbolos representam alguns pontos da simulação. As barras representam o erro estatístico das 56 realizações da dinâmica, sendo suprimidas quando menores que os símbolos. As linhas cheias são obtidas de ajustes da equação (3.6) linearizada. Os valores de cada tempo de relaxação são mostrados na legenda da figura. O intervalo usado para o ajuste linear é exatamente o compreendido por cada linha cheia.	64
3.6	Os círculos representam os valores numéricos de $(\ln t_r)^{\nu_{ }}$, obtidos nos ajustes mostrados na figura (3.5), em função da distância ao ponto crítico λ^* . O expoente $\nu_{ } = -1.781$ e a taxa de infecção crítica $\lambda^* = 1.366$ são obtidos do ajuste não linear (linha cheia), segundo a equação (3.7), dos dados mostrados no quadro interior. No quadro interior, mostramos o tempo de relaxação em função de λ_A , a linha cheia liga os pontos obtidos da simulação.	66
3.7	Logaritmo da densidade de sítios infectados em função do tempo, para o processo de contato com taxas de infecção moduladas pela sequência de triplicação de período, sendo $r = 0.1$ a razão entre as taxas λ_A e λ_B e $\mu = 1$. O tempo de relaxação para cada λ_A é obtido através do coeficiente linear dos ajustes mostrados pelas linhas cheias. A região considerada em cada ajuste é representada pela extensão das linhas cheias.	67
3.8	Densidade estacionária de sítios infectados em função do tempo para diversos valores de taxa de infecção λ_A . Os dados foram obtidos para a sequência TP com 177147 sítios e $r = 0.5$. As linhas indicam os pontos obtidos da simulação. Dividimos o gráfico em cinco áreas e as numeramos de um a cinco.	70
3.9	Densidade média de sítios infectados em função da taxa de infecção λ_A . Cada conjunto de círculos ligados representa uma média dentro de uma área apontada na figura (3.8). Os dados foram obtidos para a sequência TP com 177147 sítios e $r = 0.5$	71
3.10	Densidade de sítios infectados em função do tempo. A linha indica o ajuste dos dados, representados pelo círculos, para a equação (3.20). Os parâmetros obtidos no ajuste foram $I = 0.081$, $C = 1.21$, $\phi = 5.36$, $\tau = 2.03$, $\lambda^* = 1.2066$ e $\beta = 0.38$. Nesta escala os erros estatísticos dos dados são menores que os símbolos.	72

Lista de Tabelas

1.1	Lista de expoentes críticos do processo de contato [41]. Os expoentes β e $\nu_{\perp}$ estão associados à densidade de sítios infectados e ao comprimento de correlação, respectivamente.	5
1.2	Parâmetros característicos das sequências aperiódicas.	27
4.1	Expoentes críticos da sequência de triplicação de período obtidos através de simulação e via o GRDF. O expoente Φ é obtido usando a relação $\Phi = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$	76

Capítulo 1

Introdução

O principal objetivo deste trabalho consiste em investigar os efeitos de heterogeneidade aperiódica sobre o comportamento crítico de processos estocásticos com estado absorvente. Nós nos concentramos no processo de contato, que é um protótipo para estudar em vários contextos os aspectos da criticalidade de processos estocásticos com estado absorvente.

O modelo de contato pode ser estudado como um processo epidêmico de primeiros vizinhos em que a infecção é governada por um parâmetro λ e a cura é associada a um parâmetro μ . Embora o processo de contato não tenha sido resolvido exatamente, existem provas sobre a existência de uma transição de fase mesmo em uma dimensão, controlada pelo parâmetro λ . Simulações de Monte Carlo [19] e expansões em série [31] apontam para a existência de expoentes críticos universais que agregam o modelo à classe de universalidade do modelo de percolação direcionada [22].

Inicialmente procuramos caracterizar a criticalidade do processo de contato aperiódico utilizando simulações Monte Carlo [14]. Analisamos o problema usando três tipos de aperiodicidade dadas pelas sequências de Fibonacci, duplicação de período e Rudin-Shapiro. Segundo o critério de Harris-Luck [33], que será discutido no capítulo 2, esperamos observar alterações nos valores dos expoentes críticos do processo de contato modulado pela sequência de Rudin-Shapiro. O mesmo critério indica que as sequências de Fibonacci e duplicação de período seriam irrelevantes e não alterariam esses expoentes.

Embora as simulações de Monte Carlo sejam compatíveis com este cenário, a caracterização da criticalidade deste sistema mostrou-se difícil, principalmente no caso de sequências relevantes para o comportamento crítico, como a de Rudin-Shapiro. O principal obstáculo desta análise são os tempos de relaxação extremamente longos.

Veremos, ainda nessa introdução, que há dificuldades semelhantes no es-

tudo do processo de contato sujeito à desordem descorrelacionada realizado, por exemplo, por Vojta e Dickison [44]. Entretanto, as simulações produzidas por esses autores são corroboradas pelo comportamento de escala introduzido por Hooyberghs *et al* [24] utilizando o método de Grupo de Renormalização de Desordem Forte (GRDF). Este método de renormalização foi introduzido originalmente por Dasgupta, Ma e Hu no contexto de cadeias quânticas de spin desordenadas. Hooyberghs *et al* [24] usaram um formalismo de operadores para analisar a equação mestra de processos estocásticos [28] e conseguiram traçar um paralelo entre o processo de contato e o modelo de Ising quântico com campo transversal. Deste paralelo resultam as leis de escalas ativadas descritas na seção 1.1.

O GRDF, por sua vez, já tinha sido utilizado por Vieira [43, 42] para estudar os efeitos de aperiodicidade no comportamento crítico de cadeias quânticas de spin. Logo, decidimos utilizar a versão do GRDF, anteriormente introduzida por Vieira no contexto de cadeias quânticas de spin, para o operador de evolução obtido do formalismo de operadores para o processo de contato. No capítulo 2 deste trabalho, tratamos especificamente desta questão e sugerimos uma série de relações de escala para as grandezas médias do processo de contato e para as grandezas termodinâmicas do modelo de Ising com campo transversal. Observamos que, a exemplo do sistema desordenado, os dois modelos possuem o mesmo conjunto de expoentes críticos quando sujeitos a aperiodicidade de sequências com flutuações geométricas suficientemente fortes e, neste caso, estabelecemos um cenário de escala idêntico ao observado no processo de contato desordenado.

No capítulo 3, para corroborar os resultados obtidos com grupo de renormalização, descrevemos simulações para o processo de contato modulado pela sequência relevante de triplicação de período.

No decorrer desta introdução, estudaremos separadamente os elementos que compõem o tratamento de grupo de renormalização e as simulações.

1.1 O processo de contato

O modelo de contato [41] é um processo estocástico markoviano definido em uma rede. Cada sítio na rede pode estar no estado *são* ou *infectado*. A evolução do sistema ocorre graças a dois processos: infecção e auto-cura. Eventualmente, os sítios infectados podem se extinguir, dando origem a um “estado absorvente”.

O estado de um sítio em uma rede unidimensional é dado por $\sigma_i = 0$ para o estado *são* e $\sigma_i = 1$ para o estado *infectado*, onde i designa a posição na rede. Representamos o estado do conjunto de L sítios na rede por $\sigma \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_L)$.

O processo de infecção ocorre quando um sítio i , *são*, é infectado com uma taxa que depende do número de sítios vizinhos infectados; no caso unidimen-

sional, corresponde a $\lambda_{i-1}\sigma_{i-1} + \lambda_i\sigma_{i+1}$, em que $\lambda_i > 0 \ \forall \ i$ (o caso uniforme corresponde a $\lambda_i = \lambda \ \forall \ i$). No processo de auto-cura, um sítio i infectado torna-se sã com uma taxa μ_i independente dos vizinhos.

Podemos descrever esses processos através de uma taxa $\omega_i(\sigma)$, que representa a transição do estado σ para o estado $\sigma^i \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \dots, 1 - \sigma_i, \dots, \sigma_L)$,

$$\omega_i(\sigma) = (1 - \sigma_i)(\lambda_{i-1}\sigma_{i-1} + \lambda_i\sigma_{i+1}) + \mu_i\sigma_i. \quad (1.1)$$

Partindo da taxa de transição dada pela equação (1.1), o modelo tem sido entendido [41] através de uma equação mestra, que descreve a evolução temporal da probabilidade, $P(\sigma, t)$, de encontrarmos uma realização da dinâmica no estado σ após um tempo t ,

$$\frac{d}{dt}P(\sigma, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \{\omega_i(\sigma^i)P(\sigma^i, t) - \omega_i(\sigma)P(\sigma, t)\}. \quad (1.2)$$

Embora pareça natural calcular a evolução temporal dos momentos, isto é, os valores médios de produtos de aglomerados de spin $\langle \sigma_i \rangle$, $\langle \sigma_i\sigma_{i+1} \rangle$, $\langle \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2} \rangle$ etc, não poderemos determinar a evolução temporal de nenhum deles isoladamente, pois a evolução temporal de cada momento sempre depende de momentos de ordem superior.

Podemos perceber o problema mencionado já no resultado para o primeiro momento,

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle = \lambda_{i-1} \langle (1 - \sigma_i)\sigma_{i-1} \rangle + \lambda_i \langle (1 - \sigma_i)\sigma_{i+1} \rangle + \mu_i \langle \sigma_i \rangle. \quad (1.3)$$

Notamos que o primeiro momento depende do segundo. É fácil mostrar que os momentos seguintes têm também relações deste tipo.

Uma maneira de obter soluções para este problema é desprezar alguma correlação, por exemplo, escrevendo $\langle \sigma_i \dots \sigma_{i+k} \rangle = \langle \sigma_i \rangle \dots \langle \sigma_{i+k} \rangle$. Em outras palavras, isto significa aplicar algum tipo de campo médio para desfazer a hierarquia de momentos. Com esta aproximação, podemos observar uma singularidade na solução representando uma transição entre os estados ativo e absorvente.

Para um sistema homogêneo, a densidade de sítios infectados,

$$\rho = \frac{1}{L} \sum_i \langle \sigma_i \rangle, \quad (1.4)$$

aproxima-se de zero, nas proximidades do ponto crítico $\lambda^*(\mu)$, seguindo uma lei de potência,

$$\rho(\lambda) \sim (\lambda - \lambda^*)^\beta, \text{ para } \lambda \rightarrow \lambda_+^*, \quad (1.5)$$

onde $\beta = 1$ para qualquer proposta de desacoplamento entre os momentos.

O estudo da criticalidade de sistemas estocásticos tem no modelo de contato um excelente ponto de partida: mesmo em uma rede unidimensional este modelo possui uma transição entre o estado ativo e o estado absorvente [19, 18]. Estes trabalhos e posteriores contêm evidências de que o comportamento da densidade de sítios infectados do processo de contato homogêneo, nas proximidades do ponto crítico, é dado por uma lei de potência governada por um expoente β , similar ao obtido da aproximação de campo médio,

$$\rho \sim (\epsilon)^\beta, \quad (1.6)$$

onde $\epsilon = \lambda - \lambda^*$ define a distância em relação ao ponto crítico.

O comprimento de correlação $\xi_\perp$ em função da distância ao ponto crítico ϵ obedece uma lei de potência caracterizada pelo expoente $\nu_\perp$,

$$\xi_\perp \sim \epsilon^{-\nu_\perp}. \quad (1.7)$$

Na região não crítica, $\epsilon \neq 0$, a densidade de sítios infectados decai exponencialmente para o valor de equilíbrio; entretanto, este decaimento é governado pelo comprimento de correlação temporal $\nu_\parallel$. Próximo da criticalidade, $\xi_\parallel$ diverge como lei de potência,

$$\xi_\parallel \sim \epsilon^{-\nu_\parallel}. \quad (1.8)$$

Com o auxílio das equações (1.7) e (1.8), podemos definir o expoente dinâmico, z , que relaciona os comprimentos de correlação espacial e temporal nas proximidades do ponto crítico,

$$\xi_\parallel \sim \xi_\perp^z \quad (1.9)$$

onde $z = \nu_\parallel / \nu_\perp$.

Essas leis de potência são provenientes da equação homogênea generalizada

$$\rho(\epsilon, t, L) = b^{\frac{\beta}{\nu_\perp}} \rho(b^{-\frac{1}{\nu_\perp}} \epsilon, tb^z, Lb), \quad (1.10)$$

onde b é um fator de renormalização, t é o tempo e L é o tamanho do sistema. A equação de escala (1.10) indica um decaimento algébrico da densidade de sítios infectados para o seu valor de equilíbrio no ponto crítico. Escolhendo $b = t^{-1/z}$, no limite do sistema infinito, $N \rightarrow \infty$, teremos

$$\rho(t) \sim t^{-\delta}, \quad (1.11)$$

onde

$$\delta = \frac{\beta}{z\nu_{\perp}}. \quad (1.12)$$

Usando estas relações para a criticalidade do processo de contato homogêneo, diversos autores estudaram o modelo por intermédio de simulações de Monte Carlo ou expansões em série [19, 3, 10, 7, 8, 31, 37]. Estes trabalhos foram bem sucedidos ao caracterizar o comportamento crítico do modelo de contato homogêneo. Os expoentes críticos associados à densidade de sítios infectados e o comprimento de correlação, ambos no estado estacionário, são mostrados na tabela (1.1). De acordo com diversos autores, estes expoentes pertencem à classe de universalidade da percolação direcionada.

Dimensão	β	$\nu_{\perp}$
1	0.2765	1.097
2	0.58	0.73
3	0.81	0.58

Tabela 1.1: Lista de expoentes críticos do processo de contato [41]. Os expoentes β e $\nu_{\perp}$ estão associados à densidade de sítios infectados e ao comprimento de correlação, respectivamente.

Apenas recentemente resultados experimentais parecem indicar um fenômeno crítico compatível com a classe de universalidade de percolação direcionada [39, 40]; a conjectura sugerida em [22, 23], de que a desordem inerente às condições experimentais alteraria a classe de universalidade do sistema, inspirou muitos trabalhos sobre o comportamento crítico do modelo sujeito à desordem.

No caso unidimensional, a forma canônica de introduzir desordem consiste em sortear aleatoriamente a taxa de infecção para cada par de sítios vizinhos, segundo a distribuição de probabilidades

$$P(\lambda_i) = (1 - p)\delta(\lambda_i - \lambda) + p\delta(\lambda_i - c\lambda), \quad (1.13)$$

onde p representa a densidade de impurezas, ou seja, a densidade de ligações com valor de taxa de infecção $\lambda_i = c\lambda$.

Especificamente no caso unidimensional, dois trabalhos parecem ser conclusivos: o trabalho de J. Hooyberghs e outros autores [24], no qual foi empregado o procedimento de grupo de renormalização proposto por Dasgupta, Ma e Hu para estudar a criticalidade do processo de contato, e o trabalho de Vojta e Dickison [44], onde foram realizadas extensas simulações de Monte Carlo. Ambos concordam quanto aos valores dos expoentes críticos e também com as leis de escala logarítmicas para o comportamento dinâmico [36, 9, 12]. Essas leis de escala logarítmicas ocorrem graças a uma alteração qualitativa do compor-

tamento crítico do processo de contato. As leis de escala que governam esse comportamento são denominadas leis de escala ativada.

A modificação fundamental introduzida pela desordem pode ser observada a partir da evolução temporal da densidade de sítios infectados no ponto crítico. O decaimento de ρ depende de flutuações suficientemente grandes para que aglomerados de impurezas de tamanho arbitrário, localmente no estado ativo, caiam no estado absorvente. Como resultado desta dinâmica, observa-se um decaimento logarítmico de ρ ,

$$\rho(t) \sim (\ln t)^{-\bar{\delta}}. \quad (1.14)$$

Este comportamento é sugerido em resultados do Grupo de Renormalização de Desordem Forte [24] e corroborado por simulações de Monte Carlo [9] [36], que indicam uma substituição da lei de escala (1.9) pela lei de escala ativadas,

$$\ln(\xi_{\parallel}) \sim \xi_{\perp}^{\Phi}. \quad (1.15)$$

A forma tipo lei de potência das leis de escala para o comportamento da densidade de sítios infectados e o comprimento de correlação, em função da distância ao ponto crítico, é preservada.

O comportamento crítico do processo de contato sujeito à desordem dada pela distribuição aleatória (1.13) pode ser descrito pela equação de escala

$$\rho(\epsilon, t, L) = b^{\frac{\beta}{\nu_{\perp}}} \rho(b^{-\frac{1}{\nu_{\perp}}} \epsilon, \ln(t)b^{\Phi}, Lb). \quad (1.16)$$

Essa equação de escala conduz à seguinte igualdade entre os expoentes,

$$\bar{\delta} = \frac{\beta}{\Phi \nu_{\perp}}. \quad (1.17)$$

Uma implementação consistente do Grupo de Renormalização de Desordem forte deve respeitar essa relação entre expoentes. Veremos, no capítulo 2, que nossa abordagem do GRDF aponta para expoentes do processo de contato aperiódico que satisfazem a relação (1.17).

Embora, sob o ponto de vista do GRDF, o comportamento logarítmico com expoentes universais seja esperado [26], ainda há dúvidas se qualquer quantidade de impurezas, $p > 0$, leva a leis de escalas ativadas. Vojta e Dickison [44] obtiveram resultados compatíveis com esse cenário. Entretanto, em uma recente comunicação rápida, Fallert e Taraskin [12] argumentaram que, para baixas densidades de impurezas, tanto leis de escala ativadas, como leis de escala normais com expoentes dependentes da desordem, ajustam os resultados numéricos obtidos dentro da precisão alcançada. Eles concluem que, para pe-

quenas densidades de impurezas, é inadequado decidir entre um tipo de lei de escala e outra somente usando os resultados numéricos.

1.2 Grupo de renormalização de Dasgupta, Ma, Hu

O procedimento de renormalização conhecido na literatura como Grupo de Renormalização de Desordem Forte (GRDF) foi proposto por Dasgupta, Ma e Hu [5, 34] para o estudo de modelos magnéticos quânticos desordenados a baixas temperaturas, em particular para o modelo de Heisenberg, cujo Hamiltoniano em uma rede unidimensional é dado por

$$H = \sum_i J_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}, \quad (1.18)$$

onde $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} \equiv S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + S_i^z S_{i+1}^z$ e S^x , S^y e S^z são os operadores de spin-1/2. Esse modelo também é chamado de XXX na linguagem de cadeias quânticas de spin.

O método GRDF consiste, basicamente, em excluir os sítios sujeitos aos maiores valores de interação J_i e, através de um cálculo perturbativo, obter um novo parâmetro de interação, $\tilde{J}_i$, para descrever a interação entre os sítios $i-1$ e $i+2$.

Podemos definir o método perturbativo da seguinte forma: suponhamos que Ω seja o maior valor dentre as constantes de interação e que tenhamos $J_i = \Omega$ e $J_{i-1}, J_{i+1} < \Omega$. Tratamos as interações de $i-1$ com i e de $i+1$ com $i+2$ como perturbações da interação entre i e $i+1$, como ilustrado na figura (1.1).

Figura 1.1: Representação do operador $H_0 + H_1$ que corresponde aos primeiros vizinhos da ligação forte dada por Ω . A linha espessa indica o acoplamento Ω , as linhas finas representam as ligações fracas (J_{i-1} e J_{i+1}) que compõem o termo perturbativo H_1 .

O operador não perturbado e a perturbação são dados, respectivamente, por

$$H_0 = \Omega \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}, \quad (1.19)$$

$$H_1 = J_{i-1} \vec{S}_{i-1} \cdot \vec{S}_i + J_{i+1} \vec{S}_{i+1} \cdot \vec{S}_{i+2}. \quad (1.20)$$

Considerando, por exemplo, acoplamentos antiferromagnéticos, $J_i > 0 \forall i$, teremos um estado singleto como estado fundamental do operador H_0 , cujo autovalor é dado por $-\frac{3}{4}\Omega$. O espectro de energia formado pelos quatro menores autovalores do operador $H_0 + H_1$ pode ser obtido levando o método aproximativo de Rayleigh-Schrödinger até segunda ordem,

$$\tilde{H} = \tilde{E} + \tilde{J} \vec{S}_{i-1} \cdot \vec{S}_{i+2}, \quad (1.21)$$

onde,

$$\tilde{E} = -\frac{3}{4}\Omega - \frac{3}{16\Omega}(J_{i-1}^2 + J_{i+1}^2), \quad (1.22)$$

$$\tilde{J} = \frac{J_{i-1}J_{i+1}}{2\Omega}. \quad (1.23)$$

Exceto pela constante $\tilde{E}$, os quatro menores autovalores exatos do operador $H_0 + H_1$ se aproximam do espectro de energia do operador $\tilde{J} \vec{S}_{i-1} \cdot \vec{S}_{i+2}$ (representado na figura (1.2)) para $J_{i-1}, J_{i+1} \ll \Omega$.

Em síntese, este procedimento de aproximação transforma a estrutura representada na figura 1.1 na estrutura que corresponde ao operador $\tilde{H}$, mostrado na figura 1.2.

Figura 1.2: A linha representa a ligação efetiva $\tilde{J}$. Os sítios i e $i+1$ mostrados na figura 1 foram dizimados e os novos sítios i e $i+1$ são o resultado da reindexação dos sítios $i-1$ e $i+2$.

A repetição desse processo de dizimação é um método para o cálculo aproximado dos menores autovalores do Hamiltoniano inicial. A precisão desta apro-

ximação dependerá da razão entre o maior acoplamento Ω e os seus vizinhos J . A primeira questão a ser respondida, ao utilizar esta metodologia, é se as sucessivas renormalizações levam a uma distribuição de parâmetros de interação que tornariam o procedimento perturbativo exato, ou seja¹, $J/\Omega \rightarrow 0$.

A evolução das várias amostras aleatórias, que compõem a média sobre a desordem, pode ser estudada analisando a distribuição da probabilidade condicional $\mathbf{P}(J, \Omega)$ do parâmetro de troca J , dado o maior acoplamento Ω . O fluxo da distribuição de probabilidade ao longo do processo de renormalização é descrito por

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Omega} = R[\mathbf{P}], \quad (1.24)$$

em que $R[\mathbf{P}]$ é um funcional da distribuição $\mathbf{P}$. O fluxo da distribuição de probabilidade foi estudado por Daniel Fisher [15]. O ponto fixo é obtido de forma exata², sendo dado por

$$\mathbf{P}(J, \Omega) = -\frac{1}{\Omega \ln \Omega} \left(\frac{\Omega}{J} \right)^{1-1/\ln \Omega}. \quad (1.25)$$

A cada iteração os acoplamentos mais fortes são dizimados e, como visto na equação (1.23), os acoplamentos efetivos resultantes sempre são menores que Ω . Assim, o valor do maior acoplamento Ω diminui à medida que o procedimento de renormalização é repetido.

Para Ω pequeno, a distribuição (1.25) se concentra em valores de J muito menores que Ω . Este fato pode ser demonstrado integrando a equação (1.25) no limite de Ω tendendo a zero. A probabilidade associada a um valor de J maior que $C\Omega$, onde $0 < C < 1$, é zero para C finito.

Desta forma, respondemos a pergunta sobre a exatidão do processo perturbativo à medida que ele é repetido. Após sucessivas iterações, teremos

$$\frac{J}{\Omega} \rightarrow 0, \quad (1.26)$$

de forma que o processo de renormalização será assintoticamente exato com o número de iterações tendendo a infinito.

O ponto fixo da distribuição de probabilidades (1.25) é denominado ponto fixo de desordem forte. Neste ponto é possível estabelecer relações de escala entre grandezas termodinâmicas no limite de baixas temperaturas e caracterizar a criticalidade da transição de fase quântica das cadeias quânticas de spin a temperatura zero. Exemplos de tais conexões podem ser encontrados nos

¹Desprezamos os termos do método perturbativo de Rayleigh-Schrödinger de ordem superior a segunda, que são de ordem igual ou maior que $\mathcal{O}(J^3/\Omega^2)$.

²Como descrito no texto, estamos nos referindo à solução exata da equação (1.24) que, pelas próprias palavras do autor do trabalho, não tem relação com a solubilidade do modelo estudado.

trabalhos de Fisher [15, 17, 16] e de Iglói [27]. No capítulo 2 seção da 2.2.2 mostraremos como estabelecer a conexão entre o análogo aperiódico do ponto fixo de desordem forte e as grandezas termodinâmicas do modelo de Ising com campo transverso, bem como as grandezas médias do processo de contato.

1.2.1 Formalismo de operadores

A equação mestra do processo de contato (1.2) pode ser escrita em notação de operadores [41, 1]. Primeiramente, definimos um vetor

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\sigma} P(\sigma, t) |\sigma\rangle, \quad (1.27)$$

onde $|\sigma\rangle$ está associado ao estado σ e o somatório é realizado sobre todas as configurações.

Com a definição (1.27) e a equação mestra, podemos escrever

$$\sum_{\sigma} \frac{d}{dt} P(\sigma, t) |\sigma\rangle = \sum_i \sum_{\sigma} [\omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t) |\sigma\rangle - \omega_i(\sigma) P(\sigma, t) |\sigma\rangle]. \quad (1.28)$$

Introduzindo os operadores,

$$\mathcal{A}_i |\sigma\rangle = \sigma_i |\sigma^i\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_i^{\dagger} |\sigma\rangle = (1 - \sigma_i) |\sigma^i\rangle, \quad (1.29)$$

as taxas de transição podem ser reescritas como

$$\omega_i(\sigma^i) |\sigma\rangle = \left[\mathcal{A}_i^{\dagger} (\lambda_{i-1} \mathcal{A}_{i-1}^{\dagger} \mathcal{A}_{i-1} + \lambda_i \mathcal{A}_{i+1}^{\dagger} \mathcal{A}_{i+1}) + \mu_i \mathcal{A}_i \right] |\sigma^i\rangle, \quad (1.30)$$

$$\omega_i(\sigma) |\sigma\rangle = \left[\mathcal{A}_i \mathcal{A}_i^{\dagger} (\lambda_{i-1} \mathcal{A}_{i-1}^{\dagger} \mathcal{A}_{i-1} + \lambda_i \mathcal{A}_{i+1}^{\dagger} \mathcal{A}_{i+1}) + \mu_i \mathcal{A}_i^{\dagger} \mathcal{A}_i \right] |\sigma\rangle. \quad (1.31)$$

Como realizamos uma soma sobre todas as configurações podemos fazer a transformação $|\sigma^i\rangle \rightarrow |\sigma\rangle$ na equação (1.1) e obter

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\mathcal{S} |\psi(t)\rangle, \quad (1.32)$$

onde

$$\mathcal{S} = - \sum_i \lambda_{i-1} Q_i N_{i-1} + \lambda_i Q_i N_{i+1} + \mu_i M_i, \quad (1.33)$$

em que $Q_i = \mathcal{A}_i^{\dagger} - \mathcal{A}_i \mathcal{A}_i^{\dagger}$, $N_i = \mathcal{A}_i^{\dagger} \mathcal{A}_i$ e $M_i = \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_i^{\dagger} \mathcal{A}_i$.

Podemos representar o operador $\mathcal{S}$ por produtos tensoriais ($\otimes$),

$$\mathcal{S} = - \sum_{i=1}^N \lambda_{i-1} \left(\bigotimes_{k=1}^{i-2} I \right) \otimes N \otimes Q \otimes \left(\bigotimes_{k=i+1}^N I \right) +$$

$$\lambda_{i-1} \left(\bigotimes_{k=1}^{i-1} I \right) \otimes Q \otimes N \otimes \left(\bigotimes_{k=i+2}^N I \right) + \mu_i \left(\bigotimes_{k=1}^{i-1} I \right) \otimes M \otimes \left(\bigotimes_{k=i+1}^N I \right), \quad (1.34)$$

onde $\bigotimes_{k=1}^n A = \overbrace{A \otimes A \otimes \dots A \otimes A}^n$, e I representa a identidade. Nesta notação representamos algebricamente os estados “globais” dos sítios da rede. Estes estados $|\sigma\rangle$ são construídos a partir dos estados de cada sítio $|\sigma_i\rangle$ da forma

$$|\sigma\rangle = \bigotimes_{k=1}^N |\sigma_k\rangle. \quad (1.35)$$

Para escrever os estados $|\sigma\rangle$ e o operador S em notação matricial, podemos definir os estados de um sítio na posição i da rede,

$$|\sigma_i\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para o sítio são, e

$$|\sigma_i\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

para o sítio infectado.

Com ajuda da definição (1.29) obtemos

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

$$\mathcal{A}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

e, por consequência,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

O operador $\mathcal{S}$ descreve a evolução temporal do modelo. Formalmente, a solução da equação de autovalores (1.32) pode ser obtida calculando os autovalores e autovetores de $\mathcal{S}$.

Dado um conjunto de 2^N autovetores e seus autovalores associados, $\{|j\rangle, s_j\}$, um estado qualquer pode ser representado como uma combinação linear dos

autovetores,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{2^N} a_j(t)|j\rangle. \quad (1.41)$$

A equação de autovalor pode ser reescrita como

$$\sum_{j=1}^{2^N} \frac{d}{dt} a_j(t)|j\rangle = - \sum_{j=1}^{2^N} s_j a_j(t)|j\rangle. \quad (1.42)$$

Embora o operador $\mathcal{S}$ não seja Hermitiano, podemos construir um conjunto de vetores ortonormais usando o conjunto de autovetores $\{|j\rangle\}$, linearmente independente, e resolver formalmente a equação (1.41).

Calcular todos os autopares do operador S exige um esforço numérico que aumenta consideravelmente ³ com o tamanho do sistema. Como, além disto, não foram encontradas soluções analíticas para o problema, devemos considerar a utilização de esquemas de aproximação como o GRDF.

1.3 Métodos perturbativos

Nesta seção vamos abordar os detalhes do método de aproximação usado para determinar as interações efetivas que surgem dentro do esquema de GRDF. Primeiramente, a título de ilustração, vamos utilizar o método perturbativo de Rayleigh-Schrödinger e obter os acoplamentos efetivos para o modelo de Ising com campo transverso. O procedimento é análogo ao discutido nessa introdução, e utilizado por Dasgupta, Ma e Hu no trabalho original sobre o grupo de renormalização de desordem forte para o modelo de Heisenberg.

A diferença fundamental entre a nossa abordagem e a original reside nas consequências introduzidas pelo tipo de heterogeneidade estudada. Tipicamente, os trabalhos que envolvem o GRDF consideram distribuições contínuas de probabilidade [25, 24, 5, 34, 15, 27], implicando probabilidade zero de encontrar dois parâmetros de interação vizinhos iguais, $J_i = J_{i+1}$, e ainda iguais ao maior valor da distribuição desses parâmetros Ω . Dessa forma, podemos levar em consideração somente processos de dizimação de uma interação, como mostrado na figura (1.1).

No caso aperiódico⁴, constantemente encontramos três ou mais sítios vizinhos compartilhando parâmetros máximos de interação. Devemos tratar o procedimento perturbativo considerando os sítios envolvidos em aglomerados de

³Tomando vantagem da esparsidade do operador $\mathcal{S}$, podemos calcular os autopares com algoritmos com complexidade L^2 , onde L é a dimensão do operador.

⁴Aperiodicidade associada a regras de substituição determinísticas.

parâmetros fortes. Ilustramos um aglomerado de duas ligações fortes na figura (1.3).

Figura 1.3: Cadeia com 5 sítios, onde a linha espessa corresponde às ligações fortes Ω e as linhas finas indicam interações $J_{i-2}, J_{i+1} < \Omega$.

Neste contexto, o método de perturbação de Rayleigh-Schrödinger foi utilizado por Vieira [43] para o estudo de cadeias quânticas de spins com interações moduladas por sequências aperiódicas. No trabalho de Vieira, foram calculados os acoplamentos efetivos de algumas cadeias quânticas. Nesse mesmo trabalho, foi mostrado que, para um determinado valor dos parâmetros de interação, o processo de dizimação de uma cadeia quântica de spin aperiódica gera uma nova cadeia modulada por uma nova sequência aperiódica. Após alguns passos, observa-se que a sequência aperiódica começa a se repetir⁵.

Se considerarmos a modulação, ou seja, a sequência de parâmetros $\{J_i\}$, como análoga à distribuição de probabilidades $P(J, \Omega)$, podemos interpretar o ponto em que as modulações começam a se repetir como o ponto fixo de desordem forte do sistema aperiódico. Isso significa também que, pelo menos neste ponto, teremos aglomerados com tamanhos limitados.

Os detalhes da descrição do ponto fixo de desordem forte aperiódica serão mostrados no capítulo 2. Igualmente, no capítulo 2, veremos que relações entre os acoplamentos efetivos e o seus predecessores têm um papel fundamental na descrição da criticalidade segundo o GRDF.

1.3.1 GRDF para o modelo de Ising com campo transversal

O modelo de Ising com campo transversal é definido pelo Hamiltoniano

$$H = - \sum_i J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^z h_i, \quad (1.43)$$

onde σ^x e σ^z são matrizes de Pauli, J_i representa a interação entre sítios vizinhos i e $i+1$. O campo transversal sobre o sítio i é dado por h_i .

Vamos considerar, primeiramente, que o parâmetro microscópico J_i pode assumir somente os valores J_A e J_B e que o campo transversal é fixado em

⁵Ver figuras (2.1), (2.2) e (2.3).

$h_i = h$. Supomos que os parâmetros microscópicos satisfazem

$$J_B > h > J_A > 0. \quad (1.44)$$

O termo do Hamiltoniano do modelo de Ising com campo transversal associado a uma estrutura do tipo J_A, J_B, J_A , como mostrado na figura (1.4), é dado por

$$H = H^0 + H^1, \quad (1.45)$$

onde

$$H^0 = -J_B \sigma_1^x \sigma_2^x \quad (1.46)$$

e

$$H^1 = -h(\sigma_1^z + \sigma_2^z). \quad (1.47)$$

Vamos tratar o termo H^1 como uma perturbação de H^0 . Os termos associados às ligações fracas, J_A na figura (1.4), foram desprezados⁶.

Figura 1.4: Cadeia com 4 sítios, onde a linha forte corresponde à ligação forte J_B e as linhas finas indicam interações fracas J_A .

Os autoestados e os respectivos níveis de energia de H^0 são dados por

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |+-\rangle, E_0 = J_B, \\ |1'\rangle &= |-+\rangle, E_{0'} = J_B, \\ |0\rangle &= |++\rangle, E_1 = -J_B, \\ |0'\rangle &= |--\rangle, E_{1'} = -J_B, \end{aligned}$$

em que os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são os autoestados do operador σ^x e representam os estados com projeção de spin $+1$ e -1 . O estado $|\pm\pm\rangle$ representa o produto direto $|\pm\rangle \otimes |\pm\rangle$.

⁶A interação J_A pode ser desprezada no cálculo perturbativo dos autoestados de H quando $h \gg J_A$. Entretanto, pode-se mostrar que o processo perturbativo não modifica interação J_A , que apenas passa a designar a interação com um sítio efetivo de momento duplo. No capítulo 2, veremos que $h \gg J_A$ no ponto fixo de desordem forte.

A aplicação do operador σ^z nos autoestados de σ^x corresponde a

$$\sigma^z|\pm\rangle = |\mp\rangle. \quad (1.48)$$

Usando como base os autoestados de σ_x , o operador σ^z é representado por

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Existe uma degenerescência dupla no estado fundamental do operador H^0 , a qual é quebrada pelo termo perturbativo H_1 . Os dois níveis de energia resultantes desta quebra são dados pelo operador $\tilde{H}$, calculado usando o método perturbativo de Rayleigh-Schrödinger,

$$\tilde{H} = E_0 + M^{(1)} + M^{(2)} + \dots, \quad (1.50)$$

onde M^i é a matriz de perturbação de i -ésima ordem,

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} \langle 0|H^1|0\rangle & \langle 0'|H^1|0\rangle \\ \langle 0|H^1|0'\rangle & \langle 0'|H^1|0'\rangle \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} \sum_{m \neq 0,0'} \frac{\langle 0|H^1|m\rangle\langle m|H^1|0\rangle}{E_0-E_m} & \sum_{m \neq 0,0'} \frac{\langle 0'|H^1|m\rangle\langle m|H^1|0\rangle}{E_0-E_m} \\ \sum_{m \neq 0,0'} \frac{\langle 0|H^1|m\rangle\langle m|H^1|0'\rangle}{E_0-E_m} & \sum_{m \neq 0,0'} \frac{\langle 0'|H^1|m\rangle\langle m|H^1|0'\rangle}{E_0-E_m} \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Os produtos internos dos elementos das matrizes $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ são

$$\begin{aligned} \langle 0|H^1|0\rangle &= 0, \\ \langle 0'|H^1|0\rangle &= 0, \\ \langle 0|H^1|0'\rangle &= 0, \\ \langle 0'|H^1|0'\rangle &= 0, \\ \langle 0|H^1|1\rangle &= -h, \\ \langle 0|H^1|1'\rangle &= -h, \\ \langle 0'|H^1|1\rangle &= -h, \\ \langle 0'|H^1|1'\rangle &= -h. \end{aligned}$$

Figura 1.5: Cadeia com 3 sítios, onde as linhas finas indicam interações $J_{i-1}, J_{i+1} < \Omega$ e o círculo vazio representa um par de sítios que compartilham a mesma projeção de spin na direção x , na presença do campo transversal efetivo $\tilde{h}$.

Com essas informações concluímos que o operador $\tilde{H}$ é dado por

$$\tilde{H} = -J_B - \tilde{h} - \tilde{h}\sigma^z, \quad (1.53)$$

onde

$$\tilde{h} = \frac{h^2}{J_B}. \quad (1.54)$$

Como indicado pelo operador $\tilde{H}$, o espectro de energia da cadeia de spins mostrada na figura (1.5) é uma aproximação dos menores autovalores da cadeia indicada na figura (1.4). Devemos salientar que, estendendo o método perturbativo para ordens superiores, obteremos termos do tipo h^{n+1}/J_B^n que podem ser desprezados.

Segundo discutido anteriormente, teremos que estudar os menores autovalores de cadeias de spins compostas por aglomerados de ligações fortes, por exemplo, como mostrado na figura (1.3).

O Hamiltoniano pode ser novamente dividido entre um termo não perturbado H^0 e perturbado H^1 ,

$$H = H^0 + H^1, \quad (1.55)$$

onde

$$H^0 = -J_B(\sigma^x_1\sigma^x_2 + \sigma^x_2\sigma^x_3) \quad (1.56)$$

e

$$H^1 = -h(\sigma^z_1 + \sigma^z_2 + \sigma^z_3). \quad (1.57)$$

Os autoestados e os autovalores de H^0 são

$$\begin{aligned}
|0\rangle &= |+++\rangle, E_0 = -2J_B, \\
|0'\rangle &= |--\rangle, E_{0'} = -2J_B, \\
|1\rangle &= |++-\rangle, E_1 = 0, \\
|1'\rangle &= | -++\rangle, E_{1'} = 0, \\
|1''\rangle &= | -+-\rangle, E_{1''} = 0, \\
|1'''\rangle &= |+-\rangle, E_{1'''} = 0, \\
|2\rangle &= |+-+\rangle, E_2 = 2J_B, \\
|2'\rangle &= | -+-\rangle, E_{2'} = 2J_B,
\end{aligned}$$

Vamos calcular os dois menores autovalores de H até terceira ordem,

$$\tilde{H} = E_0 + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}, \quad (1.58)$$

onde $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ foram previamente definidas pelas matrizes (1.51) e (1.52), e $M^{(3)}$ é dada por⁷

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} \sum_{m,k \neq 0,0'} \frac{\langle 0|H^1|m\rangle \langle m|H^1|k\rangle \langle k|H^1|0\rangle}{(E_0-E_n)(E_k-E_0)} & \sum_{m,k \neq 0,0'} \frac{\langle 0'|H^1|m\rangle \langle m|H^1|k\rangle \langle k|H^1|0\rangle}{(E_0-E_n)(E_k-E_0)} \\ \sum_{m,k \neq 0,0'} \frac{\langle 0|H^1|m\rangle \langle m|H^1|k\rangle \langle k|H^1|0'\rangle}{(E_0-E_n)(E_k-E_0)} & \sum_{m,k \neq 0,0'} \frac{\langle 0'|H^1|m\rangle \langle m|H^1|k\rangle \langle k|H^1|0'\rangle}{(E_0-E_n)(E_k-E_0)} \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Os produtos internos necessários para calcular os elementos das matrizes $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ e $M^{(3)}$ são

⁷Os termos foram simplificados usando a propriedade $M^{(1)} = 0$.

$$\begin{aligned}
\langle 0|H^1|0\rangle &= 0, & \langle 2|H^1|1\rangle &= 0, & \langle 1|H^1|1\rangle &= 0, \\
\langle 0'|H^1|0\rangle &= 0, & \langle 2|H^1|1'\rangle &= 0, & \langle 1|H^1|1'\rangle &= 0, \\
\langle 0|H^1|0'\rangle &= 0, & \langle 2|H^1|1''\rangle &= -h, & \langle 1|H^1|1''\rangle &= 0, \\
\langle 0'|H^1|0'\rangle &= 0, & \langle 2|H^1|1'''\rangle &= -h, & \langle 1|H^1|1'''\rangle &= -h, \\
\langle 1|H^1|0\rangle &= -h, & \langle 2'|H^1|1\rangle &= -h, & \langle 1'|H^1|1'\rangle &= 0, \\
\langle 1|H^1|0'\rangle &= 0, & \langle 2'|H^1|1'\rangle &= -h, & \langle 1'|H^1|1''\rangle &= -h, \\
\langle 1'|H^1|0\rangle &= -h, & \langle 2'|H^1|1''\rangle &= 0, & \langle 1'|H^1|1'''\rangle &= 0, \\
\langle 1'|H^1|0'\rangle &= 0, & \langle 2'|H^1|1'''\rangle &= 0, & \langle 1''|H^1|1''\rangle &= 0, \\
\langle 1''|H^1|0\rangle &= 0, & \langle 2|H^1|2\rangle &= 0, & \langle 1''|H^1|1'''\rangle &= 0, \\
\langle 1''|H^1|0'\rangle &= -h, & \langle 2'|H^1|2\rangle &= 0, & \langle 1'''|H^1|1'''\rangle &= 0, \\
\langle 1'''|H^1|0\rangle &= 0, & \langle 2|H^1|2'\rangle &= 0, & \langle 0|H^1|2'\rangle &= 0, \\
\langle 1'''|H^1|0'\rangle &= -h, & \langle 2'|H^1|2'\rangle &= 0, & \langle 0'|H^1|2'\rangle &= 0, \\
\langle 0|H^1|2\rangle &= -h, & & & \langle 0'|H^1|2'\rangle &= -h.
\end{aligned}$$

Assim sendo, obtemos

$$\tilde{H} = -2J_B - \frac{5h^2}{4J_B} - \tilde{h}\sigma^z, \quad (1.60)$$

onde

$$\tilde{h} = \frac{h^3}{J_B^2}. \quad (1.61)$$

Para aglomerados maiores de ligações fortes, como mostrado na figura (1.6), recorreremos a rotinas simbólicas para o cálculo dos termos perturbativos de ordem superior. Observamos que as matrizes de perturbação de um aglomerado de n ligações fortes apresentam o primeiro termo não nulo fora da diagonal somente na n -ésima ordem.

Figura 1.6: Cadeia com $n+3$ sítios, onde a linha espessa corresponde às ligações fortes J_B , as linhas finas indicam interações J_A e as linhas pontilhadas correspondem às n ligações J_B .

Figura 1.7: Cadeia com $n + 3$ sítios, onde as linhas finas indicam interações J_A e o círculo vazio representa $n + 1$ sítios que compartilham a mesma projeção de spin na direção x , sob ação do campo transverso efetivo $\tilde{h} = \frac{h^{n+1}}{J_B^n}$.

Análises numéricas comparativas dos autovalores das cadeias de spins, mostradas na figura (1.7), confirmam a seguinte regra, para um aglomerado de tamanho n ,

$$\tilde{H} = \tilde{h}\sigma^z + \text{constante}, \quad (1.62)$$

onde $\tilde{h}$ é função do tamanho do aglomerado,

$$\tilde{h} = \frac{h^{n+1}}{J_B^n}. \quad (1.63)$$

Figura 1.8: Cadeia com $n + 2$ sítios, onde $h_B > J > h_A$. A linha cheia corresponde às ligações J , os círculos vazios representam sítios sujeitos a campos transversos de magnitude h_A , os círculos cheios h_B e a linha tracejada representa $n - 2$ sítios sujeitos a h_B .

Para as estruturas mostradas na figura (1.8), em que o campo transversal assume o maior valor entre os parâmetros, podemos repetir a mesma descrição do procedimento aproximado. O resultado obtido para uma cadeia de spins com essa particularidade é análogo ao obtido para o aglomerado de interação de troca forte, recém analisado,

$$\tilde{H} = \tilde{J}\sigma^x_1\sigma^x_2 + \text{constante}, \quad (1.64)$$

onde

$$\tilde{J} = \frac{J^{n+1}}{h_B^n}. \quad (1.65)$$

Este cálculo perturbativo corresponde a uma dizimação dos sítios sujeitos ao campo forte h_B . Esses sítios têm a projeção de spin na direção z fixada e os

spins sujeitos ao campo fraco h_A interagem através de uma interação efetiva $\tilde{J}$. Este cenário é mostrado na figura (1.9).

Figura 1.9: Cadeia com $n + 2$ sítios, onde a linha tracejada contém os sítios com a projeção na direção z fixa. A interação entre os sítios representados por círculos vazios é dada por $\tilde{J}$.

O método de aproximação que foi descrito acima torna-se exato, para cadeias com aglomerados de interações de troca fortes, no limite em que h/J_B vai a zero. No caso de cadeias com aglomerados de campos transversos fortes, as aproximações tornam-se exatas para J/h_B tendendo a zero. Em ambos os casos, nas proximidades dos seus respectivos limites de exatidão, as aproximações obtidas são adequadas para descrever as propriedades da cadeia quântica para baixas temperaturas. Isso ocorre porque consideramos os estados de menor energia, próximos do estado fundamental.

1.3.2 GRDF para o processo de contato

Na seção 1.2.1, descrevemos um formalismo de operadores para o processo de contato. A evolução do sistema pode ser associada a uma equação de evolução (1.32) que possui forma funcional equivalente à equação de Schrödinger. Assim sendo, podemos comparar o papel do Hamiltoniano de sistemas quânticos com o do operador de evolução $\mathcal{S}$ e, em função desta analogia, desenvolver o método de GRDF para este modelo estocástico.

A solução geral da equação de evolução (1.32) pode ser obtida do sistema de equações diferenciais descrito pela equação (1.42). Escrevemos então a combinação linear

$$a_j(t) = \sum_k b_k \exp(-s_k t), \quad (1.66)$$

onde b_k é determinado pelas condições iniciais.

Um ponto crucial do método está relacionado ao fato do operador $\mathcal{S}$ ter a parte real de todos os autovalores maior que zero ($\text{Re}(s_k) \geq 0 \forall k$). Assim, segundo a equação (1.66), podemos concluir que o comportamento assintótico para tempos longos é governado pelos menores autovalores. Nesse sentido, um método de aproximação para os menores autovalores seria adequado para descrever as propriedades do processo de contato para tempos longos.

Figura 1.10: Nesta figura mostramos a substituição dos sítios ligados pela taxa de infecção forte λ_B por um sítio efetivo sujeito a uma taxa de cura efetiva $\tilde{\mu}$. Os autovalores do termo do Hamiltoniano associados a este único sítio são 0 e $\tilde{\mu}$.

No contexto do processo de contato, os tempos longos fazem o papel das baixas temperaturas para o modelo de Ising quântico.

A exemplo do que foi feito anteriormente para o modelo de Ising quântico, vamos considerar os termos do operador $\mathcal{S}$ próximos a uma taxa de infecção λ_B , onde $\lambda_B > \mu > \lambda_A$,

$$\mathcal{S} = -\lambda_B(N_1Q_2 + Q_1N_2) - \mu M_1 - \mu M_2, \quad (1.67)$$

representando esse operador na figura (1.10).

O operador $\mathcal{S}$ pode ser escrito de forma matricial,

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu & -\mu & 0 \\ 0 & \lambda_B + \mu & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & \lambda_B + \mu & -\mu \\ 0 & -\lambda_B & -\lambda_B & 2\mu \end{bmatrix}. \quad (1.68)$$

Os autovalores podem ser calculados exatamente. Em ordem crescente, temos

$$\begin{aligned} & 0, \\ & \frac{1}{2}\lambda_B + \frac{3}{2}\mu - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_B^2 + 6\lambda_B\mu + \mu^2}, \\ & \frac{1}{2}\lambda_B + \frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_B^2 + 6\lambda_B\mu + \mu^2}, \\ & \lambda_B + \mu. \end{aligned}$$

Para $\lambda_B \gg \mu$, a diferença entre o menor e o segundo menor autovalor é dada por

$$\tilde{\mu} = 2\frac{\mu^2}{\lambda_B}. \quad (1.69)$$

Este resultado é muito semelhante ao obtido para o modelo de Ising quântico. Para aglomerados de ligações maiores, calculamos os autovalores numérica-

Figura 1.11: Erro relativo entre os menores valores do operador de evolução de uma estrutura com duas ligações fortes e da respectiva estrutura renormalizada, a exemplo da renormalização mostrada nas figuras 1.6 e 1.7, com taxa de cura efetiva $\tilde{\mu} = 2^2 \frac{\mu^3}{\lambda_B^2}$.

mente.

Os resultados numéricos mostrados nas figuras (1.11) e (1.12) indicam uma relação para a taxa efetiva de cura $\tilde{\mu}$ (diferença entre os dois menores autovalores do operador de evolução associado ao aglomerado) em função do tamanho do aglomerado n ,

$$\tilde{\mu} = 2^n \frac{\mu^{n+1}}{\lambda_B^n}. \quad (1.70)$$

Podemos notar que esta relação é idêntica à equação (1.63), exceto pelo fator 2^n .

A mesma inspeção numérica pode ser feita para estruturas com taxas de cura μ fortes. Podemos concluir que

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda^{n+1}}{\mu_B^n}. \quad (1.71)$$

Figura 1.12: Erro relativo entre os menores valores do operador de evolução de uma estrutura com duas ligações fortes e da respectiva estrutura renormalizada, a exemplo da renormalização mostrada nas figuras 1.6 e 1.7, com taxa de cura efetiva $\tilde{\mu} = 2^4 \frac{\mu^5}{\lambda_B^4}$.

Podemos agora resumir os resultados obtidos para o modelo de Ising quântico,

$$\tilde{\mu} = \alpha_n \frac{\mu^{n+1}}{\lambda_B^n}, \quad (1.72)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda^{n+1}}{\mu_B^n}, \quad (1.73)$$

onde μ e λ fazem o papel de h e J , respectivamente. O fator é dado por $\alpha_n=1$ para o modelo de Ising e $\alpha_n = 2^n$ para o processo de contato.

1.4 Aperiodicidade

Embora tenha havido muitos avanços na compreensão do comportamento crítico do modelo de contato com desordem aleatória, existem poucos trabalhos abordando flutuações aperiódicas [14, 32, 6] de caráter determinístico, em sistemas estocásticos com estado absorvente.

Sob a ótica do tratamento de GRDF, a inomogeneidade aperiódica apresenta algumas vantagens técnicas e didáticas em comparação à desordem aleatória. Como será visto no capítulo 2, equações como as que descrevem o fluxo da dis-

tribuição de probabilidade (1.24) serão substituídas por mapas lineares simples.

No contexto aperiódico, o ponto fixo de desordem forte pode ser determinado usando considerações simples sobre os acoplamentos efetivos obtidos a cada passo do procedimento de renormalização.

Outra característica do uso da aperiodicidade para investigar as propriedades de sistemas heterogêneos, são as diferentes propriedades de flutuação das sequências aperiódicas, dadas pelo expoente de flutuação ω , que será definido mais adiante.

Estruturas aperiódicas determinísticas, ou simplesmente aperiódicas, são encontradas em ligas metálicas na forma de quasicristais [38, 29] e em super-redes construídas através de deposição de filmes finos [45]. Estas estruturas podem ter propriedades inusitadas, sendo fonte de grande estímulo para pesquisa.

1.4.1 Sequências aperiódicas

As sequências aperiódicas podem ser representadas por uma sequência de letras $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots)$. Estas sequências não são formadas por subsequências que se repetem periodicamente; ainda assim, estamos nos referindo a sequências determinísticas. Podemos construir uma sequência aperiódica usando as chamadas regras de substituição: a sequência de Fibonacci, por exemplo, é construída pela regra

$$\xi : \begin{array}{l} A \rightarrow AB, \\ B \rightarrow A. \end{array}$$

Aplicando a regra ξ sucessivamente sobre uma semente inicial A , temos

$$\begin{aligned} & A, \\ & \xi(A) = AB, \\ & \xi^2(A) = ABA, \\ & \xi^3(A) = ABAAB, \\ & \xi^4(A) = ABAABABA, \\ & \xi^5(A) = ABAABABAABAAB, \\ & \vdots \end{aligned}$$

Outras sequências são obtidas a partir de regras de substituição semelhantes:

- duplicação de período

$$\begin{array}{l} \xi(A) \rightarrow AB \\ \xi(B) \rightarrow AA \end{array} \quad , \quad (1.74)$$

- triplicação de período

$$\begin{aligned}\xi(A) &\rightarrow ABB \\ \xi(B) &\rightarrow AAA\end{aligned}, \quad (1.75)$$

- Rudin-Shapiro

$$\begin{aligned}\xi(A) &\rightarrow AC \\ \xi(B) &\rightarrow DC \\ \xi(C) &\rightarrow AB \\ \xi(D) &\rightarrow DB\end{aligned}. \quad (1.76)$$

1.5 Matriz de Substituição

Uma maneira de estudar propriedades das seqüências aperiódicas consiste em analisar a matriz de substituição definida como

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \#_{\alpha_1}\xi(\alpha_1) & \#_{\alpha_1}\xi(\alpha_2) & \cdots \\ \#_{\alpha_2}\xi(\alpha_1) & \#_{\alpha_2}\xi(\alpha_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.77)$$

onde $\#_{\alpha_j}\xi(\alpha_i)$ representa o número de letras α_j que aparecem a partir aplicação da regra ξ na letra α_i .

Vamos nos limitar a um alfabeto $\{A, B\}$, tendo em mente que todos os resultados a seguir são facilmente generalizáveis para qualquer alfabeto:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \#_A\xi(A) & \#_A\xi(B) \\ \#_B\xi(A) & \#_B\xi(B) \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

Uma vez que uma seqüência pode ser construída a partir de consecutivas aplicações da regra de substituição, através da matriz $\mathcal{M}$, é possível relacionar o número de letras A e B de sucessivas aplicações,

$$\begin{pmatrix} \#_A\xi(\alpha)^{k+1} \\ \#_B\xi(\alpha)^{k+1} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \#_A\xi(\alpha)^k \\ \#_B\xi(\alpha)^k \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

Observando que a equação (1.79) vale para todo k , podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \#_A\xi(\alpha)^{k+1} \\ \#_B\xi(\alpha)^{k+1} \end{pmatrix} = \mathcal{M}^k \begin{pmatrix} \#_A(\alpha) \\ \#_B(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Estes vetores por sua vez podem ser representados por uma combinação linear dos autovetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ com coeficientes lineares c_1 e c_2 associados ao maior e ao menor autovalor respectivamente. Então podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \#_A \xi(\alpha)^{k+1} \\ \#_B \xi(\alpha)^{k+1} \end{pmatrix} = \lambda_1^k c_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2^k c_2 \mathbf{u}_2, \quad (1.81)$$

onde λ_1 é o maior autovalor e λ_2 o menor.

Partindo da equação (1.81), podemos obter o número N de letras depois de k substituições simplesmente decompondo a equação (1.81) em componentes e somando-as,

$$N = \#_A \xi(\alpha)^{k+1} + \#_B \xi(\alpha)^{k+1} = \lambda_1^k c_1 (u_{11} + u_{12}) + \lambda_2^k c_2 (u_{21} + u_{22}), \quad (1.82)$$

onde u_{ij} é a componente j do autovetor i .

Além de representarmos o crescimento da seqüência através dos autovetores e autovalores, podemos também escrever a fração de letras A e B na seqüência,

$$P_A \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\#_A \xi(\alpha)^{k+1}}{N}, \quad (1.83)$$

$$P_B \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\#_B \xi(\alpha)^{k+1}}{N}, \quad (1.84)$$

ou ainda

$$P_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^k c_1 u_{11} + \lambda_2^k c_2 u_{21}}{\lambda_1^k c_1 (u_{11} + u_{12}) + \lambda_2^k c_2 (u_{21} + u_{22})}, \quad (1.85)$$

$$P_B = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^k c_1 u_{12} + \lambda_2^k c_2 u_{22}}{\lambda_1^k c_1 (u_{11} + u_{12}) + \lambda_2^k c_2 (u_{21} + u_{22})}. \quad (1.86)$$

Para $c_1 \neq 0$, dado que $\lambda_1 > \lambda_2$, a equação (1.85) fica

$$P_A = \frac{u_{11}}{u_{11} + u_{12}}, \quad (1.87)$$

$$P_B = \frac{u_{21}}{u_{11} + u_{12}}. \quad (1.88)$$

A flutuação de uma seqüência, por exemplo de letras A , pode ser definida como

$$g = |\#_A \xi(\alpha)^{k+1} - P_A N|. \quad (1.89)$$

Desta forma, a flutuação medirá a diferença entre o número de letras A obtidas a partir de k substituições e o número assintótico de letras A da seqüência $P_A N$.

Escrevendo a flutuação em termos de uma lei de potência,

$$g \propto N^\omega, \quad (1.90)$$

podemos relacionar o expoente ω com os autovalores da matriz de substituição de uma seqüência no limite assintótico de k infinito,

$$\left| \lambda_2^k c_2 \left[u_{21} - \frac{u_{11}(u_{21} + u_{22})}{u_{11} + u_{12}} \right] \right| = [\lambda_1^k c_1(u_{11} + u_{12}) + \lambda_2^k c_2(u_{21} + u_{22})]^\omega ,$$

sendo que, com $c_1 \neq 0$ e $\lambda_2 < \lambda_1$, obtemos no limite de k infinito

$$\left| \lambda_2^k c_2 \left[u_{21} - \frac{u_{11}(u_{21} + u_{22})}{u_{11} + u_{12}} \right] \right| = [\lambda_1^k c_1(u_{11} + u_{12})]^\omega . \quad (1.91)$$

Tomando o logaritmo em ambos os lados da expressão (1.91) temos

$$k \ln |\lambda_2| + \ln \left| c_2 \left[u_{21} - \frac{u_{11}(u_{21} + u_{22})}{u_{11} + u_{12}} \right] \right| = \omega k \ln \lambda_1 + \omega \ln c_1(u_{11} + u_{12}) . \quad (1.92)$$

No limite de k infinito obtemos

$$\omega = \frac{\ln |\lambda_2|}{\ln \lambda_1} . \quad (1.93)$$

Podemos então resumir as grandezas relevantes em nosso estudo para as seqüências aqui citadas:

seqüência	λ_1	λ_2	P_A	ω
Fibonacci	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2}{1+\sqrt{5}}$	-1
Duplicação de período	2	-1	$\frac{2}{3}$	0
Rudin-Shapiro(duas letras)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Triplicação de período	3	-2	$\frac{3}{5}$	$\frac{\ln 2}{\ln 3}$

Tabela 1.2: Parâmetros característicos das seqüências aperiódicas.

As flutuações produzidas pela aperiodicidade, bem como a desordem de caráter aleatório, podem modificar o comportamento crítico de um sistema. Sob esse aspecto, consideramos o critério de relevância proposto por Harris, para desordem, e estendido por Luck no contexto de aperiodicidade [20]. Este critério avalia a relevância da desordem ou aperiodicidade para o comportamento crítico

de sistemas magnéticos.

O critério estabelece que uma aperiodicidade, distribuída em $d_a \leq d$ dimensões espaciais de um modelo em d -dimensões, é *relevante* se $\omega > \omega_c$, *marginal* se $\omega = \omega_c$ e *irrelevante* se $\omega < \omega_c$, com

$$\omega_c = 1 - \frac{1}{d_a \nu_\perp}. \quad (1.94)$$

Para o modelo de contato unidimensional, $\nu_\perp \simeq 1.097$, fornecendo $\omega_c \simeq 0.09$.

O nosso trabalho sobre o processo de contato sujeito à aperiodicidade [14] está de acordo com este critério. Segundo os resultados de simulação de Monte Carlo, as duas sequências irrelevantes (Fibonacci $\omega = -1$ e duplicação de período $\omega = 0$) não resultam em modificações do comportamento crítico. Como esperado, a sequência relevante de Rudin-Shapiro⁸, $\omega = 1/2$, altera os valores dos expoentes críticos do processo de contato. É interessante notar que desordem descorrelacionada ($\omega = 1/2$) é relevante em termos do comportamento crítico desse modelo.

Nesta tese, vamos apresentar resultados de simulação de Monte Carlo para a sequência de triplicação de período com expoente de flutuação $\omega = \ln 2 / \ln 3 = 0.630\dots$

⁸Rudin-Shapiro de duas letras: após construir a sequência são realizadas as seguintes substituições, $C \rightarrow A$ e $D \rightarrow B$

Capítulo 2

Método GRDF aplicado a sequências aperiódicas

Método GRDF aplicado a sequências aperiódicas

O método do Grupo de Renormalização para Desordem Forte (GRDF), como discutido anteriormente, consiste em aplicar sucessivamente aproximações dos menores autovalores de estruturas que envolvam os parâmetros do operador de evolução temporal de maior magnitude.

O GRDF corresponde a um processo iterativo envolvendo o operador de evolução. A cada passo, determinamos um operador com espectro aproximado aos “gaps” dos menores autovalores do operador anterior.

Como método de aproximação, podemos empregar o método perturbativo de Rayleigh-Schrödinger, expansões em série de Taylor dos autovalores, ou ainda podemos definir um novo operador com espectro que represente somente os menores autovalores, calculados numericamente. Em função de propriedades do operador estudado escolhemos, convenientemente, um desses métodos. Todas estas aproximações são consistentes e serão tão melhores quanto maior for a razão entre o maior e os demais parâmetros dos operadores.

No contexto dessas aproximações, podemos introduzir a figura do denominado ponto fixo de desordem forte. Este representa um ponto fixo do mapeamento dos parâmetros microscópicos ao longo dos processos de renormalização em que a razão entre o maior parâmetro e o segundo maior diverge.

Estudando as características do mapeamento introduzido pelo GRDF nas proximidades do ponto fixo de desordem forte, fomos capazes de obter informações a respeito da criticalidade de sistemas Hamiltonianos a temperatura zero, bem como o comportamento crítico de grandezas no estado estacionário

de sistemas estocásticos.

Neste capítulo, vamos abordar o estudo da criticalidade de diferentes estruturas aperiódicas introduzidas usando algumas sequências aperiódicas com flutuações irrelevantes, marginais e relevantes. Esta abordagem será feita utilizando o GRDF. Identificaremos a existência do ponto fixo de desordem forte no caso da sequência relevante de triplicação de período e discutiremos como podemos usar este conhecimento para caracterizar as propriedades críticas do modelo de Ising com campo transversal e do processo de contato.

2.1 GRDF para sequências irrelevantes e marginais

No contexto do modelo de Ising 1-D ($\nu_{\perp} = 1$) com campo transversal e sob o ponto de vista do critério de relevância de Harris-Luck podemos citar as sequências de Fibonacci ($A \rightarrow AB, B \rightarrow A$) e duplicação de período ($A \rightarrow AB, B \rightarrow AA$) como exemplos, respectivamente, de sequências irrelevantes e marginais. Essas duas sequências são irrelevantes quando relacionadas ao processo de contato 1-D ($\nu_{\perp} \simeq 1.097$). Conforme veremos a seguir, estas características parecem emergir, também, quando as analisamos sob a ótica do GRDF.

2.1.1 Sequência de Fibonacci

Na figura (2.1a) ilustramos um diagrama que representa uma rede unidimensional cujas interações, entre primeiros vizinhos, são moduladas pela sequência de Fibonacci. Este diagrama é uma representação direta do Hamiltoniano ou do operador de evolução de um sistema estocástico.

Supondo que

$$\lambda_B > \mu, \quad (2.1)$$

o processo de renormalização do GRDF ocorrerá como mostrado na figura (2.1a): as estruturas sítio-ligação-sítio, em que a ligação é determinada pelo parâmetro λ_B , serão dizimadas (substituídas), dando lugar a único sítio sob ação de um parâmetro $\tilde{\mu}$.

A relação entre o novo parâmetro $\tilde{\mu}$ e os parâmetros λ_B e μ , conforme o tratamento realizado no capítulo 1, é dada por

$$\tilde{\mu} = \alpha_1 \frac{\mu^2}{\lambda_B}, \quad (2.2)$$

onde o valor da constante de proporcionalidade ou prefator α_1 depende do modelo estudado.

Este procedimento é facilmente justificado. Se dois sítios estão fortemente ligados podemos dizer que o par se comporta como um único sítio. Assim, no caso do modelo de Ising, podemos dizer que o par forma um único spin cujo momento magnético é a soma dos momentos dos sítios individuais.

Um raciocínio totalmente análogo pode ser empregado para o processo de contato: dois sítios compartilham o mesmo estado, podendo ser entendidos como um único sítio com momento duplo.

Após a primeira renormalização, o novo operador possui três parâmetros microscópicos, $\tilde{\mu}$, λ_A e μ . Como observado no capítulo 1, o novo parâmetro $\tilde{\mu}$ obedece às desigualdades¹

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &< \lambda_B, \\ \tilde{\mu} &< \mu.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Para prosseguir com o processo de renormalização, devemos identificar, novamente, o maior dentre os parâmetros. Entretanto, nada podemos afirmar em relação ao parâmetro λ_A . Caso $\lambda_A > \mu$, o procedimento de renormalização perderia o significado pois teríamos que dizimar toda a rede e não somente uma pequena estrutura.

Com

$$\lambda_A < \mu\tag{2.4}$$

temos uma situação mais interessante. Neste caso, devemos dizimar sítios sujeitos ao campo μ como mostrado na figura (2.1b). Os sítios, vizinhos aos dizimados, passam a ser primeiros vizinhos entre si, com interação definida pelo parâmetro $\tilde{\lambda}$, onde

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_A^2}{\mu}.\tag{2.5}$$

As equações (2.4) e (2.5) implicam

$$\tilde{\lambda} < \lambda_A.\tag{2.6}$$

O operador resultante dessa segunda renormalização é representado no diagrama da figura (2.1c).

Observamos que as interações são moduladas novamente pela sequência de Fibonacci, de modo que a situação inicial é recuperada se redefinirmos os parâmetros,

¹As desigualdades são diretamente justificadas pela equação (2.2) se μ for suficientemente menor que λ_B . Além disso, cálculos exatos do parâmetro efetivo $\tilde{\mu}$ apontam que as desigualdades são sempre válidas [26]

$$\lambda_B = \lambda_A , \quad (2.7)$$

$$\mu = \tilde{\mu} , \quad (2.8)$$

$$\lambda_A = \tilde{\lambda} . \quad (2.9)$$

Em resumo, as relações (2.1) e (2.4) representam as condições de auto-similaridade da sequência aperiódica de Fibonacci sob a ação do GRDF,

$$\begin{aligned} \lambda_B &> \mu \text{ e} \\ \mu &> \lambda_A . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Figura 2.1: Três primeiros processos de renormalização aplicados à sequência de Fibonacci. As linhas cheias representam ligações λ_B , linhas tracejadas correspondem a λ_A e pontilhadas a $\tilde{\lambda}$. Os círculos cheios representam o parâmetro microscópico μ e os vazios $\tilde{\mu}$. O processo de renormalização de (a) para (b) consiste na substituição das estruturas do tipo “ $\mu\lambda_B\mu$ ” por “ $\tilde{\mu}$ ”; na renormalização de (b) para (c) substituímos “ $\lambda_A\mu\lambda_A$ ” por “ $\tilde{\lambda}$ ”. A sequência renormalizada representada em (c) também é modulada pela sequência de Fibonacci.

Mapa dos parâmetros microscópicos: Fibonacci

As condições (2.10) devem ser satisfeitas para qualquer etapa da renormalização,

$$\frac{\mu^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}} < 1, \quad (2.11)$$

$$\frac{\lambda_A^{(i)}}{\mu^{(i)}} < 1. \quad (2.12)$$

Elas garantem a auto-similaridade do processo e possibilitam a obtenção dos parâmetros microscópicos do operador de evolução temporal após um número arbitrário de renormalizações. As equações de recorrência para os parâmetros μ , λ_A e λ_B podem ser obtidas das equações (2.7),(2.8) e (2.9), sendo que os parâmetros intermediários são dados por (2.2) e (2.5),

$$\lambda_B^{(i+1)} = \lambda_A^{(i)}, \quad (2.13)$$

$$\mu^{(i+1)} = \alpha_1 \frac{\mu^{(i)^2}}{\lambda_B^{(i)}}, \quad (2.14)$$

$$\lambda_A^{(i+1)} = \frac{\lambda_A^{(i)^2}}{\mu^{(i)}}, \quad (2.15)$$

onde i representa o número de processos de renormalização que leva o sistema representado na figura (2.1a) para o da figura (2.1c).

A análise das relações de recorrência será mais sucinta se considerarmos as razões

$$r \equiv \frac{\mu}{\lambda_B}, \quad (2.16)$$

$$s \equiv \frac{\lambda_A}{\mu}. \quad (2.17)$$

Usando as equações (2.14) obtemos

$$r^{(i+1)} = \alpha_1 \frac{r^{(i)}}{s^{(i)}}, \quad (2.18)$$

$$s^{(i+1)} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{s^{(i)^2}}{r^{(i)}}. \quad (2.19)$$

As relações de recorrência podem ser transformadas em um mapa linear². Tomando o logaritmo de (2.18) e (2.19), teremos

²A relação $z^{(i+1)} = z^{(i)}$ foi adicionada para completar o sistema linear de equações.

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - y^{(i)} + z^{(i)}, \quad (2.20)$$

$$y^{(i+1)} = -x^{(i)} + 2y^{(i)} - z^{(i)}, \quad (2.21)$$

$$z^{(i+1)} = z^{(i)}, \quad (2.22)$$

onde

$$x \equiv \ln r, \quad (2.23)$$

$$y \equiv \ln s, \quad (2.24)$$

$$z \equiv \ln \alpha_1. \quad (2.25)$$

A evolução dos parâmetros ao longo dos processos de renormalização é regida pela matriz $\mathbf{P}_{\text{Fib}}$ definida por

$$\begin{pmatrix} x^{(i+1)} \\ y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\text{Fib}} \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \\ z^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Como consequência,

$$\begin{pmatrix} x^{(i+1)} \\ y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\text{Fib}}^i \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Os autovalores da matriz $\mathbf{P}_{\text{Fib}}$ são $1 + \phi$, $2 - \phi$ e 1 e os autovetores são

$$|1 + \phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 - \phi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2 - \phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

onde empregamos a notação |autovalor> e $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Escrevendo o vetor inicial como uma combinação linear dos autovetores de $\mathbf{P}_{\text{Fib}}$, teremos³

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix} = a |1 + \phi\rangle + b |2 - \phi\rangle + c |1\rangle. \quad (2.29)$$

³Os autovetores formam um conjunto linearmente independente.

Invertendo a equação anterior, obtemos os coeficientes em termos dos parâmetros iniciais,

$$a = \frac{x_1 - \phi(y_1 - z_1)}{1 - 2\phi}, \quad (2.30)$$

$$b = y_1 - z_1 - \frac{x_1 - \phi(y_1 + z_1)}{1 - 2\phi}, \quad (2.31)$$

$$c = z_1. \quad (2.32)$$

Usando as equações (2.29) e (2.27) podemos determinar os parâmetros em função do número de renormalizações realizadas, desde que as condições de auto-similaridade sejam respeitadas.

Podemos considerar, por exemplo, a evolução do parâmetro $x^{(i)}$,

$$x^{(i+1)} = a(\phi - 1)(1 + \phi)^i - b\phi(2 - \phi)^i. \quad (2.33)$$

Fazendo uma análise cuidadosa dos termos da equação anterior, observamos a competição entre os termos $a(\phi - 1)(1 + \phi)^i$ e $-b\phi(2 - \phi)^i$. Inicialmente, o segundo termo (negativo) é dominante para a suficientemente pequeno; entretanto, observaremos que existe um dado i finito para o qual isso não ocorre e o primeiro termo passa a dominar. No caso em que $a \leq 0$ teremos

$$x^{(i+1)} \geq 0. \quad (2.34)$$

Desta forma, teremos uma quebra de auto-similaridade correspondendo a

$$\frac{\mu^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}} \geq 1. \quad (2.35)$$

Da mesma forma, para $a \geq 0$, uma análise similar de $y^{(i+1)}$ mostra que teremos uma quebra de outra condição de auto-similaridade,

$$y^{(i+1)} \geq 0. \quad (2.36)$$

Existe um conjunto de parâmetros iniciais⁴ onde não ocorre quebra para i finito. No ponto de quebra de auto-similaridade, $x^{(i+1)} = 0$, usamos a equação (2.33) com $i \gg 1$ para obter

$$\frac{a}{b} = \frac{\phi}{\phi - 1} \left(\frac{2 - \phi}{1 + \phi} \right)^i. \quad (2.37)$$

⁴Note que a , b e c são funções dos parâmetros do operador original λ_A , λ_B e μ .

Isso indica que os parâmetros que mantêm a auto-similaridade do procedimento de renormalização, para i finito, são aqueles em que $a = 0$. Assim, aplicando a equação (2.30), temos a relação

$$\mu_c = \alpha_1^{\frac{1}{1+\phi}} \lambda_A^{\frac{\phi}{1+\phi}} \lambda_B^{\frac{1}{1+\phi}}. \quad (2.38)$$

No modelo de Ising com campo transversal⁵ o ponto de auto-similaridade corresponde exatamente ao ponto crítico da transição quântica a temperatura zero⁶.

Outra questão importante sobre o tratamento do GRDF para a sequência de Fibonacci é se ele é assintoticamente exato nas proximidades do ponto crítico. Como salientado no início desta seção, os métodos de aproximação empregados para determinar as relações de recorrência são exatos para $\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = -\infty$ onde $x^{(i)} = \ln \frac{\mu^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}}$.

Usando a equação (2.33) e considerando que no ponto crítico teremos $a = 0$, $b < 0$ para $\alpha_1 \geq 1$ e $0 < 2 - \phi < 1$, o limite de $x^{(i)}$ para $i \rightarrow \infty$ é dado por

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = 0. \quad (2.39)$$

Fica claro que o procedimento de GRDF não é assintoticamente exato no ponto crítico. Nas proximidades do ponto crítico o procedimento de renormalização também não é assintoticamente exato, o que pode ser visto diretamente se analisarmos a equação de recorrência (2.14),

$$\frac{\mu^{(i+1)}}{\lambda_B^{(i+1)}} = \alpha_1 \frac{\mu^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}} \frac{\mu^{(i)}}{\lambda_A^{(i)}}, \quad (2.40)$$

pois as condições de auto-similaridade requerem $\mu^{(i)}/\lambda_A^{(i)} > 1$. Então, a razão $\mu^{(i)}/\lambda_B^{(i)}$ deve ser sempre maior que a anterior, até que as condições de autossimilaridade deixam de valer⁷.

Concluimos que o GRDF não é assintoticamente exato. Como comentado anteriormente na seção 2.1, esta propriedade está relacionada com o caráter irrelevante da sequência de Fibonacci. O quadro geral será completado adiante incluindo sequências marginais e relevantes.

Embora o GRDF para a sequência de Fibonacci não seja assintoticamente exato, ele nos leva ao ponto crítico correto [21], dado pela equação (2.38) para $\alpha_1 = 1$, do modelo de Ising com campo transversal.

⁵ $\alpha_1 = 1$.

⁶No capítulo 3 retomaremos esta questão, onde tentaremos identificar o ponto crítico do processo de contato aperiódico usando simulações de Monte Carlo.

⁷A razão $\mu^{(i)}/\lambda_A^{(i)}$ deve ser maior que um por uma quantidade finita

Mapa dos comprimentos de ligações

Além da evolução dos parâmetros com o número de processos de renormalização, podemos estudar o comportamento do tamanho das ligações efetivas, definido pelo número de ligações do Hamiltoniano original que separa dois sítios conectados por uma ligação efetiva. O processo de renormalização indicado na figura (2.1) é suficiente para determinarmos os tamanhos das ligações $l_A^{(i+1)}$ e $l_B^{(i+1)}$,

$$\begin{pmatrix} l_A^{(i+1)} \\ l_B^{(i+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{\text{fib}} \begin{pmatrix} l_A^{(i)} \\ l_B^{(i)} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

onde

$$\mathbf{S}_{\text{fib}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

O tamanho das ligações em função do número de renormalizações é governado pelo maior autovalor do operador $\mathbf{S}_{\text{fib}}$,

$$l_B^{(i+1)} \sim (\phi + 1)^i. \quad (2.43)$$

Podemos mostrar, usando as relações de recorrência (2.14), que $\ln \lambda_B^{(i)} \sim (1 + \phi)^i$ nas vizinhanças do ponto de auto-similaridade e $\ln \lambda_B^{(i)} \sim (2 - \phi)^i$ exatamente nesse ponto. Com ajuda da equação (2.43), obtemos a seguinte relação de escala nas proximidades do ponto de auto-similaridade,

$$\ln \lambda_B^{(i)} \sim l_B^{(i)}. \quad (2.44)$$

No ponto fixo de desordem forte podemos fazer uma correspondência entre $\lambda_B^{(i)}$ e $l_B^{(i)}$ com o comprimentos de correlação temporal e espacial. A mesma relação não pode ser feita para sequências irrelevantes, que não apresentam ponto fixo de desordem forte, como a de Fibonacci⁸.

2.1.2 Duplicação de Período

A exemplo do tratamento da sequência de Fibonacci, vamos procurar as condições para as quais a sequência de duplicação de período, DP, apresenta um regime auto-similar quando passa pelo processo de renormalização.

Observamos na figura (2.2a) uma rede onde as ligações entre primeiros vizinhos são moduladas pela sequência DP. Estabelecemos, inicialmente, as seguin-

⁸A continuação desta discussão encontra-se na seção 2.2.2.

tes desigualdades entre os parâmetros microscópicos,

$$\lambda_B > \mu, \quad (2.45)$$

$$\mu > \lambda_A. \quad (2.46)$$

Seguindo o procedimento de renormalização, vamos dizimar as estruturas com ligações do tipo λ_B e substituí-las por sítios sujeitos a um campo efetivo,

$$\tilde{\mu} = \alpha_1 \frac{\mu^2}{\lambda_B}. \quad (2.47)$$

O produto desta primeira renormalização é representado na figura (2.2b). Surge então a desigualdade

$$\tilde{\mu} < \lambda_B, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\mu} < \mu,$$

resultado da mesma argumentação usada para a sequência de Fibonacci na equação (2.4).

Segundo a desigualdade (2.46), a próxima renormalização consistirá em dizimar os sítios sujeitos ao campo μ .

Na figura (2.2b) os sítios sob ação do parâmetro μ se distribuem em pares. Desta forma, o método de aproximação deve tratar a estrutura que contém esse par de sítios. Como visto no capítulo 1, o valor da interação efetiva decorrente da dizimação de um par de sítios com campos fortes⁹ é dado por

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_A^3}{\mu^2}. \quad (2.49)$$

A rede resultante, figura (2.2c), não é modulada pela sequência DP, mas pela sequência definida pela regra de substituição $A \rightarrow ABB, B \rightarrow A$. Esta nova modulação é autossimilar, como observamos, após as renormalizações mostradas nas figuras (2.2e) e (2.2f).

Os processos de renormalização iniciais mostrados nas figuras (2.2a) e (2.2b) são um transiente para a modulação autossimilar. Os parâmetros iniciais da nova modulação são definidos a partir dos parâmetros originais da sequência DP usando as equações (2.47) e (2.49),

⁹ “Fortes”: possuem valores maiores que outros parâmetros da estrutura.

$$\lambda_B^{(1)} = \lambda_A, \quad (2.50)$$

$$\mu^{(1)} = \alpha_1 \frac{\mu^2}{\lambda_B}, \quad (2.51)$$

$$\lambda_A^{(1)} = \frac{\lambda_A^3}{\mu^2}, \quad (2.52)$$

onde α_1 é definido pela equação (1.70).

No terceiro processo de renormalização, vamos escolher novamente $\lambda_A > \tilde{\mu}$. Então, na figura (2.1.2a), as ligações fortes serão dadas por λ_A . Os processos de renormalização adicionais mostrados nas figuras (2.1.2e) e (2.1.2f) levam às relações de recorrência

$$\lambda_B^{(i+1)} = \lambda_A^{(i)}, \quad (2.53)$$

$$\mu^{(i+1)} = \alpha_2 \frac{\mu^{(i)3}}{\lambda_B^{(i)2}}, \quad (2.54)$$

$$\lambda_A^{(i+1)} = \frac{\lambda_A^{(i)3}}{\mu^{(i)2}}, \quad (2.55)$$

onde o prefator α_2 é resultado da renormalização de uma estrutura com duas ligações fortes.

Figura 2.2: Quatro processos de renormalização da sequência de duplicação de período. As figuras (a), (b) e (c) representam as duas primeiras renormalizações. No processo de renormalização indicado por (a) e (b), substituímos estruturas do tipo “ $\mu\lambda_B\mu$ ” por “ $\tilde{\mu}$ ”. Nos processos (b) e (c), substituímos “ $\mu\lambda_A\mu\lambda_A\mu$ ” por “ $\tilde{\lambda}$ ”. Em (d) temos a representação da sequência resultante; os símbolos foram substituídos pela notação inicial seguindo o critério de magnitude e o tamanho das ligações foi reescalado. Em (e) e (f) são mostrados outros dois processos de renormalização; ao término destes, temos a rede (f) com a mesma modulação da apresentada em (d). Os parâmetros λ_B, λ_A e $\tilde{\lambda}$ são representados, respectivamente, pelas linha cheias, tracejadas e pontilhadas; μ é representado por círculos cheios e $\tilde{\mu}$ por vazios.

Mapa dos parâmetros microscópicos: duplicação de período

Vamos acompanhar a evolução das razões $r^{(i)} = \mu^{(i)}/\lambda_B^{(i)}$ e $s^{(i)} = \lambda_A^{(i)}/\mu^{(i)}$ com o número de renormalizações i . Com esse objetivo, usando as equações (2.53), (2.55) e (2.54) obtemos

$$r^{(i+1)} = \alpha_2 \frac{r^{(i)^2}}{s^{(i)}}, \quad (2.56)$$

$$s^{(i+1)} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{s^{(i)^3}}{r^{(i)^2}}. \quad (2.57)$$

Tomando o logaritmo das equações acima e usando as notações $x \equiv \ln r$, $y \equiv \ln s$ e $z \equiv \ln \alpha_2$, obteremos o mapa linear

$$\begin{pmatrix} x^{(i+1)} \\ y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\text{DP}}^i \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

onde

$$\mathbf{P}_{\text{DP}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Os autovalores são 4,1 e autovetores da matriz $\mathbf{P}_{\text{DP}}$ são

$$|4\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Os vetores descritos acima não formam uma base para o espaço de parâmetros, impossibilitando escrever um vetor dos parâmetros x , y e z como uma combinação linear dos autovetores do operador $\mathbf{P}_{\text{DP}}$. Devido a este empecilho, devemos fazer uma pequena modificação em relação ao tratamento realizado para a sequência de Fibonacci.

Embora os autovetores (2.60) não formem uma base do espaço de parâmetros, podemos escrever o subespaço onde $z^{(i)} = z^{(1)} \forall i$ da forma

$$\begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \\ z^{(i)} \end{pmatrix} = a |4\rangle + b |1\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Estamos interessados neste subespaço uma vez que $z^{(i)} = \ln \alpha_2$ é uma constante.

Aplicando o operador $\mathbf{P}_{\text{DP}}$ sobre o terceiro termo da equação (2.61), obtemos

$$\mathbf{P}_{\text{DP}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^{(1)} \end{pmatrix} = z^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Por consequência,

$$\mathbf{P}_{\text{DP}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^{(1)} \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} |4\rangle + \frac{1}{3} |1\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Usando este resultado e as equações (2.58) e (2.61), chegamos à equação

$$\begin{pmatrix} x^{(i+1)} \\ y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = \left[a - \frac{4}{9} z^{(1)} (1 - 4^{-i}) \right] 4^i |4\rangle + \left(b + \frac{i}{3} z^{(1)} \right) |1\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Os coeficientes são dados pela equação (2.61),

$$a = \frac{2}{3} (y^{(1)} - x^{(1)}), \quad (2.65)$$

$$b = \frac{1}{3} (y^{(1)} + 2x^{(1)}). \quad (2.66)$$

Especificamente no caso do modelo de Ising com campo transversal, $\alpha_1 = 1$ e por consequência $z^{(1)} = 0$, o ponto crítico para a sequência DP pode ser obtido seguindo o mesmo procedimento usado para a sequência de Fibonacci.

A condição de quebra de autossimilaridade é $x^{(i)} = 0$. Para que a quebra não aconteça para i finito devemos ter

$$a = 0, \quad (2.67)$$

ou ainda, usando a equação (2.65),

$$\frac{\lambda_A^{(1)} \lambda_B^{(1)}}{\mu^{(1)2}} = 1. \quad (2.68)$$

Com as equações (2.50-2.52) identificamos o ponto de autossimilaridade em termos dos parâmetros microscópicos iniciais,

$$\lambda_A^2 \lambda_B = \mu^3. \quad (2.69)$$

Vale a pena notar que este é o resultado exato para o ponto crítico do modelo de Ising com campo transversal.

No ponto crítico, as razões $r^{(i)} = \mu^{(i)}/\lambda_B^{(i)}$ e $s^{(i)} = \lambda_A^{(i)}/\mu^{(i)}$ podem ser escritas em termos da razão $\rho^{(i)} \equiv \frac{\lambda_A^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}}$. Usando a equação (2.65), temos

$$r^{(i+1)} = \rho^{(i)\frac{1}{2}} \quad (2.70)$$

$$s^{(i+1)} = \rho^{(i)\frac{1}{2}}. \quad (2.71)$$

A razão $\rho^{(i)}$ pode também ser obtida. Bastando lembrar que $s^{(i)}r^{(i)} = \rho^{(i)}$, no ponto crítico teremos

$$\rho^{(i+1)} = \rho^{(i)}. \quad (2.72)$$

Este resultado é intermediário sob o ponto de vista da convergência do método de aproximação. No caso irrelevante, $r^{(i)} \rightarrow 1$, implicando aproximações ruins a cada renormalização. No caso relevante, veremos que $r^{(i)} \rightarrow 0$, fazendo com que o GRDF seja assintoticamente exato. No caso marginal, a exatidão do procedimento de renormalização depende da razão inicial ρ ; este comportamento está associado aos expoentes não universais observados em cadeias quânticas de spin com aperiodicidade marginal [21].

A equação (2.64) representa um cenário mais complicado para o processo de contato; neste caso $z^{(1)} > 0$. As condições de autossimilaridade $x^{(i)} < 0$ e $y^{(i)} < 0$ são satisfeitas simultaneamente somente se o termo entre colchetes for zero¹⁰. Entretanto, embora b seja negativo, o segundo termo será necessariamente positivo para i suficientemente grande, e desta forma teremos uma quebra de autossimilaridade.

Com esta argumentação, podemos concluir que o processo de contato modulado pela sequência de duplicação de período não possui um ponto de autossimilaridade nos moldes em que implementamos o GRDF. Podemos imaginar que é possível identificar um ponto de autossimilaridade se adicionarmos termos de ordens superiores obtidos de métodos perturbativos, ou ainda, se calcularmos numericamente os parâmetros microscópicos efetivos em cada processo de renormalização.

2.2 GRDF para sequências Relevantes

Vamos utilizar o procedimento de renormalização, introduzido na seção anterior, para estudar os efeitos de aperiodicidade relevante. A sequência de triplicação de

¹⁰O primeiro termo de (2.64) dominará o mapeamento para i suficientemente grande se $a \neq 0$. Note que os sinais dos elementos do autovetor $|4\rangle$ não são compatíveis com as duas condições de autossimilaridade.

período (TP) é um exemplo de modulação relevante segundo o critério de Harris-Luck [33]. O expoente de flutuação, $\omega = \ln 2 / \ln 3$, confirma esta propriedade da sequência.

2.2.1 Sequência de Triplicação de Período

A sequência TP é construída a partir das regras de substituição,

$$A \rightarrow ABB, \quad (2.73)$$

$$B \rightarrow AAA. \quad (2.74)$$

A exemplo das sequências estudadas até aqui, vamos imaginar uma rede, com condições periódicas de contorno, em que os acoplamentos entre os sítios λ_A e λ_B são modulados pela sequência TP, sendo os termos de um sítio μ constantes. Na figura (2.3a) representamos esta estrutura.

Figura 2.3: Três primeiros processos de renormalização aplicados à sequência TP. As linha cheias representam ligações λ_B , linhas tracejadas correspondem a λ_A e pontilhadas a $\tilde{\lambda}$. Os círculos cheios representam o parâmetro microscópico μ e os vazios $\tilde{\mu}$. O processo de renormalização de (a) para (b) consiste na substituição das estruturas formadas por duas ligações do tipo λ_B por $\tilde{\mu}$; na renormalização de (b) para (c) substituímos seis sítios sob a ação da taxa de cura μ por $\tilde{\lambda}$. A sequência renormalizada representada em (c) é modulada pela sequência definida pela regra de substituição (2.77). Os tamanhos das ligações mostrados em (c) foram reduzidos a uma unidade.

Para identificar o regime autossimilar do operador de evolução, seguiremos os mesmos passos realizados nas seções anteriores. Procuramos um ponto fixo partindo da seguinte relação entre os parâmetros microscópicos,

$$\lambda_B > \mu > \lambda_A. \quad (2.75)$$

Os dois primeiros procedimentos de renormalização consistem na dizimação dos pares de ligações λ_B e, em seguida, a dizimação de 6 sítios vizinhos sujeitos ao campo μ . Essas operações estão representadas nas figuras (2.3b) e (2.3c). A sequência obtida após este processo se repetirá a cada 2 processos de renormalização caso seja respeitada a condição de autossimilaridade,

$$\lambda_B^{(i)} > \mu^{(i)} > \lambda_A^{(i)}, \quad (2.76)$$

onde i representa, novamente, o número de pares de procedimentos do GRDF. Este procedimento é exatamente o mesmo empregado nas sequências de Fibonacci e duplicação de período. A sequência autossimilar resultante do processo de renormalização, representada na figura (2.3c), pode ser construída a partir da regra de substituição

$$\begin{aligned} A &\rightarrow ABBBBBB, \\ B &\rightarrow A. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Mapa dos parâmetros microscópicos

As relações de recorrência entre os parâmetros microscópicos são dadas por

$$\lambda_B^{(i+1)} = \lambda_A^{(i)}, \quad (2.78)$$

$$\mu^{(i+1)} = \alpha_6 \frac{\mu^{(i)7}}{\lambda_B^{(i)6}}, \quad (2.79)$$

$$\lambda_A^{(i+1)} = \frac{\lambda_A^{(i)7}}{\mu^{(i)6}}. \quad (2.80)$$

Definindo $r^{(i)} = \frac{\mu^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}}$ e $s^{(i)} = \frac{\lambda_A^{(i)}}{\mu^{(i)}}$, obtemos

$$r^{(i+1)} = \alpha_6 \frac{r^{(i)6}}{s^{(i)}}, \quad (2.81)$$

$$s^{(i+1)} = \frac{1}{\alpha_6} \frac{s^{(i)7}}{r^{(i)6}}. \quad (2.82)$$

A evolução dos parâmetros microscópicos, respeitadas as condições de au-

tossimilaridade (2.76), é governada pelo mapa linear

$$\begin{pmatrix} x^{(i+1)} \\ y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\text{TP}} \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \\ z^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

onde

$$\mathbf{P}_{\text{TP}} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -6 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

com $x \equiv \ln r$, $y \equiv \ln s$ e $z \equiv \ln \alpha_6$.

A matriz $\mathbf{P}_{\text{TP}}$ possui 3 autovalores reais. Seus respectivos autovetores formam um conjunto linearmente independente,

$$|9\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |4\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{5}{24} \\ -\frac{1}{24} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Escrevendo a condição inicial $(x^{(1)}, y^{(1)} \text{ e } z^{(1)})$, em termos dos autovetores da matriz P_{TP} ,

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix} = c|1\rangle + b|4\rangle + a|9\rangle, \quad (2.86)$$

é possível determinar o valor dos parâmetros microscópicos após i iterações do grupo de renormalização. Usando as equações (2.86) e (2.83), teremos

$$\begin{pmatrix} x^{(i+1)} \\ y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = c|1\rangle + 4^i b|4\rangle + 9^i a|9\rangle. \quad (2.87)$$

A relação (2.87) indica que parâmetros microscópicos escalam geometricamente com o número de processos de renormalização. No caso específico de $a = 0$, que trataremos a seguir, teremos uma dependência com o segundo maior autovalor

$$\lambda_B \sim 4^i. \quad (2.88)$$

Vamos identificar a condição inicial que mantém o esquema de renormalização autossimilar. Se procedermos iterativamente, dada uma condição inicial, encontraremos após i iterações uma violação das condições de autossimila-

ridade¹¹. Este número de iterações i será maior quanto for maior a proximidade ao ponto de autossimilaridade.

A condição de autossimilaridade, dada pela equação (2.76), pode ser reescrita em termos de $x^{(i)}$ e $y^{(i)}$,

$$x^{(i)} < 0, \quad (2.89)$$

$$y^{(i)} < 0. \quad (2.90)$$

O esquema de renormalização falha quando, por exemplo,

$$x^{(i)} = \ln \frac{\mu^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}} = 0. \quad (2.91)$$

Usando a equação (2.87), podemos determinar quantas renormalizações são necessárias para que a inequação (2.89) deixe de ser satisfeita,

$$-\frac{5}{24}c + \frac{1}{2}4^{i-1}b - \frac{1}{3}9^{i-1}a = 0. \quad (2.92)$$

Suficientemente próximo do ponto de autossimilaridade, a equação será satisfeita para $i \gg 1$ tal que¹²,

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{4}{9}\right)^i. \quad (2.93)$$

Exatamente no ponto de autossimilaridade, a equação (2.93) não deve ser satisfeita para i finito, indicando que o ponto de autossimilaridade é dado por

$$a = 0. \quad (2.94)$$

Em termos da condição inicial e invertendo a equação (2.86), temos

$$y^{(1)} - 2x^{(1)} - \frac{3}{8}z^{(1)} = 0 \quad (2.95)$$

ou, ainda,

$$\frac{\lambda_A^{(1)} \lambda_B^{(1)2}}{\mu^{(1)3}} = \alpha_6^{\frac{3}{8}}. \quad (2.96)$$

Considerando os parâmetros originais

¹¹Apresentada na equação (2.76).

¹²O limite $i \gg 1$ deve ser tomado com cuidado. No ponto em que estamos interessados, $a = 0$, primeiramente tomamos o limite $i \gg 1$.

$$\lambda_B^{(1)} = \lambda_A, \quad (2.97)$$

$$\mu^{(1)} = \alpha_2 \frac{\mu^3}{\lambda_B^2}, \quad (2.98)$$

$$\lambda_A^{(1)} = \frac{\lambda_A^7}{\mu^6}, \quad (2.99)$$

o ponto de autossimilaridade é dado por

$$\frac{\lambda_A^3 \lambda_B^2}{\mu^5} = \alpha_2 \alpha_6^{\frac{1}{8}}. \quad (2.100)$$

Segundo a equação (2.87), o comportamento dos parâmetros $x^{(i)}$ e $y^{(i)}$, no ponto de autossimilaridade $a = 0$, é governado pelo segundo maior autovalor. O comportamento assintótico é caracterizado pelo sinal do coeficiente b que pode ser obtido observando a equação (2.86),

$$b = y^{(1)} + \frac{z^{(1)}}{24} - a, \quad (2.101)$$

onde $z^{(1)} < 0$ e $y^{(1)} < 0$.

O coeficiente b será negativo no ponto crítico, $a = 0$, e nas suas proximidades, $a \simeq 0$. Isso indica que, no limite assintótico de $x^{(i)}$ e $y^{(i)}$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = -\infty, \quad (2.102)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y^{(i)} = -\infty, \quad (2.103)$$

ou, ainda, segundo a definição dos parâmetros $x^{(i)}$ e $y^{(i)}$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu^{(i)}}{\lambda_B^{(i)}} = 0, \quad (2.104)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda_A^{(i)}}{\mu^{(i)}} = 0. \quad (2.105)$$

Este comportamento assintótico reflete o fluxo dos parâmetros do GRDF no Ponto Fixo de Desordem Forte da sequência relevante TP.

Mapa dos comprimentos de ligações

A evolução do comprimento das ligações pode ser determinada observando os processos de renormalização descritos pela sequência autossimilar (2.77). No regime autosimilar as duas dizimações levam à seguinte relação entre o tamanho

das ligações l_A , l_B e o número de processos de renormalização do GRDF,

$$\begin{pmatrix} l_A^{(i+1)} \\ l_B^{(i+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{\text{tp}} \begin{pmatrix} l_A^{(i)} \\ l_B^{(i)} \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

onde

$$\mathbf{S}_{\text{tp}} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

É fácil ver, observando o mapeamento linear dado pela equação (2.107), que o tamanho das ligações cresce como uma potência do maior autovalor de $\mathbf{S}_{\text{tp}}$,

$$l_B^{(i+1)} \sim 9^i. \quad (2.108)$$

O tamanho das ligações e o valor do parâmetro forte $\lambda_B^{(i)}$, dado por (2.88) obedecem à seguinte relação no ponto de autossimilaridade,

$$\ln \lambda_B \sim l_B^{\frac{\ln 4}{\ln 9}}. \quad (2.109)$$

2.2.2 Leis de escalas no ponto fixo de desordem forte

O ponto fixo de desordem forte é caracterizado pelo limite assintótico em que as razões entre os acoplamentos fraco e forte tendem a zero. Este comportamento foi observado no mapeamento dos parâmetros microscópicos introduzido pelo GRDF para sequências relevantes.

Como discutido no Capítulo 1, não só os cálculos de aproximação do GRDF se tornam exatos no ponto fixo de desordem forte, como também as redes dizi-madas são uma representação de operadores de evolução que descrevem aproximadamente os menores autovalores do operador de evolução original. Esta descrição dos menores autovalores do operador de evolução é exata no limite de baixas temperaturas no modelo de Ising quântico e no limite estacionário para o processo de contato.

É possível obter as grandezas médias¹³ diretamente dos operadores de evolução resultantes do processo de renormalização, os quais são representados pelas redes autossimilares da sequência estudada. Para o processo de contato, temos após a i -ésima aplicação do processo de renormalização,

$$\mathcal{S}^{(i)} = \sum_j \lambda_{j-1}^{(i)} Q_j N_{j-1} + \lambda_j^{(i)} Q_i N_{j+1} + \mu^{(i)} M_j. \quad (2.110)$$

No caso da sequência TP, λ_{j-1} assume dois valores, $\lambda_A^{(i)}$ e $\lambda_B^{(i)}$, modulados

¹³Grandezas termodinâmicas no caso do modelo de Ising quântico.

pela sequência auto-similar (2.77).

O operador $\mathcal{S}^{(i)}$ pode ser estudado com aproximações como, por exemplo, desconsiderar as ligações fracas, $\lambda_A^{(i)} = 0$, no limite $i \rightarrow \infty$. Neste caso, o problema seria reduzido ao cálculo das propriedades de estruturas de sete sítios ligados por taxas de infecção fortes $\lambda_B^{(i)}$, e cada uma dessas estruturas seria independente, possibilitando cálculos exatos.

Parâmetro de ordem - Comportamento dinâmico

A densidade de sítios infectados,

$$\rho = \sum_j \langle \sigma_j \rangle , \quad (2.111)$$

é proporcional ao número e ao momento dos sítios resultantes do processo de renormalização.

É fácil ver que o momento dos sítios $\eta^{(i)}$ renormalizados no regime autossimilar dado pela regra de substituição (2.77) cresce geometricamente,

$$\eta^{(i)} \sim 7^i . \quad (2.112)$$

A densidade de sítios restantes após i processos de renormalização, $n^{(i)}$, é inversamente proporcional ao tamanho das ligações, ou seja,

$$n^{(i)} \sim 9^{-i} . \quad (2.113)$$

Desta forma, a densidade de sítios infectados em função de i é dada por

$$\rho^{(i)} \sim \left(\frac{7}{9} \right)^i . \quad (2.114)$$

O parâmetro de ordem do modelo de Ising quântico, ou seja, a magnetização na direção x dada por $m^{(i)}$, tem o mesmo comportamento,

$$m^{(i)} \sim \left(\frac{7}{9} \right)^i , \quad (2.115)$$

Analogamente, a magnetização é proporcional à densidade e ao momento magnético dos sítios resultantes após i processos de renormalização.

Como anteriormente discutido no capítulo 1, na seção 1.2.1, a solução formal em termos do operador de evolução do processo de contato é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-t\mathcal{S}} |\psi(0)\rangle . \quad (2.116)$$

Cada um dos 2^N autovalores dados por s_i corresponde a um tempo t_i , tal que o maior termo da função que descreve o sistema, $|\psi(t)\rangle$, está associado a este autovalor¹⁴. Ou seja,

$$|\psi(t_i)\rangle \approx e^{-t_i s_i} |\psi(0)\rangle, \quad (2.117)$$

onde $t_i s_i \approx 1$.

Por outro lado, o autovalor s_i está associado ao operador renormalizado $\mathcal{S}^{(i)}$ e, por consequência, ao maior parâmetro $\lambda_B^{(i)}$. Esta relação indica o tempo característico necessário para que a dinâmica, e por consequência as grandezas médias, seja dominada pelo operador renormalizado i vezes. Segundo essa análise podemos estabelecer a relação entre $\lambda_B^{(i)}$ e o tempo t ,

$$\lambda_B^{(i)} \sim \frac{1}{t_i}, \quad (2.118)$$

Sob o ponto de vista do operador de evolução original $\mathcal{S}$, para tempos da ordem do inverso de $\lambda_B^{(i)}$, observaremos que estruturas ligadas pela taxa de infecção forte compartilham o mesmo estado. Esse estado é representado na rede dizimada por um único sítio com o seu respectivo momento, quando na verdade ele representa uma estrutura autossimilar de sítios congelados no mesmo estado.

No caso do modelo de Ising quântico com campo transversal a descrição é idêntica. O maior parâmetro microscópico do Hamiltoniano de Ising está relacionado com a temperatura típica de ativação de estruturas similares às descritas para o processo de contato. Neste caso, os sítios ou estão congelados com projeção de spin na direção da interação de troca ou congelados em um estado na direção do campo transversal dependendo do seu sinal¹⁵.

Estabelecida a relação entre as grandezas mapeadas através do GRDF no ponto fixo de desordem forte e o tempo, podemos determinar o comportamento dinâmico do parâmetro de ordem.

Exatamente no ponto crítico o crescimento do parâmetro $\lambda_B^{(i)}$ está relacionado ao segundo maior autovalor da matriz que descreve o mapeamento do GRDF dado por (2.84)¹⁶.

Segundo essa argumentação, usando as equações (2.108), (2.109) e (2.114), o parâmetro de ordem em função do tempo deve obedecer à lei de escala

$$\rho \sim (\ln t)^{\frac{\ln \frac{7}{6}}{\ln 4}}. \quad (2.119)$$

¹⁴Note que os elementos do vetor condição inicial $|\psi(0)\rangle$ deve ser menor ou igual a um segundo a definição (1.27). Isto significa que a afirmação independe da condição inicial.

¹⁵Em nossa notação é representado por μ .

¹⁶Note o coeficiente $a = 0$ no ponto crítico

Esses resultados apontam para o expoente

$$\delta = \frac{\ln \frac{9}{7}}{\ln 4} \quad (2.120)$$

no ponto de autossimilaridade.

Em princípio, devemos observar nas proximidades do ponto crítico um *crossover* entre dois comportamentos: para tempos curtos, o sistema deve se comportar seguindo leis de escala ativadas como em (2.119); para tempos suficientemente longos, observaremos uma mudança para leis de escala normais, ou seja, decaimento exponencial das grandezas médias.

Parâmetro de Ordem - comportamento estacionário

O processo de renormalização discutido neste capítulo pode ser repetido indefinidamente desde que estejamos no ponto de auto-similaridade identificado como o ponto crítico do processo de contato que separa a fase ativa da absorvente ou então as fases ferromagnética e paramagnética.

Se iniciarmos o processo de dizimação fora deste ponto, observaremos que as condições para manter o esquema do GRDF falharão após um número finito de renormalizações.

Estudando o mapeamento (2.87) descrevemos o papel da competição entre os termos que englobam o maior e o segundo maior autovalor.

À medida em que nos aproximamos do ponto crítico, o número de processos de renormalização compatíveis com a condição de auto-similaridade aumenta. Se a distância ao ponto crítico é suficientemente pequena, nos aproximamos do ponto fixo de desordem forte,

$$x^{(i)} \rightarrow -\infty, \quad (2.121)$$

$$y^{(i)} \rightarrow -\infty, \quad (2.122)$$

de tal forma que o operador $\mathcal{S}^{(i)}$ se torna uma boa aproximação.

Representamos por λ^* o valor de λ_A que satisfaz a equação (2.96) e corresponde ao ponto crítico para a sequência TP.

Nas proximidades do ponto crítico, o parâmetro λ_A pode ser escrito em termos de uma pequena distância ϵ ao ponto crítico,

$$\lambda_A = \lambda^* + \epsilon. \quad (2.123)$$

Os coeficientes a e b do mapa (2.87) serão dados, respectivamente, por

$$a = \frac{27}{5} \ln \left[\frac{1}{\alpha_2^{\frac{1}{3}} \alpha_6^{\frac{1}{24}}} \frac{(\lambda^* + \epsilon) \lambda_B^{\frac{2}{3}}}{\mu^{\frac{5}{3}}} \right], \quad (2.124)$$

$$b = \frac{8}{5} \ln \left(\alpha_2^{\frac{1}{2}} \alpha_6^{\frac{1}{6}} \frac{\lambda^* + \epsilon}{\lambda_B} \right), \quad (2.125)$$

onde a e b são obtidos a partir da inversão da equação (2.86) e escritos em função dos parâmetros originais usando as equações (2.97-2.99).

Para $\epsilon \ll \lambda^*$, teremos

$$a \sim \epsilon, \quad (2.126)$$

$$b \sim 1. \quad (2.127)$$

O número de renormalizações i para o qual ocorre a quebra da auto-similaridade¹⁷ satisfaz a equação (2.93). Nas proximidades do ponto crítico, como indicado pela equação (2.123), teremos

$$\left(\frac{4}{9} \right)^i \sim \epsilon. \quad (2.128)$$

Na seção anterior estabelecemos uma relação, dada pela equação (2.114), entre o parâmetro de ordem e o número de procedimentos de renormalização realizados no ponto fixo de desordem forte. No limite de ϵ tendendo a zero, podemos relacionar o parâmetro de ordem à distância ao ponto crítico,

$$\rho \sim \epsilon^{\frac{\ln \frac{7}{9}}{\ln \frac{4}{9}}}. \quad (2.129)$$

O expoente crítico associado ao parâmetro de ordem como função da variável de controle ϵ que mede a distância ao ponto crítico é dado por

$$\beta = \frac{\ln \frac{7}{9}}{\ln \frac{4}{9}}, \quad (2.130)$$

que corresponde a $\beta \simeq 0.31$.

¹⁷Formalmente a quebra ocorre para um i próximo da solução da equação (2.93). Isso ocorre porque o número de renormalizações em questão deve ser o primeiro inteiro para o qual as condições de autossimilaridade são quebradas. Como estamos interessados somente em proporcionalidades para definir leis de escala não teremos nenhum prejuízo nesse pequeno excesso.

Funções de Correlação

Analogamente ao parâmetro de ordem, podemos extrair informações sobre as leis de escala que regem a função de correlação espacial de pares,

$$\Gamma(l) = \langle \sigma_i \sigma_{i+l} \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_{i+l} \rangle . \quad (2.131)$$

Tipicamente, teremos um decaimento exponencial da função de correlação de pares caracterizado pelo comprimento de correlação $\xi_\perp$,

$$\Gamma(l) \sim e^{-\frac{l}{\xi_\perp}} . \quad (2.132)$$

A função de correlação de pares de um operador $\mathcal{S}^{(i)}$, resultante de i iterações do GRDF, tem o decaimento caracterizado pelo tamanho dos aglomerados de ligações fortes. Sendo assim, o comprimento de correlação ξ deve ser proporcional ao tamanho da ligações $\lambda_B^{(i)}$,

$$\xi_\perp^{(i)} \sim l_B^{(i)} . \quad (2.133)$$

Esse comprimento foi previamente analisado para a sequência TP e, usando a equação (2.108), obtemos

$$\xi_\perp^{(i)} \sim 9^i . \quad (2.134)$$

O número de processos de renormalização pode ser associado à distância ao ponto crítico (2.128), de modo que a lei de escala para o comprimento de correlação associada ao expoente $\nu_\perp$ é dada por,

$$\xi_\perp \sim \epsilon^{-\nu_\perp} , \quad (2.135)$$

onde

$$\nu_\perp = \frac{\ln 9}{\ln \frac{9}{4}} . \quad (2.136)$$

Podemos estudar também a função de auto-correlação, que possui um decaimento exponencial caracterizado pelo tempo de correlação $\xi_\parallel$. O tempo de correlação deve ser proporcional à escala de tempo característica. Essa escala pode ser determinada estudando o comportamento da solução formal da equação de evolução relativa ao operador $\mathcal{S}^{(i)}$ após i processos de renormalização,

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(\mathcal{S}^{(i)}t\right) |\psi(0)\rangle , \quad (2.137)$$

O decaimento da função de auto-correlação é caracterizado pela parte real do menor autovalor, que por sua vez é proporcional ao acoplamento $\lambda_B^{(i)}$. Assim

sendo, o tempo de correlação respeita a relação

$$\xi_{\parallel} \sim \frac{1}{\lambda_B^{(i)}}. \quad (2.138)$$

A relação entre $\xi_{\perp}$ e $\xi_{\parallel}$ define o expoente Φ ,

$$\ln \xi_{\parallel} \sim \xi_{\perp}^{\Phi}. \quad (2.139)$$

Para a sequência relevante TP, exatamente no ponto de autossimilaridade,

$$\Phi = \frac{\ln 4}{\ln 9} = 0.630\dots \quad (2.140)$$

Os resultados obtidos até aqui são consistentes com as relações esperadas para o comportamento crítico regido pelas leis de escalas ativadas que foram discutidas na introdução deste trabalho. A relação (1.17) entre os expoentes,

$$\delta = \frac{\beta}{\nu_{\perp} \Phi} \quad (2.141)$$

é satisfeita no ponto crítico.

Capítulo 3

Simulações

Neste trabalho optamos por introduzir a modulação aperiódica nas taxas de transição do processo de contato. Essa escolha é recorrente em trabalhos abordando o processo de contato desordenado [4, 11, 35, 44]. No caso de sequências de duas letras, a taxa de infecção entre dois sítios vizinhos pode assumir os valores λ_A e λ_B , sendo a taxa de cura fixada, $\mu = 1$.

A dinâmica do processo de contato é realizada em função dos sítios infectados: sorteamos um sítio infectado e, em seguida, sorteamos um processo da dinâmica:

- espera, com probabilidade, $P_e = 1 - \frac{\mu + \lambda_{i-1} + \lambda_i}{\mu + 2\lambda_B}$,
- cura, $P_c = \frac{\mu}{\mu + 2\lambda_B}$,
- infecção do sítio à esquerda, $P_{ie} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu + 2\lambda_B}$,
- infecção do sítio à direita, $P_{id} = \frac{\lambda_i}{\mu + 2\lambda_B}$.

Esta dinâmica é uma modificação da normalmente utilizada na literatura [18]. O processo de espera [11] permite que tenhamos todos os denominadores, responsáveis pela normalização das probabilidades de transição, constantes ao longo da rede. Ele deve ser incluído em dinâmicas com parâmetros não homogêneos para manter a proporcionalidade das taxas de transição nas probabilidades da transição, por exemplo,

$$\frac{P_c}{P_{ie}} = \frac{\mu}{\lambda_{i-1}}. \quad (3.1)$$

Assim, todas as razões entre as taxas de transição serão iguais às razões das probabilidades. Os expoentes críticos do processo de contato não são afetados pela existência da probabilidade de espera, entretanto, grandezas não universais

como a posição do ponto crítico são modificadas. A introdução dessa probabilidade é necessária para que possamos comparar grandezas não universais da dinâmica discreta de Monte Carlo e os resultados obtidos a partir da equação Mestra usando GRDF, conforme descrito no capítulo anterior.

Uma maneira de justificar o processo de espera consiste em considerar a probabilidade de cura. Desconsiderando o processo de espera,

$$P_c = \frac{\mu}{\mu + \lambda_{i-1} + \lambda_i}. \quad (3.2)$$

Neste caso introduzimos uma heterogeneidade explícita na dependência do termo de normalização com o a posição na rede i , esta dependência não inexistente na taxa de cura μ na equação Mestra, que pela nossa definição é constante em todos os pontos da rede.

O sorteio de um sítio é realizado considerando uma lista, atualizada a cada passo j da simulação, contendo os N_j sítios infectados. O tempo é medido em unidades de passos de Monte Carlo (PMC) e cada iteração corresponde a $1/N_j$ PMC. A série temporal será definida em um conjunto de tempos diferentes para cada realização, dependendo do número de sítios infectados a cada passo. Uma possível abordagem para tratar os diferentes valores de tempo é unir todas as séries temporais, organizá-las por ordem de tempo e agrupar os dados em conjuntos, com o número de realizações em elementos. Cada conjunto está associado a um único tempo, dado pela média dos tempos. Desta forma, além do erro estatístico na média da grandeza estudada, teremos um erro na atribuição do tempo.

Esse mecanismo de lista é muito útil para estudar o comportamento estacionário nas proximidades do ponto de transição entre a fase ativa e a absorvente, já que N_j vai a zero neste ponto, embora apresente a complicação, anteriormente mencionada, na medida do tempo. O uso de listas é importante, principalmente, quando estudamos sistemas com dinâmica lenta como é o caso do processo de contato aperiódico.

3.1 Comparações com resultados estabelecidos para o processo de contato uniforme

É instrutivo testar a técnica de listar os sítios infectados, bem como o conjunto de análises usados para investigar a criticalidade do modelo. O ponto crítico do modelo de contato uniforme com a taxa de cura fixada, $\mu = 1$, é dado por $\lambda_c \simeq 1.649$ [31].

Os expoentes críticos que definem a classe de universalidade de percolação

direcionada, à qual pertence o processo de contato, associados à densidade de sítios infectados e ao comprimento de correlação em função da distância ao ponto crítico $\lambda - \lambda_c$, foram obtidos com grande precisão por Jensen [30] usando expansões em séries,

$$\beta = 0.276486(8), \quad (3.3)$$

$$\nu_{\perp} = 1.096854(4). \quad (3.4)$$

Além desses, consideramos também o expoente da evolução temporal da densidade de sítios infectados no ponto crítico, $\delta \simeq 0.159$.

Como pode ser visto nas figuras (3.1) e (3.2), nossos resultados levam ao valor previsto da taxa de infecção no ponto crítico. Na figura (3.1), acompanhamos a densidade de sítios infectados em função do tempo. Nas proximidades de $\lambda = 1.65$, podemos observar a transição entre o estado estacionário ativo, com uma densidade não nula de sítios infectados e o absorvente, com densidade nula de sítios infectados.

Através da figura (3.2), é possível caracterizar o ponto crítico usando o expoente da dependência temporal de ρ . Tomando a potência da densidade de sítios infectados $\rho^{-1/\delta}$ em função do tempo, observaremos um comportamento linear associado ao decaimento algébrico no ponto crítico. Fora do ponto crítico, teremos um afastamento dos pontos em relação ao comportamento linear.

Figura 3.2: $\rho^{-1/\delta}$ em função do tempo. O expoente da dependência temporal de ρ é definido na literatura por $\delta = 0.159$. Os dados foram obtidos para uma rede com 6561 sítios, $\mu = 1$ e λ homogêneo.

Figura 3.1: Densidade de sítios infectados em função do tempo em uma rede com 6561 sítios: a taxa de infecção λ é constante ao longo da rede e a taxa de cura foi fixada $\mu = 1$. A linha sólida liga ponto a ponto cada dado da simulação. Alguns pontos apresentam os erros estatísticos do valor médio da densidade de sítios infectados (barras horizontais) e do tempo (barras verticais). Na escala apresentada

Figura 3.3: Logaritmo da densidade estacionária de sítios infectados em função do logaritmo da distância ao ponto crítico $\lambda^* - \lambda_A$. Os círculos representam os dados obtidos da simulação para o processo de contato homogêneo em uma rede de 6561 sítios, $\mu = 1$. A linha cheia é resultado de um ajuste não linear usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt.

O expoente crítico β pode ser obtido da densidade de sítios infectados em função do parâmetro de controle λ usando tempos longos o suficiente para que tenhamos uma boa aproximação do estado estacionário. Na figura (3.3), o ajuste dos dados é consistente com o expoente β da classe de universalidade de percolação direcionada, à qual pertence o processo de contato.

Os resultados obtidos nessa seção são suficientes para a caracterização dos expoentes críticos β e do ponto crítico λ_c do processo de contato homogêneo. Na próxima seção, vamos tentar usar essas mesmas técnicas para caracterizar o processo de contato aperiódico modulado pela sequência relevante de triplicação de período.

3.2 Comportamento crítico - Triplicação de Período

A sequência de triplicação de período é construída a partir das sucessivas iterações da regra de substituição $A \rightarrow ABB$ e $B \rightarrow AAA$. Escolhemos λ_A como parâmetro de controle e fixamos a razão $r = \lambda_A/\lambda_B$. Essa sequência possui expoente de flutuação ω dado por,

$$\omega_{tp} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \quad (3.5)$$

Segundo o critério de relevância de Harris-Luck, esta sequência é relevante pois apresenta expoente de flutuação $\omega_{tp} \simeq 0.63$ maior que $\omega_c \simeq 0.09$. O expoente de flutuação da sequência de triplicação de período é, inclusive, maior do que $\omega = 1/2$ característico de uma sequência aleatória¹.

Nesta seção, descrevemos uma série de resultados obtidos através de simulações Monte Carlo e os comparamos com os obtidos no capítulo 2 usando a técnica de Grupo de Renormalização para Desordem Forte (GRDF).

3.2.1 Comportamento dinâmico

O estudo da criticalidade do processo de contato modulado pela sequência de triplicação de período demanda simulações em intervalos de tempos longos, já que o comportamento dinâmico é governado, como observado na figura (3.4), por dinâmicas lentas.

¹O expoente de flutuação é dado por $\omega = 1/2$ para sequências aleatórias sem *memória*, i.e., a probabilidade da taxa de infecção ser dada por λ_A ou λ_B independe dos sorteios anteriores.

Figura 3.4: Evolução temporal da densidade de sítios infectados do processo de contato, com taxa de infecção modulada pela sequência de triplicação de período. A razão entre os dois valores de taxa de infecção $r = \lambda_A/\lambda_B$ é fixada, $r = 0.5$ e taxa de cura de todos os sítios é dada por $\mu = 1$. Os dados foram obtidos em redes com 177147 (3^{11}) sítios. As linhas cheias ligam os pontos da simulação e cada ponto é obtido tomando a média sobre 56 realizações da dinâmica. Alguns pontos são acompanhados por barras de erro verticais, erro estatístico de ρ , e horizontais, erro estatístico no tempo.

Para identificarmos o tipo de função que governa o decaimento do sistema, consideramos o logaritmo da densidade de sítios infectados em função do tempo. Na figura (3.5), observamos o comportamento típico de um decaimento exponencial governado pelo tempo de relaxação t_r ,

$$\rho \sim e^{-t/t_r}, \quad (3.6)$$

onde, tomando o logaritmo da densidade de sítios infectados, os coeficientes lineares das retas ajustadas são os valores aproximados de $1/t_r$.

O tempo de relaxação é o tempo característico para o qual a evolução da dinâmica torna-se independente da configuração inicial dos sítios do sistema. Assim sendo, ele pode também ser identificado com o comprimento de autocorrelação $\xi_{||}$.

No Capítulo 2, determinamos a relação entre os comprimento de correlação espacial $\xi_{\perp}$ e temporal $\xi_{||}$ nas proximidade do ponto crítico (equação (2.139)). Usando as equações (2.136) e (2.140) obtemos,

Figura 3.5: Logaritmo da densidade de sítios infectados em função do tempo para o processo de contato modulado pela sequência de triplicação de período em uma rede com 177147 sítios, $r = 0.5$. Os símbolos representam alguns pontos da simulação. As barras representam o erro estatístico das 56 realizações da dinâmica, sendo suprimidas quando menores que os símbolos. As linhas cheias são obtidas de ajustes da equação (3.6) linearizada. Os valores de cada tempo de relaxação são mostrados na legenda da figura. O intervalo usado para o ajuste linear é exatamente o compreendido por cada linha cheia.

$$\ln t_r \sim \epsilon^{-\nu_{\parallel}}, \quad (3.7)$$

onde o coeficiente de correlação temporal é dado por

$$\nu_{\parallel} = \ln 4 / \ln \frac{9}{4} = 1.709\dots \quad (3.8)$$

Este resultado é corroborado pela figura (3.6), onde apresentamos um ajuste do tempo de relaxação em função do parâmetro de controle λ_A numa região claramente abaixo do ponto crítico ($\lambda_A < \lambda^*$). O número de sítios usados parece ser suficiente para que o resultado seja independente do tamanho do sistema. O ajuste das curvas visto na figura (3.5), por outro lado, é sensível à região escolhida para realização do ajuste. Essa escolha foi realizada sem vícios relacionados ao resultado esperado para o expoente $\nu_{\parallel}$.

A escolha da região adequada para o ajuste depende de dois comportamentos

concorrentes: por um lado, o regime linear (exponencial na escala original) é alcançado assintoticamente para tempos longos; entretanto, para tempos muito longos teremos excesso de flutuação no tempo e, principalmente, na densidade de sítios infectados.

Outra fraqueza desta análise é o tempo de relaxação, tipicamente na ordem de 10^7 PMC, maior que o tempo transcorrido na própria simulação, da ordem de 10^6 PMC. Este aspecto não é relevante para pontos afastados do ponto crítico, pois estes têm decaimento exponencial, inclusive para tempos curtos. Entretanto, à medida que nos aproximamos da criticalidade, necessitamos de tempos mais longos para alcançar o decaimento puramente exponencial da densidade de sítios infectados. Próximo ao ponto crítico, e para tempos curtos, a evolução temporal de ρ deve ter características da crítica (logarítmica, $\rho \sim (\ln t)^{-\delta}$).

Mesmo com as dificuldades apontadas, o valor do expoente $\nu_{||} = 1.781$, obtido do ajuste mostrado na figura (3.6), está em excelente concordância com o valor esperado $\nu_{||} = 1.71$, obtido do Grupo de Renormalização de Desordem Forte (GRDF). O ponto crítico $\lambda^* = 1.366$ difere ligeiramente do valor indicado pelo GRDF, $\lambda^* = 1.1096$.

Cabe salientar que, embora como discutido no capítulo 2, o ponto crítico obtido pelo método de renormalização seja exato para o modelo de Ising quântico com campo transversal, ele não é necessariamente exato no caso do processo de contato.

Partindo de configurações em que a razão $r = \lambda_A/\lambda_B$ é mais próxima do ponto fixo de desordem forte ($r = 0$), esperamos uma aproximação entre o ponto crítico obtido através das simulações e o obtido do GRDF. Seguindo o mesmo procedimento adotado até aqui, observamos na figura (3.7), para $r = 0.1$, tempos de relaxação da ordem de 10^9 PMC. Infelizmente, estes tempos inviabilizam uma análise numérica consistente considerando a capacidade computacional disponível de na ordem de 10^7 PMC para o tamanho de rede estudado.

Podemos observar, na figura (3.7), que os tempos usados não são suficientes para caracterizarmos satisfatoriamente o decaimento exponencial, na região subcrítica ($\lambda_A < \lambda^*$) da densidade de sítios infectados.

3.2.2 Estado estacionário

Os tempos de relaxação longos (da ordem de 10^6 PMC para a razão $r = 0.5$) nas proximidades do ponto crítico, tendem a dificultar a obtenção de grandezas estacionárias. Por outro lado, a criticalidade do processo de contato homogêneo, $r = 1$, pode ser bem caracterizada, ainda que utilizando dados relativamente

Figura 3.6: Os círculos representam os valores numéricos de $(\ln t_r)^{\nu_{||}}$, obtidos nos ajustes mostrados na figura (3.5), em função da distância ao ponto crítico λ^* . O expoente $\nu_{||} = -1.781$ e a taxa de infecção crítica $\lambda^* = 1.366$ são obtidos do ajuste não linear (linha cheia), segundo a equação (3.7), dos dados mostrados no quadro interior. No quadro interior, mostramos o tempo de relaxação em função de λ_A , a linha cheia liga os pontos obtidos da simulação.

Figura 3.7: Logaritmo da densidade de sítios infectados em função do tempo, para o processo de contato com taxas de infecção moduladas pela sequência de triplicação de período, sendo $r = 0.1$ a razão entre as taxas λ_A e λ_B e $\mu = 1$. O tempo de relaxação para cada λ_A é obtido através do coeficiente linear dos ajustes mostrados pelas linhas cheias. A região considerada em cada ajuste é representada pela extensão das linhas cheias.

afastados do ponto crítico.

Tipicamente, podemos escrever sucessivas correções à lei de potência que descreve o comportamento crítico, por exemplo, da densidade de sítios infectados,

$$\rho = a\epsilon^\beta + b\epsilon^{\beta'} + c\epsilon^{\beta''} + \mathcal{O}(\epsilon^{\beta'''}), \quad (3.9)$$

onde $\epsilon = \lambda_A - \lambda^*$, $\beta' > \beta$, $\beta'' > \beta'$ e assim sucessivamente. No caso homogêneo, esses termos de correção são pequenos quando comparados à lei de escala crítica, $a\epsilon^\beta$, mesmo em regiões em que a distância relativa ao ponto crítico é dada por $\epsilon/\lambda^* \simeq 0.3$. Esse comportamento é compartilhado por sistemas não homogêneos, tanto para desordem [44] quanto aperiodicidade [14]. Logo, é possível imaginar que essa propriedade se estenda à sequência de triplicação de período. Sendo assim, podemos contornar o problema de tempos de relaxação muito longos considerando regiões suficientemente afastadas do ponto crítico.

Outra característica importante do comportamento crítico de sistemas aperiódicos é a existência de oscilações log-periódicas [2]. Neste caso, o termo de proporcionalidade do decaimento algébrico do parâmetro de ordem não é constante em termos da distância ϵ , mas oscilante,

$$\rho(\epsilon) = a(\ln \epsilon)\epsilon^\beta, \quad (3.10)$$

onde $a(\ln \epsilon)$ é uma função periódica em termos do seu argumento e, normalmente, composta por uma única frequência,

$$a(\ln \epsilon) = \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} \ln \epsilon + \phi\right), \quad (3.11)$$

em que a fase da oscilação é dada por ϕ e o período por τ .

Este fenômeno está intimamente ligado ao mecanismo de inflação determinado pela regra de substituição geradora da sequência aperiódica. No caso da sequência de triplicação de período, o crescimento, em função do número de aplicações da regra de substituição, é geométrico,

$$L \sim 3^n, \quad (3.12)$$

onde L é o tamanho da sequência e n é o número de iterações da regra de substituição.

Sob o ponto de vista da função de escala para a densidade de sítios infectados, em relação à distância ao ponto crítico ϵ , dada pela equação (1.10) e repetida aqui,

$$\rho(\epsilon) = b^{-\beta/\nu_\perp} \rho(b^{1/\nu_\perp} \epsilon), \quad (3.13)$$

o parâmetro de escala b é restrito a potências inteiras de 3,

$$b \in \{3, 9, 27, 81, \dots\} . \quad (3.14)$$

A solução da equação de escala (3.13) é uma lei de potência,

$$\rho(\epsilon) = A(\epsilon)\epsilon^\beta . \quad (3.15)$$

Substituindo a equação (3.15) em (3.13), obtemos

$$A(b^{1/\nu_\perp}\epsilon) = A(\epsilon) . \quad (3.16)$$

Seguindo a restrição em b , teremos como solução uma função periódica. A equação (3.11) é um exemplo de solução,

$$A(\epsilon) = C \left[I + \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} \ln \epsilon + \phi \right) \right] , \quad (3.17)$$

onde C e I são constantes e o período τ é dado por

$$\tau = \frac{\ln b}{\nu_\perp} . \quad (3.18)$$

Se, por um lado, as oscilações log-periódicas dificultam o ajuste das curvas obtidas nas simulações devido ao aumento do número de parâmetros da lei de escala crítica, por outro, a caracterização do período da oscilação permite obter, segundo a equação (3.18), o valor do expoente crítico do comprimento de correlação espacial.

Apresentamos, na figura (3.8), a densidade de sítios infectados em função do tempo para várias taxas de infecção que correspondem à fase ativa. Podemos notar na região próxima ao ponto crítico, $1.225 < \lambda_A < 1.265$, a substancial dependência do parâmetro de ordem com o tempo. Os tempos de relaxação longos não permitem, dentro do esforço computacional utilizado neste trabalho, a obtenção de estimativas coerentes para ρ estacionário para valores de λ_A menores que $\lambda_A < 1.225$.

Na figura (3.9), temos a densidade média de sítios infectados para cada área descrita na figura (3.8) em função do parâmetro de controle λ_A .

Tomamos como aproximação do estado estacionário a curva em que as médias foram realizadas na área 5 da figura (3.8). Podemos supor uma oscilação na

Figura 3.8: Densidade estacionária de sítios infectados em função do tempo para diversos valores de taxa de infecção λ_A . Os dados foram obtidos para a sequência TP com 177147 sítios e $r = 0.5$. As linhas indicam os pontos obtidos da simulação. Dividimos o gráfico em cinco áreas e as numeramos de um a cinco.

região próxima ao ponto crítico. As duas setas mostradas na figura (3.10) limitam o que parece ser um quarto de período de uma função log-periódica,

$$\tau \simeq 2.03, \quad (3.19)$$

o valor de λ^* utilizado foi o resultante do ajuste mostrado na figura (3.10). O suposto um quarto de período é compatível, segundo a equação (3.18) com oscilações de log-periódicas do quinto parâmetro de renormalização $b = 243$.

Quando comparamos essa assinatura com o comprimento de correlação espacial $\nu_\perp$, usando a equação (3.18), obtemos $\nu_\perp = 2.706$.

Os resultados de simulação descritos até aqui demonstram as dificuldades na caracterização do comportamento crítico do processo de contato sujeito a aperiodicidade relevante. Tempos de relaxação longos tornam a identificação do ponto crítico difícil e limitam a região onde podemos identificar grandezas médias no limite estacionário. Somado a esta dificuldade, o comportamento log-periódico introduz muitos parâmetros não universais que devem ser ajustados no intuito de caracterizar a lei de escala que governa as curvas obtidas das simulações.

Considerando estas questões, realizamos um ajuste da densidade estacionária

Figura 3.9: Densidade média de sítios infectados em função da taxa de infecção λ_A . Cada conjunto de círculos ligados representa uma média dentro de uma área apontada na figura (3.8). Os dados foram obtidos para a sequência TP com 177147 sítios e $r = 0.5$.

de sítios infectados em função do parâmetro λ_A , segundo uma lei de escala log-periódica,

$$\rho = I \left[C + \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} \ln (\lambda_A - \lambda^*) + \phi \right) \right] (\lambda_A - \lambda^*)^\beta, \quad (3.20)$$

com o resultado observado na figura (3.10). O ajuste dos pontos da simulação para uma função com 6 parâmetros, como na equação (3.20), deve ser considerado com cautela. O algoritmo de Levenberg-Marquardt possui vários pontos fixos quando usado para ajustar uma função não linear com muitos parâmetros. Então, procuramos realizar esse ajuste partindo dos valores obtidos no capítulo 2 para β e τ .

Os resultados de simulação Monte Carlo, discutidos neste capítulo, são consistentes com os resultados obtidos através do GRDF. Se analisarmos os resultados independentemente dos resultados previstos pelo GRDF, podemos fazer as seguintes afirmações:

- o processo de contato modulado pela sequência de triplicação de período apresenta tempos de relaxação extremamente longos,

Figura 3.10: Densidade de sítios infectados em função do tempo. A linha indica o ajuste dos dados, representados pelo círculos, para a equação (3.20). Os parâmetros obtidos no ajuste foram $I = 0.081$, $C = 1.21$, $\phi = 5.36$, $\tau = 2.03$, $\lambda^* = 1.2066$ e $\beta = 0.38$. Nesta escala os erros estatísticos dos dados são menores que os símbolos.

- esta sequência é responsável pelo surgimento de leis de escala log-periódicas,
- a sequência de triplicação é relevante, ou seja, a classe de universalidade do processo de contato modulado pela sequência não é a mesma do sistema homogêneo.

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho estudamos os efeitos de aperiodicidade no comportamento crítico do processo de contato e do modelo de Ising com campo transversal. Tratamos os dois modelos usando o grupo de renormalização de desordem forte introduzido por Ma, Dasgupta e Hu, implementando uma versão deste procedimento para desordem aperiódica. Consideramos aglomerados de ligações fortes e utilizamos métodos perturbativos para determinar os menores autovalores do Hamiltoniano do modelo de Ising com campo transversal e do operador de evolução do processo de contato.

Para o modelo de Ising, o método de aproximação consiste fisicamente em congelar os estados associados ao maior parâmetro de interação nas configurações de menor energia. No processo de contato, fixamos os estados na configuração com maior taxa de transição.

Um aspecto semelhante nestes modelos é que os estados congelados apresentam a mesma degenerescência. Quando o maior parâmetro está associado a uma interação de pares o estado congelado possui uma dupla degenerescência: no modelo de Ising a degenerescência corresponde aos sítios congelados, todos compartilhando projeções positiva ou negativa, na direção x ; para o processo de contato a degenerescência corresponde a todos os sítios simultaneamente sãos ou simultaneamente infectados. A degenerescência destes estados é quebrada por termos associados a parâmetros de interação fracos.

De acordo com o que foi discutido na introdução deste trabalho, os “gaps” associados à quebra de degenerescência são aproximados por interações de um sítio efetivo formado pelo conjunto de sítios congelados. A interação é dada pelo parâmetro efetivo

$$\tilde{\mu} = \alpha_n \frac{\mu^{n+1}}{\lambda_B^n}, \quad (4.1)$$

onde $\alpha_n = 1$ para o modelo de Ising com campo transversal e $\alpha_n = 2^n$ para o

processo de contato com um aglomerado de taxas de infecções fortes de tamanho n .

Quando o parâmetro forte refere-se a uma interação de um sítio temos um ou mais sítios congelados na direção oposta ao campo transversal na direção z do modelo de Ising ou, então, no estado s_0 do processo de contato. Nos dois modelos o estado congelado é não degenerado. Neste caso, a interação entre os dois sítios vizinhos aos congelados é dada por

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda^{n+1}}{\mu_B^n}, \quad (4.2)$$

onde n é o número de sítios sujeitos ao campo ou à taxa de cura forte.

Com a determinação dos parâmetros efetivos em função dos originais podemos estudar o procedimento de renormalização iterativo.

No capítulo 2, discutimos as condições para repetição do processo de renormalização no contexto das sequências aperiódicas de Fibonacci, duplicação de período e triplicação de período. Usando estas condições fomos capazes de identificar o ponto de autossimilaridade de cada sequência. O ponto de autossimilaridade é definido por um ponto fixo das sequências autossimilares obtidas no processo de renormalização de desordem forte. Este ponto corresponde, exatamente, ao ponto crítico do modelo de Ising com campo transversal. Observamos, usando os resultados de simulação para a sequência de triplicação de período, que o ponto de autossimilaridade $\lambda_A^* = 1.10957$ é próximo do ponto crítico $\lambda^* \simeq 1.203$, mas não exato como é o caso do modelo de Ising com campo transversal. Um ponto que deve ser analisado, futuramente, é se o ponto de autossimilaridade e o ponto crítico se aproximam na medida em que aumentamos o valor da razão entre as taxas de infecção r . Os resultados para o ponto de autossimilaridade para a sequência de Fibonacci devem, também, ser confrontados com o ponto crítico obtido a partir de simulação Monte Carlo. Com esta finalidade, é necessário refazer as simulações realizadas em [14] incluindo o processo de espera introduzido por [11] e discutido no capítulo 3.

Os resultados obtidos através do GRDF para a sequência de duplicação de período são mais intrigantes. Identificamos um ponto fixo indiferente, conforme mostrado na equação (2.72), para o modelo de Ising com campo transversal. Este comportamento pode ser associado ao caráter marginal de sequência de duplicação de período. Já no caso do processo de contato, observamos que não existe um ponto fixo com o tipo de autossimilaridade que propomos em nossa abordagem. Segundo o critério de Harris-Luck, a sequência de duplicação, a exemplo da sequência de Fibonacci, não deve alterar a classe de universalidade do modelo. Desta forma, imaginávamos que os pontos fixos de Fibonacci e de duplicação de período compartilhassem as mesmas características. A não

existência de um ponto de autossimilaridade para a sequência de duplicação de período poderia ser uma assinatura de um efeito distinto do caso de Fibonacci e, em consequência, não totalmente irrelevante para a classe de universalidade do processo de contato.

Investigando as propriedades do ponto de autossimilaridade da sequência de triplicação de período, observamos que este ponto é um ponto fixo de desordem forte, ou seja, a razão entre o parâmetro forte e os demais cresce com o número de processos de renormalização. Desta forma, concluimos que o método perturbativo é assintoticamente exato no ponto de autossimilaridade. O método de renormalização empregado resulta em sucessivos operadores efetivos que representam bem o espectro de menor energia do operador original considerado. No caso do modelo de Ising, obtemos boa aproximação do comportamento a temperatura nula. Analogamente, no caso do modelo de contato a aproximação é adequada para o estado estacionário. Os limites citados são aqueles para os quais os modelos em questão apresentam um ponto crítico.

No ponto fixo de desordem forte $\lambda_A/\lambda_B \rightarrow 0$, obtemos relações entre características do operador efetivo e grandezas médias dos modelos estudados. A magnetização e a densidade de sítios infectados são proporcionais ao número de sítios remanescentes após i processos de iteração,

$$m^{(i)} \sim \left(\frac{7}{9}\right)^i, \quad (4.3)$$

$$\rho^{(i)} \sim \left(\frac{7}{9}\right)^i. \quad (4.4)$$

A escala de tempo e o comprimento de correlação temporal são inversamente proporcionais ao maior parâmetro,

$$t \sim \frac{1}{\lambda_B^{(i)}}, \xi_{\parallel} \sim \frac{1}{\lambda_B^{(i)}}. \quad (4.5)$$

O maior parâmetro escala com o número de iterações i ,

$$\ln \lambda_B^{(i)} \sim 4^i. \quad (4.6)$$

O comprimento de correlação espacial é proporcional ao tamanho das ligações,

$$\xi_{\perp} \sim l_B^{(i)}, \quad (4.7)$$

e o tamanho das ligações respeita a relação de proporcionalidade,

$$l_B^{(i)} \sim 9^i. \quad (4.8)$$

Usando as relações de proporcionalidade descritas acima, podemos compilar a tabela (4.1). Nesta tabela, representamos os valores dos expoentes que caracterizam a classe de universalidade do modelo de Ising com campo transversal e do processo de contato, modulados pela sequência de triplicação de período.

.	$\lambda^*(r = 1/2)$	β	δ	Φ	$\nu_{\perp}$	$\nu_{\parallel}$
GRDF	1.10957	0.309909	0.18129	0.63093	2.70951	1.70951
Monte Carlo	1.203	0.38	0.22	0.66	2.706	1.78

Tabela 4.1: Expoentes críticos da sequência de triplicação de período obtidos através de simulação e via o GRDF. O expoente Φ é obtido usando a relação $\Phi = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$.

Apresentamos resultados de simulação Monte Carlo para o processo de contato sujeito à aperiodicidade modulada pela sequência de triplicação de período. Caracterizamos, dentro dos limites de nossa abordagem numérica, os expoentes críticos mostrados na tabela (4.1). Fomos capazes de estabelecer uma concordância razoável entre os resultados do GRDF e os resultados de simulação Monte Carlo. Discutimos as dificuldades no estudo das propriedades do sistema nas proximidades do ponto fixo ligadas ao tempo de relaxação muito grande nas vizinhanças do ponto crítico. Outra dificuldade encontrada foram as oscilações log-periódicas que aumentam a complexidade das leis de escala e dificultam o ajuste das curvas.

Na nossa opinião, a análise da criticalidade do processo de contato aperiódico através de simulação Monte Carlo é particularmente complicada quando comparada com a do processo de contato desordenado. Além da possível existência de oscilações logperiódicas, devemos considerar redes com um número de sítios da ordem de cem mil para obtermos resultados independentes do tamanho do sistema. Este fato está ligado à necessidade de construirmos sequências suficientemente grandes para observar o comportamento da sequência aperiódica infinita. No caso desordenado, é suficiente considerar, para que tenhamos o comportamento do sistema infinito, tamanhos do sistema maiores que o comprimento de correlação espacial [9]. Por outro lado, observamos alguns pontos obscuros. Encontramos na literatura trabalhos numéricos explorando o comportamento crítico sujeito a desordem, sempre partindo de distribuições de desordem binárias onde, por exemplo, a taxa de infecção pode assumir dois valores λ_A e λ_B . Tenta-se estabelecer uma conexão direta entre estes resultados e os resultados do grupo de renormalização de desordem forte obtidos para distribuição de desordem contínua. Desta forma, o papel ainda desconhecido dos aglomerados de ligações fortes é ignorado. No caso aperiódico, tratamos estes aglomerados e tornamos a comparação entre o resultado do GRDF e o numérico

mais confiável.

Prentendemos no futuro estudar a sequência de Rudin-Shapiro. Esta sequência é um exemplar de sequência relevante e tem a particularidade de possuir expoente de flutuação, $\omega_{RS} = 1/2$, idêntico ao da sequência aleatória. Seria interessante observar se a classe de universalidade pode ser identificada simplesmente em função do expoente de flutuação. Sendo esta hipótese verdadeira, observaríamos os mesmos expoentes críticos do caso desordenado. Prosseguindo na mesma linha de indagação, é possível estudar a coleção de sequências aperiódicas

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \overbrace{B \dots B}^k, \\ B &\rightarrow A. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Seguindo os mesmos passos utilizados para a sequência de Fibonacci, concluiremos que elas são autossimilares para todo k . Nosso propósito é calcular uma forma geral para os expoentes críticos usando o GRDF em função do expoente de flutuação.

No contexto das simulações de Monte Carlo, esperamos observar tempos de relaxação menores para a sequência de Rudin-Shapiro devido ao seu menor expoente de flutuação. Desta forma, podemos nos aproximar mais do ponto crítico do que no caso da sequência de triplicação de período ($\omega_{tp} = \ln 2 / \ln 3$).

A coleção de sequências autossimilares (4.9), por sua vez, não possui uma regra de inflação regular como ocorre para duplicação de período, triplicação de período e Rudin-Shapiro, indicando assim que não deverão surgir leis de escala log-periódicas. Assim sendo, acreditamos ser mais fácil caracterizar os expoentes universais com ajustes dos dados nas proximidades do ponto crítico.

Devemos também incluir uma análise de tamanho finito (finite size scaling) consistente com o comportamento de sistemas aperiódicos [13].

Observamos que os resultados de GRDF colocam o modelo de Ising com campo transversal e o processo de contato na mesma classe de universalidade. Isto sugere que um desdobramento possível, para contornar as limitações na confirmação numérica da classe de universalidade do processo de contato modulado pela sequência relevante de triplicação de período, consiste em procurar resultados numéricos junto ao modelo de Ising com campo transversal.

Referências Bibliográficas

- [1] ALCARAZ, F. C., DROZ, M., HENKEL, M., AND RITTENBERG, V. Reaction-diffusion processes, critical dynamics, and quantum chains. *Annals of Physics* 230, 2 (1994), 250 – 302.
- [2] ANDRADE, R. F. Detailed characterization of log-periodic oscillations for an aperiodic Ising model. *Phys. Rev. E* 61, 6 (2000), 7196–7199.
- [3] BROWER, R. C., FURMAN, M. A., AND MOSHE, M. Critical exponents for the Reggeon quantum spin model. *Physics Letters B* 76, 2 (1978), 213 – 219.
- [4] CAFIERO, R., GABRIELLI, A., AND MUÑOZ, M. Disordered one-dimensional contact process. *Physical Review E* 57, 5 (1998), 5060–5068.
- [5] DASGUPTA, C., AND MA, S.-K. Low-temperature properties of the random Heisenberg antiferromagnetic chain. *Physical Review B* 22, 3 (1980), 1305–1319.
- [6] DE OLIVEIRA, M. M., ALVES, S. G., FERREIRA, S. C., AND DICKMAN, R. Contact process on a Voronoi triangulation. *Phys. Rev. E* 78, 3 (2008), 031133.
- [7] DICKMAN, R. Universality and diffusion in nonequilibrium critical phenomena. *Physical Review B* 40, 10 (1989), 7005–7010.
- [8] DICKMAN, R., AND JENSEN, I. Time-dependent perturbation theory for nonequilibrium lattice models. *Physical Review Letters* 67, 17 (outubro 1991), 2391–2394.
- [9] DICKMAN, R., AND MOREIRA, A. Violation of scaling in the contact process with quenched disorder. *Physical Review E* 57, 2 (1998), 1263–1268.
- [10] ESSAM, J., DE'BELL, K., ADLER, J., AND BHATTI, F. Analysis of extended series for bond percolation on the directed square lattice. *Physical Review B* 33, 3 (1986), 1982–1986.

- [11] FALLERT, S. V., AND TARASKIN, S. N. Simulating the contact process in heterogeneous environments. *Physical Review E* 77, 051125 (2008).
- [12] FALLERT, S. V., AND TARASKIN, S. N. Scaling behavior of the disordered contact process. *Physical Review E* 79, 042105 (2009).
- [13] FARIA, M. S., BRANCO, N. S., AND TRAGTENBERG, M. H. R. Nonuniversal behavior for aperiodic interactions within a mean-field approximation. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* 77, 4 (abril 2008), 041113–6.
- [14] FARIA, M. S., RIBEIRO, D. J., AND SALINAS, S. R. Critical behavior of a contact process with aperiodic transition rates. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2008* (2008), P01022.
- [15] FISHER, D. Random antiferromagnetic quantum spin chains. *Physical Review B* 50, 6 (1994), 3799–3821.
- [16] FISHER, D. Critical behavior of random transverse-field Ising spin chains. *Physical Review B* 51, 10 (1995), 6411–6461.
- [17] FISHER, D. S. Random transverse field Ising spin chains. *Phys. Rev. Lett.* 69, 3 (1992), 534–537.
- [18] GRASSBERGER, P. On phase transitions in Schlögl’s second model. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 47, 4 (1982), 365–374.
- [19] GRASSBERGER, P., AND DE LA TORRE, A. Reggeon field theory (Schlögl’s first model) on a lattice: Monte Carlo calculations of critical behaviour. *Annals of Physics* 122, 2 (1979), 373–396.
- [20] GRIMM, U. Aperiodicity and Disorder - Does it Matter? *cond-mat*, 0010392 (outubro 2000).
- [21] HERMISSON, J., GRIMM, U., AND BAAKE, M. Aperiodic Ising quantum chains. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 30, 21 (1997).
- [22] HINRICHSSEN, H. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics* 49, 7 (2000), 815–958.
- [23] HINRICHSSEN, H. On possible experimental realizations of directed percolation. *Braz. J. Phys.* 30, 1 (2000).
- [24] HOOYBERGHS, J., IGLÓI, F., AND VANDERZANDE, C. Strong disorder fixed point in absorbing-state phase transitions. *Physical Review Letters* 90, 100601 (2003), 4.

- [25] HOOYBERGHS, J., IGLÓI, F., AND VANDERZANDE, C. Absorbing state phase transitions with quenched disorder. *Physical Review E* 69, 6 (2004), 066140.
- [26] HOYOS, J. A. Weakly disordered absorbing-state phase transitions. *Phys. Rev. E* 78, 3 (2008), 032101.
- [27] IGLÓI, F. Exact renormalization of the random transverse-field Ising spin chain in the strongly ordered and strongly disordered Griffiths phases. *Physical Review B* 65, 6 (2002), 064416.
- [28] IGLÓI, F., AND MONTHUS, C. Strong disorder RG approach of random systems. *Physics Reports* 412, 5-6 (2005), 277–431.
- [29] JANOT, C. *Quasicrystals: A primer*. Oxford University Press, 1997.
- [30] JENSEN, I. Low-density series expansions for directed percolation: I. A new efficient algorithm with applications to the square lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 32, 28 (1999), 5233–5249.
- [31] JENSEN, I., AND DICKMAN, R. Time-dependent perturbation theory for nonequilibrium lattice models. *Journal of Statistical Physics* 71, 1-2 (1993), 89–127.
- [32] LEE, S. B. Absorbing phase transition in contact process on fractal lattices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 387, 7 (2008), 1567 – 1576.
- [33] LUCK, J. M. A classification of critical phenomena on quasi-crystals and other aperiodic structures. *Europhysics Letters (EPL)* 24, 5 (1993), 359–364.
- [34] MA, S.-K., DASGUPTA, C., AND HU, C.-K. Random antiferromagnetic chain. *Physical Review Letters* 43, 19 (1979), 1434–1437.
- [35] MARQUES, M. C. Effects of dilution on the phase diagram of some nonequilibrium systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 23, 14 (1990), 3389.
- [36] MOREIRA, A., AND DICKMAN, R. Critical dynamics of the contact process with quenched disorder. *Physical review. E* 54, 4 (1996), R3090–R3093.
- [37] OLIVEIRA, M. J. Perturbative series expansion for the subcritical stationary properties of the contact process. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39, 36 (2006), 11131–11144.

- [38] SHECHTMAN, D., BLECH, I., GRATIAS, D., AND CAHN, J. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters* 53, 20 (1984), 1951–1953.
- [39] TAKEUCHI, K. A., KURODA, M., CHATÉ, H., AND SANO, M. Directed percolation criticality in turbulent liquid crystals. *Physical Review Letters* 99, 23 (2007).
- [40] TAKEUCHI, K. A., KURODA, M., CHATÉ, H., AND SANO, M. Experimental realization of directed percolation criticality in turbulent liquid crystals. *Phys. Rev. E* 80, 5 (2009), 051116.
- [41] TOMÉ, T., AND DE OLIVEIRA, M. J. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. Edusp, 2001.
- [42] VIEIRA, A. Low-Energy Properties of Aperiodic Quantum Spin Chains. *Physical Review Letters* 94, 7 (2005).
- [43] VIEIRA, A. P. Aperiodic quantum xxz chains: Renormalization-group results. *Phys. Rev. B* 71, 13 (2005).
- [44] VOJTA, T., AND DICKISON, M. Critical behavior and Griffiths effects in the disordered contact process. *Physical Review E* 72, 3 (2005).
- [45] ZHU, S.-N., ZHU, Y.-Y., QIN, Y.-Q., WANG, H.-F., GE, C.-Z., AND MING, N.-B. Experimental realization of second harmonic generation in a Fibonacci optical superlattice of LiTaO₃. *Physical Review Letters* 78, 14 (1997).